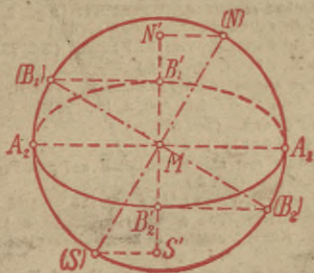


MATHEMATISCH-  
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 66

W. K R A M E R  
EINFÜHRUNG  
IN DIE DARSTELLENDEN  
GEOMETRIE

ERSTER TEIL:  
SENKRECHTE PROJEKTION AUF EINE TAFEL



VERLAG B. G. TEUBNER



LEIPZIG UND BERLIN

# Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Oberstud.-Dir. Dr. W. Lietzmann und Oberstudienrat Dr. A. Witting  
Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8.

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

## Bisher sind erschienen: (1912/26):

- Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwicklung. Von H. Wieleitner. (Bd. 50.)  
Beispiele z. Geschichte d. Mathematik. Von A. Witting u. M. Gebhardt. 2. Aufl. (Bd. 15.)  
Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen d. alt. Kulturvölker. II: Die Zahlzeichen im Mittelalter u. i. d. Neuzeit. (Bd. 1 u. 34.)  
Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchges. Aufl. (Bd. 2.)  
Wie man einstens rechnete. Von E. Fettweis. (Bd. 49.)  
Rechnen der Naturvölker. Von E. Fettweis. (Bd. 71.)  
Archimedes. Von A. Czwalina. (Bd. 64.)  
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)  
Abgekürzte Rechnung. Nebst einer Einführung in die Rechnung mit Logarithmen. Von A. Witting. (Bd. 47.)  
Interpolationsrechnung. Von B. Heyne. [In Vorber. 1926.]  
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. II: Anwendungen. (Bd. 4. u. 33.)  
Die Determinanten. Von L. Peters. (Bd. 65.)  
Mengenlehre. Von K. Grelling. (Bd. 58.)  
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differentialrechnung. II: Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41.)  
Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von K. Fladt. (Bd. 72.)  
Unendliche Reihen. Von K. Fladt. (Bd. 61.)  
Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Oanan. (Bd. 51.)  
Konforme Abbildungen. Von E. Wicke. [U. d. Pr. 1926.]  
Vektoranalysis. Von L. Peters. (Bd. 57.)  
Ebene Geometrie. Von B. Kerst. (Bd. 10.)  
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 3. Aufl. (Bd. 3.)  
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 32.)  
Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting. (Bd. 43.)  
Sphärische Trigonometrie. Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung. Von L. Baiser. (Bd. 69.)  
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. 2. Aufl. (Bd. 26.)  
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. (Bd. 31.)  
Einführung in die darstellende Geometrie. Von W. Kramer. I. Teil: Senkr. Projektion auf eine Tafel. (Bd. 56.) II. Teil: Parallelprojektion. Allgemeine Parallelprojektion. (Bd. 57.)

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

For

ite

Verlag von

und Berlin



10000296008

*No 83a*

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE  
BIBLIOTHEK

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

66

EINFÜHRUNG  
IN DIE DARSTELLENDEN  
GEOMETRIE

VON

DR. WERNER KRAMER

*melh*  
*Ka*

I. TEIL

SENKRECHTE PROJEKTION AUF EINE TAFEL

MIT 71 FIGUREN IM TEXT



Höhere Mädchenschule  
der  
A. Schulschwester von  
U. L. F.  
Habelschwerdt.

1926

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

*Wx/27*



KD 515(023)



I 301648

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

~~I 386~~

ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Akc. Nr.

~~386~~ 149

BPK-B-128/2017



## VORWORT

Im vorliegenden Bändchen soll eine erste Einführung in die Methode der senkrechten Projektion gegeben werden. Für diesen Zweck ist außerordentlich geeignet das besonders von G. Scheffers<sup>1)</sup> entwickelte Eintafelverfahren mit Höhenmaßstab, welches im folgenden so weit ausgebaut worden ist, daß der Leser, der das Bändchen durchgearbeitet hat, in der Lage sein wird, angewandte Aufgaben, z. B. aus der Technik, der mathematischen Erd- und Himmelskunde, der Geländedarstellung<sup>2)</sup>, deren Behandlung aus Raummangel nicht möglich war, selbständig zu lösen. Die Einführung des Seitenrisses als Hilfsebene im letzten Abschnitt bereitet den Übergang zum Grund- und Aufrißverfahren und damit zu dem bald folgenden II. Teile vor, der auch das Wichtigste aus der allgemeinen Parallelprojektion und der Perspektive bringen wird.

Der Stoff wurde soweit als irgend möglich in Form von Aufgaben behandelt. Auf diese Weise ließ sich der beschränkte Raum am besten ausnutzen, und der Leser wird von vornherein zu eigener Tätigkeit am Reißbrett angeregt, die ihn erfahrungsgemäß allein zu wirklicher Beherrschung der darstellenden Geometrie führt.

Berlin-Friedenau, April 1926.

**Werner Kramer.**

---

1) G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie in zwei Bänden. 1. Band. 2. Auflage. Berlin 1922.

2) R. Rothe, Darstellende Geometrie des Geländes. 2. Auflage. Leipzig und Berlin 1919. (Math.-phys. Bibliothek 35/36.)

# I N H A L T

	Seite
<b>1. Abschnitt: Punkt, Gerade, Ebene . . . . .</b>	<b>5</b>
1. Aufgabe der darstellenden Geometrie . . . . .	5
2. Darstellung des Punktes . . . . .	5
3. Darstellung der Geraden . . . . .	6
4. Darstellung der Ebene . . . . .	9
5. Schnitt von Gerade und Ebene . . . . .	11
6. Höhenlinien der Ebene . . . . .	12
7. Schnitt zweier Ebenen . . . . .	14
8. Projektion des rechten Winkels . . . . .	16
9. Falllinien und Neigungswinkel einer Ebene . . . . .	17
10. Lote auf Ebenen . . . . .	18
11. Bestimmung der wahren Gestalt ebener Figuren . . . . .	20
12. Projektionen ebener Figuren von gegebener Gestalt . . . . .	22
<b>2. Abschnitt: Kreis, gerader Kreiszyylinder u. Kreiskegel, Kugel</b>	<b>23</b>
13. Senkrechte Projektion des Kreises . . . . .	23
14. Bestimmung einzelner Punkte der Ellipse . . . . .	24
15. Die Ellipse als Schnitt des Kreiszyinders . . . . .	26
16. Tangenten der Ellipse . . . . .	27
17. Krümmungskreise für die Scheitel der Ellipse . . . . .	29
18. Zeichnung der Ellipse . . . . .	31
19. Grundaufgaben über den Kreis . . . . .	32
20. Der gerade Kreiszyylinder und Kreiskegel . . . . .	33
21. Projektion der Kugel . . . . .	37
22. Großkreise der Kugel . . . . .	38
23. Beliebige Kreise auf der Kugel . . . . .	40
24. Tangentialebene und Tangenten der Kugel . . . . .	42
<b>3. Abschnitt: Der Seitenriß als Hilfsebene . . . . .</b>	<b>43</b>
25. Seitenrisse . . . . .	43
26. Aufgaben über Geraden und Ebenen . . . . .	44
27. Aufgaben über krumme Gebilde . . . . .	47

# ERSTER ABSCHNITT

## PUNKT, GERADE, EBENE

**1. Aufgabe der darstellenden Geometrie.** Die darstellende Geometrie entwickelt Verfahren zur Darstellung *räumlicher* Gebilde auf dem *ebenen* Zeichenblatte. Von den Bildern wird gefordert, daß sich aus ihnen Form, Maße und räumliche Lage des abgebildeten Gegenstandes entnehmen lassen. Weiter lehrt die darstellende Geometrie, wie Aufgaben aus der *Geometrie des Raumes* zeichnerisch in der *Ebene* gelöst werden können.

**2. Darstellung des Punktes.** Das Bild eines Gegenstandes können wir uns in der Weise hergestellt denken, daß wir die Bilder aller seiner Punkte ermitteln. Wir bestimmen deshalb zunächst das Bild eines Punktes und benutzen dazu die *senkrechte Projektion auf eine Ebene*. Ist  $A$  irgendein Punkt des Raumes, so wird von ihm das Lot auf die Ebene des Zeichenblattes gefällt. Der Fußpunkt  $A'$  des Lotes ist die *senkrechte Projektion* oder das *Bild* von  $A$ . Das Lot heißt der *Projektionsstrahl* oder der *projizierende Strahl* von  $A$ , die Ebene des Zeichenblattes die *Projektionsebene*, die *Zeichenebene* oder auch kurz die *Tafel*. Jedem Raumpunkt  $A$  wird so ein Punkt  $A'$  der Tafel als Bildpunkt zugeordnet. Ist umgekehrt in der Tafel der Bildpunkt  $A'$  gegeben, so liegt der zugehörige Punkt  $A$  des Raumes auf dem Lot zur Tafel in  $A'$ , und zwar haben alle Punkte dieses Lotes dasselbe Bild  $A'$ . Die Angabe der Projektion  $A'$  allein reicht also *nicht* hin, um den Raumpunkt  $A$  *eindeutig* festzulegen. Deshalb wird noch die Höhe von  $A$  über der Tafel bzw. seine Tiefe unter der Tafel auf einem *Höhenmaßstab*, der mit einer Nullmarke  $O$  versehen ist, vermerkt. Wir zeichnen den Maßstab parallel zu den seitlichen Rändern des Zeichenblattes und tragen von  $O$  aus nach oben die Höhen, von  $O$  aus nach unten die Tiefen ab. Die Endpunkte dieser Strecken erhalten dieselbe Bezeichnung wie



der Raumpunkt selbst. In Fig. 1 liegt  $A$  über,  $B$  unter der Tafel. Der Punkt  $C$  liegt in der Tafel; er fällt mit seiner Projektion zusammen, die deshalb mit  $C$  statt mit  $C'$  bezeichnet ist.

Danach folgt: *Ein Punkt  $A$  des Raumes ist vollständig bestimmt durch seine senkrechte Projektion  $A'$  und seinen Abstand  $OA$  von der Tafel. Einen Punkt  $A$  geben oder bestimmen heißt, sein Bild  $A'$  und seinen Abstand  $OA$  am Maßstab geben bzw. bestimmen.*

Fig. 1.

**3. Darstellung der Geraden.** Die projizierenden Strahlen aller Punkte einer Geraden  $g$  liegen in der zur Tafel lotrechten Ebene durch  $g$ , der *projizierenden Ebene* der Geraden. Die Schnittgerade  $g'$  der projizierenden Ebene von  $g$  mit der Tafel ist die senkrechte Projektion oder das Bild der Geraden  $g$ . Das Bild einer Geraden  $g$  ist danach im allgemeinen eine Gerade  $g'$ ; nur wenn die Gerade  $g$  zur Tafel senkrecht steht, ist ihr Bild ein Punkt. Parallele Geraden haben parallele projizierende Ebenen, also auch parallele Projektionen. Der Schnittpunkt einer Geraden mit der Tafel heißt ihr *Spurpunkt*, der Winkel zwischen einer Geraden und ihrer Projektion ihr *Neigungswinkel* gegen die Tafel.

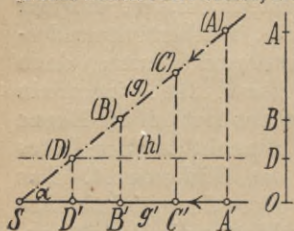


Fig. 2.

Eine Gerade  $g$  ist durch zwei ihrer Punkte bestimmt, wir können  $g$  also durch zwei Punkte geben (Fig. 2). Das Bild  $g'$  der durch  $A$  und  $B$  gegebenen Geraden  $g$  ist die Gerade  $A'B'$ . Die Strecke  $A'B'$  ist die senkrechte Projektion der Strecke  $AB$ .

Zur *Bestimmung der wahren Länge der Strecke  $AB$*  betrachten wir das Trapez  $A'B'BA$ , dessen Ebene zur Tafel senkrecht steht, dessen Grundseiten die Lote  $A'A$  und  $B'B$  und dessen Schenkel die Strecke  $AB$  und ihre Projektion  $A'B'$  sind. Dieses Trapez wird um den Schenkel  $A'B'$  in die Tafel umgelegt. Dabei geht es in das Trapez  $A'(A)B'(B)A'$  über, dessen Grundseiten  $A'(A)$  und  $B'(B)$  zu  $A'B'$  senkrecht und gleich den Höhen  $OA$  und  $OB$  von  $A$  und  $B$  sind. Der Schenkel  $A'(A)B'(B)$  ist gleich der wahren Länge der Strecke  $AB$ .

Die Ebene des Trapezes  $A' B' B A$  ist die projizierende Ebene der Geraden  $AB$ , die längs  $A' B'$  auf der Tafel aufsteht. Statt von der Umlegung des Trapezes zu sprechen, können wir also auch sagen, die projizierende Ebene der Geraden  $AB$  wird um  $A' B'$  in die Tafel umgelegt. Derartige *Umlegungen von projizierenden Ebenen* sind ein wichtiges Hilfsmittel bei den Konstruktionen, die uns im folgenden beschäftigen sollen. Wir wollen deshalb Punkte und Geraden nach der Umlegung einheitlich durch Einklammern ihrer Benennungen kennzeichnen. So bedeutet  $(g)$ ,  $\{g\}$  oder  $[g]$  die Gerade, in die eine Gerade  $g$  durch Umlegung ihrer projizierenden Ebene übergeht. Entsprechend sind  $(P)$ ,  $\{P\}$  und  $[P]$  die Umlegungen eines Raumpunktes  $P$ .

Ist  $C'$  die Projektion eines Punktes  $C$  der Geraden  $AB$ , so ist seine Höhe gleich der Strecke  $C' (C)$  auf dem Lote in  $C'$  zu  $A' B'$ , die zwischen der Projektion  $g'$  der Geraden und deren Umlegung  $(g)$  liegt.

Wird von einem Punkte  $D$  der Geraden  $g$  die Höhe  $OD$  gegeben, so läßt sich seine Projektion  $D'$  auf  $g'$  aus der Umlegung ermitteln. Alle Punkte der projizierenden Ebene von  $g$ , welche die Höhe  $OD$  über der Tafel haben, liegen auf der Parallelen  $h$  zu  $g'$  im Abstände  $OD$ , die nach der Umlegung als die Parallele  $(h)$  zu  $g'$  im Abstände  $OD$  gezeichnet werden kann.  $(h)$  trifft  $(g)$  im Punkte  $(D)$ , der Umlegung von  $D$ . Der Fußpunkt des Lotes von  $(D)$  auf  $g'$  ist die gesuchte Projektion  $D'$ .

Bei der Bewegung, die eine Gerade  $g$  während der Umlegung ausführt, bleibt ihr Schnittpunkt mit der Tafel, d. h. ihr Spurpunkt, in Ruhe. Der Spurpunkt ist ein gemeinsamer Punkt der drei Geraden  $g$ ,  $g'$  und  $(g)$  und kann als Schnitt von  $(g)$  mit  $g'$  bestimmt werden.

Aus Fig. 2 folgt

$$\overline{A' C'} : \overline{C' B'} = \overline{(A) (C)} : \overline{(C) (B)} = \overline{AC} : \overline{CB}.$$

Demnach bleibt das *Teilungsverhältnis* einer Strecke bei der senkrechten Projektion *ungeändert*. Insbesondere ist das Bild des Mittelpunktes einer Strecke der Mittelpunkt der Projektion der Strecke.

Der Winkel zwischen  $g'$  und  $(g)$  ist gleich dem Winkel



zwischen  $g'$  und  $g$ , also gleich dem Neigungswinkel  $\alpha$  der Geraden gegen die Tafel. Wird der Spurpunkt mit  $S$  bezeichnet, so ist

$$\cos \alpha = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Das Verhältnis der Projektion einer Strecke zur wahren Strecke ist gleich dem Kosinus des Neigungswinkels der Strecke. Liegt eine Strecke  $AB$  zur Tafel parallel, so ist die Projektion  $A'B'$  ebenso lang wie die Strecke  $AB$ . In Fig. 2 nehmen die Höhen der Punkte der Geraden  $g$  in Richtung von  $A$  und  $B$  ab. Diese Richtung heißt die *Fallrichtung* der Geraden; sie ist durch den Pfeil gekennzeichnet.

**Aufgabe 1:** Den Neigungswinkel und den Spurpunkt einer Geraden  $AB$  zu ermitteln, wenn  $A$  oberhalb,  $B$  unterhalb der Tafel liegt.

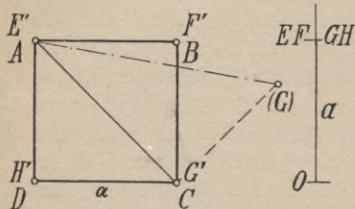


Fig. 3.

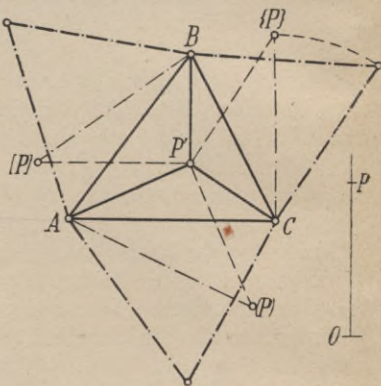


Fig. 4.

**Aufgabe 2:** Eine Gerade ist durch ihre Projektion  $g'$ , ihren Spurpunkt  $S$  auf  $g'$ , ihren Neigungswinkel  $\alpha$  und ihre Fallrichtung gegeben. Auf  $g'$  wird ein Punkt  $P'$  gewählt. Wie hoch liegt der Punkt  $P$  auf  $g$ ?

**Aufgabe 3:** Die Projektion eines auf der Tafel stehenden Würfels von der Kantenlänge  $a$  — eines auf der Tafel stehenden Quaders mit den Kantenlängen  $a, b, c$  — soll gezeichnet und die Länge der Raumdiagonalen bestimmt werden. (Fig. 3.)

**Aufgabe 4:** Eine dreiseitige Pyramide steht mit ihrer Grundfläche  $ABC$  auf der Tafel. Ihre Spitze  $P$  ist durch die Projektion  $P'$  und die Höhe  $OP$  gegeben. Das Netz der Pyramide zu zeichnen. (Fig. 4.)

**Anleitung:** Aus den Umlegungen der rechtwinkligen Dreiecke  $APP'$ ,  $BPP'$  und  $CPP'$  um  $AP'$ ,  $BP'$  und  $CP'$  sind die Längen der Kanten  $AP$ ,  $BP$  und  $CP$  als die Hypotenusen  $A(P)$ ,  $B(P)$  und  $C(P)$  zu entnehmen. Damit sind alle Kanten der Pyramide bekannt und das Netz kann gezeichnet werden.



Aufgabe 5: In Fig. 5 ist die senkrechte Projektion eines ebenflächigen Körpers gezeichnet. Die Höhen der nicht in der Tafel gelegenen Eckpunkte sind am Maßstabe gegeben. Man mache sich die Gestalt des Körpers deutlich und zeichne sein Netz.

4. Darstellung der Ebene. Die Projektionen der Punkte einer nicht senkrecht zur Tafel gelegenen Ebene füllen

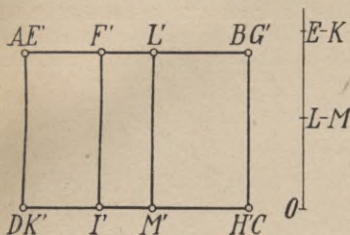


Fig. 5.

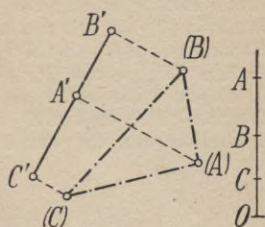
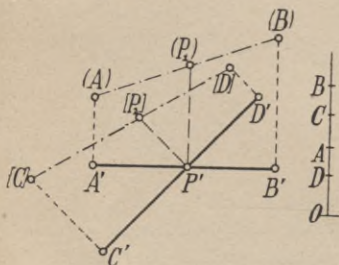
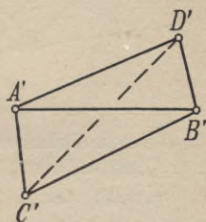


Fig. 6.



a.

Fig. 7.



b.

die ganze Tafel aus. Wir können daher nur einen Teil der unbegrenzten Ebene im Bild darstellen. Da eine Ebene durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmt ist, so werden wir sie im allgemeinen durch ein Dreieck geben. Steht eine Ebene zur Tafel senkrecht, so ist ihre Projektion eine Gerade.

Aufgabe 6: Drei Punkte  $A, B, C$ , deren Projektionen  $A', B', C'$  in einer Geraden liegen, sind gegeben. Die Gestalt des Dreiecks  $ABC$  ist zu bestimmen. (Fig. 6.)

Lösung: Die Ebene des Dreiecks  $ABC$  ist die projizierende Ebene der drei Geraden  $AB, BC$  und  $CA$ . Diese Ebene wird um die Gerade  $A'B'C'$  in die Tafel umgelegt. Dann ist das Dreieck  $(A)(B)(C)$  dem Dreieck  $ABC$  kongruent.

Da drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, eine Ebene bestimmen, werden vier durch Projektion und

Höhe willkürlich gegebene Punkte im allgemeinen nicht mehr in einer Ebene liegen, sondern die Ecken eines Vierflachs bilden.

Aufgabe 7: Vier Punkte  $A, B, C, D$  sind gegeben. Zu untersuchen, ob diese Punkte in einer Ebene liegen. (Fig. 7a.)

Lösung: Die Projektionen  $A'B'$  und  $C'D'$  schneiden sich in einem Punkte  $P'$ , der das Bild eines Punktes  $P_1$  auf  $AB$  und eines Punktes  $P_2$  auf  $CD$  ist. Aus den Umlegungen der projizierenden Ebenen von  $AB$  und  $CD$  ergibt sich die Höhe  $P'(P_1)$  von  $P_1$  und die Höhe  $P'[P_2]$  von  $P_2$ .  $P_1$  liegt also in diesem Falle höher als  $P_2$ . Die Geraden  $AB$  und  $CD$  schneiden sich nicht und die vier Punkte  $A,$

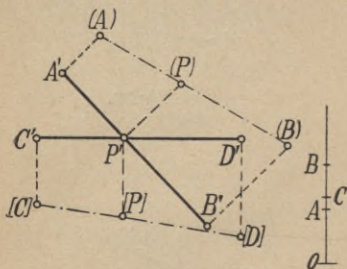


Fig. 8.

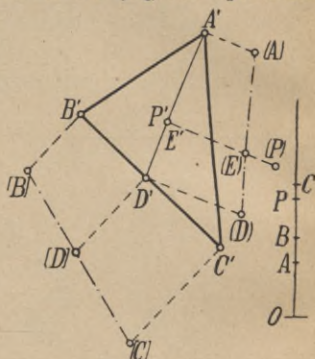


Fig. 9.

$B, C, D$  liegen demnach nicht in einer Ebene.

Der Schnittpunkt  $P'$  zweier Projektionen  $g'_1$  und  $g'_2$ , dem wie in Aufg. 7 kein Schnittpunkt der Geraden  $g_1$  und  $g_2$  entspricht, heißt eine *Deckstelle*, weil von oben betrachtet die eine Gerade hier die andere verdeckt. In Fig. 7b ist das Vierflach  $ABCD$  aus Fig. 7a noch einmal gezeichnet; die unsichtbare Kante  $CD$  ist durch die Art des Ausziehens kenntlich gemacht.

Aufgabe 8: Von vier Punkten  $A, B, C, D$  einer Ebene sind die Projektionen  $A', B', C', D'$  und von den drei Punkten  $A, B, C$  auch die Höhen gegeben. Wie hoch liegt  $D$ ? (Fig. 8.)

Lösung: Die Geraden  $AB$  und  $CD$  schneiden sich in einem Punkte  $P$ , dessen Bild  $P'$  der Schnittpunkt der Projektionen  $A'B'$  und  $C'D'$  ist. Die Höhe von  $P$  wird durch Umlegung der projizierenden Ebene von  $AB$  gefunden. Dann sind von der Geraden  $CD$  zwei Punkte  $C$  und  $P$  bestimmt. Aus der Umlegung der projizierenden Ebene von  $CP$  wird die Höhe von  $D$  als die Strecke  $D'[D]$  entnommen.

Aufgabe 9: Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  und ein Punkt  $P$ , dessen Bild  $P'$  im Innern der Projektion  $A'B'C'$  des Dreiecks liegt. Zu entscheiden, ob  $P$  von oben gesehen sichtbar ist oder ob er durch das Dreieck verdeckt wird. (Fig. 9.)

Lösung: Auf dem Projektionsstrahl  $PP'$  liegt außer  $P$  ein Punkt  $E$  des Dreiecks, dessen Bild  $E'$  mit  $P'$  zusammenfällt. Zu entscheiden ist, welcher von den Punkten  $P$  und  $E$  die größere Höhe über der Tafel hat. Wir ziehen die Gerade  $AE$ , die  $BC$  in  $D$  trifft. Die beiden Punkte  $P$  und  $E$  liegen in der projizierenden Ebene von  $AD$ . Aus der Umlegung dieser Ebene ist zu ersehen, daß hier  $P$  höher als  $E$  liegt und demnach vom Dreieck nicht verdeckt wird.

Die Aufgaben 7 bis 9 zeigen, daß die Ecken eines ebenen Vieleckes nicht willkürlich durch Projektion und Höhe gegeben werden dürfen. Wohl kann man die Projektionen aller Eckpunkte beliebig wählen, darf dann aber nur noch für drei Eckpunkte auch die Höhen vorschreiben. Die

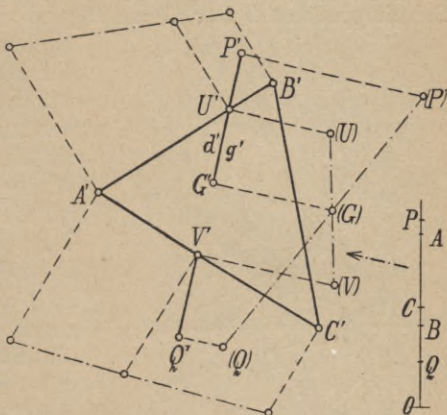


Fig. 10.

Höhen der übrigen Ecken sind dadurch bereits bestimmt.

Aufgabe 10: Von einem ebenen Fünfeck wird die Projektion gegeben und für drei Ecken werden die Höhen am Maßstab vorgeschrieben. Wie hoch liegen die beiden andern Ecken des Fünfecks?

**5. Schnitt von Gerade und Ebene.** Eine Ebene wird von einer Geraden  $g$ , die nicht zu ihr parallel ist, in einem Punkte  $G$  geschnitten, zu dessen Bestimmung man durch die Gerade  $g$  eine im allgemeinen beliebig gelegene Hilfsebene  $\mathfrak{E}$  legt, die die gegebene Ebene in der Geraden  $d$  treffe. Die beiden Geraden  $g$  und  $d$  schneiden sich im gesuchten Punkte  $G$ .

In Fig. 10 ist eine Ebene durch das Dreieck  $ABC$  gegeben, dazu eine Gerade  $g$  durch die Punkte  $P$  und  $Q$ . Besonders einfach gestaltet sich die Bestimmung des Schnittpunktes  $G$ , wenn wir als Hilfsebene  $\mathfrak{E}$  die projizierende Ebene der Geraden  $g$  wählen. Sie trifft die Ebene  $ABC$  in einer Geraden  $d$ , deren Projektion  $d'$  mit  $g'$  zusammenfällt. Die Gerade  $d$  schneidet die Dreiecksseiten  $AB$  und  $AC$  in



den Punkten  $U$  und  $V$ , deren Höhen aus den Umlegungen der projizierenden Ebenen von  $AB$  und  $AC$  ermittelt werden. Wird die projizierende Ebene von  $g$  und  $d$  in die Tafel umgelegt, so geht  $g$  in  $(P)(Q)$  und  $d$  in  $(U)(V)$  über.  $(P)(Q)$  und  $(U)(V)$  schneiden sich in  $(G)$ . Der Fußpunkt des Lotes von  $(G)$  auf  $g'$  ist das Bild  $G'$  des Schnittpunktes  $G$  der Geraden  $g$  mit dem Dreieck  $ABC$ ;

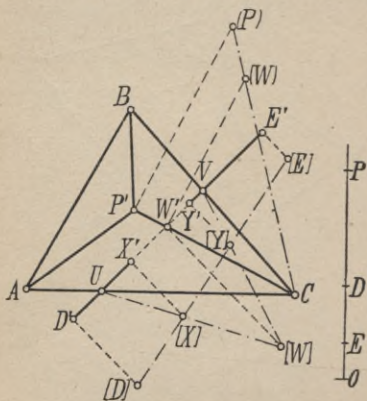


Fig. 11.

die Strecke  $G'V$  ( $G'$ ) ist gleich der Höhe von  $G$ . Denken wir uns das Dreieck  $ABC$  undurchsichtig, so wird ein Stück der Geraden  $g$  verdeckt. In der Umlegung ist die Blickrichtung, die der Projektionsrichtung entspricht, durch einen zu  $g'$  senkrechten Pfeil angegeben. Man sieht, daß die Strecke  $G'V$  und damit auch das Dreieck  $ABC$  ein Stück der Geraden  $g$  verdeckt. Dies ist durch Aussetzen der Geraden  $g'$  beim Ausziehen kenntlich gemacht.

**Aufgabe 11:** Wie in Aufgabe 4 ist eine Pyramide gegeben und die Gerade  $DE$ . Wo schneidet die Gerade die Pyramide? (Fig. 11.)

**Lösung:** Die projizierende Ebene von  $DE$  schneidet die Pyramide im Dreieck  $UVW$ . Die Ecken  $U$  und  $V$  liegen in der Tafel. Die Höhe von  $W$  wird mittels der Umlegung der projizierenden Ebene von  $AP$  als die Strecke  $W'(W)$  bestimmt. Danach findet man die Umlegungen der Schnittpunkte  $X$  und  $Y$  von  $DE$  mit der Pyramide in der Umlegung der projizierenden Ebene von  $DE$  als die Schnittpunkte  $[X]$ ,  $[Y]$  von  $[D][E]$  mit  $U[W]$  und  $V[W]$ . Die Projektionen  $X'$  und  $Y'$  liegen in den Fußpunkten der Lote von  $[X]$  und  $[Y]$  auf  $D'E'$ ; die Höhen von  $X$  und  $Y$  lassen sich aus der letzten Umlegung entnehmen.

**Aufgabe 12:** Ein beliebiges Vierflach wird durch die Projektionen und die Höhen seiner vier Ecken gegeben, dazu eine Gerade durch die Projektionen und die Höhen zweier Punkte. Festzustellen ist, ob und gegebenenfalls in welchen Punkten die Gerade das Vierflach trifft.

**6. Höhenlinien der Ebene.** Alle Punkte, welche die gleiche Höhe über der Tafel haben, liegen in einer zur Tafel parallelen Ebene, einer *Höhenebene*. Die in einer

Höhenebene gelegenen Linien heißen *Höhenlinien*. Die *Höhenlinien einer Ebene* sind parallele Geraden, nämlich die Schnittgeraden der Ebene mit den zueinander parallelen Höhenebenen. Nach Nr. 3 sind auch die Projektionen der Höhenlinien einer Ebene zueinander parallel. Die Höhenebene von der Höhe Null ist die Tafel selbst. Die Schnittgerade einer Ebene mit der Tafel heißt die *Spurgerade* der Ebene; sie ist zu den Höhenlinien der Ebene parallel.

**Aufgabe 13:** Eine Ebene ist durch das Dreieck  $ABC$  gegeben. Die Höhenlinie der Ebene in der Höhe  $OH$  soll gezeichnet werden.

(Fig. 12.)

**Lösung:** Auf den Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  des Dreiecks werden mit Hilfe der Umlagen die Punkte  $U$ ,  $V$  und  $W$  von der

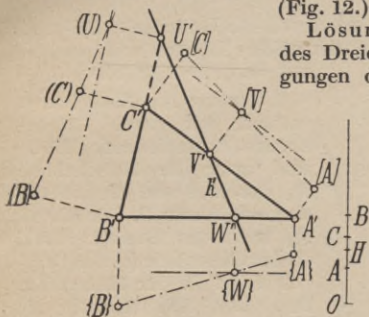


Fig. 12.

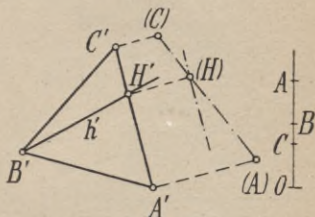


Fig. 13.

Höhe  $OH$  ermittelt und miteinander verbunden. Die drei Punkte  $U$ ,  $V$ ,  $W$  liegen in einer Geraden.

Vielfach kommt es nur darauf an, die Richtung der Höhenlinien einer Ebene zu bestimmen. Dazu ist es am bequemsten, die Höhenlinie durch den Eckpunkt des Dreiecks, durch das die Ebene gegeben wird, zu legen, dessen Höhe zwischen den Höhen der beiden andern Eckpunkte liegt. In Fig. 13 ist dies die Höhenlinie  $h$  durch die Ecke  $B$ . Um sie zu zeichnen, wird auf der Seite  $AC$  der Punkt  $H$  ermittelt, der die gleiche Höhe wie  $B$  hat, und mit  $B$  verbunden.

**Aufgabe 14:** Ein Dreieck soll durch Höhenlinien in gleichen Höhenunterschieden geschrafft werden.

**Aufgabe 15:** Die Spurgerade einer durch ein Dreieck  $ABC$  gegebenen Ebene zu bestimmen.

**Lösung** wie in Aufgabe 13, wobei die dort gegebene Höhe  $OH$  gleich Null zu nehmen ist. Man hat also die Spurpunkte der drei Seiten des Dreiecks zu bestimmen; sie liegen auf der Spurgeraden der Dreiecksebene.



**7. Schnitt zweier Ebenen.** Zwei Ebenen, die nicht parallel zueinander sind, schneiden sich in einer Geraden. Um diese Schnittgerade zu bestimmen, werden beide Ebenen zunächst mit einer Hilfsebene  $\mathfrak{E}_1$ , die im allgemeinen beliebig gewählt werden kann, geschnitten. Die beiden Geraden  $h_1$  und  $h_I$  in denen  $\mathfrak{E}_1$  die gegebenen Ebenen trifft, schneiden sich in einem Punkte  $H_1$ , der ein Punkt der gesuchten Schnittgeraden  $s$  ist. Mittels einer zweiten Hilfsebene  $\mathfrak{E}_2$  wird ein zweiter Punkt  $H_2$  von  $s$  ermittelt. Die Verbindungsgerade  $H_1H_2$  ist dann die Schnittgerade  $s$  der beiden gegebenen Ebenen.

**Aufgabe 16:** Zwei Ebenen sind durch die Dreiecke  $ABC$  und  $PQR$  gegeben. Die Schnittgerade der beiden Ebenen soll gezeichnet werden. (Fig. 14.)

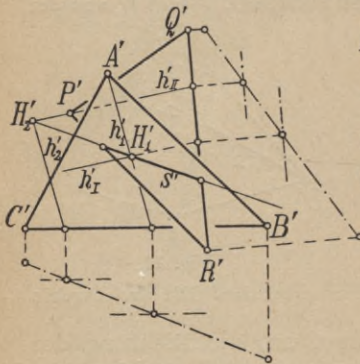


Fig. 14.

**Lösung:** Als Hilfsebenen wählen wir zwei Höhenebenen verschiedener Höhe und zwar die Höhenebene  $\mathfrak{H}_1$  durch  $A$  und die Höhenebene  $\mathfrak{H}_2$  durch  $P$ . Die Ebene  $\mathfrak{H}_1$  trifft das Dreieck  $ABC$  in der Höhenlinie  $h_1$ , das Dreieck  $PQR$  in der Höhenlinie  $h_I$ . Der Schnittpunkt  $H_1$  von  $h_1$  und  $h_I$  ist ein Punkt der Schnittgeraden  $s$  der beiden Dreiecksebenen. Die Ebene  $\mathfrak{H}_2$  schneidet die Ebenen  $ABC$  und  $PQR$  in den Höhenlinien  $h_2$  und  $h_{II}$ , die sich im Punkte  $H_2$  treffen.

Die Gerade  $H_1H_2$  ist die gesuchte Schnittgerade  $s$  der beiden Dreiecksebenen. Als Schnittgerade der beiden Dreiecke hat  $s$  nur soweit Bedeutung, als die Gerade innerhalb beider Dreiecke verläuft, also nur zwischen  $RP$  und  $RQ$ . Sind die beiden Dreiecke undurchsichtig, so werden sie sich zum Teil gegenseitig verdecken. Um zu entscheiden, was beim Anblick in der Projektionsrichtung sichtbar ist, untersuchen wir eine Deckstelle, z. B. die von  $BC$  und  $QR$ . Wie aus den Umlegungen hervorgeht, liegt hier  $QR$  höher als  $BC$  und demnach auch höher als das Dreieck  $ABC$ . Die Seite  $QR$  ist an dieser Deckstelle sichtbar und bleibt es, bis sie in ihrem Schnittpunkt mit  $s$  das Dreieck  $ABC$  durchstößt; jenseits der Seite  $AB$  kommt sie dann wieder zum Vorschein. Verfolgt man den Umfang des Dreiecks  $PQR$  weitr, so läßt sich die Sichtbarkeit vollständig feststellen. Das Ergebnis ist in Fig. 14 angegeben.

Werden die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $PQR$  wie in Fig. 14 angenommen, so durchstößt das Dreieck  $PQR$  das Dreieck  $ABC$ .



Bei anderer Lage der Dreiecke (Fig. 15a) kann der Fall eintreten, daß sie sich nur anschnneiden. Den Übergangsfall, in dem sich die Seiten  $AB$  und  $QR$  schneiden, zeigt Fig. 15b.

Aufgabe 17: Ein Prisma soll mit einer Ebene geschnitten werden. (Fig. 16.)

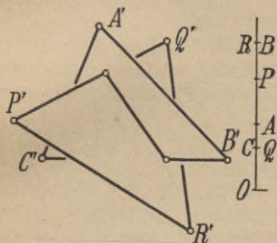


Fig. 15 a.

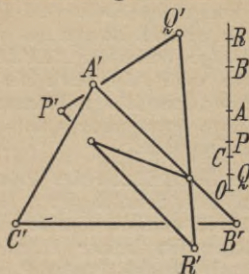


Fig. 15 b.

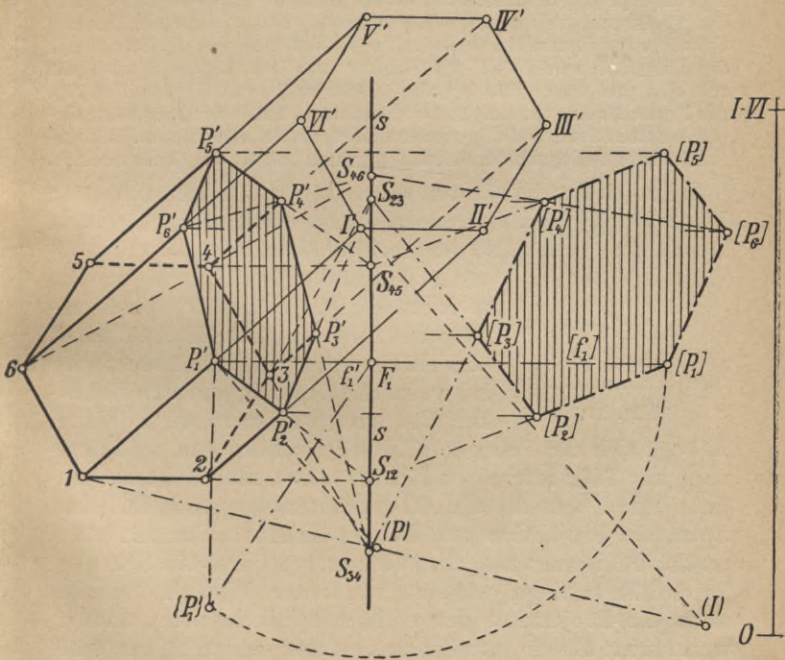


Fig. 16.

**Lösung:** Das Prisma stehe mit der einen Grundfläche, die als das regelmäßige Sechseck  $123456$  angenommen werde, auf der Tafel. Die Richtung seiner sechs zueinander parallelen Seitenkanten werde beliebig gewählt. Oben wird das Prisma durch das zu dem ersten kongruente Sechseck  $I II III IV V VI$  begrenzt, dessen Ebene zur Tafel parallel ist und das also im Bilde in wahrer Gestalt als das regelmäßige Sechseck  $I' II' III' IV' V' VI'$  erscheint. Am Höhenmaßstab wird schließlich die Höhe der Eckpunkte  $I—VI$  vorgeschrieben; dann ist das Prisma vollständig bestimmt. Die Ebene sei durch ihre Spurgerade  $s$  und den Punkt  $P_1$  auf der Kante  $II$  des Prismas gegeben.

Jede Seitenfläche des Prismas wird mit der gegebenen Ebene einzeln zum Schnitt gebracht, zunächst die Fläche  $12 III$ . Die Spur  $12$  dieser Seitenfläche trifft  $s$  in  $S_{12}$ . Damit ist ein Punkt der Schnittgeraden beider Ebenen gefunden, außerdem muß diese Schnittgerade den Punkt  $P_1$  enthalten, fällt also mit der Geraden  $P_1 S_{12}$  zusammen, die die Kante  $2 II$  des Prismas in  $P_2$  trifft. In  $P_1 P_2$  ist die erste Seite der gesuchten Schnittfigur gefunden. In entsprechender Weise lassen sich weitere Ecken dieser Schnittfigur  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$  bestimmen. Nur für die Ecke  $P_6$  versagt in Fig. 16 das Verfahren, weil die Schnittpunkte  $S_{16}$  und  $S_{56}$  der bezüglichen Spuren mit  $s$  unerreichbar sind. Zur Ermittlung von  $P_6$  ist deshalb die Diagonalebene  $64 IV VI$  benutzt worden. Die Spur  $46$  trifft  $s$  in  $S_{46}$ , und  $P_6$  ergibt sich als Schnittpunkt von  $6 VI$  mit  $S_{46} P_4$ . Als Probe für die Genauigkeit beachte man, daß je zwei gegenüberliegende Seiten der Schnittfigur zueinander parallel sein müssen. Die eingezeichnete Umlegung der Schnittfigur wird in Aufgabe 23 besprochen.

**8. Projektion des rechten Winkels.** Das Bild eines rechten Winkels ist im allgemeinen nicht wieder ein Rechter. Denkt man sich z. B. den rechten Winkel  $ACB$  (Fig. 17)

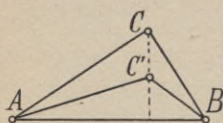


Fig. 17.

um  $AB$  aus der Tafel herausgedreht, so rückt die Projektion  $C'$  von  $C$  näher an  $AB$  heran. Das Bild  $AC'B$  ist also ein stumpfer Winkel. Anders wird es, wenn die Drehung um den Schenkel  $CA$  vorgenommen wird. Dabei bewegt sich der Schenkel  $CB$  in der zu  $AC$  in  $C$  und demnach zur Tafel lotrechten Ebene. Diese Ebene ist die projizierende Ebene des um  $AC$  gedrehten Schenkels  $BC$ . Ihre Spur, die Projektion von  $BC$ , ist zu  $AC$  senkrecht. Also ist das Bild eines rechten Winkels, von dem ein Schenkel in der Tafel liegt, wieder ein rechter Winkel. Da sich aber die Projektion des rechten Winkels nicht ändert, wenn seine Ebene parallel zu sich und senkrecht zur Tafel verschoben wird, so ergibt sich der Satz:



Die senkrechte Projektion eines rechten Winkels ist wieder ein rechter Winkel, wenn ein Schenkel zur Tafel parallel ist.

**9. Falllinien und Neigungswinkel einer Ebene.** Die zu den Höhenlinien lotrechten Geraden einer Ebene heißen *Falllinien*. Nach Nr. 8 sind die Projektionen der Falllinien senkrecht zu den Projektionen der Höhenlinien. Das von je zwei Höhenlinien und Falllinien begrenzte rechteckige Stück einer Ebene erscheint auch im Bild als Rechteck.

Als Winkel zweier Ebenen wird in der Raumlehre der Winkel zwischen den Schnittgeraden der beiden Ebenen mit einer zu beiden Ebenen lotrechten Ebene definiert. Da die projizierende Ebene der Falllinie  $f$  einer Ebene zu dieser und zur Tafel lotrecht ist, so ist der Winkel, den  $f$  mit der Projektion  $f'$  bildet, der Winkel zwischen der betreffenden Ebene und der Tafel; er heißt der Neigungswinkel der Ebene. *Der Neigungswinkel einer Ebene ist also gleich dem Neigungswinkel der Falllinien der Ebene.*

In Fig. 18 ist eine Ebene durch ihre Spurgerade  $s$  und den Punkt  $P$  gegeben. Das Lot von  $P'$  auf  $s$  ist das Bild  $f'$  der Falllinie  $f$  durch  $P$ ; es trifft  $s$  in  $F$ . Der Neigungswinkel  $\alpha$  der Ebene ist gleich dem Winkel  $PF P'$  oder in der Umlegung gleich dem Winkel  $(P)F P'$ . Verbinden wir  $P$  mit einem anderen Punkte  $A$  der Spurgeraden  $s$  durch die Strecke  $PA$  gleich  $a$ , so ist der Neigungswinkel  $\beta$  der Geraden  $PA$  gleich  $PAP'$  oder in der Umlegung gleich  $[P]AP'$ . Die rechtwinkligen Dreiecke  $PP'F$  und  $PP'A$  haben die eine Kathete  $PP'$  gemeinsam; die beiden andern Katheten sind

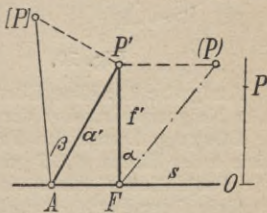


Fig. 18.

ungleich und zwar ist  $P'F$  kleiner als  $P'A$ . Daraus folgt, daß  $\alpha$  größer als  $\beta$  ist. Der Neigungswinkel der Falllinien einer Ebene ist demnach größer als der Neigungswinkel irgend einer anderen Geraden der Ebene; daher werden (vgl. Nr. 3) Strecken auf Falllinien bei der Projektion stärker verkürzt als die Strecken auf andern Geraden der Ebene.

**Aufgabe 18:** Eine dreiseitige Pyramide ist durch ihre in der



Tafel gelegene Grundfläche  $ABC$  und durch ihre Spitze  $P$  gegeben. Wie weit ist die Spitze von den Grundkanten entfernt? Wie groß sind die Neigungswinkel der Seitenflächen? (Fig. 19.)

Lösung: Die Entfernung der Spitze  $P$  von der Kante  $AB$  ist gleich der Höhe  $PF$  des Dreiecks  $BPC$ . Die Höhe  $PF$  liegt auf der Fallinie der Ebene  $BPC$  durch  $P$ . Ihre Projektion ist also das Lot  $P'F$  von  $P'$  auf  $BC$ . Aus der Umlegung  $P'(P)F$  des Dreiecks  $P'PF$  ergibt sich, daß die Entfernung der Spitze  $P$  von der Kante  $AB$  gleich der Strecke  $F(P)$  ist. Da  $PF$  Fallinie der Seitenfläche  $APB$  ist, so entnimmt man aus der Umlegung  $P'(P)F$  gleichzeitig, daß der Neigungswinkel der Ebene  $BPC$  gleich dem Winkel  $P'F(P)$  ist. Entsprechend verfährt man mit den beiden anderen Seitenflächen der Pyramide. Die

Konstruktion des in Fig. 19 eingezeichneten Netzes wird in Nr. 11 besprochen.

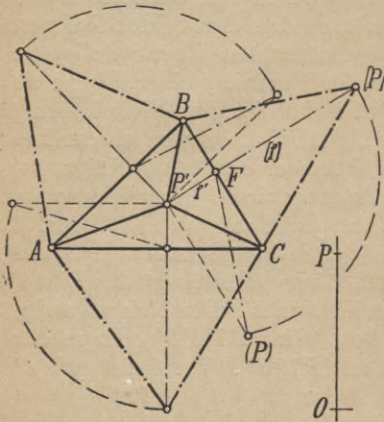


Fig. 19.

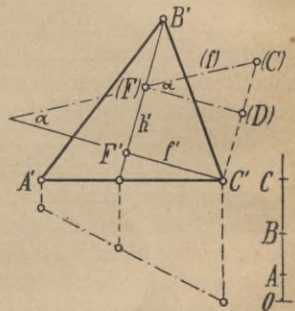


Fig. 20.

Aufgabe 19: Eine Ebene ist durch das Dreieck  $ABC$  gegeben. Der Neigungswinkel  $\alpha$  der Ebene soll ermittelt werden. (Fig. 20.)

Lösung: Durch den Punkt  $B$  wird (wie in Fig. 13) die Höhenlinie  $h$  der Ebene  $ABC$  gezeichnet. Das Lot von  $C'$  auf  $h'$  ist dann die Projektion  $f'$  einer Fallinie  $f$  der Dreiecksebene. Da von der Fallinie  $f$  der Punkt  $C$  und ihr Schnittpunkt  $F$  mit  $h$  bekannt sind, kann die Umlegung  $(f)$  von  $f$  gezeichnet werden. Der Winkel zwischen  $f'$  und  $(f)$  ist gleich dem gesuchten Neigungswinkel  $\alpha$  der gegebenen Ebene. Ist der Schnittpunkt von  $f'$  mit  $(f)$  nicht erreichbar, so zeichnet man z. B. die Parallele  $(F)(D)$  durch  $(F)$  zu  $f'$ , die mit  $(f)$  ebenfalls den Winkel  $\alpha$  bildet.

**10. Lote auf Ebenen.** Eine zu einer Ebene lotrechte Gerade bildet mit allen Geraden der Ebene rechte Winkel. Nach Nr. 9 erscheint der rechte Winkel, den das Lot zu einer Ebene mit deren Höhenlinien bildet, auch in der Projektion als rechter Winkel. Danach gilt: *Die Pro-*

jektionen der Lote einer Ebene sind zu den Projektionen ihrer Höhenlinien senkrecht; sie fallen mit den Projektionen der Falllinien der Ebene zusammen.

**Aufgabe 20:** Eine Ebene ist durch das Rechteck  $ABCD$  gegeben, dessen Seiten  $AB$  und  $CD$  Höhenlinien sind. Im Mittelpunkt  $M$  des Rechteckes soll das Lot  $l$  errichtet werden. (Fig. 21.)

**Lösung:** Nach Nr. 10 ist die Projektion  $A'B'C'D'$  des Rechteckes  $ABCD$  wieder ein Rechteck. Das Bild  $M'$  der Mitte  $M$  des Rechteckes ist der Schnittpunkt der Diagonalen  $A'C'$  und  $B'D'$ . Das Bild  $l'$  des Lotes  $l$  geht durch  $M'$  und ist zu  $A'B'$  und  $C'D'$  senkrecht, zu den Projektionen  $A'D'$  und  $B'C'$  der Falllinien  $AD$  und  $BC$  also parallel. Wird das Rechteck undurchsichtig angenommen, so verdeckt es eine Strecke des Lotes  $l$ . Zur Bestimmung der Sichtbarkeit wird die projizierende Ebene von  $l$  umgelegt; sie schneidet das Rechteck in einer Strecke  $H_1H_2$ , deren Projektion  $H_1'H_2'$  mit  $l'$  zusammenfällt. Bei der Umlegung geht  $H_1H_2$  in  $(H_1)(H_2)$  über; der Mittelpunkt von  $(H_1)(H_2)$  ist  $(M)$ . Dann ist  $(l)$  die Senkrechte in  $(M)$  zu  $(H_1)(H_2)$ . Die Umlegung zeigt, daß das Lot  $l$  unterhalb der

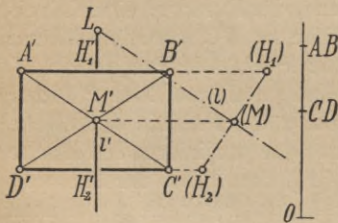


Fig. 21.

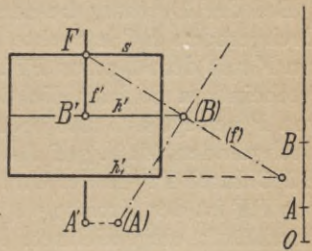


Fig. 22.

Strecke  $MH_1$  und oberhalb der Strecke  $MH_2$  verläuft. Das Lot  $l$  hat den Spurpunkt  $L$ .

**Aufgabe 21:** Durch den Punkt  $B$  der Geraden  $AB$  soll die zur Geraden senkrechte Ebene gelegt werden. (Fig. 22.)

**Lösung:** Die Projektion  $h'$  der durch  $B$  gehenden Höhenlinie  $h$  der zu  $AB$  lotrechten Ebene ist die Senkrechte zu  $A'B'$  in  $B'$ . In der projizierenden Ebene von  $AB$  liegt eine zu  $AB$  senkrechte Falllinie  $f$  der gesuchten Ebene. In der Umlegung der projizierenden Ebene von  $AB$  erscheint  $f$  als die Senkrechte  $(f)$  zu  $(A)(B)$  in  $(B)$ . Der Spurpunkt  $F$  von  $f$  ist der Schnittpunkt von  $f'$  mit  $(f)$ . Die Spurgerade  $s$  der zu  $AB$  lotrechten Ebene ist die Parallele zu  $h'$  durch  $F$ . In Fig. 22 ist die von  $s$  aus ansteigende Ebene oben durch die Höhenlinie  $h_1$ , seitlich durch Falllinien begrenzt worden. Die Sichtbarkeit wird aus der Umlegung wie in Aufg. 20 entnommen.

**Aufgabe 22:** Von einem Punkte  $P$  soll auf die Ebene des Dreiecks  $ABC$  das Lot  $l$  gefällt werden.

**Lösung:** Man zeichnet wie in Fig. 13 die Höhenlinie  $h$  durch die Ecke mittlerer Höhe. Dann ist die Projektion  $l'$  das Lot von  $P'$



auf  $h'$ . Mittels der Umlegung der projizierenden Ebene von  $l$ , die  $ABC$  in einer Fallinie  $f$  schneidet, wird der Fußpunkt  $L$  von  $l$  und die Sichtbarkeit ermittelt.

**11. Bestimmung der wahren Gestalt ebener Figuren.** Um die wahre Gestalt des Dreiecks  $BPC$  in Fig. 19 zu bestimmen, drehen wir die Dreiecksebene um ihre Spurgerade  $BC$  soweit, bis sie in der Tafel liegt. Die Punkte der Drehgeraden  $BC$  ändern bei der Drehung ihre Lage nicht. Daher sind die Punkte  $B$  und  $C$  auch Ecken des umgelegten Dreiecks; der Punkt  $F$  bleibt Fußpunkt der Höhe auf  $BC$ . Wir tragen also auf der Verlängerung von  $P'F$  über  $F$  hinaus von  $F$  aus bis  $[P]$  die wahre Länge  $(P)F$  der Höhe  $PF$  ab. Dann ist Dreieck  $B[P]C$  dem Dreieck  $BPC$  kongruent. Verfährt man entsprechend mit den beiden anderen Seitenflächen  $CPA$  und  $APB$ , so erhält man das Netz der Pyramide.

Bei der Drehung beschreibt die Fallinie  $PF$  eine zur Drehgeraden  $BC$  lotrechte Ebene, der Punkt  $P$  einen Kreis um  $F$  mit dem Radius  $PF$ . Diese zu  $BC$  lotrechte Ebene erscheint im Bild als die Gerade  $P'F$ . Die Projektion  $P'$  von  $P$  bewegt sich also bei Drehung auf dem Lote  $P'F$  zur Drehgeraden, d. h. auf dem Bild  $f'$  der Fallinie der Ebene  $BPC$  durch  $P$ . In der Umlegung der projizierenden Ebene von  $PF$  ist der Kreisbogen  $(P)[P]$ , den  $P$  bei der Drehung durchläuft, eingezeichnet. Der Bogen  $(P)[P]$  liegt auf dem Kreis um  $F$  mit dem Radius  $F(P)$ .

Aufgabe 23: Die wahre Gestalt der Schnittfigur  $P_1P_2 \dots P_6$  in Aufg. 17 soll ermittelt werden. (Fig. 16.)

Lösung: Die Ebene des Sechsecks  $P_1P_2 \dots P_6$  wird um ihre Spur  $s$  in die Tafel umgelegt. Zunächst wird die Höhe des Punktes  $P_1$  mittels der Umlegung der projizierenden Ebene der Kante  $1I$  als die Strecke  $P_1'(P)$  ermittelt. Die Projektionen  $P_1', P_2', \dots, P_6'$  der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_6$  bewegen sich bei der Drehung um  $s$  auf den Loten zu  $s$ . Der Punkt  $P_1$  hat von  $s$  den Abstand  $P_1F_1$ , dessen Länge gleich der Umlegung  $\{P_1\}F_1$  ist. Diese Strecke  $\{P_1\}F_1$  wird nun von  $F_1$  aus bis  $[P_1]$  auf der Verlängerung von  $P_1'F_1$  über  $F_1$  hinaus abgetragen. Damit ist eine Ecke  $[P_1]$  der um  $s$  in die Tafel gedrehten Schnittfigur gefunden. Genau so könnten wir die übrigen Ecken ermitteln. Einfacher ist es jedoch folgendermaßen vorzugehen. Die Seite  $P_1P_2$  trifft  $s$  in  $S_{12}$ . Dieser Punkt behält als Punkt der Drehgeraden seine Lage bei der Drehung unverändert bei. Da  $P_1$  durch die Drehung in  $[P_1]$  übergeführt wird, geht die Gerade  $S_{12}P_1$  in  $S_{12}[P_1]$  über.  $S_{12}[P_1]$  schneidet das Lot zu  $s$  durch  $P_2'$  in  $[P_2]$ . Entsprechend geht  $[P_2][P_3]$  durch  $S_{23}$ ,  $[P_3][P_4]$  durch  $S_{34}$  und  $[P_4][P_5]$  durch  $S_{45}$ .



Zur Bestimmung von  $[P_6]$  benutzen wir — wie in Aufg. 17 zur Ermittlung von  $P_6'$  — die Diagonale  $P_4P_6$ .

**Aufgabe 24:** Eine auf der Tafel stehende Pyramide soll mit einer Ebene geschnitten und die wahre Gestalt der Schnittfigur bestimmt werden.

Figuren, die in einer Höhenebene liegen, erscheinen im Bild in wahrer Gestalt. Daher ist es nicht erforderlich, die ebenen Figuren wie bisher um die Spurgerade in die Tafel umzulegen, sondern es genügt, wenn die Ebene der Figur um eine Höhenlinie parallel zur Tafel, also in eine Höhenebene hinein gedreht wird. Da sich die Projektion eines

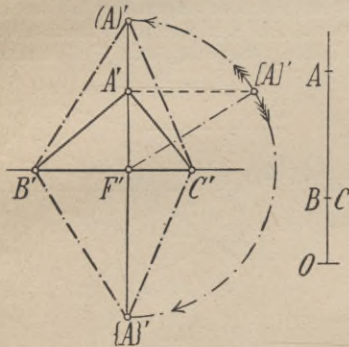


Fig. 23.

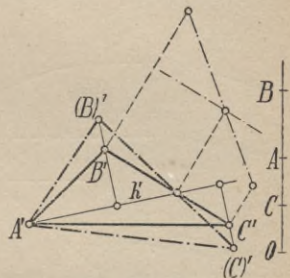


Fig. 24.

Gebildes nicht ändert, wenn wir die Bildtafel parallel zu sich selbst in Richtung der Projektionsstrahlen verschieben, so können wir bei der Drehung um eine Höhenlinie die Konstruktionen genau so durchführen wie bei der Drehung um die Spurgerade, sobald wir nur am Höhenmaßstab die Nullmarke durch die Marke der Höhe der Drehgeraden ersetzen.

**Aufgabe 25:** Die wahre Gestalt des Dreiecks  $ABC$ , dessen Seite  $BC$  zur Tafel parallel ist, soll ermittelt werden. (Fig. 23.)

**Lösung:** Die Seite  $BC$  ist Höhenlinie; um sie wird die Drehung der Dreiecksebene ausgeführt. Ersetzen wir nun am Maßstab die Nullmarke  $O$  durch die Marke  $B-C$ , so wird die Umlegung  $B'(A')C'$  ganz entsprechend bestimmt wie die Umlegung  $B[P]C$  in Fig. 19. Bei der Bestimmung der Länge von  $AF$  ist jetzt auf dem Lote in  $A'$  zu  $F'A'$  die Höhe des Punktes  $A$  über der Höhenebene, d. i. die Strecke  $BA$  am Maßstab, abzutragen. In Fig. 23 sind die beiden Lagen des Dreiecks  $ABC$ , in denen seine Ebene zur Tafel parallel ist, eingezeichnet. In der Umlegung sind wieder die Kreisbogen, die  $A$  in beiden Fällen durchläuft, angegeben.

**Aufgabe 26:** Ein Dreieck  $ABC$  ist gegeben. Seine wahre Gestalt soll ermittelt werden. (Fig. 24.)

Lösung: Das Dreieck werde in die Höhenebene von der Höhe  $OA$  hineingedreht. Wir bestimmen zunächst die Höhenlinie  $h$  durch  $A$  und bestimmen dann — entsprechend der Lösung der vorigen Aufgabe — die Punkte  $(B)'$  und  $(C)'$ . Da die Punkte der Drehgeraden  $h$  ihre Lage nicht ändern, müssen die Seiten  $B'C'$  und  $(B)'(C)'$  sich auf  $h'$  schneiden.

## 12. Projektion ebener Figuren von gegebener Gestalt.

Aufgabe 27: Ein gegebenes ebenes Vieleck soll in beliebiger Lage gezeichnet werden. (Fig. 25.)

Lösung: Wir wählen als Beispiel ein regelmäßiges Sechseck 1 2 3 4 5 6, das in der Bildebene gezeichnet wird. Um eine beliebig gezogene Gerade  $s$  der Tafel wird die Ebene des Sechseckes um den Winkel  $\alpha$  aus der Zeichenebene herausgedreht. Bei der Drehung beschreibt der Punkt 4 einen Kreis mit dem Mittelpunkte  $M_4$ , dem Fußpunkte

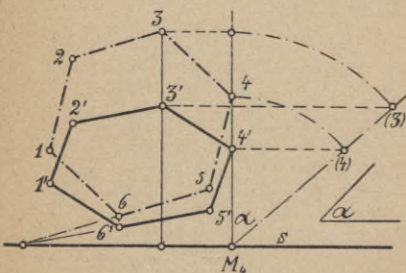


Fig. 25.

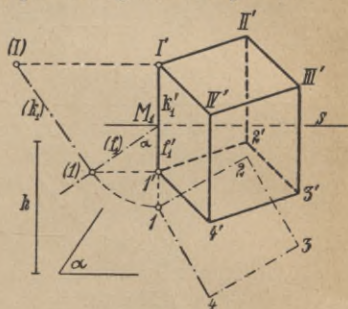


Fig. 26.

des Lotes von 4 auf  $s$ , und dem Radius  $M_4 4$ . Die Ebene des Kreises ist zur Tafel senkrecht und erscheint im Bild als das Lot von 4 auf  $s$ . Der oberhalb der Tafel gelegene Halbkreis wird um  $M_4 4$  in die Tafel umgelegt. Trägt man nun an  $4 M_4$  in  $M_4$  den Winkel  $\alpha$  an, so ist der Schnittpunkt  $(4)$  des zweiten Schenkels mit dem Halbkreis die Umlegung des Punktes, in den der Punkt 4 bei der Drehung übergeht. Der Fußpunkt  $4'$  des Lotes von  $(4)$  auf  $4 M_4$  ist die Projektion der Ecke 4. Statt diese Konstruktion für jeden der übrigen fünf Eckpunkte durchzuführen, verfährt man bequemer folgendermaßen. Auf dem Schenkel  $M_4 (4)$  werden von  $M_4$  aus die Abstände der Punkte 1, 2, 3, 5, 6 von  $s$  bis zu den Punkten  $(1)$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(4)$ ,  $(6)$  abgetragen und durch diese Punkte die Parallelen zu  $s$  gezogen. Die Parallelen schneiden die Lote von 1, 2, 3, 5, 6 auf  $s$  in den Projektionen  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $5'$ ,  $6'$  der Eckpunkte des Sechseckes. Für die Ecke 3 ist dies Verfahren in Fig. 25 eingezeichnet worden. Zur Probe der Genauigkeit der Zeichnung beachte man, daß entsprechende Seiten und Diagonalen des gegebenen Sechseckes 1 2 ... 6 und der Projektion  $1' 2' \dots 6'$  sich auf der Drehgeraden  $s$  treffen müssen.

Aufgabe 28: Ein gerades Prisma von gegebener Grundfläche und Höhe soll in allgemeiner Lage gezeichnet werden. (Fig. 26.)



Lösung: Als Grundfläche wird ein Quadrat 1 2 3 4 gewählt. Die Projektion 1' 2' 3' 4' des Quadrates bei beliebiger Lage wird nach Aufg. 27 gezeichnet. Die Kanten des Prismas sind zur Ebene des Quadrates lotrecht, ihre Projektionen liegen also auf den Loten durch 1', 2', 3' und 4' zur Spurgeraden  $s$ . Auf den Kanten wird mittels der Umlegung ihrer projizierenden Ebenen die Höhe des Prismas abgetragen. Das Lot 1'  $M_1$  ist die Projektion  $f_1'$  der Fallinie  $f_1$  der Ebene des Quadrates durch den Punkt 1 und gleichzeitig die Projektion  $k_1'$  der zu  $f_1$  senkrechten Prismenkante  $k_1$  durch 1. In der Umlegung bildet ( $f_1$ ) mit  $f_1'$  den Neigungswinkel  $\alpha$  der Quadratebene, ( $k_1$ ) ist die Senkrechte in (1) zu ( $f_1$ ). Auf ( $k_1$ ) wird von (1) aus die Höhe  $h$  des Prismas bis (I) abgetragen. Das Lot von (I) auf  $k_1'$  hat den Fußpunkt I'. Die Kanten haben im Bild also die Länge I'1'.

Aufgabe 29: Ein Würfel ist in allgemeiner Lage zu zeichnen.

Aufgabe 30: Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide soll in allgemeiner Lage gezeichnet werden.

## ZWEITER ABSCHNITT

### KREIS, GERADER KREISZYLINDER UND KREISKEGEL, KUGEL

13. Senkrechte Projektion des Kreises. Ist die Ebene eines Kreises  $k$  zur Tafel parallel, so ist seine Projektion  $k'$  der zu  $k$  kongruente Kreis, dessen Mitte  $M'$  das Bild des Mittelpunktes  $M$  von  $k$  ist. Steht die Kreisebene zur Tafel senkrecht, so erscheint der Kreis  $k$  im Bild als Strecke  $k'$ , die gleich dem Durchmesser von  $k$  ist. Diese Strecke ist im besonderen die Projektion des zur Tafel parallelen Kreisdurchmessers. Bei jeder anderen Lage des Kreises  $k$  ist seine Projektion eine *Ellipse*. Wie die Kreisdurchmesser durch den Kreismittelpunkt  $M$  halbiert werden, so halbiert auch das Bild  $M'$  von  $M$ , der *Ellipsenmittelpunkt*, die Projektionen der Kreisdurchmesser, die *Ellipsendurchmesser*. Die Ellipse ist also symmetrisch in bezug auf ihren Mittelpunkt. Da die Kreisdurchmesser verschiedene Neigungswinkel haben, werden sie bei der Projektion verschieden stark verkürzt. Der Kreisdurchmesser  $A_1A_2$ , der Höhenlinie der Kreisebene ist, erscheint im Bild in wahrer Länge. Seine Projektion  $A_1'A_2'$  ist der längste Ellipsendurchmesser und heißt die *Hauptachse der Ellipse*. Der zu  $A_1A_2$  senkrechte Kreisdurchmesser  $B_1B_2$  liegt auf einer Fallinie der Kreisebene. Nach Nr. 9 ist sein Bild



$B_1' B_2'$  der kürzeste Durchmesser der Ellipse. Dieser Durchmesser heißt die *Nebenachse der Ellipse*. Die Endpunkte der Achsen heißen die *Scheitel der Ellipse*, und zwar  $A_1', A_2'$  die *Hauptscheitel*,  $B_1', B_2'$  die *Nebenscheitel*. Der Kreis um den Ellipsenmittelpunkt  $M'$  durch die Hauptscheitel ist der *Hauptscheitelkreis*, der durch die Nebenscheitel der *Nebenscheitelkreis*.

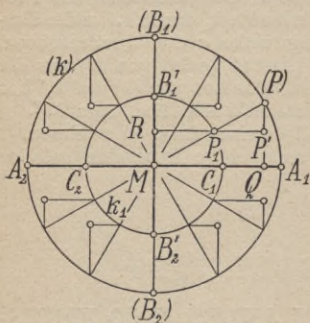


Fig. 27.

Danach gilt: *Die Projektion eines Kreises  $k$  ist im allgemeinen eine Ellipse. Die Hauptachse der Ellipse ist ebenso lang wie der Kreisdurchmesser. Sie ist das Bild des Durchmessers, der auf einer Höhenlinie liegt. Die Nebenachse ist die Projektion des Durchmessers, der auf einer Fallinie der Kreisebene liegt.*

**14. Bestimmung einzelner Punkte der Ellipse.** In Fig. 27 sind die Achsen  $A_1 A_2 = 2a$  und  $B_1' B_2' = 2b$  einer Ellipse gegeben. Der Kreis  $k$ , dessen Bild die durch diese Achsen gegebene Ellipse  $k'$  ist, werde so angenommen, daß sein Mittelpunkt  $M$  mit dem Mittelpunkt der Ellipse zusammenfällt. Dann ist  $A_1 A_2$  ein Durchmesser von  $k$ . Der zu  $A_1 A_2$  senkrechte Kreisdurchmesser  $B_1 B_2$  liegt so, daß  $B_1$  sich senkrecht über  $B_1'$  und  $B_2$  sich senkrecht unter  $B_2'$  befindet.  $k$  liegt also zur Hälfte oberhalb, zur Hälfte unterhalb der Tafel. Wird der Kreis  $k$  um  $A_1 A_2$  in die Tafel umgelegt, so geht er in den Hauptscheitelkreis  $(k)$  der Ellipse über.  $(B_1)$  und  $(B_2)$  liegen auf den Verlängerungen der Nebenachse  $B_1' B_2'$ . Die Strecken auf den Fallinien der Kreisebene werden bei der Projektion also im Verhältnis  $MB_1' : MB_1 = MB_1' : M(B_1) = b : a$  verkürzt. Weitere Punkte der Ellipse können wir also bestimmen, indem wir die zu  $A_1 A_2$  senkrechten Sehnen von  $(k)$  von ihrem Schnittpunkt mit  $A_1 A_2$  aus im Verhältnis  $b : a$  verkürzen. Wir zeichnen noch den Nebenscheitelkreis  $k_1$  der Ellipse. Ziehen wir nun einen beliebigen Radius  $M(P)$ , der  $k_1$  in  $P_1$  treffe, so ist der Schnittpunkt  $P'$  des Lotes von

( $P$ ) auf  $A_1A_2$  mit der Parallelen durch  $P_1$  zu  $A_1A_2$  ein Punkt der Ellipse. Aus der Fig. 27 entnimmt man nämlich die Beziehung

$$QP' : Q(P) = MP_1 : M(P) = b : a.$$

Auf die gleiche Weise sind die übrigen Ellipsenpunkte in Fig. 27 bestimmt worden.

Die Annahme, daß die Hauptachse  $A_1A_2$  der Bildellipse  $k'$  Durchmesser des Kreises  $k$  ist, bedeutet keine Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit des Ergebnisses. Liegt nämlich der Kreismittelpunkt  $M$  nicht in der Tafel, so denke man sich die Tafel zunächst durch die Höhenebene durch  $M$  ersetzt und den Kreis auf diese Höhenebene projiziert. Dieser Kreis liegt zur Höhenebene genau so wie oben der Kreis  $k$  zur Tafel. Das Bild des Kreises in der Tafel ist zum Bild in der Höhenebene kongruent und deckt sich in der Zeichnung mit diesem. Hiernach folgt: *Eine Ellipse kann stets angesehen werden als die senkrechte Projektion ihres passend gedrehten Hauptscheitelkreises.*

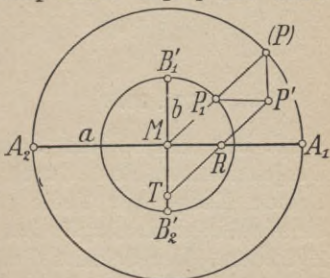


Fig. 28.

In Fig. 28 ist ein Punkt  $P'$  der durch die Achsen  $A_1A_2=2a$  und  $B_1'B_2=2b$  gegebenen Ellipse mittels der Scheitelkreise bestimmt. Wird nun durch  $P'$  die Parallele zu  $M(P)$  gezogen, die die Hauptachse in  $R$  und die Nebenachse in  $T$  treffe, so entstehen zwei Parallelogramme  $M(P)P'T$  und  $MP_1P'R$ . Also ist

$$P'T = (P)M = a, \quad P'R = P_1M = b.$$

Diese Beziehung wird zur Lösung der folgenden beiden Aufgaben benutzt.

**Aufgabe 31:** Von einer Ellipse ist die Hauptachse und ein Punkt gegeben. Die Nebenachse soll gezeichnet werden. (Fig. 29.)

**Lösung:** Die Hauptachse sei die Strecke  $A_1A_2=2a$ ; der gegebene Punkt  $P'$ . Die Nebenachse liegt auf dem Mittellote zu  $A_1A_2$ . Um  $P'$  wird der Kreis mit dem Radius  $a$  gezeichnet. Der Schnittpunkt  $T$  dieses Kreises mit dem Mittellote, der von  $P'$  durch die Hauptachse getrennt ist, wird mit  $P'$  verbunden. Die Gerade  $P'T$  treffe  $A_1A_2$







**16. Tangenten der Ellipse.** Die Tangenten einer Ellipse sind die Projektionen der Tangenten des Kreises, dessen Bild die Ellipse ist. Nach Nr. 14 kann eine Ellipse  $k'$  stets als die Projektion eines Kreises  $k$  angesehen werden, der aus dem Hauptscheitelkreise ( $k$ ) von  $k'$  durch Drehung um die Hauptachse der Ellipse hervorgeht. Die Tangente  $t'$  in einem Punkte  $P'$  der Ellipse  $k'$  ist also das Bild der Tangente  $t$  in  $P$  an den Kreis  $k$ . Da die Tangente  $t$  in der Ebene von  $k$  liegt, ist ihr Spurpunkt  $T$  ihr Schnittpunkt mit der Hauptachse der Ellipse  $k'$ . Der Spurpunkt  $T$  ist auch ein Punkt der Projektion  $t'$  von  $t$ , d. h. die

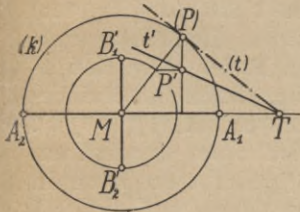


Fig. 30.

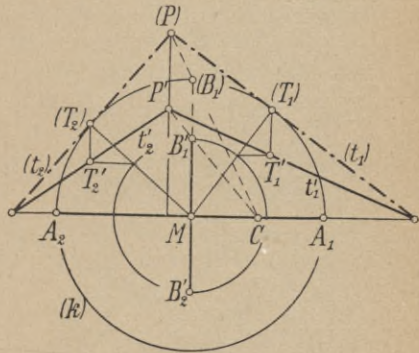


Fig. 31.

Ellipsentangente  $t'$  in  $P'$  ist die Verbindungsgerade von  $P'$  und  $T$ . Bei der Drehung von  $k$  um die Hauptachse von  $k'$  geht  $k$  in den Hauptscheitelkreis ( $k$ ), die Tangente  $t$  in die Tangente ( $t$ ) in ( $P$ ) an ( $k$ ) über. Als Punkt der Drehgeraden ändert  $T$  seine Lage bei dieser Drehung nicht. Die Tangenten  $t$ , ( $t$ ) und  $t'$  schneiden sich also im Punkte  $T$  der Hauptachse der Ellipse  $k'$ .

**Aufgabe 34:** In einem Punkte  $P'$  der durch die Achsen  $A_1A_2$ ,  $B_1'B_2'$  gegebenen Ellipse soll die Tangente gezeichnet werden. (Fig. 30.)

**Lösung:** Mittels der Scheitelkreise wird ein Punkt  $P'$  der durch die Achsen  $A_1A_2$ ,  $B_1'B_2'$  gegebenen Ellipse bestimmt. In ( $P$ ) wird an den Hauptscheitelkreis ( $k$ ) die Tangente ( $t$ ) gezogen und in  $T$  mit  $A_1A_2$  zum Schnitt gebracht. Dann ist die Gerade  $P'T$  die Tangente  $t'$  der Ellipse im Punkte  $P'$ .

**Aufgabe 35:** Von einem Punkte  $P'$ , der außerhalb der durch die Achsen  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  gegebenen Ellipse liegt, sollen an diese die Tangenten gezogen werden. (Fig. 31.)

**Lösung:** Die Ellipse wird wieder als Projektion des Kreises  $k$  betrachtet, der aus dem Hauptscheitelkreis ( $k$ ) durch Drehung um

$A_1 A_2$  hervorgeht. Dann ist  $P'$  das Bild eines Punktes  $P$  der Ebene von  $k$ ; die Ellipsentangenten  $t_1', t_2'$  durch  $P'$  sind die Projektionen der Tangenten  $t_1$  und  $t_2$ , die von  $P$  an  $k$  gelegt werden können. Bei der Umlegung der Ebene des Kreises  $k$  um  $A_1 A_2$  in die Bildebene geht  $k$  in  $(k)$ , der Punkt  $P$  in den Punkt  $(P)$  auf dem Lote durch  $P'$  zu  $A_1 A_2$  über, dessen Abstand von der Hauptachse sich zum Abstände der Projektion  $P'$  von der Hauptachse wie  $a$  zu  $b$  verhält. Wird  $P' B_1$  in  $C$  mit  $A_1 A_2$  geschnitten, so trifft  $C(B_1)$  das Lot durch  $P'$  zu  $A_1 A_2$  in  $(P)$ . Die Tangenten  $(t_1)$  und  $(t_2)$  vom Punkte  $(P)$  an den Hauptscheitelkreis haben die Berührungspunkte  $(T_1)$  und  $(T_2)$ . Dann sind  $P' T_1'$  und  $P' T_2'$  die Ellipsentangenten  $t_1'$  und  $t_2'$  durch  $P'$ .

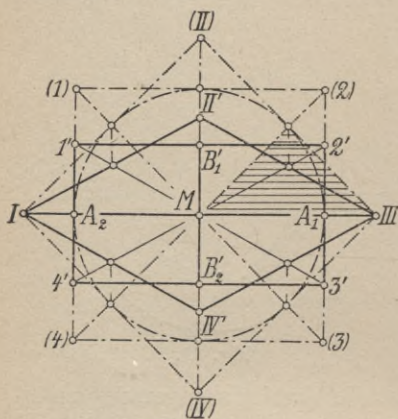


Fig. 32.

Die Tangenten in den Scheiteln einer Ellipse bilden ein der Ellipse umbeschriebenes Rechteck  $1' 2' 3' 4'$ . (Fig. 32.) Dieses Rechteck entspricht dem dem Hauptscheitelkreis umschriebenen Quadrate (1)(2)(3)(4). Wird dieses Quadrat um  $45^\circ$  gedreht, so geht es in das Quadrat I (II) III (IV) über, dessen Ecken auf den Verlängerungen der Achsen der Ellipse liegen, und dessen Seiten zu

den Diagonalen des Quadrates (1) (2) (3) (4) parallel sind. Dem Quadrate I (II) III (IV) entspricht ein der Ellipse umbeschriebener Rhombus I II' III IV', dessen Seiten I II', III IV' zur Diagonale  $2' 4'$  und dessen Seiten II' III, IV' I zur Diagonale  $1' 3'$  des Rechteckes der Scheiteltangenten parallel sind. Die auf der Hauptachse liegenden Ecken I, III des Rhombus haben — wie aus dem geschrafften Dreieck in Fig. 32 folgt — von der Ellipsenmitte  $M$  den Abstand  $a\sqrt{2}$ . Die Berührungspunkte der Seiten des Quadrates I (II) III (IV) mit dem Hauptscheitelkreise liegen auf den Diagonalen des Quadrates (1) (2) (3) (4). Die Seiten des Rhombus I II' III IV' berühren demnach die Ellipse in ihren Schnittpunkten mit den Diagonalen des Rechteckes der Scheiteltangenten.



Allen übrigen dem Hauptscheitelkreis umbeschriebenen Quadraten entsprechen der Ellipse umschriebene Parallelogramme.

**17. Krümmungskreise für die Scheitel der Ellipse.** Die Konstruktion der Ellipsenpunkte mittels der Scheitelkreise (Fig. 27) zeigt, daß die Ellipse in bezug auf beide Achsen symmetrisch liegt. Bei der Zeichnung einer Ellipse fallen Ungenauigkeiten in der Symmetrie der Kurve in der Nähe der Symmetrieachsen besonders stark auf. Um diese Fehler zu vermeiden, ersetzen wir die Ellipsenbogen in der Umgebung der Scheitel durch die Kreisbogen, die sich der Ellipse an diesen Stellen am besten anschmiegen.

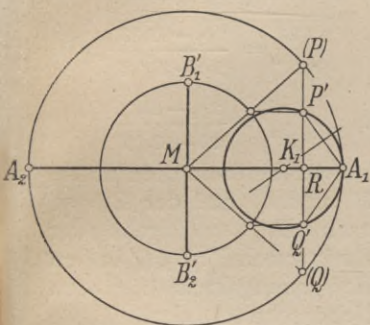


Fig. 33.

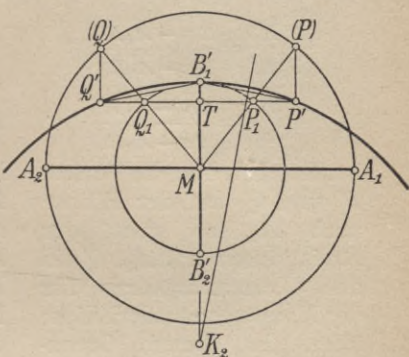


Fig. 34.

Diese Kreise heißen die *Krümmungskreise*, ihre Radien die *Krümmungsradien* und ihre Mittelpunkte die *Krümmungsmittelpunkte* für die Scheitel der Ellipse. Aus der Symmetrie der Ellipse folgt, daß die Krümmungsmittelpunkte für die Hauptscheitel auf der Hauptachse, die Krümmungsmittelpunkte für die Nebenscheitel auf der Nebenachse liegen und daß die beiden Hauptscheitel gleiche Krümmungsradien haben, ebenso die beiden Nebenscheitel.

Die Lage der Krümmungsmittelpunkte bestimmen wir durch die folgende Betrachtung. Von der durch die Achsen  $A_1A_2 = 2a$ ,  $B_1'B_2' = 2b$  gegebenen Ellipse werden mit Hilfe der Scheitelkreise zwei Punkte  $P'$  und  $Q'$  ermittelt, die symmetrisch



zur *Hauptachse*  $A_1A_2$  liegen. (Fig. 33.) Durch die Punkte  $P' A_1 Q'$  wird der Kreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt  $K_1$  auf  $A_1A_2$  liegt. Sein Radius  $K_1A_1$  werde mit  $\rho_1$  bezeichnet. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$\overline{P'R^2} = \overline{A_1R} (2\rho_1 - \overline{A_1R}),$$

$$\overline{(P)R^2} = \overline{A_1R} (2a - \overline{A_1R}).$$

Aus ihnen folgt, daß

$$\frac{\overline{P'R^2}}{\overline{(P)R^2}} = \frac{2\rho_1 - \overline{A_1R}}{2a - \overline{A_1R}},$$

$$1) \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{2\rho_1 - \overline{A_1R}}{2a - \overline{A_1R}}$$

ist. Streben nun die Punkte  $P'$  und  $Q'$  auf der Ellipse nach  $A_1$ , so geht der Kreis durch  $P', A_1, Q'$  in den Krümmungskreis für den Hauptscheitel der Ellipse über. In diesem Grenzfall ist  $\rho_1$  der Krümmungsradius für den Scheitel  $A_1$  und die Strecke  $A_1R$  gleich Null. Dann ergibt sich aus der Gleichung (1), daß der Krümmungsradius für die Hauptscheitel

$$\rho_1 = \frac{b^2}{a}$$

ist.

Die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel einer Ellipse werden zeichnerisch folgendermaßen bestimmt. Wir zeichnen das der Ellipse mit den Achsen  $A_1A_2=2a$ ,  $B_1'B_2'=2b$  umbeschriebene Rechteck der Scheiteltangenten und fällen von einer Ecke das Lot auf die nicht durch

zur *Nebenachse*  $B_1'B_2'$  liegen. (Fig. 34.) Durch die Punkte  $P' B_1' Q'$  wird der Kreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt  $K_2$  auf  $B_1'B_2'$  liegt. Sein Radius  $K_2B_1'$  werde mit  $\rho_2$  bezeichnet. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$\overline{P'T^2} = \overline{B_1'T} (2\rho_2 - \overline{B_1'T}),$$

$$\overline{P_1T^2} = \overline{B_1'T} (2b - \overline{B_1'T}).$$

Aus ihnen folgt, daß

$$\frac{\overline{P'T^2}}{\overline{P_1T^2}} = \frac{2\rho_2 - \overline{B_1'T}}{2b - \overline{B_1'T}},$$

$$2) \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{2\rho_2 - \overline{B_1'T}}{2b - \overline{B_1'T}}$$

ist. Streben nun die Punkte  $P'$  und  $Q'$  auf der Ellipse nach  $B_1'$ , so geht der Kreis durch  $P', B_1', Q'$  in den Krümmungskreis für den Nebenscheitel der Ellipse über. In diesem Grenzfall ist  $\rho_2$  der Krümmungsradius für den Scheitel  $B_1'$  und die Strecke  $B_1'T$  gleich Null. Dann ergibt sich aus der Gleichung (2), daß der Krümmungsradius für die Nebenscheitel

$$\rho_2 = \frac{a^2}{b}$$

ist.

diese Ecke gehende Diagonale des Rechteckes. (Fig. 35.) Dieses Lot trifft die Hauptachse in  $K_1$ , die Nebenachse in  $K_2$ . Der Punkt  $K_1$  ist der Krümmungsmittelpunkt für den Hauptscheitel  $A_1$ , der auf derselben Seite vom Mittelpunkt  $M$  wie  $K_1$  liegt. Der Punkt  $K_2$  ist der Krümmungsmittelpunkt für den Nebenscheitel  $B_1'$ , der von  $K_2$  durch den Mittelpunkt  $M$  getrennt wird. Mit Hilfe der in Fig. 35 geschrafften ähnlichen Dreiecke zeigt man nämlich leicht, daß  $\overline{A_1 K_1} = \frac{b^2}{a}$  und  $\overline{B_1' K_2} = \frac{a^2}{b}$  ist.

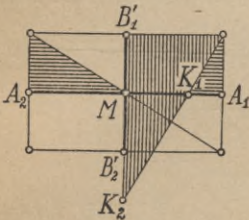


Fig. 35.

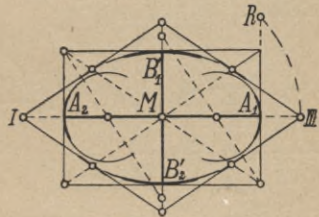


Fig. 36.

**18. Zeichnung der Ellipse.** Die Ellipse sei durch die Achsen  $A_1 A_2$  und  $B_1' B_2'$  gegeben. (Fig. 36.) Zuerst werden auf den Achsen mittels des umbeschriebenen Rechteckes der Scheiteltangenten die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel bestimmt. Von den Krümmungskreisen brauchen wir nur die in der Nähe der zugehörigen Scheitel liegenden Bogenstücke, etwa so weit, wie sie in der Fig. 36 stark ausgezogen worden sind. Mit Hilfe des der Ellipse umbeschriebenen Rhombus (vgl. Nr. 16) werden noch vier Ellipsenpunkte mit ihren Tangenten bestimmt. Tragen wir auf der Rechteckseite durch  $A_1$  von  $A_1$  aus die halbe Länge der Hauptachse bis zum Punkte  $R$  ab, so schneidet der Kreis um den Mittelpunkt  $M$  durch  $R$  die Hauptachse in den Eckpunkten  $I$  und  $III$  des umbeschriebenen Rhombus, dessen Seiten parallel zu den Rechteckdiagonalen sind. Die Rhombuseiten berühren die Ellipse in ihren Schnittpunkten mit den Diagonalen des Rechteckes. Nun werden die fehlenden Bogen der Ellipse mit Hilfe eines Kurvenlineals so gezeichnet, daß sie an die Bogen der Krümmungskreise gut anschließen und die Rhombuseiten in den



Schnittpunkten mit den Rechteckdiagonalen berühren. Dann erhält man die in Fig. 37 gezeichnete Ellipse.

### 19. Grundaufgaben über den Kreis.

**Aufgabe 36:** Von einem Kreis ist der Radius  $r$ , der Mittelpunkt  $M$  und die Spurgerade  $s$  der Kreisebene gegeben. Sein Bild ist zu zeichnen. (Fig. 38.)

**Lösung:** Die Projektion  $A_1'A_2'$  des zur Spurgeraden  $s$  der Kreisebene parallelen Durchmessers  $A_1A_2$  ist die Hauptachse der Bildellipse.  $A_1'A_2'$  liegt auf der Parallelen zu  $s$  durch  $M'$  und hat die Länge  $2r$ . Auf der Falllinie  $f$  der Kreisebene durch  $M$  liegt der Durchmesser  $B_1B_2$  des Kreises, dessen Bild  $B_1'B_2'$  die Nebenachse der Ellipse ist. Die Projektion  $B_1'B_2'$  wird mittels der Umlegung der projizierenden Ebene von  $f$  bestimmt. Die Ellipse wird nach Nr. 18 gezeichnet.



Fig. 37.

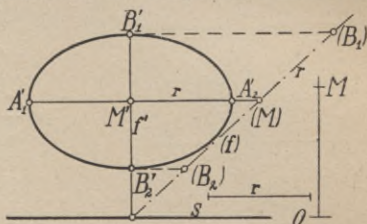


Fig. 38.

**Aufgabe 37:** Gegeben ist eine Gerade  $NM$  und eine Strecke  $r$ . Der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r$ , dessen Ebene zur Geraden  $MN$  senkrecht ist, soll gezeichnet werden. (Fig. 39.)

**Lösung:** Die Hauptachse  $A_1'A_2'$  der Bildellipse, die Projektion des zur Tafel

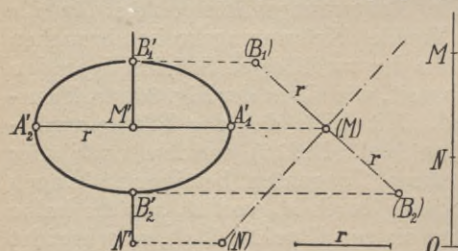


Fig. 39.

parallelen Kreisdurchmessers  $A_1A_2$ , liegt auf dem Lote in  $M'$  zu  $M'N'$  und hat die Länge  $2r$ . Der zu  $A_1A_2$  senkrechte Kreisdurchmesser  $B_1B_2$  liegt in der projizierenden Ebene der Geraden  $MN$ . Seine Projektion  $B_1'B_2'$ , die Nebenachse der Bild-

ellipse, wird mit Hilfe der Umlegung der projizierenden Ebene der Geraden  $MN$  bestimmt. In dieser Umlegung liegt  $(B_1)(B_2)$  auf der Senkrechten in  $(M)$  zu  $(M)(N)$  und ist gleich  $2r$ . Die Gerade  $MN$  wird z. T. durch die undurchsichtig angenommene Kreisscheibe verdeckt. Die Umlegung zeigt, daß die unterhalb des Radius  $MB_2$  liegende Strecke der Geraden  $MN$  im Bild nicht sichtbar ist.

Im folgenden werden wir die Gerade durch den Mittelpunkt eines Kreises, die zur Kreisebene senkrecht steht,



die *Achse des Kreises* oder die *Kreisachse* nennen. Aus der Lösung der Aufgabe 37 folgt: *Die Hauptachse der Bildellipse eines Kreises ist zur Projektion der Kreisachse senkrecht. Die Nebenachse wird mit Hilfe der Umlegung der projizierenden Ebene der Kreisachse bestimmt.*

**Aufgabe 38:** Die Projektion eines Kreises liegt gezeichnet vor. Der Kreis soll in 12 gleiche Teile geteilt werden. (Fig. 40.)

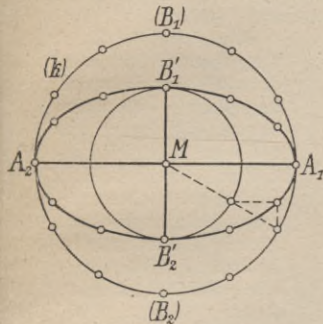


Fig. 40.

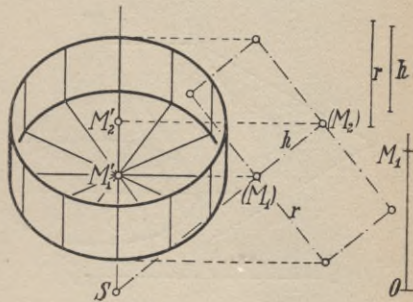


Fig. 41.

**Lösung:** Die Teilung muß auf dem Kreise vorgenommen werden, da bei der Projektion die Bogenstücke verschieden stark verkürzt werden. Wir ersetzen den Kreis, dessen Bild die gegebene Ellipse ist, durch den passend gedrehten Hauptscheitelkreis  $(k)$  und teilen diesen, etwa bei  $A_1$  beginnend, in 12 gleiche Teile. Die Teilpunkte werden dann nach Nr. 14 mit Hilfe der Scheitelkreise auf die Ellipse übertragen.

## 20. Der gerade Kreiszyylinder und Kreiskegel.

**Aufgabe 39:** Ein gerader Kreiszyylinder, dessen Höhe gleich  $h$  und dessen Radius gleich  $r$  ist, soll in allgemeiner Lage gezeichnet werden. (Fig. 41.)

**Lösung:** Die Zylinderachse liege auf der durch ihren Spurpunkt  $S$  und den Punkt  $M_1$  gegebenen Geraden. Als Mittelpunkt des einen Grundkreises wird der Punkt  $M_1$  gewählt. Dann ist auf  $SM_1$  von  $M_1$  aus die Strecke  $h$  bis zum Punkte  $M_2$ , dem Mittelpunkte des anderen Grundkreises, abzutragen. In der Zeichnung wird  $M_2'$  mit Hilfe der Umlegung der projizierenden Ebene von  $SM_1$  bestimmt. Diese Ebene schneidet den Zylinder in dem rechteckigen Achsenschnitt, der in der Umlegung gezeichnet ist. Da die Zylinderachse  $M_1M_2$  die Achse der beiden Grundkreise ist, werden deren Bildellipsen nach Aufg. 37 ermittelt. Die beiden Ellipsen sind zueinander kongruent, weil die Kreise gleiche Radien haben und in parallelen Ebenen liegen. Seitlich wird die Projektion des Zylinders durch die gemeinsamen äußeren Tangenten beider Ellipsen begrenzt. Diese

Tangenten sind die Bilder der Mantellinien, in denen die zur Tafel senkrechten Tangentialebenen den Zylinder berühren.

In Fig. 41 ist der Zylinder als oben offene runde Schachtel dargestellt. Die Sichtbarkeit wird aus der Umlegung entnommen. Im Falle der Fig. 41 blicken wir in das Innere der Schachtel hinein und sehen noch einen Teil des Bodens. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit sind auf dem Zylinder Mantellinien in gleichen Abständen und in dem Grundkreise durch  $M_1$  die zu diesen Mantellinien gehörigen Radien gezogen worden. Die Schnittpunkte der Mantellinien mit dem Kreise um  $M_1$  sind nach Aufg. 38 bestimmt worden.

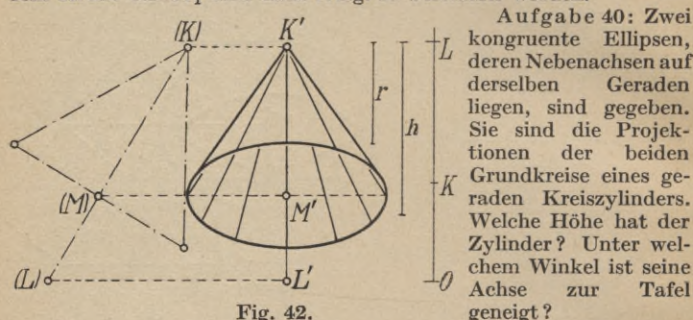


Fig. 42.

Aufgabe 41: Ein gerader Kreiskegel, dessen Grundkreisradius gleich  $r$  und dessen Höhe gleich  $h$  ist, soll in allgemeiner Lage gezeichnet werden. (Fig. 42.)

Lösung: Die Kegelachse liege auf der beliebig gewählten Geraden  $KL$ . Der Punkt  $K$  sei die Kegelspitze. Dann wird auf  $KL$  von  $K$  aus die Kegelhöhe  $h$  bis zum Punkte  $M$ , dem Mittelpunkte des Grundkreises, abgetragen. Die Projektion des Grundkreises, dessen Achse die Gerade  $KM$  ist, wird nach Aufg. 37 gezeichnet. Die Verbindungsgeraden des Punktes  $K'$  mit den Punkten der Bildellipse des Grundkreises sind die Projektionen der Mantellinien des Kegels. Die äußersten Mantellinien des Kegelbildes, die Tangenten von  $K'$  an die Ellipse, sind die Projektionen der Mantellinien, längs denen die zur Tafel lotrechten Tangentialebenen den Kegel berühren. Sie gehören zum Umriß des Kegelbildes. Die Sichtbarkeit läßt sich wieder mit Hilfe der Umlegung feststellen. In Fig. 42 ist der Kegel hohl gedacht. Man blickt z. T. in das Innere des Kegels hinein. Die Mantellinien sind so gezeichnet, daß ihre Schnittpunkte mit dem Grundkreise gleiche Abstände voneinander haben. (Aufg. 38.)

Bei anderer Lage des Kegels zur Tafel braucht  $K'$  nicht immer außerhalb der Bildellipse des Grundkreises zu liegen. Dies ist vielmehr nur der Fall, wenn der Kegel zwei zur Tafel lotrechte Tangentialebenen besitzt. (Fig. 43b, 44b.) Hat der Kegel nur eine zur Tafel senkrechte Tangentialebene, so liegt die Projektion  $K'$  der Spitze auf der Projektion des Grundkreises. (Fig. 43c, 44c.) Ist endlich keine zur Tafel senkrechte Tangentialebene vorhanden, so liegt  $K'$  im Innern der Bildellipse des Grundkreises. (Fig. 43d, e,

Aufgabe 40: Zwei kongruente Ellipsen, deren Nebenachsen auf derselben Geraden liegen, sind gegeben. Sie sind die Projektionen der beiden Grundkreise eines geraden Kreiszyinders. Welche Höhe hat der Zylinder? Unter welchem Winkel ist seine Achse zur Tafel geneigt?



44d, e.) In den Figuren 43b—e liegt die Spitze des Kegels höher als der Mittelpunkt seines Grundkreises. In diesem Falle wird die Grundkreisebene vom Mantel verdeckt. Liegt dagegen die Spitze tiefer als der Mittelpunkt des Grundkreises, wie in den Figuren 44b—e, so ist der Grundkreis und ein Teil des Mantels oder nur der Grundkreis in der Projektion sichtbar. Ist die Kegelachse zur Tafel parallel, so ist das Bild des Kegels ein gleichschenkliges Dreieck. (Fig. 43a.) Steht die Kegelachse zur Bildebene senkrecht, so ist die Projektion des Kegels ein Kreis. (Fig. 43e, 44e.)

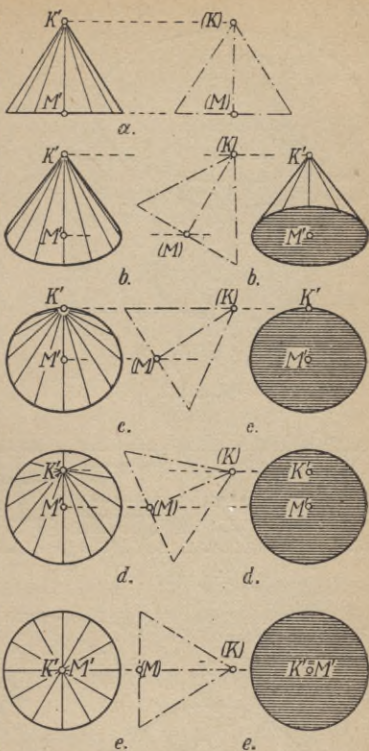


Fig. 43.

Fig. 44.

Aufgabe 42: Von einem geraden Kegelstumpfe sind die Radien  $r_1$ ,  $r_2$  und die Höhe  $h$  gegeben. Der Kegelstumpf soll in allgemeiner Lage gezeichnet werden.

Aufgabe 43: Eine Ellipse und ein Punkt  $K'$  auf ihrer Nebenachse sind gegeben. Die Ellipse sei das Bild des Grundkreises und  $K'$  das Bild der Spitze eines geraden Kreiskegels. Der Achsenschnitt des Kegels ist zu bestimmen.

Aufgabe 44: Welche Bedingungen müssen zwei in der Tafel gezeichnete Ellipsen erfüllen, damit sie die Projektionen der Grundkreise eines geraden Kegelstumpfes sein können?

Aufgabe 45: Ein zylindrischer Bolzen mit kegelförmigem Kopf soll in allgemeiner Lage gezeichnet werden. (Fig. 45.)

Lösung: Die Achse  $a$  des Körpers ist durch die Projektion  $a'$  und die Umlegung ( $a$ ) gegeben. In der Umlegung wird der Achsenschnitt des Bolzens gezeichnet. Dann werden nach Aufg. 37 die Projektionen der drei Kreise bestimmt. Der mittlere Kreis liegt auf dem Zylinder und auf dem Kegel. Die Projektion des Zylinders wird seitlich durch die gemeinsamen äußeren Tangenten der beiden unteren Ellipsen begrenzt. Die äußersten Mantellinien des Bildes des Kegels sind die gemeinsamen Tangenten der oberen und der mittleren Ellipse. Diese Tangenten müssen sich auf  $a'$  in der Projektion  $K'$  der Kegelspitze schneiden. Der Grundkreis des Kegels ist vollständig sichtbar. Die Fläche des mittleren Kreises wird vom



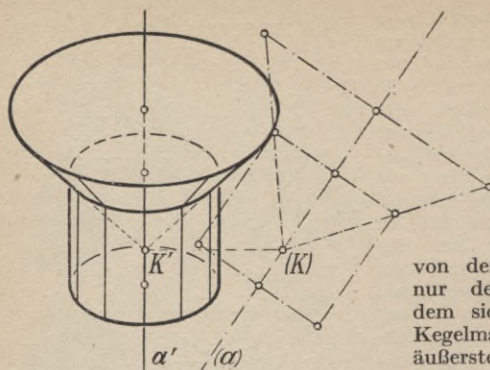


Fig. 45.

oberen Kreis und vom Kegelmantel, die Fläche d. unteren Grundkreises des Zylinders vom Zylindermantel vollständig verdeckt. Von der unteren Ellipse ist die eine Hälfte sichtbar,

von der mittleren Ellipse nur der Bogen, der auf dem sichtbaren Teile des Kegelmantels verläuft. Die äußersten Mantellinien der Projektion des Zylinders berühren die mittlere Ellipse in Punkten, die vom Kegelmantel verdeckt werden, können also selbst nur bis dahin sichtbar sein, wo sie die äußersten Mantellinien des Kegelbildes treffen.

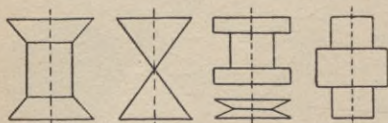


Fig. 46.

Aufgabe 46: In Fig. 46 sind die Achsenschnitte einiger Körper, die aus Kegeln und Zylindern zusammengesetzt sind, gegeben. Man zeichne diese Körper bei allgemeiner Lage ihrer Achse.

Aufgabe 47: Ein gerader Kreiskegel ist mit einer Geraden zu schneiden. (Fig. 47.)

Lösung: Der Kegel stehe auf der Tafel. In Fig. 47 ist er durch seinen Grundkreis und seine Höhe  $OK$  gegeben. Die Gerade ist durch die Punkte  $A$

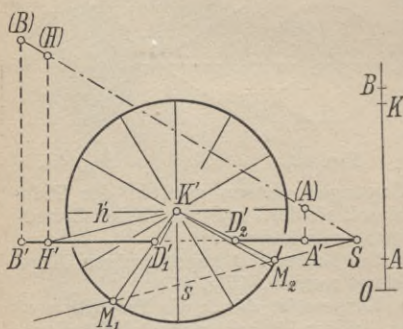


Fig. 47.

und  $B$  bestimmt. Die Hilfsebene durch die Gerade  $AB$  und die Kegelspitze  $K$  schneide den Mantel des Kegels in den Mantellinien  $KM_1$  und  $KM_2$ . Dann trifft die Gerade  $AB$  den Kegelmantel in ihren Schnittpunkten  $D_1$  und  $D_2$  mit den Mantellinien  $KM_1$  und  $KM_2$ . In der Zeichnung werden die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  als die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Spurgeraden  $s$  der Hilfsebene durch die Gerade  $AB$  und die Kegelspitze  $K$  bestimmt. Mit

Hilfe der Umlegung der projizierenden Ebene von  $AB$  ermittelt man den Spurpunkt  $S$  und den Punkt  $H$  der Geraden  $AB$ , der die gleiche Höhe wie  $K$  hat. Dann ist die Gerade  $H'K'$  die Projektion  $h'$  einer Höhenlinie  $h$  der Hilfsebene, deren Spurgerade  $s$  nun als die Parallele zu  $h'$  durch  $S$  gezeichnet werden kann.

Bei anderer Wahl von Kegel und Gerade kann die Spur  $s$  der Hilfsebene den Grundkreis berühren oder ihn auch gar nicht treffen. Im ersten Falle berührt die Gerade den Mantel. Sie ist eine Tangente, die Hilfsebene eine Tangentialebene des Kegels. Wenn  $s$  den Grundkreis nicht trifft, so hat auch die Gerade mit dem Kegelmantel keinen Punkt gemein.

**21. Projektion der Kugel.** Geht die Bildebene durch den Kugelmittelpunkt  $M$ , so schneidet sie die Kugel in einem Großkreise  $k$ . Dieser Kreis  $k$  ist der Umriß der Projektion der Kugel. Denn die Radien zu den nicht auf  $k$  liegenden Punkten der Kugel sind zur Tafel geneigt und erscheinen deshalb im Bilde verkürzt. Die Projektionen der Kugelpunkte liegen also im Innern von  $k$ . Wenn die Kugelmittelpunkt  $M$  nicht in der Bildebene liegt, denken wir uns die Tafel zunächst durch die Höhenebene durch  $M$  ersetzt. In dieser Höhenebene liegt der zur Tafel parallele Großkreis  $k$  der Kugel. Sein Bild  $k'$  ist der Umriß der Projektion der Kugel. Danach gilt: *Der Umriß der Projektion einer Kugel ist das Bild des zur Tafel parallelen Großkreises der Kugel.*

Im folgenden soll die Kugel stets so gewählt werden, daß ihr Mittelpunkt  $M$  in der Tafel liegt. Die Bildebene teilt dann die Kugel in zwei Halbkugeln, von denen die eine oberhalb, die andere unterhalb der Tafel liegt. Wird im Innern des Umrißkreises ein Punkt  $P'$  angenommen, so ist er das Bild von zwei symmetrisch zur Tafel gelegenen Kugelpunkten.

Aufgabe 48: Eine Kugel ist durch den Umriß  $k$  und ein Punkt  $P$  der oberen Kugelhälfte durch sein Bild  $P'$  im Innern von  $k$  gegeben. Wie hoch liegt  $P$ ? (Fig. 48.)

Lösung: Die zur Tafel lotrechte Ebene durch  $MP$  schneidet die Kugel in dem Großkreise  $k_1$ , dessen Projektion  $k_1'$  der Durchmesser  $AB$  von  $k$  ist. Senkrecht über  $P'$  auf  $k_1$  liegt  $P$ . Bei der Umlegung der Ebene des Kreises  $k_1$  geht  $k_1$  in den Umrißkreis  $k$ , der Punkt  $P$  in den Schnittpunkt ( $P$ ) von  $k$  mit dem Lot in  $P'$  zu  $AB$  über. Die Strecke  $P'(P)$  ist gleich der Höhe von  $P$ .

Aufgabe 49: Die Schnittpunkte von Kugel und Gerade sind zu ermitteln. (Fig. 49.)

Lösung: Die Kugel ist durch den Umrißkreis, die Gerade durch



zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Die projizierende Ebene der Geraden  $AB$  schneidet die Kugel in einem Kreise  $k_1$ , dessen Bild  $k_1'$  die auf  $A'B'$  liegende Sehne  $CD$  des Umrißkreises ist.  $CD$  ist Durchmesser von  $k_1$ . Die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  von  $AB$  mit  $k_1$  sind die Schnittpunkte der Geraden mit der Kugel. Durch die Umlegung der projizierenden Ebene der Geraden  $AB$  geht  $AB$  in  $(A)(B)$ , der Kreis  $k_1$  in den Kreis  $(k_1)$  über, dessen Mittelpunkt  $M_1$  die Mitte

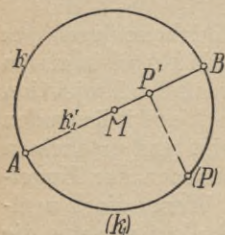


Fig. 48.

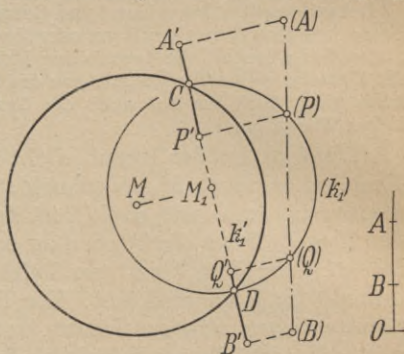


Fig. 49.

der Sehne  $CD$  und dessen Radius gleich  $M_1C$  ist.  $(A)(B)$  schneidet  $(k_1)$  in den Punkten  $(P)$  und  $(Q)$ . Die Fußpunkte  $P', Q'$  der Lote von  $(P)$  und  $(Q)$  auf  $A'B'$  sind die Projektionen, die Strecken  $P'(P)$  und  $Q'(Q)$  die Höhen von  $P$  und  $Q$ . Die Umlegung zeigt, daß  $P$  und  $Q$  auf der oberen Kugelhälfte liegen. Die Strecke  $PQ$  auf  $AB$  liegt im Innern der Kugel, ist also nicht sichtbar.

**22. Großkreise der Kugel.** Der Mittelpunkt aller Großkreise einer Kugel ist der Kugelmittelpunkt. Da wir die Tafel stets so legen, daß sie durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht, liegt die Hauptachse der Bildellipse eines Großkreises auf der Spurgeaden seiner Ebene, ist also ein Durchmesser des Umrißkreises der Kugel. Jede Ellipse, deren Hauptachse ein Durchmesser des Umrißkreises ist, ist die Projektion eines Großkreises der Kugel.

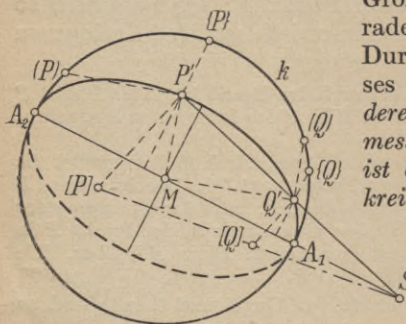


Fig. 50.

**Aufgabe 50:** Durch zwei Punkte  $P, Q$  einer Kugel soll der Großkreis gelegt werden. (Fig. 50.)

**Lösung:** Die Kugel ist durch den Umrißkreis,

die beiden auf der oberen Halbkugel liegenden Punkte  $P$  und  $Q$  sind durch ihre Projektionen  $P'$  und  $Q'$  gegeben. Die Ebene des Großkreises durch  $P$  und  $Q$  ist die Ebene des Dreiecks  $MPQ$ . Hat man nach Aufg. 48 die Höhen  $P'(P)$  und  $Q'(Q)$  der Punkte  $P$  und  $Q$  bestimmt, so wird mittels der Umlegung der projizierenden Ebene der Geraden  $PQ$  der Spurpunkt  $S$  dieser Geraden als der Schnitt von  $P'Q'$  mit  $[P][Q]$  gezeichnet. Dann ist  $MS$  die Spurgerade der Großkreisebene durch  $P$  und  $Q$ . Die Hauptachse der Bildellipse des Großkreises ist der auf  $MS$  liegende Durchmesser  $A_1A_2$  von  $k$ . Die Nebenachse wird nach Aufg. 31 ermittelt. Ist die Kugel undurchsichtig, so ist vom Großkreis nur der Halbkreis  $A_1QA_2$  sichtbar.

Zur Bestimmung der wahren Länge des Bogens  $PQ$  wird die Ebene des Großkreises um  $A_1A_2$  in die Tafel umgelegt. Dabei geht der Großkreis in den Umriß  $k$  über, die Punkte  $P$  und  $Q$  in die Schnittpunkte  $\{P\}$  und  $\{Q\}$  von  $k$  mit den Loten zu  $A_1A_2$  durch  $P'$  und  $Q'$ . Dann ist der Bogen  $\{P\}\{Q\}$  auf  $k$  gleich dem Bogen  $PQ$  auf dem Großkreise.

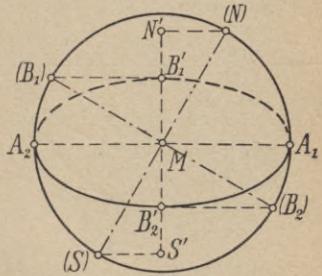


Fig. 51.

Zu jedem Großkreise gibt es einen zu seiner Ebene lotrechten Kugeldurchmesser. Er heißt die Achse des Großkreises. (Vgl. Nr. 19, Aufg. 37.) Seine Endpunkte sind die Pole des Großkreises. Die Erdachse ist Achse des Äquators, der Nord- und Südpol sind seine Pole.

**Aufgabe 51:** Auf einer Kugel wird ein Punkt  $N$  als Nordpol gewählt. Der Äquator soll gezeichnet werden. (Fig. 51.)

**Lösung:** Die Kugel ist durch ihren Umriß, der Nordpol  $N$  durch seine Projektion  $N'$  gegeben. Das Bild  $S'$  des Südpoles  $S$  ist der Spiegelpunkt zu  $N'$  in bezug auf  $M$ . Der Nordpol  $N$  liege auf der oberen Kugelhälfte. Die Ebene des Äquators ist zu  $NS$  senkrecht. Die Hauptachse seiner Bildellipse ist also der zu  $N'S'$  senkrechte Durchmesser  $A_1A_2$  des Kugelumrisses. Die Nebenachse wird nach Aufg. 37 mit Hilfe der Umlegung der projizierenden Ebene von  $NS$  bestimmt. Diese projizierende Ebene schneidet die Kugel in einem Großkreise, der bei der Umlegung in den Umrißkreis übergeht; dann liegen auch  $(N)$  und  $(S)$  auf dem Umriß. Der zu  $(N)$   $(S)$  senkrechte Durchmesser  $(B_1)(B_2)$  ist die Umlegung des Durchmessers des Äquators, dessen Projektion die Nebenachse  $B_1'B_2'$  der Bildellipse liefert. Vom Äquator ist im Bild nur der Bogen  $A_1B_2A_2$  sichtbar.

**Aufgabe 52:** Auf einer Kugel ist ein Großkreis gezeichnet, seine Pole sind zu bestimmen.

**Aufgabe 53:** Ein Meridian der Erdkugel soll gezeichnet werden. (Fig. 52.)



Lösung: Die Erdkugel ist durch den Umrißkreis, die Erdachse durch die Projektion  $N'$  des Nordpoles  $N$  gegeben. Wie in Aufg. 51 ist der Äquator gezeichnet worden. Der Meridian treffe den Äquator im Punkte  $O$ . Der Pol  $P$  des Meridians liegt auf dem Äquator und ist von  $O$  um  $90^\circ$  entfernt. Wir bestimmen  $P'$  mit Hilfe der Umlegung der Äquatorebene um die Gerade  $A_1A_2$ . Dabei geht  $O$  in  $(O)$  über. Das Lot in  $M$  zu  $(O)M$  trifft den Umriß in  $(P)$ . Dann ist die Projektion  $P'$  des Poles  $P$  der Schnittpunkt der Bildellipse des Äquators mit dem Lote von  $(P)$  auf  $A_1A_2$ . Nach Aufg. 51 ist die Hauptachse der Bildellipse des Meridians der zu  $P'M$  senkrechte Durchmesser  $C_1C_2$  des Umrißkreises. Von der Ellipse sind außer der Hauptachse noch die Punkte  $N', S', O'$  bekannt. Ihre Nebenachse ist also nach Aufg. 31 zu zeichnen.

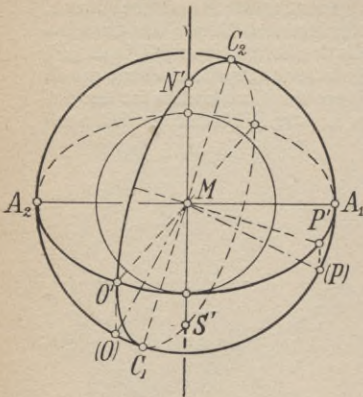


Fig. 52.

**23. Beliebige Kreise auf der Kugel.** Der Schnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des Lotes vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene ist.

Aufgabe 54: Der Schnitt von Kugel und Ebene ist zu zeichnen. (Fig. 53.)

Lösung: Die Kugel wird durch den Umriß, die Ebene durch die Spurgerade  $s$ , den Neigungswinkel  $\alpha$  und die Fallrichtung gegeben. Der Fußpunkt  $M_1$  des Lotes  $l$  von der Kugelmitte  $M$  auf die Ebene ( $s, \alpha$ ) ist der Mittelpunkt des Schnittkreises  $k_1$ . Die Projektion  $l'$  ist das Lot von  $M$  auf  $s$ . Die projizierende Ebene von  $l$  schneidet die Ebene ( $s, \alpha$ ) in einer Falllinie  $f$ , deren Bild  $f'$  mit  $l'$  zusammenfällt.

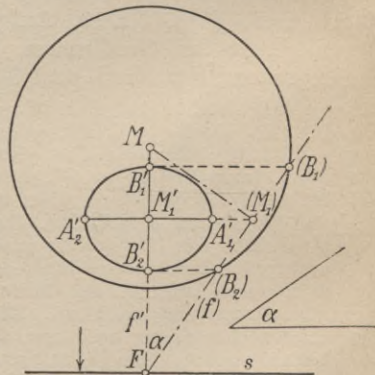


Fig. 53.

In der Umlegung bildet  $(f)$  mit  $f'$  den Winkel  $\alpha$ ;  $(l)$  ist das Lot von  $M$  auf  $(f)$ . Der Schnittpunkt von  $(l)$  mit  $(f)$  ist  $(M_1)$ . Die projizierende Ebene von  $f$  und  $l$  schneidet die Kugel in einem Großkreis. Die auf  $f$  liegende Sehne  $B_1B_2$  dieses Kreises ist ein Durchmesser des Schnittkreises. Da der Großkreis in der Umlegung mit dem Kugelumriß zusammenfällt, ist die auf  $(f)$  liegende Sehne  $(B_1)(B_2)$  gleich dem

Durchmesser des Schnittkreises, von dem nunmehr die Ebene ( $s$ ,  $a$ ), der Mittelpunkt  $M_1$  und der Radius ( $M_1$ ) ( $B_1$ ) bekannt sind. Seine Projektion kann nach Aufg. 36 gezeichnet werden. In Fig. 53 liegt der Schnittkreis auf der oberen Kugelhälfte, ist also vollständig sichtbar. Seine Projektion trifft in diesem Falle den Umriß nicht.

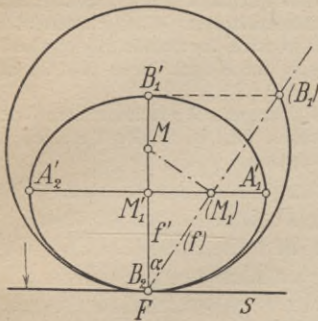


Fig. 54.

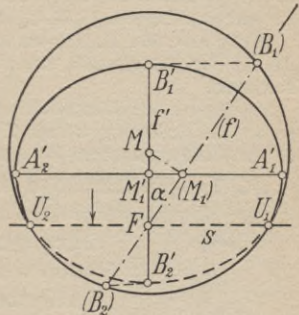


Fig. 55.

Anders gestaltet sich das Ergebnis, wenn die Spurgerade  $s$  der schneidenden Ebene den Kugelumriß berührt oder schneidet. In Fig. 54 ist  $s$  Tangente an den Umrißkreis. Der Berührungspunkt  $F$  ist der Nebenseitel  $B_2$  der Projektion des Schnittkreises. Trifft wie in Fig. 55

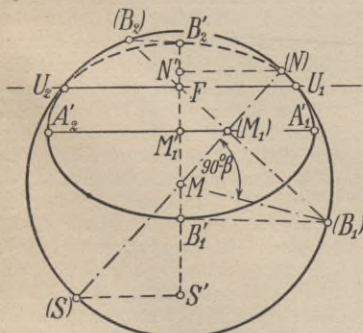


Fig. 56.

die Spur  $s$  den Kugelumriß in den Punkten  $U_1 U_2$ , so geht auch der Schnittkreis durch diese Punkte hindurch. Seine Projektion hat also die Punkte  $U_1$  und  $U_2$  mit dem Umriß gemein. Da aber kein Punkt der Projektion des Schnittkreises außerhalb des Kugelumrisses liegt, muß die Bildellipse den Umriß in  $U_1$  und  $U_2$  berühren. Der Bogen  $U_1 B_2 U_2$  liegt unterhalb der Tafel, ist also im Bilde nicht sichtbar.

Aufgabe 55: Der Breitenkreis von der nördlichen Breite  $\beta$  soll gezeichnet werden. (Fig. 56.)

Lösung: Die Kugel ist durch den Umriß, der Nordpol  $N$  durch seine Projektion  $N'$  gegeben. Der Mittelpunkt  $M_1$  des Breitenkreises liegt auf  $MN$ ; seine Ebene ist zur Erdachse lotrecht. In der projizierenden Ebene von  $MN$  liegt also der Durchmesser  $B_1 B_2$  des Breitenkreises, dessen Projektion  $B_1' B_2'$  die Nebenachse der Bild-



ellipse ist. Der Durchmesser  $B_1B_2$  ist Sehne des Großkreises, in dem die projizierende Ebene der Erdachse die Kugel schneidet. Die Kugelradien  $MB_1$  und  $MB_2$  bilden mit  $MN$  den Winkel  $90^\circ - \beta$ . Hier-nach lassen sich Achsen der Projektion des Breitenkreises mittels der Umlegung der projizierenden Ebene von  $MN$  konstruieren, wie dies in Fig. 56 eingezeichnet ist. Da die Spurgerade der Ebene des Breitenkreises den Umriß in den Punkten  $U_1, U_2$  schneidet, ist nur der Bogen  $U_1B_1U_2$  des Breitenkreises im Bilde zu sehen.

**Aufgabe 56:** Im Innern einer Kugel wird der Punkt  $M_1$  gegeben.  $M_1$  ist der Mittelpunkt eines Kreises  $k_1$  der Kugel. Sein Bild ist zu zeichnen.

**Aufgabe 57:** Das Gradnetz der Erdkugel soll gezeichnet werden, wenn die Erdachse a) zur Tafel lotrecht ist, b) in der Tafel liegt, c) zur Tafel unter dem Winkel  $\alpha$  geneigt ist.

**24. Tangentialebenen und Tangenten der Kugel.** Die Tangentialebene in dem Punkte  $P$  einer Kugel ist zum Berührungsradius  $MP$  senkrecht. Die Geraden der Tangentialebene, die durch den Berührungspunkt  $P$  gehen, heißen Tangenten der Kugel in  $P$ .

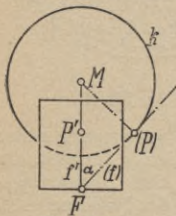


Fig. 57.

**Aufgabe 58:** Die Spurgerade  $s$  und der Neigungswinkel  $\alpha$  der Tangentialebene im Punkte  $P$  einer Kugel sollen ermittelt werden. (Fig. 57.)

**Lösung:** Die Kugel ist durch ihren Umriß  $k$ , der Punkt  $P$  der oberen Halbkugel durch seine Projektion  $P'$  gegeben. Die Tangentialebene ist die zu  $MP$  in  $P$  lotrechte Ebene. Nach Aufg. 21 wird ihre Spur mittels der Umlegung der projizierenden Ebene von  $MP$  gezeichnet. Die durch  $P$  gehende Falllinie  $f$  der Tangentialebene erscheint in dieser Umlegung als das Lot ( $f$ ) in  $(P)$  zu  $M(P)$ , d. h. als Tangente von  $k$  in  $(P)$ . Der Spurpunkt  $F$  von  $f$  ist der Schnittpunkt von  $(f)$  mit der Projektion von  $f'$ , die mit  $MP'$  zusammenfällt. Dann ist die Spur  $s$  die Senkrechte zu  $f'$  in  $F$ . Der Winkel  $P'F(P)$  ist gleich dem Neigungswinkel  $\alpha$ .

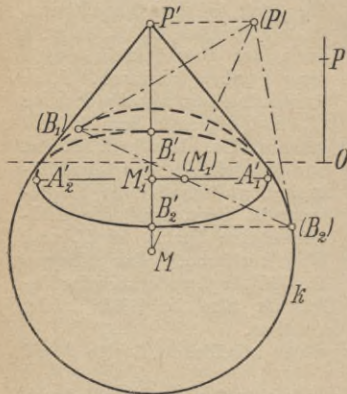


Fig. 58.

**Aufgabe 59:** Von einem Punkte  $P$  soll an eine Kugel der Tangentialkegel gelegt werden. (Fig. 58.)

**Lösung:** Die Tangenten von  $P$  an die Kugel bilden den Mantel eines geraden Kreiskegels, dessen Achse auf der Verbindungsgeraden des Punktes  $P$  mit der Kugelmittle  $M$  liegt. Die Berührungspunkte der Kugeltangenten durch  $P$  liegen auf einem Kugelkreis, dem Grund-

kreis des Kegels. In der projizierenden Ebene der Kegelachse liegt ein Großkreis der Kugel und die beiden Mantellinien  $PB_1$  und  $PB_2$  des Tangentialkegels, die den Großkreis in  $B_1$  und  $B_2$  berühren. Die Sehne  $B_1B_2$  ist Durchmesser des Grundkreises des Kegels. Wird nun die projizierende Ebene von  $MP$  in die Tafel umgelegt, so geht  $MP$  in  $M(P)$  über.  $(P)(B_1)$  und  $(P)(B_2)$  sind die Tangenten von  $(P)$  an den Umrißkreis  $k$ . Die weitere Konstruktion ergibt sich aus der Aufg. 41.

## DRITTER ABSCHNITT.

### DER SEITENRISS ALS HILFSEBENE

**25. Seitenrisse.** Ein wichtiges Hilfsmittel bei den bisherigen Konstruktionen war die Umlegung der projizierenden Ebene einer Geraden. Die bequeme Handhabung dieser Ebenen ist offenbar darin begründet, daß sie zur Bildtafel lotrecht stehen. Wir wollen nun dieses Konstruktionsverfahren dahin erweitern, daß wir an Stelle der projizierenden Ebenen von Geraden andere zur Tafel lotrechte Ebenen als Hilfsebenen verwenden, auf die wir die Gegenstände nochmals senkrecht projizieren. Diese zweite Bildebene wird in jedem einzelnen Falle so gewählt werden, daß in ihr die Gegenstände möglichst einfache Projektionen haben. Zur Unterscheidung nennen wir von jetzt ab die wagerechte Tafel die *Grundrißebene*, die senkrechte Projektion auf sie die *Grundrißprojektion* oder kurz den *Grundriß*. Die zur Grundrißtafel lotrechten Bildebenen heißen *Seitenrißebenen*, die senkrechten Projektionen auf sie *Seitenrißprojektionen* oder kurz *Seitenrisse*.

In Fig. 59 ist ein Punkt  $P$  durch seinen Grundriß  $P'$  und seine Höhe  $OP$  am Maßstab gegeben und eine Gerade  $a$  als Spurgerade einer Seitenrißebene gezeichnet worden. Die zur Seitenrißtafel lotrechten Projektionsstrahlen sind zur Grundrißebene parallel. Ihre Richtung wird durch den zu  $a$  senkrechten Pfeil gekennzeichnet. Der Seitenriß von  $P$  sei  $P''$ . Die durch die beiden Projektionsstrahlen  $PP'$  und  $PP''$  bestimmte Ebene ist zu beiden Tafeln, also auch zu  $a$  senkrecht. Sie schneide  $a$  in  $L$ . Dann sind  $P'L$  und  $P''L$  zu  $a$  lotrecht. Bei der Umlegung der Seitenrißebene um  $a$  in die Grundrißtafel geht also  $P''$  in einen



Punkt ( $P''$ ) auf der Verlängerung von  $P'L$  über, und zwar ist  $L(P'')$  gleich der Höhe  $OP$  von  $P$ , da der Projektionsstrahl  $PP''$  zur Grundrißebene parallel verläuft. In Fig. 59 haben wir noch die Umlegung ( $Q''$ ) eines Punktes  $Q$  gezeichnet, der unterhalb der Grundrißebene liegt. (Vgl. hierzu die Aufg. 1.)

Da wir *stets* die Umlegung der zur Grundrißtafel senkrechten Seitenrißebene zeichnen müssen, um den Seitenriß überhaupt erkennen zu können, wollen wir der Einfachheit halber das Einklammern der Bezeichnungen bei

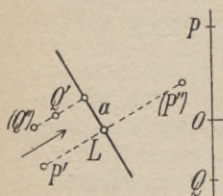


Fig. 59.

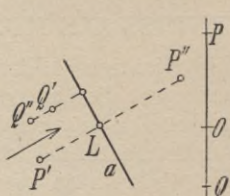


Fig. 60.

der Umlegung der Seitenrisse unterlassen (Fig. 60) und die Umlegung eines Seitenrisses kurz den Seitenriß nennen. Darüber vergesse man aber nie, daß die Seitenrißebenen in Wirklichkeit lotrecht zur Grundrißtafel stehen!

Zusammenfassend kann also gesagt werden: *Grundriß  $P'$  und Seitenriß  $P''$  eines Punktes  $P$  liegen auf einem Lote zur Spurgeraden  $a$  der Seitenrißebene. Der Abstand des Seitenrisses  $P''$  von der Spur  $a$  ist gleich der Höhe des Punktes  $P$  über der Grundrißtafel.*

Die folgenden Nummern zeigen, wie Seitenrisse als Hilfsmittel bei der Lösung von Aufgaben benutzt werden können.

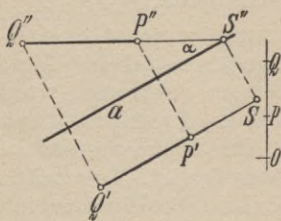


Fig. 61.

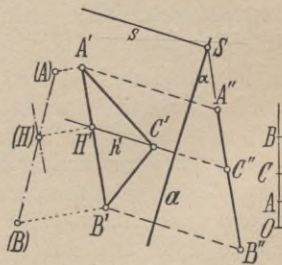


Fig. 62.

## 26. Aufgaben über Geraden und Ebenen.

Aufgabe 60: Die wahre Länge einer Strecke  $PQ$  ist zu bestimmen. (Fig. 61.)

Lösung: Wir wählen eine zur Strecke  $PQ$  parallele Seitenrißebene. Ihre Spur  $a$  ist zu  $P'Q'$  parallel. Dann ist der Seitenriß  $P''Q''$  ebenso lang wie die Strecke  $PQ$ . Der Schnittpunkt  $S''$  von  $P''Q''$  mit  $a$  ist der Seitenriß des Spurpunktes  $S$  der Geraden  $PQ$ . Der spitze Winkel, den  $P''S''$  mit  $a$  bildet, ist gleich dem Neigungswinkel  $\alpha$  von  $PQ$ .

Aufgabe 61: Eine Ebene ist durch das Dreieck  $ABC$  gegeben. Eine Seitenrißtafel soll so gewählt werden, daß der Seitenriß der Dreiecksebene eine Gerade ist. (Fig. 62.)

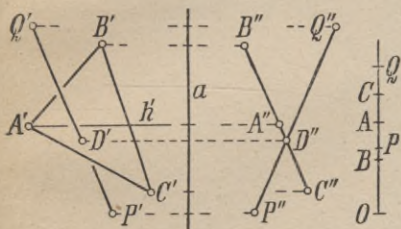


Fig. 63.

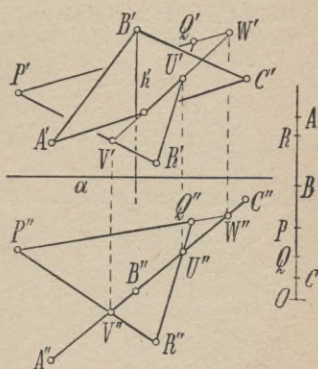


Fig. 64.

Lösung: Die Seitenrißtafel muß senkrecht zur Ebene  $ABC$  aufgestellt werden. Da die Seitenrißtafel auch zur Grundrißebene senkrecht steht, ist sie also lotrecht zur Spurgeraden und zu den Höhenlinien der Dreiecksebene zu wählen. Wir konstruieren die Projektion  $h'$  der Höhenlinie  $h$  durch den Punkt  $C$  der Ebene  $ABC$  und zeichnen dann die Spur  $a$  der Seitenrißebene zu  $h'$  senkrecht. Die zu den Höhenlinien senkrechte Seitenrißebene ist zu den Falllinien der Dreiecksebene parallel. Der Winkel, den  $A''B''C''$  mit  $a$  bildet, ist also gleich dem Neigungswinkel  $\alpha$  der Ebene  $ABC$ . Der Schnittpunkt  $S$  von  $a$  mit  $A''C''B''$  ist ein Punkt der Spurgeraden  $s$  der Dreiecksebene.  $s$  ist zu  $a$  senkrecht.

Aufgabe 62: Der Schnittpunkt  $D$  der Ebene  $ABC$  mit der Geraden  $PQ$  soll gezeichnet werden. (Fig. 63.)

Lösung: Die Seitenrißtafel wird senkrecht zu den Höhenlinien der Dreiecksebene gewählt. Dann ist der Seitenriß  $A''B''C''$  der Dreiecksebene eine Gerade. Der Schnittpunkt  $D''$  von  $A''B''C''$  mit  $P''Q''$  ist der Seitenriß des Schnittpunktes  $D$ . Der Grundriß  $D'$  liegt auf  $P'Q'$  und auf dem Lote durch  $D''$  zu  $a$ . Der Seitenriß läßt auch erkennen, wie weit die Gerade vom Dreieck verdeckt wird.

Aufgabe 63: Die Schnittgerade der beiden Ebenen  $ABC$  und  $PQR$  ist zu zeichnen. (Fig. 64.)

Lösung: Man wähle eine Seitenrißtafel, die zu einer der beiden Ebenen, etwa  $ABC$  lotrecht ist. Dann bestimmt man, wie in der vorigen Aufgabe, die Schnittpunkte  $U, V, W$  der Geraden  $QR, RP$



und  $PQ$  der Ebene  $PQR$  mit der Ebene  $ABC$ . Die Punkte  $U, V, W$  liegen auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

**Aufgabe 64:** Eine auf der Grundrißtafel stehende Pyramide soll mit einer Ebene geschnitten werden. (Fig. 65.)

**Lösung:** Als Grundfläche der Pyramide ist das Dreieck  $123$  gewählt worden. Die Pyramidenspitze  $P$  ist durch die Projektion  $P'$  und die Höhe  $OP$  am Maßstab gegeben. Die schneidende Ebene ist durch die Spurgerade  $s$ , den Neigungswinkel  $\alpha$  und die Fallrichtung bestimmt. Wir benutzen eine zur Ebene  $(s, \alpha)$  lotrechte Seitenrißtafel, deren Spur  $a$  senkrecht zu  $s$  zu wählen ist. Der Seitenriß der Ebene

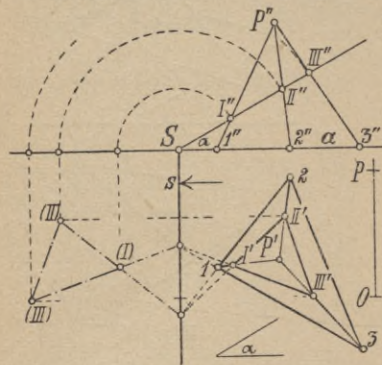


Fig. 65.

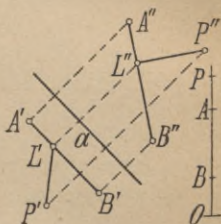


Fig. 66.

$(s, \alpha)$  ist die Gerade  $f''$ , die durch den Schnittpunkt  $S$  von  $s$  mit  $a$  geht und mit  $a$  den Winkel  $\alpha$  bildet. Der Seitenriß  $1'' 2'' 3''$  der Grundfläche  $123$  liegt auf der Spurgeraden  $a$ . Nun kann man nach Aufg. 61 die Schnittpunkte  $I, II, III$  der Kanten  $P1, P2, P3$  der Pyramide mit der Ebene  $(s, \alpha)$  bestimmen oder nach Aufg. 63 die Schnittgeraden der Seitenflächen der Pyramide mit der gegebenen Ebene ermitteln.

Soll noch die wahre Gestalt der Schnittfigur gezeichnet werden, so drehen wir ihre Ebene so weit um die Spurgerade  $s$ , bis sie in der Grundrißtafel liegt. Die wahren Abstände der Eckpunkte  $I, II, III$  von der Drehgeraden  $s$  entnehmen wir dabei aus dem Seitenriß als die Strecken  $SI'', SI'''$  und  $SI''''$ .

**Aufgabe 65:** Von einem Punkte  $P$  soll auf eine Gerade  $AB$  das Lot gefällt werden. (Fig. 66.)

**Lösung:** In einer zur Geraden  $AB$  parallelen Seitenrißtafel erscheint das Lot von  $P$  auf  $AB$  als die Senkrechte von  $P''$  auf  $A''B''$ . Der Schnittpunkt  $L''$  dieser Senkrechten mit  $A''B''$  ist der Seitenriß des Fußpunktes  $L$  des Lotes. Der Grundriß  $L'$  liegt auf  $A'B'$  und auf dem Lote durch  $L''$  zu  $a$ . Die Länge des Lotes  $PL$  kann nach Aufg. 60 bestimmt werden.

**Aufgabe 66:** Der Abstand zweier zueinander parallelen Geraden soll ermittelt werden.

**Aufgabe 67:** Von einem Punkte  $P$  soll auf die Ebene  $ABC$  das Lot  $l$  gefällt werden. (Fig. 67.)

Lösung: Der Grundriß  $l'$  von  $l$  ist senkrecht zur Projektion  $h'$  der Höhenlinie  $h$  der Ebene  $ABC$ . Um den Fußpunkt  $L$  des Lotes  $l$  zu bestimmen, benutzen wir eine zur Ebene  $ABC$  lotrechte Seitenrißtafel. Dann ist der Seitenriß  $l''$  das Lot von  $P''$  auf die Gerade  $A''B''C''$ . Der Schnittpunkt  $L''$  von  $l''$  mit  $A''B''C''$  ist der Seitenriß des Fußpunktes  $L$  des Lotes  $l$ .

### 27. Aufgaben über krumme Gebilde.

Aufgabe 68: Von einem Kreise ist der Radius  $r$ , die Achse  $AB$  und der Mittelpunkt  $M$  auf  $AB$  gegeben. Der Kreis ist zu zeichnen. (Fig. 68.)

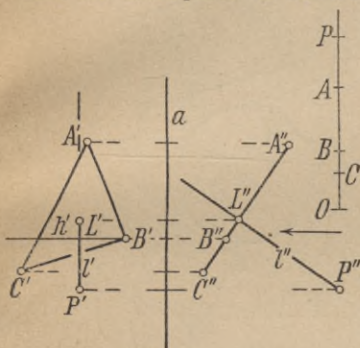


Fig. 67.

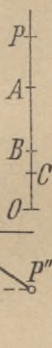
Falllinie der Kreisebene und sein Grundriß  $B_1'B_2'$  ist demnach die Nebenachse der Bildellipse. Aus dem Seitenriß ist auch zu erkennen, daß der Radius  $MB_1$  eine Strecke der Achse  $AB$  verdeckt.

Aufgabe 69: Das Bild eines auf der Grundrißtafel liegenden geraden Kreiskegels ( $r, h$ ) soll gezeichnet werden. (Fig. 69.)

Lösung: Der Kegel liege längs der Mantellinie  $KB_1$  auf der Grundrißtafel auf. In einer zu dieser Mantellinie  $KB_1$  parallelen Seitenrißebene erscheint der Kegel als Dreieck  $B_1''K''B_2''$ , das dem Achsenschnitt des Kegels kongruent ist. Die Konstruktion der Bildellipse des Grundkreises erfolgt wie in Aufg. 68; die Zeichnung des Kegels wird dann nach Aufg. 41 vollendet.

Aufgabe 70: Ein auf der Grundrißtafel liegender Zylinder ( $r, h$ ) ist mit einer Geraden zu schneiden. (Fig. 70.)

Lösung: Die zur Zylinderachse  $M_1M_2$  parallele Ebene durch die gegebene Gerade  $PQ$  schneidet den Zylindermantel in zwei Mantellinien. Die Schnittpunkte  $D_1, D_2$  der Geraden  $PQ$  mit diesen



Lösung: Nach Aufg. 37 ist die Hauptachse  $A_1'A_2'$  der Bildellipse zu  $A'B'$  senkrecht und gleich dem Durchmesser  $2r$  des Kreises. Die Nebenachse  $B_1'B_2'$  liegt auf  $A'B'$ . Um ihre Endpunkte  $B_1', B_2'$  zu ermitteln, wird eine zur Kreisachse  $AB$  parallele, also zur Kreisebene senkrechte Seitenrißebene benutzt. In ihr erscheint der Kreis als die in  $M''$  zu  $A''B''$  senkrechte Strecke  $B_1''B_2''$  von der Länge  $2r$ , die im besonderen der Seitenriß des zur Seitenrißtafel parallelen Kreisdurchmessers  $B_1B_2$  ist. Dieser Durchmesser liegt auf einer

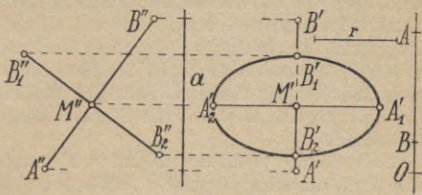


Fig. 68.



Mantellinien sind die gesuchten Schnitte der Geraden mit dem Zylindermantel.

Im Grundriß erscheint der Zylinder als das Rechteck  $A'B'C'D'$ , dessen Seiten  $A'B'$  und  $C'D'$  die Projektionen der Grundkreise und dessen Seiten  $A'D'$  und  $B'C'$  die Bilder der Mantellinien  $AD$  und  $BC$  sind, die in der Höhenebene durch die Zylinderachse  $M_1M_2$  liegen. In einer zu  $M_1M_2$  lotrechten Seitenrißebene erscheint der Zylinder als Kreis  $k''$  vom Radius  $r$ , der die Spur  $a$  in ihrem Schnitt-

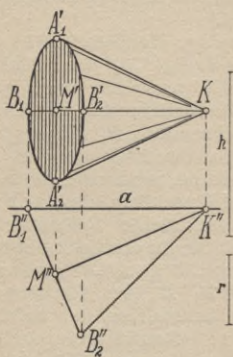


Fig. 69.

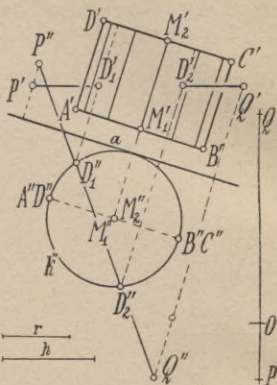


Fig. 70.

punkte mit der Verlängerung von  $M_1'M_2'$  berührt. Der Seitenriß  $P''Q''$  der Geraden  $PQ$  ist zugleich der Seitenriß der zur Zylinderachse parallelen Hilfsebene durch  $PQ$ . Die Schnittpunkte  $D_1'', D_2''$  sind also die Seitenrisse der Mantellinien, in denen diese Hilfsebene den Zylindermantel schneidet und damit auch die Seitenrisse der Punkte  $D_1, D_2$ , in denen  $PQ$  den Zylindermantel trifft. Vom Zylindermantel ist nur die oberhalb des Rechteckes  $ABCD$  liegende Hälfte sichtbar, die im Seitenriß als der Halbkreis  $A''D_2''B''$  erscheint. Danach ergibt sich die in Fig. 70 angedeutete Sichtbarkeit im Grundriß.

Bei anderer Wahl der Geraden  $PQ$  kann es vorkommen, daß die zur Zylinderachse parallele Hilfsebene mit dem Mantel nur eine Mantellinie gemein hat oder ihn überhaupt nicht trifft. Im ersten Falle ist die Hilfsebene *Tangentialebene* und die Gerade  $PQ$  *Tangente des Zylinders*.

Aufgabe 71: Der Schnittkreis zweier Kugeln soll gezeichnet werden. (Fig. 71.)

Lösung: Die Kugeln sind durch ihre Mittelpunkte  $M_1, M_1$  und die Umrißkreise  $k'_1, k'_1$  im Grundriß gegeben. (Man beachte, daß jetzt die Mittelpunkte nicht wie bei den Aufgaben in Nr. 22—25 in der Grundrißtafel liegen.) Wenn sich die beiden Kugeln überhaupt schneiden, so ist die Schnittkurve ein Kreis, dessen Achse die Verbindungsgerade  $M_1M_1$  der Kugelmitten ist. Wir wählen also eine

zu  $M_1M_2$  parallele Seitenrißebene. In diesem Seitenriß haben die Kugeln die Umrißkreise  $k_2''$  und  $k_{II}''$ , die die gleichen Radien wie die Kreise  $k'_1$  und  $k'_I$  haben und deren Mittelpunkte  $M_1''$  und  $M_I''$  die Seitenrißprojektionen von  $M_1$  und  $M_I$  sind. Die gemeinsame Sehne  $B_1''B_2''$  von  $k_2''$  und  $k_{II}''$  ist der Seitenriß  $k''$  des Schnittkreises  $k$  der beiden Kugeln. Der Grundriß  $k'$  von  $k$  wird nach Aufg. 68 konstruiert.

Die zur Grundrißtafel parallelen Kreise  $k_1$  und  $k_I$  haben als Seitenrisse die zu  $a$  parallelen Durchmesser  $k_1''$  und  $k_I''$  von  $k_2''$  und  $k_{II}''$ . Die

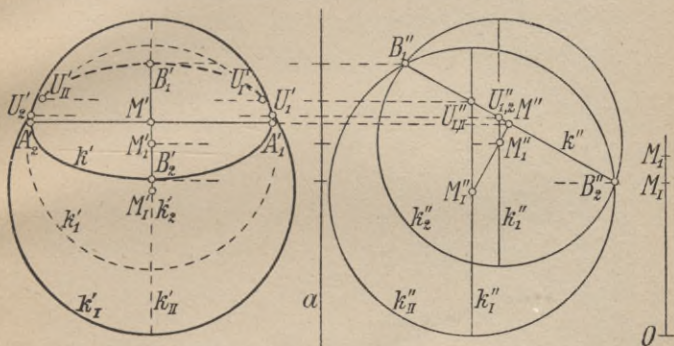


Fig. 71.

Schnittpunkte  $U_1'', 2$  und  $U_I'', II$  von  $k''$  mit  $k_1''$  und  $k_I''$  sind die Seitenrisse der Punkte  $U_1, U_2$  und  $U_I, U_{II}$ , in denen der Schnittkreis  $k$  die Umrißkreise  $k_1$  und  $k_I$  der beiden Kugeln trifft. Die Ellipse  $k'$  berührt also nach Aufg. 53 die Umrißkreise  $k'_1$  und  $k'_I$  in den Punkten  $U_1', U_2'$  und  $U_I', U_{II}'$ . Der Kreis  $k$  liegt im Falle der Fig. 71 zwar bis zu den Punkten  $U_1, U_{II}$  auf der oberen Hälfte der Kugel um  $M_1$ , ist aber im Grundriß doch nur bis zu seinen Schnittpunkten  $U_1$  und  $U_2$  mit  $k_1$  sichtbar, weil die Bogen  $U_1U_I$  und  $U_2U_{II}$  von der Kugel um  $M_1$  bereits verdeckt werden.





---

Als Band II des vorliegenden Buches erscheint von demselben Verfasser:

## GRUND- UND AUFRISSVERFAHREN.

### ALLGEM. PARALLELPROJEKTION. PERSPEKTIVE

(Math.-Phys. Bibliothek, Bd. 67.)

---

**Einführung in die darstellende Geometrie.** Von Prof. *P. B. Fischer*, Studienrat am Gymnasium Berlin-Steglitz. Mit 59 Fig. im Text. [91 S.] 8. 1921. (ANuG Bd. 541.) Geb. RM 2.—

Der Verfasser behandelt die Grundlehren der darstellenden Geometrie an der Hand der wichtigsten Aufgaben, um so in erster Linie eine Anleitung für den Selbstunterricht zu bieten. Aus dem gleichen Grunde werden in der Einleitung Anweisungen für das praktische Zeichnen gegeben, wie auch die notwendige Raumschauung dadurch gefördert wird, daß zunächst Projektionen auf nur einer Tafel Ebene in Betracht gezogen werden, wodurch das zweite Tafelverfahren dann um so leichter verständlich wird. Wenn die Darstellung sich auch auf das Wichtigste beschränkt, so reichen doch die 180 „Grundaufgaben“ in alle Hauptgebiete der darstellenden Geometrie (Schatten, Durchdringungen, Axonometrie, Perspektive) hinein.

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. *M. Großmann*, Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochsch. Zürich. Bd. I. 2., erw. Aufl. Mit 134 Fig. u. 100 Übungsaufgaben. [VI u. 81 S.] 8. 1922. Kart. RM 2.20. Bd. II. 2., erw. Aufl. Mit 144 Fig. [VI u. 154 S.] 8. 1921. (Teubn. techn. Leitfäden Bd. 2 u. 3.) Kart. RM 4.—

Die beiden Bände bilden ein Ganzes. Das erste kann auch zum Selbststudium der elementaren Teile der darstellenden Geometrie dienen; im zweiten werden zuerst die Darstellungsmethoden vollständig dargelegt, hierauf die Kurven und Flächen behandelt.

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen.** Von Hofrat Dr. *E. Müller*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. I. Bd. 3. Aufl. Mit 289 Fig. u. 3 Taf. [XIV u. 370 S.] gr. 8. 1920. Geh. RM 10.—, geb. RM 12.—. II. Bd. 3. Aufl. Mit 328 Fig. i. Text. [X u. 362 S.] gr. 8. 1923. Geh. RM 9.—, geb. RM 11.—

„... Das meisterlich geschriebene Werk ist als eins unserer besten Lehrbücher zu bezeichnen und den Studierenden der Technischen Hochschulen aufs angelegentlichste zu empfehlen.“  
(Archiv der Mathematik und Physik.)

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. *J. Hjelmstev*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Kopenhagen. Mit 305 Abb. [IX u. 320 S.] 8. 1914. (Handb. der ang. Math. Bd. 2.) Geh. RM 9.—, geb. RM 11.—

„Von ganz hervorragendem mathematischen Wert ist die geradezu meisterhafte Behandlung der ebenen Kurven und der Raumkurven. Jeder, der das Buch zur Hand nimmt, wird Gewinn davon haben: der Student, der mathematische Forscher, der Mathematiklehrer — kurz ein vortreffliches Buch.“  
(Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht.)

**Darstellende Geometrie des Geländes und verwandte Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen.** Von Dr. *R. Rothe*, Prof. an der Technischen Hochschule Berlin. 2., verbesserte Aufl. Mit 107 Fig. i. Text. [VI u. 92 S.] kl. 8. 1919. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 35/36.) Kart. RM 2.40

Behandelt in elementarer Weise die Sätze der darstellenden Geometrie des Geländes und ihre praktische Anwendung in Vermessungs- u. Kartenkunde, Tiefbau, Geologie u. Bergbaukunde.

---

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin



**Karte und Kroki.** Erläuterte Herstellung und Lesen von Karten aller Art mit besond. Berücksichtigung einfacher Methoden. Von Dr. *H. Wolff*, ständ. Assist. u. Dozent an der Techn. Hochschule Berlin. M. 47 Fig. i. T. [IV u. 58 S.] kl. 8. 1917. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 27.) Kart. RM 1.20

Im 1. Teil wird ein Überblick über alle Arbeiten gegeben, die zur Herstellung unserer Generalstabkarten nötig sind. Auch die Benutzung der Karten, das Kartenlesen, wird eingehend erklärt. Der 2. Teil beschäftigt sich mit der Anfertigung von Skizzen und Krokis.

**Photogrammetrie.** (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie.) Von Dr.-Ing. *H. Lüscher*, Jena. Mit 78 Fig. im Text und auf 2 Tafeln. [128 S.] kl. 8. 1920. (ANuG Bd. 612.) Geb. RM 2.—

Eine umfassende, durch zahlreiche Abbildungen veranschaulichte Darstellung der gesamten Photogrammetrie, ihrer wissenschaftlichen Grundlagen und neuesten Verfahren für die praktischen Anwendungen insbesondere des Vermessungsingenieurs, die sich für den Selbstunterricht wie als Wegweiser für das Studium und die Praxis gleich brauchbar erweisen wird.

**Landmessung.** Von Geh. Finanzrat *F. Suckow*, Berlin. Mit 69 Zeichnungen im Text. [116 S.] 8. 1919. (ANuG Bd. 608.) Geb. RM 2.—

Nach einer historischen Einleitung gibt der Verfasser zunächst einen Überblick über die verschiedenen landmesserischen Arbeitsmethoden im allgemeinen, um dann die geometrische und trigonometrische Horizontalaufnahme unter Berücksichtigung der Kartenanfertigung und der Flächeninhaltsberechnung zu behandeln. Der zweite Hauptteil erörtert das Nivellement und die dazu benötigten Geräte. — Zahlreiche abgeleitete Formeln und durchgerechnete Beispiele erleichtern das Eindringen in den Stoff, für dessen Verständnis nur geringe mathematische Vorkenntnisse vorausgesetzt werden.

**Einführung in die projektive Geometrie.** Von Dr. *M. Zacharias*, Stud.-Rat a. d. Vereinigt. Friedrichs- u. Humboldt-Gymnasium in Berlin. 2. Aufl. M. 18 Fig. [IV u. 51 S.] 8. 1922. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 6.) Kart. RM 1.20

„Der Leser bekommt ein klares Bild von der Entstehung der projektiven Geometrie, er kann verfolgen, wie sie sich allmählich zur ‚Geometrie der Lage‘ entwickelt hat. Müheles lernt er eine Reihe der wichtigsten Lehrsätze in diesem Gebiete kennen und sieht, welche Aufgaben mit Hilfe dieser Sätze gelöst werden können. Gute, in den Text eingereihte Figuren unterstützen im hohen Maße das Verständnis der theoretischen Ausführungen. Wir können die Schrift bestens empfehlen.“ (Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst)

**Geometrisches Zeichnen.** Von *A. Schudeisky*, akad. Zeichenlehrer in Gleiwitz. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. [IV u. 99 S.] 8. 1919. (ANuG Bd. 568.) Geb. RM 2.—

**Geometrisches Zeichnen. Projektionslehre. Flächenmessung.**

**Körpermessung.** Von Dr. *R. Neuendorff*, Prof. an der Univ. Kiel. (Praktische Mathematik Bd. 2.) Mit 133 Fig. (IV u. 104 S.) 8. 1918. (ANuG Bd. 526.) Geb. RM 2.—

**Projektionslehre.** Die rechtwinkl. Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung techn. Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinkl. Parallelprojektion in kurzer, leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht u. Schulgebrauch. Von *A. Schudeisky*, akad. Zeichenlehrer in Gleiwitz. 2. Aufl. Mit 165 Abb. i. Text. [V u. 90 S.] 8. 1923. (ANuG Bd. 564.) Geb. RM 2.—

**Grundzüge der Perspektive** nebst Anwendungen. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *K. Doehle*, weil. Prof. a. d. Techn. Hochschule München. 2., verb. Aufl. Mit 91 Fig. und 11 Abb. [108 S.] 8. 1919. (ANuG Bd. 510.) Geb. RM 2.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA

KRAKÓW

S. 61

S-96

## Mathematisch-Physikalische Bibliothek

### Fortsetzung der 2. Umschlagseite

- Darstellende Geometrie des Geländes und verwandte Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36.)
- Karte und Krok. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
- Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zähle. (Bd. 11.)
- Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. 2. Aufl. (Bd. 6.)
- Funktionen, Schaubilder, Funktionstabellen. Von A. Witting. (Bd. 48.)
- Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey. I. Die Funktionsleiter. 2. Aufl. II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. 2. Aufl. (Bd. 28. u. 37.)
- Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Von A. Rohrberg. 3. Aufl. (Bd. 23.)
- Mathematische Instrumente. Von W. Zabel. I. Hilfsmittel und Instrumente zum Rechnen. II. Hilfsmittel und Instrumente zum Zeichnen. [U. d. Pr. 1926.] (Bd. 59 u. 60.)
- Die Anfertigung mathematischer Modelle. (Für Schüler mittlerer Klassen.) Von K. Giebel. 2. Aufl. (Bd. 16.)
- Mathematik und Logik. Von H. Behmann. [In Vorb. 1926.]
- Mathematik und Biologie. Von M. Schips. (Bd. 42.)
- Die mathematischen Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (Band 24.)
- Die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Musik. Von J. Peters. (Bd. 55.)
- Mathematik und Malerei. 2 Bände in 1 Band. Von G. Wolff. 2. Aufl. (Bd. 20/21.)
- Elementarmathematik und Technik. Eine Sammlung elementarmathematischer Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. Von R. Rothe. (Bd. 54.)
- Finanz-Mathematik. (Zinsseszinsen-, Anleihe- und Kursrechnung.) Von K. Herold. (Bd. 56.)
- Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Von H. Schütze. (Bd. 46.)
- Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
- Gehelmnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 3. Aufl. (Bd. 13.)
- Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 3. Aufl. (Bd. 52.)
- Trugschlüsse. Gesammelt von W. Lietzmann. 3. Aufl. (Bd. 53.)
- Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)
- Das Delische Problem (Die Verdoppelung des Würfels). Von A. Herrmann. (Bd. 68.)
- Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)
- Scherzaufgaben und Probleme. Von J. Preuß. [In Vorb. 1926.]
- Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)
- Kreisel. Von M. Winkelmann. [In Vorb. 1926.]
- Atom- und Quantentheorie. Von P. Kirchberger. I. Atomtheorie. II. Quantentheorie. (Bd. 44 u. 45.)
- Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
- Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)
- Drahtlose Telegraphie und Telephonie in ihren physikalischen Grundlagen. Von W. Ilberg. (Bd. 62.)
- Optik. Von E. Günther. [In Vorb. 1926.]
- Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. 2. Aufl. [U. d. Pr. 1926.] (Bd. 17.)
- Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Barneck. (Bd. 29.)
- Mathematische Himmelskunde. Von O. Knopf. (Bd. 63.)
- Mathem. Streitzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)
- Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2., umgearb. Aufl. (Bd. 8.)
- Beobachtung des Himmels mit einfachen Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
- Grundzüge der Meteorologie, ihre Beobachtungsmethoden und Instrumente. Von W. König. (Bd. 70.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301648

Kdn. Zam. 480/55 20.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296008