

MATHEMATISCH-
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK
REIHE I

67

W. KRAMER
EINFÜHRUNG
IN DIE DARSTELLENDEN
GEOMETRIE

ZWEITER TEIL



LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN

50
88
aII

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000296007

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE
BIBLIOTHEK

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

67

EINFÜHRUNG
IN DIE DARSTELLENDEN
GEOMETRIE


VON

DR. WERNER KRAMER

II. TEIL

SENKRECHTE PROJEKTION AUF ZWEI TAFELN
KEGELSCHNITTE

MIT 67 FIGUREN IM TEXT

Pädagogische Bücherei
beim Oberpräsl. Breslau
Abt.  Schulwesen

Zugangsverzeichnis Nr. 1940/230

Sachkatalog: 20 Nr. 88 e, II

1929

LEIPZIG UND BERLIN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

W 1/3

250



~~I 386~~

KD 513(023)



I 301647

Akc. Nr. 2566 | 51

BPK-B-128/2017

VORWORT

Entgegen dem ursprünglichen Plane wird in diesem Bändchen nur die senkrechte Projektion auf zwei Tafeln behandelt, da sich bei der Ausarbeitung zeigte, daß es nur so möglich war, mehr zu geben, als jetzt schon in den Lehrbüchern für höhere Schulen enthalten ist, und insbesondere auch einen mathematisch exakten Aufbau zu bieten. Damit wird das Bändchen zur Benutzung bei Arbeitsgemeinschaften an höheren Lehranstalten und auch zum eigenen Studium geeignet. Für den Gebrauch neben dem Unterricht wird die besondere Betonung der Kegelschnitte und ihrer Projektionen willkommen sein.

Das dritte abschließende Bändchen soll Schattenkonstruktionen, die allgemeine Parallelprojektion und die Zentralprojektion enthalten.

Altdöbern (N.-L.), März 1929.

Werner Kramer.

INHALT

	Seite
1. Abschnitt: Punkt, Gerade, Ebene, ebenflächige Gebilde . . .	1
1. Grundriß und Aufriß	1
2. Gerade im Grundriß und Aufriß	3
3. Wahre Länge von Strecken	5
4. Ebene im Grundriß und Aufriß	7
5. Höhen- und Abstandslinien der Ebene	9
6. Schnitte von Geraden mit Ebenen	11
7. Schnitte von Ebenen mit Ebenen	12
8. Lote auf Ebenen	14
9. Bestimmung der wahren Gestalt ebener Figuren	15
10. Projektion ebener Figuren von gegebener Gestalt	17
2. Abschnitt: Kreis, Kegel, Zylinder, Kugel	19
11. Kreis im Grundriß und Aufriß	19
12. Tangentialebenen des Kreiskegels und Kreiszyinders.	22
13. Kugel im Grundriß und Aufriß	23
14. Tangenten und Tangentialebenen der Kugel	26
3. Abschnitt: Erzeugung und Eigenschaften der Kegelschnitte	27
15. Konjugierte Durchmesser der Ellipse	27
16. Brennpunkte der Ellipse	28
17. Leitlinien der Ellipse	31
18. Die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels	31
19. Ellipse als Kegelschnitt.	32
20. Die Hyperbel	34
21. Leitlinien der Hyperbel	36
22. Asymptoten der Hyperbel	36
23. Krümmungskreise in den Hyperbelscheiteln	38
24. Die Parabel	39
25. Der Krümmungskreis im Scheitel der Parabel	40
26. Tangenten der Parabel	41
27. Senkrechte Projektion der Kegelschnitte	43
28. Aufgaben über die senkrechte Projektion der Kegelschnitte	45
29. Abwicklung des Zylinder- und Kegelmantels.	48

ERSTER ABSCHNITT

PUNKT, GERADE, EBENE, EBENFLÄCHIGE GEBILDE

1. Grundriß und Aufriß. Im I. Teil¹⁾ wurde auf eine einzige Tafel senkrecht projiziert. Dabei war ein Punkt P des Raumes bestimmt, wenn sein Bildpunkt P' und seine Höhe über der Tafel an einem Maßstabe gegeben waren. Im 3. Abschnitt des I. Teiles haben wir neben der Grundrißtafel eine Seitenrißebene benutzt und gezeigt, daß der Seitenriß die Höhen der Punkte enthält. Man kann also den Höhenmaßstab durch die senkrechte Projektion auf eine zur Grundrißebene senkrechte Tafel ersetzen. Auf diese Weise gelangen wir zur *senkrechten Projektion auf zwei Tafeln*. Hierbei soll aber nicht wie früher der Seitenriß in jedem Falle besonders gewählt werden, sondern der zweiten Tafel wird von *vornherein eine feste Stellung* zugewiesen. Wir wählen die Spurgerade der Seitenrißebene parallel zum oberen Rand des Zeichenblattes, weil bei dieser Wahl Reißschiene und Zeichendreieck für die Konstruktionen am bequemsten benutzt werden können. Die so bestimmt gewählte Seitenrißebene heißt die *Aufrißebene*; ihre Spurgerade in der Grundrißtafel wird die *Projektionsachse* genannt. Nach den Ergebnissen von I, 25 gilt dann: *Der Grundriß P' und der Aufriß P'' eines Punktes P liegen auf einem Lote zur Projektionsachse und bestimmen den Punkt P eindeutig.*

Da wir nur in einer Ebene zeichnen, so muß die Aufrißtafel stets in die Zeichenebene, die ja die Grundrißtafel darstellt, umgelegt werden. (Vgl. I, 25.) Um diese Drehung eindeutig festzulegen, beachten wir folgendes. Auf die

1) W. Kramer, Einführung in die Darstellende Geometrie. I. Teil. Senkrechte Projektion auf eine Tafel. Mathematisch-physikalische Bibliothek 66. Bei Rückverweisungen wird der I. Teil mit I, der vorliegende zweite mit II bezeichnet.

Grundrißtafel blicken wir in Richtung der Projektionsstrahlen von oben her, auf die Aufrißtafel von vorn. Die Grundrißebene hat also eine Oberseite, die Aufrißebene eine Vorderseite. Die Umlegung der Aufrißtafel in die Grundrißebene soll nun stets so vorgenommen werden, daß nach der Drehung die Vorderseite der Aufrißtafel sichtbar ist. Dies ist in Fig. 1, die einen zu beiden Tafeln senkrechten Querschnitt darstellt, kenntlich gemacht.

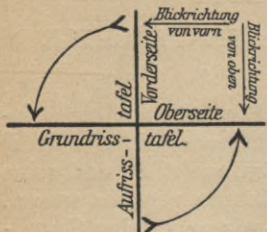


Fig. 1.

Da beide Tafeln in derselben Zeichenebene liegen, so kann jeder Punkt der Zeichenebene sowohl der Grundriß als auch der Aufriß eines Punktes sein. Bisher hatten wir nur

zu unterscheiden zwischen Punkten oberhalb und unterhalb der Grundrißtafel. Jetzt ist auch noch zu beachten, ob ein Punkt vor oder hinter der Aufrißtafel liegt. Über die Lage der Projektionen eines Punktes in bezug auf die Projektionsachse gilt nach den bisherigen Festsetzungen folgendes:

Liegt ein Punkt P oberhalb der Grundrißtafel, so liegt sein Aufriß P'' oberhalb der Projektionsachse. Die Entfernung des Aufrißes P'' von der Projektionsachse ist gleich der Höhe von P über der Grundrißtafel.

Liegt ein Punkt Q unterhalb der Grundrißtafel, so liegt sein Aufriß Q'' unterhalb der Projektionsachse. Die Entfernung des Aufrißes Q'' von der Projektionsachse ist gleich der Tiefe von Q unter der Grundrißtafel.

Punkte, die in der Grundrißtafel liegen, haben ihre Aufrisse auf der Projektionsachse.

Liegt ein Punkt P vor der Aufrißtafel, so liegt sein Grundriß P' unterhalb der Projektionsachse. Die Entfernung des Grundrisses P' von der Projektionsachse ist gleich dem Abstand von P vor der Aufrißtafel.

Liegt ein Punkt Q hinter der Aufrißtafel, so liegt sein Grundriß Q' oberhalb der Projektionsachse. Die Entfernung des Grundrisses Q' von der Projektionsachse ist gleich dem Abstand von Q hinter der Aufrißtafel.

Punkte, die in der Aufrißtafel liegen, haben ihre Grundrisse auf der Projektionsachse.

Punkte, die auf der Projektionsachse liegen, fallen mit ihrem Grundriß und Aufriß zusammen.

In Fig. 2 sind mehrere Punkte durch Grundriß und Aufriß gegeben. Man entscheide, wie die einzelnen Punkte zu den beiden Tafeln liegen. Die Projektionsachse ist die Gerade a .

In allen Figuren wird die Projektionsachse parallel zur Zeilenrichtung gezogen und nicht mehr besonders bezeichnet werden.

2. Gerade im Grund- und Aufriß.

Wählen wir beliebig eine Gerade g' und eine Gerade g'' , so sind g' und g'' stets Grundriß und Aufriß einer

Geraden g . (Fig. 3.) Die Gerade g ist der Schnitt der zur Grundrißtafel lotrechten Ebene durch g' mit der zur Aufrißtafel senkrechten Ebene durch g'' . Diese beiden Ebenen heißen die *projizierenden Ebenen* der Geraden g . (Vgl. I, 3.)

Wird auf g' der Grundriß P' eines Punktes P von g gewählt, so liegt der Aufriß P'' senkrecht über P' auf g'' .

Nach II, 1 ist der Schnittpunkt S'' von g'' mit der Projektionsachse der Aufriß des Punktes S von g , der in der Grundrißtafel liegt. S liegt senkrecht unter S'' auf g' und heißt der *Grundrißspurpunkt* der Geraden g .

Ist eine Gerade g zur Grundrißtafel parallel, so ist ihr Aufriß g'' zur Projektionsachse parallel.

Wird auf g'' der Aufriß P'' eines Punktes P von g gewählt, so liegt der Grundriß P' senkrecht unter P'' auf g' .

Nach II, 1 ist der Schnittpunkt T' von g' mit der Projektionsachse der Grundriß des Punktes T von g , der in der Aufrißtafel liegt. T liegt senkrecht über T' auf g'' und heißt der *Aufrißspurpunkt* der Geraden g .

Ist eine Gerade g zur Aufrißtafel parallel, so ist ihr Grundriß g' zur Projektionsachse parallel.

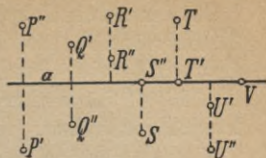


Fig. 2.

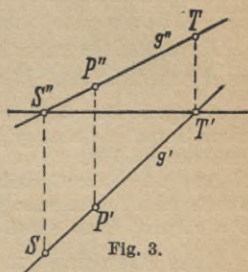


Fig. 3.

Ist eine Gerade g Lot zur Grundrißtafel, so ist ihr Grundriß ein Punkt; ihr Aufriß g'' ist senkrecht zur Projektionsachse.

Ist eine Gerade g Lot zur Aufrißtafel, so ist ihr Aufriß ein Punkt; ihr Grundriß g' ist senkrecht zur Projektionsachse.

Ist eine Gerade zu beiden Tafeln also zur Projektionsachse parallel, so sind auch ihre beiden Projektionen zur Projektionsachse parallel.

Parallele Geraden haben parallele Grundrißprojektionen und parallele Aufrißprojektionen. (Vgl. I, 3.)

Aufg. 1: Der Grundrißspurpunkt S und der Aufrißspurpunkt T einer Geraden g sind gegeben. Die Projektionen g' und g'' sollen gezeichnet werden.

Aufg. 2: Eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb von g sind durch die Projektionen g', g'' und P', P'' gegeben. Man lege durch P die Parallele zu g und bestimme ihre Spurpunkte.

Zwei Geraden im Raume können zwei verschiedene Lagen zueinander einnehmen. Sie liegen entweder in einer Ebene, dann schneiden sie sich oder sind parallel, oder sie liegen nicht in einer Ebene, dann haben sie keinen Schnittpunkt gemeinsam. Solche Geraden heißen zueinander windschiefe oder sich kreuzende Geraden. Da zwei zueinander parallele Geraden stets eine Ebene bestimmen, bleibt nur noch zu untersuchen, wann zwei Geraden g_1 und g_2 , die nicht parallel sind, sich schneiden. Wenn g_1 und g_2 sich in einem Punkte P schneiden, so müssen g_1' und g_2' durch P' und g_1'' und g_2'' durch P'' gehen. *Zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden sich, d. h. sie liegen in einer Ebene, wenn der Schnittpunkt von g_1', g_2' und der Schnittpunkt von g_1'', g_2'' auf einem Lote zur Projektionsachse liegen.* (Fig. 4.)

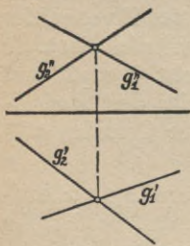


Fig. 4.

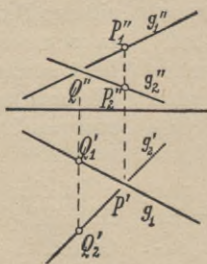


Fig. 5.

Hiernach ist ersichtlich, daß im Falle der Fig. 5 die Geraden g_1 und g_2 sich nicht schneiden. Die Schnittstellen P' und Q'' der Projektionen, zu denen kein Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 gehört, heißen *Deckstellen*.

Die Deckstelle P' ist die Projektion der Punkte P_1 und P_2 auf g_1 und g_2 . Auf dem Projektionsstrahl durch P' liegt — wie aus dem Aufriß zu entnehmen — P_1 höher als P_2 . Da wir von oben her auf die Grundrißtafeln blicken, so ist an dieser Stelle die Gerade g_1 sichtbar; sie verdeckt die tiefer liegende Gerade g_2 . Dies ist durch Unterbrechen der Geraden g_2' kenntlich gemacht.

Die Deckstelle Q'' ist die Projektion der Punkte Q_1 und Q_2 auf g_1 und g_2 . Auf dem Projektionsstrahl durch Q'' liegt — wie aus dem Grundriß zu entnehmen — Q_2 weiter vorn als Q_1 . Da wir von vorn her auf die Aufrißtafel blicken, so ist an dieser Stelle die Gerade g_2 sichtbar; sie verdeckt die weiter hinten liegende Gerade g_1 . Dies ist durch Unterbrechen der Geraden g_1'' kenntlich gemacht.

Die Sichtbarkeit in beiden Projektionen wird also mit Hilfe der Deckstellen festgestellt. (Vgl. I, 4.)

Nun kann der Fall eintreten, daß die Schnittpunkte der Projektionen von g_1 und g_2 im Grundriß und Aufriß nicht erreichbar sind (Fig. 6, Fig. 7). In solchem Falle wählt man beliebig auf g_1 zwei Punkte A, B und auf g_2 zwei Punkte C, D und stellt fest, ob die Geraden AC und BD sich schneiden.

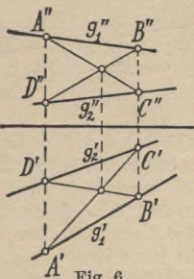


Fig. 6.

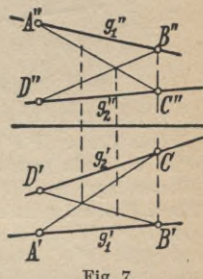


Fig. 7.

Ist dies der Fall, so liegen die vier Punkte A, B, C, D — also auch die Geraden g_1 und g_2 — in einer Ebene; g_1 und g_2 schneiden sich. (Fig. 6.) Haben dagegen AC und BD keinen Schnittpunkt, so liegen die Punkte A, B, C, D nicht in einer Ebene; die Geraden g_1, g_2 schneiden sich nicht. (Fig. 7.)

Aufg. 3: Drei Geraden, von denen je zwei sich schneiden, sollen gezeichnet werden.

3. Wahre Länge von Strecken. Ist eine Strecke zu einer Tafel parallel, so ist ihre Projektion in dieser Tafel ebenso lang wie die Strecke selbst. (Vgl. I, 3.)

Aufg. 4: Die wahre Länge einer Strecke PQ soll ermittelt werden.

1. Lös. (Fig. 8a): Wir betrachten wie in I, 3 das Trapez $PP'Q'Q$ bzw. $PP''Q''Q$. In diesem Trapez wird durch den einen Endpunkt P bzw. Q die Parallele zu $P'Q'$ bzw. $P''Q''$ gezogen, die das rechtwinklige Dreieck PRQ bzw. PSQ abschneidet. Dieses rechtwinklige Dreieck wird um PR bzw. QS parallel zur Grundriß- bzw. Aufrißtafel gedreht. Die Kathete QR wird aus dem Aufriß als Strecke $Q''R''$, die Kathete PS aus dem Grundriß als Strecke $P'S'$ entnommen. In Fig. 8a sind $P'(Q)'$ und $Q''(P)''$ gleich der wahren Länge der Strecke PQ .

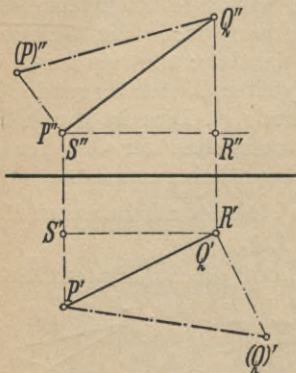


Fig. 8a.

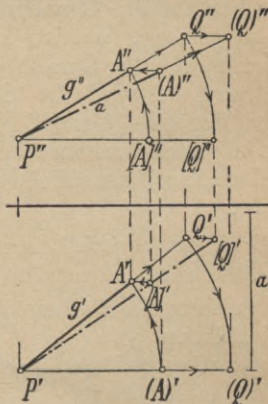


Fig. 8b.

2. Lös. (Fig. 8b):

Das Trapez $PP'Q'Q$ wird um PP' so weit gedreht, bis seine Ebene zur Aufrißtafel parallel liegt. Hierbei geht es in das Trapez $PP''(Q)''Q''$ über. Im Grundriß geht $P'Q'$ über in die zur Projektionsachse parallele Strecke $P''(Q)''$, die ebenso lang ist wie $P'Q'$. Bei der Drehung ändern sich die Höhen der Punkte über der Grundrißtafel nicht. Q'' bewegt sich auf der Parallelen zur Projektionsachse bis $(Q)''$. $(Q)''$ liegt senkrecht über $(Q)'$. $P''(Q)''$ ist gleich PQ .

Das Trapez $PP''Q''Q$ wird um PP'' so weit gedreht, bis seine Ebene zur Grundrißtafel parallel liegt. Hierbei geht es in das Trapez $PP''[Q]''[Q]$ über. Im Aufriß geht $P''Q''$ über in die zur Projektionsachse parallele Strecke $P''[Q]''$, die ebenso lang ist wie $P''Q''$. Bei der Drehung ändern sich die Abstände der Punkte von der Aufrißtafel nicht. Q' bewegt sich auf der Parallelen zur Projektionsachse bis $[Q]'$. $[Q]'$ liegt senkrecht unter $[Q]''$. $P''[Q]'$ ist gleich PQ .

Aufg. 5: Auf einer Geraden g soll von einem Punkte P aus in bestimmter Richtung die Strecke a abgetragen werden. (Fig. 8b.)

Lös.: Auf g wird ein beliebiger Punkt Q gewählt und die Strecke PQ wie in Aufg. 4 parallel zur Aufriß- bzw. Grundrißtafel gedreht. Auf $P''(Q)''$ bzw. $P'[Q]'$ wird von P'' bzw. P' aus bis $(A)''$ bzw.

$[A]'$ die Strecke a abgetragen. Dann wird $P(Q)$ bzw. $P[Q]$ in die ursprüngliche Lage zurückgedreht.

Aufg. 6: Die Neigungswinkel einer Geraden gegen die Tafeln sollen bestimmt werden.

Lös.: Die Definition des Neigungswinkels einer Geraden wird aus I, 3 entnommen. Bemerkt sei, daß in Fig. 8 b die Winkel $(Q)''P''[Q]''$ und $[Q]'P'(Q)'$ die Neigungswinkel der Geraden PQ gegen die Grundriß- bzw. Aufrißtafel sind.

Aufg. 7: Durch einen Punkt P soll eine Gerade gezeichnet werden, die mit beiden Tafeln vorgeschriebene Neigungswinkel bildet.

4. Ebene im Grund- und Aufriß. Wie in I, 5 werde auch hier zunächst die Ebene durch drei nicht in einer Geraden gelegenen Punkte A, B, C , also durch ein Dreieck gegeben.

Durch diese Angabe ist die Ebene vollständig bestimmt. Soll noch ein weiterer Punkt D der Ebene gezeichnet werden, so darf D nicht mehr beliebig gewählt werden. In Fig. 9 sind die vier Punkte A, B, C, D

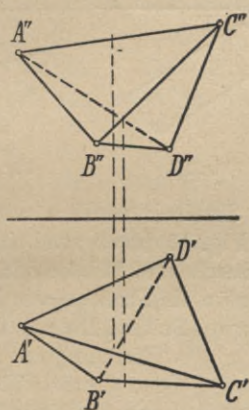


Fig. 9.

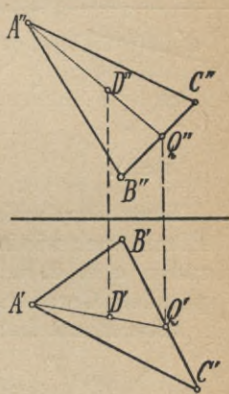


Fig. 10.

ganz willkürlich gewählt. Verbindet man je zwei der Punkte, so zeigt die Untersuchung des Schnittpunktes von $A''D''$ mit $B''C''$, daß hier eine Deckstelle vorliegt; die beiden Geraden schneiden sich nicht. Die vier Punkte liegen also nicht in einer Ebene; sie bilden die Ecken eines allgemeinen Vierflaches. Die Sichtbarkeit in Fig. 9 folgt ebenfalls aus der Untersuchung der Deckstellen. (Vgl. II, 2.)

Aufg. 8: Eine Ebene ist durch das Dreieck ABC gegeben. Ein weiterer Punkt D der Ebene soll gezeichnet werden. (Fig. 10.)

Lös.: Man wählt den Grundriß D' beliebig. Die Gerade AD liegt in der Dreiecksebene; sie schneidet also die Seite BC in einem Punkte Q , dessen Grundriß Q' der Schnittpunkt von $A'D'$ mit $B'C'$ ist. Der Aufriß Q'' liegt senkrecht über Q' auf $B''C''$. Dann ist $A''Q''$ die Aufrißprojektion von AQ . Auf $A''Q''$ liegt senkrecht über D' der Aufriß D'' .

Man wähle D'' und bestimme D' .

Aufg. 9: Ein beliebiges ebenes Viereck soll im Grundriß und Aufriß dargestellt werden.

Lös.: Drei Punkte dürfen durch ihre Projektionen gegeben werden. Von dem vierten Punkt wird entweder der Grundriß oder der Aufriß beliebig gewählt, der Aufriß bzw. der Grundriß wird dann nach Aufg. 8 ermittelt.

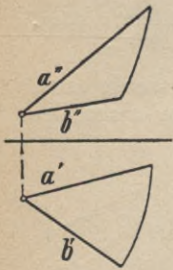


Fig. 11.

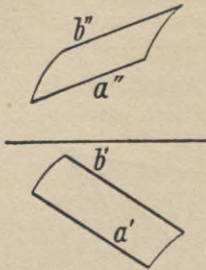


Fig. 12.

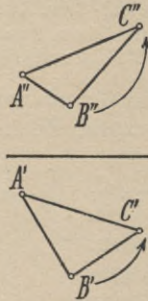


Fig. 13.

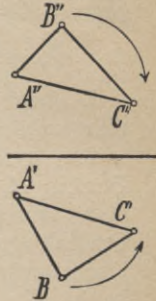


Fig. 14.

Statt durch ein Dreieck werden wir gelegentlich eine Ebene auch wie in Fig. 11 durch zwei sich schneidende Geraden a, b , d. h. durch ein Winkelfeld oder durch zwei parallele Geraden, also als Streifen wie in Fig. 12 geben.

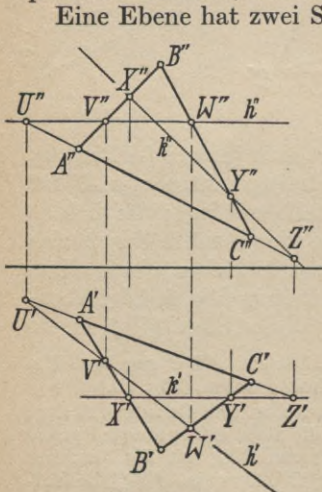


Fig. 15.

Eine Ebene hat zwei Seiten. Da wir die Ebene aus zwei Richtungen, nämlich senkrecht zur Grundrißtafel und senkrecht zur Aufrißtafel, betrachten, so können wir je nach der Lage der Ebene zu den Tafeln in beiden Projektionen dieselbe Seite oder verschiedene Seiten der Ebene sehen. Um zu entscheiden, welcher der beiden Fälle in einer Figur vorliegt, betrachten wir drei Punkte A, B, C also ein Teildreieck der Ebene. Der Umlaufssinn $A \rightarrow B \rightarrow C$ dieses Dreiecks ist auf den beiden Seiten der Ebene verschieden. Haben also Grundriß und Aufriß eines Dreiecks denselben Umlaufssinn —

wie in Fig. 13 —, so sieht man in beiden Projektionen dieselbe Seite der Ebene. Ist der Umlaufssinn der Grundrißprojektion entgegengesetzt dem Umlaufssinn der Aufrißprojektion eines Dreiecks, so sieht man in beiden Tafeln verschiedene Seiten der Ebene. Dieser Fall liegt in Fig. 14 vor. Dieses Merkmal ist auch dann zu verwenden, wenn die Ebene nicht als Dreieck gegeben wird. Man wird stets drei Punkte der Ebene angeben können, deren Umlaufssinn in beiden Projektionen dann zu untersuchen ist.

5. Höhen- und Abstandslinien der Ebene. (Vg. I, 6.)

Die zur Grundrißtafel parallelen Ebenen, die *Höhenebenen*, schneiden jede andere Ebene in einer Schar paralleler Geraden, den *Höhenlinien* der Ebene. Der Aufriß einer Höhenlinie ist zur Projektionsachse parallel.

Die zur Aufrißtafel parallelen Ebenen, die *Abstandsebenen*, schneiden jede andere Ebene in einer Schar paralleler Geraden, den *Abstandslinien* der Ebene. Der Grundriß einer Abstandslinie ist zur Projektionsachse parallel.

Aufg. 10: Eine Ebene ist durch das Dreieck ABC gegeben. In dieser Ebene sollen eine Höhenlinie h und eine Abstandslinie k gezeichnet werden. (Fig. 15.)

Lös.: Der Aufriß h'' der Höhenlinie h ist zur Projektionsachse parallel zu zeichnen. Die Schnittpunkte U, V, W der Höhenlinie h mit den Dreiecksseiten haben die Aufrisse U'', V'', W'' . Ihre Grundrisse U', V', W' liegen auf $A'C', B'A', C'B'$ und senkrecht unter den zugehörigen Aufrissen. Der Grundriß h' von h ist die Gerade durch U', V', W' .

Lös.: Der Grundriß k' der Abstandslinie k ist zur Projektionsachse parallel zu zeichnen. Die Schnittpunkte X, Y, Z der Abstandslinie k mit den Dreiecksseiten haben die Grundrisse X', Y', Z' . Ihre Aufrisse X'', Y'', Z'' liegen auf $B''A'', C''B'', A''C''$ und senkrecht über den zugehörigen Grundrissen. Der Aufriß k'' von k ist die Gerade durch X'', Y'', Z'' .

Bei vielen Aufgaben kommt es nur darauf an, die Richtung der Höhen- und Abstandslinien zu kennen. In diesem Falle ist es am bequemsten, wenn man die Höhenlinie h durch die Ecke mittlerer Höhe (vgl. I, 6) und die Abstandslinie k durch die Ecke mittleren Abstandes zeichnet.

Die Höhenlinie von Höhe Null ist die Schnittgerade s der Ebene mit der Grundrißtafel. Die Gerade s heißt die *Grundrißspur* der Ebene. Ihre Aufrißprojektion s'' ist die Projektionsachse.

Die Abstandslinie vom Abstand Null ist die Schnittgerade t der Ebene mit der Aufrißtafel. Die Gerade t heißt die *Aufrißspur* der Ebene. Ihre Grundrißprojektion t' ist die Projektionsachse.

Die beiden Spurgeraden s und t einer Ebene schneiden sich auf der Projektionsachse.

Aufg. 11: Die Spuren s und t einer Ebene, die durch das Dreieck ABC gegeben ist, sollen gezeichnet werden.

Lös.: Wie zu Aufg. 10, worin nur statt h'' und k' die Projektionsachse als s'' und t' zu wählen ist.

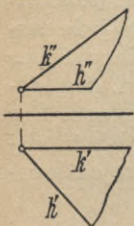


Fig. 16.

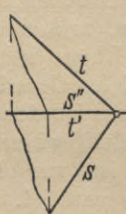


Fig. 17.

Eine Ebene kann jetzt auch gegeben werden durch das Winkel-
feld zwischen einer Höhenlinie h
und einer Abstandslinie k (Fig. 16)
oder durch die Spuren s und t
wobei zu beachten ist, daß die
beiden Spurgeraden sich auf der
Projektionsachse schneiden müssen.
(Fig. 17.)

Aufg. 12: Eine Ebene ist durch ihre Spurgeraden s und t gegeben. In der Ebene sollen Höhen- und Abstandslinien in gleichen Abständen gezogen werden.

Aufg. 13: Eine Ebene ist durch eine Höhenlinie und eine Abstandslinie gegeben. In der Ebene sollen Höhen- und Abstandslinien in gleichen Abständen gezeichnet werden.

Bisher haben wir die Lösungen der Aufgaben stets für beide Projektionen durchgeführt. Dabei hat sich gezeigt, daß die eine Lösung aus der anderen im wesentlichen dadurch hervorgeht, daß man Grundriß mit Aufriß, Höhe mit Abstand, Höhenlinie mit Abstandslinie vertauscht. Beide Projektionen sind vollständig gleichwertig. Jede für sich stellt eine senkrechte Projektion auf eine Tafel dar. Die andere ersetzt dabei den Höhenmaßstab. Wir werden uns deshalb bei den folgenden Ausführungen im allgemeinen darauf beschränken, die Lösungen von Aufgaben unter Bevorzugung der Grundrißprojektion zu besprechen und die gefundenen Ergebnisse einfach in den Aufriß durch Hinaufloten zu über-

tragen. Natürlich wird jedesmal eine entsprechende Lösung im Aufriß möglich sein.

6. Schnitte von Geraden mit Ebenen. Um den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen, wird man *stets* durch die Gerade eine Hilfsebene legen und zunächst die Schnittgerade der Hilfsebene mit der gegebenen Ebene ermitteln. Diese Schnittgerade trifft die gegebene Gerade in dem gesuchten Schnittpunkte. (Vgl. I, 5.) Bei den folgenden Aufgaben wird dieses Verfahren benutzt werden. Jedoch ist bei jeder einzelnen Aufgabe zu überlegen, wie die Hilfsebene durch die Gerade zu wählen ist, damit die Lösung möglichst einfach wird.

Aufg. 14: Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene soll bestimmt werden. (Fig. 18.)

Lös.: Die Ebene ist als das Winkelfeld (a, b) gegeben. Die Gerade sei g . Als Hilfsebene wird die zur Grundrißtafel lotrechte Ebene durch g benutzt. Sie schneidet die Ebene (a, b) in einer Geraden e , deren Grundriß e' mit g' zusammenfällt. e schneidet die Geraden a und b in den Punkten A, B , deren Grundrisse die Schnittpunkte von e' mit a' und b' sind. Die Aufrisse A'' und B'' liegen senkrecht über A' und B' auf a'' und b'' . Die Gerade $A''B''$ ist der Aufriß e'' der Geraden e . Dann ist der Schnittpunkt von e'' und g'' der Aufriß D'' des gesuchten Schnittpunktes D der Geraden g mit der Ebene (a, b) . Der Grundriß D' liegt senkrecht unter D'' auf g' . Die Sichtbarkeit wird mit Hilfe der Deckstellen im Grundriß und Aufriß ermittelt.

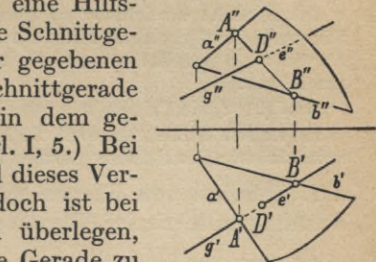


Fig. 18.

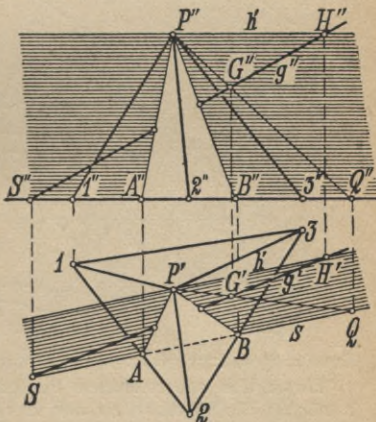


Fig. 19.

Aufg. 15: Eine Pyramide soll mit einer Geraden geschnitten werden. (Fig. 19.)

Lös.: Die Pyramide steht auf der Grundrißtafel. Ihre Grundfläche ist das Dreieck 123 , ihre Spitze der Punkt P . Als Hilfsebene wird die Ebene durch die Gerade g und die Spitze P benutzt. Diese Hilfsebene schneidet die Grundfläche der Pyramide in der

Geraden s , der Grundrißspur der Hilfsebene. Die Spur s wird bestimmt durch den Spurpunkt S von g und den Spurpunkt Q der Geraden PG , die durch P und einen beliebigen Punkt G von g geht. Die Hilfsebene schneidet die Seitenflächen $1P2$ und $2P3$ in den Geraden AP und BP , die g in den Punkten schneiden, in denen die Pyramidenebenen von g getroffen werden.

Ist S nicht erreichbar, so kann außer dem Punkt G noch die Richtung der Spur s mit Hilfe der Höhenlinie h der Hilfsebene durch P , die zu s parallel ist, ermittelt werden. Dies ist in Fig. 19 eingezeichnet.

Aufg. 16: Ein Prisma soll mit einer Geraden g geschnitten werden.

Lös.: Als Hilfsebene wird die Ebene durch g benutzt, die zu den Seitenkanten des Prismas parallel ist.

7. Schnitte von Ebenen mit Ebenen. Die Aufgabe, die Schnittgerade zweier Ebenen zu zeichnen, kann auf die Bestimmung des Schnittpunktes von Gerade und Ebene zurückgeführt werden. Dabei wählt man zwei Geraden in der einen Ebene und zeichnet ihre Durchstoßpunkte mit der zweiten Ebene. Die Verbindungsgerade der Durchstoßpunkte ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.

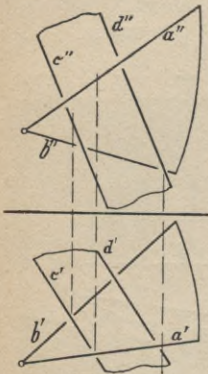


Fig. 20.

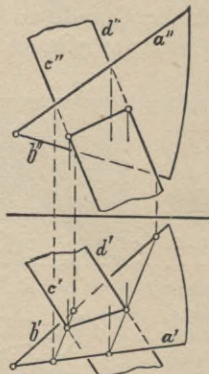


Fig. 21.

Aufg. 17: Die Schnittgerade des Winkelfeldes (a, b) mit dem Ebenenstreifen (c, d) soll gezeichnet werden. (Fig. 20, 21.)

Lös.: Um unerreichbare Punkte zu vermeiden, untersuchen wir zunächst die Sichtbarkeit der vier Geraden in den Deckstellen. Das Ergebnis zeigt Fig. 20. Die Gerade c liegt also an der Deckstelle c', b' höher als b , an der Deckstelle (c', a') tiefer als a ; die Gerade c muß also die Ebene (a, b) zwischen diesen Deckstellen schneiden. Entsprechend folgert man, daß auch die Gerade d das Winkelfeld selbst durchstößt. Man zeichnet nun nach Aufg. 14 die Schnittpunkte C und D von c und d mit der Ebene (a, b) . (Fig. 21.) Das Weitere wird wie in I, Aufg. 16 erledigt.

Eine zweite Lösung liefert das in I, 7 erläuterte allgemeine Verfahren zur Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen. In Fig. 22 sind die Ebenen wieder durch das Winkelfeld (a, b) und den Streifen (c, d) gegeben. Als Hilfsebenen sind in Fig. 22 zwei Abstandsebenen gewählt, deren Grundrisse s_1 und s_2 sind.

Aufg. 18: Der ebene Schnitt einer Pyramide soll gezeichnet werden. (Fig. 23.)

Lös.: Die Pyramide stehe mit ihrer Grundebene 1 2 3 4 5 auf der Grundrißtafel; ihre Spitze sei P . Die Schnittebene ist durch die Spuren s und t gegeben. Man kann wie in der Lösung zu I, Aufg. 17 auch hier verfahren, d. h. man bestimmt zunächst den Schnittpunkt einer Pyramidenkante mit der Ebene (s, t) und ermittelt dann unter Benutzung der Schnittpunkte der Grund-

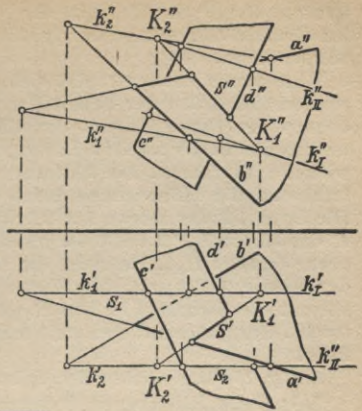


Fig. 22.

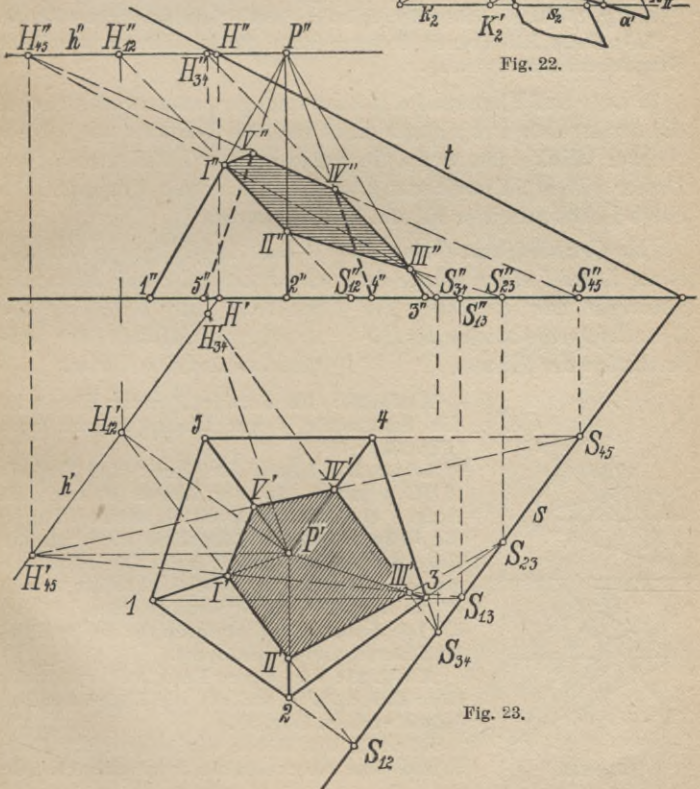


Fig. 23.

kanten der Pyramide mit der Grundrißspur s die Schnittfigur im Grundriß, die dann durch Hinaufloten in den Aufriß übertragen werden kann.

Eine *zweite Lösung* ergibt sich, wenn man nicht die Eckpunkte sondern die *Seiten* der Schnittfigur ermittelt. Dann sind die Seitenebenen der Pyramide mit der Ebene (s, t) zu schneiden. Wir benutzen das in der zweiten Lösung zur vorhergehenden Aufgabe entwickelte Verfahren. Als Hilfsebenen sind in Fig. 23 die Grundrißtafel und die Höhenebene durch die Pyramidenspitze P gewählt. Die Spur 12 der Ebene $1P2$ trifft s in $S_{1,2}$; die Höhenlinie durch P der Ebene $1P2$ trifft die gleich hohe Höhenlinie h der Schnittebene (s, t) in $H_{1,2}$. Dann ist die Gerade $S_{1,2}H_{1,2}$ die Schnittgerade der Ebene $1P2$ mit der Ebene (s, t) . Als Seite der Schnittfigur kommt die Strecke $I II$ von $H_{1,2}S_{1,2}$ zwischen $P1$ und $P2$ in Betracht. Entsprechend ermittelt man die übrigen Seiten der Schnittfigur.

Aufg. 19: Man zeichne den Schnitt eines Prismas mit einer Ebene.

Lös.: Als Hilfsebenen benutze man die zueinander parallelen Grundebenen des Prismas.

8. Lote auf Ebenen. In I, 8 ist nachgewiesen worden, daß die senkrechte Projektion eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel ist, wenn ein Schenkel zur Tafel parallel ist. Daher gilt als Erweiterung zu I, 10 über die Projektionen eines Lotes zu einer Ebene das folgende:

Die Grundrißprojektion l' eines Lotes l einer Ebene ist senkrecht zur Richtung der Grundrißprojektionen der Höhenlinien der Ebene.

Die Aufrißprojektion l'' eines Lotes l einer Ebene ist senkrecht zur Richtung der Aufrißprojektionen der Abstandslinien der Ebene.

Aufg. 20: Im Punkte P einer Ebene ist die Senkrechte l zur Ebene zu zeichnen. (Fig. 24.)

Lös.: Die Ebene ist durch das Dreieck ABC gegeben. In der Ebene ist nach II, Aufg. 8 ein Punkt P ermittelt worden. Durch die Ecke C ist die Höhenlinie h , durch die Ecke A die Abstandslinie k der Dreiecksebene gezogen. Dann ist l' die Senkrechte durch P' zu h' und l'' die Senkrechte durch P'' zu k'' . Die Senkrechte l ist durch die beiden Projektionen l' und l'' bestimmt.

Aufg. 21: Von einem Punkte P außerhalb einer Ebene ABC soll auf die Ebene das Lot gefällt werden. (Fig. 25.)

Lös.: In der Ebene wird eine Höhenlinie h und eine Abstandslinie k gezeichnet. Die

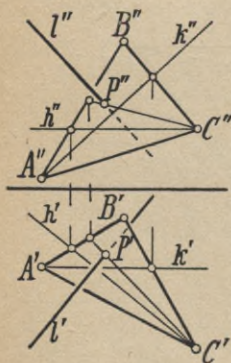


Fig. 24.

Grundrißprojektion l' des Lotes l ist das Lot von P' auf h' , die Aufrißprojektion l'' das Lot von P'' auf k'' . In der Fig. 25 ist noch der Fußpunkt L des Lotes in der Ebene ABC bestimmt (vgl. I, Aufg. 22) und die Sichtbarkeit festgestellt worden.

Aufg. 22: Durch einen Punkt P ist die Ebene zu legen, die zu einer Geraden g senkrecht ist. (Fig. 26.)

Lös.: Die Grundrisse der Höhenlinien der zu g lotrechten Ebene sind zum Grundriß g' von g senkrecht. Die Aufrisse der Abstandslinien der gesuchten Ebene sind zu g'' senkrecht. Wir zeichnen durch P die Höhenlinie h und die Abstandslinie k der zu g lotrechten Ebene. h' ist das Lot von P' auf g' , h'' die Parallele durch P'' zur Projektionsachse. k'' geht durch P'' und ist zu g'' senkrecht, k' geht durch P' und ist zur Projektionsachse parallel. Damit ist die zu g senkrechte Ebene durch P durch das Winkelfeld (h, k) bestimmt. In Fig. 26 ist noch der Schnittpunkt D von g mit der Ebene (h, k) ermittelt worden. Die Gerade PD ist das Lot von P auf g , die Strecke PD der kürzeste Abstand des Punktes P von der Geraden g . Die wahre Länge der Strecke PD kann nach II, Aufg. 4 gezeichnet werden.

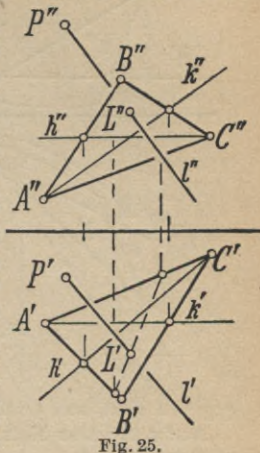


Fig. 25.

9. Bestimmung der wahren Gestalt ebener Figuren. (Vgl. I, 11.)

Aufg. 23: Eine Ebene ist durch die Höhenlinie h und die Abstandslinie k gegeben. Die wahre Größe des Winkels zwischen h und k soll ermittelt werden. (Fig. 27.)

Lös.: Die Ebene (h, k) wird um die Höhenlinie h so weit gedreht, bis sie zur Grundrißtafel parallel liegt. Die Drehung wird für einen Punkt K auf k durchgeführt. Der

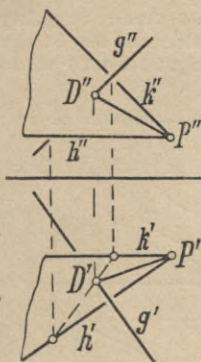


Fig. 26.

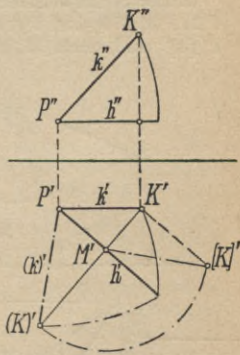
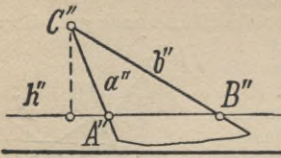


Fig. 27.

Drehradius für K ist das Lot KM von K auf h ; der Grundriß $K'M'$ ist das Lot von K' auf h' . Bei der Drehung um h bewegt sich K auf dem Kreis um M mit dem Radius MK , dessen Ebene zu h und also zur Grundrißtafel lotrecht ist. K' bewegt sich bei der Drehung also auf dem Lote $M'K'$. Liegt die Ebene (h, k) zur Grundrißtafel parallel, so sei K in (K) übergegangen. Dann muß $M'(K')$

gleich \overline{MK} sein. Nach II, Aufg. 4, Lös. 1 ist die Länge der Strecke MK als $M'[K']$ ermittelt worden. $\overline{M'[K']}$ wird von M' aus auf $M'K'$ bis $(K)'$ abgetragen. Der Schnittpunkt P von h und k behält bei der Drehung um h dieselbe Lage. Der Winkel zwischen h und k ist also gleich dem Winkel $M'P'(K)'$, d. i. der Winkel zwischen h' und $(k)'$.



Aufg. 24: Eine Ebene ist durch die Spuren s und t gegeben. Der Winkel zwischen s und t soll ermittelt werden.

Aufg. 25: Die wahre Gestalt des Winkelfeldes (a, b) soll gezeichnet werden. (Fig. 28.)

Lös.: Zur Lösung vgl. I, Aufg. 25. Die Drehung parallel zur Grundrißtafel erfolgt um die Höhenlinie h . Für den Schnittpunkt C von a und b wird die Drehung um h nach II, Aufg. 23 durchgeführt.

Aufg. 26: Die wahre Gestalt eines Dreiecks ABC , dessen Projektionen gegeben sind, soll ermittelt werden. (Vgl. I, Aufg. 26.)

Aufg. 27: Das Netz der in Fig. 29 gegebenen Pyramide soll gezeichnet werden.

Lös.: Nach II, Aufg. 4 werden die Längen der Seitenkanten $P1, P2, P3, P4$ der Pyramide als die Strecken $P'[1'], P'[2'], P'[3'], P'[4']$ und nach II, Aufg. 24 bis 26 wird durch Drehung um eine

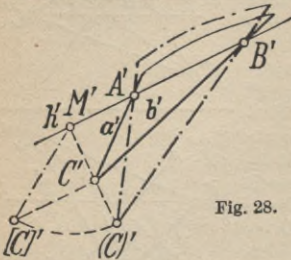


Fig. 28.

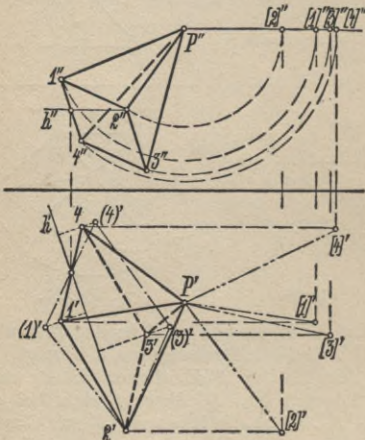
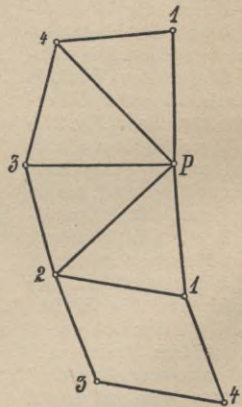


Fig. 29.



Höhenlinie die wahre Gestalt der Grundfläche ermittelt. In der Nebenfigur wird zunächst der in die Ebene ausgebreitete Mantel der Pyramide gezeichnet, der sich aus 4 Dreiecken, deren Seiten bekannt sind, zusammensetzt. An eine der Grundkanten — in Fig. 29 an 21 — wird die Grundfläche in wahrer Gestalt, wie sie als Parallelogramm $(1)'(2)'(3)'(4)'$ ermittelt worden ist, angetragen.

Aufg. 28: Das Netz eines allgemeinen Prismas soll gezeichnet werden. (Fig. 30.)

Lös.: Das Prisma steht auf der Grundrißtafel; seine Seitenkanten sind zur Aufrißtafel parallel. Das allgemeine Prisma wird durch einen zu den Seitenkanten senkrechten Schnitt (s, t) in zwei gerade Prismen zerlegt. Die Grundrißspur s der Schnittebene ist senkrecht zur Pro-

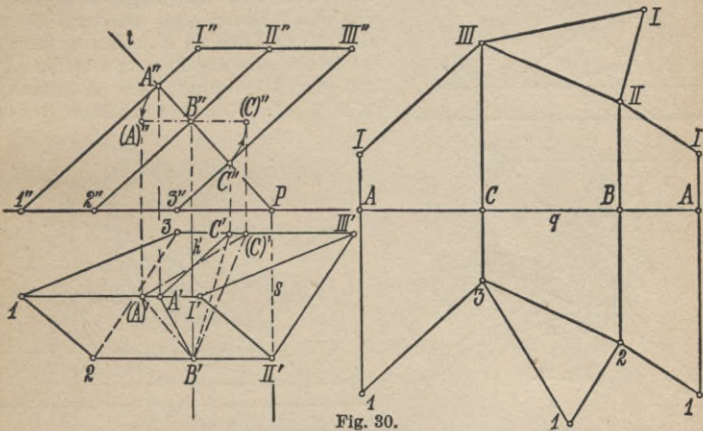


Fig. 30.

jektionsachse, die Aufrißspur t senkrecht zu den Aufrissen $1''I''$, $2''II''$, $3''III''$ der Seitenkanten zu ziehen. Die Schnittfigur erscheint im Aufriß als Strecke auf t ; ihr Grundriß ist das Dreieck $A'B'C'$. Wir ermitteln die wahre Gestalt des Schnittdreieckes ABC , indem wir es um die Höhenlinie h durch die Ecke B parallel zur Grundrißtafel drehen. Das Dreieck ABC gehe dabei über in das Dreieck $(A)B(C)$. Der Mantel des allgemeinen Prismas setzt sich zusammen aus den Mänteln der beiden geraden Prismen mit der gemeinsamen Grundfläche ABC . Nach der Abwicklung liegen die Seiten AB , BC , CA auf einer Geraden q . Die Seitenkanten sind senkrecht zu q ; ihre Längen $A1$, $B2$, $C3$, AI , BII , $CIII$ werden direkt aus dem Aufriß entnommen.

10. Projektion ebener Figuren von gegebener Gestalt.

Aufg. 29: In der Ebene (h, k) soll ein gegebenes Vieleck gezeichnet werden. (Fig. 31.)

Lös.: Eine ebene Figur erscheint in der Projektion in wahrer Gestalt, wenn seine Ebene zur Projektionstafel parallel liegt. Wir dre-

hen die gegebene Ebene um h so weit, bis sie zur Grundrißtafel parallel liegt. (Vgl. II, Aufg. 23.) Bei dieser Drehung geht der Punkt K auf k in (K) und die Abstandslinie k in (k) über. Das Winkelfeld (h, k) hat nach der Drehung die Grundrißprojektion ($h', (k)'$). In der gedrehten Ebene wird das Vieleck — in Fig. 36 ein Quadrat 1234 mit der Seite a — eingezeichnet. Der Grundriß (1)'(2)'(3)'(4)' ist zum gegebenen Quadrat kongruent. Nun wird die Ebene ($h, (k)$) in die Lage (h, k) zurückgedreht. Die Grundrisse der Eckpunkte des Quadrates bewegen sich dabei auf Loten zu h' . Die Seite (1)'(2)' trifft h' in H'_{12} und (k)' in (K_{12})'. (K_{12})' geht über in K_{12}' auf k' , wobei K_{12}' (K_{12}') zu h' senkrecht ist. H'_{12} ändert seine Lage nicht. Der Grundriß 1'2' liegt also auf $H'_{12}'K_{12}'$. Dabei sind wieder 1'(1)' und 2'(2)' Lote zu h' . Alles weitere ist leicht aus der Figur zu ersehen. Bei der Herstellung des Aufrisses 1''2''3''4'' wird mit Nutzen ver-

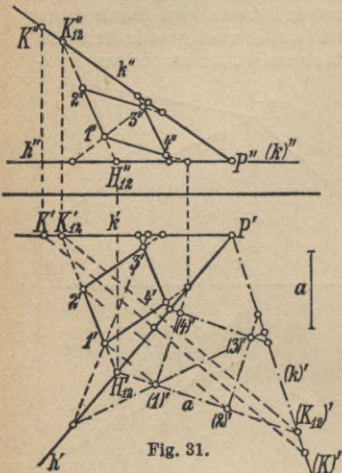


Fig. 31.

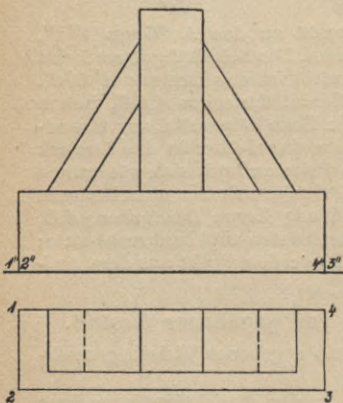
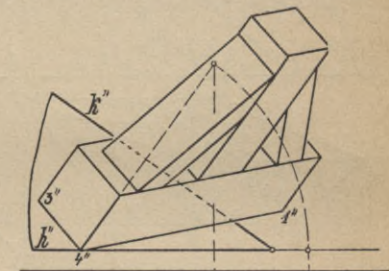


Fig. 32.

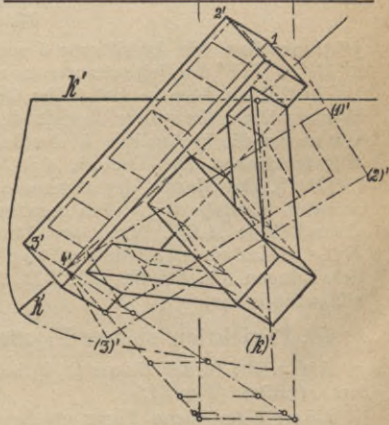


Fig. 33.

wertet, daß Strecken auf k sowohl auf k'' als auch auf $(k)'$ in wahrer Länge erscheinen, so ist z. B. $P''K_{12}''$ gleich $P'(K_{12})'$. Man beachte auch, daß zuweilen Diagonalen des Vieleckes bequemer übertragen werden können als Seiten.

Aufg. 30: Man zeichne den in Fig. 32 durch seine Projektionen gegebenen Körper in beliebiger Lage zu den Tafeln. (Fig. 33.)

Anleitung zur Lösung: Nach II, Aufg. 29 überträgt man den in Fig. 32 gegebenen Grundriß in die Ebene (h, k) . Die zur Ebene (h, k) senkrechten Kanten haben Grundrisse senkrecht zu h' und Aufrisse senkrecht zu k'' . Auf den Kanten werden nach II, Aufg. 5 die aus dem Aufriß in Fig. 32 zu entnehmenden Höhen abgetragen.

ZWEITER ABSCHNITT

KREIS, KEGEL, ZYLINDER, KUGEL

11. Kreis im Grundriß und Aufriß. Die in I, 13 hergeleiteten Eigenschaften der senkrechten Projektion eines Kreises gelten auch für die Grundriß- und die Aufrißprojektion.

Die Grundrißprojektion eines Kreises ist im allgemeinen eine Ellipse, deren Hauptachse der Grundriß des zur Grundrißtafel parallelen Kreisdurchmessers ist. Die Hauptachse der Grundrißellipse ist ebenso lang wie der Kreisdurchmesser.

Die Aufrißprojektion eines Kreises ist im allgemeinen eine Ellipse, deren Hauptachse der Aufriß des zur Aufrißtafel parallelen Kreisdurchmessers ist. Die Hauptachse der Aufrißellipse ist ebenso lang wie der Kreisdurchmesser.

Aufg. 31: Ein Kreis ist durch seine Achse g , den Mittelpunkt M und den Radius r gegeben. Grundriß und Aufriß des Kreises sollen gezeichnet werden. (Fig. 34.) (Vgl. I, Aufg. 37.)

Lös.: Durch M' wird die Senkrechte zu g' gezogen und auf ihr von M' aus bis A_1' und A_2' der Radius r abgetragen. Der Aufriß $A_1''A_2''$ liegt auf der zur Projektionsachse parallelen Geraden durch M'' . $A_1'A_2'$ ist Hauptachse der Grundrißellipse.

Durch M'' wird die Senkrechte zu g'' gezogen und auf ihr von M'' aus bis C_1'' und C_2'' der Radius r abgetragen. Der Grundriß $C_1'C_2'$ liegt auf der zur Projektionsachse parallelen Geraden durch M' . $C_1''C_2''$ ist Hauptachse der Aufrißellipse.

Jede der beiden Ellipsen ist also durch die Hauptachse $A_1'A_2'$ bzw. $C_1''C_2''$ und zwei Punkte C_1', C_2' bzw. A_1'', A_2'' bestimmt und kann nach I, Aufg. 31 gezeichnet werden.

Wird auf der Grundrißellipse ein Punkt P' , der Grundriß eines Punktes P des Kreises, gewählt, so liegt sein Aufriß auf der Aufriß-

ellipse und auf dem Lote durch P' zur Projektionsachse. Das Lot trifft die Aufrißellipse in zwei Punkten. Beachtet man, daß P' zwischen A_1' und C_1' liegt, so ergibt sich, daß P'' zwischen A_1'' und C_1'' liegen muß.

Der Umlaufsinn $A_1 \rightarrow C_2 \rightarrow A_2 \rightarrow C_1$ auf dem Kreise ist im Aufriß und Grundriß der gleiche. Nach II, 4 sieht man im Grundriß und Aufriß dieselbe Seite des Kreises. In Fig. 34 ist die Kreisscheibe undurchsichtig angenommen; die Sichtbarkeit der Kreisachse ist mit Hilfe der Deckstellen der Projektionen von Achse und Kreis festgestellt worden.

Aufg. 32: Die Grundrißprojektion eines Kreises ist gegeben. Die Aufrißprojektion soll gezeichnet werden. Bemerkte sei, daß es zwei Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt und dem gleichen Radius gibt, die dieselbe Grundrißprojektion haben.

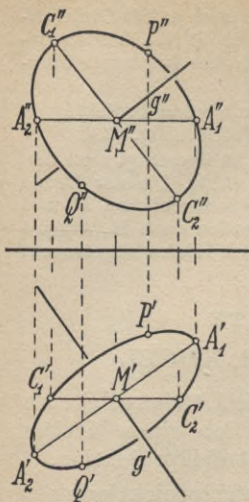


Fig. 34.

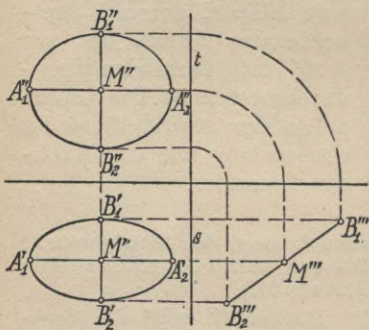


Fig. 35.

Aufg. 33: Man zeichne die Projektionen eines Kreises, der besondere Lage zu den Tafeln hat. Die Kreisebene sei a) zu beiden Tafeln, b) nur zur Grundrißtafel, c) nur zur Aufrißtafel senkrecht. In den Fällen b) und c) kann im besonderen die Kreisebene zur anderen Tafel parallel liegen.

Aufg. 34: Die Projektionen eines Kreises sind zu zeichnen, dessen Ebene zur Projektionsachse parallel ist. (Fig. 35.)

Lös.: In dieser Lage fallen die Höhenlinien und die Abstandslinien der Kreisebene zusammen. Ist der Mittelpunkt M durch M'

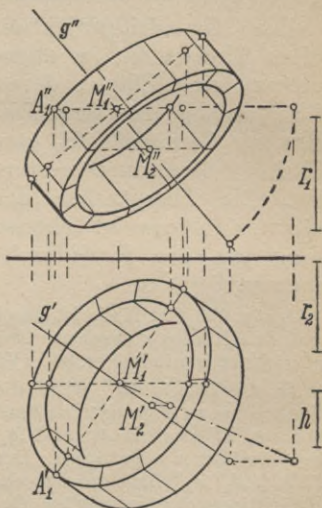


Fig. 36.

und M'' gewählt, so ist für beide Ellipsen die Hauptachse zur Projektionsachse parallel zu zeichnen. Die beiden Hauptachsen sind die Projektionen desselben Kreisdurchmessers A_1A_2 . Die Nebenachsen sind mit Hilfe des zu A_1A_2 lotrechten Seitenrisses zu ermitteln.

Aufg. 35: Ein zylinderförmiger Ring mit den Radien r_1, r_2 und der Höhe h soll in allgemeiner Lage zu den Tafeln gezeichnet werden. (Fig. 36.)

Lös. (vgl. I, Aufg. 39): Auf der beliebigen gezeichneten Achse g wird ein Punkt M_1 als Mittelpunkt des einen Paares der Grundkreise gewählt. Nach II, Aufg. 5 wird der andere Mittelpunkt M_2 bestimmt. $\overline{M_1M_2}$ ist gleich h . Die Bilder der Kreise werden nach II, Aufg. 31 gezeichnet. Die eingezeichneten Mantellinien haben gleiche Abstände voneinander. (Vgl. I, Aufg. 38.) Die Kreisteilung, die zur Zeichnung der Mantellinien vorgenommen wird, muß im Grund- und Aufriß von demselben Kreispunkt aus begonnen werden. In

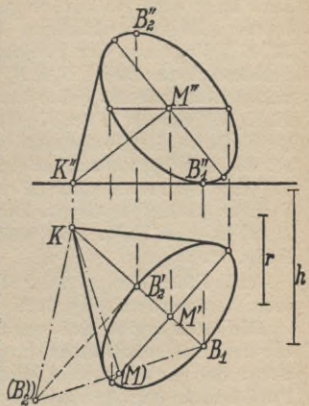


Fig. 37.

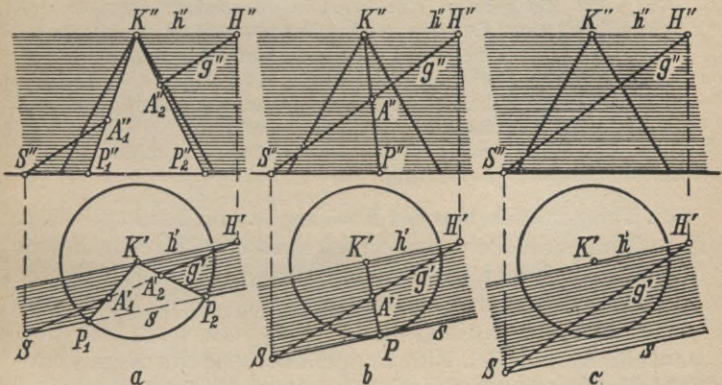


Fig. 38.

Fig. 36 ist es der Punkt A_1 . Die Sichtbarkeit wird mit Hilfe der Deckstellen von g' und g'' mit den zugehörigen Ellipsen festgestellt.

Aufg. 36: Ein gerader Kreiskegel soll in allgemeiner Lage zu den Tafeln gezeichnet werden.

Aufg. 37: Ein gerader Kreiszyylinder liegt auf der Grundrißtafel; seine Achse ist zur Aufrißtafel geneigt. Die Projektionen sollen gezeichnet werden.

Aufg. 38: Ein gerader Kreiskegel mit der Höhe h und dem Grundkreisradius r liegt auf der Grundrißtafel. Seine Projektionen sind zu zeichnen. (Fig. 37.) (Vgl. I, Aufg. 69.)

Lös.: In der Grundrißtafel liege die Mantellinie KB_1 des Kegels. Ihre Lage wird willkürlich gewählt. Ihre Länge ist gleich der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten h und r . $K''B''_1$ liegt auf der Projektionsachse. Der zur Grundrißtafel lotrechte Achsenschnitt B_1KB_2 des Kegels wird um KB_1 in die Grundrißtafel hingedreht. Seine Umlegung ist das gleichschenklige Dreieck $B_1K(B_2)$, dessen Höhe $K(M)$ gleich h und dessen Grundseite $B_1(B_2)$ gleich $2r$ ist. Der Fußpunkt des Lotes von (M) auf KB_1 ist der Grundriß M' des Mittelpunktes des Grundkreises des Kegels. Der Aufriß M'' liegt senkrecht über M' und ist von der Projektionsachse um die Strecke $(M)M'$ entfernt. Die Kegelachse hat also die Projektionen KM' und $K''M''$. Die weitere Konstruktion ergibt sich aus II, Aufg. 31.

Aufg. 39: Ein gerader Kreiskegel soll mit einer Geraden geschnitten werden. (Fig. 38.)

Die Lös. ergibt sich sofort aus II, Aufg. 15. In der Fig. 38 sind die drei möglichen Fälle dargestellt. In Fig. 38a schneidet die Hilfsebene den Kegel in zwei Mantellinien, die Gerade den Kegel in zwei Punkten. In Fig. 38b ist die Hilfsebene Tangentialebene, die Gerade g Tangente des Kegels. In Fig. 38c kommt kein Schnitt zustande.

Aufg. 40: Ein gerader Kreiskegel in allgemeiner Lage zu den Tafeln soll mit einer Geraden geschnitten werden.

Lös.: Die Hilfsebene durch die Gerade und die Kegelspitze ist mit der Grundkreisebene zu schneiden.

Aufg. 41: Die Schnittpunkte eines geraden Kreiszyinders mit einer Geraden zu ermitteln.

Lös.: Die Hilfsebene durch die Gerade ist parallel zu den Mantellinien zu wählen. (Vgl. II, Aufg. 16.)

12. Tangentialebenen des Kreiskegels und Kreiszyinders.

Jede Tangentialebene des Kreiskegels bzw. Kreiszyinders berührt den Kegel bzw. Zylinder längs einer Mantellinie. Alle Tangentialebenen des Kegels gehen durch die Kegelspitze; alle Tangentialebenen des Zylinders sind zu den Mantellinien parallel. Eine Tangentialebene des Kegels enthält alle Tangenten des Kegels, deren Berührungspunkte auf der Berührungsmantellinie der Tangentialebene liegen. Werden ein Kegel und seine Tangentialebenen mit einer Ebene geschnitten, so sind die Schnittgeraden mit den Tangentialebenen die Tangenten der Schnittkurve auf dem Kegel. Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf den Berührungsmantellinien der zugehörigen Tangentialebenen. Das gleiche gilt für den Zylinder.

Aufg. 42: Durch einen Punkt P sollen die Tangentialebenen an einen Kreiskegel gelegt werden. (Fig. 39.)

Lös.: Der allgemeine Kreiskegel stehe auf der Grundrißtafel. Die Gerade KP hat den Grundrißspurpunkt S . Die Tangenten s_1 und s_2 von S an den Grundkreis des Kegels bestimmen zusammen mit KP die Tangentialebenen. Sind S_1 und S_2 die Berührungspunkte der Tangenten s_1 und s_2 , so berühren die Tangentialebenen den Kegel längs den Mantellinien KS_1 und KS_2 .

Ist der Spurpunkt S nicht erreichbar, so wird an die Stelle der Grundrißtafel eine Höhenebene benutzt. In Fig. 39 ist die Konstruktion für den Fall eingezeichnet, in dem die Höhenebene durch P geht.

Aufg. 43: An einen geraden Kreiszyylinder sollen durch einen Punkt P die Tangentialebenen gelegt werden. (Fig. 40.)

Lös.: Der gerade Kreiszyylinder ist wie in Aufg. 35 gezeichnet. Durch P wird die Parallele p zu den Mantellinien gelegt und der Schnittpunkt Q von p mit einer der Grundebenen ermittelt. Die Tangenten QT_1 und QT_2 von Q an den Grundkreis bestimmen zusammen mit p die beiden Tangentialebenen durch P .

13. Kugel im Grundriß und Aufriß. Nach I, 21 folgt, daß der Umriß der Grundrißprojektion einer Kugel der Grundriß des Großkreises der Kugel ist, dessen Ebene zur Grundrißtafel parallel liegt. Der Umriß der Aufrißprojektion ist der Aufriß

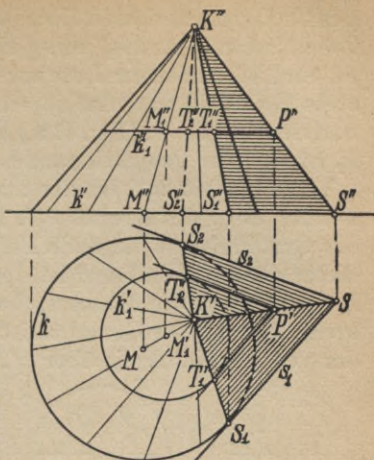


Fig. 39.

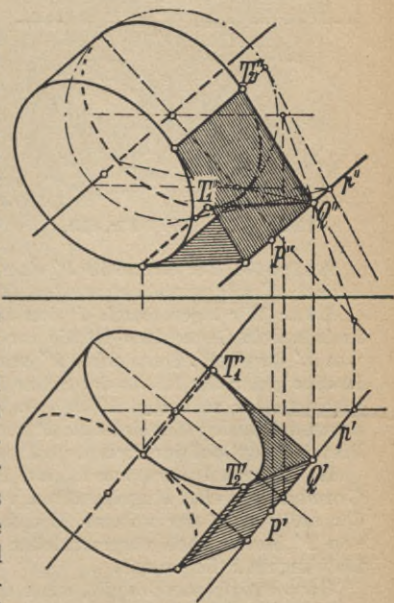


Fig. 40.

des Großkreises, dessen Ebene zur Aufrißtafel parallel liegt. Zwei Kreise k_1' und k_2'' mit gleichem Radius r , deren Mitteln M' und M'' auf einem Lote zur Projektionsachse liegen, sind stets Grundriß und Aufriß einer Kugel mit der Mitte M und dem Radius r . (Fig. 41 a.) Der Grundriß k_2' des Kreises k_2 ist der zur Projektionsachse parallele Durchmesser von k_1' . Der Aufriß k_1'' ist der zur Projektionsachse parallele Durchmesser des Kreises k_2'' . Im Grundriß ist die oberhalb des Großkreises k_1 liegende Halbkugel sichtbar. Der Aufriß dieser oberen Halbkugel ist der obere Halbkreis über k_1'' . Im Aufriß ist die Halbkugel sichtbar, die vor dem Großkreise k_2 liegt, ihr Grundriß ist der vordere Halbkreis über k_2' .

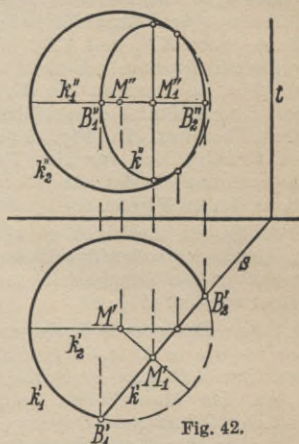
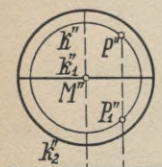


Fig. 41 a.

Fig. 41 b.

Fig. 42.

Aufg. 44: Der Grundriß P' eines Kugelpunktes ist gegeben. Der Aufriß P'' soll gezeichnet werden. (Fig. 41 a.)

Lös.: Wir legen durch P den zur Aufrißtafel parallelen Kugelkreis k . Sein Grundriß k' ist die zur Projektionsachse parallele Sehne von k_1' durch P' . Der Aufriß k'' von k ist der Kreis um M'' , dessen Radius gleich der Hälfte der Sehne k' ist. Das Lot durch P' zur Projektionsachse schneidet k'' in den Punkten P'' und P_1'' , den Aufriß der beiden Kugelpunkte P und P_1 , deren Grundriß P' ist. Der Punkt P liegt auf der oberen, der Punkt P_1 auf der unteren Halbkugel.

Ist also im Innern von k_1' ein Punkt P' gewählt, so ist P' der Grundriß von zwei Kugelpunkten, von denen der eine auf der oberen, der andere auf der unteren Halbkugel liegt. Es kann nach Wahl von P' immer noch vorgeschrieben werden, auf welcher der beiden Halbkugeln P liegen soll.

Ganz entsprechendes gilt, wenn der Aufriß Q'' eines Kugelpunktes gegeben ist, siehe Fig. 41 b.

Aufg. 45: Eine Kugel und eine Gerade durch die Kugelmitte sind gegeben. Der zur Geraden senkrechte Großkreis der Kugel soll gezeichnet werden.

Lös.: Die Gerade ist die Achse, die Kugelmitte der Mittelpunkt und der Kugelradius gleichzeitig Radius des gesuchten Kreises. (Vgl. II, Aufg. 31.)

Aufg. 46: Eine Kugel soll mit einer zur Grundrißtafel lotrechten Ebene geschnitten werden. (Fig. 42.)

Lös.: Die Ebene ist durch ihre Spurgeraden s und t gegeben. Der Grundriß k' des Schnittkreises k ist die auf s liegende Sehne $B_1' B_2'$ des Umrißkreises k_1' . Die Mitte von $B_1' B_2'$ ist der Grundriß M_1' des Mittelpunktes M_1 von k . Der Aufriß M_1'' liegt auf k_1'' . Der Aufriß k'' kann nun leicht gezeichnet werden.

Aufg. 47: Eine Kugel soll mit einem geraden quadratischen Prisma, das auf der Grundrißtafel steht, geschnitten werden.

Aufg. 48: Im Innern einer Kugel ist ein Punkt M_1 gegeben. Der Kugelkreis k_0 soll gezeichnet werden, dessen Mitte M_1 ist. (Fig. 43.)

Lös.: Die Kugel ist durch die Kreise k_1' und k_2'' mit den Mitteln M' und M'' gegeben. Die Gerade MM_1 ist Kreisachse. Wir drehen die projizierende Ebene der Geraden MM_1 um MM' so weit, bis sie zur Aufrißtafel parallel liegt. Der Aufriß des gedrehten Punktes M_1 ist $(M_1)''$. Der Aufriß des Schnittkreises der projizierenden Ebene von MM_1 mit der Kugel fällt mit k_2'' zusammen. Die zu M'' ($(M_1)''$) lotrechte Sehne $(B_1)''(B_2)''$ des Kreises k_2'' ist gleich dem Durchmesser des gesuchten Kreises k_0 , der nun durch Achse MM_1 , Mittelpunkt M_1 und Radius $(M_1)''(B_1)''$ bestimmt ist und nach II, Aufg. 31 gezeichnet wird.

Der Bogen von k_0' der vor k_2' liegt, ist der Grundriß des Bogens des Kreises k_0 der auf der vorderen Halbkugel verläuft. Die Schnittpunkte von k_0' mit k_2' sind also die Grundrisse der Punkte von k_0 , in denen der Kreis k_0 von der vorderen — im Aufriß sichtbaren — Halbkugel zur hinteren — im Aufriß unsichtbaren — Halbkugel übergeht. In den zu diesen Punkten gehörenden Aufrißpunkten muß k_0'' also den Umriß k_2'' berühren. (Vgl. I, 27.) Entsprechend liefern die Schnittpunkte von k_1'' mit k_0'' die Berührungspunkte zwischen k_1' und k_0' .

Aufg. 49: Eine Kugel soll mit einer zu beiden Tafeln geneigten Ebene geschnitten werden.

Lös.: Die Achse des Schnittkreises ist das Lot von der Kugelmitte auf die Schnittebene. Der Fußpunkt dieses Lotes in der gegebenen Ebene ist der Mittelpunkt des Schnittkreises.

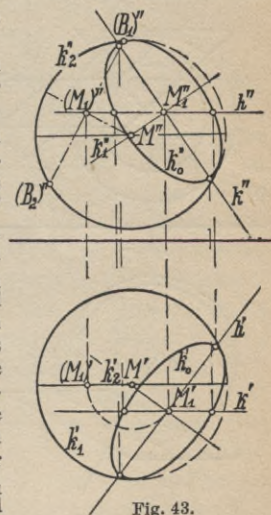


Fig. 43.

14. Tangenten und Tangentialebenen der Kugel. Die Tangentialebene in einem Kugelpunkte ist senkrecht zum Berührungsradius. Die durch den Berührungspunkt gehenden Geraden der Tangentialebene sind Tangenten der Kugel.

Aufg. 50: In einem Punkte P einer Kugel soll die Tangentialebene gelegt werden. (Fig. 44.)

Lös.: Die Kugel ist durch ihre Umrisse gegeben. Auf ihr wird wie in II, Aufg. 44 ein Punkt P bestimmt. Die Tangentialebene ist senkrecht zu MP . Wir zeichnen von der Tangentialebene die Höhenlinie h und die Abstandslinie k durch den Berührungspunkt P . h' ist

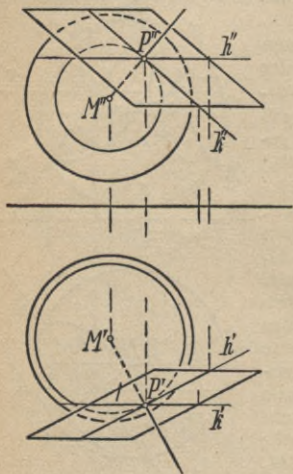


Fig. 44.

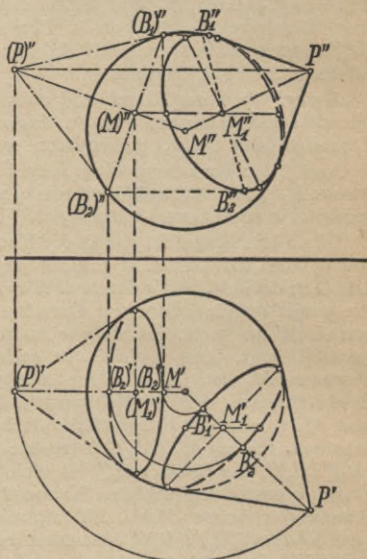


Fig. 45.

senkrecht zu $M'P'$ und k'' senkrecht zu $M''P''$. In Fig. 44 ist die Tangentialebene durch Höhen- und Abstandslinien begrenzt.

Aufg. 51: An eine Kugel sollen die zu einer gegebenen Geraden t parallelen Tangenten gezeichnet werden.

Aufg. 52: An eine Kugel soll von einem Punkte P aus der Tangentialkegel gelegt werden. (Fig. 45.) (Vgl. I, 24.)

Lös.: Die Achse des Tangentialkegels liegt auf der Verbindungsgeraden des Punktes P mit der Kugelmittle M . In der projizierenden Ebene der Geraden PM liegt ein Achsenschnitt B_1PB_2 des Kegels. Wird diese Ebene um MM' soweit gedreht, bis sie zur Aufrißtafel parallel liegt, so erscheint der Achsenschnitt $(B_1)(P)(B_2)$ im Aufriß in wahrer Gestalt. Durch Zurückdrehen wird zunächst der Grundriß M_1' des Mittelpunktes M_1 des Berührungskreises der Tangenten

mit der Kugel bestimmt. Dann handelt es sich nur noch um die Aufgabe, den Kreis zu zeichnen, der durch die Achse PM , den Mittelpunkt M_1 und den Radius $(M_1)''(B_1)''$ bestimmt ist. Die Mantellinien des Kegels, die zum Kegelumriß gehören, berühren in demselben Punkte die Bildellipse und den zugehörigen Kegelumriß.

In Fig. 45 ist auch der Tangentialkegel für den Punkt (P) eingezeichnet, also für den Fall, in dem die Kegalachse $M(P)$ zur Aufrißtafel parallel liegt.

DRITTER ABSCHNITT

ERZEUGUNG UND EIGENSCHAFTEN DER KEGELSCHNITTE

15. Konjugierte Durchmesser der Ellipse. In I, 13 ist die Ellipse als die senkrechte Projektion des Kreises definiert worden. Die Ellipsendurchmesser sind die Projektionen der Kreisdurchmesser. Jedem Kreisdurchmesser soll der zu ihm senkrechte Durchmesser zugeordnet werden. Zwei solcher Kreisdurchmesser besitzen dann die folgenden Eigenschaften. Die Mitten der zu dem einen Durchmesser parallelen Sehnen liegen auf dem zweiten Durchmesser; die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers sind zum zweiten Durchmesser parallel. Diese Eigenschaften, bei denen es sich nur um Parallelität und Teilungsverhältnisse handelt, bleiben auch bei der senkrechten Projektion erhalten; sie kommen also auch den Paaren von Ellipsendurchmessern zu, die die Bilder zueinander senkrechter Kreisdurchmesser sind. Solche Durchmesser heißen *konjugierte Durchmesser der Ellipse*. Die konjugierten Durchmesser einer Ellipse sind im allgemeinen nicht zueinander senkrecht; nur das rechtwinklige Kreisdurchmesserpaar, dessen einer Durchmesser zur Tafel parallel liegt, hat als Bilder zueinander senkrechte konjugierte Ellipsendurchmesser. Dies sind aber nach I, 13 die Achsen der Ellipse.

In I, 14 haben wir gezeigt, daß die Achsen die Ellipse vollständig bestimmen. Wir wollen jetzt nachweisen, daß auch durch irgendein Paar konjugierter Durchmesser eine Ellipse bestimmt wird.

In Fig. 46 ist eine Ellipse durch ihre Achsen $A_1A_2 = 2a$ und $B_1'B_2' = 2b$ gegeben. In dem Hauptscheitelkreise

der Ellipse werden die zueinander senkrechten Halbmesser $M(P)$ und $M(Q)$ gezogen und aus ihnen nach I, 14 die konjugierten Ellipsenhalbmesser MP' und MQ' hergeleitet. Nun drehen wir das Dreieck $MP'(P)$ in der Ellipsenebene um M um 90° herum.

Dann fällt $M(P)$ mit $M(Q)$ zusammen. Die Strecke P_1P' geht in Q_1R und die Strecke $(P)P'$ in $(Q)R$, der Punkt P' also in den Punkt R über. In dem Rechteck $(Q)Q'Q_1R$ wird noch die Diagonale $Q'R$ gezeichnet; sie trifft die Hauptachse im Punkte X und die Nebenachse im Punkte Y . Da die Dreiecke MZX und MZY gleichschenkelig sind, liegen X und Y auf dem Kreis um Z durch M .

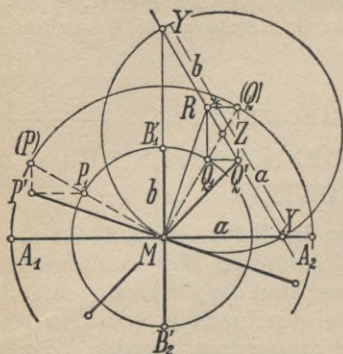


Fig. 46.

um Z durch M . Da $RZ = Q_1Z = Q'Z$ ist, so ergibt sich, daß $YR = MQ_1 = XQ' = b$ und $YQ' = M(Q) = XR = a$ ist. Nach diesen Vorbereitungen kann nun die folgende Aufgabe gelöst werden.

Aufg. 53: Ein Paar konjugierter Halbmesser einer Ellipse ist gegeben. Die Achsen der Ellipse sollen bestimmt werden. (Fig. 47.)

Lös.: Die konjugierten Halbmesser seien MP' und MQ' . In M wird zu MP' die Senkrechte errichtet und auf ihr von M aus bis R die Strecke MP' abgetragen. Q' wird mit R verbunden und die Mitte Z zwischen Q' und R bestimmt. Der um Z durch M gezeichnete Kreis schneide $Q'R$ in den Punkten X und Y . Dann liegen auf den Geraden MX und MY die Achsen der Ellipse. Die halbe Hauptachse ist gleich den Strecken XR und YQ . Diese Strecke wird auf MX von M aus nach beiden Seiten bis A_1 und A_2 abgetragen. Die Strecken YR und XQ sind gleich der halben Nebenachse. Diese ist auf MY von M aus bis B_1' und B_2' einzutragen.

Diese Konstruktion liefert eindeutig die Achsen der Ellipse, die durch die konjugierten Halbmesser bestimmt ist.

16. Brennpunkte der Ellipse. Die in I, 15 angegebene Definition der Ellipse als schiefer Schnitt eines geraden Kreiszyinders soll jetzt benutzt werden zur Herleitung weiterer Ellipseneigenschaften. Für die Ableitungen zeichnen wir die Figuren in senkrechter Projektion auf eine Ebene. Die Achse g des geraden Kreiszyinders liege in der

rührungspunkten von s mit den Umrißkreisen, von den Kugeln berührt.

Auf A_1A_2 wird die Projektion P' eines Ellipsenpunktes P gewählt; seine Umlegung ist (P) . Die Mantellinie durch P berührt die Kugeln in den Punkten T_1 und T_2 der Kreise k_1 und k_2 . Die Geraden PF_1 und PF_2 sind ebenfalls Tangenten der Kugeln; ihre Berührungspunkte sind F_1 und F_2 . Die Tangenten $\overline{PT_1}$ und $\overline{PT_2}$ erscheinen im Bild in wahrer Länge: $\overline{PT_1} = \overline{P'T_1'}$, $\overline{PT_2} = \overline{P'T_2'}$. Die Längen $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ sind aus der Umlegung als $\overline{(P)F_1}$ und $\overline{(P)F_2}$ zu entnehmen. Da die Tangenten von einem Punkt an eine Kugel gleich lang sind, so folgt:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2}.$$

Wie auch P gewählt wird, immer ist $\overline{T_1T_2} = \overline{K_1K_2}$. Danach ist für jeden Ellipsenpunkt

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{K_1K_2}.$$

Für den Scheitel A_1 gilt also $\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{K_1K_2}$. Aus der Fig. 48 ist zu ersehen, daß $\overline{MA_1} = \overline{MA_2}$ und $\overline{MF_1} = \overline{MF_2}$ ist, und da hiernach $\overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2}$ ist, so folgt, daß $\overline{A_2F_2} + \overline{A_1F_2} = \overline{K_1K_2}$, also $\overline{A_1A_2} = \overline{K_1K_2}$ ist.

Auf der Hauptachse einer Ellipse liegen zwei Punkte, die vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, so daß die Summe der Entfernungen eines jeden Ellipsenpunktes von diesen beiden Punkten gleich der Länge der Hauptachse ist. Diese Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse.

Werden auf einer Geraden vier Punkte A_1, A_2, F_1, F_2 so gegeben, daß $\overline{A_1A_2}$ größer als $\overline{F_1F_2}$ ist und daß $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{F_1F_2}$ dieselbe Mitte M haben, so lassen sich in der bekannten Weise weitere Ellipsenpunkte als Schnittpunkte von Kreisen um F_1 und F_2 , deren Radien zusammen gleich $\overline{A_1A_2}$ sind, zeichnen. Wird $\overline{MA_1}$ mit a , $\overline{MF_1}$ mit e und die halbe Nebenachse der Ellipse mit b bezeichnet, so folgt aus dieser Konstruktion die Beziehung $a^2 = b^2 + e^2$. Da die angedeutete Konstruktion eindeutig ist, gilt die folgende Definition: *Die Ellipse ist der geometrische Ort der Punkte, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist.*

17. Leitlinien der Ellipse. Wir bringen in Fig. 48 noch die Ellipsebene mit den Ebenen der Berührungskreise k_1 und k_2 zum Schnitt. Die Schnittgeraden l_1 und l_2 , die Leitlinien der Ellipse, gehen durch die Schnittpunkte E_1 und E_2 von s mit k_1' und k_2' und stehen senkrecht zur Tafel; ihre Umlegungen (l_1) und (l_2) sind senkrecht zu s . Der Abstand PL_1 des Punktes P von der Leitlinie l_1 ist gleich dem Lote $(P)(L_1)$ von (P) auf (l_1) . Es ist:

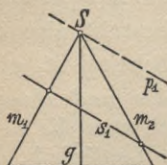
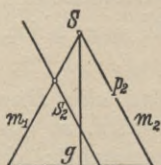
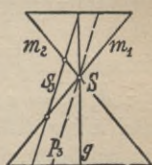
$$\overline{PF_1} : \overline{PL_1} = \overline{(P)F_1} : \overline{(P)(L_1)} = \overline{P'T_1'} : \overline{P'E_1} = \sin \alpha.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $E_1 T_1' P'$ und $K_1 F_1 M$ folgt, daß $\sin \alpha = \overline{F_1 M} : \overline{K_1 M} = e : a$ ist. Es besteht also die Beziehung: $\overline{PF_1} : \overline{PL_1} = e : a$. Für den Scheitel A_1 gilt: $\overline{A_1 F_1} : \overline{A_1 E_1} = e : a$. Sind also Brennpunkte und Hauptscheitel einer Ellipse gegeben, so lassen sich stets die Leitlinien zeichnen. Und umgekehrt: Sind eine Leitlinie l_1 , der zugehörige Brennpunkt F_1 und ein Verhältnis $e : a < 1$ gegeben, so lassen sich die Hauptscheitel und der zweite Brennpunkt ermitteln. Es gilt also auch die folgende Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller der Punkte, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden konstant und kleiner als 1 ist.

18. Die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels. Sind ein gerader Kreiskegel und eine Ebene gegeben, so gibt es stets eine gemeinsame Symmetrieebene für Kegel und Ebene. Dies ist die zur gegebenen Ebene senkrechte Ebene durch die Kegelachse. Hiernach folgt, daß jeder ebene Schnitt des geraden Kreiskegels wenigstens eine Symmetriegerade (Achse) besitzt. Diese Symmetrieebene benutzen wir zunächst als Bildtafel. In der Bildtafel liegen dann die Kegelachse g und die Mantellinien m_1, m_2 ; der Kegelschnitt erscheint als Strecke auf der Spur s der Schnittebene. (Fig. 49.)

Nach der Lage der Schnittebene zu den Mantellinien unterscheiden wir drei Arten von Kegelschnitten: 1. Die Schnittebene ist zu keiner Mantellinie parallel. (Fig. 49 a.) In diesem Falle sind die Schnittkurven Ellipsen, wie in Nr. 19 gezeigt werden wird. Die Parallelebene durch die Kegelspitze S — in Fig. 49 a ist ihre Spur s_1 eingezeichnet —

schneidet den Kegel nicht. 2. Die Schnittebene ist zu nur einer Mantellinie — in Fig. 49 b zu m_2 — parallel. Die Schnittkurve heißt Parabel. Die Parabel besitzt einen unendlich fernen Punkt. Die zur Parabelebene parallele Ebene durch die Kegelspitze ist Tangentialebene des Kegels; sie berührt den Kegel in der Mantellinie m_2 . Ihre Spur s_2 fällt mit m_2 zusammen. 3. Die Schnittebene ist zu zwei Mantellinien des Kegels parallel. (Fig. 49 c.) Die Schnittkurve hat zwei unendlich ferne Punkte; sie heißt Hyperbel. Die zur Schnittebene parallele Ebene durch die Kegelspitze S —

a.
Fig. 49 a.b.
Fig. 49 b.c.
Fig. 49 c.

ihre Spur ist s_1 — schneidet den Kegelmantel in zwei Mantellinien. Die Hyperbel hat zwei Äste, von denen der eine auf dem Kegel, der andere auf dem Scheitelkegel liegt.

19. Ellipse als Kegelschnitt. Die Symmetrieebene für Kegel- und Schnittebene ist wieder als Tafel gewählt. Die Schnittebene erscheint als Gerade s im Bild. A_1A_2 ist die Projektion der Schnittkurve. (Fig. 50.) Wir zeichnen die Umrisse der beiden Kugeln ein, die Kegelmantel und Ellipsenebene berühren. Die Bezeichnungen sind entsprechend denen in Fig. 48 gewählt. Die Halbellipse, die oberhalb der Tafel liegt, ist in der Umlegung gezeichnet. Die Länge der halben Nebenachse MB_1 ist mit Hilfe des Kreisschnittes durch B_1 ermittelt worden als $\overline{M\{B_1\}}$. Auf A_1A_2 ist die Projektion P' eines Ellipsenpunktes P gewählt worden. Um seine Umlegung (P) zeichnen zu können, ist seine Höhe $P'P$ mittels des Kreisschnittes durch P als Halbsehne $P'\{P\}$ bestimmt worden. Es ist also $\overline{P'\{P\}} = \overline{P'(P)}$. Der Kreis auf dem Kegelmantel durch P hat die Projektion Q_1Q_2 ; die Umlegung des oberhalb der Tafel gelegenen Halbkreises ist eingezeichnet.

34 Erzeugung und Eigenschaften der Kegelschnitte
 durch die Scheitel A_1, A_2 und die Brennpunkte F_1, F_2 bestimmten Ellipse geschnitten wird. Jede Ellipse kann also als ebener Schnitt eines Rotationskegels erzeugt werden.

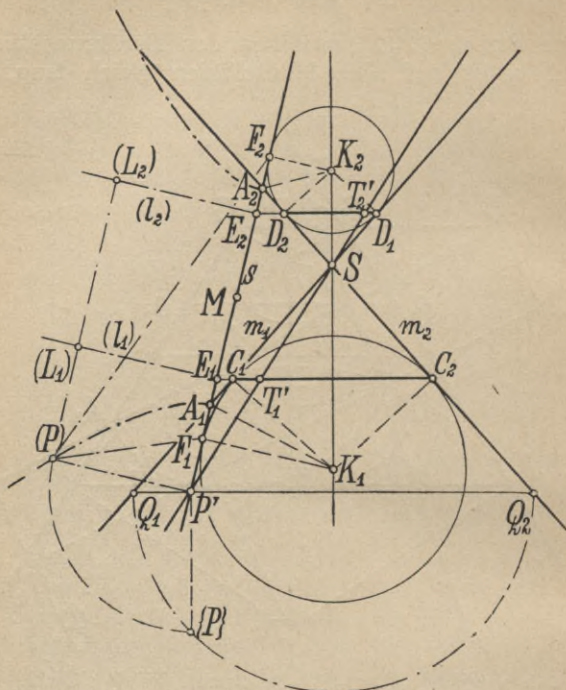


Fig. 51.

20. Die Hyperbel. In Fig. 51 ist die Spur s der Schnittebene so gelegt, daß diese den durch m_1, m_2 und g bestimmten Rotationskegel in einer Hyperbel schneidet. Die Fig. 51 ist durch Vergleich mit Fig. 50 sofort verständlich. Es folgt, daß $\overline{PF_1} = \overline{PT_1} = \overline{Q_1C_1}$ und $\overline{PF_2} = \overline{PT_2} = \overline{Q_1D_1}$ und demnach

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{C_1D_1}$$

ist. Die Hyperbelpunkte liegen also so, daß die Differenz ihrer Abstände von den beiden auf der Achse A_1A_2 gelegenen Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist. Man zeige, daß diese Differenz gleich $\overline{A_1A_2}$ ist.

Für die Hyperbel ergibt sich also folgende Definition: *Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller der Punkte, für die die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist.* Diese Definition führt zu der bekannten punktweisen Konstruktion der Hyperbel.

Wir müssen nun noch zeigen, daß jede durch die Scheitel A_1, A_2 und die Brennpunkte F_1, F_2 gegebene Hyperbel auch als ebener Schnitt eines geraden Kreiskegels erzeugt werden kann. Dabei stellen wir noch die Bedingung, daß die Hyperbelebene zur Achse des Rotationskegels parallel sein soll. Diesen Fall zeigt Fig. 52. Hier bestehen folgende Beziehungen:

$$\overline{SC_1} = \overline{SD_2} = \overline{MA_1} = \overline{MA_2} = 'a, \overline{SA_1} = \overline{SA_2} = \overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$$

und

$$\overline{A_1F_1} = \overline{A_1C_1} = \overline{A_2F_2} = \overline{A_2D_2}.$$

Sind nun auf einer Geraden die Scheitel A_1, A_2 und die Brennpunkte F_1, F_2 gegeben, wird über $\overline{A_1A_2}$ das gleichschenklige Dreieck A_1SA_2 gezeichnet, dessen Schenkel A_1S, A_2S

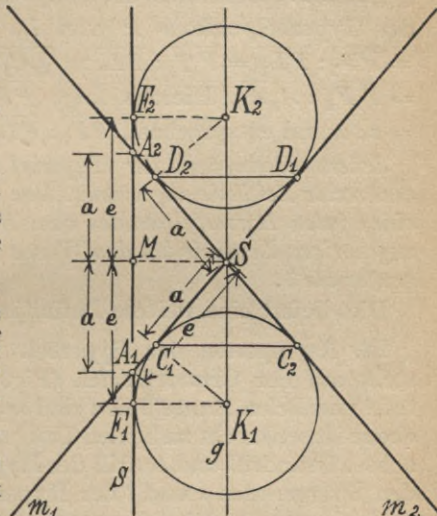


Fig. 52.

gleich $\overline{MF_1}$ sind. Die Geraden SA_1 und SA_2 bestimmen als Mantellinien m_1 und m_2 den Achsenschnitt eines Rotationskegels, dessen Achse g parallel zur Spur s ist. Wird in F_1 die Senkrechte auf s errichtet, die g in K_1 trifft, und von K_1 das Lot K_1C_1 auf m_1 gefällt, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke A_1MS und SC_1K_1 , daß $\overline{K_1C_1}$ gleich \overline{SM} , also gleich $\overline{K_1F_1}$ ist. K_1 ist also Mittelpunkt des Kreises, der m_1 in C_1 und s in F_1 berührt. Entsprechendes gilt für K_2 . Die durch A_1, A_2 und F_1, F_2 bestimmte Hyperbel wird also als ebener Schnitt des durch

m_1, g, m_2 bestimmten geraden Kreiskegels erzeugt. Die Schnittebene geht durch s und ist zur Tafel lotrecht, ist also zu g parallel.

Zur Herleitung weiterer Hyperbeleigenschaften darf also stets die Hyperbelebene parallel zur Kegellachse gewählt werden.

21. Leitlinien der Hyperbel. Die Schnittgeraden l_1 und l_2 der Hyperbelebene mit den Ebenen der Berührungskreise k_1 und k_2 heißen Leitlinien der Hyperbel. (Fig. 51.) (Vgl. II, 17, Leitlinien der Ellipse.) Ist $\overline{PL_1}$ der Abstand des Hyperbelpunktes P von l_1 , so ist: $(P)F_1 : (P)(L_1) = \overline{PF_1} : \overline{PL_1} = \overline{PT_1} : \overline{PL_1} = \overline{Q_1C_1} : \overline{P'E_1} = \overline{AD_1} : \overline{A_1E_2} = \overline{F_1F_2} : \overline{A_1A_2}$. Hieraus folgt $\overline{PF_1} : \overline{PL_1} = \overline{F_1M} : \overline{A_1M} = e : a$ und entsprechend $\overline{PF_2} : \overline{PL_2} = e : a$.

Jedem Brennpunkt der Hyperbel ist eine zur Hauptachse senkrechte Leitlinie zugeordnet. Das Verhältnis der Abstände eines jeden Hyperbelpunktes vom Brennpunkt und von der zugehörigen Leitlinie hat den Wert $e : a$, ist also konstant und größer als 1.

Dies liefert eine weitere Definition der Hyperbel.

22. Asymptoten der Hyperbel. Der gerade Kreiskegel steht auf der Grundrißtafel. (Fig. 53.) Seine zur Aufrißtafel parallelen Mantellinien sind m_1 und m_2 . Die Hyperbelebene ist senkrecht zu beiden Tafeln, also parallel zur Kegellachse. Grundriß und Aufriß der Hyperbel sind Strecken auf den Spurgeraden s und t der Hyperbelebene. In Fig. 53 ist noch ein zur Hyperbelebene paralleler Seitenriß gezeichnet. In ihm erscheint die Hyperbel in wahrer Gestalt. Die zur Seitenrißebene parallelen Mantellinien sind m_3 und m_4 .

Nach II, 12 ist die Tangente in einem Punkte der Hyperbel die Schnittgerade der Hyperbelebene mit der Tangentialebene des Kegels, die den Kegel längs der durch den Hyperbelpunkt gehenden Mantellinie berührt. Die unendlich fernen Punkte U und V der Hyperbel liegen auf den zur Hyperbelebene parallelen Mantellinien m_3 und m_4 . Die Tangentialebenen des Kegels durch die Mantellinien haben die Tangenten des Grundkreises in den Punkten M_3 und M_4 als Grundrißspuren, die die Grundrißspur s der Hy-

perbelebene in V_0 und U_0 schneiden. Die Tangenten u, v in den unendlich fernen Hyperbelpunkten U und V , die Schnittgeraden der Tangentialebenen mit der Hyperbel-ebene, gehen also durch U_0 und V_0 und sind zu m_3 bzw.

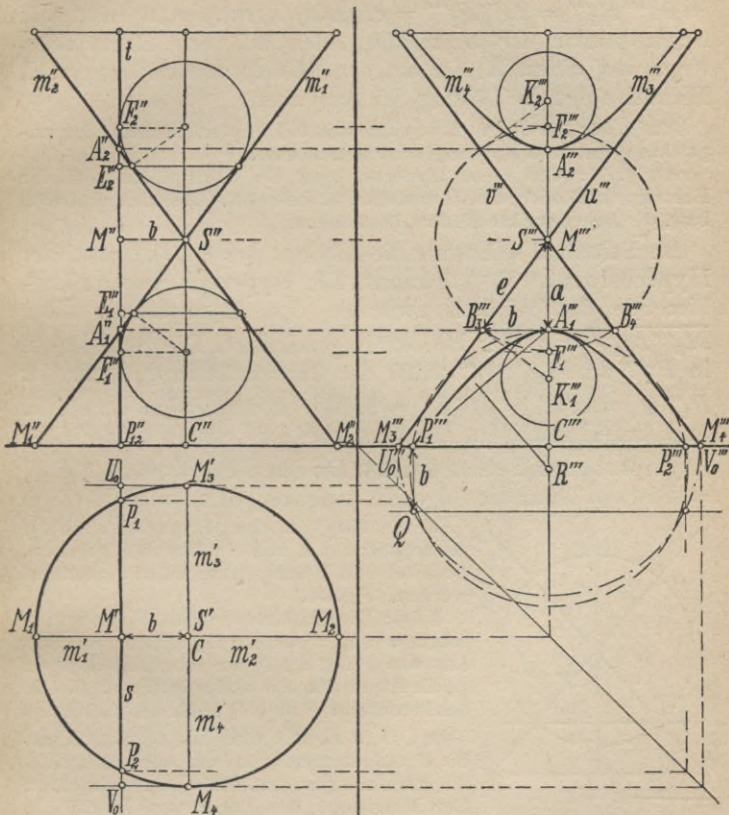


Fig. 53.

m_4 parallel. Im Grundriß und Aufriß fallen die Projektionen dieser Tangenten mit s bzw. t , im Seitenriß mit m_3''' und m_4''' zusammen. Die Tangenten in den unendlich fernen Punkten heißen die *Asymptoten* der Hyperbel. Der Seitenriß zeigt: Die *Asymptoten einer Hyperbel gehen durch den Mittelpunkt und liegen zur Hauptachse symmetrisch.*

Die Tangente im Scheitel A_1''' der Hyperbel trifft die Asymptoten u''', v''' in B_3''' und B_4''' . Wird wieder $MA_1 = a$ und $MF_1 = e$ gesetzt, so ist in Fig. 53 $\overline{M''A_1''} = \overline{M'''A_1'''} = a$ und $\overline{M''F_1''} = \overline{S''A_1''} = \overline{M'''B_3'''} = \overline{M'''B_4'''} = \overline{M'''F_1'''} = e$. Die Brennpunkte und die Schnittpunkte der Scheiteltangenten mit den Asymptoten liegen auf einem Kreise um den Mittelpunkt der Hyperbel. Hieraus folgt die Lösung der Aufgaben.

Aufg. 54: Die Asymptoten der durch Hauptscheitel und Brennpunkte gegebenen Hyperbel sind zu zeichnen.

Aufg. 55: Von einer Hyperbel sind die Asymptoten und die Brennpunkte oder die Hauptscheitel bekannt. Die Hauptscheitel bzw. die Brennpunkte sind zu bestimmen.

Im Seitenriß seien nur die Asymptoten u''', v''' und der Hyperbelpunkt P_1''' bekannt. Die Hyperbelachse ist Halbierende des Winkels zwischen den Asymptoten. Über $\overline{M_3'''M_4'''}$ wird der Halbkreis gezeichnet. Die Senkrechte in P_3''' zu $\overline{M_3'''M_4'''}$ trifft den Halbkreis in Q . Dann ist $\overline{P_1'''Q} = \overline{M'S'} = \overline{M''S''} = b$. Wir können also Grundriß und Aufriß zeichnen. Die Hyperbel ist bestimmt durch die Asymptoten und einen Punkt. Da auch $\overline{P_1'''Q} = \overline{A_1'''B_3'''} = b$ ist, so kann die folgende Aufgabe gelöst werden.

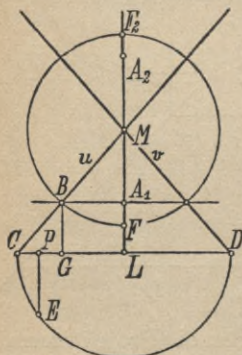


Fig. 54.

Aufg. 56: Von einer Hyperbel sind die Asymptoten u, v und ein Punkt P gegeben. Scheitel und Brennpunkte sollen gezeichnet werden. (Fig. 54.)

Lös.: Die Halbierende des Winkels zwischen u und v ist die Hyperbelachse. Das Lot von P auf die Achse schneidet diese in L , die Asymptoten u und v in C und D . Die Senkrechte in P zu CD trifft den Halbkreis über CD in E . \overline{PE} wird auf CD von L aus bis G aufgetragen und zur Achse durch G die Parallele gezogen, die u in B schneidet. Der Fußpunkt des Lotes von B auf die Achse ist der eine Hyperbelscheitel A_1 . $\overline{MA_2}$ ist gleich $\overline{MA_1}$. Der Kreis um M durch B schneidet die Achse in den Brennpunkten F_1 und F_2 .

23. Krümmungskreise in den Hyperbelscheiteln. In Fig. 53 wird der Kreis durch P_1''' , A_1''' und P_2''' gezeichnet; seine Mitte ist R''' ; sein Radius $R'''A'''$ werde mit

r bezeichnet. Dann ist $\overline{P_1'''C'''}^2 = \overline{A_1'''C'''}(2r - \overline{A_1'''C_1'''})$. Aus dem Grundriß wird entnommen, daß $\overline{P_1M_2'} = \overline{M_1M'}(\overline{M_1M_2} - \overline{M_1M'})$ ist. Da $\overline{P_1'''C'''} = \overline{P_1M'}$ und $\overline{A_1'''C'''} : \overline{M_1M'} = \overline{A_1''P_{1,2}''} : \overline{M_1''P_{1,2}''} = a : b$ ist, so folgt aus den beiden ersten Gleichungen, daß $a(2r - \overline{A_1'''C_1'''}) = b(\overline{M_1M_2} - \overline{M_1M'})$ ist. Streben P_1''' und P_2''' gegen A_1''' , so streben $\overline{A_1'''C'''}^2$ und $\overline{M_1M'}$ gegen Null. Der Kreischnitt des Kegels durch P_1 und P_2 geht über in den Kreischnitt durch A_1 . $\overline{M_1M_2}$ wird also gleich $2b$. Der Krümmungsradius für den Hyperbelscheitel wird also $r = \frac{b^2}{a}$.

Errichtet man im Schnittpunkt B_3''' der Scheiteltangente mit der einen Asymptote die Senkrechte zur Asymptote, so ist der Schnittpunkt K_1''' der Senkrechten mit der Hyperbelachse der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel A_1''' . Denn aus dem rechtwinkligen Dreieck $K_1'''B_3'''M'''$ folgt, daß $\overline{K_1'''A_1'''}$ gleich $b^2 : a$ ist.

24. Die Parabel. In Fig. 55 ist die Spur s der Schnittebene parallel zur Mantellinie m_2 des Kegels; die Schnittebene selbst ist also parallel zur Tangentialebene des Kegels in m_2 . Die Schnittkurve ist eine Parabel. Der eine Scheitel der Kurve ist der Schnittpunkt A von s mit m_1 , der andere, der Schnitt von s mit m_2 , liegt unendlich fern.

In diesem Falle existiert nur eine Kugel, die Kegelmantel und Parabelebene berührt; ihr Mittelpunkt ist K , ihr Berührungspunkt mit der Parabelebene der Brennpunkt F . Die Schnittgerade l der Parabelebene mit der Ebene des Berührungskreises k zwischen Kugel und Kegelmantel ist die zu F gehörige Leitlinie der Parabel. Ist P ein Punkt der Parabel, so

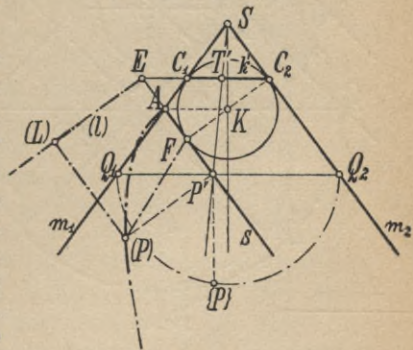


Fig. 55.

ist $\overline{PF} = \overline{PT} = \overline{Q_1C_1} = \overline{Q_2C_2}$ und $\overline{PL} = \overline{P'E} = \overline{Q_2C_2}$, und demnach $PF = PL$. Wir wollen diese Eigenschaft als Definition für die Parabel benutzen: *Die Parabel ist der*

geometrische Ort der Punkte, die von einer festen Geraden l , der Leitlinie, und von einem festen Punkt F , dem Brennpunkte, gleich weit entfernt sind. Diese Definition führt zu der bekannten, eindeutigen punktweisen Konstruktion der Parabel.

Wir müssen nun zeigen, daß auch jede durch Brennpunkt und Leitlinie gegebene Parabel als Schnitt eines Rotationskegels erzeugt werden kann. Wir werden sogar nachweisen, daß dies auch möglich ist, wenn vorgeschrieben wird, daß die Parabelebene zur Mantellinie m_1 senkrecht sein soll. Diesen Fall zeigt Fig. 56. Hier ist das Viereck $AFK C_1$ ein Quadrat, (l) ist parallel zu m_1 . Sind nun (l) und F gegeben, so ist A als Mitte der Strecke EF bestimmt. Über AF wird das Quadrat $AFK C_1$ gezeichnet. Durch AC_1 ist m_1 bestimmt; die Kegelachse g geht durch K und bildet mit m_1 einen Winkel von 45° ; sie trifft m_1 in S . m_2 ist Lot auf m_1 in S , also parallel zu EF . Der durch m_1 und g bestimmte Rotationskegel wird von der zur Tafel lotrechten Ebene durch EF in der durch (l) und F bestimmten Parabel geschnitten.

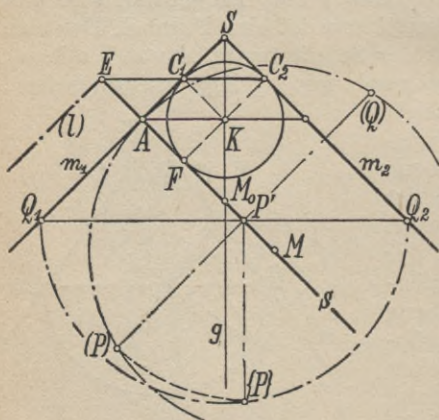


Fig. 56.

25. Der Krümmungskreis im Parabelscheitel. In Fig. 56 ist auf s das Bild P' eines Parabelpunktes P gewählt, seine Umlegung ist (P) . Die Höhe $\overline{PP'}$ ist wieder mit Hilfe des Kreischnittes durch P ermittelt worden. Wir betrachten zunächst den Kreis durch A und (P) , dessen Mitte M auf s liegt. Dieser Kreis geht auch durch

den Parabelpunkt (Q) , den Spiegelpunkt zu (P) in bezug auf s . Bezeichnen wir AM mit r , so gilt: $\{P\}P'^2 = \overline{Q_1P'}(\overline{Q_1Q_2} - \overline{Q_1P'})$ und $\overline{(P)P'}^2 = \overline{AP'}(2r - \overline{AP'})$. Da nun $\overline{(P)P'} = \{P\}P'$ und $\overline{Q_1P'} = \overline{AP'} \cdot \sqrt{2}$ ist, so folgt aus den ersten Gleichungen,

rührungspunkte sind P und Q , ihr Schnittpunkt ist T . Die zur Parabelachse parallele Gerade durch T trifft die Sehne PQ in M und Leitlinie l in H . Da $TU = TF = TV$ und TH senkrecht zu UV ist, so ist H die Mitte von UV , also

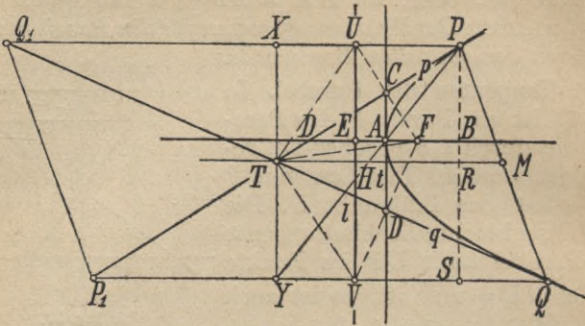


Fig. 58.

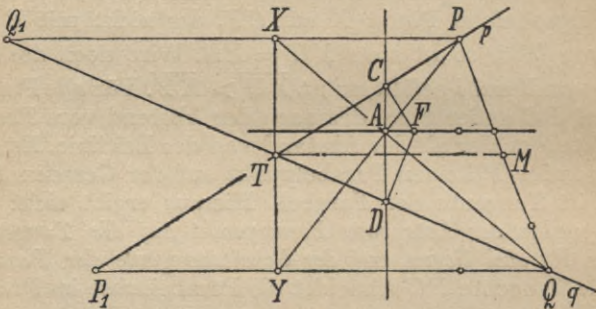


Fig. 59.

auch M der Mittelpunkt der Sehne PQ . Die Verbindungsgerade des Schnittpunktes zweier Parabeltangente mit dem Mittelpunkt der Sehne durch die Berührungspunkte ist zur Parabelachse parallel. Werden auf den Verlängerungen der Tangenten p und q die Strecken TP und TQ bis P_1 und Q_1 abgetragen, so ist das Viereck PP_1Q_1Q ein Parallelogramm, dessen Seiten PQ_1 und QP_1 zu TM also zur Parabelachse parallel sind.

Aufg. 57: Von einer Parabel sind zwei Tangente p, q mit ihren Berührungspunkten P, Q gegeben. Die Richtung der Parabelachse soll ermittelt werden. (Fig. 59.)

1. Lös.: Man zeichnet die Sehne PQ und bestimmt ihren Mittelpunkt M . Der Schnittpunkt T der Tangenten p und q wird mit M verbunden. Dann ist die Parabelachse zu TM parallel.

2. Lös.: Auf den Verlängerungen von p und q wird von ihrem Schnittpunkte T aus die Strecke TP bzw. TQ bis P_1 und Q_1 abgetragen. Dann ist die Parabelachse zu den Geraden P_1Q und Q_1P parallel.

In Fig. 58 ziehen wir noch durch den Tangentenschnittpunkt T das Lot zur Parabelachse, das die Geraden PQ_1 und QP_1 in den Punkten X und Y schneidet, und weiter zeichnen wir das Lot von P auf die Parabelachse, das diese in B und die Geraden TM und QP_1 in den Punkten R und S trifft. Dann ist die Gerade TR Mittellinie des Rechteckes $PXYS$. Da die Diagonale PY des Rechteckes $PXYS$ die Mittellinie TR halbiert, so muß PY auch die Strecke DB auf der Parabelachse halbieren, d. h. PY trifft die Parabelachse im Scheitel A . Ganz entsprechend läßt sich zeigen, daß QX ebenfalls durch den Parabelscheitel A geht. Dieses Ergebnis dient zur Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufg. 58: Zwei Tangenten einer Parabel mit ihren Berührungspunkten sind gegeben. Achse, Brennpunkt und Leitlinie der Parabel sollen bestimmt werden.

Lös.: Wir benutzen die Fig. 59 zur Aufg. 57, in der die Achsenrichtung bereits bestimmt worden ist und ziehen durch T die Senkrechte zu TM , die die Parallelen durch P und Q zu TM in den Punkten X und Y schneidet. Der Schnittpunkt A der Geraden PY und QX ist der Parabelscheitel. Durch A wird die Parabelachse parallel zu TM gezogen. Die Senkrechte in A zur Parabelachse ist die Scheiteltangente; sie schneidet die Tangenten p und q in den Punkten C und D . Die Senkrechten in C und D zu p und q treffen die Parabelachse im Brennpunkte F . Die Leitlinie l wird parallel zur Scheiteltangente im Abstände AF gezogen.

27. Senkrechte Projektion der Kegelschnitte. Der gerade Kreiskegel steht auf der Grundrißtafel. (Fig. 60.) Die Schnittebene mit den Spurgeraden s und t wird senkrecht zur Aufrißebene gewählt. Dann ist der Aufriß des Kegelschnittes die Strecke $A_1''A_2''$ auf t zwischen den Aufrissen m_1'' , m_2'' der zur Aufrißtafel parallelen Mantellinien m_1 und m_2 . Wir wählen den Aufriß P'' eines Punktes P des Kegelschnittes. Sein Grundriß P' liegt senkrecht unter P'' und auf dem Grundriß k' des Kreisschnittes k des Kegels, der durch P geht. Der Aufriß k'' ist die zur Projektions-

achse parallele Strecke $Q_1''Q_2''$ durch P'' . Der Grundriß k' ist der Kreis um S' mit $K''Q_1''$ als Radius. P'' ist der Aufriß von zwei Punkten des Kegelschnittes, von denen in Fig. 60 der in beiden Projektionen sichtbare Punkt P ausgewählt ist. Durch die Kegelspitze S wird die Höhenebene gelegt. Sie schneidet die Kegelschnittebene in einer zur Aufrißtafel senkrechten Geraden n , deren Aufriß n'' der

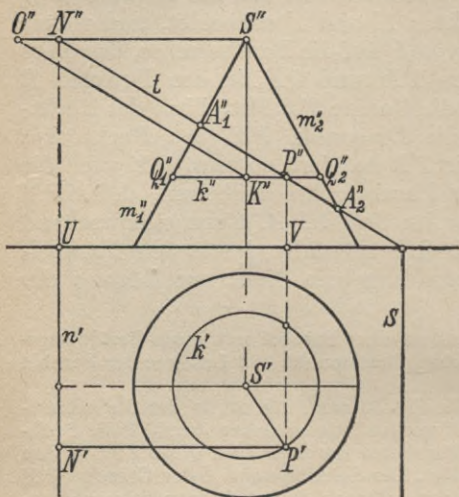


Fig. 60.

Schnittpunkt N'' von t mit der Parallelen durch S'' zur Projektionsachse, und deren Grundriß n' zur Projektionsachse senkrecht ist. Der Abstand PN des Punktes P von der Geraden n erscheint im Aufriß in wahrer Länge als $P''N''$. Der Grundriß $P'N'$ ist senkrecht zu n' zu zeichnen, da n Höhenlinie ist. Wir zeichnen im Aufriß noch die Parallele durch K'' zu t , die $S''N''$ in O trifft.

Durchläuft nun der Punkt P'' die Strecke $A_1''A_2''$, und wird für jede Lage von P'' das dem Viereck $Q_2''S''O''K''$ entsprechende Viereck gezeichnet, so entstehen lauter ähnliche und ähnlich gelegene Vierecke mit S'' als Ähnlichkeitszentrum. Daher ist bei allen Lagen von P'' der Wert des Verhältnisses $\overline{O''K''} : \overline{K''Q_2''}$ derselbe. Nun ist $\overline{O''K''} = \overline{N''P''}$, also ist auch der Wert des Verhältnisses $\overline{N''P''} : \overline{K''Q_2''}$ konstant. Da weiter $\overline{N''P''} : \overline{VU}$ für alle Lagen von P'' denselben Wert hat, \overline{VU} stets gleich $\overline{N'P'}$ und $\overline{K''Q_2''}$ gleich $\overline{S'P'}$ ist, so liegen die Grundrisse P' der Punkte P des Kegelschnittes so, daß $\overline{P'S'} : \overline{P'N'}$ einen konstanten Wert behält. Der Punkt P' durchläuft also einen Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt S' und dessen zu diesem Brenn-

Aufgaben über die senkrechte Projektion der Kegelschnitte 45
 punkt gehörige Leitlinie n' ist. Da bei der senkrechten Projektion im Endlichen gelegene Punkte wieder im Endlichen gelegene Bildpunkte und unendlich ferne Punkte wieder unendlich ferne Bilder haben, so kann zusammenfassend gesagt werden: *Die senkrechten Projektionen der Kegelschnitte sind wieder Kegelschnitte. Die Art des Kegelschnittes wird bei der senkrechten Projektion nicht geändert.*

Im besonderen folgt hieraus, daß bei der senkrechten Projektion die Durchmesser einer Parabel in die Durchmesser der Projektion der Parabel und die Asymptoten einer Hyperbel in die Asymptoten der Bildhyperbel übergehen. Da die Eigenschaften konjugierter Durchmesser einer Ellipse, die sich nach nur auf Parallelität und Teilungsverhältnisse beziehen, bei der senkrechten Projektion erhalten bleiben, so sind die Bilder konjugierter Durchmesser wieder konjugierte Durchmesser der Bildellipse.

28. Aufgaben über die senkrechte Projektion der Kegelschnitte.

Aufg. 59: Ein gerader Kreiskegel soll mit einer Ebene geschnitten werden.

Lös.: Der gerade Kreiskegel mit der Spitze S steht auf der Grundrißtafel. Die schneidende Ebene ist durch die Spurgeraden s, t gegeben. (Fig. 61, 62, 63.) Zunächst soll entschieden werden, welcher Art die Schnittkurve ist. Dazu wird durch die Kegelspitze S die zur Ebene (s, t) parallele Ebene gelegt. Sie habe die Spuren s_0, t_0 . Durch S ziehen wir die Höhenlinie h_0 der Ebene s_0, t_0 . h_0' ist zu s , h_0'' zur Projektionsachse parallel. Die Höhenlinie h_0 trifft die Aufrißtafel in H_0 . Durch H_0 wird parallel zu t die Spurgerade t_0 und durch den Schnittpunkt von t_0 mit der Projektionsachse die Spurgerade s_0 parallel zu s gezogen. In Fig. 61 schneidet s_0 den Grundkreis des Kegels nicht. Die Ebene s, t ist also zu keiner Mantellinie des Kegels parallel; sie schneidet den Kegel in einer Ellipse. (II, Nr. 18.) Entsprechend folgert man, daß in Fig. 62 die Schnittkurve eine Parabel und in Fig. 63 eine Hyperbel ist.

Ist nicht wie in unserer Aufgabe die Schnittebene gegeben, sondern ist vorgeschrieben, welcher Art der Kegelschnitt sein soll, so zeichnet man zuerst die Ebene durch die Kegelspitze und wählt die Schnittebene zu dieser parallel.

Wir bestimmen in den Fig. 61 bis 63 die Punkte M_1, M_2 , in denen der Kegelschnitt die zur Aufrißtafel parallelen Mantellinien m_1, m_2 trifft. Die Punkte M_1 und M_2 liegen auf der Schnittgeraden k der Ebenen (m_1, m_2) und (s, t) . Die Ebene der beiden Mantellinien m_1, m_2 ist Abstandsebene, die Schnittgerade k also Abstandslinie der Ebene s, t . k' fällt mit m_1 und m_2 zusammen und trifft s in K . k'' geht also

durch K'' und ist zu t parallel. k'' schneidet m_1'' und m_2'' in den Punkten M_1'' und M_2'' . In diesen Punkten werden m_1'' und m_2'' von der Aufrißprojektion der Schnittkurve berührt.

Zur Bestimmung der Projektionen der Schnittellipse in Fig. 61 zeichnen wir die Projektionen der Achsen A_1A_2 und B_1B_2 dieser Kurve. Sie sind nach II, Nr. 28 konjugierte Durchmesser der Bild-

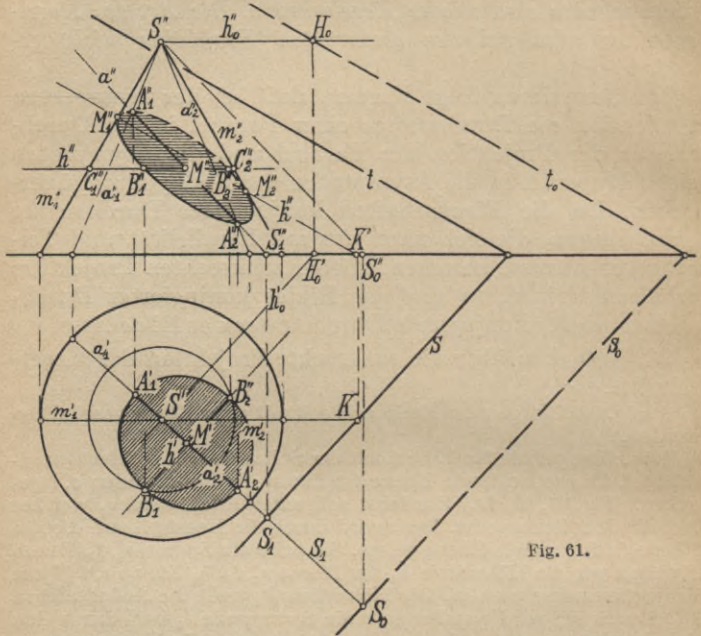


Fig. 61.

ellipsen. Nach II, Nr. 18 liegt die Hauptachse A_1A_2 der Ellipse in der Symmetrieebene für Kegel- und Ellipsebene. Da die Symmetrieebene durch die Kegelachse geht und zur Schnittebene senkrecht steht, so ist das Lot s_1 von S' auf s ihre Grundrißspur und zugleich ihre Grundrißprojektion. s_1 trifft s in S_1 und s_0 in S_0 . Die Symmetrieebene schneidet die Ebene (s_0, t_0) in der Geraden SS_0 , die Ellipsebene (s, t) in der zu SS_0 parallelen Geraden a durch den Punkt S_1 . Der Grundriß a' von a fällt mit s_1 zusammen, der Aufriß a'' geht durch S_1'' und ist zu $S''S_0''$ parallel. Die Hauptscheitel A_1 und A_2 der Ellipse sind die Schnittpunkte der Geraden a mit den in der Symmetrieebene liegenden Mantellinien a_1 und a_2 des Kegels. Die Aufrisse A_1'', A_2'' werden als Schnittpunkte der Geraden a'' mit den Aufrißlinien a_1'', a_2'' der Mantellinien a_1, a_2 gefunden. Die Grundrisse A_1', A_2' liegen auf a_1' bzw. a_2' senkrecht unter A_1'' bzw. A_2'' . Die Mittelpunkte M' bzw. M'' von $A_1'A_2'$ bzw. $A_1''A_2''$ sind die Pro-

jektionen des Mittelpunktes M der Ellipse und die Mittelpunkte der Projektionen der Ellipse. Die Nebenachse $B_1 B_2$ der Ellipse liegt auf der Höhenlinie h der Ellipsebene durch den Mittelpunkt M . Die Projektionen $B_1' B_2'$ und $B_1'' B_2''$ liegen also auf der Parallelen h' durch M' zu s bzw. auf der Parallelen h'' durch M'' zur Projektionsachse. Die Endpunkte B_1, B_2 sind die Schnittpunkte von h mit dem in der Höheebene durch M gelegenen Kreisschnitt des Kegels. Der Kreisschnitt erscheint im Aufriß als die Strecke $C_1'' C_2''$ auf h'' zwischen m_1'' und m_2'' . Der Grundriß dieses Kreises ist der Kreis um S' , dessen Durchmesser gleich $C_1'' C_2''$ ist; er trifft h' in B_1' und B_2' . Die Aufrisse B_1'' und B_2'' liegen auf h'' senkrecht über B_1', B_2' . Die Grundrisse $A_1' A_2'$ und $B_1' B_2'$ der Achsen der Schnittellipse stehen senkrecht aufeinander; sie sind also die Achsen der Grundrißellipse. Die Aufrißellipse ist durch die konjugierten Durchmesser $A_1'' A_2''$ und $B_1'' B_2''$ bestimmt; sie wird nach II, Aufgabe 53 gezeichnet.

Von der Parabel in Fig. 62 sind die beiden Punkte P und Q , die Schnittpunkte der Spurgeraden s der Parabelebene mit dem Grundkreis, bekannt. In diesen Punkten sollen die Parabeltangente p und q gezeichnet werden. Die Tangente p ist die Schnittgerade der Parabelebene mit der Tangentialebene des Kegels durch die Mantellinie SP . Die Spurgerade der Tangentialebene des Kegels ist die Tangente des Grundkreises im Punkte P ; sie schneidet s_0 in P_1 . Die Tangentialebene schneidet die Ebene (s_0, t_0) in der Geraden SP_1 . Die Tangente p ist dann zu SP_1 parallel. Der Grundriß p' ist also die Parallele zu $S'P_1$ durch P , der Aufriß p'' die Parallele zu $S''P_1''$ durch P'' . Entsprechend werden die Projektionen q' und q'' der Tangente q im Punkte Q bestimmt. Die Projektionen der Parabel, in der die Ebene (s, t) den Kegel schneidet, sind nach II, Nr. 28 wieder Parabeln. Sie sind durch die Punkte P', Q' bzw. P'', Q'' und durch die zugehörigen Tangenten p', q' bzw. p'', q'' bestimmt und können

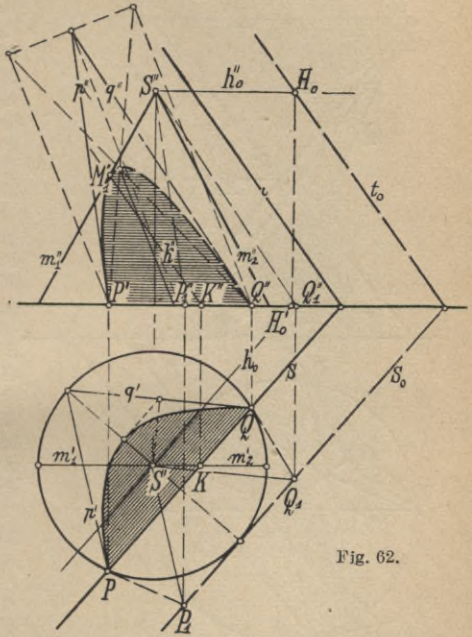


Fig. 62.

nach II, Nr. 25, 26 gezeichnet werden. Man beachte, daß für die Grundrißparabel S' der Brennpunkt ist.

In Fig. 63 ist die Schnittkurve eine Hyperbel. Ihre Projektionen sind nach II, Nr. 28 wieder Hyperbeln. Die Projektionen der Asymptoten sind die Asymptoten der Projektionen der Hyperbel. Die Asymptoten einer Hyperbel sind nach II, Nr. 22 die Schnittgeraden

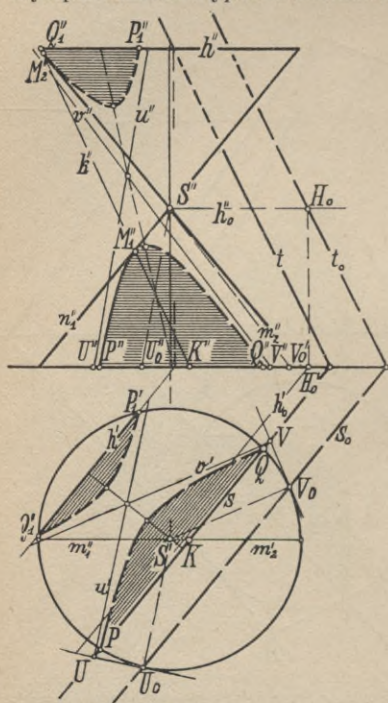


Fig. 63.

Schnittpunkte P und Q der Spurgeraden s mit dem Grundkreise des Kegels Punkte der Hyperbel sind, so sind von beiden Projektionen der Hyperbel die Asymptoten u', v' bzw. u'', v'' und zwei Punkte P', Q' bzw. P'', Q'' bekannt. Aus diesen Angaben werden nach II, Nr. 22, 23 die Hyperbeln gezeichnet.

29. Abwicklung des Zylinder- und Kegelmantels. Wir denken uns den Mantel eines geraden Kreiszylinders längs einer Mantellinie aufgeschnitten und in eine Tangentialebene des Zylinders ausgebreitet. Dabei gehen die Grundkreise des Zylinders in parallele Strecken über, deren Länge

der Hyperbelebene mit den Tangentialebenen, die den Kegel in den zur Hyperbelebene parallelen Mantellinien berühren. Die Spur s_0 trifft den Grundkreis des Kegels in den Punkten U_0, V_0 ; die Mantellinien SU_0 und SV_0 sind also zur Hyperbelebene parallel. Die Tangenten des Grundkreises in den Punkten U_0 und V_0 , die Spuren der Tangentialebenen des Kegels durch die Mantellinien SU_0 und SV_0 , schneiden die Spur s der Hyperbelebene in den Punkten U und V . Die Asymptoten u, v der Hyperbel gehen also durch die Punkte U bzw. V und sind zu SU_0 bzw. SV_0 parallel. Die Grundrißprojektionen u', v' von u bzw. v sind also die Parallelen zu $S'U_0$ bzw. $S'V_0$ durch U bzw. V , die Aufrisse u'', v'' die Parallelen zu $S''U_0''$ bzw. $S''V_0''$ durch U'' bzw. V'' . Da die

gleich dem Umfang der Grundkreise ist. Der Abstand dieser beiden Strecken ist gleich der Zylinderhöhe. Die Mantellinien gehen in die zu diesen parallelen Strecken senkrechten Strecken über. Die Abwicklung des Mantels eines geraden Kreiszyinders ist also ein Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Umfang des Grundkreises, dessen andere Seite gleich der Höhe des Zylinders ist.

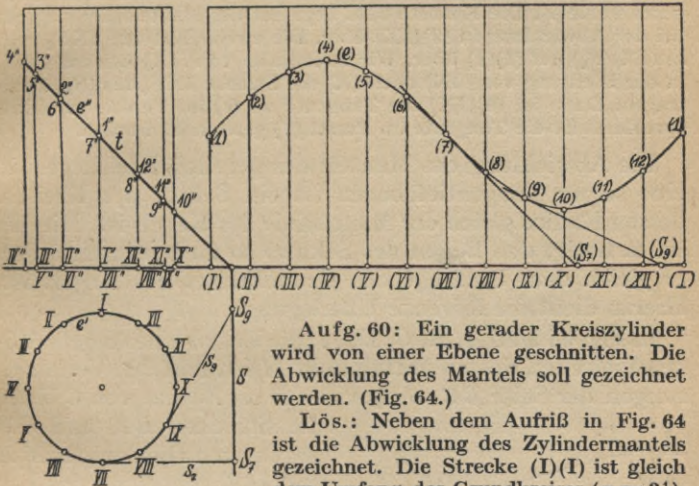


Fig. 64.

Aufg. 60: Ein gerader Kreiszyinder wird von einer Ebene geschnitten. Die Abwicklung des Mantels soll gezeichnet werden. (Fig. 64.)

Lös.: Neben dem Aufriß in Fig. 64 ist die Abwicklung des Zylindermantels gezeichnet. Die Strecke (I)(I) ist gleich dem Umfang des Grundkreises ($\pi \approx 3\frac{1}{2}$). Die Senkrechten in den Endpunkten sind

gleich der Zylinderhöhe. Der Grundkreis wird durch die Punkte I, II, ... XII in 12 gleiche Bogenstücke geteilt, diesen Teilpunkten entsprechen in der Abwicklung die Punkte (I), (II) ... (XII), die die Strecke (I)(I) in zwölf gleiche Teile teilen. Wir nehmen an, daß der Zylindermantel längs der Mantellinie durch I aufgeschnitten und in die Tangentialebene durch die Mantellinie durch den Punkt VII ausgebreitet worden ist. Dann gehen die Mantellinien durch die Punkte I, II, ... XII in die Senkrechten zu (I)(I) durch die Punkte (I), (II), ... (XII) über. Wir sehen in der Abwicklung die Außenseite des Zylindermantels.

Die Ellipse e schneidet die Mantellinien in den Punkten 1, 2, 3, ... 12. Diese Punkte gehen bei der Abwicklung über in die Punkte (1), (2), (3), ... (12), wobei die Abstände (I)(1), (II)(2), ... (XII)(12) gleich den Abständen I1, II2, ... XII12 auf den Mantellinien sind. Da die Zylindermantellinien zur Aufrißtafel parallel sind, so werden die wahren Längen dieser Abstände aus dem Aufriß als die Strecken I'1', II'2', ... XII'12' entnommen. Verbindet man die Punkte

(I), (2) . . . (12), (1) durch einen Linienzug, so erhält man die Kurve (e), in die die Ellipse e bei der Abwicklung übergeht.

In den Punkten der Kurve (e) sollen die Tangenten gezogen werden. Wir beachten, daß die Ellipsentangenten als Schnittgeraden der Ellipsenebene mit den zugehörigen Tangentialebenen des Zylinders bestimmt werden. So ist z. B. die Ellipsentangente im Punkte 9 die Verbindungsgerade des Punktes 9 mit dem Schnittpunkt S_0 der Grundrißspur s der Ellipsenebene und der Grundrißspur s_0 der Tangentialebene des Zylinders durch die Mantellinie IX 9. Die Tangente wird also bestimmt durch die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes 9IX S_0 . Die Kathete 9IX liegt auf der Mantellinie; sie geht bei der Abwicklung in (9)(IX) über. Die zweite Kathete IX S_0 geht in (IX)(S_0) auf (I)(I) über. Wir haben also von (IX) aus auf (I)(I) in der Richtung von (IX) nach (X) die Strecke IX S_0 bis (S_0) abzutragen. Dann ist (9)(IX) die Tangente an (e) im Punkte (9). Entsprechend ist die Tangente im Punkt (7) gezeichnet worden.

Die Abwicklung des Mantels des geraden Kreiskegels in eine seiner Tangentialebenen ist ein Sektor des Kreises, dessen Radius gleich der Mantellinie des Kegels ist. Hierbei ist es nötig, den Bogen des Sektors so zu bestimmen, daß er gleich dem Umfange des Grundkreises des Kegels ist. Hierzu dient die folgende Überlegung:

In Fig. 65 sind A, B, C, D, . . . die Ecken eines regelmäßigen Vieleckes, dessen Mittelpunkt M ist. Auf den Verlängerungen der Seite BC werden von B bis A_1 und von C bis D_1

die Strecken BA und CD abgetragen. Die Geraden A_1A und D_1D schneiden das Lot OM durch M auf BC im Punkte P. Da Winkel OA_1A gleich dem Winkel OBM ist, so ist A_1P parallel zu BM. Nun ist $OA = 3OB$,

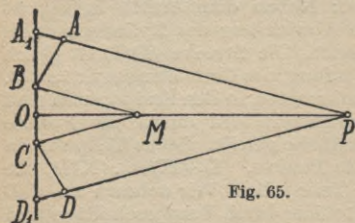


Fig. 65.

also ist auch $OP = 3OM$. Hieraus ergibt der Grenzübergang vom regelmäßigen Vieleck zum Kreis die Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufg. 61: Die Länge eines Kreisbogens soll bestimmt werden. (Fig. 66.)

Lös.: Der Bogen A_1B_1 habe die Mitte O. Wir ziehen in O die Tangente an den Kreis. Auf OM_1 wird der Punkt P_1 so bestimmt, daß $OP_1 = 3OM_1$ ist. Schneiden die Geraden P_1A_1 und P_1B_1 die Tangente in A und B, so ist die Strecke AB angenähert gleich dem Bogen A_1OB_1 .

Diese Konstruktion ist brauchbar für Bogen bis zu 120° . Über die Fehleruntersuchung siehe G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie in 2 Bänden. Berlin 1922. I. Band, Seite 330 ff.

Aufg. 62: Die Länge eines gegebenen Kreisbogens soll auf einem Kreise von anderem Radius abgetragen werden. (Fig. 66.)

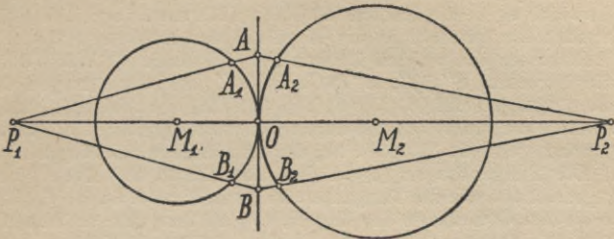


Fig. 66.

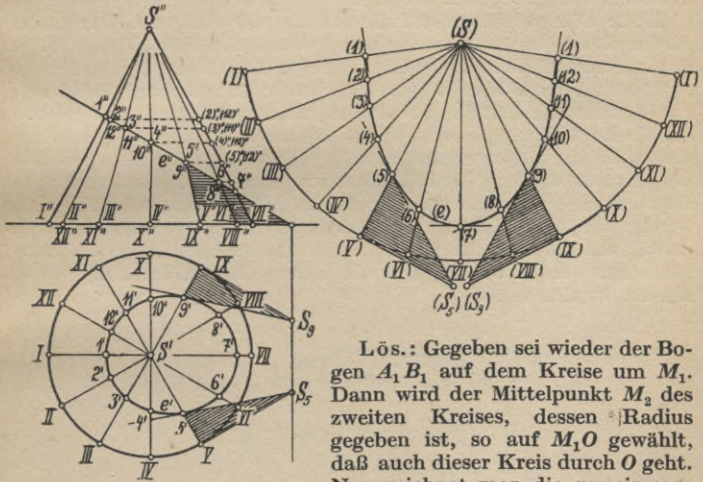


Fig. 67.

Lös.: Gegeben sei wieder der Bogen $A_1 B_1$ auf dem Kreise um M_1 . Dann wird der Mittelpunkt M_2 des zweiten Kreises, dessen Radius gegeben ist, so auf $M_1 O$ gewählt, daß auch dieser Kreis durch O geht. Nun zeichnet man die gemeinsame Tangente beider Kreise in O und

bestimmt die Punkte P_1, P_2 so, daß $OP_1 = 3OM_1$ und $OP_2 = 3OM_2$ ist. Der Bogen $A_1 O B_1$ ist angenähert gleich der Strecke AB , diese ist angenähert gleich dem Bogen $A_2 O B_2$.

Aufg. 63: Man löse die Aufg. 61, wenn P unerreichbar ist, und die Aufg. 62 für den Fall, daß P_1 und P_2 unerreichbar sind.

Aufg. 64: Ein gerader Kreiskegel wird von einer Ebene (s, t) in einer Ellipse geschnitten. Die Abwicklung des Mantels soll gezeichnet werden. (Fig. 67.)

Lös.: Um einen Punkt (S) wird der Kreis gezogen, dessen Radius gleich der Mantellinie des Kegels ist. Die wahre Länge der Mantellinie wird als Strecke $S''I''$ oder $S''VII''$ dem Aufriß entnommen. Der Grundkreis des Kegels wird in 12 gleiche Bogen geteilt. Nach Aufg. 62 werden diese Bogen auf den Kreis um (S) übertragen. Die Mantellinien SI , SII , usw. des Kegels gehen bei der Abwicklung in die Radien (S)(I), (S)(II) usw. über. Die Ellipse e schneidet die Mantellinie des Kegels in den Punkten 1, 2, 3, ... 12. Wir bestimmen die wahren Längen der Abstände $S1$, $S2$, $S3$ usw. als die Strecken $S''(1)''$, $S''(2)''$, $S''(3)''$ usw. und tragen diese Strecken von (S) auf (S)(I), (S)(II), (S)(III) usw. bis (1), (2), (3) usw. ab. In die Kurve (e), die durch die Punkte (1), (2) . . . (12), (1) gelegt wird, geht die Ellipse e bei der Abwicklung des Kegelmantels über. Die Tangenten an (e) werden auf Grund derselben Überlegung gezeichnet wie die Tangenten an (e) in Fig. 64. So ist VS_5 Tangente an den Grundkreis des Kegels, (V)(S_5)Tangente an den Kreis um (S). Die Strecke (V)(S_5) ist gleich der Strecke $V \cdot S_5$.

Aufg. 65: Die Abwicklung des Mantels eines allgemeinen Kreiszyllinders soll gezeichnet werden.

Lös.: Wir verweisen auf die Lösung der Aufg. 29. Der schiefe Kreiszyllinder wird durch eine zur Achse senkrechte Ebene (s, t) in zwei gerade elliptische Zylinder zerlegt. Die Ebene schneidet den Zylinder in der Ellipse e . Man trägt zunächst auf einer Geraden (e) die Bogenstücke 12, 23 . . . 1112 und 121 der Ellipse ab und zeichnet durch die Teilungspunkte (1), (2), (3) usw. die zu (e) senkrechten Geraden. Auf diesen werden von (1), (2), (3) usw. aus die Abschnitte der entsprechenden Mantellinien nach oben bzw. nach unten hin abgetragen. Da die Mantellinien zur Aufrißebene parallel liegen, so werden die wahren Längen aus dem Aufriß entnommen. Man beachte, wie bei Aufgabe 29 die wahre Gestalt des Dreieckes ABC bestimmt werden mußte, hier die wahre Gestalt der Ellipse e ermittelt werden muß.



Von demselben Verfasser erschien bzw. ist in Vorbereitung:

Einführung in die darstellende Geometrie

- I. Bd. Senkrechte Projektion auf eine Tafel. Mit 71 Fig. i. T. [49 S.] kl. 8. 1926. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 66.) Kart. *RM* 1.20
- III. Bd. Schattenkonstruktion. Allgemeine Parallelprojektion. Zentralprojektion. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 85.) In Vorb. 1929

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Studienrat Prof. P. B. Fischer, Berlin. Mit 59 Fig. [91 S.] kl. 8. 1921. (ANuG 541.) Geb. *RM* 2.—

Der Verfasser behandelt die Grundlehren der darstellenden Geometrie an der Hand der wichtigsten Aufgaben, um so in erster Linie eine Anleitung für den Selbstunterricht zu bieten. Aus dem gleichen Grunde werden in der Einleitung Anweisungen für das praktische Zeichnen gegeben, wie auch die notwendige Raumanschauung dadurch gefördert wird, daß zunächst Projektionen auf nur einer Tafelebene in Betrachtung gezogen werden, wodurch das zweite Tafelverfahren dann um so leichter verständlich wird. Wenn die Darstellung sich auch auf das Wichtigste beschränkt, so reichen doch die 180 „Grundaufgaben“ in alle Hauptgebiete der darstellenden Geometrie (Schatten, Durchdringungen, Axonometrie, Perspektive) hinein.

Darstellende Geometrie. Von Prof. Dr. M. Großmann, Zürich. (Teubners math. Leitfäden Bd. 2 u. 3.)

I. Teil. 2., erw. Aufl. Mit 134 Fig. u. 100 Übungsaufgaben. [VI u. 81 S.] 8. 1922. Kart. *RM* 2.20.

II. Teil. 2., erw. Aufl. Mit 144 Fig. [VI u. 154 S.] 8. 1921. Kart. *RM* 4.—

Der erste Band ist der senkrechten Eintafelprojektion, der Zwei- und Mehrtafelprojektion der Grundgebilde sowie den ebenflächigen und den einfachen krummflächigen Körpern gewidmet. Der zweite Band behandelt Axonometrie, Zentralprojektion, Photogrammetrie und besonders eingehend die Kurven und Flächen.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen.

Von Hofrat Dr. E. Müller, weil. Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien.

I. Bd. 3. Aufl. Mit 289 Fig. i. T. u. 3. Taf. [XIV u. 370 S.] gr. 8. 1920. Geh. *RM* 10.—, geb. *RM* 12.—

II. Bd. 3. Aufl. Mit 328 Fig. i. T. [X u. 362 S.] gr. 8. 1923. Geb. *RM* 11.—

„Was dem Buche seinen großen Wert verleiht, ist die mathematische Gründlichkeit und Verlässlichkeit, wie sie aus der völligen Durchdringung des Stoffes herauswächst, die systematische Strenge der Darstellung, die aber auch praktischen Erwägungen Raum gibt, die große Zahl der durchgeführten Aufgaben.“ (Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik.)

Darstellende Geometrie. Von Dr. J. Hjlemslev, Prof. a. d. Univ. Kopenhagen. Mit 305 Abb. [IX u. 320 S.] 8. 1914. (Handb. der ang. Math. 2.)

Geh. *RM* 9.— geb. *RM* 11.—

„Von ganz hervorragendem mathematischen Wert ist die geradezu meisterhafte Behandlung der ebenen Kurven und der Raumkurven. Jeder, der das Buch zur Hand nimmt, wird Gewinn davon haben: der Student, der mathematische Forscher, der Mathematiklehrer — kurz ein vortreffliches Buch.“ (Zeitschrift f. d. math. u. naturw. Unterricht.)

Darstellende Geometrie des Geländes und verwandte Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen. Von Dr. R. Rothe,

Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin. 2., verb. Aufl. Mit 107 Fig. i. T. [VI u. 92 S.] kl. 8. 1919. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 35/36.) Kart. *RM* 2.40

„Die mit großem Geschick ausgewählten zahlreichen praktischen Beispiele beleben außerordentlich und gestatten mühelos das Eindringen in die sonst schwierig zu bewältigende Materie. Das in Satz, Druck und Ausstattung vortrefflich sich präsentierende Bändchen macht dem Verlage alle Ehre und kann nur wärmstens empfohlen werden.“

(Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Math.-phys. Bibl. 67: Kramer, Darstellende Geometrie II

Sphärische Trigonometrie nebst Anwendungen zum Selbstunterricht. Von weil. Geh. Studienrat Prof. Dr. *P. Crantz*, Berlin. 2. Aufl. neu bearb. von Studienrat Dr. *M. Hauptmann*, Leipzig. Mit 114 gelösten Aufgaben, 67 Fig. u. einem Nomogramm des allgemeinen Kugeldreiecks. [IV u. 107 S.] kl. 8. 1928. (ANuG 605.) Geb. *RM* 2.—

Bei der zweiten Auflage wurde unter Beibehaltung der den bekannten Crantz-Bändchen eigenen klaren, einfachen und ausführlichen Darstellungsweise die rechnerische Behandlung des Kugeldreiecks überall durch die zeichnerische ergänzt und die Zahl der Figuren wie der angewandten Aufgaben erheblich vermehrt. Das beigegebene drehbare Nomogramm, das mit einer einzigen raschen Einstellung die unmittelbare Ablesung der gesuchten Stücke des Kugeldreiecks gestattet, wird vielen willkommen sein.

Sphärische Trigonometrie. Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung. Von *L. Balsler*, Oberstudienrat in Darmstadt. Mit 22 Fig. [52 S.] kl. 8. 1927. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 69.) Kart. *RM* 1.20

An dem sehr glücklich gewählten Beispiel der Kugel als Erd- und Himmelskugel wird der Leser in die verschiedenen Verfahren der darstellenden Geometrie planmäßig eingeführt und so auf zeichnerischem Wege zu den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie hingeleitet, die auf wichtige praktische Aufgaben angewandt werden. Den Schluß bildet die Polarecke mit Anwendungen.

Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze). Von Oberstudienrat *L. Balsler*, Darmstadt. Mit 40 Fig. [60 S.] kl. 8. 1928. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 81.) Kart. *RM* 1.20

Diese nur geringe mathematische Kenntnisse voraussetzende Einführung behandelt die für die Kartenlehre wichtigen flächentreuen und winkeltreuen Entwürfe, die Kegel- und Sonderentwürfe sowie die Loxodrome an Hand zahlreicher sorgfältig ausgeführter Figuren. Die Grundlagen für den vielgestaltigen Stoff werden in dem Bändchen selbst entwickelt.

Karte und Kroki. Erläuterte Herstellung und Lesen von Karten aller Art mit besonderer Berücksichtigung einfacher Methoden. Von Studienrat Dr. *H. Wolff*, Berlin. Mit 47 Fig. i. T. [IV u. 58 S.] kl. 8. 1917. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 27.) Kart. *RM* 1.20

Photogrammetrie. (Einfache Stereo- u. Luftphotogrammetrie.) Von Dr.-Ing. *H. Lüscher*, wissenschaftl. Mitarbeiter d. internat. Stereographik-Zentrale, München. Mit 78 Fig. [128 S.] kl. 8. 1920. (ANuG. 613.) Geb. *RM* 2.—

Einführung in die projektive Geometrie. Von Studienrat Dr. *M. Zacharias*, Berlin. 2. Aufl. Mit 18 Fig. [IV u. 51 S.] kl. 8. 1922. (Math.-Phys. Bibl. Bd. 6.) Kart. *RM* 1.20

Geometrisches Zeichnen. Von Oberschullehrer *A. Schudeisky*, Gleiwitz. Mit 172 Abb. i. T. u. auf 12 Taf. [IV u. 51 S.] kl. 8. 1919. (ANuG 568.) Geb. *RM* 2.—

Projektionslehre. Die rechtwinkl. Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung techn. Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinkl. Parallelprojektion in kurzer, leichtfaßlicher Behandlung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von Oberschullehrer *A. Schudeisky*, Gleiwitz. 2. Aufl. Mit 165 Fig. [90 S.] kl. 8. 1923. (ANuG 564.) Geb. *RM* 2.—

Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Dr. *K. Doehle-mann*, weil. Prof. a. d. Techn. Hochschule in München. 3., durchges. Aufl. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. [108 S.] kl. 8. 1928. (ANuG 510.) Geb. *RM* 2.—

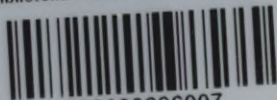
Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301647

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296007