

MATHEMATISCH-  
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK  
REIHE I

85/86

G. SCHEFFERS

WIE FINDET UND ZEICHNET MAN  
GRADNETZE VON LAND-  
UND STERNKARTEN?



LEIPZIG / B. G. TEUBNER / BERLIN

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000296010

MATHEMATISCH-  
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK  
REIHE I

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING  
85/86

WIE FINDET UND ZEICHNET MAN  
GRADNETZE VON LAND-  
UND STERNKARTEN?

VON

DR. DR.-ING. GEORG SCHEFFERS  
O. PROF. AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

MIT 12 TAFELN  
UND 27 ABBILDUNGEN  
IM TEXT



1934

LEIPZIG UND BERLIN  
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

KD 515 : 626.8



~~I 386~~

I 301646

Akc. Nr. \_\_\_\_\_

~~1988~~/51

DER PETRISCHULE ZU LEIPZIG  
ZUR HUNDERTJAHRFEIER  
GEWIDMET



## VORWORT

Die *Petrishule zu Leipzig* feierte das fünfzigjährige Bestehen im Jahre 1884, kurz nach meinem Abgang. Mein Lehrer PHILIPP WEINMEISTER, der nicht lange vorher einem Ruf an die Tharandter Forstakademie gefolgt war, widmete der Anstalt damals eine Festschrift über die Herzlinie. Nun hat die Petrishule weitere fünfzig Jahre zurückgelegt, und ich möchte nach dem Vorbilde meines unvergeßlichen Lehrers eine kleine Gabe zur Hundertjahrfeier darbringen, um den Dank zu bekunden, den ich der Petrishule schuldig bin.

Der Gegenstand dieses Werkchens geht Lehrer wie Schüler an. Das Buch wendet sich überhaupt an alle, die wissen möchten, wie die Gradnetze der Atlanten zustandekommen. Verständlich ist es für jeden, der die Schulmathematik begriffen hat. Das Besondere des Buches besteht darin, daß die zur Sprache gebrachten Entwürfe von Landkarten vollständig durchgeführt werden. Denn es wird nicht nur dargetan, wie man sie findet, sondern auch, wie man sie Schritt für Schritt selber zeichnen kann. Andererseits wird aber auch nur das gebracht, was hierfür notwendig ist. Unerläßlich erschienen mir allerdings geschichtliche Bemerkungen, obgleich sie manchem entbehrlich erscheinen mögen. Die Gradnetze werden zum Teil anders als sonst abgeleitet. Aber das Werkchen will selbstverständlich nicht in Wettbewerb treten mit den Lehrbüchern des Landkartenentwurfes. Die Tafeln und Abbildungen im Texte sind von mir selbst gezeichnet und beschriftet worden; was man daran tadeln mag, fällt nur mir zur Last.

Der Petrishule darf ich aus dankbarem Herzen Glückwünsche zur Hundertjahrfeier aussprechen!

Berlin-Dahlem, im April 1934.

**Georg Scheffers**

# INHALT

## I. Einleitung

	Seite	Tafel
1. Der Atlas . . . . .	1	
2. Der Globus und das Bogenmaß . . . . .	3	
3. Was man von einer Landkarte fordern könnte . . . . .	5	

## II. Fächentreue Entwürfe<sup>1)</sup>

4. Archimedes und sein Satz über die Kugelfläche . . . . .	7	
5. Flächentreuer Entwurf nach Archimedes . . . . .	8	I, A
6. Andere geradlinige flächentreue Entwürfe . . . . .	11	I, B
7. Flächentreuer Entwurf mit Sinuslinien . . . . .	13	II, C
8. Flächentreue Entwürfe mit kreisförmigen längen- treuen Breiten . . . . .	16	II, D
9. Ein paar geschichtliche Bemerkungen . . . . .	23	
10. Flächentreuer Entwurf nach Mollweide . . . . .	24	III, E
11. Der einfachste strahlige flächentreue Entwurf . . . . .	31	IV, F
12. Allgemeine strahlige flächentreue Entwürfe . . . . .	32	
13. Eine Anwendung des Kosinussatzes . . . . .	37	IV, G, H
14. Abermals eine Anwendung des Kosinussatzes . . . . .	38	V, J, K
15. Ein Lampenschirm als Globusersatz . . . . .	44	

## III. Winkeltreue Entwürfe

16. Winkeltreue . . . . .	46	
17. Auf der Suche nach einem winkeltreuen Entwurf . . . . .	48	
18. Winkeltreue der stereographischen Projektion . . . . .	50	
19. Kreistreue der stereographischen Projektion . . . . .	51	
20. Stereographische Projektion der nördl. Erdhälfte . . . . .	53	VI, L, M
21. Ermittlung kürzester Wege . . . . .	54	
22. Stereographische Projektion auf eine Tangential- ebene des Äquators . . . . .	58	VII, N
23. Stereographische Projektion auf eine beliebige Tangentialebene . . . . .	60	VII, O
24. Die stereographische Projektion als Hilfsmittel . . . . .	64	
25. Neue flächentreue Entwürfe mittels stereogra- phischer Projektion . . . . .	67	{ VIII, P IX, Q
26. Anforderungen an eine Seekarte . . . . .	68	
27. Gerhard Mercator . . . . .	72	
28. Die Mercatorsche Grundformel . . . . .	73	
29. Angenäherter Mercatorentwurf . . . . .	76	
30. Die überlieferte Seekarte Mercators . . . . .	78	
31. Herstellung der Mercatorkarte . . . . .	79	X, R

## IV. Perspektive Entwürfe

32. Perspektive von der Mitte auf eine Ebene . . . . .	85	XI, S
33. Perspektive von der Mitte auf einen Zylinder . . . . .	89	XI, T

## V. Sternkarte

34. Ein besonderer strahliger Entwurf . . . . .	90	
35. Drehbare Sternkarte . . . . .	93	XII, U

1) Hierzu gehört aber auch Nr. 25.

## I. EINLEITUNG

1. **Der Atlas.** Gegen Ende seines arbeitsreichen Lebens begann der große Kosmograph GERHARD MERCATOR (1512 bis 1594) eine neue Sammlung von Landkarten, der er den Namen „Atlas“ geben wollte. Jedoch erst ein Jahr nach seinem Tode konnte sein Sohn die letzte Lieferung in Duisburg erscheinen lassen; ihr wurde der vom Vater gewünschte Titel Atlas gegeben. MERCATOR hatte nicht an den bekannten Riesen der griechischen Sage gedacht, sondern an dessen Sohn, der ein Sternkundiger gewesen sein soll. Wir aber denken beim Namen Atlas, der seitdem allen Kartensammlungen beigelegt wird, lieber an den das Weltall auf seinem Buckel tragenden Riesen.

Der Atlas gehört zu jenen Büchern, die der junge Mensch nicht für immer beiseitelegt, wenn er die Schule verläßt, sondern fürs Leben behält. Denn der Atlas muß oft zu Rate gezogen werden. Aber man muß ihn mit Verstand benutzen. Allzuleicht übersieht man die starke Krümmung der gezeichneten Breitenkreise, so daß z. B. mancher glaubt, London läge nördlicher als Berlin. Ein Altphilologe schreibt in einer Geschichte Alexanders des Großen, die Makedonier hätten auf dem Zug nach Indien unter anderem auch deshalb gemurrt, weil der ungewohnt hohe Sonnenstand sie beunruhigte. Der Verfasser hatte wohl eine Karte vor sich, auf der allerdings der Indus viel weiter unten gezeichnet war als die persische Hauptstadt Persepolis. Aber der Unterschied der Breite betrug für die Makedonier keine fünf Grad. Sonach müßte ein Hamburger noch mehr über den hohen Sonnenstand in München in Unruhe versetzt werden! Auf der Seekarte, die man in den Atlanten hinter den Karten der Erdhälften findet, sieht Nordamerika bedeutend größer aus als Afrika, wodurch man ebenfalls zu einer falschen Vorstellung kommt, u. dgl. m.

Der Atlas hat etwas Rätselhaftes an sich, und unter den Gebildeten gibt es nicht viele, die wissen, wie die Gradnetze darin entstanden sind. Wenn ein Schüler seinen Lehrer darüber befragt, wird der ihm wohl antworten, die Karten seien Projektionen. Auch in den Lehrbüchern des Kartenentwurfes wird beständig von Projektionen geredet. Dennoch enthalten die Atlanten von heute keine Karte, die wirklich durch Projektion, sei es Parallel- oder Zentralprojektion, hervorgegangen wäre! Aber woher soll man wissen, daß immer ein falscher Ausdruck gebraucht wird? Ursache ist die gedankenlose Übersetzung aus dem Französischen. Für das französische „projection“ setzt man einfach das nächstliegende Wort „Projektion“, ohne daran zu denken, daß „Entwurf“ gemeint ist.

Einem Lernenden dürfte eigentlich kein Lehrmittel in die Hand gegeben werden, das er nicht versteht. Der Abiturient mindestens sollte etwas davon wissen, wie die Gradnetze gezeichnet werden. Aber wo bekommt man darüber eine richtige Auskunft? Die Sonderwerke über den Kartenentwurf wenden sich an den Fachmann. Die Lehrbücher der darstellenden Geometrie bringen nichts über diejenigen Entwürfe, die man heutzutage anwendet. Aber wer darstellende Geometrie betreibt, darf doch wünschen, auch etwas über das Zeichnen der Gradnetze zu hören. Wir wollen deshalb eine Auswahl von Entwürfen bringen, soweit, daß man dem Atlanten mit genügendem Verstehen gegenüber treten kann. Die Betrachtungen würden wenig anziehend sein, wenn wir unser Augenmerk hauptsächlich auf die Formeln für die Entwürfe richteten. So inhaltreich auch immer Formeln sind, lassen sie doch den, der nicht Mathematiker vom Fach ist, einigermassen kalt. Er überblickt nicht ihre Tragweite und weiß sie nicht gewandt genug in die Tat umzusetzen.

Auf diese Tat aber kommt es uns an! Wir wollen dartun, wie man die Gradnetze wirklich zeichnen kann. Der große Geometer JAKOB STEINER (1796—1863) hat einmal mit Recht bemerkt, daß es eine ganz andere Sache sei, die Konstruktionen in der Tat, d. h. mit den Werkzeugen in der Hand, oder bloß mit der Zunge auszuführen.

Die Landkarten betreffen meistens nur Teile der gesamten Erdoberfläche. Aber wir werden die Gradnetze nicht für

Teile zeichnen, sondern, soweit es geht, für die ganze Erde oder mindestens für eine Erdhälfte. Denn dann erst werden die Gesetze des Abbildens recht sinnfällig. Deshalb darf man keinen Anstoß daran nehmen, daß manche Bilder arg verzerrt aussehen. Vielmehr muß man daran denken, daß von diesen Bildern meistens nur Ausschnitte aus ihren mittleren Teilen gebraucht werden, wo die Verzerrungen am geringsten sind. Wir schlagen daher vor, man möge aus einem Stück Pappe ein kleines Quadrat oder Rechteck ausschneiden, nicht länger als ungefähr anderthalb Zentimeter, und diese Schablone so auf unsere Bilder legen, daß man nur ein Mittelstück sieht.

Daß unsere Zeichnungen eigentlich allzu klein sind, leuchtet ein. Äußerliche Gründe zwangen dazu. Wegen dieser Kleinheit begnügen wir uns immer damit, nur die Längen- und Breitenkreise von zehn zu zehn Grad zu zeichnen. Aber man kann ebenso die dazwischen verlaufenden Längen- und Breitenkreise entwerfen, wenn man alles größer anlegt.

**2. Der Globus und das Bogenmaß.** Das beste Bild der Erdoberfläche gibt der Globus. Zwar ist die Erde keine vollkommene Kugel, aber sie weicht nur wenig davon ab. Wenn der äquatoriale Durchmesser des Globus ein halbes Meter beträgt, ist die Nord-Süd-Achse um noch keine zwei Millimeter kürzer zu machen, und das ist unerheblich. Noch viel weniger tragen die Gebirge auf. Wir dürfen somit die Erde als eine vollkommene Kugel ansehen.

Wenn auch schon im Altertum Globen angefertigt sein sollen, wie behauptet wird, können sie doch wegen des beschränkten Weltbildes nur höchst mangelhaft gewesen sein. Mit manchen wilden Darstellungen ist auch noch der in Nürnberg aufbewahrte erste leidliche Globus versehen, der von MARTIN BEHAIM (ungefähr 1459–1507), den dieser selbst als einen Erdapfel bezeichnete.<sup>1)</sup> Der Name Globus, der im Vulgärlatein einen kugeligen Klumpen bedeutet, ist wohl erst später gebräuchlich geworden.

Unsere Globen haben Mängel: Erstens ist der Globus unhandlich, wenn er einigermaßen groß ist, — kleine sind

1) Siehe SIEGMUND GÜNTHER, „Martin Behaim“, Bayr. Bibl. 13. Bd. Bamberg 1890, insb. S. 37 f.

nicht deutlich genug. Zweitens ist er teuer und leicht verletzbar. Drittens endlich ist er trotz seiner Kugelgestalt doch nicht so genau, wie man denken könnte. Denn man klebt die Karte mittels einzelner Papierstreifen auf, die nicht vollkommen darauf passen und sich mehr oder weniger verziehen. Eigentlich müßte man die Länder geradezu auf den Globus selbst aufzeichnen, was sich jedoch wegen der Kostspieligkeit verbietet. Neben dem Atlanten ist immerhin ein kleiner Globus ein nützliches Anschauungsmittel.

Wir werden immer vom Abbilden des Globus, nicht der Erde sprechen. Beides ist im Grunde dasselbe, aber die Erde ist für unser Vorstellungsvermögen zu groß. Dagegen dürfen wir uns den Globus so klein denken, wie wir wollen. *Den Halbmesser des Globus werden wir stets als die Einheit der Länge benutzen, also gleich 1 setzen.* Die beiden Pole sind die ausgezeichneten Stellen, die den Anhalt liefern für das Gradnetz der Längen- und Breitenkreise, womit man die Erde in Gedanken und den Globus in der Tat überzieht. Dies Gradnetz ergab sich von selbst, als man die Kugelgestalt der Erde erkannt hatte. Man schreibt seine Erfindung dem aus Nicäa oder Rhodos gebürtigen Astronomen HIPPARCHOS zu (ungefähr 190–125 v. Chr.).

Wir werden die geographische Länge mit  $\lambda$ , die geographische Breite mit  $\beta$  bezeichnen. Das sind Winkel, deren Scheitel im Innern des Globus, in seiner Mitte  $M$  liegen. Zutage treten diese Winkel auf der Oberfläche als Bogen von Großkreisen. Diese Bogen nennt man die *Bogenmaße* der Winkel (wobei daran erinnert sei, daß der Halbmesser des Globus gleich 1 gesetzt wird). Man muß wohl unterscheiden zwischen Gradmaß und Bogenmaß. Wenn vom Sinus, Kosinus usw. eines Winkels die Rede ist, kommt das zwar nicht in Betracht, denn das sind ja unbenannte Zahlen (die man allerdings durch Strecken wiedergeben kann, wenn die Längeneinheit festgesetzt worden ist). Aber man hat oft mit Ausdrücken zu tun, in denen die Winkel

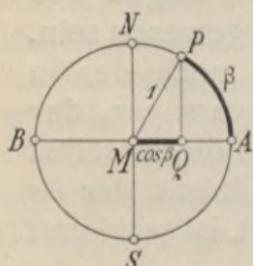


Fig. 1

selbst vorkommen, wie z. B. in dem Ausdruck  $\beta - \cos \beta$ . Man muß sich vollkommen darüber klar sein, was dies bedeutet. Wenn wir in Fig. 1 einen Axialschnitt des Globus und in ihm

eine Breite  $\beta$  als  $\sphericalangle AMP$  einzeichnen, stellt der Bogen von  $A$  bis  $P$  das Bogenmaß, also das erste Glied in  $\beta - \cos \beta$  dar. Das zweite Glied  $\cos \beta$  wird durch die Strecke  $MQ$  angegeben. Mithin ist  $\beta - \cos \beta$  der Betrag, um den der Bogen von  $A$  bis  $P$  größer ist als die Strecke  $MQ$ . In unserer Figur ist z. B. die Breite  $60^\circ$  gewählt. Für sie ist der Bogen von  $A$  bis  $P$  gleich dem Sechstel des Kreisumfanges  $2\pi$  und der Kosinus gleich  $\frac{1}{2}$ , mithin die Differenz  $\beta - \cos \beta$  gleich  $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}$  oder rund 0,547.

**3. Was man von einer Landkarte fordern könnte.** Die Karten für den Wanderer stellen kleine Stücke der Erde dar, und für sie kommt die Krümmung der Erde nicht in Betracht. Ihr Entwurf ist Sache des Feldmessers, und wir wollen ganz von ihnen absehen. Soll das Gradnetz für ein größeres Gebiet gezeichnet werden, so muß man die Erdkrümmung beachten. Ein kugeliges Flächenstück läßt sich nicht vollkommen ähnlich – im strengen Sinne dieses Wortes – auf der Zeichenebene abbilden. Daher muß man stets mit Verzerrungen rechnen. Die Frage ist, was man möglichst unverzerrt haben möchte. Daß sich alle Linien auf dem Globus in ihren wahren Längen wiedergeben ließen, ist augenscheinlich unmöglich. Dagegen lassen sich andere Wünsche berücksichtigen. Wir erwähnen einige:

1) Man kann *Winkeltreue* verlangen, d. h. der Winkel, den irgend zwei von einer Stelle ausgehende Richtungen auf dem Globus miteinander bilden, soll sich auf der Karte stets in wahrer Größe zeigen. Im Atlanten können winkeltreue Karten sein, aber nicht alle sind winkeltreu. Denn man wird z. B. Karten finden, auf denen sich die Längen- und Breitenkreise nicht rechtwinklig durchsetzen.

2) Man kann wünschen, daß sich auf der Karte die Flächeninhalte gerade so zueinander verhalten wie auf dem Globus. Weil man dem Globus einen beliebigen Durchmesser geben darf, kann man geradezu fordern, jeder Flächeninhalt auf der Karte sei ebenso groß wie auf dem Globus. Deshalb nennt man solche Karten *flächentreu*<sup>1)</sup>. Der Atlas wird flächen-

1) Die Bezeichnungen „winkeltreu“ und „flächentreu“ sind so treffend und liegen so nahe, daß man sich wundern muß, daß sie erst ziemlich spät vorgeschlagen und angenommen worden

treue Karten bieten, aber wieder ist zu sagen, daß nicht alle Karten flächentreu sind, z. B. nicht die Seekarte.

3) Die *kürzesten Wege* auf dem Globus sind Bogen von Großkreisen. Man kann fordern, daß sie sich geradlinig darstellen. In der Tat läßt sich diese Forderung befriedigen; man wird jedoch im Atlanten keinen derartigen Entwurf finden, weil solche Karten andere allzu große Verzerrungen haben (s. Nr. 32). Anders verhält es sich natürlich mit den oben erwähnten Sonderkarten fürs Wandern.

4) Man kann verlangen, daß sich die Längen- und Breitenkreise auch auf der Karte rechtwinklig schneiden. Im Atlanten gibt es neben solchen *rechtwinkligen Gradnetzen* auch andere.

5) Man kann wünschen, daß sich die Längen- und Breitenkreise wieder als *Kreise* abbilden. Man wird im Atlanten solche Karten finden. Insbesondere gehört dazu die Seekarte, auf der das Gradnetz sogar geradlinig ist.

Die Reihe der Wünsche ließe sich fortsetzen, aber es mag hiermit genug sein.

Die Karten dienen zur Wiedergabe von Eigenschaften der Erdoberfläche. Diese Eigenschaften hängen ganz besonders häufig von den Ländergrößen ab. Beispielsweise versteht man unter der Bevölkerungsdichte die Zahl der Bewohner auf einem Quadratkilometer. Will man nun eine Karte gemäß der Bevölkerungsdichte abtönen, so muß man einen flächentreuen Entwurf benutzen, weil man sonst zu ganz falschen Vorstellungen über die Bevölkerungszahlen der Länder käme. Viele physikalische, mineralogische, pflanzliche, tierische usw. Beschaffenheiten der Erdoberfläche hängen ebenfalls ab von der Größe der Flächenräume, auf die sie sich be-

---

sind. Statt winkeltreu sagte man und sagt man noch jetzt in gewissen Gebieten der Mathematik „konform“ (s. Nr. 16). Statt des Wortes flächentreu bediente man sich nach dem Vorbilde der Franzosen des Ausdrucks „äquivalent“, bei dem man sich fragt, was denn nun eigentlich äquivalent sein soll. ARTUR BREUSING, geb. 1818 zu Osnabrück, gest. 1892 als Direktor der Seefahrtsschule zu Bremen, erzählt in seinem Buche „*Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe*“, Leipzig 1892, auf S. 68/9, daß er bei Gelegenheit eines Geographentages in Halle im Jahre 1882 gesprächsweise die deutschen Namen vorgeschlagen und allgemeinen Beifall gefunden habe.

ziehen. Man muß deshalb für ihre Versinnlichung flächentreue Karten benutzen. Sonach darf die *Flächentreue* als die bei weitem wichtigste Forderung bezeichnet werden. Diese Ansicht hat sich, wenn auch langsam, in den Atlanten durchgesetzt.<sup>1)</sup>

Zuweilen dienen Karten anderen Zwecken, so daß es nicht auf Flächentreue ankommt.

Hiernach beschäftigen wir uns zuerst mit flächentreuen Entwürfen, dann aber auch mit einigen anderen.

## II. FLÄCHENTREUE ENTWÜRFE

**4. Archimedes und sein Satz über die Kugelfläche.** Als die Römer im zweiten punischen Kriege Syrakus belagerten, war die Seele des hartnäckigen jahrelangen Widerstandes der Syrakusaner ARCHIMEDES (geb. etwa 285). Als es endlich gelang, in die Stadt einzudringen, saß ARCHIMEDES gerade nachdenklich vor einer geometrischen Figur. Plötzlich stand ein Römer vor ihm. ARCHIMEDES wehrte unwillig über die Störung ab; der Soldat geriet in Wut und erschlug ihn (212).

ARCHIMEDES war Bahnbrecher in der Mechanik und Physik. Viel höher aber schätzte er selbst seine geometrischen Forschungen. Sein Wunsch war, auf seinem Grabsteine das Bild der Kugel zu haben mit dem Zylinder, der die Kugel längs des Äquators berührt. Nach fast anderthalb hundert Jahren erkannte CICERO das unter Gestrüpp vergessene Grabmal daran wieder. In der Lebensgeschichte des römischen Feldherrn MARCELLUS, der seinen erfindungsreichen Gegner ARCHIMEDES bewunderte, berichtet PLUTARCH mit besonderer Liebe mancherlei vom Wesen des großen Mathematikers, auch von seiner geradezu professoralen Zerstreuung.<sup>2)</sup>

ARCHIMEDES hat seine Entdeckungen über Inhalt und Fläche der Kugel und des umgeschriebenen Zylinders in „*Zwei Büchern über die Kugel und den Zylinder*“ niedergelegt.

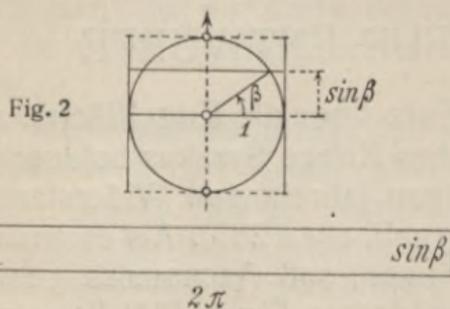
1) Eine Ausnahme macht der *Andreesche Handatlas*, Bielefeld und Leipzig, z. B. 8. Aufl. 1924, Karten 16–19.

2) Siehe PLUTARCHS vergleichende Lebensbeschreibungen etwa in der Übersetzung von EDUARD EYTH, Stuttgart 1868, 5. Bd., S. 20–26.

Wir brauchen davon nur den folgenden Satz, dessen Beweis man in jedem Lehrbuche der Raumlehre wiederfindet:

*Wird die Kugel längs des Äquators von einem geraden Zylinder berührt, so gleicht die Fläche des Kugelgürtels zwischen zwei zur Äquatorebene parallelen Ebenen der Fläche des Zylinders zwischen denselben Ebenen.*

**5. Flächentreuer Entwurf nach Archimedes.** Als Einheit der Länge benutzen wir wie gesagt den Halbmesser des Globus. Dann ist die Länge des Äquators, also der Umfang des umgeschriebenen Zylinders, gleich  $2\pi$ . Ferner hat die Ebene des Breitenkreises  $\beta$  von der Äquatorebene den Abstand  $\sin \beta$ , siehe Fig. 2. Das Stück des Zylindermantels zwischen der Äquatorebene und der Ebene des Breitenkreises

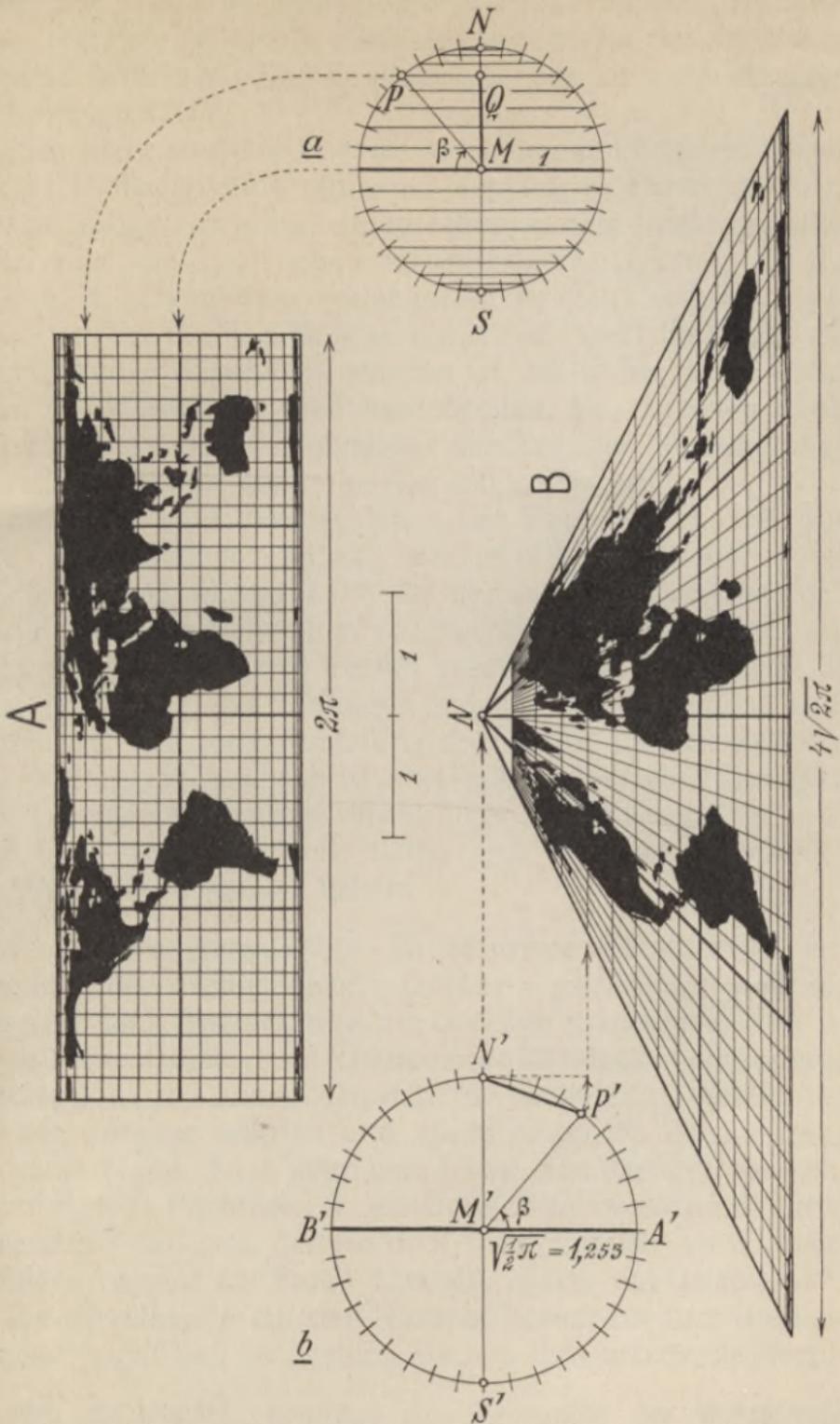


kann eben ausgebreitet werden. Dadurch entsteht ein Rechteck mit der Grundlinie  $2\pi$  und der Höhe  $\sin \beta$ . Nach dem Archimedischen Satz ist die Fläche  $2\pi \cdot \sin \beta$  des Rechtecks gleich der des Kugelgürtels zwischen dem Äquator und dem Breitenkreise  $\beta$ . Die Längengrade von zehn zu zehn Grad zerlegen den Kugelgürtel in lauter gleichgroße Stücke. Hieraus entspringt sofort ein flächentreues Gradnetz.

Zeichnung des Entwurfes nach Archimedes, siehe Taf. I, Bild A: Das Bild hat die Gestalt eines Rechtecks. Die längere Mittellinie des Rechtecks ist das Bild des Äquators und hat die Länge  $2\pi$ , gemessen mit dem Halbmesser des Globus in der Hilfsfig. a.<sup>1)</sup> Der Breitenkreis  $\beta$  (z. B.  $50^\circ$  n. Br.) erscheint als die Parallele zur Mittellinie im Abstände  $MQ = \sin \beta$ . An die Stelle des Nordpols tritt die obere Kante des Rechtecks, an die des Südpols die untere. Die Bilder der Breitenkreise sind von zehn zu zehn Grad gezeichnet. Einteilen des Rechtecks mittels senkrechter Geraden in 36 kongruente Stücke liefert die Bilder der Längengrade von zehn zu zehn Grad.

Dies Gradnetz eignet sich für Länder unter dem Äquator. Gegen die Pole hin machen sich die Verzerrungen bemerk-

1) Ein vernünftiger Zeichner ermittelt diese Länge, indem er den Durchmesser mittels des Millimeterstabes abmißt und mit  $\pi$  gleich rund 3,142 multipliziert.





lich. Für die Pole selbst wird das Bild unerträglich, weil sich die Pole nicht als Punkte, sondern als Strecken darstellen. Man sagt: Die Abbildung ist für die Pole *singulär*, d. h. ausgeartet.

Man kann sich den Entwurf so entstanden denken: Einem Punkt  $P$  des Globus läßt man denjenigen Punkt des umgeschriebenen Zylinders entsprechen, in dem dieser getroffen wird von dem nach außen verlängerten Lote von  $P$  auf die Achse, d. h. von dem verlängerten Breitenkreishalbmesser des Punktes  $P$ . Nachdem so die Kugel Punkt für Punkt auf den Zylinder abgebildet worden ist, bleibt nur noch übrig, den Zylindermantel eben auszubreiten. Wir betonen aber: Jene Abbildung des Globus auf den Zylinder ist weder eine Parallelprojektion noch eine Zentralprojektion.

Zuweilen wird der Archimedische Entwurf benannt nach dem Mathematiker LAMBERT, der im 18. Jahrhundert lebte (siehe Nr. 11). Grund dafür ist der zufällige Umstand, daß der Entwurf im Schrifttum ausdrücklich wohl erst von LAMBERT gebracht wurde.<sup>1)</sup> Gewiß braucht ARCHIMEDES nicht an eine Abbildung der Erdkugel gedacht zu haben; das aber wußte er, daß jene Abbildung der Kugel auf den Zylinder flächentreu ist, und das ist doch die Hauptsache. Übrigens war LAMBERT ein viel zu vernünftiger Mann, als daß er auch nur im Traume geglaubt hätte, sich hier ein besonderes Verdienst erworben zu haben.

**6. Andere geradlinige flächentreue Gradnetze.** Wir nennen das Archimedische Gradnetz *geradlinig*, weil die Längen- und Breitenkreise als Geraden erscheinen. Nun ist es kein Kunststück, das Archimedische Rechteck in ein anderes Rechteck so zu verwandeln, daß die Parallelen zu den Kanten wieder Geraden werden und allenthalben die Flächentreue bewahrt bleibt. Auch kann man leicht eine flächentreue Umformung des Rechtecks in ein Dreieck erzielen und dadurch erreichen, daß sich der Nordpol nicht singulär als Strecke, sondern regulär als Punkt darstellt. Hierzu ein Beispiel:

Die Kugelhaube um den Nordpol herum bis zum Breitenkreise  $\beta$  stellt sich im Archimedischen Entwurf als ein Recht-

1) J. H. LAMBERT, „*Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*“, 3. T., Berlin 1772, Fig. XVI der Taf. VI.

eck dar, das die Länge  $2\pi$  und die Höhe  $1 - \sin \beta$ , also die Fläche  $2\pi(1 - \sin \beta)$  hat, wenn wieder der Halbmesser des Globus die Längeneinheit ist. Wir verwandeln nun die Hälfte dieses Rechtecks und zwar sein Mittelstück  $ABCD$ , s. Fig. 3, in ein gleichgroßes gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck  $NEF$ . Die Höhe  $x$  dieses Dreiecks ergibt sich daraus, daß das Dreieck die Fläche  $x^2$  hat und also

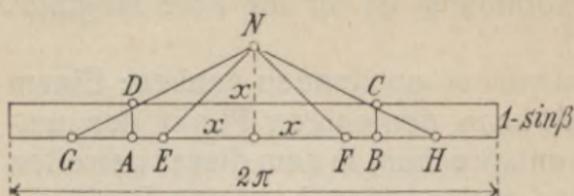


Fig. 3

sein muß. Zeichnerisch gewinnt man  $x$ , indem man einen Hilfskreis benutzt, dessen Halbmesser vorläufig mit  $r$  bezeichnet sei, s. Fig. 4.<sup>1)</sup> Hier sei  $\sphericalangle A'M'P' = \beta$ . In dem rechtwinkligen Dreieck  $N'P'S'$  ist das Kathetenquadrat  $N'P'^2$  gleich dem Produkt aus der Hypotenuse  $N'S'$  und dem Hypotenusenabschnitte  $N'Q'$ , also gleich  $2r$ , multipliziert mit  $M'N' - M'Q'$  oder  $r - r \sin \beta$ . Mithin wird  $x$  gleich  $N'P'$ , wenn  $2r^2$  gleich dem Faktor  $\pi$  in der aufgestellten Bedingung ist, daher  $r$  gleich  $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ , also gleich rund 1,253. Nachdem man so  $x$  gefunden hat, kennt man das Dreieck  $NEF$  in Fig. 3. Setzt man  $x$  beiderseits noch einmal an, so bekommt man ein gleichschenkeliges Dreieck  $NGH$ , das dieselbe Fläche hat wie das ganze Rechteck.

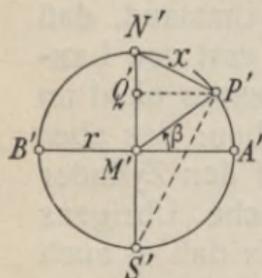


Fig. 4

Zeichnung eines dreieckigen flächentreuen Entwurfes, s. Taf. I, Bild B: In der Hilfsfig. *b* wird der Kreis vom Halbmesser  $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$  oder rund 1,253 beschrieben. (Die Längeneinheit ist dieselbe wie beim Archimedischen Entwurf.) Dann wird der Kreis in 36 gleiche Teile zerlegt. Die Endpunkte der zueinander senkrechten Durchmesser  $N'S'$  und  $A'B'$  gehören zu den Teilpunkten. Die Sehnen von  $N'$  bis zu den Teilpunkten  $P'$  (z. B. für  $\beta = 50^\circ$  n. Br.) liefern die Abstände von  $N$ , in denen man im Bilde B parallele Geraden als die Bilder der Breitenkreise von

1) An die Buchstabenbezeichnungen setzen wir Striche, um besonders darauf hinzuweisen, daß der Hilfskreis kein Axialschnitt des Globus, sondern ein größerer Kreis ist.



rechts dadurch entsteht, daß wir dem Großkreise des Globus irgendein regelmäßiges Vieleck umschreiben und dann

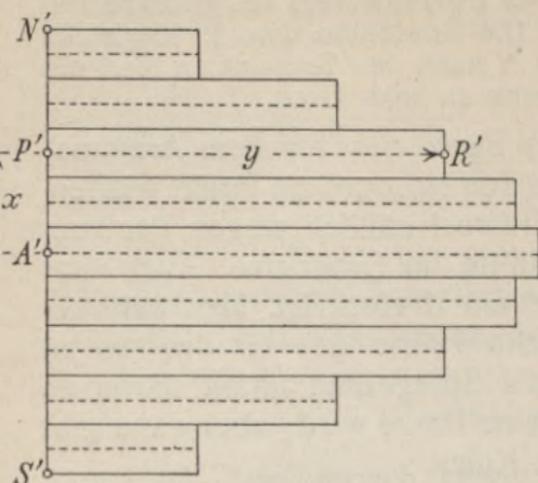


Fig. 6

durch die Ecken des Vielecks die Ebenen parallel zur Äquatorebene legen. Alle Kanten des Vielecks haben dieselbe Länge  $k$ . Mithin ergibt sich in Fig. 6 eine Schicht von Rechtecken von gleichen Höhen  $k$ . Hier ist z. B. die Strecke  $x$  von  $A'$  bis  $P'$  gleich dem (aus gebrochenen Linien bestehenden) Stück des Vieleckumfanges von  $A$  bis  $P$  in Fig. 5, während die Länge

$y = P'R'$  des betreffenden Rechtecks gleich dem halben Umfange  $\pi \cos \beta$  des Breitenkreises von  $P$  ist. Man möge sich in Fig. 6 das Spiegelbild links von  $N'S'$  dazu denken. Dann hat man eine flächentreue Abbildung aller Gürtel der Kugel vor sich. Der Rand ist treppenförmig.

Nun wird sich eine Umrandung durch eine stetige krumme Linie ergeben, wenn man die Kantenzahl des umgeschriebenen Vielecks endlos wachsen läßt, wobei dann die Kantenlänge  $k$  nach Null strebt, so daß unendlich viele und unendlich niedrige Rechtecke hervorgehen. Das umgeschriebene Vieleck strebt dabei nach dem Kreise selbst, also sein Stück  $x$  nach dem Bogen des Kreises von  $A$  bis  $P$  in Fig. 5, und dieser Bogen ist nichts anderes als  $\beta$ , da wir die Breite im Bogenmaß messen (Nr. 2). Wir bekommen somit beim Grenzübergange  $x = \beta$  und  $y = \pi \cos \beta$ , so daß das Gesetz der entstehenden Randlinie ausgedrückt wird durch

$$y = \pi \cos x.$$

Das ist die Gleichung einer Kosinuslinie. Bekanntlich haben Kosinuslinien und Sinuslinien dieselbe Gestalt (der Kosinus ist ja gleich dem Sinus des Komplementes). Deshalb spricht man kurzweg nur von Sinuslinien.

Hieraus entspringt ein bemerkenswerter flächentreuer Entwurf des Globus. Aber bevor wir daran gehen, ist noch

zu sagen: Weil wir in Nr. 8 aus diesem Entwurf einen andern ableiten wollen, erscheint es uns zweckmäßig, nicht geradezu die Sinuslinie  $y = \pi \cos x$  zu zeichnen, sondern zunächst die mit einem Drittel so großem  $y$ , also die mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{3} \pi \cos x.$$

Zeichnung des flächentreuen Entwurfes mit Sinuslinien, s. Taf. II, Bild C: Die Längeneinheit, der Halbmesser des Globus, ist unten angegeben (wieder so groß wie auf Taf. I). In der Hilfsfig. a wird ein Halbkreis mit dem Halbmesser  $\frac{1}{3} \pi$  gleich rund 1,047 gezeichnet und in 18 gleiche Teile zerlegt. Ferner wird der lotrechte Durchmesser nach oben und unten bis  $N'$  und  $S'$  verlängert bis zur Gesamtlänge  $\pi$ , und dann wird  $N'S'$  ebenfalls in 18 gleiche Teile zerlegt. Vermöge der Schnitte der waagerechten Geraden durch die Teilpunkte von  $N'S'$  mit den lotrechten Geraden durch die entsprechenden Teilpunkte des Halbkreises ergeben sich Punkte der Sinuslinie  $y = \frac{1}{3} \pi \cos x$ . Diese Kurve  $k$  wird im Bild C zuerst gezeichnet. Dann werden alle ihre Ordinaten, d. h. die waagerechten Strecken, verdreifacht. Auch werden sie nach links hin dreimal abgetragen. Dadurch ergeben sich Punkte der Randlinie des Entwurfes. Die waagerechten Geraden stellen die Breitenkreise von zehn zu zehn Grad dar. Um die Bilder der Längengrade von zehn zu zehn Grad zu bekommen, hat man jene Strecken, die verdreifacht wurden, in je sechs gleiche Teile zu zerlegen und dann einander entsprechende Teilpunkte durch eine Kurve zu verbinden. Diese Kurven sind auch Sinuslinien, denn ihre Gleichungen sind von der Form  $y = c \pi \cos x$ , wo der konstante Faktor  $c$  nach und nach gleich den Vielfachen des Bruches  $\frac{1}{18}$  zu setzen ist. Die Kurven zeichnet man mit dem Kurvenlineal. Man kann dabei Hilfsmittel benutzen, die sich aus wohlbekanntem Eigenschaften der Sinuslinien ergeben: Wenn die mittlere gerade Strecke  $N'S'$  selbst den Längengrad  $0^\circ$  darstellt, ist die Bildkurve des Längengrades  $\lambda^\circ$  so beschaffen, daß ihre Tangenten in  $N'$  und  $S'$  mit der Geraden  $N'S'$  Winkel bilden, deren Tangens gleich  $\pi \lambda^\circ : 180^\circ$  ist. Ferner hat die Kurve ihren Scheitel auf der waagerechten Geraden, die den Äquator vorstellt, und zwar ist der Halbmesser des Krümmungskreises dieses Scheitels gleich dem reziproken Werte des soeben angegebenen Tangens<sup>1)</sup>.

Am besten eignet sich das Gradnetz für Länder längs des mittleren, geradlinig erscheinenden Längengrades. Man braucht natürlich nicht (wie wir es getan haben) diesen als

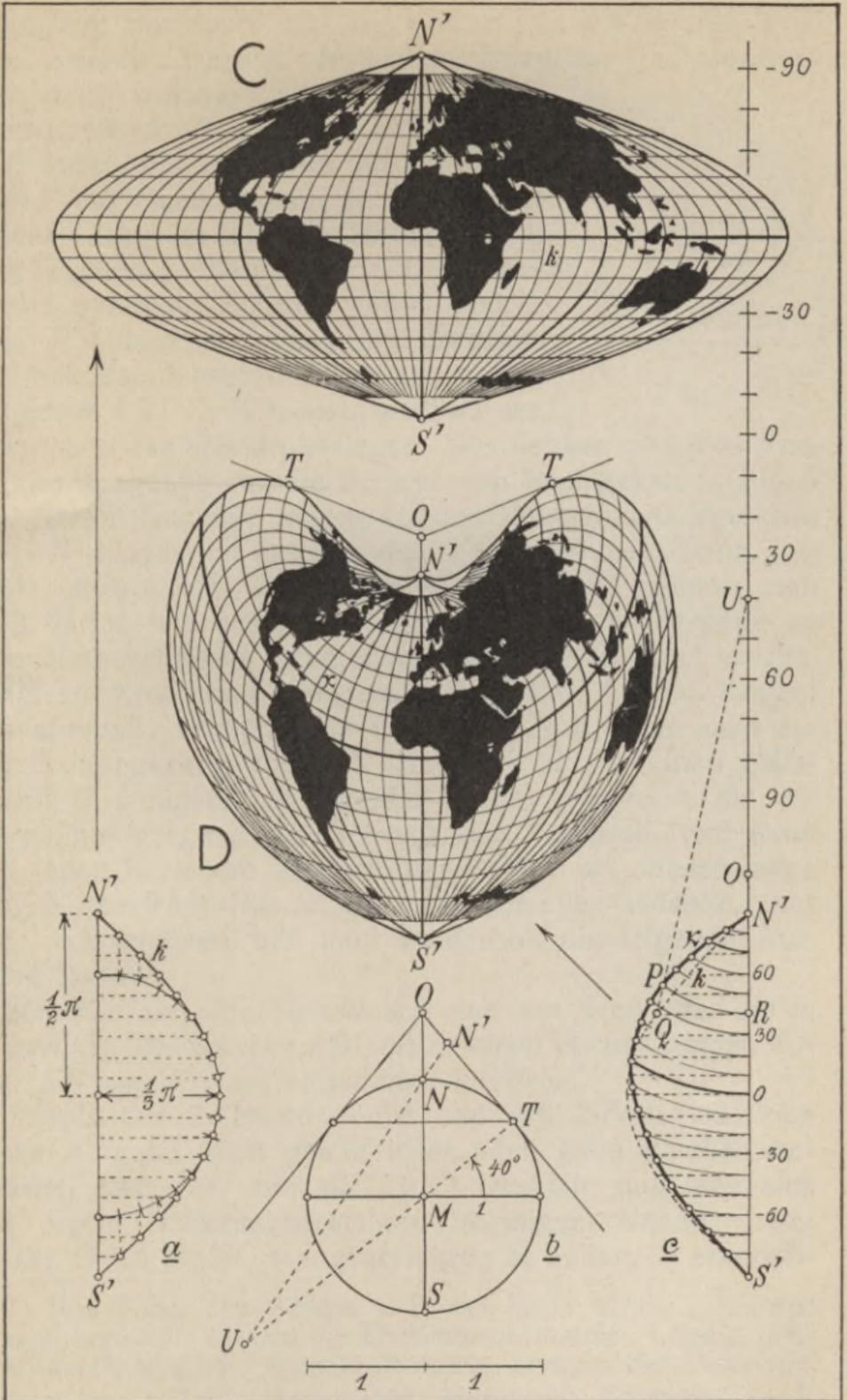
1) Mittels einfacher Differentiationen kann man dies leicht bestätigen. Man kann es aber auch so finden wie in des Verfassers „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“, I. Bd. 2. Aufl. Berlin 1922, S. 335 f.

den Längenkreis  $0^{\circ}$  zu nehmen. Wäre es z. B. der Längenkreis  $90^{\circ}$  w. L., so bekämen wir ein viel besseres Bild von Amerika. Der mittlere Längenkreis und alle Breitenkreise erscheinen nicht nur im ganzen, sondern auch in allen ihren Teilen ebenso lang wie auf dem zugehörigen Globus selbst. Man sagt daher, daß diese Linien *längentreu* abgebildet werden. (Beim Worte „Länge“ ist dabei nicht an die geographische Länge, sondern an die Kurvenlänge zu denken.) Im Nord- und Südpol kommen Unstetigkeiten vor. Denn solche Längenkreise des Globus, die zusammen einen ganzen Großkreis ausmachen wie z. B.  $90^{\circ}$  ö. L. und  $90^{\circ}$  w. L., gehen im Bild an den Polen nicht stetig ineinander über, sondern eckig. Das hat aber nicht viel auf sich, weil an den Polen doch nicht viel zu holen ist.

Einiges über die Geschichte dieses Entwurfes: Aus dem Nachlasse des berühmten MERCATOR (Nr. 1) erwarb der Holländer JODOCUS HOND (1543—1611) Karten, die er zusammen mit eigenen 1606 als Atlas herausgab. Darin tragen mehrere Blätter seinen eigenen Namen. Der fehlt auf der Karte von Südamerika, weshalb man glaubt, daß diese wohl noch von MERCATOR selbst herrühre. Das Gradnetz dieser Karte ist das unseres Entwurfes. Alsdann gab der französische Kartograph NICOLAS SANSON (1600—1667) im Jahre 1650 Karten der Erdteile heraus, denen ebenfalls dies Gradnetz zugrunde lag. Die Sansonschen Atlanten herrschten lange, und dadurch ist es gebräuchlich geworden, den Entwurf als den Sansonschen zu bezeichnen.<sup>1)</sup>

**8. Flächentreue Entwürfe mit kreisförmigen längentreuen Breiten.** In den bisher besprochenen Entwürfen erschienen die Breitenkreise als parallele Geraden. Man kann nun aus dem letzten Gradnetze neue flächentreue Entwürfe ableiten, worin die Breitenkreise wieder als Kreise erscheinen und zwar als konzentrische und überdies längentreue Kreise. Das beruht auf einer einfachen Bemerkung: Man

1) Unrecht haben jedenfalls die Astronomen, die vom Flamsteedschen Entwurfe zu sprechen pflegen. Denn das Buch des Engländers JOHN FLAMSTEED (1646—1719) mit dem Titel *“The construction of maps and globes”* erschien erst 1717 zu London.



Flächentreue Entwürfe mit längentreuen Breiten



kann ein Rechteck  $ABCD$ , s. Fig. 7, in ein ebenso großes krummes Viereck verwandeln, indem man auf der Verlängerung von  $AB$  einen Punkt  $O$  wählt, den Kreis um  $O$  durch die Mitte  $P$  von  $AB$  beschreibt und dann auf dem Kreis von  $P$  aus einen Bogen  $PR'$  abträgt, der ebenso lang ist wie die Mittellinie  $PR$  des Rechtecks. Die Kreise um  $O$  durch  $A$  und  $B$  sowie die Strahlen von  $O$  nach  $P$  und  $R'$  begrenzen dann ein krummes Viereck, das denselben Inhalt hat wie das Rechteck  $ABCD$ . Wer nicht weiß warum, mag sich das selbst überlegen. Wir denken uns dies Verfahren ausgeübt auf die Schicht von Rechtecken in Fig. 6

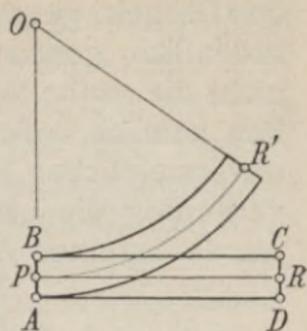


Fig. 7

der letzten Nummer, indem wir den Hilfspunkt  $O$  irgendwo über  $N'$  hinaus auf der Geraden  $N'S'$  annehmen. Dann entsteht eine Schicht von krummen Vierecken. erinnert man sich daran, wie aus jener Figur durch Grenzübergang zu unendlich schmalen Rechtecken der letzte Entwurf hervorging, so findet man sofort: Aus dem Bilde C, Taf. II, geht ein ebenfalls flächentreuer Entwurf hervor, wenn man auf der Verlängerung von  $N'S'$  über  $N'$  hinaus einen Hilfspunkt  $O$  annimmt, um ihn die Kreise beschreibt, die die geradlinig dargestellten Breitenkreise berühren, und dann auf jeden Kreis die Strecken der Breiten als ebenso lange Bogen überträgt. Das ist ein ganz einfacher Gedanke, aber wer das zeichnen will, muß wiederholt die folgende Aufgabe lösen:

*Gegeben ist eine Strecke  $AB$  und ein Kreis, der sie in  $A$  berührt. Die Strecke  $AB$  soll in einen ebenso langen Bogen  $AB'$  des Kreises verwandelt werden.*

Mittels der Zeichendreiecke und des Zirkels läßt sich diese Aufgabe nicht genau lösen. Man kann nämlich beweisen, daß das unmöglich ist.<sup>1)</sup> Deshalb muß man sich mit einem Näherungsverfahren begnügen. Nebenbei bemerkt: Solch ein Näherungsverfahren zu finden, ist ersprieß-

1) Man findet den Beweis z. B. bei FELIX KLEIN, „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“, Leipzig 1895, 2. Abschnitt, und bei FEDERIGO ENRIQUES, „Fragen der Elementargeometrie“, 2. Teil, Leipzig 1907, 8. Art. von BENEDETTO CALÒ.

licher als die beliebte Beschäftigung mit Näherungsverfahren zur Ermittlung eines ganzen Kreisumfangs. Man hat da den Ehrgeiz, geometrische Verfahren auszutüfteln, die außerordentlich genau sein sollen und das auch wären, wenn nicht die rauhe Wirklichkeit solchem Tun Halt geböte. Man läßt nämlich außer acht, daß alles wirkliche Zeichnen mit unvermeidlichen Fehlern behaftet ist. Wie man einfach und vernünftig die Länge eines ganzen Kreisumfangs ermittelt, wurde in einer Anmerkung zu Nr. 5 gesagt.

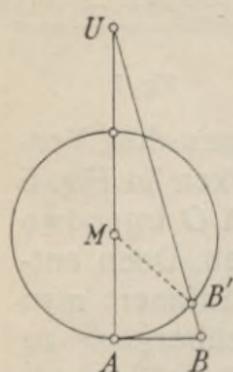


Fig. 8

Wenden wir uns nun zur gestellten Aufgabe! Man verfare so: Der in  $A$  beginnende Durchmesser wird um den Halbmesser verlängert bis zum Punkt  $U$ , siehe Fig. 8. Die Gerade von  $B$  nach  $U$  schneidet den Kreis zum erstenmal an einer Stelle  $B'$ . Falls der Zentriwinkel  $AMB'$  nicht mehr als etwa  $60^\circ$  beträgt, unterscheidet sich dann die Länge des Kreisbogens  $AB$  von der Länge der Strecke  $AB'$  um weniger als ein Hundertteil. Das bestätigt man leicht durch Rechnung.<sup>1)</sup>

Für unsere Zwecke ist ein so geringer Fehler durchaus erträglich. Man kann sich als Regel merken: Wenn ein Fehler von ungefähr  $\frac{1}{3}$  Hundertteilen noch erträglich erscheint, darf das Verfahren angewandt werden auf Strecken  $AB$ , die nicht länger als der Halbmesser des Kreises sind. (Viel größer wird die Genauigkeit, wenn man etwa nur auf die Hälfte oder ein Drittel von  $AB$  das Verfahren anwendet und dann den gewonnenen Bogen verdoppelt oder verdreifacht.) Bei dem Gebrauche, den wir von dem Verfahren machen, werden die umzuwandelnden Strecken immer kleiner als der Halbmesser sein.

Bevor wir den Entwurf zeichnen, ist noch etwas zu sagen: Längs eines Breitenkreises verläuft auf der Kugel ein unendlich schmaler Kugelgürtel. Er gehört zugleich einem *Rotationskegel* an, der den Globus längs des Breitenkreises

1) Ausführliches hierüber in des Verfassers „*Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik*“, 6. Aufl. Berlin und Leipzig 1932, S. 559–561. Das Verfahren beruht auf Betrachtungen, die der Kardinal NICOLAUS VON CUSA (d. h. von Kues an der Mosel bei Trier), geb. 1401, gest. 1464, angestellt hat.

berührt. Die Länge der Mantellinie des Kegels von der Spitze bis zum Breitenkreise hängt von der gewählten Breite  $\beta$  ab. Wird der Kegel eben ausgebreitet, so geht der Kugelgürtel unverzerrt in einen unendlich schmalen Streifen längs eines Kreises über, dessen Halbmesser die Mantellinie ist. Nun kann es für eine gewisse Breite  $\beta$  sein, daß diese Mantellinie gerade so lang ausfällt wie der Halbmesser desjenigen Kreises um den Hilfspunkt  $O$  im alten Bilde  $C$ , Taf. II, in den der vorher geradlinig dargestellte Breitenkreis zu verbiegen ist. Dann besagt dies, daß der zugehörige unendlich schmale Kugelgürtel im neuen Entwurf unverzerrt erscheint. Insbesondere werden dann also die Bilder der Längenkreise das Bild dieses einen Breitenkreises ebenso senkrecht durchsetzen, wie das auf dem Globus überall der Fall ist. Hiervon machen wir sogleich Gebrauch.

Zeichnung eines flächentreuen Entwurfes mit kreisförmigen längentreuen Breiten, s. Taf. II, Bild D: Wir wollen vorschreiben, daß das Bild unverzerrt ausfalle längs des Breitenkreises von  $40^\circ$  n. Br. Um das zu erreichen, legt man an den Globus, siehe die Hilfsfig.  $b$  (worin der Halbmesser wieder derselbe wie früher ist) den Tangentialkegel längs dieses Breitenkreises. Der Bogen  $NT$  des Längenkreeses muß nun als Strecke  $N'T$  auf die Mantellinie übertragen werden. Das geschieht wieder mittels des auseinandergesetzten Näherungsverfahrens, d. h. man verlängert den in  $T$  beginnenden Durchmesser um den Halbmesser bis zum Hilfspunkt  $U$  und zieht die Gerade  $UN$ , die den gesuchten Punkt  $N'$  liefert. Damit nun längs der Breite  $40^\circ$  keine Verzerrung des neuen Entwurfes vorkomme, muß man im alten Entwurfe  $C$  auf Taf. II den Hilfspunkt  $O$  derart auf der Geraden  $N'S'$  über  $N'$  hinaus annehmen, daß hier  $ON'$  so lang ist wie in der Hilfsfig.  $b$ . Nachdem so der Hilfspunkt  $O$  bestimmt worden ist, hat man die im Bilde  $C$  waagrecht gezeichneten Breiten in Bogen der Kreise um  $O$  zu verbiegen. Das zeigt die Hilfsfig.  $c$ . Hier ist zunächst die alte Kurve  $k$  der Hilfsfig.  $a$  oder des Entwurfes  $C$  noch einmal gezeichnet und zwar gestrichelt und wegen Platzmangels nach links umgelegt, was ja ohne besondere Bedeutung ist. Ferner ist hier  $N'O$  gleich der Strecke in der Hilfsfig.  $b$  gemacht worden. Dann sind um  $O$  die konzentrischen Kreise gezogen, die die waagrecht dargestellten Breiten berühren. Die Einzelheiten des Verfahrens verfolge man, indem man vom Punkte  $Q$  von  $k$  ausgehe, der zur Breite  $40^\circ$  gehört. (Bei jeder anderen Breite wird es ebenso gemacht.) Der Halbmesser  $OR$  des zugehörigen Kreises um  $O$  wird nach oben hin noch zweimal abgetragen, wodurch man zum Hilfspunkt  $U$  kommt. Die Gerade  $UQ$  schneidet den Kreis in  $P$  derart, daß hinreichend genau die Strecke  $RQ$  gleich dem Bogen  $RP$  wird. Man bekommt

so Punkt für Punkt die neue (ausgezogene) Kurve  $\kappa$ , die an die Stelle der Kurve  $k$  tritt. Diese Kurve  $\kappa$  sowie die Breitenkreise um  $O$  sind nun die Grundlage des Bildes  $D$ . Man braucht nur noch die Kreisbogen, die zwischen der Geraden  $N'S'$  und der Kurve  $\kappa$  liegen, zu verdreifachen und dieselben Bogen auch rechts von  $N'S'$  aufzutragen, um zur Umrißlinie des Entwurfes zu gelangen. Die Bilder der Breitenkreise von zehn zu zehn Grad liegen vor. Die Punkte der Kurven, die die Längengrade von zehn zu zehn Grad bestimmen, erhält man dadurch, daß man alle jene Kreisbogenstücke in je sechs gleiche Teile zerlegt. Die Kurven wird man mit dem Kurvenlineal ausziehen. Dabei ist zu beachten: Der ausgezeichnete Breitenkreis  $40^\circ$  n. Br. wird von den Bildern der Längengrade senkrecht durchsetzt. Insbesondere sind daher die angegebenen Halbmesser  $OT$  dieses Breitenkreises Tangenten der Umrißlinie. Zur Vermeidung von Irrtümern weisen wir ausdrücklich darauf hin, daß natürlich in der Hilfsfig.  $c$  zu jedem Breitenkreis ein besonderer Hilfspunkt  $U$  gehört. Alle diese Hilfspunkte sind durch Querstriche auf der Geraden  $N'S'$  angegeben.

Eigentümlich mutet die Umrahmung des Entwurfes an. Man bedenke jedoch, daß man dies Gradnetz im Atlanten immer nur für Ausschnitte aus dem Ganzen benutzt, nämlich für Länder in der Mitte, wo der Entwurf ein ganz leidliches Bild gibt. Selbstverständlich brauchte der geradlinig dargestellte Längengrad  $N'S'$  nicht zur Länge  $0^\circ$  zu gehören, wie wir es hier angenommen haben.

Eine ziemlich einfache Infinitesimalbetrachtung, die wir indessen unterdrücken, lehrt, daß die Randlinie in  $N'$  und  $S'$  von beiden Seiten her unter solchen Winkeln mit der Geraden  $N'S'$  einmündet, deren Tangens gleich  $\pi$  ist, also unter Winkeln von rund  $72\frac{1}{2}^\circ$ .<sup>1)</sup> Nur in dem Sonderfalle, wo der Hilfspunkt  $O$  im Nordpol  $N'$  selbst angenommen wird (d. h. wenn der ausgezeichnete Breitenkreis nicht wie hier der von  $40^\circ$  n. Br., sondern der von  $90^\circ$  ist), verhält es sich an der Stelle  $N'$  anders. Dann nämlich kommt die Randlinie von oben und von beiden Seiten her berührend an die verlängerte Gerade  $N'S'$  heran, so daß in  $N'$  eine Spitze (nicht eine Ecke) entsteht.

1) In den Zeichnungen auf Taf. 5 des bei Nr. 3 erwähnten Buches von BREUSING und auf Taf. IX des „*Traité des projections des cartes géographiques*“ von A. GERMAIN, Paris o. J. (aber 1865), ist uns aufgefallen, daß beide am Nordpol denselben Fehler haben. Nachprüfen mit dem Zirkel ergab, daß BREUSING das Gradnetz von GERMAIN entlehnt hat. Das hätte in seinem Buche gesagt sein müssen.

**9. Ein paar geschichtliche Bemerkungen.** Wer ohne alles Wissen vom Kartenentwurf auf eigene Faust daran gehen will, ein einigermaßen beträchtliches Stück des Globus, z. B. die sogenannte „alte Welt“, zu zeichnen, wird wohl zunächst den mittleren Längengreis des Gebietes einfach als gerade Linie von oben nach unten ziehen. Indem er dann daran denkt, daß man die Breitenkreise auf dem Globus selbst mit dem Zirkel aufzeichnen kann, wenn man eine Zirkelspitze in den Nordpol setzt, wird es ihm als das natürlichste bedünken, auch auf der Karte die Breitenkreise wiederzugeben durch konzentrische Kreise um einen auf jener Geraden angenommenen Mittelpunkt. Was dabei die Maße betrifft, so wird es das einfachste für ihn sein, wenn er erstens jenen mittleren gerade gezeichneten Längengreis in gleiche Stücke zerlegt, genauer gesagt, ihn längentreu abbildet, und zweitens auf den beschriebenen Breitenkreisen auch die wahren Bogen nach rechts und links hin abträgt, um Punkte der übrigen Längengreife zu bekommen. Auf diese Weise gelangt er offenbar zu der im Vorhergehenden besprochenen Entwurfsart, die also trotz der eigentümlichen Umrandung eine der nächstliegenden ist.

Schon der große Astronom und Geograph CLAUDIUS PTOLEMÄUS (zu Alexandria im 2. Jahrh. n. Chr.) hatte einen Ansatz dazu gemacht, indem er wenigstens ein paar Breitenkreise längentreu darstellte, wenn er auch sonst ziemlich willkürlich verfuhr.<sup>1)</sup> Das geschah in seiner griechisch verfaßten „Anleitung zur Geographie“, die den Humanisten eine Hauptquelle des Wissens war und oft ins Lateinische übertragen wurde. Dabei wurde die Ptolemäische Weltkarte allmählich verbessert. Ein Nürnberger Pfarrer JOHANN WERNER (1468–1528) hat auf Grund von Angaben des Verfertigers der Sonnenuhr an der Nürnberger Lorenzkirche JOHANN STAB (gest. 1522) im Jahre 1514 vielleicht als ersten Entwurf der letzten Nummer gezeichnet für den Fall, wo der Hilfspunkt *O* der Nordpol selbst ist. Die allgemeinere Entwurfsart ist dann die Grundlage der Karten des französischen Geographen RIGOBERT BONNE (1727–1795); bei ihm

---

1) Eingehende Kritik der Ptolemäischen Weltkarte bei A. GERMAIN a. a. O. S. 192f.

kommt sie seit 1752 vor. Die Bonneschen Karten erfreuten sich einer großen Verbreitung und wurden viel nachgeahmt. Man spricht deshalb von der Bonneschen Entwurfsart. Sie herrschte bis heute fast ausschließlich. Erst neuerdings geht man mehr davon ab wegen der großen Winkelverzerrungen nach den Rändern zu.

Wie schon gesagt, liegt die Bonnesche Entwurfsart eigentlich am nächsten. Nicht ganz so nahe liegt der wichtige Umstand, daß flächentreue Karten hervorgehen. Die Hauptsache wäre daher, festzustellen, wer die Flächentreue zuerst erkannt hat. Hierüber vermögen wir leider nichts zu sagen, denn soviel wir sehen, geben die einschlägigen Lehrbücher, soweit sie sich überhaupt mit der Geschichte der Entwürfe beschäftigen, darüber keine klare Auskunft. Möglicherweise sind wir da im Unrecht.

Die Lehrbücher der Kartographie bezeichnen die Bonneschen Entwürfe als „unechte Kegelprojektionen“. Demgegenüber ist zu sagen, daß es sich überhaupt nicht um Projektion, weder Parallelprojektion noch Zentralprojektion, handelt; aber die Kartographen reden ja, wie schon in Nr. 1 bemerkt wurde, mit Vorliebe von Projektionen statt von Entwürfen. Der Unterschied zwischen beiden Begriffen ist derselbe wie zwischen „Offizier“ und „Soldat“. Ferner sagen die Lehrbücher, man müsse von einer unechten Kegelprojektion sprechen, sobald die Breitenkreise durch konzentrische Kreise wiedergegeben werden. Das verstehen wir nicht. Ebenso könnte man ein Parallelogramm ein unechtes Quadrat oder eine Ellipse einen unechten Kreis nennen.

**10. Flächentreuer Entwurf nach Mollweide.** Ein deutscher Professor, SCHMIDT geheiß, wünschte anno 1803 einen flächentreuen Entwurf des halben Globus derart, daß der Rand ein Kreis sei, daß ferner der Äquator durch einen Durchmesser  $A'B'$  und der Längenkreis  $0^0$  durch den dazu senkrechten Durchmesser  $N'S'$  dargestellt werde, s. Fig. 9. Die Bilder der Breitenkreise sollten die zu  $A'B'$  parallelen Sehnen sein. Ein derartiger Entwurf sähe ungefähr aus wie das Mittelstück des Bildes C auf Taf. II, aber mit dem Unterschiede, daß der Rand kreisrund wäre. Wie man es machen muß, zeigte der Astronom KARL MOLLWEIDE, dessen Namen

bekanntlich gewisse Formeln der Trigonometrie führen.<sup>1)</sup> Er war 1774 zu Wolfenbüttel geboren, wirkte am Pädagogium in Halle und starb 1825 als Professor an der Universität Leipzig.

Wegen der verlangten Flächentreue muß die Fläche des Kreises halb so groß wie die Oberfläche des Globus sein, also gleich  $2\pi$ , wenn wie stets der Halbmesser des Globus die Längeneinheit bedeutet. Mithin muß der Kreis den Halbmesser  $\sqrt{2}$  oder rund 1,414 haben. Nun möge die zu  $A'B'$  parallele Sehne  $P'Q'$  den Breitenkreis  $\beta$  darstellen. Dann ist zu fordern, daß das zwischen dem Durchmesser  $A'B'$  und der Sehne  $P'Q'$  gelegene Stück der Kreisfläche gleich der halben Fläche des Kugelgürtels zwischen dem Äquator und dem Breitenkreise sei. Diese halbe Fläche ist nach dem Archimedischen Satze gleich  $\pi \sin \beta$ . Mit  $\varphi$  wollen wir das Bogenmaß des Zentriwinkels  $A'M'P'$  bezeichnen, also nach Nr. 2 den zugehörigen Bogen des (gestrichelten) Kreises vom Halbmesser 1. Dann hat der Bogen  $A'P'$  die Länge  $\varphi\sqrt{2}$ . Der ganze Kreis hat den Umfang  $2\pi\sqrt{2}$ , daher der Bogen  $P'N'Q'$  die Länge  $\sqrt{2}(\pi - 2\varphi)$ . Also ist die Fläche des Kreischnittes  $P'M'Q'$  gleich  $\pi - 2\varphi$ . Ferner ist  $M'R'$  gleich  $\sqrt{2} \sin \varphi$  und  $R'P'$  gleich  $\sqrt{2} \cos \varphi$ , somit die Fläche des Dreiecks  $P'M'Q'$  gleich  $2 \sin \varphi \cos \varphi$  oder  $\sin 2\varphi$ . Als Fläche zwischen dem Durchmesser  $A'B'$  und der Sehne  $P'Q'$  geht hiernach  $2\varphi + \sin 2\varphi$  hervor. Wie gesagt, soll sie gleich  $\pi \sin \beta$  sein, so daß sich die Bedingung ergibt:

$$(K) \quad 2\varphi + \sin 2\varphi = \pi \sin \beta.$$

Die Frage ist also, wie man hieraus bei gegebener Breite  $\beta$  den Winkel  $\varphi$  bekommt, der uns erlaubt, das Bild  $P'Q'$  des Breitenkreises  $\beta$  zu zeichnen.

1) „Über die vom Prof. Schmidt in Gießen in der zweyten Abtheilung seines Handbuchs der Naturlehre angegebene Projektion der Halbkugelfläche“, Zachs monatliche Correspondenz, August 1805, S. 152–163.

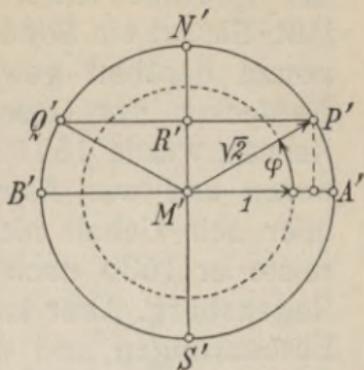


Fig. 9

Die Bedingung ( $K$ ) ist eine transzendente Gleichung, deren Lösung  $\varphi$  sich nicht in geschlossener Form mittels der gebräuchlichen mathematischen Zeichen ausdrücken läßt. Sie ist ein Sonderfall der in der Geschichte der Astronomie berühmt gewordenen *Keplerschen Gleichung*. Der Entdecker der Gesetze der Planetenbewegungen, JOHANN KEPLER, wurde 1571 zu Weil der Stadt in Württemberg geboren und war Astronom des Kaisers RUDOLFS II., erhielt aber sein Gehalt nicht. Um zu seinem Rechte zu kommen, reiste er 1630 nach des Kaisers Tod zum Reichstag nach Regensburg. Aber kaum angekommen, starb er infolge der Entbehrungen und des Kummers. KEPLER hat gezeigt, daß die Ermittlung der Planetenbahnen unter anderm die Lösung der nach ihm benannten Gleichung erfordert. Die Astronomen haben sich natürlich um eine möglichst gut angenäherte Lösung bemühen müssen; für unsere Zwecke genügt ein zeichnerisches Näherungsverfahren.

Man kommt dazu, wenn man sich zunächst überlegt, wie die linke Seite der Gleichung ( $K$ ) durch eine Strecke dargestellt werden kann, wenn man von

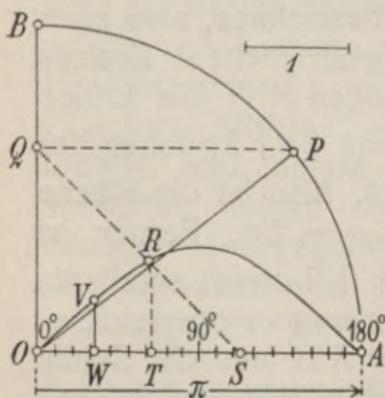
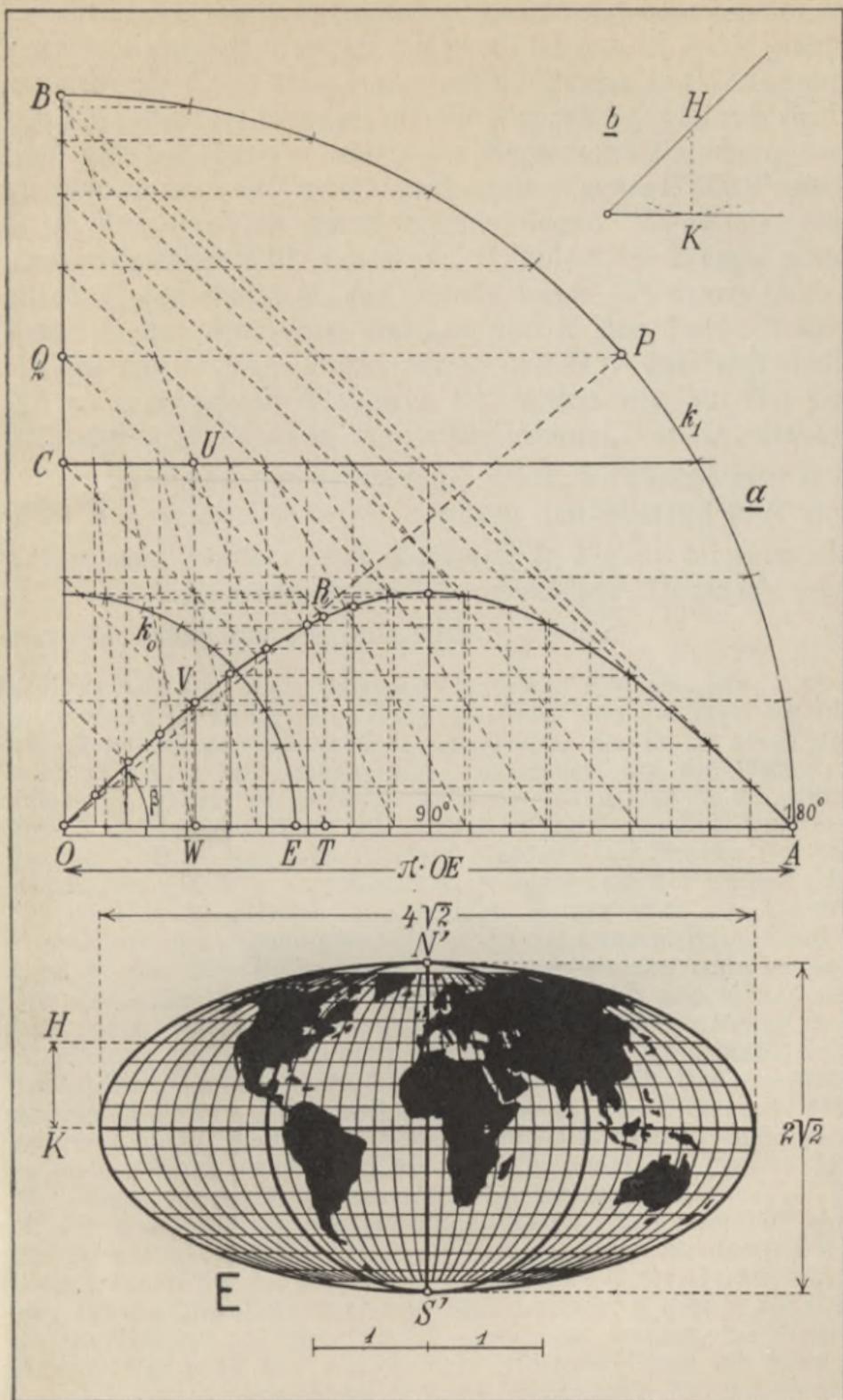


Fig. 10

gestellt werden kann, wenn man von einem beliebig angenommenen Winkel  $\varphi$  ausgeht. Dazu braucht man eine Sinuslinie (Nr. 7). In Fig. 10 ist die Längeneinheit oben angegeben. Dann ist  $OA$  gleich  $\pi$  gemacht worden. Teilt man diese Strecke in 18 gleiche Stücke, so werden die Winkel  $\varphi$  von  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  usw. durch die in  $O$  beginnenden Strecken bis zu den Teilpunkten im Bogenmaß dargestellt. Nun trägt man in den

Teilpunkten senkrecht zu  $OA$  die Werte der zugehörigen Sinus auf (immer gemessen mit der angenommenen Längeneinheit). Die Endpunkte gehören einer Sinuslinie an. Wird irgendein Winkel  $\varphi$  durch eine Strecke  $OW$  im Bogenmaße gegeben, so verdoppelt man  $OW$  bis  $T$ . Die zu  $T$  gehörige Ordinate  $TR$  der Sinuslinie stellt  $\sin 2\varphi$  dar. Schließlich zieht man durch  $R$  die Gerade unter  $45^\circ$ , die  $OA$  in  $S$  trifft. Augenscheinlich ist dann  $OS$  gleich  $2\varphi + \sin 2\varphi$ , also die linke Seite der Keplerschen Gleichung. Um weiter-



Flächentreuer Entwurf nach Mollweide



hin die rechte Seite darzustellen, beschreibt man um  $O$  den Kreis mit dem Halbmesser  $OA = \pi$ . Ist nun  $\sphericalangle AOP$  gleich einer Breite  $\beta$ , so bekommt man durch das Lot von  $P$  auf den lotrechten Halbmesser  $OB$  die Strecke  $OQ$  gleich  $\pi \sin \beta$ . Soll jetzt zwischen  $\varphi$  und  $\beta$  die Keplersche Gleichung bestehen, so muß  $OQ = OS$  sein, anders gesagt: Die Punkte  $Q, R, S$  müssen in gerader Linie liegen. Wenn also die Breite  $\beta$  gegeben ist, d. h.  $\sphericalangle AOP$ , liefert die Waagerechte durch  $P$  den Punkt  $Q$ , die Gerade unter  $45^\circ$  durch  $Q$  den Punkt  $R$  der Sinuslinie, das Lot von  $R$  den Punkt  $T$  und Hälften von  $OT$  den Punkt  $W$ , so daß  $OW$  das Bogenmaß des zu  $\beta$  gehörigen Winkels  $\varphi$  ist. Mittels der auf  $OA$  angebrachten Skala kann man das Gradmaß von  $\varphi$  ablesen.

Zum Zeichnen der Sehne  $P'Q'$  in Fig. 9 braucht man nun nicht den Winkel  $\varphi$  selbst, sondern den Abstand  $M'R'$  der Sehne vom Äquator, d. h.  $\sqrt{2} \sin \varphi$ . In Fig. 10 ist  $\sin \varphi$  die zu  $W$  gehörige Ordinate  $WV$  der Sinuslinie. Demnach muß diese Ordinate mit  $\sqrt{2}$  multipliziert werden.

Zeichnung des flächentreuen Entwurfes nach Mollweide, s. Taf. III, Bild E: Wie stets nehmen wir als Längeneinheit den Halbmesser des Globus an. Er ist unten gezeichnet und zwar ebenso lang wie bisher. Um die Winkel  $\varphi$  möglichst genau zu bekommen, haben wir jedoch in der Hilfsfigur  $a$  die Längeneinheit  $OE$  doppelt so groß gewählt. Das darf nachher nicht außer acht gelassen werden! Die Strecke  $OA$  der Hilfsfig. ist gleich  $\pi$  angenommen, gemessen mit der Einheit  $OE$ . Sie wird in 18 gleiche Teile zerlegt. Ferner wird der Viertelkreis  $k_0$  mit dem Halbmesser  $OE$  sowie der konzentrische Viertelkreis  $k_1$  mit dem Halbmesser  $OA$  in neun gleiche Teile zerlegt. Die waagerechten Geraden durch die Teilpunkte von  $k_0$  und die Lote durch die Teilpunkte von  $OA$  sind einander zugehörig zum Schnitte zu bringen, wodurch man Punkte der dann einzuziehenden Sinuslinie bekommt. Dabei einige Hilfsmittel: Die Tangenten der Sinuslinie in  $O$  und  $A$  steigen unter  $45^\circ$  an; der Mittelpunkt desjenigen Kreises, der sich der Sinuslinie im höchsten Punkte ganz besonders innig anschmiegt, ist der Mittelpunkt der Strecke  $OA$ . Die Teilpunkte von  $k_1$  liefern die Skala der Breitenwinkel  $\beta$ , z. B. für  $40^\circ$  den Punkt  $P$ . Mit allen Teilpunkten von  $k_1$  verfährt man nun so wie mit diesem Punkte  $P$ . Man zieht nämlich durch  $P$  die Waagerechte, die  $AB$  in  $Q$  trifft, dann durch  $Q$  die Gerade unter  $45^\circ$ , die die Sinuslinie in  $R$  trifft. Das Lot von  $R$  gibt  $T$  auf  $OA$ . Da die Hälften der Strecken  $OT$  gebraucht werden, zieht man zweckmäßig noch die waagerechte Hilfslinie durch die Mitte  $C$  von  $OB$ . Wenn man nämlich dann die Gerade  $BT$  mit dieser

Hilfslinie in  $U$  zum Schnitte bringt, gibt das Lot von  $U$  die Mitte  $W$  von  $OT$ . Nun wissen wir, daß die Ordinate  $WV$  der Sinuslinie mit  $\sqrt{2}$  multipliziert werden soll. Außerdem ist zu beachten, daß die Hilfsfig.  $a$  mit der doppelten Längeneinheit gezeichnet worden ist. Mithin muß die Ordinate  $WV$  nur mit  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  multipliziert werden. Das macht man in der Hilfsfig.  $b$  oben rechts, die einzig und allein aus einem Winkel von  $45^\circ$  besteht. Man greift nämlich mittels des Stechzirkels die Ordinate  $WV$  ab, setzt eine Zirkelspitze im Scheitel des  $45^\circ$ -Winkels ein, die andere auf dem schrägen Schenkel in  $H$ , und greift dann mit demselben Zirkel den Abstand  $HK$  dieses zweiten Punktes vom waagerechten Schenkel ab, ohne das Lot  $HK$  wirklich zu zeichnen (das wir daher nur gestrichelt angedeutet haben). Dies Lot  $HK$  ist alsdann die Höhe, in der im Bilde  $E$  die Parallele zum Äquator gezeichnet werden muß, die den Breitenkreis  $\beta$  (hier  $40^\circ$ ) darstellt. Man bekommt so alle Breitenkreise von zehn zu zehn Grad, natürlich durch Abtragen nach unten hin auch die der südlichen Erdhälfte. Der Halbmesser des Kreises im Bilde  $E$  ist gleich  $\sqrt{2}$  oder rund 1,414, gemessen mit der unten angegebenen Längeneinheit, dem Halbmesser des Globus. Was nun die Längengrade betrifft, so sind die von zehn zu zehn Grad so zu zeichnen, daß sie die Schichten zwischen den die Breitenkreise darstellenden Sehnen in flächengleiche Stücke zerlegen. Das geschieht dadurch, daß man die Sehnen des Kreises in je 18 gleiche Teile zerlegt und die Längengrade durch die einander entsprechenden Teilpunkte zieht. Man kann ferner — und so ist es hier geschehen — das Bild erweitern, d. h. außer der bisher dargestellten Erdhälfte auch alles übrige zeichnen. Man braucht zu diesem Zwecke nur alle Stücke auf den waagerechten Kreissehnen links und rechts je noch 9mal anzusetzen. Die Bilder der Längengrade sind Kurven, die aus dem Kreise hervorgehen, wenn man die Sehnen in konstanten Verhältnissen teilt, also zum Kreis affine Kurven, d. h. Ellipsen, die die eine Achse  $N'S'$  gemein haben. Der Umriß des Bildes der gesamten Erdoberfläche ist somit eine Ellipse mit der halben Hauptachse  $2\sqrt{2}$  und der halben Nebenachse  $\sqrt{2}$ . Wie man alle Ellipsen, die vorkommen, gut zeichnen kann, dürfen wir als bekannt voraussetzen.

Ein Bedenken kann geäußert werden: Die in der Hilfsfigur  $a$  unter  $45^\circ$  gezogenen Geraden durch die Punkte  $Q$  schneiden zum Teil die Sinuslinie recht spitzwinklig, also ungenau. Aber das Gute ist, daß sich das von selbst wieder verbessert. Denn die Breiten, für die dies eintritt, sind die nahe bei  $90^\circ$ , und die zugehörigen Winkel  $\varphi$  sind auch nahezu  $90^\circ$ . Nun ist es bekannt, daß sich gerade die Sinus solcher Winkel außerordentlich wenig voneinander unterscheiden, also auch die abzugreifenden Höhen, in denen die Breitenkreise zu zeichnen sind.

Das Mittelstück des Entwurfes erinnert an die senkrechte Projektion des Globus auf eine Axialebene, ist aber keine. Wegen der gefälligen Gestalt wird der Mollweidische Entwurf oft für die flächentreue Darstellung des ganzen Globus benutzt.

**11. Der einfachste strahlige flächentreue Entwurf.** Auf dem Globus gehen die Längenkreise strahlig vom Nordpol aus, und die Breitenkreise durchsetzen sie senkrecht. Dies führt auf die Frage nach flächentreuen Entwürfen, in denen die Längenkreise als gerade Strahlen vom Bildpunkte des Nordpols ausgehen und die Breitenkreise diese Strahlen senkrecht durchsetzen, also als konzentrische Kreise um diesen Punkt. Derartige Entwürfe kann man als *strahlig* bezeichnen.

Der einfachste geht sofort hervor: Die Kugelhaube um den Nordpol herum bis zum Breitenkreise  $\beta$  hat nach dem Archimedischen Satze die Fläche  $2\pi$ , vermindert um die Fläche  $2\pi \sin \beta$ , wenn der Halbmesser des Globus die Längeneinheit ist. Ein Kreis in der Zeichenebene hat dieselbe Fläche, wenn sein Halbmesser  $x$  der Bedingung genügt:

$$x^2 = 2(1 - \sin \beta).$$

Zeichnung des einfachsten strahligen flächentreuen Entwurfes, s. Taf. IV, Bild F: Die Hilfsfig. *a* stellt den halben Axialschnitt des Globus dar. (Der Halbmesser ist ebenso groß wie bisher gewählt.) Man zerlegt den Halbkreis in 18 gleiche Teile. Ist *P* einer der Teilpunkte und  $\sphericalangle AMP = \beta$  (hier z. B.  $50^\circ$ ), so ist in dem rechtwinkligen Dreieck *NPS* das Quadrat der Kathete *NP* gleich dem Produkte der Hypotenuse *NS* = 2 mit dem Hypotenusenabschnitte *NQ* =  $1 - \sin \beta$ , so daß die Sehne *NP* der für  $x$  aufgestellten Bedingung genügt.<sup>1)</sup> Man zeichnet somit in Fig. F die konzentrischen Kreise, deren Halbmesser gleich den Sehnen in Fig. *a* von *N* nach den Teilpunkten *P* sind, und hat damit die Bilder der Breitenkreise von zehn zu zehn Grad. Die Längenkreise von zehn zu zehn Grad stellen sich dar als die Strahlen vom Mittelpunkt aus, die je zehn Grad miteinander bilden.

Um den Nordpol herum ist der Entwurf ausgezeichnet. Gegen den Äquator hin werden die Verzerrungen bemerklich, und die südliche Erdhälfte ist stark verzerrt, ja der Südpol selbst nicht als Punkt, sondern singular als der Umrißkreis dargestellt.

1) Die mit  $O_2$  und  $O_3$  bezeichneten Punkte werden erst in Nr. 13 gebraucht.

Obleich der Entwurf ohne weiteres aus dem Archimedischen Satze hervorgeht, kommt er erst im Jahre 1772 vor. Das liegt daran, daß man früher kein Gewicht auf Flächentreue legte und daß die Polarländer für Handel und Wandel keine sonderliche Rolle spielten. Erst der Mathematiker JOHANN HEINRICH LAMBERT erwähnt den Entwurf. Dieser Mann hat sich große Verdienste um die Kartographie erworben. Er wurde 1728 in der damals zur Schweiz gehörigen Stadt Mülhausen im Elsaß geboren und lebte nach wechselndem Aufenthalt in der Schweiz und in Deutschland schließlich als Oberbaurat und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin, wo er 1777 starb. Trotz gegenteiliger französischer Behauptung war er ein Deutscher. Unter den Mathematikern des achtzehnten Jahrhunderts ist LAMBERT eine besonders anziehende Gestalt wegen seines gesunden Sinnes für das Wesentliche, wegen seiner wissenschaftlichen Strenge und seiner Pioniertätigkeit, auf der spätere bedeutende Männer fußten.<sup>1)</sup>

**12. Allgemeine strahlige flächentreue Entwürfe.** Auch jetzt wollen wir die Breitenkreise darstellen durch Kreis-

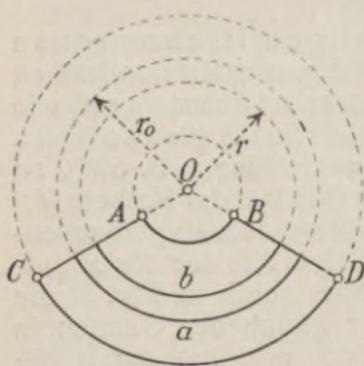
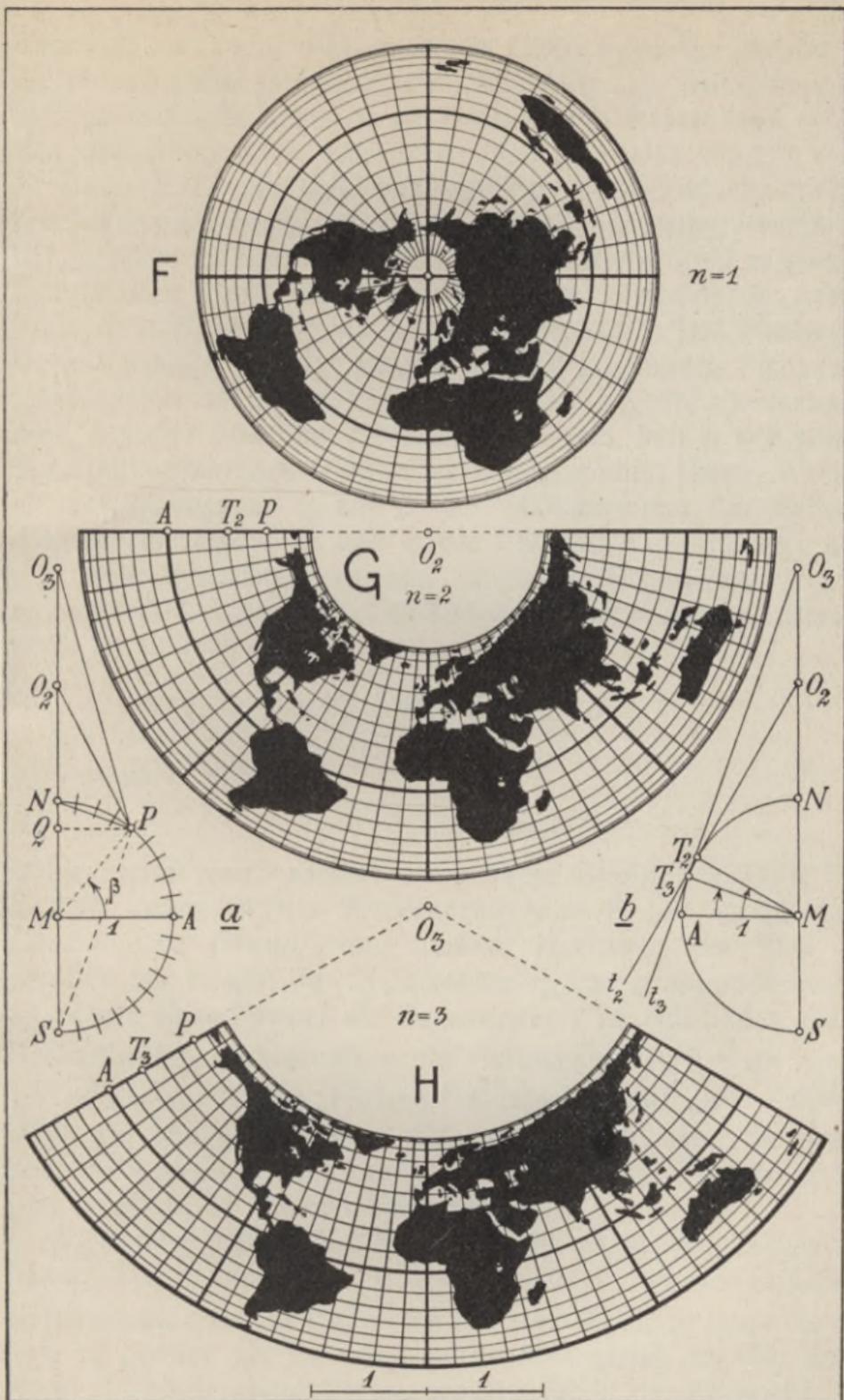


Fig. 11

bogen um einen gemeinsamen Mittelpunkt  $O$ . Aber wir wollen jetzt nicht verlangen, daß dieser Punkt  $O$  notwendig das Bild des Nordpols sei. Während die Strahlen, die im letzten Entwurf die Längengrade von zehn zu zehn Grad darstellten, auch im Bilde je zehn Grad miteinander ausmachten, brauchen wir das nicht mehr anzunehmen. Wir wollen also einen flächentreuen Entwurf des Globus

suchen, der von zwei Kreisbögen  $AB$  und  $CD$  um einen Punkt  $O$

1) Von LAMBERTS Schriften nennen wir seine „*Freye Perspective*“, Zürich 1759 (2. Aufl. 1774), und seine „*Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*“, in drei Teilen, Berlin 1765, 1770 und 1772. Hier stehen im 3. Teil die inhaltreichen „*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*“, S. 105—199 (mit Erläuterungen hrsggeg. von A. WANGERIN als Nr. 54 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Leipzig 1894). Der oben besprochene Entwurf wird auf S. 180 und 184 (im Abdruck S. 60 und 65) kurz erwähnt.



Flächentreue strahlige Entwürfe



und von zwei von diesem Punkt  $O$  ausgehenden Strahlen  $OAC$  und  $OBD$  begrenzt wird, siehe Fig. 11. Das Bild des Nordpols möge demnach ausarten in den Kreisbogen  $AB$ , das des Südpols in den Kreisbogen  $CD$ . Der Winkel der Strahlen  $OAC$  und  $OBD$  betrage den  $n$ -ten Teil von  $360^\circ$ . Die Zahl  $n$  sei bestimmt angenommen, aber selbstverständlich größer als Eins. (Sie braucht keine ganze Zahl zu sein.) Der Äquator werde durch den Kreisbogen  $a$  und der Breitenkreis  $\beta^\circ$  n. Br. durch den Kreis  $b$  dargestellt. Die Flächentreue verlangt, daß das zwischen  $a$  und  $b$  gelegene Flächenstück gleich der Fläche  $2\pi \sin \beta$  des Kugelgürtels zwischen dem Äquator und dem Breitenkreise  $\beta$  sei, indem wie stets der Halbmesser des Globus als Längeneinheit diene. Wenn  $a$  den Halbmesser  $r_0$  und  $b$  den Halbmesser  $r$  hat, haben die ganzen Kreise  $a$  und  $b$  die Flächen  $\pi r_0^2$  und  $\pi r^2$ , so daß dem Kreisring zwischen ihnen die Fläche  $\pi(r_0^2 - r^2)$  zukommt. Aber nur der  $n$ -te Teil davon wird benutzt. Demnach ist zu fordern

$$\frac{1}{n} \pi(r_0^2 - r^2) = 2\pi \sin \beta$$

oder nach  $r^2$  aufgelöst

$$(L) \quad r^2 = r_0^2 - 2n \sin \beta.$$

Diese schon von LAMBERT aufgestellte Bedingung (a. a. O. S. 186 unten, in der Klassikerausgabe S. 67) möge die *Lambertsche Grundformel* heißen. Hat man die Zahl  $n$  (größer als 1) und den Halbmesser  $r_0$  von  $a$  angenommen, so liefert diese Formel die Halbmesser  $r$  für die Bilder aller Breitenkreise, insbesondere die Halbmesser  $\sqrt{r_0^2 - 2n}$  und  $\sqrt{r_0^2 + 2n}$  der Kreise  $AB$  und  $CD$  (für  $\beta = 90^\circ$  und  $-90^\circ$ ). Was die Längenkreise betrifft, so bekommt man die von zehn zu zehn Grad, wenn man den Winkel der Strahlen  $OAC$  und  $OBD$  in 36 gleiche Teile zerlegt.

Wir wollen natürlich für alle Breiten reelle Halbmesser  $r$  haben. Daher muß dafür gesorgt werden, daß der kleinste Halbmesser, nämlich  $\sqrt{r_0^2 - 2n}$  (für den Nordpol) noch reell, also  $r_0^2$  größer als  $2n$  oder mindestens gleich  $2n$  sei. Nur wenn  $r_0^2$  gerade gleich  $2n$  ist, ergibt sich für den Nordpol der Halbmesser Null, d. h. nur dann bildet sich der Nordpol nicht

singulär als Kreisbogen, sondern als Punkt ab. LAMBERT hat nur diesen Fall weiter behandelt. Der allgemeinere Fall  $r_0^2 > 2n$  ist von H. C. ALBERS untersucht worden.<sup>1)</sup>

Eine Frage soll noch beantwortet werden: Gibt es einen Breitenkreis  $\beta$ , der in wahrer Länge abgebildet wird? Da der Halbmesser des Breitenkreises in Wahrheit gleich  $\cos \beta$  und im Bilde gleich  $r$  ist, aber vom Bildkreise nur der  $n$ -te Teil benutzt wird, ist  $r = n \cos \beta$  zu fordern, woraus nach der Formel (L) die Bedingung entspringt

$$n^2 \cos^2 \beta = r_0^2 - 2n \sin \beta$$

oder, wenn auch links der Sinus eingeführt wird:

$$(n \sin \beta - 1)^2 = n^2 + 1 - r_0^2.$$

Hieraus ergeben sich für  $\sin \beta$  nur dann zwei verschiedene reelle Werte, wenn  $n^2 + 1$  größer als  $r_0^2$  ist. Diese beiden Werte liegen dann aber auch, wie das von einem Sinus zu verlangen ist, zwischen  $-1$  und  $+1$ . Denn weil  $r_0^2$  wie gesagt mindestens gleich  $2n$  anzunehmen ist, wird die rechte Seite der Gleichung nie größer als  $(n-1)^2$ , so daß  $n \sin \beta - 1$  zwischen  $1-n$  und  $n-1$  liegt, also  $\sin \beta$  zwischen  $(2-n):n$  und  $1$ . Weil  $n$  nicht kleiner als  $1$  sein darf, liegt aber  $(2-n):n$  niemals unter  $-1$ . Daher:

Im Fall  $n^2 + 1 > r_0^2$  gibt es zwei verschiedene längentreue Breitenkreise.

Im Fall  $n^2 + 1 = r_0^2$  rücken beide in einen zusammen, und dann ist der Sinus seiner Breite gleich  $1:n$ . Man kann diesen Fall den *Grenzfall* nennen.

Im Fall  $n^2 + 1 < r_0^2$  gibt es keinen längentreuen Breitenkreis. Hiervon wollen wir ganz absehen, obwohl sich dieser Fall ebenso wie die anderen erledigen läßt.

Vorhin kamen einige Rechnereien vor, und das wird auch später gelegentlich geschehen. Manchem Zeichner ist das unangenehm. Aber die Forderung, alles Geometrische auf rein geometrischem Weg abzuleiten, gilt nicht im Gebiete der angewandten Mathematik. Da darf man alle Hilfsmittel benutzen, die den Weg zur Tat abkürzen und bequem

1) „Beschreibung einer neuen Kegelprojection“, Zachs monatliche Correspondenz, Nov. 1805, S. 450—459.

machen.<sup>1)</sup> Die feindliche Einstellung gegenüber harmlosen Formeln ist übrigens nicht selten bloß eine Folge vernachlässigter rechnerischer Übung.

**13. Eine Anwendung des Kosinussatzes.** In dem Grenzfalle, wo  $n^2 + 1$  gerade gleich  $r_0^2$  ist, wird aus der Lambertschen Formel

$$r^2 = n^2 + 1 - 2n \sin \beta,$$

und dies erinnert an den Kosinussatz der Trigonometrie

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Wir werden demnach ein Dreieck bilden, in dem eine Seite  $a = n$ , eine zweite Seite  $b = 1$  und der von beiden eingeschlossene Winkel  $\gamma$  das Komplement von  $\beta$  ist, s. Fig. 12. Zu jedem Werte von  $n > 1$  gehört ein strahliger flächentreuer Entwurf. Wir wählen die Beispiele  $n = 2$  und  $n = 3$ .

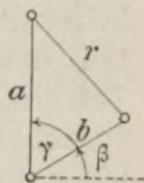


Fig. 12

Zeichnung strahliger flächentreuer Entwürfe mit nur einem längentreuen Breitenkreise, s. Taf. IV, Bild G und H: Wir benutzen in der alten Hilfsfig.  $a$  im Falle  $n = 2$  den Punkt  $O_2$  und im Falle  $n = 3$  den Punkt  $O_3$ , die auf der Verlängerung der Achse  $SN$  so liegen, daß  $MO_2 = 2$  und  $MO_3 = 3$  ist. Nach dem Kosinussatze sind die Halbmesser der Kreise zur Darstellung der Breitenkreise von zehn zu zehn Grad die Strecken von  $O_2$  bzw.  $O_3$  nach den Teilpunkten  $P$ . Im Falle  $n = 2$  liegt der Entwurf in einem Winkelfelde von  $360^\circ : 2$  oder  $180^\circ$ , im Falle  $n = 3$  in einem Winkelfelde von  $360^\circ : 3 = 120^\circ$ . Die Längentreuen Kreise von zehn zu zehn Grad bekommt man durch Zerlegen der Winkelfelder in 36 gleiche Teile. Die Hilfsfig.  $b$  zeigt, wie man den einzigen längentreuen Breitenkreis  $\beta$  aus der Bedingung  $\sin \beta = 1 : n$  ermittelt: Man legt von  $O_2$  und  $O_3$  die Tangenten  $t_2$  und  $t_3$  an den Axialschnitt. Ihre Berührungspunkte  $T_2$  und  $T_3$  haben die gesuchten Breiten. Im Bilde G ist es die Breite  $30^\circ$ , im Bilde H eine Breite von rund  $19\frac{1}{2}^\circ$ . Die längentreuen Breitenkreise sind besonders kenntlich gemacht.

Man stelle sich den *Rotationskegel* mit der Spitze  $O_2$  bzw.  $O_3$  vor, der den Globus längs des längentreuen Breitenkreises berührt. Die Tangenten  $t_2$  bzw.  $t_3$  in der Hilfsfig.  $b$  sind Mantellinien dieser Kegel, und die Strecken  $O_2 T_2$  bzw.  $O_3 T_3$  sind genau gleich den Halbmessern der zugehörigen

1) In der reinen Mathematik verhält es sich anders. Da ist die Forderung der Reinheit des Verfahrens von fremden Hilfsmitteln berechtigt.

Breitenkreisbilder. Weil es sich um längentreue Breitenkreise handelt, leuchtet daher ein: Wenn man den Mantel des Tangentialkegels eben ausbreitet, liefert der Berührkreis einen Kreisbogen von demselben Halbmesser und von derselben Länge wie im Bilde. Weil ferner der Tangentialkegel längs des Breitenkreises mit dem Globus einen unendlich schmalen Gürtel gemein hat, ist somit das Bild G bzw. H längs des längentreuen Breitenkreises ohne jede Verzerrung.

Obgleich die Pole als Kreisbogen, also singularär erscheinen, sehen die Entwürfe leidlich aus, jedenfalls in den südlichen Breiten besser, als man wegen des verzerrten Südpols erwarten würde. Der frühere Entwurf F auf derselben Taf. (Nr. 11) gehört als Sonderfall  $n = 1$  zu den hier besprochenen, nämlich mit dem längentreuen Breitenkreise  $90^\circ$  n. Br., d. h. dem nur als Punkt erscheinenden Nordpol. Bei allen strahligen Entwürfen im Grenzfall  $n^2 + 1 = r_0^2$  bekommen die Längenkreise die Länge 2 (Globusdurchmesser), während sie in Wahrheit die Länge  $\pi$  haben.

**14. Abermals eine Anwendung des Kosinussatzes.** Nach Nr. 12 gibt es strahlige flächentreue Entwürfe, bei denen zwei verschiedene Breitenkreise längentreu abgebildet werden. Wir wollen annehmen, die zugehörigen Breiten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  seien vorgeschrieben. Die größere sei  $\beta_1$ , die kleinere  $\beta_2$ . Dann fragt es sich, wie die zugehörige Lambertsche Grundformel von Nr. 12

$$(L) \quad r^2 = r_0^2 - 2n \sin \beta$$

aussehen wird, d. h. wir müssen hierin die Konstanten  $r_0$  und  $n$  mittels  $\beta_1$  und  $\beta_2$  ausdrücken. Nach Nr. 12 ist die Bedingung für längentreue Breitenkreise einfach  $r = n \cos \beta$ . Demnach setzen wir  $n \cos \beta$  für  $r$  in (L) ein und verlangen, daß die hervorgehende Gleichung sowohl für  $\beta_1$  als auch für  $\beta_2$  bestehe:

$$n^2 \cos^2 \beta_1 = r_0^2 - 2n \sin \beta_1,$$

$$n^2 \cos^2 \beta_2 = r_0^2 - 2n \sin \beta_2.$$

Aus diesen beiden Bedingungen müssen wir die Konstanten  $r_0$  und  $n$  berechnen.

Zunächst ergibt sich durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten eine Bedingung für  $n$  allein, nämlich

$$n (\cos^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_1) = 2 (\sin \beta_1 - \sin \beta_2).$$

Statt  $\cos^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_1$  kann man  $\sin^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_2$  setzen. Dann aber hebt sich daraus und aus der rechten Seite der Faktor  $\sin \beta_1 - \sin \beta_2$  fort, so daß bleibt

$$n (\sin \beta_1 + \sin \beta_2) = 2.$$

Die Summe der beiden Sinus läßt sich nun bekanntlich als ein Produkt darstellen, wenn man statt der Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  ihre halbe Summe  $\sigma$  und ihre halbe Differenz  $\delta$  einführt, denn dann ist die Summe gleich  $2 \sin \sigma \cos \delta$ , so daß kommt

$$n = \frac{1}{\sin \sigma \cos \delta}.$$

Damit ist  $n$  bestimmt. Nun nehmen wir noch die erste der beiden Bedingungen, nämlich

$$n^2 \cos^2 \beta_1 = r_0^2 - 2n \sin \beta_1.$$

Darin ist  $\beta_1$  jetzt gleich  $\sigma + \delta$  zu setzen:

$$n^2 \cos^2 (\sigma + \delta) = r_0^2 - 2n \sin (\sigma + \delta).$$

Dies läßt sich so schreiben:

$$n^2 (\cos \sigma \cos \delta - \sin \sigma \sin \delta)^2 = r_0^2 - 2n (\sin \sigma \cos \delta + \cos \sigma \sin \delta).$$

Aber  $n$  ist der reziproke Wert von  $\sin \sigma \cos \delta$ . Also kommt

$$(\text{ctg } \sigma - \text{tg } \delta)^2 = r_0^2 - 2 - 2 \text{ctg } \sigma \text{tg } \delta$$

oder einfacher

$$r_0^2 = 2 + \text{ctg}^2 \sigma + \text{tg}^2 \delta.$$

Dies kann man auch so ausdrücken:

$$r_0^2 = \frac{1}{\sin^2 \sigma} + \frac{1}{\cos^2 \delta}.$$

Damit ist auch  $r_0^2$  ermittelt.

Wenn die für  $n$  und  $r_0^2$  gefundenen Werte in die Lambersche Grundformel ( $L$ ) eingeführt werden, nimmt sie diese Gestalt an

$$(L') \quad r^2 = \frac{1}{\sin^2 \sigma} + \frac{1}{\cos^2 \delta} - 2 \frac{1}{\sin \sigma} \frac{1}{\cos \delta} \sin \beta.$$

Wir erinnern daran, daß  $\sigma$  die halbe Summe und  $\delta$  die halbe Differenz der beiden vorgeschriebenen Breiten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  ist. Die Gestalt dieser Formel erinnert wieder wie in Nr. 13 an die Formel für den Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Man hat, um Übereinstimmung der rechten Seiten zu erzielen, den Winkel  $\beta$  durch sein Komplement  $\gamma$  zu ersetzen und muß unter  $a$  und  $b$  die Größen verstehen

$$a = \frac{1}{\sin \sigma}, \quad b = \frac{1}{\cos \delta}.$$

Mithin kann man zur Ermittlung von  $r$  bei gegebenem  $\beta$  wieder den Kosinussatz anwenden. Nur muß man vorher  $a$  und  $b$  als Strecken dargestellt haben.

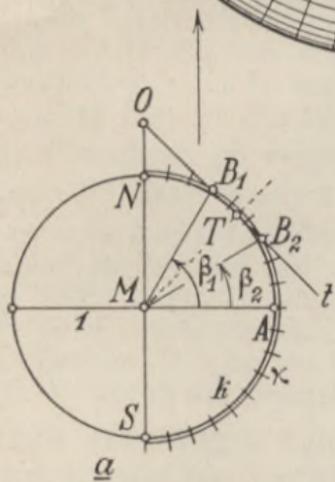
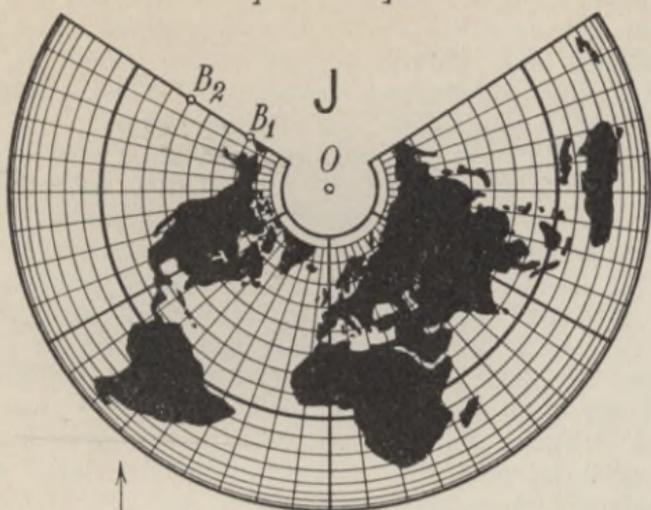
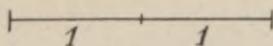
Deshalb ist in Fig. 13 der halbe Axialschnitt  $k$  des Globus gezeichnet. Sein Halbmesser  $MA$  bedeutet die Längeneinheit.

Ferner sind  $\sphericalangle AMP_1$  und  $\sphericalangle AMP_2$  als die angenommenen Breiten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  eingetragen. Die Mittellinie des Winkels  $P_1MP_2$  schneidet den Kreis  $k$  in  $T$ . Daher ist  $\sphericalangle AMT = \sigma$  und  $\sphericalangle TMP_1 = \sphericalangle TMP_2 = \delta$ . Die Tangente von  $T$  trifft die Achse  $NS$  in einem Punkte  $O$  und bildet mit ihr den Winkel  $\sigma$ . Wegen  $MT = 1$  ist also  $MO$  gleich  $1 : \sin \sigma$  oder  $a$ . Die Tangente schneidet die verlängerten Halbmesser von  $P_1$  und  $P_2$  in Punkten  $B_1$  und  $B_2$  derart, daß  $MB_1$  oder  $MB_2$  gleich  $1 : \cos \delta$  ist, d. h. gleich  $b$ . Der Kreis  $\kappa$  um  $M$  durch  $B_1$  und  $B_2$  schneidet somit auf der Geraden  $MA$  die Strecke  $MU = b$  ab. Auch die Zahl  $n$  läßt sich als Strecke wieder-

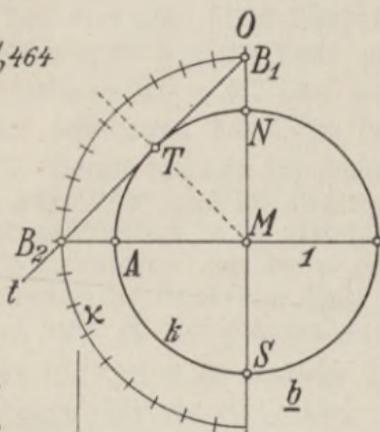
Fig. 13

geben, die dann mit der Längeneinheit zu messen ist. Denn  $n$  ist der reziproke Wert von  $\sin \sigma \cos \delta$ , also gleich  $ab$ , so daß die Proportion  $n : a = b : 1$  besteht. Man ziehe demnach durch  $U$  die Parallele zu  $AO$ . Sie schneidet die Gerade  $SN$  in einem Punkte  $K$  derart, daß  $MK = n$  ist.

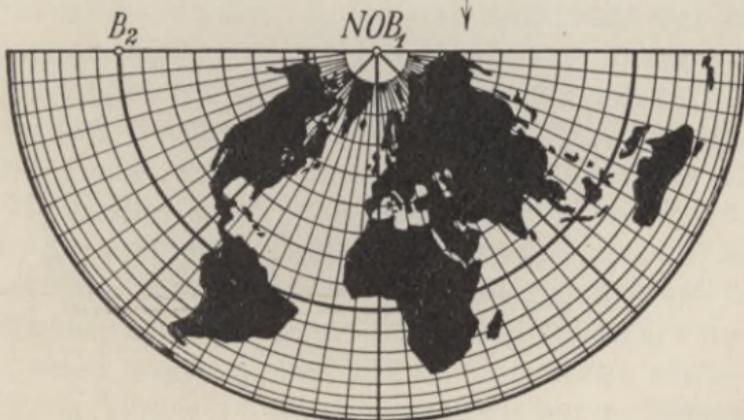
Wegen des Kosinussatzes findet man nun die Halbmesser  $r$  der Breitenkreisbilder wie in Nr. 13, aber mit dem Unterschiede, daß an die Stelle des Kreises  $k$ , des Globusumrisses, der neue Kreis  $\kappa$  tritt. Wir bringen zwei Beispiele.



$n=1,464$



K



$n=2$

Flächentreue strahlige Entwürfe



Zeichnung von strahligen flächentreuen Entwürfen mit je zwei längentreuen Breiten, siehe Taf. V, Bild J und K: Der als Längeneinheit dienende Halbmesser des Globus ist oben angegeben und zwar wieder ebenso lang wie bisher. Für das Bild J werde vorgeschrieben, daß die Breitenkreise  $\beta_1 = 60^\circ$  und  $\beta_2 = 30^\circ$  längentreu erscheinen sollen, während es für das Bild K die Breitenkreise  $\beta_1 = 90^\circ$  und  $\beta_2 = 0^\circ$  sein sollen. Im Bilde K soll demnach der Nordpol als Punkt erscheinen. In den zugehörigen Hilfsfiguren  $a$  und  $b$  ist  $k$  der Axialschnitt des Globus. Darin sind die Zentriwinkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  einzutragen. Die Mittellinie zwischen ihren freien Schenkeln liefert den Punkt  $T$  auf  $k$ , dessen Tangente die verlängerte Achse  $NS$  in  $O$  trifft. Die verlängerten Schenkel geben auf der Tangente die Punkte  $B_1$  und  $B_2$ , durch die der Halbkreis  $\kappa$  um  $M$  beschrieben wird. Dieser Halbkreis  $\kappa$  ist nun in 18 gleiche Teile zu zerlegen. Die Strecken von  $O$  nach den Teilpunkten sind dann die Halbmesser derjenigen Kreise, die man in den Bildern J und K konzentrisch zieht. Das liefert die Breitenkreise von zehn zu zehn Grad. Nun ist noch die Größe des Winkels zu bestimmen, in dem der Entwurf enthalten ist, d. h. der  $n$ -te Teil von  $360^\circ$ . Die Zahl  $n$  ließe sich wie in Fig. 13 ermitteln, aber wegen  $n = ab$  kann man es auch so machen: Im ersten Fall ist  $a = MO = \sqrt{2}$  und  $b = MB = 1 : \cos 15^\circ$ , daher  $n = \sqrt{2} : \cos 15^\circ$  oder rund 1,464. Im zweiten Fall ist  $a = b = \sqrt{2}$ , daher  $n = 2$ . Somit beträgt der Ausschnitt im ersten Bilde rund  $360^\circ : 1,464$  oder  $246^\circ$  und im zweiten Bild genau  $180^\circ$ . Diese Ausschnitte sind schließlich in 36 gleiche Teile zu zerlegen, wodurch sich die Längentreuen Breitenkreise von zehn zu zehn Grad ergeben. Die beiden längentreuen Breitenkreise sind in den Entwürfen durch die Buchstaben  $B_1$  und  $B_2$  gekennzeichnet.

Wenn auch diese beiden Breitenkreise in wahrer Länge dargestellt werden, verhält es sich hier doch anders als in den Entwürfen von Nr. 13, wo das Bild längs des einzigen vorhandenen längentreuen Breitenkreises unverzerrt war. Denn die Kegel, die den Globus längs der ausgezeichneten Breitenkreise berühren, haben jetzt nicht als Mantellinien Strecken gleich den Halbmessern der Bilder der Breitenkreise. Immerhin kann man doch so folgern: Im Entwurfe J liegen die beiden längentreuen Breitenkreise  $60^\circ$  und  $30^\circ$  so nahe beieinander, daß auch die zwischen ihnen und die nicht allzuweit über sie hinaus verlaufenden beinahe die wahre Länge haben werden, also die im Gürtel von etwa  $70^\circ$  bis  $10^\circ$  n.Br. Im Entwurfe K sind dagegen die beiden längentreuen Breitenkreise, der Nordpol und der Äquator, soweit voneinander entfernt, daß man hier nicht mehr so folgern darf. Deshalb befriedigt der Entwurf J, auch mehr als der Entwurf K.

**15. Ein Lampenschirm als Globusersatz.** Die Ableitung der strahligen flächentreuen Entwürfe hatte gar nichts mit einem Kegel zu tun. Aber man kann nachträglich doch von einem Kegel einen vernünftigen Gebrauch machen. Man kann nämlich einen strahligen Entwurf zu einem Rotationskegel zusammendrehen und dann als Lampenschirm benutzen. Der ist handlicher und billiger herzustellen als ein Globus, und man kann z. B. beim Zeitunglesen recht bequem auf

ihm nachschauen. Die großen Verzerrungen der südlichen Erdhälfte stören dabei viel weniger, als man zunächst glauben möchte. Denn glücklicherweise herrscht da das Meer vor.

Will man sich einen Lampenschirm als Weltkarte einrichten, so hat man mit bestimmten Abmessungen zu rechnen. Somit erhebt sich die Frage, wie man denjenigen strahligen

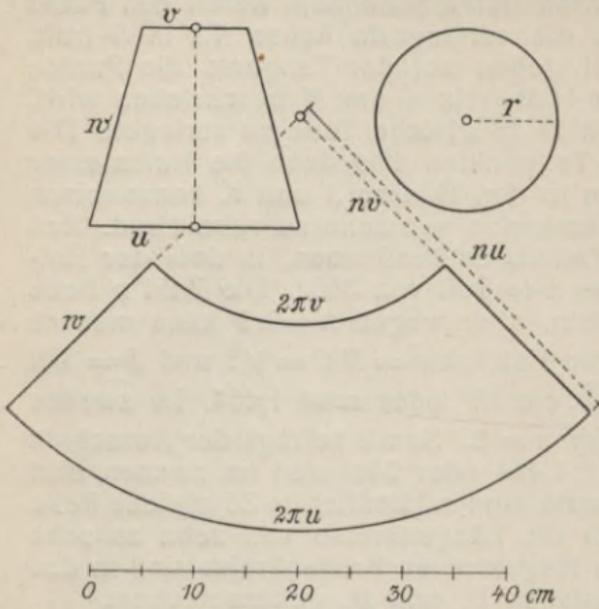


Fig. 14

flächentreuen Entwurf herausfindet, der auf einen gegebenen Kegelstumpf paßt. Man wird sehen, daß sich nur ein einziger ergibt.

In Fig. 14 ist links oben der Axialschnitt des Kegelstumpfes mit den drei maßgebenden Strecken dargestellt. Diese Strecken mißt man mit dem Zentimetermaß ab, und sie mögen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  Zentimeter lang sein. Nun kommt es darauf an, die in der letzten Nummer auftretenden Größen  $a$ ,  $b$ ,  $n$  zu bestimmen. Sie waren jedoch mit einer andern Einheit gemessen, mit dem Halbmesser des Globus, und zunächst steht noch dahin, wie lang dieser sein muß. Sagen wir daher, der Halbmesser des Globus betrage  $r$  Zentimeter. Da der Ausschnitt des Entwurfes den  $n$ -ten Teil von  $360^\circ$  ausmacht und der Kreisbogen, der den Südpol darstellt, auf dem Kegelstumpf zu einem vollständigem Kreise zusammengedreht wird, ist

der Halbmesser des Südpolkreises im Entwurfe gleich  $nu$  Zentimetern. Entsprechend ist der Halbmesser des Nordpolbildes gleich  $nv$  Zentimetern. Ferner müssen die Längengrade des Entwurfes  $w$  Zentimeter lang sein. Also ist  $w$  gleich  $nu - nv$ . Aus der Gleichung ( $L'$ ) von Nr. 14 (worin  $1 : \sin \sigma$  gleich  $a$  und  $1 : \cos \delta$  gleich  $b$  war) entnehmen wir für  $\beta$  gleich  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$ , daß die Halbmesser des Südpol- und des Nordpolkreises im Entwurfe gleich  $a + b$  und  $a - b$  sind, jedoch gemessen mit dem Halbmesser des Globus. Sie betragen mithin  $r(a + b)$  und  $r(a - b)$  Zentimeter. Schließlich erinnern wir daran, daß die Zahl  $n$  gleich  $ab$  ist. Demnach bestehen die Gleichungen

$$abu = r(a + b),$$

$$abv = r(a - b),$$

$$w = ab(u - v).$$

Aus den beiden ersten ergibt sich nach Division:

$$a : b = (u + v) : (u - v).$$

Hieraus und aus der dritten Gleichung folgt

$$a = \frac{\sqrt{(u + v)w}}{u - v}, \quad b = \frac{\sqrt{(u + v)w}}{u + v}, \quad n = ab = \frac{w}{u - v}.$$

Schließlich ergibt sich noch aus der ersten Gleichung durch Einsetzen dieser Werte

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(u + v)w},$$

und damit sind alle Größen ermittelt.

Ein Beispiel: Die Abmessungen des Schirmes seien  $u = 10$  cm,  $v = 5$  cm,  $w = 20$  cm. Dann kommt  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ,  $n = 4$ ,  $r = 5\sqrt{3}$ . Man muß also vom Globus mit dem Halbmesser von rund 8,66 cm ausgehen. Nach voriger Nummer ist  $\sin \sigma = 1 : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $\cos \delta = 1 : b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , so daß  $\sigma$  ungefähr  $17^\circ$  und  $\delta$  ungefähr  $30^\circ$  beträgt. Mithin haben die längentreuen Breitenkreise die Breiten  $\sigma + \delta$  oder rund  $47^\circ$  und  $\sigma - \delta$  oder rund  $-13^\circ$ . Die Maße in Fig. 14 sind die dieses Beispiels, natürlich verkleinert.

### III. WINKELTREUE ENTWÜRFE

**16. Winkeltreue.** Aus der unbegrenzten Zahl von flächentreuen Entwürfen haben wir eine Auslese gebracht. Später (in Nr. 25) wird sich die Gelegenheit zu noch ein paar flächentreuen Entwürfen ergeben. Jetzt aber wollen wir uns zu winkeltreuen Entwürfen wenden, also zu solchen, die jeden Winkel auf dem Globus in wahrer Größe zeigen (Nr. 3). Wenn man es sich recht überlegt, merkt man bald, daß die Winkeltreue einer Karte doch nicht so sinnfällig wirkt, wie man zuerst glauben könnte. Denn die kleinen Krümmungen von Wegen, Flüssen, Gebirgszügen u. dgl. kann man auf einer Übersichtskarte nicht wiedergeben. Gehen von einer Stelle zwei Wege aus, so ist es wohl möglich, daß sich ihre Richtungen alsbald ändern, so daß ihr wahrer Schnittwinkel auf der Karte gar nicht in Erscheinung tritt. Sinnfällig wird die Winkeltreue eigentlich nur dadurch, daß das Gradnetz rechtwinklig sein muß. Jedoch wir wissen, daß auch nicht-winkeltreue Karten rechtwinklige Gradnetze haben können. Daß man sich außerordentlich eingehend mit winkeltreuen Abbildungen abgegeben hat, geschah auch nicht der Kartographie zu Liebe, sondern weil ihre mathematische Theorie besonders wichtig ist. Das ist ein Grund, der uns hier einerlei sein kann. Wir wollen nur zwei Arten von winkeltreuen Entwürfen untersuchen. Worin ihr besonderer Nutzen für die Kartographie liegt, werden wir später auseinandersetzen.

Ein hinreichend kleines Dreieck auf dem Globus darf man als eben und geradlinig auffassen. Auf einer winkeltreuen Karte erscheint es als ein Dreieck mit denselben Winkeln, also als ein (im mathematischen Sinne des Wortes) ähnliches Dreieck. Man sagt deshalb: Winkeltreue Entwürfe bilden den Globus *in seinen kleinsten Teilen ähnlich* ab. Diese Redeweise hat ihre Bedenken, aber der Ausdruck ist einmal eingebürgert und man weiß, wie er gemeint ist. Für das Jahr 1822 hatte die Sozietät der Wissenschaften zu Kopenhagen die Preisaufgabe gestellt, „die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird“. Man wollte nämlich den be-

rühmten Mathematiker KARL FRIEDRICH GAUSS veranlassen, seine Untersuchungen darüber zu veröffentlichen. GAUSS, der „princeps mathematicorum“, wie er auf der zu seinen Ehren geprägten Denkmünze GEORGS V. von Hannover genannt wird, war im Jahre 1777 zu Braunschweig geboren. Seine erste große Leistung war der in seiner Dissertation 1799 gelieferte Nachweis, daß jede Gleichung  $n$ -ten Grades Lösungen hat. GAUSS wurde 1807 Professor an der Universität Göttingen und bekleidete dies Amt zugleich mit dem des Direktors der Sternwarte bis zu seinem 1855 erfolgten Tod. Auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik war er schöpferisch und richtunggebend; in manchem war er seinen Zeitgenossen an Einsicht voraus. Wir müssen uns damit begnügen, seine Lösung der erwähnten Preisaufgabe zu nennen, die 1825 erschien.<sup>1)</sup> Wertvolle Vorarbeiten hatten drei andere geleistet, zunächst LAMBERT 1772<sup>2)</sup>, dann LEONHARD EULER, geb. 1707 zu Basel, Professor in Petersburg, seit 1744 Direktor der mathematischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, von 1766 an wieder in Petersburg, wo er 1783 starb<sup>3)</sup>, schließlich noch JOSÈPHE LOUIS (DE) LAGRANGE, geb. 1736 zu Turin, von 1766 bis 1787 Nachfolger EULERS in Berlin, dann bis zu seinem Tode 1813 Professor an der École Normale bzw. École Polytechnique zu Paris.<sup>4)</sup>

In der sogenannten Funktionentheorie, wo die winkeltreuen Abbildungen eine große Rolle spielen, pflegt man sie *konforme* Abbildungen zu nennen. Dieser Name wurde von

1) „Allgemeine Auflösung der Aufgabe usw.“ (wie oben), Astronom. Abhandlungen von Schumacher, Altona 1825, 3. Heft, S. 1—30, abgedr. in „Gauß' Werken“, 4. Bd. Göttingen 1873, S. 189—216, dann auch in Nr. 55 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Leipzig 1894, durch A. WANGERIN, S. 57—81.

2) Siehe die Anmerkung zu Nr. 11.

3) In Betracht kommen namentlich die Arbeiten: „*De repræsentatione superficiei sphaericae super plano*“, Acta der Petersburger Akademie 1. Bd. 1777, S. 107—132, und „*De projectione geographica superficiei sphaericae*“, ebd. S. 133—142, beide zusammen mit noch einer dritten Arbeit übersetzt, herausgegeben von A. WANGERIN in Nr. 93 von Ostwalds Klassikern, Leipzig 1898.

4) „*Sur la construction des cartes géographiques*“, Nouveaux Mémoires de l'Académie des Scs. et Belles L. de Berlin 1779, S. 161—210, ebenfalls übersetzt von A. WANGERIN in Nr. 55 von Ostwalds Klassikern, Leipzig 1894, S. 3—56.

GAUSS eingeführt.<sup>1)</sup> Daß die schöne deutsche Bezeichnung winkeltreu von BREUSING herrührt, wurde schon in Nr. 3 gesagt.

Allerdings besteht bei winkeltreuer Abbildung Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen, aber das Verhältnis der Größe des Teils zu seinem Bild, also der Maßstab ändert sich allmählich von Stelle zu Stelle. Sonst wäre ja die Abbildung auch im Endlichen ähnlich, was wegen der Krümmung des Globus nicht angeht.

### 17. Auf der Suche nach einem winkeltreuen Entwurf.

Wenn man eine Wahrheit sucht, darf man auch auf nicht ganz sicheren Wegen forschen. Aber wenn man dadurch zu etwas Brauchbarem gelangt ist, hat man die Pflicht, das nachträglich streng zu beweisen. So wollen wir jetzt eine Betrachtung anstellen, deren Strenge man bezweifeln mag. In der nächsten Nummer bringen wir den strengen Beweis.

Ein unendlich kleines Flächenstück  $f$  des Globus befinde sich an der Stelle  $P$ . Wir benutzen den Axialschnitt durch  $P$ , s. Fig. 15, und denken uns alles senkrecht auf seine Ebene projiziert. Da das Flächenstück  $f$  der Tangentialebene von  $P$  angehört und da diese Ebene längs der Tangente  $p$  von  $P$  auf der Axialebene lotrecht steht, erscheint dann das Flächenstück als eine unendlich kleine Strecke. Zur Versinnlichung benutzen wir natürlich eine nur kurze Strecke. Die Gerade  $b$ , die den Breitenkreis von  $P$  darstellt, trifft den Großkreis zum zweiten Mal in  $Q$ . Weil die Bogen  $NP$  und  $NQ$  gleiche Länge haben, leuchtet ein, daß die Gerade  $PN$  die Mittellinie des Winkels von  $b$  und  $p$  ist. Wenn wir also von  $P$  an auf  $b$  eine Strecke  $f'$  auftragen, die ebenso lang wie die Strecke  $f$  ist, folgt, daß die Endpunkte von  $f$  und  $f'$  auf einer Senkrechten zu  $NP$  liegen. Zu  $NP$  ist aber auch  $SP$  senkrecht. Wenn die Strecke  $f$  und die ebenso lange Strecke  $f'$  nach

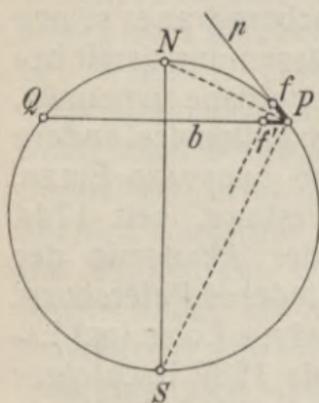


Fig. 15

1) Gleich zu Anfang seiner „*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*“, Abhandlgn. der Gesellschaft der W. zu Göttingen 2. Bd. 1844, in „*Gauß' Werken*“ 4. Bd. Göttingen 1873, S. 261—300, insb. S. 262.

Null streben, wird daher die Gerade, die ihre Enden verbindet, die Achse  $NS$  in einem Punkte treffen, der nach dem Südpol  $S$  strebt. Dies deuten wir nun anders. Unter  $f$  sollte ja eigentlich ein unendlich kleines Flächenstück des Globus verstanden werden. Daher bedeutet  $f'$  ein mit  $f$  kongruentes Flächenstück, das also aus  $f$  durch Umlegen in die Ebene des Breitenkreises von  $P$  hervorgeht. Mithin dürfen wir sagen: Die kongruenten Flächenstücke  $f$  und  $f'$  liegen so, daß das Stück  $f'$  aus dem Stück  $f$  durch *Perspektive* mit dem Auge  $S$  hervorgeht, und dies deutet die neue Fig. 16 an. Wir haben somit vermöge Perspektive vom Auge  $S$  aus das unendlich kleine Stück  $f$  des Globus verwandelt in ein *kongruentes* Flächenstück  $f'$ , das der Ebene des Breitenkreises von  $f$  angehört. So können wir mit allen unendlich kleinen Flächenstücken des Globus verfahren, die längs desselben Breitenkreises liegen. Aber wenn wir zu einem andern Breitenkreis übergehen, werden wir die Flächenstücke entsprechend auf eine andere Breitenkreisebene perspektiv von  $S$  aus abbilden. Um nun alle unendlich kleinen Flächenstücke des Globus auf ein und dieselbe Ebene perspektiv abzubilden, werden wir noch einen Schritt tun. Wir verschieben nämlich die Ebene des Breitenkreises soweit, bis sie die Tangentialebene des Nordpols  $N$  wird. Bekanntlich wird bei Verschiebung der Bildtafel ein perspektives Bild nur ähnlich vergrößert oder verkleinert (das Wort ähnlich dabei im strengen Sinne gebraucht). Mittels der Perspektive von  $S$  aus wird das Flächenstück  $f'$  also aufs neue abgebildet als ein Flächenstück  $f''$ , das der Tangentialebene des Nordpols  $N$  angehört, und dabei ist  $f''$  mit  $f'$  *ähnlich*. Wir wissen aber, daß  $f'$  mit  $f$  kongruent ist. Das Endergebnis ist also: Jedes unendlich kleine Flächenstück  $f$  des Globus wird vermöge der Perspektive vom Südpol  $S$  aus auf die Tangentialebene des Nordpols  $N$  in ein ihm ähnliches Flächenstück  $f''$  verwandelt. Mithin wird der Globus vermöge der Perspektive vom Südpol  $S$  aus auf die Tangentialebene des Nordpols  $N$  derart abgebildet, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den

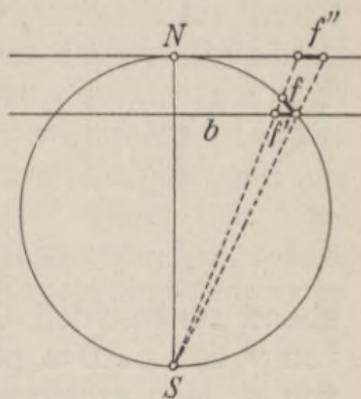


Fig. 16

kleinsten Teilen ähnlich ist, indem wir uns der Ausdrucksweise der letzten Nummer bedienen. Wir sind also zu einer winkeltreuen Abbildung des Globus gekommen. Das muß nun aber wie gesagt noch streng bewiesen werden.<sup>1)</sup>

**18. Winkeltreue der stereographischen Projektion.** Die perspektive Abbildung des Globus von einem Punkte  $S$  der Kugel (dem Südpol) auf die Tangentialebene des Gegenpunktes  $N$  (des Nordpols) wird *stereographische Projektion* genannt. Daß sie winkeltreu ist, beweist man in aller Strenge so: Wieder sei die Ebene der Fig. 17 die des Axialschnittes durch irgendeinen Kugelpunkt  $P$ . Die Tangentialebene von  $P$  und die Tangentialebene von  $N$  stehen dann lotrecht längs der Tangenten  $p$  und  $n$  und schneiden sich also in der zur Zeichenebene senkrechten Geraden  $g$  durch den Schnittpunkt  $G$  von  $p$  und  $n$ . Das perspektive Bild von  $P$  ist ein Punkt  $P'$  von  $n$ . Man erkennt sofort, daß die bei  $P$  und  $P'$  hervorgehobenen Winkel dem  $\sphericalangle SNP$  gleich sind. Mithin ist  $GPP'$  ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze  $G$ . Nun betrachten wir irgend zwei von  $P$  ausgehende Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  der Kugel. Sie liegen in der Tangentialebene von  $P$  und schneiden daher die lotrecht stehende Gerade  $g$  in gewissen Punkten  $T_1$  und  $T_2$ . Diese sind ihre eigenen perspektiven Bilder, weil sie sich in der Tangentialebene des Nordpols befinden. Mithin sind die Bilder  $t'_1$  und  $t'_2$  der Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  die Geraden von  $P'$  nach  $T_1$  und  $T_2$ . Die lotrecht auf der Zeichenebene stehenden rechtwinkligen Dreiecke  $PGT_1$  und  $P'GT_1$  sind kongruent, ebenso die recht-

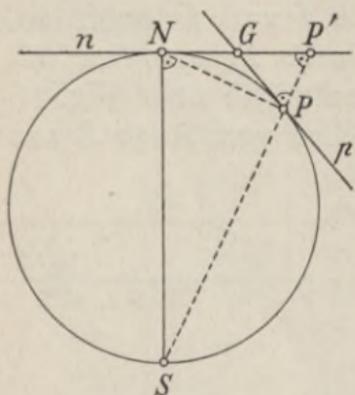


Fig. 17

1) Wir hätten diese Nummer weglassen können, aber es erschien uns nützlich, einmal an einem Beispiel zu zeigen, wie man wirklich geometrisch forscht. Heutzutage sind Schlüsse im Unendlichkleinen, wie wir sie gemacht haben, offiziell verpönt. Jedoch wir wissen, daß man auch jetzt noch im verschwiegenen Kämmerlein ebenso grübelt, aber allerdings dann so vorsichtig ist, in der Öffentlichkeit alle Spuren solch sträflichen Tuns zu verwischen.

winkligen Dreiecke  $PGT_2$  und  $P'GT_2$ , eben wegen  $GP = GP'$ . Mithin sind auch die Dreiecke  $T_1PT_2$  und  $T_1P'T_2$  kongruent, also  $\sphericalangle T_1PT_2 = \sphericalangle T_1P'T_2$ . Dies aber besagt: Die Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  schließen denselben Winkel ein wie ihre perspektiven Bilder  $t'_1$  und  $t'_2$ .

**19. Kreistreue der stereographischen Projektion.** Ist  $k$  irgendein Kreis auf dem Globus, so steht seine Ebene senkrecht auf demjenigen Halbmesser des Globus, der durch seine Mitte geht. Mithin ist die Kreisebene auch senkrecht zur Axialebene durch diese Mitte. Wird also der Globus auf die Axialebene senkrecht projiziert, so stellt sich der Kreis  $k$  als eine Sehne des Umrisses dar, s. Fig. 18. Der Rotationskegel, der den Globus längs des Kreises  $k$  berührt, hat seine Spitze  $T$  in der Axialebene. Vermöge der stereographischen Projektion, d. h. vermöge der Perspektive vom Südpol  $S$  aus auf die Tangentialebene des Nordpols  $N$ , bildet sich  $T$  als ein Punkt  $T'$  der in der Axialebene gelegenen Tangente  $n$  des Nordpols ab. Die Mantellinien des Kegels sind Tangenten des Globus, und in ihren Endpunkten auf  $k$  sind sie senkrecht zu den jeweiligen Tangenten von  $k$ . Diese Rechtwinkligkeit bleibt wegen der bewiesenen Winkeltreue bestehen, wenn man die stereographische Projektion anwendet. Dabei bilden sich aber die Mantellinien des Kegels als die von  $T'$  ausgehenden Geraden der Tangentialebene des Nordpols ab. Folglich muß sich der Kreis  $k$  als eine Linie abbilden, die in jedem Schnittpunkte mit einer dieser Geraden eine zur Geraden senkrechte Tangente hat. Aber nur die Kreise um den Mittelpunkt  $T'$  durchsetzen

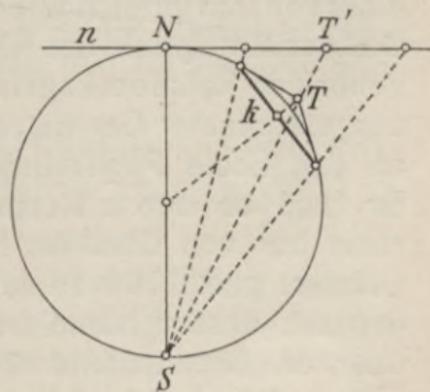


Fig. 18

alle Geraden durch  $T'$  senkrecht. Also folgt: Vermöge der stereographischen Projektion bildet sich jeder Kreis  $k$  des Globus wieder als ein Kreis  $k'$  ab; aber die Mitte  $T'$  dieses Bildkreises  $k'$  ist nicht das Bild der Mitte von  $k$ , sondern das Bild der Spitze  $T$  desjenigen Rotationskegels, der den Globus längs des Kreises  $k$  berührt.

Somit hat die stereographische Projektion die ausgezeichnete Eigenschaft der sogenannten *Kreistreue*: Jeder Kugelkreis bildet sich als Kreis ab. Insbesondere beachte man: Ist  $k$  ein Großkreis, so wird der Kegel zum Zylinder, d. h. seine Spitze rückt ins Unendlichferne. Mithin hat das Bild eines Großkreises als Mittelpunkt den Schnittpunkt der Bildtafel mit dem Lot vom Auge auf die Ebene des Großkreises.

Die stereographische Projektion ist seit alten Zeiten geübt worden, so vielleicht schon durch HIPPARCHOS (Nr. 2), sicher durch CLAUDIUS PTOLEMÄUS (Nr. 9). Aber von den ausgezeichneten Eigenschaften der stereographischen Projektion, der Winkeltreue und der Kreistreue, dürften sie vielleicht nur die zweite und auch diese nur für gewisse Kreise erkannt haben. Erst JORDANUS NEMORARIUS (wahrscheinlich derselbe wie JORDANUS SAXO, der, im Paderbornschen geboren, 1222 General des Dominikanerordens zu Paris wurde und 1237 auf der Rückkehr von einer Reise nach Jerusalem starb) hat in einer Schrift über das Planisphärium, d. h. über das Verebnen des Globus, die 1507 gedruckt worden ist, die Kreistreue allgemein erkannt.<sup>1)</sup> Die Winkeltreue wurde von dem schon genannten MERCATOR entdeckt, wie man auf einer von ihm gezeichneten Karte vom Jahr 1587 lesen kann.<sup>2)</sup> Daß der Mittelpunkt des Bildkreises das Bild der Spitze des zugehörigen Rotationskegels ist, bemerkte MICHEL CHASLES, ein ausgezeichneter Geometer, geb. 1793 zu Épernon, Professor an der École Polytechnique zu Paris, gest. ebenda 1880. Er fand es durch Rechnung.<sup>3)</sup> Der geometrische Beweis rührt her von GERMINAL PIERRE DANDELIN, einem belgischen Offizier, geb. 1794 zu le Bourget bei Paris, gest. 1847 zu Brüssel, dessen Name bekanntlich mit dem schönen Satz über die Brennpunkte ebener Schnitte von Rotationskegeln verknüpft ist.<sup>4)</sup> Der wenig besagende Name stereographische

1) Nach M. CHASLES, „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*“, 3. Aufl. Paris 1889, S. 516.

2) Nach BREUSING a. a. O. S. 29.

3) Note V im Anhang des Werkes von J. HACHETTE, „*Éléments de géométrie à trois dimensions*“, Paris 1817, S. 270–274.

4) „*Usage de la projection stéréographique en géométrie*“, Annales de Mathém. 16. Bd. 1825/6, S. 322–327.

Projektion wurde erfunden von einem Jesuitenpater FRANÇOIS D'AIGUILLON, latinisiert AGUILONIUS, geb. 1566 zu Brüssel, im Jahre 1617 gestorben.<sup>1)</sup>

**20. Stereographische Projektion der nördlichen Erdhälfte.** Wenn man den Globus vom Südpol *S* aus auf die Tangentialebene des Nordpols *N* perspektiv abbildet, erscheinen die Längengrade als die von *N* ausgehenden Strahlen. Somit ergibt sich ein *strahliger winkeltreuer Entwurf*. Die Breitenkreise bilden sich als konzentrische Kreise um *N* ab. Je näher ein Punkt des Globus an den Südpol *S* heranrückt, um so weiter entfernt sich sein Bild von *N*. Die stereographische Projektion des ganzen Globus erfüllt also die ganze Zeichenebene bis ins Unendlichferne. Um nicht zu starke Verzerrungen zu bekommen, beschränkt man sich auf die Darstellung der nördlichen Erdhälfte. Der Äquator erscheint als Kreis um *N*, dessen Halbmesser gleich dem Durchmesser des Globus ist. Dieser Kreis also soll der Rand des Bildes sein.

Bei der Herstellung der früheren flächentreuen Entwürfe haben wir stets dem Globus denselben Halbmesser gegeben, um die verschiedenen Entwürfe besser vergleichbar zu machen. Denn sie geben ja sämtlich alsdann ein einzelnes Land in derselben Flächengröße wieder. Ein winkeltreuer Entwurf dagegen zeigt keine Flächentreue. Deshalb kommt es hier auch nicht darauf an, wie groß man den Halbmesser des Globus annimmt.

Zeichnung des stereographischen Entwurfes der nördlichen Erdhälfte, s. Taf. VI, Bild L: Die Hilfsfig. *a* mit dem Axialschnitte des Globus zeigt alles Erforderliche, so daß nichts weiter gesagt zu werden braucht.

Man vergleiche diesen Entwurf mit dem flächentreuen Entwurf im Bild F auf Taf. IV, der allerdings die gesamte Erdoberfläche wiedergibt. Man beschränke sich also bei der Vergleichung auf das Innere des vom Äquator umrandeten Stückes im Bilde F. Man erkennt, daß der stereographische Entwurf die Flächen der Polarländer gegenüber den Flächen der Äquatorialländer zu klein wiedergibt.

Für einen Vorzug des stereographischen Entwurfes könnte man sein Entstehen durch Perspektive halten. Aber dagegen

1) „*Opticorum libri sex, philosophicis juxta ac mathematicis utiles*“, Antwerpen 1613, insbesondere S. 572 f.

spricht zweierlei. Erstens: Bei der Betrachtung eines perspektiven Bildes bekommt man allerdings denselben Eindruck wie von der Wirklichkeit, wenn man das eigene Auge (— ein Auge muß man schließen —) an die Stelle des Projektionszentrums bringt. Das ist hier derjenige Punkt senkrecht über der Bildmitte, dessen Abstand von der Zeichenebene gleich dem Durchmesser des Umrisses ist (nach Fig. *a* auf Taf. VI). Man blickt aber dann durch den Globus hindurch vom Südpol nach der nördlichen Erdhälfte, und das ist unnatürlich, weil die Erde nicht hohl wie ein Napf ist. Zweitens: Auch wenn man sich hiermit abfinden will, ist das gezeichnete Bild nicht das, was man sehen würde. Denn der Umlaufsinn um den Nordpol von Osten nach Westen wird umgekehrt, wenn man nicht auf den Globus blickt, sondern von Innen her sieht. Man müßte daher eigentlich die Länder so einzeichnen, wie wir es im Bilde *M* auf Taf. VI getan haben. Aber das fällt niemandem ein, und mit Recht.<sup>1)</sup> Also: Die stereographische Projektion ist zwar eine Perspektive, aber nachdem man den Entwurf mittels Perspektive gewonnen hat, kümmert man sich nicht mehr darum, daß er ein perspektives Bild ist.

**21. Ermittlung kürzester Wege.** Da jeder Kugelkreis vermöge stereographischer Projektion wieder als ein Kreis erscheint, bedient man sich dieser Projektionsart zur bequemen Lösung einer Aufgabe, die bei Benutzung anderer Entwürfe mehr Schwierigkeiten machen würde, nämlich zur Ermittlung des kürzesten Weges auf dem Globus zwischen zwei gegebenen Punkten. Bekanntlich gehört der kürzeste Weg dem Großkreise durch die beiden Stellen an. Man nennt deshalb die Großkreise die *geodätischen Linien* des Globus.<sup>2)</sup> Der Äquator ist ein Großkreis. Jeder andere Groß-

1) Will man dagegen den Sternhimmel stereographisch abbilden, so benutzt man den umgekehrten Umlaufsinn, weil man vom Innern auf die Himmelskugel blickt (s. Nr. 35).

2) Kürzeste Wege und geodätische Linien dürfen nicht verwechselt werden. Zwar gehört jeder kürzeste Weg einer geodätischen Linie an, aber nicht jedes Stück einer geodätischen Linie ist ein kürzester Weg. Denn von den beiden Teilen des Großkreises durch zwei Punkte kommt nur der kürzere in Betracht. Entsprechendes gilt auch auf andern krummen Flächen.





kreis schneidet den Äquator in Gegenpunkten. Solche Punkte erscheinen auch in unserem letzten Entwurf als Gegenpunkte des Äquators. Wenn man also mittels dieses Entwurfes die gestellte Aufgabe lösen will, kommt es darauf an, denjenigen Kreis durch zwei gegebene Punkte zu bestimmen, der den Äquatorkreis in Gegenpunkten schneidet.

Zeichnung des kürzesten Weges zwischen zwei gegebenen Stellen, s. Taf. VI, Fig. *b*: Hier ist das Gradnetz des Bildes *L* noch einmal größer gezeichnet. Als ein gegebener Punkt *I* ist Landsend in England ( $50^{\circ}$  n. Br.,  $7^{\circ}$  w. L.), als der andere gegebene Punkt *II* Trinidad ( $10^{\circ}$  n. Br.,  $63^{\circ}$  w. L.) gewählt. Zuerst zieht man durch *I* und *II* irgendeinen Kreis *k*, der den Äquatorkreis in zwei Punkten *U* und *V* schneidet. *Z* sei der Schnittpunkt der Geraden *III* und *UV*. Die Gerade durch *Z* und durch die Mitte des Entwurfes trifft den Äquatorkreis in Gegenpunkten *X* und *Y*. Bekanntlich haben drei Kreise zu je zweien gemeinsame Sekanten, die alle drei durch denselben Punkt gehen. Wendet man dies an auf den Äquatorkreis, den Hilfskreis *k* und den Kreis *g* durch *I*, *II* und *X*, so folgt, daß hier *Z* der gemeinsame Punkt der drei Sekanten ist und daher der Kreis *g* auch durch *Y* geht. Mithin stellt der Kreis *g* durch seinen Bogen von *I* bis *II* den gesuchten kürzesten Weg dar.

Verfolgt man, wie dieser Kreis *g* die einzelnen Längen- und Breitenkreise durchsetzt, so kann man den kürzesten Weg auch in irgendeinen andern Entwurf (unter sorgfältiger Einschätzung der Abschnitte auf dem Gradnetz) einzeichnen. Das wollen wir später auf der Mercatorkarte tun, s. Taf. X, Bild *R*. Handelt es sich um gegebene Stellen *I* und *II*, die auf verschiedenen Seiten des Äquators liegen, so muß man den benutzten stereographischen Entwurf über den Äquator hinaus fortsetzen. Man kann aber auch den späteren stereographischen Entwurf in Bild *N* auf Taf. VII verwenden.

Die kürzesten Wege stellen sich in der Zeichnung nicht als Geraden dar. Das ist auch auf anderen Entwürfen nicht der Fall, abgesehen von gewissen, die wir noch besprechen werden (Nr. 32), die aber im Atlanten nicht vorkommen. Aber die irrige Annahme, daß die kürzesten Wege geradlinig erscheinen, ist landläufig. Als man im Jahre 1843 über die Linienführung der geplanten Bahn von Moskau nach Petersburg stritt, soll Zar NIKOLAUS I. allen Bedenken dadurch ein Ende gemacht haben, daß er auf der Karte von Rußland mit dem Lineal die Gerade von der einen Stadt nach

der andern zog. Er hatte sich geirrt. Übrigens wurde die Bahn dann doch so, wie er es gemeint hatte, wenigstens zum überwiegenden Teil gebaut.<sup>1)</sup> Auf Sonderkarten kleiner Gebiete, die in großen Maßen entworfen werden, erscheinen die kürzesten Wege allerdings fast geradlinig.

Die *sphärischen Dreiecke* der Trigonometrie werden von Bogen von Großkreisen gebildet. Sie lassen sich also auch im stereographischen Entwurf als Kreisdreiecke zeichnen. Man muß solche Kreise nehmen, die den Äquatorkreis in Gegenpunkten treffen. Die Bilder der sphärischen Dreiecke weisen wegen der Winkeltreue auch die wahren Winkel auf (aber nicht die wahren Seiten).

**22. Stereographische Projektion auf eine Tangentialebene des Äquators.** In Nr. 18 und 19 zeigte sich: Wird die Kugel von einem ihrer Punkte  $S$  aus perspektiv abgebildet auf die Tangentialebene des Gegenpunktes  $N$ , so ist das Bild winkeltreu und kreistreu. Das gilt unabhängig davon, daß wir bisher den Punkt  $S$  als den Südpol ansahen. Also: Man nehme irgendeinen Punkt  $O$  des Globus als das Auge an. Dann benutze man als Tafel die Tangentialebene des Gegenpunktes  $T$ . Das Bild wird wiederum winkeltreu und kreistreu ausfallen.<sup>2)</sup>

Jetzt sei das Auge  $O$  ein Punkt auf dem Äquator. Der Gegenpunkt  $T$  liegt dann auch auf dem Äquator. Die Bildtafel soll also die Tangentialebene dieses Äquatorpunktes  $T$  sein. Da das stereographische Bild des ganzen Globus die ganze Tafel erfüllt, beschränken wir uns wieder auf die Darstellung einer Kugelhälfte, derjenigen um  $T$  herum, die begrenzt wird von der zur Tafel parallelen Ebene durch die Kugelmitte  $M$ . Diese Ebene schneidet die Kugel in einem Großkreise  $k$  durch den Nordpol  $N$  und Südpol  $S$ ; er stellt zwei Längenkreise dar, und sein Bild ist ein Kreis  $k'$ , dessen Halbmesser dem Durchmesser des Globus gleicht.

1) Se non è vero, è ben trovato! Wo diese häufig erzählte Geschichte herstammt, vermögen wir nicht zu sagen.

2) Wenn man die Tangentialebene durch eine zu ihr parallele Tafel ersetzt, wird der Entwurf natürlich von derselben Gestalt, nur ähnlich vergrößert oder verkleinert. Daß die Tafel eine Tangentialebene sei, ist also unwesentlich; dagegen ist es wesentlich, daß sie senkrecht sei zum Durchmesser des Augenpunktes  $O$ .

Zeichnung des stereographischen Entwurfes für ein auf dem Äquator angenommenes Auge, s. Taf. VII, Bild N: In der Hilfsfig.  $a$  sieht man einen Axialschnitt des Globus mit der Mitte  $M$  und dem auf dem Äquator angenommenen Auge  $O$ . Die Tafel steht als Tangentialebene des Gegenpunktes  $T$  auf der Ebene des Axialschnittes senkrecht längs der Tangente  $t$  von  $T$ . Man muß sie daher um  $t$  in die Axialebene herumlegen. Der zur Tafel parallele Großkreis  $k$  bildet sich ab als der Kreis  $k'$  um  $T$ , der durch die Bilder  $N'$  und  $S'$  der Pole geht. Dieser Kreis soll den Rand des Entwurfes ausmachen. Die Breitenkreise von zehn zu zehn Grad zerteilen den Großkreis  $k$  in 36 gleiche Stücke, und da dieser Kreis  $k$  zur Tafel parallel liegt, zeigt sich das auch im Bilde. Man zerlegt demnach  $k'$  in 36 gleiche Teile. Die Breitenkreise durchsetzen den Kreis  $k$  senkrecht. Wegen der Winkeltreue muß sich dies auch im Bilde zeigen. Somit sind die Bilder der Breitenkreise von zehn zu zehn Grad diejenigen Kreise durch die Teilpunkte von  $k'$ , die  $k'$  senkrecht durchsetzen. Mittels der Tangenten der Teilpunkte ergeben sich daher sofort die Mittelpunkte der Breitenkreisbilder, z. B.  $K_\beta$  für den Breitenkreis  $\beta = 40^\circ$  n. Br. mittels der Tangente des Punktes  $C'$  von  $k'$ . Übrigens kennt man von den Bildern der Breitenkreise auch die auf  $t$  gelegenen Punkte, so  $B'$  für den ebengenannten Kreis, wie es ohne weiteres zu sehen ist. Dies ist wichtig für die Breitenkreise von geringen Breiten, weil ihre Bilder zu große Halbmesser haben, als daß sie mit dem Zirkel zu zeichnen wären. So z. B. kennt man vom Bilde des Breitenkreises  $10^\circ$  n. Br. drei Punkte, nämlich  $D'$  auf  $t$ ,  $E'$  auf  $k'$  und den nicht bezeichneten entsprechenden Punkt auf  $k'$  links. Man kennt auch die Tangenten dieser drei Punkte, denn die in  $D'$  ist zu  $t$  senkrecht, die von  $E'$  und dem dritten Punkte gehen nach  $T$ . Das genügt zum Zeichnen des Kreises mit dem Kurvenlineal. Wir kommen nun zu den Längenkreisen. Wenn wir den Halbkreis  $NTS$  des Axialschnittes als den Längenkreis  $0^\circ$  nehmen, befindet sich der zur Länge  $\lambda$  gehörige Längenkreis  $l$  in einer Ebene durch  $NS$ , die mit der Ebene des Axialschnittes den Winkel  $\lambda$  bildet. Nach Nr. 19 geht die Mitte des Bildes  $l'$  des Längenkreises  $l$  hervor als der Punkt  $K_l$ , in dem das von  $O$  auf die Ebene des Längenkreises gefällte Lot die Tafel trifft. Da die Tafel um  $t$  umgelegt wird, ergibt sich das hier so: Man zieht durch  $S'$  die Gerade nach dem zu  $\lambda$  gehörigen Teilpunkte  $Q$  (hier für  $\lambda = 30^\circ = \sphericalangle OTQ$ ). Sie schneidet auf der Geraden  $TO$  den gesuchten Mittelpunkt  $K_l$  aus. Auf der Geraden  $TO$  liegt das Bild des Äquators  $a$ , weshalb wir sie auch  $a'$  nennen. Da das Bild des Längenkreises  $l$  durch  $N'$  und  $S'$  gehen muß, können wir es als Kreis zeichnen. Wenn man bedenkt, wo der Längenkreis  $l$  den Äquator schneidet, erkennt man leicht: Der Punkt  $L'$ , in dem  $l'$  die Gerade  $a'$  schneidet, geht hervor, wenn man den zu  $\sphericalangle N'TP = \lambda$  gehörigen Teilpunkt  $P$  von  $k'$  mit  $S'$  geradlinig verbindet. Das ist wieder nützlich für diejenigen Längenkreise, deren Bilder zu große Halbmesser haben, z. B. für  $\lambda = 10^\circ$ . Man kennt hier vom Bildkreise den Punkt  $F'$  auf  $a$

und weiß, daß der Kreis wegen der Längentreue in  $N'$  und  $S'$  Tangenten hat, die mit  $t$  den Winkel  $10^\circ$  bilden. Auch weiß man, daß die Tangente von  $F'$  zu  $t$  parallel ist. Mithin kann man den Kreis mit Hilfe des Kurvenlineals ausziehen.

Hier kamen Kreise mit zu großen Halbmessern vor, die man nicht mittels des Zirkels ausziehen kann. Zeichnet man

in größerem Maßstabe, so werden die drei für diese Kreise jeweils ermittelten Punkte nebst ihren Tangenten nicht genügen. Aber man kann immer leicht noch mehr Punkte und Tangenten finden. Denn wenn in Fig. 19 zwei Punkte  $A$  und  $B$  eines Kreises nebst ihren Tangenten  $a$  und  $b$  vorliegen, ist natürlich für den Schnittpunkt  $S$  der Tangenten  $SA = SB$ . Man ziehe nun die Parallele zu  $AB$  durch  $S$  und bestimme auf ihr durch den Kreis um  $S$ , der durch  $A$  und  $B$  geht, die Punkte  $X$  und  $Y$ . Der Schnittpunkt  $Z$  von  $AY$  und  $BX$  ist dann auch ein Punkt des Kreises und seine Tangente  $z$  zu  $AB$  parallel.

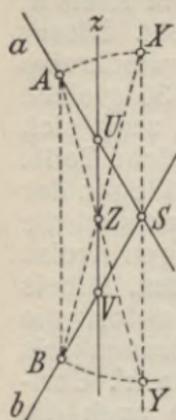


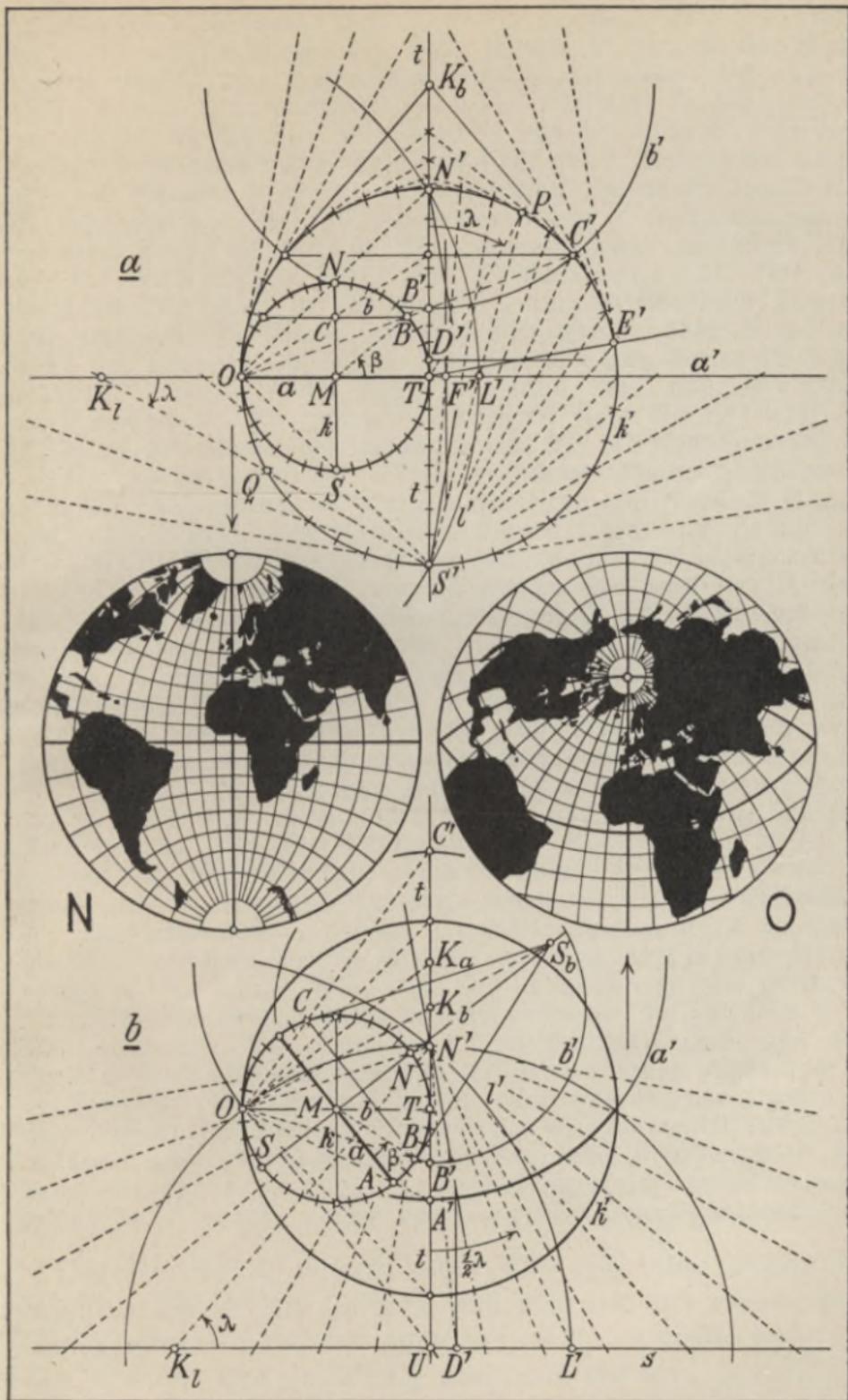
Fig. 19

Das folgt sofort daraus, daß  $UA = UZ$  und  $VB = VZ$  ist. Dies Verfahren kann man im Notfalle wiederholen, wodurch man weitere Punkte zwischen den schon bekannten nebst ihren Tangenten bekommt.

Das Bild N mit den eingezeichneten Ländern macht einen nicht ungefälligen Eindruck. Störend ist allerdings, daß die Abschnitte auf dem Äquator nach außen hin zunehmen.

**23. Stereographische Projektion auf eine beliebige Tangentialebene.** Der Vollständigkeit zuliebe bringen wir noch einen stereographischen Entwurf, bei dem das Auge  $O$  in der Südsee liegt, so daß der Gegenpunkt  $T$ , die Mitte des Bildes, Europa angehört.

Zeichnung des stereographischen Entwurfes auf die Tangentialebene des Ortes  $0^\circ$  L. und  $50^\circ$  n. Br., s. Taf. VII, Bild O: Die Hilfsfig.  $b$  zeigt wie die frühere Hilfsfig.  $a$  den Axialschnitt, dem der Längengreis  $0^\circ$  angehört. Aber jetzt ist er gegenüber der Tangente  $t$  von  $T$  soweit gedreht, daß  $T$   $50^\circ$  n. Br. hat. Wieder hat man sich die Tafel lotrecht zum Axialschnitt längs  $t$  zu denken; wieder wird sie um  $t$  umgelegt. Der das Bild der Halbkugel begrenzende Kreis  $k'$ , das Bild des zur Tafel parallel gelegenen Großkreises  $k$ , ergibt sich wieder als der Kreis um  $T$ , dessen Halbmesser dem Durchmesser des Globus gleicht. Wie man die Bilder der Breitenkreise von zehn



Winkeltreue stereographische Entwürfe

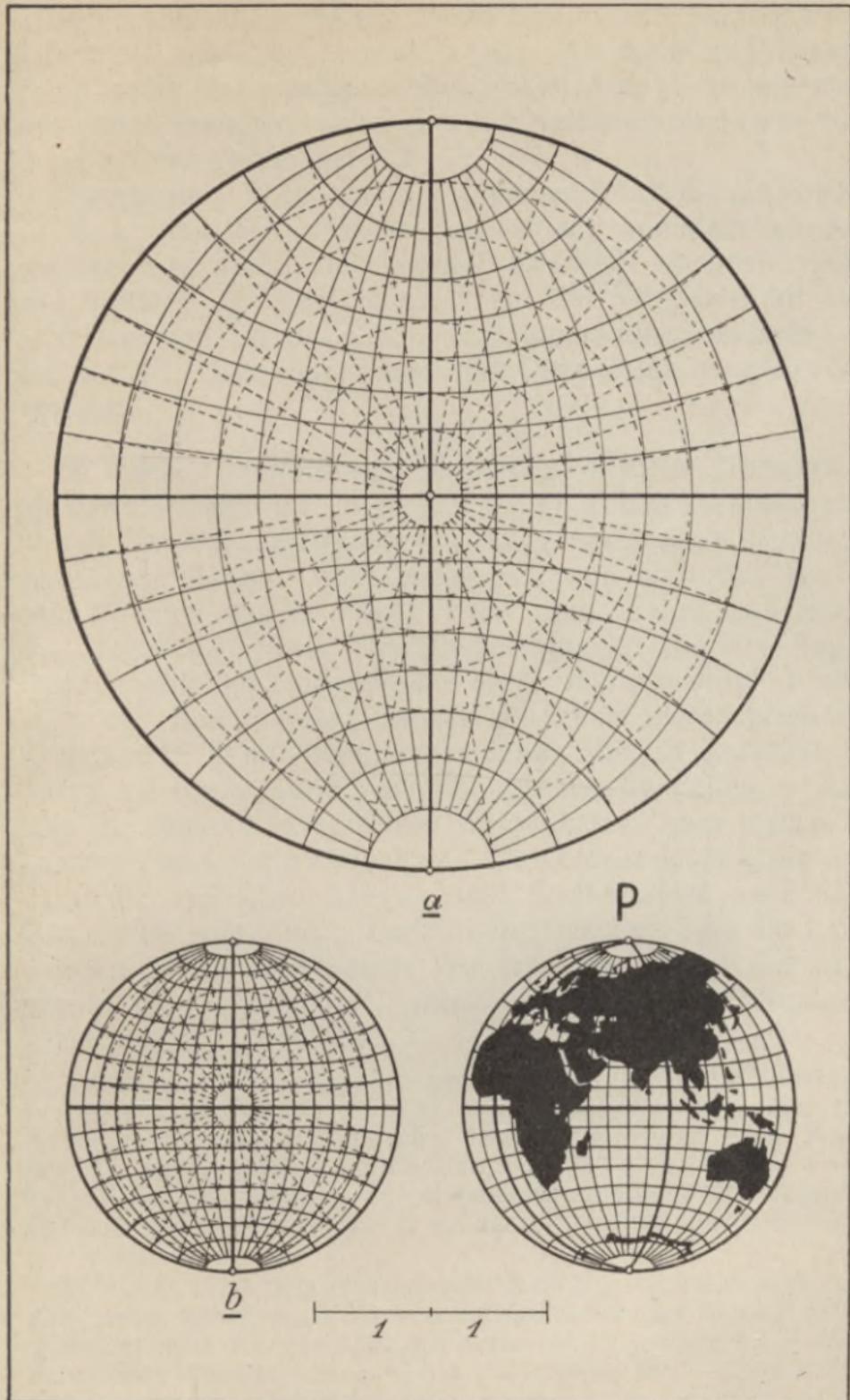


zu zehn Grad bekommt, kann man beim Breitenkreis  $b$  verfolgen, der zu  $\beta = 20^\circ$  n. Br. gehört. Zwei Punkte  $B'$  und  $C'$  des Bildkreises ergeben sich sofort (man braucht nur einen; der andere ist für andere Breiten zu weit entlegen). Die Mitte  $K_b$  des Kreises ist nach Nr. 19 das Bild der Spitze  $S_b$  des den Globus längs des Kreises  $b$  berührenden Kegels und liegt auf  $t$ . Insbesondere gehört der Äquator  $a$  zu den Breitenkreisen. Da er ein Großkreis ist, bekommt man die Mitte  $K_a$  seines Bildes  $a'$  durch das von  $O$  auf seine Ebene gefällte Lot. Wir kommen zu den Längenkreisen. Der von der Länge  $0^\circ$  bildet sich als die Gerade  $t$  ab. Der von der Länge  $90^\circ$  liegt in der längs  $NS$  lotrecht stehenden Ebene, und sein höchster Punkt befindet sich gerade über  $M$  in der Höhe des Globushalbmessers, demnach das Bild dieses Punktes senkrecht über  $T$  in der doppelten Höhe. Weil aber die Tafel um  $t$  umgelegt wird, gelangt es nach  $O$ . Nach Nr. 19 ist ferner die Mitte des Bildes des Längenkreises  $90^\circ$  auf dem Lote von  $O$  auf  $NS$  gelegen, also der mit  $U$  bezeichnete Punkt. Somit stellt sich der Längenkreis  $90^\circ$  dar als der Kreis um  $U$  durch  $O$  und durch das Bild  $N'$  des Nordpols. Daraus folgt, was wichtig ist, daß  $UO = UN'$  ist. Wir betrachten jetzt nämlich die Längenkreise von zehn zu zehn Grad, und da wissen wir nach Nr. 19, daß die Mitten ihrer Bilder auf den Loten von  $O$  auf die Ebenen der Kreise liegen. Alle diese Lote, die je zehn Grad miteinander bilden, befinden sich in der längs  $OU$  lotrecht stehenden Ebene und schneiden daher die Tafel in dem in  $U$  errichtet gedachten Lote. Nun aber wird die Tafel um  $t$  umgelegt. Dann aber wird aus dem ebenerwähnten Lote die zu  $t$  senkrechte Gerade  $s$  durch  $U$ . Da  $UO = UN'$  ist, wird man also von  $N'$  aus die Strahlen ziehen, die je zehn Grad miteinander bilden, und mit  $s$  zum Schnitte bringen. Das gibt die Mittelpunkte der Bildkreise  $l'$ , so  $K_l$  für  $\lambda = 50^\circ$ . Da die Kreise alle durch  $N'$  gehen, kann man sie zeichnen. Bemerkte sei noch: Man sieht leicht ein, daß der Bildkreis  $l'$  des Längenkreises  $l$ , der zu  $\lambda$  gehört, die Gerade  $s$  an einer Stelle  $L'$  schneidet, für die  $\sphericalangle UN'L = \frac{1}{2}\lambda$  ist, weil ja beim Mittelpunkte  $K_l$  der  $\sphericalangle UK_lN' = \lambda$  ist. Die Längenkreise von geringen Längen bekommen im Bilde zu weit entlegene Mittelpunkte, z. B. der Längenkreis  $10^\circ$ . Deshalb ist zu beachten, daß man den Punkt  $D'$  dieses Kreises mittels  $\sphericalangle UN'D' = 5^\circ$  erhält. Außerdem ist die Tangente des Punktes  $D'$  zu  $t$  parallel, während der Kreis in  $N'$  eine Tangente hat, die mit  $N'U$  wegen der Winkeltreue  $10^\circ$  bildet. Somit kennt man zwei Punkte des Bildkreises nebst ihren Tangenten und kann also den Kreis nach den Erörterungen der letzten Nummer mittels des Kurvenlineals mit beliebig großer Genauigkeit zeichnen.

Der Entwurf  $O$  unterscheidet sich von allen früher gebrachten Entwürfen dadurch, daß eine von uns ausgewählte Stelle seine von Verzerrungen freie Mitte ist. Selbstverständlich braucht der geradlinig gezogene mittlere Längenkreis nicht der von  $0^\circ$  zu sein.

**24. Die stereographische Projektion als Hilfsmittel.** In der reinen Geometrie ist die stereographische Projektion wegen ihrer Winkel- und Kreistreue wichtig. Dagegen werden stereographische Gradnetze in den Atlanten heutzutage kaum noch gebraucht. Dennoch hat die stereographische Projektion immer noch einen Wert für die Kartographie, wenn man, wie wir es tun, die Gradnetze nicht durch Rechnung, sondern durch Zeichnung gewinnen will. Sie gestattet uns nämlich, früher gebrachte Entwürfe zu verallgemeinern (was in der nächsten Nummer geschehen soll). Es beruht darauf, daß man mittels ihrer leicht von der Bestimmung eines Kugelpunktes durch seine Länge  $\lambda$  und Breite  $\beta$  zur Bestimmung durch seine auf einen beliebigen Ausgangspunkt bezogenen Koordinaten übergehen kann. Ersetzt man nämlich den Nordpol  $N$  durch einen andern Punkt  $T$ , so tritt an die Stelle des Äquators der Großkreis  $k$  in der zum Durchmesser von  $T$  senkrechten Ebene durch die Mitte. An die Stelle der Längengrade treten die Kreise in den Ebenen durch den Durchmesser von  $T$ , und an die Stelle der Breitenkreise die Kreise in den zu diesem Durchmesser senkrechten Ebenen. Wenn  $T$  unser Standpunkt auf der Erde ist, heißen die neuen Bestimmungsstücke der Punkte *Rektaszension* und *Deklination* statt Länge und Breite. Wenn der neue Ausgangspunkt  $T$  eine vorgeschriebene Länge und Breite hat, löst man bekanntlich mittels der sphärischen Trigonometrie die Aufgabe, für einen Punkt mit irgendwie gegebener Länge und Breite die Rektaszension und Deklination zu bestimmen oder umgekehrt aus diesen Winkeln die Länge und Breite. Aber wir brauchen auf die Formeln nicht einzugehen, weil wir es zeichnerisch machen wollen.

Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall: Der neue Ausgangspunkt  $T$  sei auf dem Äquator gewählt. Dann entwerfen wir das Gradnetz in stereographischer Projektion einerseits auf die Tangentialebene des Nordpols, siehe Bild L auf Taf. VI, und andererseits auf eine Tangentialebene des Äquators, s. Bild N auf Taf. VII. Beide Gradnetze zeichnen wir aber jetzt übereinander in denselben Umkreis hinein, s. Fig. a auf Taf. VIII, wo das erste Netz gestrichelt ist. Wenn man die Linien der Netze noch mit den Angaben der Längen- und Breitenwinkel versieht (was wir einer anderen



Flächentreuer Entwurf nach Lambert



späteren Anwendung halber unterlassen haben), vermag man daraus für einen durch seine Länge und Breite gegebenen Punkt seine Rektaszension und Deklination abzulesen und zwar noch genauer, wenn man die Netzlinien nicht nur für je zehn Grad gezeichnet hat.

Allgemeiner: Wird als Ausgangspunkt  $T$  z. B. die Stelle  $10^{\circ}$  ö. L. und  $50^{\circ}$  n. Br. in Deutschland angenommen, so zeichnet man wieder das Gradnetz des Bildes  $L$  (gestrichelt) und darüber das des Bildes  $O$  auf Taf. VII (aber mit um zehn Grad geänderter Zählung der Längengrade), siehe Fig.  $a$  auf Taf. IX. Dann kann man das Doppelnetz ebenso verwenden.

**25. Neue flächentreue Entwürfe mittels stereographischer Projektion.** In dem in Nr. 11 gefundenen flächentreuen Entwurf erscheinen die Längengrade als Strahlen vom Nordpol aus. Man denke sich nun statt des Nordpols  $N$  einen andern Punkt  $T$  auf dem Globus und fasse das zugehörige Netz von Bestimmungskreisen ins Auge, nämlich statt der Längengrade die Großkreise durch  $T$  und statt der Breitenkreise die sie senkrecht durchsetzenden Kugelkreise. Dann könnte man jene früheren Entwürfe in bezug auf diese neuen Bestimmungslinien herstellen, so daß man zu neuen flächentreuen Karten käme. Aber man muß imstande sein, darin diejenigen Linien einzuzeichnen, die alsdann die wirklichen Längengrade und Breitenkreise darstellen. Das ließe sich durch Berechnung machen, die Formeln werden jedoch umständlich. Wir erreichen es, wie das auch schon LAMBERT getan hat, mittels der in der letzten Nummer gezeichneten Doppelnetze.<sup>1)</sup>

Zeichnung der allgemeineren Lambertschen flächentreuen Entwürfe, s. Taf. VIII, Bild P, und Taf. IX, Bild Q: Ersetzen wir zunächst den Nordpol durch einen Punkt des Äquators, nämlich durch den von  $70^{\circ}$  ö. L. In Fig.  $b$  von Taf. VIII ist das Gradnetz des einfachsten strahligen flächentreuen Entwurfes, Bild F von Taf. IV, wiederholt worden (gestrichelt und

1) A. a. O. 177/8 (Klassikerausgabe S. 55/56). LAMBERT vermeidet das etwas verwirrende Übereinanderzeichnen der beiden Netze, indem er statt des gestrichelten Netzes einen um die Mitte drehbaren Stab benutzt, auf dem die Halbmesser der konzentrischen Kreise vermerkt sind.

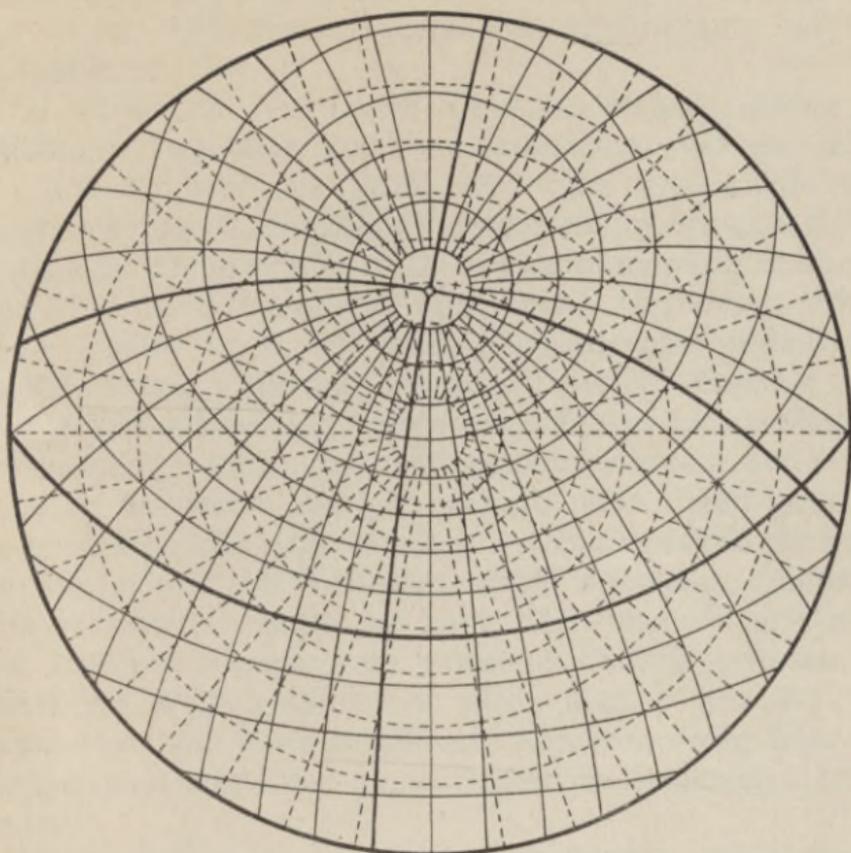
nur bis zum Äquator). Der Übergang zum neuen Standpunkt wird nun mittels des Doppelnetzes in Fig. *a* von Taf. VIII gemacht, das eben deshalb besonders groß gezeichnet worden ist. Wir verfolgen in Fig. *a* die ausgezogenen Linien, wie sie die gestrichelten durchsetzen, und ahmen dies in Fig. *b* möglichst genau nach. Das ist zwar eine etwas mühevollere Arbeit, die große Aufmerksamkeit und ein gutes Abschätzen erfordert, aber daß es geht, zeigt unser Ergebnis, das wir tatsächlich so gefunden haben. Werden die Länder eingezeichnet, so entsteht das neue Bild P. Ein zweites Beispiel findet man auf Taf. IX. Hier denken wir uns den Nordpol ersetzt durch den Punkt in Deutschland mit  $10^{\circ}$  ö. L. und  $50^{\circ}$  n. Br. Hier benutzen wir nämlich das große Doppelnetz *a* der Taf. IX und verfahren in Fig. *b* gerade so wie vorher. Das neue flächentreue Bild ist Q.

Der flächentreue Entwurf Q eignet sich besonders für Europa. Freilich ist dieser Erdteil hier so klein gezeichnet, daß er nicht recht zur Geltung kommt.

**26. Anforderungen an eine Seekarte.** Gemeiniglich sucht man ein Ziel auf dem kürzesten Wege zu erreichen. Nicht so der Seefahrer; er wird von seinem Kompaß beraten und schlägt daher Wege beständiger Himmelsrichtung oder konstanten Kurses ein. Diese Linien nennt man *Loxodromen* (eigentlich schief laufende Linien zum Unterschiede von den Großkreisen, die man geradlaufend oder Orthodromen nennt).

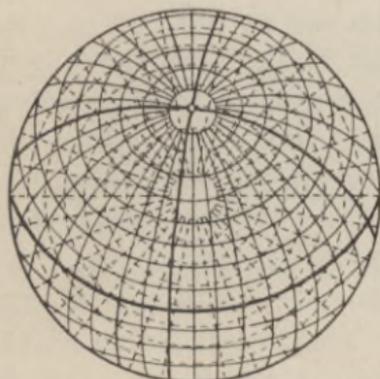
Jeder kürzeste Weg auf dem Globus gehört einem Großkreis an, und längs eines Großkreises ändert sich die Himmelsrichtung oder der Kurs beständig, nur nicht auf den Längengraden und auf dem Äquator. Irgendeine Loxodrome durchschneidet die Längengrade unter konstantem Winkel und wird daher, wenn sie sich einem der Pole nähert, diesen Pol in immer enger werdenden Windungen, also spiralig umlaufen, ohne ihn je zu erreichen.<sup>1)</sup> Man kann sich dies gut klarmachen, wenn man den stereographischen Entwurf L auf Taf. VI benutzt. Er ist ja winkeltreu, und die Längengrade erscheinen als Strahlen. Deshalb stellen sich hier die Loxodromen als Linien dar, die diese Strahlen unter konstanten Winkeln durchsetzen, und

1) Wohlverstanden: Trotz der unendlich vielen Windungen ist die gesamte Länge der Loxodrome eine endliche Größe! Übrigens kommen diese engen Windungen für den Seefahrer nicht in Betracht. Denn selbst wenn es am Nordpol jene offene See gäbe, von der man soviel gefabelt hat, würde dort der leitende Kompaß unzuverlässig sein.

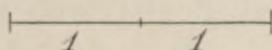


a

Q



b



Flächentreuer Entwurf nach Lambert



das sind *logarithmische Spiralen*, deren Wesen wohl einigermaßen jedem bekannt ist. Von einfacherer Art sind nur die Loxodromen mit dem Kurs nach Nord oder Süd bzw. Ost oder West. Das sind nämlich die Längenkreise und die Breitenkreise.

Die kürzesten Wege und die Loxodromen werden gelegentlich verwechselt. Von den Loxodromen sind aber außer dem Äquator bloß die nach Nord oder Süd Großkreise. Einen Beleg für die beliebte Verwechslung bringt z. B. der auch gegenwärtig immer noch lesbare humoristische Roman „*Siegfried von Lindenberg*“ von JOHANN GOTTWERTH MÜLLER (1743–1828), worin der Held, ein biederer norddeutscher Landedelmann, nach der Überschrift des 43. Kapitels „eine unumstößliche Wahrheit“ findet. Der Junker tut nämlich den Ausspruch: „Man kommt nicht geschwinder und weiter auseinander, als wenn der eine gerade nach Osten geht und der andere gerade nach Westen.“<sup>1)</sup> Das ungewollt Komische liegt darin, daß der Verfasser selbst an diese „unumstößliche Wahrheit“ glaubt. Ja, hätte der Junker vom Norden und Süden gesprochen, so wäre das richtig gewesen, für Osten und Westen stimmt es nicht. Man kommt z. B. von Hammerfest zur Beringstraße auf kürzerem Weg über den Nordpol statt längs des gemeinsamen Breitenkreises beider Stellen.

Der Seefahrer braucht nun eine Karte, auf der seine Wege, die Loxodromen, am einfachsten, also geradlinig erscheinen, so daß er sie mit dem Lineal einzuzeichnen vermag. Er will aber auch den zugehörigen Kurs unmittelbar ablesen, d. h. er wünscht, daß diese Geraden auch die richtigen Winkel der Kurse zeigen. Somit bedarf der Seefahrer eines *winkeltreuen Entwurfes mit geradlinig erscheinenden Loxodromen*. Nun ist es Tatsache, daß es einen, aber auch nur einen einzigen derartigen Entwurf gibt. Ihn entdeckt zu haben, ist das Verdienst von GERHARD MERCATOR. Wenn ein anderer Planet von genügend vernunftbegabten Wesen bewohnt wird und wenn diese wie wir mit Hilfe des Kompasses fahren, werden auch sie das Mercatorsche Gradnetz benutzen. Man nennt diesen Entwurf schlechtweg die Seekarte.

1) In der ungekürzten Ausgabe bei Reclam, Leipzig, auf S. 311 f., insbesondere S. 320.

**27. Gerhard Mercator.** Ungefähr zur selben Zeit wie dieser lebte ein Mathematiker mit demselben Familiennamen, den man also nicht mit ihm verwechseln darf. Die Eltern des Kartographen führten den Namen KREMER und waren ansässig im Herzogtum Jülich, wohl zu Gangelt. Es ging ihnen schlecht, und deshalb zogen sie nach Rupelmonde an der Schelde (in Flandern) zum Bruder des Mannes, der dort als Geistlicher wirkte. Kurz nach der Ankunft, im Jahre 1512, wurde der Sohn GERHARD geboren. Wie lange die Eltern in Rupelmonde geblieben sind, steht nicht fest. Man weiß aber, daß der Oheim nach des Vaters Tode (1525 oder 1526) die Erziehung seines Neffen übernahm. Dieser besuchte dann die in besonderer Blüte stehende Universität Löwen, wo er die Magisterwürde erwarb. Von da an nannte er sich der Sitte der Zeit gemäß latinisiert MERCATOR. Auf seine Laufbahn hat der in Löwen wirkende Kartograph RAINER GEMMA FRISIUS (1508—1555) besonderen Einfluß gehabt. Außer Karten verfertigte MERCATOR Werkzeuge für die mathematische Geographie und Sternkunde; auch erlernte er das Kupferstechen. Sogar Kaiser KARL V. erwarb von ihm astronomische Apparate, und dem Kardinal GRANVELLA hat MERCATOR seinen ersten Globus gewidmet. Im Jahre 1536 gründete er einen eigenen Hausstand zu Löwen. Sein ruhiges Gelehrtenleben wurde im Jahre 1544 jäh unterbrochen: die Inquisition warf ihn ins Gefängnis des Schlosses seines Geburtsortes. Während mehrere seiner Leidensgenossen zum Tode verurteilt wurden, fand er nach fünf Monaten strenger Haft seine Freiheit wieder, wohl wegen seiner hohen Gönner. Nachdem er dann weiter im stillen zu Löwen gelebt hatte, wanderte er schließlich doch im Jahre 1552, wie mancher andere, aus dem religiös gefesselten Land aus. Er kehrte in die deutsche Heimat seiner Eltern, ins jülichsche Land zurück und ließ sich in Duisburg nieder, wo er, abgesehen von einigen Reisen, bis an sein Lebensende 1594 verblieb.

Die Belgier haben versucht, ihn zu einem echten Vlamen zu machen, indem sie die Vermutung aufstellten, daß seine Eltern selbst Vlamen gewesen seien. Aber das hat sich nicht beweisen lassen. Somit sind wir im vollen Recht, wenn wir MERCATOR, trotz seiner Geburt in Flandern, als unsern Landsmann ansehen und verehren. MERCATOR hat selbst im Jahr 1585

auf eine seiner Landkarten den Vermerk gesetzt: „In terra Juliacensi et parentibus Juliacensibus conceptus primisque annis educatus, licet in Flandria natus sum.“ Hervorzuheben ist auch, daß erst die zweite Periode seines Lebens, die des Aufenthaltes zu Duisburg, die Zeit seiner wahrhaft bedeutenden Leistungen gewesen ist. Ihm sind dort und in Rupelmonde Denkmäler gesetzt worden. Bei der Enthüllung des Denkmals zu Rupelmonde hat ein belgischer Minister die Wendung gebraucht: „Möge es nun dahingestellt sein, ob MERCATOR ein Niederländer oder ein Deutscher gewesen; er ist mehr als das: er ist ein Mann, der der ganzen Welt angehört.“<sup>1)</sup>

MERCATOR war einer der fleißigsten Kartographen. Seine Entwürfe zeichnen sich aus durch ihre sorgfältig überlegte mathematische Grundlage, — er pflegte auf den Karten ihre besondere Art anzugeben —, und durch ihre vorzügliche Ausführung. Von der Geschichte seiner Seekarte sprechen wir später noch. Wie ein Brief zeigt, hat er schon im Jahre 1546 den magnetischen Nordpol festgestellt, dessen Lage er ungefähr richtig ermittelte. Daß er darauf Gewicht gelegt hat, sieht man auf seinem im Kupferstich erhaltenen Bildnis: Er steht da neben einem großen Globus und setzt eine Zirkelspitze auf die mit „Polus magneticus“ bezeichnete Stelle. Überhaupt war er ein vielseitiger Gelehrter. Dem Brauche der Zeit gemäß nannte er sich einen Kosmographen, was mehr bedeutete als einen Kartographen oder Geographen. Daß der Name „Atlas“ für Landkartensammlungen von ihm herrührt, haben wir schon in Nr. 1 erwähnt.

**28. Die Mercatorsche Grundformel.** Das mathematische Wissen war im sechzehnten Jahrhundert dürftig; MERCATOR wußte gewiß nicht so viel wie die Abiturienten unserer höheren Schulen. Sollte man da nicht versuchen, die Leistung

1) Von den vielen Schriften über MERCATOR erwähnen wir die der beiden Hauptgegner im deutschen und belgischen Lager: A. BREUSING, „*Gerhard Kremer gen. Mercator, der deutsche Geograph*“, Duisburg 1869 (2. Aufl. 1878), und J. VAN RAEMDONCK, „*Gérard Mercator. Sa vie et ses oeuvres*“, St. Nicolas 1869. Beide schießen im Eifer über das Ziel hinaus. Man lese daher noch die Schrift von PAUL DINSE, „*Zum Gedächtnis Gerhard Mercators*“, Verhandlungen d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin 1894 Nr. 10, die ruhig zwischen den Meinungen abwägt.

MERCATORS nachzuerfinden, ohne höhere mathematische Kenntnisse heranzuziehen?

Da ein winkeltreuer Entwurf mit geradlinigen Loxodromen gesucht wird und die Längen- und Breitenkreise zu den Loxodromen gehören, muß das Gradnetz geradlinig und rechtwinklig sein wie unser erster Entwurf, der Archimedische im Bild A, Tafel I. Den Globus dürfen wir so groß annehmen, daß der Äquator in wahrer Länge  $2\pi$  abgebildet wird (wenn wie stets der Halbmesser des Globus die Längeneinheit bedeutet). Nun betrachten wir den Gürtel zwischen dem Äquator  $a$  und einem Breitenkreise  $b$ , s. Fig. 20. Von einem Punkte des Äquators lassen wir eine Loxodrome ausgehen bis zum Schnitte mit  $b$ , und durch diesen Schnittpunkt ziehen wir den Längen-

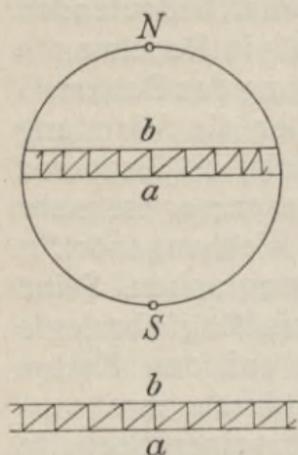


Fig. 20

kreis. Dann entsteht ein krummes Dreieck. Längs des Äquators setzen wir lauter kongruente Dreiecke daran. Weil ihre Seiten Loxodromen sind und die Abbildung winkeltreu ist, leuchtet ein, daß die Bilder der Dreiecke lauter kongruente geradlinige rechtwinklige Dreiecke sein müssen. Insbesondere haben also die längs des geradlinig gezeichneten Äquators gelegenen Katheten sämtlich dieselbe Länge, d. h. gleichlange Bogen des Äquators bilden sich als gleichlange Strecken ab, anders gesagt: Der Äquator wird auch in allen seinen Teilen längentreu abgebildet. Man bekommt demnach die Bilder der Längskreise geadeso wie im Archimedischen Entwurfe, indem man den Äquator in gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte die zu ihm lotrechten Geraden zieht. Von jetzt an aber wird es anders als beim Archimedischen Entwurfe. Wir haben die Frage zu beantworten: In welchem Abstände  $h$  vom Äquatorbilde, sagen wir kurz in welcher Höhe  $h$  muß das Bild des Breitenkreises  $\beta$  als Parallele zum Äquatorbilde gezeichnet werden?

Wir betrachten ein Paar von benachbarten Längskreisen und ein Paar von benachbarten Breitenkreisen, die zusammen ein krummes Viereck einschließen, das als Rechteck bezeichnet werden darf, da sich die Kreise senkrecht durch-

schneiden. Fig. 21 links zeigt das Rechteck in der senkrechten Projektion auf eine Axialebene. Der Bogen  $A'B'$  auf dem Äquator hat in Wahrheit die Länge des Bogens  $AB$  auf dem Umrisse. Die auf den Längengraden liegenden Seiten des krummen Rechtecks haben in Wahrheit die Länge des Bogens  $CD$  auf dem Umrisse. Der Längengrad durch  $A'$  gehöre zur Länge  $\lambda$ , der Breitenkreis durch  $C$  zur Breite  $\beta$ . Länge und Breite messen wir im Bogenmaß (Nr. 2), also als die Bogen, da wir den Halbmesser des Globus gleich 1 setzen. Dann ist der Bogen  $AB$  der Zuwachs der Länge  $\lambda$  und der Bogen  $CD$  der Zuwachs der Breite  $\beta$  beim Übergange zu den benachbarten Kreisen. Diese Zunahmen sind die Dif-

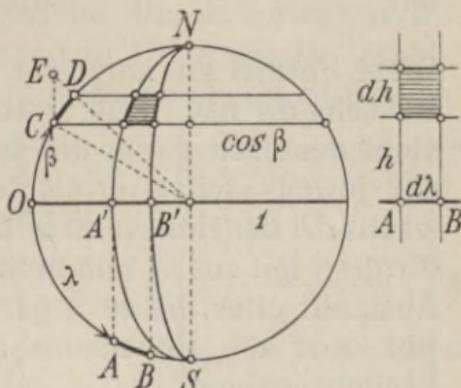


Fig. 21

ferenzen zwischen der größeren und kleineren Länge bzw. Breite und seien deshalb mit  $d\lambda$  und  $d\beta$  bezeichnet (gelesen: Zunahme von  $\lambda$  bzw.  $\beta$ ). Wir haben dann  $d\lambda$  gleich dem Bogen  $AB$  und  $d\beta$  gleich dem Bogen  $CD$ . Die auf dem Breitenkreis  $\beta$  gelegene Seite des krummen Rechtecks verhält sich zum Bogen des Äquators zwischen denselben Längengraden wie der Halbmesser  $\cos \beta$  des Breitenkreises zum Halbmesser 1 des Äquators, d. h. sie ist gleich  $d\lambda \cdot \cos \beta$ . Die aneinanderstoßenden Seiten des krummen Rechtecks sind also gleich  $d\lambda \cdot \cos \beta$  und  $d\beta$ . Wie steht es nun mit dem Bilde dieses Vierecks? Weil das Gradnetz geradlinig und rechtwinklig und der Äquator längentreu abgebildet wird, geht als Bild ein geradliniges Rechteck hervor, dessen Grundlinie gleich dem Stück  $d\lambda$  des längentreu gezeichneten Äquators ist (rechts in Fig. 21). Da  $h$  die Höhe derjenigen waagerechten Geraden sein soll, die den Breitenkreis  $\beta$  darstellt, werden wir die Höhenzunahme im Bilde als Differenz mit  $dh$  bezeichnen. Das Bildrechteck hat also die Seiten  $d\lambda$  und  $dh$ .

Nun lassen wir die Zunahmen  $d\lambda$  und  $d\beta$  von Länge und Breite nach Null streben. Dann strebt das krumme Rechteck auf dem Globus nach der Gestalt eines geradlinigen ebenen Rechtecks. Da die Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich

sein soll (Nr. 16), ist daher zu fordern, daß sich dann die Seiten des einen Rechtecks wie die des andern verhalten:

$$d\lambda \cos \beta : d\beta = d\lambda : dh.$$

Hier läßt sich  $d\lambda$  beiderseits wegheben, und es ergibt sich:

$$(M) \quad dh = \frac{d\beta}{\cos \beta}.$$

Diese Formel gilt unter der Voraussetzung, daß der Breitenzuwachs  $d\beta$  nach Null strebe. Das Gesetz der Seekarte besteht demnach darin, daß bei unendlich kleiner Zunahme  $d\beta$  der jeweils schon erreichten Breite  $\beta$  der zugehörige Zuwachs  $dh$  der Höhe  $h$  im Bilde gleich dem Breitenzuwachs  $d\beta$ , dividiert mit  $\cos \beta$ , sein muß. Die Formel (M) gibt daher nicht Auskunft über die zu  $\beta$  gehörige Höhe  $h$  im Bilde, sondern nur über die Höhenzunahme bei einer unendlich kleinen Breitenzunahme.

Obwohl die Formel (M) bei MERCATOR nicht ausdrücklich vorkommt, hat er sie doch in Worten umschrieben (s. Nr. 30). Deshalb ist es erlaubt, sie als die *Mercatorsche Grundformel* zu bezeichnen. Wenn das durch (M) ausgedrückte Gesetz von der Karte erfüllt wird, ist sie winkeltreu. Die Loxodromen müssen sich also dann als Linien abbilden, die die geradlinig und parallel gezeichneten Längenkreise unter konstanten Winkeln durchschneiden. Das tun aber nur die geraden Linien. Mithin werden sich die Loxodromen geradlinig darstellen. Das aber wollten wir erreichen.

**29. Angenäherter Mercatorentwurf.** In Fig. 21 der letzten Nummer ist der verlängerte Halbmesser von  $D$  mit der Parallelen zur Achse durch  $C$  in  $E$  zum Schnitte gebracht worden. Wenn der Bogen  $CD$  oder  $d\beta$  unendlich klein wird, darf er als ein Stück der Tangente von  $C$  aufgefaßt werden. Diese bildet mit  $CE$  den Breitenwinkel  $\beta$ . In dem rechtwinkligen Dreieck  $CDE$  wird demnach dann  $CD : CE = \cos \beta$ , also  $CE = CD : \cos \beta$  oder  $d\beta : \cos \beta$ , also  $CE = dh$  nach der Grundformel (M). Angenähert wird das auch noch zutreffen, wenn man den Bogen  $d\beta$  nur verhältnismäßig klein wählt. Dadurch kommen wir zu einer Annäherung an den richtigen Entwurf, indem wir uns damit begnügen, statt eines unendlich kleinen Zuwachses der Breite einen Zuwachs von

$10^0$  zu nehmen. Das ist allerdings ein schon recht beträchtlicher Wert; man darf daher nicht erwarten, daß der Entwurf, den wir jetzt herstellen wollen, allzu gut dem wahren Entwurfe nahe komme. Aber er wird uns immerhin einen Begriff vom richtigen Entwurfe geben.

In Fig. 22 ist links ein Viertel des Axialschnittes des Globus gezeichnet und in neun gleiche Stücke zerlegt. Wir lassen nun die Breite von Null an um je  $10^0$  wachsen. Dabei ergeben sich die jeweiligen Höhenzunahmen als die Strecken 1, 2, 3... Das letzte

Stück 9 wird unendlich lang. Aus den Höhenzunahmen werden nun die Höhen selbst, wenn wir sie rechts übereinander setzen. Hier haben wir also dann die waagerechten Geraden durch die Teilpunkte zu ziehen, um

die Bilder der Breitenkreise  $0^0$ ,  $10^0$ ,  $20^0$  usw. zu bekommen. Um Raum zu sparen, haben wir vom Äquator nur die Hälfte  $\pi$  als Strecke gezeichnet und ebenso nur die Hälften der Breitenkreise. Die Äquatorhälfte wird in 18 gleiche Stücke zerlegt, und durch die Teilpunkte werden die lotrechten Geraden als die Bilder der Längengrade von zehn zu zehn Grad gezogen. Man muß sich also rechts noch einmal die Hälfte der Figur angesetzt denken und außerdem für den südlichen Teil alles noch einmal im Spiegelbild unterhalb des Äquators ausgeführt vorstellen. Da die Strecke 9 unendlich lang wird, erstreckt sich der Entwurf nach oben und unten hin bis ins Unendliche. Das wird auch beim richtigen Mercatorentwurf der Fall sein, wie überhaupt diese Skizze im Großen und Ganzen einen Begriff von der Seekarte gibt. Besser würde die Annäherung, wenn wir den Viertelkreis in mehr als nur neun Teile zerlegten, aber dann würden sich die unvermeidlichen kleinen Zeichenfehler häufen. Erst in Nr. 31 gehen wir an die Herstellung des richtigen Entwurfes heran.

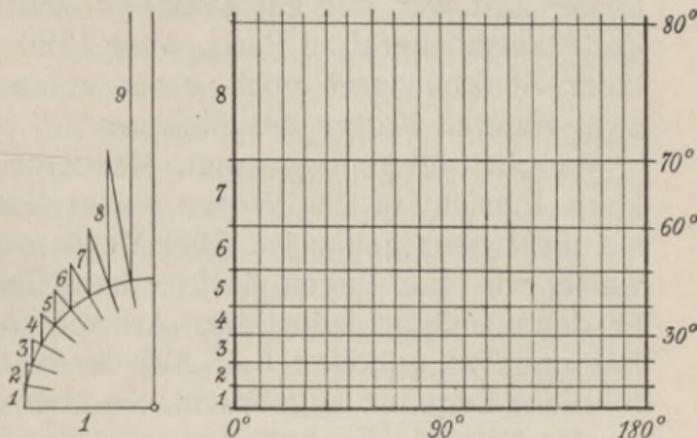


Fig. 22

**30. Die überlieferte Seekarte Mercators.** Zu MERCATORS Zeiten war es sozusagen Mode, sich mit Kartenzeichnen abzugeben, erklärlich durch die gewaltige Zunahme des bekannten Bereiches im Zeitalter der Entdeckungen. Im Gegensatz zu andern vermied MERCATOR das Abzeichnen fremder Karten. Jede einzelne unter seinen Karten ist das Ergebnis eigener wissenschaftlicher Arbeit. Mit ihm ist überhaupt ein neuer Geist in die Kartographie eingezogen, die kritische Schärfe. Das Jahr 1569 ist das der Seekarte. Bis vor nicht langer Zeit war nur ein Exemplar von ihr bekannt, das in der Staatsbücherei zu Paris. Aber 1889 wurde in der Breslauer Stadtbücherei noch eines entdeckt, zusammen mit zwei anderen Karten des Meisters.<sup>1)</sup>

Man hat öfters behauptet, MERCATOR habe selbst keine klare Einsicht in das Wesen seiner Seekarte gehabt, weil sie nicht ganz genau ist. Aber MERCATOR war — glücklicherweise, wie man sagen darf, — kein Geheimniskrämer, wie er denn auch in selbstloser Art seinen Nebenbuhlern mit Rat und Tat geholfen hat. Auf der Karte hat er eine ausführliche Legende angebracht, die über das Wesen des Entwurfes belehrt. Wir begnügen uns damit, daraus einen Satz hervorzuheben: „Gradus latitudinum versus utrumque polum paulatim auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem“. Hierbei muß man wissen, daß der Äquator damals als der Äquinoktialkreis bezeichnet wurde, weil am Äquator die Tage immer gerade so lang sind wie die Nächte. MERCATOR sagt demnach: „Wir haben allmählich die Grade der Breiten nach jedem der Pole hin für die Zunahmen der Parallelen vergrößert entsprechend dem Verhältnis, in dem diese zum Äquator stehen.“ Dies Verhältnis der Parallelen, d. h. der Breitenkreise, zum Äquator ist das ihrer Halbmesser  $\cos \beta$  und 1. Der Ausspruch von MERCATOR gibt demnach den Inhalt der Grundformel ( $M$ ) wieder, allerdings mit einer Einschränkung: MERCATOR ließ die Breiten nicht Schritt für Schritt um unendlich wenig wachsen, — wie man das machen sollte, wußte man damals

1) „Drei Karten von GERHARD MERCATOR: Europa — Britische Inseln — Weltkarte, Facsimile-Lichtdruck nach den Originalen der Stadtbibliothek zu Breslau“, hrsg. v. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin, Berlin 1891.

noch nicht, denn die Infinitesimalrechnung war noch nicht erfunden. Vielmehr hat MERCATOR Schritte um je einen Grad schon für genügend klein erachtet. Um was es sich handelte, war ihm aber durchaus klar, wie der Inhalt der langen Legende zeigt, aus der wir bloß einen Satz herausgehoben haben. Sein Ziel war eben, zu erreichen, daß sich die Linien konstanten Kurses als Geraden darstellten. Wenn die Kartographen von heute MERCATOR den Vorwurf machen, er habe Unendlichkleines mit nur Sehrkleinem verwechselt, so muß man ihm das als einem Kinde seiner Zeit verzeihen, denn die Kartographen von heute begehen denselben Fehler, und denen darf man es nicht mehr hingehen lassen.<sup>1)</sup>

Wie MERCATOR die Zunahmen bei Schritten von je einem Grad ermittelt hat, steht dahin. Vermutlich ist er nicht rechnerisch, sondern zeichnerisch vorgegangen, und das läßt sich auf mancherlei naheliegende Weisen tun. Er mag es also vielleicht ebenso gemacht haben wie wir in Nr. 29 bei den viel größeren Schritten um je zehn Grad oder auch so, wie sich das BREUSING in seinem bei Nr. 3 genannten Buch auf S. 36 denkt.<sup>2)</sup>

**31. Herstellung der Mercatorkarte.** Der Weg, den wir einschlagen wollen, um die Mercatorkarte mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit herzustellen, hat MERCATOR selbst gewiß fern gelegen. Wir schreiben nämlich die rechte

---

1) ALOIS BLUDAU passierte das gerade bei der Besprechung der Mercatorkarte in seiner neuen Bearbeitung des „*Leitfadens der Kartenentwurfslehre*“ von KARL ZÖPPRITZ, 1. Teil, Leipzig 1899, auf S. 141 in den beiden für sein  $y$  (unser  $h$ ) aufgestellten Formeln. Abgesehen davon hat er dort auch Grad- und Bogenmaß verwechselt; seine erste Formel muß noch mit dem nicht unwesentlichen Faktor  $\pi : 10800$  multipliziert werden. Um das Maß der Irrtümer vollzumachen, behauptet er auf der übernächsten Seite: „Er veröffentlichte seine Weltkarte 1569 ohne jede Angabe, wie er die Abstände der Parallelkreise gefunden hatte“.

2) Was MORITZ CANTOR in seinen „*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*“, 2. Bd., 2. Aufl. Leipzig 1900, S. 608 über MERCATOR beibringt, ist teils falsch, teils irreführend. Bestimmt gehört MERCATOR in die Geschichte der Mathematik, denn sein Entwurf ist die erste neue winkeltreue oder konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene seit der schon aus alten Zeiten bekannt gewesenen stereographischen Projektion.

Seite der Grundformel nicht als Bruch, sondern als Produkt:

$$(M) \quad dh = d\beta \cdot \frac{1}{\cos \beta}$$

und veranschaulichen dies Produkt durch die Fläche eines Rechtecks, dessen Seitenlängen  $d\beta$  und  $1 : \cos \beta$  sind. Weil

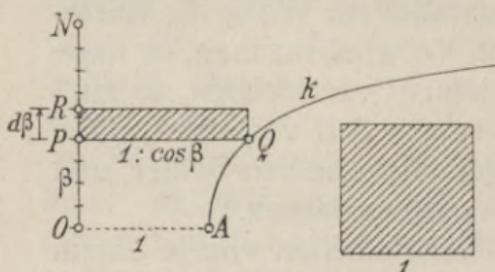


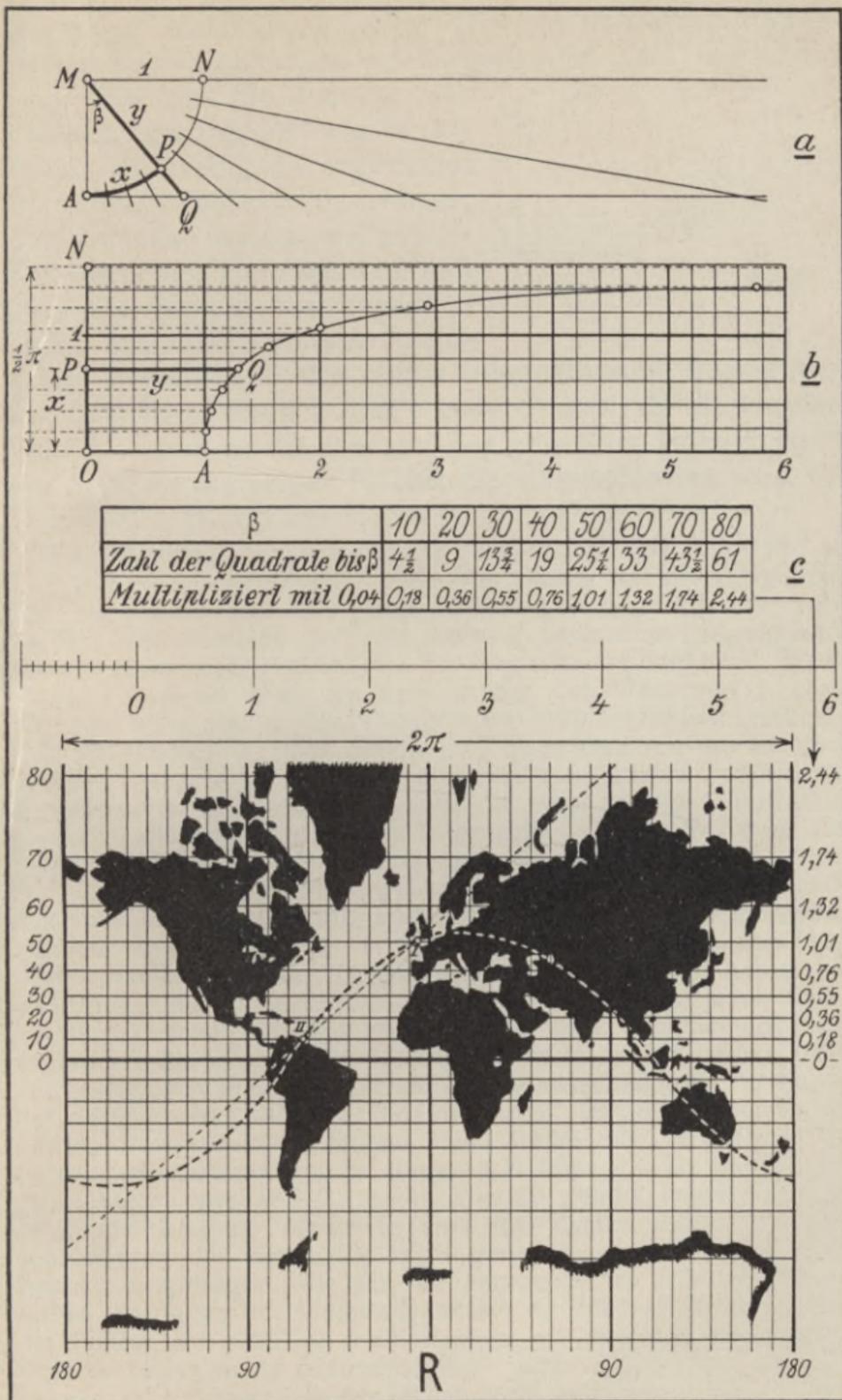
Fig. 23

der Faktor  $d\beta$  im Bogenmaß gemessen wird (Nr. 2), bedürfen wir dabei einer Streckenskala für die Abmessung der Breiten. In Fig. 23 wird demnach eine Strecke  $ON$  gleich  $\frac{1}{2}\pi$  gemacht (wie stets unter Annahme des Halbmessers des Globus als Längeneinheit). Sie stellt das

Bogenmaß von  $90^0$  dar. Einteilen liefert die Bogenmaße der Breiten von  $0^0$  bis  $90^0$ . Zu einem beliebigen Punkte  $P$  der Skala gehört eine gewisse Breite  $\beta$  gleich der Strecke  $OP$  (hier z. B.  $40^0$ ). Wenn man an jeder Stelle  $P$  waagrecht den zugehörigen Betrag von  $1 : \cos \beta$  als Strecke  $PQ$  ansetzt (gemessen mit der Längeneinheit), geht als Ort der Endpunkte  $Q$  eine krumme Linie  $k$  hervor. Wird  $OP = x$  und  $PQ = y$  gesetzt, so ist  $x = \beta$  und  $y = 1 : \cos \beta$ , d. h. die Kurve  $k$  hat die Gleichung  $y = 1 : \cos x$ .

Wenn die Breite  $\beta = OP$  um irgendeinen Betrag  $d\beta$  wachsen soll, wird dieser Betrag durch einen Zuwachs  $PR$  der Strecke  $OP$  dargestellt. Die rechte Seite der Grundformel drückt sich somit aus als der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Kanten  $PQ$  und  $PR$ . Nach der Grundformel muß demnach der Betrag dieser Fläche gleich dem Betrage von  $dh$  sein, aber man muß dabei selbstverständlich die Fläche des Rechtecks mit der *Flächeneinheit* messen. Das aber ist die Fläche des Quadrates, dessen Kante durch die Längeneinheit gegeben wird. Die Maßzahl der Rechtecksfläche ist dann auch die Maßzahl für den Höhenzuwachs  $dh$ .

Nun denken wir uns, daß wir mit der Breite Null beginnen und die Breite Schritt für Schritt um einen unendlich kleinen Betrag  $d\beta$  zunehmen lassen und zwar so lange, bis irgendeine bestimmte Breite  $\beta$  erreicht worden ist. Wenn man alle zugehörigen Höhenzunahmen  $dh$  addiert, geht die zu  $\beta$  ge-



Winkeltreuer Entwurf nach Mercator



hörige gesuchte Höhe  $h$  hervor. Weil wir die Höhenzunahmen durch Rechtecksflächen wiedergeben können, handelt es sich also um die Summe der Flächen einer Schicht von Rechtecken, die in Fig. 24 angedeutet ist. Aber man hat sich vorzustellen, daß die Höhen der Rechtecke sämtlich unendlich klein werden, daß also die Schicht aus unendlich vielen unendlich schmalen Rechtecken besteht und die rechte treppenförmige Begrenzung der Schicht schließlich nichts anderes wird als die krumme Linie  $k$ . Somit ist die Maßzahl der gesuchten Höhe  $h$  gleich der Maßzahl derjenigen Fläche, die eingeschlossen wird von  $OA$ ,  $OP$ ,  $PQ$  und der Kurve  $k$ .

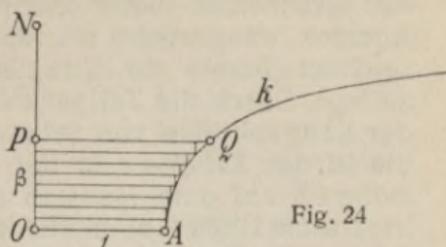


Fig. 24

Zeichnung der Mercatorkarte, s. Taf. X, Bild R: Zuerst wird in der Hilfsfig. a ein Viertelkreis mit der Längeneinheit als Halbmesser  $MN$  gezeichnet und in neun gleiche Teile zerlegt. Die Strahlen von der Mitte  $M$  nach den Teilpunkten  $P$  werden dann abgeschnitten von der Tangente des Punktes  $A$ . Wenn  $\angle AMP = \beta$  ist, stellt die Strecke  $MQ$  den Wert von  $1 : \cos \beta$  dar. Nun kann man in der Hilfsfig. b die krumme Linie  $k$  zeichnen: Die Strecke  $ON$  ist hier gleich  $\frac{1}{2} \pi$ , gemessen mit der Längeneinheit. Übrigens ist diese Einheit sowie ein Maßstab weiter unten eingezeichnet über der Mercatorkarte. Man zerlegt  $ON$  in neun gleiche Teile und trägt in den Teilpunkten die aus Fig. a zu entnehmenden Strecken  $MQ$  waagrecht als Strecken an, wodurch sich Punkte  $Q$  der Kurve ergeben. Diese Kurve ist nun mit Hilfe des Kurvenlineals sorgfältig auszuziehen. Da Flächen ausgemessen werden sollen, wird Fig. b mit einem Netze von kleinen Quadraten überzogen. Als Kantenlänge dieser Quadrate haben wir das Fünftel der Längeneinheit gewählt. Demnach hat jedes dieser kleinen Quadrate die Fläche  $1 : 25$  oder  $0,04$ . Um nun die Maßzahlen für die Höhen  $h$  im Mercatorentwurfe zu bekommen, zählt man diejenigen kleinen Quadrate ab, die zwischen  $ON$ , der Kurve, der Anfangsstrecke  $OA$  und den zu  $\beta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ \dots$  gehörigen oberen Strecken  $PQ$  enthalten sind. Dabei sind Bruchteile von Quadraten abzuschätzen. So liegen z. B. über  $OA$  bis zu der eingezeichneten Strecke  $PQ$ , die zu  $\beta = 40^\circ$  gehört, insgesamt rund 19 kleine Quadrate. Natürlich sind die Zahlen wegen der Abschätzungen der Bruchteile nicht ganz sicher. Unter  $c$  sind die Zahlen eingetragen, die für die verschiedenen Breiten hervorgehen. Da jedes der kleinen Quadrate die Maßzahl  $0,04$  hat, sind die Zahlen mit  $0,04$  zu multiplizieren, so daß also die kleinen Unsicherheiten keine besondere Rolle mehr spielen. Was dadurch hervorgeht, ist unter  $c$  in der letzten Zeile angegeben. Diese Zahlen

sind nun die Maße der Höhen  $h$ , wohlbemerkt gemessen mit der Längeneinheit. Mit Hilfe des gezeichneten Maßstabes kann man also diese Höhen als Strecken abgreifen. Somit steht dem Entwurf des Gradnetzes nichts mehr im Weg: Zuerst wird im Bilde der Äquator waagerecht als Strecke von der wahren Länge  $2\pi$  gezeichnet (immer mit Hilfe des Maßstabes) und in 36 gleiche Teile zerlegt. Durch die Teilpunkte werden die Lotrechten als die Bilder der Längengrade von zehn zu zehn Grad gezogen. Dann werden die in der Tabelle *c* in der letzten Zeile angegebenen Maße der Höhen  $h$  auf dem Maßstab abgegriffen und lotrecht eingetragen. In diesen Höhen sind die waagerechten Geraden zu ziehen. Sie stellen die Breitenkreise von zehn zu zehn Grad dar. Selbstverständlich hat man die Höhen auch nach unten hin einzutragen, um die Bilder der südlichen Breitenkreise von zehn zu zehn Grad zu bekommen.

Der Entwurf zeigt im hohen Norden und Süden gewaltige Flächenverzerrungen, was nicht zu verwundern ist, denn er hat etwas sozusagen recht unbequemes zu leisten: Die sich spiralig um die Pole windenden Loxodromen (Nr. 26) müssen als Geraden erscheinen; das geht eben nicht ohne gewaltige Flächenverzerrungen. Wir haben die Loxodrome durch zwei angenommene Stellen als Gerade eingezeichnet. Das sind dieselben Stellen *I* und *II* (Landsend und Trinidad), die wir in Nr. 21 benutzten. Aus Fig. *b* der Taf. VI können wir auch die mit *g* bezeichnete kürzeste Linie von *I* bis *II* mit Hilfe des Gradnetzes übertragen. Sie stellt sich als eine krumme Linie dar, die nördlich von der Loxodrome von *I* bis *II* verläuft. Man kann sie fortsetzen über den ganzen Globus; dann erscheint sie wellenförmig.

Die Kurve in Fig. *b* der Tafel X kann selbstverständlich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit in größerem Maßstabe gezeichnet werden. Sie schmiegt sich im Unendlichen der Waagerechten durch *N* an. In *A*, ihrem Scheitel (sie ist ja nach unten fortsetzbar), schmiegt sie sich besonders innig dem Kreise vom Halbmesser 1 an, dessen Mitte die mit 2 bezeichnete Stelle ist.

Um einen Begriff von der Genauigkeit unserer Zeichnung zu geben, bemerken wir: Sie wurde so groß entworfen, daß die Längeneinheit 2,5 cm betrug (also doppelt so groß, wie sie hier zu sehen ist). Dabei stellte sich für keine der Höhen ein Fehler heraus, der mehr als zwei Hundertteile ausmachte. Die Zahlen, die wir in der Tabelle *c* auf Tafel X angegeben

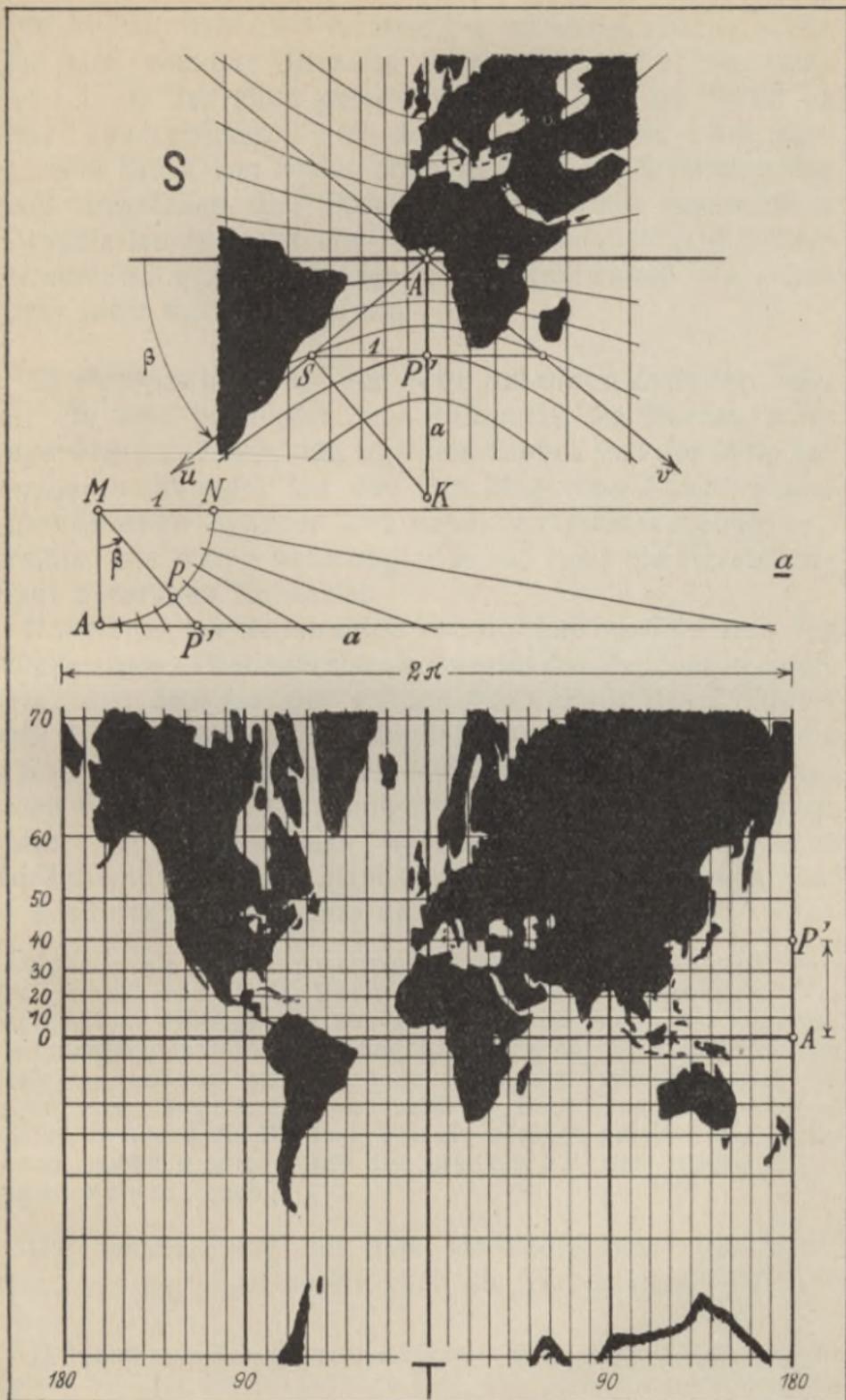
haben, sind nicht genau dieselben, die wir bekommen hatten. Denn da jeder andere Zeichner etwas andere Zahlenwerte finden wird, haben wir es für vernünftiger gehalten, diejenigen Werte einzuschreiben, die sich durch genaue Berechnung ergeben. Man kann also an diesen Zahlen die Güte einer eigenen Zeichnung nachprüfen.

## IV. PERSPEKTIVE ENTWÜRFE

**32. Perspektive von der Mitte auf eine Ebene.** Für die Mercatorkarte kennzeichnend sind Winkeltreue und Geradlinigkeit der Loxodromen. Dagegen gibt es keinen winkeltreuen Entwurf mit geradlinig dargestellten kürzesten Wegen oder Großkreisen, weil die aus Großkreisen zusammengesetzten sphärischen Dreiecke Winkelsummen haben, die mehr als zwei rechte Winkel betragen. Auch gibt es keinen flächentreuen Entwurf mit geradlinig erscheinenden Großkreisen, was ohne weiteres klar ist. Wohl aber gibt es Entwürfe, die zwar weder winkeltreu noch flächentreu sind, dagegen jeden Großkreis als Gerade wiedergeben. Zu ihnen gehört jeder Entwurf, der mittels Perspektive zu gewinnen ist, wenn man das Perspektivitätszentrum oder Auge in der Mitte des Globus annimmt. Denn diese Mitte ist ja Mitte eines jeden Großkreises, d. h. das Auge befindet sich in der Ebene eines jeden Großkreises, so daß die Großkreise als Geraden erscheinen müssen, wie man auch immer die Bildtafel annehmen mag. Da sich ein perspektives Bild bloß ähnlich vergrößert oder verkleinert, wenn man die Bildtafel parallel verschiebt, darf man die Tafel als Tangentialebene des Globus wählen (wie wir das auch bei den stereographischen Entwürfen getan haben). Wenn man ein Beispiel hierzu zeichnet, erkennt man, weshalb solche perspektive Entwürfe keinen Eingang in die Atlanten gefunden haben. Wir wollen als Bildtafel die Tangentialebene des Globus in einem Punkt  $A$  des Äquators, etwa im Punkte von der geographischen Länge Null, annehmen.

In Fig. 25 ist der Axialschnitt durch den Punkt  $A$  gezeichnet. Die Tafel hat man sich also längs der Tangente  $a$  von  $A$  lotrecht zu denken. Ein Breitenkreis  $\beta$  wird vom Mittel-





Perspektive Entwürfe



Man sieht, daß die Verzerrungen gewaltig werden, wenn man sich von der Bildmitte  $A$  entfernt. Selbst das noch ziemlich in der Mitte gelegene Afrika leidet im Osten an diesen Verzerrungen, und das an sich kleine noch dargestellte Stück von Südamerika ist ganz unverhältnismäßig groß ausgefallen. Die Untauglichkeit solcher perspektiver Entwürfe leuchtet also ein.<sup>1)</sup> Ebenso untauglich sind andere Entwürfe mit geradlinig dargestellten Großkreisen; wir gehen daher nicht weiter darauf ein.

**33. Perspektive von der Mitte auf einen Zylinder.** Hier und da wird behauptet, man bekomme die Mercatorkarte angenähert dadurch, daß man den Globus von der Mitte her perspektiv abbildet auf den ihm längs des Äquators umgeschriebenen Zylinder und dann den Zylinder eben ausbreitet. Wie wenig berechtigt das ist, zeigt die Herstellung eines derartigen Entwurfes.

Der Kegel der Sehstrahlen von der Globusmitte nach den Punkten eines Breitenkreises schneidet den Zylinder in einem Kreis, aus dem bei der ebenen Ausbreitung des Zylinders eine Gerade wird. Die Längskreise bilden sich als die Mantellinien des Zylinders ab. Mithin bekommt man allerdings einen Entwurf mit geradlinigem und rechtwinkligem Gradnetze, der sich ebenso wie der Mercatorentwurf nach Norden und Süden hin bis ins Unendlichferne erstreckt, aber er sieht doch ganz anders aus.

Zeichnung des perspektiven Entwurfes auf den Zylinder, s. Taf. XI, Bild T: Der Äquator erscheint als die waagerechte Mittelgerade von der Länge  $2\pi$ , wenn wie stets der Halbmesser des Globus als Längeneinheit dient. Er ist in 36 gleiche Teile zu zerlegen, und die Lote durch die Teilpunkte sind die Bilder der Längskreise von zehn zu zehn Grad. Daß die Abstände, in denen die Breitenkreise als Geraden parallel zum Äquator zu zeichnen sind, durch die Strecken  $AP'$  der Hilfsfig.  $a$  gegeben werden, leuchtet ein.

Die Vergleichung mit dem Mercatorentwurf auf Taf. X zeigt, wie geradezu unerträglich die Verzerrungen des per-

1) Wenn man den gestirnten Himmel in einem Gemälde wiedergeben will, ist das perspektive Bild wohl am Platze, siehe LAMBERT'S in Nr. 11 genannte „*Freye Perspective*“, Fig. 54 auf Taf. IX.

spektiven Entwurfes gegenüber den immer noch erträglichen Verzerrungen des Mercatorentwurfes sind. Übrigens stimmt das soeben hergestellte Gradnetz ziemlich überein mit dem in Fig. 22 von Nr. 29, das jedoch, wie damals betont wurde, nur eine ganz rohe Annäherung an das Mercatorsche ist.

## V. STERNKARTE

**34. Ein besonderer strahliger Entwurf.** Die Entwürfe F und L auf Taf. IV und VI sind beide strahlig, und zwar so, daß die Strahlen vom Bilde des Nordpols ausgehen und dieselben Winkel miteinander bilden wie die Längenkreise selbst. Der erste Entwurf ist flächentreu, der zweite winkeltreu. Man kann nun beliebig viele Entwürfe herstellen, die in derselben Art wie diese beiden strahlig sind und in denen ebenfalls die Breitenkreise als die Kreise um den Nordpol erscheinen. Man braucht ja nur irgendein Gesetz vorzuschreiben, nach dem sich für eine beliebig gegebene Breite  $\beta$  der Halbmesser des Bildkreises ermitteln läßt. Unter allen diesen Entwürfen wollen wir nun einen mit besonderen Eigenschaften ausfindig machen, den wir dann für eine Sternkarte verwenden werden. Vorerst aber bleiben wir beim Erdglobus; wir ersetzen ihn erst in Nr. 35 durch den Himmelsglobus.

In Fig. 26 liegt wieder ein Axialschnitt des Globus vor mit einem darauf gewählten Punkte Z. Dieser Punkt habe eine vorgeschriebene Breite  $\beta_0$ . Mit  $h$  wollen wir denjenigen Großkreis des Globus bezeichnen, dessen Ebene senkrecht ist zum Halbmesser von Z. Wenn man den Globus lotrecht auf die Ebene des Axialschnittes projiziert, stellt sich dieser Großkreis  $h$  dar als der zu  $MZ$  senkrechte Durchmesser  $UV$ . Wir dürfen den Längenkreis, den der Bogen von  $N$  über  $U$  nach  $S$  darstellt, als den von der Länge Null annehmen. Der Punkt  $Z$  heißt bekanntlich der sphärische Mittelpunkt der ihn enthaltenden Kugelhälfte, die vom Kreise  $h$  be-

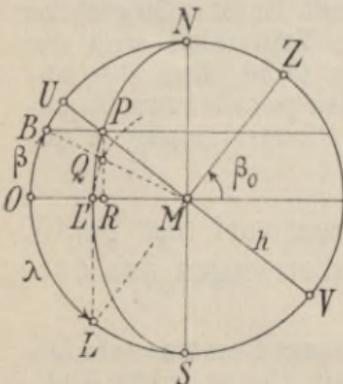


Fig. 26

grenzt wird. Der gesuchte neue strahlige Entwurf soll nun die folgenden beiden Eigenschaften haben: Erstens soll das Bild des Großkreises  $h$  wieder ein Kreis sein, und zweitens soll das Bild des sphärischen Mittelpunktes  $Z$  wieder die Mitte dieses Bildkreises von  $h$  sein. Weshalb wir gerade dies fordern, wird in Nr. 35 begründet werden.

Nehmen wir also zunächst in Fig. 27 den Bildkreis  $h'$  von  $h$  mit dem Halbmesser  $k$  beliebig an und innerhalb von  $h'$  das Bild  $N'$  des Nordpols  $N$ . Die Strecke  $Z'N'$  sei  $c$  genannt. Wie gesagt sollen die Längenkreise  $\lambda$  als die Strahlen von  $N'$  aus abgebildet werden, die miteinander die wahren Winkel bilden. Insbesondere stellen sich daher die durch  $U$  und  $V$  gehenden Längenkreise dar als die Strahlen auf der Geraden durch  $N'$  und  $Z'$ , so daß auf  $h'$  die Bilder  $U'$  und  $V'$  von  $U$  und  $V$  vorliegen. Der Längenkreis von der Länge Null, d. h. der Halbkreis  $NUS$ , hat als Bild den Strahl von  $N'$  nach  $U'$ . Nun handelt es sich darum, den Halbmesser  $r$  desjenigen Kreises um  $N'$  ausfindig zu machen, der den Breitenkreis  $\beta$  darstellt. Zu diesem Zwecke wählen wir irgendeine Breite  $\beta$  und tragen sie als  $\sphericalangle OMB$  in Fig. 26 ein. Die Parallele zum Äquator durch  $B$  bedeutet den Breitenkreis  $\beta$ . Dieser Breitenkreis hat mit dem Kreise  $h$  einen Punkt  $P$  gemein. Es kommt darauf an, die Länge von  $P$  zu bestimmen. Der Längenkreis durch  $P$  erscheint in Fig. 26 in senkrechter Projektion als die Ellipse durch  $P$ , die  $NS$  als Hauptachse hat. Bekanntlich findet man ihre Nebenachse so: Man bringt den Halbmesser  $MB$  mit dem Lote  $PR$  durch  $P$  in  $Q$  zum Schnitte und schlägt um  $M$  den Kreis durch  $Q$ . Dieser Kreis schneidet den Äquator im Nebenscheitel  $L'$  der Ellipse. Wenn man den Äquator umlegt, erhellt, daß die Länge  $\lambda$  des elliptisch dargestellten Längenkreises durch den Bogen  $OL$  des Umrisses angegeben wird. Setzen wir den so gewonnenen Winkel  $\lambda = \sphericalangle OML$  in Fig. 27 an den Schenkel  $N'U'$  an, so muß der zweite Schenkel den Kreis  $h'$  im Bildpunkte  $P'$  des Punktes  $P$  schneiden. Da  $P$  die Breite  $\beta = \sphericalangle OMB$  in Fig. 26 hat, folgt: Der Kreis um  $N'$  durch

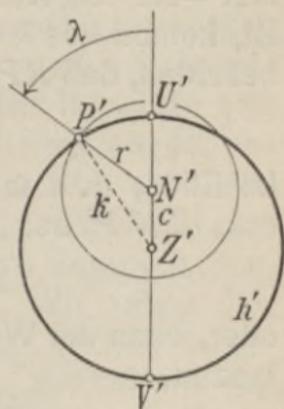


Fig. 27

den Breitenkreis  $\beta$  darstellt. Zu diesem Zwecke wählen wir irgendeine Breite  $\beta$  und tragen sie als  $\sphericalangle OMB$  in Fig. 26 ein. Die Parallele zum Äquator durch  $B$  bedeutet den Breitenkreis  $\beta$ . Dieser Breitenkreis hat mit dem Kreise  $h$  einen Punkt  $P$  gemein. Es kommt darauf an, die Länge von  $P$  zu bestimmen. Der Längenkreis durch  $P$  erscheint in Fig. 26 in senkrechter Projektion als die Ellipse durch  $P$ , die  $NS$  als Hauptachse hat. Bekanntlich findet man ihre Nebenachse so: Man bringt den Halbmesser  $MB$  mit dem Lote  $PR$  durch  $P$  in  $Q$  zum Schnitte und schlägt um  $M$  den Kreis durch  $Q$ . Dieser Kreis schneidet den Äquator im Nebenscheitel  $L'$  der Ellipse. Wenn man den Äquator umlegt, erhellt, daß die Länge  $\lambda$  des elliptisch dargestellten Längenkreises durch den Bogen  $OL$  des Umrisses angegeben wird. Setzen wir den so gewonnenen Winkel  $\lambda = \sphericalangle OML$  in Fig. 27 an den Schenkel  $N'U'$  an, so muß der zweite Schenkel den Kreis  $h'$  im Bildpunkte  $P'$  des Punktes  $P$  schneiden. Da  $P$  die Breite  $\beta = \sphericalangle OMB$  in Fig. 26 hat, folgt: Der Kreis um  $N'$  durch

$P'$  mit dem Halbmesser  $r = N'P'$  ist das Bild des Breitenkreises  $\beta$ .

Man kann so zu beliebigen Breiten  $\beta$  die Halbmesser  $r$  der Bildkreise finden, aber doch nur für Breiten, die kleiner als  $\sphericalangle OMU$  in Fig. 26 sind. Um das Gesetz auch für alle übrigen Breiten zu bekommen, stellen wir die aus der Konstruktion folgende Formel auf. Wie stets soll der Halbmesser des Globus die Längeneinheit sein. Dann ist  $\cos \lambda$  in Fig. 26 gleich  $ML'$  oder  $MQ$  oder  $MR : \cos \beta$ . Wegen  $MR = RP \cdot \operatorname{ctg} RMP$  und weil  $\sphericalangle RMP$  das Komplement von  $\beta_0$  ist, kommt  $\cos \lambda = RP \cdot \operatorname{tg} \beta_0 : \cos \beta$ . Schließlich ist noch zu beachten, daß  $RP$  offenbar gleich  $\sin \beta$  ist, so daß wir haben

$$\cos \lambda = \operatorname{tg} \beta_0 \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Im Bilde, d. h. in Fig. 27, ist  $\lambda$  der Außenwinkel des Dreiecks  $Z'N'P'$  bei  $N'$ . Der Kosinussatz gibt folglich

$$r^2 + c^2 + 2rc \cos \lambda = k^2$$

oder, wenn der Wert von  $\cos \lambda$  eingesetzt wird, den wir soeben fanden,

$$r^2 + c^2 + 2rc \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \beta = k^2.$$

Mittels dieser Gleichung ließe sich bei gegebener Breite  $\beta$  der Halbmesser  $r$  des zugehörigen Bildkreises berechnen, weil es eine quadratische Gleichung für  $r$  ist.

Nun muß noch die zweite Forderung erfüllt werden. Da  $Z'$  die gegebene Breite  $\beta_0$  und der Kreis um  $N'$  durch die Mitte  $Z'$  von  $h'$  in Fig. 27 den Halbmesser  $c$  hat, wird verlangt, daß die soeben gewonnene Gleichung insbesondere befriedigt werde, wenn man  $\beta$  durch  $\beta_0$  und  $r$  durch  $c$  ersetzt. Das gibt

$$\frac{2}{\cos^2 \beta_0} c^2 = k^2.$$

Man darf demnach den Halbmesser  $k$  von  $h'$  nicht nach Belieben wählen, nachdem man die Strecke  $c$  angenommen hat, sondern nur nach dieser Vorschrift. Setzen wir den Wert von  $k^2$  in die quadratische Gleichung ein, so geht das Endergebnis hervor:

$$(S) \quad r^2 + 2rc \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \beta = \frac{1 + \sin^2 \beta_0}{\cos^2 \beta_0} c^2.$$

Dies also ist die Grundformel für unseren besonderen strahligen Entwurf.

**35. Drehbare Sternkarte.** Anwenden wollen wir den soeben besprochenen Entwurf nicht auf den Erdglobus, sondern auf den Himmelsglobus. Dieser gedachte Globus dreht sich (scheinbar) um die sogenannte Weltachse, die mit der Erdachse zusammenfällt. Um die jeweils sichtbaren Gestirne feststellen zu können, benutzt man eine um den Nordpol drehbare Himmelskarte, über der ein zweites Blatt mit einem Ausschnitt angebracht wird. Geeignete Ablesungsskalen ermöglichen dann, den zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Datum über dem Horizonte befindlichen Teil des Sternhimmels im Ausschnitte sichtbar einzustellen. In allen den verschiedenen käuflichen Sternscheiben ist die Grundlage natürlich ein strahliger Entwurf. Solcher Entwürfe gibt es, wie in der letzten Nummer zu Anfang betont wurde, unzählige viele je nach dem Gesetze, nach dem man die Halbmesser der Breitenkreisbilder wählt. Soviel uns bekannt, hat aber keine dieser Scheiben zwei besondere Eigenschaften, die uns besonders erwünscht erscheinen. Wir sehen den Horizont in offener Landschaft als einen Kreis um uns herum. Darum wird es erwünscht sein, auch *dem Ausschnitte die Form eines Kreises zu geben*. Bei den käuflichen Drehscheiben ist der Ausschnitt wohl immer eine länglich runde Linie. Ferner: Der *Zenit* ist die lotrecht über uns befindliche Stelle des Himmelsglobus, also die Mitte des sichtbaren Sternhimmels. Mithin erscheint es uns zweitens erwünscht, daß *der Zenit die Mitte des Ausschnittkreises werde*.

Diese beiden Wünsche werden nun einzig und allein von dem in der letzten Nummer gefundenen Entwurf befriedigt. Man möge nämlich jetzt die Kugel in Fig. 26 als den Himmelsglobus auffassen. Ferner sei die Breite  $\beta_0$  des Punktes  $Z$  unsere eigene geographische Breite. Dann können wir den Punkt  $Z$  als unsern Zenit ansehen und den Kreis  $h$ , dessen Ebene zum Halbmesser von  $Z$  senkrecht ist, als unsern Himmelshorizont. Das Bild von  $h$  liefert also die Form des Ausschnittes. Unser Entwurf hat in der Tat als Bild von  $h$  wieder einen Kreis und als Bild von  $Z$  den Mittelpunkt dieses Kreises.

Wir gehen nun an die Herstellung der drehbaren Sternscheibe. Als die gegebene Breite  $\beta_0$  des Zenites  $Z$  wollen wir die vom mittleren Norddeutschland, also  $52^0$  wählen. In

der Grundformel (S) treten Größen auf, die nur von dieser gegebenen Breite und von der beliebig angenommenen Strecke  $c$  abhängen. Diese Größen bezeichnen wir so:

$$f = c \operatorname{tg} \beta_0, \quad g^2 = \frac{1 + \sin^2 \beta_0}{\cos^2 \beta_0} c^2.$$

Die Grundformel wird dann einfach diese:

$$r^2 + 2rftg\beta = g^2.$$

Wird beiderseits  $f^2 \operatorname{tg}^2 \beta$  hinzugefügt, so ergibt sich links ein vollständiges Quadrat. Ausziehen der Quadratwurzel liefert daher

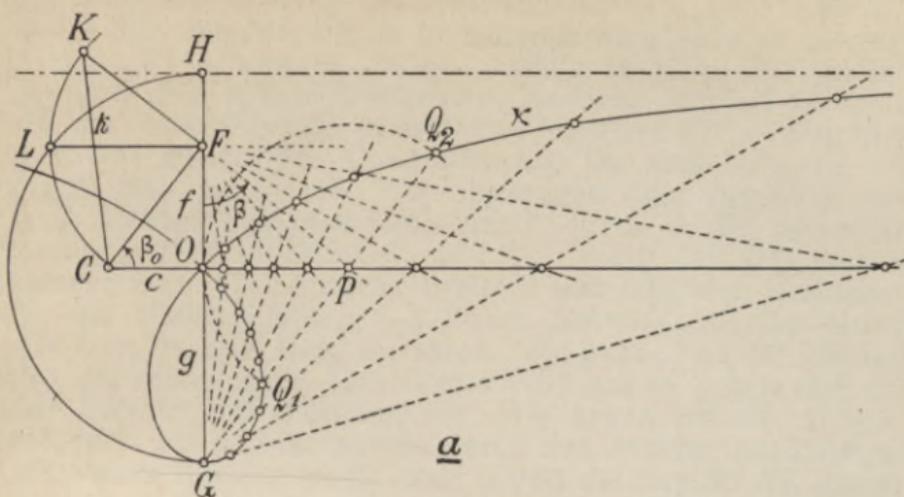
$$r = \sqrt{g^2 + f^2 \operatorname{tg}^2 \beta} - f \operatorname{tg} \beta.$$

Die Quadratwurzel könnte positiv oder negativ sein. Aber abgesehen vom Vorzeichen ist die Wurzel augenscheinlich stets größer als  $f \operatorname{tg} \beta$ . Weil nun nur positive Halbmesser  $r$  in Betracht kommen, gilt also bei der Wurzel nur das Pluszeichen. Man bemerkt weiter: Wenn man eine nördliche Breite durch die ebenso große südliche Breite ersetzt, d. h.  $\beta$  durch  $-\beta$ , wird  $f \operatorname{tg} \beta$  negativ, so daß sich der zugehörige Halbmesser  $r$  dann als eine Summe ergibt. Demnach schreiben wir

$$(S') \quad r = \sqrt{g^2 + f^2 \operatorname{tg}^2 \beta} \mp f \operatorname{tg} \beta,$$

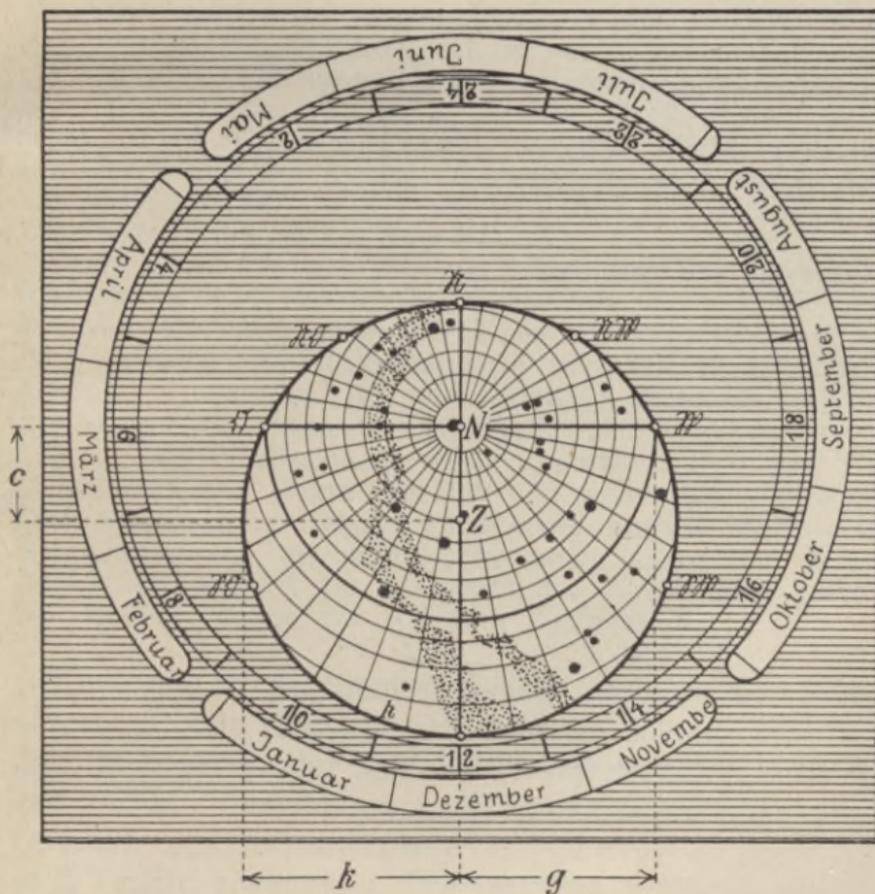
und hier gilt nun das Plus- oder Minuszeichen, je nachdem die Breite  $\beta$  nördlich oder südlich ist. Bei der Herstellung der Karte kommt es natürlich zunächst darauf an, die Größen  $f$  und  $g$  als Strecken zu ermitteln.

Zeichnung der drehbaren Sternkarte, s. Taf. XII, Bild U: In der Hilfsfig.  $a$  wird die Strecke  $c = CO$  beliebig angenommen. Die gegebene Breite  $\beta_0 = 52^\circ$  wird in  $C$  daran angesetzt und in  $O$  wird das Lot auf  $c$  errichtet. Dann ist  $OF = c \operatorname{tg} \beta_0 = f$ . Ferner ist  $FC = c : \cos \beta_0$ , also in dem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck  $CFK$  das Quadrat der Hypotenuse  $CK$  gleich  $2c^2 : \cos^2 \beta_0$ . Nach der vorigen Nummer ist dies aber gleich  $k^2$ , und somit stellt die Strecke  $k = CK$  den Halbmesser des Kreises dar, als der sich der Horizont  $h$  abbildet, d. h. dies ist der Halbmesser des nachher zu zeichnenden Ausschnittes. In  $F$  wird weiterhin die zu  $OF$  senkrechte Strecke  $FL$  von derselben Länge wie  $FC$  errichtet. Dann ist  $OL^2 = FL^2 + OF^2$  oder  $f^2 : \cos^2 \beta_0$ , vermehrt um  $f^2$ , oder wegen  $f = c \operatorname{tg} \beta_0$  gerade gleich der oben mit  $g^2$  bezeichneten Größe. Demnach ist  $g$  die Strecke  $OL$ . Mittels



a

U



Drehbare Sternkarte



des Kreises um  $O$  durch  $L$  sind schließlich die Punkte  $G$  und  $H$  auf der Geraden  $OF$  zu bestimmen. Nun läßt sich die Grundformel ( $S'$ ) anwenden: Wird nämlich in  $F$  an  $FO$  irgendeine Breite  $\beta$  (hier z. B.  $50^\circ$ ) angesetzt, wodurch sich auf der Geraden  $OC$  der Punkt  $P$  ergibt, so ist  $OP = f \operatorname{tg} \beta$  und  $PG^2 = f^2 \operatorname{tg}^2 \beta + g^2$ , d. h.  $PG$  gleich der Quadratwurzel. Da nach ( $S'$ ) die Größe  $f \operatorname{tg} \beta$ , also die Strecke  $PO$ , abgezogen oder zugezählt werden muß, schlägt man den Kreis um  $P$  durch  $O$ . Er schneidet die Gerade  $GP$  in Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$  derart, daß  $GQ_1$  der Halbmesser  $r$  für die nördliche Breite  $\beta$  und  $GQ_2$  den Halbmesser  $r$  für die südliche Breite  $-\beta$  liefert. So wird mit allen Breiten  $\beta$  von zehn zu zehn Grad verfahren. Nun geht es an die Herstellung der Sternscheibe  $U$ . Das untere Blatt (nicht geschrafft) enthält den Entwurf des Sternhimmels. Wir haben ihn nur soweit gezeichnet, wie er hier gerade durch den nachher anzubringenden Ausschnitt sichtbar bleibt. Man nimmt die Strecke  $NZ$  gleich der Strecke  $c$  in der Hilfsfig.  $a$  und zieht um  $N$  die Kreise mit den soeben ermittelten Halbmessern  $r$ , wodurch die Bilder der Breitenkreise von zehn zu zehn Grad entstehen. Insbesondere ergibt sich für den Äquator der Halbmesser  $g = OG$  der Hilfsfig.  $a$ . Die südlichen Breiten brauchen nur bis zu  $40^\circ$  gezeichnet zu werden, weil wir die südlicheren Teile des Himmels nicht sehen können. Die Längengrade von zehn zu zehn Grad werden durch die Strahlen von  $N$  aus dargestellt. Auf dem oberen (geschrafften) Blatt wird nun der Ausschnitt gezeichnet, d. h. der Horizont als der Kreis um den Zenit  $Z$  mit dem aus der Hilfsfig.  $a$  zu entnehmenden Halbmesser  $k = CK$ . Was das Beiwerk betrifft, so beachte man: Auf dem unteren Blatte, dem der Sternkarte, sind ringsherum die Daten für das ganze Jahr anzubringen. Man muß demnach die etwas mühevollte Teilung in 365 gleiche Teile machen (was eigentlich für die Schaltjahre nicht zutrifft). Die Daten sind dann so einzutragen, daß zur Frühlings-Nachtgleiche (21. März) derjenige Längengrad des Himmels gehört, der von den Astronomen mit  $0^\circ$  bezeichnet wird (ungefähr durch das Sternbild der Kassiopeja). Damit die Daten zu sehen sind, muß man auf dem oberen Blatte Schlitze rundherum machen. Auf ebendiesem Blatte sind die Tag- und Nachtstunden anzugeben derart, daß zu 12 Uhr mittags der Südpunkt des Ausschnittes gehört, der auf der Fortsetzung von  $NZ$  über  $Z$  hinaus liegt.

Natürlich ist bei beiden Skalen und auf der Sternkarte selbst auf den richtigen Drehsinn zu achten. Wir befinden uns im Inneren der gedachten Himmelskugel, so daß es von Norden über Osten nach Süden linksherum geht. Der Ostpunkt des Horizontes oder Ausschnittes ist demnach links statt rechts anzugeben. Die Gestirne zeichnet man in entsprechendem Drehsinne, wie das ja auch sonst auf Sternkarten zu geschehen pflegt. Die nähere Begründung für die

Art des Einzeichnens der Skalen für die Daten und die Stunden findet man in den Büchern über Sternkunde.

Wir haben am Ausschnitt auch die Zwischenrichtungen nach Nordost, Nordwest usw. durch kleine Kreise kenntlich gemacht. Man findet diese Stellen so: In Fig. 26 der letzten Nummer, wo  $U$  den Nordpunkt und  $V$  den Südpunkt des Horizontes  $h$  bezeichnet, wird der Horizontkreis in acht gleiche Teile zerlegt (was mittels Umlegens leicht geschieht). Nun ermittelt man ebenso, wie es damals mit dem Punkte  $P$  gemacht wurde, die zu diesen Teilpunkten gehörigen Längen, die dann auf der Karte um  $N$  herum eingezeichnet werden. Ebenso könnte man natürlich den Horizont in Stücke von je zehn Grad einteilen.

In der Hilfsfig.  $a$  von Taf. XII ist der Ort der Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  eine Kurve  $\kappa$ , die man auch nach links fortsetzen kann. Sie hat Schleifenform und nähert sich im Unendlichen der durch  $H$  parallel zu  $CO$  gezogenen Geraden. Diese Kurve einzuzichnen, empfiehlt sich deshalb, weil man dann an Unregelmäßigkeiten ihres Verlaufes merkt, daß man irgendwo einen Zeichenfehler begangen hat. Man hat die Kurve  $\kappa$  aus anderen Anlässen gelegentlich untersucht und *Logozyklika* genannt. Dies erwähnen wir nur deswegen, damit man sie nicht für die etwas mehr bekannte *Konchoide* halten möge.

Das Gradnetz der Sternkarte unterscheidet sich von denen der Entwürfe F und L auf Taf. IV und VI durch andere Zu- oder Abnahme der Zwischenräume zwischen den Breitenkreisen. Zwischen  $10^0$  und  $20^0$  n. Br. ist es am engsten. Selbstverständlich kann man das Gradnetz auch für den Erdglobus brauchen. Dann ergibt sich ein Entwurf, der einige Eigenschaften hat, die keinem der früheren ungefähr ebenso aussehenden Entwürfe in ihrer Gesamtheit zukommen. Bei der großen Zahl von Entwürfen, die im Laufe der Zeiten aufgetaucht sind, muß man vermuten, daß auch dieser schon angegeben worden ist.

8-96



---

*Von demselben Verfasser erschien ferner:*

- Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Ursprünglich Übersetzung des Lehrbuches von *J. A. Serret*, seit der 3. Aufl. gänzlich Neub. von Geh. Reg.-Rat Dr. *G. Scheffers*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Berlin.
- I. Band: Differentialrechnung. 8. Aufl. Mit 70 Fig. i. T. [XVI u. 670 S.] gr. 8. 1924. Geb. *RM* 16.20
- II. Band: Integralrechnung. 6. u. 7. Aufl. Mit 108 Fig. i. T. [XII u. 612 S.] gr. 8. 1921. Geh. *RM* 10.80, geb. *RM* 13.50
- III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 6. Aufl. Mit 64 Fig. i. T. [XII u. 732 S.] gr. 8. 1924. Geb. *RM* 18.—

## In der Mathematisch-Physikalischen Bibliothek *sind u. a. erschienen:*

**Einführung in die darstellende Geometrie.** Von Studiendir. Dr. *W. Kramer*, Altdöbern. (Reihe I, 66/67.) Kart. je *RM* 1.20

1. Teil: Senkrechte Projektion auf eine Tafel. Mit 71 Fig. i. T. [49 S.] kl. 8. 1926.
2. Teil: Senkrechte Projektion auf zwei Tafeln. Kegelschnitte. Mit 67 Fig. i. T. [VI u. 53 S.] kl. 8. 1929.

**Darstellende Geometrie des Geländes und verwandte Anwendungen der Methode der kotierten Projektionen.** Von Dr. *R. Rothe*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Berlin. 2., verb. Aufl. Mit 107 Fig. i. T. [VI u. 92 S.] kl. 8. 1919. (Reihe I, 35/36.) Kart. *RM* 2.40

**Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze).** Von Oberstudienrat *L. Balse*r, Darmstadt. Mit 40 Fig. i. T. [60 S.] kl. 8. 1928. (Reihe I, 81.) Kart. *RM* 1.20

**Karte und Kroki.** Von Studienrat Dr. *H. Wolff*, Berlin. 2. Aufl. hrsg. von Studienrat Dr. *K. Rüsewald*, Wanne-Eickel. Mit 47 Fig. [57 S.] kl. 8. 1933. (Reihe I, 27.) Kart. *RM* 1.20

*Ausführliches Verzeichnis der „Mathematisch-Physikalischen Bibliothek“  
kostenlos vom Verlag erhältlich.*

---

**Himmelsglobus aus Modelliernetzen.** Die Sterne durchzustechen und von innen heraus zu betrachten. Von Hofrat Dr. *A. Höfler*, weil. Prof. a. d. Univ. Wien. Nachdruck der 2. Aufl. [VI u. 26 S. mit 1 Abb. u. 5 Beilagen] 31,2×31,5 cm. 1928. In Mappe *RM* 3.—

---

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301646

P  
E  
L. inw. 580

Kdn. Zvm. 480/55 20.000

380  
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296010