...chen

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung

Von

Prof. Dr. Fr. Junker

Mit 52 Figuren im Text

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollend[...] [...]stematische Darstellun[...] [...]en dürfte.

Ein ausfü[...] [...]schienenen Nummern [...] [...]ändchens

Sammlung Göschen

Repetitorium und Aufgabensammlung

zur

Integralrechnung

von

Dr. Fr. Junker
Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart

Mit 52 Figuren im Text

Zweite, verbesserte Auflage

Neudruck

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1910

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig-R.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einfache unbestimmte Integrale.

§ 1. Das Integral eines Differentials.

Die Integralrechnung hat die Aufgabe, zu einem gegebenen Differential die ursprüngliche Funktion aufzusuchen. Sie ist demnach als Umkehrung der Differentialrechnung anzusehen.

Das Integral des Differentials $dy = f(x)\,dx$, geschrieben

$$y = \int f(x)\,dx = F(x)$$

und gelesen „Integral $f(x)\,dx$“, ist die Funktion, welche nach x abgeleitet $f(x)$ gibt. Dasselbe ist somit definiert durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x) = F'(x)\,.$$

Diese Beziehung ändert sich nicht, wenn man $F(x)$ um eine beliebige Konstante C vermehrt (oder vermindert). Man nennt deshalb

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ und bezeichnet C als Integrationskonstante.

§ 2. Die einfachsten Integralformen.

Durch einfache Umkehrung der entsprechenden Formeln der Differentialrechnung gelangt man zu folgenden fundamentalen Integralformeln:

1. $\int a\,dx = ax + C.$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = lx + C.$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C.$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C'.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$

§ 3. Sätze und Integrationsmethoden.

a) Konstante Faktoren unter dem Integralzeichen dürfen vor dasselbe gesetzt werden.

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,.$$

b) Das Integral einer Summe von Differentialen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Differentiale.

$$\int \{f(x) + \varphi(x) + \ldots\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx + \ldots$$

c) Integration durch Substitution einer neuen Veränderlichen.

12. Beispiel. Das Integral $\int (a+bx)^n\,dx$ zu ermitteln.

Setze $a + bx = y$, so ist $b\,dx = dy$, $dx = \frac{dy}{b}$ und

$$\int (a+bx)^n\,dx = \frac{1}{b}\int y^n\,dy = \frac{1}{b}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1} + C$$
$$= \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + C.$$

13. Beispiel.

$\int \operatorname{tg} x\,dx$ geht mit $\cos x = y$, $-\sin x\,dx = dy$ über in

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{dy}{y} = -ly = -l\cos x.$$

14. Beispiel Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$ zu berechnen.

Setze $b^2x^2 = a^2\sin^2 t$ oder $bx = a\sin t$, so ist $b\,dx = a\cos t\,dt$ und

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t.$$

Damit geht das gegebene Integral über in

$$\frac{1}{b}\int dt = \frac{t}{b} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}.$$

d) Ist der Zähler eines Bruches gleich der Ableitung des Nenners, so ist das Integral desselben gleich dem Logarithmus des Nenners.

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{d\,f(x)}{f(x)} = l\,f(x) + C.$$

15. Beispiel.

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l \sin x + C\,.$$

16. Beispiel.

$$\int \frac{(4x^3 - 14x)\, dx}{x^4 - 7x^2 + 8} = l\,(x^4 - 7x^2 + 8)\,.$$

e) Die teilweise Integration beruht auf der Anwendung der Formel

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du\,,$$

wo u und v als Funktionen von x zu betrachten sind.

17. Beispiel. $\int x \cos x\, dx$ zu berechnen.

Für $x = u$ und $\cos x\, dx = d \sin x = dv$ ist

$$\begin{aligned}\int x \cos x\, dx &= x \sin x - \int \sin x\, dx\\ &= x \sin x + \cos x + C\,.\end{aligned}$$

18. Beispiel. $J = \int \cos^2 x\, dx$ zu berechnen.

Es ist

$$\begin{aligned}J = \int \cos^2 x\, dx &= \int \cos x\, d \sin x = \cos x \sin x + \int \sin^2 x\, dx\\ &= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx = \cos x \sin x + x - J\end{aligned}$$

woraus folgt

$$J = \tfrac{1}{2}(\cos x \sin x + x)\,.$$

§ 4. Übungsbeispiele.

19. $\int 6x^7\, dx = \frac{3}{4} x^8\,.$

20. $\int (a^4 + x^4)\, dx = a^4 x + \frac{x^5}{5}\,.$

21. $\int 6\sqrt{x}\, dx = 4\sqrt{x^3}\,.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,.$

23. $\int \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx = x + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\,.$

24. $\int \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) dx = ax + blx - \frac{c}{x}\,.$

25. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)^3 dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} + \frac{8}{17}x^{\frac{17}{6}} - \frac{8}{81}x^3\,.$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}} = 2\sqrt{a+x}\,.$

27. $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx}\,.$

28. $\int \frac{dx}{1+(x-2)^2} = \operatorname{arctg}(x-2)\,.$

29. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx = 2\sqrt{x} + x + 2l(\sqrt{x}-1)\ [\sqrt{x}-1=y]\,.$

30. $\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^3} = -\frac{a+2bx^2}{4b^2(a+bx^2)^2} \qquad [x^2=y]\,.$

31. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^4} = \operatorname{arctg} x^2\,.$

32. $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = l\,f(x)\,.$

33. $\int \frac{\cos x\,dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{b}\,l(a+b\sin x)\,.$

34. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x-a} = l(e^x-a)\,.$

35. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x} = l(\mathrm{arctg}\,x)$.

36. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

37. $\int (x-1)^2 e^x\,dx = e^x(x^2 - 4x + 5)$

38. $\int x^5(1+x)^2\,dx = \frac{x^6}{6}(1+x)^2 - \frac{1}{3}\int x^6(1+x)\,dx$.

39. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$.

40. $\int x^2 \cos x\,dx = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$.

II. Abschnitt.

Integration rationaler algebraischer Differentiale.

§ 5. Integration echt gebrochener rationaler Funktionen.

a) Zur Ermittlung des Integrals

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)(x-b)\ldots(x-n)}$$

zerlege man in Partialbrüche

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{N}{x-n},$$

dann folgt

$$A = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-n)},$$

$$B = \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-n)},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$N = \frac{f(n)}{(n-a)(n-b)\ldots(n-m)},$$

oder auch

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad \ldots, \quad N = \frac{f(n)}{F'(n)}.$$

Nach Berechnung der Zähler A, B, ... ergibt sich für das gesuchte Integral der Ausdruck

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = A\,l(x-a) + B\,l(x-b) + \ldots + N\,l(x-n).$$

41. Beispiel.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 - x + 4}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$A = \frac{1+1+4}{(-2)(+1)} = -3, \quad B = \frac{1-1+4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$C = \frac{4+2+4}{(-1)(-3)} = \frac{10}{3},$$

daher ist

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = -3\,l(x+1) + \tfrac{2}{3}\,l(x-1) + \tfrac{10}{3}\,l(x+2) + C.$$

b) Enthält der Nenner imaginär konjugierte Faktoren, z. B. $x - a - ib$ und $x - a + ib$, und ergibt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{x-a-ib} + \frac{B}{x-a+ib}$$

für die Zähler

$$A = \frac{f(a+ib)}{F'(a+ib)} = p + iq, \quad B = \frac{f(a-ib)}{F'(a-ib)} = p - iq,$$

so erhält man durch Vereinigung der Brüche

$$\frac{p+iq}{x-a-ib} + \frac{p-iq}{x-a+ib} = \frac{2p(x-a) - 2bq}{(x-a)^2 + b^2}$$

und hieraus durch Integration

$$\int \frac{A\,dx}{x-a-ib} + \int \frac{B\,dx}{x-a+ib}$$

$$= p\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx - 2bq\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^2+b^2}$$

$$= pl\{(x-a)^2+b^2\} - 2q \operatorname{arc\,tg} \frac{x-a}{b}.$$

42. Beispiel. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ zu berechnen.

Man erhält

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}}.$$

Da nun $f(x) = 1$, $F(x) = x^3+1$, $F'(x) = 3x^2$ ist, so folgt

$$F'(-1) = 3, \quad F'\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\sqrt{3}$$

$$F'\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\sqrt{3}$$

und $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{6}-\frac{i}{6}\sqrt{3}$,

$$C = -\frac{1}{6}+\frac{i}{6}\sqrt{3}, \quad p = -\frac{1}{6}, \quad q = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \tfrac{1}{3}l(x+1) - \tfrac{1}{6}l(x^2-x+1)$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

§ 6. Übungsbeispiele.

43. $$\int \frac{4x^3 - 7x + 2}{2x + 1}\, dx = \tfrac{2}{3} x^3 - \tfrac{1}{2} x^2 - 3x + \tfrac{5}{2} l(2x + 1).$$

44. $$\int \frac{31x - 96}{6(x^2 - 3x - 18)}\, dx = \tfrac{5}{3} l(x - 6) + \tfrac{7}{2} l(x + 3).$$

45. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x + a} = \frac{1}{2a} l \frac{x - a}{x + a}.$$

46. $$\int \frac{2x - 6}{x^2 - 2x + 5}\, dx = l\{(x-1)^2 + 4\} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{2}.$$

47. $$\int \frac{2x^2 - 8x + 14}{(x^2 - 1)(x - 3)}\, dx = 3l(x+1) + l(x-3) - 2l(x-1).$$

48. $$\int \frac{2x^3 - 16ax^2 - 8a^2x + 16a^3}{(x^2 - a^2)(x^2 - 4a^2)}\, dx = l(x^2 - a^2) - 4l \frac{x - 2a}{x + 2a}.$$

49. $$\int \frac{5x^2 + 3ax + 9a^2}{x^3 - 3ax^2 + 2a^2x}\, dx = \tfrac{9}{2} lx - 17 l(x - a) + \tfrac{35}{2} l(x - 2a).$$

50. $$\int \frac{x - 3}{x^2 + 1}\, dx = \tfrac{1}{2} l(x^2 + 1) - 3 \operatorname{arctg} x.$$

51. $$\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)} = lx - \tfrac{1}{2} l(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$

52. $$\int \frac{-2x^2+6x+13}{(x-1)(x^2+5x+11)}\,dx = l(x-1) - \tfrac{3}{2}\,l(x^2+5x+11) + \frac{11}{\sqrt{19}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+5}{\sqrt{19}}.$$

53. $$\int \frac{2x^2-2x+3}{x^3+1}\,dx = 2\,l(x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

54. $$\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x}\,dx = \tfrac{2}{3}x^3+3x+l(x-1)+2\,lx.$$

§ 7. Mehrfach vorkommende Wurzelfaktoren im Nenner.

a) Das Integral $\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^n}$ zu ermitteln, wenn der Grad von $f(x)$ kleiner als n ist.

Man setze

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_{n-2}}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a},$$

dann ist

$$f(x) = A_n + A_{n-1}(x-a) + A_{n-2}(x-a)^2 + \dots + A_1(x-a)^{n-1},$$

woraus folgt

$$A_n = f(a),\quad A_{n-1} = \frac{1}{1!}f'(a),\quad A_{n-2} = \frac{1}{2!}f''(a),\ \dots,$$

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a),$$

und es ist das gesuchte Integral angegeben durch

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A n}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

$$-\frac{A_{n-1}}{(n-2)(x-a)^{n-2}} \cdots - \frac{A_2}{x-a} + A_1\, l\,(x-a)\,.$$

55. Beispiel.

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}\,.$$

Man setze

$$f(x) = x^3 + 1 = A_4 + A_3(x-1) + A_2(x-1)^2 + A_1(x-1)^3\,,$$

dann ist

$$f'(x) = 3x^2 = A_3 + 2A_2(x-1) + 3A_1(x-1)^2$$

$$f''(x) = 6x = 2A_2 + 6A_1(x-1)$$

$$f'''(x) = 6 = 6A_1\,,$$

somit ist für $x = 1$

$$A_4 = f(1) = 2\,, \qquad A_3 = f'(1) = 3$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2} f''(1) = 3\,, \quad A_1 = \tfrac{1}{6} f'''(1) = 1$$

und

$$\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}\,dx = -\frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + l\,(x-1)\,.$$

56. Beispiel.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{1}{8}\, l \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{4(x^2+1)} - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,.$$

b) Wenn der zu integrierende Bruch von der Form $\frac{x^m}{(x-a)^n}$, wo $m < n$ ist, so kann auch die Methode der teilweisen Integration zur Reduktion des Integrals angewendet werden.

Man erhält

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{x^m}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{m}{n-1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(x-a)^{n-1}}.$$

57. Beispiel. Nach dieser Formel ist

$$\int \frac{x^3}{(x-a)^4}\,dx = -\frac{x^3}{3\,(x-a)^3} + \int \frac{x^2\,dx}{(x-a)^3}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-a)^3} = -\frac{x^2}{2\,(x-a)^2} + \int \frac{x\,dx}{(x-a)^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x-a)^2} = -\frac{x}{x-a} + \int \frac{dx}{x-a}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = l\,(x-a)\,,$$

somit

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-a)^4} = -\frac{x^3}{3(x-a)^2} - \frac{x^2}{2\,(x-a)^2} - \frac{x}{x-a} + l(x-a)\,.$$

58. $$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2\,(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + l\,(x+1)\,.$$

c) Das Integral zu ermitteln $J = \int \dfrac{f(x)\,dx}{(x-a)^k\,\varphi(x)}$.

Setzt man

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k\,\varphi(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{A_1}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\,,$$

so folgt hieraus

$$f(x) = \varphi(x)\{A_k + A_{k-1}(x-a) + \ldots + A_1(x-a)^{k-1}\} \\ + \psi(x)(x-a)^k,$$

und man erhält zur Bestimmung von $A_k, A_{k-1}, \ldots$ die Gleichungen

$$f(a) = A_k\varphi(a)$$

$$f'(a) = A_k\varphi'(a) + \binom{1}{1}1!\,A_{k-1}\varphi(a)$$

$$f''(a) = A_k\varphi''(a) + \binom{2}{1}1!\,A_{k-1}\varphi'(a) + \binom{2}{2}2!\,A_{k-2}\varphi(a)$$

$$f'''(a) = A_k\varphi'''(a) + \binom{3}{1}1!\,A_{k-1}\varphi''(a) \\ + \binom{3}{2}2!\,A_{k-2}\varphi'(a) + \binom{3}{3}3!\,A_{k-3}\varphi(a)$$

. . .

. . .

Das Integral der ursprünglichen gebrochenen Funktion ergibt sich alsdann durch Integration der einzelnen Partialbrüche.

59. Beispiel. $J = \int \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2(x-1)^3}\,dx\,.$

Setze

$$\frac{f(x)}{x^2(x-1)^3} = \frac{x^3+3x+2}{x^2(x-1)^3} \\ = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{\psi(x)}{x^2},$$

dann ist

$$f(x) = x^3 + 3x + 2 = x^2\{A_3 + A_2(x-1) + A_1(x-1)^2\} \\ + \psi(x)(x-1)^3$$

$$f(1) = 6 = A_3$$

$$f'(1) = 6 = 2A_3 + A_2$$

$f''(1) = 6 = 2A_3 + 4A_2 + 2A_1\,,$ woraus folgt

$$A_3 = 6\,,\quad A_2 = -6\,,\quad A_1 = 9\,.$$

Setzt man ebenso

$$\frac{f(x)}{x^2(x-1)^3} = \frac{x^3+3x+2}{x^2(x-1)^3} = \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{\psi(x)}{(x-1)^3},$$

so folgt

$$f(x) = x^3+3x+2 = (x-1)^3\{B_2 + B_1 x\} + \psi(x)\cdot x^2$$

und $f(0) = 2 = -B_2$, $f'(0) = 3 = 3B_2 - B_1$,

woraus folgt $B_2 = -2$, $B_1 = -9$.

Das gesuchte Integral ist somit

$$J = \int\frac{6\,dx}{(x-1)^3} - \int\frac{6\,dx}{(x-1)^2} + \int\frac{9\,dx}{x-1} - \int\frac{2\,dx}{x^2} - \int\frac{9\,dx}{x}$$

$$= -\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1} + \frac{2}{x} + 9l(x-1) - 9lx.$$

§ 8. Übungsbeispiele.

60. $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{(x+2)^3}dx = -\frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{4}{x+2} + l(x+2).$

61. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-a)^4}dx = -\tfrac{1}{3}\left\{\frac{x^2}{(x-a)^3} + \frac{x}{(x-a)^2} + \frac{1}{x-a}\right\}.$

62. $\displaystyle\int\frac{(x+1)^3}{(x-1)^4}dx = -\frac{6x^2-6x+\frac{8}{3}}{(x-1)^3} + l(x-1).$

63. $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}dx = x - \frac{1}{x} + lx + 2l(x-1).$

64. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-a)^2} = -\frac{1}{a(x-a)} - \frac{1}{a^2}l\frac{x-a}{x}.$

65. $\displaystyle\int\frac{x^4-5x^3-30x^2-36x}{(x+1)^3(x^2-4)}dx = \frac{1-x}{(1+x)^2}$

$$+ 2l\frac{x+2}{x-2} + l(x+1).$$

66. $$\int \frac{dx}{(x-1)^3(x-2)^2 x} = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-2)} + 2l(x-1) - \tfrac{1}{4} lx - \tfrac{7}{4} l(x-2).$$

67. $$\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{4x-7}{54(x-1)^2} + \tfrac{1}{27} l \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{27(x+2)}.$$

68. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \tfrac{1}{8} l \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{4(x^2+1)} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

69. $$\int \frac{x^5\,dx}{(x^3+1)^2} = \tfrac{1}{3} l(x^3+1) + \frac{1}{3(x^3+1)}.$$

70. $$\int \frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}\,dx = -\frac{5x+1}{x^2-1} + 4l(x-1) - l(x+1).$$

71. $$\int \frac{(x^3+3x^2+3x+2)\,dx}{x^3(x+1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2lx - l(x+1).$$

72. $$\int \frac{(x^3+4x^2+11x+18}{(x+1)^2(x+3)^2} = -\frac{5}{2(x+1)} - l(x+1) + \frac{3}{2(x+3)} + 2l(x+3).$$

73. $$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{2} l(x-1) - \tfrac{1}{4} l(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

III. Abschnitt.

Integration irrationaler Differentiale.

§ 9. Gebrochene Exponenten von x oder n^{te} Wurzel aus $a + bx$ in $f(x)$.

a) Sind in dem Integral $\int f(x)\,dx$ neben ganzen Potenzen von x auch solche mit gebrochenen Exponenten vorhanden, deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfache k ist, so setze man $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}\,dt$, dann geht obiges Integral in ein rationales über.

$$\int f(x)\,dx = k\int f(t^k)\,t^{k-1}\,dt\,.$$

74. **Beispiel.** Zu integrieren $J = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$.

Setze $x = t^6$, so ist $dx = 6t^5\,dt$,

womit das Integral übergeht in

$$J = 6\int \frac{t^2\,dt}{t+1} = 6\int\left\{t - 1 + \frac{1}{t+1}\right\}dt$$

$$= 3t^2 - 6t + 6l(t+1) \quad \text{oder in}$$

$$J = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6l\left(\sqrt[6]{x} + 1\right).$$

b) Integrale von der Form $\int f\left(x, \sqrt[n]{a + bx}\right)dx$ werden rational gemacht, indem man setzt

$$a + bx = y^n\,, \quad x = \frac{1}{b}(y^n - a)\,, \quad dx = \frac{n}{b}y^{n-1}\,dy\,.$$

75. **Beispiel.** Zu integrieren $J = \int x\sqrt{a - x}\,dx$.

Setzt man $a - x = y^2$,

so folgt $x = a - y^2$, $dx = -2y\,dy$ und

$$J = -2\int y^2(a - y^2)\,dy = -\tfrac{2}{3}ay^3 + \tfrac{2}{5}y^5 \quad \text{oder}$$

$$J = -\tfrac{2}{15}(2a + 3x)\sqrt{(a - x)^3}\,.$$

§ 10. Übungsbeispiele.

76. $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -x - 4\sqrt{x} - 4\,l(\sqrt{x}-1)\,.$$

77. $$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+1} + l\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,.$$

78. $$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \tfrac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x} + \tfrac{6}{7}\,x\sqrt[6]{x} + x$$
$$+ \tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$$
$$+ 9\,l\left(\sqrt[6]{x}-1\right) + 3\,l\left(\sqrt[6]{x}+1\right).$$

79. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}\,.$$

80. $$\int \sqrt{(a+bx)^m}\,dx = \frac{2}{(m+2)\,b}\sqrt{(a+bx)^{m+2}}\,.$$

81. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a-x}} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{a-x}\,(x+2a)\,.$$

82. $$\int x^2\sqrt{a+x}\,dx$$
$$= \tfrac{2}{105}\sqrt{a+x}\,(8a^3 - 4a^2x + 3ax^2 + 15x^3)\,.$$

83. $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\,l\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\,.$$

84. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a-x}} = -\tfrac{3}{10}\sqrt[3]{(a-x)^2}\,(2x+3a)\,.$$

85. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{a+bx}} = \frac{5}{36\,b^2}\sqrt[5]{(a+bx)^4}\,(4bx-5a)\,.$$

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{1}{3a}\left\{(x+a)^{\frac{3}{2}} + (x-a)^{\frac{3}{2}}\right\}.$

87. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

§ 11. Ausdruck zweiten Grades unter dem Quadratwurzelzeichen.

Das Integral zu ermitteln

$$J = \int f\left(x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\right) dx = \int f(x, W)\, dx.$$

Kommt die Quadratwurzel W in irgend einem Glied der Funktion f im Zähler vor, so schaffe man sie in den Nenner, indem man mit $W = \sqrt{a+2bx+cx^2}$ erweitert; dann bleiben nur Glieder von der Form

$$\frac{x^n}{W} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{(x-\alpha)^k W}$$

zu integrieren.

Da die letzteren durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{y}$ in solche der ersten Art übergehen, so hat man nur noch Integrale von der Form zu behandeln

$$\int \frac{x^n}{W} dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{W} dx,$$

welche sich mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten zurückführen lassen auf das Integral $\int \frac{dx}{W}$, indem man setzt

$$\int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{W} dx$$
$$= (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_0)\, W + \beta \int \frac{dx}{W},$$

woraus die Koeffizienten α und β nach beiderseitiger Differentiation dieser Gleichung durch Koeffizientenvergleichung gewonnen werden.

In betreff des Integrals $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$ unterscheidet man folgende Fälle:

Erster Fall: Der Koeffizient c von x^2 ist positiv, also $c > 0$, dann ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} l\left\{b + cx - \sqrt{c} \cdot W\right\} \quad \text{oder}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} l\left\{b + cx + \sqrt{c} \cdot W\right\},$$

$$W = \sqrt{a + 2bx + cx^2}.$$

Zweiter Fall: Der Koeffizient c von x^2 ist negativ, also $c < 0$, dann ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} \quad \text{oder}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-(b + cx)}{\sqrt{b^2 - ac}}.$$

Wird in diesem Fall $b^2 - ac = 0$, was nur sein kann, wenn außer c auch a negativ wird, so ist

$$W = \sqrt{a + 2bx + cx^2} = x\sqrt{c} + \sqrt{a}$$

$$= \sqrt{-1}\left(x\sqrt{-c} + \sqrt{-a}\right)$$

und es läßt sich das Integral nach dem ersten Fall leicht ermitteln. Wie man sieht, wird das Integral imaginär.

88. Beispiel. $\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{1 - 2x + 3x^2}}\,dx$ zu ermitteln.

Zur Reduktion des vorliegenden Integrals setze man

$$\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{1 - 2x - 3x^2}}\,dx = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\,W + \beta \int \frac{dx}{W},$$

wo α_2, α_1, α_0 und β unbestimmte Koeffizienten bedeuten. Um dieselben zu bestimmen, differentiiere man vorstehende Gleichung und multipliziere mit

$$W = \sqrt{1 - 2x + 3x^2}$$

durch, dann ergibt sich die Gleichung

$$9x^3 - 3x^2 + 2 = (2\alpha_2 x + \alpha_1)(1 - 2x + 3x^2)$$
$$+ (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(-1 + 3x) + \beta,$$

woraus durch Koeffizientenvergleichung folgt

$$\alpha_2 = 1,\quad \alpha_1 = \tfrac{1}{3},\quad \alpha_0 = -\tfrac{1}{3},\quad \beta = \tfrac{4}{3}.$$

Da nun der Koeffizient von x^2 in $\sqrt{1 - 2x + 3x^2}$ positiv ist, so folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, l\left\{-1+3x+\sqrt{3}\,\sqrt{1-2x+3x^2}\right\}.$$

Das gesuchte Integral ist daher dargestellt durch

$$\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{1 - 2x + 3x^2}}\,dx = \left(x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) W$$
$$+ \frac{4}{3\sqrt{3}}\, l\left\{-1 + 3x + \sqrt{3}\,W\right\}.$$

§ 12. Übungsbeispiele.

W bedeutet die zu dem betreffenden Integral gehörige Wurzel.

a) Reduktionen.

89. $$\int \frac{4x^2+7x+5}{\sqrt{2x^2+6x+7}}\,dx = (x-1)W + \int \frac{dx}{W}.$$

90. $$\int \frac{1+2x+2x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,dx = -\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right)W + \frac{15}{16}\int \frac{dx}{W}.$$

91. $$\int \frac{A+2Bx+Cx^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{c}x + \frac{4Bc-3Cb}{c^2}\right)W + \left(A - \frac{Cac+4Bbc-3Cb^2}{2c^2}\right)\int \frac{dx}{W}.$$

92. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{W}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{W}.$$

93. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{2c^2}\right)W + \frac{3b^2-ac}{2c^2}\int \frac{dx}{W}.$$

94. $$\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int \frac{a+2bx+cx^2}{W}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)W + \left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int \frac{dx}{W}.$$

95. $$\int \sqrt{7+8x-5x^2}\,dx = \tfrac{1}{10}(5x-4)W + \tfrac{51}{10}\int \frac{dx}{W}.$$

b) Integrale von der Form $\int \frac{dx}{W}$.

96. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6x+7}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l(3+2x+\sqrt{2}W).$$

97. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-4x^2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin \frac{1+4x}{\sqrt{5}}.$$

98. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = l(\tfrac{1}{2}+x+W).$$

99. $$\int\frac{dx}{\sqrt{7+8x-5x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{4-5x}{\sqrt{51}} \quad \text{oder}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-4}{\sqrt{51}}.$$

100. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = l(1+x+W).$$

101. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{b}}\,l\left(bx\pm\sqrt{b}\cdot W\right).$$

102. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

103. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2bx+cx^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\left(b+cx\pm\sqrt{c}\cdot W\right).$$

104. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2bx-cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{b-cx}{b} \quad \text{oder}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{cx-b}{b}.$$

105. $$\int\frac{dx}{\sqrt{3+6x-4x^2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin\frac{4x-3}{\sqrt{21}}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\arcsin\frac{3-4x}{\sqrt{21}}.$$

106. $$\int\frac{dx}{\sqrt{-9+6x-x^2}} = -\sqrt{-1}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$
$$= \mp\sqrt{-1}\int\frac{dx}{x-3}.$$

c) Weitere Integrale mit Reduktionen.

107. $$\int\sqrt{a+bx^2}\,dx=\frac{x}{2}W+\frac{a}{2\sqrt{b}}l\left(bx+\sqrt{b}\cdot W\right).$$

108. $$\int\sqrt{a-bx^2}\,dx=\frac{x}{2}W+\frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

109. $$\int\sqrt{2ax+x^2}\,dx=\frac{a+x}{2}W-\frac{a^2}{2}l(a+x+W).$$

110. $$\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{x-a}{2}W-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a-x}{a}.$$

111. $$\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{ax}{6}-\frac{a^2}{2}\right)W$$
$$+\frac{a^3}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

112. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}.$$

113. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

114. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}.$$

115. $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{x}{2b}W-\frac{a}{2b\sqrt{b}}l\left(bx+\sqrt{b}\,W\right).$$

116. $$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\left(\frac{x^2}{3b}-\frac{2a}{3b^2}\right)W.$$

d) Integrale von der Form $J=\int\frac{dx}{(x-\alpha)W}$ werden ermittelt, indem man setzt

$$x-\alpha=\frac{1}{y}, \quad dx=-\frac{dy}{y^2},$$

womit das Integral übergeht in

$$J=-\int\frac{dy}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)y+(a+2b\alpha+c\alpha^2)y^2}},$$

worin $a+2ba+c\alpha^2>0$ oder <0 und gleich Null sein kann und die oben betrachteten Fälle eintreten können.

117. $$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{1-3y^2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x-2}.$$

118. $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+4}{(x-1)\sqrt{6}}.$$

119. $$\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-8x+8}}=-\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{x+4}{(x-3)\sqrt{8}}.$$

120. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{x}.$$

121. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}=-\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{5}}.$$

Allgemein ist für $a+2b\alpha+c\alpha^2>0$ und $=p$:

122. $$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$
$$=\mp\frac{1}{\sqrt{p}}\,l\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x\pm\sqrt{p}\cdot W}{x-\alpha}.$$

Für $a+2b\alpha+c\alpha^2<0$ und $=-q$, wo q positiv ist, erhält man:

123. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \arcsin \frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}.$$

124. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\, \frac{a+bx \pm \sqrt{a}\cdot W}{x}.$$
(a positiv.)

125. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{-a+bx}{x\sqrt{b^2+ac}}.$$
(a positiv.)

126. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\, l\, \frac{x+2+2W}{x}.$$

Auch die Integrale von der Form $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k W}$ werden durch die Substitution $x-\alpha=\frac{1}{y}$ in solche von der Form $\int \frac{y^{k-1}dy}{W}$ übergeführt. Letztere werden wie das Integral 88 reduziert und schließlich integriert. Man erhält beispielsweise mit dieser Substitution:

127. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{a+2bx+cx^2}}$$
$$= -\int \frac{y^{n-1}dy}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)y+(a+2b\alpha+c\alpha^2)y^2}}.$$

128. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{6-6x+x^2}} = -\frac{1}{x-1}W$$
$$+ 2l\frac{3-2x-W}{x-1}.$$

129. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+2bx+cx^2}}=-\frac{W}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{xW}.$$

130. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-4x-2x^2}}=-\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}\right)W$$
$$+7l\frac{1-2x-W}{x}.$$

131. $$\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-2x-2}}=-\frac{W}{x+1}$$
$$+2l\frac{-1-2x-W}{x+1}.$$

132. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{W}{2x^2}-\tfrac{1}{2}l\frac{1-W}{x}.$$

133. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-4x-2x^2}}=-\frac{1+6x}{2x^2}W$$
$$+7l\frac{1-2x-W}{x}.$$

e) Integrale von der Form $J=\int\frac{f(x)}{F(x)W}dx$ werden dadurch ermittelt, daß man $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche zerlegt, wodurch das Integral J in eine Summe von solchen der seitherigen Arten übergeht.

134. $$\int\frac{dx}{(x^2-4)W}=\frac{1}{4}\int\left\{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right\}\frac{dx}{W}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-2)W}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+2)W}.$$

135. $$\int\frac{(x+2)\,dx}{(x-3)^2W}=5\int\frac{dx}{(x-3)^2W}+\int\frac{dx}{(x-3)W}.$$

136. $$\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2\sqrt{x^2+6x+45}} = \frac{2}{45}\frac{W}{x} - \frac{17}{45\sqrt{5}}\, l\, \frac{x+15+\sqrt{5}\,W}{x}.$$

f) Besondere irrationale Integrale. Durch Einführung neuer Veränderlichen lassen sich folgende Integrale auf einfachere zurückführen und integrieren.

137. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y}} = -\sqrt{a^2-x^2} \quad [x^2=y].$$

138. $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+cx^4}} = \frac{1}{2c}\sqrt{a+cx^4}.$$

139. $$\int \sqrt{\frac{x}{a^3-x^3}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{a^3-y^2}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}} \quad [x^3=y^2].$$

140. $$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$$

141. $$\int x^3\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx = \frac{x^2-2a^2}{4}\sqrt{a^4-x^4} - \frac{a^4}{4}\arcsin\frac{x^2}{a^2}.$$

IV. Abschnitt.

Integration transzendenter Differentiale.

§ 13. Exponential- und logarithmische Funktionen.

a) Grundformeln.

142. $$\begin{cases} \int e^x\,dx = e^x\,. \\ \int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{la}\,. \end{cases}$$

b) Integration durch Substitution.

143. $$\int f(e^{kx})\,e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int f(y)\,dy\,,$$
$$e^{kx} = y\,,\quad e^{kx}dx = dy\,.$$

144. $$\int \frac{dx}{e^{kx}} = -\frac{1}{ke^{kx}}\,.$$

145. $$\int \frac{e^x\,dx}{(e^x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,(e^x+a)^{n-1}}\,.$$

146. $$\int f(e^{kx})\,dx = \frac{1}{k}\int f(y)\,\frac{dy}{y}\,.$$
$$e^{kx} = y\,,\quad dx = \frac{dy}{ky}\,.$$

147. $$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = l(e^x - 2 + e^{-x})\,.$$

148. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = l(\sqrt{1+e^x}-1) - l(\sqrt{1+e^x}+1)\,.$$

149. $$\int f(a^x)\,a^x\,dx = \frac{1}{la}\int f(y)\,dy\,.$$
$$a^x = y\,,\quad a^x la\,dx = dy\,.$$

150. $\int \frac{a^x\,dx}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2\,la}\,l(a^{2x}+1)\,.$

151. $\int f(a^x)\,dx = \frac{1}{l\,a}\int f(y)\,\frac{dy}{y}\,.$

$$a^x = y\,,\quad a^x\,la\,dx = dy\,.$$

152. $\int \frac{a^x+1}{a^x-1}\,dx = \frac{1}{l\,a}\,l\frac{(a^x-1)^2}{a^x}\,.$

153. $\int f(a^x)\,dx = \int f(e^{kx})\,dx\,.$

$$a = e^k\,,\quad k = la\,.$$

154. $\int \frac{a^x}{a^x-1}\,dx = \int \frac{e^{kx}\,dx}{e^{kx}-1} = \frac{1}{k}\,l(e^{kx}-1)\,.$

155. $\int \frac{dx}{a^x + a^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{kx}+e^{-kx}} = \frac{1}{k}\,\mathrm{arctg}\,e^{kx}$

$$= \frac{1}{l\,a}\,\mathrm{arctg}\,a^x\,.$$

156. $\int f(lx)\,\frac{dx}{x} = \int f(lx)\,dlx = \int f(y)\,dy\,.$

$$lx = y\,,\quad \frac{dx}{x} = dy\,.$$

157. $\int \frac{lx}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{(lx)^2}{2}\,.$

158. $\int \frac{(lx)^2+1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\,(lx)^3 + lx\,.$

159. $\int \frac{dx}{x\,(lx+1)} = \int \frac{dy}{y+1} = l(lx+1)\,.$

c) Die Methode der teilweisen Integration nach der Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ wird mit Vorteil angewendet, wenn es sich darum handelt, Integrale von folgender Art zu ermitteln:

160. $\int x^2 e^x dx = \int x^2\, de^x = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx$.

$$\int x\, e^x\, dx = \int x\, de^x = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)\,.$$

161. $\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,.$

162. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx$

$$= e^x \{x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \ldots\}\,.$$

163. $\displaystyle\int x^n e^{kx} dx = \frac{x^n e^{kx}}{k} - \frac{n}{k}\int e^{kx} x^{n-1}\, dx\,.$

164. $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}) e^{3x}\,.$

165. $\displaystyle\int (a + bx)^n e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}(a + bx)^n - \frac{nb}{k}\int (a + bx)^{n-1} e^{kx} dx\,.$

166. $\displaystyle\int \frac{e^{kx}\, dx}{(a + bx)^n} = -\frac{1}{b(n-1)}\,\frac{e^{kx}}{(a + bx)^{n-1}} + \frac{k}{b(n-1)}\int \frac{e^{kx}\, dx}{(a + bx)^{n-1}}\,.$

Integrale von der Form $\displaystyle\int \frac{e^{kx}\, dx}{a + bx}$ lassen sich nur durch Reihenentwicklung ermitteln.

167. $$\int \frac{e^x\,dx}{x} = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right) dx$$
$$= lx + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \ldots$$

168. $$\int \frac{e^x\,dx}{x^2} = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}\,dx \quad \text{usw.}$$

169. $\int lx\,dx = x(lx - 1)$.

170. $\int (lx)^2\,dx = x\{(lx)^2 - 2\,lx + 2\}$.

171. $\int (lx)^n\,dx = x(lx)^n - n\int (lx)^{n-1}\,dx$.

172. $$\int x^n\,lx\,dx = \frac{x^{n+1}\,lx}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right).$$

173. $$\int \frac{lx}{x^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\left(lx + \frac{1}{n-1}\right).$$

174. $$\int (a+bx)^2\,lx\,dx = \frac{(a+bx)^3\,lx}{3\,b}$$
$$- \frac{1}{3\,b}\int \frac{(a+bx)^3}{x}\,dx.$$

§ 14. Trigonometrische Funktionen.

a) Grundformeln.

175. $\int \cos x\,dx = \sin x$.

176. $\int \sin x\,dx = -\cos x$.

177. $$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx.$$

178. $\int \sin nx\, dx = -\frac{1}{n} \cos nx$.

179. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

180. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

b) Integration durch Substitution.

181. $\int f(\sin x) \cos x\, dx = \int f(y)\, dy$.

$$\sin x = y, \quad \cos x\, dx = dy.$$

182. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -l \cos x$.

183. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, dx = l \sin x - l \cos x = l \operatorname{tg} x$.

184. $\int \cos^n x \sin x\, dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x$.

185. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \cos^{n+1} x}$.

186. $\int f(\sin x) \cos^{2n+1} x\, dx = \int f(\sin x)(1 - \sin^2 x)^n d \sin x$.

187. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x)\, d \sin x$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}.$$

188. $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x$.

189. $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x$.

190. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - l \cos x$.

191. $\int \frac{\sin^5 x\, dx}{\cos x} = \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{4} - l \cos x$.

192. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}$.

193. $\int \sin^{2n+1} x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^n d\cos x$.

194. $\int \sin^3 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)\, d\cos x$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}.$$

195. $\int \sin^5 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d\cos x$
$$= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x.$$

196. $\int \sin^7 x\, dx = -\cos x + \cos^3 x - \tfrac{3}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x$.

197. $\int \mathrm{tg}^{2n+1} x\, dx = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^n}{\cos^{2n+1} x} d\cos x$.

198. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + l\cos x$.

199. $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \tfrac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - l\cos x$.

200. $\int f(\mathrm{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\mathrm{tg} x)\, d\,\mathrm{tg} x$.

201. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \mathrm{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \mathrm{tg} x\, d\,\mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}$.

202. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \mathrm{tg}^3 x\, d\,\mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}$.

203. $\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} dx = \int \mathrm{tg}^n x\, d\,\mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{tg}^{n+1} x}{n+1}$.

204. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\mathrm{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{d\,\mathrm{tg} x}{\mathrm{tg} x} = l\,\mathrm{tg} x$.

205. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = l\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

206. $\int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Durch die Substitution

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2},$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x = dy$$

werden folgende Integrale rational gemacht und leicht integrierbar:

207. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x \cos^{2n} x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^{2m} x} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m+n-1}$$
$$= \int \frac{(1 + y^2)^{m+n-1}}{y^{2m}} dy.$$

208. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x.$$

209. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x$.

Setzt man $\sin x = y$, $\cos x \, dx = dy$, so ergeben sich folgende Integrale, die durch Partialbruchzerlegung weiterzubehandeln sind:

210. $\int \frac{f(\sin x)\, dx}{\cos^{2n-1} x} = \int f(\sin x) \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^n} = \int \frac{f(y)\, dy}{(1 - y^2)^n}$.

211. $\int \frac{\sin^n x \, dx}{\cos x} = \int \frac{\sin^n x \, d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{y^n \, dy}{1 - y^2}$.

212. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\sin x - \frac{1}{2} l \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$.

213. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

214. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x$

$$+ l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

215. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{3}{2}\sin x - \sin^3 x\right)$

$$- \frac{3}{2} l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Die Substitution $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$ gibt

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2y}{1-y^2},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-y^2}{2y}, \quad dx = \frac{2\,dy}{1+y^2}.$$

216. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{y} = ly = l \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

217. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int dy = y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

218. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{\sin\alpha}{a} l \operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2} \left[\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha\right]$.

219. $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$.

220. $$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a\sin x - b\cos x}{a\cos x + b\sin x + c}.$$
(Für $c^2 = a^2 + b^2$.)

c) Integration durch allmähliche Reduktion nach der Formel $$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

221. $$\int \sin^n x\,dx = -\int \sin^{n-1} x\,d\cos x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\,dx$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx\,.$$

Hieraus folgt
$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx\,.$$

Setzt man $x = \frac{\pi}{2} - y$, $dx = -dy$ und schreibt nachher wieder x für y, so folgt hieraus

222. $$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx\,.$$

Werden diese Formeln umgekehrt und wird alsdann $n-2$ durch $-n$ ersetzt, so ergeben sich hieraus die weiteren Formeln:

223. $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}\,.$$

224. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}\,.$$

225. $$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \tfrac{1}{2}\sin x \cos x\,.$$

226. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

227. $\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3}(\sin^2 x + 2)\cos x.$

228. $\int \sin^4 x\, dx = \frac{3x}{8} - \cos x\left(\frac{\sin^3 x}{4} + \frac{3}{8}\sin x\right).$

229. $\int \sin^5 x\, dx = -\cos x\left(\frac{1}{5}\sin^4 x + \frac{4}{15}\sin^2 x + \frac{8}{15}\right).$

230. $\int \sin^6 x\, dx = \frac{5}{16}x - \cos x\left(\frac{1}{6}\sin^5 x + \frac{5}{24}\sin^3 x + \frac{5}{16}\sin x\right).$

231. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

232. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\cos x\left(\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3\sin x}\right) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$$

Auf Integrale dieser Art lassen sich auch die folgenden zurückführen:

233. $\int \cos^{2m} x \sin^{2n} x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^m \sin^{2n} x\, dx.$

234. $$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^4 x\, dx = \frac{x}{8} + \cos x\left(\frac{\sin^3 x}{4} + \frac{\sin x}{8}\right).$$

235. $$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{x}{16} + \cos x\left(\frac{\sin^5 x}{6} - \frac{\sin^3 x}{24} - \frac{\sin x}{16}\right).$$

236. $\int f(\sin x)\cos^{2n} x\, dx = \int f(\sin x)(1 - \sin^2 x)^n\, dx.$

237. $$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x)\, dx = \int \sin^5 x\, dx - \int \sin^7 x\, dx\,.$$

238. $$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^5 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x}\,.$$

Die teilweise Integration führt auch zu folgenden Formeln:

239. $$\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$$

240. $$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x\,.$$

241. $$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + l \cos x\,.$$

242. $$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x\,.$$

§ 15. Vermischte transzendente Funktionen.

a) Integration durch Substitution.

243. $$\int f(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int f(y)\, dy\,.$$

$$\arcsin x = y\,, \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = dy\,.$$

244. $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \arcsin x\, d \arcsin x = \tfrac{1}{2} (\arcsin x)^2\,.$$

245. $$\int f(\operatorname{arc\,tg} x) \frac{dx}{1 + x^2} = \int f(y)\, dy\,.$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = y\,, \quad \frac{dx}{1 + x^2} = dy\,.$$

246. $$\int \operatorname{arc\,tg} x \frac{dx}{1+x^2} = \int \operatorname{arc\,tg} x \, d \operatorname{arc\,tg} x$$
$$= \tfrac{1}{2} \{\operatorname{arc\,tg} x\}^2 .$$

b) Vermittels der teilweisen Integration ergeben sich die Integrale:

247. $$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} .$$

248. $$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - l\sqrt{1+x^2} .$$

249. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \arcsin x \, dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x .$$

250. $$\int x^n \arcsin x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x$$
$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

251. $$\int x^n \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,tg} x$$
$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx .$$

252. $$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx .$$

253. $$\int \frac{\sin x}{x^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx .$$

254. $$\int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx .$$

255. $$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx .$$

256. $$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx .$$

Aus den beiden letzten Integralen folgt:

257. $$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) .$$

258. $$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) .$$

V. Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

§ 16. Regeln und Lehrsätze über das bestimmte Integral.

a) Regel. Das bestimmte Integral $\int\limits_b^a f(x)\, dx$ zwischen den Grenzen a und b wird erhalten, indem man ohne Rücksicht auf die Konstante C das unbestimmte Integral $F(x)$ ermittelt und hierauf die Differenz der Werte bildet, welche dasselbe für $x = a$ und $x = b$ annimmt.

$$\int\limits_b f(x)\, dx = F(a) - F(b) .$$

259. Beispiel.

$$\int\limits_1^2 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} .$$

b) Satz. Ein bestimmtes Integral geht in seinen entgegengesetzten Wert über, wenn man die Grenzen miteinander vertauscht.

$$\int\limits_b^a f(x)\, dx = - \int\limits_a^b f(x)\, dx .$$

Satz. Ein bestimmtes Integral verschwindet, wenn die Grenzen einander gleich werden.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Satz. Anstatt die Integration von der Grenze b bis zur Grenze a direkt auszuführen, kann man eine (oder mehrere) Zwischengrenze c einführen und zunächst von b bis c integrieren und nachträglich die Integration von c bis a fortsetzen.

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx\,.$$

c) Integration bis $x = \infty$. Wird eine der Grenzen, z. B. die obere, unendlich groß, so wird der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \int_b^x f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \{F(x) - F(b)\}$$

als der Wert des Integrals bezeichnet für die obere Grenze $x = \infty$.

260. Beispiel.

$$\int_b^{x=\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x=\infty} \{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} b\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} b\,.$$

(Siehe Fig. 1.)

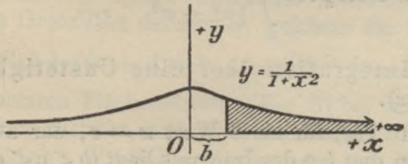


Fig. 1.

261. Beispiel.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{x=+\infty}\operatorname{arctg}x-\lim_{x=-\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi\,.$$

(Siehe Fig. 2.)

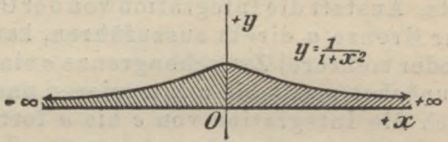


Fig. 2.

d) Integration bis zu einer Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

Wird $f(x)$ für eine der Grenzen, z. B. für die obere $x=a$ selbst unstetig durch Unendlichwerden, so heißt

$$\int_b^{x=a} f(x)\,dx=\lim_{x=a}\int_b^x f(x)\,dx=\lim_{x=a}\{F(x)-F(b)\}$$

der Wert des Integrals für den Fall, daß sich hierbei überhaupt ein bestimmter endlicher Grenzwert ergibt. Ist dies nicht der Fall, so darf die Integration auch nicht bis $x=a$ ausgedehnt werden.

262. Beispiel. $$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{x=a}\arcsin\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}\,.$$

e) Integration über eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$.

Wird $f(x)$ für einen Wert $x=c$, der zwischen den Grenzen dun b a des Integrals liegt $(b<c<a)$, unstetig,

so ist der Wert des bestimmten Integrals dargestellt durch den Grenzwert

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{x=c} \int_b^x f(x)\,dx + \lim_{x=c} \int_x^a f(x)\,dx\,.$$

263. Beispiel. $\displaystyle\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^{a} \frac{dx}{(x-a)^{\frac{2}{3}}} + \int_a^{2a} \frac{dx}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}$

$$= 3\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a}\,.$$

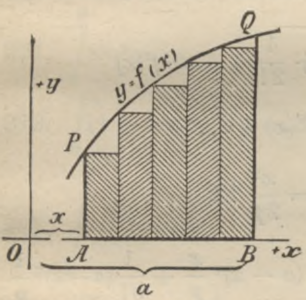


Fig. 3 a.

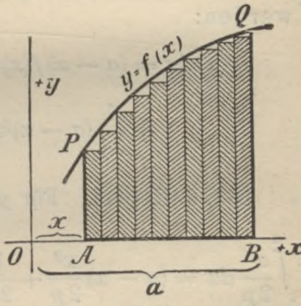


Fig. 3 b.

f) Geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals.

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen a und x läßt sich als Grenzwert definieren, welchem die Summe

$$Un = \Delta x\,\{f(x) + f(x+\Delta x) + \ldots + f(x+[n-1]\,\Delta x)\}$$

der n elementaren Flächenstreifen (Fig. 3) bei unendlich wachsendem n zustrebt, und stellt geometrisch den Inhalt der Fläche $PABQ = U$ dar, die von der Abszissenachse, den Ordinaten PA und QB und der Kurve $y = f(x)$ begrenzt wird.

$$U = \lim Un = \int_x^a f(x)\,dx = F(a) - F(x).$$

Satz. Das bestimmte Integral $\int_x^a f(x)\,dx$ zwischen den endlichen Grenzen a und x läßt sich, wenn $f(x)$ innerhalb derselben endlich und stetig ist, in eine konvergente nach Potenzen von $(a - x)$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten durch Ableitung von $f(x)$ gewonnen werden:

$$\int_x^a f(x)\,dx = (a - x)\,f(x) + \frac{1}{2!}(a - x)^2 f'(x) + \frac{1}{3!}(a - x)^3 f''(x) + \ldots$$

264. Beispiel. Für $y = \dfrac{x^2}{2p}$ ist

$$\int_x^a \frac{x^2}{2p}\,dx = (a - x)\frac{x^2}{2p} + \frac{1}{2!}(a - x)^2\,\frac{x}{p} + \frac{1}{3!}(a - x)^3\,\frac{1}{p} = \frac{1}{6p}(a^3 - x^3).$$

§ 17. Übungsbeispiele.

265. $\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = -\frac{1}{4}$.

266. $\int_0^1 \dfrac{dx}{1 + x^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

267. $\int\limits_0^1 a^{kx}\,dx = \frac{1}{k\,l\,a}(a^k - 1)\,.$

268. $\int\limits_0^1 x\,e^x\,dx = 1\,.$

269. $\int\limits_0^1 x^n\,lx\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2}\,.$

270. $\int\limits_1^\infty \frac{lx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)^2}\,.$

271. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\,.$

272. $\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = 3\pi\,.$

273. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{4}{3}\,.$

274. $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k}\,.$

275. $\int\limits_0^{-\infty} a^x\,dx = -\frac{1}{la}\,.$

276. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}\,.$

277. $\int\limits_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx = n\,!$

278. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

279. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

280. $\int\limits_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a$. (Fig. 21.)

VI. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die ebene Geometrie.

§ 18. Rektifikation ebener Kurven.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Die Länge s des Bogens PQ der Kurve $y = f(x)$ (Fig. 4) zu bestimmen.

Die gesuchte Länge ist dargestellt durch das bestimmte Integral

$$s = \int\limits_b^a \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int\limits_b^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

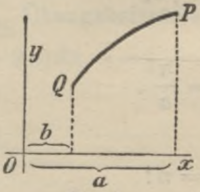


Fig. 4.

281. Beispiel. Die Länge des Kreisbogens zu berechnen.

Die Gleichung des Kreises sei $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Hieraus folgt

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ somit}$$

$$s = \int_0^a ds = a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} a.$$

Der Umfang des Kreises ist demnach $2\pi a$.

282. Beispiel. Die Länge des Bogens der Epizykloide mit den Gleichungen

$$x = (a + r)\cos t - r \cos \frac{a + r}{r} t,$$

$$y = (a + r)\sin t - r \sin \frac{a + r}{r} t$$

zu berechnen.

Vorstehende Gleichungen geben

$$dx = -(a + r)\left(\sin t - \sin \frac{a + r}{r} t\right) dt,$$

$$dy = (a + r)\left(\cos t - \cos \frac{a + r}{r} t\right) dt,$$

daher ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2(a + r)^2 \left\{1 - \cos \frac{a t}{r}\right\} dt^2$$

$$= 4(a + r)^2 \sin^2 \frac{at}{2r}\, dt^2,$$

$$ds = 2(a+r)\sin\frac{at}{2r}\,dt, \quad s = 2(a+r)\int_0^t \sin\frac{at}{2r}\,dt,$$

$$s = \frac{4}{a}r(a+r)\left\{1-\cos\frac{at}{2r}\right\} = \frac{8r}{a}(a+r)\sin^2\frac{at}{4r}.$$

Der Winkel t hängt mit dem Wälzungswinkel u des rollenden Kreises durch die Gleichung zusammen $at = ru$. Wird nun $u = 2\pi$, also $t = \frac{2\pi r}{a}$, so erhält man hieraus als Länge einer Epizykloide $s = \frac{8r}{a}(a+r)$.

Ist der Radius des rollenden Kreises n-mal so groß als der feste Kreis $a = nr$, so schließt sich die Kurve; man erhält als Länge eines Zweiges $s = 8r\frac{n+1}{n}$ und somit als ganze Länge der Kurve

$$S = ns = 8r(n+1).$$

Für den Fall $n = 1$ geht die Kurve in eine Kardioide über, deren Länge nach dem folgenden Beispiel $S = 16r$ ist.

b) Für Polarkoordinaten.

Die Länge des Bogens AB der Kurve $r = f(\varphi)$ (Fig. 5) zu berechnen.

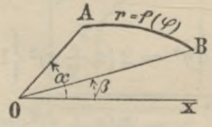


Fig. 5.

Man erhält als Länge des Bogens AB

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi, \quad \text{wo } r' = \frac{dr}{d\varphi} \text{ gesetzt ist.}$$

283. Beispiel. Die Länge des Bogens der Kardioide (Fig. 6), deren Gleichung $r = 2\,\mathrm{a}(1 + \cos\varphi)$ ist, zu berechnen.

Es ist

$$r' = -2\,a \sin\varphi,$$

$$ds = 2\,a\sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 4\,a \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$

$$s = \int_0^{\varphi} ds = 4\,a \int_0^{\varphi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8\,a \sin\frac{\varphi}{2}.$$

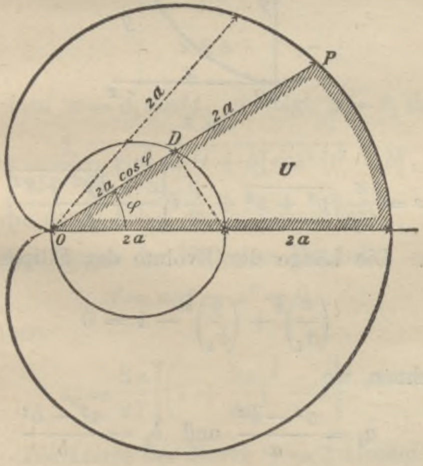


Fig. 6.

Für $\varphi = \pi$ ergibt sich hieraus als halber Umfang der Kardioide

$$\frac{S}{2} = 8\,a\,; \quad \text{somit ist} \quad S = 16\,a\,.$$

§ 19. Übungsbeispiele.

284. Die Länge des Parabelbogens (Fig. 7) zu berechnen.

$$f(xy) = x^2 - 2\,py = 0\,, \quad y' = \frac{x}{p}\,, \quad s = \frac{1}{p}\int\limits_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\,dx\,,$$

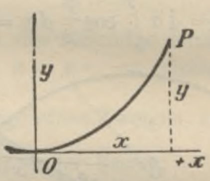


Fig. 7.

$$s = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2}\,l\left\{\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}\right\}.$$

285. Die Länge der Evolute der Ellipse (Fig. 8)

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$$

zu berechnen, wo

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

gesetzt ist.

Fig. 8.

Setzt man $x = a_1 \cos^3 t$, so folgt $y = b_1 \sin^3 t$ und

$$s = \frac{1}{a_1^2 - b_1^2} \sqrt{(a_1^2 \sin^2 t + b_1^2 \cos^2 t)^3} - b_1^3,$$

wobei s von der y-Achse aus gerechnet ist.

286. Den Bogen der Neilschen Parabel

$$f = ay^2 - x^3 = 0$$

zu berechnen.

$$s_x = \frac{8a}{27}\left\{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}.$$

287. Die Länge der Kurve $r = 2a(\cos\varphi + \sin\varphi)$ zu berechnen.

$$r' = 2\,a(\cos\varphi - \sin\varphi)\,, \quad \sqrt{r^2 + r'^2} = 2\,a\sqrt{2}\,,$$

$$s = \int_0^\varphi 2\,a\sqrt{2}\,d\varphi = 2\,a\sqrt{2}\cdot\varphi\,.$$

Ganzer Umfang $\quad S_{2\pi} = 4\,\pi a\sqrt{2}\,.$

Die Kurve ist ein Kreis vom Radius $r = 2\,a\sqrt{2}\,.$

288. Zu beweisen, daß die Kreisevolvente mit den Gleichungen

$$x = a(\cos t + t\sin t)\,, \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

die Länge besitzt $\quad s = a\dfrac{t^2}{2}\,.$

289. Die Länge der Hypozykloide mit den Gleichungen

$$x = (a - r)\cos t + r\cos\frac{a-r}{r}t\,,$$

$$y = (a - r)\sin t - r\sin\frac{a-r}{r}t$$

zu berechnen.

Man erhält $\quad s = \dfrac{8\,r(a-r)}{a}\sin^2\dfrac{a\,t}{4\,r}\,,$

woraus für $t = \dfrac{2\,\pi r}{a}$ als Länge einer Hypozykloide folgt

$$s = \frac{8\,r(a-r)}{a}\,.$$

290. Den Bogen der archimedischen Spirale $r = a\varphi$ zu rektifizieren.

$$s = \frac{a}{2}\left\{\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + l(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\right\}.$$

291. Den Bogen der Kettenlinie vom tiefsten Punkt $P\left(0, \frac{a}{2}\right)$ bis zum Punkt $P(x, y)$ zu berechnen.

Die Gleichung der Kettenlinie ist $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Man erhält hieraus

$$ds = \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx\,,$$

$$s = \int_0^x ds = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2 - a^2}\,.$$

292. Die Länge der Zykloide zu finden.

$$x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)\,,$$

$$s = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a\,.$$

§ 20. **Quadratur ebener Kurven.**

a) Für Parallelkoordinaten.

α. Für rechtwinklige Koordinaten.

Den Flächeninhalt U zu bestimmen (Fig. 9), der von der x-Achse, der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten der Punkte A und B begrenzt ist.

Zwei Parallelen zur y-Achse, in der Entfernung x und $x + dx$ gezogen, schneiden aus der Fläche einen elementaren Streifen heraus, der näherungsweise gleich

$$dU = y\, dx = f(x)\, dx$$

ist. Der gesuchte Inhalt ist daher angegeben durch das bestimmte Integral

$$U = \int_b^a y\,dx = \int_b^a f(x)\,dx\,.$$

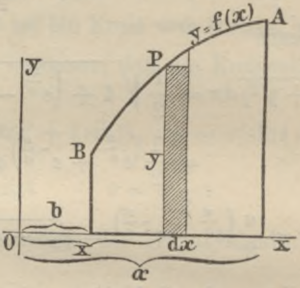


Fig. 9.

293. Beispiel. Den Flächeninhalt der Ellipse von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu berechnen.

Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,,$$

woraus folgt

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Da man nur das obere Zeichen zu nehmen braucht, ist

$$U = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{b}{a}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{ab}{2} \left\{ \arcsin \frac{x_2}{a} - \arcsin \frac{x_1}{a} \right\}.$$

Für $x_2 = a$ und $x_1 = -a$ folgt hieraus als halbe Fläche der Ellipse

$$U = \frac{ab\pi}{2}.$$

294. Beispiel. Den Inhalt der gleichseitigen Hyperbel $xy = a^2$ zwischen den Geraden $x_1 = a$ und $x_2 = x$ zu berechnen. (Fig. 10.)

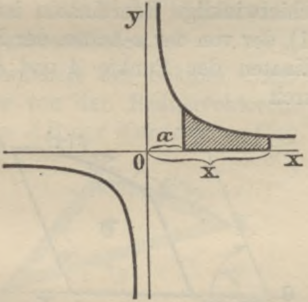


Fig. 10.

Man erhält

$$U = \int_a^x y\,dx = a^2 \int_a^x \frac{dx}{x} = a^2 \{lx - la\}.$$

Setzt man $a = 1$, $x_1 = 1$ und $x_2 = x$, so erhält man $U = lx$.

295. **Beispiel.** Den Flächeninhalt der Zykloide zu berechnen.

Die Kurve ist dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) .$$

Es ist daher $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, also

$$U_t = \int y\,dx = a^2(1 - \cos t)^2 dt \quad \text{oder}$$

$$U_t = \frac{a^2}{2}\{3t - \sin t(4 - \cos t)\} .$$

Der Flächeninhalt eines Zykloidenabschnittes ergibt sich hieraus für $t = 2\pi$; es ist

$$U_{2\pi} = 3\pi a^2 .$$

β. Für schiefwinklige Koordinaten ist der Flächeninhalt (Fig. 11), der von der x-Achse, der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten der Punkte A und B begrenzt ist, angegeben durch

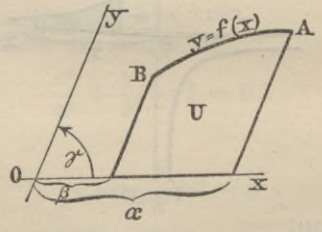


Fig. 11.

$$U = \sin\gamma \int_\beta^\alpha y\,dx = \sin\gamma \int_\beta^\alpha f(x)\,dx ,$$

wo γ den Winkel der Koordinatenachsen bezeichnet.

296. **Beispiel.** Den Flächeninhalt der Ellipse zu bestimmen, von welcher zwei konjugierte Durchmesser

von den Längen $2\,a_1$ und $2\,b_1$ bekannt sind, die miteinander den Winkel γ machen.

Bezogen auf diese Durchmesser als Koordinatenachsen, erhält die Ellipse die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad y = \pm \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}\,.$$

Daher ist

$$\frac{U}{4} = \sin\gamma \int_0^{a_1} y\,dx = \frac{b_1}{a_1} \sin\gamma \int_0^{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \sin\gamma\, a_1\, b_1\,,$$

somit ist

$$U = \pi \sin\gamma\, a_1\, b_1\,.$$

b) Für Polarkoordinaten.

Den Flächeninhalt des Sektors OAB (Fig. 12) zu bestimmen, der von den Radienvektoren OA und OB und dem Bogen AB der Kurve $r = f(\varphi)$ begrenzt ist.

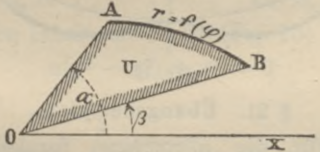


Fig. 12.

Der gesuchte Inhalt ist, da

$$d\,U = r\,d\varphi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}\,d\varphi$$

ist, angegeben durch

$$U = \tfrac{1}{2}\int_\beta^\alpha r^2\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_\beta^\alpha f^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

297. Beispiel. Den Inhalt der Fußpunktskurve der Ellipse (Fig. 13) $r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$ zu berechnen.

Man erhält

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi + \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) .$$

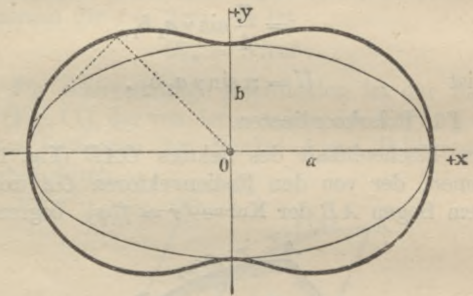


Fig. 13.

§ 21. Übungsbeispiele.

298. Für die allgemeine parabolische Kurve $y^n = p x^m$ ist

$$U = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}} \, dx = \frac{n}{m+n} x y .$$

299. Die Kurve

$$f(x y) = x^2 y^2 + a^2 y^2 - b^2 x^2 = 0$$

zu quadrieren.

$$U = b\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{b}{2}\left(\sqrt{a^2+x^2}-a\right).$$

300. Quadratur der Kurve (Fig. 14)

$$y^2 = x^3 - x^2 \quad \text{von} \quad x = 1 \quad \text{bis} \quad x = x.$$

$$U = \int_1^x x\sqrt{x-1}\,dx = \tfrac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}\cdot(3x+2).$$

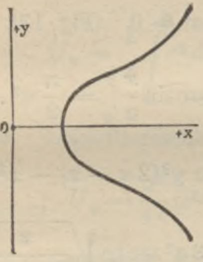


Fig. 14.

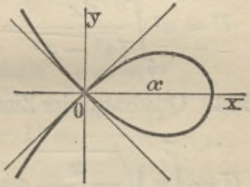


Fig. 15.

301. Den Inhalt der Kurve (Fig. 15)

$$a(y^2 - x^2) + x^3 = 0$$

zu berechnen.

$$U = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx = \tfrac{4}{15}a^2.$$

302. Quadratur der Kurve (Fig. 16)

$$f(xy) = y^2(a^2 - x^2) - a^2x^2 = 0.$$

$$U = \int_0^a \frac{ax\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2.$$

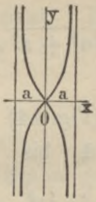


Fig. 16.

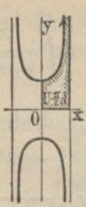


Fig. 17.

303. $f = y^2(a^2 - x^2) - a^4 = 0$ (Fig. 17).

$$U = a^2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} a^2 .$$

304. Quadratur der Zissoide $y^2(2a - x) - x^3 = 0$.

$$U = \int_0^x x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\, dx = 3a^2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{2a - x}} - \frac{3a + x}{2} \sqrt{2ax - x^2} .$$

Für $x = 2a$ folgt hieraus als halber Inhalt der Fläche zwischen Kurve und Asymptote

$$\frac{U}{2} = \frac{3\pi}{2} a^2, \quad \text{somit ist} \quad U = 3\pi a^2.$$

305. Der Flächeninhalt der Sternkurve

$$f = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

ist angegeben durch

$$U = \tfrac{3}{8} \pi a^2 .$$

306. Den Inhalt des gemeinschaftlichen Flächenstücks der beiden Parabeln $y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py$ zu bestimmen.

$$U = \int_0^{2p} \left\{ \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right\} dx = \tfrac{4}{3} p^2 .$$

307. Archimedische Spirale $r = a\varphi$.

$$U_\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{6} \varphi^3 = \frac{\varphi}{6} r^2 .$$

308. Logarithmische Spirale $r = a e^{k\varphi}$.

$$U_\varphi = \frac{a^2}{4k} (e^{2k\varphi} - 1) = \frac{r^2 - a^2}{4k} .$$

309. Quadratur der Kurve $r = 2a \cos\varphi \sin^2\varphi$.

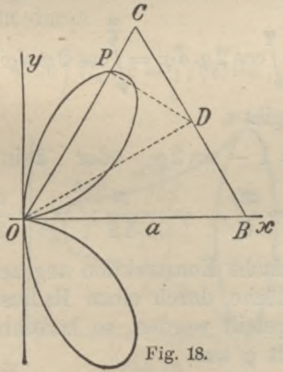


Fig. 18.

Der Inhalt einer Schleife (Fig. 18) ist $\frac{U}{2} = \frac{\pi}{16} a^2$,
somit ergibt sich als Inhalt der ganzen Kurve $U = \frac{1}{8} \pi a^2$.

310. Die Fläche der Parabel $y^2 - 2px = 0$ durch eine Parallele zur y-Achse im Verhältnis $m : n$ zu teilen.

Die Abszisse x der teilenden Parallele berechnet sich aus

$$\int_0^x y\,dx : \int_x^a y\,dx = m : n \quad \text{oder aus}$$

$$x^{\frac{3}{2}} : \left(a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) = m : n\,,$$

womit sich ergibt

$$x = \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{2}{3}} a\,.$$

311. Den Quadranten der Lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ durch einen Radiusvektor r zu halbieren.

Man erhält als Bedingungsgleichung zur Berechnung des Azimuts φ

$$\int_0^\varphi \cos 2\varphi\,d\varphi = \int_\varphi^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,d\varphi\,,$$

woraus sich ergibt

$$\sin 2\varphi = 1 - \sin 2\varphi \quad \text{oder} \quad 2 \sin 2\varphi = 1\,,$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{6}\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{12}\,; \quad r = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,,$$

womit eine einfache Konstruktion angezeigt ist.

Soll die Fläche durch einen Radiusvektor im Verhältnis $m : n$ geteilt werden, so berechnet sich das zugehörige Azimut φ aus

$$n \sin 2\varphi = m(1 - \sin 2\varphi),$$

$$\sin 2\varphi = \frac{m}{m+n}, \quad \varphi = \tfrac{1}{2} \arcsin \frac{m}{m+n},$$

womit r den Wert erhält

$$r = a\left(\frac{1}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}} (2mn + n^2)^{\frac{1}{4}}.$$

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie des Raumes.

§ 22. Kubatur begrenzter Räume.

a) Von beliebigen Flächen.

Schneidet eine Ebene parallel zur yz-Ebene aus der Fläche (Fig. 19), deren Gleichung $F(xyz) = 0$ sei, eine Scheibe vom Inhalt $U_x = f(x)$ aus, so ist der Rauminhalt des ganzen Körpers zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ dargestellt durch

$$V = \int_b^a U_x \, dx = \int_b^a f(x) \, dx .$$

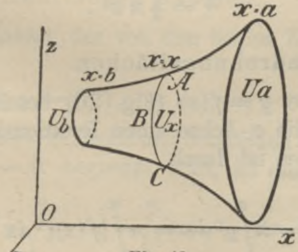


Fig. 19.

312. Beispiel. Den Rauminhalt des dreiachsigen Ellipsoids von der Gleichung

$$F(x y z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zu berechnen.

Eine Ebene, parallel zur yz-Ebene in der Entfernung x gelegt, schneidet dasselbe nach einer Ellipse mit den

Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

und dem Inhalt $U_x = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist somit angegeben durch

$$V = \int_{-a}^{+a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \tfrac{4}{3}\pi abc ,$$

woraus sich für $c = b = a$ als Inhalt einer Kugel vom Radius a ergibt

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3 .$$

b) Von Umdrehungsflächen.

Eine Kurve $y = f(x)$ (Fig. 20) beschreibt bei der Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen Inhalt angegeben ist durch

$$V = \pi \int_b^a y^2 \, dx = \pi \int_b^a \{f(x)\}^2 \, dx .$$

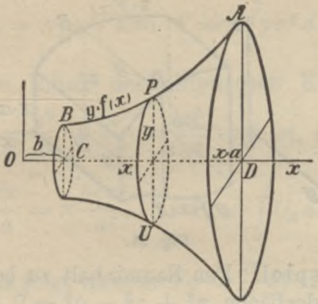


Fig. 20.

313. Beispiel. Die Parabel $y^2 = 2px$ erzeugt bei der Drehung um die x-Achse, bzw. y-Achse einen Umdrehungskörper vom Inhalt

$$V_x = \pi \int_0^x y^2\,dx = \pi \int_0^x 2px\,dx = \pi p x^2\,, \quad \text{bzw.}$$

$$V_y = \pi \int_0^y x^2\,dy = \pi \int_0^y \frac{y^4}{4p^2}\,dy = \frac{\pi}{20}\frac{y^5}{p^2} = \frac{\pi}{5} x^2 y\,.$$

c) Von zylindrischen Räumen.

Der Rauminhalt, der von den beiden Zylinderflächen (Fig. 21)

$$y = f(x)\,, \quad z = \varphi(x)\,,$$

der xy-Ebene, der zx-Ebene und den beiden Parallelebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, ist angegeben durch

$$V = \int_b^a yz\,dx = \int_b^a f(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

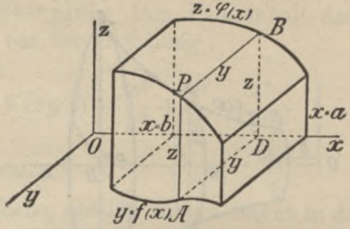


Fig. 21.

314. Beispiel. Den Rauminhalt zu bestimmen, der von der Zylinderfläche $x^2 + z^2 - a^2 = 0$, der xy- und yz-Ebene und von der Ebene $x + y - a = 0$ begrenzt wird. (Fig. 22.)

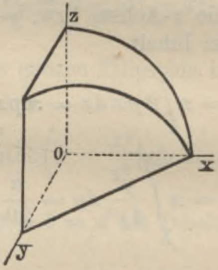


Fig. 22.

Es ist $y = f(x) = a - x$, $z = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, somit ist

$$V = \int_0^a (a - x) \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) a^3 = 0{,}452\, a^3 .$$

§ 23. Übungsbeispiele.

315. Den Inhalt des Kreiskegels von der Gleichung $F(xyz) = y^2 + z^2 - px^2 = 0$ zu berechnen.

Es ist $U_x = \pi p x^2$, also $V = \pi \int_0^a p x^2 \, dx = \frac{\pi}{3} p a^3$.

316. Den Inhalt des elliptischen Kegels, dessen Gleichung $F = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$ ist, zu bestimmen.

$$U_x = \pi \frac{bx}{a} \cdot \frac{cx}{a} = \pi \frac{bcx^2}{a^2}, \qquad V_x = \int_0^x U_x \, dx = \pi \frac{bc}{a^2} \frac{x^3}{3}.$$

Für $x = a$ folgt hieraus $Va = \frac{\pi}{3} abc$.

317. Den Inhalt des Paraboloids zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = a$ zu berechnen.

Ist die Gleichung des Paraboloids

$$F(xyz) = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x}{a} = 0,$$

so erhält man $U_x = \pi b \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot c \sqrt{\frac{x}{a}} = \pi \frac{bcx}{a}$,

daher ist $V = \int_0^a U_x \, dx = \int_0^a \pi \frac{bcx}{a} dx = \frac{\pi}{2} abc$.

Das Paraboloid halbiert also den zylindrischen Raum von der Grundfläche πbc und der Höhe a.

318. Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, der von der Fläche $F = xy^2 + cz^2 - a^2 x = 0$ und den Ebenen $x = 0$ und $x = x$ begrenzt wird.

U_x ist eine Ellipse von den Halbachsen a und $a\sqrt{\frac{x}{c}}$, daher ist

$$V_x = \int_0^x U_x\,dx = \pi \int_0^x a^2 \sqrt{\frac{x}{c}}\,dx = \tfrac{2}{3}\pi a^2 x \sqrt{\frac{x}{c}}\,.$$

Für $x = c$ folgt $V_c = \frac{2}{3}\pi a^2 c$.

319. Ein Kreis bewegt sich stets parallel zur yz-Ebene mit seinem Mittelpunkt auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

und berührt beständig die x-Achse. Welches ist der Rauminhalt des erzeugten Körpers?

$$U_x = \pi z^2 = \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,.$$

$$\frac{V}{2} = \int_{-a}^{a} \pi z^2\,dx = \tfrac{4}{3}\pi b^2 a\,, \quad V = \tfrac{8}{3}\pi b^2 a\,.$$

320. Tritt an Stelle der Ellipse in der letzten Aufgabe die Sternkurve $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$, so ist $U_x = \pi z^2 = \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3$ und ist

$$\frac{V}{4} = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \pi \tfrac{16}{105} a^3 = \tfrac{4}{35} \cdot \tfrac{4}{3}\pi a^3\,.$$

321. Eine Gerade (Fig. 23) bewegt sich parallel zur yz-Ebene und schneidet beständig die beiden Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

in der xy- bzw. zx-Ebene. Gesucht ist der Rauminhalt des erzeugten Körpers.

$$U_x = \frac{yz}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)\,, \quad V = \int_0^a U_x dx = \tfrac{1}{3} abc\,.$$

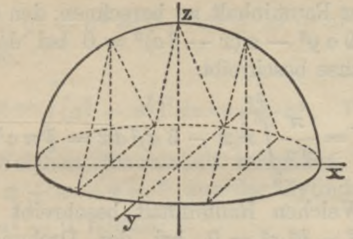


Fig. 23.

322. Ein sich ähnlich bleibendes Rechteck ($z : y = \lambda$) bewegt sich parallel zur yz-Ebene mit einer Ecke A auf der x-Achse, einer anderen Ecke D auf dem Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ in der xy-Ebene. Gesucht ist der Inhalt des erzeugten zylindrischen Raumes.

$$V = \int_{-a}^{+a} y z \, dx = \lambda \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \, dx = \tfrac{4}{3} \lambda a^3 .$$

323. Den Inhalt der Kugelzone von der Höhe h zu berechnen.

Es ist $\qquad U_x = \pi (a^2 - x^2)$,

$$V = \pi \int_{c}^{c+h} (a^2 - x^2) \, dx = \pi h \left\{ a^2 - \frac{h^2}{3} - c(c+h) \right\}.$$

Für $c = 0$ und $h = a$ folgt hieraus als Inhalt der Halbkugel vom Radius a $\qquad V = \tfrac{2}{3} \pi a^3$.

324. Dreht sich die Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ um die x-Achse bzw. y-Achse, so beschreibt sie einen Rotationskörper vom Inhalt

$$V = \tfrac{4}{3} \pi a b^2, \quad \text{bzw. } V = \tfrac{4}{3} \pi a^2 b .$$

325. Den Rauminhalt zu berechnen, den die Schleife der Kurve $9ay^2 - x(x-3a)^2 = 0$ bei der Drehung um die x-Achse beschreibt.

$$V = \frac{\pi}{9a}\int_0^{3a} x(x-3a)^2\,dx = \tfrac{3}{4}\pi a^3 .$$

326. Welchen Rauminhalt beschreibt die Kurve $x^2y^2 + a^2y^2 - b^2x^2 = 0$ bei der Drehung um die x-Achse?

$$V = \pi b^2 \int_0^x \frac{x^2\,dx}{a^2+x^2} = \pi b^2\left(x - a\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right).$$

327. Den Rauminhalt des Körpers zu bestimmen, der von den beiden Zylinderflächen $z^2 = 2px$, $x^2 = 2py$, der xy- und zx-Ebene und der Ebene $x = x$ begrenzt ist.

$$V = \int_0^x \frac{x^2}{2p}\sqrt{2px}\,dx = \tfrac{2}{7}x^3\sqrt{\frac{x}{2p}}.$$

328. Den gemeinschaftlichen Raum der beiden Zylinderflächen (Fig. 24)

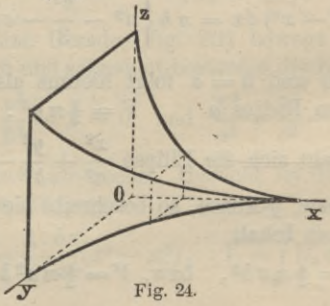


Fig. 24.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0\,, \quad x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

zu berechnen.

$$\frac{V}{8} = \int_0^a yz\,dx = \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = \tfrac{16}{105}\,a^3\,, \quad V = \tfrac{128}{105}\,a^3\,.$$

329. Welchen Rauminhalt schneiden die Ebenen $x = 0$ und $x + z - a = 0$ aus der Zylinderfläche $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ heraus?

$$V = \int_0^a yz\,dx = \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} (a - x)\,dx$$
$$= \left(\frac{3\pi}{32} - \frac{8}{105}\right) a^3\,.$$

330. Die Durchdringung der Flächen

$$2p(z - c) + x^2 = 0 \quad \text{und} \quad ya - bx = 0$$

(Teil eines parabolischen Klostergewölbes) zu bestimmen.

$$V = \int_0^x yz\,dx = \int^x \frac{bx}{a}\left(c - \frac{x^2}{2p}\right) dx = \frac{1}{8}\,\frac{bx^2}{a}\left(4\,c - \frac{x^2}{p}\right).$$

Für $x = \sqrt{2pc}$ ergibt sich als Inhalt des ganzen Raumes

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,pc^2\,.$$

331. Den Inhalt des kreisförmigen Klostergewölbes zu bestimmen.

Dasselbe schließt den Raum ein, der von den Koordinatenebenen, dem Zylinder $x^2 + z^2 - a^2 = 0$ und der Ebene $bx - ay = 0$ begrenzt ist.

$$V = \int_0^a yz\,dx = \int_0^a \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2 b}{3}\,.$$

§ 24. Oberflächenberechnung der Körper.

a) Oberfläche von Rotationskörpern.

Die Oberfläche zu berechnen, welche eine Kurve $y = f(x)$ bei der Drehung um eine der Achsen erzeugt.

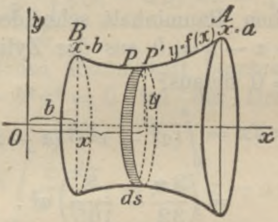


Fig. 25.

Irgend ein Punkt $P(xy)$ der Kurve $y = f(x)$ (Fig. 25) beschreibt bei der Drehung um die x-Achse einen Kreis vom Radius $y = f(x)$, dessen Umfang

$$2\pi y = 2\pi f(x) \text{ ist.}$$

Der Bogen $PP' = ds$ beschreibt hierbei eine reifförmige Fläche vom Oberflächeninhalt

$$dO = 2\pi y\, ds = 2\pi f(x)\, ds$$

und der Kurvenbogen BA einen Umdrehungskörper, dessen Oberfläche ist

$$O = 2\pi \int_b^a y\, ds = 2\pi \int_b^a f(x) \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

Bei der Drehung um die y-Achse wird ein Rotationskörper erzeugt vom Oberflächeninhalt

$$O = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} x\, ds = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy\,.$$

332. Beispiel. Die Oberfläche des Ellipsoids zu berechnen, das bei der Drehung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um eine ihrer Achsen entsteht.

Bei der Drehung um die x-Achse ist, wenn

$$a^2 - b^2 = e^2$$

gesetzt wird, erhält man

$$O = 2 \cdot \frac{2 b \pi}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - e^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{2 \pi b}{a^2} \left\{ x \sqrt{a^4 - e^2 x^2} + \frac{a^4}{e} \arcsin \frac{e x}{a^2} \right\}_0^a$$

oder

$$O = 2 \pi b \left\{ b + \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} \right\}.$$

Bei der Drehung um die y-Achse entsteht ein Ellipsoid vom Oberflächeninhalt

$$O = 2 \cdot \frac{2 a \pi}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + e^2 y^2}\, dy$$

$$= 2 \pi \frac{a}{b^2} \left\{ y \sqrt{b^4 + e^2 y^2} + \frac{b^4}{e} l\left(e^2 y + e \sqrt{b^4 + e^2 y^2}\right) \right\}_0^a$$

oder

$$O = 2 \pi a \left\{ a + \frac{b^2}{e} l \frac{a + e}{b} \right\} = 2 \pi a^2 + \pi \frac{a b^2}{e} l \frac{a + e}{a - c}.$$

Für $b = a$ wird $e = 0$ und es geht die Oberfläche beidemal in diejenige einer Kugel vom Radius a über.

b) Oberfläche von Zylinderflächen.

Stirn- und Scheitelfläche des Durchdringungskörpers (Fig. 26) der beiden Zylinderflächen

$$y = f(x)\,, \quad z = \varphi(x)$$

zu berechnen.

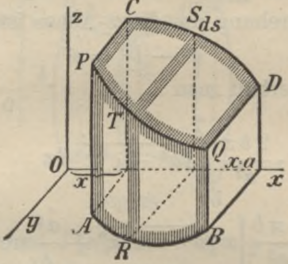


Fig. 26.

Durchschneiden sich beide Flächen nach der Raumkurve PQ und ist T ein Punkt derselben mit den Koordinaten xyz, so ist das Element der Stirnfläche $PABQ$ angegeben durch

$$d\,O_{xy} = TR \cdot ds = z\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

und das der Scheitelfläche $PCDQ$ durch

$$d\,O_{zx} = TS \cdot ds_1 = y\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

Hieraus ergibt sich als Gesamtoberfläche:

$$\text{Stirnfläche } PABQ = O_{xy} = \int_b^a z\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_b^a \varphi(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,,$$

$$\text{Scheitelfläche } PCDQ = O_{zx} = \int_b^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_b^a f(x) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\, dx .$$

333. **Beispiel.** Es sollen Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Zylinderflächen

$$y = f(x) = \sqrt{ax - x^2}\,, \quad z = \varphi(x) = 2\sqrt{ax}$$

berechnet werden. (Fig. 27.)

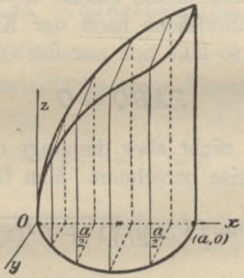


Fig. 27.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{a}{x}},$$

somit Stirnfläche

$$O_{xy} = a\sqrt{a} \int_0^a \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{ax - x^2}} = a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = 2a^2,$$

Scheitelfläche

$$O_{zx} = \int_0^a \sqrt{ax - x^2} \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\, dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\pi}{4} a^2 .$$

c) Ist an Stelle der einen Zylinderfläche, z. B. $z = \varphi(x)$, eine allgemeine Fläche $z = F(xy)$ gegeben, welche die Zylinderfläche nach der Kurve PQ durchschneiden möge, so läßt sich nur die Oberfläche

$$PABQ = O$$

dieses Zylinders, nicht aber diejenige der Fläche $F(xy)$ in der obigen Weise berechnen. Man findet

$$O = \int z\, ds = \int F(xy) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \quad \text{oder}$$

$$O = \int_b^a F(x, f) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx .$$

334. Beispiel. Die Oberfläche der Zylinderfläche $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ zwischen den Koordinatenebenen und der Kugelfläche $z = F(xy) = \sqrt{a^2 k^2 - x^2 - y^2}$ zu berechnen.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad F(x, f) = \sqrt{a^2 k^2 - a^2} = a\sqrt{k^2 - 1},$$

somit $$U = \int_0^a a\sqrt{k^2-1}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= a^2\sqrt{k^2-1}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a^2\sqrt{k^2-1}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}a^2\sqrt{k^2-1}\,.$$

§ 25. Übungsbeispiele.

a) Umdrehungsflächen.

335. Die Mantelfläche eines Kegels zu berechnen, den die Gerade

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

bei der Drehung um die x-Achse beschreibt.

Es ist

$$y=\frac{b}{a}(a-x)\,,\quad dy=-\frac{b}{a}dx\,,\quad ds=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\,dx\,,$$

daher

$$O=2\pi\int_{x=0}^{x=a} y\,ds = 2\pi\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^a (a-x)\,dx$$

$$=\pi b\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

336. Die Oberfläche einer Kugelzone von der Höhe h zu berechnen.

Es ist

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\,,\quad y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,\quad ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\,,$$

$$O=2\,\pi\int_b^{b+h} y\,ds=2\,\pi\,a\int_b^{b+h} dx=2\,\pi\,a\,h\,.$$

337. Die Umdrehungsfläche der Parabel $y^2=2\,px$ zu berechnen.

a) Drehung um die x-Achse:

$$O_x=2\,\pi\sqrt{p}\int_0^x\sqrt{p+2\,x}\,dx=\frac{2\,\pi}{3}\sqrt{p}\left\{(p+2\,x)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

b) Drehung um die y-Achse:

$$O_y=\frac{\pi}{p^2}\int_0^y y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{8}\frac{y}{p^2}(p^2+2\,y^2)\sqrt{p^2+y^2}-\frac{\pi p^2}{8}\,l\,\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\,.$$

338. Die Oberfläche des Körpers zu berechnen, welchen die Zykloide bei der Drehung um ihre Achse erzeugt.

Es ist $x=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$,

$$O=2\,\pi\,a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2\,(1-\cos t)}\,dt$$

$$=8\,\pi\,a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=\tfrac{64}{3}\,\pi\,a^2\,.$$

339. Die Umdrehungsfläche der Sternkurve zu berechnen, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0\quad\text{ist.}$$

$$\frac{O}{2} = 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \tfrac{6}{5}\pi a^2;$$

somit ist

$$O = \tfrac{12}{5}\pi a^2 = \tfrac{3}{5}\cdot 4\pi a^2 .$$

340. Die Umdrehungsfläche der Sinuslinie $y = \sin x$ zu berechnen.

$$U_x = 2\pi\int_0^x y\, ds .$$

Es ist $y' = \cos x$, $ds = \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$, somit

$$U_x = 2\pi\int_0^x \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = 2\pi\int_x^0 \sqrt{1+\cos^2 x}\, d\cos x$$

$$= 2\pi\left\{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} + \tfrac{1}{2} l\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)\right\}_x^0 .$$

Ein Abschnitt der Sinuslinie beschreibt somit bei der Drehung die Oberfläche

$$U\pi = 4\pi\sqrt{2} - \pi\, l(3 - 2\sqrt{2}).$$

341. Die Oberfläche des Wulstes zu berechnen, der bei der Drehung des Kreises $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ oder $r = 2a\sin\varphi$ um die x-Achse entsteht.

Es ist $ds = 2a\, d\varphi$, somit

$$O = 2\pi\int_0^\pi r\sin\varphi \cdot 2a\, d\varphi = 4\pi^2 a^2 .$$

342. Fläche, erzeugt durch Drehung der Schleife der Lemniskate um die x-Achse.

Es ist

$$r^2 = 4a^2\cos\varphi\sin\varphi, \quad \text{somit} \quad r' = a\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} \quad \text{und}$$

$$ds = \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi,$$

womit sich ergibt

$$U = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,ds = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2 .$$

343. Den Flächeninhalt zu berechnen, den die Lemniskate $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ bei der Drehung um die x-Achse, bzw. y-Achse beschreibt.

Man findet $ds = \dfrac{a\sqrt{2}\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, somit

$$\frac{U_x}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\,ds = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\varphi\,ds = 4a^2\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Die ganze Oberfläche, die von beiden Schleifen beschrieben wird, ist daher angegeben durch

$$U_x = 8a^2\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Ebenso ist

$$\frac{U_y}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,ds = 2\pi\int r\cos\varphi\,ds = 2\pi a^2\sqrt{2},$$

$$U_y = 4\pi a^2\sqrt{2}.$$

344. Fläche, erzeugt durch Drehung der Kardioide $r = 2a(1+\cos\varphi)$ um die Polarachse.

Es ist

$$ds = 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,\quad y = r\sin\varphi = 2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

somit

$$O = 2\pi\int_0^{\pi} y\,ds = \tfrac{128}{5}\pi a^2 = \tfrac{32}{5}\cdot 4\pi a^2 .$$

b) Oberfläche von Zylinderflächen.

345. Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Kreiszylinder (Fig. 28)

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

zu berechnen.

$$O_{zx} = O_{xy} = \int_0^a z\sqrt{1 + y'^2}\,dx = a^2 .$$

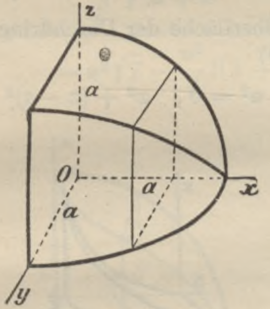


Fig. 28.

346. Die Oberfläche der Durchdringung der beiden Flächen $2p(z - c) + x^2 = 0$ und $ay - bx = 0$ zu berechnen.

$$\text{Stirnfläche} \quad O_{xy} = \frac{2}{3}\,\frac{c}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)\,2pc},$$

$$\text{Scheitelfläche} \quad O_{zy} = \frac{b}{3ap}(p^2 + 2pc)^{\frac{3}{2}}.$$

347. Desgl. für die Flächen

$$x^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad ay - bx = 0$$

(kreisförmiges Klostergewölbe).

Stirnfläche $O_{xy} = \int_0^a z\sqrt{1 + y'^2}\, dx$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} a \sqrt{a^2 + b^2},$$

Scheitelfläche $O_{zx} = \int_0^a y\sqrt{1 + z'^2}\, dx = \int_0^a \frac{b\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ab.$

348. Die Oberfläche der Durchdringung der beiden Flächen (Fig. 29)

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad x^2 + (z - a)^2 - a^2 = 0$$

zu berechnen.

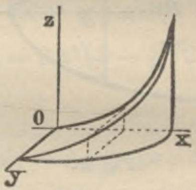


Fig. 29.

Stirnfläche $O_{xy} = a\int_0^a \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 1\right) dx = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) a^2,$

Scheitelfläche $O_{zx} = a\int_0^a dx = a^2.$

349. Desgleichen für $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{ax - x^2}$ (Fig. 30).

Stirnfläche $O_{xy} = \frac{a}{2}\int\limits_0^a \sqrt{\frac{a+x}{x}}\,dx$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{2} + \frac{a^2}{4}\,l(3 + 2\sqrt{2}),$$

Scheitelfläche $O_{zx} = a\int\limits_0^a \sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$

$$= a^2\sqrt{2} - \frac{a^2}{2}\,l(3 + 2\sqrt{2}).$$

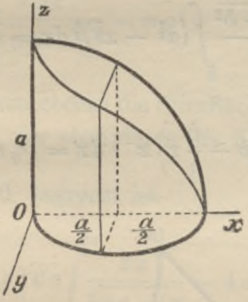


Fig. 30.

350. Die Oberfläche des gemeinschaftlichen Raumes der beiden Zylinderflächen

$$z^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0\,, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

zu berechnen.

Man erhält als ganze Oberfläche

$$O = 16\, O_{xy} = 16 \int_0^a z \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$= 16\, a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, dx$$

oder $$O = 16 \cdot \tfrac{3}{5} a^2 = \tfrac{48}{5} a^2 .$$

351. Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Zylinderflächen (Fig. 31)

$$z^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0 , \quad y = b - \frac{b}{a} x$$

zu berechnen. Man findet

$$O_{xy} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{3\pi}{32}\, a \sqrt{a^2 + b^2} ,$$

$$O_{zx} = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \left(b - \frac{b}{a} x\right) x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \tfrac{9}{10}\, ab .$$

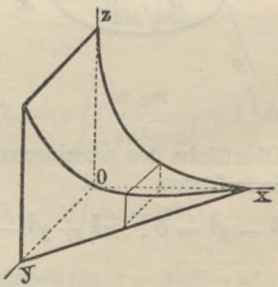


Fig. 31.

c) Besondere zylindrische Oberflächen.

352. Die Oberfläche des Kreiszylinders $y = \sqrt{2ax - x^2}$ zu berechnen, der unten durch die xy-Ebene und oben durch die Kugelfläche $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ begrenzt ist.

$$O = \int_0^{2a} z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2a\sqrt{2a} \int_0^{2a} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 4a^2 .$$

353. Das Stück der Zylinderfläche $y = \sqrt{2ax - x^2}$ zu berechnen, welches von der xy-Ebene und der parabolischen Fläche $x^2 + y^2 - 2az = 0$ begrenzt ist.

$$\frac{O}{2} = a \int_0^{2a} \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \pi a^2 , \quad O = 2\pi a^2 .$$

354. Berechne ebenso die Stirnfläche des Zylinders $y = \sqrt{2ax - x^2}$, der oben durch die Kegelfläche $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ begrenzt ist.

$$O = c\sqrt{2a} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2a - x}} = 4ac .$$

355. Die Stirnfläche des Zylinders

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

zu berechnen, der oben von der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

und unten von der xy-Ebene begrenzt ist.

$$\frac{O}{8} = \sqrt{3}\, a^{\frac{2}{3}} \int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}\, dx = 3\sqrt{3}\, \frac{\pi}{16} a^2 ,$$

$$O = \tfrac{3}{2} \sqrt{3}\, \pi a^2 .$$

§ 26. Rektifikation der Raumkurven.

Eine Raumkurve (Fig. 32) kann als Schnittkurve zweier Flächen $F(x y z) = 0$, $\Phi(x y z) = 0$ oder als Schnitt zweier Zylinderflächen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ betrachtet werden. In letzterem Fall ist

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) , \quad \frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$$

und ist das Linienelement der Raumkurve angegeben durch

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx .$$

Hieraus ergibt sich als Länge des Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abszissen x_0 und x

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx .$$

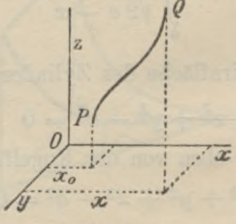


Fig. 32.

Werden die Koordinaten eines Punktes der Raumkurve in Funktion eines Parameters t ausgedrückt

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad z = \chi(t)\,,$$

so ist

$$s = \int_{x_0=\varphi(t_0)}^{x=\varphi(t)} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt\,.$$

356. Beispiel. Die Länge der Schraubenlinie

$$x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,, \quad z = \frac{h}{2\pi} t$$

zu bestimmen.

Es ist $\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t\,, \quad \dfrac{dy}{dt} = a\cos t\,, \quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{h}{2\pi}\,,$

somit $$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2} \cdot t\,.$$

§ 27. Übungsbeispiele.

357. Die Länge der Schnittkurve der beiden Zylinderflächen $2x^3 - 3a^2 y = 0\,,\ x^2 - az = 0$ zu berechnen.

Man erhält $y' = \dfrac{2x^2}{a^2}\,, \quad z' = \dfrac{2x}{a}\,,$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4x^4}{a^4}}\, dx = \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right) dx\,,$$

$$s = \int_0^x \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right) dx = x + \frac{2x^3}{3a^2} = x + y\,.$$

358. Die Schnittlinie der beiden Zylinderflächen $16\,y^2 - 9\,a\,x = 0\,,\ 9\,z^4 - 16\,a\,x^3 = 0$ zu rektifizieren.

Man findet $ds = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{9\,a}{64\,x}$, also

$$s = x + \tfrac{3}{2}\sqrt{a\,x} + \tfrac{9}{64}\,a\,l\,x\,.$$

359. Wird die archimedische Spirale als Zylinderfläche angesehen, so schneidet dieselbe den Kegel

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

nach einer konischen Spirale, welche die Gleichungen erhält $x = a\,\varphi\cos\varphi\,,\quad y = a\,\varphi\sin\varphi\,,\quad z = a\,\varphi\,.$

Ihre Länge wird für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$

$$s = \frac{a\,\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2 + 2} + a\,l\,\frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 2}}{\sqrt{2}}\,.$$

360. Die parabolische Schraubenlinie ist die Schnittlinie der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 - 2\,a\,z = 0\,,\quad z = 2\,a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

und kann durch die Gleichungen dargestellt werden

$$x = 2\,a\sqrt{\varphi}\cos\varphi\,,\quad y = 2\,a\sqrt{\varphi}\sin\varphi\,,\quad z = 2\,a\,\varphi\,.$$

Ihre Länge wird

$$s = \sqrt{2\,a\,z} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{z^3}{2\,a}} = r + \frac{1}{3}\,\frac{r\,z}{a}\,.$$

361. Die Länge der konischen Spirale

$$x = a\,e^{k\varphi}\cos\varphi\,,\quad y = a\,e^{k\varphi}\sin\varphi\,,\quad z = a\,e^{k\varphi}$$

zu finden.

Man erhält $ds = a\,e^{k\varphi}\sqrt{1 + 2\,k^2}\,d\varphi$ und

$$s = a\sqrt{1 + 2\,k^2}\int\limits_0^{\varphi} e^{k\varphi}\,d\varphi = \frac{k}{a}\sqrt{1 + 2\,k^2}\,(e^{k\varphi} - 1)\,.$$

362. Die Schnittlinie der beiden Flächen

$$cz = \sqrt{2}\,(x^2 - y^2)\,, \quad 3\,z\,(x - y) = \sqrt{2}\,(x + y)^2$$

zu rektifizieren.

Man erhält für den Bogen vom Ursprung bis zum Punkt $P(x\,y\,z)$ die Länge $s = \dfrac{x - y}{\sqrt{2}} + z\,.$

VIII. Abschnitt.

Schwerpunktsbestimmungen.

§ 28. Schwerpunkt von ebenen Kurvenbögen.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Die Schwerpunktskoordinaten $\xi\eta$ des Kurvenbogens AB (Fig. 33) bestimmen sich aus

$$\xi\int_b^a ds = \int_b^a x\,ds\,, \quad \eta\int_b^a ds = \int_b^a y\,ds\,.$$

wo $\int ds$ die Länge des Bogens AB bedeutet.

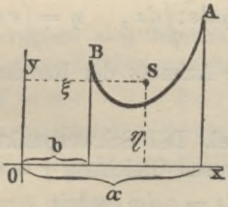


Fig. 33.

363. Beispiel. Den Schwerpunkt des Viertelskreisbogens zu bestimmen.

Die Gleichung des Kreises sei $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, dann ist

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \int_0^a ds = \frac{\pi}{2} a \text{ und}$$

$$\int_0^a x\,ds = \int_0^a y\,ds = a\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2,$$

somit ergibt sich $\xi = \eta = a^2 : \frac{\pi}{2} a = \frac{2a}{\pi}$.

b) Für Polarkoordinaten.

Wenn die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist $r = f(\varphi)$, so gelten für ξ, η die Ausdrücke (Fig. 34)

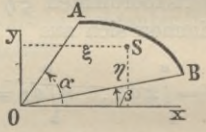


Fig. 34.

$$\xi = \int_\beta^\alpha r\cos\varphi\,ds : \int_\beta^\alpha ds, \quad \eta = \int_\beta^\alpha r\sin\varphi\,ds : \int_\beta^\alpha ds,$$

wo α und β die Azimuts der Radienvektoren OA und OB bedeuten.

364. Beispiel. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu bestimmen, dessen Gleichung $r = a$ ist.

Man erhält $ds = a\,d\varphi$, somit

$$\xi = \int_\beta^\alpha a^2\cos\varphi\,d\varphi : \int_\beta^\alpha a\,d\varphi, \quad \eta = \int_\beta^\alpha a^2\sin\varphi\,d\varphi : \int_\beta^\alpha a\,d\varphi \text{ oder}$$

$$\xi = a\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha - \beta}, \quad \eta = -a\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\alpha - \beta}.$$

Hieraus ergeben sich für $\beta = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ als Schwerpunktskoordinaten des Viertelskreisbogens $\xi = \eta = \frac{2a}{\pi}$.

§ 29. Übungsbeispiele.

365. Den Schwerpunkt des Bogens der Zykloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

für $t = 0$ bis $t = t$ zu bestimmen.

Man findet

$$\xi = 2a\frac{\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{1 - \cos\frac{t}{2}},$$

$$\eta = 2a\frac{\frac{2}{3} - \cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}}{1 - \cos\frac{t}{2}}.$$

Für $t = 2\pi$ ergeben sich hieraus als Koordinaten des Schwerpunkts eines Zykloidenzweigs

$$\xi = \pi a, \quad \eta = \tfrac{4}{3}a.$$

366. Den Schwerpunkt eines Zweiges der Sternkurve zu bestimmen, deren Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ ist.

Man erhält $\xi = \eta = \frac{2}{5}a$.

367. Den Schwerpunkt des Bogens der Kurve $9ay^2 - x(x - 3a)^2 = 0$ zwischen den Ordinaten $x = 0$ und $x = x$ zu bestimmen.

$$\xi = \frac{x(3x+5a)}{5(x+3a)}, \quad \eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{a}} \cdot \frac{x^2 - 3ax - 9a^2}{x+3a}.$$

Für $x = 3a$ folgt $\xi = \frac{4}{5}a$, $\eta = -\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

368. Den Schwerpunkt des Bogens PA der Kurve (Kreis) $r = 2a\cos\varphi$ für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ zu bestimmen. (Fig. 35.) Es ist

$$\xi = \frac{a}{\varphi}(\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi), \quad \eta = \frac{a}{\varphi}\sin^2\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergeben sich hieraus als Schwerpunktskoordinaten des Halbkreisbogens $\xi = a$, $\eta = \frac{2a}{\pi}$.

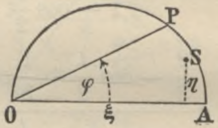


Fig. 35.

369. Den Schwerpunkt des Bogens der Kurve $y^2 = 2ax - x^2$ von $x = 0$ bis $x = x$ zu bestimmen.

$$\xi = a - \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-x}{a}}, \quad \eta = \frac{x}{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-x}{x}}.$$

Für $x = 2a$ folgt hieraus, wie in 368,

$$\xi = a, \quad \eta = \frac{2a}{\pi}.$$

§ 30. Schwerpunkt von ebenen Flächengebilden.

a) Den Schwerpunkt des Flächenstücks $PABQ$ (Fig. 36) zu bestimmen.

Das Moment des schraffierten elementaren Flächenstreifens in bezug auf die y-Achse, resp. x-Achse ist

$$y\,dx \cdot x\,, \quad \text{resp.} \quad y\,dx \cdot \frac{y}{2}\,;$$

daher ist, wenn $U = \int_b^a y\,dx$ den Inhalt der Fläche $PABQ$ und ξ, η die Koordinaten des Schwerpunkts bezeichnen,

$$\xi\,U = \int_b^a x\,y\,dx\,, \quad \eta\,U = \tfrac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx\,,$$

woraus folgt

$$\xi = \int_b^a x\,y\,dx : U, \quad \eta = \tfrac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx : U.$$

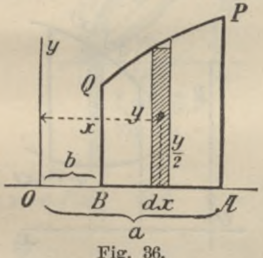


Fig. 36.

370. **Beispiel.** Den Schwerpunkt des Kreisquadranten zu bestimmen. (Fig. 37.)

Für die Kreisgleichung $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ erhält man

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad U = \int_0^a y\,dx = \frac{\pi}{4}\,a^2,$$

$$\int_0^a xy\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = \frac{a^3}{3},$$

daher ist

$$\xi = \eta = \frac{a^3}{3} : \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{4a}{3\pi}.$$

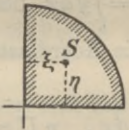


Fig. 37.

b) Den Schwerpunkt des Flächenstücks (Fig. 38) zu bestimmen, das von zwei Ordinaten und den Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ begrenzt wird.

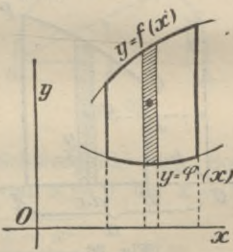


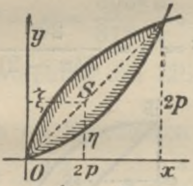
Fig. 38.

Man erhält für die Koordinaten ξ und η des gesuchten Schwerpunkts die Ausdrücke

$$\xi = \frac{M_x}{U},\quad \eta = \frac{M_y}{U},$$

wo
$$U = \int_b^a \{f(x) - \varphi(x)\}\, dx$$
den Flächeninhalt und
$$M_x = \int_b^a x\,\{f(x) - \varphi(x)\}\, dx\,, \text{ bzw.}$$
$$M_y = \tfrac{1}{2}\int_b^a \{f^2(x) - \varphi^2(x)\}\, dx$$
die Momente des Flächenstücks $PABQ$ in bezug auf die x-Achse, bzw. die y-Achse darstellen.

371. Beispiel. Den Schwerpunkt des gemeinschaftlichen Flächenstücks der beiden Parabeln (Fig. 39) $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ zu bestimmen.



$\xi = \eta = \frac{9}{10}\,p$

Fig. 39.

Man setze
$$y = \sqrt{2px} = f(x) \quad \text{und} \quad y = \frac{x^2}{2p} = \varphi(x)\,,$$
dann ist $U = \int_0^{2p} \left\{\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right\} dx = \frac{4}{3}p^2$ und
$$M_x = \int_0^{2p} x\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx = \tfrac{6}{5}p^3\,,$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left\{2px - \frac{x^4}{4p^2}\right\}dx = \tfrac{6}{5}p^3\,,$$

somit ergibt sich

$$\xi = \eta = \frac{M_x}{U} = \frac{M_y}{U} = \tfrac{6}{5}p^3 : \tfrac{4}{3}p^2 = \tfrac{9}{10}p\,.$$

372. Beispiel. Den Schwerpunkt des (kleineren) Kreissegments (Fig. 40) zu bestimmen, welches durch die Gerade $x + y - a = 0$ von dem Kreis

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

abgeschnitten wird.

Man erhält $U = \frac{a^2}{4}(\pi - 2)\,,\ \ M_x = M_y = \frac{a^3}{6}\,,$

daher ist $$\xi = \eta = \frac{2a}{3(\pi - 2)}\,.$$

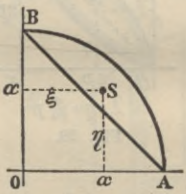


Fig. 40.

§ 31. Übungsbeispiele.

373. Den Schwerpunkt der Parabelfläche vom Ursprung bis zur Ordinate des Punktes $P(xy)$ zu bestimmen.

$$\xi = \tfrac{3}{5}x\,,\quad \eta = \tfrac{3}{8}y\,.$$

374. Den Schwerpunkt der Fläche der allgemeinen parabolischen Kurve $y^n = ax^m$ zu bestimmen.

$$\xi = \frac{m+n}{m+2n}x, \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{m+n}{n+2m}y.$$

375. Den Schwerpunkt des Halbkreises zu ermitteln.

$$\eta = \frac{4a}{3\pi}.$$

376. Den Schwerpunkt der Fläche der Zykloide mit den Gleichungen $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ zu bestimmen.

$$\xi = \pi a, \quad \eta = \tfrac{5}{6}a.$$

377. Den Schwerpunkt des Asteroidenquadranten zu bestimmen.

Ist $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$ die Gleichung der Kurve, so ist

$$\xi = \eta = \frac{256}{315}\frac{a}{\pi}.$$

378. Den Schwerpunkt des Ellipsenquadranten zu berechnen.

Es ergeben sich als Koordinaten des Schwerpunkts

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

379. Den Schwerpunkt der halben Schleife der Kurve $ay^2 = ax^2 - x^3$ zu berechnen.

$$\xi = -\tfrac{4}{7}a, \quad \eta = \tfrac{5}{32}a.$$

380. Den Schwerpunkt der Fläche der Neilschen Parabel $ay^2 = x^3$ zu bestimmen.

$$\xi = \tfrac{5}{7}x, \quad \eta = \tfrac{5}{16}y.$$

381. Den Schwerpunkt der halben gemeinschaftlichen Fläche OAP (Fig. 41) der beiden Kreise $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $y = \varphi(x) = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ zu bestimmen.

$$\xi = \frac{5a}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}, \quad \eta = \frac{a}{2}.$$

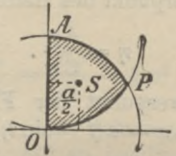


Fig. 41.

382. Den Schwerpunkt der halben gemeinschaftlichen Fläche der Parabel $x^2 - 2py = 0$ und des Kreises $x^2 + y^2 - 8p^2 = 0$ zu bestimmen. Man erhält

$$U = \int_0^{2p} \left\{ \sqrt{8p^2 - x^2} - \frac{x^2}{2p} \right\} dx = (\tfrac{2}{3} + \pi) p^2 ,$$

$$M_x = \int_0^{2p} \left\{ x\sqrt{8p^2 - x^2} - \frac{x^3}{2p} \right\} dx = \frac{16\sqrt{2} - 14}{3} p^3,$$

$$M_y = \frac{1}{2} \int_0^{2p} \left\{ 8p^2 - x^2 - \frac{x^4}{4p^2} \right\} dx = \tfrac{88}{15} p^3,$$

somit ist

$$\xi = \frac{M_x}{U} = \frac{16\sqrt{2} - 14}{2 + 3\pi} p, \quad \eta = \frac{M_y}{U} = \frac{88p}{5(2 + 3\pi)}.$$

383. Den Schwerpunkt der Fläche (Fig. 42) zu bestimmen, die von den Parallelen $x = a$ und $x = 0$ sowie den Parabeln $x^2 - 2p(y - b) = 0$ und $x^2 - 2py = 0$ begrenzt ist.

Man findet

$$U = ab, \quad M_x = \frac{a^2 b}{2}, \quad M_y = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^2}{2},$$

womit sich ergibt $\xi = \dfrac{a}{2}, \quad \eta = \dfrac{a^2 + 3bp}{6p}.$

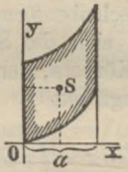


Fig. 42.

384. Den Schwerpunkt des Flächenstücks (Fig. 43) zu bestimmen, das von der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dem Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und der Ordinatenachse begrenzt ist.

Man findet

$$U = \frac{\pi}{4} a(a-b), \quad M_x = \frac{a^2}{3}(a-b), \quad M_y = a\frac{(a^2 - b^2)}{3},$$

somit ist $\xi = \dfrac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \dfrac{4(a+b)}{3\pi}.$

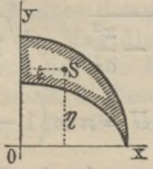


Fig. 43.

§ 32. Schwerpunkt von räumlichen Gebilden. Die Guldinischen Regeln.

a) Schwerpunkt eines beliebigen Körpers.

Schneidet eine in der Entfernung x senkrecht zur x-Achse gelegte Ebene von dem Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung $F(x\,y\,z) = 0$ oder $z = f(x\,y)$ dargestellt ist, eine scheibenförmige Figur vom Inhalt U aus, so berechnet sich die Schwerpunktsabszisse ξ desjenigen Teils des Körpers, der zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt, aus

$$\xi \int_b^a U\,dx = \int_b^a x\,U\,dx\,,$$

woraus folgt

$$\xi = \int_b^a x\,U\,dx : \int_b^a U\,dx\,.$$

385. Beispiel. Den Schwerpunkt einer Zone des Ellipsoids

$$F(xyz) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zwischen den Ebenen x und $x + h$ zu berechnen.

Eine Ebene, senkrecht zur x-Achse in der Entfernung x gelegt, schneidet aus dem Körper eine Ellipse von den Halbachsen $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ aus, welche demnach den Inhalt $U = \pi b c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ hat. Es ist daher die Abszisse des Schwerpunkts der Zone angegeben durch

$$\xi = \int_x^{x+h} x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx : \int_x^{x+h}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\,,$$

wofür man erhält

$$\xi = \tfrac{3}{4}(2x+h)\frac{2x^2+2hx+h^2-2a^2}{3x^2+3hx+h^2-2a^2}\,.$$

Für $x = 0$ und $h = a$ ergibt sich hieraus als Schwerpunktsabszisse des halben Ellipsoids $\xi = \frac{3}{8}a$.

b) Schwerpunkt von Rotationskörpern.

Wird die ebene Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse gedreht, so beschreibt sie einen Umdrehungskörper, für welchen $U = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ ist und dessen Schwerpunkt demnach vom Ursprung die Entfernung hat

$$\xi = \int_b^a x f^2(x)\,dx : \int_b^a f^2(x)\,dx\,.$$

386. Beispiel. Die Parabel $y^2 = 2px$ erzeugt bei der Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen Schwerpunktsabszisse ξ ist.

$$\xi = \int_0^x xy^2\,dx : \int_0^x y^2\,dx \quad \text{oder} \quad \xi = \int_0^x x^2\,dx : \int_0^x x\,dx\,,$$

woraus folgt $\qquad \xi = \frac{2}{3}x$.

c) Erste Guldinische Regel.

Der Rauminhalt V eines Rotationskörpers, der durch Drehung einer Figur — Meridianfigur (Fig. 44) — um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Flächeninhalt U dieser Figur, multipliziert mit dem Weg $2\pi\eta$, den ihr Schwerpunkt S bei der Drehung beschreibt.

$$V = 2\pi\eta\cdot U\,.$$

Dieser Satz heißt die erste Guldinische Regel und gilt für jede beliebige Figur, welche Umgrenzung dieselbe auch haben möge.

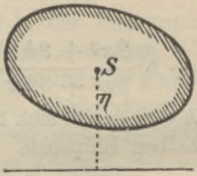


Fig. 44.

Wenn V und U bekannt sind, läßt sich hieraus auch die Ordinate η des Schwerpunkts der Meridianfigur berechnen. Es ist $$\eta = \frac{V}{2\pi U}.$$

387. Beispiel. Den Rauminhalt zu bestimmen, den ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a bei der Drehung um eine Seite beschreibt.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $U = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, die

Schwerpunktsordinate $\eta = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

somit ist

$$V = 2\pi\eta\cdot U = 2\pi\frac{a}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\pi}{4}a^3.$$

388. Beispiel. Den Schwerpunkt der Halbkreisfläche zu bestimmen.

Wird dieselbe um den Durchmesser gedreht, so erzeugt sie eine Kugel vom Inhalt $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. Die Fläche des Halbkreises selbst ist $U = \frac{\pi}{2} a^2$, daher ist, wenn η die zu suchende Schwerpunktsordinate ist,

$$2\pi\eta \cdot \frac{\pi}{2} a^2 = \tfrac{4}{3}\pi a^3,$$

woraus folgt
$$\eta = \frac{4a}{3\pi}.$$

d) Schwerpunkt von Umdrehungsflächen.

Das Bogenelement ds der Kurve $y = f(x)$ erzeugt bei der Drehung um die x-Achse eine reifförmige Fläche vom Inhalt $2\pi y\,ds$, deren Moment in bezug auf eine durch den Ursprung senkrecht zur x-Achse gelegte Ebene $x \cdot 2\pi x\,ds$ ist. Ist daher ξ die Schwerpunktsabszisse der Rotationsfläche zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$,

so ist $\xi \int\limits_b^a y\,ds = \int\limits_b^a x y\,ds$, woraus folgt

$$\xi = \int\limits_b^a x y\,ds : \int\limits_b^a y\,ds.$$

389. Beispiel. Den Schwerpunkt der Kegeloberfläche zu bestimmen, die dadurch erzeugt wird, daß sich die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ um die x-Achse dreht.

Es ist $y = \frac{b}{a}(a - x)$, $y' = -\frac{b}{a}$,

$ds = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\,dx$, somit $\int\limits_0^a y\,ds = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ und

$$\int\limits_0^a x y\,ds = \frac{ab}{6}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Daher ist $\xi = \int\limits_0^a x\,y\,ds : \int\limits_0^a y\,ds = \frac{a}{3}$,

wie zu erwarten war.

390. Beispiel. Den Schwerpunkt der Halbkugelfläche zu bestimmen, die bei der Drehung eines Viertelskreises um einen Halbmesser erzeugt wird.

Man findet

$$\int\limits_0^a y\,ds = a^2, \quad \int\limits_0^a xy\,ds = \frac{a^3}{2}, \quad \text{somit ist} \quad \xi = \frac{a}{2}.$$

e) Zweite Guldinische Regel.

Eine geschlossene oder offene ebene Kurve (Fig. 45) (oder irgend eine Figur) beschreibt bei der Drehung um eine außerhalb ihres Umfangs liegende Achse einen Flächeninhalt O, der gleich dem Produkt aus der Länge S dieser Kurve mal dem Weg $2\pi\eta$ ihres Umfangsschwerpunktes ist.

$$O = 2\pi\eta S.$$

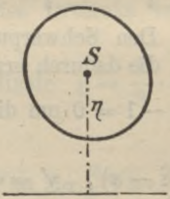


Fig. 45.

Dieser Satz kann auch dazu dienen, den Umfangsschwerpunkt einer Kurve zu bestimmen, wenn ihre Länge S und die Oberfläche O bekannt ist, welche sie bei der Drehung um eine Gerade beschreibt.

391. Beispiel. Die Oberfläche zu berechnen, welche ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a bei der Drehung um eine Seite beschreibt.

$$S = 3a\,, \quad \eta = \tfrac{1}{3}h = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}\,,$$

$$O = 2\pi\eta\cdot S = \pi\sqrt{3}\,a^2\,.$$

392. Beispiel. Den Schwerpunkt des Halbkreisbogens zu berechnen.

Der Halbkreis erzeugt bei der Drehung um den Durchmesser eine Kugelfläche vom Inhalt $O = 4\pi a^2$; da ferner $S = \pi a$ ist, so folgt

$$4\pi a^2 = 2\pi\eta\cdot\pi a\,, \quad \eta = \frac{2a}{\pi}\,,$$

wie sich auch weiter oben schon ergeben hat.

§ 33. Übungsbeispiele.

a) Schwerpunkt von beliebigen Körpern.

393. Den Schwerpunkt der Zone des Paraboloids

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2x}{a} = 0$$

zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = x$ zu bestimmen.

Ein Schnitt parallel zur yz-Ebene ist eine Ellipse von den Halbachsen $b\sqrt{\frac{2x}{a}}$, $c\sqrt{\frac{2x}{a}}$, somit ist

$$U_x = 2\pi\frac{bcx}{a}\,, \quad V = \int\limits_0^x U\,dx = \pi\frac{bcx^2}{a}\,,$$

$$\int_b^a x\,U\,dx = 2\pi\frac{b\,c}{a}\int_0^a x^2\,dx = \tfrac{2}{3}\pi\frac{b\,c}{a}x^3 \quad \text{und}$$

$$\xi = \int x\,U\,dx : \int U\,dx = \tfrac{2}{3}x\,.$$

394. Den Schwerpunkt des einmantligen Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

zu bestimmen.

$$U_x = \frac{\pi\,b\,c}{a^2}(x^2 - a^2)\,, \quad V = \int_0^x U\,dx = \frac{\pi\,b\,c}{3\,a^2}(3\,a^2\,x - x^3)\,,$$

$$\int_0^a x\,U\,dx = \frac{\pi\,b\,c}{4\,a^2}(2\,a^2\,x^2 - x^4)\,, \quad \xi = \frac{3x}{4}\,\frac{2\,a^2 - x^2}{3\,a^2 - x^2}\,.$$

Für $x = a$ folgt hieraus $\xi = \frac{3}{8}a\,.$

395. Die Schwerpunktsabszisse des gemeinschaftlichen Raumes der beiden Zylinderflächen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = a$, sowie $y = 0$ und $y = a$ zu bestimmen.

$$U_x = y\,z = a^2 - x^2\,, \quad V = \tfrac{2}{3}a^3\,,$$

$$\int_0^a x\,U_x\,dx = \int_0^a (a^2\,x - x^3)\,dx = \frac{a^4}{4}\,,$$

$$\xi = \frac{a^4}{4} : \tfrac{2}{3}a^3 = \tfrac{3}{8}a\,.$$

b) Schwerpunkt von Umdrehungskörpern.

396. Schwerpunkt der Halbkugel, erzeugt durch Drehung eines Kreisquadranten um einen Halbmesser.

$$U_x = \pi(a^2 - x^2)\,, \quad V = \tfrac{2}{3}\pi a^3\,,$$

$$\int_0^a x\,U_x\,dx = \frac{\pi}{4}a^4\,, \quad \xi = \tfrac{3}{8}a\,.$$

397. Den Schwerpunkt des Körpers zu bestimmen, den die Schleife der Kurve $a(y^2 - x^2) + x^3 = 0$ bei der Drehung um die x-Achse beschreibt. $\xi = \frac{3}{5}a$.

398. Welchen Rauminhalt (Wulst) beschreibt ein Kreis vom Radius a bei der Drehung um eine Gerade, welche vom Mittelpunkt desselben die Entfernung p hat?

$$V = 2\pi p \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 p a^2\,.$$

399. Den Rauminhalt zu bestimmen, den das gemeinschaftliche Flächenstück der beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ bei der Drehung um eine der Achsen beschreibt. $V = \frac{12}{5}\pi p^3$.

400. Den Rauminhalt des Körpers zu berechnen, den das gemeinschaftliche Flächenstück der beiden Kurven

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0\,, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

bei der Drehung um die Achsen beschreibt.

a) Bei der Drehung um die x-Achse ist:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a(a^2 - b^2).$$

b) Bei der Drehung um die y-Achse ist:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^2(a - b)\,.$$

Für $b = 0$ folgt hieraus beidemal $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ als Inhalt einer Kugel vom Radius a. Für $b = a$ dagegen ist $V = 0$.

401. Den Rauminhalt zu bestimmen, den das Segment des Kreises $r = 2a\cos\varphi$, welches durch den Vektor zum Azimut α abgeschnitten wird, bei der Drehung um die Polarachse beschreibt.

Man erhält $\quad V = \frac{4\pi a^3}{3}\cos^3\alpha\,.$

Für $\alpha = 0$ folgt hieraus als Inhalt der Kugel

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3\,.$$

402. Den Rauminhalt zu berechnen, den das schraffierte Flächenstück in Fig. 43 Nr. 384 bei der Drehung um die x-Achse beschreibt.

$$V = \tfrac{2}{3}\pi a(a^2 - b^2)\,.$$

Für $a = b$ folgt hieraus $V = 0$ und für $b = 0$

$$V = \tfrac{2}{3}\pi a^3$$

(Halbkugel), wie es sein soll.

403. Den Schwerpunkt des Ellipsenquadranten zu bestimmen.

Bei der Drehung um die y-Achse ist $V_1 = \tfrac{2}{3}\pi a^2 b\,.$

„ „ „ „ „ x-Achse „ $V_2 = \tfrac{2}{3}\pi a b^2\,.$

Da $U = \frac{\pi}{4}ab$ ist, so folgt nach der ersten Guldinischen Regel $V_1 = 2\pi\xi U$, $V_2 = 2\pi\eta U$, woraus sich ergibt $\quad \xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}\,.$

404. Den Rauminhalt zu berechnen, den eine Zykloide bei der Drehung um die Bahnlinie beschreibt.

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^3\, d\varphi = 5\pi^2 a^3\,.$$

Da $U = 3\pi a^2$ und $\eta = \tfrac{5}{6}a$ ist, so gibt auch die Guldinische Regel denselben Wert.

$$V = 2\pi \cdot \tfrac{5}{6}a \cdot 3\pi a^2 = 5\pi^2 a^3\,.$$

c) Schwerpunkt von Umdrehungsflächen.

405. Den Schwerpunkt der Kugelzone zu berechnen. (Fig. 46.)

$$O \cdot \xi = \pi \int_{x_1}^{x_2} x\,y\,ds = 2\pi \int a\,x\,dx = \pi\,a\,(x_2^2 - x_1^2)\,.$$

Da $O = 2\pi a (x_2 - x_1)$ ist, so folgt

$$\xi = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\,.$$

Für die Kugelhaube $x_2 = a$ und $x_1 = x$ folgt hieraus $\xi = \frac{1}{2}(a + x)$ und für die Halbkugelfläche $\xi = \dfrac{a}{2}$.

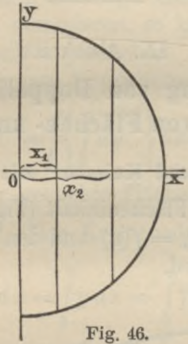


Fig. 46.

406. Den Schwerpunkt der Oberfläche zu bestimmen, den die Parabel $y^2 - 2px = 0$ bei der Drehung um die x-Achse beschreibt.

$$\xi = \frac{1}{5}\,\frac{(p + 2x)^{\frac{1}{2}}(6x^2 + px - p^2) + p^{\frac{5}{2}}}{(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}}.$$

407. Die Oberfläche zu berechnen, die eine Zykloide bei der Drehung um die Bahnlinie beschreibt.

$$O = 2\pi\eta \cdot S = 2\pi \cdot \tfrac{5}{3}\,a \cdot 8\,a = \tfrac{80}{3}\,\pi\,a^2 = \tfrac{20}{3} \cdot 4\,\pi\,a^2\,.$$

408. Die Oberfläche zu berechnen, die das gemeinschaftliche Flächenstück der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0\,, \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 - a^2 = 0$$

bei der Drehung um eine der Achsen beschreibt.

$$O = 2\pi\eta\, S = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi a = \pi^2 \cdot a^2\,.$$

409. Den Schwerpunkt des Bogens der Zykloide zu berechnen.

$$O = \tfrac{64}{3}\pi a^2\,, \quad S = 8a\,, \quad O = 2\pi\eta \cdot S\,, \quad \eta = \tfrac{4}{3}a\,.$$

IX. Abschnitt.

Anwendung von Doppelintegralen zur Berechnung von Flächen- und Raumgebilden.

§ 34. Quadratur und Kubatur mit Doppelintegralen.

a) Den ebenen Flächeninhalt (Fig. 47) zu berechnen, der von der Kurve $y = f(x)$ und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird.

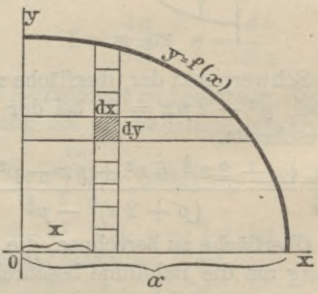


Fig. 47.

Zieht man in der Entfernung x und $x + dx$ zwei Parallelen zur y-Achse, so wird hierdurch aus der zu berechnenden Fläche ein Streifen ausgeschnitten, der als eine Summe von Rechteckchen von der Breite dx und der Höhe dy angesehen und demgemäß durch das Integral

$$dU = \int_0^y dy\, dx$$

dargestellt werden kann, in welchem dx als konstant zu betrachten ist und y aus der Gleichung $y = f(x)$ der begrenzenden Kurve in Funktion von x ausgedrückt werden kann. Will man alle derartige elementare Streifen von $x = 0$ bis $x = a$ summieren, so kann dies durch Integration von dU nach x geschehen. Auf diese Weise erhält man das bestimmte Doppelintegral

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=f(x)} dy \right\} dx,$$

durch welches der gesuchte Flächeninhalt bestimmt ist.

410. Beispiel. Den Kreisquadranten zu berechnen.

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dy \right\} dx = \int_0^a y\, dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} a^2 .$$

Zusatz. Hierbei ist zu bemerken, daß man ebenso gut auch zuerst nach x integrieren und hernach durch Integration nach y alle horizontalen Flächenstreifen summieren kann.

b) Den ebenen Flächeninhalt (Fig. 48) zu berechnen, der von der Kurve $r = f(\varphi)$ und den Vektoren der Azimuts $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ begrenzt ist.

Werden zu den Azimuts φ und $\varphi + d\varphi$ die zugehörigen Vektoren gezogen und um den Pol O zwei

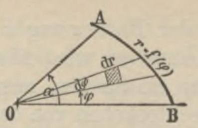


Fig. 48.

Kreise von den Radien r und $r+dr$ beschrieben, so begrenzen diese vier Linien ein elementares Flächenstück, das näherungsweise gleich einem Rechteck von der Breite $r\,d\varphi$ und der Höhe dr und dem Inhalt $r\,d\varphi\,dr$ gesetzt werden kann. Die Summe aller derartigen elementaren Flächenstücke zwischen der Kurve und den Vektoren der Azimuts $\varphi=0$ und $\varphi=\alpha$ ist angegeben durch das Doppelintegral

$$U=\int_0^{\alpha}\left\{\int_0^{r=f(\varphi)} r\,dr\right\}d\varphi,$$

das nach Ausführung der Integration nach dr direkt in das bekannte einfache Integral

$$U=\int_0^{\alpha}\frac{r^2}{2}\,d\varphi$$

übergeht.

c) Den Rauminhalt (Fig. 49) zu bestimmen, der von der Zylinderfläche $y=\varphi(x)$, den Koordinatenebenen und der Fläche $z=f(xy)$ begrenzt ist.

Legt man in der Entfernung x und $x+dx$ zwei Ebenen senkrecht zur x-Achse, so schneidet die erste derselben aus dem zu berechnenden Körper die Figur $CDEF$ vom Inhalt

$$CDEF=\int_0^{y=\varphi(x)} z\,dy=\int_0^{y=\varphi(x)} f(xy)\,dy$$

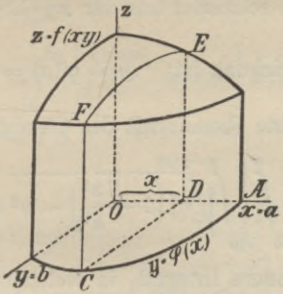


Fig. 49.

heraus und beide zusammen aus dem Körper eine Scheibe heraus, welche näherungsweise den Inhalt

$$U dx = \left\{ \int_0^{y=\varphi(x)} f(xy)\, dy \right\} dx$$

hat. Die Summe aller derartigen elementaren Scheiben zwischen den Ebenen $x = 0$ bis $x = a$ ist alsdann angegeben durch das Doppelintegral

$$V = \int_0^{x=a} \left\{ \int_0^{y=\varphi(x)} f(xy)\, dy \right\} dx\,,$$

womit der gesuchte Rauminhalt ermittelt ist.

411. Beispiel. Zur Berechnung eines Oktanten des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

setze man $\quad z = f(xy) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,.$

Die Fläche schneidet aus der xy-Ebene eine Ellipse aus, deren Gleichung ist $y = \varphi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Der gesuchte Rauminhalt des Oktanten ist daher

$$V_1 = \frac{c}{b}\int_0^a \left\{\int_0^{y=\varphi(x)} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy\right\} dx .$$

Für das innere Integral, in welchem x als konstant anzusehen ist, ergibt sich der Ausdruck

$$\int\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - y^2} + \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}},$$

der nach Einführung der Grenzen übergeht in

$$\frac{\pi}{4} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad \text{daher ist}$$

$$V_1 = \frac{\pi b c}{4}\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi abc}{6}.$$

Das Gesamtvolumen des Ellipsoids ist also

$$V = 8\, V_1 = \tfrac{4}{3}\pi abc .$$

d) Den Rauminhalt (Fig. 50) zu berechnen, der von der Zylinderfläche $r = f(\varphi)$, der xy-Ebene und der Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzt wird.

Der gesuchte Rauminhalt ist ausgedrückt durch das Doppelintegral

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=f(\varphi)} F(r,\ \varphi)\, r\, dr \right\} d\varphi\,,$$

wobei $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, also $x^2 + y^2 = r^2$ ist.

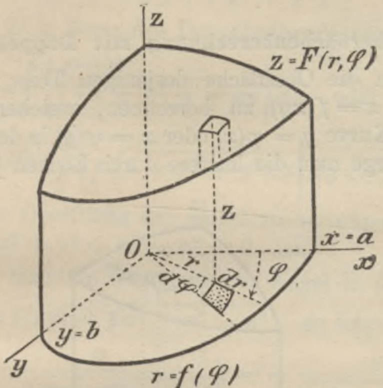


Fig. 50.

412. Beispiel. Den Rauminhalt zu bestimmen, der von der Zylinderfläche $r = a$, der xy-Ebene und der Fläche des Paraboloids $2pz = x^2 + y^2$ begrenzt wird.

Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so folgt

$$z = F(r,\ \varphi) = \frac{r^2}{2p}\,.$$

Der gesuchte Inhalt ist daher angegeben durch

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=a} \frac{r^2}{2p}\, r\, dr \right\} d\varphi = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^4}{p}$$

Für $a = p$ folgt hieraus $\quad V = \frac{\pi}{4} p^3$.

Die Paraboloidfläche halbiert, wie leicht zu sehen ist, den entstehenden zylindrischen Raum, der die Höhe $h = \frac{a^2}{2p}$ hat.

§ 35. Oberflächenberechnung mit Doppelintegralen.

a) Um die Oberfläche desjenigen Teils der Fläche (Fig. 51) $z = f(xy)$ zu berechnen, welcher senkrecht über der Kurve $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ in der xy-Ebene liegt, zerlege man die letztere durch Ebenen parallel zur

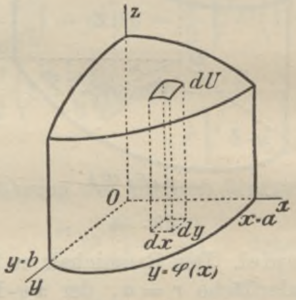


Fig. 51.

yz- und zx-Ebene in unendlich kleine Rechtecke vom Inhalt $dx\,dy$. Das senkrecht über einem solchen Rechteck liegende Element dU der Fläche $z = f(xy)$ kann ohne Fehler als eben und in der Tangentialebene liegend angesehen werden. Ist alsdann γ der Neigungswinkel desselben gegen die xy-Ebene, so ist $dx\,dy = dU \cos\gamma$ oder

$dU = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$, wobei $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ und

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = q$ gesetzt ist.

Da nun γ auch der Winkel ist, den die Flächennormale mit der z-Achse macht, so folgt

$$dU = dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,,$$

woraus sich U in Form des Doppelintegrals ergibt.

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=\varphi(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy \right\} dx \quad \text{oder}$$

$$U = \int_0^b \left\{ \int_0^{x=\psi(y)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx \right\} dy\,.$$

413. Die Oberfläche der Kugel zu berechnen, deren Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ist.

Schreibt man die Gleichung der Kugel in der Form

$$z = f(xy) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,, \text{ so folgt}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,, \quad q = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,.$$

Da ferner $y = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ist, so ergibt sich für die Oberfläche des Kugeloktanten der Ausdruck

$$\frac{U}{8} = a\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \right\} dx\,.$$

Das innere Integral ist

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,,$$

womit U übergeht in

$$\frac{U}{8} = \frac{\pi}{2} a \int_0^a dx = \frac{\pi}{2} a^2,$$

somit ist $U = 4\pi a^2$.

b) Eine zur z-Achse parallel laufende Zylinderfläche habe in Polarkoordinaten die Gleichung $r = f(\varphi)$ und werde nach oben durch die Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzt.

Es soll der Flächeninhalt der oberen Begrenzungsfläche bestimmt werden.

Das in Fig. 51 schraffierte Element der xy-Ebene hat den Inhalt $r\,d\varphi\,dr$. Das senkrecht darüber liegende Element der Fläche $z = F(r, \varphi)$ ist

$$dU = \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\gamma},$$

wo γ den Winkel bezeichnet, den die zu dU gehörige Flächennormale mit der z-Achse einschließt. Die Oberfläche U selbst ist somit ausgedrückt durch

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{f(\varphi)} \frac{r\,dr}{\cos\gamma} \right\} d\varphi,$$

wo $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ist und p und q in Funktion der Zylinderkoordinaten r, φ auszudrücken sind. Man hat

$$p = \frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r},$$

$$q = \frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r} \quad \text{und}$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2.$$

414. **Beispiel.** Die Oberfläche der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

zu berechnen.

Führt man Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so ist

$$z = F(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad r = f(\varphi) = a \quad \text{und}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{und}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Daher ist

$$\frac{U}{2} = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a \frac{a r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} a^2\, d\varphi = 2\pi a^2 \quad \text{und}$$

$$U = 4\pi a^2.$$

§ 36. Übungsbeispiele.

415. Inhalt und Schnittfläche des Körpers zu berechnen, der von der xy-Ebene, der Kegelfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und der Zylinderfläche $y^2 - ax + x^2 = 0$ begrenzt wird.

Werden Polarkoordinaten eingeführt, so folgt

$$z = F(r, \varphi) = \frac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{cr}{a}, \quad r = f(\varphi) = a\cos\varphi,$$

$$\frac{V}{2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{c}{a} r \cdot r\,dr \right\} d\varphi = \tfrac{1}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} c\,a^2 \cos^3\varphi\,d\varphi = \tfrac{2}{9}\,c\,a^2,$$

$$V = \tfrac{4}{9}\,a^2 c\,.$$

Ferner ergibt sich

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a}\cos\varphi, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c}{a}\sin\varphi,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \text{somit ist}$$

$$\frac{U}{2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} r\,dr \right\} d\varphi = \frac{\pi}{8} a \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$U = \frac{\pi}{4} a \sqrt{a^2 + c^2}\,.$$

416. Inhalt und obere Begrenzungsfläche des zylindrischen Raumes zu berechnen, der von der xy-Ebene, der Zylinderfläche $r = b$ und von dem Paraboloid $az = x^2 + y^2$ begrenzt ist.

$$V = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{r=b} \frac{r^2}{a} \cdot r\,dr \right\} d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{b^4}{a},$$

$$U = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{r=b} \frac{r\,dr}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right\} d\varphi = \frac{\pi}{2} a \sqrt{a^2 + 4\,b^2}.$$

Für $b = a$ folgt hieraus

$$V = \frac{\pi}{2} a^3, \quad U = \frac{\pi}{2} a^2 \sqrt{5}.$$

417. Den Rauminhalt zu berechnen, der durch die beiden Zylinderflächen

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + ax + y^2 = 0$$

aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ herausgeschnitten wird.

Gemeinschaftlicher Rauminhalt der drei Flächen

$$V_1 = \tfrac{4}{3} a^3 (\pi - \tfrac{4}{3}).$$

Rest des Kugelinhalts

$$V_2 = \tfrac{16}{9} a^3.$$

418. Rauminhalt und Scheitelfläche des Körpers zu berechnen, der von der xy-Ebene, der Zylinderfläche $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und der Kegelfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

begrenzt wird.

$$V = \frac{2\pi}{3} c a^2, \quad U = \pi a \sqrt{c^2 + a^2}.$$

419. Dieselbe Aufgabe zu lösen für die Zylinderfläche $r = k\varphi$ und die Kegelfläche

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 + y^2) = \frac{c^2}{a^2} r^2 \quad \text{oder} \quad z = \frac{c}{a} r.$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=k\varphi} \frac{c}{a} r^2 \, dr \right\} d\varphi = \tfrac{4}{3} \pi^4 k^3 \frac{c}{a}.$$

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=k\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\} d\varphi = \tfrac{4}{3}\pi^3 \frac{k^2}{a} \sqrt{c^2+a^2}\,.$$

420. Ein veränderlicher Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung dreht sich um die z-Achse und schneidet beständig den Kreis $x^2+y^2-2ax=0$ in der xy-Ebene. Gesucht ist der Rauminhalt des erzeugten Körpers.

Als Gleichung desselben ergibt sich

$$z^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2-4a^2x^2=0\,.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so ergibt sich als Rauminhalt

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{r=2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2\cos^2\varphi - r^2}\cdot r\,dr \right\} d\varphi = \tfrac{16}{9}a^3,$$

somit $V = \frac{64}{9}a^3$.

421. In der xy-Ebene liegt der Kreis $r=2a\cos\varphi$. Eine veränderliche Gerade PQ schneidet beständig den Kreis in P und die z-Achse in Q, so daß $OQ = k\,OP$ ist. Gesucht ist der Rauminhalt (und die Oberfläche) des erzeugten Körpers. (Fig. 52.)

Als Gleichung der Fläche erhält man

$$z = F(x,y) = k\left\{\frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

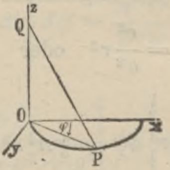


Fig. 52.

Für $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ergibt sich für den gesuchten Rauminhalt der Ausdruck

$$\frac{V}{2} = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{r=2a\cos\varphi} (2\,a\cos\varphi - r)\,r\,dr\right\} d\varphi = \tfrac{8}{9}\,k\,a^3\,,$$

somit ist
$$V = \tfrac{16}{9}\,k\,a^3\,.$$

422. Inhalt und Scheitelfläche des Körpers zu bestimmen, der von der Zylinderfläche $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und der Ebene

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$

begrenzt ist.

$$V = \pi\gamma a^2\,, \quad U = \pi a^2\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}}$$

X. Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 37. Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi\left(x\,y\,,\ \frac{dy}{dx}\right) = \varphi(x\,y\,,\ y') = 0$$

integrieren, heißt nun Funktion $F(x\,y\,,\ C)$ suchen, welche, nach x differentiiert und gleich Null gesetzt, wieder auf $\varphi(x\,y\,,\ y') = 0$ zurückführt.

So ist beispielsweise $y\,dy - p\,dx = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und

$$F(xy, C) = y^2 - 2px + C = 0$$

die zugehörige Integralgleichung. Die Größe C heißt die Integrationskonstante.

b) Läßt sich die Differentialgleichung auf die Form bringen

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0\,,$$

wo P, bzw. Q nur eine Funktion von x, bzw. allein ist, so erhält man als zugehörige Integralgleichung unmittelbar

$$\int P\,dx + \int Q\,dy + C = 0\,.$$

423. Beispiel. Für welche Kurven ist die Länge der Subtangente gleich der doppelten Abszisse des Berührungspunkts?

Für $S_t = \frac{y}{y'} = 2x$ erhält man als Differentialgleichung der gesuchten Kurvenschar

$$\varphi(xy, y') = y\,dx - 2x\,dy = 0\,,$$

woraus nach Trennung der Veränderlichen folgt

$$\frac{dx}{x} - \frac{2\,dy}{y} = 0\,.$$

Die Integration gibt als Integralgleichung

$$\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dy}{y} + l\,2p = 0 \quad \text{oder}$$

$$lx - ly^2 + l\,2p = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = 2px\,.$$

Die gesuchten Kurven stellen somit eine Schar von Parabeln von veränderlichem Parameter p dar.

c) Für die homogene Differentialgleichung

$$P(xy)\,dx + Q(xy)\,dy = 0\,,$$

wo die Funktionen P und Q homogen und von gleichem Grad hinsichtlich der Veränderlichen x und y sind, ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(xy)}{Q(xy)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man alsdann $y = zx$, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = \psi(z)\,,$$

worin die Veränderlichen getrennt werden können. Man erhält als Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\psi(z) - z}$$

und hieraus als zugehörige Integralgleichung

$$lx = \int \frac{dz}{\psi(z) - z} + C = F(z) + C = F\left(\frac{y}{x}\right) + C\,.$$

424. Beispiel. Die Kurven zu bestimmen, deren Subnormale gleich $y - x$ ist.

Es ist $\frac{y}{y'} = y - x$ oder $y\,dx = (y - x)\,dy$

eine homogene Differentialgleichung. Setzt man

$$y = zx\,,\quad dy = x\,dz + z\,dx\,,\quad \text{so folgt}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{z-1}{z(2-z)}\,dz = -\frac{dz}{2z} + \frac{dz}{2(2-z)}$$

und hieraus durch Integration

$$lx = -\tfrac{1}{2}\, lz - \tfrac{1}{2}\, l(2-z) + l\,C \quad \text{oder}$$

$$lx + l\sqrt{z(2-z)} = l\,C \quad \text{oder}$$

$$2\,xy - y^2 = C^2\,.$$

d) Die Differentialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

läßt sich integrieren, wenn die linke Seite ein **vollständiges Differential** ist, wofür die Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ist}\,.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so setze man

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{und integriere} \quad F = \int P\,\partial x\,,$$

wobei das in P enthaltene y zunächst noch als konstant anzusehen ist. Da nun in der zu addierenden Integrationskonstanten noch eine Funktion $\varphi(y)$ von y enthalten sein kann, so ist diese zu dem erhaltenen Integral hinzuzufügen, wodurch F übergeht in

$$F = \int P\,dx + \varphi(y)\,.$$

Der Wert von φ läßt sich ermitteln, indem man dieses Integral wieder nach x differentiiert und das Resultat mit der gegebenen Differentialgleichung vergleicht.

425. Beispiel. Die Differentialgleichung

$$(9\,x^2 - 14\,xy + 2\,y)\,dx + (-7\,x^2 + 12\,y + 2\,x)dy = 0$$

zu integrieren.

Die Differentialgleichung ist eine vollständige, da

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ist. Setzt man

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 9x^2 - 14xy + 2y\,, \quad \text{so ist}$$

$$\begin{aligned} F &= \int (9x^2 - 14xy + 2y)\,\partial x + \varphi(y) \\ &= 3x^3 - 7x^2y + 2xy + \varphi(y)\,. \end{aligned}$$

Soll diese Funktion das gesuchte Integral sein, so muß sie, nach x differentiiert, auf die linke Seite der gegebenen Differentialgleichung zurückführen; man erhält

$$(9x^2 - 14xy + 2y)\,dx + \left(-7x^2 + 2x + \frac{\partial\varphi}{dy}\right)dy = 0\,.$$

Durch Vergleichung mit derselben folgt

$$-7x^2 + 12y + 2x = -7x^2 + 2x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 12y\,, \quad \varphi = \int 12y\,\partial y + C = 6y^2 + C\,.$$

Das gesuchte Integral ist daher

$$F = 3x^3 - 7x^2y + 2xy + 6y^2 + C = 0\,.$$

Anmerkung. Wenn für die gegebene Differentialgleichung die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nicht erfüllt ist, so ist die linke Seite derselben auch kein vollständiges Differential und kann die Integration nicht in der besprochenen Weise ausgeführt werden. Die Funktion $\mu(xy)$, mit der man die gegebene Differentialgleichung multiplizieren muß, damit deren linke Seite ein vollständiges Differential wird, heißt der integrierende Faktor. Die Bestimmung desselben hängt von der Gleichung

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

ab, deren Auflösung im allgemeinen schwieriger als die der gegebenen Differentialgleichung selbst ist.

e) Jedem Wert der Konstanten C in der allgemeinen Lösung $F(xy, C) = 0$ der gegebenen Differentialgleichung entspricht eine besondere Lösung, die man als partikuläre Lösung oder partikuläres Integral bezeichnet.

Neben diesen partikulären Lösungen kann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung noch eine singuläre Lösung besitzen, welche geometrisch als die Einhüllende der Kurvenschar $F(xy, C) = 0$ anzusehen ist. Dabei gilt die Regel: Die singuläre Lösung der Differentialgleichung $\varphi(xy, y') = 0$ ergibt sich:

α) durch Elimination von $p = y' = \frac{dy}{dx}$ aus

$$\varphi(xy, p) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \quad \text{oder}$$

β) durch Elimination von C aus

$$F(xy, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0 .$$

f) Eine Linie, welche ein System von Kurven $f(xy\alpha) = 0$ nach einem bestimmten Gesetz schneidet, heißt eine Trajektorie. Sie heißt eine isogonale Trajektorie, wenn sie jede Kurve dieser Schar unter einem Winkel ϑ von konstanter Größe trifft, und speziell orthogonal, wenn dieser Winkel ein rechter ist.

§ 38. Übungsbeispiele.

426. Die Kurven zu bestimmen, deren Polarsubnormale von konstanter Länge a ist.

Aus $\dfrac{dr}{d\varphi} = a$ folgt $r = a\varphi + C$.

Die gesuchten Kurven sind archimedische Spiralen.

427. Die Kurven zu bestimmen, deren Tangente die Länge a hat.

Aus $\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = a$ folgt $x = \sqrt{a^2 - y^2} - a\, la + C$.

428. Die Kurven zu bestimmen, deren Flächeninhalt vom Ursprung bis zur Ordinate des Punktes $P(xy)$ gleich $\dfrac{1}{n} x y$ ist.

Für die Fläche erhält man $U = \int\limits_0^x y\,dx = \dfrac{1}{n} x y$,

woraus durch Ableitung nach x folgt

$$n y\,dx = x\,dy + y\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = (n-1)\frac{dx}{x}.$$

Hieraus ergibt sich das Integral $y = Cx^{n-1}$.

429. Für welche Kurven ist die Polarnormale konstant und gleich a?

$$r = a \sin(\varphi + C).$$

430. Für welche Kurven ist die Polarnormale gleich a^2.

$$r = a \sin(\varphi_0 - \varphi).$$

431. Für welche Kurven ist das Lot vom Ursprung auf die Tangente gleich der Abszisse des Berührungspunktes?

Die gesuchten Kurven gehören einer Schar von Kreisen an: $x^2 + y^2 - 2\,Cx = 0$, welche die y-Achse im Ursprung berühren.

432. Die Differentialgleichung von der (Clairautschen) Form $y = xp + \varphi(p)$ zu integrieren.

Die Differentiation nach x gibt

$$p = p + x\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0\,.$$

Der erste Faktor gleich Null gesetzt, $\dfrac{dp}{dx} = 0$, führt zu dem Integral $p = C$ und gibt demgemäß als allgemeines Integral $y = xC + \varphi(C)$.

Aus $x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$ und der gegebenen Gleichung folgt endlich durch Elimination von p die singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

433. Die Kurven zu bestimmen, für welche der Abschnitt der Tangente zwischen den Achsen gleich a ist.

Differentialgleichung: $y = px + \dfrac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Allgemeines Integral: $y = Cx + \dfrac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$.

Singuläres Integral: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$.

434. Die Kurven zu bestimmen, deren Tangente von den Koordinatenmassen Stücke von konstanter Summe a abschneidet.

Differentialgleichung: $y = px - \dfrac{ap}{1 - p}$.

Allgemeines Integral: $y = Cx - \dfrac{aC}{1 - C}$.

Singuläre Lösung: $(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0$.

435. Die Trajektorien zu bestimmen, welche jede Kurve der Schar $f(xy\lambda)=0$ unter dem Winkel ϑ schneiden.

Es sei $P(xy)$ ein Schnittpunkt einer Trajektorie mit einer bestimmten Kurve der Schar f; die Richtungswinkel der Tangenten beider Kurven in P seien α und α', dann ist $\vartheta=\alpha'-\alpha$, also auch $\operatorname{tg}\vartheta=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha'-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha'\operatorname{tg}\alpha}$, wo nun $\operatorname{tg}\alpha=y'$ und $\operatorname{tg}\alpha'=-\dfrac{\partial f}{\partial x}:\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ist. Durch Elimination von λ aus $\operatorname{tg}\vartheta=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}y'+\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial x}y'}$, und $f(xy\lambda)=0$ ergibt sich die Differentialgleichung $\varphi(xy,y')=0$ der gesuchten Trajektorienschar.

Für $\vartheta=\dfrac{\pi}{2}$ erhält man die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien als λ-Eliminat aus

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}y'=0 \quad \text{und} \quad f(xy\lambda)=0\,.$$

436. Die orthogonalen Trajektorien des Strahlenbüschels $y=\lambda x$ zu bestimmen.

Differentialgleichung: $x\,dx+y\,dy=0$.

Trajektorienschar: $x^2+y^2=C^2$.

437. Die orthogonalen Trajektorien der Parabelschar $y^2-2\lambda x=0$ zu bestimmen.

Differentialgleichung: $2x\,dx+y\,dy=0$.

Trajektorienschar: $x^2+\dfrac{y^2}{2}-C^2=0$.

Verzeichnis der erschienenen Bände.

B. Verzeichnis nach Wissenschaften.

Bibliothek zur Philosophie.

Einführung in die Philosophie von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 281.

Geschichte der Philosophie IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. Bruno Bauch, Privatdoz. an der Univers. Halle a. S. Nr. 394.

Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Grundriß der Psychophysik von Professor Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Ethik von Prof. Dr. Thommas Achelis in Breen. Nr. 90.

Allgemeine Ästhetik von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an der Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Sprachwissenschaft.

Indogermanische Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Universität Graz. Mit 1 Tafel. Nr. 59.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Prof. Dr. Josef Szinnyei in Budapest. Nr. 463.

Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Professor an der Universität München. Nr. 40.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung v. Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

Deutsches Wörterbuch von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Plattdeutsche Mundarten v. Prof. Dr. Hub. Grimme, Freiburg (Schweiz). Nr. 461.

Die deutschen Personennamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Professor Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch i. Magdeburg. Nr. 82.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Universit. Prag. Nr. 66.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar v. Dr. Erich Berneker, Prof. a. d. Univ. Prag. Nr. 67.

Russische Literatur v. Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa und Poesie mit ausführlichen Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.

Geschichte der klassischen Philologie von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster. Nr. 367.

Siehe auch „Handelswissenschaftliche Bibliothek".

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Literaturgeschichtliche Bibliothek.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit von Prof. Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Karl Berger. Nr. 161.

Deutsche Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Dr. Richard Weitbrecht in Wimpfen. 2 Teile. Nr. 134, 135.

Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Herm. Jantzen, Dir. d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Das Walthari-Lied. Ein Heldensang aus dem 10. Jahrhundert im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert v. Prof. Dr. H. Althof in Weimar. Nr. 46.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitungen und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Der Nibelunge Nôt in Auswahl und **mittelhochdeutsche Grammatik** mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 1.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus **Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von O. Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Die Epigonen des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Literaturdenkmäler des 14. und 15. Jahrhunderts, ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— **II: Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläutert v. Professor Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

— **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Deutsche Literaturdenkmäler des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Paul Legband in Berlin. 1. Teil. Nr. 364.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Das deutsche Volkslied. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Prof. an der Universität Heidelberg. Nr. 125.

Spanische Literaturgeschichte von Dr. Rudolf Beer in Wien. 2 Bde. Nr. 167, 168.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule München. Nr. 213.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. **I:** Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— **II:** Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

Nordische Literaturgeschichte. I: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 254.

Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. **I:** Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

— **II:** Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Die Metamorphosen des P. Ovidius Naso. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geschichtliche Bibliothek.

Einleitung in die Geschichtswissenschaft von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität in Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Geschichte des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, o. ö. Prof. der semitischen Sprachen an der Universität in München. Mit 9 Voll- und Textbildern und 1 Karte des Morgenlandes. Nr. 43.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Neutestamentliche Zeitgeschichte I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— **II:** Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der Deutschen Univ. Prag. Nr. 49.

Griechische Altertumskunde von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Römische Geschichte von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollbild. Nr. 45.

Geschichte des Byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Deutsche Geschichte I: Mittelalter (bis 1519) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 33.

— **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 34.

— **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648 bis 1806) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.

Deutsche Stammeskunde von Dr. Rudolf Much, Prof. an der Universität in Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Die deutschen Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Direktor des Städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen. Nr. 124.

Abriß der Burgenkunde von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. I: Öffentliches Leben. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel u. Abbildungen. Nr. 93.

— **II:** Privatleben. Mit Abbildungen. Nr. 328.

Quellenkunde zur Deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität in Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Österreichische Geschichte. I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.

— **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Universität Graz. Mit 2 Stammtafeln. Nr. 105.

Englische Geschichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Französische Geschichte von Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Univ. Berlin. Nr. 85.

Russische Geschichte von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Spanische Geschichte von Dr. Gust. Diercks. Nr 266.

Schweizerische Geschichte v. Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr 188.

Geschichte der christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

Geschichte Frankens von Dr. Christian Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D. in München. Nr. 434.

Sächsische Geschichte von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

Thüringische Geschichte von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.

Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

Württembergische Geschichte von Dr. Karl Weller, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.

Geschichte Lothringens von Geh. Reg.-R. Dr. Herm. Derichsweiler in Straßburg. Nr. 6.

Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.

Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universität Bonn. 1. Bändchen: 1800—1852. Nr. 216.

— 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univ. Berlin. Nr. 156.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geographische Bibliothek.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Klimakunde. I: Allgemeine Klimalehre von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren. Nr. 114.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor a. d. Universität in Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abb. im Text u. 8 Tafeln. Nr. 112.

Paläogeographie. Geologische Geschichte der Meere u. Festländer v. Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt in Aachen. Nr. 482.

Das Eiszeitalter von Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Die Alpen von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abbildungen, 6 graphischen Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

— **von Baden** von Professor Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Königl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 176.

— **der Republik Brasilien** von Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.

— **von Britisch-Nordamerika** von Professor Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 215.

— **des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

— **der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildungen im Text und 1 Karte im Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Textillustrationen und 1 Karte. Nr. 244.

— **der Rheinprovinz** von Dr. V. Steinecke, Direktor des Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Dr. Alfred Philippson, ord. Prof. der Geographie an der Universität Halle a. S. Mit 9 Abbildungen, 7 Textkarten und einer lithographischen Karte. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Plauen. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 258

— **der Schweiz** von Professor Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 202.

— **der Vereinigten Staaten von Nordamerika** von Prof. Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr, Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Landes- und Volkskunde Palästinas von Privatdozent Dr. G. Hölscher in Halle a. S. Mit 8 Vollbildern und einer Karte. Nr. 345.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo, F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm und Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, neu bearbeitet von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. Mit 71 Abbildungen. Nr. 30.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Mathematische Bibliothek.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Fig. von Dr. Gerhard Hessenberg, Professor an der Landwirtschaftl. Akademie Bonn-Poppelsdorf. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Nr. 97.

Niedere Analysis mit 6 Fig. von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Nr. 53.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Fig. von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Fig. von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 87.

— II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 88.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 52 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Dr. K. Doehlemann, Prof. an der Universität München. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit 15 Fig. und 2 Tafeln von Wilh. Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Nr. 302.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule zu Münster i. W. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Gleichzeitig macht die Verlagshandlung auf die „Sammlung Schubert", eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, aufmerksam. Ein vollständiges Verzeichnis dieser Sammlung befindet sich am Schluß dieses Prospektes. Außerdem kann ein ausführlicher mathematischer Katalog der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung kostenfrei durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

Paläontologie und Abstammungslehre von Prof. Dr. Karl Diener in Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdozent an der Universität Wien. Mit 51 Abbildungen. Nr. 73.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Abriß der Biologie der Tiere von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Das Tierreich. I: Säugetiere, von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

— **III: Reptilien und Amphibien.** Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.

— **IV: Fische**, von Dr. Max Rauther, Privatdozent der Zoologie an der Universität Gießen. Mit 37 Abbildungen. Nr. 356.

— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie an der Universität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Figuren. Nr. 439.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johs. Meisenheimer, Professor der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— II: Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Geschichte der Zoologie von Dr. Rud. Burckhardt, weil. Direktor der Zoologischen Station des Berliner Aquariums in Rovigno (Istrien). Nr. 357.

Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben von Professor Dr. E. Dennert in Godesberg. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Das Pflanzenreich. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Die Pflanzenwelt der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit 100 Abbildungen. Nr. 268, 269.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. der Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Das System der Blütenpflanzen mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Assistent am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildungen. Nr. 310.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an d. Universität Bonn. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Theoretische Physik. I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

— II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

— III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.
Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
Stereochemie v. Dr. E. Wedekind, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 34 Abb. Nr. 201.
Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie u ihre physikal.-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.
— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.
Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.
Agrikulturchemie. I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.
Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
— II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.
Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied d. Kgl. Preuß. Meteorol. Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abb. u. 3 Taf. Nr. 175.
Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.
Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neu bearb. v. Dr. H. Ludendorff, Potsdam. Mit 15 Abb. Nr. 91.
Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Fig. Nr. 114.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Physik.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Professor an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 13 Figuren. Nr. 294.
Theoretische Physik von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. I: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
— II: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
— III: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.
— IV: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.
Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Universität Breslau. Nr. 445.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Chemie.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I, II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

— III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Joh. Hoppe. I: Theorie u. Gang d. Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg i. H. Nr. 470.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Mit 1 Tafel. Nr. 241.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Universität Breslau. Nr. 445.

☛ Siehe auch „Technologie". Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Technologie.

Chemische Technologie.

Allgemeine chemische Technologie v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Die Fette und Öle sowie die **Seifen- und Kerzenfabrikation** und die **Harze**, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun. I: Einführung i. d. Chemie, Besprechung einig. Salze u. d. Fette u. Öle. Nr. 335.

— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.

— III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 16 Abbildungen. Nr. 333.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- und Mälzerschule in Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dipl.-Ing. Dr. Ernst Leher. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung und Untersuchung von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Anorganische chemische Industrie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz in München. 2 Bde. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.

Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.

Die Teerfarbstoffe mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Mechanische Technologie.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

— **II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textil-Industrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Das Holz. Aufbau, Eigenschaften und Verwendung, von Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abbildungen. Nr. 459.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Ingenieurwissenschaften.

Das Rechnen in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Karlsruhe i. B. Mit 30 Abb. Nr. 405.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Materialprüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen, unter besonderer Berücksichtigung der Metallmikroskopie von Prof. E. Heyn und Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Groß-Lichterfelde) der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. I: Allgemeiner Teil. Mit 45 Abbildungen im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— II: Spezieller Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— II: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Hydraulik v. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Schattenkonstruktionen von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Dir. d. Kgl. Baugewerkschule, Münster i. W. Mit 132 Fig. Nr. 57.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
— II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.
— III. Teil: Deutsch-Französisch. Nr. 453.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 42 Fig. u. 10 Tafeln. Nr. 196.

— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 103 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 197.

Elektrotechnik. III: Die Wechselstromtechnik. Mit 126 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Die Gleichstrommaschine von C. Kinzbrunner, Ingenieur u. Dozent für Elektrotechnik a. d. Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen von Diplom-Elektroingenieur Josef Herzog in Budapest u. Prof. Feldmann in Delft. Mit 68 Fig. Nr. 456.

Das Fernsprechwesen v. Dr. Ludw. Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. u. 1 Taf. Nr. 155.

Die elektrische Telegraphie von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.

Maurer- u. Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Eisenkonstruktionen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. Oberlehrer P. Werkmeister. 2 Bändchen. Mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Der Eisenbetonbau von Reg.-Baumeister Karl Rößle in Berlin-Steglitz. Mit 77 Abbildungen. Nr. 349.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting, Direktor der Akt.-Ges. Gebrüder Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Fig. Nr. 343.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Professor Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Das Veranschlagen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B.D.A., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 25 Figuren und 11 Tabellen. Nr. 399.

Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbildungen. Nr. 443.

— II: Die Schulräume. — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 444.

Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Die Maschinenelemente. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.

— II: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Die Dampfmaschine. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Die Dampfkessel. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Die Gaskraftmaschinen. Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten v. Ingenieur Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ing. Hermann Wilda, Professor am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Die zweckmäßigste Betriebskraft von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschiedene Kraftmaschinen. Mit 27 Abbildungen. Nr. 224.

— II: Gas-, Wasser- und Wind-Kraftanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 225.

— III: Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graphische Darstellungen. Wahl der Betriebskraft. Mit 27 Abbildungen. Nr. 474.

Die Hebezeuge, ihre Konstruktion und Berechnung von Ingenieur Hermann Wilda, Prof. am staatl. Technikum in Bremen. Mit 399 Abbildungen. Nr. 414.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.

Die landwirtschaftlichen Maschinen von Karl Walther, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 407—409.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Rechts- u. Staatswissenschaften.

Allgemeine Rechtslehre von Dr. Th. Sternberg, Privatdozent an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Erstes Buch: Allgemeiner Teil. I: Einleitung — Lehre von den Personen und von den Sachen von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 447.

— II: Erwerb und Verlust, Geltendmachung und Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Univ. Göttingen. Nr. 305.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Professor Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Deutsches Handelsrecht von Prof. Dr. Karl Lehmann in Rostock. 2 Bändchen. Nr. 457, 458.

Das deutsche Seerecht von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. 2 Bände. Nr. 386, 387.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Allgemeine Staatslehre von Dr. Hermann Rehm, Prof. an der Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Allgemeines Staatsrecht von Dr. Julius Hatschek, Prof. der Rechte an der Kgl. Akademie in Posen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Das deutsche Urheberrecht an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Der internationale gewerbliche Rechtsschutz von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Das Urheberrecht an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und der Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Das Warenzeichenrecht. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894 von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamtes zu Berlin. Nr. 360.

Der unlautere Wettbewerb von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. H. Edler v. Hoffmann, Professor an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Kriegsgerichtsrat Carl Endres i. Würzburg. Nr. 401.

Forensische Psychiatrie von Prof. Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Gewerbewesen von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. 2 Bände. Nr. 203, 204.

Das Genossenschaftswesen in Deutschland. Von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Das Handelswesen von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— II. Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Auswärtige Handelspolitik von Dr. Heinrich Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Das Versicherungswesen von Dr. jur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Die gewerbliche Arbeiterfrage von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Die Arbeiterversicherung von Professor Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I. Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— II. Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Die Steuersysteme des Auslandes von Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Die Entwicklung der Reichsfinanzen von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Die Finanzsysteme der Großmächte. (Internat. Staats- u. Gemeinde-Finanzwesen.) Von O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat, Berlin. 2 Bdch. Nr. 450, 451.
Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
Die Entwicklung der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferd. Tönnies in Eutin. Nr. 353.
Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber, Professor an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Theologische und religionswissenschaftliche Bibliothek.

Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. Nr. 272.
Alttestamentliche Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Breslau. Nr. 292.
Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.
Die Entstehung d. Neuen Testaments v. Prf. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.
Die Entwicklung der christlichen Religion innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.
Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. **I:** Der historische u. kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums. Nr. 325.
— **II:** Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Nr. 326.
Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.
Abriß der vergleichenden Religionswissenschaft von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
Die Religionen der Naturvölker im Umriß von Dr. Th. Achelis, weiland Professor in Bremen. Nr. 449.
Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.
Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.
Griechische und römische Mythologie von Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.
Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. an der Univ. Leipzig. Nr. 15.
Die deutsche Heldensage von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 32.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Pädagogische Bibliothek.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität in Jena. Nr. 12.
Geschichte der Pädagogik von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.
Zeichenschule von Professor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- u. Golddruck u. 200 Voll- u. Textbildern. Nr. 39.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.

Das öffentliche Unterrichtswesen Deutschlands in der Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Professor Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königlichen Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— II: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Das deutsche Fortbildungsschulwesen nach seiner geschichtlichen Entwicklung und in seiner gegenwärtigen Gestalt von H. Sierck, Direktor der städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holstein. Nr. 392.

Die deutsche Schule im Auslande von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Kunst.

Stilkunde von Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Die Baukunst des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Die Plastik des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayr. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Die Plastik seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern auf amerikanischem Kunstdruckpapier. Nr. 321.

Die graphischen Künste v. Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- u. Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. u. Beilagen. Nr. 75.

Die Photographie von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Musik.

Allgemeine Musiklehre von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Musikalische Akustik von Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Fuge. Erläuterung und Anleitung zur Komposition derselben von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Instrumentenlehre von Musikdirektor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Text. II: Notenbeispiele. Nr. 437, 438.

Musikästhetik von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. I. II. Nr. 121, 347.

Musikgeschichte des 17. u. 18. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.
— des 19. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Land- und Forstwirtschaft.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.
Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin und Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.
Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.
Allgemeine und spezielle Tierzuchtlehre von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.
Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Prof. an der Forstakadem. Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation d. forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.
Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Handelswissenschaftliche Bibliothek.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Prof. Robert Stern, Oberlehrer der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit Formularen. Nr. 115.
Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.
Französische Handelskorrespondenz von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.
Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M.-A., Oberlehrer am King Edward VII Grammar School in Kings Lynn. Nr. 237.
Italienische Handelskorrespondenz von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königlichen Institut SS. Annunziata zu Florenz. Nr. 219.
Spanische Handelskorrespondenz v. Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
Russische Handelskorrespondenz von Dr. Th. v. Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.
Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer an d. Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. 3 Bde. Nr. 139, 140, 187.
Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie. I: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
— II: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.
Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Das Wechselwesen von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Siehe auch „Volkswirtschaftliche Bibliothek“. Ein ausführliches Verzeichnis der außerdem im Verlage der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung erschienenen handelswissenschaftlichen Werke kann durch jede Buchhandlung kostenfrei bezogen werden.

Militär- und marinewissenschaftliche Bibliothek.

Das moderne Feldgeschütz. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850—1890, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.

Die modernen Geschütze der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 von Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments, Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Die Entwicklung der Handfeuerwaffen seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Inf.-Regt. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehrprüfungskommission. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe und der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat u. Schiffbau-Direktor. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Kriegsgerichtsrat bei dem Generalkommando des Kgl. bayr. II. Armeekorps in Würzburg. Nr. 401.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Verschiedenes.

Bibliotheks- und Zeitungswesen.

Volksbibliotheken (Bücher- und Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Das deutsche Zeitungswesen v. Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

Das moderne Zeitungswesen (System der Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Allgemeine Geschichte des Zeitungswesens von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Hygiene, Medizin und Pharmazie.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Prof. Dr. Bischoff in Berlin. Mit 4 Figuren. Nr. 464.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbildungen. Nr. 96.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Die Infektionskrankheiten und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Tropenhygiene von Med.-Rat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Institutes für Schiffs- u. Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Die Hygiene des Städtebaus von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.

Die Hygiene des Wohnungswesens von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 20 Abbildungen. Nr. 363.

Gewerbehygiene von Geh. Medizinalrat Dr. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig u. Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Photographie.

Die Photographie. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Stenographie.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Studienrat des Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

☞ Weitere Bände dieser einzelnen Abteilungen sind in Vorbereitung.