

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



~~15199~~

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298652

HANDBUCH
FÜR
INGENIEURWISSENSCHAFTEN

in fünf Bänden.

Der Brückenbau.

von
Theodor Kärstner

Zweite Auflage

Leipzig

1901

W 1/2

HANDBUCH
DER
INGENIEURWISSENSCHAFTEN
in fünf Bänden.

Zweiter Band:
D e r B r ü c k e n b a u .

Herausgegeben
von
Th. Landsberg,
in erster und zweiter Auflage von
Th. Schäffer und Ed. Sonne.

Zweite Abteilung.

Dritte vermehrte Auflage.

Leipzig.
Verlag von Wilhelm Engelmann.
1901.

DER
BRÜCKENBAU.

Handbuch der Ingenieurwissenschaften **II** Band. *(Teil)*

3 Bde =

Zweite Abteilung. *(Band)*

Die eisernen Brücken im allgemeinen. Theorie der
eisernen Balkenbrücken.

Bearbeitet von

J. E. Brik, Th. Landsberg und Fr. Steiner,

herausgegeben von

Th. Landsberg,

Geh. Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt,

in erster und zweiter Auflage von

Dr. Th. Schäffer,

Geheimerat in Darmstadt.

und

Ed. Sonne,

Geh. Baurat, Professor an der Technischen
Hochschule in Darmstadt.

Dritte vermehrte Auflage.

Mit 186 Textfiguren, Sachregister und 6 lithographierten Tafeln.

BIBLIOTEKA MIEJSKA
W KŁODZKU

T. 1/46

Leipzig.

Verlag von Wilhelm Engelmann.

1901.



III - 306593

Alle Rechte, insbesondere das Recht der Übersetzung,
sind vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA

KRAKÓW

~~III 15 X 99~~

Akc. Nr.

~~75~~ / 50

BPK-13 381/2017

Vorwort zur dritten Auflage.

Die Herausgabe der zweiten Abteilung des Brückenbaues ist durch ungünstige Verhältnisse unliebsam verzögert worden; insbesondere waren die vielfachen dienstlichen und auferdienstlichen Arbeiten des Professor Steiner in Prag, dessen wiederholtes Kranksein und neuerdings erfolgtes Ableben der rechtzeitigen Fertigstellung im Wege. Professor Steiner, dessen Hinscheiden wir tief beklagen, hat in der zweiten Auflage den größten Teil der zweiten Abteilung (drei wichtige Kapitel) bearbeitet; in der vorliegenden 3. Auflage ist das wesentlich umgearbeitete und mit wichtigen Zusätzen bereicherte Kapitel VIII, die „Theorie der eisernen Balkenbrücken“, aus seiner Feder.

Der vorliegende Band bildet nach der neuen Einteilung die zweite Abteilung des Brückenbaues; er umfaßt die beiden Kapitel „Die eisernen Brücken im allgemeinen“ und die „Theorie der eisernen Balkenbrücken“. Die dritte Abteilung soll die beiden Kapitel „Konstruktion der eisernen Balkenbrücken“ und „Die Brückenbahn“ umfassen und binnen Jahresfrist erscheinen. Die Teilung der früheren zweiten Abteilung in der vorbesprochenen Weise war geboten, um das Erscheinen des Bandes nicht weiter zu verzögern; sie ist aber auch aus sachlichen Gründen zweckmäßig.

Es hätte der neueren Auffassung vielleicht mehr entsprochen, wenn die Theorie der eisernen Balkenbrücken gemeinsam mit der Theorie der eisernen Bogen- und Hängebrücken behandelt worden wäre; mit Rücksicht jedoch auf die Entwicklung des Handbuches und die praktische Verwendbarkeit desselben ist die alte, bewährte Einteilung beibehalten worden. Dagegen wurde der Abschnitt über Zusatzkräfte und Nebenspannungen, welcher in der zweiten Auflage einen Teil des Kapitels „Theorie der eisernen Balkenbrücken“ bildete,

von diesem Kapitel abgetrennt. Dieser Abschnitt bildet ein Sondergebiet für sich und soll demnächst in einem besonderen Kapitel vorgeführt werden. Dabei wird es dann möglich sein, die Zusatzspannungen bei allen Arten von Brücken, sowohl bei den Balkenbrücken, wie den Bogen- und Hängebrücken gemeinsam zu behandeln.

Darmstadt, im September 1901.

Th. Landsberg.

Handbuch des Brückenbaues.

Übersicht des Inhaltes der einzelnen Kapitel.

Erste Abteilung.

- I. Die Brücken im allgemeinen.
- II. Steinerne Brücken.
- III. Ausführung und Unterhaltung der steinernen Brücken.
- IV. Hölzerne Brücken.
- V. Wasserleitungs- und Kanal-Brücken.
- VI. Die Kunstformen des Brückenbaues.

Zweite Abteilung.

- VII. Die eisernen Brücken im allgemeinen.
- VIII. Theorie der eisernen Balkenbrücken.

Dritte Abteilung.

- IX. Konstruktion der eisernen Balkenbrücken.
- X. Die Brückenbahn.

Vierte Abteilung.

- XI. Bewegliche Brücken.

Fünfte Abteilung.

- XII. Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken.
- XIII. Konstruktion der Hängebrücken.
- XIV. Konstruktion der eisernen Bogenbrücken.

Sechste Abteilung.

- XV. Eiserne Brückenpfeiler.
 - XVI. Ausführung und Unterhaltung der eisernen Brücken.
-

Inhalts-Verzeichnis

der zweiten Abteilung.

VII. Kapitel.

Die eisernen Brücken im allgemeinen.

Bearbeitet von J. E. Brik, k. k. Hofrat, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, und
Th. Landsberg, Geh. Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

(Hierzu Tafel I und 74 Textfiguren.)

	Seite
§ 1. Einleitung	1
A. Die angreifenden Kräfte.	
I. Das Eigengewicht der Brücken.	
§ 2. Allgemeines	4
§ 3. Das Eigengewicht der Eisenbahnbrücken	5
§ 4. Das Eigengewicht der einzelnen Teile der Eisenbahnbrücken	8
§ 5. Das Eigengewicht der Strafsenbrücken	11
§ 6. Das Eigengewicht der einzelnen Teile der Strafsenbrücken	12
§ 7. Einfluß der bei Annahme des Eigengewichtes gemachten Fehler	16
II. Die Verkehrslasten der Brücken.	
§ 8. Allgemeines	16
§ 9. Die Verkehrslasten der Eisenbahnbrücken	18
A. Hauptbahnen :	
a) Verordnung für die preussischen Staatsbahnen vom September 1895	19
b) Bestimmungen für die Reichseisenbahnen in Elsass-Lothringen von 1897	21
c) Verordnung des österreichischen Handelsministeriums von 1887	22
d) Vorschriften in Frankreich von 1891	22
e) Verordnungen für die schweizerischen Hauptbahnen von 1892	23
f) Belastungszug der bayerischen Staatsbahnen	23
g) Belastungszug der sächsischen Staatseisenbahnen (von 1895)	23
h) Vorschläge von Engesser	24
Aufsergewöhnliche Verkehrslasten	24
B. Nebeneisenbahnen	26
C. Lokaleisenbahnen	27
D. Stellvertretende, gleichförmig verteilte Belastung bei Eisenbahnbrücken	28
§ 10. Die Verkehrslasten der Strafsenbrücken	29
III. Winddruck und Fliehkraft.	
§ 11. Der Winddruck	34
§ 12. Die Fliehkraft in Krümmungen	38

IV. Dynamische Wirkungen der Verkehrslasten und sonstige angreifende Kräfte.

	Seite
§ 13. Dynamische Wirkung der bewegten Lasten	39
1. Form der Bahnlinie für kurze vollwandige Träger	40
2. Wirkung bewegter Lasten auf größere Brücken	44
3. Schwingungsdauer der Brücke, Schwingungsimpulse	53
§ 14. Verschiedene angreifende Kräfte	57
a) Die Reibungskräfte an den Auflagern	57
b) Die von den überfahrenden Zügen auf die Überbauten übertragenen Kräfte, Bremskräfte	59
Litteratur	63

B. Der Baustoff und seine Widerstände. Konstruktionselemente.

§ 15. Allgemeines	66
-----------------------------	----

I. Allgemeine Eigenschaften des Baustoffes mit besonderer Rücksichtnahme auf Elasticität und Festigkeit.

§ 16. Einleitung	68
§ 17. Das Roheisen (Gufseisen)	69
§ 18. Das Schmiedeeisen	72
a) Das Schweifeseisen	72
b) Das Flufeseisen	81
§ 19. Der Flufsstahl	95
§ 20. Das Flufeseisen im Brückenbau der Gegenwart	100
Litteratur	102

II. Wiederholte Beanspruchungen. Zulässige Inanspruchnahme.

§ 21. Verhalten von Schweifeseisen und Stahl bei wiederholten Anstrengungen. Wöhler's Gesetz, Bauschinger's Versuche	104
§ 22. Zulässige Inanspruchnahme des Eisens	110

III. Konstruktionselemente.

§ 23. Eisensorten	123
1. Bleche	123
2. Flacheisen, Breit- oder Universaleisen	124
3. Winkeleisen	125
4. T-Eisen	128
5. I-Eisen	129
6. C-Eisen	132
7. Quadrant- und Sextant-Eisen	134
§ 24. Verbindungsmittel	135
1. Die Gelenkbolzen	136
2. Die Schraubenbolzen	136
3. Die Niete	137

C. Allgemeine Anordnung der eisernen Brücken.

§ 25. Größe und Zahl der Öffnungen	143
1. Pfeiler aus Mauerwerk, eiserner Überbau	144
2. Eisernen Pfeiler und eiserner Überbau	149
a) Pendelpfeiler und eiserner Überbau	149
b) Turmpfeiler und eiserner Überbau	150
c) Gerüstpfeiler und eiserner Überbau	152
d) Vergleich der verschiedenen Pfeileranordnungen	153
e) Einige Formeln für Pfeilergewichte und Kosten	154
§ 26. Ermittlung der Größe und Zahl der Öffnungen mit Hilfe graphischer Darstellungen	156

	Seite
§ 27. Allgemeine Grundlagen für die Anordnung des eisernen Überbaues. Hauptbestandteile desselben	158
1. Hauptteile der eisernen Überbauten	158
2. Rücksichten auf die Lage der Brücke im Grundriss	160
3. Einfluss der Höhenverhältnisse	162
4. Einfluss der Breite	164
§ 28. Anordnung der Hauptträger der Eisenbahnbrücken	165
1. Brücken mit oberliegender Bahn	165
2. Brücken mit zwischen den Trägern liegender Bahn	176
3. Einfluss der Fußwege auf die Anordnung der Hauptträger	180
4. Einfluss der Lage der Bahn auf die Wirtschaftlichkeit der Anlage	180
§ 29. Anordnung der Brücken für Nebenbahnen	181
§ 30. Anordnung der Hauptträger der Straßenbrücken	182
§ 31. Vereinigte Brücken für Straßen und Eisenbahnen	186
§ 32. Allgemeine Anordnung der Zwischenkonstruktionen	188
§ 33. Schiefe Brücken und Fächerbrücken	191
1. Schiefe Brücken	191
2. Fächerbrücken	196
Litteratur	197

VIII. Kapitel.

Theorie der eisernen Balkenbrücken.

Bearbeitet von Fr. Steiner, Diplom. Ingenieur, Professor an der deutschen Technischen Hochschule in Prag.

(Hierzu Tafel II bis VI und 108 Textfiguren.)

§ 1. Einleitung	199
§ 2. Ebene Tragwerke	201
§ 3. Grundlehren der Formänderung	204

A. Allgemeine Trägerlehre.

I. Die inneren Kräfte und Arbeitsgrößen bestimmt belasteter Tragkörper. (Theorie der Vollwandträger.)

§ 4. Allgemeines	211
§ 5. Die Arbeitsgleichung der Formänderung	214
§ 6. Die inneren Kräfte eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten gekrümmten Vollstabes	217
§ 7. Die inneren Kräfte des geraden durch ein ebenes Kraftsystem belasteten Vollstabes	219

II. Innere Kräfte und Arbeitsgrößen des bestimmt belasteten Fachwerks.

§ 8. Allgemeines. Die Arbeitsgleichung des Fachwerks	225
§ 9. Das ebene Fachwerk	227
§ 10. Spannungen in ebenen statisch bestimmten Systemen. Graphische Methoden	229
§ 11. Rechnungsmäßige Ermittlung der Spannungen (Ritter's Methode)	234
§ 12. Das räumliche Fachwerk	235
§ 13. Bestimmung der Spannungen im Raumbachwerk	236

III. Die Ermittlung der Formänderung.

§ 14. Allgemeines. Verschiebungspläne ebener und räumlicher Kurven	241
§ 15. Verschiebungspläne des ebenen Fachwerks. Allgemeine Beziehungen	246
§ 16. Verschiebungspläne des Raumbachwerks	251
§ 17. Die Biegungslinie eine Seilkurve der Winkeländerungen	253
1. Fachwerksträger	253
2. Vollwandträger	256
§ 18. Biegungslinien bestimmter Belastungsflächen	259
§ 19. Rechnungsmäßige Ermittlung der Durchbiegungen für vollwandige und Fachwerksträger	262

	Seite
IV. Theorie der Einflußlinien und Einflußflächen.	
§ 20. Einflußfläche, Einflußlinie	267
§ 21. Kinematische Bedeutung der Einflußzahlen und Einflußlinien	273
§ 22. Statische Ermittlung der Einflußlinien von Stabspannungen des Fachwerks	276
V. Allgemeine Theorie statisch unbestimmter Tragwerke.	
§ 23. Allgemeines. Verfahren bei Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke	278
§ 24. Einflußlinien statisch unbestimmter Systeme	281
§ 25. Mathematische und zeichnerische Lösung der Gleichungen	283
B. Trägerlehre im Besonderen.	
§ 26. Allgemeines	286
VI. Einfache ebene Balkenträger. Äußere Kräfte.	
§ 27. Stützendrücke, Querkräfte und Momente bei direkter Belastung	287
§ 28. Übersichtliche Darstellung der Querkräfte und der Momente bei direkter Belastung	290
§ 29. Querkräfte und Momente bei indirekter Belastung	299
§ 30. Ersatz eines Einzellastensystems durch eine gleichmäßig verteilte Last	302
§ 31. Durchbiegung einfacher Träger	305
VII. Einfache Balkenfachwerksträger.	
§ 32. Allgemeines	308
§ 33. Parallelträger. Trapezträger	315
§ 34. Gekrümmte und vieleckige Gurte	318
§ 35. Mehrfaches Fachwerk (Gitterwerk)	329
VIII. Mehrteilige ebene Träger. Träger mit schwebenden Stützen (Kragträger).	
§ 36. Allgemeines. Ermittlung der äußeren und inneren Kräfte	334
§ 37. Besondere Arten von Ausleger-Fachwerksbrücken	339
IX. Statisch unbestimmte Tragwerke.	
§ 38. Allgemeines	342
§ 39. Zeichnerische Behandlung des durchlaufenden Trägers	345
Festpunkte	345
Ermittlung der Stützenmomente	346
§ 40. Durchlaufende Träger. Einflußlinien der Momente und Querkräfte	352
Litteratur	360

Nachtrag zu Kap. VII.

Neueste Belastungsvorschriften für Eisenbahnbrücken:

1. Vorschriften des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen 367
2. Belastungsvorschriften der preussischen Staatsbahnverwaltung vom April 1901 368

Berichtigungen 368

Sachregister 369

Atlas von 6 Tafeln, nebst Inhaltsverzeichnis.

VII. Kapitel.

Die eisernen Brücken im allgemeinen.

Bearbeitet von

Joh. E. Brik,

k. k. Hofrat, o. ö. Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Wien

und

Th. Landsberg,

Geh. Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

(Hierzu Tafel I und 74 Textfiguren.)

§ 1. Einleitung. Das nachstehende Kapitel schließt sich an das erste Kapitel dieses Werkes an; auch wird dasselbe durch letzteres hinsichtlich verschiedener Punkte ergänzt. Es ist angezeigt, dieselben hier namhaft zu machen und weiter diejenigen Gegenstände hervorzuheben, welche behufs einer erschöpfenden Besprechung der eisernen Brücken an dieser Stelle eine ausführlichere Behandlung erfordern als dort.

Die §§ 2 bis 5 des ersten Kapitels haben die Grundzüge der geschichtlichen Entwicklung des Brückenbaues im allgemeinen und des Eisenbrückenbaues im besonderen gebracht und es ist nicht beabsichtigt, auf diesen Gegenstand hier zurückzukommen. Dagegen wird sich bei Besprechung der verschiedenen Arten der eisernen Brücken und bei Besprechung der eisernen Pfeiler Gelegenheit finden, eingehendere Mitteilungen über die Geschichte derselben zu machen.

Der Hauptsache nach unabhängig von dem bei einer Brücke verwendeten Hauptbaustoff und aus diesem Grunde hier nicht von neuem zu erörtern sind die folgenden im ersten Kapitel behandelten Punkte:

- Die Bemerkungen über die Hauptarten der Brücken, über ihre Benennungen und ihre wesentlichsten Teile (§ 6 des ersten Kapitels),
- die Voruntersuchungen über Verkehr, über Bodenbeschaffenheit, Bodengestaltung und den zu überbrückenden Wasserlauf (§§ 7 und 8 desselben),
- die Besprechung der Lage der Brückenachse und der Brückenbahn, sowie der Breite und der Querschnittsanordnung der letzteren (§§ 9 und 10, bzw. § 13),
- die allgemeinen Erörterungen über Pfeilerbau und Überbau (§ 14), über Mittelpfeiler (§ 17), über Endpfeiler, Flügel, Brückenrampen und Treppen (§ 18) und über Nebenanlagen (§ 19 des ersten Kapitels).

Alles, was über diese Gegenstände als den eisernen Brücken eigentümlich, ergänzend mitzuteilen ist, wird bei geeigneter Gelegenheit in einem der späteren Kapitel Platz finden.

Als für die Kenntnis der Eisenbrücken besonders wichtig ist der die Konstruktionsysteme des Überbaues behandelnde § 15 des ersten Kapitels zu bezeichnen, an welchen sich in § 16 desselben Erörterungen über die Wahl des Konstruktionssystems und des Baustoffes für den Überbau anschließen. Die an erstgenannter Stelle aufgenommenen Untersuchungen gestatten, in Nachstehendem von Balkenträgern, Stützträgern und Hängeträgern, sowie von den verschiedenen Formen derselben, von statisch bestimmten und statisch unbestimmten Systemen, von durchgehenden Trägern, von Trägern mit freiliegenden Stützpunkten, Auslegerträgern u. s. w. als von bekannten Dingen zu sprechen. Auf die Wahl des Konstruktionssystems für den Überbau werden wir bei Besprechung der einzelnen Brückenarten ergänzend zurückkommen. An dieser Stelle sei bemerkt, daß bei solcher Wahl die Rücksichten auf die äußere Gestaltung des Bauwerkes mitunter von großer Bedeutung sind, und es sei daran erinnert, daß der angemessenen Ausbildung der Formen der Brücken ein besonderes, nämlich das VI. Kapitel (Kunstformen des Brückenbaues) gewidmet ist. Dementsprechend werden ästhetische Erwägungen in den folgenden Abteilungen des Werkes nur vereinzelt Platz finden.

Nunmehr sind die Gegenstände namhaft zu machen, welche im ersten Kapitel zwar bereits besprochen sind, für den vorliegenden Zweck aber eingehender untersucht werden müssen. Dies gilt vor allem von den auf den Überbau der Brücken wirkenden Kräften, welchen die Bauwerke mit Sicherheit widerstehen müssen und welche gewöhnlich „angreifende Kräfte“ genannt werden, also von dem Eigengewicht der Eisenbrücken, den Verkehrslasten und anderen weiter unten im einzelnen zu bezeichnenden Kräften. Dieselben bedürfen einer nochmaligen und ausführlicheren Behandlung, während wegen anderer verwandter Gegenstände (Einfluß der Temperaturänderungen, Beanspruchung der Pfeiler durch Erddruck, durch Wasser und Eis u. dergl.) auf den § 12 des ersten Kapitels verwiesen werden kann.

Auch die Hauptteile der eisernen Brücken, über welche, wie bereits erwähnt, in § 6 des bezeichneten Kapitels das Notwendige angegeben wurde, sollen zur Abrundung des zu entwerfenden Bildes nochmals und eingehender vorgeführt werden. Ferner bedarf die Besprechung der Zahl und der Größe der Öffnungen, welcher § 11 desselben gewidmet ist, einer Ergänzung, insoweit es sich um angemessene Berücksichtigung der Verminderung der Baukosten der eisernen Brücken handelt. Bedenkt man schliesslich, daß der Baustoff derselben und die betreffenden Widerstände in der ersten Abteilung dieses Werkes selbstverständlich nicht zu erörtern waren, so ergibt sich, daß die in Nachstehendem zu besprechenden Gegenstände im wesentlichen folgende sind.

A. Angreifende Kräfte.

Als auf den Überbau wirkend, sind hauptsächlich ins Auge zu fassen:

1. Das Eigengewicht,
2. die Verkehrslasten,
3. der Winddruck,
4. die Fliehkraft,
5. die dynamische Wirkung der bewegten Lasten,
6. verschiedene Kräfte (Reibungskräfte an den Auflagern, Bremskräfte etc.),
7. die Auflager- oder Stützendrücke.

Die unter 7. angeführten Stützendrücke fallen nicht in den Rahmen der nachstehenden Untersuchungen, über diese werden das VIII., XI. und XII. Kapitel das Erforderliche bringen.

B. Baustoff und Widerstände der Baustoffe. Konstruktionselemente.

Im Abschnitt B. sind zu erörtern:

- Die allgemeinen Eigenschaften der verschiedenen Arten des Eisens mit besonderer Rücksicht auf Elasticität und Festigkeit und auf die Verwendung der verschiedenen Eisenarten bei Brückenbauten,
- das Verhalten der bezeichneten Baustoffe bei wiederholten Anstrengungen, die zulässige Inanspruchnahme des Baustoffes,
- die Eisensorten (Bleche, Flacheisen, Winkeleisen u. s. w.),
- die Verbindungsmittel.

Ausgeschlossen von dieser Besprechung und dem XIII. Kapitel überwiesen sind diejenigen Eisensorten, welche vorzugsweise beim Bau der Hängebrücken Verwendung finden, insbesondere der Eisendraht und die Drahtseile.

Insoweit es sich um Prüfungen der Beschaffenheit des Eisens handelt, welche an bestimmten Eisensorten vorzunehmen sind und dementsprechend als ein Teil der Ausführungsarbeiten auftreten, wird sich das XVI. Kapitel an den Abschnitt B., denselben vervollständigend, anschließen.

C. Anordnung der eisernen Brücken.

In diesem Abschnitt wird zunächst die Gliederung dieser Brücken in ihre Hauptbestandteile und sodann dasjenige besprochen werden, was hinsichtlich der Bestimmung der Gröfse und Zahl der Öffnungen den eisernen Brücken eigentümlich ist.

Sodann ist die Anzahl und die Entfernung der Hauptträger der Eisenbrücken eingehend zu erörtern und über die allgemeine Anordnung der Zwischenkonstruktionen das Wesentlichste zu sagen. —

Schliesslich sei noch bemerkt, dafs von den vorliegenden und den folgenden Abteilungen dieses Werkes die Wasserleitungs- und Kanalbrücken ausgeschlossen sind, weil die betreffenden Eisenkonstruktionen im V. Kapitel bereits Berücksichtigung gefunden haben.

A. Die angreifenden Kräfte.

Von Geh. Baurat Prof. Th. Landsberg.

I. Das Eigengewicht der Brücken.

§ 2. Allgemeines. Die Größe des Eigengewichtes der eisernen Brücken muß für die Lösung verschiedener Aufgaben der Ingenieurkunst wenigstens annähernd ermittelt werden können, ohne daß vorher ein Entwurf durchgearbeitet wird. Beim Entwerfen von Eisenbahnen und Straßen muß man für die Kostenüberschläge die Eisengewichte kennen, welche für die verschiedenen möglichen Lichtweiten und Systeme der Brücken erforderlich sind. Für solche Überschläge hat man mehrfach Tabellen oder graphische Darstellungen zusammengestellt auf Grund der Eisengewichte, welche sich bei ähnlichen Bauten ergeben haben; aus diesen Unterlagen kann man mit einer für diesen Zweck ausreichenden Genauigkeit die gewünschten Werte entnehmen. Die Tafel I zeigt eine solche Zusammenstellung, auf welche unter C. näher wird eingegangen werden.

Aber auch für die Bearbeitung des Brückenentwurfes selbst muß man bereits bei Beginn der Berechnung wenigstens ungefähr die Größe des Eigengewichtes kennen, da dieses einen nicht unwesentlichen Teil der zu tragenden Lasten bildet. Einzelne Teile der Brücke, und zwar in den meisten Fällen die schwerst wiegenden, können freilich schon vor der eingehenden Bearbeitung hinreichend sicher festgestellt werden, so daß auch deren Gewicht mit großer Annäherung ermittelt werden kann. Andere Teile aber, und zwar vor allem die Hauptträger, sind in ihren Abmessungen zunächst noch unbekannt. Bei kleinen, ja selbst noch bei mittelgroßen Brücken ist der Einfluß des Hauptträgergewichtes auf die Größe der Querschnitte nicht groß; bei den Brücken mit großen Licht- und Stützweiten ist das freilich anders. Die Grenze dafür kann nicht scharf angegeben werden; einiges Licht über diese Frage werden die in § 7 (S. 16) folgenden Angaben verbreiten.

Man kann mittels theoretischer Untersuchungen und geleitet durch das Studium ausgeführter Bauwerke Formeln aufstellen, welche gestatten, aus den stets bekannten Größen der Licht- und Stützweite, der Breite, der Anordnung der Fahrbahn u. s. w. das Eigengewicht des Überbaues angenähert zu ermitteln.

Je nachdem es sich um eine mehr oder weniger große Annäherung an die Wirklichkeit handelt, wird man auch die besonderen, bei der zu entwerfenden Brücke vorliegenden Verhältnisse mehr oder weniger in Rechnung ziehen, so die Form der Gurtungen der Hauptträger, das Verhältnis der Mittenhöhe der Hauptträger zu deren Stützweite, die Anordnung der Wand (ob Blech oder Fachwerk, bzw. die Art des Fachwerks), die Lage der Fahrbahn (ob hoch oder tief), den Abstand der Hauptträger, die Quer- und Windverstrebung und anderes mehr. Werden alle diese maßgebenden Gesichtspunkte bei Aufstellung der Formeln berücksichtigt, so werden die Formeln recht unbequem. Derartige Untersuchungen hat das XIV. Kapitel der ersten Auflage dieses Werkes gebracht; der Leser, welcher sich hierüber näher unterrichten will, wird auf dieselben verwiesen.

In den meisten Fällen handelt es sich jedoch nur um eine ungefähre Annahme des Eigengewichtes, besonders dann, wenn die infolge des Eigengewichtes in den ein-

zelen Trägerteilen auftretenden Spannungen und daraus die Querschnittsgrößen ermittelt werden sollen; es wird unten gezeigt werden, daß bei nicht sehr weit gespannten Brücken selbst ein recht großer Fehler in der Annahme des Gewichtes der Hauptträger — und nur bei diesem sind bei einiger Aufmerksamkeit große Fehler möglich — geringen Einfluß auf die Querschnittsbestimmungen hat. Dann aber empfiehlt es sich, möglichst einfache Formeln mit wenig Veränderlichen aufzusuchen; um bei Anwendung solcher Formeln sicher zu gehen, wird es zweckmäßig sein, nach Vornahme der Berechnung und der Konstruktion das Eigengewicht auf Grund des ausgearbeiteten Entwurfes zu ermitteln und falls das gefundene Ergebnis zu sehr von den Annahmen abweicht, Verbesserung vorzunehmen. Die Querschnitte sind bei der ersten Konstruktion so anzuordnen, daß eine Vergrößerung oder Verringerung derselben ohne Schwierigkeit möglich ist.

Die vorstehend empfohlene zweite Berechnung auf Grund der wirklichen Eigengewichte und der gewählten Querschnitte wird besonders nötig bei den neuerdings immer mehr ausgeführten statisch unbestimmten Konstruktionen, bei welchen die Größen der überzähligen Kräfte auch von der Größe der Stabquerschnitte abhängen.

Das Eigengewicht des Überbaues setzt sich aus zwei Hauptteilen zusammen: aus dem Gewichte der Fahrbahn nebst Zubehör und aus dem Gewichte der Hauptträger. Zu dem ersten Teile gehören auch die etwa angeordneten Quer- und Längsträger, welche die Last der Fahrbahn und die Verkehrslast auf die Hauptträger übertragen, die Querversteifungen und Geländer. Die Windverstrebrungen und Fußweg-Kragträger rechnet man bald zum ersten, bald zum zweiten Teile, je nach der Anordnung.

Falls die Entscheidung über die zu wählende Fahrbahnkonstruktion und die Breite der Brücke getroffen ist, kann der erste Teil als eine von der Stützweite (nahezu) unabhängige Größe angesehen werden. Dagegen ist das Hauptträgergewicht in hohem Maße von der Stützweite abhängig.

Das Eigengewicht der Brücke wird gewöhnlich in Kilogramm für das laufende Meter Brücke (bezw. für das Flächenmeter Brückenbahn) angegeben und soll in Folgendem stets mit q bezeichnet werden; q setzt sich also für eine bestimmte Querschnittsform der Brücke aus einem von der Stützweite unabhängigen und einem mit der Stützweite veränderlichen Teile zusammen.

§ 3. Das Eigengewicht der Eisenbahnbrücken. Für überschlägliche Berechnungen können folgende Formeln eingeführt werden: q bedeutet hier das gesamte Eigengewicht für das laufende Meter Gleis, einschließlicb Oberbau, Windverstrebrung, Fußweg, Geländer; L ist die Stützweite in Metern. Das Gewicht wird in Kilogramm erhalten.

a) **Balkenbrücken für Hauptbahnen (Fachwerksbrücken).**

I. **Parallelträger auf zwei Stützen, ohne Bettung auf der Brücke.**

Für $L \leq 40$ m $q = 660 + 37 L$,

„ $L \geq 40$ m : $q = 660 + 39 L$.

II. **Träger mit einer oder mit zwei gekrümmten Gurtungen, ohne Bettung auf der Brücke (Parabel-, Schwedler-, Pauli-, Halbparabel- u. s. w. Träger).**

Für $L \leq 80$ m $q = 660 + 35 L$.

III. Parallelträger wie unter I., jedoch mit Bettung auf der Brücke.

Für $L \leq 40$ m $q = 3240 + 46 L$,
 „ $L > 40$ m $q = 3240 + 50 L$.

IV. Träger mit einer geraden und einer gekrümmten Gurtung, bezw. mit zwei gekrümmten Gurtungen, mit Bettung auf der Brücke.

$q = 2830 + 41 L$.

V. Engesser¹⁾ giebt für das Gewicht der Eisenbahnbrücken auf das laufende Meter Gleis bei Stützweiten zwischen 10 m und 100 m die Formel

$q = 650 + 24,5 L + 0,11 L^2$.

Die Formel gilt, falls die Bettung auf der Brücke nicht durchgeführt ist. —

Nach den Formeln I bis V ist folgende Tabelle berechnet; es ist stets auf volle Zehner abgerundet.

Tabelle für die Eigengewichte von Eisenbahnbrücken.

Balkenbrücken (Gewicht f. d. lfd. m Gleis).

Stützweite $L =$		15	20	30	40	50	60	80	100	120	m
Bettung nicht auf der Brücke	Parallelträger (Formel I) . . .	1220	1400	1770	2140	2610	3000	3780	4560	5340	kg
	Träger mit einer oder zwei gekrümmten Gurtungen (Formel II)	1190	1360	1710	2060	2410	2760	3460	4160	4860	kg
	Formel von Engesser (V) . . .	1040	1270	1590	1910	2230	2550	3190	3830	(4470)	kg
Bettung auf der Brücke	Parallelträger (Formel III) . . .	4000	4260	4770	5440	5990	6540	7640	8740	9840	kg
	Träger mit einer oder mit zwei gekrümmten Gurtungen (Formel IV)	3950	4180	4650	5120	5590	6060	7480	8540	9600	kg

b) Bogenbrücken für Hauptbahnen.

VI. Die Eigengewichte der Bogenbrücken fallen nahezu ebenso groß aus, wie diejenigen der Balkenbrücken, wenn auch die Hauptträger bei letzteren etwas schwerer sind. Für überschlägliche Berechnungen kann man bei Brücken ohne durchgehende Bettung nach der Formel rechnen:

$q = 720 + 30 L$.

q ist wieder das Brückengewicht f. d. lfd. m Gleis. Man erhält für

$L =$	10	15	20	30	40	50	60	80	100 m
$q =$	1020	1170	1320	1620	1920	2220	2520	3120	3720 kg.

c) Blechbrücken für Hauptbahnen.

Eigengewicht f. d. lfd. m Gleis:

VII. Blechbrücken; Fahrbahn auf den Hauptträgern ohne durchgehendes Kiesbett.

$q = 770 + 40 L$.

Für $L =$	4	5	6	8	10	12	15 m
$q =$	930	970	1010	1090	1170	1250	1370 kg.

¹⁾ Zeitschr. f. Bauw. 1878, S. 203 u. ff.

VIII. Blechbrücken; Fahrbahn zwischen den Hauptträgern, ohne durchgehendes Kiesbett.

$$q = 1060 + 32 L.$$

Für $L =$	4	5	6	8	10	12	15 m
	$q = 1190$	1220	1250	1320	1380	1450	1540 kg.

IX. Blechbrücken mit durchgehendem Kiesbett. Fahrbahn zwischen den Hauptträgern.

$$q = 3800 + 55 L.$$

Für $L =$	4	5	6	7	8	9	10	12	15 m
	$q = 4020$	4075	4130	4185	4240	4295	4350	4460	4625 kg.

d) Balkenbrücken für Lokalbahnen.

α) Normalspurige Lokalbahnen, auf welche die Lokomotiven der Hauptbahnen nicht übergehen.

Man kann als Mittelwert für Brücken von 10 bis 50 m Stützweite einführen:

Fahrbahn: Holzquerschwellen auf den Hauptträgern $q = 292 + 31 L.$

Fahrbahn zwischen den Hauptträgern, auf Quer- und Längsträgern, ohne Bettung $q = 462 + 32 L.$

β) Schmalspurige Lokalbahnen. Spurweite 1,0 m.

Fahrbahn: Holzquerschwellen auf den Hauptträgern $q = 305 + 26 L.$

Fahrbahn zwischen den Hauptträgern, auf Quer- und Längsträgern, ohne Bettung $q = 425 + 27 L.$

γ) Schmalspurige Lokalbahnen. Spurweite 0,75 m.

Für diese Bahnen und Blechträgerbrücken stellt Lucas²⁾ die nachfolgend angegebenen Formeln auf, in welchen bedeutet:

q das Eigengewicht der Brücke f. d. lfd. m Gleis;

q_0 das Eisengewicht " " " " " " " "

L die Stützweite in Metern; δ die Stärke der Blechwand in Centimetern.

A. Träger von 10 bis 30 m Stützweite:

αα) Fahrbahn zwischen den Hauptträgern, hölzerne Querschwellen auf Zwischenträgern, Bohlenbelag 4 cm stark:

$$q = 390 + \left(8 + 10\delta + \frac{3}{8}L\right) L, \quad q_0 = 270 + \left(8 + 10\delta + \frac{3}{8}L\right) L.$$

ββ) Fahrbahn auf einem Kiesbette zwischen den Hauptträgern:

$$q = 1390 + (9 + 11\delta + 0,4L) L, \quad q_0 = 330 + (9 + 11\delta + 0,4L) L.$$

γγ) Fahrbahn auf den Hauptträgern (wird bei der geringen Spurweite aus Rücksichten der Standsicherheit nur selten möglich sein):

$$q = 250 + (6,5 + 10,2\delta + 0,5L) L, \quad q_0 = 120 + (6,5 + 10,2\delta + 0,5L) L.$$

B. Träger von 1 bis 10 m Stützweite.

$$q = 50 + 29 L.$$

²⁾ Lucas. Studie über die Gewichte von Blechträgern unter spezieller Anwendung auf schmalspurige Eisenbahnen von 0,75 m Spurweite. Civil-Ingenieur 1882.

§ 4. Das Eigengewicht der einzelnen Teile der Eisenbahnbrücken. Für die einzelnen Teile der Eisenbahnbrücken, die Fahrbahn, die Hauptträger, die Wind- und Querversteifung ergeben sich nachstehende Werte:

a) Das Eigengewicht der Fahrbahn bei Eisenbahnbrücken.

Das Fahrbahngewicht umfasst:

α) Das Gewicht des eigentlichen Oberbaues (Schienen, Schwellen, Bohlenbelag, Bettung u. s. w.) nebst dem des Geländers.

Es kann angenommen werden bei Hauptbahnen:

1 lfd. m Oberbau (Schienen, Schwellen, Belag) und Geländer wiegt:

$$q_1 = 420 \text{ bis } 450 \text{ kg.}$$

1 lfd. m Oberbau wie vor aber mit Bettung auf der Brücke wiegt:

$$q_1 = 3000 \text{ kg bis } 3200 \text{ kg.}$$

β) Das Gewicht des Fahrbahngerippes, d. h. der Querträger, Längsträger 2. Ordnung u. s. w.

Es kann eingeführt werden bei Hauptbahnen:

Für das laufende Meter Gleis wiegen	I. Eingleisige Brücke		II. Zweigleisige Brücke	
	1. Fahrbahn oben; Haupt- trägerabstand von Achse zu Achse im Mittel = 3,0 m Abstand der Querträger voneinander = e kg	2. Fahrbahn unten; Haupt- trägerabstand von Achse zu Achse im Mittel = 4,5 m Abstand der Querträger voneinander = e kg	3. Fahrbahn oben; Abstand der Haupt- trägerachsen von ein- ander = 5,5 m im Mittel Abstand der Querträger voneinander = e kg	4. Fahrbahn unten; Abstand der Haupt- trägerachsen von ein- ander = 8,0 m im Mittel Abstand der Querträger voneinander = e kg
Die Querträger . .	$24 + \frac{240}{e}$	$45 + \frac{450}{e}$	$32 + \frac{325}{e}$	$66 + \frac{668}{e}$
Die Schwellenträger	$32 + \frac{32}{e}$	$32 + \frac{32}{e}$	$32 + \frac{32}{e}$	$32 + \frac{32}{e}$
Das Fahrbahngerippe $q_2 =$	$56 + \frac{272}{e}$	$77 + \frac{482}{e}$	$64 + \frac{357}{e}$	$98 + \frac{700}{e}$
Mittelwerte von $q_2 =$	122	194	150	270

Für normalspurige Nebenbahnen kann man einführen:

Bei tiefer Fahrbahn: $q_2 = 67 + \frac{433}{e}$, Mittelwert $q_2 = 180 \text{ kg}$,

bei hoher Fahrbahn: $q_2 = 45 + \frac{200}{e}$, Mittelwert $q_2 = 100 \text{ kg}$.

Das Eigengewicht der Fahrbahn f. d. lfd. m Gleis soll in der Folge mit a bezeichnet werden; dann ist

$$a = q_1 + q_2$$

aus vorstehenden Angaben leicht zu ermitteln, sobald die Hauptkonstruktionsverhältnisse festliegen. Man erhält für a die in nachstehender Tabelle aufgeführten Mittelwerte:

Eigengewicht der Fahrbahn f. d. lfd. m Gleis	I. Eingleisige Brücke				II. Zweigleisige Brücke			
	Fahrbahn auf der Brücke				Fahrbahn auf der Brücke			
	ohne Bettung Fahrbahn		mit Bettung Fahrbahn		ohne Bettung Fahrbahn		mit Bettung Fahrbahn	
	oben	unten	oben	unten	oben	unten	oben	unten
$a =$	570	640	3120	3400	600	720	3150	3470
	Kilogramm				Kilogramm			

b) Das Eigengewicht der Hauptträger bei den Eisenbahnbrücken.

α) Gewicht der Hauptträger für Balkenbrücken.

Das Eigengewicht der Hauptträger ist in hohem Maße von der Stützweite L abhängig; für vorläufige Überschlüge, um welche es sich hier nur handelt, kann man dasselbe der ersten oder der ersten und zweiten Potenz der Stützweite proportional annehmen.

Schwedler³⁾ setzt dasselbe $q_n = b L$.

Engesser⁴⁾ führt ein $q_n = \alpha + \beta L + \gamma L^2$.

b bzw. α, β, γ sind Festwerte, welche von der gewählten Trägerkonstruktion, der Fahrbahnordnung und verschiedenen anderen Umständen abhängen.

Auf Grund theoretischer Untersuchungen erhält Schwedler für b den Ausdruck

$$b = \frac{(a + p)}{C - L}$$

Hierin bedeutet:

a Das Fahrbahngewicht f. d. lfd. m Gleis (vergl. oben),

p die größte gleichmäßig verteilte Verkehrslast f. d. lfd. m Gleis,

C einen Festwert.

Als Mittelwerte erhält man:

	Für Parallelträger auf zwei Stützen	Für Träger mit einem gekrümmten Gurt und für solche mit zwei gekrümmten Gurtungen
	I.	II.
$b =$	$\frac{a + p}{230 - L}$	$\frac{a + p}{250 - L}$

Dabei ist das Verhältnis der Höhe zur Stützweite bei den Parallelträgern zu $\frac{1}{8}$, bei den Trägern unter II. ist das Verhältnis der Mittenhöhe zur Stützweite zu $\frac{1}{7}$ angenommen.

Wird für $L \leq 40$ $p = 4540 + \frac{30600}{L}$
 für $L > 40$ $p = 2840 + \frac{98600}{L}$ } gesetzt⁵⁾, so erhält man für b

folgende Werte, welche bei den Ausdrücken für das Gesamtgewicht (S. 5 u. 6) berücksichtigt sind:

Fahrbahn-Anordnung	Hauptträger	$L =$	15	20	30	40	50	60	80	100	120	m
Bettung nicht auf der Brücke	Parallelträger	$b =$	34	32,5	31,9	32,4	31,8	32	34,2	38,3	44,7	
	Träger mit einem gekrümmten Gurt bzw. mit zwei gekrümmten Gurten	$b =$	31	30	29	29,3	28,6	28,6	30	33,2	38	
Bettung auf der Brücke	Parallelträger	$b =$	46	45	44,7	46	46	47	51,4	58	68	
	Träger mit einem gekrümmten Gurt bzw. mit zwei gekrümmten Gurten	$b =$	42	41	40,75	41,5	41,5	42,2	45,4	50,4	57,7	

³⁾ Zeitschr. f. Bauw. 1861, S. 307; 1862, S. 300; 1863, S. 115 u. ff.

⁴⁾ Zeitschr. f. Bauw. 1878, S. 203 u. ff.

⁵⁾ Winkler. Theorie der Brücken, 3. Aufl. S. 330.

In die obigen Formeln I bis IV auf S. 5 u. 6 sind Mittelwerte der vorstehend gefundenen eingesetzt.

β) **Gewicht der Hauptträger für Bogenbrücken.**

Für Zweigelenk-Bogenträger kann man nach Engesser (Theorie und Berechnung der Bogenfachwerksträger ohne Scheitelgelenk, Berlin 1880, S. 44, 45), folgende Annahmen machen, wobei Wind- und Querversteifung mit berechnet sind:

Für d. lfd. m Gleis beträgt das Gewicht der Hauptträger für

$L = 10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100 m Stützweite
$q_h = 450$	750	1050	1350	1650	1950	2250	2560	2890	3280 kg.

Innerhalb der Grenzen $L = 10$ m bis $L = 70$ m entsprechen diese Werte der Formel $q_h = 150 + 30 L$, wobei L in Metern einzusetzen ist.

Für Bogenträger mit 3 Gelenken kann man die obigen Zahlenwerte um 15%o vermindert einführen.

c) **Das Eigengewicht der Windverstrebung und der Querversteifung**

kann für das laufende Meter Gleis gesetzt werden:

Bei eingleisigen Brücken: $q_w = 27 + 5,0 L$,

bei zweigleisigen Brücken: $q_w = 21 + 3,7 L$.

L ist in Metern einzuführen; man erhält q_w in Kilogramm.

d) **Angaben über das Eisengewicht eiserner Eisenbahnbrücken.**

v. Borries⁶⁾ hat auf Grund ausgeführter Beispiele der preufs. Eisenbahndirektionen das Eisengewicht f. d. lfd. m Brücke bezogen auf ein Gleis und für Brücken mit Balkenträgern auf zwei Stützen ermittelt. Bezeichnet man das Eisengewicht f. d. m eingleisiger Brücke mit q_e , so ergab sich für:

A. Brücken ohne durchgehendes Kiesbett.

α) **Fachwerksträger:**

Fahrbahn auf den Hauptträgern . . $q_e = 350 + 35 L$.

Fahrbahn zwischen den Hauptträgern . $q_e = 450 + 41 L$.

β) **Blechträger:**

Fahrbahn auf den Hauptträgern . . $q_e = 350 + 40 L$.

Fahrbahn zwischen den Hauptträgern . $q_e = 700 + 32 L$.

B. Brücken mit durchgehendem Kiesbett.

γ) **Blechträger oder Fachwerksträger:**

Fahrbahn zwischen den Hauptträgern . $q_e = 800 + 55 L$.

Bei B. ist das Kiesbett von Oberkante Buckelplatte bis Schienenunterkante 29 cm stark gerechnet; es sind ferner etwa 8 cm hohe, eiserne Querschwellen angenommen, weil es sich um Bauwerke mit geringer verfügbarer Konstruktionshöhe handelte. Die Untersuchungen von v. Borries bezogen sich auf Strafsenunterführungen, also auf kleinere Weiten, bis zu etwa $L = 20$ m.

⁶⁾ Centrabl. d. Bauverw. 1897, S. 156.

§ 5. Das Eigengewicht der Strafsenbrücken. Das Eigengewicht der Strafsenbrücken wird zweckmäfsig für das Quadratmeter der Fahrbahn bezw. des Fußweges angegeben.

α) Balkenbrücken.

Engesser⁷⁾ hat für Strafsenbrücken mit zwei Hauptträgern und zwischen denselben angeordneten Quer- und Längsträgern unter der Annahme, dafs Parallelträger verwendet seien, die nachstehend vorgeführten Formeln ermittelt. Dieselben gelten von $L = 10 \text{ m}$ an bis $L = 100 \text{ m}$; die Hauptträgerhöhe ist für $L = 10 \text{ m}$ zu $\frac{1}{8} L$, für $L = 100 \text{ m}$ zu $\frac{1}{10} L$, für die Zwischenwerte allmählich von $\frac{1}{8} L$ bis zu $\frac{1}{10} L$ abnehmend angenommen. Die zulässige Inanspruchnahme für ruhende Last allein ist zu 1200 kg , für bewegte Last allein zu 600 kg angenommen.

I. Landstrafsensbrücken mit doppeltem Bohlenbelag.

Eigengewicht für das Quadratmeter der Fahrbahn in Kilogramm:

$$q = 215 + 2,3 L + 0,02 L^2$$

(hierin der Bohlenbelag mit 110 kg f. d. qm).

Eisengewicht allein für das Quadratmeter der Fahrbahn in Kilogramm:

$$q_1 = 105 + 2,3 L + 0,02 L^2.$$

Sind auferhalb der Hauptträger noch besondere, mit Holz gedeckte Fußwege, so ist deren Eisengewicht auf das Quadratmeter, einschliesslich der erforderlichen Verstärkung der Hauptträger, aber ausschliesslich der Geländer

$$q_2 = 60 + 2,3 L.$$

In Folgendem haben q , q_1 und q_2 die gleiche Bedeutung wie vorstehend unter I.

II. Landstrafsensbrücken mit Beschotterung.

$$q = 590 + 2,8 L + 0,025 L^2$$

(hierin der Schotter mit 400 kg f. d. qm).

$$q_1 = 190 + 2,8 L + 0,025 L^2$$

(einschliesslich des Gewichtes der Fahrbahntafel, welches etwa mit 65 kg eingeführt werden kann),

$$q_2 = 60 + 2,3 L.$$

III. Stadtstrafsensbrücken mit doppeltem Bohlenbelag.

$$q = 295 + 2,7 L + 0,021 L^2$$

(hierin der Bohlenbelag mit 140 kg f. d. qm).

$$q_1 = 155 + 2,7 L + 0,021 L^2$$

$$q_2 = 80 + 2,7 L.$$

IV. Stadtstrafsensbrücken mit Beschotterung.

$$q = 730 + 3,2 L + 0,028 L$$

(hierin der Schotter mit 480 kg f. d. qm),

$$q_1 = 250 + 3,2 L + 0,028 L^2$$

(einschliesslich der Fahrbahntafel, welche etwa 80 kg wiegt),

$$q_2 = 80 + 2,7 L.$$

V. Stadtstrafsensbrücken mit Pflasterung.

$$q = 960 + 3,7 L + 0,029 L^2$$

(hierin das Pflaster mit 700 kg f. d. qm).

⁷⁾ Zeitschr. f. Bauk. 1881, S. 63—68.

$$q_1 = 260 + 3,7 L + 0,029 L^2$$

(einschließlich der Fahrbahntafel, wofür etwa 80 kg einzuführen sind),

$$q_2 = 80 + 2,7 L.$$

Vorstehende Formeln können als Annäherungswerte auch dann Verwendung finden, wenn es sich um Träger mit gekrümmten Gurtungen handelt und die Mittenhöhe $\frac{1}{8} L$ bis $\frac{1}{10} L$ beträgt.

β) Bogenbrücken.

Man kann für überschlägliche Berechnungen das Eigengewicht, auf das Quadratmeter Grundfläche berechnet, einführen wie folgt.

I. Landstraßenbrücken mit doppeltem Bohlenbelag.

$$q = 250 + 1,9 L + 0,017 L^2.$$

Das Gewicht des Bohlenbelags ist in diesem Ausdruck zu 170 kg angenommen, dasjenige des Fahrbahngerippes zu 63 kg f. d. qm.

II. Landstraßenbrücken mit Beschotterung.

$$q = 610 + 2,1 L + 0,022 L^2.$$

Das Gewicht des Schotters und der Fahrbahntafel ist hier zu 510 kg, dasjenige des Fahrbahngerippes zu 70 kg f. d. qm angenommen.

III. Stadtstraßenbrücken mit Beschotterung.

$$q = 655 + 2,1 L + 0,022 L^2.$$

In diesem Ausdruck ist das Gewicht des Schotters und der Fahrbahntafel zu 540 kg, dasjenige des Fahrbahngerippes zu 85 kg f. d. qm angenommen.

IV. Stadtstraßenbrücken mit Steinpflasterung.

$$q = 712 + 6,0 L + 0,01 L^2.$$

Hierin ist das Steinpflaster einschließlich der Fahrbahntafel zu 600 kg, das Fahrbahngerippe zu 100 kg f. d. qm angenommen.

V. Stadtstraßenbrücken mit Holzpflasterung.

$$q = 532 + 5,4 L + 0,01 L^2.$$

Das Holzpflaster einschließlich der Fahrbahntafel ist zu 420 kg, das Fahrbahngerippe zu 100 kg f. d. qm angenommen.

Das Eigengewicht der etwa noch außerhalb der Hauptträger angeordneten Fußwege kann für die verschiedenen Anordnungen nach den Angaben unter α , S. 11 ermittelt werden.

§ 6. Das Eigengewicht der einzelnen Teile der Straßenbrücken. Für die einzelnen Teile der Straßenbrücken, die Fahrbahn, die Fußwege und die Hauptträger ergeben sich die nachstehenden Werte:

a) Das Eigengewicht der Fahrbahn

setzt sich aus zwei Teilen zusammen und zwar sind dieselben:

α) Das Gewicht der Fahrbahntafel und Fahrbahndecke,

β) das Gewicht des Fahrbahngerippes (Querträger, Längsträger, Verstrebung).

Wegen der großen Verschiedenheit in der Breite der Straßenbrücken empfiehlt es sich, die Gewichte auf das Quadratmeter der Fahrbahn zu beziehen; die Multiplikation des betreffenden Wertes mit der Fahrbahnbreite giebt dann leicht das Gewicht für das laufende Meter der Fahrbahn.

Nachstehend sind für eine Anzahl üblicher Fahrbahnanordnungen die Gewichte der Fahrbahntafel und Fahrbahndecke in Kilogramm für das Quadratmeter aufgeführt; dieselben sollen mit q_1 bezeichnet werden.

1. Doppelter Bohlenbelag, im Ganzen d cm stark:
 - Aus Eichen- oder Buchenholz $q_1 = 10 d$
 - aus Nadelholz $q_1 = 9 d$
 Bei einer Stärke des unteren Belages von 13 cm, des oberen Belages von 6 cm ist demnach $q_1 = 170-190$ kg
2. Buchenbohlen⁸⁾, 8 cm stark, auf eichenen Langschwelen, welche durch 0,5 m voneinander entfernte Zores-Eisen getragen werden $q_1 = 170$ kg
3. Doppelter Bohlenbelag aus Kiefernholz, 11 + 8 cm stark, der obere Belag mit eisernen Nägeln beschlagen $q_1 = 237$ "
4. Stahlplatten⁹⁾ auf verzinktem Zores-Eisen $q_1 = 180$ "
5. Schotter auf Zores-Eisen, die Fahrbahndecke über höchster Stelle der Zores-Eisen 0,2 m stark $q_1 = 540$ "
6. Schotter auf Wellblech bzw. Trägerwellblech, sonst wie vor $q_1 = 510$ "
7. Steinpflaster, 16 cm stark, in 5 cm starker Kiesbettung auf 8 mm starken, hängenden Buckelplatten $q_1 = 640$ "
- 7a. Steinpflaster, wie vor, 12 cm stark, in 6 cm starker Kiesbettung über den höchsten Stellen der Buckelplatten $q_1 = 570$ "
8. Holzpflaster auf 6 cm starkem Asphaltbeton, über 8 mm starken, hängenden Buckelplatten, die mit Beton ausgeglichen sind $q_1 = 420$ "
9. Schotter, 20 cm stark auf Ziegelgewölben, 1 Stein stark, einschliesslich des Gewichtes der I-förmigen Walzbalken für die Gewölbe $q_1 = 920$ "
10. Klette's Fahrbahn, Holzasphaltmasse auf Zores-Eisen $q_1 = 435$ "
- Desgleichen auf Trägerwellblech $q_1 = 320$ "
11. Holzpflaster, 13 cm stark in Asphalt auf 10 cm starkem Beton über einer ebenen, 8 mm starken Blechhaut, welche durch 6 cm hohe, in 60 cm Abstand angeordnete Z-Eisen ausgesteift ist (Wormser Strafsenbrücke, s. Centrabl. d. Bauverw. 1896, S. 57) $q_1 = 440$ "
12. Holzpflaster, wie vor, auf 12 cm starkem Betongewölbe über glattem, gebogenem, 5 mm starkem, ausgesteiften Blech, die Gewölbezwickel mit leichterem Beton ausgefüllt, in welchen Drahtnetz gelegt ist (Centrabl. d. Bauverw. 1897, S. 190) $q_1 = 700$ "
- (darunter 60 bis 80 kg Eisen).

Das Gewicht des Fahrbahngerippes für das Quadratmeter der Fahrbahn kann angenommen werden:

- Für sehr schwere Wagen $q_2 = 100$ kg,
- für schwere Wagen $q_2 = 85$ kg,
- für leichte Wagen $q_2 = 67$ kg.

Die vorstehend angegebenen Werte sind Mittelwerte, welche aus den von Winkler (Querkonstruktionen, 2. Aufl.) für Quer- und Längsträger aufgestellten Formeln berechnet sind.

Wenn die Fahrbahntafel (Bohlenbelag, Zores-Eisen, Wellblech u. s. w.) unmittelbar von den Hauptträgern getragen wird, so fällt das Glied q_2 fort.

Nach Vorstehendem kann das Gewicht f. d. lfd. m der Fahrbahn leicht für jede beliebige Fahrbahnanordnung ermittelt werden.

⁸⁾ Centrabl. d. Bauverw. 1881, S. 163.

⁹⁾ Daselbst.

b) Das Eigengewicht der Fußwege.

Auch das Eigengewicht der Fußwege wird zweckmäßiger für das Quadratmeter der Fußwegfläche angegeben. Das Gewicht des Fußweggerippes kann für das Quadratmeter angenommen werden, wenn die Fußwege außerhalb der Hauptträger, also auf Auslegern ruhen, im Mittel = 45 kg, wenn die Fußwege innerhalb der Hauptträger liegen, nahezu wie oben für leichte Wagen = 65 kg.

Nachstehend sind die Eigengewichte für das Quadratmeter Fußweg für eine Reihe verschiedener Anordnungen zusammengestellt.

Anordnung	Gewicht für das Quadratmeter Fußwegfläche		
	ohne das Gewicht des Fußweggerippes kg	einschließlich des Gewichtes des Fußweggerippes Fußwege außerhalb der Hauptträger kg	Fußwege zwischen den Hauptträgern kg
1. Einfacher Bohlenbelag aus Eichen- oder Kiefernholz	70	115	135
2. Steinplatten aus Granit, 15 cm stark	400	445	465
3. Asphalt über Beton auf Belageisen oder Wellblech bezw. Trägerwellblech	230	275	295
4. Stehende Tonnenbleche bezw. Buckelplatten, worüber Beton und Asphalt	300	345	365

Bezeichnet man die Eigengewichte für das Quadratmeter Fußwegfläche mit q_0 , so ist für das laufende Meter Brücke das Eigengewicht von Fahrbahn und Fußwegen, welches mit a bezeichnet werden möge:

$$a = B(q_1 + q_2) + b q_0,$$

in welchem Ausdruck

B die Breite der Fahrbahn,

b die Gesamtbreite beider Fußwege bedeutet.

Unter Benutzung vorstehender Angaben kann man leicht für jede Fahrbahn- und Fußweganordnung den Wert von a ermitteln.

Beispiele: 1. Es sei die Breite der Fahrbahn $B = 8$ m, jederseits ein ausgekrachter Fußweg von 2,5 m Breite, also $b = 2 \cdot 2,5 = 5,0$ m. Die Fahrbahn soll mit Holzpfaster auf Beton (nach No. 11, S. 13) und für sehr schwere Wagen hergestellt werden; die Fußwege erhalten Asphalt auf Beton und Belageisen (nach No. 3, S. 14). Dann ist $q_1 = 440$ kg, $q_2 = 100$ kg, $q_0 = 275$ kg, mithin das Gewicht der Fahrbahn, des Gerippes und der Fußwege f. d. lfd. m der Brücke:

$$a = 8 \cdot (440 + 100) + 5 \cdot 275 = 5695 \text{ kg, abgerundet } 5700 \text{ kg.}$$

Werden zwei Hauptträger verwendet, so entfällt auf d. lfd. m jeden Hauptträgers:

$$\frac{a}{2} = 2850 \text{ kg.}$$

2. Die Fahrbahnbreite betrage $B = 5,5$ m, jederseits befinde sich zwischen den Haupttragwänden ein Fußweg von 1,25 m Breite, d. h. es sei $b = 2,5$ m. Die Fahrbahn werde aus doppeltem, kiefernem, im Ganzen 18 cm starken Bohlenbelag, der Fußweg aus einfachem Bohlenbelag hergestellt; es verkehren auf der mit Querträgern und Längsträgern zu erbauenden Brücke schwere Wagen. Dann kann das Gewicht der Fahrbahn einschließlich des Gerippes und der Fußwege f. d. lfd. m Brücke angenommen werden zu:

$$a = 5,5 \cdot (9 \cdot 18 + 85) + 2 \cdot 1,25 \cdot 135 = 1696 \text{ kg, abgerundet } a = 1700 \text{ kg.}$$

c) Das Eigengewicht der Hauptträger der Straßenbrücken.

α) Gewicht der Hauptträger für Balkenbrücken.

Wendet man das entsprechende Verfahren an, wie oben unter § 4 b, S. 9 bei den Hauptträgern der Eisenbahnbrücken, so erhält man das Gewicht der Hauptträger für das Quadratmeter Grundfläche der Fahrbahn q_h . Für einige besonders häufige Anordnungen kann man nachstehende Mittelwerte verwenden.

Die Stützweiten L sind in Metern einzuführen; man erhält die Hauptträgergewichte für das Quadratmeter Fahrbahn bzw. Fußweg.

Gewichte der Hauptträger für das Quadratmeter Grundfläche.

Anordnung der Fahrbahn	Parallelträger	Träger mit ein bzw. zwei gekrümmten Gurtungen.
I. Landstraßenbrücken mit doppeltem Bohlenbelage	$q_h' = 3,45 L$	$q_h' = 3,12 L$
II. Landstraßenbrücken mit Schotter auf eiserner Fahrbahn Tafel	$q_h' = 5,5 L$	$q_h' = 5,0 L$
III. Städtische Straßenbrücken mit Schotter auf eiserner Fahrbahn Tafel	$q_h' = 6,1 L$	$q_h' = 5,5 L$
IV. Städtische Straßenbrücken mit Steinpflaster auf Kiesbettung; Fahrbahn Tafel aus Buckelplatten .	$q_h' = 6,77 L$	$q_h' = 6,1 L$
V. Für Fußwege kann gerechnet werden als Hauptträgergewicht auf das Quadratmeter Fußweg . .	$q_h'' = 3,84 L$	$q_h'' = 3,45 L$

β) Gewicht der Hauptträger für Bogenbrücken.

Bezeichnet¹⁰⁾

B die Breite der Brücke in Metern,

z die Anzahl der Hauptträger,

γ einen von der Stützweite und der Fahrbahn anordnung abhängigen Wert,

so ist das Gewicht der Hauptträger bei Zweigelenkbogen für das laufende Meter Brücke,

$$q_h = (\gamma \cdot B + 35 z) \text{ Kilogramm.}$$

Die Werte γ können, wie in nachstehender Tabelle angegeben ist, eingeführt werden.

	$L =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100 m
Fahrbahn mit doppeltem Bohlenbelag	$\gamma =$	28	53	80	110	144	180	220	260	305	355
Fahrbahn mit Beschotterung	$\gamma =$	32	62	94	129	168	209	255	300	350	410

Bei vorstehenden Zahlenwerten ist das Pfeilverhältnis von $1/7$ bei $L = 10$ m bis $1/11$ für $L = 100$ m abnehmend angenommen.

Für Bogenbrücken mit drei Gelenken kann man die obigen Zahlenwerte um 15% vermindert einführen.

Für eine 50 m weite, 8 m breite Straßenbrücke mit beschotterter Fahrbahn kann man demnach setzen, falls 4 Hauptträger — Zweigelenkbogenträger — verwendet werden,

$$q_h = 168 \cdot 8 + 35 \cdot 4 = 1484 \text{ kg auf das Meter der Brücke.}$$

¹⁰⁾ Engesser. Theorie und Berechnung der Bogenfachwerksträger ohne Scheitelgelenk. Berlin 1880. S. 44 u. 45.

§ 7. Einfluss der bei Annahme des Eigengewichtes gemachten Fehler. Es ist von Interesse, zu untersuchen, welchen Einfluss die bei Annahme des Eigengewichtes gemachten Fehler auf die Querschnittsbestimmung bzw. auf die in den Stäben erzeugten Spannungen ausüben. Solche Fehler können nie vermieden werden; sie werden im allgemeinen um so größer ausfallen, je einfacher die verwendeten Formeln sind. Kann man nachweisen, dass selbst bedeutende Fehler in diesen Annahmen nur geringen Einfluss haben, so ist damit auch bewiesen, dass einfache Formeln zulässig sind. In der zweiten Auflage dieses Handbuchs ist in Kap. VII eine derartige Untersuchung für eingleisige Eisenbahnbrücken geführt und nachgewiesen, dass selbst bedeutende Fehler in der Annahme des Gewichtes der Hauptträger keinen wesentlichen Einfluss haben — und bei einiger Vorsicht sind nur in der Annahme des Eigengewichtes der Hauptträger größere Fehler möglich, nicht aber in derjenigen des Fahrbahngewichtes. Es ist an der angegebenen Stelle nachgewiesen, dass ein Fehler von 25% bei Annahme des Eigengewichtes der Hauptträger eine Erhöhung Δk der Spannung in den Gurtstäben (gegenüber der rechnermäßigen) zur Folge hat, welche beträgt bei einer Stützweite:

$L =$	10	20	30	40	50	60	70	80 m
$\Delta k =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	5,7	6,7	7,4 %.

Erst bei 50 m weiten Brücken beläuft sich die Spannungserhöhung in den Gurtstäben auf 5%. Bei den Diagonalen beträgt mit demselben Fehler von 25% die Spannungserhöhung Δk_1 ungünstigstenfalls bei einer Stützweite:

$L =$	10	20	30	40	50	60	70	80 m
$\Delta k_1 =$	0,8	1,7	2,7	3,5	4,4	5,4	6,0	6,8 %.

Sowohl bei Berechnung der Gurtstäbe wie der Diagonalen ist demnach die Folge selbst großer, bei Annahme des Hauptträgergewichtes gemachter Fehler verhältnismäßig gering, demnach die Anwendung einfacher Gewichtsformeln für die Berechnung der Spannungen unbedenklich. — Dasselbe gilt in erhöhtem Maße für Straßenbrücken, weil bei diesen das Hauptträgergewicht gegenüber dem Fahrbahngewicht viel kleiner ist, als bei Eisenbahnbrücken, also die gemachten Fehler noch weniger Einfluss haben.

II. Die Verkehrslasten der Brücken.

§ 8. Allgemeines. Die Hauptaufgabe der Brücken ist, die Verkehrslasten zu tragen: zu diesem Zwecke werden sie gebaut. Man muss deshalb verlangen, dass auch bei ungünstigster Belastung in keinem Teile die als zulässig erachtete Inanspruchnahme überschritten wird. Zuerst erhebt sich die Frage, welche Verkehrslasten der Berechnung zu Grunde zu legen sind. Die Antwort erscheint auf den ersten Blick überaus einfach: man berechne für die wirklich verkehrenden schwersten und ungünstigsten Belastungen. Aber welches sind die ungünstigsten Lasten — sobald man an diese Untersuchung herantritt, wird die Lösung, wenigstens in Betreff der Eisenbahnbrücken, recht schwierig. Man ist geneigt, die schwersten auf der betreffenden Bahn verkehrenden Lokomotiven mit möglichst kleinem Achsstand als ungünstigste Belastung einzuführen. Nun ist aber die Achsbelastung der Lokomotive im Betriebe durchaus nicht unveränderlich. Beim Zusammentreffen der ungünstigsten Umstände können¹¹⁾ sich die Raddrücke um 50% und mehr erhöhen. Es genügt deshalb nicht, ohne weiteres die schwersten Achsbelastungen anzunehmen. Ferner ist aber zu beachten, dass die Lokomotivgewichte und die Gewichte der schwersten Züge sich fortdauernd vergrößern: seit der Zeit, in welcher ein großer Teil unserer Eisenbahnbrücken gebaut ist, hat sich das Gewicht der Güterwagen von 16 t auf 22 t erhöht, der Achsdruck der Tender von 9 t auf 11,5 t, der Achsdruck der Lokomotiven von 13,5 t auf 15,2 t; und diese Vergrößerung der Lasten ist voraussichtlich noch lange nicht zu Ende. Die Beförderung großer Massen auf den Eisenbahnen wird durch die Einführung sehr schwerer Züge mit schweren

¹¹⁾ Breuer. Vorschläge zur Verbesserung der Prüfungen eiserner Brücken. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1893, S. 15 und 48.

Lokomotiven wesentlich verbilligt. In Nord-Amerika verkehren auf einzelnen Bahnen Züge mit 2 Lokomotiven von je 17 m Länge und 145 t Gewicht einschliesslich des Tenders; die anschließenden Lastwagen weisen ein Gewicht von 5,96 t f. d. lfd. m Gleis auf. Der grösste Achsdruck dieser Lokomotiven beträgt bereits 22,5 t, während bei uns nach den Normen für den Bau und die Ausrüstung der Haupteisenbahnen Deutschlands vom 24. März 1897 der grösste Achsdruck nur 16 t betragen darf. Es erhebt sich so die wichtige Frage, ob die neu zu erbauenden Brücken nur für die gegenwärtig verkehrenden schwersten Lastenzüge berechnet werden sollen oder ob es sich nicht vielmehr empfiehlt, auf eine erhebliche Vergrößerung der Lasten Rücksicht zu nehmen: denn die Brücken sollen doch für eine längere Zeit ausreichende Sicherheit bieten. Wird auf die mögliche Vergrößerung der Belastungen keine Rücksicht genommen, so ist man der Gefahr ausgesetzt, vielleicht schon nach wenigen Jahren eine Verstärkung der Brücke vornehmen zu müssen, welche Arbeit sehr schwierig und sehr kostspielig ist. Baut man dagegen unter Berücksichtigung der zu erwartenden schwereren Lasten, so erfordert wohl der grössere, sofortige Mehrverbrauch an Baustoff höhere Kosten und grösseren Zinsaufwand, der für eine Reihe von Jahren als Verlust zu gelten hat, aber die Brücke ist dann auch für geraume Zeit genügend tragfähig. Hinzu kommt ferner, dass auch die Geschwindigkeit der Züge im Laufe der Jahre immer grösser geworden ist und voraussichtlich weiter zunehmen wird, sodass auch die dynamischen Inanspruchnahmen wachsen. Es ist deshalb in jedem Falle sorgfältigst zu überlegen, welches Berechnungs- und Konstruktionsverfahren das zweckmässigere ist. In dem letzten Jahrzehnt hat schon eine grosse Zahl von Brücken in Deutschland, England, Frankreich, Österreich und der Schweiz ausgewechselt oder verstärkt werden müssen, nicht weil die Bauwerke schlecht geworden waren, sondern weil die heute verkehrenden Lasten für die Tragkonstruktionen viel ungünstiger sind, als diejenigen, für welche man die Brücken gebaut hatte. Engesser¹²⁾ hat diese wichtige, auch volkswirtschaftlich bedeutsame Frage mehrfach behandelt und Vorschläge gemacht, welche weiter unten näher vorgeführt werden. Allgemein schlägt er vor, dass alle Neu- und Umbauten von Brücken in Hauptlinien des Massenverkehrs schon jetzt für die Bedürfnisse eines hochentwickelten Zukunftverkehrs bemessen werden sollten. Umbauten von Brücken, die den jetzigen Anforderungen noch genügen, sollten so lange verschoben werden, als die Bauwerke den gesteigerten Verkehrslasten ohne Gefahr Genüge leisten. Es ist ja möglich, dass die Vergrößerung der Lasten durch die Einführung der elektrischen Bahnen zeitweise oder überhaupt ihr Ende findet, doch ist in dieser Beziehung der Blick in die Zukunft noch sehr unsicher.

Bei den Strassenbrücken ist die Frage der Verkehrsbelastungen leichter zu beantworten, als bei den Eisenbahnbrücken: je nach der Eigenart der betreffenden Strasse kennt man die schwersten Wagenlasten, welche voraussichtlich auf der Brücke verkehren; schwerere Belastungen kann man verbieten. Es ist stets zu untersuchen, ob nicht durch Menschengedränge in einzelnen Teilen der Brücke grössere Inanspruchnahmen erzeugt werden können, als durch Wagenlasten; auch sind gleichzeitige Belastungen durch schwere Wagenzüge und Menschengedränge in Betracht zu ziehen. Endlich ist zu beachten, dass Strassenwalzen, besonders aber die Dampfwalzen, sehr ungünstige Belastungen bilden.

¹²⁾ Engesser. Die Eisenbahnbrücken und die künftige Verkehrsentwicklung. Deutsche Bauz. 1898, S. 253; ebenda 1894, S. 141. — Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken. Berlin 1892/1893.

Wichtig ist auch die Entscheidung, ob man die Berechnung unter Zugrundelegung von Lastenzügen mit Einzellasten vornehmen oder ob man mit stellvertretenden, über die ganze Brückenlänge bzw. einzelne Teile gleichmäÙig verteilten Lasten rechnen soll. In der ersten Zeit des Eisenbrückenbaues, als die Berechnungsverfahren noch wenig ausgebildet waren, wurde meistens mit stellvertretenden Lasten berechnet; die Schwierigkeit, aber auch die Genauigkeit der Berechnung wurde dadurch wesentlich verringert. Bei der gegenwärtigen Ausbildung der Theorie, besonders seit Einführung der graphischen Verfahren und der Einfluslinien, macht jedoch die Berechnung der Brücken für Züge mit Einzellasten keine nennenswerten Schwierigkeiten mehr, ist aber wegen ihrer Genauigkeit und Zuverlässigkeit jeder anderen Berechnungsweise weit vorzuziehen. MüÙte man doch sowohl für die verschiedenen Arten der Hauptträger — frei aufliegende Balkenträger, Auslegerträger, durchgehende Träger, Bogenträger — wie auch für die einzelnen Teile derselben Träger verschieden groÙe stellvertretende Lasten, selbst unter Zugrundelegung desselben Belastungszuges einföhren. Dennoch sind die Berechnungen mit stellvertretenden Lasten noch vielfach in Gebrauch; so sind sie in der Verordnung des k. k. Handelsministeriums in Österreich vom 15. September 1887 in weitgehendem Maße vorgeschrieben. Wenn der Verfasser sich hiermit auch nicht einverstanden erklären kann, so giebt er doch zu, dafs in einer Reihe von Fällen sich ein Rechnen mit stellvertretenden Lasten empfiehlt. Hierher gehören die überschläglichen Berechnungen, die Aufstellung von Formeln für vorläufige Gewichtsermittlung, die Prüfungsrechnungen, vergleichende Rechnungen u. dergl. Auch bei gröÙeren StraÙenbrücken ist das Rechnen mit gleichwertigen Belastungen vielfach ausreichend. Je kleiner die Brücken sind, insbesondere die Eisenbahnbrücken, mit desto geringerer Genauigkeit können die wirklich verkehrenden Lastenzüge durch gleichmäÙig verteilte Lasten ersetzt werden — bei Eisenbahnbrücken sollte man stets für Lastenzüge berechnen. —

Sowohl bei den Eisenbahn- wie den StraÙenbrücken ist auch der Fall ins Auge zu fassen, dafs die Lokomotiven bzw. Wagen, welche für die Hauptträger die ungünstigste Belastung bilden, für die Querträger und Längsträger 2. Ordnung weniger ungünstig sind, als andere Lokomotiven bzw. Wagen mit besonders stark belasteten Einzelachsen; auch für Hauptträger kleiner Brücken können diese letzteren Achsen die ungünstigste Inanspruchnahme erzeugen. Für diese Träger bzw. Teile der Brücke sind dann die besonders schweren Achsen der Berechnung zu Grunde zu legen.

§ 9. Die Verkehrslasten der Eisenbahnbrücken. Die ungünstigste Verkehrslast für die Hauptträger bildet ein mit zwei oder drei Lokomotiven in betriebsfähigem Zustande bespannter Güterzug; dabei können zwei der Lokomotiven mit den Köpfen einander zugekehrt sein. Je näher die schwer belasteten Achsen einander liegen und je gröÙer deren Zahl ist, desto ungünstiger ist die Lokomotive. Im allgemeinen sind die schwersten Güterzugmaschinen und vollbeladene Güterwagen einzuföhren. Obgleich der Fall eintreten kann, dafs die Brücke von einem aus lauter Lokomotiven bestehenden Zuge befahren wird (im Kriege oder falls neue Maschinen von der Fabrik nach dem Bestimmungsorte gefahren werden u. dergl. mehr), braucht darauf bei der Berechnung nicht Rücksicht genommen zu werden; zunächst kommt dieser Fall nur ganz ausnahmsweise vor, sodann ist derselbe nur bei groÙen Brücken (von mehr als 40 m Stützweite) möglich; bei diesen aber ist das Eigengewicht bereits so groÙ, dafs die möglicherweise gegenüber der rechnungsmäÙigen eintretende VergröÙerung der

Spannung nicht so sehr ins Gewicht fällt, um ungünstigstenfalls die Elasticitätsgrenze zu erreichen. So lange aber diese, selbst in Ausnahmefällen, nicht erreicht wird, ist die Konstruktion nicht gefährdet.

A. Hauptbahnen.

Die einzelnen Staaten und grösseren Eisenbahnverwaltungen haben im letzten Jahrzehnt Vorschriften über die Berechnung der eisernen Brücken erlassen; in diesen Vorschriften sind auch die Angaben über die Grösse und Art der Verkehrslasten enthalten, welche bei den Berechnungen zu Grunde zu legen sind. Nachstehend sind die Verkehrslasten von einigen dieser Vorschriften angeführt.

a) Die Verordnung für die preussischen Staatsbahnen vom September 1895¹³⁾ schreibt betreffs der Verkehrslasten vor:

Es ist ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen zu Grunde zu legen.

Für Lokomotiven und Güterwagen sind folgende Radstände und Achsbelastungen maßgebend.

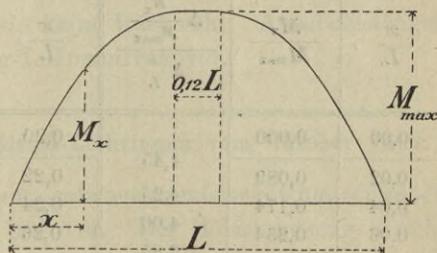
	Lokomotive					Tender			
Abstände	1,55	2,2	1,4	1,35	1,35	3,43	1,65	1,65	1,74 m
Achsbelastungen	7	14	13	13	13	13	9	12	12 t
	Güterwagen								
Abstände			1,8	3,0	1,8 m				
Achsbelastungen			12	12	t				

Gesamte Länge von Lokomotive und Tender: 16,32 m, gesamte Länge des Güterwagens: 6,6 m.

Bei der Berechnung kleinster Brücken (Stützweite < 3,3 m), sowie der Quer- und Schwellenträger sind außerdem eine einzelne Achse mit 16 t Belastung, sowie zwei Achsen mit je 14 t Belastung und einer gegenseitigen Entfernung von 1,4 m zu Grunde zu legen, soweit diese Belastungen höhere Beanspruchungen hervorrufen, als die oben bezeichnete Lokomotive.

Um die Rechenarbeit möglichst zu vermindern, sind dieser Verordnung drei Tabellen beigegeben, aus welchen die grössten Momente und Querkräfte für frei aufliegende Balkenträger entnommen werden können. Diese Tabellen sind nachstehend als Tabelle I, II, III, abgedruckt. Tabelle I giebt die grössten Biegemomente M_{max} für eine grosse Zahl von Stützweiten L und für ein Gleis. Tabelle II giebt das an beliebiger Stelle (x) des Trägers wirkende grösste Moment M_x aus dem Verhältnis $\frac{M_x}{M_{max}}$. Diese Tabelle ist unter der Annahme berechnet, dass die Kurve der grössten Momente M_x an den verschiedenen Stellen der Brücke genügend genau durch zwei Parabelstücke und eine zwischen denselben befindliche gerade Linie dargestellt wird, deren Länge gleich $0,12 L$ ist (Fig. 1). Es ist nach einem in Baden üblichen Verfahren das für die betreffende Stützweite ermittelte Größtmoment beiderseits im Abstände $0,06 L$ von der Mitte aufgetragen; es sind in den erhaltenen Endpunkten der Ordinaten Halbparabeln angeschlossen, welche diese Endpunkte zu Scheiteln haben und durch die Stützpunkte gehen. Die derartig erhaltene Kurve stimmt mit der Kurve der Größtmomente genügend genau überein (angegeben von Baurat Gernet).¹⁴⁾

Fig. 1.



Eine dritte Tabelle dient zur Berechnung der grössten Querkräfte. Für einen um x vom linken Auflager entfernten Querschnitt tritt die grösste Querkraft durch die Verkehrslast ein, wenn der rechts vom Schnitt belegene Teil der Brücke (von der Länge $l = L - x$) voll belastet ist (Fig. 2, S. 21). Bezeichnet man die Mittelkraft aller Verkehrslasten mit R , ihren Abstand vom rechten Auflager B mit r , so ist $Q L = R r$.

¹³⁾ Centralbl. d. Bauverw. 1895, S. 485 ff. — Die Hütte, XVII. Aufl. Teil II, S. 422. — Sonderdruck. Berlin, Ernst u. Sohn. 1899.

¹⁴⁾ Hauger. Belastung eiserner Brücken. Wien 1896.

Tabelle I.

Größte Biegemomente M_{\max} .

Für zwischenliegende Stützweiten ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte $\Delta M_{\max} : \Delta L$ benutzt werden können.

L	M_{\max}	$\frac{\Delta M_{\max}}{\Delta L}$	L	M_{\max}	$\frac{\Delta M_{\max}}{\Delta L}$	L	M_{\max}	$\frac{\Delta M_{\max}}{\Delta L}$
m	mt	t	m	mt	t	m	mt	t
1,0	4,0	4,0	5,0	31,4	12,8	30,0	669	43,0
1,2	4,8		6,0	44,2		33,0	798	
1,4	5,6	4,0	7,0	57,4	13,2	36,0	942	48,0
1,6	6,4	4,0	8,0	71,4	14,0	40,0	1150	52,0
1,8	7,2	4,0	9,0	86,2	14,8	45,0	1420	54,0
2,0	8,0	4,0	10,0	101	14,8	50,0	1710	58,0
2,2	8,8	4,0	12,0	132	15,5	60,0	2320	61,0
2,4	9,6	4,0	14,0	170	19,0	70,0	3000	68,0
2,6	10,4	4,0	16,0	213	21,5	80,0	3740	74,0
2,8	11,2	4,0	18,0	260	23,5	90,0	4540	80,0
3,0	12,3	5,5	20,0	310	25,0	100,0	5440	90,0
3,5	16,4	8,2	22,0	366	28,0	120,0	7440	100,0
4,0	21,4	10,0	24,0	435	34,5	140,0	9800	118,0
4,5	26,4	10,0	27,0	548	37,7			
5,0	31,4	10,0	30,0	669	40,3			

Tabelle II.

Größte Momente M_x an den verschiedenen Stellen (x) der Brücke.

Für zwischenliegende Werte $\frac{x}{L}$ ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte $\Delta \frac{M_x}{M_{\max}} : \Delta \frac{x}{L}$ benutzt werden können.

$\frac{x}{L}$	$\frac{M_x}{M_{\max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{L}}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{M_x}{M_{\max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{L}}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{M_x}{M_{\max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{L}}$
0,00	0,000	4,45	0,20	0,703	2,35	0,40	0,992	0,30
0,02	0,089		0,22	0,750		0,42	0,998	
0,04	0,174	4,25	0,24	0,793	2,15	0,44	1,0	0,10
0,06	0,254	4,00	0,26	0,833	2,00	0,46	1,0	0,00
0,08	0,331	3,85	0,28	0,868	1,75	0,48	1,0	
0,10	0,403	3,60	0,30	0,899	1,55	0,50	1,0	
0,12	0,471	3,40	0,32	0,926	1,35			
0,14	0,535	3,20	0,34	0,948	1,10			
0,16	0,595	3,00	0,36	0,967	0,95			
0,18	0,651	2,80	0,38	0,981	0,70			
0,20	0,703	2,60	0,40	0,992	0,55			

Der Ausdruck Rr auf der rechten Seite der Gleichung bleibt unverändert, auch wenn sich die Stützweite ändert.

In nachstehender Tabelle III sind für die verschiedenen Werte von l die Ausdrücke QL zusammengestellt und es können für jede Stützweite L die Werte Q_x , welche zu den Querschnitten x gehören, leicht ermittelt werden. Für zwischenliegende Belastungslängen l ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte $\Delta QL : \Delta l$ benutzt werden können.

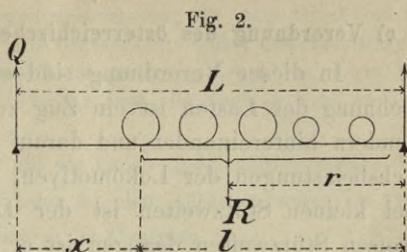


Tabelle III.

l	QL	$\frac{\Delta QL}{\Delta l}$	l	QL	$\frac{\Delta QL}{\Delta l}$	l	QL	$\frac{\Delta QL}{\Delta l}$
m	mt	t	m	mt	t	m	mt	t
1,0	16,0		5,0	158		30,0	3040	
		16,0			53,0			187
1,2	19,2	16,0	6,0	211	53,0	33,0	3600	200
1,4	22,4	16,0	7,0	264	57,0	36,0	4200	213
1,6	25,6	26,0	8,0	321	62,0	40,0	5050	228
1,8	30,8	28,0	9,0	383	72,0	45,0	6190	248
2,0	36,4	28,0	10,0	455	81,0	50,0	7430	277
		28,0			86,0			310
2,2	42,0	28,0	12,0	617	92,5	60,0	10200	340
2,4	47,6	28,0	14,0	789	108,0	70,0	13300	390
2,6	53,2	36,5	16,0	974	125,0	80,0	16700	420
2,8	58,8	40,0	18,0	1190	145	90,0	20600	470
3,0	66,1	43,8	20,0	1440	160	100,0	24800	550
		48,0			180			
3,5	86,1	52,0	22,0	1730		120,0	34200	
4,0	108,0		24,0	2020		140,0	45200	
4,5	132,0		27,0	2500				
5,0	158,0		30,0	3040				

In der Verordnung ist auch ein zeichnerisches Verfahren zur Ermittlung der Werte M_x angegeben, wegen dessen auf die Quellen in der Fußnote 13 verwiesen wird.

Die preussische Verordnung schreibt demnach die Berechnung mit Einzellasten vor, sie trägt auch den schwersten verkehrenden Lokomotivachsen Rechnung; auf eine nennenswerte Vergrößerung der Achslasten nimmt sie keine Rücksicht. Achsbelastungen von 15 t kommen bereits heute bei den Schnellzug-Lokomotiven vor.

b) Bestimmungen für die Reichseisenbahnen in Elsaß-Lothringen vom Oktober 1897.

Die Vorschriften schliessen sich den unter a) angegebenen preussischen an, schreiben aber für den Belastungszug Lokomotivachsen mit 18 t vor. Der Belastungszug besteht aus zwei mit dem Schornstein voranfahrenden Lokomotiven nebst Tendern und einer unbeschränkten Zahl einseitig angehängter Güterwagen.

Es sind folgende Radstände und Achsbelastungen maßgebend:

	Lokomotive			Tender			Güterwagen			
Abstände	2,7	1,7	1,4	4,0	1,5	1,5	1,7	1,5	3,0	1,5 m
Achsbelastungen	18	18	18	12	12	12	12	12	12	t
Ganze Länge	14,5						6 m.			

c) Verordnung des österreichischen Handelsministeriums vom 15. September 1887.¹⁵⁾

In dieser Verordnung sind stellvertretende Belastungen vorgeschrieben. Der Berechnung der Lasten ist ein Zug zu Grunde gelegt, welcher aus drei Lokomotiven und Tendern hintereinander und darauf folgenden Lastwagen besteht. Die Hauptmasse und Achsbelastungen der Lokomotiven, Tender und Lastwagen sind nachstehend angegeben. Bei kleinen Stützweiten ist der Lokomotivachsdruk auf 14 t zu erhöhen, bei sehr großen Stützweiten dagegen ist er zu ermäßigen, entsprechend der Wahrscheinlichkeit, daß nicht alle Achsbelastungen und -Stände in der ungünstigsten Weise beschaffen sind.

	Lokomotive				Tender				Lastwagen			
Abstände	2,8	1,2	1,2	1,2	3,1	1,4	1,6	1,4	1,7	2,0	3,0	2,0 m
Achsbelastungen	13	13	13	13	13	10	10	10	10	8	8	t
Ganze Länge	9,5				6,1				7,0 m.			

Auch die Arlberg-Lokomotiven sollen auf allen Hauptlinien verkehren können, wobei aber nie mehr als zwei solche Lokomotiven verwendet werden dürfen. Die Arlberg-Lokomotive hat gleiche Achsenabstände wie die obenbezeichnete, aber 14 t Achsbelastung.

Die vorgeschriebenen, gleichmäßig verteilten Belastungen für das laufende Meter Gleis sind für die Teile, welche von den Momenten abhängen, andere als für diejenigen Trägerteile, deren Beanspruchung in erster Linie durch die Querkräfte bestimmt wird. Bei den ersteren, den Gurtungen, muß die stellvertretende Last den ganzen Träger bedecken, bei den letzteren, den Wandstäben, darf nur ein Teil der Brücke belastet sein.

Gurtungen.

Für die verschiedenen Stützweiten L sind nachstehende, über die ganze Brückenöffnung gleichmäßig verteilte Belastungen p f. d. lfd. m Gleis zu Grunde zu legen:

$L =$	1,0	1,5	2,0	2,5	5,0	10	15	20	40	80	120	160 m
$p =$	30	20	15	13,5	11,5	8,5	7,0	6,5	5,6	4,4	3,8	3,4 t.

Für zwischen obige Stützweiten fallende Weiten ist geradlinig einzuschalten. Bei durchgehenden Trägern sind die den Stützweiten der belasteten Brückenfelder zufallenden Belastungen nach der Tabelle einzuführen, dabei aber die Belastungsarten zu berücksichtigen, welche die größten Momente erzeugen.

Gitterstäbe.

Von dem maßgebenden Querschnitte an bis zu dem einen oder anderen Auflager ist die Brücke mit nachstehender Last p_1 f. d. lfd. m Gleis gleichmäßig belastet anzunehmen; dabei ist p_1 ohne Rücksicht auf die Stützweite L nur nach der Länge l des belasteten Brückenteiles, wie folgt, einzuführen:

$l =$	1,0	1,5	2,0	2,5	5,0	10	15	20	40	80	120	160 m
$p_1 =$	30	25	20	18	14	10	8,5	7,6	6,2	4,8	4,0	3,5 t.

Für dazwischen fallende Längen ist geradlinig einzuschalten.

Bei durchgehenden Trägern sind innerhalb der betrachteten Öffnung die Belastungen nach der zweiten Reihe, für die gleichzeitig auf anderen Brückenfeldern anzunehmenden Belastungen sind die Werte der ersten Reihe einzuführen.

Bei Bogenträgern, Hängewerksträgern, Auslegerträgern sind entweder die vorstehenden Zahlenwerte zu wählen oder es ist als Verkehrsbelastung der oben angegebene Zug einzuführen.

Zur Berechnung eines Zwischenquerträgers ist die Hälfte der Gesamtbelastung einer Brücke anzunehmen, welche sich aus den obenstehenden Werten p für eine Stützweite L ergibt, die von dem nächsten linksseitig gelegenen bis zum nächsten rechtsseitig gelegenen Querträger gemessen ist.

d) Lokomotive, Tender und Lastwagen nach den Vorschriften in Frankreich.

(Verordnung vom 29. August 1891.)

	Lokomotive				Tender			Lastwagen			
Abstände	2,6	1,2	1,2	1,2	2,6	2,0	2,5	2,0	1,5	3,0	1,5 m
Achsbelastungen	14	14	14	14	14	12	12	12	8	8	t.

¹⁵⁾ v. Leber. Die neue Brückenverordnung des österr. k. k. Handelsministeriums. Wien 1888. — Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1891, S. 153.

Es sind zwei Lokomotiven nebst Tendern und Lastwagen anzunehmen; für jedes Glied sind die einzelnen Teile auf das Ungünstigste zusammenzustellen. Für alle Brückenteile, außer den Hauptträgern, ist eine Achse von 20 t Gewicht maßgebend, wenn sie höhere Beanspruchung erzeugt, als obiger Zug in ungünstigster Stellung. Unter „ungünstigster Stellung“ ist offenbar auch die Stellung Kopf an Kopf der beiden Lokomotiven zu verstehen.

Überschreitet (im Betriebe) bei einer Lokomotive das auf die Länge gleichmäßig verteilte Gewicht das rechnermäßige $\frac{56}{8,8} = 6,36$ t um mehr als 10%, oder ist eine Achse schwerer als 18 t, so hängt die Zulassung zur Fahrt über die Brücke von besonderer Genehmigung ab.

e) Lokomotive, Tender und Lastwagen auf den schweizerischen Hauptbahnen.

(Verordnung des Bundesrates vom 19. August 1892.)

	Lokomotive					Tender			Lastwagen		
Abstände	2,8	1,3	1,3	1,3	3,0	1,4	2,8	1,6	2,0	3,5	2,0 m
Achsbelastungen	15	15	15	15		13,5	13,5		10	10	t.

An drei Lokomotiven in ungünstigster Stellung sind einseitig Güterwagen in unbeschränkter Zahl anzuhängen.

Bei Stützweiten unter 15 m und für die Träger des Fahrbahnrostes (Querträger, Längsträger 2. Ordnung u. s. w.) sind die Lasten um 2 (15 - L_m) % zu erhöhen, wenn L die Stützweite bedeutet; demnach bei

$L =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Erhöhung um %:	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2 %
Lokomotivachsdruck:	19,2	18,9	18,6	18,3	18	17,7	17,4	17,1	16,8	16,5	16,2	15,9	15,6	15,3 t
Tenderachsdruck:	17,28	17	16,74	16,47	16,2	15,93	15,66	15,39	15,12	14,85	14,58	14,31	14	13,77 t

f) Belastungszug bei den bayerischen Staatsbahnen.¹⁶⁾

Zwei Lokomotiven mit beliebig vielen Güterwagen. Die Lokomotiven können beliebig in den Zügen verteilt sein. Abmessungen und Achsbelastungen wie nachstehend angegeben.

	Lokomotive						Lastwagen		
Abstände	2,1	1,4	1,4	1,4	1,4	2,1	2,1	4,2	2,1 m
Achsbelastungen	16	16	16	16	16		16	16	t.
Gesamtlänge	9,8						8,4 m.		

Für solche Brückenteile, zu deren Berechnung lediglich eine dieser Maschinen, ohne Güterwagen, ausreicht, ist die für die Bestimmung der größten angreifenden Kräfte maßgebendste Achse der Maschine mit 18 t in Rechnung zu bringen.

Auch bei den bayerischen Staatsbahnen wird danach mit Einzellasten gerechnet; der zukünftigen Vergrößerung der Lasten ist durch die großen Achslasten bei geringem Achsstande Rechnung getragen.

g) Belastungszug der sächsischen Staatseisenbahnen.

(Verordnung vom April 1895.)

Zwei sechsachsige Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit nachfolgendem Wagenzug aus zweiachsigen Güterwagen von 8,0 t Achsdruck, 3,0 m Achsentfernung und 6 m Gesamtlänge.

	Lokomotive							Lastwagen		
Abstände	2,5	1,5	1,5	3,0	1,5	1,5	2,5	1,5	3,0	1,5 m
Achsbelastungen	15	15	15	15	15	15	15	8	8	t.
Gesamtlänge	14							6,0 m.		

Ergibt eine einzelne Achslast von 20 t für einzelne Brückenteile größere Kraftwirkungen als der Belastungszug, so ist diese der Berechnung zu Grunde zu legen.

¹⁶⁾ Ebert. Über zulässige Beanspruchungen von Eisenkonstruktionen. Deutsche Bauz. 1896, S. 27. Die dort angegebenen Achslasten von 14 t bezw. 16 t sind neuerdings auf die oben angegebenen Werte erhöht.

h) Vorschläge von Engesser.¹⁷⁾

Mit Rücksicht auf die beständig schwerer werdenden Betriebslasten hat Engesser 1894 vorgeschlagen, Lokomotive und Tender wie folgt der Berechnung zu Grunde zu legen.

	Lokomotive						Tender			
Abstände	2,6	1,3	1,3	1,3	1,3	3,9	1,3	1,3	1,3	1,3
Achsbelastungen	18	18	18	18	18	12	12	12	12	t.

Der Belastungszug besteht aus zwei Lokomotiven mit Tendern, wie vorstehend angegeben, mit darauf folgenden Güterwagen von 5,5 t Gewicht f. d. lfd. m Gleis; die Lokomotiven haben 5 Achsen mit je 18 t Belastung und nur 1,3 m Abstand, die Tender 3 Achsen mit je 12 t Belastung und gleichfalls nur 1,3 m Abstand. Die für diesen Belastungszug konstruierten Brücken würden voraussichtlich für eine geraume Zeit allen Ansprüchen genügen können.

Aufsergewöhnliche Verkehrslasten.

Als aufsergewöhnliche Verkehrslasten kommen hauptsächlich selten vorkommende Transporte von Panzerplatten, Marinegeschützen und dergl. in Betracht. Für solche seltene Fälle kann man eine ziemlich hohe Inanspruchnahme als zulässig einführen, welche unter Umständen nicht weit unter der Elasticitätsgrenze bleibt. Nachstehend ist (nach Engesser) das Lastschema eines Geschütztransport-Wagens von 16 Achsen zu je 14 t Gewicht vorgeführt.

Abstände	1,8	1,25	1,25	1,25	1,5	1,25	1,25	1,25	6	1,25	1,25	1,25	1,5	1,25	1,25	1,25	1,8	m
Achsbelastungen	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	t.

Auf S. 25 sind die vorstehend angegebenen Verkehrsbelastungen in einer Tabelle zusammengestellt; aus dieser Zusammenstellung ergibt sich: Für die Vergleichung der Belastungen können mit ziemlicher Annäherung die in Spalte 11 angegebenen Gewichte von Lokomotive nebst Tender, berechnet auf das laufende Meter Gleis, als maßgebend angenommen werden. Das von Engesser in Vorschlag gebrachte Gewicht, 8,1 t/m, ist bei den bayerischen Staatsbahnen bereits für die Berechnung vorgeschrieben; die anderen Bahnen bleiben mehr oder weniger weit hinter diesem Wert zurück; Sachsen um etwa 20%, Preußen um fast 30%, Österreich und Frankreich um etwa 35%. Freilich ist der angegebene Wert nicht ausschließlich maßgebend. Es kommt besonders bei kleinen Stützweiten auf die Zahl, die Belastungen und die Abstände der Lokomotivachsen an. In dieser Hinsicht sind die Annahmen der bayerischen Staatsbahnen mit 5 Achsen von je 16 t Belastung und 1,4 m Abstand sehr ungünstig, ebenso diejenigen der schweizerischen Bahnen mit 4 Achsen von je 15 t Belastung und 1,3 m Abstand. Alle Bahnen mit Ausnahme der österreichischen begnügen sich ferner mit einem Zuge, vor welchen zwei Lokomotiven gespannt sind, nur die österreichischen legen einen solchen mit 3 Lokomotiven zu Grunde. Bei den meisten Verwaltungen wird ein Zug mit einseitig angehängten Güterwagen angenommen, entsprechend den wirklichen Verhältnissen. Für diejenigen Brücken bezw. Brückenteile, bei denen nur eine Achsenbelastung maßgebend ist, schreiben die meisten Verwaltungen besonders schwere Achsen, bis zu 20 t, vor. Zweckmäßig ist die Vorschrift des schweizerischen Bundesrates, wonach die Achslasten für Stützweiten unter 15 m und für die Träger des Fahrbahnrostes um eine Anzahl Hundertteile zu erhöhen sind; die Hundertteile bemessen sich nach bestimmter Formel um so höher, je kürzer die Stützweite ist. Bei den meisten Bahnen können die beiden Maschinen auch „Brust an Brust“ stehen; der jeweils ungünstigere Belastungsfall ist einzuführen. Endlich ist bemerkenswert, daß nur die Brücken der österreichischen Bahnen mit gleichförmig verteilten Lasten, alle anderen mit Einzellasten berechnet werden.

¹⁷⁾ Deutsche Bauz. 1894, S. 141. — Ebenda 1898, S. 253. — Engesser. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken. Berlin 1892/93.

Zusammenstellung der Verkehrsbelastungen, welche bei einer Anzahl grofser Verwaltungen für Hauptbahnen zu Grunde gelegt werden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Name der Bahnen	Gröfster Achsdruck für Berechnung der		Kleinster Achsenstand	Gewicht		Länge der Lokomotive	Gewicht des Tenders		Tendergewicht F. d. lfd. m. Gleis	Gewicht von Lokomotive und Tender F. d. lfd. m. Gleis	Zahl der Lokomotiven des Belastungszuges	Stellung der Lokomotiven	Stellung der Lastwagen	Gewicht der Güterwagen F. d. lfd. m. Gleis	Bemerkungen.
	Hauptträger	Fahr- bahnen- träger		t	m		t	m							
1. Preussische Staatsbahnen	14 bzw. 16	16	1,35	60	9,85 *	6,1	39	6,47 *	5,1	5,7	2	ungünstigst	einseitig angehängt	3,64	Die Länge der Lokomotiven und Tender sind in der Verordnung nur insgesamt angegeben; demnach die Maße in den Spalten 6 und 9, welche mit *) versehen sind, nicht ganz genau.
2. Reichseisenbahnen in Elsass-Lothringen	18	18	1,4	54	8,5 *	6,35	36	6,0 *	6,0	6,21	2	Schornsteine voran	einseitig angehängt	4,00	
3. Bayerische Staatsbahnen	16	18	1,4	80	9,8	8,16	Bereits in den Lokomotivgewichten enthalten.			8,16	2	ungünstigst	beliebig verteilt	3,8	
4. Sächsische Staatsbahnen	15 bis 20	20	1,5	90	14	6,43	Desgl.			6,43	2	ungünstigst	einseitig angehängt	2,67	
5. Österreichische Bahnen	13 bzw. 14	14	1,2	52	9,5	5,47	30	6,1	4,92	5,26	3	—	—	2,3	
6. Französische Bahnen	14	20	1,2	56	8,8	6,36	24	6,5	3,7	5,23	2	ungünstigst	—	2,67	
7. Schweizer Bahnen	15 bis 19,2	19,2	1,3	60	9,7	6,18	27	5,8	4,65	5,61	3	ungünstigst	einseitig angehängt	2,67	
8. Vorschlag Engesser	18	18	1,3	90	10,4 *	8,65	36	5,2 *	6,92	8,1	2	—	—	5,5	Wegen der Maße in Spalte 6 u. 9 vergl. die obestehende Bemerkung.

B. Nebeneisenbahnen,

d. h. vollspurige, mittels Dampfkraft durch Lokomotiven betriebene Bahnen, auf welche Betriebsmittel der Hauptbahnen übergehen können, höchstens aber mit 40 km in der Stunde.

Wenn Aussicht vorhanden ist, daß die Nebeneisenbahn in absehbarer Zeit in eine Hauptbahn umgebaut wird, so empfiehlt es sich, die Verkehrslasten ebenso anzunehmen, wie bei den Hauptbahnen; andernfalls werden leichtere Belastungen zu Grunde gelegt. Nachstehend ist eine Reihe von Verkehrsbelastungen vorgeführt, welche in verschiedenen Ländern vorgeschrieben sind.

a) Preussische Staatsbahnen.

(Erlafs vom 11./27. April 1894.)

Es sind folgende Tenderlokomotiven vorgeschrieben¹⁸⁾:

	Tender-Lokomotive			Tender-Lokomotive			
	Abstände	2,183	3,0	2,45	2,35	2,1	1,6
Achsbelastungen	13,6	12,15		10,18	12,8	12,8	t.
Gesamtlänge	7,633			8,67 m.			

Die Güterwagen kann man wie bei den Hauptbahnen annehmen.

b) Bayerische Staatsbahnen.

Derselbe Belastungszug, wie unter A. angegeben, falls die Bahn zur Verbindung zweier Hauptbahnlinien dient oder eine Teilstrecke später auszubauender Hauptbahn ist, wobei die letztere zunächst als Lokalbahn betrieben wird.

c) Schweizerische Bahnen.

(Verordnung des Bundesrates vom 19. August 1892.)

Die für die Hauptbahnen vorgeschriebenen Belastungen (S. 23) können bei Berechnung von Brücken in Nebenbahnen um 25% vermindert werden. Es würden demnach betragen die

Achsbelastung der Lokomotive	11,25 t
„ des Tenders	10,13 t
„ des Güterwagens	7,5 t.

d) Österreichische Eisenbahnen.¹⁹⁾

Falls sie von den Hauptbahnen aus, in welche sie münden, mit den dort üblichen mittelschweren Lokomotiven befahren werden, ist ein Zug mit drei nachstehend angegebenen Lokomotiven, Schleppendern und Wagen zu Grunde gelegt.

	Lokomotive				Schlepptender				Güterwagen		
	Abstände	2,4	1,2	1,2	2,9	1,4	1,6	1,4	1,9	2,0	3,0
Achsbelastungen	12	12	12		8	8,5	8,5		8,0	8,0	t
Gesamtlänge	7,7				6,3				7,0 m		

Für die Berechnung mit gleichmäßig verteilten, gleichwertigen Lasten ist vorgeschrieben, daß 80% der für Hauptbahnen unter c. (S. 22) angegebenen Belastungen einzuführen sind.

e) Die sächsischen Staatseisenbahnen

legen bei Normalspurbahnen dieselben Lasten wie unter A. zu Grunde.

¹⁸⁾ Glaser's Ann. 1895, Bd. 36, Taf. XVI und Bd. 37, Taf. VI. — Hauger. Belastung und Berechnung eiserner Brücken, S. 22.

¹⁹⁾ v. Leber. Die neue Brückenverordnung. Wien 1888. S. 46.

C. Lokaleisenbahnen

d. h. solche Bahnen von normaler oder kleinerer Spurweite, welche dem öffentlichen Verkehr, jedoch vorwiegend dem Nahverkehr dienen, mittels Maschinenkraft betrieben werden, bei denen aber die Fahrgeschwindigkeit in der Regel 30 km in der Stunde nicht überschreitet.

a) Bayerische Staatsbahnen.

Normale Spurweite.

	Lokomotive					Güterwagen		
	Abstände	2,45	1,4	1,4	1,4	2,45	1,4	2,8
Achsbelastungen	10	10	10	10	10	10	10	t
Gesamtlängen	9,1					5,6 m		

Zwei der vorstehenden Lokomotiven und beliebige Anzahl Güterwagen. Die Maschinen können im Zuge beliebig verteilt sein. Falls zu der Berechnung von Brückenteilen eine Maschine ausreicht, so ist die maßgebendste Achse derselben mit 12 t Gewicht einzuführen.

b) Österreichische Eisenbahnen.

Normale Spurweite.

	Lokomotive				Wagen		
	Abstände	1,9	1,1	1,1	3,1	2,0	3,0
Achsbelastungen	8,5	8,5	8,5	8,5	8	8	t

Ein Zug mit drei Lokomotiven wird zu Grunde gelegt; für die Berechnung mit gleichmäßig verteilten, gleichwertigen Lasten ist vorgeschrieben, daß 60% der für Hauptbahnen unter c. (S. 22) angegebenen Belastungen einzuführen sind.

c) Französische Eisenbahnen.²⁰⁾

Bahnen mit 1,0 m Spurweite.

Belastungszug mit zwei Lokomotiven und Wagen wie nachstehend. Für jedes Brückenglied sind die Teile des Zuges möglichst ungünstig zusammenzustellen.

	Lokomotive					Tender			Wagen		
	Abstände	2,6	1,2	1,2	1,2	2,6	1,5	3,0	1,5	1,5	3,0
Achsbelastungen	10	10	10	10	10	8	8	8	8	8	t
Gesamtlänge	8,8					6			6 m.		

d) Schweizerische Bahnen.

Spurweite 1,0 m.

Zug aus drei vollbelasteten Lokomotiven der betreffenden Bahnen, deren Gewicht auf das laufende Meter Gleis nicht kleiner sein darf als 4 t; den Lokomotiven sind voll belastete Güterwagen in unbeschränkter Zahl von der auf der Linie verwendeten Art einseitig anzuhängen.

Bei Lokal- und Kleinbahnen sind zwei Lokomotiven mit einseitig angehängten Güterwagen der Linie einzuführen.

e) Die sächsischen Staatsbahnen

schreiben für Brücken in Schmalspurbahnen Tenderlokomotiven von nachstehenden Abmessungen und Gewichten vor, entlang der ganzen Brücke, sämtlich in gleicher Richtung stehend. Für Brückenteile, bei denen eine Achslast maßgebend ist, soll diese 10 t betragen.

Abstände	1,85	1,35	2,95	1,35	1,65 m
Achsbelastungen	7,25	7,25	7,25	7,25	t
Ganze Länge	9,15 m.				

²⁰⁾ Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1893, S. 156.

D. Stellvertretende gleichförmig verteilte Lasten bei Eisenbahnbrücken.

Falls man unter Zugrundelegung stellvertretender Lasten berechnen will, so kann man die Werte einführen, welche (vergl. A. c. S. 22) in der österreichischen Verordnung vorgeschrieben sind. Auch können die nachfolgenden Angaben Verwendung finden.

Nach Engesser (Zeitschr. f. Bauw. 1878, S. 203 u. ff.) entsprechen einem Eisenbahnzuge mit drei schweren badischen Güterzugs-Maschinen und darauf folgenden beladenen Lastwagen f. d. lfd. m Gleis folgende stellvertretende Lasten:

Für die Gurtungen:

$$p = \left(4,2 + \frac{23}{L}\right) t, \quad \text{für } L = 10 \text{ m bis } L = 50 \text{ m}$$

$$p = \left(3,1 + \frac{80}{L}\right) t, \quad \text{für } L > 50 \text{ m.}$$

Für die Gitterstäbe:

$$p_1 = \left(4,6 + \frac{34}{L}\right) t, \quad \text{für } L = 10 \text{ m bis } L = 50 \text{ m}$$

$$p_1 = \left(3,6 + \frac{82}{L}\right) t, \quad \text{für } L > 50 \text{ m.}$$

L ist hier überall die Stützweite.

Nach Winkler (Theorie der Brücken, I. Heft, 3. Aufl., S. 330) kann man annehmen für die Berechnung der Gitterstäbe auf das lfd. m Gleis:

$$p_1 = 4,54 + \frac{30,6}{l}, \quad \text{für } l \leq 40 \text{ m}$$

$$p_1 = 2,84 + \frac{98,6}{l}, \quad \text{für } l \geq 40 \text{ m.}$$

Hier ist unter l die Länge des belastet anzunehmenden Brückenteiles verstanden.

Bei Brücken auf Nebenbahnen können folgende Werte auf das lfd. m Gleis eingeführt werden: L ist die Stützweite der Brücke, l die Länge des belasteten Brückenteiles.

1. Normalspurige Lokalbahnen, auf welche die Lokomotiven der Hauptbahnen nicht übergehen.

Für die Gurtungen:

$L = 1,0$	2	3	5	8	10	20	30	40	50 m
$p = 20$	10	8,33	7,2	5,6	5,04	3,82	3,6	3,52	3,38 t.

Für die Gitterstäbe:

$l = 1,0$	2	3	5	8	10	20	30	40	50 m
$p_1 = 20$	12,5	10	8,4	6,25	5,68	4,75	4,33	4,06	3,82 t.

2. Schmalspurige Lokalbahnen. Spurweite 1,0 m.

Für die Gurtungen:

$L = 1,0$	2	3	5	8	10	20	30	40	50 m
$p = 18$	11,8	9,2	7,6	5,5	4,64	3,88	3,11	2,62	2,3 t

Für die Gitterstäbe:

$l = 1,0$	2	3	5	8	10	20	30	40 m
$p_1 = 18,0$	13,1	11,4	8,42	6,41	6,16	4,45	3,54	3,02 t.

3. Schmalspurige Lokalbahnen. Spurweite 0,75 m.

Für die Gurtungen:

$L = 1,0$	2	3	5	8	10	20	30 m
$p = 16$	10	9,6	7,3	5,1	4,34	3,69	2,9 t

Für die Gitterstäbe:

$l = 1,0$	2	3	5	8	10	20	30 m
$p_1 = 17,6$	13,2	11,2	7,87	6,6	6,14	4,23	3,55 t.

§ 10. Die Verkehrslasten der Strafsenbrücken. Als Verkehrslast ist entweder Menschengedränge auf der ganzen Brücke bzw. einem Teil derselben einzuführen oder, wenn hierdurch eine höhere Beanspruchung hervorgerufen wird, ein bzw. zwei Lastwagen und Menschengedränge. Je nach der Bedeutung der Strafsen, in welcher die zu erbauende Brücke liegt, sind mehr oder weniger schwere Lastwagen der Berechnung zu Grunde zu legen.

Über die Gewichte und Abmessungen dieser Lastwagen sind in den verschiedenen Ländern Vorschriften erlassen, von denen einige nachstehend angeführt sind. Man unterscheidet drei Arten von Strafsen:

1. Hauptstrafsen in Verkehrsmittelpunkten.
2. Nebenstrafsen in Verkehrsmittelpunkten, Staatsstrafsen, wichtige Gemeindestrafsen.
3. Sonstige öffentliche Strafsen, Ortsverbindungswege, Feldwege.

Der Teil der Fahrbahn, welcher nicht durch die Wagen eingenommen wird, ist mit Menschengedränge besetzt anzunehmen; ebenso sind die Fußwege mit Menschengedränge belastet einzuführen. Da man zunächst nicht weiß, welche Belastungsart — Menschengedränge allein oder schwerste Lastwagen, verbunden mit Menschengedränge — ungünstiger für die einzelnen Brückenteile ist, so muß man für beide Belastungsarten untersuchen. Für Berechnung der Hauptträger kann das Menschengedränge weniger schwer angenommen werden, als für Berechnung einzelner Teile der Fahrbahn und der Fußwege. In einigen der nachstehenden Verordnungen sind die wirklich verkehrenden Lastenzüge mit den vorgespannten Pferden als Belastung vorgeschrieben; in anderen nur die Wagenreihen. Die letztere Vorschrift ist besonders ungünstig, weil die Pferde eine verhältnismäßig geringe Belastung auf die Flächeneinheit bilden. Es ist ferner zu beachten, daß die Wagenreihe verschiedene Lagen in der Breite der Brücke einnehmen kann; handelt es sich um eine sogenannte Deckbrücke mit mehreren unter der Fahrbahn liegenden Hauptträgern, so ist für die Berechnung jedes derselben eine Radreihe lotrecht über demselben fahrend anzunehmen, handelt es sich um offene oder geschlossene Brücken mit zwei Hauptträgern, so können, wenn zwei Reihen von Wagen eingeführt werden, diese symmetrisch zur Längsachse der Brücke gestellt werden; wird aber ein besonders schwerer Wagen zu Grunde gelegt, so ist derselbe in die ungünstigere Lage seitwärts der Brückenachse zu bringen und jeder Hauptträger so zu berechnen, als ob diese seitliche Abweichung nach ihm zu stattfinden. Das Maß dieser Abweichung kann nicht allgemein angegeben werden; man kann dasselbe je nach der Breite der Fahrbahn auf 0,5 bis 1,0 m annehmen.

Wenn stärkere Belastungen durch Dampfwalzen, Strafsenlokomotiven, schwere Maschinen u. dergl. zu erwarten sind, so ist die Berechnung auch für diese vorzunehmen. Dann genügt aber die Annahme, daß wenn ein so schweres Gefährt auf der Brücke ist, der übrige Teil derselben nur noch durch Menschengedränge belastet wird. Für solche außergewöhnlichen Belastungen gestattet man meistens eine größere Inanspruchnahme, als in gewöhnlichem Betriebe.

a) Verordnung für die Strafsenbrücken der sächsischen Staatseisenbahnen vom April 1895.

- α) Menschengedränge 400 kg/qm.
 Desgl. für Berechnung einzelner Teile von Fußwegen 560 kg/qm.
- β) Ein oder mehrere Lastwagen nach folgender Darstellung:

Fig. 3. Für Strafsen mit starkem Verkehr.

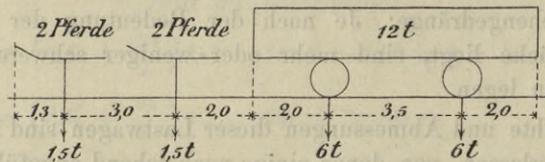
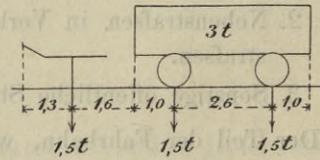
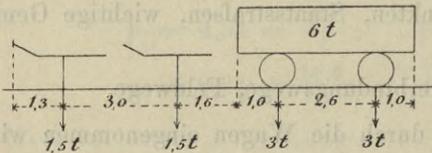


Fig. 4. Für Strafsen mit mittlerem Verkehr.

Fig. 5. Für Strafsen mit schwachem Verkehr (Wirtschaftswege).



Breite der Wagen = 2,2 m, Spurweite derselben = 1,3 m.
 Die Lasten sind Achslasten.

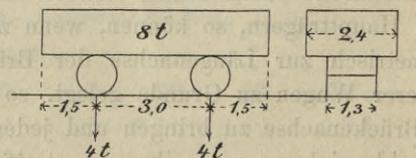
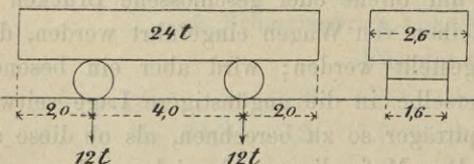
Wo spätere Belastungen durch Dampfstrafsenwalzen von 10 t Achsdruck u. s. w. zu erwarten sind, sind diese der Berechnung zu Grunde zu legen. In der Regel ist nur ein solches Gefährt auf einem Öffnungsüberbau, der übrige Teil aber durch Menschengedränge belastet anzunehmen. Die hierbei sich ergebende Inanspruchnahme darf bis zum 1 1/2 fachen der sonst zulässigen Beanspruchung ansteigen.

b) Annahmen bei den bayerischen Staatseisenbahnen.

- α) Menschengedränge für Berechnung der Hauptträger 360 kg/qm.
 Desgl. für Berechnung der Querträger, Zwischenträger, Längsträger, Konsolen u. dergl. 560 kg/qm.
- β) Lastwagen:

Fig. 6.

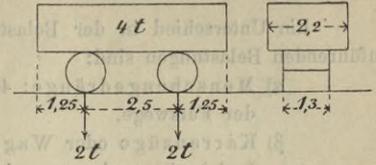
Fig. 7.



Hauptstraßen: Belastung durch einen Wagen nach Fig. 6 oder durch zwei Wagen nach Fig. 7, beide Male mit Menschengedränge nach α) auf der nicht vom Wagen bedeckten Fläche des Fahrweges und den Fußwegen.

Fig. 8.

Nebenstraßen (Distriktstraßen): Zwei Wagen wie Fig. 7 und Menschengedränge wie vor.
 Ortsverbindungs- und Feldwege: Belastung durch einen Wagen wie Fig. 8 und Menschengedränge wie vor.²¹⁾



c) Die Verordnung des österreichischen Handelsministeriums vom 15. September 1887 schreibt vor:

Größtmögliche Wagenansammlung auf dem Fahrbahnplanum und eine gleichzeitige Menschenansammlung auf dem Gehwegplanum, sowie auf dem übrig gebliebenen Teile des Fahrbahnplanums.

Menschenansammlung sowohl auf dem Gehweg-, als auch auf dem Fahrbahnplanum.

Von diesen beiden Belastungsarten ist in jedem einzelnen Falle und für jeden einzelnen Konstruktionsteil die nachteiligere zu berücksichtigen.

Es sind einzuführen:

Für Brücken 1. Klasse.

Menschenlast von 460 kg/qm.

Vierräderige Lastwagen von 12 t Gesamtgewicht, 7,8 m Länge (ohne Deichsel), 2,5 m Breite, 3,8 m Radstand, 1,6 m Gleisweite mit Bespannung von 4 Pferden im Gesamtgewichte von 3 t auf 7,2 m Länge.

Für Brücken 2. Klasse.

Menschenlast von 400 kg/qm.

Vierräderige Lastwagen von 6 t Gesamtgewicht, 5,4 m Länge (ohne Deichsel), 2,4 m Breite, 2,8 m Radstand, 1,5 m Gleisweite mit Bespannung von 2 Pferden im Gesamtgewichte von 1,5 t auf 3,6 m Länge.

Für Brücken 3. Klasse.

Menschenlast von 340 kg/qm.

Vierräderige Lastwagen zu 3 t Gesamtgewicht, 4,8 m Länge (ohne Deichsel), 2,3 m Breite, 2,4 m Radstand, 1,4 m Gleisweite mit Bespannung von 2 Pferden im Gesamtgewichte von 1 t auf 3,2 m Länge.

Die größte zulässige Belastung soll bei jeder Brücke auf einer Tafel ersichtlich gemacht werden.

d) Verordnung des schweizerischen Bundesrates vom 19. August 1892.

Für die drei auf S. 29 angegebenen Arten von Straßen ist vorgeschrieben:

	1.	2.	3.
Menschengedränge	450	350	250 kg/qm.
Wagenlänge	8,0	6,0	4,6 m
Ladebreite	2,5	2,2	2,0 m
Zahl der Achsen	2	2	2
Achsstand	4,0	3,0	2,4 m
Wagenende bis Achse	2,0	1,5	1,1 m
Achslast	10,0	6,0	3,0 t
Spurweite (Radstand)	1,6	1,6	1,4 m.

²¹⁾ Nach Deutsche Bauz. 1898, S. 575 scheint neuerdings als größte gleichmäßig verteilte Verkehrslast 600 kg/qm Brückenoberfläche eingeführt zu werden; ferner wird beim Befahren mit Dampfstraßenwalze diese im Dienste als 18,9 t schwer, 1,4 m breit in Rechnung gezogen.

e) Vorschriften in Frankreich.

Ein Unterschied in der Belastung nach der Art der Strafsen wird nicht gemacht. Die ein-
zuführenden Belastungen sind:

- a) Menschengedränge: 400 kg/qm für die Grundfläche der ganzen Brücke einschliesslich der Fusswege.
- β) Karrenzüge oder Wagenzüge. Die ganze Fahrbahn ist mit Karrenzügen von 2,25 m Ladebreite zu besetzen, in denen je 2 Pferde vor jeder Karre hintereinander gehen, oder mit Wagenzügen derselben Breite, vor jedem Wagen mit 4 Zweigespannen. — In dem Karrenzug ist an ungünstiger Stelle noch in eine Reihe ein besonders schwerer Karren von 11 t Last mit 5 Pferden voreinander einzuschalten, falls hierbei ungünstigere Spannkraften erzielt werden. Hierbei dürfen die Spannungen um 100 kg/qcm gröfser sein, als bei der anderen Belastung.

	Karren	Wagen
Anzahl der Bespannungsreihen	2	4
Länge vom Kopf bis zum Schwerpunkt des Pferdes	1,25	1,25 m
Länge zwischen den Schwerpunkten zweier sich folgenden Bespannungsreihen	2,5	2,5 m
Länge vom Schwerpunkt der letzten Bespannungsreihe bis zur Wagenachse	2,75	2,75 m
Achsstand der Wagen	—	3,0 m
Länge von Wagenachse bis Wagenende	1,5	1,5 m
Länge eines Fuhrwerkes im Zuge einschliesslich der Bespannung	8,0	16 m
Gewicht einer Bespannungsreihe	0,7	1,4 m
Last einer Achse	6	8 t.

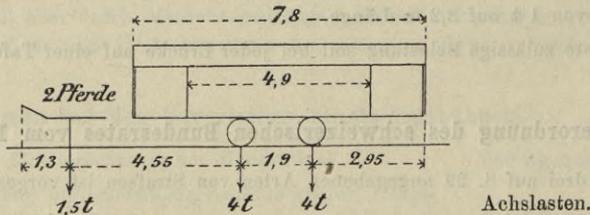
Neben den Zügen sind die Fusswege mit 400 kg/qm zu belasten.

Auf Strafsen mit starken Steigungen, auf denen die vorstehenden Fuhrwerke nicht verkehren können, werden den Verhältnissen entsprechend geringere Rechnungslasten genehmigt; doch soll die gleichmäfsig verteilte Last mindestens 300 kg/qm betragen.

f) Einige besondere Belastungen.

Belastete Pferdebahnwagen weisen die in Fig. 9 angegebenen Gewichte und Abmessungen auf. In der Regel ist die Kastenbreite etwa 2,1, die Spurweite rd. 1,5 m.

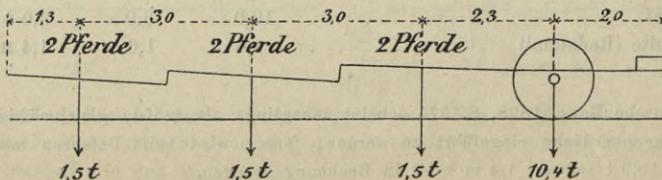
Fig. 9.



Strafsenwalzen.

Einachsige, von Pferden gezogene Strafsenwalzen haben eine Breite von etwa 1,3 m, unbelastet für das Meter der Breite ein Gewicht von 5 t, voll mit Steinen oder Wasser belastet ein Gewicht von 8 t für das Meter der Breite. Demnach ergibt sich das grösste Gewicht solcher Strafsenwalzen zu 10,4 t (Fig. 10).

Fig. 10.



Dampfstraßenwalzen. Man kann etwa die in Fig. 11 angegebenen Abmessungen und Gewichte der Berechnung zu Grunde zu legen. Die Breite der (kleineren) Lenkachse, welche einen mittleren Streifen walzt, ist etwa 1,3 m, die (größere) Treibwalze besteht aus zwei Teilen von je (rund) 0,5 m Breite, welche einen Streifen von 1,25 m Breite zwischen sich frei lassen; diese Achse walzt zwei äußere Streifen.

Soll eine Dampfwalze von diesen Gewichten die Brücke regelmäßig überfahren, so ist letztere für diese Belastungen zu berechnen; dieselben sind bedeutend größer, als die oben angegebenen.

In Württemberg sind für Brücken, welche regelmäßig mit der Dampfstraßenwalze bearbeitet werden, folgende Masse und Lasten vorgeschrieben: Gesamtlast 16 t, verteilt nach Angabe der Fig. 12.

Fig. 11.

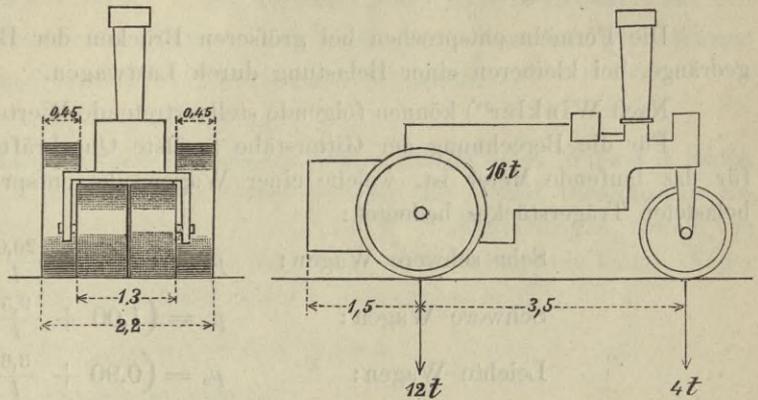


Fig. 12.

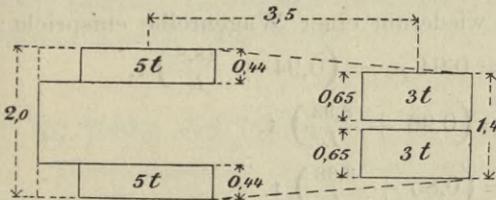
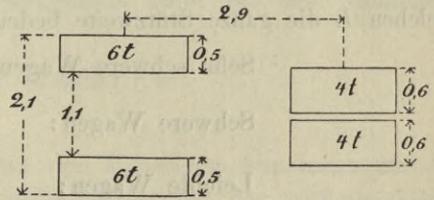


Fig. 13.



Bei der König Karl-Brücke über den Neckar in Cannstadt betrug das Berechnungsgewicht der Dampfstraßenwalze 20 t. Die Abmessungen sind in Fig. 13 angegeben.

Die Belastung der elektrischen Hochbahn in Berlin besteht in Wagen von nachstehenden Abmessungen und Achslasten:

Abstände	0,75	1,5	7,5	1,5	0,75 m
Achslasten	6	4	4	6 t	
Wagenlänge	12 m				

Für die Berechnung der Querträger, Längsträger der Fahrbahn, der Fahrbahntafel, möge sie aus Bohlen, Zores-Eisen, Wellblech oder anderem bestehen, sind stets Einzellasten einzuführen, auch dann, wenn die Hauptträger für gleichförmig verteilte stellvertretende Lasten berechnet sind; die wirklich verkehrenden Einzellasten bilden für die Fahrbahnteile die weitaus ungünstigsten Belastungen.

g) Gleichförmig verteilte, stellvertretende Last bei Straßenbrücken.

Zur Berechnung der Hauptträger und aus denselben Gründen, welche oben auf S. 18 entwickelt sind, führt man wohl stellvertretende, gleichmäßig verteilte Last ein, welche, wie bei den Eisenbahnbrücken, mit der Stützweite L veränderlich ist.

Engesser²⁹⁾ macht darüber folgende Angaben:

Bei Stadtstraßenbrücken.

Verkehrslast für das qm der Brücke $p = \left(0,44 + \frac{1,4}{L}\right) t$ (entsprechend einem Lastwagen von 20 t Gewicht).

²⁹⁾ Engesser. Eigengewicht von Straßenbrücken. Zeitschr. f. Bauk. 1881, S. 63.

Bei Landstraßenbrücken.

Verkehrslast für das qm der Brücke $p = \left(0,36 + \frac{1,2}{L}\right) t$ (entsprechend einem Lastwagen von 10 t Gewicht).

Die Formeln entsprechen bei größeren Brücken der Belastung durch Menschengedränge, bei kleineren einer Belastung durch Lastwagen.

Nach Winkler²³⁾ können folgende stellvertretende Werte zu Grunde gelegt werden:

Für die Berechnung der Gitterstäbe (größte Querkräfte), wobei p_0 die Belastung für das laufende Meter ist, welche einer Wagenreihe entspricht, und l die Länge des belasteten Trägerstückes bedeutet:

$$\text{Sehr schwere Wagen: } p_0 = \left(1,02 + \frac{20,0}{l}\right) t,$$

$$\text{Schwere Wagen: } p_0 = \left(1,00 + \frac{9,5}{l}\right) t,$$

$$\text{Leichte Wagen: } p_0 = \left(0,90 + \frac{3,6}{l}\right) t,$$

Für die Berechnung der Gurtungen (größte Momente) ergibt sich bei jedem Querschnitt des Trägers eigentlich ein anderer Wert von p ; doch kann man angenähert die für den Querschnitt in der Mitte erhaltenen Werte auch für die anderen Querschnitte verwenden. Unter dieser Voraussetzung erhält Winkler folgende Ausdrücke von p , in welchen L die ganze Stützweite bedeutet, p wiederum einer Wagenreihe entspricht:

$$\text{Sehr schwere Wagen: } p = 0,94 p_0 = \left(0,94 + \frac{18,8}{L}\right) t,$$

$$\text{Schwere Wagen: } p = \left(0,96 + \frac{8,93}{L}\right) t,$$

$$\text{Leichte Wagen: } p = \left(0,85 + \frac{3,38}{L}\right) t.$$

Diese Lasten entfallen auf eine Breite von 2,3 m bis 2,5 m; wenn sie kleiner sind als Belastung durch Menschengedränge, so ist letztere einzuführen. —

Außer den auf den Brücken verkehrenden Lasten, für welche die Bauwerke hergestellt und welche als Nutzlasten bezeichnet werden, wirkt auf dieselben noch eine Anzahl anderer Kräfte, welche als unvermeidliche Übel in den Kauf genommen werden müssen. Solche Kräfte sind: Der Winddruck, die Fliehkraft für in Krümmungen liegende Brücken, die Stöße beim Überfahren der Verkehrslasten und verschiedene andere.

III. Winddruck und Fliehkraft.

§ 11. Der Winddruck. Die für die Größe des Winddruckes maßgebenden Gesetze sind zur Zeit noch nicht vollständig bekannt; im allgemeinen nimmt man an, daß der Winddruck dem durch den Wind getroffenen Flächeninhalt, sowie dem Quadrate der Windgeschwindigkeit proportional sei. Der erste Teil der Annahme scheint nach den neueren Untersuchungen²⁴⁾ nicht ganz richtig zu sein, vielmehr nimmt der Druck auf eine ebene Platte wahrscheinlich von den Rändern nach der Mitte hin zu; der zweite Teil der Annahme ist wohl nahezu richtig. Man kann den Druck, welchen der mit einer Geschwindigkeit von v Metern für die Sekunde wehende Wind gegen eine senkrecht getroffene Fläche von F Quadratmetern ausübt, setzen

²³⁾ Winkler. Theorie der Brücken. I. Heft, 3. Aufl., S. 330 u. 334.

²⁴⁾ Gerlach. Widerstand von Platte und Keil im Flüssigkeitsstrom. Civil-Ingenieur 1885, S. 77 u. ff.

$$P_0 = \frac{v^2 F \gamma}{g} \text{ kg,}$$

wenn γ das Gewicht eines Kubikmeters der Luft in **kg**, g die Beschleunigung des freien Falles in Metern (= 9,81 m) bedeutet. Diese Formel stimmt nach v. Loessl²⁵⁾ mit den Versuchen gut überein, bei welchen freilich v nur klein war. $\frac{\gamma}{g}$ ist bei 15° C. Wärme und 760 mm Barometerstand rund = 0,125, demnach ist nahezu:

$$P_0 = 0,125 F v^2 \text{ kg.}$$

Falls die Windrichtung mit der getroffenen ebenen Fläche einen Winkel α bildet, übt der Wind auf dieselbe einen Druck P aus, welcher auf Grund theoretischer Erörterungen früher allgemein gesetzt wurde: $P = P_0 \sin^2 \alpha$. Untersuchungen, sowohl von Gerlach, wie v. Loessl ergeben, dafs diese Beziehung nicht richtig sein kann. Näher kommt man der Wahrheit mit der Formel (nach v. Loessl, a. a. O.):

$$P = P_0 \sin \alpha = v^2 F \frac{\gamma}{g} \sin \alpha.$$

Gerlach stellt (a. a. O.) die Formel auf:

$$P = \left(\frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \right) \frac{\gamma}{g} F v^2,$$

welche also gleichfalls der ersten Potenz von $\sin \alpha$ proportional ist, aber $\sin \alpha$ auch im Nenner enthält. Die letztere theoretisch gefundene Formel giebt für den wichtigsten Grenzfall $\alpha = 90^\circ$ den Wert

$$P_0 = \frac{\pi}{4 + \pi} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot F v^2 = 0,055 F v^2$$

(für 15° Celsius und 760 mm Barometerstand).

Dieser Ausdruck weicht sehr bedeutend von den bisherigen Annahmen und Erfahrungen ab, weshalb vorläufig, bis die Sache mehr geklärt ist, der v. Loessl'sche Ausdruck

$$P = P_0 \sin \alpha = v^2 F \frac{\gamma}{g} \sin \alpha$$

den Berechnungen zu Grunde gelegt werden kann.

Die Gröfse der Höchstgeschwindigkeit des Windes, d. h. v_{\max} , ist ebenfalls nicht genau bekannt; offenbar hat v_{\max} in verschiedenen Gegenden wesentlich verschiedene Werte. In Wien beobachtete man bis 36 m, in Hamburg²⁶⁾ bis 42 m Windgeschwindigkeit; denselben würden nach obiger Formel Winddrücke entsprechen, welche für das **qm** = 162 **kg** bzw. 220 **kg** wären. In Wirklichkeit müssen aber an besonders den Stürmen ausgesetzten Orten noch gröfsere Winddrücke vorkommen, als die erwähnten. In der Nacht, in welcher die Brücke über den Tay in Schottland durch den Sturm umgestürzt wurde, zeigte der Winddruckmesser in Glasgow 204 **kg** Druck an; an der Unglücksstelle war der Winddruck zeitweise wahrscheinlich wesentlich gröfser, man vermutet zwischen 290 bis 340 **kg** f. d. **qm**. In Amerika hat man bei Wirbelstürmen sogar sehr bedeutende, lotrecht nach oben gerichtete Windkräfte beobachtet, welche schwere Brücken von den Pfeilern abgehoben und in die Ströme gestürzt haben; in besonderen Fällen ergaben sich die hierzu nötigen Kräfte für das Quadratmeter der wagerechten Grundfläche zu 200 bis 350 **kg**.

²⁵⁾ v. Loessl. Studie über aerodynamische Grundformeln. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1881, S. 103 u. ff.; Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 203 u. 204.

²⁶⁾ Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1897, S. 291.

In England ist neuerdings (infolge des Einsturzes der Taybrücke) vorgeschrieben, einen größten Winddruck von 273 kg f. d. qm getroffener Fläche der Berechnung zu Grunde zu legen; bei der Brücke über den Forth ist statt dessen 300 kg angenommen.

In den meisten Ländern legt man verschiedene Zahlenwerte für belastete und unbelastete Brücken zu Grunde. Bei einem Sturme, welcher 150 bis 180 kg Druck auf 1 qm senkrecht getroffener Fläche ausübt, können Züge nicht mehr verkehren, da die Wagen alsdann durch den Wind umgeworfen werden. Winkler rechnet den Winddruck für das Quadratmeter belasteter Brücke mit 150 kg, für das Quadratmeter unbelasteter Brücke, welche ja allen Stürmen trotzen muß, mit 250 kg.

Für Brückenberechnungen nimmt man allgemein den Winddruck wagerecht wirkend an.

Die verschiedenen Brückenverordnungen schreiben folgende Zahlenwerte vor:

Verordnung	für das Quadratmeter	
	belasteter	unbelasteter
	Brücke	
	kg	kg
Preussische Staatsbahnen, September 1895	150	250
Österreichische Bahnen, September 1887	170	270
Bayerische Staatsbahnen	150	300
Sächsische Staatseisenbahnen, April 1895	150	250
Schweizerische Eisenbahnen, 19. August 1892	100	150
Französische Brücken	170	270
Reichseisenbahnen in Elsass-Lothringen	150	250

Selbstverständlich sind die Standsicherheits- und Spannungsberechnungen für beide Belastungsarten durchzuführen und es ist die ungünstigere der Ausführung zu Grunde zu legen.

Die Richtung des Windes weicht erfahrungsmäßig etwas von der Wagerechten ab; vielfach nimmt man an, daß der Winkel β des Windes gegen die Wagerechte rund $= 10^\circ$ sei, welcher Wert als zweckmäßiger Mittelwert eingeführt werden kann. Demnach wäre die wirkliche wagerechte Kraft gegen die lotrechten Brückenwände

$$P = P_0 \cos \beta.$$

Da aber $\cos \beta$ nur wenig kleiner als 1 ist, im übrigen nach dem Vorstehenden ganz genaue Zahlenwerte nicht bekannt sind, so sieht man besser von dem $\cos \beta$ ab und führt einfach ein: $P = P_0$, d. h. man nimmt die Windrichtung als wagerecht an. Der Fehler ist zu Gunsten der Sicherheit.

Die Größe der vom Winde getroffenen Fläche.

Es sind drei Teile zu unterscheiden:

Der vom Winde unmittelbar, auf der Windseite, getroffene Träger,
 der vom Winde getroffene Träger, welcher auf der Unterwindseite liegt,
 die bewegliche Belastung.

Der auf der Windseite liegende Träger ist mit seiner vollen Fläche in die Rechnung einzuführen; der gesamte auf ihn wirkende Winddruck greift im Schwerpunkte dieser Fläche an, meistens genau genug in halber Trägerhöhe; dagegen wird der auf der Unterwindseite liegende Träger nur in einem Teile seiner Fläche getroffen. Welcher Bruchteil dieser Fläche einzuführen ist, hängt von der Maschenweite der Hauptträger

ab. Das sicherste ist, beide Trägerwände etwas gegeneinander verschoben hintereinander zu zeichnen, und danach die Fläche zu ermitteln; doch setzt dieses voraus, daß die Brücke bereits ganz entworfen sei. Die Vorschriften in den verschiedenen Ländern über die Größe der zu berechnenden Fläche sind nachstehend (S. 37 u. 38) angegeben.

Was den Winddruck auf die bewegte Belastung anlangt, so ergeben sich wesentliche Unterschiede je nach der Lage der Fahrbahn. Liegt die Fahrbahn über den Trägern (gedeckte Brücke), so ist die ganze Verkehrslast dem Winddrucke ausgesetzt. Man kann den Eisenbahnzug als ein 3,0 m hohes, fortschreitendes, volles Rechteck betrachten, bei den Strafsenbrücken ein fortschreitendes, 2 m hohes, volles Rechteck einführen (österreich. Verordnung). Winkler rechnet, daß jeder Wagen sowohl bei Eisenbahn- wie Strafsenbrücken dem Winde eine Fläche von 3,2 qm f. d. lfd. m bietet.

Liegt die Fahrbahn unten, sodafs die Verkehrslast zum Teil durch den dem Winde zunächst ausgesetzten Träger verdeckt wird, selber aber die hintere Trägerwand teilweise deckt, so wird man zunächst ein der Zughöhe entsprechendes volles Rechteck einführen, von dem Träger an der Windseite die ganze auferhalb dieses Rechteckes liegende Fläche, von dem Träger an der Unterwindseite die entsprechend verringerte Fläche, soweit sie auferhalb des Zugrechteckes liegt.

Nachstehend sind die in einigen Ländern erlassenen Vorschriften zusammengestellt.

Die Vorschriften für die preussischen Staatseisenbahnen schreiben vor:

Die Angriffsfläche der Brücke ist nach den wirklichen Abmessungen der Teile schätzungsweise zu bestimmen; die des Eisenbahnzuges ist als ein Rechteck anzusehen, dessen Höhe von Schienenoberkante an gerechnet 3,0 m beträgt.

Bayerische Staatsbahnen.

Bei Fachwerksbrücken sind die Ansichtsflächen der beiden Träger, soweit dieselben nicht mit der Ansichtsfläche der Fahrzeuge und der Fahrbahn tafel zusammenfallen, der Berechnung zu Grunde zu legen. — Als wirksame Ansichtsfläche der Fahrzeuge ist ein fortschreitendes volles Rechteck von 3,5 m Höhe über den Schienen bei Eisenbahnbrücken, von 2,5 m Höhe bei Strafsenbrücken in Rechnung zu ziehen.

Österreichische Verordnung vom 15. September 1887.

1. Bei der unbelasteten Brücke ist die eine der beiden Tragwände mit ihrer wirklich dem Winde ausgesetzten Fläche, die zweite hingegen mit ihrer auf gleiche Weise zu messenden, jedoch nach der nachstehenden Tabelle zu vermindernden Fläche in Rechnung zu bringen.

Tabelle für die Verminderung der ausgesetzten Fläche auf der zweiten Tragwand.

Verhältnis der offenen Maschenfläche zur Gesamtumrissfläche in der ersten Tragwand	Verminderungsverhältnis für die ausgesetzte Fläche der zweiten Tragwand.
0,4	0,2
0,6	0,4
0,8	1,0

Für dazwischenfallende Werte ist geradlinig einzuschalten.

2. Bei der belasteten Brücke ist der Zug als ein 2,5 m hohes, mit der Unterkante 0,5 m über den Schienen befindliches, fortschreitendes volles Rechteck zu behandeln. Als Angriffsfläche ist hierbei die Fläche des Zuges und der auferhalb des Zugumrisses befindlichen Teile der einen Tragwand, sowie

die nach vorstehender Tabelle berechnete Fläche dieser Teile in der zweiten Tragwand in Rechnung zu bringen.

Bei den Strafenbrücken ist das Verkehrsband als 2,0 m hohes Rechteck einzuführen.

Französische Verordnung.

Für den Träger auf der Windseite ist die wirkliche Druckfläche F nach Abzug aller Öffnungen auszusetzen, für den Träger auf der Unterwindseite ist zu setzen: $F \left(1 - \frac{F'}{U}\right)$. In der Formel ist U die Umrissfläche des Trägers ohne Abzug der Öffnungen. Bei Blechbrücken ist $F = U$, also der Träger auf der Unterwindseite nicht als vom Winde getroffen einzuführen.

Verkehrsband reicht von 0,5 bis 3,5 m über Schienenoberkante. Die vor- und hinterliegenden Trägerteile sind bei der Flächenberechnung nicht in Ansatz zu bringen.

Schweizerische Verordnung vom 19. August 1892.

Die Größe der wirksamen Ansichtsfläche ist bei Brücken mit obenliegender Fahrbahn nach folgender Formel zu ermitteln:

$$F = (F'_g - F'_m) + (F''_g - F''_m) \frac{F'_m}{F'_g} + (F'''_g - F'''_m) \frac{F'_m}{F'_g} \frac{F''_m}{F''_g}$$

In der Formel bedeuten:

$F'_g, F''_g, F'''_g \dots$ die ganzen Umrissflächen der hintereinander stehenden Tragwände.

$F'_m, F''_m, F'''_m \dots$ die Maschenflächen dieser Tragwände.

Bei Brücken mit zwischen den Tragwänden eingesattelter oder unten liegender Fahrbahn ist von den Werten F'_g und F'_m der durch den Eisenbahnzug gedeckte Flächenteil in Abzug zu bringen.

Als wirksame Ansichtsfläche des Eisenbahnzuges ist ein fortschreitendes Rechteck von 3,0 m Höhe mit 2,0 m Schwerpunktabstand über der Schienenoberkante anzunehmen.

§ 12. Die Fliehkraft in Krümmungen. Wenn ein Körper vom Gewichte G und der Masse M eine Kurve vom Halbmesser r mit der Geschwindigkeit v durchläuft, so entsteht eine Centrifugalkraft oder Fliehkraft

$$C = \frac{M v^2}{r} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{r},$$

in welcher Gleichung $g = 9,81 \text{ m}$ die Beschleunigung des freien Falles ist. Da die Größen v , r und g , sowie G für jede Achse bekannt sind, so kann man für einen beliebigen Zug leicht den Wert der an jeder Achse wirkenden Fliehkraft ermitteln. Wegen der größeren Fahrgeschwindigkeit und weil v in der Formel im Quadrat vorkommt, werden die Schnellzüge in den meisten Fällen ungünstigere Fliehkräfte hervorrufen, als die Güterzüge.

Als Belastung einer Lokomotivachse kann man bei Güterzügen setzen: $G = 15 \text{ t}$, als größte Geschwindigkeit $v = 10 \text{ m}$;

dann wird $C = \frac{153}{r} \text{ t}$.

Für Schnellzüge kann man setzen: $G = 14 \text{ t}$, $v = 20 \text{ m}$,

somit wird $C = \frac{570}{r} \text{ t}$.

Was den Zug selbst anlangt (ohne Lokomotive), so kann man der Einfachheit halber und genügend genau die Belastung als gleichmäßig verteilt einführen. Rechnet man diese Last bei Personenzügen zu 1,5 t, bei Güterzügen zu 3,6 t f. d. lfd. m Gleis, so ist die Fliehkraft für das laufende Meter Gleis:

$$\text{beim Personenzuge } c = \frac{1,5 \cdot 20^2}{9,81 r} = \frac{61}{r} \text{ t},$$

$$\text{beim Güterzüge } c = \frac{3,6 \cdot 10^2}{9,81 r} = \frac{36,7}{r} \text{ t}.$$

Es empfiehlt sich, die Fliehkraft bei größeren Brücken (etwa über 20 m Stützweite) als gleichmäßig über die Zuglänge verteilte wagerechte Last $\frac{61}{r}$ f. d. lfd. m des Zuges einzuführen, außerdem aber am Kopf des Zuges entsprechend den in sämtlichen Lokomotivachsen auftretenden Fliehkraften eine Einzellast anzunehmen, welche gleich deren Summe ist.

Bei Straßenbrücken braucht man auf die Fliehkraften wegen der geringen Geschwindigkeit der Verkehrslast keine Rücksicht zu nehmen.

IV. Dynamische Wirkung der Verkehrslasten und sonstige angreifende Kräfte.

§ 13. Dynamische Wirkung der bewegten Lasten. Die Verkehrslasten der Brücken treten mit einer gewissen, meist recht bedeutenden Geschwindigkeit auf; hierdurch finden Beanspruchungen statt, welche (unter Umständen wesentlich) größer sind, als wenn die Lasten ruhend wirkten. Den Berechnungen werden wohl ausschließlich ruhende Lasten zu Grunde gelegt: Man berücksichtigt die auftretenden Schwingungen und Stöße, indem man die Verkehrslast mit einem Beiwert multipliziert, den man als Stofsbeiwert bezeichnet. Dieses Verfahren ist zuerst von Gerber eingeführt, der bei der Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz die Verkehrslast in dreifacher Größe einführt, dann freilich aber auch die Inanspruchnahme an der Elasticitätsgrenze als zulässige, rechnungsmäßige Inanspruchnahme annahm. Noch heute ist es üblich, die Verkehrslast — oder, was auf dasselbe hinauskommt, die durch die Verkehrslast hervorgerufene Spannung — mit einem Beiwert, der größer ist als 1, in die Rechnung einzuführen. Dieses Verfahren zu verbessern, sind in neuerer Zeit eine Anzahl Arbeiten veröffentlicht, in welchen die Frage theoretisch untersucht worden ist, welche Spannungserhöhung infolge der dynamischen Wirkung der Verkehrslasten gegenüber derjenigen eintritt, welche den ruhenden Belastungen entspricht. Die letzteren Wirkungen sollen nachstehend kurz als statische Wirkungen bezeichnet werden. Der Lösung dieser Frage stellen sich außerordentliche Schwierigkeiten entgegen. Der einfachste Fall eines kurzen, demnach gleichzeitig nur von einer Last besetzten Balkens, macht bei streng mathematischer Behandlung schon sehr große Schwierigkeit. Dieser Fall ist durch die ausgezeichneten Arbeiten von Dr. Zimmermann²⁷⁾ geklärt. Sobald es sich aber um Träger von größerer Länge handelt, auf welcher die von den einzelnen Lasten ausgehenden Wirkungen (Schwingungen, Stöße u. s. w.) nicht gleichzeitig auftreten, sich auch gegenseitig verstärken oder vernichten, wird die Aufgabe nahezu unlösbar. Hier sind Erfolge nur von der Anstellung planmäßiger, sorgfältig ausgeführter und genügend lange fortgesetzter Versuche zu erwarten, für welche wir in dem Fränkel'schen Dehnungs- bzw. Schwingungszeichner geeignete Apparate besitzen. Immerhin sind die bereits vorhandenen theoretischen Untersuchungen so bedeutsam, daß über dieselben und deren Ergebnisse hier berichtet werden muß.

Die dynamischen Einwirkungen der Verkehrslasten können in nachstehend aufgeführte Einzelwirkungen zerlegt werden:

1. Vermehrung bzw. Vermindern des von der Last ausgeübten Druckes infolge der Krümmung der Bahnlinie.
2. Auftreten von Schwingungen des ganzen Trägers bzw. einzelner Teile desselben infolge der mit großer Geschwindigkeit eintretenden Belastung.

²⁷⁾ Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Centrabl. d. Bauverw. 1896, S. 249 u. ff.

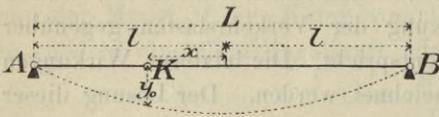
3. Stosswirkungen infolge unvermeidlicher Fehler der Bahn, der Unebenheiten, der Schienenstöße u. s. w.
4. Änderungen in den Lastgrößen, verursacht durch die an den Triebrädern der Lokomotiven angebrachten Gegengewichte; durch diese werden abwechselnde Be- und Entlastungen der Triebräder hervorgerufen, welche die statische Wirkung der Last vergrößern und weitere Schwingungen erzeugen.
5. Bei sehr schnell eintretender Belastung ist es denkbar, daß die Zeit nicht ausreicht, um den Träger seine volle Widerstandsfähigkeit entwickeln zu lassen. Die ferner gelegenen Fasern des Baustoffes werden erst nach einer gewissen Zeit in Anspruch genommen und ihren Widerstand zu Hilfe senden können. Vor dem Eintreffen dieser Hilfe entwickelt der Träger geringere Festigkeit, als die Berechnung annimmt.

Der zuletzt angeführte Punkt kann hier sofort erledigt werden. Die Spannungen in elastischen Körpern pflanzen sich nach den für die Schallgeschwindigkeit geltigen Gesetzen, also sehr schnell fort; im Eisen beträgt diese Geschwindigkeit etwa 5000 m in der Sekunde. Dieselbe ist so groß, daß sie gegenüber derjenigen, mit welchen die Belastungen der Brücken ungünstigstenfalls erfolgen, als augenblickliche angesehen werden könnten. Die unter 5. erwähnte Befürchtung erscheint also nicht als begründet.²⁸⁾

1. Form der Bahnlinie für kurze, vollwandige Träger. Strenge Behandlung.

Ein Balken AB von der Länge L (Fig. 14) werde von einer Masse m mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit c überfahren. Die bewegte Masse m habe das Gewicht G , wo $G = mg$, und g die Beschleunigung des freien Falles ist. Die lotrechte, nach unten wirkende Kraft, welche außer dem Gewichte noch einen Federdruck enthalten kann, sei P . Beim Überfahren seien die Koordinaten des Lastpunktes bezw.

Fig. 14.



x und y ; der Anfangspunkt des Achsenkreuzes liege in der Mitte des Balkens. Wenn die Kraft P einen Punkt K des Balkens im Abstände x von der Mitte belastet und dabei langsam vorschreitet, so sei die Senkung y_0 ; diese Senkung bezeichnet man als diejenige für ruhende Last. Bei dieser Senkung muß die vom Träger an dieser Stelle ausgeübte elastische Gegenkraft genau gleich P sein. Wir bezeichnen diese Gegenkraft mit W_{y_0} , d. h. es ist $W_{y_0} = P$. Einer anderen Senkung y des Punktes K entspricht eine Gegenkraft W , so ist

$$\frac{W}{W_{y_0}} = \frac{y}{y_0}, \text{ also } W = P \cdot \frac{y}{y_0}$$

Die belastete Masse m befindet sich in einem beliebigen Zeitpunkte der Bewegung bei der Senkung y unter dem Einflusse einer beschleunigenden Kraft Q nach unten und zwar ist: $Q = P - W = P \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)$. Für die Bahn der bewegten Last gelten nun die beiden Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{Q}{m} = \frac{P}{m} \left(1 - \frac{y}{y_0}\right) \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1.$$

²⁸⁾ Man vergl. jedoch: Steiner. Metallkonstruktionen der Zukunft. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1892, S. 113.

(die wagerechte Beschleunigung ist bei der Annahme der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit c gleich Null). —

Nun ist $m = \frac{G}{g}$, also wird:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{P}{G} g \left(1 - \frac{y}{y_0}\right); \text{ und weiter:}$$

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad x = c \cdot t$$

t ist hier die Zeit, in welcher die Strecke x mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit c von der Masse m durchfahren wird.

Aus der Verbindung der beiden Gleichungen für $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und $x = c \cdot t$ folgt:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \text{ d. h.}$$

$$c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = g \frac{P}{G} - g \frac{P}{G} \frac{y}{y_0}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g}{c^2} \frac{P}{G} - \frac{g}{c^2} \frac{P}{G} \frac{y}{y_0} \dots \dots \dots 2.$$

Gleichung 2 ist die Gleichung der gesuchten Linie. Mit den Bezeichnungen der Fig. 14 und wenn unter E und J bezw. Elasticitätsziffer des Baustoffes und maßgebendes Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes verstanden werden, ist²⁹⁾

$$y_0 = \frac{Pl^3}{6EJ} \frac{(l-x)^2(l+x)^2}{l^4} \dots \dots \dots 3.$$

Führt man diesen Wert in Gleichung 2 ein, so ergibt sich:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g}{c^2} \frac{P}{G} - \frac{g \cdot y}{c^2} \frac{6EJ}{Gl^3 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2} \dots \dots \dots 4.$$

Die Senkung für ruhende Last G in der Balkenmitte werde mit y_{00} bezeichnet, so folgt aus Gleichung 3 für $x = 0$:

$$y_{00} = \frac{Gl^3}{6EJ}$$

und wenn dieser Wert in Gleichung 4 eingeführt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g}{c^2} \frac{P}{G} - \frac{y}{y_{00}} \frac{g}{c^2} \left(1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right)^2$$

Endlich sei h die Höhe, welche die Masse m in derselben Zeit t_0 durchfallen würde, in welcher die Last die Länge l mit der Geschwindigkeit c überfährt; dann ist:

$$h = \frac{gt_0^2}{2}, \quad ct_0 = l, \quad t_0 = \frac{l}{c}, \text{ d. h.}$$

$$h = \frac{gl^2}{2c^2}.$$

Nun sei die unabhängige Veränderliche $\xi = \frac{x}{l}$, so wird $dx^2 = l^2 d\xi^2$; die abhängige Veränderliche sei $\eta = \frac{y}{2h}$, so ist $d^2 \eta = \frac{d^2 y}{2h}$. Mit diesen Werten wird die Differentialgleichung der Bahnlinie

$$\frac{2h}{l^2} \cdot \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{g}{c^2} \frac{P}{G} - \frac{2h \eta \cdot g}{y_{00} c^2 (1 - \xi^2)^2}$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{gl^2}{2hc^2} \frac{P}{G} - \frac{gl^2}{c^2} \frac{\eta}{y_{00} (1 - \xi^2)^2}$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \frac{P}{G} + \frac{2h\eta}{y_{00} (1 - \xi^2)^2} = 0.$$

²⁹⁾ Vergl. Hütte, XIV. Aufl., S. 293.

Nennt man abkürzungsweise $\frac{2h}{y_{00}} = \alpha, \frac{P}{G} = \beta$, so ergibt sich die gesuchte Gleichung der Bahnlinie:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \alpha \cdot \frac{\eta}{(1 - \xi^2)^2} - \beta = 0 \quad \text{I.}$$

Gleichung I ist in dieser Form von Zimmermann³⁰⁾ entwickelt. Wegen der weiteren Behandlung der Differentialgleichung I muß auf das ausgezeichnete Werk von Zimmermann: „Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin, Ernst u. Sohn, 1896“ bzw. Centralbl. d. Bauverw. 1896, S. 249, 257, 264 und ebenda 1892, S. 215 verwiesen werden. Die schwierige Integration der Gleichung und Untersuchung der Kurve ist a. a. O. mit außerordentlichem Scharfsinn durchgeführt.

Die Untersuchungen von Zimmermann erweisen, daß die Form der Bahnkurve in hohem Maße von dem Werte $\alpha = \frac{2h}{y_{00}}$ abhängt; es ist aber $h = \frac{g h^2}{2c^2}$. Für die Grenzwerte von c , nämlich für $c = 0$, wird $\alpha = \infty$ und für $c = \infty$ wird $\alpha = 0$. Der ruhenden Belastung entspricht also $\alpha = \infty$, der mit unendlich großer Geschwindigkeit überfahrenden Last entspricht $\alpha = 0$.

Die Bahnlinie für $\alpha = \infty$ ist demnach bekannt: es ist die Senkungslinie für ruhende Belastung. Die wirklichen Größen von α liegen zwischen den Grenzen ∞ und Null. Von der Größe des Gesamtdruckes P , vorausgesetzt daß derselbe während der Überfahrt unveränderlich bleibt, ist α unabhängig. Die Ordinaten der Senkungslinien ändern sich freilich mit P , aber für ruhende und bewegte Last im gleichen Verhältnis, wie P . Dagegen ist die Größe α abhängig von dem Verhältnis zwischen P und G . Der ganze Raddruck P setzt sich zusammen aus dem Gewichte G der Masse m und der durch Federung auf das Rad übertragenen Kraft G_1 . Werden für beide recht große Werte, entsprechend den heutigen Lokomotiven, eingeführt, so kann man in den Grenzfällen bei fehlender Federung und bei vollkommener Federung setzen:

Bei fehlender Federung

bei vollkommener Federung

$$P = 8 \text{ t}$$

$$P = 8 \text{ t}$$

$$G = P = 8 \text{ t}$$

$$G = 2 \text{ t}$$

$$G_1 = 0$$

$$G_1 = 6 \text{ t}$$

Es ist also bei fehlender Federung G viermal so groß, als bei vollkommener Federung, also die oben für ruhende Last G in der Trägermitte mit y_{00} bezeichnete Senkung im ersten Falle viermal so groß, als im zweiten Falle. Da aber $\alpha = \frac{2h}{y_{00}}$ ist, so ist bei fehlender Federung α viermal so klein, als bei vollkommener Federung. Bei fehlender Federung ist $y_{00} = \frac{Pl^3}{6EJ}$ und $\alpha = \frac{2h}{y_{00}} = \frac{gl^2}{c^2 \cdot y_{00}} = \frac{gl^2 6EJ}{c^2 Pl^3}$.

Man kann α durch die größte Inanspruchnahme σ in der Trägermitte ausdrücken. Wird die Trägerhöhe mit a bezeichnet, so ist für Last $P = G$ in der Mitte:

$$M_{\text{mitte}} = \frac{Pl}{2}, \quad \sigma = M_{\text{mitte}} \cdot \frac{a}{2J} = \frac{Pla}{4J},$$

mithin $\frac{Pl}{2} = \frac{2J\sigma}{a}$ und damit bei fehlender Federung:

$$\alpha_u = \frac{3Ega}{2\sigma c^2} \text{ (ungefedert).}$$

Für vollkommene Federung ist α viermal so groß, d. h.

$$\alpha_v = 4\alpha_u = \frac{6Ega}{\sigma \cdot c^2} \text{ (vollkommen gefedert),}$$

³⁰⁾ Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin 1896.

mithin ist:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_u &= \frac{3}{2} \frac{E g a}{\sigma \cdot c^2} \\ \alpha_v &= 6 \frac{E g a}{\sigma \cdot c^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5.$$

Aus Gleichung 5 kann man α finden. Da es sich nur um kurze Träger (etwa bis 4 m Stützweite) handelt, so liegt a zwischen 30 und 50 cm. Es kann ferner angenommen werden: $E = 2000 \text{ t/qcm}$, $\sigma = 0,6 \text{ t/qcm}$, $g = 981 \text{ cm}$, $c = 100 \text{ C}$ (c bedeutet Geschwindigkeit in Centimetern, C die Geschwindigkeit in Metern für die Sekunde).

Man erhält

$$\alpha_u = 500 \frac{a}{C^2} \text{ (abgerundet),}$$

$$\alpha_v = 2000 \frac{a}{C^2}.$$

Setzt man $a = 30 \text{ cm}$ und die Fahrgeschwindigkeit $C \sim 28 \text{ m/Sek.}$, welche Geschwindigkeit einer Stundengeschwindigkeit von 100 km entspricht, so erhält man als kleinsten denkbaren Wert von

$$\alpha_u = \sim 20 \text{ bei ungefederter Fahrt,}$$

$$\alpha_v = 80 \text{ bei vollständiger Federung.}$$

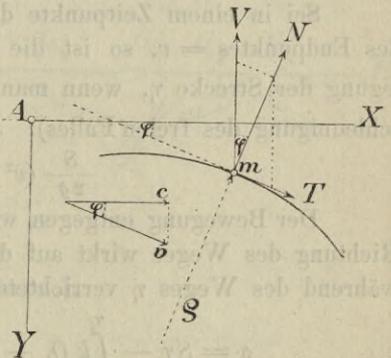
Da die Lagerung nie ganz starr ist, so kann man als mittleren, kleinst möglichen Wert von α einführen: $\alpha = 40$.

Ein ungünstigerer Wert dürfte nicht vorkommen. Für dieses α ergibt sich nach Zimmermann in der Trägermitte gegenüber derjenigen bei ruhender Last eine verhältnismäßige Zunahme der Senkung und der Beanspruchung von (rund) 14%.

Durch die vorstehend behandelten dynamischen Einflüsse ist also eine Steigerung der Inanspruchnahme um 14 % möglich.

Zimmermann kommt in der mehrfach erwähnten Arbeit zu der Differentialgleichung I, indem er die beim Durchfahren der gekrümmten Bahnlinie auftretende Fliehkraft N einführt. Die lotrechte Seitenkraft derselben vermindert die lotrechte Kraft P um $V = \frac{N}{\cos \varphi}$. Wird die wagerechte Seitengeschwindigkeit der Masse m mit c , die tangentielle Geschwindigkeit des Durchfahrens der Kurve mit v , der Krümmungshalbmesser mit ρ bezeichnet, so ist (Fig. 15):

Fig. 15.



$$c = v \cdot \cos \varphi, \quad N = \frac{m v^2}{\rho},$$

und da $\rho = \frac{(1 + \tan^2 \varphi)^{3/2}}{\frac{d^2 y}{a x^2}} = \frac{1}{\cos^3 \varphi \cdot \frac{d^2 y}{a x^2}}$ ist:

$$N = \frac{m c^2}{\cos^2 \varphi} \cdot \cos^3 \varphi \cdot \frac{d^2 y}{a x^2}, \quad \frac{N}{\cos \varphi} = V = m c^2 \frac{d^2 y}{a x^2}.$$

Es wirkt also als Last nach unten:

$$Q = P - V = P - m c^2 \frac{d^2 y}{a x^2} \dots \dots \dots 6.$$

Die Einflusslinie der Durchbiegungen für die ruhende Last P ist (vergl. Gleichung 3, S. 41):

$$y_0 = \frac{P l^3}{6 E J} \frac{(l - x)^2 (l + x)^2}{l^4} \dots \dots \dots 7.$$

Bewegt sich nunmehr die mit c und ρ veränderliche Last Q über den Träger, so wird die Gleichung der Durchbiegungen erhalten, indem man statt P den Wert Q aus Gleichung 6 in Gleichung 7 einführt. Man erhält nach einfachen Umformungen:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{6 EJ}{m c^2 l^3} \frac{y}{\left(1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right)^2} - \frac{P}{m c^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich mit den vorstehend eingeführten Bezeichnungen ohne Schwierigkeit die oben mit I. bezeichnete Differentialgleichung der Bahnlinie.

2. Wirkung bewegter Lasten auf gröfsere Brücken. Angenäherte Berechnung.

Die Untersuchung der Wirkung bewegter Lasten auf gröfsere Träger stöfst auf auferordentliche Schwierigkeiten. Die nachstehend vorgeführte Behandlung (nach Melan³¹⁾) kann nur angenäherte Ergebnisse zeitigen; bei der Untersuchung sind Fachwerkträger angenommen.

a) Einfluß der Schwingungen.

In den betrachteten Stab trete die Stabkraft S mit einer gewissen Geschwindigkeit. Die (positive und negative) Verlängerung setzt sich über diejenige Verlängerung hinaus fort, welche bei ruhender Stabkraft S auftreten würde. Die Spannung ist proportional der Verlängerung. Die über die statische Verlängerung hinaus auftretende Verlängerung, die halbe Schwingungsweite, wird die Gröfse der durch die Schwingung erzeugten Zusatzspannung bedingen. Die Schwingungsweite ist aber abhängig von der Geschwindigkeit v_0 , welche die Stabkraft S im Schwingungsmittelpunkt hat. Diese wiederum hängt von der Geschwindigkeit ab, mit welcher die Last über den Träger fährt. Für die Ermittlung der Geschwindigkeit, mit welcher die Stabkraft in den Stab eintritt, werden mit Vorteil die Einflußlinien verwendet.

In dem betrachteten Stabe vom Querschnitt F' , der Elasticitätsziffer E , der Länge l , wirke die Stabkraft S . Bei ruhender Last erteile diese Kraft dem Stabe die Verlängerung λ . Dann ist bekanntlich $\lambda = \frac{Sl}{EF'}$ und $S = EF' \frac{\lambda}{l} = k\lambda$. Es ist $k = \frac{EF'}{l}$ also für einen bestimmten Stab konstant.

Sei in einem Zeitpunkte die gesamte Verlängerung: $\lambda + \eta$, die Geschwindigkeit des Endpunktes = v , so ist die Zunahme an lebendiger Kraft während der Zurücklegung der Strecke η , wenn man die bewegte Masse $m = \frac{S}{g}$ setzt (g ist die Beschleunigung des freien Falles):

$$\frac{S}{2g} (v^2 - v_0^2).$$

Der Bewegung entgegen wirkt die elastische Gegenkraft $S_\eta = k(\lambda + \eta)$; in der Richtung des Weges wirkt auf der ganzen Strecke die Kraft $S = k\lambda$; mithin ist die während des Weges η verrichtete mechanische Arbeit

$$a = S\eta - \int_0^\eta k(\lambda + \eta) d\eta = k\lambda\eta - k\lambda\eta - \frac{k\eta^2}{2} = -\frac{k\eta^2}{2}$$

Es muß also sein:

$$\frac{S}{2g} (v^2 - v_0^2) = -\frac{k\eta^2}{2} \dots \dots \dots 8.$$

v wird Null für den Endpunkt der Schwingung; die halbe Schwingungsweite sei η_1 , so ist also $v = 0$ für $\eta = \eta_1$, mithin heifst die Bedingungsgleichung für η_1 :

$$\frac{S}{2g} v_0^2 = \frac{k\eta_1^2}{2}$$

³¹⁾ Melan. Über die dynamische Wirkung bewegter Lasten auf Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 293 u. f.

und mit $S = k\lambda$

$$\frac{\lambda v_0^2}{g} = \eta_1^2,$$

$$\eta_1 = \pm v_0 \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \dots \dots \dots 9.$$

Bei dieser Entwicklung ist die Annahme gemacht, die schwingende Masse sei gleich $\frac{S}{g}$, welche Annahme nicht zweifellos richtig ist. Die Bestimmung der Größe der in Betracht kommenden Masse bedingt bei der Lösung der Aufgabe die größte Schwierigkeit.

Die Stabspannung ist proportional der Verlängerung; folglich ist die der Verlängerung η_1 entsprechende Zusatzspannung ΔS zu finden aus:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\eta_1}{\lambda}, \quad \Delta S = \frac{S}{\lambda} \eta_1 = k \eta_1,$$

$$\Delta S = \pm k \cdot v_0 \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \dots \dots \dots 10.$$

In Gleichung 10 ist nur v_0 unbekannt, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher die Stabkraft am Endpunkte der statischen Verlängerung λ anlangt. v_0 ist als Funktion der Spannungsänderung darzustellen. Es ist $v_0 = \frac{d\lambda}{dt}$, wenn t die Zeit bedeutet, und da $\lambda = \frac{S}{k}$:

$$v_0 = \frac{1}{k} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dS}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Die gleichbleibende Geschwindigkeit, mit welcher die Last über den Träger führt, sei c , so ist $x = ct$ und $\frac{dx}{dt} = c$, also

$$v_0 = \frac{c}{k} \frac{dS}{dx} \dots \dots \dots 11.$$

$$\Delta S = \pm c \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \frac{dS}{dx} \dots \dots \dots 12.$$

In Gleichung 12 erscheint der gesuchte Zuwachs an Stabkraft, ΔS , ausgedrückt in der bekannten Fahrtgeschwindigkeit c , den bekannten Größen λ (statische Verlängerung) und g ($= 9,81 \text{ m}$), sowie in $\frac{dS}{dx}$. Mit Hilfe

der Einflußlinie kann man $\frac{dS}{dx}$ ermitteln. Es ist, wenn (Fig. 16) die Einflußordinaten y_1, y_2, y_3 sind und S_q die Stabkraft durch das Eigengewicht bedeutet:

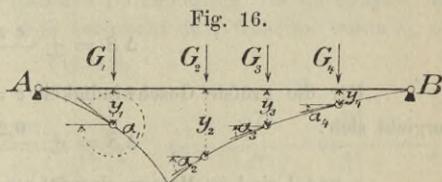


Fig. 16.

$$S = S_q + G_1 y_1 + G_2 y_2 + \dots$$

$$S = S_q + \Sigma(G y),$$

$$\frac{dS}{dx} = \Sigma \left(G \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) = \Sigma (G \tan \alpha),$$

demnach

$$\Delta S = \pm c \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \Sigma (G \tan \alpha) \dots \dots \dots 13.$$

Bedeutet σ die Spannung auf die Flächeneinheit des Stabquerschnittes für ruhiend wirkende Stabkraft S , so ist

$$\lambda = \frac{\sigma l}{E} \text{ und } \sqrt{\frac{\lambda}{g}} = \sqrt{\frac{\sigma}{Eg}} \sqrt{l} = A \cdot \sqrt{l}.$$

Für $\sigma =$ 400 600 800 1000 kg/qcm wird

$A =$ 0,0045 0,0055 0,0064 0,0084

Die Gleichung für ΔS erhält mit dem Beiwert A die Form:

$$\Delta S = \pm c \cdot A \cdot \sqrt{l} \Sigma (G \tan \alpha) \dots \dots \dots 13^a.$$

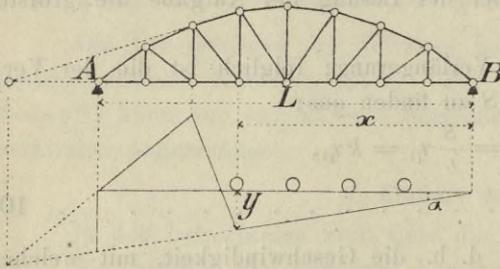
l ist die Stablänge in Metern.

Die Anwendung wird für einige Beispiele gezeigt.

Beispiel 1. Gitterstab eines Balkenträgers (Fig. 17). Die Einflußlinie auf der belastet anzunehmenden Trägerseite ist eine Gerade, also ist α konstant, d. h. $\tan \alpha = \frac{Y}{x}$.

Setzt man $\Sigma(Gy) = \frac{Y \Sigma(G)}{m}$, so ist m ein Zahlenwert, welcher zwischen 1 und 2 liegt. Wäre

Fig. 17.



nämlich nur eine Einzellast G auf dem Träger im ungünstigsten Punkte, so wäre $\Sigma(Gy) = Y \Sigma(G)$, d. h. $m = 1$. Nur wenn alle Lasten an diesem Punkte liegen, ist naturgemäß $m = 1$. Bei gleichmäßig über die ganze Länge x verteilter Last p für die Längeneinheit wird dagegen nahezu

$$\Sigma(Gy) = p \cdot \frac{Yx}{2}$$

und da hier $\Sigma(G) = px$ ist, so ist

$$\Sigma(Gy) = \frac{Y}{2} \Sigma(G), \text{ also } m = 2.$$

In allen anderen praktisch wichtigen Fällen, d. h. wenn eine Zahl von Lasten auf der Abteilung x liegt, hat m einen Wert zwischen 1 und 2. Der allgemeine Ausdruck für m ist:

$$m = \frac{Y \Sigma(G)}{\Sigma(Gy)}$$

Melan erhielt für den Belastungszug der österr. Brückenverordnung (vergl. S. 22) und

$x = 2$	5	10	15	20	25	30	35	40 m
$m = 1,43$	$1,56$	$1,60$	$1,56$	$1,90$	$1,72$	$1,72$	$1,81$	$1,71$.

Setzt man $S = S_q + S_p$, wo S_q bzw. S_p die Stabspannungen durch Eigengewicht bzw. Verkehrslast bedeuten, so ist $S_p = \Sigma(Gy) = \frac{Y \Sigma(G)}{m}$. Mit $\tan \alpha = \frac{Y}{x}$ wird Gleichung 13^a:

$$\Delta S = \pm c \cdot A \cdot \frac{\sqrt{l} Y \Sigma(G)}{x}$$

und da $Y \Sigma(G) = m \Sigma(Gy)$:

$$\Delta S = \pm \frac{c m A \sqrt{l}}{x} \cdot \Sigma(Gy) = \pm \frac{c A \sqrt{l}}{x} S_p \cdot m.$$

$$\Delta S = \pm \frac{c A \sqrt{l}}{x} S_p \cdot m \dots \dots \dots 14.$$

Für die größte Geschwindigkeit $c = 20$ m/Sek. und die Mittelwerte $A = 0,006$ und $m = 1,7$ ergibt sich:

$$\Delta S = \pm \frac{0,2 \sqrt{l}}{x} S_p.$$

x und l sind in Metern einzuführen.

Bedeutung hat bei Parallelträgern diese Erhöhung der Spannung nur für die Mittelfelder, weil in diesen die Kraft S_q gering ist. Melan berechnet die Schwingungsspannung in den mittleren Diagonalen bei einer Stützweite L :

$L = 16$	25	50	100 m
$\Delta S = 5,2$	$4,2$	$3,0$	$2,1$ ‰

der durch statisch angenommene Verkehrsbelastung S_p hervorgerufenen größten Spannung.

Bei Trägern mit gekrümmten Gurten wird die Vergrößerung der Grenzspannung beträchtlich, bis zu 23,4‰.

Bei den Hilfspfosten für eine Knotenlast erhält man die Vergrößerung der statischen Verkehrs-spannung S_p zu 4‰ bis 8,3‰.

Beispiel 2. Gurtstäbe eines Balkenträgers. Die Einflußlinie für den untersuchten Stab ist in Fig. 18 dargestellt. Nach Gleichung 13^a ist:

$$\Delta S = \pm c \cdot A \cdot \sqrt{l} \Sigma(G \tan \alpha).$$

Wenn sowohl die links, wie die rechts vom Momentenpunkte liegenden Lasten je die Größe G_0 hätten und wie diese Last am Momentenpunkte lägen, so wäre:

$$\Sigma(G \tan \alpha) = G_0 \tan \alpha_1 + G_0 \tan \alpha_2 = G_0 Y \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} \right).$$

Die wirkliche durch die Lasten G erzeugte Stabspannung S_p hat einen von Y, G_0 verschiedenen Wert; man kann wieder setzen:

$$m S_p = G_0 Y,$$

wo m ein besonders zu bestimmender Beiwert ist. Man erhält demnach

$$\Sigma(G \tan \alpha) = m \cdot S_p \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} \right)$$

und
$$\Delta S = \pm c \cdot A \sqrt{l} m S_p \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} \right) \dots 15.$$

Der Wert für m ergibt sich aus der Gleichung:

$$m = \frac{Y \cdot G_0}{S_p}.$$

Y ist die Höhe des Einflußdreiecks für Einzellast 1; bei der Auswertung des Quotienten $\frac{Y}{S_p}$ fällt im Zähler und Nenner der Hebelarm der Stabkraft fort; es ist:

$$\frac{Y}{S_p} = \frac{\frac{x(L-x)}{L}}{\frac{p}{2}(L-x)x} = \frac{2}{pL},$$

also $m = \frac{2 G_0}{pL}.$

Mit $G_0 = 13 \text{ t}$ wird $m = \frac{26}{pL}$. Für verschiedene Stützweiten L und die entsprechenden gleichwertigen Belastungen p der österreichischen Brückenverordnung erhält man für:

$L = 5$	10	15	20	30	40	80	120 m
$m = 0,45$	$0,31$	$0,25$	$0,20$	$0,143$	$0,116$	$0,074$	$0,057 \text{ m}.$

Für $A = 0,005, c = 20 \text{ m/Sek.}$ findet Melan:

$$\Delta S = \frac{0,785 \text{ m}}{\sqrt{L}} S_p \dots \dots \dots 16.$$

mithin für:

$L = 5$	10	15	20	30	40	80 m
$\Delta S = 15,9$	$7,6$	$5,0$	$3,5$	$2,0$	$1,5$	$0,8 \text{ \% von } S_p.$

Beispiel 3. Querträger (Fig. 19). Die größte statische Durchbiegung des Querträgers an den Anschlussstellen der Längsträger zweiter Ordnung sei $= u$ (u entspricht dem früheren Werte λ), so erhält man als halbe Schwingungsweite η_1 ($=$ Vergrößerung der Durchbiegung infolge der schnellen Bewegungen der Lasten):

$$\eta_1 = \pm v_0 \cdot \sqrt{\frac{u}{g}}.$$

v_0 ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Senkung im Schwingungsmittelpunkte vor sich geht. Es sei D der größte, im Anschlusspunkte des Längsträgers zweiter Ordnung auf den Querträger übertragene Druck, so kann man mit dem Beiwert k setzen: $D = k u$ und da $v_0 = \frac{du}{dt}, u = \frac{D}{k}$ ist:

$$v_0 = \frac{1}{k} \frac{dD}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dD}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Es ist (wie oben) $c = \frac{dx}{dt}$, also:

$$v_0 = \frac{c}{k} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Der Senkung $u + \eta_1$ entspricht ein Zuwachs der Kraft D um:

$$\Delta D = k \cdot \eta_1 = \pm k \cdot v_0 \sqrt{\frac{u}{g}} = \pm c \sqrt{\frac{u}{g}} \frac{dD}{dx}.$$

Es ist also durch die Schwingung eine Vergrößerung des Druckes eingetreten:

$$\Delta D = c \cdot \sqrt{\frac{u}{g}} \frac{dD}{dx} \dots \dots \dots 17.$$

Fig. 18.

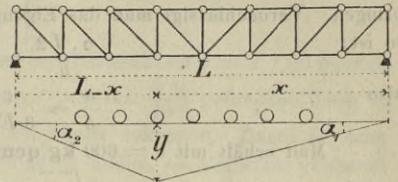
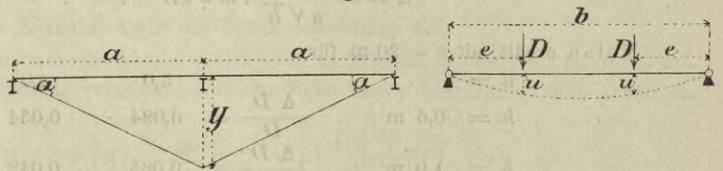


Fig. 19.



Bei den Bezeichnungen der Fig. 19 erhält man leicht:

$$u = \frac{D e^2}{6 E J} (3 b - 4 e).$$

Es ist zweckmäßig, auch hier σ , d. h. die größte statische Inanspruchnahme, in den Ausdruck zu bringen. Vernachlässigt man das Eigengewicht des Querträgers und nennt die Höhe des Querträgers h , so ist:

$$\frac{\sigma \cdot J^2}{h} = D e, \quad \sigma = \frac{h D e}{2 J},$$

also

$$\frac{u}{g} = \frac{e \sigma}{3 E h g} (3 b - 4 e).$$

Man erhält mit $\sigma = 600 \text{ kg/qcm}$:

$$\sqrt{\frac{u}{g}} = 0,0055 \sqrt{\frac{e}{3 h} (3 b - 4 e)}.$$

Für eingleisige Brücke sei $b = 5 \text{ m}$, $e = 1,6 \text{ m}$, so wird:

$$\sqrt{\frac{u}{g}} = \frac{0,0118}{\sqrt{h}}.$$

Es ist noch in Gl. 17: $\frac{d D}{d x}$ zu ermitteln. Abstand der Querträger sei a (Fig. 19), so ist $D = \Sigma (G y)$, wenn y die Ordinaten der Einflußlinie für D sind. Es ist $\frac{d D}{d x} = \Sigma (G \tan \alpha)$. Genau wie oben bei den Gurtstabspannungen gezeigt ist, kann man setzen:

$$\frac{d D}{d x} = \Sigma (G \tan \alpha) = \frac{Y}{a} D m.$$

Hier ist offenbar $Y = 1$, also:

$$\frac{d D}{d x} = \frac{D m}{a}.$$

Melan setzt für:

$a =$	3,0	4,0	5,0	m
$m =$	0,83	0,71	0,66	m

und man erhält mit diesen Werten aus Gleichung 17:

$$\Delta D = c \cdot 0,0055 \sqrt{\frac{e}{3 h} (3 b - 4 e)} \frac{m D}{a} \dots \dots \dots 18.$$

Für eingleisige Bahn mit obigen Werten $b = 5 \text{ m}$, $e = 1,6 \text{ m}$ und $\sqrt{\frac{u}{g}} = \frac{0,0118}{\sqrt{h}}$ wird

$$\Delta D = \frac{0,0118}{a \sqrt{h}} \cdot m c \cdot D \dots \dots \dots 18^a.$$

Melan erhält mit $c = 20 \text{ m}$ für:

$a =$		3,0	4,0	5,0	m
$h = 0,6 \text{ m}$	$\frac{\Delta D}{D} =$	0,084	0,054	0,04	m
$h = 1,0 \text{ m}$	$\frac{\Delta D}{D} =$	0,065	0,042	0,032	m

Die Spannungen erhöhen sich in den berechneten Verhältnissen; die Erhöhung beträgt von 3,2 bis 8,4 vom Hundert. Höhere Querträger sind günstiger als niedrigere, bei größeren Querträgerabständen nimmt der verhältnismäßige Einfluß der Schwingungen ab.

Es möge noch einmal hervorgehoben werden, daß die vorstehenden Rechnungen nur als Annäherungsrechnungen angesehen werden können.

b) Berücksichtigung der Fliehkräfte infolge der Bahnkrümmung.

Führt man die lotrechte Seitenkraft der Fliehkraft ein, nimmt ferner an, daß die oben (S. 43) mit P bezeichnete Gesamtkraft nur das Gewicht der bewegten Last bedeute (d. h. sieht man von der Federung ab), so ist die Belastung eines Bahnpunktes mit den Koordinaten y und x :

$$Q = P - \frac{P}{g} c^2 \frac{d^2 y}{d x^2},$$

$$Q = P \left(1 - \frac{c^2}{g} \frac{d^2 y}{d x^2} \right) \dots \dots \dots 19.$$

Die Senkungslinie für Last $P = 1$ sei $y_1 = f(x)$, so wird diejenige für die Last P sein:

$$y_{1-P} = P \cdot f(x)$$

und diejenige für die Last Q :

$$y = Q f(x) = P \left(1 - \frac{c^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) f(x) \dots \dots \dots 20.$$

Um die schwierige Integration dieser Gleichung zu vermeiden, wird angenähert $y = P f(x)$ gesetzt. Da $f(x)$ bekannt ist (s. oben Gl. 7, S. 43), so kann man $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ermitteln. Der für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ gefundene Wert, in Gleichung 19 eingeführt, läßt die Druckvermehrung infolge der Fliehkraft erkennen. Damit ist dann auch die Möglichkeit gegeben, die Vergrößerung der Inanspruchnahme zu finden. — Bei einer größeren Zahl von Einzellasten hat Melan eine gleichmäßig verteilte, sich verschiebende Last p und diejenige Bahnlinie eingeführt, welche der Schwerpunkt der Last durchläuft. Von der Gleichung dieser Kurve ist dann die zweite Abgeleitete ermittelt und in die Gleichung 19 gesetzt. Es liegt auf der Hand, daß diese Rechnung nur ganz überschlägliche Ergebnisse zeitigen kann: sowohl die gleichmäßig verteilte Belastung, wie die für zweimalige Differentiation gewählte Kurve entspricht den wirklichen Verhältnissen nicht. Immerhin sind die gefundenen Annäherungswerte mangels genauere wertvoll.

Für kurze Träger von der Länge $2l$ mit Einzellast P ist die Gleichung der statischen Senkungslinie (s. oben S. 41):

$$y = \frac{P}{6 E J} \frac{(l^2 - x^2)^2}{l}$$

also:
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{2 P (l^2 - 3 x^2)}{3 E J l}$$

In der Mitte des Trägers, für $x = 0$ hat $\frac{d^2 y}{dx^2}$ seinen größten, also ρ seinen kleinsten Wert.

Dasselbst ist:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = - \frac{2 P l}{3 E J}$$

und an dieser Stelle ist also nach Gleichung 19:

$$Q = P \left(1 + \frac{c^2}{g} \frac{2 P l}{3 E J} \right).$$

Sei σ die größte statische Inanspruchnahme, h die Trägerhöhe, so ist $\sigma = \frac{P l h}{2 \cdot 2 J}$, mithin die ausgeübte Kraft:

$$Q = P \left(1 + \frac{8 \sigma}{3 g E} \frac{c^2}{h} \right) \dots \dots \dots 21.$$

Der zweite Summand in der Klammer stellt die Druckvermehrung dar.

Bei größeren Trägern, welche mehrere Lasten gleichzeitig aufnehmen, ist als $f(x)$ die Bahn eingeführt, welche die Mitte der gleichmäßig verteilten, gleichwertigen Last p beschreibt. Man erhält bei den früheren Bezeichnungen:

$$y = \frac{p}{6 E J} (l - x)^3 \left\{ 8 l - \frac{39}{4} (l - x) + \frac{3}{l} (l - x)^3 \right\}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p (l - x)}{6 E J} \left\{ 48 l - 117 (l - x) + \frac{60}{l} (l - x)^2 \right\}$$

Die Werte x liegen zwischen $x = -l$ und $x = +l$.

Bei voller Belastung des Trägers liegt der Schwerpunkt der bewegten Last in der Mitte und es ist für $x = 0$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{3}{2} \frac{p l^2}{E J}$$

Die Druckwirkung ist dann nach Gleichung 19 so, als ob statt p die Belastung:

$$p' = p \left(1 + \frac{c^2}{g} \frac{3}{2} \frac{p l^2}{E J} \right)$$

wirkte.

Sei wieder σ die bei ruhender Belastung auftretende größte Spannung, so ist:

$$\sigma = \frac{p l^2 h}{2 \cdot 2 J} = \frac{p l^2 h}{4 J}$$

mithin

$$p' = p \left(1 + 6 \frac{\sigma}{E g} \frac{c^2}{h} \right) \dots \dots \dots 22.$$

Melan führt, weil vorstehend die Annahme konstanten Querschnittes und massiven Balkens gemacht war, für die Fachwerksträger eine gröfsere Durchbiegung ein und ersetzt den Koeffizienten 6 in Gl. 22 durch 7,5. Das Eigengewicht f. d. lfd. m sei q , die gröfste Inanspruchnahme σ_{\max} , diejenige durch Verkehrslast allein sei σ , so ist $\sigma = \sigma_{\max} \cdot \frac{p}{p+q}$. Mit $\sigma_{\max} = 800 \text{ kg/qcm}$, $E = 2\,000\,000 \text{ kg/qcm}$ wird:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{800}{2\,000\,000} \cdot \frac{p}{p+q} = 0,0004 \frac{p}{p+q}$$

Führt man $gh = 9,81 h = 2l = L$ ein, d. h. wählt man die Trägerhöhe rund zu $\frac{1}{10}$ der Stützweite, so wird mit Beiwert 7,5:

$$p' = \left(1 + \frac{0,003 \cdot c^2}{L} \frac{p}{p+q}\right) p \dots \dots \dots 23.$$

Für eingleisige Eisenbahnbrücken mit $c = 20 \text{ m}$ erhält man bei nachstehenden Annahmen:

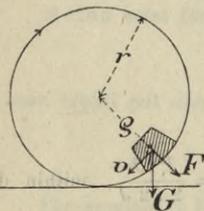
$L =$	5	10	15	20	30	40	80 m
$q =$	1,0	1,13	1,27	1,41	1,69	1,97	3,10 t
$p =$	11,5	8,5	7,0	6,5	6,0	5,6	4,4 t
$\Delta p =$	22,0	10,6	6,8	4,9	3,1	2,2	0,9 % von p .

Die Reihe der Δp giebt die Vergrößerung der Inanspruchnahmen an, welche eine Folge der gekrümmten Form der Bahnlinie sind.

c) Einfluss der an den Lokomotivrädern angebrachten Gegengewichte.

Bei den Eisenbahnbrücken ist auf die Vergrößerung Rücksicht zu nehmen, welche der Achsdruck durch die zur Erzielung ruhigen Ganges an den Lokomotiven angebrachten Gegengewichte erfährt. Bei rascher Fahrt mit der Geschwindigkeit c tritt infolge des Gegengewichtes eine Fliehkraft auf, welche sich berechnet zu $F = \frac{G}{g} \frac{v^2}{\rho}$. Es bedeutet G das Gegengewicht, v die tangentielle Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Gegengewichtes, ρ dessen Abstand von der Radachse; mit der Fahrgeschwindigkeit c und dem Halbmesser r des Rades erhält man $\frac{v}{c} = \frac{\rho}{r}$,

Fig. 20.



also:
$$F = \frac{G c^2}{g r^2} \rho.$$

Diese Fliehkraft hat eine nach oben gerichtete, also entlastende Seitenkraft, wenn G auf der oberen Seite der durch die Achse gelegten Wagerechten liegt, eine nach unten gerichtete, also belastende Seitenkraft, wenn G auf der unteren Seite der Wagerechten liegt. Die lotrechte Seitenkraft wächst sowohl positiv wie negativ von 0 bis F und nimmt wieder auf 0 ab. Das Gegengewicht ist gegenüber der Kurbelachse angebracht; da beide Kurbeln um 90° gegeneinander verstellt sind, so ergibt sich die gröfste Achsbelastung, wenn beide Gegengewichte in der unteren Hälfte liegen und je mit der Wagerechten den Winkel 45° einschließen. Dann ist die Vergrößerung des Achsdruckes $= F \sqrt{2} = 1,41 F$. Zu beachten ist, dafs [nach einer halben Umdrehung dieselbe Kraft, $1,41 F$ lotrecht nach oben wirkt.

Tabelle der Werte F für einige Maschinen.

Bezeichnung der Maschine	Gegengewicht			c m	F am Triebrad kg	F_1 am Kuppelungs- rad kg
	G am Triebrad kg	G_1 am Kuppelungsrad kg	r m			
Schnellzugmaschine; zwei gekuppelte Achsen; Aufsencylinder.	120 bis 160	50 bis 70	0,85 bis 1,0	20	4000 bis 5000	1700 bis 2000
Güterzugmaschine; drei- u. vierachsige	200 bis 250	100 bis 130	0,57 bis 0,7	12	3000 bis 3500	1500 bis 1750

Für eine Anzahl von Lokomotiven hat Melan die Zahlenwerte vorstehender Tabelle ermittelt und daraus die ebenfalls in der Tabelle angegebenen Werte für F berechnet.

Bei einer vierachsigen Güterzugmaschine kann man demnach die Vergrößerung der Achsdrücke annehmen; an der ersten, dritten und vierten Achse zu je $1,4 \cdot 1500 = 2100 \text{ kg}$, an der zweiten Achse zu $1,4 \cdot 3000 = 4200 \text{ kg}$. Nun ist es leicht möglich, die Vergrößerung des Momentes durch diese Lasten für einen beliebigen Momentenpunkt, also beliebigen Gurtstab zu ermitteln. Für einen im Abstände l vom linken Auflager belegenen Punkt eines Balkens auf zwei Auflagern mit Stützweite L sei, wenn die zweite Achse am Momentenpunkt liegt, das Zusatzmoment $= \Delta M$. Das Moment durch die Last selbst ist bei gleichwertiger Last p auf die Längeneinheit: $M = \frac{p x (L - x)}{2}$; der Zuwachs ΔS der Stabkraft verhält sich zu der durch die ruhend gedachte Verkehrslast p hervorgerufenen Stabkraft S_p :

$$\frac{\Delta S}{S_p} = \frac{\Delta M}{M_p} = \frac{2 \cdot \Delta M}{p x (L - x)}$$

Danach kann man leicht für verschiedene Träger und Stäbe die Werte ΔS finden; $\frac{\Delta S}{S_p}$ ist auch von der Trägerstützweite abhängig.

Melan findet für Gurtstäbe die Erhöhung gegenüber S_p wie folgt:

Für $L =$	1	2	5	10	15	20	30	40	50	80	120 m
$p =$	30	15	11,5	8,5	7,0	6,5	6,0	5,6	5,3	4,4	3,8 t
$\Delta S =$	28	28	23,6	20,3	17,7	14,7	10,8	8,7	7,4	5,6	4,3 % von S_p
$\Delta S' =$	—	—	—	—	18,0	19,0	16,9	14,3	12,4	9,4	7,4 % „ „

Die Werte $\Delta S'$ gelten unter der Annahme von zwei mit gleicher Kurbelstellung hintereinander fahrenden Lokomotiven.

Für Wandstäbe, bei welchen hauptsächlich oder ausschließlich die Querkraft maßgebend ist, hat man $\frac{\Delta S}{S_p} = \frac{\Delta Q}{Q_p}$. Wenn die Länge der belastet anzunehmenden Strecke $= l$ ist, so ist:

$$Q_{pl} = \frac{p_1 l^2}{2 L}$$

(p_1 bedeutet hier die gleichwertige Last). ΔQ ist aus den Werten der Achsdrücke zu ermitteln. Man erhält:

$$\frac{\Delta S}{S_p} = \frac{2 \Delta Q \cdot L}{p_1 l^2}$$

Für die Wandstärke hat Melan berechnet:

$l =$	2	5	10	15	20	30	40	50	80	120 m
$p_1 =$	20	14	10	8,5	7,6	6,8	6,2	5,8	4,8	4,0 t
$\Delta S =$	19	19,9	17,5	14,6	14,7	9,7	8,1	7,0	5,3	4,3 % von S_p
$\Delta S' =$	—	—	—	—	14,5	14,1	12,9	11,7	9,6	8,1 % „ „

Die Werte $\Delta S'$ gelten unter der Annahme von zwei mit gleicher Kurbelstellung hintereinander fahrenden Lokomotiven.

Bei den Querträgern mit Abstand a voneinander beträgt die Vergrößerung ΔD des Druckes aus gleichem Grunde:

Abstand der Querträger	$a =$ bis 1,5	2	3	4	5	6 m
$\Delta D =$	43	25,1	22,8	21,8	21,4	21,1 % von D .

Die Vergrößerungen der Belastungen durch die Gegengewichte können demnach betragen:

- bei den Gurtungen bis zu 28%, im Mittel 10% bis 12%,
- bei den Wandstäben bis zu 20%, im Mittel 10%,
- bei den Querträgern bis zu 43%.

Je kleiner die Brücken bzw. bei den Querträgern die Abstände a sind, desto ungünstiger ist die Wirkung der Gegengewichte.

d) Die Stosfwirkungen der bewegten Lasten.

Bei den Eisenbahnbrücken werden lotrecht gerichtete Stöße hauptsächlich durch Mängel der Bahn und der Fahrzeuge hervorgerufen: durch Schienenstöße in der Bahn

und unrunde Radbandagen (bei Bremsrädern). Bei Strafsenbrücken findet die Belastung durch die Tritte der Menschen und Tiere stoßweise statt; bei den Fuhrwerken werden Stöße durch Mängel der Fahrbahn erzeugt — das Pflaster, schlechte Schotterbahn u. s. w. Die beim Stoße verloren gehende lebendige Kraft verwandelt sich zum Teil in Arbeit, welche von den Federn der Fahrzeuge und von der Brückenkonstruktion aufgenommen wird. Es ist sehr schwierig zu ermitteln, wie groß der letztere Teil der Arbeit ist, und wie groß wiederum von diesem derjenige Teil, welcher die Spannungen der einzelnen Trägereile vergrößert, Formänderungen und Schwingungen erzeugt. Je kleiner dieser letztere Teil der lebendigen Kraft ist, desto besser für das Bauwerk. Um diesen Teil möglichst zu verringern, beseitige man zunächst die Ursache der Stöße so viel wie möglich: man Sorge für gute Lage des Gleises, besonders für sorgfältigste Instandhaltung der Schienenstöße³²⁾; bei kleinen Brücken vermeide man Schienenstöße auf den Brücken, endlich widme man dem Übergange vom Damme auf den Überbau peinliche Sorgfalt, sodafs Dammanschluss und Überbau stets gleiche Höhenlage haben. Auch bei den Strafsenbrücken halte man die Fahrbahn stets in gutem Zustande; am besten ist Asphaltfahrbahn. Da aber die Stöße nie ganz vermieden werden können, so nehme man einen möglichst großen Teil der schädlichen lebendigen Kraft des Stoßes durch elastische Körper auf, welche zwischen Fahrbahn und Tragkonstruktion eingeschoben werden. Solche Zwischenkörper sind u. a. Holzquerschwellen auf den Eisenträgern; sehr zu empfehlen ist ferner ein vollständiges Schotterbett als Zwischenkörper auf eiserner Fahrbahntafel (Buckelplatten, Belageisen, Tonnenblechen u. dergl.). Strafsenbrücken erhalten zweckmäsig Holzpflaster. Der schliesslich verbleibende Rest an lebendiger Kraft wird desto weniger schädlich sein, je größer die gestoßene Masse ist. Es scheint, dafs die Wirkung der Stoßkräfte nicht weit reicht — doch ist diese Frage noch ganz ungeklärt: jedenfalls ist es gut, die zunächst getroffenen Teile, in erster Linie Fahrbahnträger und Querträger, aber auch die Hauptträger kräftig und massig herzustellen. Für Fahrbahnträger sind Vollträger, besonders Walzbalken sehr zu empfehlen; die früher für die Schwellenträger gern gewählten Fachwerkträger (Netzwerke, bei den älteren Schwedler'schen Brücken sehr oft ausgeführt) sind deshalb zu vermeiden. Melan hat in der Arbeit, auf welche schon mehrfach Bezug genommen ist, versucht, die Stoßwirkungen durch eine Näherungsrechnung zu bestimmen. Mit der willkürlichen Annahme, dafs die relative Spannungsänderung in allen vom Stoße getroffenen Teilen gleich groß ist und mittels einer Reihe von Schätzungen hat er folgende Werte μ erhalten, für das Verhältnis der Spannungserhöhung ΔS infolge der Stoßwirkung gegenüber derjenigen Spannung S_p , welche durch die ohne Stoß wirkende Verkehrslast auftritt. Es ist also:

$$\mu = \frac{\Delta S}{S_p}.$$

Für die Stützweite L wird erhalten:

$L =$	1	2	5	10	15	20	30	40	80	120 m
$\mu =$	0,72	0,415	0,152	0,08	0,068	0,06	0,052	0,048	0,045	0,044.

Dabei ist für $L > 10$ angenommen, dafs sich die lebendige Kraft des Stoßes nicht der ganzen Brücke, sondern nur einem 10 m langen Teile der Brücke mitteile.

³²⁾ Weyrich. Über dynamische Spannungen in Eisenbahnbrücken. Deutsche Bauz. 1889, S. 348 u. f. Gut angezogene Lascenschrauben an den Stößen vermindern die dynamischen Stöße wesentlich.

e) Gesamte dynamische Wirkung der bewegten Lasten.

Die vorstehend aufgeführten Einzelwirkungen, welche hervorgerufen werden:

- a) durch die Schwingungen infolge der Geschwindigkeit c der Last,
- b) durch die Krümmung der Bahnlinie,
- c) durch die Gegengewichte,
- d) durch die Stosswirkungen,

hat Melan zusammengefaßt und schlägt vor, die prozentuale Vergrößerung der Spannungen, welche eine Folge der dynamischen Wirkung der Verkehrslasten ist, durch die Formel auszudrücken: für Hauptbahnen:

$$100 \varphi = 14 + \frac{800}{L + 10} \dots \dots \dots 24.$$

L ist die Stützweite in Metern. Wenn es sich um Berechnung von Gitterstäben (bezw. der Blechwand) handelt, so ist statt L die Länge l einzuführen, welche als belastet für die Berechnung des fraglichen Stabes (bezw. Querschnittes) angenommen werden muß.

Man erhält für:

$L = 2$	4	5	10	15	20	30	40	80	120 m
100 $\varphi = 80$	71	67	54	44	41	34	30	23	20 %.

Um die dynamischen Einwirkungen der Verkehrsbelastung zu berücksichtigen, würde also die Verkehrslast mit $(1 + \varphi)$ multipliziert in die Rechnung einzuführen sein. Man kann φ als den Stosskoeffizienten oder Stofsbeiwert bezeichnen.

Für Nebenbahnen kann man wegen der geringeren Geschwindigkeit der Züge setzen:

$$100 \varphi = 10 + \frac{600}{L + 10} \dots \dots \dots 25.$$

Bei Strafsenbrücken spielen nur die unter d. vorgeführten Umstände eine Rolle, da die Geschwindigkeit der Lasten verhältnismäßig klein ist. Die Unebenheiten der Bahn sind hier hauptsächlich maßgebend, was rechnerisch kaum verfolgt werden kann. Man wird hier je nach den Umständen $\varphi = 0,2$ bis $0,1$ setzen können.

3. Schwingungsdauer der Brücke. Schwingungsimpulse.³⁵⁾

Tritt infolge einer Belastung Schwingung der Brückenbalken ein, so ist die Schwingungsdauer von der Belastung und der Brückenkonstruktion abhängig: der Brücke ist eine gewisse Schwingungsdauer, bezw. eine gewisse Zahl von Schwingungen in der Zeiteinheit eigentümlich. Wenn eine schwingende Brücke einen neuen Schwingungsanstofs erhält, nach der Zeit einer Schwingung oder zweier Schwingungen u. s. w., so wird die Schwingungsweite vergrößert. Bei häufiger Wiederholung der Schwingungsanstöße in den angegebenen Zeitzwischenräumen kann eine bedeutende Vergrößerung der Schwingungsweite und damit eine Gefährdung der Brücke eintreten. Andererseits wird der neue Schwingungsanstofs die vorhandenen Schwingungen verkleinern, bezw. vernichten, wenn er nach der Zeit einer halben Schwingung eintritt, weil alsdann Wellenberg und Wellenthal der Schwingung zusammentreffen. Ist also die der Brücke eigentümliche Minuten-Schwingungszahl = n , so dürfen wohl $2 n$ Schwingungsanstöße in der Minute eintreten, nicht aber n , oder $\frac{n}{2}, \frac{n}{3} \dots$. Die einer Brücke eigentümliche

³⁵⁾ Steiner. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1892, S. 113.

Schwingungszeit kann man bei bestimmter Belastung angenähert berechnen, ebenso die Zahl der Schwingungsanstöße durch die Gegengewichte und die Schienenstöße; daraus findet sich dann diejenige Zuggeschwindigkeit, welche für eine bestimmte Eisenbrücke besonders gefährlich ist.

Für einen gewichtslos angenommenen Balken konstanten Querschnittes, von der Stützweite L , welcher in der Mitte seiner Länge mit dem Gewicht P belastet wird, sei die Dauer einer ganzen Schwingung (hin und zurück) gerechnet T ; es sei ferner y_0 die Senkung des Lastpunktes für ruhende Last. Dann ist:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{g}}$$

Denn die Dauer t einer Schwingung hin oder zurück ist: $t = \frac{\pi}{\sqrt{q}}$, falls q die Schwingungsbeschleunigung im Abstände 1 vom Schwingungsmittelpunkt bezeichnet (Ritter. Techn. Mech., VII. Aufl., S. 103/104). Für irgend eine Senkung $y = y_0 + \eta$, in welcher Gleichung η positiv oder negativ genommen werden kann, sei die elastische Gegenkraft W_y . Dann ist offenbar $W_{y_0} = P$ und $W_y : W_{y_0} = y : y_0$, also: $W_y = P \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)$. Die der Bewegung entgegenwirkende (negativ beschleunigende) Kraft ist also $Q = W_y - P = \frac{P \cdot \eta}{y_0}$; im Abstände 1 vom Schwingungsmittelpunkte, d. h. für $\eta = 1$, ist: $Q_1 = \frac{P}{y_0}$ und die zugehörige, oben mit q bezeichnete Schwingungsbeschleunigung: $q = \frac{P}{m y_0}$ (m ist die schwingende Masse).

Bei Vernachlässigung der schwingenden Masse des Balkens ist: $m = \frac{P}{g}$, also $q = \frac{g}{y_0}$, mithin $t = \pi \sqrt{\frac{y_0}{g}}$ und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{g}} \dots \dots \dots 26.$$

Für gleichmäßig über den ganzen Balken verteilte Last erhält man genügend genau:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{2g}}$$

wo y_0 die Durchbiegung ist, welche eine der gesamten Balkenbelastung gleiche Last P in der Balkenmitte ruhend ebenda hervorruft. Dieses Ergebnis findet man wie folgt³⁴⁾: Nimmt man zunächst an, daß zwei gleiche Lasten D symmetrisch zur Trägermitte ruhend je am Lastpunkte die Durchbiegung u erzeugen

(Fig. 19, S. 47, rechts), so ist wie oben $T = 2\pi \sqrt{\frac{u}{g}}$. Tritt an die Stelle von D die Last $p dx$, so bleibt der Ausdruck derselbe, nur ist dann das nunmehr auftretende u einzuführen. Reicht die Last p für die

Längeneinheit jederseits vom Auflager bis zur Mitte, so ist (näherungsweise): $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma(u)}{g}}$. Für

vollwandige Balken kann man bei Vernachlässigung der durch die Schubspannungen bewirkten Formänderungen für die symmetrisch im Abstände x von den Auflagern liegenden Lasten D setzen:

$$u = \frac{D x^2}{EJ} \left(\frac{L}{2} - \frac{2}{3} x \right);$$

bei gleichmäßig über den ganzen Balken verteilter Last p wird: $\Sigma(u) = \frac{p L^4}{96 EJ}$ und wenn man die

ganze Belastung $p L = P_1$ setzt: $\Sigma(u) = \frac{P_1 L^3}{96 EJ}$.

Es ist demnach: $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{P_1 L^3}{96 EJ \cdot g}}$.

Wenn Einzellast P_1 in der Mitte liegt, so ist die Senkung daselbst: $\delta = \frac{P_1 L^3}{48 EJ}$; das ist der

Wert, welcher in Gleichung 26 mit y_0 bezeichnet war. In diesem Falle würde $T = 2\pi \sqrt{\frac{P_1 L^3}{48 EJ \cdot g}}$.

Es ist also: $\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{48}{96}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, oder: $T_1 = \frac{T}{\sqrt{2}}$, d. h. $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{2g}}$.

³⁴⁾ Engesser. Über die Schwingungsdauer eiserner Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1892, S. 386.

Aus der Schwingungszeit T ergibt sich die Zahl N der Schwingungen in der Sekunde: $N = \frac{1}{T}$.
 Für einen Balken auf zwei Stützen mit Eigengewicht q und Verkehrslast p f. d. lfd. m und der Stützweite L ist, da $P_1 = (p + q) L$ ist,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(p + q) L^4}{96 E J \cdot g}}$$

Nimmt man mit den üblichen Bezeichnungen: J für das in Betracht kommende Trägheitsmoment des Querschnittes, E für die Elastizitätsziffer, k für die zulässige Inanspruchnahme auf das Quadratcentimeter, h für die Trägerhöhe an:

$$\frac{J}{h} = \frac{M_{\text{mitte}}}{k} = \frac{(p + q) L^2}{8 k}$$

so ist:

$$J = \frac{h}{16 k} (p + q) L^2$$

und

$$T_1 = 2\pi L \cdot \sqrt{\frac{k}{6 E g h}} \quad \dots \dots \dots 27.$$

Mit $h = \frac{L}{10}$, $k = 800 \text{ kg/qcm}$, $E = 2000000 \text{ kg/qcm}$, $g = 9,81 \text{ m}$ wird:

$$T_1 = \frac{\sqrt{L}}{19,31} \quad (L \text{ in Metern}),$$

$$N_1 = \frac{19,31}{\sqrt{L}}$$

Bei unbelasteter Brücke ist $M_{\text{mitte}} = \frac{q L^2}{8}$ und man erhält

$$T_0 = 2 L \pi \sqrt{\frac{k}{6 E g h}} \sqrt{\frac{q}{p + q}}, \quad \dots \dots \dots 28.$$

mithin $\frac{T_0}{T_1} = \sqrt{\frac{q}{p + q}}$,

$$\frac{N_0}{N_1} = \sqrt{1 + \frac{p}{q}}$$

Es ist also gefunden:

Für vollbelastete Brücke:

$$\left. \begin{aligned} \text{Schwingungsdauer: } T_1 &= 2\pi L \sqrt{\frac{k}{6 E g h}} \\ \text{bzw. } T_1 &= \frac{\sqrt{L}}{19,31} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots 29.$$

Schwingungszahl in der Sekunde: $N_1 = \frac{19,31}{\sqrt{L}}$.

Für unbelastete Brücke:

$$\left. \begin{aligned} \text{Schwingungsdauer: } T_0 &= 2 L \pi \sqrt{\frac{k}{6 E g h}} \sqrt{\frac{q}{p + q}} \\ \text{bzw. } T_0 &= T_1 \sqrt{\frac{q}{q + p}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots 30.$$

Schwingungszahl in der Sekunde: $N_0 = N_1 \sqrt{1 + \frac{p}{q}}$.

Steiner erhält für verschiedene Stützweiten folgende Schwingungszahlen N_1 bzw. N_0 :

Stützweite L	= 10	20	40	60	80	100 m
Vollbelastete Brücke N_1	= 6,1	4,3	3,1	2,5	2,2	1,9
Unbelastete Brücke N_0	= 15,3	8,9	5,4	3,9	3,1	2,6

Wenn die der Brücke eigentümliche Schwingungszeit annähernd mit dem Zeitraum zwischen zwei Anstößen (Impulsen) übereinstimmt, so kann eine oftmalige Wiederholung des Impulses bedeutende Vergrößerung der Schwingungen hervorrufen. Bei jeder Umdrehung einer Lokomotivachse erfolgt durch die Gegengewichte ein Impuls; man kann nun leicht ausrechnen, wie viel Umdrehungen N pro Sekunde, also wie viel Impulse bei den verschiedenen Geschwindigkeiten pro Sekunde auftreten. Sei die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde = V , der Triebbraddurchmesser in Metern = d , so ist:

$$N = \frac{V \cdot 1000}{d \cdot \pi \cdot 3600} = 0,0885 \frac{V}{d}$$

Für $V =$		20	40	60	80 km/Std.
und $d = \left\{ \begin{array}{l} 1,2 \text{ m} \\ 1,5 \text{ m} \\ 1,8 \text{ m} \end{array} \right\}$	ist $N \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \\ 1,2 \\ 1,0 \end{array} \right\}$	1,5	3,0	4,4	5,9
		1,2	2,4	3,5	4,7
		1,0	2,0	3,0	3,9.

Bei Brücken von 40 m Stützweite ist die Anzahl der Schwingungen belasteter Brücken $N = 3,1$; bei $d = 1,2 \text{ m}$ ist bei 80 km/Std. Geschwindigkeit die Zahl der Impulse pro Sekunde = 5,9, d. h. nahezu doppelt so groß, wie die Zahl der Schwingungen, also günstig, die Fahrtgeschwindigkeit $V = 40$ hat 3,0 Schwingungen zur Folge bei $d = 1,2$, ist also sehr ungünstig. — Nach Steiner ist es für das Auftreten der Schwingung nahezu gleichgültig, wo der Impuls am Träger erfolgt. Weitere Impulse erfolgen durch das Überfahren von Schienenlücken an den Schienenstößen. Jede Lokomotivachse erneuert den Impuls. Ist der Abstand der Achsen gleich a , die Geschwindigkeit des Zuges (wie oben) = $V \text{ km/Std.}$, so ist die Zahl der Impulse hierdurch:

$$N'' = \frac{1000 \cdot V}{3600 \cdot a}.$$

Es wird demnach die Zahl der Impulse pro Sekunde (so lange Triebräder mit Abstand a überfahren):

$V =$		20	40	60	80 km/Std.
$a = \left\{ \begin{array}{l} 1,2 \text{ m} \\ 1,5 \text{ m} \\ 1,8 \text{ m} \end{array} \right\}$	$N'' = \left\{ \begin{array}{l} 4,64 \\ 3,71 \\ 3,08 \end{array} \right\}$	4,64	9,28	13,92	18,56
		3,71	7,42	11,12	14,83
		3,08	6,17	9,26	12,35.

Die Wiederholung der Lastimpulse kann unter Umständen bedeutende Vergrößerung der Schwingungen und damit entsprechende Vergrößerung der Spannungen hervorrufen. Beispiele sind besonders auf Hängebrücken und Straßenbrücken beobachtet, aber auch bei gewöhnlichen Balkenbrücken.

Bei einer Straßenbrücke bei Pontoise³⁵⁾ stellten sich jedesmal erhebliche Schwingungen ein, wenn ein Fuhrwerk im Trabe die Brücke überfuhr; die Schwingungen schienen bei leichtem und schwerem Fuhrwerk gleich stark. Versuche ergaben, daß die Schwingungsdauer der Brücke (von 37,3 m Stützweite) etwas weniger als $\frac{1}{3}$ Sekunde betrug, unabhängig von der Größe der Einwirkung. Ein Pferd macht in kleinem Trabe etwas weniger, bei schnellerem Gange etwas mehr als drei Schritte in der Sekunde. Die Zahl der sekundlichen Einwirkungen stimmte also nahezu mit der Schwingungszahl der Brücke überein. Bei den weiteren Versuchen ergab sich Vergrößerung der Durchbiegung bis zu einer bestimmten Größe, wenn die Brücke mehr und mehr Stöße vom Pferdehuf erhielt. Bei schnellerer Gangart vergrößerten sich die Durchbiegungen nicht; auch wenn mehrere Fuhrwerke sich gleichzeitig über die Brücke bewegten, ohne daß die Gangart der Pferde übereinstimmte, hoben sich die Schwingungen ganz oder teilweise auf. Es ist also von Interesse, für eine Brücke wenigstens annähernd die sekundliche Schwingungszahl zu kennen. Bei Versuchen an der Straßenbrücke bei Beaumont vergrößerte sich die Durchbiegung von 2,6 mm auf 9 mm bei nur fünf Schritten dreier Pferde.³⁶⁾

Im allgemeinen ist jedoch die Gefährdung der Brücken durch häufig wiederholte Lastimpulse nicht groß³⁷⁾: dieselben treten meist unregelmäßig ein oder stimmen zeitlich nicht zusammen und wirken nicht genügend häufig und stark auf die Brücke. Zudem treten hemmende Einflüsse auf: die Reibungskräfte der Auflager, die Formänderungsarbeit, auch der Luftwiderstand. Wenn früher Hängebrücken durch stets größer werdende Schwingungen bei wiederholten Lastimpulsen eingestürzt sind (unter taktmäßig marschierenden Menschenmassen), so waren die Überbauten unvollkommen ver-

³⁵⁾ Ann. des ponts et chaussées 1892, II. Heft 45. — Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 272.

³⁶⁾ Man vergl. auch: Köpcke. Über die Beseitigung der Schwankungen an einer Hängebrücke. Deutsche Bauz. 1885, S. 163.

³⁷⁾ Engesser. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen, Band 2, S. 170.

steift. Solche Träger kommen heute nicht mehr zur Ausführung. Die wirklich auftretenden, sich verstärkenden Schwingungen müssen durch zweckmäßige Konstruktion vermindert werden, worüber auf das auf S. 52 Gesagte hingewiesen wird.

§ 14. Verschiedene angreifende Kräfte. Aufser den vorgeführten äusseren Kräften ist noch eine weitere Gruppe und zwar von wagerechten Kräften zu erwähnen, welche nicht aufser Acht gelassen werden dürfen, da sie unter Umständen das Bauwerk gefährden und durch zweckmäßige Konstruktion unschädlich gemacht werden können.

Diese Gruppe umfasst:

- a) Die Reibungswiderstände an den Auflagern,
- b) die von den überfahrenden Zügen, gebremsten und nicht gebremsten, auf die Überbauten und von diesen auf die Pfeiler übertragenen Kräfte.

Die erwähnten Kräfte wirken teils in der Richtung der Brückenachse, teils quer zu derselben.

a) Die Reibungskräfte an den Auflagern.

Infolge der Temperaturveränderungen findet eine Verlängerung bzw. Verkürzung (positive oder negative Verlängerung) der Hauptträger statt, welcher durch teilweise Anordnung beweglicher Lager Rechnung getragen wird. Bei den Trägern, welche auf zwei Stützpunkten frei gelagert sind, soll stets der eine Stützpunkt beweglich sein, d. h. dem Träger den für die Verlängerung nötigen Spielraum gestatten. Dem Eintreten der beabsichtigten Bewegung wirkt aber der Reibungswiderstand am beweglichen Auflager entgegen; erst wenn dieser überwunden ist, findet die Bewegung statt. Daraus folgt, dass in der Verbindungslinie beider Auflager eine Kraft H wirken kann, welche ungünstigstenfalls gleich dem Reibungswiderstande am beweglichen Auflager ist. Nennt man den Reibungskoeffizienten f , den grössten in Betracht zu ziehenden Auflagerdruck A , so wird sein:

$$H = f A \text{ und, da } A_{\max} = \frac{(q + p)L}{2} \text{ ist,}$$

$$H_{\max} = f \frac{(q + p)L}{2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet $q + p$ die gesamte Belastung f. d. lfd. m des Trägers, also das Eigengewicht und die Verkehrslast, wobei der ungünstigste Fall zu Grunde gelegt ist, dass die letztere die ganze Brücke belaste. Es kann zweifelhaft sein, ob es notwendig ist, den der voll belasteten Brücke entsprechenden Auflagerdruck einzuführen, da die Zeit der Belastung durch Verkehrslast meistens so kurz ist, dass bedeutende Temperaturunterschiede während derselben kaum eintreten werden; immerhin ist es nicht undenkbar, dass diese grosse Kraft H einmal auftritt. Ausserdem macht die Rücksicht auf die weiter zu betrachtenden Verschiebungen des Auflagers ohnehin die Zugrundelegung des Wertes $A = (p + q) \frac{L}{2}$ nötig.

Bei breiten Brücken verwendet man neuerdings auch querverschiebliche Auflagerungen; dadurch wird dem Umstande Rechnung getragen, dass auch die Querträger ihre Länge bei Temperaturänderungen vergrössern bzw. verkleinern. Gewöhnlich ordnet man ein festes Auflager, ein nur längs- und ein nur querverschiebliches Lager an und das vierte versieht man mit Längs- und Querverschieblichkeit. Bei den nur in der Quere verschieblichen Lagern ermittelt sich die Grösse der Reibungskraft, welche hier quer zur Brückenachse wirkt, ganz entsprechend der vorstehenden Entwicklung für H_{\max} ; bei den längs- und querverschieblichen Lagern hängt die Grösse der bzw. nach der

Länge bzw. Quere wirkenden Reibungskräfte von der Lagerkonstruktion ab. Falls die beiden Verschiebungen in verschiedenen, übereinander liegenden Ebenen stattfinden und der in Betracht kommende Auflagerdruck = B , die Reibungsziffern bzw. f , und $f_{,,}$ in den beiden verschiedenen Ebenen sind, so können die betreffenden Reibungskräfte die Größtwerte annehmen:

$$H_1 = f \cdot B \text{ und } H_{,,} = f_{,,} \cdot B.$$

Die Gesamtreibung ist dann:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_{,,}^2} = B \sqrt{f^2 + f_{,,}^2}.$$

Der Winkel β von H mit der Brückenachse ist zu finden aus:

$$\tan \beta = \frac{f_{,,}}{f}.$$

Findet die Verschiebung in einer und derselben Ebene statt, so ist mit der Reibungsziffer f wiederum $H = f B$; die Richtung von H ist derjenigen der gesamten Verschiebung entgegen gerichtet.

Außer durch die Temperaturveränderungen wird auch durch die Belastungen der Träger Verschiebung der Trägerenden auf den beweglichen Auflagern erstrebt. Die Belastung des Trägers ruft Durchbiegung hervor, welche eine Verlängerung der unteren Trägergurtung verursacht; die Endquerschnitte eines der Einfachheit halber vorausgesetzten Parallelträgers bilden alsdann mit der Lotrechten Winkel, die für eine bestimmte Belastung ermittelt werden können. Seien diese Winkel χ_0 , so ist für volle gleichmäßige Belastung des ganzen Trägers mit der Last $(q + p)$ auf die Längeneinheit:

$$\tan \chi_0 = \frac{(q + p) L^3}{24 E J},$$

demnach hat die Auflagermitte auf jedem Stützpunkt das Bestreben, um das Stück $\frac{h}{2} \tan \chi_0 = \frac{(q + p) L^3 h}{48 E J}$ nach aufsen zu gleiten; h ist die Höhe des Trägers am Ende, J das konstant angenommene Trägheitsmoment des ganzen Trägerquerschnittes für die wagerechte Schwerpunktsachse. Wird das eine Auflager fest mit dem Träger verbunden, so muß das andere um das ganze Stück $\frac{2h}{2} \tan \chi_0 = \frac{(q + p) L^3 h}{24 E J}$ nach aufsen gleiten können. Auch diesem Gleiten setzt sich der Reibungswiderstand am Auflager entgegen, welcher jedoch nicht größer werden kann, als $H = \frac{f(q + p)L}{2}$, sodafs also für H dieser Größtwert einzuführen ist.

Wenn das bewegliche Lager ein sogenanntes Gleitlager ist, so ist die gleitende Reibung zu überwinden. Für Eisen auf Eisen ist die Reibungsziffer f im Mittel = 0,2; es empfiehlt sich aber, f lieber 0,25 bis 0,3 anzunehmen, weil durch Schmutz, Staub u. s. w., welchen Einflüssen ein Brückenlager stets ausgesetzt ist, die Reibungsziffer wesentlich erhöht wird.

Die Kraft H ist demnach von $f(q + p)$ und L abhängig; bei größeren Brücken wächst $(q + p)$ mit L , sodafs H bei diesen sehr große Werte annehmen kann. Werden für eingleisige Eisenbahnbrücken die Werte eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} q &= 630 + 35 L, \\ p &= \left(4200 + \frac{23000}{L}\right) \text{ kg für } L = 10 \text{ bis } L = 50 \text{ m und} \\ p &= \left(3100 + \frac{80000}{L}\right) \text{ kg für } L > 50 \text{ m} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{alles für das} \\ \text{lfd. m Gleis,} \end{array}$$

so ergibt sich für einen Träger, falls (günstig gerechnet) $f = 0,2$ ist:

für:	$L =$	10	20	30	50	80	100 m
	$q =$	980	1330	1680	2380	3430	4130 kg
	$p =$	6500	5350	4970	4860	4100	3900 kg
	$(q + p) \frac{L}{4} =$	18700	33400	49875	90500	150600	200750 kg
	$H =$	3,74	6,68	9,975	18,1	30,12	40,15 t.

Die Kräfte H sind bei größeren Brücken so groß, daß eine Verringerung unbedingt geboten ist; weder $(q + p)$ noch L kann aber verringert werden. Dagegen kann die Reibungsziffer f erheblich verkleinert werden, wenn statt der gleitenden Reibung die rollende Reibung eingeführt, d. h. wenn das bewegliche Lager als Rollenlager hergestellt wird.

Der Beiwert der rollenden Reibung³⁸⁾ ϑ ist umgekehrt proportional dem Durchmesser d des rollenden Körpers, sodaß man setzen kann: $\vartheta = \frac{2\alpha}{d}$. Für Eisen auf Eisen kann man nach Ritter annehmen: $\alpha = 0,0005$ m, mithin $\vartheta = \frac{0,001}{d}$, wo d in Metern einzusetzen ist. Zu beachten ist jedoch, daß bei den Rollenlagern die Rollen zwischen zwei Platten laufen, mithin der Widerstand hier zu setzen ist:

$$W = 2 \cdot \vartheta A = \frac{0,002 A}{d} = \chi A.$$

Man erhält dann für:

$d =$	0,1	0,15	0,2 m
$W =$	0,02	0,013	0,01 A.

Der wirkliche Widerstand der rollenden Reibung wird in den meisten Fällen, weil es nicht möglich ist, Staub u. s. w. fernzuhalten, wesentlich größer sein, als hier ermittelt: Nimmt man χ deshalb im Mittel gleich $0,03^{39)}$ und zwar für kleine und große Weiten gleich groß an, so erhält man folgende Größtwerte von H :

Für	$L =$	20	30	50	80	100 m
$A =$	$\frac{(q + p)L}{4} =$	33400	49875	90500	150600	200750 kg
$H = \chi A =$		1,0	1,5	2,7	4,5	6,0 t.

Bei den großen Stützweiten ist eine weitere Verringerung durch Vergrößerung des Rollendurchmessers d erreichbar (Stelzen- oder Flachwalzenlager).

Auf die Kräfte H , welche sowohl als Zug wie als Druck wirken können, muß Rücksicht genommen werden. Wenn eine gerade Gurtung vorhanden ist, welche die Auflagerpunkte verbindet, so werden die Kräfte H in dieser wirken. Bei Trägern mit zwei gekrümmten Gurtungen findet freilich eine Bewegung infolge der Belastung nicht statt, die Verschiebung des einen Auflagers durch Temperaturveränderungen tritt jedoch auch hier auf. Die Kräfte H erzeugen dann in beiden Gurtungen Druck bzw. Zug, in den Pfosten Zug bzw. Druck; diese Inanspruchnahmen sind leicht mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes (vergl. Kap. VIII) zu ermitteln.

b) Die von den überfahrenden Zügen auf die Überbauten übertragenen Kräfte. Bremskräfte.

Von großer Wichtigkeit ist zunächst die zwischen den Triebrädern der Lokomotive und den Schienen auftretende Kraft, welche gewöhnlich (aber mit Unrecht) Adhäsion

³⁸⁾ Ritter. Technische Mechanik.

³⁹⁾ Bei der Hacker-Brücke in München mit 29 m Stützweite (Pendeldurchmesser $d = 0,16$ m) hat man $\chi = 0,05$ angenommen, um den denkbar ungünstigsten Verhältnissen Rechnung zu tragen. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1893.

genannt wird. Diese Kraft ermöglicht die Fortbewegung des Zuges auf dem Gleise und kann nie größer werden, als die zwischen Schiene und Rad stattfindende Reibung; wird die betreffende Reibungsziffer f , der Gesamtdruck auf die Triebräder der Lokomotive Q genannt, so ist diese Kraft höchstens:

$$W = f Q.$$

Der Beiwert f hat je nach der Witterung sehr verschiedene Größe; für mittlere Witterungsverhältnisse ist $f = 0,167$; man kann hier:

$$f = 0,25$$

einführen. Werden die Belastungen der Triebachsen zu je 13 t angenommen, so ergibt sich für alle drei Achsen die Gesamtkraft:

$$W = 3 \cdot 13 \cdot 0,25 = 9,75 \text{ t, dafür rund } 10 \text{ t.}$$

An jeder Schiene wirkt die Hälfte dieser Kraft. Die Richtung derselben ist der Fahrriichtung entgegengesetzt; man kann nicht darauf rechnen, daß sie durch die Schienenlaschen im Gleise unschädlich in die Bettung des Oberbaues geleitet wird, sondern wird der Sicherheit halber annehmen müssen, daß sie die Brücke beansprucht und erst an den festen Auflagern durch den Gegendruck der Pfeiler aufgehoben wird.

Eine der vorigen ganz entsprechende Kraft ist diejenige, welche bei Zahnradbahnen von dem Zahnrad der Lokomotive auf die längs der Strecke angeordnete Zahnstange und von dieser auf die Brücke übertragen wird; für einen bestimmten Entwurf bei einer zu erbauenden Bahn ist die Größe dieser Kraft stets bekannt; sie kann etwa zu 6,0 t angenommen werden.⁴⁰⁾

Auch von den auf dem Gleise rollenden Rädern, mögen sie frei im Zuge laufen oder gebremst sein, oder infolge des Zusammenhanges mit den gebremsten Rädern eine abnehmende Geschwindigkeit haben, werden Kräfte auf die Brücke übertragen, welche hier gleichfalls betrachtet werden müssen.⁴¹⁾

Für Brücken in Steigungen kommt eine weitere Kraft hinzu. Ist der Neigungswinkel gegen die Wagerechte α , so wirkt in der Richtung der Fahrbahn eine Seitenkraft der Belastung. Die gesamte Brückenlast ist genügend genau bei den geringen hier in Betracht zu ziehenden Werten von α :

$$G = (q + p) L.$$

In der Richtung der Fahrbahn wirkt abwärts:

$$G \sin \alpha = (q + p) L \sin \alpha.$$

Diese Kraft wird am festen Auflager auf den Pfeiler übertragen; sie muß durch die Konstruktion unschädlich gemacht werden.

a. Laufachse, welche im Zuge mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitet.

Wäre die Reibung zwischen den Rädern und der Schiene nicht vorhanden, so würde kein Rollen, sondern Gleiten stattfinden; infolge der Reibung entsteht eine am Umfange des Rades der Bewegungsrichtung entgegenwirkende Kraft F , während nach dem Satz von Wirkung und Gegenwirkung eine gleich große Kraft auf die Schiene

⁴⁰⁾ Die Grenzen der Zugbelastung u. s. w. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1879, S. 161 u. ff.

⁴¹⁾ Ferron. Theorie der Bremsen. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1878, S. 141 u. 204; 1879, S. 135. — Huth. Inanspruchnahme eiserner Eisenbahnbrücken durch das Bremsen der Züge. Deutsche Bauz. 1885, S. 334. — Über die Wirkung der Bremsen auf Eisenbahnzüge. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1879, S. 152 u. 193.

in der Bewegungsrichtung des Zuges ausgeübt wird. Diese Kraft F kann nie größer werden, als der Reibungswiderstand zwischen Rad und Schiene; sie muß durch die Brückenträger auf die festen Auflager übertragen werden; liegen dieselben auf derjenigen Seite der Brücke, nach welcher sich die Achse hinbewegt, so hat F im Träger einen Druck zur Folge; liegt das feste Brückenlager dagegen auf der Seite des Trägers, von welcher die Achse kommt, so entsteht im Träger ein Zug $= F$.

Wenn die Bewegung der Achse eine gleichförmig fortschreitende ist, so muß das Moment von F für die Drehachse gleich und entgegengesetzt dem Momente der widerstehenden Kräfte sein, also wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt, gleich der Summe der Momente von Zapfenreibung und rollender Reibung. Bezeichnet man mit

- r den Halbmesser des Rades,
- ρ den Halbmesser des Zapfens,
- Q_1 die gesamte Belastung eines Rades,
- Q_2 die Nutzlast eines Rades,
- ϑ den Beiwert der rollenden Reibung,
- f_1 den Zapfenreibungsbeiwert,

so muß die Größe der Kraft F sich aus der Gleichung ergeben:

$$F r = f_1 Q_2 \rho + Q_1 \vartheta r,$$

also:

$$F = f_1 Q_2 \frac{\rho}{r} + Q_1 \vartheta.$$

Man kann annehmen:

$$\vartheta = \frac{0,0005}{r} \text{ m}, \quad r = 0,5 \text{ m}, \quad f_1 = 0,07, \quad \rho = 0,06 \text{ m},$$

so wird:

$$F = \frac{0,07 \cdot 0,06}{0,5} Q_2 + \frac{0,0005}{0,5} Q_1 = 0,0084 Q_2 + 0,001 Q_1.$$

Bei Güterwagen kann man setzen: $Q_1 = 4000 \text{ kg}$, $Q_2 = 3650 \text{ kg}$, bei Personenwagen: $Q_1 = 3300 \text{ kg}$, $Q_2 = 2950 \text{ kg}$.

Demnach ist für

$$\text{Güterwagen: } F = 34,66 \text{ kg, dafür rund } 35 \text{ kg,}$$

$$\text{Personenwagen: } F = 28,08 \text{ kg, „ „ } 30 \text{ kg.}$$

Jede Güterwagenachse überträgt also auf die Brücke bei gleichförmiger Geschwindigkeit eine in der Richtung des Zuges wirkende Kraft $2 F = 70 \text{ kg}$, jede Personenwagenachse eine Kraft in derselben Richtung: $2 F = 60 \text{ kg}$. Es ist wohl zu beachten, daß diese Kräfte auf die Brücke in der Fahrriichtung wirken, während die von den Triebachsen der Lokomotive ausgeübte Kraft einen der Fahrriichtung entgegengesetzten Sinn hat; daraus folgt, daß die Wirkung dieser Kräfte durch die soeben besprochenen verringert wird. Befindet sich etwa ein Zug von 3 Lokomotivachsen, drei Tenderachsen und 20 Güterwagenachsen auf der Brücke, so wirkt entgegen der Fahrriichtung auf die Brücke, wie oben entwickelt ist, an den Triebrädern $W = 3 \cdot 13000 \cdot 0,25 =$ abgerundet 10000 kg ; in der Fahrriichtung wirkt, wenn der Einfachheit wegen angenommen wird, daß Tender- und Güterwagenachsen gleiche Kräfte ausüben:

$$\Sigma F = 23 \cdot 70 = 1610 \text{ kg};$$

als Mittelkraft von Wund $\Sigma(F)$ bleibt entgegen der Fahrriichtung wirkend:

$$F_1 = 10000 - 1610 = 8390 \text{ kg.}$$

Handelt es sich um die Ermittlung der betreffs der achsialen Kräfte ungünstigsten Belastung, so ist als gefährlichste Belastung diejenige einzuführen, bei welcher eine

bezw. mehrere Lokomotiven auf die Brücke gefahren sind, während die anderen Wagen sich noch nicht auf derselben befinden.

β. Laufachse, welche im Zuge mit gleichförmig verzögerter Geschwindigkeit läuft: Nicht gebremste Achse im gebremsten Zuge.

Bei Aufsuchung der Kräfte, welche von einer solchen Achse auf das Gleis übertragen werden, soll die Annahme gemacht werden, daß die Bewegung vom Beginne des Bremsens an bis zum Stillstande des Zuges gleichförmig verzögert sei. Dann muß auch die Winkelverzögerung ϵ , also auch das Moment, welches ϵ erzeugt, konstant sein, weil $\epsilon = \frac{M}{J}$ ist. Verzögernde Kräfte sind zunächst der Zapfenreibungswiderstand und der Widerstand der rollenden Reibung; beide können gleichfalls als konstant eingeführt werden, ferner eine Kraft F_1 , welche am Radumfang, an der Berührungsstelle von Schiene und Rad angreift und der Drehbewegung des Rades entgegenwirkt. Soll also auch das Moment dieser, an einem konstanten Hebelarme (r) wirkenden Kraft konstant sein, so muß dieselbe ebenfalls unveränderliche Größe behalten.

Es sollen nun bedeuten:

- s den Weg, welchen die Achse vom Beginne des Bremsens an bis zum völligen Stillstande des Zuges noch zurücklegt,
 ω die gleichförmige Winkelgeschwindigkeit
 c die gleichförmige fortschreitende Geschwindigkeit der Achse
 M den Teil der Masse des Zuges, welcher auf die Achse entfällt,
 J das Trägheitsmoment der Achse,

so ist $c = r\omega$, und die während der Vernichtung der Geschwindigkeit c bzw. ω erzeugte lebendige Kraft:

$$L = -\frac{J\omega^2}{2} = -\frac{Mc^2}{2};$$

die während dessen verrichtete mechanische Arbeit ist:

$$A = -F_1 s - Q_1 \vartheta s - f_1 Q_2 \frac{\rho}{r} s.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke ergibt für F_1 die Gleichung:

$$F_1 = \frac{1}{2s} (J\omega^2 + Mc^2) - Q_1 \vartheta - f_1 Q_2 \frac{\rho}{r},$$

$$F_1 = \frac{c^2}{2s} \left(\frac{J}{r^2} + M \right) - Q_1 \vartheta - f_1 Q_2 \frac{\rho}{r}.$$

Sei $Q_1 = 4000 \text{ kg}$ $Q_2 = 3650 \text{ kg}$ $f_1 = 0,07$ $\vartheta = 0,001$,

$\rho = 0,06 \text{ m}$ $r = 0,5 \text{ m}$ $c = 10 \text{ m}$ $s = 150 \text{ m}$,

$J = 8,5$ (bezogen auf Meter und Kilogramm),

$M = \frac{4000}{9,81} = 408$ (auf ein Rad bezogen),

so ergibt sich:

$$F_1 = \frac{100}{300} \left(\frac{8,5}{0,25} + 408 \right) - 0,001 \cdot 4000 - \frac{0,07 \cdot 3650 \cdot 0,06}{0,5} = 112,64,$$

also für die Achse $2 F_1 = 225 \text{ kg}$ (rund).

Wäre $s = 300 \text{ m}$, so würde $F_1 = 43,0 \text{ kg}$, also für die Achse $2 F_1 = 86 \text{ kg}$.

Diese Kraft F_1 wirkt auf den Zug in der Bewegungsrichtung, also auf die Brücke in einer Richtung, welche derjenigen der Bewegung entgegengesetzt ist.

7. Gebremste Achse.

Wird von jedem Bremsklotz auf das Rad ein Druck N übertragen und ferner die Reibungsziffer zwischen Bremsklotz und Rad f genannt, so entsteht im Augenblicke des Bremsens am Radumfang ein Reibungswiderstand $2 f N$. So lange das Rad rollt, wirkt ferner zwischen Schiene und Rad, entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des Zuges, aber das Drehen des Rades befördernd, eine vorläufig noch unbekannte Kraft F . Die Winkelbeschleunigung ε ist dann:

$$\varepsilon = \frac{F r - 2 f N \cdot r - Q_1 \vartheta r - f_1 Q_2 \rho}{J},$$

also:

$$F = \frac{J}{r} \varepsilon + 2 f N + Q_1 \vartheta + f_1 Q_2 \frac{\rho}{r}.$$

Die Kraft F ist also gleich der Summe aus dem Reibungswiderstande an den Bremsklötzen, dem Widerstande der rollenden und Zapfenreibung und $\frac{J}{r} \varepsilon$. ε ist negativ, und wenn wieder gleichförmig verzögerte Bewegung vorausgesetzt wird, so ist die fortschreitende (negative) Beschleunigung:

$$p = r \varepsilon = \frac{c^2}{2 s},$$

$$\varepsilon = \frac{c^2}{2 s r}$$

(c und s haben dieselben Bedeutungen wie oben).

Demnach wird:

$$F = 2 f N + Q_1 \vartheta + f_1 Q_2 \frac{\rho}{r} - \frac{J c^2}{2 s r^2}.$$

$\frac{J c^2}{2 s r^2}$ ist meistens nicht groß, besonders im Vergleich mit dem ersten Gliede; es kann ebenso wie $Q_1 \vartheta$ vielfach vernachlässigt werden.

F kann naturgemäß nie größer werden, als der zwischen Schiene und Rad stattfindende Reibungswiderstand; derselbe tritt auch voll auf, wenn das Rad ganz fest gebremst ist, sodas nicht mehr Rollen, sondern Schleifen stattfindet. Da dieses Festbremsen (unzweckmäßigerweise) vielfach stattfindet, so ist für F der größtmögliche Wert:

$$F = f Q_1$$

einzuführen.

Diese Kraft wirkt auf den Zug der Bewegungsrichtung entgegen; auf das Gleis also auch auf die Brücke in der Richtung, in welcher der Zug fährt. Dieselbe hat ungünstigstenfalls, wenn $f = 0,25$ gesetzt wird, folgende Größen:

An einer Lokomotivachse: $F_L = 2 \cdot 6500 \cdot 0,25 = 3250 \text{ kg},$

an einer Tenderachse: $F_T = 2 \cdot 4500 \cdot 0,25 = 2250 \text{ kg},$

an einer Güterwagenachse: $F_G = 2 \cdot 4000 \cdot 0,25 = 2000 \text{ kg},$

an einer Personenwagenachse: $F_P = 2 \cdot 3300 \cdot 0,25 = 1650 \text{ kg}.$

Litteratur,

die sämtlichen angreifenden Kräfte betreffend.

Laissle u. Schiebler. Der Bau der Brückenträger. 4. Aufl. 1876.

Heinzerling. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte d. Brücken- u. Hochbau-Konstruktionen. Berlin 1876.

Steiner. Über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika. Wien 1878.

Comolli. Les ponts de l'Amérique du Nord. Paris 1879.

- Winkler. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken, I. Heft, 3. Aufl. 1886; II. Heft, 2. Aufl. 1881.
Eiserne Brücken, IV. Heft. Querkonstruktionen. 2. Aufl. 1884.
Résal. Ponts métalliques. Paris 1885.
Waddel. The designing of ordinary iron highway bridges. New-York 1886.

Eigengewichte der Brücken.

- Schwedler. Eigengewicht eiserner Brücken. Zeitschr. f. Bauw. 1861, S. 307, 308.
Schwedler. Gewichte und Kosten verschiedener eiserner Brückenkonstruktionen. Zeitschr. f. Bauw. 1862, S. 300 u. f.
Schwedler. Über Brückenbalkensysteme von 200 bis 400 Fufs Spannweite. Zeitschr. f. Bauw. 1863, S. 115 bis 128.
v. Kaven. Über die Ermittlung des Eigengewichtes u. s. w. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1868, S. 401 u. f.
Albaret. Poids total des ponts métalliques. Ann. des ponts et chaussées 1870, II. S. 565 u. f.
Seefehlner. Tabelle zur Berechnung der Eigengewichte eiserner Brückenkonstruktionen für Bahnen. Budapest 1874.
Müller. Eine Formel für das Gewicht eiserner Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1874, S. 205.
Müller. Balkenbrücken über 200 m Weite. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1874, S. 206.
Engesser. Entwicklung einer Formel für das Eigengewicht schmiedeiserner Bogenbrücken. Zeitschr. f. Bauw. 1877, S. 207.
Engesser. Über das Eigengewicht schmiedeiserner Fachwerksbrücken mit parallelen Gurtungen. Zeitschr. f. Bauw. 1878, S. 203 u. f.
Lewald. Die größeren Kunstbauten auf der Eisenbahnstrecke Nordhausen-Wetzlar. Zeitschr. f. Bauw. 1880, S. 454.
Engesser. Theorie und Berechnung der Bogenfachwerksträger ohne Scheitelgelenk. Berlin 1880, S. 44, 45.
Frühling. Versuche mit verschiedenen Arten von Brückenbelag. Centralbl. d. Bauverw. 1881, S. 164.
Engesser. Eigengewicht von Strafsenbrücken. Zeitschr. f. Bauk. 1881, S. 63.
Gensel. Eigengewichte eiserner Brücken für Sekundärbahnen. Sekundärbahn-Zeitung 1881, S. 3.
Lucas. Gewichte von Blechträgern mit besonderer Anwendung auf schmalspurige Eisenbahnen. Civilingenieur 1882, S. 38 u. f.
Note sur les ponts métalliques du chemin de fer de Grande-Ceinture de Paris. Ann. des ponts et chaussées 1883, I. S. 440 bis 560.
Die Berliner Stadt-Eisenbahn. Zeitschr. f. Bauw. 1885, S. 7 bis 10.
Hoffmann. Materialbedarf für den eisernen Überbau von geraden Strafsenbrücken bis zu Lichtweiten von 10 m. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 333.
Hoffmann. Materialbedarf für den eisernen Oberbau von geraden Strafsenbrücken. Leipzig 1891.
v. Borries. Beitrag zur überschläglichen Gewichtsermittlung eiserner Brücken. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 156.

Verkehrslasten, Brückenverordnungen.

- Rundschreiben des französischen Arbeitsministeriums, betreffend die bei Berechnung der eisernen Brücken anzunehmenden Belastungen u. s. w. Ann. des ponts et chaussées 1877 (Lois, Décrets, Arrêtés etc.), S. 1176 u. f.
Die Fahrzeuge der Sekundärbahnen. Sekundärbahn-Zeitung 1881, S. 197, 206, 237, 247, 262, 281.
H. v. Waldegg. Handbuch für spezielle Eisenbahntechnik. Bd. IV u. V.
Die Berliner Stadt-Eisenbahn. Zeitschr. f. Bauw. 1884, S. 129, 137, 227, 374.
Winkler. Über die Belastungsgleichwerte der Brücken. Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 460 u. f.
Grundzüge für den Bau und Betrieb der Lokal-Eisenbahnen. Beschlossen am 28. bis 30. Juli 1886 in Salzburg.
Verordnung des österreichischen Handelsministeriums vom 15. September 1887. Reichsgesetzblatt 1887, S. 413; Organ f. d. Fortsch. d. Eisenbahnwesens 1891, S. 153; 1893, S. 144; Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 139.
v. Leber. Die neue Brückenverordnung des Österr. K. K. Handelsministeriums vom 15. September 1887. Wien 1888.
Neue Vorschriften über Bau und Unterhaltung eiserner Brücken in Frankreich. Revue générale des chemins de fer 1891, S. 247; Organ f. d. Fortsch. d. Eisenbahnwesens 1892, S. 237; Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 277; Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1892, No. 23; Organ f. d. Fortsch. d. Eisenbahnwesens 1893, S. 156; Ann. des travaux publics 1893, Bd. XIV, S. 32 u. 45.

- Verordnung des Schweizerischen Bundesrats vom 19. Aug. 1892: Berechnung und Prüfung der eisernen Brücken- und Dachstuhl-Konstruktionen auf den Schweiz. Eisenbahnen. Auch als Sonderdruck erschienen. Schweiz. Bauz. 1892, Bd. XX, S. 86; Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1893, S. 159; Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., Bd. XXXVII, S. 159.
- Breuer. Vorschläge zur Verbesserung der Prüfung eiserner Brücken. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1893, S. 15 u. 48.
- Engesser. Verkehrslasten bei neuen Eisenbahnbrücken. Deutsche Bauz. 1894, S. 141; 1898, S. 253.
- Verordnung für die Lieferung von Eisenkonstruktionen zu Brücken und Hochbauten der Kgl. Sächs. Staatseisenbahnen vom Jahre 1895.
- Vorschriften für die Berechnung der eisernen Brücken auf den preussischen Staatsbahnen. Centralbl. d. Bauverw. 1895, S. 485. Sonderdruck, Berlin 1899.
- O. Hauger. Belastung und Berechnung eiserner Brücken. Allg. Bauz. 1896, Heft 4. Auch als Sonderdruck; Sammlung und Besprechung der Vorschriften der einzelnen Staaten.
- Ebert. Über zulässige Beanspruchung von Eisenkonstruktionen. Deutsche Bauz. 1896, S. 13, 24, 35, 47. Auch als Sonderdruck.
- Eiserne Brücken der Kgl. Württembergischen Eisenbahnverwaltung. Deutsche Bauz. 1896, S. 294.

Sonstige Kräfte.

- Berechnung des Einflusses der bewegten Lasten auf die Einbiegung der Eisenbahnbrücken. Zeitschr. f. Bauw. 1862, S. 247. Nach: Renaudot. Étude de l'influence des charges en mouvement etc. Ann. des ponts et chaussées 1861, I. S. 145 bis 204.
- Ferron. Theorie der Bremsen. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1878, S. 141, 204; 1879, S. 135. Über die Wirkung der Bremsen auf Eisenbahnzüge. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens 1879, S. 152 u. 193.
- Englische Vorschläge über die anzunehmende Größe des Winddruckes. Centralbl. d. Bauverw. 1881, S. 211, 212. Winddruck auf Eisenbahnbau-Konstruktionen. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1881, S. 218.
- Am Ende. Über die Wahl der Koeffizienten für Winddruck. Centralbl. d. Bauverw. 1881, S. 259, 260.
- v. Loessl. Studie über aerodynamische Grundformeln an der Hand von Experimenten. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1881, S. 103 bis 113 und S. 131 bis 140. — Techn. Blätter 1899, S. 1.
- Résal. Dynamische Einwirkung der rollenden Last auf eine Brücke. Ann. des ponts et chaussées 1882, II. S. 337 bis 352; 1883, I. S. 277 bis 299; Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 277 u. 580.
- Kinzer. Wirkung des Sturmwindes auf Eisenbahnzüge. Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 545, 546.
- Normaldruck des Windes auf eine gegen den Luftstrom geneigte Ebene. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 203, 204.
- Gerlach. Einige Bemerkungen über den Widerstand, den eine ebene Platte und ein Keil von einer gleichförmig strömenden Flüssigkeit erfährt. Civilingenieur 1885, S. 77 u. f.
- Huth. Inanspruchnahme eiserner Eisenbahnbrücken durch die Bremsen der Züge. Deutsche Bauz. 1885, S. 334.
- Köpcke. Über die Beseitigung der Schwankungen an einer Hängebrücke. Deutsche Bauz. 1885, S. 163.
- Souleyre. Action dynamique des Charges roulantes. Ann. des ponts et chaussées 1889, II. S. 341 bis 441.
- Glaser. Dynamische Wirkungen bewegter Lasten auf eiserne Brücken. Glaser's Ann. f. Gew. u. Bauw. 1891, Bd. 29, S. 113; 1892, Bd. 30, S. 61.
- Dr. Zimmermann. Die Wirkungen bewegter Lasten auf Brücken. Centralbl. d. Bauverw. 1891, S. 448; 1892, S. 159, 199, 215.
- Steiner. Über Metallkonstruktionen der Zukunft. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1892, S. 113.
- Engesser. Über die Schwingungsdauer eiserner Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1892, S. 386.
- Lühning. Wirkung rhythmischer Stöße auf Eisenträger. Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 272.
- Melan. Über die dynamische Wirkung bewegter Last auf Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 293.
- Glaser. Dynamische Wirkungen bewegter Lasten auf eiserne Brücken. Glaser's Ann. f. Gew. u. Bauw. 1894, Bd. 34, S. 56.
- Zschetzsche. Berechnung dynamisch beanspruchter Tragkonstruktionen. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1894, Bd. XXXVIII.
- Dr. Zimmermann. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Centralbl. d. Bauverw. 1896, S. 249, 257, 264. — Dasselbe erweitert als Buch. Berlin 1896.
- Engesser. Über die Angriffe eiserner Balkenbrücken auf Pfeiler und Widerlager. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 341.

B. Der Baustoff und seine Widerstände. Konstruktionselemente.

Von K. K. Hofrat Prof. J. E. Brik.

§ 15. Allgemeines. Aus der Geschichte des Brückenbaues ersieht man, daß die drei Arten des Eisens: Gußeisen, Schweißisen und Flußeisen nacheinander als vorherrschender Baustoff zur Anwendung kamen.

Die ersten eisernen Brücken waren durchaus in Gußeisen ausgeführt. Auf diese erste Periode des Brückenbaues in Eisen folgte eine Übergangszeit, während deren neben dem Gußeisen auch Schmiedeeisen (Schweißisen) — letzteres zur Herstellung der auf Zug beanspruchten Bauglieder — Anwendung fand.

Der große Aufschwung, welchen die Entwicklung des Eisenbahnwesens nahm, namentlich die hierdurch notwendig gewordene Einführung schwerer Lokomotiven, sowie ungünstige Erfahrungen, welche an verschiedenen Orten mit gußeisernen Eisenbahnbrücken gemacht wurden, erschütterten das Vertrauen zu dem Gußeisen als Baustoff für Eisenbahnbrücken und hatten zur Folge, daß das verlässlichere Schweißisen mehr und mehr zur Verwendung gelangte. Die großen Fortschritte in der Herstellung des Schweißisens und der daraus gefertigten Walzerzeugnisse, insbesondere die hierdurch erzielten Preisermäßigungen, ermöglichten den vollständigen Sieg dieses Baustoffes, sodaß dieser bis zur Gegenwart eine fast ausschließliche Herrschaft behauptete. Dennoch konnte das Gußeisen nicht gänzlich aus der Reihe der Baustoffe der Brücken verdrängt werden, da es nicht bloß viele schätzbare Eigenschaften, die es zu verschiedenen Herstellungen vorzüglich geeignet machen, besitzt, sondern auch in Hinsicht auf manche wichtige Nebenkonstruktionen eine vorteilhaftere und zweckmäßigere Anwendbarkeit als Schweißisen gestattet. Das Gußeisen findet demnach immerhin vielfache Verwendung und zwar insbesondere zur Herstellung von Nebenbestandteilen, zu welchen die druckvermittelnden Zwischenglieder, Portale, Geländer u. s. w. gerechnet werden.

Die fast unbeschränkte Herrschaft des Schweißisens als Baustoff der eisernen Brücken wurde jedoch seit Ende des achten Jahrzehnts dieses Jahrhunderts mit der Einführung des Flußeisens durchbrochen.

Obschon die Überlegenheit der Festigkeitseigenschaften dieses Baustoffes gegenüber jenem des Schweißisens schon lange vorher bekannt war und es nicht an Versuchen gefehlt hat, dieselben bei Brückenbauten auszunutzen, so standen doch der allgemeinen Einführung des Flußeisens zu diesem Zwecke gewichtige Bedenken entgegen. Es war das namentlich der Zweifel an der Zuverlässigkeit dieses Baustoffes, welcher sich als sehr empfindlich gegen Temperatureinflüsse, mechanische Bearbeitung und gegen geringfügige Oberflächenfehler erwies.

Die Vervollkommnung der hüttentechnischen Prozesse, wodurch jetzt die sichere Erzeugung eines Baustoffes von verlangter Güte und Gleichmäßigkeit erzielt werden kann, die fortgeschrittene Kenntnis der Eigenschaften und der Behandlungsart des Flußeisens und der hieraus hergestellten Walzerzeugnisse; endlich die Ergebnisse besonders durchgeführter Versuchsreihen mit zusammengesetzten, genieteten Vollwand- und Fachwerkträgern führten zu der Erkenntnis, daß weiches Flußeisen — insbesondere

basisches Martin-Flusseisen — für Brückenkonstruktionen vorzüglich geeignet sei und daß die Leistungsfähigkeit dieses Baustoffes in derartigen Bauwerken jene des Schweisseisens weit übertreffe. Hiermit war der Sieg des Flusseisens über das Schweisseisen entschieden und zwar um so vollständiger, als hinsichtlich der Massenerzeugung der Wettkampf beider Materialien ohnehin zu Gunsten des Flusseisens ausfallen mußte.

Allerdings ist die Verwendung des Flusseisens zu genieteten Konstruktionen an die Einhaltung strenger Bedingungen für die Art der Anarbeitung gebunden. Gewisse Bearbeitungen und Verletzungen, welche gutes Schweisseisen zu vertragen vermag, dürfen dem Flusseisen nicht zugemutet werden; auch ist jenes gegen Temperatureinflüsse weit weniger empfindlich als dieses.

Während in Deutschland nebst dem Martin-Flusseisen seit 1891 auch das Thomas-Flusseisen im Brückenbau ein weites Verwendungsgebiet gefunden hat, wird in Österreich zur Zeit nur das erstere zu Brückenbauten zugelassen. Indessen ist auch hier diese Frage nahezu spruchreif, nachdem der österreichische Ingenieur- und Architekten-Verein, welcher schon im Jahre 1889 die Vornahme großer Versuche mit genieteten Vollwand- und Fachwerkträgern aus Schweiss-, Thomas- und Martin-Flusseisen veranlaßt hat, im Jahre 1896 einen Ausschuss von Fachmännern mit der Aufgabe betraute, in Hinsicht auf die Fortschritte der Hüttentechnik neuerdings über die Verwendbarkeit des Thomas-Materials zu Brückenkonstruktionen Untersuchungen anzustellen. Dieser Ausschuss hat auf Grund zahlreicher Versuche und ausgedehnter Studien sich für die Zulässigkeit des Thomas-Materials zu Zwecken des Brückenbaues ausgesprochen, sodafs zu erwarten ist, daß dieser Baustoff demnächst auch in Österreich zugelassen werden wird.

Im allgemeinen kann daher gesagt werden, daß das Flusseisen der Baustoff der eisernen Brücken der Gegenwart ist und daß dasselbe auch für die nächste Zukunft sich als solcher behaupten werde.

Über die Verwendung des Stahles im Brückenbau ist zu bemerken, daß dieselbe zur Herstellung des Tragwerkes bisher selten und meist nur bei sehr großen Brücken stattgefunden hat. Auch in der Zukunft wird für den Bau solcher Bauwerke der Flusstahl in Frage kommen. Für die Konstruktion wichtiger und stark beanspruchter Bestandteile von Brücken, selbst bei mittelgroßen Spannweiten, findet der Stahl jedoch sehr oft Anwendung und zwar insbesondere für die Herstellung von Auflagern, Gelenken u. dergl. mehr.

Hinsichtlich der Benennung der verschiedenen Abarten des Eisens folgen wir den Vorschlägen, welche von einem Fachmännerausschusse des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins im Jahre 1893 aufgestellt und von diesem Vereine angenommen worden sind.

Nach diesem wird unterschieden:

1. Roheisen:

- a) Weißes Roheisen,
- b) halbiertes Roheisen,
- c) graues Roheisen.

2. Schmiedeeisen:

- a) Schweisseisen,
- b) Flusseisen.

3. Stahl:

- a) Schweisstahl,
- b) Flusstahl.

4. Gufswaren:

- a) Roheisengufswaren,
- b) Flusseisengufswaren,
- c) Stahlgufswaren.

Für die Anwendung dieser Bezeichnungen dienen folgende Erläuterungen:

1. Roheisen.

Dieses ist das Erzeugnis des Hochofens; es ist leicht schmelzbar, aber nicht schmiedbar. Nach seiner Farbe und seinem Gefüge wird es als „weißes“ (körniges, strahliges oder Spiegeleisen), „halbiertes“ und „graues“ Roheisen bezeichnet.

Unter der Bezeichnung Gufseisen ist in der Regel ein graues, ausnahmsweise ein halbiertes, zur Herstellung von Eisengufswaren bestimmtes Roheisen zu verstehen.

2. Schmiedeeisen.

a) Schweifeseisen ist das im teigigen Zustande (durch das Herdfrisch- oder das Puddelverfahren) hergestellte schmied- und schweißbare, aber nicht merklich härtbare Eisen;

b) Flußeisen ist das im flüssigen Zustande (nach dem Bessemer-, Thomas- oder Martin-Verfahren) hergestellte schmiedbare, aber nicht merklich härtbare Eisen.

3. Stahl.

a) Schweißstahl ist das im teigigen Zustande (durch das Herdfrisch- oder Puddelverfahren) gewonnene schmiedbare, merklich härtbare Material;

b) Flußstahl ist das im flüssigen Zustande (nach dem Tiegel-, Bessemer-, Thomas- oder Martin-Verfahren) hergestellte schmiedbare, merklich härtbare Material.

An Stelle der bisher üblichen Bezeichnung: „Gufsstahl“ tritt die Benennung: „Tiegelflußstahl“.

4. Gufswaren.

a) Roheisengufswaren (Eisengufswaren) sind die durch Gufs aus grauem oder halbiertem Roheisen hergestellten Gebrauchsgegenstände. Sind Eisengufswaren nachträglich schmiedbar gemacht worden, so tritt die Bezeichnung „schmiedbarer Eisengufs“, „Weichgufs“ oder „Tempergufs“ ein. Eisengufswaren, welche durch Gießen des Eisens in eisernen Formen an ihrer Oberfläche besonders hart gemacht werden, heißen „Hartgufswaren“. Sind Gufsstücke in offenen Formen oder in Sand, Masse oder Lehm geformt oder sollen sie nach Art der Herstellung besonders gekennzeichnet werden, so sind dieselben mit Herdgufs, Sand-, Masse- oder Lehmgufs zu bezeichnen;

b) Flußeisengufswaren sind die aus Flußeisen in fertiger Form durch Gufs hergestellten Gebrauchsgegenstände;

c) Stahlgufswaren sind die aus Flußstahl in fertiger Form durch Gufs hergestellten Gebrauchsgegenstände.

I. Allgemeine Eigenschaften des Baustoffes mit besonderer Rücksichtnahme auf Elasticität und Festigkeit.

§ 16. **Einleitung.** Genaue Kenntnis der allgemeinen, insbesondere jedoch der Festigkeitseigenschaften des Baustoffes ist eine der wichtigsten Vorbedingungen zur Erzielung zweckmäßiger Einzeldurchbildung der Konstruktionen. Auf dieser Kenntnis beruht nicht allein die gesamte Berechnung der Querschnitte, sondern auch die Anordnung der Verbindungen.

Es läßt sich behaupten, daß für jeden Fall sogar die besondere Qualität des zur Verfügung stehenden Baustoffes Berücksichtigung bei der Anordnung der Einzel-

heiten finden müsse, wenn die Konstruktion durchaus entsprechen soll. Die auf Grund allgemeiner Eigenschaften des Baustoffes und mittlerer Festigkeitszahlen ermittelte konstruktive Anordnung wird in Hinsicht auf den zu erreichenden Sicherheitsgrad den Absichten des entwerfenden Ingenieurs nicht immer genügen. Lediglich völlige Kenntnis des vorhandenen Baustoffes und die darauf begründete besondere Anordnung der Abmessungen kann Gewähr bieten für die wirkliche Ausnutzung des Materiales und die geforderte Sicherheit.

Der deutsche Eisenbahnverein hat bereits im Jahre 1877 hierzu die Anregung gegeben, indem er die Einführung einer staatlich anerkannten Klasseneinteilung für Eisen und Stahl nach Eigenschaften und die Errichtung von Versuchsstationen u. s. w. anstrebte. Derartige Maßnahmen sind geeignet, die Güte des zur Verfügung stehenden Baustoffes mit größerer Sicherheit beurteilen und wählen zu können.

Die Eigenschaften der verschiedenen Arten des Eisens sind in hohem Grade abhängig von dem Rohstoffe, den fremden chemischen Beimengungen, der Herstellungsart und der nachträglichen Behandlung. Die Berücksichtigung dieser Umstände verdient bei Beurteilung des Baustoffes volle Beachtung und soll insbesondere bei Wahl desselben zu Konstruktionszwecken keineswegs vernachlässigt werden. — Zur Erkenntnis der besonderen Eigenschaften des Baustoffes gelangt man durch Betrachtung des Äußeren, des Gefüges an Bruchstellen, durch Ätzung der Oberfläche mit Säuren, insbesondere jedoch durch Proben auf Festigkeit und Dehnbarkeit, Bearbeitungsfähigkeit u. s. w. Man vergleiche Kap. XVI, § 4 (Die Prüfungen des Materiales).

Wir schreiten nun zur Besprechung der wichtigsten Eigenschaften des Eisens, indem wir die verschiedenen Eigenschaften desselben in Kurzem kennzeichnen.

§ 17. Das Roheisen (Gusseisen). Der hier in Betracht kommende Stoff ist das „graue“ Roheisen. Sein spezifisches Gewicht ist im Mittel 7,2, die Schmelztemperatur zwischen 1100 bis 1200° C. Das Gefüge ist krystallinisch körnig; am grobkörnigsten sind die dunkelgrauen, am feinkörnigsten die lichten Arten. Die Größe des Gufsstückes hat einen wesentlichen Einfluß auf die Größe des Kornes. Dieselbe Roheisensorte, welche in einem Gufsstücke von vielleicht 30 cm Durchmesser auf dem Bruche ein sehr grobkörniges Gefüge von dunkler Farbe zeigt, wird als Stab von 3 cm Stärke eine hellgraue Farbe und dichte Textur besitzen. Ebenso übt die Art des Abkühlens auf die Textur Einfluß aus. Das Roheisen ist um so besser, je zackiger der Bruch erscheint und je dunkler und glänzender er ist. Die lichtgrauen oder schwach halbierten Eisensorten besitzen eine größere Festigkeit als die dunkelgrauen. Wiederholtes Umschmelzen erhöht die Festigkeit; Fairbairn fand, daß das Roheisen nach zwölfmaligem Umschmelzen die größte Festigkeit erlangte.

Die Festigkeit des Roheisens schwankt je nach der Güte in weiten Grenzen. Versuche, die in Woolwich angestellt wurden, ergaben die Festigkeit:

gegen Zug zwischen	700 bis 2400 kg f. d. qcm,
gegen Druck zwischen	2910 „ 9800 „ „ „ „
gegen Bruch durch Biegung zwischen	181 „ 800 „ „ „ „

Von Einfluß auf die Festigkeit ist die chemische Zusammensetzung und das Gefüge, welches teils durch die chemische Zusammensetzung, teils durch die Abkühlungsverhältnisse bedingt wird. Im allgemeinen besitzen solche Roheisensorten die größte Festigkeit, welche fremde, zur Bildung des Graueisens nicht erforderliche Körper in geringster Menge aufweisen. Zur Bildung des Graueisens sind Eisen, Kohlenstoff und

Silicium erforderlich; für die Menge des letzteren genügen 1 bis höchstens 2%. Die festesten Graueisensorten enthalten 3 bis 3½% Kohlenstoff. Ein grobkörniges Gefüge beeinträchtigt die Festigkeit, ein hoher Graphitgehalt ist ungünstig, weil er die Entstehung grobkörnigen Gefüges, zwischen dessen Absonderungsflächen der Graphit eingelagert ist, befördert. (Ledebur, „Eisen und Stahl“, Berlin 1890.)

Auf die Beschaffenheit des Gefüges üben aufser der chemischen Zusammensetzung hauptsächlich auch die Abkühlungsverhältnisse einen grossen Einfluss aus und es kann ein und dasselbe Graueisen ziemlich abweichende Festigkeitsziffern aufweisen, je nachdem es in dickeren oder dünneren Querschnitten erstarrt und je nachdem es in Formen gegossen wurde, welche rascher oder allmählicher dem Metalle seine Wärme entzogen. Im allgemeinen wird rascher erkaltetes und deshalb feinkörnigeres Roheisen die grössere Festigkeit besitzen. Bei Festigkeitsprüfungen ist es auch keineswegs gleichgiltig, ob die Gufsstücke mit ihrer Gufshaut geprüft werden, oder ob diese durch mechanische Bearbeitung vorher entfernt wird. Bach fand die Festigkeit bei bearbeiteten Gufsstücken um 11 bis 20% grösser als bei unbearbeiteten.

Nach den Vereinbarungen deutscher Eisenhüttenleute, sowie nach den vom Verbands deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine aufgestellten Normalbedingungen soll die Zugfestigkeit des Roheisens (unbearbeitet) mindestens 1,2 t/qcm betragen. Die Biegungsfestigkeit soll eine derartige sein, dafs ein unbearbeiteter Stab von quadratischem Querschnitte bei 30 mm Seitenlänge auf 1 m Abstand frei aufliegend, eine allmählich bis zu 450 kg zunehmende Belastung in der Mitte aufzunehmen vermag, bis er bricht. Diese Bruchbelastung würde eine Biegungsfestigkeit von 2,5 t/qcm ergeben.

Über das Verhalten gufseiserner Stäbe gegen Biegung giebt ein beachtenswerter Aufsatz von C. Bach in der Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1888, S. 193 u. ff. Aufschluss. Die wichtigsten Resultate jener Untersuchungen sind:

1. Für auf Biegung beanspruchte Gufseisenstäbe ist eine Elasticitätsgrenze nicht vorhanden, gleichgiltig, ob man die letztere auffasst als die Spannung, bis zu welcher Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht, oder ob man sie als Grenze vollkommener Elasticität ansieht.
2. Je mehr die Querschnittsfläche sich in zwei dünnen, von der Nullachse abstehenden, ihr jedoch parallelen Streifen (Flantschen) zusammendrängt, desto mehr nähert sich auch die auf Grund der Biegungslehre aus der Bruchbelastung berechnete Biegungsfestigkeit der Zugfestigkeit des gleichen Materiales, sowie der Biegungselasticitätsmodul dem Zugelasticitätsmodul.
3. Der Elasticitätsmodul der verschiedenen übereinander befindlichen Schichten eines auf Biegung beanspruchten Gufseisenstabes ist nicht von gleicher Gröfse; derselbe nimmt mit wachsender Dehnung oder Spannung ab. Infolge dessen sind die Spannungen in den äufsersten Schichten thatsächlich bedeutend kleiner, als sie sich nach der Biegungslehre ergeben, während das nach der Nullachse hin gelegene Material im Verhältnis zu seinem Abstand von dieser stärker gespannt ist, als das weiter auswärts befindliche.

Die aus Biegungsversuchen auf Grund der Biegungslehre bestimmte Biegungsfestigkeit überschreitet die für dasselbe Material ermittelte Zugfestigkeit um so bedeutender, je mehr sich das Material verhältnismäfsig nach der Nullachse hin zusammendrängt. So zeigte sich die Biegungsfestigkeit für ein Gufseisen, dessen Zugfestigkeit durch Zerreißen zu 1369 kg/qcm gefunden worden war:

Für einen quadratischen Querschnitt, dessen Diagonale		
in der Kräfteebene liegt	3218 und 3323 kg/qcm,	
für einen I-förmigen Querschnitt	2929	3153
für einen kreisförmigen Querschnitt	2905	2986
für einen quadratischen Querschnitt	2372	2538
für einen rechteckigen Querschnitt	2395	2566
und für einen I-förmigen Querschnitt	1979	2111

Nach Bach beträgt das Verhältnis der Biegezugfestigkeit zur Zugfestigkeit des nämlichen Roheisens bei Quadratstäben 1,73 und ändert sich nach Maßgabe des Einflusses der Lage des Querschnittes auf die Biegezugfestigkeit, wie oben mitgeteilt wurde.

Sehr verschieden sind die Angaben über die reine Druckfestigkeit des Roheisens; als Mittelwert wird hierfür meist 7,0 bis 7,5 t/qcm angenommen.

Roheisen besitzt nach Bach's Versuchen weder eine Elasticitätsgrenze noch einen Festwert für den Elasticitätsmodul. Der letztere vermindert sich vielmehr von 1000 t/qcm stetig bis auf etwa 650 t/qcm an der Zugfestigkeitsgrenze. Neben der Festigkeit des Roheisens muß auch dessen Zähigkeit, d. i. die Eigenschaft, Formveränderungen anzunehmen, ohne zu brechen, in Betracht gezogen werden. Auf den Grad der Zähigkeit ist in noch höherem Maße als für die Festigkeit die chemische Zusammensetzung des Materiales von Einfluß. Alle Fremdkörper vermindern die Zähigkeit; doch ist die Größe ihres Einflusses verschieden. Gebundener Kohlenstoff, wie im weißen Roheisen, macht dieses in hohem Maße spröde; einen weit geringeren Einfluß übt Silicium aus; selbst ein hoher Siliciumgehalt (2 bis 2,5%) ist weniger nachteilig als ein Gehalt von etwa 1% gebundenem Kohlenstoff (Ledebur). Auch ein Mangangehalt von 1% bewirkt eine deutliche Erhöhung der Sprödigkeit. Der gefährlichste Feind der Zähigkeit des Eisens ist jedoch der Phosphor. Ein Gehalt von mehr als 1% dieses Stoffes würde das betreffende Material schon zu Konstruktionszwecken unzulässig machen.

Ein sehr nachteiliger Einfluß auf die Zähigkeit eines Gufsstückes kann auch entstehen, wenn einzelne Teile desselben beim Erkalten am Schwinden behindert werden und wenn das Schwinden nicht gleichzeitig im ganzen erfolgen kann, wodurch innere Spannungen auftreten. Geringfügige äußere Veranlassungen, ein Stoß, einseitige Erwärmung u. dergl. reichen aus, um den Bruch eines solchen Gufsstückes herbeizuführen. Bei der Formgebung der Gufsstücke wird hierauf ebenso zu achten sein, wie auf die Gefahren, welche die beim Gusse entstehenden Hohlräume zur Folge haben können. Zur thunlichsten Vermeidung der letzteren sollen die Gliederungen und Abmessungen so gewählt werden, daß übermäßige Materialanhäufungen an einzelnen Stellen nicht Platz greifen und eine gleichmäßige Abkühlung ermöglicht werde.

Im allgemeinen hängt die Güte des erzeugten Gufsstückes von derjenigen des Rohstoffes und von der Behandlung des Gusses ab. Guter Rohstoff, wiederholtes Umschmelzen und hauptsächlich große Sorgfalt für allmähliches und gleichmäßiges Abkühlen der gegossenen Stücke läßt ausgezeichnete Ergebnisse erreichen, wie die amerikanischen Erzeugnisse, namentlich die dort gefertigten Lokomotivräder aus Gufseisen, die nach Tunner eine Dauer von 80000 bis 95000 durchlaufenen Kilometern und darüber aufweisen, lehren.

Im Brückenbau der Neuzeit findet das Gufseisen Anwendung zur Herstellung von Auflagerkonstruktionen, Portalen, Geländern, zur Konstruktion eiserner Brückenstützen u. s. w.

Die vom Verein deutscher Hüttenleute aufgestellten Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl (Düsseldorf 1893) bestimmen für Gufseisen:

„Die Gufsstücke sollen aus grauem, weichem Eisen sauber und fehlerfrei gegossen sein. Es muß möglich sein, mittels eines gegen eine rechtwinkeligen Kante des Gufsstückes mit dem Hammer geführten Schlages einen Eindruck

zu erzielen, ohne das die Kante abspringt. Das Eisen der Röhren muß feinkörnig und zäh sein und sich mit Meißel und Feile bearbeiten lassen“.

Über die Zug- und Biegezugfestigkeit wurde bereits oben gesprochen.

§ 18. Das Schmiedeeisen. Vom Roheisen unterscheidet sich das Schmiedeeisen in chemischer Beziehung durch seinen niedrigeren Gehalt an Fremdkörpern, insbesondere an Kohlenstoff, welcher selten über 0,2% hinausgeht und meist weniger als 0,1% beträgt, in physikalischer Beziehung durch seine höhere Schmelztemperatur, welche bei 1800° C. liegt, während jene des Roheisens 1100 bis 1200° C. beträgt.

a) Das Schweißeseisen.

Die Herstellung desselben erfolgt zumeist mittels des Puddelverfahrens oder Flammofenfrischens. Hierbei wird das Roheisen auf dem muldenförmigen Herde eines Flammofens durch die darüber hinstreichende Flamme geschmolzen und durch die Beimischung oxydreicher Schlacken oder vom Hammerschlag seiner fremden Bestandteile beraubt. Zur Erleichterung dieser Vermischung wird das Metallbad unausgesetzt umgerührt (gepuddelt). Das Ergebnis dieses Verfahrens ist ein mit flüssiger Schlacke durchsetzter Eisenklumpen — die Luppe —, welcher sich aus dem Metallbade ausscheidet. Ein Vorgang, der einigermaßen an die Erzeugung der Butter erinnert.

Durch Ausschmieden der weichen Luppe unter dem Dampfhammer wird die flüssige Schlacke zum größten Teil ausgetrieben, worauf dann die Luppe zu Stäben — Rohschienen, Luppenstäben — ausgewalzt wird. Die auf die entsprechende Länge geschnittenen Luppenstäbe werden zu prismatischen Körpern — Paketen — zusammengelegt, schweißwarm gemacht, zusammengeschweißt und verwalzt.

Jedes Schweißeseisenstück besteht daher aus einzelnen, erst durch das Schweißen verbundenen Teilen.

Schweißeseisen besitzt ein spezifisches Gewicht von 7,6 bis 7,8. Dasselbe ändert sich mit der Beschaffenheit und wird durch die mechanische Behandlung beeinflusst. Nach Kirkaldy's Versuchen wird das spezifische Gewicht vermindert durch kaltes Walzen und durch starke Beanspruchung auf Zug, obgleich im letzten Falle der Querschnitt sich verkleinert. Bei Gewichtsberechnungen ist nach Maßgabe der „Normalbedingungen“ das spezifische Gewicht gleich 7,8 anzunehmen.

Gutes Schweißeseisen zeigt einen körnig-zackigen Bruch von lichtgrauer Farbe. Im allgemeinen ist die gute Beschaffenheit bestimmt durch Gleichmäßigkeit des Gefüges und die Zusammengehörigkeit eines hellen Farbtones mit mattem Glanz, oder dunkler Farbe mit starkem Glanz am frischen Bruche. Die Größe des Kornes nimmt mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt ab; durch Walzen, Schmieden, Strecken u. s. w. geht das körnige Gefüge in ein faseriges, sehniges über.

Blankes Schweißeseisen nimmt bei Temperaturen zwischen 300 bis 400° C. nach und nach Anlauffarben in der Reihenfolge: gelb, orange, violett, blau, grün, endlich farblos, an. — Hiernach erscheinen die Glühhitzen und zwar:

bei 525° C. anfangendes Rotglühen,		bei 1200° C. lichtiges Glühen,
„ 700° C. Dunkelrotglühen,		„ 1300° C. Weißglühen,
„ 800° bis 1000° C. Kirschrotglühen,		„ 1500° bis 1600° C. blendendes Weißglühen und
„ 1100° C. Dunkelorange,		„ 1800° bis 2100° C. Schmelzung.

Bevor das Schmelzen eintritt, nimmt das Eisen eine teigartige Beschaffenheit an, in welchem Zustande es schweißbar ist. Durch plötzliches Abkühlen ist das Schmiedeeisen gar nicht oder nur in sehr geringem Maße härtbar.

Fremde Beimengungen beeinflussen die Beschaffenheit des Eisens in hohem Grade. So erzeugt der Gehalt an

Schwefel: Rotbruch (dunkelgraue Farbe, schwacher Glanz, fadiges Gefüge des Bruches),

Phosphor: Kaltbruch (hellweifs, starker Glanz, flaches schuppiges Korn),

Silicium: Faulbruch (kurzes und dickfaseriges Gefüge von dunkler Farbe und ohne Glanz, im Gemenge mit körnigem Gefüge).

Infolge von Fehlern bei der Fabrikation oder der Bearbeitung können entstehen:

Rohbruch, durch ungleichmäfsige und unvollkommene Puddel- oder Frischarbeit (der Bruch ist grobkörnig, glänzend, weifs, neben feinem Korn und dunkler Farbe);

Verbranntes Eisen. Dasselbe entsteht, wenn das Eisen längere Zeit einer trockenen Hitze ausgesetzt und dadurch kohlenstoffärmer geworden ist (der Bruch zeigt ein ungleichmäfsiges, grobkörniges oder blätteriges Gefüge, starken Glanz, weisse Farbe mit einem Stich ins Gelbliche);

Hadriges, schiefriges, unganzes Eisen. Dasselbe entsteht infolge schlechter Schweifsung oder fehlerhafter mechanischer Behandlung (der Bruch zeigt eingemengte Schlacke oder Hammerschlag).

Die Festigkeit und Elasticität des Schweisseisens ist abhängig von der Herstellungsart, den fremden Beimengungen und der nachträglichen mechanischen Behandlung. Die Festigkeit gegen Zug schwankt nach Bauschinger zwischen 2300 bis 4890 kg, nach Kirkaldy sogar bis 6200 kg f. d. qcm. Die Ausdehnung beim Zerreißen erreicht bei zähen Eisensorten bis 30% der Länge.

Der Einfluss der fremden Bestandteile auf die Festigkeit und Elasticität ist in Folgendem skizziert:

Kohlenstoff. Mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt nimmt die Festigkeit gegen Zug zu, die Dehnbarkeit jedoch ab. Dieses Anwachsen der Festigkeit findet jedoch (nach Styffe) nur bis zu einem Kohlenstoffgehalte von 0,8% statt. Ein Überschreiten dieser Grenze hat wieder eine Abnahme der Festigkeit zur Folge.

Die Elasticitätsgrenze wächst in ähnlicher Weise, wie die Festigkeit mit dem Kohlenstoffgehalte.

Phosphor erhöht die Festigkeit und die Elasticitätsgrenze, vermindert dagegen die Dehnbarkeit.

Einfluss der mechanischen Behandlung. Strecken, Kaltwalzen, Hämmern und alle Arbeiten, welche ein Überschreiten der Elasticitätsgrenze im Gefolge haben, bewirken eine Erhöhung der Zugfestigkeit und der Elasticitätsgrenze, vermindern jedoch die Dehnbarkeit und Zähigkeit. Ausglühen hat dagegen eine entgegengesetzte Wirkung. Nach Kirkaldy's Versuchen erhöhte sich die Festigkeit von 3220 kg f. d. qcm durch Kaltwalzen bis auf 6260 kg und sank durch Ausglühen wieder auf 3580 kg herab. In einem anderen Falle erhöhte sich die Festigkeit von 4260 kg f. d. qcm auf 5270 kg und sank durch Ausglühen auf 4380 bzw. 3970 kg f. d. qcm herab. Wiederholte Bearbeitung des Schmiedeisens, wie man dieselbe in England anzuwenden pflegt, um das beste und zähste Eisen zu erhalten, ergaben eine Verbesserung der Qualität, zunehmend mit der Anzahl der Bearbeitungen, die jedoch eine gewisse Grenze erreichte, von wo ab wiederum Verminderung der Festigkeit eintrat.

Auf den *Mersey Iron and steel works* wurde von Clay ein Versuch gemacht, wonach eine Stange von gewöhnlichem faserigen, gepuddelten Eisen durchgeschmiedet und dann gewalzt wurde. Ein Stück wurde als Probe aus der Mitte entnommen, der Überrest wieder zusammengeschmiedet und dann ausgewalzt u. s. f., bis das letzte Stück 12 Bearbeitungen erlitten hatte. Die Festigkeit betrug bei den verschiedenen Stücken: 3086, 3716, 4189, 4189, 4031, 4346, 4189, 4031, 4031, 3804, 3653, 3086. Ähnliche Versuche mit Puddelstahl ergaben: 6813, 8555, 7846, 8555, 7846, 7846, 6407, 6407, 6407, 6407 (v. Kaven, Collectaneen).

Im allgemeinen erkennt man, daß alle Umstände, welche eine Vermehrung an Festigkeit im Gefolge haben, gleichzeitig eine Einbuße an Dehnbarkeit mit sich bringen.

Der Einfluß der Form des Stabes auf die Festigkeit wurde von Kirkaldy und Vickers untersucht und hierbei gefunden, daß Rundstäbe, die in kurzen Strecken auf einen kleineren Durchmesser abgedreht wurden, eine größere Tragfestigkeit zeigten, als solche mit konstantem Durchmesser; größere Länge des eingedrehten Teiles ergab wieder Verminderung der Tragfestigkeit. Professor Weyrauch erklärt diese Erscheinung aus der Ungleichartigkeit des Stoffes, in deren Folge eine excentrische Beanspruchung und Biegung auftritt, wogegen bei kurz eingedrehten Stäben diese Biegung um so geringer werden müsse, je kürzer der eingedrehte Teil ist. Die Beobachtung Styffe's, daß jede auf Zug beanspruchte Stange bei starker Belastung Ausbiegungen annimmt, scheint diese Erklärung zu bestätigen.

Nach Bauschinger's Versuchen hat die Form des Probestabes innerhalb der Grenzen, wie sie die Praxis braucht, nur Einfluß auf die prozentualische Bruchdehnung und wird dieser Einfluß vermieden, wenn die Meßlänge des Probestabes nach der Querschnittsgröße bestimmt wird. Bauschinger fand hierfür die Beziehung:

$$l = 11,3 \sqrt{F},$$

wobei l die Meßlänge und F die Querschnittsfläche des Probestabes, auf Millimeter bezogen, bedeutet.

In Österreich ist der Gebrauch der Beziehung: $l = \sqrt{80 F}$ üblich.

Stäbe mit scharf absetzenden Querschnittsänderungen zeigen gegen wiederholte Anstrengungen geringere Widerstandsfähigkeit, als solche, bei welchen der Übergang mittels Hohlkehlen stattfindet (Wöhler's Versuche). Aus dem Mitgeteilten geht hervor, daß mannigfache Ursachen die Festigkeit und Dehnbarkeit des Eisens beeinflussen, und daß demnach Verschiedenheiten in dem Verhalten selbst gleichartig erzeugter Eisensorten gegen äußere Kräfte zur Erscheinung gelangen können.

Ganz besonders bemerkbar machen sich diese Verschiedenheiten durch die Werte der Elasticitätsmoduln. Die Ermittlung dieser Größen ist an und für sich eine schwierige und setzt eine außerordentliche Genauigkeit und Sorgfalt bei den Versuchen voraus. Professor Jenny macht in seinem Werke: „Festigkeitsversuche und die dabei verwendeten Maschinen an der k. k. technischen Hochschule in Wien. 1878“ auf diesen wichtigen Umstand aufmerksam und betont ausdrücklich, daß selbst bei einer Genauigkeit in den Ablesungen der Längen bis zu 0,001 mm die Werte der Elasticitätsmoduln, unter den günstigsten Umständen, bei den Maßeinheiten des Kilogramms und des Millimeters, bis auf die Stelle der Hunderte richtig zu bestimmen außerordentlich schwierig sei. So könne, einem berechneten Beispiele zufolge, dieser Wert für eine Eisensorte ebensowohl mit 19700 als mit 20300 bemessen werden.

Hieraus ergibt sich, daß Versuche, die mit minder genauen Apparaten und Vorrichtungen vorgenommen wurden, bezüglich der ermittelten Elasticitätsmoduln nur un-

genaue Resultate erwarten lassen. Aber selbst möglichst genaue Versuche ergeben erhebliche Verschiedenheiten der Elasticitätsmoduln, so zwar, daß nach Jenny's Versuchen z. B. für Eisenbleche diese Gröfse Werte zwischen 15200 bis 22900, bei Walzeisenstäben zwischen 20700 bis 22200 ergab, wobei das Kilogramm und das Millimeter als Mafseinheit vorausgesetzt sind.

Man hat die Beobachtung gemacht, daß auch die Querschnittsform der Walzeisen von Einfluß auf die Gröfse des Elasticitätsmodul sei. Diese Erscheinung findet eine Erklärung in dem Umstande, daß der Baustoff während des Walzens Streckungen erleidet, welche seine Festigkeit und Dehnbarkeit beeinflussen. Dies wird insbesondere dann der Fall sein, wenn das Eisenstück in abgekühltem oder erkaltetem Zustande durch die Walzen geht. Die dabei auftretenden, die Elasticitätsgrenze überschreitenden Dehnungen des Stoffes ändern dann die Festigkeit und Dehnbarkeit und mithin den Elasticitätsmodul.

Es läßt sich hierdurch auch die Erscheinung erklären, daß selbst die aus ein und demselben Formeisenstabe geschnittenen Probestäbe verschiedenen Elasticitätsmodul zeigen, je nach den Orten im Querschnitt, aus welchen die Probestücke entnommen wurden. Die Streckungen, welche vom Stoff des Formeisens erlitten werden, sind nämlich keineswegs durchaus gleichmäfsig, sondern mit den Geschwindigkeiten der Walzenumfänge verschieden, daher wird auch das elastische Verhalten des Stoffes in demselben Querschnitte gegen ausdehnende Kräfte ein verschiedenes sein können.

Professor Jenny teilt in seinem oben genannten Werke auch Versuche über die Festigkeit und Dehnbarkeit von Probestäben, welche aus verschiedenen Orten des Querschnittes dreier Rundeisenstangen A, B und C, Fig. 21, S. 76, geschnitten wurden, mit. Nachfolgende Tabelle enthält die erhaltenen Resultate auszugsweise:

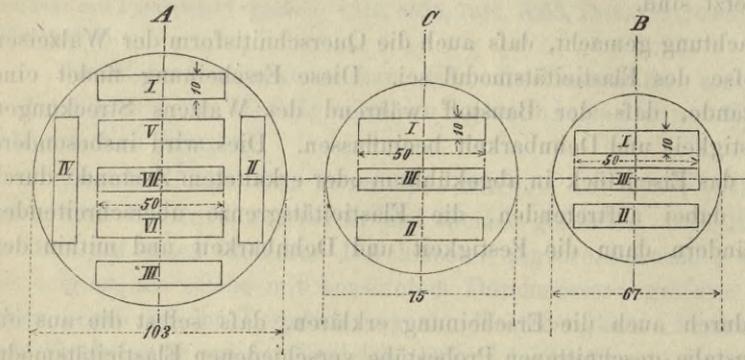
Zeichen des Probestabes	Spezifisches Gewicht	Elasticitätsmodul E	Elasticitätsgrenze k , kg pro qmm	Tragfestigkeit gegen Zug	Ausdehnung an der Elasticitätsgrenze pro Längeneinheit		Arbeitsmodul für die Elasticitätsgrenze. $W = \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{E} \cdot \text{kgmm}$
					Ausdehnung an der Elasticitätsgrenze	Bleibende Ausdehnung nach dem Bruche	
A I	7,750	19 600	12,91	34,71	0,00066	0,083	0,00425
A II	7,710	20 700	14,40	37,80	0,00070	0,152	0,00502
A III	7,806	20 000	13,60	38,88	0,00068	0,149	0,00463
A IV	7,781	20 800	14,71	37,38	0,00071	0,163	0,00521
A V	7,805	16 300	13,60	26,73	0,00083	0,029	0,00566
A VI	7,750	20 300	13,42	32,35	0,00066	0,059	0,00444
A VII	7,753	17 700	13,37	32,23	0,00076	0,064	0,00505
B I	7,505	22 500	15,60	35,97	0,00069	0,167	0,00541
B II	7,464	22 500	15,91	36,72	0,00071	0,116	0,00563
B III	7,497	20 700	15,19	38,60	0,00074	0,125	0,00554
C I	7,843	20 000	14,42	39,65	0,00072	0,202	0,00518
C II	7,785	22 800	14,30	39,34	0,00063	0,222	0,00450
C III	7,740	20 600	14,39	40,18	0,00070	0,191	0,00502

Wenn von dem Probestabe A V, der im Bruche bedeutende Ungleichmäfsigkeiten zeigte, abgesehen wird, so erkennt man, daß im allgemeinen der Elasticitätsmodul und die Festigkeiten der aus der Stange A geschnittenen Stäbe in die Augen fallende Verschiedenheiten aufwiesen. Zugleich bemerkt man, daß die nahe der Oberfläche entnommenen Probestücke A I, A II, A III und A IV gröfsere Festigkeiten und Elasticitätsmoduln hatten als der mittlere Stab A VII.

Die beiden Stangen B und C zeigten ein gleichmäfsigeres Verhalten, was bei den verhältnismäfsig kleineren Querschnitten auch zu erwarten stand.

Die Verschiedenheit der Elasticitätsmoduln gab Veranlassung, mehrseitig zu bezweifeln, ob theoretische Ergebnisse, welche auf Grundlage vorausgesetzter Gleichartigkeit des Stoffes erhalten wurden, auf Brückenbauten anwendbar seien und dies dadurch

Fig. 21.



zu begründen, daß letztere aus Konstruktionselementen zusammengesetzt sind, die eine Gleichartigkeit bezüglich des Elasticitätsmoduln nicht erwarten lassen und deshalb der bei der Berechnung gemachten Voraussetzung der Gleichartigkeit nicht entsprechen.

Es ist wohl keine Frage, daß bei einer aus mehreren Teilen von verschiedener Dehnbarkeit zusammengesetzten Konstruktion die Beanspruchung der einzelnen Teile verschieden ausfallen werde, da die dehnbaren Elemente durch eintretende Dehnung mehr nachgeben, als die steiferen, wodurch diese jedenfalls eine Mehrbeanspruchung erleiden. Besonders bei inniger Verbindung der verschiedenen Teile untereinander müssen infolge der verschiedenen Dehnbarkeiten derselben an den gegenseitigen Berührungsf lächen Schubspannungen auftreten, welche durch die Verbindungsmittel auf die minder nachgiebigen Teile diese Spannungsunterschiede übertragen, hierdurch Mehrbeanspruchung daselbst hervorrufen und somit auch deren entsprechend stärkere Dehnung oder Streckung veranlassen. Schließlich wird ein Zustand eintreten, in welchem der zusammengesetzte Stab ein ähnliches Verhalten annimmt, wie ein aus gleichartigem Stoff bestehender elastischer Stab mit gleichen Ausmaßen, jedoch einem verschiedenen, aus der Vereinigung ungleichmäßig-elastischer Elemente folgenden mittleren Elasticitätsmodul.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß bei Walzeisen in den verschiedenen Orten des Querschnittes auch Verschiedenheiten in Bezug auf Festigkeit und Dehnbarkeit gefunden wurden. Auch hier ist das Verhalten dem vorhin erwähnten ähnlich und der Elasticitätsmodul gleichfalls bloß einem mittleren Werte entsprechend.

Mittelwerte der Festigkeit und Elasticität des Schweißeisens.

(Nach Grashof.)

Baustoff	Tragfestigkeit kg f. d. qcm			Elasticitätsgrenze kg f. d. qcm			Ausdehnung an der Elasticitätsgrenze pro Längeneinheit		Elasticitätsmodul f. d. qcm	
	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Zug u. Druck	Schub
Stabeisen . . .	4000	3500	3500	1400	1400	1050	0,0007	0,0007	2 000 000	750 000
Eisenblech . . .	3500	3000	—	1400	1400	1050	0,0008	0,0008	1 750 000	656 200
Draht	6500	—	—	2400	—	—	0,0012	—	2 000 000	7 500

Konstruktionen, die aus einzelnen Elementen zusammengesetzt und miteinander innig verbunden sind, wie dies beispielsweise durch die Nietung geschieht, werden demnach ebenso zu beurteilen sein, wie solche aus völlig gleichmäßig elastischem Materiale. Der diesen Konstruktionen — als einem einheitlichen Ganzen — zukommende Elasticitätsmodul ist jedoch von vornherein nicht bestimmbar, er ist vielmehr ein aus dem Ver-

halten der entstandenen Konstruktion erst abzuleitender, aus der Gesamtwirkung der verbundenen Elemente sich ergebender Wert, dem dieselbe Bedeutung zukommt, wie für einfache ähnliche Gebilde aus gleichartigem Stoff. Hiernach können die theoretischen Ergebnisse ohne Bedenken auch auf genietete Brückenkonstruktionen angewendet werden, und zwar um so mehr, als die Ergebnisse der Erfahrung bisher durchaus zu keinem gegenteiligen Schlusse berechtigen, sondern weit eher für die Giltigkeit derselben sprechen.

Die mechanische Arbeit des elastischen Widerstandes eines in seiner Längsachse beanspruchten Stabes gegen lebendige Kräfte ist durch den Wert:

$$W = \frac{1}{2} \frac{k^2}{E},$$

welcher sich auf die Raumeinheit des Stabes bezieht, ausgedrückt, wobei k die Spannung bedeutet.

Für die der Elasticitätsgrenze entsprechenden Spannung ergibt sich mit den Mittelwerten: $k = 1400 \text{ kg f. d. qcm}$ und $E = 2000000$, der Arbeitsmodul:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1400)^2}{2000000} = 0,49 \text{ kgcm.}$$

Die mechanische Arbeit des Widerstandes kommt in Betracht bei allen Konstruktionen, welche Erschütterungen und Stöße auszuhalten haben, also insbesondere auch bei Brücken. Im allgemeinen wird demnach die Güte des zu diesen Konstruktionen zu verwendenden Eisens nach dem Werte W — dem „Arbeitsmodul“ — zu beurteilen sein und der Vorzug ist jenem Stoffe einzuräumen, der einen größeren Wert hierfür aufweist.

Obwohl die Abmessungen der einzelnen Teile einer Eisenbrücke von dem Gesichtspunkte aus vorgenommen werden müssen, daß nicht nur durch die statischen Lastangriffe, sondern auch durch die dynamischen Wirkungen der rollenden Lasten keine, die Elasticitätsgrenze überschreitenden, Anstrengungen des Materials hervorgerufen werden, so ist es dennoch nicht ausgeschlossen, daß unter ungünstigen Umständen und Zufällen verschiedener Art auch höhere Spannungen auftreten könnten. In solchen Fällen gelangen neben den elastischen auch bleibende Formveränderungen in Erscheinung: zu der Arbeit des elastischen Widerstandes gesellt sich dann die Arbeit der bleibenden Formänderung: die „plastische Formänderungsarbeit“. Bei zähen Materialien wird jene von dieser weitaus übertroffen, sodafs z. B. für mittelmäßiges Schweisseisen die bis zur Festigkeitsgrenze geleistete plastische Formänderungsarbeit für das Kubikcentimeter fast 200 mal größer ist als die bis dahin vollzogene elastische Arbeit.

In dem plastischen Arbeitsvermögen eines Konstruktionsmaterials sehen wir daher einen Vorrat an Leistungsfähigkeit für den Fall von unvorhergesehener Überanstrengung überhaupt, insbesondere aber gegen Stöße und dynamische Wirkungen. Es entspricht dieses gewissermaßen einem die Sicherheit gewährleistenden Reservefonds, während das elastische Arbeitsvermögen mit dem Betriebskapitale verglichen werden könnte. Die Größe der plastischen Arbeit ist aber sowohl von der Festigkeit, als auch von der Dehnbarkeit des Materials abhängig, sie kann näherungsweise durch das Produkt dieser beiden Größen ausgedrückt werden und damit ein Maßstab für den Konstruktionswert des Materials gewonnen werden. Prof. v. Tetmajer führte bei seinen Qualitätsbestimmungen der Eisenmaterialien hierfür die Wertziffer $c = \beta \cdot \lambda$ ein, wobei β die Zugfestigkeit f. d. qcm in t und $\lambda = \frac{\Delta l}{l}$ die durchschnittliche Längenänderung der Längeneinheit nach dem Bruche bedeuten.

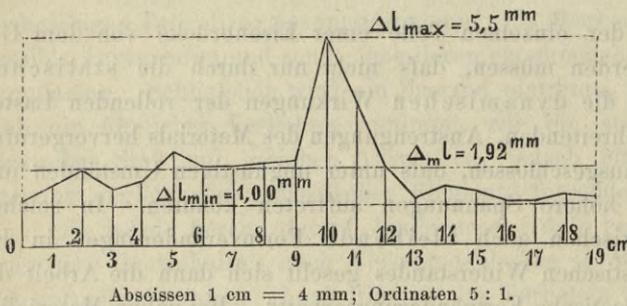
Die Festigkeitszahl und die Tetmajer'sche Wertziffer ermöglichen eine ziemlich genaue Kennzeichnung des Konstruktionsmaterialies; dennoch genügen diese Bestimmungen allein nicht und man verlangt überdies noch den besonderen Nachweis für die Zähigkeit desselben.

Für das Mafß der Zähigkeit wurde die Größe der Einschnürung an der Bruchstelle in Vorschlag gebracht und Wöhler's Wertziffer setzt sich aus der Summe von Zugfestigkeit in kg/qmm + Kontraktion in % zusammen. Sowohl der Verein deutscher Hüttenleute, als auch Prof. v. Tetmajer und Prof. Gollner sprachen sich jedoch dahin aus, daß die Einschnürung des Bruchquerschnittes nicht maßgebend für die Zähigkeit des Materialies sein könne, da dieselbe etwas ganz Örtliches ist, worin die durch Ungleichmäßigkeit bedingte Weichheit einzelner Stellen des Materialies zum Ausdruck komme.

Die Richtigkeit dieser Einwände erhellt schon aus dem Umstande, daß an den Probestäben fast immer die eigentliche Brucheinschnürung eine deutliche Begrenzung erkennen läßt, sodafs an diesem Orte das Vorhandensein weicheren Materialies augenfällig wird. Ein Stab von vollkommen gleichartigem Stoffe würde eine derartige Einschnürung niemals annehmen, denn die Dehnung und die Kontraktion müßte in diesem Falle eine durchaus gleichmäßige sein.

Wird die Länge des Probestabes in eine Anzahl gleicher — etwa 1 cm langer — Teile eingeteilt und werden die Dehnungen dieser Teile besonders gemessen und in

Fig. 22.



entsprechendem Maßstabe als Ordinaten aufgetragen, so erhält man durch Verbindung ihrer Endpunkte eine gebrochene Linie, welche den Anteil eines jeden Stabteiles an der Gesamtausdehnung deutlich macht. Die auftretende Einschnürung macht sich örtlich durch das rasche Ansteigen dieser Linie bemerklich. In der Mehrzahl der Fälle

erstreckt sich die Stelle der Einschnürung bei zähem Baustoff auf die Länge von 2 bis 4 cm, bei härterem Baustoff auf noch geringere Länge. Fig. 22 stellt ein derartiges Schaubild dar.

Ein weiterer Umstand, welcher gegen die Einführung der Kontraktion als Zähigkeitsmaß spricht, ist die Schwierigkeit der genauen Ermittlung des Inhaltes der Bruchfläche, da dieselbe keineswegs eine ebene ist. Die Dehnungen lassen dagegen eine scharfe Messung zu. Mit Zuhilfenahme des Erfahrungssatzes, wonach der Rauminhalt des Probestabes unverändert bleibt, kann aus den gemessenen Dehnungsgrößen auch die örtlich entsprechende Quersammenziehung berechnet werden.

In „Über den Wert der Kontraktion als eines Maßes der Zähigkeit des Eisens und über die Beurteilung der Qualität dieses Materialies“ gelangt Prof. Gollner⁴²⁾ zu folgenden Ergebnissen:

1. Die Querdeformation ist in ihrer kräftigen und nahezu unvermittelten Ausbildung bei Zerreißprobestäben in erster Linie nur als örtliche Erscheinung aufzufassen.

⁴²⁾ Techn. Blätter 1886 u. 1887.

2. Die an der Bruchstelle eingetretene größte Kontraktion darf nicht als Maß der Zähigkeit des Materiales angenommen werden.
3. Solche örtliche Erscheinungen müssen im Zusammenhang mit der minder entwickelten Gleichartigkeit des Materiales gebracht werden.

Weiter bemerkt Gollner: „Es ist daher die heute übliche Praxis, die größte Querschnittsverminderung eines bis zur Bruchgrenze für Zug in Anspruch genommenen Probemateriales zur Grundlage für die Beurteilung des Wertes der mit „Zähigkeit“ bezeichneten mechanischen Eigenschaft zu machen, entschieden unrichtig und um so mehr, als durch zahlreiche Versuchsreihen nachgewiesen ist, daß die Entstehung, Art und Größe der Ausbildung von Hauptquerdeformationen wesentlich von Materialfehlern abhängig ist“.

Gollner bestreitet jedoch die allgemeine Gültigkeit des Tetmajer'schen Qualitätskoeffizienten c (d. i. der Arbeitskapazität) als Maß der Zähigkeit und weist nach, daß Eisenstoffe von sehr verschiedenem Zähigkeitsgrade dennoch genau übereinstimmende Arbeitskapazitäten besitzen können, sodaß der Wert c allein nicht als Zähigkeitsmaß verwertet werden könne. Dagegen sieht Gollner in dem Mittelwerte $\Delta_m l$ der Längsdehnungen der einzelnen Längencentimeter des Probestabes (s. Fig. 22, S. 78) das thatsächliche Maß der Zähigkeit $D_a = \Delta_m l$, während er das relative Maß derselben, die „Deformationsfähigkeit“, mit $D_r = 100 \frac{\Delta_m l}{\Delta_{\max} l}$ bestimmt.

Zur Bestimmung des Maßes der Gleichartigkeit des Baustoffes benutzt Gollner die Beziehung:

$$H = 100 \frac{\Delta_{\min} l}{\Delta_{\max} l}$$

Die diesfalls von ihm durchgeführten Untersuchungen verschiedener Schweißseisen-, Flußeisen- und Stahlsorten ergeben für den erstgenannten Baustoff das Ergebnis, daß die Zähigkeit und Gleichartigkeit desselben von dem Gefüge abhängig und im allgemeinen stark veränderlich sei. D_a schwankt zwischen 9 und 27 und es entspricht die geringste Zähigkeit dem „gemischten“, das größte Maß derselben dem „schiefrig-feinsehnigen“ bis „milde feinsehnigen“ Gefüge. Die Gleichartigkeit ist am geringsten bei den zähesten Sorten und am besten bei dem „schiefrig“ bis „schiefrig-geschichteten“ Gefüge. Für die am häufigsten untersuchte Sorte, welche durch das „geschichtete schwachsehnige“ Gefüge bestimmt ist, ergab sich der Wert:

$$D_a^0/0 = 21; \quad H^0/0 = 26.$$

Schließlich stellt Gollner die folgenden Beziehungen zwischen den maßgebenden Größen: der Kontraktion und Zähigkeit, und der letzteren zur Zugfestigkeit auf. Es ist die Kontraktion:

$$C \text{ in } \% = -8,0 + 2,47 D_a;$$

ferner

$$D_a = 4,04 + 0,395 C \text{ und}$$

$$D_a = -23,16 + 0,0117 K_z,$$

wobei K_z die Zugfestigkeit in **kg f. d. qcm.**

Der Einfluß des Gefüges auf die Festigkeit und Zähigkeit ist ersichtlich aus der folgenden Tabelle:

K_z	$\Delta_m l^0/0$	$C^0/0$	Gefüge
2900	10	16	Gemischt.
3100	13	24	Gemischt.
3300	15	29	Schiefrig.
3500	17	34	Schiefrig, geschichtet.
3700	20	41	Sehnig.
3900	22	46	Sehnig.
4100	24	51	Schiefrig-feinsehnig.
4200	27	59	Milde-feinsehnig.

Zur praktischen Untersuchung der Zähigkeit des Konstruktionsmateriales dienen die sogenannten technologischen Proben. Hierbei werden die Probestäbe verschiedenen formändernden Bearbeitungen im kalten und warmen Zustande unterzogen, Biegungen im unverletzten und verletzten Zustande der Stäbe, Schlagproben, Schmiedeproben u. s. w. vorgenommen.

Den zuverlässigsten Aufschluss über die Leistungsfähigkeit eines Materiales bei seiner Verwendung zu Brückenkonstruktionen geben nur Biege- und Bruchversuche an zusammengesetzten, genieteten, nach Art von Brückenträgern gebauten Trägern. Bei solchen Versuchen kommt insbesondere der Einfluss der Anarbeitung auf das Gesamtverhalten der Träger zum Vorschein; sie bieten die Möglichkeit, den Grad der Übereinstimmung der theoretischen Rechnungsergebnisse mit den wirklich auftretenden Anstrengungen zu erproben, was zur Beurteilung der Sicherheit der Konstruktionen von größtem Werte ist, und können zur Entdeckung verborgener Materialfehler — insbesondere der Neigung des Materiales —, innere „falsche“ Spannungen anzunehmen, verhelfen.

Vom Standpunkte des Konstrukteurs wird übrigens bei Wahl des Baustoffes auch der besonderen Inanspruchnahme der Konstruktionsglieder Beachtung zu schenken sein, indem z. B. auf Druck widerstehende Teile streng genommen ein anderes elastisches Verhalten verlangen als Zugglieder. Es ist dies ein Umstand, auf den Prof. Krohn in einem Aufsätze im Civil-Ingenieur 1884 aufmerksam gemacht hat. Es ist ohne weiteres einzusehen, daß härterer Baustoff für Druckglieder jedenfalls besser als weicherer geeignet sei, weshalb auch z. B. für Bogenbrücken die Anwendung von härteren Eisensorten und Stahl sich vorteilhafter erweisen könne.

Für die Zulässigkeit eines Schweißeisenmateriales zu Brückenkonstruktionen giebt v. Tetmajer die folgenden Mindestwerte:

Für Brücken- und Hochbaukonstruktionen soll Schweißeisen mindestens die nachstehenden Festigkeitszahlen und Qualitätskoeffizienten aufweisen, wobei die Dehnung auf eine ursprüngliche Stablänge von 20 cm zwischen den Körnern zu beziehen ist.

1. Niet- und Schraubenmaterial:

Zugfestigkeit $\beta = 3,8 \text{ t f. d. qcm}$, Qualitätskoeffizient $c = 0,7 \text{ tcm}$,

Scherfestigkeit nicht unter $\frac{3}{4} \beta$.

2. Rund- und Stabeisen, Formeisen (Façoneisen, Profileisen) bis zu 1,6 cm Dicke:

$\beta = 3,5 \text{ t f. d. qcm}$, $c = 0,45 \text{ tcm}$.

3. Trägerbleche bis zu 1,6 cm Dicke:

Für die Längsrichtung:

$\beta = 3,4 \text{ t f. d. qcm}$, $c = 0,45 \text{ tcm}$,

für die Querrichtung, deren Länge die $1\frac{1}{2}$ fache mittlere Breite nicht überschreitet:

$\beta = 3,0 \text{ t f. d. qcm}$, $c = 0,15 \text{ tcm}$,

wenn die Länge größer ist als die $1\frac{1}{2}$ fache mittlere Breite:

$\beta = 2,8 \text{ t f. d. qcm}$, $c = 0,1 \text{ tcm}$.

Für Straßensbrücken, wo wirtschaftliche Rücksichten verbunden mit der untergeordneten Bedeutung des Bauwerkes auf die Verwendung geringerer Eisensorten hinweisen, werden die nachfolgenden Zahlen als äußerste Grenzen bezeichnet.

1. Niet- und Schraubeneisen:

$\beta = 3,6 \text{ t}$, $c = 0,7 \text{ tcm}$,

Scherfestigkeit nicht unter $\frac{3}{4} \beta$.

2. Stab- und Rundeisen:

$\beta = 3,4 \text{ t}$, $c = 0,38 \text{ tcm}$.

3. Formeisen u. s. w. unter 1,5 cm Dicke:

$\beta = 3,2 \text{ t}$, $c = 0,38 \text{ tcm}$.

4. Sogenannte Universaleisen bis zu 1,6 cm Dicke:

$\beta = 3,2 \text{ t}$, $c = 0,38 \text{ tcm}$.

5. Trägerbleche bis zu 1,6 cm Dicke:

Für die Längsrichtung:

$$\beta = 3,2 \text{ t}, \quad c = 0,36 \text{ tcm},$$

in Querrichtung für Bleche, deren Länge gleich oder kleiner als die $1\frac{1}{2}$ fache mittlere Breite:

$$\beta = 2,8 \text{ t}, \quad c = 0,1 \text{ tcm},$$

bei Längen größer als die $1\frac{1}{2}$ fache mittlere Breite:

$$\beta = 2,8 \text{ t}, \quad c = 0,05 \text{ tcm}.$$

(Mitteilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. 3. Heft. 1886.)

b) Das Flusseisen.

Je nach der Herstellungsart unterscheidet und benennt man die Flusseisensorten als Bessemer-, Thomas- bzw. Martin-Flusseisen.

Beim Bessemer-Verfahren wird gepresste Gebläseluft von unten her in zahlreichen Strahlen durch geschmolzenes Roheisen geleitet, welches in einem birnförmigen, an Zapfen aufgehängten und zum Kippen eingerichteten Behälter, der „Bessemerbirne“ oder dem „Konverter“, befindlich ist. Kohlenstoff, Silicium und Mangan verbrennen und durch ihre Verbrennung, zumal durch die des Siliciums, welches den eigentlichen Brennstoff bei diesem Vorgange bildet, wird die Temperatur des geschmolzenen Metalles um mehrere hundert Grade gesteigert: aus dem flüssigen Roheisen wird flüssiges schmiedbares Eisen, Flusseisen. Man pflegt 5 bis 10 t Roheisen mit einem Male zu verarbeiten; die Umwandlung erfolgt in 15 bis 30 Minuten.

Bei diesem Verfahren findet eine Abscheidung des Phosphors nicht statt und man muß, um ein brauchbares Flusseisen zu erhalten, phosphorarmes Roheisen verwenden.

Das Thomas-Verfahren unterscheidet sich von dem vorigen dadurch, daß die „Bessemerbirne“ mit einem aus gebranntem Dolomit gefertigten Futter versehen, beim Blasen ein Zuschlag von gebranntem Kalk gegeben und das Blasen bis nach Ausscheidung des Kohlenstoffes fortgesetzt wird. Hierdurch wird der Phosphor in der „Bessemerbirne“ in die Schlacke übergeführt und es zeigt sich, daß phosphorreiches Roheisen sich hierbei noch günstiger verhalte, weil der Phosphor bei diesem Verfahren als Brennstoff dient, sowie das Silicium beim Bessemer-Verfahren.

Das Thomas-Verfahren ist daher eine Abart des Bessemer-Verfahrens und wird im Gegensatz zu diesem — saueren — als basisches Verfahren bezeichnet.

Das Martin-Verfahren oder Flammofenschmelzen besteht darin, daß auf dem Herde eines, zur Erzeugung hoher Temperaturen, mit Siemensfeuerung versehenen Flammofens Roheisen mit schmiedbarem Alteisen zusammen geschmolzen wird. Unter der oxydierenden Einwirkung der Flamme verbrennen Mangan, Silicium und ein großer Teil des Kohlenstoffgehaltes des Einsatzes und es entsteht Flusseisen. Sind phosphorhaltige Materialien zu verarbeiten, so stellt man den Herd aus gebranntem Dolomit her, wie das Futter der „Thomasbirne“, und giebt Kalk als Zuschlag (basisches Martin-Verfahren).

Vergleicht man die Erzeugnisse des Martin-Verfahrens mit jenen des Bessemer- bzw. Thomas-Verfahrens, so kann man folgende Unterschiede hervorheben: Da das Martin-Verfahren nicht in 15 bis 30 Minuten, sondern in 4 bis 6 Stunden und darüber verläuft, so ist es viel leichter, durch Hinausziehen des Prozesses die Abscheidung der Verunreinigungen des Eisens zu erzielen und den verlangten Grad der Härte zu erreichen. Da bei den erstgenannten Verfahren Luft durch das flüssige Metallbad hindurchgetrieben wird, so ist dort mehr Veranlassung zur Aufnahme von Gasen und somit zur Blasen-

bildung geboten als beim Martin-Verfahren, wo die Luft nur über die mit Schlacke bedeckte Metallfläche hinweggleitet. Jedenfalls ist die Aufnahme von Gasen bei diesem Verfahren weit geringer, als bei den ersteren.

Bei gleicher Beschaffenheit der verwendeten Rohstoffe würde das Erzeugnis des Martin-Verfahrens im allgemeinen freier an eingeschlossenen Gasen und gleichförmiger in der chemischen Zusammensetzung sein können. Auch wird dabei die Ausscheidung der Verunreinigungen und die verlangte Beschaffenheit und Härte leichter erzielt, als beim Bessemer- und Thomas-Verfahren.

Das durch den Bessemer-, Thomas- bzw. Martinprozefs erzeugte kohlenstoffarme Eisen, Flusseisen, dessen spezifisches Gewicht bei Gewichtsberechnungen zu 7,85 angenommen wird, zeigt im Vergleiche mit Schweifeseisen wesentlich verschiedene Eigenschaften, die auf die Herstellungsart dieses Stoffes zurückzuführen sind.

Die Erkenntnis der feineren unterscheidenden Merkmale zwischen Schweifs- und Flusseisen wird besonders durch die mikroskopische Untersuchung des Gefüges unterstützt und es können auf Grund solcher Untersuchungen auch die Eigenschaften dieser beiden Materialien abgeleitet werden, wie dies Geh. Bergrat Dr. H. Wedding in einem Vortrage in der Versammlung des „Iron and Steel Institute“ am 7. Mai 1885 dargelegt hat.

Wir können es nicht unterlassen, die Ergebnisse dieses interessanten Vortrags in kurzem Auszuge nach dem in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure von 1885 erschienenen Berichte im Folgenden hier anzuführen.

Nach unserer Quelle ist die Gröfse des Kornes, welches, als dem regulären Krystallsystem angehörend, auf allen Seiten in der Form gleich erscheint, von zwei Umständen abhängig:

1. von der Dauer des Abkühlungsprozesses,
2. von der Natur und dem Vorkommen der fremden Elemente, welche entweder in Mischung oder in chemischer Verbindung in dem Eisen enthalten sind.

Unter sonst gleichen Umständen wächst die Gröfse des Kornes mit der Dauer des Abkühlungsprozesses, während andererseits bei Gleichheit der Abkühlung die Korngröfse mit dem Gehalte an Kohlenstoff bis zu 2% abnimmt und darüber hinaus nach beiden Seiten wächst. Phosphor begünstigt die Vergrößerung, Silicium, Schwefel, ein geringer Gehalt an Mangan, Titan, Chrom und Wolfram dagegen bewirken eine Verkleinerung der Eisenkrystalle.

Jedes Korn von schmiedbarem Eisen ist dehnbar. Wenn ein Druck auf ein einzelnes Korn in der Richtung nur einer Achse ausgeübt wird, wie beim Hämmern des Eisens auf einem Amboss, so wird das vielseitige Korn zu einer Tafel oder Schuppe umgestaltet. Wirkt dagegen der Druck in Richtung zweier Achsen gleichzeitig, wie z. B. beim Walzen in Spitzbogenkalibern oder beim Walzen und Schmieden unter beständiger Wendung des Stabes um 90°, so wird das Korn in eine Säule verwandelt, welche ein verlängerter regulärer Krystall ist und Sehne genannt wird. Eine Sehne kann sich nicht über ein gewisses Mafs ausdehnen, ohne schließlich wieder zu zerfallen. Der Kohlenstoffgehalt ist für diese Erscheinung in erster Linie maßgebend; überschreitet derselbe 0,5%, so zerfallen die Sehnen schon nach geringer Streckung zu Korn. Dasselbe bewirkt neben geringem Kohlenstoffgehalt ein sehr geringer Gehalt an Phosphor oder ein großer Gehalt an Silicium oder Schwefel. Das auf diese Weise durch Zerfallen der Sehne entstehende Korn ist stets kleiner als dasjenige, aus welchem die Sehne stammte. Hieraus erklärt sich, dafs kohlenstoffreicher Stahl und Feinkorneisen keine Sehne bilden und dafs kein Einfluss irgend welcher Art, mit Ausnahme einer höheren Temperatur, im Stande ist, aus sehnigem Eisen grobkörniges zu erzeugen. Der Bruch von sehnigem Eisen kann nur ein dem Querschnitt der Sehne entsprechendes Korn zeigen oder ein feineres, wenn eine Streckung stattgefunden hat.

Ogleich kohlenstoffarmes Eisen allein zur Bildung von Sehne geeignet ist, so tritt doch eine solche nicht bei jedem solchen Eisen ein, wenn ein Druck in Richtung zweier Achsen ausgeübt wird. Es ist bekannt, dafs im Schweifeseisen durch den Walzprozefs leicht Sehne erzeugt wird, dafs dagegen Flusseisen sehr selten Sehne bildet. Die mikroskopische Untersuchung des Schweifeseisens zeigt, dafs die einzelnen Sehnen Bündel bilden, die parallel zueinander liegen. Dieselben haben aber niemals eine große Länge; es schließen sich vielmehr stets neue Sehnenenden an, welche selten in der gleichen Achsenlinie, sondern meistens zu den ersteren versetzt, jedoch stets zu diesen parallel liegen. Hieraus läfst sich schließen,

dafs die Festigkeit des sehnigen Eisens von der Eigentümlichkeit abhängig ist, dafs die Enden der Sehnen in verschiedenen Querschnitten liegen, wie die Hanffäden in den Seilen.

Das Mikroskop zeigt ferner, dafs keine Sehne mit der nebenliegenden unmittelbar verbunden ist, weder in der Quer-, noch in der Längsrichtung. Eine Untersuchung der Ursache der Abscheidung der Sehnen untereinander ergibt das Vorhandensein einer trennenden Schicht, welche von Schlacken oder Glühspan (Fe_3O_4) gebildet wird. Diese Schichten umgeben die Sehnen stets bis zu ihren Enden, um dort in Form einer feinen Umhüllung entweder die Verbindung mit dem nächstfolgenden Sehnenbündel zu bilden oder infolge einer kurzen Unterbrechung zu verschwinden, in welchem letzteren Falle an diesem Punkte stets ein körniges Gefüge erscheint. Ebenso wie diese Kornbildung zwischen den Sehnen nur da auftritt, wo keine trennende Schlackenschicht vorhanden ist, so ist die Bildung der Sehnen eng an die Schlackenschicht geknüpft; es folgt daraus, dafs Sehnenbildung ohne die Gegenwart der Schlackenschicht nicht eintritt.

Bei der mikroskopischen Untersuchung der verschiedenen Eisensorten erscheint nur Tiegelstahl, der eine verhältnismäfsig schnelle Abkühlung erfahren hat, annähernd von gleichem Gefüge. In allen anderen Sorten, zumal in Probestücken aus Blöcken von grossem Querschnitt und verhältnismäfsig langsamer Abkühlung sind zwei verschiedene Beschaffenheiten durch Ätzen erkennbar, von denen die eine in die andere eingelagert ist. Die eine bildet stets ein Netzwerk, welches die andere Sorte, winkelig geformte Körper, einschliesst. Die letzteren werden von Dr. Wedding „krystallinisches Eisen“ und die das Netzwerk bildenden Partien „homogenes Eisen“ genannt. Die krystallinischen Eisenkörper kommen um so häufiger, aber gleichzeitig in um so kleineren Abmessungen vor, je mehr der Gehalt an Kohlenstoff sich 2% nähert. In weichem Eisen sind sie oft weit voneinander entfernt, aber dann stets in ansehnlicher Gröfse vorhanden. Das krystallinische Eisen ist in sich nicht gleichartig; das das Netzwerk bildende Eisen ist dagegen stets gleichartig und läfst sich, selbst bei sehr starker Vergrößerung, nicht in verschiedene Teile auflösen.

Die Sehnen von geschweiftem Eisen sind, wie parallele Drähte, in einem Bündel nur verbunden oder vielmehr getrennt durch Schlacke; wo aber die Sehnen durch Korn ersetzt sind, scheint dieses umgeben oder durchdrungen von homogenem Eisen. Die Ecken und Biegungen, welche durch letzteres bei der Umfassung der Körner gemacht werden, wachsen an Stärke mit den Krystallen, und dies erklärt die Brüchigkeit des grobkrystallinischen Eisens.

In Flusseisen andererseits bildet das Homogeneisen eine gleichmäfsige, das Krystalleisen von allen Seiten umgebende Schicht und stellt in dieser Weise die verbindende Masse dar. Diese Thatsache erklärt die grofse Zugfestigkeit des Flusseisens im Ver gleiche mit Schweifeseisen, indem der Zug auf jede einzelne Sehne wirkt, wie etwa auf jeden Draht mit einem Drahtbündel.

Nachdem die Elasticitätsgrenze überschritten ist, streckt sich jede Sehne für sich allein und bricht, wenn die Grenze der Tragfähigkeit überschritten wird, woraus hervorgeht, dafs Schweifeseisen stets allmählich, niemals plötzlich zerreißen oder brechen kann. Im Flusseisen dagegen strecken die Körner sich zwar unabhängig und verändern ihre Stellungen gegeneinander, aber der Verband löst sich nicht, denn das homogene Eisen bildet stets die Verbindung, bis die Grenze der Tragfähigkeit erreicht ist; dann erfolgt erst ein Bruch, nun aber ein plötzlicher Bruch. Die Gleichmäfsigkeit des Flusseisens im ganzen wird durch die vorhandenen Blasenräume, ohne welche dasselbe nicht darstellbar ist, unterbrochen. Die Festigkeit eines fertigen Stückes Eisen ist abhängig von der in dem beanspruchten Querschnitte enthaltenen Menge von Eisen, indem bei Schweifeseisen die Schlackenmenge, bei Flusseisen die Fläche der Blasenquerschnitte in Abzug zu bringen ist. Diese Berechnung fällt für das Flusseisen entschieden günstig aus.

Aus den vorstehenden Untersuchungen Weddings ergibt sich unter anderem, daß das Vorhandensein von eingelagerter Schlacke im Gefüge des Eisens im allgemeinen als bezeichnendes Merkmal des Schweißeisens gelten kann.

Das Bruchgefüge des Flusseisens ist meist feinkörnig; bei weichen Sorten zeigt die Bruchfläche der zerrissenen Stäbe den sogenannten milden Bruch; das Gefüge ist weder entschieden sehnig noch körnig. In diesem Falle erscheint die Bruchfläche mit starker Einschnürung und der kennzeichnenden Furchen- bzw. Trichterbildung. Ziemlich häufig kann beginnende Sehnenbildung bis kurze Sehne beobachtet werden.

Die Farbe des Bruches ist verschieden, man findet dieselbe licht bis tiefgrau. Die erstere wird von dem fettig bis seidigen Glanze des milden bis schwachsehnigen Gefüges begleitet. Der feinkörnige Bruch ist licht und hell glänzend. Bisweilen wurden auch schieferige, löcherige und selbst amorphe Brüche beobachtet, welch' letztere dann tiefgraue Färbung besaßen. Bei größeren Querschnitten finden sich nicht selten Hohlräume — Blasen — vor, welche jedoch bei dünneren Walzstücken flach zusammengedrückt erscheinen.

Die Festigkeit des Flusseisens ist von der chemischen Zusammensetzung, insbesondere von dem Gehalte an Kohlenstoff, Mangan, Silicium und Phosphor abhängig; sie wird beeinflusst vom Walzverfahren, der mechanischen Bearbeitung und von der Einwirkung verschiedener Wärmeszustände.

Der Kohlenstoff übt einen bedeutenden Einfluß auf die Festigkeit des Flusseisens aus, so zwar, daß durch Erhöhung des Kohlenstoffgehaltes von 0,1% auf 0,9% die Zugfestigkeit fast auf das Doppelte gesteigert werden konnte. Bauschinger⁴³⁾ fand z. B. bei Versuchen mit Bessemer-Eisen die folgenden Verhältnisse:

Kohlenstoff %	Elasticitätsgrenze kg/qmm	Zugfestigkeit kg/qmm	Dehnung auf 40 cm Mefslänge %
0,14	29,50	44,30	21,8
0,19	33,10	47,85	20,1
0,46	34,50	53,30	18,1
0,54	34,90	55,60	17,8
0,66	37,45	62,95	13,7
0,78	37,50	64,70	11,4
0,87	42,90	73,35	8,1
0,96	48,70	83,05	6,6

Bei ungefähr 1% Kohlenstoffgehalt ist gewöhnlich die höchste Zugfestigkeit vorhanden; bei größerem Gehalte an Kohlenstoff nimmt dieselbe wieder ab.

Bauschinger's Versuche über die Druckfestigkeit an Quadratstäben von 30 mm Seite und 90 mm Länge mit Reschitzaer Martin-Eisen ergaben:⁴⁴⁾

C %	Elasticitätsmodul kg/qmm	Elasticitätsgrenze kg/qmm	Beginn der Zerdrückung bei kg/qmm	Höchste Belastung (ohne vollständige Zerdrückung) kg/qmm
0,12	22 220	14,44	50,00	105,00
0,28	22 520	17,84	67,00	91,00
0,50	22 660	17,90	71,00	114,00
0,75	22 220	20,00	86,00	140,00
1,00	22 550	34,40	105,00	216,00
1,15	22 090	37,78	129,00	211,00

⁴³⁾ Weyrauch a. a. O.

⁴⁴⁾ Ledebur. „Eisen und Stahl.“

Das Mangan bildet einen regelmässigen Bestandteil des Flusseisens, bei dessen Erzeugung dieser Stoff als Spiegeleisen oder Ferromangan dem flüssigen Eisen zugesetzt wird, damit demselben der Sauerstoffgehalt entzogen werde.

Mangan erhöht wie Kohlenstoff die Festigkeit und Elasticitätsgrenze und verringert wie dieser die Zähigkeit.

Man nimmt an, dass vier bis fünf Teile Mangan ungefähr die gleiche Wirkung auf die Elasticitätseigenschaften hervorrufen, wie ein Teil Kohlenstoff; bei Zunahme des Mangangehaltes über 3% wird jedoch die Festigkeit verringert (Ledebur).

Siliciumgehalt erhöht die Festigkeit und vermindert die Zähigkeit.

Phosphor übt den nachtheiligsten Einfluss auf die Zähigkeit des Flusseisens aus: dasselbe wird „kaltbrüchig“. Dieser Einfluss wächst mit dem Kohlenstoffgehalte des Eisens.

Der höchste noch zulässige Gehalt an Phosphor im Konstruktions-Flusseisen kann mit 0,1% angenommen werden.

Schwefel und Kupfer bewirken Rotbruch, wie beim Schweiß Eisen.

Nickel vermag die Festigkeit des Flusseisens bedeutend zu erhöhen, ohne die Zähigkeit zu schädigen. Zusätze von Nickel in 1 bis 3% und darüber werden gegeben, wo es sich um Erzielung möglichst hoher Festigkeit neben grosser Zähigkeit handelt, wie z. B. bei Lokomotivachsen und Bandagen, zur Herstellung von Panzerplatten u. dergl.

Der Einfluss der chemisch fremden Beimengungen des Flusseisens auf dessen Zugfestigkeit wurde wiederholt eingehend studiert und man war bemüht, die Abhängigkeit der Festigkeit von der Menge dieser Bestandteile durch Formeln zum Ausdruck zu bringen.

Viktor Deshayes stellte die Beziehung auf:

$$Z = 30 + 18 C + 36 C + 18 Mn + 15 P + 10 Si^{45}),$$

wobei Z die Zugfestigkeit in kg/qmm , C , Mn , P und Si den Gehalt an Kohlenstoff, Mangan, Phosphor und Silicium in Prozenten bedeuten.

Bauschinger giebt für Bessemerstahl die Formel: $Z = 4,364 (1 + C^2)$; Z in t/qcm , C in %.

Jüptner von Jonstorff⁴⁶⁾ entwickelt die Beziehung:

$$Z = 2,5 + \frac{2}{3} C + \frac{2}{7} Si + \frac{1}{7} Mn,$$

wobei Z in t/qcm , C , Si und Mn in ‰ einzusetzen ist.

Jüptner vergleicht die Ergebnisse seiner Formel mit unmittelbar erhobenen Festigkeitsziffern von Baustoffen, deren Festigkeiten zwischen 4,22 bis 10,47 t/qcm lagen und fand in den verglichenen 646 Fällen eine ziemlich befriedigende Übereinstimmung.

Weniger befriedigten die Vergleiche mit bearbeiteten Stoffen und findet Jüptner, dass der Einfluss der Bearbeitung auf die Festigkeit besonders berücksichtigt werden müsse.

Er stellt die Beziehung auf:

$$Z = A + \Sigma,$$

wobei $\Sigma = \frac{2}{3} C + \frac{2}{7} Si + \frac{1}{7} Mn$ bedeutet und der Wert A das Mass für die Grösse der Bearbeitung ist.

A selbst setzt sich zusammen aus dem Anteile der Zerreiissfestigkeit, welcher zusammen mit dem durch die fremden Bestandteile bedingten Werte Σ die Festigkeit des völlig ungehärteten und unbearbeiteten Stoffes darstellt, aus dem durch die Härtung bewirkten Festigkeitsanteile h und aus der durch mechanische Bearbeitung verursachten Festigkeitsänderung a .

⁴⁵⁾ Résal. Fonte, fer et acier. Paris 1892. Pag. 264.

⁴⁶⁾ „Beziehungen zwischen Zerreiissfestigkeit und chemischer Zusammensetzung von Eisen und Stahl.“ Leipzig 1895.

Demnach ist:

$$A = f + h + a.$$

Die Festigkeit der verschiedenen Eisenmaterialien besteht daher aus der natürlichen Festigkeit des Materiales, der Materialfestigkeit: $M = f + \Sigma$ und aus der durch die Bearbeitung des Stoffes verursachten Festigkeitsänderung, der Bearbeitungsfestigkeit:

$$B = h + a = A - f.$$

Jüptner faßt die Ergebnisse seiner Untersuchungen zu folgenden Schlüssen zusammen:

1. Die Zerreißfestigkeit ist abhängig von der chemischen Zusammensetzung des Stoffes und von seiner Bearbeitung.
2. Für (annähernd) gleich bearbeitete Stoffe läßt sich die Zerreißfestigkeit (wenigstens annähernd) aus deren Zusammensetzung berechnen.
3. Umgekehrt läßt sich aus der gegebenen Zusammensetzung und Zerreißfestigkeit der Wert A berechnen, welcher gestattet, die Größe der Bearbeitung, welche der Stoff erfahren, zu schätzen.
4. Die Größe von A kann neben den Qualitätszahlen von Tetmajer zur Beurteilung der Eigenschaften des betreffenden Materiales mit Vorteil herangezogen werden.
5. Der Wert von A kann zur Erkennung, also auch zur Abstellung von Fehlern in der Herstellung der Stahlmaterialien dienen.

Deshayes hat auch die Abhängigkeit der Bruchdehnung von der chemischen Zusammensetzung durch die Formel:

$$\lambda = 42 - 36 C - 5,5 Mn - 6,0 Si$$

für die Maßlänge von 100 mm zum Ausdrucke gebracht.⁴⁷⁾

Jüptner stellte für die Beziehungen zwischen der chemischen Zusammensetzung und der Kontraktion des Bruchquerschnittes die Formel auf:

$$q = b - 7 \left(\frac{2}{3} C + \frac{2}{7} Si + \frac{1}{7} Mn \right)^{48)}$$

Dabei bedeutet q die Kontraktion in % des ursprünglichen Querschnittes und b einen Festwert, dessen Größe (ebenso wie A in der Festigkeitsformel) von dem Grade der Stoffbearbeitung abhängig ist. Der Wert von b liegt nach den Ermittlungen Jüptner's durchschnittlich bei 60, sodafs für die Kontraktion:

$$q = 60 - 7 \left(\frac{2}{3} C + \frac{2}{7} Si + \frac{1}{7} Mn \right)$$

folgt.

Der Vergleich der Ergebnisse dieser Formel mit jenen der unmittelbaren Messung bei 646 Fällen ergab eine befriedigende Übereinstimmung, wenn auch die Abweichungen hier — wie zu erwarten — größer waren, als bei der Zerreißfestigkeit.

Jüptner gelangt zu den nachstehenden Schlufsfolgerungen:

1. Die Querschnittsverminderung ist abhängig von der chemischen Zusammensetzung des Stoffes und von seiner Bearbeitung.
2. Für (annähernd) gleich bearbeitete Stoffe läßt sich die Kontraktion (wenigstens annähernd) aus deren Zusammensetzung berechnen.
3. Umgekehrt läßt sich aus der gegebenen Zusammensetzung und der Kontraktion der Wert von b berechnen, welcher gestattet, die Größe der Bearbeitung, welche der Stoff erfahren, zu schätzen.
4. Die Größe von b kann gleichfalls zur Beurteilung der Eigenschaften des Stoffes herangezogen werden.
5. Der Wert von b kann zur Erkennung, also auch zur Abstellung von Fehlern in der Herstellung der Eisenmaterialien dienen.⁴⁹⁾

⁴⁷⁾ Résal. Fonte, fer et acier. Paris 1892. Pag. 266.

⁴⁸⁾ Hans Freiherr Jüptner von Jonstorff. Beziehungen zwischen der chemischen Zusammensetzung und den physikalischen Eigenschaften von Eisen und Stahl. Leipzig 1896.

⁴⁹⁾ Es möge zu den empirischen Formeln Jüptners bemerkt werden, dafs, obwohl der Zahlenwert $\Sigma = \frac{2}{3} C + \frac{2}{7} Si + \frac{1}{7} Mn$ sowohl in dem Ausdruck für die Zugfestigkeit Z , als auch in jenem für die Kontraktion q erscheint, demselben jedoch hier und dort eine verschiedene Bedeutung innewohnt, indem derselbe bei Z einer Festigkeitszahl, bei q aber einer Verhältniszahl entspricht.

Durch mechanische Bearbeitung des Flusseisens, mit welcher eine Formveränderung verbunden ist, also durch Schmieden, Walzen u. s. w. werden die Festigkeitseigenschaften in hohem Grade beeinflusst. Die Gröfse dieses Einflusses ist jedoch von der Temperatur, in welcher die Bearbeitung stattfindet, abhängig.

Die Bearbeitung (Schmieden, Walzen u. s. w.) bei Rotglut erhöht die Festigkeit, ohne dafs die Zähigkeit merklich vermindert würde. Dagegen bewirkt die Bearbeitung in gewöhnlicher Temperatur eine Steigerung der Festigkeit und der Elasticitätsgrenze, jedoch zugleich eine Erniedrigung der Zähigkeit. Je gröfser die ursprüngliche Festigkeit des Flusseisens war, desto deutlicher zeigt sich dieser Einfluß der Bearbeitung im kalten Zustande. Durch Erhitzen auf Rotglut des durch Bearbeitung im kalten Zustande fester, härter und spröder gewordenen Eisens lassen sich dessen Festigkeitseigenschaften annähernd wieder auf das ursprüngliche Mafs zurückführen (Ledebur).

Zwei gleiche Gegenstände aus demselben Eisen gefertigt, können ein wesentlich abweichendes Verhalten zeigen, je nachdem die Herstellung in höherer oder niedrigerer Temperatur stattfand. So werden z. B. die Festigkeitseigenschaften von Walzstücken Abweichungen zeigen, je nachdem dieselben im rotwarmen oder bereits im abgekühlten Zustande die Walzen verlassen haben.

Eine ähnliche Beeinflussung der Festigkeitseigenschaften, wie durch Bearbeitung im kalten Zustande, übt auch das plötzliche Ablöschen im glühenden Zustande aus; auch in diesem Falle wird diese Wirkung durch nachfolgendes Ausglühen wieder aufgehoben.

Nachstehende Zusammenstellung Weddings von Versuchsergebnissen mit Peiner Thomaseisen⁵⁰⁾ lassen den Einfluß der Bearbeitungen bei verschiedenen Temperaturen des Ablöschens und Ausglühens erkennen.

Zustand	Streckgrenze kg/qmm	Zugfestigkeit kg/qmm	Längen- ausdehnung %	Querschnitts- verminderung %
Vom Walzwerke kommend	31,4	44,5	21,9	57,8
Im Anlieferungszustande geglüht	30,4	44,3	22,3	55,5
In Rotglut auf 60% des ursprünglichen Querschnittes ausgeschmiedet	37,3	47,8	17,6	63,8
Blauwarm auf 55% des ursprünglichen Querschnittes ausgeschmiedet	46,3	53,5	5,9	54,1
Nach dem blauwarmen Ausschmieden geglüht	32,5	45,8	15,6	53,3
Kalt auf 66% des ursprünglichen Querschnittes ausgeschmiedet	71,6	74,2	2,3	32,1
Nach dem kalten Ausschmieden geglüht	32,1	45,3	18,4	54,7
Aus Rotglut abgelöscht	47,9	64,6	10,3	44,9

Einfluß von Verletzungen der Oberfläche. Flusseisen, insbesondere härteres Flusseisen, zeigt sich gegen äußere Verletzungen oft sehr empfindlich. Stäbe, gleichen Materiales und gleichen Querschnittes, die im kalten, unverletzten Zustande sich vollständig zusammenbiegen und flach niederschmieden lassen, ohne die Spur eines Risses aufzuweisen, erleiden durch eine leichte, durch Meißelhiebe erzeugte Einkerbung grofse Einbuße an ihrer ursprünglichen Zähigkeit, indem ein so verletzter Stab, derart gebogen, dafs die Verletzung auf der Zugseite liegt, schon bei weit geringeren Biegungen bricht, wobei oft der Bruch plötzlich im ganzen Querschnitte erfolgt. Quer zur Walz-

⁵⁰⁾ Ledebur. „Eisen und Stahl“ a. a. O.

richtung gebogen, ergibt sich diese Empfindlichkeit meist in noch höherem Grade. Besonders bemerkbar wird der Einfluss solcher Verletzungen dann, wenn das Abbiegen der Stäbe stofsweise, durch Hammerschläge erfolgt.

Unbeabsichtigte Verletzungen, hervorgebracht durch die Schärfe des Schelleisens beim Nieten, bewirkten in einigen zur Beobachtung gelangten Fällen eine örtliche Härtung des Stoffes: die in solche Stellen gefallene Bruchfläche zeigte teils deutlich die örtliche Härtung durch körniges, stahlartiges Gefüge und ebene, nicht eingeschnürte Fläche, während der übrige Teil der Bruchfläche mildes Gefüge, starke Einschnürung und die zähem Materiale eigentümlichen Furchenbildungen besafs.

Einfluss des Lochens. Das Durchlochen des Eisens mittels eines Stempels bewirkt eine Härtung der Lochränder und zwar insbesondere an der Austrittsstelle des Lochstempels. Stäbe und Platten, welche in ihrer Mitte eine gestanzte Lochreihe erhalten und dann so gebogen werden, dafs die Austrittsstellen des Lochstempels auf der Zugseite liegen, zeigen bei noch verhältnismäfsig kleinen Biegungswinkeln schon das Auftreten von Rissen, welche von den Löchern aus nach verschiedenen Richtungen sich entwickeln und bei fortgesetzter Biegung zu vollständigem Aufplatzen der Lochränder führen.

Bruchversuche an zusammengesetzten, genieteten Trägern haben den sehr schädlichen Einfluss des Lochens der Nietlöcher mittels Durchstanzens auf das Verhalten solcher Träger erwiesen.

Bei den vom österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereine im Jahre 1889 durchgeführten Versuchen wurden auch Parallelversuche zum Studium des Einflusses dieser Anarbeitung angestellt. Zwei Trägerpaare von durchaus gleichen Abmessungen, aus Material derselben Herkunft (Martin-Flusseisen) und nahezu gleicher Festigkeit wurden so hergestellt, dafs das eine gebohrte Nietlöcher erhielt, während bei dem anderen die Nietlöcher gestanzt und nur auf das Notwendigste nachgerieben wurden. Beide Trägerpaare (Fachwerksträger von 10,0 m Stützweite und 1,2 m Höhe) wurden stufenweise gesteigerten Belastungen unterworfen und zum Bruche gebracht.

Die Zugfestigkeit des Martin-Flusseisens dieser Träger betrug durchschnittlich 3,8 t/qcm. Der Bruch des ersteren trat bei einer rechnungsmäfsigen Spannung von 3,3 t/qcm, jene des zweiten bei einer solchen von 2,8 t/qcm ein, sodafs dieses gegen das erstere um etwa 18% zurückblieb. Noch gröfser war jedoch der Unterschied in der Gröfse der Widerstandsarbeit beider Träger: Während die Widerstandsarbeit der plastischen Formänderung der ersten Träger 277,3 cmt betrug, erreichte jene der letzteren den Wert von 140,8 cmt, also fast nur die Hälfte des ersteren. Dazu ist zu bemerken, dafs der Baustoff ausgezeichnete Festigkeitseigenschaften besafs und zwar bei einer mittleren Festigkeit von 3,8 t/qcm eine durchschnittliche Bruchdehnung von 27,6% auf 200 mm. Gelegentlich einer zweiten Versuchsreihe, welche seitens desselben Vereines im Jahre 1897 durchgeführt worden ist, wurden an genieteten Fachwerksträgern aus Thomas-Flusseisen von gleicher Konstruktion, wie bei den früheren Versuchen, Biege- und Bruchversuche vorgenommen. Auch diesmal wurde der Einfluss der Anarbeitung an einem Trägerpaare untersucht, welches gestanzte Nietlöcher erhielt. Bei diesem Trägerpaare wurden die nachfolgenden Ergebnisse erhoben.

Die Festigkeit des ursprünglichen Materiales betrug 3,97 bis 4,4 t/qcm.

Bei einer Belastung, welche der rechnungsmäfsigen Spannung von 2,4 t/qcm entsprach, erschienen bereits die ersten, von den Nietlöchern ausgehenden Anrisse, welche bei Erhöhung der Spannung auf 2,6 t/qcm zu einem vollständigen Durchreißen des betreffenden Teiles führten. Die Gröfse der plastischen Formänderungsarbeit der Träger betrug in diesem Falle nur 55,8 cmt.

Da die Gröfse der plastischen Formänderungsarbeit einen Mafsstab für den Widerstand der Träger gegen lebendige Kräfte und Stofswirkungen bietet, so ist aus dem Vorigen ersichtlich, dafs das Lochen an und für sich durch Herabsetzung dieses Widerstandes gerade nach dieser Richtung hin die nachteiligste Wirkung auszuüben vermag.

Es ist bekannt und durch zahlreiche Versuche erhärtet, dafs das Ausreiben oder Nachbohren der gestanzten Nietlöcher, wodurch das Material der Nietwände auf 1 bis 2 mm Breite entfernt wird, die schädliche Wirkung des Lochens beseitigt. Trotzdem

ist es z. B. in Österreich Vorschrift, daß bei Verwendung von Flußeisen zu Brückenkonstruktionen die Herstellung der Nietlöcher nur durch Ausbohren geschehen darf.

Der Einfluß der Temperatur bei der Bearbeitung des Baustoffes wurde bereits insofern besprochen, als festgestellt wurde, daß durch die Bearbeitung bei Rotglut keine Schädigung, vielleicht eher eine Verbesserung desselben bewirkt werde, daß die Bearbeitung (Schmieden, Walzen u. dergl.) in gewöhnlicher Temperatur eine Erhöhung der Festigkeit, dagegen eine Verminderung der Dehnbarkeit zur Folge hat und daß nachträgliches Ausglühen die durch Bearbeitungen hervorgebrachten Festigkeitsänderungen diese wieder nahezu auf den ursprünglichen Zustand zurückbringen läßt.

Von größtem und nachteiligstem Einflusse auf die Festigkeitseigenschaften des Flußeisens ist jedoch dessen Bearbeitung bei Gelb- bis Blauwärme, d. i. bei Temperaturen, bei welchen blank poliertes Eisen die Anlauffarben von gelb bis dunkelblau annimmt.

Flußeisenstäbe, welche innerhalb dieser Temperaturen bearbeitet werden, zeigen nach dem Erkalten hohe Sprödigkeit und brachen, nach Verletzung der Oberfläche durch eine eingehobelte, etwa 1 mm tiefe Kerbe, bei dem Versuche, sie zu biegen, sofort wie Glas ab.

Es scheint, daß die Gelbwärme von noch schädlicherem Einflusse sei als die Blauwärme. Dieser Einfluß macht sich jedoch sowohl auf Fluß- als auf Schweiß-eisen geltend.⁵¹⁾

Ähnlich der Wirkung von Bearbeitungen in Blauwärme ist für das Flußeisen der Einfluß sehr niederer Temperaturen. Stäbe, welche durch Einlegen in feste Kohlensäure gekühlt worden waren, wobei — 60° C. gemessen wurde, zeigten sich außerordentlich spröde. Im verletzten Zustande ertrugen diese Stäbe keine merkliche Biegung und sprangen hierbei wie Glas entzwei.⁵²⁾

Einfluß der Nietung. Das im glühenden Zustande eingebrachte, gestauchte und fertig geschlagene Niet giebt seine Wärme an die Umgebung ab, wodurch diese sehr leicht die gefährliche Temperatur der Gelb- oder Blauwärme annehmen kann. Erfolgt das Nieten mit Maschinen, wo unter ruhigem Drucke das Niet rasch fertig gesetzt wird, so ist ein schädlicher Einfluß dieses Verfahrens nicht zu befürchten; beim Nieten von Hand jedoch können die Schläge des Vorschlaghammers auf das Schelleisen bei der Kopfbildung auf die Umgebung des Nietes leichthin die Wirkung einer Bearbeitung bei kritischer Temperatur ausüben und hierdurch schädlich werden. Dies gilt auch ganz besonders von Fehlschlägen. Außer diesem ist Gefahr vorhanden, daß durch die Schärfe des Schelleisens Verletzungen der Eisenoberfläche nächst dem Nietkopfe entstehen, auf deren Schädlichkeit bereits oben hingewiesen worden ist.

Es ist daher bei Flußeisenkonstruktionen die Herstellung der Nieten mittels Maschinen soweit als möglich anzustreben.

Da der Einfluß kalter Bearbeitung und äußerlicher Verletzungen auf das Flußeisen um so größer ist, je härter der Stoff, bezw. je höher seine Festigkeit ist, so ist es angezeigt, die äußerste Grenze der noch zulässigen Festigkeit — die höchste Festigkeitsziffer — vorzuschreiben und zwar um so mehr, als die letzten Versuche des öster-

⁵¹⁾ A. Kurzwernhart. Über Blauwärme. „Stahl und Eisen“ 1896, No. 21.

⁵²⁾ Bericht des Brückenmaterial-Ausschusses über die Zulässigkeit des Thomas-Flußeisens zu Brückenkonstruktionen. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1899.

reichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom Jahre 1897 unzweifelhaft erwiesen haben, daß Thomas-Flufseisen von höherer Festigkeit als etwa 4,3 t/qcm für Brückenkonstruktionen gewöhnlicher Anarbeitung nicht die Gewähr der erforderlichen Zuverlässigkeit bietet, während das aus gleichem Herstellungsverfahren hervorgegangene Material, dessen Festigkeit jedoch nur 3,5 bis 4,3 t/qcm betrug, allen Ansprüchen, die an ein gutes Konstruktionsmaterial gestellt werden können, vorzüglich Genüge geleistet hat.

Träger aus Martin-Flufseisen haben auch bei höherer Materialfestigkeit (4,5 bis 4,85 t/qcm) ein sehr gutes Verhalten gezeigt und keinen Anlaß gegeben, derartiges Material von der Verwendung zu Brückenbauten auszuschließen. Trotzdem wird in Österreich das Martin-Material nur bis zur Höchstfestigkeit von 4,5 t/qcm zu Brückenkonstruktionen zugelassen.

Die Festigkeitsverhältnisse des Materiales der wiederholt erwähnten Wiener Versuche vom Jahre 1889, erhoben an Stäben, welche aus verschiedenen Orten der gebrochenen Fachwerksträger entnommen wurden, sind in den nachstehenden Zusammenstellungen gegeben:

Herkunft des Stoffes und Ort des entnommenen Probestabes	Elasticitäts- grenze	Elasticitätsziffer	Zugfestigkeit	Bruchdehnung auf 200 mm
	t/qcm	t/qcm	t/qcm	%
Martin-Flufseisen von Kladno-Teplitz:				
Stehblech vom Trägerende	1,75	2040	3,91	22,5
„ nahe der Bruchstelle	2,35	2050	3,99	22,5
Winkelisen vom Trägerende	2,45	2090	4,39	27,5
„ nahe der Bruchstelle	2,47	2080	4,42	26,5
Martin-Flufseisen von Donawitz:				
Stehblech vom Trägerende	2,31	1990	3,76	28,3
„ nahe der Bruchstelle	2,40	1950	3,84	25,8
Winkelisen vom Trägerende	2,10	2000	4,01	27,3
„ nahe der Bruchstelle	2,10	2000	3,90	29,5
Martin-Flufseisen von Teschen:				
Stehblech vom Trägerende	2,02	2000	3,82	30,75
„ nahe der Bruchstelle	1,70	2070	4,05	31,75
Winkelisen vom Trägerende	1,73	2090	3,56	21,25
„ nahe der Bruchstelle	1,44	1920	3,91	26,5
Martin-Flufseisen von Witkowitz:				
Stehblech vom Trägerende	2,08	1970	4,48	25,3
„ nahe der Bruchstelle	2,52	2030	4,51	28,0
Winkelisen vom Trägerende	1,80	2080	4,85	28,0
„ nahe der Bruchstelle	2,73	2030	4,81	23,5
Thomas-Flufseisen von Kladno-Teplitz:				
Stehblech vom Trägerende	1,69	1950	4,04	25,0
„ nahe der Bruchstelle	2,09	2000	4,08	17,0
Winkelisen vom Trägerende	1,73	1920	3,47	31,5
„ nahe der Bruchstelle	2,33	1960	3,84	28,3

(Die vorstehenden Ergebnisse wurden zum Teil von Prof. Jenny, zum Teil von Prof. Böck ermittelt.)

Hiernach lagen die Festigkeitszahlen des ursprünglichen Stoffes dieser Versuchsträger zwischen 3,5 bis 4,85 t/qcm, die Elasticitätsziffern zwischen 1920 bis 2090 t/qcm, waren im Mittel 2013 t/qcm. Die Ziffern der Elasticitätsgrenzen eines und desselben Stoffes zeigen, insbesondere bei höherer Festigkeit, den Einfluß der überstandenen großen Anstrengungen durch eine oft beträchtliche Erhöhung; so z. B. bei dem Witkowitz Martin-Flufseisen, wo die ursprüngliche Elasticitätsgrenze im Mittel von 1,94 t/qcm auf 2,65 t/qcm, d. i. um 36% gehoben erscheint.

Die Festigkeit und die Elasticitätsziffer zeigten sich durch die hohen Anstrengungen kaum merklich beeinflusst. Das Verhältnis der Elasticitätsgrenze zur ursprünglichen Festigkeit betrug 0,4 bis 0,57, im Mittel 0,45.

Bei den Wiener Versuchen vom Jahre 1897 mit Fachwerkträgern aus Thomas-Flusseisen wurden die folgenden Festigkeitsverhältnisse verschiedener Konstruktionsteile von Prof. Böck erhoben.

Herkunft des Stoffes, Satznummer, Ort des entnommenen Probestabes	Elasticitäts-grenze	Elasticitäts-ziffer	Streck-grenze	Zug-festigkeit	Bruch-dehnung auf 150 mm	Kontraktion
	t/qcm	t/qcm	t/qcm	t/qcm	%	%
Teplitz. Ch.-No. 32282:						
Stehblech am Druckgurt im mittleren Fache I T	1,90	2196	2,50	3,496	23,5	63,5
Stehblech am Zuggurt nahe der Bruchstelle I T	2,15	2143	2,37	3,49	22,3	67,4
Kladno. Ch.-No. 84133:						
Stehblech am Druckgurt im mittleren Fache II K	1,95	2168	2,95	4,34	26	57
Desgl. II K	2,17	2143	3,39	4,91	18,7	47
Stehblech am Zuggurt nahe der Bruchstelle II K	1,74	2069	2,82	4,46	21,3	54
Kladno. Ch.-No. 84157:						
Stehblech am Druckgurt im mittleren Fache III K	1,94	2171	2,80	4,05	22,3	56
Desgl. III K	1,98	2206	2,80	4,04	21,5	60
Stehblech am Zuggurt nahe der Bruchstelle III K	1,87	2152	2,70	3,95	21,3	57
Zugdiagonale im Mittelfache des Trägers II K	2,15	2089	3,26	4,42	14	54
Zugdiagonale im Mittelfache des Trägers III K	2,12	2100	3,09	4,11	17,3	54
Kladno. Ch.-No. 84158:						
Gurtwinkel am Zuggurt in Trägermitte II K	2,28	2190	2,70	4,14	12,3 (?)	53
Winkel der Druckdiagonalen im mittleren Fache II K	1,90	2143	3,50	4,62	14	51
Stehblech IV K	1,90	2230	3,34	4,39	20	62
Kladno. Ch.-No. 84137:						
Druckdiagonale im Mittelfache III K	1,91	2072	3,39	4,35	17,2	50
Kladno. Ch.-No. 84173:						
Gurtwinkel des Zuggurtes in Trägermitte III K	1,92	2200	3,10	4,27	19,1	56
Teplitz. Ch.-No. 32322:						
Gurtwinkel des Zuggurtes in Trägermitte I T	1,98	2130	3,3	4,32	19	54
Teplitz. Ch.-No. 32316:						
Zugdiagonale im Mittelfache I T .	2,32	2329	2,7	3,80	21	61
Druckdiagonale, L-Eisen im Mittelfache I T	2,12	2137	2,75	3,94	21	42

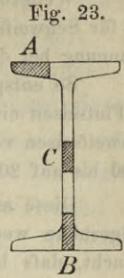
Von den in Überlängen angelieferten Walzstücken wurden Stäbe zur Vornahme von technologischen Proben geschnitten und wurden an diesen auch im verletzten Zustande die gewöhnlichen Biegeversuche angestellt. Aus letzteren Stäben wurden zur Prüfung der ursprünglichen Festigkeit nach mäfsigem Ausglühen bei Rotglut noch Stäbe für die Festigkeitsversuche hergestellt, welche von Prof. Kirsch durchgeführt, die folgenden Ergebnisse lieferten:

Herkunft des Stoffes, Satznummer, Konstruktionselement	Elasticitäts- grenze t/qcm	Elasticitäts- ziffer t/qcm	Streck- grenze t/qcm	Zug- festigkeit t/qcm	Bruch- dehnung ‰	Kontraktion ‰
Teplitz. Ch.-No. 32282:						
Stehblech	2,10	1940	2,94	4,04	23,5	68
Kladno. Ch.-No. 84133:						
Stehblech	1,24	1896	2,89	4,57	23	57
Kladno. Ch.-No. 84157:						
Stehblech	1,41	1950	3,02	4,15	20,8	71
Zugband	1,24	2010	2,89	4,30	25	69
Kladno. Ch.-No. 84158:						
Stehblech	2,60	2005	3,20	4,42	24,5	61
Zugband	2,51	2100	3,15	4,15	25,2	73
Winkelisen	2,53	2045	2,92	4,16	30,7	68
Kladno. Ch.-No. 84137:						
Stehblech	2,64	1920	3,04	4,28	24,2	70
Kladno. Ch.-No. 84173:						
Winkelisen	2,37	1980	2,91	4,00	24,4	73
Teplitz. Ch.-No. 32322:						
Winkelisen	2,60	2084	2,80	3,94	28,7	71
Teplitz. Ch.-No. 32316:						
Zugdiagonale	1,88	1865	2,64	3,84	29,5	72
Winkelisen	2,08	2035	2,46	3,74	29,0	73

Aus dem Vergleiche der Zahlen für Stücke aus ein und demselben Satze fällt sofort in die Augen, daß namentlich die Elasticitätsziffer des geglühten Stoffes niedriger, die Bruchdehnungen und Kontraktionen höher geworden sind. Die Festigkeitszahlen des geglühten Stoffes lagen zwischen 3,74 und 4,57 t/qcm, jene des ungeglühten zwischen 3,5 bis 4,9 t/qcm. Die Elasticitätsziffer des geglühten Stoffes war im Mittel 1986 t/qcm, jene des ungeglühten Trägerbaustoffes 2159 t/qcm. Verhältnismäßig gering zeigte sich dieser Einfluß auf die Höhe der Streckgrenze und der Festigkeit.

Herkunft, Satznummer, Profilnummer und Ort	Elasticitäts- grenze t/qcm	Elasticitäts- ziffer t/qcm	Streck- grenze t/qcm	Zug- festigkeit t/qcm	Bruch- dehnung (150 mm) ‰	Ein- schränkung ‰
Kladno. Ch.-No. 84157:						
I No. 16:						
A	2,24	2070	2,64	3,99	22,3	53,4
B	2,24	2030	2,73	4,47	26,9	51
C	2,28	2180	2,53	4,05	26,7	53
I No. 18:						
A	2,19	1990	2,59	3,98	17,3 (?)	51
B	2,47	2206	2,71	4,15	30	56
C	2,32	2158	2,41	3,92	28,5	55
Kladno. Ch.-No. 84132:						
I No. 18:						
A	1,86	2107	2,53	4,05	24,6	57
B	2,05	2212	2,97	4,34	24,6	43
C	2,53	2000	2,99	4,28	28,3	56
Kladno (ohne Ch.-No. vom Stapelplatz entnommen):						
I No. 18:						
A	1,79	2220	2,44	3,74	28,7	61
B	2,39	2167	2,64	3,98	29,3	49
C	1,88	2122	2,58	3,85	29,6	58

Um über die Festigkeitsverhältnisse des Materiales in verschiedenen Orten gewalzter I-Träger aus Thomas-Flusseisen Aufschluss zu erhalten, wurden Probestäbe aus den in Fig. 23 bezeichneten Orten von I-Trägern No. 16 u. 18 geschnitten und von Prof. Böck untersucht. Die Ergebnisse sind in der Tabelle auf S. 92 zusammengestellt.



Nach Prof. Tetmajer⁵⁹⁾ sollte zu Konstruktionszwecken nur solches Flusseisen verwendet werden, dessen Kohlenstoffgehalt unter 0,15%, dessen Phosphor-, Silicium- und Schwefelgehalt unter je 0,1% liegt. Insbesondere für Kesselbleche soll die Zugfestigkeit von 3,6 bis 4,6 t f. d. qcm und die kleinste Qualitätsziffer (vergl. S. 77) $c = 0,9 \text{ tcm}$, für die Querrichtung bei gleicher Festigkeit die Qualitätsziffer $c' = 0,8 \text{ tcm}$ betragen. Bei dem zur Herstellung von Querschwellen, Trägern u. s. w. auf den Werken der Gebr. Stumm zu Neunkirchen verwendeten Thomas-Flusseisen schwanken die chemische Zusammensetzung und die maßgebenden Festigkeitsverhältnisse innerhalb folgender Grenzen:

Kohlenstoff	0,06—0,10%
Silicium	0,01—0,05 „
Phosphor	0,06—0,10 „
Schwefel	0,03—0,04%
Mangan	0,35—0,50 „
Zugfestigkeit	3,8—4,4 t f. d. qcm
Dehnung nach Bruch	22—30% bei 20 cm Länge
Kontraktion	40—60%.

Die Versuche Tetmajer's zur Qualitätsbestimmung dieses Stoffes wurden unter anderem auch mit Probestäben, die aus gewalzten I-Trägern geschnitten worden sind, durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Versuche, in Mittelwerten, sind die folgenden:

Ort der Entnahme der Proben	Flansch	Steg
Anzahl der ausgeführten Proben	30	30
Elasticitätsziffer	2110,9	2099,9 t f. d. qcm
Spannung an der Elasticitätsgreze	2,31	2,51 „
Spannung an der Streckgrenze	2,80	3,21 „
Zugfestigkeit	4,24	4,69 „
Spezifische Formänderungsarbeit (bezogen auf 1 ccm)	1,27	1,31 tcm
Dehnung vor dem Bruch bei 10 cm	32,6%	29,9%
„ „ „ „ „ 20 „	26,3 „	24,1 „
Kontraktion	57,4 „	52,0 „

Zum Vergleiche mit Schweißeseisen dienen die folgenden Versuchsergebnisse Tetmajer's:

Ort der Entnahme der Proben	Flansch	Steg
Anzahl der ausgeführten Proben	30	30
Elasticitätsziffer	2035,1	2053,1 t f. d. qcm
Spannung an der Elasticitätsgrenze	1,44	1,39 „
Spannung an der Streckgrenze	2,44	2,36 „
Zugfestigkeit	3,76	3,46 „
Spezifische Formänderungsarbeit (bezogen auf 1 ccm)	0,91	0,36 tcm
Dehnung vor dem Bruch bei 10 cm	25,7%	11,8%
„ „ „ „ „ 20 „	22,3 „	10,7 „
Kontraktion	32,7 „	16,2 „

⁵⁹⁾ L. Tetmajer. Mitteilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgenössischen Polytechnikum. Zürich 1886.

Weitere Proben mit ganzen I-Trägern gegen Biegung und Stofs ergaben, dafs sowohl für Flufseisen als für Schweifeseisen mit zunehmender Trägerhöhe die Elasticitätsziffer, die Elasticitätsgrenze und die Spannung bei der grössten Tragkraft abnehmen.

So entsprach den verschiedenen Nummern der deutschen Normalprofile von No. 10 bis No. 24 in Flufseisen eine Abnahme der Elasticitätsziffer von 2100 f. d. qcm bis auf 1670 t f. d. qcm und bei Schweifeseisen von 1940 bis auf 1650 t f. d. qcm. Die Elasticitätsgrenze der Flufseisensträger sank von 2500 bis auf 2000 kg, die des Schweifeseisens von 1600 auf 1400 kg f. d. qcm herab.

Diese auffallenden Ergebnisse hinsichtlich der Erniedrigung der Elasticitätsziffer mit zunehmender Trägerhöhe werden von C. Bach (Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1888, S. 223) damit zu erklären gesucht, dafs bei der Berechnung der Elasticitätsziffer aus der Durchbiegungsgröfse der Einflufs der Schubkraft aufser Acht gelassen worden sei, wodurch z. B. bei Profil No. 24 ein Fehler von 34% entstehe, wie in der angegebenen Quelle rechnerisch ermittelt wurde.

Hinsichtlich der Widerstandsfähigkeit gegen Stofs folgert Tetmajer, dafs

1. das Thomas-Flufseisen die dynamischen Belastungen, insbesondere zufällige Stofswirkungen, mit mindestens gleicher Zuverlässigkeit als das Schweifeseisen aufzunehmen und zu übertragen vermag;
2. dafs kleine, zufällige Beschädigungen, Fehler u. s. w. beim reinen weichen Thomas-Eisen bezüglich Sicherheit einer Konstruktion keine gröfsere Gefahr als beim Schweifeseisen nach sich ziehen.

Als Ergebnisse der Versuche über den Einflufs der Lochung auf die Festigkeit des Flufseisens fand Tetmajer Folgendes:

1. Durch Stanzen des Flufseisens wird dessen ursprüngliche Zugfestigkeit abgemindert. Diese Abminderung kann etwa 30% der ursprünglichen Festigkeit betragen.
2. Auf Grundlage der übereinstimmenden Brucherscheinungen kann als feststehend angesehen werden, dafs durch Stanzen das Flufseisen am Lochumfang komprimiert, somit spröde wird, daher es auch hier reißen mufs, bevor die durchschnittliche Zugfestigkeit des Materiales erreicht ist.
3. Durch Ausglühen des gestanzten Flufseisens oder durch gleichmäßiges Ausreiben der gestanzten Lächer um 1 mm wird die ursprüngliche Festigkeit des Stoffes wieder hergestellt.
4. Durch Bohren wird die Festigkeit des Thomas-Flufseisens nicht verändert.

Gollner's Untersuchungen ergaben für das weiche Flufseisen das Mafs der Zähigkeit (vergl. S. 79) $D_a\%$ = 20 bis 24 und jenes der Gleichartigkeit mit $H\%$ = 14 bis 20, als wenig veränderliche Gröfsen. Die grösste Zähigkeit ergab das Flufseisen mit „mildem-feinsehnigen“, den geringsten Wert solches mit „mildem-schwachsehnigen“ Gefüge. Für die am häufigsten zur Untersuchung gelangte Sorte mit „gleichmäßig-mildem“ Gefüge ergab sich:

$$D_a\% = 21; \quad H\% = 16.$$

Im Vergleiche mit Schweifeseisen zeigen beide Materialien sonach ein gleiches Mafs von Zähigkeit, dagegen würde dem Schweifeseisen ein höherer Grad von Gleichartigkeit zukommen.

Für Flufseisen findet Gollner die Beziehungen:

$$C = -22,8 + 3,4 D_a,$$

$$D_a = 6,02 + 0,307 C \text{ und}$$

$$D_a = -7,98 + 0,0061 K.$$

Den Einflufs des Gefüges auf die Festigkeit und Zähigkeit zeigt die nachstehende Tabelle:

K_z	$\Delta_m l\%$	$C\%$	Gefüge
4000	17	35	Milde-feinsehnig.
4200	18	38	" "
4400	19	42	" "
4600	20	45	Milde-schwachsehnig.
4800	21	49	" "
5000	23	55	Gleichmäßig-feinkörnig.
5100	23	55	" "
5200	24	59	" "

§ 19. Der Flusstahl. Der Stahl besitzt ein spezifisches Gewicht, zwischen 7,5 bis 8,0, das abhängig ist von dem Härtegrade und dem Kohlenstoffgehalt. Bei ungehärtetem Stahl ist es gröfser als bei gehärtetem. Bei Gewichtsberechnungen ist dasselbe, wie dasjenige des Flusseisens, gleich 7,85 anzunehmen. Der Kohlenstoffgehalt des Stahles liegt zwischen 0,5 und 1,5%. Die Farbe ist weifsgrau bis weifs mit mattem Schimmer. Das Gefüge ist feinkörnig; der Härtegrad beeinflusst dasselbe in hohem Grade. Je härter der Stahl, desto feiner und dichter ist das Gefüge im Bruche und um so lichter erscheint die Farbe, während sich der Glanz vermindert. Steigender Temperatur ausgesetzt nimmt der Stahl die folgenden Anlauffarben an:

bei 220° C. blafsgebl,	bei 288° C. hellblau,
„ 230° C. strohgebl,	„ 293° C. dunkelblau,
„ 265° C. purpurfleckig,	„ 316° C. schwarzblau.
„ 277° C. purpurfarbig,	

Das Schmelzen erfolgt zwischen 1700° bis 1900° C.

Das bezeichnende Merkmal des Stahles — die Härbarkeit — ist hauptsächlich von dem Kohlenstoffgehalte abhängig und der Härtegrad selbst ist mitbedingt durch die Gröfse des plötzlichen Temperaturunterschiedes, der bei der Härtung zur Anwendung kam.

Den Vorgang beim Härten des Stahles erklärt Ledebur⁵⁴⁾ folgendermafsen:

Der Einfluss des Kohlenstoffes auf den Härtegrad des Eisens ist verschieden, je nach dem besonderen Zustande des Kohlenstoffes. Im hellrot glühenden Eisen ist aller Kohlenstoff gleichmäfsig mit dem Eisen vereinigt (gelöst, legiert). Kühlt man solches Eisen plötzlich ab, indem man es in kaltes Wasser taucht, so verharrt die gröfste Menge des Kohlenstoffes in jener legierten oder gebundenen Form und macht das Eisen hart, weshalb diese Form des Kohlenstoffes als Härtungskohle bezeichnet wird. Der Härtegrad des Eisens wächst im allgemeinen mit dem Gehalte an Härtungskohle. Läft man dagegen das Eisen in gewöhnlicher Weise, also langsam abkühlen, so findet in einer Temperatur von 700° und 600° C. ein Zerfallen der erwähnten Eisenkohlenstofflegierung statt. Neben einer kohlenstoffärmeren Grundmasse bildet sich, in feinsten Verteilung innerhalb jener Grundmasse zurückbleibend, eine Eisenkohlenstofflegierung mit ungefähr 7% Kohle.

Je vollständiger jenes Zerfallen stattfindet, also je langsamer die Abkühlung vor sich geht, desto kohlenstoffärmer ist die Grundmasse und desto weicher das Eisen. Bei kohlenstoffarmen Eisen kann der Unterschied in seinem Gehalte an Härtungskohle bei rascher und langsamer Abkühlung nicht bedeutend sein und dementsprechend wird auch die Steigerung, welche der Härtegrad des Eisens durch das Ablöschen erfährt, um so weniger deutlich sich bemerkbar machen, je niedriger der Gesamtkohlenstoff des Eisens ist.

Erwärmt man den durch Ablöschen in Wasser hart gewordenen Stahl, so beginnt schon bei einer Temperatur von ungefähr 200° C. ein allmähliches Zerfallen der die Härtungskohle enthaltenden Eisenkohlenstofflegierung. Je länger die Erwärmung dauert und je höher die Temperatur dabei ist, desto ärmer an Härtungskohle wird die Grundmasse, desto weicher der Stahl. Da der Übergang des Kohlenstoffes in Form der Härtungskohle erst bei Temperaturen von mehr als 600° C. stattfinden kann, so findet eine erneute Härtung in denjenigen Fällen nicht statt, wo man den gehärteten und

⁵⁴⁾ „Eisen und Stahl“.

gelinde angewärmten Stahl nach Erreichung einer bestimmten Temperatur in Wasser taucht, um eine durch längeres Warmbleiben zu weit gehende Härteverminderung zu vermeiden. Das Verfahren, den Härtegrad des gehärteten Stahles durch mäfsiges Erwärmen abzumindern, nennt man das „Anlassen“.

Während bei uns sowohl bei geschweisstem Eisen, als auch beim Flufseisen zwischen Schmiedeeisen und Stahl dermaßen unterschieden wird, dafs jenes Eisen als Stahl bezeichnet wird, welches eine merkliche Härtung annimmt, pflegt man in Frankreich und England alles Flufseisen schlechtweg als Stahl zu benennen. Es ist zweifellos, dafs es mitunter recht schwierig sein dürfte, die scharfe Grenze zwischen Schmiedeeisen und Stahl zu ziehen. Résal⁵⁵⁾ führt zwei in Creusot von Barba und Werth ausgeführte Versuche an, bei welchen Flufseisen (acier doux) und Schweifseisen eine bedeutende Härtung dadurch erfuhren, dafs dieselben bei Kirschtrotglut (1000°) im Eis von -15° abgekühlt wurden.

Die Ergebnisse dieser Versuche enthält nachstehende Tabelle:

Material	Chemische Zusammensetzung					Zugfestigkeit kg/qmm	Bruchdehnung %	
	C	Si	Mn	S	P			
Flufseisen . .	0,16	0,09	0,38	0,02	0,05	45	30	Im natürlichen Zustande, gehärtet in Eis.
						117	10,5	
Schweifseisen .	0,12	0,06	0,09	0,015	0,02	44	27	Im natürlichen Zustande, gehärtet in Eis.
						98,5	4	

Nachdem die Erzeugung von Schweifstahl in der Gegenwart ohne Interesse sei, ist es nach Résal's Ansicht genügend, das Eisenmaterial nach der Herstellungsart zu unterscheiden und daher zu erklären:

Eisen, als jenes Material, welches erhalten wird aus dem teigigen Zustand im Puddelofen, enthaltend 0,05 oder 0,08 bis 0,15% Kohlenstoff (ausnahmsweise 0,15 bis 0,3 für Schienenmaterial) und

Stahl, als jenes Material, welches nach verschiedener Erzeugungsart im geschmolzenen Zustande hergestellt wird und einen Gehalt von 0,10 bis 1% Kohlenstoff (ausnahmsweise 1,5% für gewisse Zwecke) besitzt.

Je nach dem Kohlenstoffgehalte, dem Grade der Härbarkeit wird der Stahl weiter unterschieden und bezeichnet als „besonders weich“ (extra-doux), „weich“, „halbweich“, „halbhart“, „hart“, „besonders hart“ (extra-dur).

Hinsichtlich der Bezeichnung der Herstellungsart kann unterschieden werden: Bessemer-, Thomas-, Martin- und Tiegelflufsstahl.

Der Tiegelflufsstahl wird aus den besten Rohstoffen, meistens aus Herdfrisch- oder Puddelstahl, bester Tiegelstahl, zur Erzeugung feiner Werkzeuge u. s. w. aus Cementstahlstäben durch Schmelzen in Tiegeln von 10 bis 35 kg Einsatz dargestellt. Tiegelstahl ist der in jeder Hinsicht beste, gleichartigste und vollkommenste, jedenfalls der edelste Stahl.

Jeder Flufsstahl ist mehr oder minder blasenhaltig. Tiegelstahl besitzt diesen Fehler im geringsten Grade. Die empfindlichste Stahlprobe auf Gleichartigkeit ist die sogenannte „Blauprobe“, d. i. die Bruchprobe bei Blauwärme. Während z. B. Bessemerstahl bei einer derartigen Probe eine unebene Bruchfläche mit gröfsere Vertiefungen neben gestreckten Hervorragungen aufwies und dadurch seine Ungleichartigkeit offenbarte, zeigte Tiegelstahl eine ebene Bruchfläche mit gleichmäfsig feinem Korn u. s. w.

⁵⁵⁾ Résal. Fonte, fer et acier, pag. 246.

Die den Stahl überhaupt kennzeichnenden Eigenschaften des „Härtens“ und des „Anlassens“, vermöge welcher demselben Stoffe, je nach Erfordernis, Glashärte oder fischbeinartige Biegsamkeit und Elasticität gegeben werden kann, ist in besonders hohem Mafse dem Tiegelstahle eigen.

Fremde Beimengungen, die mechanische Behandlung und Temperatureinflüsse üben auf die Eigenschaften des Stahles hervorragenden Einflufs aus.

Es erzeugen insbesondere:

Phosphor: Kaltbruch. Derselbe erhöht jedoch die Schweißbarkeit.

Schwefel und Kupfer: Rotbruch. Ein Gehalt von 0,01% Schwefel ist hinreichend, den Stahl rotbrüchig zu machen; das Kupfer ist eine den Stahl außerordentlich schädigende Beimengung, da, nach Eggertz, ein aus 0,5% Kupfer haltendem Schmiedeisen erzeugter Stahl völlig unbrauchbar war.

Die Festigkeit und Elasticität des Stahles wird gleichfalls durch fremde Beimengungen beeinflusst. Der bis zu einer gewissen Grenze zunehmende Kohlenstoffgehalt erhöht die Festigkeit und die Elasticitätsgrenze.

Styffe findet für Bessemer-Stahl und Uchatius-Stahl die Höchstfestigkeit gegen Zug bei 1,2% Kohlenstoffgehalt. Nimmt dieser Gehalt über diese Grenze hinaus zu, so vermindert sich die Festigkeit.

Nach Karsten ist der Stahl mit 1,0 bis 1,5% am besten härtbar und besitzt die grösste Festigkeit; mit darüber hinaus zunehmendem Kohlenstoffgehalt kann der Stahl noch gröfsere Härtegrade annehmen, verliert aber an Festigkeit. Bei Gehalt an 1,75% büfst er bereits die Schweißbarkeit ein.

Nach Bauschinger's Versuchen mit Ternerter Bessemer-Stahl ergab sich die Festigkeit mit dem Kohlenstoffgehalt wachsend. In ähnlichen Verhältnisse wuchs auch die Elasticitätsgrenze. Weyrauch drückt auf Grund dieser Versuchsergebnisse den Einflufs des Kohlenstoffgehaltes auf die Zugfestigkeit durch die Beziehung: $z = 4350(1 + p^2)$ aus, wo p den Prozentsatz an Kohlenstoff und z die Tragfestigkeit gegen Zug bedeutet.

Phosphor erhöht die Festigkeit und Elasticitätsgrenze, vermindert dagegen die Widerstandsfähigkeit gegen Stofswirkungen. Ein Gehalt von 0,2 bis 0,25% macht den Stahl bereits unbrauchbar. Silicium vermindert die Festigkeit.

Der Einflufs des Härtens macht sich insbesondere bei den kohlenstoffreichen Sorten bemerklich. Es werden hierdurch die Festigkeit, die Elasticitätsgrenze und die Elasticitätsziffer erhöht, dagegen die Zähigkeit verringert.

Einflufs der mechanischen Bearbeitung. Der Stahl wird um so gleichartiger und fester, je öfter er bearbeitet wird. Namentlich übt das Schmieden einen die Festigkeit wesentlich erhöhenden Einflufs auf das Bessemer-Metall aus. Gehämmerter Stahl hat eine gröfsere Festigkeit und eine höhere Elasticitätsgrenze, dagegen eine geringere Dehnbarkeit, als gewalzter Stahl.

Versuche, welche Styffe mit schwedischem Bessemer-Stahl durchführte, um unter Berücksichtigung des Kohlenstoffgehaltes den Einflufs der Bearbeitungsart auf die Festigkeit und Dehnbarkeit klar zu stellen, ergaben nach Robert Lane Haswell:

Für gehämmerten Bessemer-Stahl:

Festigkeit f. d. qcm der ursprünglichen Fläche = $(3500 + 4500 p)$ kg,

Verhältnis der Bruchfläche zur ursprünglichen Fläche = $\frac{35 + 45 p}{130}$,

Grösste Dehnung in Hunderteln der Länge = $7,5 - 4 p$,

Elastizitätsgrenze 0,67 (3500 + 4500 p),

Elastizitätsziffer = 2150000 kg f. d. qcm;

für gewalzten Bessemer-Stahl:

Festigkeit f. d. qcm der ursprünglichen Fläche = $(3000 + 5000 p)$ kg,

Verhältnis der Bruchfläche zur ursprünglichen Fläche = $\frac{30 + 50 p}{110}$,

Größte Dehnung in Hunderteln der Länge = 21,5 — 14 p,

Elastizitätsgrenze = 0,53 (3000 + 5000 p),

Elastizitätsziffer = 2150000 kg f. d. qcm.

Hierbei bedeutet p den Kohlenstoffgehalt in %.

Hiernach zeigt gehämmerter Bessemer-Stahl größere Festigkeit und eine höher liegende Elastizitätsgrenze, jedoch eine viel geringere Dehnbarkeit als der gewalzte.

Kirkaldy's Versuche mit Bessemer-Stahl von Fagersta bestätigten dieses Verhalten insoweit, als der Kohlenstoffgehalt niedrig ist (0,15%), während stärker gekohlter Bessemer-Stahl (1%) gehämmt zwar auch höhere Elastizitätsgrenze und geringere Dehnbarkeit, aber abweichend von obigem geringere Bruchfestigkeit ergab, als das gewalzte Material. Die Festigkeit und die Elastizitätsgrenze zeigten sich um so niedriger, die Dehnbarkeit dagegen um so größer, je größer der Querschnitt der Versuchsstäbe überhaupt, und bei rechteckigem Querschnitt je geringer der Unterschied der Seiten war. Durch Ausglühen der fertigen Stäbe wurden diese Einflüsse der Querschnittsform verwischt.

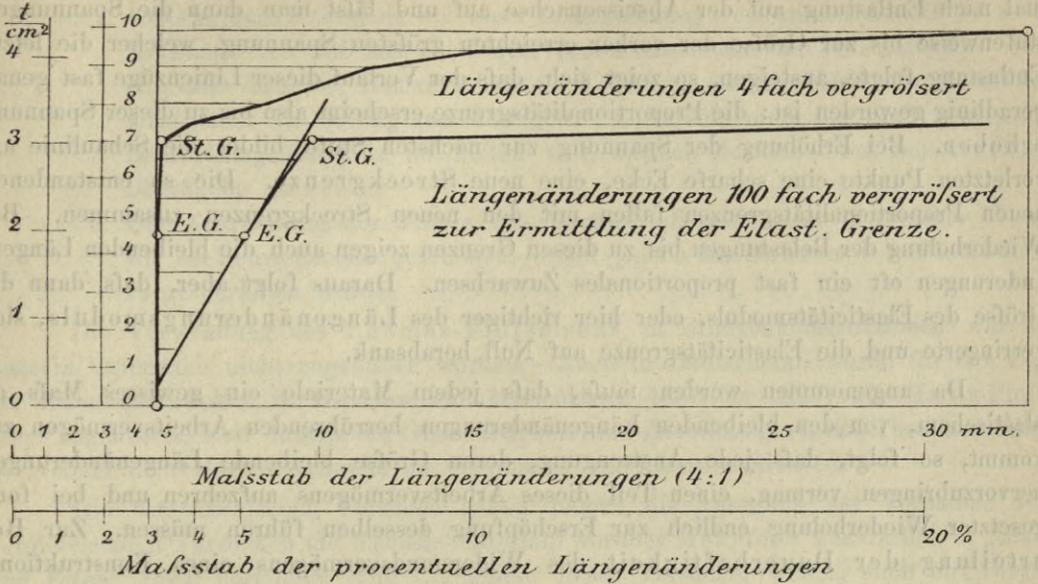
Übersichtliche Darstellung der Längenänderung von Eisenstäben bei Zugversuchen durch Schaubilder. Für die Beurteilung des Konstruktionsmaterials ist außer der Festigkeitsgröße, der Bruchdehnung und der Quereinschnürung auch die Kenntnis der Elastizitätsziffer, der Elastizitäts- und Streckgrenze von Interesse. Wenn mittels eines rechtwinkligen Achsenkreuzes die stufenweise gesteigerten Belastungen, welchen ein Versuchsstab unterworfen wird, als Ordinaten und die hervorgebrachten, auf die Längeneinheit bezogenen, Längenänderungen als Abscissen aufgetragen werden, so ergeben die durch einen Linienzug verbundenen Punkte ein Bild, aus welchem mehr oder weniger scharf die Elastizitäts- und die Streckgrenzen ersichtlich werden. Bei Stäben aus Schweiß Eisen, Flusseisen und Stahl zeigt dieses Schaubild eine von dem Ursprung ausgehende Linie, welche anfänglich gerade und steil ansteigt, dann sehr allmählich von der geraden Richtung abbiegt und in sehr sanfter Krümmung noch eine Strecke lang weiter ansteigt, bis zu einem Punkte, von wo an dieselbe mit einem mehr oder weniger scharfen Knie plötzlich die früher steile Richtung verläßt und von hier an einen flacheren Verlauf nimmt, mitunter (bei weichem Materiale) nochmals auf kurzer Strecke sich steiler erhebt, um sodann in immer sanfter werdenden Steigungen den der Bruchlast entsprechenden Höchstwert zu erreichen (Fig. 24).⁵⁶⁾

Der Ort der ersten, ganz sanft erfolgenden Abbiegung von der ursprünglichen geraden Richtung entspricht der Elastizitäts- oder Proportionalitätsgrenze, jener der scharf in die Augen fallenden zweiten Abbiegung der Streckgrenze.

Die Proportionalitäts- oder Elastizitätsgrenze entspricht daher der Ordinate des Berührungspunktes der durch den Ursprung gehenden und bis dahin mit der Schaulinie zusammenfallenden Tangente an die Schaulinie. Die trigonometrische Tangente des Steigungswinkels dieser Geraden mit der Abscissenachse entspricht der Elastizitätsziffer.

⁵⁶⁾ In dem Schaubilde Fig. 24 erscheint der Anfangspunkt desselben etwas oberhalb des Ursprungs, weil die Messungen der Längenänderungen erst nach einer dem Stabe erteilten kleinen Anfangsspannung (0,5 t) begonnen wurden.

Fig. 24.



Die von der Schaulinie, der Abscissenachse und der letzten, der Bruchbelastung entsprechenden Ordinate begrenzte Fläche giebt ihrem Inhalte nach die Größe der Formänderungsarbeit an. Wenn bei dem Versuche so vorgegangen wird, daß nach jeder Belastung eine vollständige Entlastung vorgenommen und dabei jedesmal die Längenänderung gemessen wird, so findet sich, daß bei Belastungen unterhalb der Elasticitätsgrenze die bleibenden Längenänderungen verschwindend klein sind und daß diese erst nach Überschreitung jener Grenze eine meßbare Größe annehmen, so daß die Elasticitätsgrenze eigentlich mit dem Beginn der bleibenden Längenänderungen zusammenfällt.

Sondert man bei den höheren Belastungen die erhobenen bleibenden Längenänderungen im Schaubilde dermaßen ab, daß deren Größen von der jeweils erhobenen ganzen Längenänderung in Abzug gebracht werden, so ergibt sich, daß die so erhaltenen rein elastischen Längenänderungen sehr nahe in die durch den Ursprung gehende, die Schaulinie am Punkte der Elasticitätsgrenze berührende Gerade fallen⁵⁷⁾, sodaß das rein elastische Verhalten von Schweisseisen, Flusseisen und Stahl ganz unabhängig ist von den gesamten Längenveränderungen und von der Größe der Belastung; dieses elastische Verhalten ist daher nicht an die Elasticitätsgrenze gebunden, die Elasticität bleibt vielmehr ungeschwächt bis nahe zum Bruche erhalten und es ist daher die Bezeichnung Elasticitätsgrenze unzutreffend, außer in dem Sinne, daß nach Erhöhung der Inanspruchnahme über diese Grenze hinaus meßbare bleibende Längenänderungen erscheinen.

Die elastischen Längenänderungen sind bis an die Bruchgrenze den Spannungen nahezu proportional, wogegen die bleibenden — besonders nachdem die Streckgrenze überschritten wird — unverhältnismäßig rasch anwachsen.

⁵⁷⁾ Diese Eigenschaft des Schweisseisens und Flusseisens wurde anlässlich der Versuche des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom Jahre 1889 (Zeitschrift 1891) vom Verfasser nachgewiesen und bei späteren Versuchen bestätigt gefunden (Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896).

Trägt man nach dem Erscheinen der bleibenden Längenänderungen diese jedesmal nach Entlastung auf der Abscissenachse auf und läßt man dann die Spannungen stufenweise bis zur Gröfse der vorher erreichten grössten Spannung, welcher die letzte Entlastung folgte, ansteigen, so zeigt sich, dafs der Verlauf dieser Linienzüge fast genau geradlinig geworden ist: die Proportionalitätsgrenze erscheint also bis zu dieser Spannung erhoben. Bei Erhöhung der Spannung zur nächsten Stufe bildet die Schaulinie am vorletzten Punkte eine scharfe Ecke, eine neue Streckgrenze. Die so entstandenen neuen Proportionalitätsgrenzen fallen mit den neuen Streckgrenzen zusammen. Bei Wiederholung der Belastungen bis zu diesen Grenzen zeigen auch die bleibenden Längenänderungen oft ein fast proportionales Zuwachsen. Daraus folgt aber, dafs dann die Gröfse des Elasticitätsmoduls, oder hier richtiger des Längenänderungsmoduls, sich verringerte und die Elasticitätsgrenze auf Null herabsank.

Da angenommen werden mufs, dafs jedem Materiale ein gewisses Mafs an plastischem, von den bleibenden Längenänderungen herrührenden Arbeitsvermögen zukommt, so folgt, dafs jede Anstrengung, deren Gröfse bleibende Längenänderungen hervorzubringen vermag, einen Teil dieses Arbeitsvermögens aufzehren und bei fortgesetzter Wiederholung endlich zur Erschöpfung desselben führen müssen. Zur Beurteilung der Dauerhaftigkeit des Widerstandsvermögens eines Konstruktionsmaterialies ist daher dessen plastisches Arbeitsvermögen mafsgebend; die Arbeit der elastischen Formänderung an und für sich ist deshalb ohne Bedeutung, weil diese Arbeit sich stets in voller gesetzmässiger Gröfse entwickelt und zwar auch dann noch, wenn nur mehr ein Bruchteil des ursprünglichen plastischen Arbeitsvermögens vorhanden und die Zerstörung nahe bevorstehend ist.

Das plastische Arbeitsvermögen eines Eisenmaterialies erscheint daher als die stoffliche Grundlage seines Bestandes, dessen unvergängliche Eigenschaft das elastische Arbeitsvermögen ist.

Aus der dargelegten Eigenschaft des Schweiß- und Flusseisens, vermöge welcher deren rein elastisches Verhalten bis nahe der Bruchgrenze erhalten bleibt, folgt, dafs die auf Grundlage der Festigkeitstheorie berechneten Spannungen eines Konstruktionsmaterialies auch dann noch zutreffend bleiben, wenn die Anstrengungen selbst die Elasticitätsgrenze weit übersteigen.

Des Weiteren folgt hieraus, dafs die Erhebung der blofsen elastischen Formänderung einer Eisenkonstruktion keinen Mafsstab für die Sicherheit derselben gewähren kann. Dagegen bieten die allenfalls auftretenden bleibenden Formänderungen das wertvollste Hilfsmittel zur Beurteilung des Zustandes der Eisenkonstruktionen. Bei Konstruktionsmaterialien von grossem plastischen Arbeitsvermögen würden vorgeschrittene Erschöpfungszustände nicht leicht übersehen werden.

§ 20. Das Flusseisen im Brückenbau der Gegenwart. Die Frage der Zulässigkeit des Flusseisens zur Verwendung bei Brückenkonstruktionen wurde in Österreich auf Grund der Ergebnisse der mehrerwähnten grosen Versuche des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom Jahre 1889 zu Gunsten des weichen basischen Martin-Flusseisens folgendermassen beantwortet:

1. Das weiche basische Martin-Flusseisen ist zur Herstellung von Brücken vollkommen geeignet.
2. Ein solcher Baustoff soll für ein und dasselbe Bauwerk gleichmässige Festigkeitseigenschaften besitzen und zwar innerhalb der Grenzen von mindestens

3500 kg/qcm Festigkeit bei einer Bruchdehnung von 25% und höchstens 4500 kg/qcm Festigkeit bei einer Bruchdehnung von mindestens 20% für die Meßlänge von 200 mm bei 5 qcm Querschnittsfläche der Versuchsstäbe. Für ein und dasselbe Bauwerk darf der Festigkeitsunterschied des Materiales nicht mehr als 700 kg/qcm betragen. Außerdem muß der Stoff genügende Bearbeitungsfähigkeit im kalten und warmen Zustande und bei verletzter Oberfläche aufweisen.

3. Die Anarbeitung der Träger aus Martin-Flusseisen kann in gleicher Weise wie bei Schweisseisen geschehen, wobei jedoch das Bohren der Nietlöcher vorgeschrieben wurde.

Die Verwendung des Thomas-Flusseisens zu Brückenkonstruktionen war bis jetzt in Österreich nicht zugelassen worden. Auch in Deutschland wurde für den Bau der Eisenbahnbrücken in Dirschau und Marienburg (1889 bis 1892) nur Martin-Flusseisen zugelassen, weil damals die Gleichartigkeit und Zuverlässigkeit des Thomasmetalles noch nicht dem Martin-Materiale als ebenbürtig anerkannt worden ist.

Die österreichischen Versuche gaben jedoch die Anregung zur Vornahme von vergleichenden Versuchen mit Thomas-Material, worüber Mehrtens ausführlich in „Stahl und Eisen“ 1891 berichtet. Die Ergebnisse dieser Versuche, welche auch auf Biege- und Bruchversuche mit genieteten Vollwandträgern von 3,0 m Länge und 0,4 m Höhe erstreckt wurden, führten zu dem Schlusse, daß die Frage der Zulässigkeit des Thomas-Materiales zu Brückenbauten bejaht werden konnte.

Die nach Mehrtens' Entwurf im Jahre 1891 bis 1893 erbaute Weichselbrücke bei Fordon wurde gänzlich aus Thomas-Flusseisen hergestellt. Aus Anlaß dieses Baues wurden sehr zahlreiche Festigkeitsversuche mit Thomas- und Martin-Flusseisen ausgeführt, deren Ergebnisse Mehrtens in „Stahl und Eisen“ 1892 und 1893 mitgeteilt und dadurch dargethan hat, daß das Thomas-Flusseisen dem Martin-Flusseisen ebenbürtig sei.

Die äußersten Grenzen der Festigkeit und Dehnung der untersuchten beiden Eisenarten waren bei Thomas-Flusseisen:

	Streckgrenze kg/qmm	Festigkeit kg/qmm	Dehnung %	Arbeitsziffer
untere Grenze	24,9	39,2	20	880
obere Grenze	32,6	43,8	32,5	1330,

bei Martin-Flusseisen:

untere Grenze	24,0	39,0	20	814
obere Grenze	35,8	45,0	37,5	1546.

Seit Erbauung der Weichselbrücke bei Fordon findet das Thomas-Flusseisen zu Brückenbauwerken in Deutschland große Verbreitung. Wie eingangs bereits erwähnt wurde, ist für dieses Material auch in Österreich die Zulassung zu Brückenkonstruktionen zu erwarten, nachdem die Untersuchungen seitens des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins zu günstigen Ergebnissen geführt haben. Allerdings sah man sich veranlaßt, für die Zulassung des Thomas-Flusseisens die folgenden Bedingungen in Vorschlag zu bringen:

1. Die Festigkeit dieses Materiales soll 3,5 t/qcm bis höchstens 4,3 t/qcm und das Produkt aus der Festigkeitszahl und der Bruchdehnung (in % bezogen auf die Meßlänge $\sqrt{80 F}$) mindestens 98 betragen.

2. Die Anarbeitung und die Montierung muß durchaus sorgfältig ausgeführt und müssen bei den notwendigen Bearbeitungen alle das Material schädigenden Einflüsse vermieden werden.

3. Das Material der Niete soll die Festigkeit von 3,5 bis höchstens 4,0 t/qcm, bei einem Produkte aus der Festigkeitszahl und Bruchdehnung von mindestens 110 besitzen; die Niete dürfen nicht über helle Kirschrotglut erhitzt werden, die Nietung soll thunlichst mit Maschinen erfolgen, bei Handnietung diese möglichst rasch ausgeführt und dabei Verletzungen der Eisenoberfläche vermieden werden.

Das Bohren der Nietlöcher ist in Österreich ohnedies bereits für Martin-Flusseisen vorgeschrieben.

Nach der Schweizerischen Verordnung vom 19. August 1892 ist die Festigkeit des Flußeisens mit 3,6 bis 4,5 t/qcm und die Arbeitsziffer für die Längsrichtung mit 90, für die Querrichtung mit 80 vorgeschrieben.

Die Preussische Ministerialverordnung von 1892 bestimmt für die Festigkeit 37 bis 42 kg/qmm und für die Bruchdehnung 20%.

In den Vereinigten Staaten Amerikas wird in ausgedehntem Mafse weicher Stahl zu Brückenbauten verwendet. Die Bedingungen, die man an diesen weichen Stahl stellt, sind: Festigkeit 3,8 bis 4,3 t/qcm, Elasticitätsgrenze etwa die Hälfte der Festigkeit, kleinste Bruchdehnung auf 20 cm Mefslänge 25%. Bei sehr großen Brücken und für einzelne Teile kleinerer Brücken wird auch sogenannter Mittelstahl verwendet, dessen Festigkeit 4,3 bis 4,8 t/qcm bei einer kleinsten Bruchdehnung von 20% beträgt.⁵⁸⁾

Obwohl beim Vergleiche von Martin- mit Thomas-Flusseisen beide Materialien innerhalb der Festigkeitsgrenzen von 3,5 bis 4,3 t/qcm derzeit volle Gleichwertigkeit besitzen, so ist es dennoch unzweifelhaft, daß bei Ansprüchen an eine höhere Festigkeit als etwa 4,3 t/qcm das Thomas-Eisen für Brückenkonstruktionen nicht mehr den gleichen Grad der Zuverlässigkeit bietet, wie ersteres.

Die Festlegung einer oberen Grenze der Festigkeit für die Zulassung des Flußeisens zu Brückenbauten ist daher geboten. Fraglich könnte nur sein, ob es angezeigt wäre, die zulässigen Höchstwerte der Festigkeit für beide Flußeisenarten verschieden zu halten. Unseres Erachtens ist diese Frage in so lange zu verneinen, als kein sicheres Mittel gefunden wird, die fertigen Erzeugnisse beider Herstellungsarten voneinander unterscheiden zu können.

Die Festigkeitsgrenzen des zulässigen Konstruktionsmaterials sollten indessen nicht enger gelegt werden, als etwa 5 bis 7 kg/qmm, weil der Walzprozeß an und für sich, die Temperatur des die Walzen verlassenden vollendeten Walzstückes, die Unterschiede der Abmessungen und die Gestalt des Querschnittes u. a. die Festigkeit des Walzerzeugnisses innerhalb jener Grenzen beeinflussen können.

Litteratur.

Von den zahlreichen Abhandlungen, in welchen die Eigenschaften des Eisens behandelt sind, werden hier nur die neueren, namentlich diejenigen, welche die Festigkeit des Eisens betreffen, angeführt. Man vergleiche hierzu die bei Kap. XVI (Prüfungen des Materiales) angegebene Litteratur.

Bauschinger. Versuche über die Festigkeit des Bessemer-Stahles von verschiedenem Kohlenstoffgehalt. Zeitschr. d. bayer. Arch.- u. Ing.-Ver. 1873, S. 62; 1874, S. 10.

Thurston. Versuche über die Festigkeit des Eisens in verschiedenen (niedrigen) Temperaturen. Deutsche Ind.-Ztg. 1874, S. 98; Polyt. Centralbl. 1874, S. 458.

⁵⁸⁾ Ritter. Der Brückenbau in den Vereinigten Staaten Amerikas. Bern 1894.

- Grauhan. Die Eigenschaften und Unterschiede der verschiedenen Eisen- und Stahlsorten. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1877, S. 324.
- Kerpely. Über homogenes Eisen. Mikroskopische Untersuchungen. Aus Zeitschr. d. Berg- u. Hüttenmännischen Vereins in Polyt. Journ. 1877, Bd. 226, S. 394.
- Kirk. Über homogenes Eisen. Engineer 1877, S. 229; Polyt. Journ. 1877, Bd. 226, S. 55.
- Martens. Mikroskopische Untersuchungen des Eisens. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1878, S. 11.
- Thurston. Über die Festigkeit des kalt gewalzten Eisens. Deutsche Ind.-Ztg. 1878, S. 519.
- Adamson. Über die Eigenschaften des Eisens und Stahles. Scientific American, Suppl. 1878, S. 2381.
- Wedding. Über das schmiedbare Eisen auf der Weltausstellung zu Paris 1878. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbeleißes 1878. Sitzungsberichte, S. 196.
- Welche Erfahrungen liegen bezüglich der Verwendung von Stahl bei Eisenbahnbrücken vor? Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnw. 6. Suppl.-Bd. Wiesbaden 1878. S. 97.
- Perard. Versuche über die elastische Nachwirkung bei Eisen und Stahl. Revue universelle des mines 1880, Mai, S. 486.
- Die Eigenschaften von Eisen und Stahl. Mitteilungen über die auf Veranlassung der technischen Kommission des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen angestellten Versuche u. s. w. Wiesbaden 1880.
- Barba. Über die Verlängerung des Metalls beim Zerreißen. Mémoires des ingénieurs civils 1880, Juni, S. 682.
- Brücken aus Bessemer-Stahl der Lokalbahn Ebersdorf-Würbenthal. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1880, S. 214.
- Gautier. Über Webster's Erprobung der Festigkeit des Eisens und Stahles bei Temperaturen unter 0°. Génie civil 1881, S. 481; Polyt. Journ. 1881, Bd. 242, S. 288.
- Die Festigkeitseigenschaften des Stahles, insbesondere des Siemens-Martin-Stahles. Engineer 1881, März, S. 183.
- Über die Verwendung von Stahl zu Brückenbauten. Deutsche Bauz. 1881, S. 388.
- Gollner. Untersuchungen über die Festigkeit des Flußeisens. Techn. Blätter 1882, S. 197.
- Clarke u. Reeves. Über die Festigkeit schmiedeiserner Säulen gegen Zerknicken. Transact. of the amer. soc. of civil eng. 1882, Jan. — Auszug. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1882, S. 118.
- Die Messung der Durchbiegung eiserner Brücken und die Verwendung des Stahles im Brückenbau. Deutsche Bauz. 1882, S. 423.
- Martens. Die Feststellung der Güte von Eisen und Stahl u. s. w. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1883, S. 51.
- Zimmermann. Über den Einfluß der Ungleichmäßigkeit des Materiales auf die Tragfähigkeit gezogener Stäbe. Centralbl. d. Bauverw. 1883, S. 220.
- Fehring. Über Festigkeits-Vorschriften für Eisen und Stahl. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1883, S. 311.
- Die Frage der Verwendung des Flußeisens und Flußstahles für Brücken. Wochenschr. d. Ver. deutscher Ing. 1883, S. 83.
- Heindl. Über die Verwendung des Flußeisens zu Eisenbahnbrücken. Centralbl. f. Eisenb. u. Dampfschiffahrt 1883, S. 373.
- Eigenschaften und Prüfung des Stahles für die Straßensbrücke über den Monongahela bei Pittsburg. Engineering 1884, I. S. 239.
- Zur Frage der Verwendung des Stahles im Brückenbau. Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 134.
- Welche Erfahrungen liegen vor über die Verwendung des Stahles und Flußeisens zu Baukonstruktionen, insbesondere zu Eisenbahnbrücken? Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnw. 9. Suppl.-Bd. Wiesbaden 1884, S. 95.
- Verwendung von Flußeisen bei nordamerikanischen Brücken. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1885, No. 42.
- Considère. Über die Anwendung des Stahles und Eisens in Bauwerken. Ann. des ponts et chaussées 1885, I. S. 574.
- Bauschinger. Über neuere Versuche mit Eisen und Stahl, insbesondere auch über Knickfestigkeit von Formeisen für Brückenbauzwecke. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 351.
- Tetmajer. Über den Einfluß der Lochung auf die Festigkeitsverhältnisse des Schweißeisens. Schweiz. Bauz. 1886, Febr., S. 33.
- Flamant. Über die Festigkeit und die sonstigen maßgebenden Eigenschaften des zu Bauzwecken benutzten Stahles. Ann. des ponts et chaussées 1886, I. S. 665.
- Wedding. Über das mikroskopische Gefüge verschiedener Eisensorten. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1885, S. 572. — Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbeleißes 1886, S. 293. — „Stahl und Eisen“ 1886, S. 633.
- Lechner. Die Stahlwerke der Steel company of Scotland und die dort angestellten Materialprüfungen. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1886, S. 433.

- Tetmajer. Der Wert des Thomas-Fluß- und Schmiedeisens als Baustoff. Zürich 1885. Vergl. Polyt. Journ. 1886, Bd. 261, S. 427.
- Mehrtens. Eisen und Eisenkonstruktionen. Berlin 1887. (Allgemeine Geschichte des Eisens und der eisernen Tragwerke. — Darstellung des Eisens. — Formgebung des Eisens. — Eigenschaften und Prüfung des Eisens. — Herstellungsweise der Konstruktionen.) Mit vielen Litteratur-Angaben.
- List. Die wichtigsten Ergebnisse neuerer Untersuchungen über die Einwirkung der Wärme auf die physikalischen Eigenschaften von Stahl und Eisen. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1887, S. 328.
- Tetmajer. Mitteilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgen. Polytechnikum in Zürich. (Verschiedene Jahrgänge.)
- Bauschinger. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der polytechnischen Schule zu München. (Verschiedene Jahrgänge.)
- Weyrich. Das Fluß Eisen als Brücken-Konstruktionsmaterial. Wochenbl. f. Bauk. 1887, S. 344.
- Mehrtens. Zur Frage der Verwendung des Flußeisens für Baukonstruktionen. Centralbl. d. Bauverw. 1888, S. 57.
- Ledebur. Eisen und Stahl in ihrer Anwendung für bauliche und gewerbliche Zwecke. Berlin, S. Fischer 1890. Bericht des Brückenmaterial-Comité's über die Verwendung des Flußeisens zu Brückenkonstruktionen. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1891.
- Brik. Fachwissenschaftliche Erörterungen zu dem obigen Berichte. Ebenda.
- Krohn. Verwendung des Flußeisens im Brückenbau. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. Bd. XXXV.
- Mehrtens. Über die beim Bau der neuen Eisenbahnbrücken in Dirschau und Marienburg mit der Verwendung von Flußeisen gemachten Versuche und Erfahrungen. „Stahl und Eisen“ 1891.
- Kintzlé. Über die Verwendung von Flußeisen zu Bauzwecken. „Stahl und Eisen“ 1892.
- Mehrtens. Weichselbrücke bei Fordon (Versuche). „Stahl und Eisen“ 1892 bis 1893.
- Grundzüge einer einheitlichen Benennung für Eisen und Stahl. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893.
- Zschokke, B. Vergleichende Betrachtungen über den Thomas- und Martin-Prozess. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893.
- Vorschriften für Lieferung von Eisen und Stahl, aufgestellt vom Verein deutscher Eisenhüttenleute. Düsseldorf 1893.
- Brik. Ergebnisse von Belastungsversuchen an einem der Bahnstrecke entnommenen alten Eisenbrückenträger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896.
- Mehrtens. Der Brückenbau sonst und jetzt. Schweiz. Bauz. 1898. Auch im Buchhandel.

II. Wiederholte Beanspruchungen. Zulässige Inanspruchnahme.

§ 21. Verhalten von Schweisseisen und Stahl bei wiederholten Anstrengungen. Wöhler's Gesetz. Bauschinger's Versuche. Fairbairns im Jahre 1860 und 1861 angestellte Versuche mit einem genieteten 6 m weiten Blechträger erbrachten den Nachweis, daß Belastungen, die weit unter der Bruchgrenze liegende Spannungen des Baustoffes hervorbringen, dennoch durch vielfache Wiederholung den Bruch des Trägers nach sich zu ziehen vermögen, aber Wöhler war es vorbehalten, aus seinen in den Jahren 1859 bis 1870 ausgeführten, äußerst wertvollen Versuchen bestimmte Gesetze für das Verhalten von Eisen und Stahl gegen wiederholte Beanspruchungen zu entdecken und auszusprechen.

Das Wöhler'sche Gesetz lautet:

„Der Bruch des Materiales läßt sich nicht nur durch eine, die absolute Festigkeit überschreitende, ruhende Belastung, sondern auch durch vielfach wiederholte Schwingungen, von denen keine die Bruchgrenze erreicht, herbeiführen. Die Differenzen der Spannungen, welche die Schwingungen eingrenzen, sind dabei für die Zerstörung des Zusammenhanges maßgebend. Die absolute Größe der Spannungen ist insoweit von Einfluß, als mit wachsender Spannung die Differenzen, welche den Bruch herbeiführen,

sich verringern. Für solche Schwingungen, bei denen dieselbe Faser aus Zugspannung in Druckspannung übergeht und umgekehrt, werden die Zugspannungen als positiv, die Druckspannungen als negativ betrachtet, sodafs also in diesem Falle die Differenz der äufsersten Faserspannungen gleich der grössten Zugspannung plus der grössten Druckspannung ist.“

Wöhler giebt dann folgende, aus seinen Versuchsergebnissen entnommene Zusammenstellung von Schwingungsgrenzen, bei denen der Bruch nicht mehr eingetreten ist:

1. Bei Stäben aus Achsen, die im Jahre 1857 von der Gesellschaft „Phönix“ geliefert worden waren:

Schwingungen zwischen:

$$\begin{aligned} & (+ 160) + 1170 \text{ kg und } (- 160) - 1170 \text{ kg f. d. qcm}^{59}), \\ & (+ 300) + 2190 \text{ „ „ Null} \\ & (+ 440) + 3220 \text{ „ „ } (+ 240) + 1750 \text{ „ „} \end{aligned}$$

2. Bei Stäben aus Gufsstahlachsen, die Krupp im Jahre 1862 geliefert hatte:

Schwingungen zwischen:

$$\begin{aligned} & (+ 280) + 2050 \text{ kg und } (- 280) - 2050 \text{ kg f. d. qcm,} \\ & (+ 480) + 3510 \text{ „ „ Null} \\ & (+ 800) + 5850 \text{ „ „ } (+ 350) + 2560 \text{ „ „} \end{aligned}$$

3. Bei Stäben aus ungehärtetem Gufsfederstahl:

Schwingungen zwischen:

$$\begin{aligned} & (+ 500) + 3660 \text{ kg und Null} \\ & (+ 700) + 5120 \text{ „ „ } (+ 250) + 1830 \text{ kg f. d. qcm,} \\ & (+ 800) + 5850 \text{ „ „ } (+ 400) + 2930 \text{ „ „} \\ & (+ 900) + 6580 \text{ „ „ } (+ 600) + 4390 \text{ „ „} \end{aligned}$$

Wenn die unteren Schwingungsgrenzen σ_{\min} als Abscissen und die Spannungsdifferenzen ($\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$) als zugehörige Ordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgetragen werden, so können die so erhaltenen Punkte nach Gerber durch eine Parabel verbunden werden, deren Gleichung lautet:

$$(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})^2 + \frac{2z^2}{s_s}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = 4z^2, \dots \dots \dots 31.$$

worin z die Festigkeit gegen Zug bzw. Druck für ruhende Belastung und s_s die „Schwingungsfestigkeit“, d. i. die Grenzspannung für den Wechsel der Inanspruchnahme im entgegengesetzten Sinne bei gleicher Spannungsgröfse gegen Zug und Druck.

Gl. 31 stellt sonach einen Ausdruck für das Wöhler'sche Gesetz dar. Aus dieser Gleichung berechnet sich:

$$\sigma_{\max} = - \left(\sigma_{\min} + \frac{z^2}{s_s} \right) + z \sqrt{4 + 4 \frac{\sigma_{\min}}{s_s} + \left(\frac{z}{s_s} \right)^2} \dots \dots \dots 32.$$

Für $\sigma_{\min} = 0$ sei $\sigma_{\max} = s_u$, so folgt:

$$s_u = z \left[\sqrt{4 + \left(\frac{z}{s_s} \right)^2} - \left(\frac{z}{s_s} \right) \right] = c z, \dots \dots \dots 33.$$

wo $c = \left(\sqrt{4 + \left(\frac{z}{s_s} \right)^2} - \left(\frac{z}{s_s} \right) \right)$.

Weiter ist aus Gl. 33:

$$s_s = \frac{2 s_u z^2}{4 z^2 - s_u^2} = 2 \frac{s_u}{4 - \left(\frac{s_u}{z} \right)^2} = 2 \frac{s_u}{4 - c^2} = 2 \frac{c z}{4 - c^2}$$

oder:

$$\frac{s_s}{z} = \frac{2 c}{4 - c^2} \dots \dots \dots 34.$$

⁵⁹⁾ Die eingeklammerten Zahlen sind die Wöhler'schen Werte in Zollcentnern für den Quadratzoll = 7,31 kg f. d. qcm.

Auf Grundlage der Gleichungen 33 und 34 können aus Versuchen Wöhler's und Bauschinger's⁶⁰⁾ die folgenden Mittelwerte gezogen werden:

Für Schweifs- und Flufseisen:

$$c = 0,57, \quad s_u = 0,57 z \quad \text{und} \quad s_s = 0,3 z,$$

für Stahl:

$$c = 0,48, \quad s_u = 0,48 z \quad \text{und} \quad s_s = 0,25 z.$$

Von Launhardt wurde im Jahre 1873 gleichfalls ein analytischer Ausdruck für das Wöhler'sche Gesetz aufgestellt, jedoch blofs für Beanspruchungen nach einem Sinne.

Prof. Weyrauch erweiterte, dem Gedankengange Launhardt's folgend, dessen Formel auch für Spannungen, die in entgegengesetztem Sinne wechseln.

Die Launhardt-Weyrauch'schen Gleichungen für das Wöhler'sche Gesetz sind die folgenden:⁶¹⁾

a. Für Beanspruchungen S_{\min} und S_{\max} nach einem Sinne:

$$\sigma_{\max} = s_u \left(1 + \frac{z - s_u}{s_u} \cdot \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \dots \dots \dots 35.$$

b. für Beanspruchung in entgegengesetztem Sinne:

$$\sigma_{\max} = s_u \left(1 - \frac{s_u - s_s}{s_u} \cdot \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \dots \dots \dots 36.$$

Der einfachste Ausdruck für das Wöhler'sche Gesetz wurde von Prof. Winkler aufgestellt.⁶²⁾ Derselbe lautet:

$$\sigma_{\max} = (1 - k) z + k \cdot \sigma_{\min} \dots \dots \dots 37.$$

wobei

$$k = \frac{z - s_u}{z + s_s} \dots \dots \dots 38.$$

ist.

Bei den Wöhler'schen Ergebnissen ist das eine auffallend, dafs die Grenzspannungen der Schwingungen bei Anstrengung des Baustoffes nach einem Sinne über der Elasticitätsgrenze liegen und dennoch derartige Spannungswechsel in unbegrenzter Anzahl ungeschädigt ausgehalten werden konnten. Aufklärung über diese Erscheinung erhalten wir in den oben vorgeführten Mitteilungen des Prof. Bauschinger, dessen Forschungen im Gebiete der Festigkeit der Baustoffe neue und wichtige Ergebnisse geliefert haben. Die im XIII. Hefte der genannten Mitteilungen Bauschinger's niedergelegten Ergebnisse sind in kurzem die Folgenden:

Bei elastischen Baustoffen gilt der Hooke'sche Satz über die Proportionalität der Verlängerungen oder Verkürzungen mit der Belastung, durch welche sie hervor gebracht wird, stets bis zu einer gewissen Grenze der Belastung. Wird diese Grenze überschritten, so wachsen die Längenänderungen rascher als die Belastungen.

Das Überschreiten der Proportionalitätsgrenze ist von einigen gleichzeitig auftretenden Erscheinungen begleitet, welche deren Bestimmung wesentlich erleichtern.

⁶⁰⁾ Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Königl. technischen Hochschule in München von J. Bauschinger, XIII. Heft, S. 47.

⁶¹⁾ Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlkonstruktionen mit Rücksicht auf die neueren Versuche von Dr. Jakob J. Weyrauch. 1876.

⁶²⁾ Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1877. — Winkler. Wahl der zulässigen Inanspruchnahme für Eisenkonstruktionen. Wien 1877.

Während nämlich

1. die bleibenden Längenänderungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze nur klein sind und nur ganz allmählich mit der Belastung wachsen, werden sie nach Überschreitung jener Grenze mit einem Male bedeutend größer.
2. Während bei wiederholtem Hin- und Hergehen zwischen der Belastung Null und einer innerhalb der Proportionalitätsgrenze gelegenen immer wieder dieselben bleibenden und gesamten Längenänderungen erhalten werden, steigen beide bei einer oberen Belastung, welche über der Proportionalitätsgrenze liegt, bei jedem neuen Wechsel zwischen dieser Belastung und Null.
3. Während endlich innerhalb der Proportionalitätsgrenze die Zeit keinen Einfluss zeigt, erfolgt nach Überschreiten dieser Grenze eine elastische Nachwirkung.

Bauschinger folgert im weiteren: „Wenn in einem Stabe, welcher wechselnden Beanspruchungen zwischen einer unteren und oberen Grenze, von denen wenigstens die letztere über der ursprünglichen Elasticitätsgrenze liegt, ausgesetzt wird, die Lage der Elasticitätsgrenze (Proportionalitätsgrenze) nicht verändert oder erniedrigt wird, oder wenn dieselbe im Falle der Erhöhung unter jener oberen Grenze bleibt, so muß durch solche Anstrengungen, wenn sie nur oft genug wiederholt werden, schließlich der Bruch erfolgen; denn jede neue Anstrengung bringt eine neue Vergrößerung der Längenänderung hervor. Wenn aber umgekehrt beide Grenzen der wechselnden Beanspruchungen unterhalb der Elasticitätsgrenze liegen und liegen bleiben, so kann auch durch noch so lange fortgesetzte Wiederholung der Anstrengungen der Bruch nicht erfolgen.“

Bei Schweifeseisen, Flusseisen und Stahl tritt bei allmählicher Vergrößerung der Belastung über die Elasticitätsgrenze ein zweiter merkwürdiger Punkt auf, wo nämlich die Längenänderungen, welche durch die fortwährend in gleichen Intervallen wachsenden Belastungen hervorgebracht werden, auf einmal sehr rasch wachsen. Das Schaubild, welches bis dahin sich nur wenig und ganz allmählich von der geraden Linie, die es innerhalb der Elasticitätsgrenze bildete, abgebogen hat, biegt sich nun plötzlich in einem mehr oder weniger scharfen Knie um (vergl. Fig. 24, S. 99). Bauschinger nennt den dabei stattfindenden Vorgang das Strecken und den Punkt, wo dies beginnt, die Streckgrenze.

Einfluss der Streckung.

1. Die Streckgrenze wird stets bis zu der Belastung hinaufgehoben, mit welcher gestreckt wurde und zwar schon unmittelbar nach dem Strecken. In der Zeit der Ruhe aber, die nach der auf das Strecken vorgenommenen Entlastung verstreicht, hebt sich die Streckgrenze über jene Größtbelastung, mit welcher gestreckt worden ist, hinaus und zwar ist diese Hebung schon nach einem Tage sehr gut bemerkbar, dauert aber Wochen und Monate, vielleicht Jahre fort.

2. Die Elasticitätsgrenze wird durch Strecken herabgeworfen, oft bis auf Null, sodass die Probestücke, wenn sie unmittelbar nach dem Strecken und Entlasten wieder gemessen werden, gar keine oder eine bedeutend niedrigere Elasticitätsgrenze haben. In der Zeit der Ruhe, die nach der auf das Strecken vorgenommenen Entlastung verstreicht, hebt sich auch die Elasticitätsgrenze wieder, erreicht nach mehreren Tagen die Belastung, mit welcher gestreckt wurde und wird nach genügend langer Zeit, sicher nach mehreren Jahren, selbst über diese Belastung hinausgehoben.

3. Mit der Elasticitätsgrenze wird in der Regel auch die Elasticitätsziffer durch vorausgegangenes Strecken erniedrigt; sie erhebt sich, wie jene, in der Zeit der Ruhe nach dem Strecken und Entlasten wieder, wahrscheinlich aber langsamer. Nach mehreren Jahren findet sie sich stets beträchtlich über ihre ursprüngliche Größe hinausgehoben.

4. Durch Dehnen mit Belastungen, die über der Elasticitäts-, aber noch unter der Streckgrenze liegen, wird die Elasticitätsgrenze erhöht und zwar sofort nach dem Entlasten und um so mehr, je höher die Belastung war. Wenn letztere in die Nähe der Streckgrenze kommt, erreicht die Elasticitätsgrenze einen Größtwert und wird bei Überschreiten der Streckgrenze herabgeworfen, entsprechend dem zweiten Satze.

Einfluss von Erschütterungen.

Heftige Erschütterungen, wie sie bei Schmieden in kaltem Zustande und nachfolgendem Bearbeiten vorkommen, erniedrigen die vorher durch Strecken und eine darauf verstrichene längere Ruhepause erhöhte Elasticitätsgrenze wieder. Die Streckgrenze wird durch eine solche Behandlung auch erniedrigt, jedoch nicht viel; sie bleibt noch weit über der Höhe, die sie im ursprünglichen Zustande des Probestückes hatte.

Einfluss der Wärme.

1. Die Wirkung der Erwärmung und darauf folgenden Abkühlung auf die Lage der Elasticitäts- und Streckgrenze wird beim Flusseisen erst von 350° an, wenn die Abkühlung rasch, und von 450° an, wenn diese langsam erfolgt, bemerklich. Temperaturen, welche unter jenen liegen, bringen keine Wirkungen auf die Lage jener beiden Grenzen hervor. Bei Schweißeseisen beginnt diese Wirkung sowohl bei rascher, als bei langsamer Abkühlung von 400° an.

2. Die Wirkung der Erwärmung über jene Temperaturen und der darauf folgenden langsamen oder raschen Abkühlung besteht immer darin, daß die Elasticitätsgrenze sowohl als die Streckgrenze erniedrigt wird, und zwar um so mehr, je höher erwärmt wurde, jedoch so, daß diese Einwirkung auf erstere Grenze bedeutend energischer ist, als auf letztere.

3. Rasches Abkühlen nach dem Erwärmen erniedrigt die Elasticitäts- und Streckgrenze, besonders die erstere, weit stärker als langsames Abkühlen; rasches Abkühlen wirft die Elasticitätsgrenze meist schon bei einer Erwärmung auf 500° , sicher aber beim Kirschrotglühen auf Null oder nahezu auf Null herab, und zwar sowohl bei Schweiß- und Flusseisen, als auch beim Bessemer-Stahl, während langsame Abkühlung eine so tiefe Senkung der Elasticitätsgrenze selbst nach Kirschrothitze nicht hervorbringen kann.

Einfluss abwechselnder Belastungen auf Zug und Druck.

1. Durch Belasten auf Zug oder Druck über die Elasticitätsgrenze hinaus wird die Elasticitätsgrenze für Druck oder bezw. Zug bedeutend erniedrigt, umsomehr, je höher jene Belastungen über der betreffenden Elasticitätsgrenze liegen, und schon verhältnismäßig geringe Überschreitungen der Elasticitätsgrenze für eine Belastungsart werfen die Elasticitätsgrenze für die Belastung im entgegengesetzten Sinne bis auf Null herab. Wenn eine so erniedrigte Elasticitätsgrenze durch Belasten im gleichen Sinne wieder gehoben wurde und dann überschritten wird, so fällt sofort die Elasticitätsgrenze für die Belastung im entgegengesetzten Sinne wieder auf Null oder fast auf Null herab. Die Zeit ist bei diesen Vorgängen ohne oder doch nur von geringem Einfluss, d. h. die durch Zug oder Druck erniedrigte Elasticitätsgrenze für bezw. Druck oder Zug hebt sich, wenigstens im Verlaufe der nächsten 3 bis 4 Tage, nicht wieder und im Verlaufe der nächsten Wochen, wenn überhaupt, doch nur wenig.

2. Durch allmählich anwachsende, zwischen Zug und Druck wechselnde Spannungen kann die Elasticitätsgrenze für entgegengesetzte Beanspruchungen erst dann erniedrigt werden, wenn jene Spannungen die ursprüngliche Elasticitätsgrenze überschreiten.

3. Wenn die Elasticitätsgrenze für Zug oder Druck durch vorausgegangene Belastung auf Druck bezw. Zug, die über der ursprünglichen Elasticitätsgrenze lag, erniedrigt worden ist, so kann sie durch allmählich anwachsende, zwischen Zug und Druck wechselnde Belastungen wieder gehoben werden, aber nur bis zu einer Grenze, die beträchtlich unter der ursprünglichen Elasticitätsgrenze liegt.

Einfluss wiederholter Anstrengungen.

1. Wenn bei wiederholten Anstrengungen auf Zug, deren untere Grenze Null ist, die obere Grenze in der Nähe der ursprünglichen Elasticitätsgrenze liegt, so wird auch durch 5 bis 16 millionenmalige Wiederholung dieser Anstrengung der Bruch nicht erreicht.

Bemerkung. Bei Anwendung auf die Praxis sind zwei wichtige Punkte nicht zu übersehen:

a) Das Material muß vollständig fehlerfrei sein. Die geringsten Fehler, die ursprünglich nicht oder kaum bemerklich sein konnten, veranlassen namentlich bei den homogenen Materialien (Flusseisen und Flusstahl) den Bruch schon nach einer verhältnismäßig geringen Zahl von Wiederholungen auch bei Anstrengungen, die unter oder nur wenig über der Elasticitätsgrenze liegen. Schweifeseisen dagegen scheint für kleine Oberflächenfehler fast unempfindlich zu sein.

b) Die sogenannte ursprüngliche Elasticitätsgrenze ist, wie die obigen Sätze gezeigt haben, sehr veränderlich, sehr abhängig von der vorausgegangenen Behandlung des Probestückes. Sie kann sehr tief liegen, kann aber auch bis nahe an die Bruchgrenze gehoben werden. Man muß sich also erst Rechenschaft darüber zu geben suchen, ob die für ein bestimmtes Material gefundene Elasticitätsgrenze nicht künstlich durch Strecken, Walzen u. s. w. gar zu hoch gehoben worden ist, bevor man sicher sein kann, daß es Anstrengungen, deren obere Grenze in der Nähe der Elasticitätsgrenze liegt, auf unbeschränkte Dauer auszuhalten vermag.

2. Durch oftmal wiederholte Anstrengungen zwischen Null und einer oberen Spannung, welche in der Nähe oder auch mehr oder weniger über der ursprünglichen Elasticitätsgrenze gelegen ist, wird diese gehoben und zwar bis über, manchmal weit über die obere Grenze der Anstrengungen hinaus und um so höher, je größer die Anzahl der Anstrengungen ist, ohne jedoch eine gewisse Höhe überschreiten zu können.

3. Wiederholte Anstrengungen (Schwingungen) zwischen Null und einer oberen Grenze, welche die ursprüngliche Elasticitätsgrenze noch über ihre obere Spannung hinaus zu heben vermögen, führen den Bruch nicht herbei; wenn aber ihre obere Grenze so hoch liegt, daß die Elasticitätsgrenze nicht mehr darüber hinaus gehoben werden kann, so muß der Bruch nach einer beschränkten Anzahl solcher Anstrengungen erfolgen.

4. Die Zugfestigkeit zeigt sich durch millionenmal wiederholte Anstrengungen nicht vermindert, eher erhöht, wenn das Probestück nach jenen Anstrengungen mit ruhender Belastung abgerissen wird.

5. Oftmal, millionenmal wiederholte Anstrengungen des Eisens und Stahles bringen keine Änderungen des Gefüges hervor.

Der Satz unter 2. über den Einfluss wiederholter Inanspruchnahmen giebt eine Erklärung für die merkwürdige, durch Wöhler nachgewiesene Thatsache, wonach ein Stoff Anstrengungen, deren obere Grenze über der ursprünglichen Elasticitätsgrenze liegt, unter Umständen in unbeschränkter Anzahl auszuhalten vermag. Es wird eben nach obigem Satze die Elasticitätsgrenze durch wiederholte Anstrengungen, insofern diese anfänglich die Streckgrenze nicht erreichen, gehoben. Dieses Verhalten erinnert lebhaft an die Steigerung der Muskelkraft durch Übung, und es läßt sich die in Obigem besprochene Erscheinung vielleicht folgendermaßen erklären.

Es ist bekannt, daß in verschiedenen Orten eines Eisenstabes die Elasticitätsverhältnisse verschieden und daß dehnbarere Teile neben minder dehnbaren aneinandergefügt sind, vergl. S. 93. Bei Krafteinwirkungen werden die minder dehnbaren Teilchen in ihrem Widerstande stärker in Anspruch genommen als die dehnbareren, welche in der Entfaltung ihres Widerstandes durch die infolge der Verschiedenheit der Dehnungen notwendig auftretenden Schubspannungswiderstände behindert sind. Oftmalige Wiederholungen der Krafteinwirkung dürften geeignet sein, den mit molekularer Reibung vergesellschafteten Schubwiderstand zu verringern und so das Gleiten der dehnbareren Teile zu erleichtern, womit auch der volle Widerstand derselben freier zur Entfaltung gelangt. Alsdann wird ein Zustand eintreten, in welchem sowohl die minder dehnbaren, als auch die dehnbareren Teilchen, einander weniger hindernd, ihren Widerstand freier entwickeln können, wodurch die Gesamtheit der Widerstände nunmehr eine größere ist, als bei der ersten Belastung.

Litteratur.

- Wöhler. Resultate der in der Central-Werkstatt zu Frankfurt a. d. O. angestellten Versuche über die relative Festigkeit von Eisen, Stahl und Kupfer. Zeitschr. f. Bauw. 1866, S. 67.
- Spangenberg. Über das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen. Zeitschr. f. Bauw. 1874, S. 474; daselbst 1875, S. 78.
- Theune. Die bleibenden Spannungen gebogener Stäbe und die Wöhler'schen Versuche. Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnw. 1879, S. 224.
- Bauschinger. Über die Festigkeitsverminderung und das Krystallinischwerden des Eisens durch den Gebrauch. Polyt. Journ. 1880, Bd. 235, S. 169.
- Egleston. Über die Widerstandsfähigkeit der Metalle gegen wiederholte Inanspruchnahme, über die Ermüdung bezw. die Erholung der Materialien. Revue univers. des mines 1880, Mai, S. 521.
- Bauschinger. Über die Veränderungen der Elasticitätsgrenze und des Elasticitätsmoduls verschiedener Metalle. Polyt. Journ. 1877, Bd. 224, S. 1; Civil-Ingenieur 1881, S. 290. — Hierüber berichtet Kirsch in Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1886, S. 791 und Daniel Mayer in Ann. des ponts et chaussées 1886, II. S. 726. Vergl. auch Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 351.
- Weyrich. Über die Wirkung dauernder oder häufig wiederholter Anstrengungen auf die Eigenschaften des Stahles. Deutsche Bauz. 1886, S. 471.

§ 22. Zulässige Inanspruchnahme des Eisens. Die Abmessung der Querschnitte der einzelnen Konstruktionsteile einer Eisenbrücke gründet sich

1. auf die Kenntnis der Kräfte, welche dieselben beanspruchen, nach Gröfse und Sinn ihrer Wirkung mit Bezug auf den betreffenden Bauteil,
2. auf die Bemessung der Gröfse des Widerstandes bezüglich der Querschnittseinheit des Baustoffes.

Die Ermittlung der unter 1. bezeichneten Kräfte erfolgt im Wege theoretischer Untersuchungen, welche den Kapiteln VIII, XI, XII und XV dieses Werkes vorbehalten sind. Die Bemessung der Gröfse des Widerstandes beruht auf der Kenntnis der Festigkeitseigenschaften des Stoffes und der Abschätzung aller Einflüsse und Umstände, welche mit Rücksicht auf die dauernde Sicherheit des Bauwerkes von maßgebender Bedeutung sind.

Indem hinsichtlich der Festigkeitseigenschaften der Baustoffe für eiserne Brücken auf die §§ 16 bis 19 verwiesen wird, erübrigt die Behandlung der Frage nach den maßgebenden Einflüssen, welche bei Bemessung der zulässigen Inanspruchnahme in Betracht kommen. Die hierbei anzustellenden Erwägungen werden der Hauptsache nach auf dem Gedanken fußen, der Konstruktion die erforderliche Zuverlässigkeit zu sichern und dabei den Widerstand des gegebenen Baustoffes möglichst auszunutzen.

Die Konstruktion ist zuverlässig oder sicher, wenn sie den auf sie einwirkenden äußeren Kräften auf die Dauer zu widerstehen vermag und dies ist nur dann zu erreichen, wenn die Gröfse, der Sinn und die Wirkungsart dieser Kräfte in angemessenem Verhältnisse zur dauernden Widerstandsfähigkeit des Baustoffes stehen.

Die Festigkeitsgröfse des Stoffes ergibt sich aus der äußersten Spannung, auf die Querschnittseinheit bezogen, welche den Bruch bei ruhiger Last-Einwirkung herbeiführt; die Elasticitätsgrenze entspricht dagegen jener äußersten Spannung, bis zu welcher die Längenänderungen den Belastungen proportional wachsen und die bleibenden Längenänderungen von verschwindender Gröfse sind. So lange die Anstrengungen des Baustoffes innerhalb dieser Grenze sich bewegen, gilt auch das Grundgesetz der Festigkeitslehre — das Hooke'sche Gesetz (vergl. S. 106).

Spannungen, welche diese Grenze übersteigen, sind unzulässig, weil jede neue Überschreitung der Elasticitätsgrenze neue bleibende Längenänderungen zur Folge hat,

welche endlich zum Bruche führen würden. Hiernach würde also die Elasticitätsgrenze zugleich als äußerste Grenze der zulässigen Anstrengungen angesehen werden müssen.

Würde die Kraft, welche den zu berechnenden Bauteil angreift, der Größe und dem Sinne nach genau bekannt und deren Wirkungsart eine ruhige, durchaus statische sein und dürfte ferner vorausgesetzt werden, daß auch die Zeitdauer dieser Wirkung keine schädliche Änderung des ursprünglichen Zustandes hervorbringt, so könnte die Elasticitätsgrenze thatsächlich als größte zulässige Inanspruchnahme angenommen und es könnten auf Grund derselben die Querschnittsabmessungen bestimmt werden. Diese Voraussetzungen sind jedoch in den seltensten Fällen zutreffend; meistens machen sich Einflüsse von solcher Bedeutung geltend, daß die wirklich zulässigen Inanspruchnahmen beträchtlich unter jene Grenze herabgesetzt werden müssen.

Diese Einflüsse sind hauptsächlich die folgenden:

1. Die rechnermäßig ermittelten Kräfte, durch welche die einzelnen Bauteile beansprucht werden, sind bei Baukonstruktionen in der Regel nur näherungsweise der Wirklichkeit entsprechend, denn die theoretischen Annahmen, auf welchen die Berechnung gegründet werden muß, sind ebenfalls nur näherungsweise richtig. Schon die Größe der angenommenen Belastungen wird oft genug nicht unerhebliche Unterschiede gegen die wirklich auftretenden aufweisen. So sind z. B. die Raddrücke ein und derselben Lokomotivachse infolge des sogenannten Wankens der Lokomotiven oft gegen den halben Achsendruck erheblich verschieden; die wirkliche Druckverteilung des Lokomotivgewichtes auf die Achsen zeigt ebenso gegen die Annahmen nicht unbeträchtliche Abweichungen, welche noch sehr erhöht werden durch die schwingenden Bewegungen, das sogenannte Nicken, der fahrenden Lokomotiven infolge der Unebenheiten der Gleise u. a. m. Namentlich bei Brücken kleiner Spannweiten sind diese Unterschiede von merkbarem Einfluß.

Auch die übliche Annahme einer gleichmäßigen Verteilung des Eigengewichtes der Hauptträger längs derselben ist nur annähernd richtig. Die Berechnung statisch bestimmter Konstruktionssysteme würde nur dann vollkommen zutreffende Ergebnisse liefern, wenn die gelenkförmigen Knotenverbindungen ohne Reibung zur Wirkung gelangen könnten. Statisch unbestimmte Systeme gestatten überhaupt nur näherungsweise Berechnungen, weil sie das Heranziehen der elastischen Formänderung nötig machen. Die Einbeziehung der letzteren kann jedoch wegen der Unbestimmtheit der Elasticitätsziffer auch nur zu Näherungswerten führen. Dasselbe gilt von den Nebenspannungen, die infolge der Starrheit der Knotenpunktverbindungen bei den unter der Belastung entstehenden Formveränderungen sich einstellen.

2. Die Einflüsse der mit Stößen und Erschütterungen zur Wirkung kommenden Belastungen, der Geschwindigkeit der rollenden Lasten und der dadurch hervorgebrachten Vergrößerung der Raddrücke, sowie der hiermit in Verbindung stehenden, fast plötzlichen Kraftwirkung, namentlich bei Brücken kleinerer Spannweiten.

3. Der Einfluß ungleichmäßigen elastischen Verhaltens des Baustoffes, bezw. der aus verschiedenen Konstruktionselementen zusammengesetzten und durch Nietung verbundenen Konstruktionselemente, der Arbeitsmängel, verborgener Materialfehler u. s. w.

4. Die Montierungsspannungen infolge der zwangweise in die Konstruktion eingefügten Konstruktionsglieder, sowie die unbeabsichtigten zufälligen Anfangsspannungen.

5. Die ungleichmäßige Anteilnahme an der Kraftübertragung solcher Bauglieder, welche in zwei oder mehrere Einzelglieder geteilt, der Berechnung nach gleiche Lastanteile aufzunehmen hätten, jedoch wegen des mehr oder minder excentrischen

Anschlusses der lastübertragenden Zwischenkonstruktion eine gleiche Lastverteilung nicht erwarten lassen.

6. Der Einfluss der Zeit, insofern angenommen werden muss, dass die ununterbrochene Wirkung des Eigengewichtes, der Temperaturschwankungen, dann der Erschütterungen durch die Verkehrslasten und anderer zufälliger, im Laufe der Zeit eintretender schädlicher Umstände die ursprüngliche Widerstandsfähigkeit des Baustoffes herabmindern und zwar um so mehr, je größer die Inanspruchnahme ist.

Alle diese Umstände nötigen zum Herabsetzen der „zulässigen Inanspruchnahme“ unter die Elasticitätsgrenze und zwar um so mehr, als diese GröÙe selbst nicht genau bestimmt ist, vielmehr nur einem anzunehmenden und aus Versuchsergebnissen abzuleitenden Mittelwerte entspricht. Hinsichtlich der Bemessung der GröÙe der genannten Einflüsse erübrigt nun kein anderer Weg als der der Schätzung.

Diese sämtlichen Einflüsse durch Einführung einer Ziffer, die einem Bruchteile der Spannung an der Elasticitätsgrenze entsprechen würde, decken zu wollen, geht nicht an, denn jeder dieser Einflüsse kommt z. B. nicht nur je nach der GröÙe der Spannweite mit verschiedener GröÙe in Betracht, sondern er muss auch je nach dem Konstruktionssystem, ja sogar eigentlich für jedes Bauglied mit Berücksichtigung der besonderen Eigentümlichkeit desselben abgeschätzt werden. So ist es fraglos, dass die dynamischen Wirkungen der bewegten Verkehrslast auf kleine Brücken und Träger kleiner Spannweiten erheblich größer ist, als auf große Brücken. Aber nicht nur dies. Gietete Gitter- und Fachwerksträger werden unter sonst gleichen Umständen derartigen Wirkungen besser widerstehen als Träger mit Knotengelenken und zwar deshalb, weil die Widerstandsarbeit der ersteren sowohl aus der achsialen Arbeit der Stabkräfte, als aus deren Biegeungsarbeit sich zusammensetzt und daher etwa wie die eines Federwerkes wirkt, während die Widerstandsarbeit der letzteren bloß durch die wesentlich geringeren Längsschwingungen der Stäbe geleistet werden kann. Konstruktionsglieder von stärkerer Masse, die Gurtungen z. B., verhalten sich gegen Stosswirkungen wesentlich günstiger als schwache Stäbe. Zusammengesetzte Glieder werden anders zu beurteilen sein, als einfache, Druckglieder anders als Zugbänder u. s. w.

Derartige Erwägungen werden die Richtschnur bilden bei Abschätzung jener Ziffer, die, wie dargethan, nichts weniger als unveränderlich angesehen werden darf, sondern im Gegenteil verschiedene, den jeweilig zu bestimmenden Konstruktionsteilen angemessene Werte erhalten soll.

Nach dem älteren Verfahren der Querschnittsbestimmung für die Konstruktionsglieder der Brücken nahm man in der Regel einen Bruchteil der Bruchfestigkeit als zulässige Inanspruchnahme an und bezeichnete mit dem Namen Sicherheitsgrad die Zahl, durch welche die Bruchspannung geteilt wurde. Je nach den mehr oder minder günstigen Umständen, der Wirkung der Stöße, der kürzeren oder längeren Dauer der Konstruktion bewegte sich jener Sicherheitsgrad bei Schweifeseisen zwischen 4 bis 6. Meistens lagen die zulässigen Inanspruchnahmen für Brückenkonstruktionen zwischen 600 bis 800 kg f. d. qcm.

Manche Konstrukteure wendeten auch veränderliche Inanspruchnahmen an, je nach der GröÙe der Spannweiten; so findet sich in Laissle und Schübler, „Bau der Brückenträger“ als zulässige Inanspruchnahmen angegeben:

Für kleine Brücken	$s = 600$ kg f. d. qcm,
„ mittelgroÙe Brücken	$s = 700$ „ „
„ große Brücken	$s = 800$ „ „

Gerber führte zuerst⁶³⁾ den Einfluss des Eigengewichtes und der bewegten, stofsweise wirkenden Verkehrslast, mit verschiedenen Einflussziffern versehen, in die Berechnung

⁶³⁾ Die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz. 1863.

ein, indem er die Spannung an der Elasticitätsgrenze erreichen liefs durch die Summe aus der einfachen Spannung durch das Eigengewicht und der dreifachen Spannung durch die Verkehrslast, wobei die Elasticitätsgrenze mit 1600 kg f. d. qcm angenommen wurde.

Bezeichnet nämlich:

S_e die vom Eigengewichte,

S_v die von der Verkehrslast herrührende achsiale Stabkraft,

F den Querschnitt des Stabes,

so ist hiernach:
$$1600 = \frac{S_e + 3 S_v}{F} \dots \dots \dots 39.$$

Ist die Inanspruchnahme der Querschnittseinheit = s , so ist auch

$$s = \frac{S_e + S_v}{F},$$

sonach:
$$s = 1600 \frac{S_e + S_v}{S_e + 3 S_v} \text{ kg f. d. qcm} \dots \dots \dots 40.$$

Durch Gerber fanden auch zuerst, und zwar schon seit dem Jahre 1872, die Wöhler'schen Versuchsergebnisse praktische Verwendung bei der Querschnittsbestimmung der Brückenkonstruktionen. Derselbe entwickelte auf Grund des von ihm abgeleiteten Ausdruckes für das Wöhler'sche Gesetz (Gl. 31) ein besonderes Verfahren zur Bemessung der zulässigen Inanspruchnahmen, welches von dem Königl. bayerischen Ministerium des Innern angenommen und für eiserne Strafsenbrücken am 13. Februar 1878 zur Vorschrift erhoben wurde. Diese Vorschrift trifft folgende Bestimmungen:

„Die Anzahl der Schwingungen, nach welcher Bruch entsteht, ist abhängig von der Gröfse der beiden die Schwingungen eingrenzenden Spannungen. Übersteigt für eine bestimmte Grenzspannung die Gröfse des Spannungswechsels nicht einen bestimmten Wert, so ist ein Bruch überhaupt nicht zu erwarten. Die Beziehung zwischen dieser Gröfse des Spannungswechsels und der unteren und oberen Grenzspannung wird durch die Gleichung:

$$\tau = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{9 + 4 (2 \varphi + 1)^2}) - \varphi \dots \dots \dots 41.$$

dargestellt, worin

$$\varphi = \frac{\alpha}{\eta} \dots \dots \dots 42.$$

das Verhältnis der unteren Grenzspannung α zur Gröfse des Spannungswechsels η , und τ derjenige Koefficient ist, mit welchem die Gröfse des Spannungswechsels multipliziert werden mufs, um mit der unteren Grenzspannung diejenige zu geben, welche als ruhend die statische Festigkeitsgrenze γ bildet“.

„Sind für einen Träger die in einzelnen Konstruktionsteilen unter den gegebenen Verkehrs- und beständigen Belastungen überhaupt möglichen Maximal- und Minimalspannungen berechnet, so werden bei Brückenträgern aus Walzeisen die Querschnittsdimensionen der Teile für die statische Festigkeitsgrenze von 1,6 t auf das Quadratcentimeter entwickelt; es ist also mittels der aus obiger Gleichung bestimmten Koefficienten der Schwingungsfestigkeit der Bedingung $\alpha + \tau \eta = \gamma = 1,6 \text{ t f. d. qcm}$ zu genügen“.

„Zur Berücksichtigung der durch das Rollen der Räder über Unebenheiten der Fahrbahn und durch die Bewegungen der lebenden Lasten entstehenden Stöfse werden die sämtlichen veränderlichen Belastungen 1,5 fach als Verkehrslast in Rechnung gebracht“.

Führt man nämlich in Gl. 31 den Wöhler'schen Versuchswert $\frac{s_e}{z} = \frac{1}{3}$ ein, so erhält man, wenn gleichzeitig $\sigma_{\min} = \alpha$, $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \eta$ und $z = \gamma$ gesetzt wird,

$$\alpha = -\frac{\eta}{2} + \sqrt{\gamma^2 - \frac{3}{2} \gamma \eta}.$$

Setzt man weiter $\frac{\alpha}{\eta} = \varphi$, so ergibt sich auch

$$\left(\varphi + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma}{\eta}\right),$$

woraus
$$\frac{\gamma}{\eta} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{9 + 4 (2 \varphi + 1)^2} = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{9 + 4 (2 \varphi + 1)^2}).$$

Wird nun die Bedingung eingeführt, daß die Summe aus den spezifischen Spannungen infolge der konstanten Last (α) und der τ fachen veränderlichen Belastung (η) gleich γ sei, so folgt aus $\alpha + \tau\eta = \gamma$

$$\tau = \frac{\gamma}{\eta} - \frac{\alpha}{\eta} = \frac{\gamma}{\eta} - \varphi \text{ oder } \tau = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{9 + 4(2\varphi + 1)^2}) - \varphi,$$

wie die obige Vorschrift verlangt.

Schäffer änderte die Anwendungsweise Gerber's folgendermaßen:

Ist s die Inanspruchnahme der Flächeneinheit, so ist

$$F = \frac{S_{\max}}{s}.$$

Mit $\frac{S_{\max} - S_{\min}}{F} = \Delta$ wird erhalten:

$$\frac{\Delta}{s} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{S_{\max}}.$$

Werden die Erschütterungen durch Multiplikation der Verkehrslast mit dem Koeffizienten m berücksichtigt, so ist

$$S_{\max} = S_c + m S_v,$$

$$S_{\min} = S_c + m S'_v,$$

wobei S_c , S_v und S'_v algebraisch zu nehmen sind. Hiernach wird:

$$S_{\max} - S_{\min} = m (S_v - S'_v),$$

$$\frac{\Delta}{s} = \frac{m (S_v - S'_v)}{S_c + m S_v} \dots \dots \dots 43.$$

und

$$F = \frac{S_c + m S_v}{s}.$$

Weiter ist

$$S_{\min} = S_{\max} - \Delta \cdot F = F (s - \Delta).$$

Wird in Gl. 31

$$\frac{s_a}{z} = \frac{1}{3}, (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{F'} = \Delta, \sigma_{\max} = \frac{S_{\max}}{F'} = s$$

gesetzt, so folgt: $(2s - \Delta)^2 + 6z\Delta = 4z^2$ und hieraus

$$s = \frac{1}{2} \left[\Delta \pm z \sqrt{4 - 6 \frac{\Delta}{z}} \right] \text{ oder } \frac{s}{z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta}{z} \pm \sqrt{4 - 6 \frac{\Delta}{z}} \right].$$

Diese Gleichung wird alsdann in die Form

$$s = \frac{-3 \left(\frac{\Delta}{s}\right) + \sqrt{16 - 16 \left(\frac{\Delta}{s}\right) + 13 \left(\frac{\Delta}{s}\right)^2}}{\left(2 - \frac{\Delta}{s}\right)^2} \cdot z$$

gebracht, sodafs bei Zulassung von $\frac{1}{n}$ des Wertes z sich ergibt:

$$s = \frac{-3 \left(\frac{\Delta}{s}\right) + \sqrt{16 - 16 \left(\frac{\Delta}{s}\right) + 13 \left(\frac{\Delta}{s}\right)^2}}{\left(2 - \frac{\Delta}{s}\right)^2} \cdot \frac{z}{n} \dots \dots \dots 44.$$

Bei der Anwendung ermittelt man, nachdem die Spannungen bestimmt wurden, den Wert

$$\left(\frac{\Delta}{s}\right) = \frac{m (S_v - S'_v)}{S_c + m S_v}$$

und damit den Wert s aus der letzten Gleichung, worauf mittels der Beziehung

$$F = \frac{S_c + m S_v}{s} \dots \dots \dots 45.$$

die notwendige Querschnittsfläche F berechnet werden kann.

Schäffer setzt für $\frac{z}{n} = 1600 \text{ kg f. d. qcm}$ und für $m = 1,5$, wie Gerber.

Die Berechnung der zulässigen Inanspruchnahme nach der Launhardt-Weyrauch'schen Methode gestaltet sich einfacher als die vorhergehende.

Entsprechend den von Launhardt-Weyrauch aufgestellten Ausdrücken für das Wöhler'sche Gesetz Gl. 35 u. 36, aus welchen durch Einführung der Wöhler'schen Versuchswerte sich ergibt:

für Schweißseisen: $\frac{z - s_u}{s_u} = \frac{5}{6}$; $s_u = \frac{6}{11} z = 0,545 z$ und $\frac{s_u - s_s}{s_u} = \frac{7}{15}$,
 für Gufsstahl: $\frac{z - s_u}{s_u} = \frac{6}{5}$; $s_u = \frac{5}{11} z = 0,454 z$ und $\frac{s_u - s_s}{s_u} = \frac{5}{12}$,

lauten diese Beziehungen bei Beanspruchungen in nur einem Sinne:

für Schweißseisen: $\sigma_{\max} = s_u \left(1 + \frac{5}{6} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$,

für Stahl: $\sigma_{\max} = s_u \left(1 + \frac{6}{5} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$,

und bei Beanspruchungen im entgegengesetzten Sinne:

für Schweißseisen: $\sigma_{\max} = s_u \left(1 + \frac{7}{15} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$,

für Stahl: $\sigma_{\max} = s_u \left(1 + \frac{5}{12} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$.

Mit Rücksichtnahme auf Stofswirkungen und andere unvorhergesehene Einfüsse und Umstände wird als zulässige Inanspruchnahme nur ein Bruchteil von s_{\max} angenommen und der konstante Faktor des zweiten Gliedes entsprechend abgerundet.

Nach Weyrauch ist bei Beanspruchungen in einem Sinne:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweißseisen: } s = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \\ \text{für Stahl: } s = 1100 \left(1 + \frac{9}{11} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \end{array} \right\} \dots \dots \dots 46.$$

Bei Beanspruchungen im entgegengesetzten Sinne:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweißseisen: } s = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \\ \text{für Stahl: } s = 1100 \left(1 + \frac{5}{11} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \end{array} \right\} \dots \dots \dots 47.$$

wobei S_{\min} und S_{\max} algebraisch zu nehmen sind.

Nach Winkler's Anschauung⁶⁴⁾ kann das Wöhler'sche Gesetz ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

für Schweißseisen: $\sigma_{\max} = 0,55 z + 0,45 \sigma_{\min}$ (vergl. Gl. 37),
 für Stahl: $\sigma_{\max} = 0,44 z + 0,56 \sigma_{\min}$ (vergl. Gl. 37).

Bei Druck setzt Winkler die bezügliche spezifische Festigkeit

für Schweißseisen: $z' = \frac{7}{8} z$,
 für Stahl: $z' = \frac{5}{4} z$,

und bestimmt

für Schweißseisen: $\sigma_{\max} = 0,60 z' + 0,40 \sigma_{\min}$,
 für Stahl: $\sigma_{\max} = 0,37 z' + 0,63 \sigma_{\min}$.

Allgemein ist hiernach

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Zug: } \sigma_{\max} = (1 - k) z + k \sigma_{\min}, \\ \text{für Druck: } \sigma_{\max} = (1 - k') z' + k' \sigma_{\min} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 48.$$

Unter Voraussetzung n facher Sicherheit setzt Winkler:

$$\sigma_{\max} = \frac{n S_{\max}}{F}; \quad \sigma_{\min} = \frac{n S_{\min}}{F};$$

mithin ist für Zug $S_{\max} = (1 - k) \frac{z}{n} F + k S_{\min}$, weil aber $S_{\min} = S_c$, $S_{\max} = S_c + S_v$, so folgt:

$$F = \frac{S_{\max} - k S_{\min}}{(1 - k) \left(\frac{z}{n} \right)} = \frac{S_c}{\left(\frac{z}{n} \right)} + \frac{S_v}{(1 - k) \left(\frac{z}{n} \right)} \dots \dots \dots 49.$$

Für Druck ergibt sich gleichfalls:

$$F = \frac{S_{\max} - k' S_{\min}}{(1 - k') \left(\frac{z'}{n} \right)} = \frac{S_c}{\left(\frac{z'}{n} \right)} + \frac{S_v}{(1 - k') \left(\frac{z'}{n} \right)} \dots \dots \dots 50.$$

⁶⁴⁾ Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1877.

Wirkung von Zug und Druck bei überwiegendem Zuge.

Bezeichnet S_v und S'_v die positive und negative Spannung infolge der zufälligen Last, so ist

$$S_{\max} = S_c + S_v, \quad S_{\min} = S'_v - S_c$$

$$S_{\max} - k S_{\min} = (1 - k) \left(\frac{z}{n}\right) F = S_c + S_v + k(S'_v - S_c)$$

und

$$F = \frac{S_c}{\left(\frac{z}{n}\right)} + \frac{S_v}{(1 - k)\left(\frac{z}{n}\right)} + \frac{k S'_v}{(1 - k)\left(\frac{z}{n}\right)} \dots \dots \dots 51.$$

Wirkung von Druck und Zug bei überwiegendem Drucke.

Hier ist ähnlich dem Vorhergehenden:

$$F = \frac{S_c}{\left(\frac{z'}{n}\right)} + \frac{S_v}{(1 - k')\left(\frac{z'}{n}\right)} + \frac{k' S'_v}{(1 - k')\left(\frac{z'}{n}\right)} \dots \dots \dots 52.$$

Diese Beziehungen gelten, wenn die zufällige Last ohne Stofs wirkt.

Winkler berücksichtigt die Stofswirkung durch Multiplikation der Spannung aus der Verkehrslast mit einer Zahl, die für Eisenbahnbrücken = 1,3, bei Strafsenbrücken = 1,2 ist.

Indem derselbe

für Schweißseisen: $k = 0,45, \quad k' = 0,4, \quad \left(\frac{z}{n}\right) = 1400; \quad \left(\frac{z'}{n}\right) = 1200 \text{ kg f. d. qcm},$

für Stahl: $k = 0,56, \quad k' = 0,63, \quad \left(\frac{z}{n}\right) = 1800; \quad \left(\frac{z'}{n}\right) = 2200 \text{ kg f. d. qcm}$

setzt, erhält er für schweißseiserne Brücken und zwar:

a) Für Eisenbahnbrücken:

bei Zug oder überwiegendem Zuge:

$$F = \frac{S_c + 2,37 S_v + 1,07 S'_v}{1400} = \frac{S_c}{1400} + \frac{S_v}{590} + \frac{S'_v}{1300}, \dots \dots \dots 53.$$

bei Druck oder überwiegendem Drucke:

$$F = \frac{S_c + 2,17 S_v + 0,87 S'_v}{1200} = \frac{S_c}{1200} + \frac{S_v}{550} + \frac{S'_v}{1380}; \dots \dots \dots 54.$$

b) Für Strafsenbrücken:

bei Zug oder überwiegendem Zuge:

$$F = \frac{S_c + 2,18 S_v + 1,00 S'_v}{1400} = \frac{S_c}{1400} + \frac{S_v}{642} + \frac{S'_v}{1400}, \dots \dots \dots 55.$$

bei Druck oder überwiegendem Drucke:

$$F = \frac{S_c + 2,00 S_v + 0,8 S'_v}{1200} = \frac{S_c}{1200} + \frac{S_v}{600} + \frac{S'_v}{1500}, \dots \dots \dots 56.$$

Seit Einführung des Wöhler'schen Gesetzes in die Praxis der Querschnittsbemessung eiserner Brücken ist ein weitgreifender Umschwung in dem bis dahin üblichen Verfahren eingetreten. Es ist kein Zweifel, daß durch die Wöhler'schen Versuchsergebnisse ein großer Fortschritt in der Erkenntnis der Festigkeitseigenschaften des Eisens gemacht ist und es wird dies auch allgemein anerkannt. Gegen die direkte Verwendung des in Formeln zum Ausdrucke gebrachten Wöhler'schen Gesetzes für die Querschnittbestimmung von Eisenkonstruktionen ist jedoch trotz deren weitverbreiteten Anwendung mehrseitig Widerspruch erhoben worden.

So unterzog Professor Mohr in einem beachtenswerten Aufsätze: „Über die Verwertung der Wöhler'schen Versuche für die Querschnittbestimmung der Eisenkonstruktionen, insbesondere der eisernen Brücken“ im Civilingenieur 1881 die neuen Berechnungsmethoden einer eingehenden und scharfen Kritik. Ohne das Wöhler'sche Gesetz in der Form, in der dasselbe von seinem Entdecker ausgesprochen wurde, zu bezweifeln, wendet sich Mohr gegen die Anwendung desselben in Form eines allgemeinen Zahlenausdruckes zum Zwecke der Querschnittbestimmung von Konstruktionsteilen, weil die Versuchswerte selbst bloß an schlechten Stäben gewonnen, die Spannungsschwingungen in sehr kurzen Zeitabständen ausgeführt wurden und auch Spannungswerte aus Biegungsversuchen abgeleitet worden sind für Be-

anspruchungen, die über der Elasticitätsgrenze lagen, wo also die Theorie nicht mehr giltig ist. Wenn jedoch auch hiervon abgesehen würde, hält Mohr die Anwendung einer empirischen Formel für die Abmessung von Eisenkonstruktionen schon deshalb für ungeeignet, weil darin aufser dem Wöhler'schen Gesetze auch noch andere maßgebende Umstände aufgenommen werden müßten. So der Einfluß der Größe, Form und Zusammensetzung der Querschnitte, die Festigkeit der Verbindungen, die Dauer der Belastung, die Stöße der Verkehrslast, der ungleichmäßige Anteil der Konstruktionsglieder an der Haltbarkeit der Brücke und die Ungenauigkeiten der Berechnung. Die Einführung eines konstanten Sicherheitskoefficienten sei gänzlich unzutreffend; es müßte denn erst bewiesen werden, daß

1. „die Summe der Fehler und Irrtümer, welche man bei der Querschnittsbestimmung begeht, in jedem Falle genau oder doch wenigstens angenähert in einem konstanten Verhältnisse zu der gesuchten Querschnittsgröße steht;“
2. „daß die Gefahr, welche mit einer Überschreitung der Wöhler'schen Zahl verbunden ist, für alle Werte von $\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ eine konstante Größe hat“; und
3. „daß die Größe der Fehler und die Größe der Gefahr durch den Koefficienten richtig abgeschätzt sind.“

Mohr weist insbesondere darauf hin, daß bei den meisten Brücken, die gegenwärtig entworfen und ausgeführt werden, die Werte von $\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ zwischen Null und $\frac{1}{2}$ liegen, während für dessen negative Werte die Zerknickungsgefahr maßgebend ist und die neuen Vorschläge daher nicht in Anwendung kommen. Innerhalb der genannten Werte ergeben jedoch die neuen Formeln Inanspruchnahmen, welche mit wenigen Ausnahmen die früher üblichen weit überschreiten. Das Ergebnis wäre also, daß die Querschnittsabmessungen der Brückenglieder kleiner ausfallen, als nach dem alten Verfahren.

Mohr hält die Anwendung eines Schätzungsverfahrens zur Bemessung der zulässigen Inanspruchnahme für notwendig; er schlägt vor, dieselbe in **kg f. d. qmm** oder in ganzen Hunderten von **kg f. d. qcm** anzunehmen und unterscheidet drei Gruppen von Konstruktionsteilen und zwar z. B. solche, die mit 5, 6 oder 7 **kg f. d. qmm** in Anspruch genommen werden dürfen.

Die Begrenzung dieser Gruppen ist von den Umständen abhängig zu machen, welche einen allgemeinen Einfluß ausüben, also von der Zuverlässigkeit der bei der Berechnung angewendeten Theorie und von der Beschaffenheit des in Aussicht genommenen Baustoffes, insbesondere von dessen Gleichmäßigkeit und Zuverlässigkeit. Die Einteilung in Gruppen soll nach wichtigen Unterscheidungsgründen: nach der Form des Querschnitts, Einfachheit der Verbindungen, Wirkung der Stöße, Größe der Spannungsschwingungen, Genauigkeit der Berechnung u. s. w. erfolgen.

Laisle und Schübler haben sich gleichfalls gegen die neuen Berechnungsverfahren ausgesprochen und zwar namentlich in einem Aufsätze „Zur Bestimmung der Festigkeitskoefficienten für Eisenbauten“, Centralblatt der Bauverwaltung 1885, S. 138. Die Genannten halten diese Methoden nicht nur wegen der hohen Spannungen, welche sie ergeben, wenn $\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ der Einheit nahe kommt, für bedenklich, sondern auch für nicht folgerichtig. Sie folgern aus den Bauschinger'schen Versuchen, daß zunächst bei den nur auf Zug in Anspruch genommenen Bauteilen die Zahl der Belastungswiederholungen ganz gleichgiltig sei; es sei nur erforderlich, daß die in die Rechnung einzuführende zulässige Spannung so weit unter der Elasticitätsgrenze bleibe, daß diese letztere durch Hinzutreten von zufälligen Mehrbelastungen, unvermeidlichen Fabrikationsfehlern, allmählichen Querschnittsverminderungen (durch Rost u. dergl.), unbeabsichtigten Nebenspannungen und namentlich von Stofswirkungen nicht erreicht wird. Die Elasticitätsgrenze des Schweißeseisens liege zwischen $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ der Bruchlast, doch dürfe nur der kleinere dieser Werte maßgebend sein. Die Genannten treten für die Beibehaltung der bewährten Koefficienten ein und halten an denselben insbesondere mit Rücksicht auf die Zusatz- und Nebenspannungen fest. Sie nehmen je nach Größe der Stofswirkungen für Eisenbahnbrücken, deren Größe zwischen 550 bis 800 **kg f. d. qcm** an und halten eine Erhöhung derselben um 10 bis 15% dann für zulässig, wenn Zusatzspannungen ausgeschlossen oder in der Rechnung genau berücksichtigt worden sind. Bei Wechsel zwischen Druck und Zug könne eine Ermäßigung der obigen Festigkeitskoefficienten auf etwa $\frac{2}{3}$ ihrer Größe Platz greifen, da Wöhler's Versuche für die „Schwingungsfestigkeit“ etwa $\frac{2}{3}$ der Spannung an der Elasticitätsgrenze ergeben.

Professor Landsberg erhebt in einem Aufsätze „Über die Bestimmung der Querschnitte von Eisenkonstruktionen“ (Centralblatt der Bauverwaltung 1885) gegen die neuen Berechnungsverfahren ebenfalls den Vorwurf des Mangels an Folgerichtigkeit, anerkennt jedoch, daß mit diesem Verfahren ein Fortschritt in der Kunst des Eisenbaues verbunden gewesen sei. Für nur gezogene bzw. nur gedrückte

Stäbe führt er aus, daß man, ohne von den Wöhler'schen Versuchen auszugehen, auf anderem Wege zu Formeln gelange, welche den aus diesen Versuchen abgeleiteten ganz ähnlich, nahezu gleich sind.

Die Schlußfolgerungen Landsbergs sind die folgenden: Die Elastizitätsgrenze dürfe nicht erreicht werden. Der Einfluß von Querschnittsverminderungen durch Rost u. dergl. und der Nebenspannungen, die man jetzt mit ziemlicher Genauigkeit berechnen könne, wird mit $33\frac{1}{3}$ bis höchstens 50% gerechnet, so daß für die Elastizitätsgrenze von 1600 kg f. d. qcm die äußerste Grenze, welche mit Rücksicht auf die Stofswirkungen höchstens erreicht werden darf, 1200 bezw. 1050 kg f. d. qcm beträgt. Indem der Stofswirkung durch Multiplikation der Verkehrslasten mit $(1 + \mu)$ Rechnung getragen wird, erhält man die Beziehung

$$\sigma_{\min} + (1 + \mu)(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = K,$$

wenn $K = 1200$ bezw. 1050 kg f. d. qcm ist.

Aus der obigen Gleichung folgt:

$$\sigma_{\max} = \frac{K}{1 + \mu \left(1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}\right)} \dots \dots \dots 57.$$

Landsberg bestimmt nun μ so, daß für $\sigma_{\min} = 0$, $\sigma_{\max} = 700$ kg wird.

Hiernach ergibt sich $\mu = \frac{K}{700} - 1$, also für

$$\begin{aligned} k &= 1200; & \mu &= 0,7, \\ k &= 1050; & \mu &= 0,5. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1200}{1,7 - 0,7 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}} \\ \text{bezw.} \quad \sigma_{\max} &= \frac{1050}{1,5 - 0,5 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 57^a.$$

Angenähert ist für den zweiten Fall

$$\sigma_{\max} = 700 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}\right),$$

ein Ausdruck, welcher große Ähnlichkeit mit der Weyrauch'schen Gleichung hat.

In einem weiteren Aufsätze (Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575) erweitert Landsberg diese Entwicklungen auch für Beanspruchungen, welche zwischen Zug und Druck wechseln. Wenn bedeuten: P_0 die Stabkraft, welche durch Eigengewicht allein, P_1 diejenige, welche durch Verkehrslast allein in gleichem Sinne wie P_0 , P_2 diejenige, welche durch Verkehrslast im entgegengesetzten Sinne wie P_0 erzeugt wird, so ist die nötige Querschnittsfläche F

für nur gezogene oder nur gedrückte Stäbe (wenn $P_2 < \frac{2}{3} P_0$):

$$F' = \frac{P_0}{1050} + \frac{P_1}{700}, \dots \dots \dots 58.$$

für gezogene und gedrückte Stäbe, falls $P_2 > \frac{2}{3} P_0$ und $P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$ ist:

$$F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{2100}, \dots \dots \dots 58^a.$$

für gezogene und gedrückte Stäbe, falls $P_2 > \frac{2}{3} P_0$ und $P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$ ist:

$$F = -\frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{700} \dots \dots \dots 58^b.$$

P_0, P_1, P_2 sind in absoluten Zahlenwerten einzuführen, also ohne Rücksicht auf die Vorzeichen.

In einem Vortrage des Professors Krohn⁶⁵⁾ „Über Dimensionierung von Eisenkonstruktionen und über Wertziffern“ erörtert der Verfasser unter anderem auch den Einfluß der Stofswirkungen auf Konstruktionsteile der Brücken und die Bemessung der Stofskoeffizienten. Er gelangt zu dem Ergebnis, daß dieser Koeffizient nicht konstant genommen, sondern entsprechend der Anzahl der stofsenden Räder bemessen werden soll, und schlägt für denselben die nachstehenden Werte vor:

Anzahl Räder:	1	2	3	4	5-6	7-9	10 u. mehr
Stofskoeffizient:	2,0	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2

⁶⁵⁾ Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1885, S. 153 u. ff.

Für diesen Koeffizienten nimmt Gerber bekanntlich den Wert 1,5, Winkler den Wert 1,3 an. Es ist wahrscheinlich, daß die Krohn'sche Bemessung dieser Größe im allgemeinen der Wirklichkeit näher kommt.

Es ist des weiteren interessant, wie Krohn die Größe der zulässigen Inanspruchnahme ermittelt. Er nimmt die Launhardt-Weyrauch'sche Formel an in der Form

$$s = 12 \left(1 + \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) \dots \dots \dots 59.$$

für Kilogramm und Quadratmillimeter, behält jedoch nur jene Werte bei, die gleich oder kleiner als 12 kg sind; d. h. er benutzt die Formel nur für negative Werte von $\frac{S_{\min}}{S_{\max}}$.

Sein Verfahren der Querschnittsbestimmung besteht darin, daß bei Stäben, die bloß in einem Sinne beansprucht werden, die mobile Belastung mit dem entsprechenden Stofskoeffizienten multipliziert und die zulässige Beanspruchung mit 12 kg f. d. qmm angenommen wird; bei wechselndem Sinn der Spannungen dient die obige Gleichung zur Bestimmung der Inanspruchnahme.

Diesem Vorgange ähnlich entwickelt Professor Häselser in „Über die Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der eisernen Brücken“ (Deutsche Bauz. 1886) die folgenden Grundsätze.

Nach der statischen Berechnung der Stabspannungen durch Eigengewicht und die ungünstigste zufällige Belastung kommen zur Erörterung:

1. Der Einfluß der Stöße, welcher durch einen Koeffizienten $\varepsilon = 1,2 + \frac{1}{n}$, wobei n die Anzahl der für den Konstruktionsteil ungünstigstenfalls in Betracht kommenden Achsen, zu bemessen ist.
2. Die Nebenspannungen infolge der gehinderten freien Beweglichkeit der Knotenpunkte.
3. Die Zusatzspannungen infolge unvermeidlicher Material- und Fabrikationsfehler, mangelhafter Kraftübertragung durch die Niete, ungenauer Aufstellung und der Festigkeitsverminderung des Eisens durch die Bearbeitung, sowie endlich der Querschnittsverminderung durch Rost.
 - a) Die unvermeidlichen Material- und Fabrikationsfehler werden mit 5%,
 - b) die Festigkeitsverminderung durch Bearbeitung, die mangelhafte Kraftübertragung u. s. w. mit 15%,
 - c) Fehler der Montierung mit 5% und
 - d) Querschnittsverminderung durch Rost mit 5%, zusammen 30% bemessen.

Bezeichnen nun

- P die statisch berechnete Stabspannung vom Eigengewicht,
- Q und Q_1 die größte bzw. kleinste statisch berechnete Stabkraft durch die Verkehrslasten,
- ε und ε_1 die Stofskoeffizienten dieser Verkehrslasten,
- s_1 die Spannung an der Elastizitätsgrenze,
- s die zulässige Beanspruchung bei ruhender Last in kg f. d. qcm,
- μ ein Koeffizient für Zusatz- und Nebenspannungen,
- F die Querschnittsfläche,
- S_{\min} und S_{\max} die absolut kleinsten bzw. größten Stabkräfte auf Grund des Eigengewichtes und der mit dem Stofskoeffizienten multiplizierten Verkehrslast, so ist:

$$F = \frac{\mu (P + \varepsilon Q)}{s_1}, \quad F = \frac{P + Q}{s}, \quad s = \frac{s_1}{\mu} \frac{P + Q}{P + \varepsilon Q}.$$

Für den Fall, daß kurz aufeinanderfolgend Zug- und Druckspannungen (ohne Zerknickungsgefahr) stattfinden, ist zu setzen:

$$s = \frac{s_1}{\mu} \left(\frac{P + Q}{P + \varepsilon Q} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right) = \frac{s_1}{\mu} \left(\frac{P + Q}{P + \varepsilon Q} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{P + \varepsilon_1 Q_1}{P + \varepsilon Q} \right).$$

Zur Bemessung des Koeffizienten μ werden drei Gruppen von Trägern unterschieden und zwar: vollwandige, gegliederte mit steifen Knotenpunkten und solche mit gelenkartigen Knotenpunkten. Besonders für Balkenträger auf zwei Stützen giebt Häselser die folgenden Werte:

Arten der Träger	Neben- spannungen %	Zusatz- spannungen %	Zuschlag für etwaige Mehrbelastung %	μ
Vollwandige Träger	10	20	30	1,6
Gegliederte Träger mit starren Knotenpunkten	40	30	20	1,9
„ „ „ gelenkartigen Knotenpunkten	5	15	20	1,4

Prof. Melan gelangt in einem beachtenswerten Aufsatz⁶⁶⁾ zu dem Ergebnisse, dafs die von der dynamischen Einwirkung der Verkehrslasten herrührende Vergrößerung der Spannungen ausgedrückt werden kann durch die Formel (Gl. 24 auf S. 53):

$$\varphi = 0,14 + \frac{8}{L + 10},$$

wobei für L die Stützweite der Träger, bezw. bei Gitterstäben die Länge der belasteten Strecke einzuführen ist.

Ist nun für einen Konstruktionsteil die Spannung durch das Eigengewicht = S_c , jene durch die ruhend angenommene Verkehrslast = S_v und die als zulässig angenommene Inanspruchnahme bei ruhender Belastung = s_0 , so folgt, wenn keine Knickung in Frage kommt, die Querschnittsfläche des Stabes aus:

$$F = \frac{1}{s_0} [S_c + (1 + \varphi) S_v].$$

Für Schweißeisen nimmt Melan $s_0 = 1000 \text{ kg/qcm}$.

Hiernach käme die Berücksichtigung der dynamischen Einwirkung darauf hinaus, dafs die Verkehrslast in einem gewissen Verhältnisse $(1 + \varphi)$ vergrößert in Rechnung gebracht wird; ein Vorgang, der im allgemeinen wohl zuerst von Gerber zur Anwendung gebracht worden ist.

Ingenieur Ebert (Deutsche Bauz. 1896) vertritt die Anschauung, dafs auf Grund der Bauschinger'schen Versuche die zulässige Beanspruchung der Eisenkonstruktionen lediglich nach der Gröfse der natürlichen Elasticitätsgrenze zu beurteilen sei und greift zurück auf die einfachen Berechnungsformen, welche Gerber bei Herstellung seiner ersten Werke angewendet hat. Indem Ebert die durch die veränderliche Belastung hervorgebrachte Spannung in einem Brückenorgane mit dem Gerber'schen Koeffizienten 1,5 versieht, stellt er für die zu berechnende Querschnittsfläche F des Stabes die Beziehung auf:

$$F = \frac{S_c + 1,5 S_v}{1200};$$

wobei die Zahl 1200 die zulässige Inanspruchnahme des Materiales in kg/qcm bedeutet.

Bei wechselndem Sinne der Stabkräfte setzt Ebert:

$$F = 1,5 \frac{S_z + S_D}{1200},$$

indem sowohl die Stabkraft im Sinne des Zuges als auch jene im Sinne des Druckes mit den Stofskoeffizienten multipliziert und arithmetisch summiert und dieser ideellen Stabkraft entsprechend die Querschnittsfläche für die zulässige Beanspruchung von 1200 kg/qcm gerechnet wird.

Aus der vorgeführten Übersicht geht hervor, dafs hinsichtlich der zulässigen Inanspruchnahmen drei verschiedene Auffassungen deutlich erkennbar sind.

Anfangs wurde ein ganz bestimmter Zahlenwert für alle Fälle zu Grunde gelegt, unbekümmert um die Art der Beanspruchung; man nahm nur auf die, absolut genommen, größte Inanspruchnahme Rücksicht. Die Bestimmung dieses Zahlenwertes war, da Erfahrungen so gut wie gar nicht vorlagen, in der Hauptsache ein praktischer Griff, der, wie man zugeben muß, sehr glücklich gemacht wurde und sich auch bewährt hat. Noch heutzutage und namentlich dann, wenn die zulässigen Spannungen durch Anordnungen der Behörden festgelegt sind, verfährt man nicht selten in der angegebenen Weise.

Die zweite Art der Behandlung kennzeichnet sich dadurch, dafs man, nachdem die Eigenschaften des Stoffes, zumal durch die Wöhler'schen Versuche, besser bekannt

⁶⁶⁾ Über dynamische Wirkung bewegter Lasten auf Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893.

geworden waren, sich bestrebt, diese Kenntnisse und die Ergebnisse jener Versuche für die Ermittlung der zulässigen Inanspruchnahme zu verwerten. Man stellte Formeln auf, welche die zulässige Inanspruchnahme nicht nur aus der größten auftretenden Spannung bemessen, sondern auch in hervorragendem Maße die untere Spannungsgrenze berücksichtigen. Das letztere ist als entschiedener Fortschritt zu bezeichnen und wird voraussichtlich auch in Zukunft stets beibehalten werden. Dennoch ist auch diese Auffassung nahezu als überwunden zu betrachten, da wohl allgemein anerkannt ist, daß die Wöhler'schen Versuche, deren große Bedeutung stets anerkannt bleiben wird, in der vorgeschlagenen und oben beschriebenen Weise, bei welcher von der Bruchfestigkeit ausgegangen wurde, zur Ermittlung der zulässigen Inanspruchnahme nicht verwertbar sind.

Gegenwärtig wird nun die zulässige Inanspruchnahme vorzugsweise mit Rücksicht auf die Elasticitätsgrenze des Materiales bestimmt, dabei werden aber gleichfalls die Grenzen der Beanspruchung in Betracht gezogen. Die Grundlage für diese Bestimmung hat Bauschinger mit seinen bahnbrechenden Versuchen geliefert.

Für die praktische Anwendung wird die Größe der zulässigen Inanspruchnahme des Baustoffes meist durch besondere Verordnungen der maßgebenden Behörden geregelt.

So schreibt die Verordnung des österreichischen Handelsministeriums vom 15. September 1887 hierfür im § 4 vor:

1. Unter 40,0 m Stützweite 700 kg f. d. qcm nebst 2 kg Zuschlag für jedes Meter Weite.

2. Von 40,0 m Stützweite aufwärts und zwar

für 40,0 m	780 kg f. d. qcm
„ 80,0 „	840 „ „
„ 120,0 „	880 „ „
„ 160,0 „ und darüber	900 „ „

wobei für die dazwischen fallenden Stützweiten geradlinig zu interpolieren und für die Quer- und Längsträger jener Wert zu nehmen ist, welcher der Stützweite dieser Träger zufällt.

3. Zur Berechnung der Niete auf Abscherung in nur einer Richtung 600 kg, bezw. in mehreren Richtungen 500 kg, wobei noch zu beachten ist, daß die Projektion der Nietlochleibung mit nicht mehr als 1400 kg f. d. qcm beansprucht werden darf.

4. Für die Berechnung des Widerstandes gegen Abscherung in der Walzrichtung 500 kg f. d. qcm.

Der schweizerische Bundesrat giebt in der Verordnung vom 19. August 1892, betreffend die Berechnung und Prüfung der eisernen Brücken und Fachkonstruktionen auf den schweizerischen Eisenbahnen die Bestimmung:

a) Für Zug und Druck.

$$\text{Für Schweißisen: } s_z = s_d = 0,700 + 0,20 \frac{\min}{\max},$$

$$\text{für Flußeisen: } s_z = s_d = 0,800 + 0,25 \frac{\min}{\max}.$$

Hierin bedeutet *min* bezw. *max* die unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Eigengewichtes, der Verkehrslasten, des Winddruckes, bei Eisenbahnbrücken in Kurven überdies der Fliehkraft abgeleiteten Kleinst- bezw. Größtspannungen. Dabei ist den Zugkräften +, den Druckkräften das —-Zeichen vorzusetzen (die Zahlen sind t auf das qcm). Bei genieteten Flußeisenträgern ist die Biegungsspannung gleich 0,9 der entsprechenden Zug- oder Druckspannung anzunehmen.

b) Knickung.

Auf Druck beanspruchte Stäbe sind hinsichtlich ihrer Knickfestigkeit zu prüfen. Bezeichnet *l* die freie Knicklänge, *i* den kleinsten Trägheitshalbmesser des Stabquerschnittes, so darf die Inanspruchnahme höchstens betragen:

Für $l: i = 10$ bis 110,

$$\text{für Schweißisen: } s_k = 0,75 - 0,003 \frac{l}{i};$$

$$\text{für Flußeisen: } s_k = 0,80 - 0,003 \frac{l}{i};$$

für $l: i > 110$,
 für Schweifeseisen: $s_k = 5000 \left(\frac{i}{l}\right)^2$
 für Flufeseisen: $s_k = 5500 \left(\frac{i}{l}\right)^2$.

c) Abscherung.

Die zulässige Inanspruchnahme des Niet- und Bolzeneisens auf Abscherung ist gleich $\frac{9}{10}$ der Inanspruchnahme auf Zug oder Druck anzunehmen.

d) Stauchdruck.

Der Stauchdruck, d. h. der mittlere Druck des Nietschaftes auf die Projektion der Lochleibung soll die dreifache zulässige Inanspruchnahme des Brückeneisens auf Zug oder Druck nicht überschreiten.

Die Preussische Brückenverordnung vom September 1895 ordnet über die zulässige Inanspruchnahme an:

A. Glieder der Hauptträger.

1. Zugglieder: bei der Stützweite:	10	20	40	80	120	150 m,
a) s ohne Winddruck:	800	850	900	950	1000	1050 kg/qcm,
b) s mit Winddruck:	1000 bis 1300 kg/qcm,					

bei Schweifeseisen sind diese Zahlen um 10% zu ermäßigen.

2. Druckglieder. Hier gelten dieselben Zahlen wie für Zug. Außerdem ist nach der Euler-Formel fünffache Sicherheit gegen das Ausknicken nachzuweisen.

B. Vollwandträger.

Bei Schweifeseisen bis zu 700 kg/qcm,

„ Flufeseisen „ „ 750 „

Die Scherspannung darf höchstens die unter A. 1. a) gegebenen Werte, der Lochleibungsdruck höchstens den doppelten Wert hiervon erreichen.

In Frankreich wurde die zulässige Inanspruchnahme durch die Verordnung vom 29. August 1891 geregelt. Diese giebt für Zug, Druck und Biegung die Grenzwerte:

für Schweifeseisen: 6,5 kg/qmm,

„ Flufeseisen: 8,5 „

Diese Werte sind zu erniedrigen für Fahrbahn und Zwischenträger:

bei Schweifeseisen auf 5,5 kg/qmm,

„ Flufeseisen „ 7,5 „ ;

für Gitterstäbe und andere Brückenteile, welche wechselweise Zug und Druck erleiden:

für Schweifeseisen auf 4,0 kg/qmm,

„ Flufeseisen „ 6,0 „

Für Brücken von größerer Spannweite als 30 m darf die Anstrengung der Hauptträger:

bei Schweifeseisen: 8,5 kg/qmm,

„ Flufeseisen: 11,5 „

nicht überschreiten.

Die Scherspannung darf $\frac{4}{5}$ der zulässigen Inanspruchnahme auf Zug oder Druck nicht überschreiten. Falls Niete durch äußere Kräfte in ihrer Längsrichtung auf Zug in Anspruch genommen werden, darf die Spannung höchstens 3 kg/qmm erreichen. Druckglieder sollen genügende Sicherheit gegen die Gefahr des Ausknickens bieten.

Literatur.

- Entwurf einer Verordnung für Österreich, die notwendige Sicherheit bei den Querschnittsbestimmungen eiserner Brücken betreffend. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1870, S. 205.
 Über die zulässige Beanspruchung des Schmiedeeisens bei Brückenkonstruktionen. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1873, S. 197.
 Launhardt. Die Inanspruchnahme des Eisens. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1873, S. 139.
 Weyrauch. Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlkonstruktionen. Broschüre.
 Gerber. Bestimmung der zulässigen Spannung in Eisenkonstruktionen. Zeitschr. d. bayer. Arch.- u. Ing.-Ver. 1874, S. 101.
 Schäffer. Zur Bestimmung der zulässigen Spannung für Eisenkonstruktionen. Zeitschr. f. Bauw. 1874, S. 398.

- Schäffer. Bestimmung der zulässigen Spannung für Eisenkonstruktionen. Deutsche Bauz. 1876, S. 516.
- Winkler. Über die zulässige Inanspruchnahme von Eisenkonstruktionen. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1877, S. 45.
- Herzmansky. Erläuterungen und Beispiele zu Winkler's Formeln über die zulässige Inanspruchnahme von Eisenkonstruktionen. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1877, S. 263.
- Loewe. Die derzeitige Auffassung des Wöhler'schen Gesetzes. Zeitschr. d. bayer. Arch.- u. Ing.-Ver. 1877, S. 93.
- Entwurf eines Brückengesetzes, bearbeitet aus Anlaß des Ashtabula-Unfalles. Railroad Gazette 1877, Apr. S. 168.
- Seefehner. Beitrag zur Bestimmung der zulässigen Inanspruchnahme. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878, S. 148. Vergl. daselbst S. 189.
- Kherndl. Über die Feststellung der zulässigen Inanspruchnahme der Brückenbaumaterialien. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1879, S. 482.
- Kennedy. Untersuchungen über die in Deutschland geübte Anwendung der Wöhler'schen Versuche auf die Bestimmung der zulässigen Inanspruchnahmen. Engineering 1880, März. Vergl. daselbst April und Mai.
- Mohr. Über die Verwertung der Wöhler'schen Versuche für die Dimensionierung der Eisenkonstruktionen, insbesondere der eisernen Brücken. Civil-Ingenieur 1881, Heft 1.
- v. Willmann. Beitrag zur Bestimmung der zulässigen Spannung und der Querschnitte für Eisenkonstruktionen. Deutsche Bauz. 1881, S. 334.
- Besprechung der deutschen Formeln für die zulässige Inanspruchnahme. Mém. des ing. civ. 1881, Juli, S. 39.
- Loewe. Zur Frage der zulässigen Inanspruchnahme. Wochenbl. f. Bauk. 1885, S. 148.
- Laissle u. Schübler. Zur Bestimmung der Festigkeitskoeffizienten für Eisenbauten. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 138.
- Landsberg. Über die Bestimmung der Querschnitte von Eisenkonstruktionen. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 357.
- Krohn. Über Dimensionierung von Eisenkonstruktionen und über Wertziffern. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1885, S. 153.
- Häsel. Über die zulässige Inanspruchnahme bei der Berechnung eiserner Brücken. Deutsche Bauz. 1886, S. 290.
- Tetmajer. Formeln für die zulässigen Inanspruchnahmen auf Grund der Versuche von Bauschinger. Schweiz. Bauz. 1886, Dez., S. 141; daselbst 1887, März, S. 75. Vergl. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 517; daselbst 1887, S. 144.
- Landsberg. Über die Bestimmung der Querschnitte von Eisenkonstruktionen für Beanspruchungen, welche zwischen Zug und Druck wechseln. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575.
- Verschiedene Brückenverordnungen und weitere Litteratur siehe auch S. 64 u. 65.

III. Konstruktionselemente.

§ 23. Eisensorten. Der Überbau der eisernen Brücken ist meist eine aus stab- und bandförmigen Elementen zusammengesetzte und durch besondere Verbindungsmittel zu einem einheitlichen, nach statischen Bedingungen angeordneten Ganzen verbundene Konstruktion.

Das Material dieser Elemente und deren Verbindungsmittel kann — vom Gußeisen abgesehen — Schweißisen, Flußeisen oder Stahl sein; Form und Einzelanordnung derselben wird durch den Baustoff nicht wesentlich beeinflusst, sodass die Behandlung der Konstruktionselemente an und für sich von einem allgemeinen, für jene drei Materialien giltigen Standpunkte erfolgen kann.

Die Konstruktionselemente der eisernen Brücken sind größtenteils durch den Walzprozess erzeugt: Walzeisen, deren Querschnittsformen meist sehr einfach sind und die in nur wenigen Arten, jedoch in den verschiedensten Abmessungen, zur Anwendung gelangen. Die verschiedenen Arten der Walzeisen in Bezug zu deren Querschnitten kommen als besondere Sorten — Eisensorten — in Betracht. Die am meisten angewandten Eisensorten sind: Bleche, Flacheisen, Winkel- und andere Formeisen (Façoneisen, Profileisen).

1. **Bleche.** Diese sind ebene Platten rechteckigen Querschnittes in Stärken von 7 bis 30 mm. Die Breite der Platten kann 600 bis 1800 mm, höchstens 2500 mm betragen.

Die Herstellung der Bleche erfolgt in Blechwalzen unter zweiseitigem Drucke aus gut durchgeschmiedeten und geschweifsten Packeten — Bramen — oder aus Flusseisenblöcken, deren Größe von den Abmessungen des zu fertigenden Bleches abhängt.

Bei gegebenen Querschnittsabmessungen der Bleche sucht man deren Länge mit Rücksicht auf die leichtere Handhabung so zu bemessen, daß das Gewicht einer Blechtafel 500 kg nicht überschreite. Erhältlich sind solche Blechtafeln bis zu 1000 kg Gewicht, doch wird bei höherem Gewichte als 500 kg in der Regel ein Preiszuschlag erhoben. Das Gewicht des Bleches für das Quadratmeter beträgt bei Schweifseisen 78 δ kg, bei Flusseisen 78,5 δ kg, wobei δ die Dicke des Bleches in Centimetern ist. Das zu Zwecken des Brückenbaues verwendbare Blech muß reine und ebene Oberflächen und reine Kanten zeigen und muß eine gleichmäßige Stärke besitzen. Sichtbare Materialfehler sind unzulässig.

Die Festigkeit der Bleche in der Walzrichtung und quer zu derselben, sowie die Dehnbarkeit des Materiales muß bestimmten Anforderungen entsprechen; die Zähigkeit und Bearbeitungsfähigkeit der Bleche wird durch besondere Güteproben zu prüfen sein.

Der Preis der Bleche ist im allgemeinen abhängig von der Beschaffenheit des Materiales, der Herstellung, dem Gewichte und den Abmessungen des zu erzeugenden Stückes, sowie des damit zusammenhängenden größeren oder geringeren Aufwandes an Arbeitszeit und Brennstoff, von dem Risiko und endlich von der Nachfrage.

Jedes Walzwerk stellt für seine gangbaren Eisensorten einen von den derzeitigen Verhältnissen abhängigen Grundpreis für die Gewichtseinheit fest; für schwierigere Walzstücke, die einen erhöhten Aufwand an Arbeit und Zeit erfordern, werden Preiszuschläge festgestellt und zu den Grundpreisen hinzugeschlagen. Mit der Schwere der Bleche nimmt der Preiszuschlag zu, ebenso mit der größeren Breite (über 1800 mm).

Aus dem Gesagten folgt, daß die im Brückenbau anzuwendenden Abmessungen der Bleche etwa innerhalb der folgenden Grenzen liegen werden: Breite der Bleche bis zu 1800 mm, ausnahmsweise (z. B. bei größeren Vollwandbrücken) bis zu 2500 mm, die Dicke des Bleches 10, 16 bis 25 mm und die Länge der einzelnen Tafeln desselben nach der Bedingung, daß deren Höchstgewicht 500 kg nicht überschreite.

Bleche finden Anwendung zur Konstruktion der Wandbleche der Vollwandträger, der Knotenpunkte (Knotenbleche) und der Gurtungen großer Brücken, zur Herstellung der End- und Mittelständer von Fachwerks- und Gitterbrücken, zu Anschlußblechen (Diaphragmen) der Querträger, des Windverbandes u. s. w.

Außer den gewöhnlichen ebenen Blechen werden, namentlich zu den Bahnunterlagen der Straßenbrücken, auch eigenartig geformte Bleche (Buckelplatten, Wellenbleche u. s. w.) gebraucht.

2. Flacheisen, Breit- oder Universaleisen. Die Flacheisen werden meist durch vierseitigen Druck auf Universalwalzen, mitunter auch auf Kaliberwalzen, erwalzt. Sie kommen aus der Vollendwalze im fertigen Zustande, d. i. in der erforderlichen Breite hervor und bedürfen daher nicht des seitlichen Beschneidens auf die richtige Abmessung, wie die Bleche.

Die Breiten betragen 10 bis 600 mm, die Dicken 3 bis 70 mm. Im Brückenbau kommen jedoch vorzugsweise die Maße: Breite von 60 bis 500 mm, Dicke von 10 bis 25 mm in Betracht.

Die Länge der Flacheisen kann bis zu 12 und 14 m erhalten werden. Die Packetlänge beträgt erfahrungsgemäß etwa $\frac{1}{30}$ der Länge des ausgewalzten Stückes.

Die Anforderungen, welche an geeignete Flacheisen bezüglich der Beschaffenheit zu stellen sind, entsprechen jenen bei Blechen.

Die Anwendung der Flacheisen im Brückenbau ist eine überaus mannigfache. Aus denselben werden die Gurtungen, Gitterstäbe, Windstreben u. a. m. hergestellt. Die Preise stellen sich — vom Baustoff abgesehen — mit zunehmender Breite höher. Ebenso sind dünne Flacheisen teurer als mittelstarke. Die Gründe hierfür stimmen mit jenen bei den Blechen angeführten überein.

Die für genietete Brücken zu wählenden Mafse der Flacheisen werden demnach für die Stärken zwischen 10 bis 25 mm, für die Breiten bis zu 500 mm und für die Größtlängen derart zu bestimmen sein, daß das fertige Stück das Gewicht von etwa 500 kg nicht überschreite.

3. Winkелеisen. Winkel- oder Eckeisen sind Formeisen, deren Querschnitt einen rechten oder schiefen Winkel mit gleich oder ungleich langen Schenkeln bildet. Die Schenkellänge bewegt sich bei den im Brückenbau verwendeten Winkелеisen zwischen 60 bis 200 mm, die Dicke der Schenkel zwischen 6 bis 20 mm. Die Bezeichnung der Querschnittsabmessungen der Winkелеisen erfolgt in der Regel in Bruchform derart, daß im Zähler die Länge der Schenkel, im Nenner dagegen die Schenkeldicke geschrieben wird. Außerdem kommen noch andere Bezeichnungsarten der Winkелеisenquerschnitte vor. Für die Schenkellängen b , h und die Schenkeldicke δ findet man

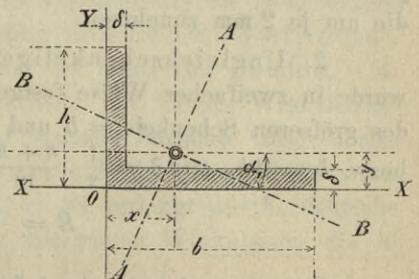
die Bezeichnungen: $\overline{b \cdot \delta}$, $\overline{b \cdot b \cdot \delta}$ für gleichschenkelige, und $\overline{h \cdot \delta}$, $\overline{b \cdot h \cdot \delta}$ für ungleichschenkelige Winkелеisen.

Die Schenkeldicke ist entweder gleichmäfsig, oder sie nimmt gegen die Außenränder der Schenkel hin ab. Dieselbe steht in Beziehung zur Schenkellänge und ist nach der Stärke der durch die Winkелеisen zu vereinigenden Bleche und der Verbindungsniete, sowie auch nach der Gröfse der aufzunehmenden Kräfte zu bemessen. Das Verhältnis der Schenkeldicke zur Schenkellänge dürfte mindestens mit $\frac{1}{11}$, höchstens mit $\frac{1}{6}$ anzunehmen sein. Die Schenkeldicke selbst ist entweder gröfser als die Stärke der zu verbindenden Bleche oder gleich derselben. Die Vereinigung beider Schenkel am inneren Scheitel des Winkels wird meist durch eine Materialansammlung in Form einer ausgiebigen Ausrundung vermittelt. Diese Anordnung ist nicht blofs mit Rücksicht auf das Walzen vorteilhaft, sondern zur Erzielung der Formerhaltung des Winkels selbst notwendig. Außerdem ist gerade in diesem Punkte eine Materialzugabe um so wichtiger, als hier die Kraftübertragung von einem Schenkel zum anderen erfolgt.

Nennt man b die Schenkellänge des einen, wagerecht gedachten Schenkels, h die Länge des lotrechten Schenkels, und δ die mittlere Schenkeldicke, so ist die Querschnittsfläche des Winkeleisens: $F = \delta (b + h - \delta)$, und das Gewicht für das laufende Meter desselben: $G = 0,78 \delta (b + h - \delta)$ kg, wobei die Mafse in cm einzusetzen sind. Denkt man sich die Lage des Schwerpunktes der Querschnittsfläche auf ein rechtwinkeliges Achsensystem, dessen Achsen in b bzw. h liegen, bezogen, so ist im Hinblick auf Fig. 25 die Entfernung des Schwerpunktes:

$$y = \frac{1}{2} \frac{h^2 + \delta (b - \delta)}{b + h - \delta} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2} \frac{b^2 + \delta (h - \delta)}{b + h - \delta}.$$

Fig. 25.



Daher ist: $\frac{h}{2} - y = \frac{(b - \delta)(h - \delta)}{2(b + h - \delta)}$ und

$$\frac{b}{2} - x = \frac{(b - \delta)(h - \delta)}{2(b + h - \delta)}, \text{ also}$$

$$\frac{h}{2} - y = \frac{b}{2} - x,$$

d. h. der Schwerpunkt des Winkeleisenquerschnittes liegt in gleicher Entfernung von den beiden durch die Mitten der Schenkel gezogenen und auf diesen senkrechten Geraden.⁶⁷⁾

Das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche bezüglich der durch den Schwerpunkt gelegten, zu X bzw. Y parallelen Achse ist:

$$J_Y = \frac{1}{3} \left\{ (b - \delta) [y^3 - (y - \delta)^3] + \delta [y^3 + (h - y)^3] \right\}$$

bzw.

$$J_X = \frac{1}{3} \left\{ (h - \delta) [x^3 - (x - \delta)^3] + \delta [x^3 + (b - x)^3] \right\}.$$

Das Trägheitsmoment, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gelegte Achse, die mit der X -Achse den Winkel α einschließt, ist bekanntlich:

$$J = J_Y \cdot \cos^2 \alpha + J_X \cdot \sin^2 \alpha - C \cdot \sin 2\alpha, \text{ wobei } C = \int \xi \eta \cdot \partial F.$$

J wird zum Maximum oder Minimum für $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$, d. i. für $\tan 2\alpha = \frac{2C}{J_X - J_Y}$, womit die Lage der Trägheitshauptachsen bestimmt ist.

Der Wert C kann bestimmt werden, indem für $\alpha = 45^\circ$ das betreffende J_1 berechnet wird; es ist:

$$J_1 = \frac{1}{2} (J_Y + J_X) - C, \text{ woraus } C = \frac{1}{2} (J_Y + J_X) - J_1.$$

Die im Brückenbau angewendeten Winkeleisen zeigen hinsichtlich ihrer Querschnittsabmessungen eine sehr große Mannigfaltigkeit; jedes größere Walzwerk bietet eine hinreichend große Auswahl derartiger Querschnitte.

Die deutschen Normalprofile für Walzeisen zeigen hinsichtlich der Winkeleisen die folgenden Verhältnisse:

1. Gleichschenkelige Winkeleisen. Ist b die Schenkellänge und δ die Schenkeldicke, so ist

$$\text{für } b \leq 100 \text{ mm, } \min \delta = \frac{1}{10} b, \quad \text{für } b > 100 \text{ mm, } \min \delta = \frac{1}{11} b.$$

Die Abrundung in den Winkellecken erhält die mittlere Dicke als Radius, sodafs $R = \frac{\min \delta + \max \delta}{2}$; die Abrundungen der Schenkellenden sind mit dem Radius $r = \frac{R}{2}$ angenommen. Die Schenkellängen wachsen von 15 bis 160 mm und zwar von 15 bis 80 mm um je 5 mm, von 80 bis 160 mm um je 10 mm. Die Schenkeldicken sind für jede Schenkellänge (bei L-Eisen über 40 mm Schenkellänge) in drei Stärken angegeben, die um je 2 mm zunehmen.

2. Ungleichschenkelige Winkeleisen. Das Verhältnis der Schenkellängen wurde in zweifacher Weise festgesetzt und zwar wie 1:1½ und 1:2. Ist die Länge des größeren Schenkels = b und jene des kürzeren = h , so ist hiernach $b = 1,5 h$ bzw. $b = 2 h$, $\min \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{b + h}{10}$, jedoch mit geringfügigen Abweichungen

$$R = \frac{\min \delta + \max \delta}{2}; \quad r = \frac{R}{2}.$$

⁶⁷⁾ Zschetzsche. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893.

Die Schenkellängen beginnen mit 20.30 mm und schliessen mit 100.200 mm. Die Schenkeldicken eines jeden Profils sind in zwei Stärken, die um je 2 mm zunehmen, angegeben. Die Bezeichnung der Profile erfolgt in Bruchform, so, dass der Zähler die kürzere, der Nenner die längere Schenkellänge in Centimetern erhält. Bei gleichschenkeligen Winkeleisen giebt die Profilnummer zugleich die Schenkellänge in Centimetern an.

Die vom österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereine angenommenen gleichschenkeligen Winkeleisenprofile weisen eine Reihe auf, welche mit der Schenkellänge von 20 mm beginnt, von wo diese Längen um je 5 mm bis zu 50 mm ansteigen. Von da steigt die Reihe um je 10 mm und erreicht bei 120 mm Schenkellänge das grösste Kaliber. Von jeder Nummer zwischen 2 bis 6 sind zwei, von 6 bis 12 je drei verschiedene Schenkeldicken beantragt. Von No. 8 bis No. 12 stimmen die österreichischen Profile mit den gleichbenannten deutschen völlig überein; bei den übrigen finden sich unbedeutende Abweichungen vor.

Hinsichtlich der ungleichschenkeligen Winkeleisen erscheint bei den österreichischen Profilen nur das Verhältnis $b:h = 1,5$ angewendet. Die angenommenen Profile sind: $\frac{3}{4^{1/2}}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{7^{1/2}}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$; für jedes derselben sind zwei um je 1 mm verschiedene Schenkelstärken, deren kleinste beim Profil $\frac{3}{4^{1/2}} = 5$ mm und deren grösste beim Profil $\frac{10}{15} = 14$ mm beträgt, vorgesehen.

Die Winkeleisen sind in Längen bis zu 10,0 m und darüber erhältlich.

Die Beschaffenheit des Materiales zur Herstellung der Winkeleisen soll eine durchaus vorzügliche sein; das erwalzte Produkt muss reine Kanten, ebene glatte Flächen und bei Schweisseisen alle Merkmale vollkommener Schweissung besitzen.

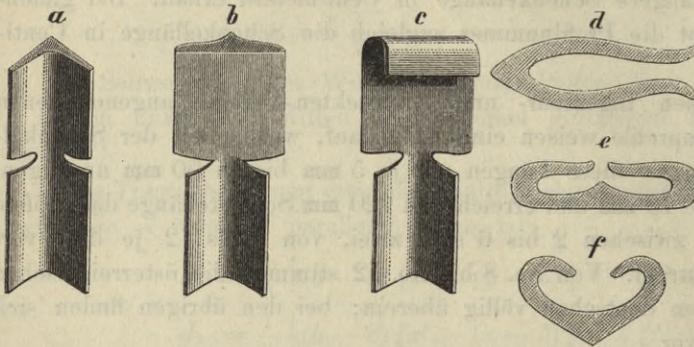
Die auf Kaliberwalzen neuerer Art ausgewalzten Winkeleisen, wo das Kaliber möglichst flach gehalten, der rechte Winkel jedoch allmählich herausgebildet wird, während die Schenkel in schwach gekrümmter Form erhalten und erst im letzten Kaliber gerade gerichtet werden, sind jenen auf Winkeleisen-Kaliberwalzen und Universal-Winkel-eisenwalzen erwalzten vorzuziehen, da vermöge der im ersten Falle gleichmässigeren Umfangsgeschwindigkeit der Walzen die Streckungen und Zerrungen des Materiales durch den Walzprozess möglichst gleichmässig werden und daher auch die Elasticitätsverhältnisse des Produktes für verschiedene Stellen des Querschnittes jedenfalls geringere Unterschiede zeigen werden, als dies bei den auf den alten Winkeleisen-Kaliberwalzen erzielten Walzstücken zu erwarten war.

Es ist bekannt, dass die durch die Vollende-Kaliber kalt gewalzten Formeisen sich durch Sauberkeit der Kanten und Oberflächen des erwalzten Produktes auszeichnen. Dies Verfahren ist jedoch weder für die Walzen noch für das Walzprodukt zuträglich. Das letztere erlangt wohl hierdurch — abgesehen von der äusseren Vollkommenheit der Form — eine Erhöhung seiner Festigkeit, verliert jedoch gleichzeitig an Dehnbarkeit.

Die Winkeleisen müssen alle für die Konstruktion erforderlichen Formveränderungen, Bearbeitungen und Lochungen ohne Schädigung des Materiales gestatten, also ein vorzüglich zähes Verhalten zeigen. Ausgeführte Proben mit kurzen Winkeleisenstücken werden ergeben, inwieweit ein im kalten und warmen Zustande ausgeführtes Zusammenbiegen und anderenfalls ein in die Ebene Strecken beider Schenkel getrieben werden kann, ohne dass sich hierbei Risse zeigen u. s. w. So verlangt die K. deutsche Admiralität von den zur Verwendung beim Schiffbau geeigneten Winkeleisen die in der Fig. 26 a bis f dargestellten Formänderungsproben.

Die Anwendung der Winkeleisen im Brückenbau ist eine sehr weitgehende. Jede Vereinigung unter einem Winkel aufeinander stossender Bleche wird mittels Winkeleisen bewirkt; dieselben sind also überall dort unersetzlich, wo aus Flacheisen oder Blechen ein T- oder kreuzförmiger Querschnitt gebildet, wo die Verbindung von in verschiedenen Ebenen befindlichen und zusammenstossenden Trägern vermittelt werden soll. Aber auch in selbstständiger Weise oder in Verbindung mit einem zweiten

Fig. 26.



Winkeleisen dient dasselbe in den meisten Fällen bei genieteten Fachwerksbrücken zur Herstellung von Gliedern, die auf Druck in Anspruch genommen erscheinen.

Der Preis der Winkeleisen wird bedingt durch die Abmessungen des zu erwalzenden Produktes und die Güte des Stoffes. Bei Schweißeseisen beeinflusst die Anzahl (2 oder 4) und Gröfse der in einem Packete anzuordnenden Deckplatten in hohem Grade den Materialwert und mithin auch den Preis. Mit der Länge der Schenkel nimmt der Preis zu, ebenso mit der Länge und dem Gewichte des geforderten Stückes. Sehr geringe Dicken bedingen gleichfalls höhere Kosten. Mit zunehmendem Gewichte wachsen die Überpreise. Meist wird für Längen über 10,0 m bereits ein Überpreis gezahlt, der entsprechend der Überlänge wächst. Die Länge der Winkeleisen ist in vielen Fällen durch die Länge des herzustellenden Konstruktionsteiles schon gegeben; wo dies nicht der Fall ist und die Längenbestimmung mehr willkürlich ist, wird man die Länge um so gröfser wählen können, je gröfser der Querschnitt ist.

4. **T-Eisen.** Die im Querschnitt T-förmig gestalteten Formeisen finden im Brückenbau ebenfalls Anwendung. Sie haben nicht jene vielseitige Verwendbarkeit, wie die Winkeleisen, sind jedoch zur Konstruktion verschiedener wichtigen Brückenbestandteile, beispielsweise zur Herstellung der Druckstreben in Fachwerken, zu Windverstrebrungen u. s. w., vorzüglich geeignet.

Der Querschnitt entspricht etwa zweien mit den Schenkelebenen aneinander gelegten und vereinigt gedachten rechtwinkligen Winkeleisen. Bezüglich der Abmessungen der Querschnitte herrscht eine grofse Mannigfachheit, jedoch sind die gröfsten Mafse beschränkt durch die Schwierigkeit des Auswalzens.

Die deutschen Normalprofile unterscheiden zwei Sorten und zwar: a) breitfüfssige und b) hochstegige T-Eisen.

a) **Breitfüfssige T-Eisen.** Die mittlere Dicke des Fufses und Steges ist gleich grofs und ist nach der Beziehung: $\delta = 1,5 h + 1 \text{ mm}$, wobei h die Höhe des Profles, ermittelt. Die dem Stege zugekehrte Oberfläche des Fufses erhält auf beiden Seiten eine Neigung von 2%, die Stegflächen eine solche von 4%. Die Breiten b dieser T-Eisen sind durchweg doppelt so grofs als die Höhen h . Die Profile beginnen mit No. $\frac{6}{3}$ — entsprechend: $\frac{b}{h} = \frac{60}{30} \text{ mm}$ — und endigen mit No. $\frac{20}{10}$.

b) **Hochstegige T-Eisen.** Die mittlere Dicke δ — ebenfalls für Fufs und Steg gleich — ist $\delta = 0,1 h + 1 \text{ mm}$. Die Neigung der Stegseiten und jene der Oberflächen

des Fufses beträgt hier $\frac{2}{100}$. Fufsbreite b und Steghöhe h sind gleich groß. Die Profile beginnen mit No. $\frac{2}{2}$ und schliessen mit No. $\frac{14}{14}$.

Die Radien der Abrundung entsprechen jenen der Winkeleisen: $R = \delta$, $r = \frac{\delta}{2}$ und für den Steg $\rho = \frac{\delta}{4}$.

Die österreichischen Normalprofile der T-Eisen enthalten nur eine Gattung dieser Walzsorte, für welche:

$$\delta = 0,16 b + 1 \text{ mm}$$

$$h = 0,77 b, \quad R = 0,8, \quad r = 0,4 \delta, \quad \rho = 0,2 \delta \text{ ist.}$$

Die Neigung der Seitenflächen des Steges ist mit 4% bemessen, während der Fufs durchaus gleiche Stärke hat. Es sind 9 Profile beantragt mit den Fufsbreiten: 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 120 und 150 mm, und es wird die Profilvernummer durch die in Centimetern ausgedrückte Fufsbreite bezeichnet.

Im allgemeinen ist die Querschnittsfläche der T-Eisen $F = b\delta + (h - \delta)\delta_1$ (Fig. 27) und das Gewicht f. d. lfd. m $G = 0,785 [b\delta + (h - \delta)\delta_1]$ kg, wobei die Mafse in Centimetern einzuführen sind.

Die Schwerpunktslage ist bestimmt durch:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b - \delta_1)\delta^2 + \delta_1 h^2}{F}$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die zu X parallele Schwerpunktsachse ist:

$$J_x = \frac{1}{3} [b y^3 - (b - \delta_1)(y - \delta)^3 + \delta_1 (h - y)^3],$$

jenes zur Symmetrieachse:

$$J_x = \frac{1}{12} [\delta b^3 + (h - \delta)\delta_1^3].$$

Ist $\delta = \delta_1$, so erhält man:

$$F = \delta (b + h - \delta), \quad G = 0,785 \delta [b + h - \delta] \text{ kg,}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b - \delta)\delta + h^2}{b + h - \delta} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\delta}{h} \left(\frac{b}{h} - \frac{\delta}{h} \right)}{1 + \frac{b}{h} - \frac{\delta}{h}}$$

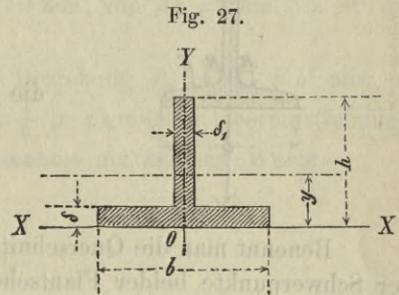
Das fertige Walzprodukt muss im äusseren sowohl, als in Bezug auf die Güte allen Anforderungen entsprechen, die für die Winkeleisen namhaft gemacht wurden. Auch bezüglich der Preisverhältnisse gelten dieselben Erwägungen wie dort.

Die T-Eisen werden bis zu 10 m Länge und darüber gewalzt.

5. **I-Eisen** (Fig. 28). Die Formeisen I-förmigen Querschnittes sind die einfachsten Vertreter der schmiedeisernen Balkenträger mit zweckmässigster Verteilung der Querschnittsfläche. Die I-Eisen sind mit besonderer Rücksicht auf die Erreichung eines möglichst grossen Biegungswiderstandes gegen lotrechte, in die Stegebene fallende Kräfte im Querschnitt geformt und finden derartig beansprucht auch die meiste Verwendung.

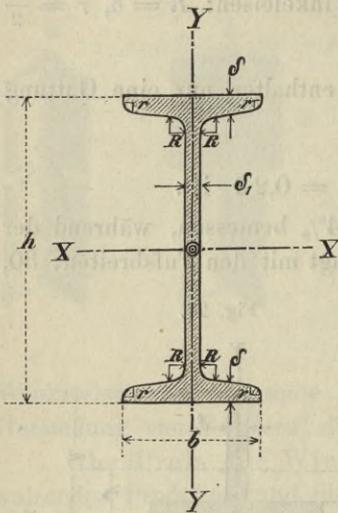
Die Mafse, mit welchen diese Eisen ausgeführt werden, sind sehr verschieden. Im Brückenbau kommen meist Querschnitte zur Anwendung, bei denen

die Höhe zwischen	160 bis 500 mm
die Flantschenbreiten zwischen	80 „ 150 „
die Stegstärke und Flantschenstärke zwischen	8 „ 20 „ liegen.



Das Walzen der I-Eisen ist um so schwieriger, je größer die Steghöhe und je breiter die Flanschen sind. Die Flanschenbreite selbst soll mit Rücksicht hierauf im allgemeinen nicht größer als die halbe Querschnittshöhe sein. Für die meisten Fälle der Anwendung kann die Auswahl der betreffenden Querschnitte aus den in jedem Walzwerk vorhandenen Profilen erfolgen.

Fig. 28.



Wenn b die Flanschenbreite, h die Trägerhöhe, δ die mittlere Flanschenstärke und δ_1 die Stegstärke bezeichnet, so ist die Querschnittsfläche

$$F = 2b \cdot \delta + (h - 2\delta) \delta_1$$

und das Gewicht des I-Eisens f. d. lfd. m

$$G = 0,785 [2b\delta + (h - 2\delta) \delta_1] \text{ kg.}$$

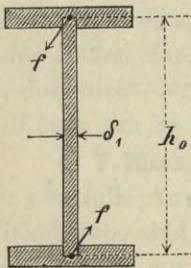
Das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die wagerechte bzw. lotrechte Schwerpunktsachse ist:

$$J_Y = \frac{1}{12} [b(h^3 - [h - 2\delta]^3) + \delta_1(h - 2\delta)^3]$$

$$J_X = \frac{1}{12} [2\delta b^3 + (h - 2\delta) \delta_1^3].$$

Benennt man die Querschnittsfläche eines jeden Flansches mit f und den Abstand der Schwerpunkte beider Flanschen voneinander mit h_0 , so ist mit Bezug auf Fig. 29 ein Näherungswert für das Trägheitsmoment:

Fig. 29.



$$J_Y = \frac{1}{2} f h_0^2 + \frac{1}{12} \delta_1 h_0^3 = \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{6} \delta_1 h_0 \right) h_0^2.$$

Unter Voraussetzung, daß h von h_0 wenig verschieden ist, erhält man das angenäherte Widerstandsmoment: $W_Y = f h_0 + \frac{1}{6} \delta_1 h_0^2$.

Würde es sich darum handeln, bei gegebenem Inhalt des Gesamtquerschnittes F die Anordnung so zu treffen, daß das Widerstandsmoment zu einem Maximum werde, so kann nach Dr. Zimmermann⁶⁵⁾ folgendermaßen vorgegangen werden.

Es ist zunächst: $f = \frac{1}{2} (F - \delta_1 h_0)$

und damit

$$W_Y = \frac{1}{2} F h_0 - \frac{1}{3} \delta_1 h_0^2.$$

Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

a) Die Stegdicke δ_1 ist unabhängig von der Höhe; dann ist

$$\frac{\partial W_Y}{\partial h_0} = \frac{1}{2} F - \frac{2}{3} \delta_1 h_0 = 0$$

und daraus $\delta_1 h_0 = \frac{3}{4} F$, womit sich ergibt $f = \frac{1}{8} F$.

Das Maximum des Widerstandsmomentes ist hiernach:

$$\max W_Y = \frac{1}{2} F h_0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} F h_0 = \frac{1}{4} F h_0.$$

Das Widerstandsmoment würde sonach in diesem Falle am größten, wenn $\frac{3}{4}$ der Querschnittsfläche in den Steg und $\frac{1}{8}$ derselben in jede Gurtung verlegt würde.

b) Die Stegdicke δ_1 ist der Höhe h_0 proportional, sodafs $\delta_1 = n h_0$; dann ist:

$$W_Y = \frac{1}{2} F h_0 - \frac{1}{3} n h_0^3 \text{ und } \frac{\partial W_Y}{\partial h_0} = \frac{1}{2} F - n h_0^2 = \frac{1}{2} F - \delta_1 h_0 = 0,$$

woraus $\delta_1 h_0 = \frac{1}{2} F$, hiernach folgt auch $f = \frac{1}{4} F$.

⁶⁵⁾ Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 103 u. f.

$$\text{Es wird jetzt: } \max W_Y = \frac{1}{2} F h_0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} F h_0 = \frac{1}{3} F h_0.$$

In diesem Falle müßte die Verteilung der Querschnittsfläche so erfolgen, daß der Steg die halbe und jede Flantsche $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche erhalten.

Die deutschen Normalprofile für **I-Eisen** zeigen die folgenden Verhältnisse:

Ist b die Flantschenbreite, h die Höhe des Profiles, δ_1 die Stegstärke und δ die mittlere Flantschenstärke, so ist $\delta = 1,5 \delta_1$, $R = \delta$ und $r = 0,6 \delta$.

$$\text{Für } h \leq 250 \text{ mm ist } b = 0,4 h + 10 \text{ mm, } \delta_1 = 0,03 h + 1,5 \text{ mm};$$

$$\text{„ } h > 250 \text{ „ „ } b = 0,3 h + 35 \text{ „ } \delta_1 = 0,036 h.$$

Die Neigung im Flantsch beträgt 14%. Die Nummern der Profile, welche zugleich den Höhen der **I-Eisen** in Centimetern entsprechen, beginnen mit 8 und schliessen mit 50. Die Höhen wachsen bis zu No. 24 um je 10 mm, von da an bis No. 40 um je 20 mm und von No. 40 an um je 25 mm.

Drückt man das Trägheitsmoment durch die Beziehung $J_Y = C \cdot F h^2$ aus, so ergeben diese Profile bis zu No. 26 für $C = 0,16 = \frac{1}{6}$ in ziemlicher Übereinstimmung mit dem oben für das Maximum des Widerstandsmomentes gefundenen Werte:

$$\max W_Y = \frac{1}{3} F h_0,$$

mit welchem

$$J_Y = W_Y \frac{h_0}{2} = \frac{1}{6} F h_0^2 \text{ folgt.}$$

Die Profilnummern von 26 an bis 50 liefern im Mittel $C = 0,155$.

Des weiteren ist bei dem Gewichte G (für 1 m) für $h = 8 \text{ cm}$ bis $h = 25 \text{ cm}$

$$W_Y = 0,415 h \cdot G$$

und für $h = 28 \text{ cm}$ bis $h = 50 \text{ cm}$

$$W_Y = (1,0 + 0,375 h) G.$$

Die österreichischen Normalprofile erhielten:

$$\text{Für } h \leq 160 \text{ mm, } b = 0,4 h + 20 \text{ mm; } \delta_1 = 0,03 h + 1,6 \text{ mm,}$$

$$\text{„ } h > 160 \text{ „ } b = 0,3 h + 36 \text{ „ } \delta_1 = 0,04 h.$$

Bei den niederen Profilen ist die Stegstärke demnach nahezu übereinstimmend mit den deutschen Profilen; mit zunehmender Höhe weicht dieselbe jedoch immer mehr von denselben ab und es erreicht z. B. bei No. 40 dieser Unterschied 1,6 mm.

Es ist dort ferner $R = 1,2 \delta_1$ und $r = 0,6 \delta_1$. Die Neigung der inneren Flantschen-seite ist, in Prozenten ausgedrückt: $p = 0,02 h + 7$.

Die österreichischen Normalprofile der **I-Eisen** enthalten die Nummern: 8, 10, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 24a, 26, 28, 28a, 30, 32, 35, 40, 50.

Die Nummern 24a und 28a unterscheiden sich von 24 und 28 nur durch größere Flantschenbreiten; es beträgt diese Mehrbreite bei ersteren 27, bei letzteren 30 mm.

Die **I-Eisen** werden bis zu 14 m Länge geliefert. Längen über 8 m bedingen einen Überpreis. Bei der Wiener Weltausstellung im Jahre 1873 waren **I-Eisen** von 18 m Länge, 355 mm Höhe, 142 mm Flantschenbreite und 13 mm Dicke von der Luxemburger Bergwerks- und der Saarbrücker Eisenhütten-Aktiengesellschaft zu Burbach ausgestellt. Die Ausstellung zu Philadelphia im Jahre 1877 brachte von seiten der Union Iron Works der Union Iron Co. Buffalo, Erie County, New-York, **I-Träger** von 24,4 m Länge, 254 mm Höhe und 1090 kg Gewicht, ferner solche von 15,86 m Länge, 381 mm Höhe und 1040 kg Gewicht.

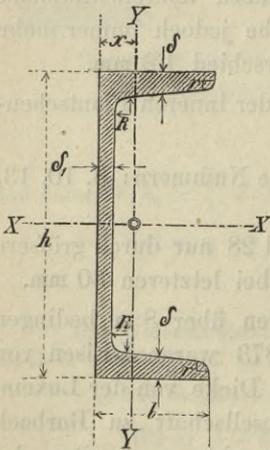
Zur Herstellung der I-Eisen ist sehr gutes, insbesondere jedoch zähnes, zähes Material erforderlich. Die Vereinigung des Stegs mit den Flantschen muß durch einen allmählichen Übergang mittels ausgiebiger Ausrundung im Querschnitt bewirkt werden. Es ist darauf zu achten, daß durch den Walzprozefs keine ungleichmäßigen Streckungen in den Flantschen und dem Stege auftreten. Letzteres giebt sich durch einen unebenen, gewellt erscheinenden Steg zu erkennen. Es versteht sich von selbst, daß dann Spannungen und zwar vornehmlich Schubspannungen zwischen Steg und Flantschen vorhanden sind, die gerade an diesen Orten gefährlich werden können, sodafs derartige Erscheinungen das betreffende Stück von der Verwendung zu wichtigen Konstruktionen ausschliessen. Das Walzprodukt soll eine reine Oberfläche, ganze und gerade Kanten, einen ebenen Steg und symmetrisch gleichmäßige Stärken der Flantschen aufweisen.

In Bezug auf die Anwendung der I-Eisen im Brückenbau ist zu bemerken, daß diese Eisen meist als Träger und zwar ebensowohl als Hauptträger bei Brücken kleiner Spannweiten, als zur Herstellung von Längsträgern und Querträgern bei größeren Brücken benutzt werden. Sie finden überdies Anwendung als Druckglieder bei größeren Gitter- oder Fachwerkbrücken und namentlich auch bei Brücken nach amerikanischer Konstruktionsart zur Bildung der gedrückten Gurte von Parallel-Gitterträgern.

Die Preisverhältnisse, insbesondere die Überpreise, stellen sich um so höher, je schwieriger die Herstellung des geforderten Walzstückes ist. Dieselben wachsen sonach mit den Querschnittsabmessungen überhaupt, namentlich jedoch mit der Höhe des Querschnittes und der Breite der Flantschen. Außerdem steigt der Überpreis proportional mit der Überschreitung der normalen, dem Grundpreise entsprechenden Länge. Ist z. B. P der Grundpreis f. d. Tonne bei der normalen Länge l und ΔP der Überpreis f. d. Tonne bei der Überlänge Δl , so ist: $\Delta P = a + c \cdot \Delta l$, wobei a den Querschnittsabmessungen entspricht und mit denselben und der Länge veränderlich ist, c ist hingegen meist unveränderlich.

6. U-Eisen (U-Eisen). Der Querschnitt dieser Formeisen, welche man E-Eisen oder U-Eisen nennt, entspricht dem eines I-Eisens mit einseitig abgenommenen Flantschen.

Fig. 30.



Für Anwendungen im Brückenbau kommen Querschnittshöhen von 100 bis 300 mm, Flantschenbreiten von 50 bis 100 mm und Stegstärken von 6 bis 10 mm in Betracht. Die Berechnung der Querschnittsfläche, des Gewichtes und des Trägheitsmomentes bezüglich der wagerechten Schwerpunktsachse erfolgt nach denselben Gleichungen, wie bei den I-Eisen.

Die zum Stege parallele Schwerpunktsachse des Querschnittes liegt von der äußeren Stegebene entfernt um:

$$x = \frac{b^2 \delta + \frac{1}{2} (h - 2 \delta) \delta^2}{F};$$

das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist:

$$J_x = J - F x^2,$$

wo J das Trägheitsmoment in Bezug auf die äußere Stegkante bedeutet; für diese ist:

$$J = \frac{1}{3} [2 \delta b^3 + (h - 2 \delta) \delta^3].$$

Für die deutschen Normalprofile der U-Eisen gelten die folgenden Angaben:

Die Flantschenbreite b und die Profilhöhe h stehen zueinander in der Beziehung $b = 0,25 h + 25 \text{ mm}$. Die Neigung im Flantsch ist mit 8% festgesetzt. Die Profil-

nummern beginnen bei No. 3 und endigen mit No. 30. Von No. 3 bis No. 5 nehmen die Höhen um je 10 mm, von No. 8 bis No. 22 um je 20 mm und von No. 22 bis No. 30 um je 40 mm zu. Die Stegstärke beträgt im Minimum 5 mm, im Maximum 10 mm, die Flantschenstärke im Minimum 7 mm, im Maximum 16 mm.

Bei den österreichischen Profilen ist

$$b = 0,25 h + 25 \text{ mm,}$$

$$\delta_1 = 0,025 h + 4 \text{ mm,} \quad \delta = 1,5 \delta_1,$$

$$R = 1,5 \delta_1, \quad r = 0,6 \delta_1.$$

Die Neigung der inneren Flantschenseiten beträgt in Prozenten: $p = 0,01 h + 7$. Es wurden 13 Nummern beantragt und zwar: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 u. 30.

Hiernach haben die österreichischen und deutschen Profile gleiche Flantschenbreiten, dagegen zeigen die ersteren durchaus stärkere Flantschendicken, ferner bei den Nummern 8 und 12 übereinstimmende Stegdicken, während die übrigen Nummern durchaus um 0,5 mm größere Stegstärken erhielten, als die letzteren.

Die Beurteilung der U-Eisen in Bezug auf Güte des Walzproduktes erfolgt in gleicher Weise, wie bei den I-Eisen, und es gelten hier dieselben Grundsätze und Erwägungen wie dort.

Die U-Eisen finden neuerdings ausgedehnte Anwendung zur Herstellung von Druckstreben bei Gitter- und Fachwerkbrücken, zur Bildung der Zug- und Druckgurte u. s. w. Vielfach verwendet man dieselben auch als Längsträger von Eisenbahn- und Straßenbrücken.

Die Preisverhältnisse der U-Eisen werden in ähnlicher Weise wie bei den I-Eisen durch die Querschnitts- und Längenmaße des Walzproduktes beeinflusst. Die Überpreise wachsen auch hier mit der Steghöhe und ganz besonders mit der Flantschenbreite. Selbstverständlich erhalten Überlängen, also Längen über 8 bis 10 m, bereits Preisaufläge.

An dieser Stelle seien auch die \sqsubset -Eisen (Z-Eisen) erwähnt, welche unter Umständen auch beim Brückenbau mit Nutzen Verwendung finden können. Wegen der betreffenden Einzelheiten kann auf das deutsche Normalprofil-Buch verwiesen werden.

Anmerkung. Bei Berechnung der Querschnittsgrößen, der Schwerpunktlage und der Trägheitsmomente der Walzträgerquerschnitte werden in der Regel die Ausrundungen der Kanten und die Neigungen der Seitenflächen außer Acht gelassen. Der Einfluss der Ausrundungen ist geringfügig; dagegen kann die Vernachlässigung der Neigungen der Seitenflächen der Flantschen bei \sqsubset -Eisen und der Stege bei \perp -Eisen unter Umständen immerhin beträchtlich werden, doch kann dieser Einfluss leicht berichtigt werden. Bezeichnet ε den Neigungswinkel der Flantschenseite eines \sqsubset -Eisens gegen die X-Achse bzw. des Steges eines \perp -Eisens gegen die Y-Achse, so ist für das erstere (Fig. 30):

$$\Delta x = - \frac{1}{6} \frac{(b - d_1)^3 \tan \varepsilon}{F}$$

die Verschiebung des Schwerpunktes in Richtung der X-Achse und

$$\Delta J_x = - \frac{1}{6} (b - d_1)^3 (b + d_1 - 2 \Delta x) \tan \varepsilon$$

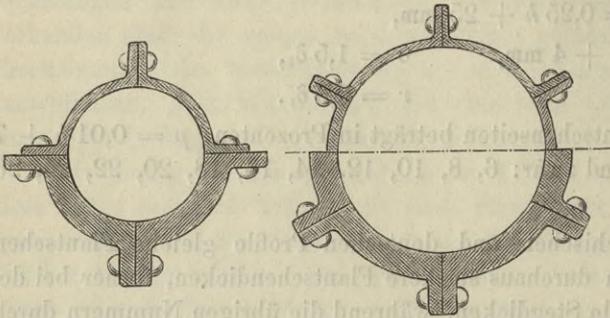
die Änderung des Trägheitsmomentes bezüglich der Achse Y. Für \perp -Eisen (Fig. 27) folgt sinngemäß:

$$\Delta y = - \frac{1}{6} \frac{(h - \delta)^3 \tan \varepsilon}{3 F} \quad \text{und}$$

$$\Delta J_y = - \frac{1}{6} (h - \delta)^3 (h + \delta - 2 \Delta y) \tan \varepsilon$$

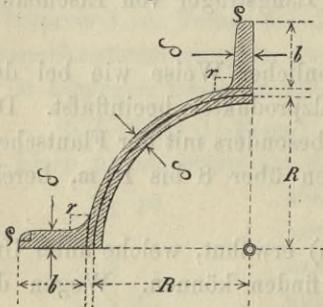
7. **Quadrant- und Sextant-Eisen.** Diese in Fig. 31 dargestellten Eisensorten fanden Anwendung hauptsächlich im amerikanischen Brückenbau. Bei deutschen Brücken sind u. a. für die im Jahre 1868 unter Ruppert erbaute, etwa 80 m weite Brücke der österreichischen Staatsbahn über den Donaukanal bei Wien Quadrant-Eisen verwendet, ebenso für die von Köstlin und Battig erbaute Tegetthoff-Brücke über den Wienfluss in Wien. Mit diesen Formeisen ist für die säulenförmigen, auf Druck in Anspruch genommenen Konstruktionsglieder eine möglichst zweckmäßige und vorteilhafte Materialanordnung des Querschnittes erzielt.⁶⁹⁾ Die Textfigur stellt zwei Profile der Säulen dar; es gelangen jedoch

Fig. 31.



auch 5-, 7- und 8-teilige Säulen zur Ausführung. Die zur Bildung einer Säule zusammensetzenden Formeisen müssen, neben anderen die Güte des Walzproduktes bezeugenden Eigenschaften, insbesondere die geometrische Form genau einhalten; namentlich ist es erforderlich, daß die Flantschen ebene und genau radiale Flächen bilden, da sonst die aneinanderstossenden Segmente nicht gut zusammenpassen und entweder die Anwendung von ausfüllenden Futterblechen zwischen den Flantschen oder doch ein gewaltsames Zusammenspannen erheischen würden.

Fig. 32.



Im letzten Falle werden die zur Verbindung angewendeten Niete in ungünstiger Weise beansprucht, sodafs eine Lockerung derselben eintreten könnte.

Das deutsche Normalprofil-Buch bringt in seiner dritten Auflage auch Normalprofile für Quadrant-Eisen. Diese erhielten Flantschenbreiten von $b = 0,2 R + 25 \text{ mm}$, wo R den mittleren Halbmesser der Röhre bezeichnet; des weiteren ist: $r = 0,12 R$; $\rho = 0,06 R$, vergleiche Fig. 32.

Schließlich sei bemerkt, daß die Besprechung derjenigen Eisensorten, welche bei der Herstellung der Bahnunterlagen der Strafsenbrücken Verwendung finden, also der sogenannten Zores- oder Ω -Eisen (Belag-Eisen), der trogförmigen Formeisen u. s. w., dem IX. Kapitel zugewiesen ist, und daß bei Erörterung der Hängebrücken (Kap. XIII) sich Gelegenheit finden wird, über Draht und Drahtkabel das Erforderliche mitzuteilen.

Litteratur.

Maurer. Die Formen der Walzkunst und das Façoneisen. Stuttgart 1865.

Heinzerling u. Intze. Deutsches Normalprofil für Walzeisen. 2. Aufl. Aachen 1881; 3. Aufl. 1886.

Zimmermann. Über Trägerquerschnitte von möglichst großem Widerstandsmomente. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 103.

Zimmermann. Vorteile, welche schiefwinkelige Winkeleisen bei Druckstäben gewähren. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 36.

Mehrtens. Eisen und Eisenkonstruktionen. Berlin 1887. (Abschnitt C. Formgebung des Eisens. Anhang. Tabellen über Abmessungen, Gewichte und Tragfähigkeit verschiedener Formeisen.)

⁶⁹⁾ Gleim. Über amerikanische Brückenbauten. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1876.

§ 24. Verbindungsmittel. Die Vereinigung stab- oder bandförmiger Konstruktionselemente zu Konstruktionsgliedern und dieser wieder zu einem Brückenträger erfolgt durch besondere „Verbindungsmittel“.

Die üblichen Verbindungsmittel sind — von den Keilverbindungen abgesehen — cylindrische Eisenkörper, welche durch die zu vereinigenden Teile greifen und in ihrer Lage mittels besonderer Vorrichtungen oder vermöge geeigneter Gestaltung der Enden derart erhalten bleiben, daß ein widerstandsfähiges Ganzes entsteht. Handelt es sich sonach um die Herstellung eines aus verschiedenen Konstruktionselementen zusammengesetzten Konstruktionsgliedes, so muß die Verbindung eine derartige sein, daß unabhängige Lage- und Formänderungen (Verschiebungen) der einzelnen Elemente verhindert werden, sodafs ein inniger Zusammenhang bedingt und ein einheitlicher Festigkeitswiderstand des Konstruktionsgliedes erzielt wird. Es fällt dann den Verbindungsmitteln die besondere Aufgabe zu, die verschiedenen, in den verbundenen Elementen auftretenden Spannungen aufzunehmen und zu übertragen. Infolge ungleichmäßiger Längsspannungen der einzelnen verbundenen Elemente tritt insbesondere das Bestreben zu ungleichmäßigen Längsverschiebungen auf; die Verbindungsmittel werden daher vornehmlich gegen diese Verschiebungen Widerstand zu leisten haben. — Zur Erreichung dieses Zweckes ist es erforderlich, daß zwischen dem zu Verbindenden und den Verbindungsmitteln ein möglichst genauer Anschluß bestehe und die Lage der Verbindungsmittel gegen das Verbundene gesichert bleibe. Es ist einleuchtend, daß die zu dem Verbindenden normale Lage der Verbindungsmittel, ferner die cylindrische Querschnittsform derselben und damit die entsprechend kreisförmige Form der Bolzenlöcher am zweckmäßigsten ist.

In erster Linie erscheint der „Schubwiderstand“ (die Scherfestigkeit) der Verbindungsmittel in Anspruch genommen, deren Querschnittsgröße, Anzahl und Anordnung durch den Vergleich des zu äufsernden Widerstandes mit den auftretenden Schubkräften nach statischen und konstruktiven Grundsätzen zu bestimmen sind.

Konstruktion der Verbindungsmittel. Zur Erzielung des innigen Anschlusses der Verbindungsmittel an die zu verbindenden Teile werden hauptsächlich zweierlei verschiedene Ausführungsarten angewendet; es sind dies:

1. eine genaue mechanische Herstellung und sorgfältige Ausführung durch Abdrehen der Bolzen und Ausbohren der entsprechenden Bolzenlöcher,
2. die Ausfüllung des Bolzenloches mit einem eingesetzten und dann durch Stauchung erbreiterten Bolzen.

Zur Festlegung der Bolzen in ihrer Lage gegen die verbundenen Teile werden, je nach Konstruktionsart der Bolzen, verschiedene Vorkehrungen getroffen. Bei genau bearbeiteten größeren Bolzen finden meist Schraubenmuttern, die an beiden mit eingesechnittenen Gewinden versehenen Bolzenenden angebracht sind, Anwendung (Gelenkbolzen). Kleinere Bolzen, „Schraubenbolzen“, erhalten meist einerseits einen Schraubenkopf, andererseits die entsprechende Schraubenmutter. In selteneren Fällen kamen abgedrehte Bolzen mit durch Stauchung erbreiterten Enden (kalte Vernietung) im Brückenbau zur Anwendung.

Die gestauchten Bolzen — die „Niete“ — erhalten beiderseits erbreiterte knopfförmige Enden, „Köpfe“, von welchen der eine am Bolzen bereits vor der Verwendung angestaucht, der zweite erst während der Stauchung des Bolzens ausgebildet wird.

Man unterscheidet demnach Gelenkbolzen, Schraubenbolzen und Niete.

1. **Die Gelenkbolzen.** Genau bearbeitete, abgedrehte Eisencylinder kommen mit Durchmessern von 60 bis 165 mm, und mitunter mit beträchtlichen Längen (bis zu 1500 mm) zur Anwendung. Die Enden derselben sind meist mit Schraubengewinden und Muttern versehen. Die Gelenkbolzen werden zur Herstellung der Verbindung von Konstruktionsgliedern stets einzeln angeordnet und geben hierdurch der Verbindung selbst einen gelenkartigen Charakter. Im amerikanischen Brückenbau gelangten früher derartige Konstruktionen für die Knotenverbindungen bei Fachwerk- und Gitterbrücken fast ausschließlich zur Anwendung.

Das Material der Bolzen, welche nicht blofs Schubwirkungen, sondern auch Biegungen zu erleiden haben, mufs von vorzüglicher Beschaffenheit sein; insbesondere eignet sich hierzu ein festes, nicht zu weiches Eisen. In Amerika benutzte man zu diesem Zwecke eigens kalt gewalztes, sehniges Eisen; gegenwärtig werden dort derartige Bolzen aus Stahl hergestellt.

Der Durchmesser des Bolzens wird statisch berechnet; dabei wird sowohl das Biegemoment, als der Stauchdruck und die Scherkraft in Rücksicht gezogen. In den vereinigten Staaten Amerikas wird die zulässige Inanspruchnahme auf Biegung bei Schweifeseisen mit 1,0, bei Flusseisen bzw. Flusstahl mit 1,2 bis 1,4 t/cm gerechnet; als zulässigen Stauchdruck $\frac{4}{3}$ bis $\frac{3}{2}$ mal und als zulässige Scherspannung etwa $\frac{1}{2}$ mal so viel. Der Durchmesser der Schraubenspindel ist in der Regel kleiner als der des Bolzens; der Unterschied beträgt 35 bis 40%. Die Schraubenmutter werden aus schmiedbarem Gufs hergestellt. Ihre Innenfläche ist stets hohl, damit die Mutter, falls der Bolzen zu lang ist, nicht auf diesem, sondern auf den zu verbindenden Stäben aufruhet.⁷⁰⁾

2. **Die Schraubenbolzen.** Diese sind cylindrisch oder mit schwachem Kegel ($\frac{1}{100}$) abgedreht, einerseits mit einem angestauchten, vier- oder sechskantigen oder auch cylindrischen Kopfe, anderseits mit einem scharfgängigen Gewinde und der normalen Schraubenmutter versehen.

Die Schraubenbolzen haben die Bestimmung, die zu verbindenden Eisenteile auch in der Bolzenrichtung fest zusammenzuhalten und aneinander zu pressen. Sie unterscheiden sich hierdurch von den Gelenkbolzen, bei welchen die angebrachten Schraubenmutter blofs den Zweck der Sicherung der Bolzenlage zu erfüllen haben. Kopf und Mutter der Schraubenbolzen erhalten demnach die gewöhnlichen Mafse der Befestigungsschrauben.

Im Brückenbau, im besonderen jedoch zur Verbindung von Konstruktionsbestandteilen werden Schraubenbolzen von 18 bis 35 mm Durchmesser angewendet.

Der Durchmesser der Schraubenbolzen mufs mit der Dicke der Platten in einem bestimmten Verhältnisse stehen, damit der Druck auf die Lochwand bzw. auf die geprefte Schaftfläche keine bleibenden Formänderungen daselbst hervorbringe. Überschreitet der auftretende Flächendruck eine gewisse, von der Härte der Materialien abhängige Grenze, so entsteht ein Aufstauchen der Lochränder, bzw. ein Eindringen des Schaftmantels. Gerber hat durch Versuche ermittelt, dafs Drücke von 43 bis 60 kg f. d. qmm der geprefsten Lochwand bleibende Formänderungen der Löcher zur Folge hatten und bestimmt das Verhältniß der Scherfläche des Bolzens zur gedrückten Lochwand (die Projektion der gedrückten Lochwand = $d\delta$) aus:

$$\frac{\pi d^2}{4} : d\delta = 40 : 16 = 10 : 4, \text{ d. h. } d\delta = 0,4 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right);$$

hieraus würde: $\frac{d}{\delta} = \frac{10}{\pi} = 3,2$ folgen.

⁷⁰⁾ Ritter. Der Brückenbau in den vereinigten Staaten Amerikas. Bern 1894.

Nach Schwedler's Annahme darf der Druck auf die ebene Projektion der Rückwand des Loches 10 kg f. d. qmm betragen, demnach würde bei einschnittigen Bolzen, die mit 6 kg f. d. qmm auf Abscherung in Anspruch genommen sind:

$$10 \cdot \delta d = 6 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{und hiernach} \quad \frac{d}{\delta} = 2,1 \quad \text{sich ergeben.}$$

Nach amerikanischen Vorschriften soll der Oberflächendruck auf die halbe Cylinder-Innenfläche des Bolzenauges nicht mehr als 8000 bis 10000 Pfund f. d. Quadratzoll, d. i. 562 bis 703 kg f. d. qcm betragen.

Wenn angenommen werden darf, daß die Berührung zwischen den Bolzen und dem Bolzenloche in einem Halbkreiscylinder stattfinde, so ergibt die theoretische Berechnung für den größten Druck der Flächeneinheit: $k_{\max} = \frac{2D}{\pi r \delta}$, wobei D der Gesamtdruck, den der Bolzen gegen die Lochwand ausübt, r der Halbmesser des Bolzens und δ die Höhe des Berührungscylinders ist.

Bei einschnittigen Bolzen ist $D = \pi r^2 t$; wo t die Beanspruchung auf Scherfestigkeit bedeutet. Hiernach ist auch:

$$k_{\max} = 2r \frac{t}{\delta} = d \frac{t}{\delta} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{\delta} = \frac{k_{\max}}{t}.$$

Bei zweischnittigen Bolzen würde dann folgen: $\frac{k_{\max}}{t} = 2 \frac{d}{\delta}$.

Nimmt man als größten zulässigen Stauchdruck $k_{\max} = 1400$ kg f. d. qcm und für die zulässige Scherfestigkeit $t = 600$ kg f. d. qcm an, so ergäbe sich im ersten Falle: $\frac{d}{\delta} = \frac{7}{3} = 2,3$, im zweiten Falle: $\frac{d}{\delta} = 1,16 = 1,2$.

Obwohl die Schraubenbolzen in den weitaus meisten Fällen Schubwirkungen zu widerstehen haben, so kommt dennoch auch die achsiale Längsspannung derselben infolge des Anziehens der Muttern zur Geltung.

Das Material der Schraubenbolzen muß, entsprechend der Wirkungsäufserung der Bolzen, von vorzüglicher Beschaffenheit sein; am besten würde hierfür Feinkorneisen — unter Umständen auch Stahl — geeignet sein. Bei Ausführung der Verbindungen mit Schraubenbolzen ist Sorge zu tragen, daß die Muttern nicht mit der Zeit lose werden, weshalb geeignete Sicherungen oder Verstemmen der Gewinde nach wiederholtem Anziehen der Muttern vorzunehmen sind.

Es ist selbstverständlich, daß die Bolzenlöcher genau und übereinstimmend gebohrt, bei konischen Bolzen mittels entsprechend konisch geformter Reibahlen ausgerieben werden müssen. Die sorgfältig abgedrehten Bolzen sollen rein geschnittene Gewinde mit reinen, vollen Kanten und gut passenden Muttern haben.

Anwendung finden die Schraubenbolzen sowohl zur Verbindung von Konstruktionselementen zu Konstruktionsgliedern, wie der letzteren zu konstruktiven Gebilden. Auch zur Verbindung von Konstruktionsteilen, wo die Verbindungsmittel in ihrer Achsenrichtung auf Zug in Anspruch genommen erscheinen, wie dies z. B. bei Verbindungen der Längsträger mit den Querträgern der Fall ist, sind Schraubenbolzen am besten geeignet. Überall dort, wo Nietung nicht anwendbar, insbesondere wo Nietstärken von mehr als 25 mm angeordnet werden müssen oder die Länge der Nietbolzen 90 mm überschreitet, können Schraubenbolzen vorteilhaft benutzt werden.

3. **Die Niete.** Die Niete sind aus unbearbeitetem Handelsrundeisen hergestellte, in selteneren Fällen cylindrisch oder mit schwachem Konus abgedrehte Bolzen, die an einem Ende einen bereits vorgebildeten Kopf — Setzkopf — erhalten, wogegen der zweite Kopf — der Schließkopf — erst nach Einführung des Nietbolzens in das Nietloch durch Stauchung und Formung des vorragenden Schaftes erzeugt wird. Je nachdem

abgedrehte oder unbearbeitete Niete zur Verwendung kommen, ist das Verfahren beim Nieten verschieden.

Im ersten Falle wird der Anschluß des Nietschaftes an die Nietlochwände infolge der genauen Bearbeitung erzielt; die Niete werden im kalten Zustande gesetzt und in diesem deren Schließkopf gebildet. Es findet hier die sogenannte „kalte Vernietung“ statt.

Im zweiten Falle — der „warmen Nietung“ — werden die Niete in hellglühendem Zustande in die Nietlöcher eingeführt, daselbst mittels eines Gegenhalters oder Nietstockes festgehalten, an die zu vernietenden Eisen angepreßt und durch Hammerschläge, die in der Achsenrichtung des Schaftes erfolgen, im Nietloche derart gestaucht, daß der so erbreiterte Schaft das Nietloch möglichst vollständig ausfüllt. Hierauf wird der Schließkopf aus dem noch vorstehenden Schaft durch Breithämmern und mittels eines aufgesetzten Kopfgesenkes, des „Schelleisens“, geformt. Gewöhnlich wird gefordert, daß nach Vollendung der Arbeit der Schließkopf in seiner Mitte noch einen dunkelrot glühenden Punkt zeige.

Damit das Stauchen des Schaftes ein vollständiges werde, ist es erforderlich, daß das Gewicht der Stauchhämmer in einem bestimmten Verhältnisse zu dem Durchmesser und der Länge des Nietes stehe. Ein gleiches gilt vom Gewichte der Zuschlaghämmer für die Formung des Schließkopfes. Durch Anwendung von Nietmaschinen wird die Nietung nicht bloß bei weitem rascher, sondern auch vollkommener. Insbesondere günstig wirken jene Maschinen, welche mittels eines starken, ruhigen Druckes, ohne Stofs, das Nieten bewerkstelligen. Die warme Nietung erfordert es, daß die Nietschäfte in ihrem Durchmesser etwas schwächer, als die Nietlöcher gehalten werden, damit man das glühende Niet einführen kann. Man nimmt hierzu in der Regel den Bolzendurchmesser um $\frac{1}{20}$ schwächer.

Die Form und Größe des Nietkopfes ist mit Rücksicht auf Zweckmäßigkeit zu bestimmen. Jedenfalls wird die Form die eines Umdrehungskörpers sein. Die Abmessungen desselben müssen im Verhältnisse zu den Widerstandsäußerungen des Nietes stehen. Das Niet, insbesondere das warm geschlagene, hat infolge der Zusammenziehung des Eisens beim Erkalten meist sehr beträchtliche Längenspannungen zu ertragen; es muß daher die Höhe des Kopfes, im verlängerten Schaftmantel gemessen, zum mindesten eine solche Größe erhalten, daß ein Abscheren der Kopfränder verhindert wird.

Stellt man die Bedingung, daß der Widerstand gegen Abscheren der Kopfränder gleich dem Widerstand des Schaftes gegen Zugspannung werde, so ergibt sich:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot s = \pi \cdot d \cdot h \cdot t,$$

woraus die Kopfhöhe $h = \frac{d}{4} \cdot \frac{s}{t}$ folgt, wobei d den Durchmesser des Nietschaftes, s die Zug- und t die Schubfestigkeit des Eisens bedeuten. Für $\frac{s}{t} = \frac{5}{4}$, würde $h = 0,31 d$ folgen. Gewöhnlich wird jedoch $h = 0,5 d$ gemacht.

Zur Bestimmung der Größe des um den Schaft vorstehenden Kopfrandes kann die Bedingung gelten, daß der Einheitsdruck daselbst gleich der Spannung im Schaft werde, also: $\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$, woraus sich der Durchmesser des äußeren Kopfrandes $D = d \sqrt{2} = 1,4 d$ berechnet. Der hierfür gebräuchliche Wert ist dagegen $D = 1,5 d$.

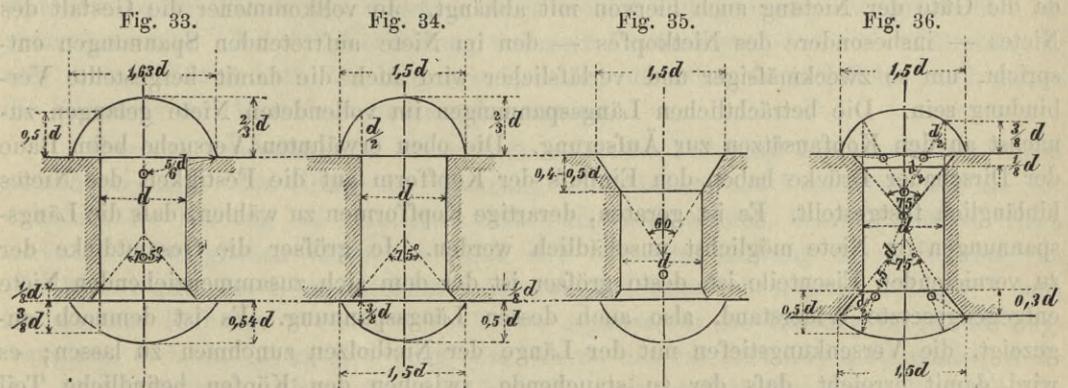
Der Anschluß des Kopfes an den Nietschaft wird entweder unvermittelt, durch scharfen Absatz oder mittels Einschaltung eines niederen Zwischenkegels — der Versenkung — bewerkstelligt. Versuche, die beim Bau der (alten) Dirschauer Brücke über die Zweckmäßigkeit verschiedener Nietkopfformen angestellt wurden, ergaben, daß die Anordnung von Versenkungen durchaus zweckmäßig sei. Obwohl schon die Erwägung,

dafs die zur Formung des Kopfes nötige Niederstauchung der Eisenmassenteile um einen rechten Winkel unmöglich für die Festigkeit des Kopfes vorteilhaft sein könne und deshalb für einen vermittelten Übergang vom Schaft zum Kopfe spricht, so haben dies auch die Dirschauer Versuche vollends bestätigt, indem sich ergab, dafs bei Anwendung von Versenkungen der Bruch durch Reissen des Nietschaftes nahe in dessen Mitte, bei Nietten ohne Versenkung jedoch stets am Kopfansatze erfolgte. Die Versenkung entspricht daher jedenfalls einer wesentlichen Verstärkung des Nietes und sollte namentlich bei stark beanspruchten Nietten nie fortgelassen werden. Die eben erwähnten Versuche ergaben, dafs die Tiefe der Versenkung mit $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ d vollständig genüge. Der Winkel des Versenkungskegels liegt meist zwischen 60 bis 80°.

Im Brückenbau werden vornehmlich die folgenden Formen für die Nietköpfe angewendet:

1. Der Kugelabschnitt (Fig. 33). Wird keine Versenkung angeordnet, so ist der Körperinhalt des Kopfes $V = \frac{\pi}{6} \left(\frac{3}{4} D^2 + H^2 \right) H$, wo D der Durchmesser des Kopfes und H die Höhe des Nietkopfes bedeutet. Setzt man $H = \frac{2}{3} d$ und die Höhe im Schnitte des Nietkopfes mit dem Cylindermantel des Bolzens $h = 0,5 d$, so ergibt sich $D = 1,632 d$ und der Inhalt des Kopfes $V = 0,851 d^3$. Das Gewicht desselben ist dann: $G = 0,0066 d^3 \text{ kg}$ (d in cm). Ist eine Versenkung vorhanden und ist deren Tiefe $v = \frac{1}{8} d$, so wird $D = 1,56 d$, der Inhalt des Kopfes $V = 0,601 d^3$ und dessen Gewicht $G = 0,00463 d^3 \text{ kg}$.

2. Der ellipsoidische Kopf (Fig. 34, oben). Aus der Gleichung der erzeugenden Ellipse ergibt sich: $\frac{d^2}{D^2} + \frac{h^2}{H^2} = 1$. Hieraus folgt für $D = 1,5 d$ und $H = \frac{2}{3} d$, $h = 0,497 d$, der Inhalt $V = \frac{\pi}{4} d^3 = 0,785 d^3$ und das Gewicht $G = 0,00605 d^3 \text{ kg}$. Bei einer Versenkung $v = \frac{d}{8}$ ist für die Annahme $h = \frac{d}{2}$, $D = 1,51 d$, $V = 0,5984 d^3$ und $G = 0,00461 d^3 \text{ kg}$. In Fig. 36, oben, ist die Kopfform der bei der Dirschauer Brücke angewendeten Niete dargestellt. Für diese ist: $D = 1,5 d$, $h = 0,509 d$, $V = 0,584 d^3$ und $G = 0,0045 d^3 \text{ kg}$.



3. Der ganz versenkte Kopf (Fig. 35, oben) entspricht der Form nach einem abgestumpften Kegel, dessen größere Grundfläche mit der Oberfläche des vernieteten Eisenteiles zusammenfällt. Hier ist $H = v = 0,4 d$ bis $0,5 d$; $D = 1,5 d$.

4. Der halb versenkte Kopf (Fig. 36, oben und Fig. 33 bis 36, unten) besteht aus einem über die Oberfläche des vernieteten Eisenteiles vorstehenden Körper und dem einer beträchtlicheren Versenkung entsprechenden Kegelstumpf. Die Versenkungstiefe ist $v = 0,3 d$; $h = 0,5 d$ und $D = 1,5 d$.

Mit Beibehaltung der beim Bau der Dirschauer Brücke gebrauchten Benennungen ergeben sich für die Anwendung der versenkten Niete die folgenden Regeln:

a) Klein-normal versenkte Niete (Fig. 36, oben). Für die Verwendung dieser Niete gilt als Regel: Wenn beide Nietköpfe voll sind, so darf die Nietlänge zwischen den Köpfen — gleich der zu vernietenden Eisendicke — nicht gröfser sein, als der doppelte Durchmesser des Nietes. Geringe Überschreitung ausnahmsweise.

b) Grofs-normal versenkte Niete (Fig. 36, unten). Dieses Niet ist überall da anzuwenden, wo die zu vernietende Eisendicke gröfser ist als der doppelte Nietdurchmesser. Es ist nur dann von der Versenkung abzuweichen, wenn, ohne es vermeiden zu können, diejenige Eisendicke, in welcher die Versenkung anzubringen ist, gleich oder kleiner als die vorgeschriebene Versenkungstiefe sein sollte. In diesem Ausnahmefalle wird die Versenkung nach Fig. 37 2 mm weniger tief gemacht, als die Eisendicke beträgt.

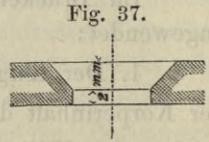


Fig. 37.

c) Ganz versenkte Niete (Fig. 35, oben). Tiefe der Versenkung gleich dem halben Bolzendurchmesser. Abweichungen nur unter Umständen wie vorhin angegeben. Die Anwendung dieser Niete findet nur statt, wenn eine glatte ebene Oberfläche der durch Nietung verbundenen Teile hergestellt werden soll. Wünschenswert ist immer, dafs das Niet nur dann verwendet wird, wenn die Nietlänge den doppelten Durchmesser bedeutend überschreitet.

Zur Herstellung des Kopfes und zur Stauchung des Nietbolzens ist eine Mehrlänge des Nietschaftes von $1,3 d$ bis $1,7 d$, im Mittel von $1,5 d$ erforderlich.

Die im Brückenbau gebräuchlichen Mafse der Niete bewegen sich für den Bolzendurchmesser zwischen 15 bis 26 mm. Die Länge des Nietschaftes (zwischen den Köpfen) bis zu 4 Durchmessern höchstens. Niete mit Längen von $4 d$ lassen sich schon schwer gleichmäfsig stauchen und können infolge allzu grofser Längsspannung auch reißen.

Die Einzelheiten der Kopfformen sind keineswegs von untergeordneter Bedeutung, da die Güte der Nietung auch hiervon mit abhängt. Je vollkommener die Gestalt des Nietes — insbesondere des Nietkopfes — den im Niete auftretenden Spannungen entspricht, um so zweckmäfsiger und verläflicher wird auch die damit hergestellte Verbindung sein. Die beträchtlichen Längsspannungen im vollendeten Niete gelangen zunächst an den Kopfansätzen zur Äufserung. Die oben erwähnten Versuche beim Baue der Dirschauer Brücke haben den Einflufs der Kopfform auf die Festigkeit des Nietes hinlänglich festgestellt. Es ist geraten, derartige Kopfformen zu wählen, dafs die Längsspannungen im Niete möglichst unschädlich werden. Je gröfser die Gesamtdicke der zu vernietenden Eisenteile ist, desto gröfser ist der dem sich zusammenziehenden Niete entgegengesetzte Widerstand, also auch dessen Längsspannung. Es ist demnach angezeigt, die Versenkungstiefen mit der Länge der Nietbolzen zunehmen zu lassen; es wird damit erreicht, dafs der zu stauchende, zwischen den Köpfen befindliche Teil kürzer und die Länge der Zusammenziehung verringert wird. Die zu wählende Form des Nietkopfes würde sonach von der Länge des Nietbolzens, bzw. der Gesamtdicke der zu vernietenden Eisen abhängig sein.

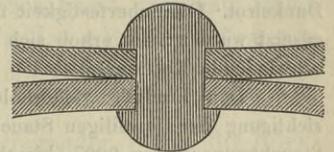
Über die Längsspannungen im Nietschafte ist Folgendes zu bemerken. Infolge des Erkaltes eines im glühenden Zustande eingezogenen und geschlagenen Nietes treten bei behinderter Zusammenziehung desselben durch den Widerstand der vernieteten Eisen Längsspannungen im Niete selbst auf, deren Gröfse abhängig ist von dem Unterschiede

der Temperatur des erkalteten Nietes gegen jene, bei welcher die Zusammenziehung begann, ferner von dem Widerstande der vernieteten Eisen und dem Ausdehnungs- und Elasticitätskoefficienten des Nietes.

Das hellglühend eingezogene Niet teilt während des Stauchens den umgebenden Eisenmassen einen Teil seiner Wärme mit und veranlaßt deren Ausdehnung, welche einer Verlängerung des Nietes entspricht. Nach Vollendung des Schließkopfes findet die wirksame Zusammenziehung des Nietes, gleichzeitig jedoch auch jene der umgebenden Eisenteile statt und es ist der Temperaturunterschied des Nietes gegen jene der unmittelbaren Umgebung maßgebend für die Spannung des Nietschaftes. Außerdem ist die Zusammendrückbarkeit der vernieteten Eisenteile, insbesondere der Spielraum zwischen den verschiedenen übereinander befindlichen Eisenplatten, von wesentlichem Einfluß auf die Spannung. Wenn angenommen wird, daß die Temperatur des vollendeten Nietes etwa 500° C. (im Dunkeln glühend), die der Umgebung, d. i. allenfalls jenes Teiles, der dem von den Kopfrändern gefaßten Hohlzylinder entspricht, etwa 400° C. betrage, so

würden die vernieteten Teile mit der Kraft: $P = \frac{1}{80000} \cdot 100^{\circ} \cdot E = \frac{1}{800} E$ f. d. qcm Nietquerschnitt zusammengepreßt werden müssen und dem angenommenen Temperaturunterschied würde eine Zusammenziehung des Nietbolzens von $\frac{1}{800}$ seiner Länge entsprechen. Wenn jedoch bedacht wird, daß zwischen den übereinander liegenden Platten Zwischenräume bestehen, so verringert sich der Widerstand der gepreßten Teile, indem die zusammendrückende Kraft des erkaltenden Nietes vielmehr eine Verkleinerung dieser Zwischenräume durch eine centrale Biegung der Platten um das Niet herum hervorbringt (Fig. 38). Wenn man die Größe des Zwischenraumes zwischen zwei Platten mit nur $\frac{1}{20}$ eines Millimeters annimmt, so würde bei Vernietung zweier Platten von zusammen 20 mm Stärke, die Größe der Zusammenziehung des Nietes bei etwa 200° Temperaturunterschied gerade ausreichend sein, um die Platten an dem Niete zur Berührung zu bringen. Die Spannung des Nietbolzens entspräche dann dem Biegungswiderstande der Platten und dieselbe ist jedenfalls viel geringer, als gewöhnlich angenommen wird. Nur bei Verbindung mehrerer Plattenlagen oder bei verhältnismäßig sehr dicken Platten kann der Biegungswiderstand derselben beträchtlicher und mithin die Spannung der Nietbolzen bedeutender werden.

Fig. 38.



Hiernach erscheinen die Niete durch elastische Federung der vernieteten Eisenplatten gespannt. Die Größe der Spannung selbst könnte aus Versuchen, die zur Ermittlung der Reibung bei vernieteten Stäben angestellt wurden, beurteilt werden. Nach Lavaley's bezüglichen Versuchen ergab sich für diese Reibung der Mittelwert von 15,8 kg f. 1 qmm des Nietquerschnittes bei zwei Reibungsflächen, somit 7,9 kg f. 1 qmm für einfache Reibung. Versuche Harkort's ergaben für die Reibung 0,176 der Zugfestigkeit, d. i. ca. 7,3 kg f. 1 qmm, also Werte, die mit Lavaley's Resultaten ziemlich übereinstimmen. Unter Annahme eines Reibungskoefficienten von 0,3 ergäbe sich hiernach eine mittlere Spannung des Nietes von 25 kg f. 1 qmm.

Die Ursache der Längsspannungen der Niete liegt, wie oben bemerkt, in dem Unterschied der Temperatur des frisch vollendeten Nietes gegen jene seiner unmittelbaren metallischen Umgebung und der durch dessen Abkühlung hervorgerufenen Zusammenziehung. Da nun dieser Temperaturunterschied vornehmlich von der Temperaturhöhe

des Nietbolzens während seines Stauchens abhängt, so ist auch jene Längsspannung im erkaltenden Niete durch diese Stauchtemperatur bedingt.

Die Größe des Einflusses der Stauchtemperatur auf den Gleitwiderstand und die Scherfestigkeit bei einer Nietverbindung zeigt eine Reihe von Versuchen, welche Considère in den Ann. des ponts et chaussées 1886, S. 98 u. ff. mitteilt. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in Kurzem die folgenden:

a) Bei Handnietung. Wenn die Stauchtemperatur zwischen 1000° (Hellkirschrot) und 800° (beginnendem Kirschrot) lag, so betrug der Gleitwiderstand f. d. **qmm** des Nietquerschnittes etwa **10 kg**; derselbe nahm zu bei abnehmender Stauchtemperatur und erreichte das Maximum von **15 kg** für die Stauchtemperatur von etwa 600° (fast verschwindendes Rot), von wo ab derselbe immer mehr und mehr mit der Temperatur abnahm und geringer wurde als **5,1 kg** für kalt geschlagene Niete. Die Scherfestigkeit betrug **30,1 kg** f. d. **qmm** solcher Niete, deren Stauchtemperatur 1000° bis 900° (Kirschrot) war; sie erhob sich wachsend auf **31,2**, **36,9**, **38,1 kg** und erreichte den Höchstwert von **41,2 kg** f. d. **qmm** bei der Stauchtemperatur von 500° (im Dunkeln glühend). Von da an fällt der Scherwiderstand mit der abnehmenden Stauchtemperatur und sinkt auf **32,4 kg** bei kalt gesetztem Niete.

b) Mit der Presse gestauchte Niete. (Der Druck betrug ungefähr **100 kg** f. d. **qmm** des Nietquerschnittes.) Der Gleitwiderstand ergab sich, wie im früheren Falle, bei der Stauchtemperatur von Hellkirschrot nahe an **10 kg** und bei kalt gestauchten Nieten etwas kleiner als **5 kg** f. d. **qmm**. Er erhob sich jedoch auf **16** und **17 kg** für die Stauchtemperatur des beginnenden Kirschrot und des Dunkelrot. Die Scherfestigkeit fand man nahe an **32** und **33 kg** für Niete, die sehr heiß und sehr kalt gesetzt wurden; sie erhob sich jedoch bis nahe an **40 kg** für solche, deren Stauchtemperatur das verschwindende Rot war.

Den Einfluß wiederholter Anstrengung der Niete in entgegengesetztem Sinne unter Berücksichtigung der jeweiligen Stauchtemperatur zeigte eine neue Versuchsreihe und zwar für Niete, deren Stauchtemperaturen 900° (kirschrot), 700° (dunkelrot) und 650° (sehr dunkelrot) waren. Bei diesen Versuchen, bei welchen der Sinn der Anstrengungen je dreimal wechselte, sank der Gleitwiderstand für das bei 900° gestauchte Niet von **10,8** auf **5,1 kg**, für das bei 700° gestauchte von **11,9** auf **9,7 kg** und für das bei 650° gestauchte von **15,4** auf **9,7 kg** f. d. **qmm** des Nietquerschnittes herab.

Der schädliche Einfluß wiederholter Anstrengungen in entgegengesetztem Sinne trat somit auch hier deutlich vor die Augen.

Das Material der Niete muß von ausgezeichneter Qualität sein; am besten eignet sich feinschnigtes zähes Eisen und für kalt zu setzende Niete Feinkorneisen. Über die Proben, welche gutes Nieteisen bestehen muß, vergleiche man § 4 und über die Einzelheiten der Ausführung der Vernietungen § 8 des XVI. Kapitels (2. Aufl.).

C. Allgemeine Anordnung der eisernen Brücken.

Die Paragraphen 25, 27 u. 33 sind von Prof. Landsberg, die Paragraphen 28 bis 32 von Prof. Brik bearbeitet; § 26 ist ein Beitrag des Prof. Fr. Steiner in Prag.

§ 25. Grösse und Zahl der Öffnungen. Allgemeine Regeln darüber, welche Gröszen den einzelnen Öffnungen einer eisernen Brücke gegeben werden sollen, bzw. welche Öffnungszahl bei gegebener Gesamtlichtweite zu wählen ist, können nicht aufgestellt werden; in jedem besonderen Falle sind die örtlichen und sonstigen Verhältnisse maßgebend.

Die Herstellung von Zwischenpfeilern kann auf gewisse Längen wegen ungünstiger Gründungsverhältnisse, weil der Fluß zu reifend oder das zu überschreitende Thal zu tief ist, unmöglich oder mit übermächtig großen Kosten verbunden sein (wie z. B. bei dem Niagara); es kann auch die Lage der Baustelle mit zwingender Gewalt dazu führen, daß man die Pfeiler an ganz bestimmten Stellen erbauen muß. Letzteres tritt unter anderem ein, wenn im Strome für die Erbauung der Pfeiler besonders geeignete Inseln oder flache Stellen vorhanden sind, während derselbe an allen anderen Stellen bedeutende Tiefen aufweist. Als Beispiel wird die Insel Inchgarvie bei der Brücke über den Firth of Forth genannt.

Bei schiffbaren Strömen und Meeresarmen ist in hervorragender Weise die Rücksicht auf die Schifffahrt maßgebend; es ist stets eine genügende Weite und Lichthöhe über dem höchsten schiffbaren Wasserstande freizuhalten. Ferner dürfen die Einbauten (Pfeiler u. s. w.) das Abflußprofil nicht in schädlicher Weise beeinflussen, insbesondere keinen nachteiligen Stau erzeugen; endlich ist auch der etwa auf dem Strome stattfindende Eisgang bei Abmessung der geringsten auszuführenden Lichtweiten gebührend zu berücksichtigen. Die Entscheidung über die Öffnungsweiten mit Rücksicht auf die erwähnten Gesichtspunkte — Schifffahrt, Durchflußquerschnitt, Eisgang — ist nur in den seltensten Fällen Sache des Brückenbau-Ingenieurs. Gewöhnlich werden dem letzteren in Bezug darauf ganz bestimmte Vorschriften von der Landesbehörde gemacht. Eine Reihe einschlägiger Mitteilungen findet man im § 11 des I. Kapitels dieses Werkes.

Unter Umständen kann auch die Rücksicht auf die Schönheit eine ausschlaggebende Wichtigkeit haben. Während man bei weit weniger wichtigen und monumentalen Bauwerken diese Rücksicht mit Recht an eine sehr hohe Stelle setzt, wurde früher vielfach bei dem Entwerfen von Brücken sehr wenig Wert auf die Schönheit des Gesamtbildes gelegt; und doch sind die Brückenbauwerke von ganz außerordentlicher Bedeutung für die Gegend, in welcher sie erbaut werden; sie können das Landschaftsbild sowohl im günstigen, wie ungünstigen Sinne wesentlich beeinflussen. Vielfach hat man sich damit begnügt, nach Fertigstellung des Entwurfes die Pfeiler und Geländer durch Aufbauten, Türmchen u. dergl. auszuschnücken. Weit wichtiger für das Gesamtbild des Bauwerkes ist aber die richtige Wahl der Öffnungsweiten, die Abwägung der Pfeilermasse gegen diejenigen der eisernen Überbauten, die Führung der Hauptlinien der Träger; diese Verhältnisse fallen auch in der für die Beurteilung des Ganzen nötigen großen Entfernung vom Bauwerke sofort in die Augen, während der Schmuck der Einzelheiten gegenüber den großen Massen des Ganzen aus der Ferne gesehen fortfällt, in der Nähe gesehen kleinlich wirkt. Aus ästhetischen Gründen empfiehlt sich die Wahl

einer ungeraden Anzahl von Öffnungen, wenn nicht etwa die Zahl derselben so groß ist, daß man erst zählen muß, um die Anzahl zu ermitteln. Eine Brücke mit zwei Öffnungen, also mit einem Mittelpfeiler im Strome, wirkt in der Regel unschön, sollte demnach, wenn nicht sonstige zwingende Gründe für diese Einteilung sprechen, vermieden werden. Immerhin beweist die neue Rheinbrücke bei Düsseldorf (eröffnet 1898), daß auch mit einem Mittelpfeiler günstige ästhetische Wirkung möglich ist.⁷¹⁾

Die angeführten Rücksichten entziehen sich einer allgemeinen Behandlung und können nicht in eine mathematische Formel gebracht werden. Es kann aber recht wohl der Fall eintreten, daß die örtlichen Verhältnisse es ganz oder nahezu gleichgiltig erscheinen lassen, ob man eine große oder geringe Zahl von Öffnungen wählt; es wird eine gewisse Gesamtlichtweite verlangt, dabei aber dem Ingenieur freigestellt, dieselbe in vorteilhafter Weise in einzelne Lichtweiten zu zerlegen. Alsdann wird derselbe namentlich dahin streben müssen, die gestellte Aufgabe mit so geringem Kostenaufwande wie möglich zu lösen.

Die hier zu behandelnde Frage kann demnach folgendermaßen ausgesprochen werden: In welcher Weise muß die gegebene Gesamtlichtweite $\Sigma(L)$ eingeteilt werden, damit die Gesamtkosten des Bauwerkes ein Kleinstwert werden?

Diese Frage kann unter gewissen vereinfachenden Annahmen mathematisch behandelt werden.

1. Pfeiler aus Mauerwerk, eiserner Überbau. Die Kosten des gesamten Bauwerkes setzen sich zusammen aus den Kosten des Unterbaues — also der Mittel- und Endpfeiler (Widerlager) — den Kosten des eisernen Überbaues und denjenigen der Fahrbahn. Die letzteren sind bei den verschiedenen Einzelstützweiten nicht verschieden, können also für den Vergleich außer Acht gelassen werden. Je größer die Zahl der Öffnungen wird, je kleiner sich also die einzelnen Stützweiten ergeben, desto geringer werden die Kosten für den Überbau, desto größer die Kosten für die Pfeiler; dagegen nehmen mit zunehmenden Einzelstützweiten die gesamten Pfeilerkosten ab, die Kosten des Überbaues wesentlich zu. Bei irgend einer Öffnungszahl muß die Kostensumme ein Kleinstwert werden.

Es sei die gegebene Gesamtlichtweite = $\Sigma(L)$, die Anzahl der Öffnungen = n , die für alle Öffnungen gleiche Einzellichtweite = λ , so ist $\lambda = \frac{\Sigma(L)}{n}$.

Das Eigengewicht der Hauptträger des Überbaues für das laufende Meter der Brücke ist nach § 4 (S. 8 u. 9) direkt proportional der Einzelstützweite L , und kann geschrieben werden: $q_h = bL$.

Nach § 4. c) [S. 10] ist auch das Gewicht der Querversteifung und Windverstrebung mit der Weite L veränderlich; man rechnet am einfachsten den dort angegebenen Beiwert von L mit in das vorstehende b ein, sodaß nunmehr als von der Stützweite abhängiges Eigengewicht des Überbaues gesetzt wird: $q = b_1 L$.

Die Kosten des Kilogramm fertig aufgestellten Eisenüberbaues seien = α Mark, so betragen die Kosten des Eisenüberbaues für das laufende Meter Bauwerk (abgesehen von den nicht aufgenommenen Kosten der Fahrbahn):

$$K_1 = \alpha b_1 L.$$

Die Kosten der gemauerten Pfeiler sind von der Stützweite nicht ganz unabhängig; größere Weiten verlangen im allgemeinen stärkere Pfeiler, als kleinere

⁷¹⁾ Die neue Rheinbrücke bei Düsseldorf. Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 557. — Deutsche Banz. 1898, S. 629.

Weiten. Für kleinere und mittlere Stützweiten wird aber die Pfeilerstärke in überwiegender Masse durch die Rücksicht auf die Stromverhältnisse — Eisgang, Gründungstiefe u. s. w. — bedingt, viel weniger durch die Notwendigkeit, einen gewissen Druck ertragen zu müssen; für die stattfindenden Drücke sind die Pfeiler meistens übermächtig stark. Erst bei sehr grossen Öffnungsweiten ist die Grösse der zu tragenden Last auf die Pfeilerstärke von bestimmendem Einflusse.

Für eine Annäherungsrechnung wie die vorliegende kann man demnach die vereinfachende Annahme machen, daß die Pfeilerstärken von den Stützweiten unabhängig seien. Nennt man die Kosten eines Mittelpfeilers P , so ergeben sich die Pfeilerkosten für das Längenmeter des Bauwerkes zu:

$$K_2 = \frac{P}{L}.$$

Die Kosten der Endpfeiler können als für die verschiedenen möglichen Einzelweiten konstant aufser Acht gelassen werden. Die in Betracht kommenden Kosten für das laufende Meter Bauwerk sind demnach: $K = \alpha b_1 L + \frac{P}{L}$. Die Grösse K wird ein Kleinstwert für $\frac{dK}{dL} = 0 = \alpha b_1 - \frac{P}{L^2}$; mithin wird

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{P}{\alpha b_1}} \dots \dots \dots 60.$$

Die Werte von b_1 können für die verschiedenen möglichen Konstruktionsarten aus § 4 und 6 entnommen werden.

Eingleisige Eisenbahnbrücke.

Wählt man, falls die Bettung nicht auf der Brücke durchgeführt ist, im Mittel $b_1 = 31 + 5 = 36$ (die Zahl 5 in vorstehendem Wert entspricht der Windverstrebung und Querversteifung), so wird:

$$L_{\min} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{P}{\alpha}} \dots \dots \dots 61.$$

Sei $P = 30000$ M., $\alpha = 0,4$ M. f. d. kg, so ist $L_{\min} = 45,6$ m,

sei $P = 10000$ M., $\alpha = 0,5$ M. " " " " " $L_{\min} = 23,5$ m.

Zweigleisige Eisenbahnbrücke.

Man kann bei gleicher Anordnung wie vor setzen: $b_1 = 64$, und erhält:

$$L_{\min} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{P}{\alpha}} \dots \dots \dots 62.$$

Sei $P = 30000$ M., $\alpha = 0,4$ M., so wird $L_{\min} = 34$ m,

sei $P = 20000$ M., $\alpha = 0,5$ M., so wird $L_{\min} = 25$ m.

Strafsenbrücke.

b_1 ist unter Berücksichtigung der Breite der Brücke und der Zahlenwerte in § 6., c) [S. 15] zu bestimmen.

Für eine Landstrassenbrücke von 7,0 m Breite und bei Verwendung von Trägern mit einer gekrümmten Gurtung und doppeltem Bohlenbelag kann man setzen:

$$b_1 = 3,12 \cdot 7 + 5 = 26,84$$

(die Zahl 5 in vorstehendem Wert entspricht der Windverstrebung und Querversteifung), dafür $b_1 = 27$ und

$$L_{\min} = \frac{1}{5,2} \sqrt{\frac{P}{\alpha}}.$$

Sei $P = 10000$ M., $\alpha = 0,5$ M., so wird $L_{\min} = 27,2$ m.

Bemerkt wird, daß eigentlich b_1 nicht unabhängig von L ist, demnach ist es nicht ganz richtig, wenn oben b bei der Differentiation als konstant eingeführt ist. Da es sich aber nur um angenäherte Berechnungen handelt, so ist die Ungenauigkeit als zulässig zu erachten.

Es wird empfohlen, eine zweite genauere Untersuchung durch Bearbeitung verschiedener Entwürfe vorzunehmen.

Rücksichtnahme auf die Veränderlichkeit der Pfeilerkosten bei Veränderung der Einzel-Lichtweiten.

In den vorstehenden Entwicklungen waren die Kosten eines Pfeilers als unabhängig von der Stützweite bzw. Einzellichtweite eingeführt; in Wirklichkeit sind die Pfeilerkosten in gewissem Grade von den Stützweiten abhängig. Man kann auch diese veränderlichen Pfeilerkosten in die Rechnung einführen, wie aus der nachfolgenden, von Weifs⁷²⁾ angegebenen Untersuchung erhellt.

An der Hand ausgeführter Beispiele und auf Grund besonderer Untersuchungen kann man den Rauminhalt eines Mittelpfeilers als Funktion der Lichtweite ausdrücken. Bezeichnet F die Grundfläche, A die Länge, S die Breite des Pfeilergrundmauerwerkes, welches ohne Absätze angenommen wird und auf welches sich mit dem nötigen Absatze der mit Vorköpfen und mittlerem Böschungsverhältnisse versehene eigentliche Pfeiler aufsetzt, so ist genügend genau, bezogen auf Quadratmeter und Meter,

für zweigleisige Eisenbahnbrücken:

$$F = 20 + 0,80 \lambda, \quad \frac{A}{S} = 4,0, \quad S = \sqrt{\frac{F}{3,8}},$$

für eingleisige Eisenbahnbrücken:

$$F = 18 + 0,4 \lambda, \quad \frac{A}{S} = 2,6, \quad S = \sqrt{\frac{F}{2,4}}.$$

Die Gesamthöhe von Unterkante Pfeiler bis zur Auflagerplatte sei H , dann kann man den Rauminhalt V des Pfeilers setzen:

$$V = 0,85 \cdot F H.$$

Sollen n Öffnungen angeordnet werden, so ist die Anzahl der Zwischenpfeiler $= (n - 1)$; die Endpfeiler bleiben bei allen Entwürfen gleich, können also für den Vergleich außer Acht gelassen werden.

Der Preis für ein Raummeter Pfeilermauerwerk einschliesslich aller Nebenkosten für Gerüste, Gründung, Wasserhaltung, Anfahren, Schiffahrt u. s. w. sei $= B$, derjenige einer Tonne fertig gestellten eisernen Oberbaues sei $= \alpha$, so sind die Kosten der Pfeiler:

$$K_p = (n - 1) 0,85 \cdot F H B.$$

Bezeichnet man das Eisengewicht des Überbaues für die Längeneinheit, so weit es dem Fahrbahngerippe angehört, mit a_1 , so ist das Eisengewicht für das laufende Meter der Brücke:

$$g_{\text{eisen}} = a_1 + b L,$$

und wenn angenähert die Einzelstützweite L durch die Einzellichtweite λ ersetzt und die Trägerlänge gleichfalls mit λ eingeführt wird,

$$g_{\text{eisen}} = a_1 + b \lambda.$$

⁷²⁾ F. J. Weifs. Dimensionierung und ökonomisch günstigste Anzahl von Zwischenpfeilern u. s. w. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1880, S. 169.

Das Eisengewicht für eine ganze Öffnung ist dann:

$$G_{\text{eisen}} = (a_1 + b \lambda) \lambda.$$

Daraus folgt für die Gesamtkosten (ohne die Endpfeiler):

$$K = (n - 1) 0,85 \cdot F H B + \alpha \cdot (a_1 + b \lambda) \lambda \cdot n,$$

$$K = (n - 1) 0,85 \cdot F H B + \alpha \cdot (a_1 + b \lambda) \Sigma(L).$$

b ist von der Weite λ abhängig; wird diese Abhängigkeit beachtet, so ergibt sich eine sehr umständliche Untersuchung. Da jedoch für n nur die Werte brauchbar sind, welche ganze Zahlen ergeben und statt aller anderen Ergebnisse die nächst liegenden ganzen Zahlen zu wählen sind, da ferner die Annahme eines gleich grossen H für alle Pfeiler gleichfalls nicht genau zutrifft, überhaupt aber H vor Beginn des Baues lediglich angenähert bestimmt werden kann, so ist offenbar nur eine überschlägliche Rechnung möglich, und es deshalb wohl zulässig, für b einen Mittelwert einzusetzen. Für eingleisige Eisenbahnbrücken ohne Bettung kann man setzen (vergl. S. 9, § 4):

$$b = 0,033,$$

bezogen auf Tonnen und Meter. Handelt es sich um zweigleisige Brücken, so soll die Annahme gemacht werden, es seien zwei eingleisige Brücken nebeneinander zu legen. Meistens wird ja zuerst nur eingleisiger Überbau ausgeführt, sodafs diese Annahme fast stets erfüllt ist.

Für eingleisige Eisenbahnbrücken erhält man mit

$$F = 18 + 0,4 \lambda = 18 + 0,4 \frac{\Sigma(L)}{n}:$$

$$K = (n - 1) 0,85 \cdot H B \cdot \left(18 + 0,4 \frac{\Sigma(L)}{n}\right) + \alpha \Sigma(L) \left(a_1 + 0,033 \frac{\Sigma(L)}{n}\right)$$

$$K = (n - 1) H B \cdot \left(15,3 + 0,34 \frac{\Sigma(L)}{n}\right) + \alpha \Sigma(L) \left(a_1 + 0,033 \frac{\Sigma(L)}{n}\right).$$

Diese Kosten werden ein Minimum für denjenigen Wert von n , für welchen $\frac{dK}{dn} = 0$ wird. Man erhält auf diese Weise, wenn noch $\frac{B}{H} = \psi$ gesetzt wird:

$$n_{\min} = 0,046 \Sigma(L) \sqrt{\frac{\Sigma(L) - 10,3 H \psi}{\Sigma(L) \cdot \psi \cdot H}} \dots \dots \dots 63.$$

Der Wert von λ , welcher die Kosten zu einem Kleinstwert machen würde, ist dann

$$\lambda_{\min} = \frac{\Sigma(L)}{n_{\min}} = 21,7 \sqrt{\frac{\psi H \Sigma(L)}{\Sigma(L) - 10,3 \psi H}}$$

$$\lambda_{\min} = 21,7 \sqrt{\frac{\psi H}{1 - 10,3 \frac{\psi H}{\Sigma(L)}}} \dots \dots \dots 63^a.$$

In entsprechender Weise ergibt sich für zweigleisige Eisenbahnbrücken mit $F = 20 + 0,8 \lambda = 20 + 0,8 \frac{\Sigma(L)}{n}$:

$$K = (n - 1) 0,85 \cdot H B \cdot \left(20 + 0,8 \frac{\Sigma(L)}{n}\right) + 2 \alpha \cdot \Sigma(L) \left(a_1 + 0,033 \frac{\Sigma(L)}{n}\right)$$

$$K = (n - 1) H B \left(17 + 0,68 \frac{\Sigma(L)}{n}\right) + 2 \alpha \Sigma(L) \left(a_1 + 0,033 \frac{\Sigma(L)}{n}\right).$$

Man erhält:

$$n_{\min} = 0,064 \Sigma(L) \sqrt{\frac{\Sigma(L) - 10,3 H \psi}{\psi H \Sigma(L)}} \dots \dots \dots 64.$$

$$\lambda_{\min} = 15,6 \sqrt{\frac{\psi H}{1 - 10,3 \frac{\psi H}{\Sigma(L)}}} \dots \dots \dots 64^a.$$

Die in Gleichung 63^a und 64^a gefundenen Ausdrücke für λ_{\min} haben keine hervorragende praktische Bedeutung; denn sie sind von den Ausdrücken für n_{\min} ohne Rücksicht darauf hergeleitet, daß nur die Werte von n_{\min} ohne weiteres gewählt werden können, welche ganze Zahlen sind. Immerhin gestatten sie einige interessante Schlüsse.

Setzt man $\Sigma(L) = \infty$, so ergeben sich aus den genannten beiden Gleichungen die Grenzwerte, denen sich die vorteilhaftesten Lichtweiten bei zunehmender Gesamtlichtweite nähern. Man erhält:

$$\text{Für eingleisige Eisenbahnbrücken: } \lambda'_{\min} = 21,7 \sqrt{\psi H},$$

$$\text{für zweigleisige Eisenbahnbrücken: } \lambda''_{\min} = 15,6 \sqrt{\psi H}.$$

Wenn z. B. $\psi = \frac{1}{4}$, $H = 20$ m ist, so wird $\lambda'_{\min} = 47,8$ m und $\lambda''_{\min} = 34,9$ m.

Je größer $\Sigma(L)$ wird, desto kleiner wird die vorteilhafteste Einzellichtweite.

Aus den Gleichungen für n_{\min} kann man diejenige Gesamtlichtweite ermitteln, unterhalb deren überhaupt Zwischenpfeiler unzuweckmäÙig sind. Wenn $n_{\min} < 1\frac{1}{2}$ ist, so ist offenbar kein Zwischenpfeiler zu empfehlen; demnach lauten die Bedingungsgleichungen für die entsprechenden Grenzwerte von $\Sigma(L)$:

$$1,5 = 0,046 \Sigma(L) \sqrt{\frac{\Sigma(L) - 10,3 H \psi}{H \cdot \psi \Sigma(L)}},$$

$$1,5 = 0,064 \Sigma(L) \sqrt{\frac{\Sigma(L) - 10,3 H \psi}{H \cdot \psi \Sigma(L)}},$$

woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \text{Für eingleisige Eisenbahnbrücken: } L' &= 5,15 \psi H \left[1 + \sqrt{1 + \frac{40}{\psi H}} \right] \\ \text{für zweigleisige Eisenbahnbrücken: } L'' &= 5,15 \psi H \left[1 + \sqrt{1 + \frac{20,7}{\psi H}} \right] \end{aligned} \right\} \dots 65.$$

Man erhält z. B. für eingleisige Eisenbahnbrücken folgende Werte von L' :

$\psi =$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
und $H = \begin{cases} 10 \text{ m} \\ 20 \text{ m} \\ 30 \text{ m} \end{cases}$	$L' =$	51,5	43,3	38	34
		79	79	57,5	51,5
		103	85	74	66

und für zweigleisige Eisenbahnbrücken folgende Werte von L'' :

$\psi =$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
und $H = \begin{cases} 10 \text{ m} \\ 20 \text{ m} \\ 30 \text{ m} \end{cases}$	$L'' =$	40	34	29	26
		64	52	45	40
		84,5	69	59	52

Falls die Gesamtlichtweite kleiner ist, als die vorstehend entwickelten Werte von L' bzw. L'' , so ist groÙe Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß eine einzige Öffnung am zweckmäÙigsten ist. Vollständige Sicherheit darüber ist aus der Rechnung allein wegen der überaus schwierigen Bestimmung von B und damit von $\psi = \frac{B}{x}$ nicht zu erlangen; es wird empfohlen, in solchem Falle vergleichende Entwürfe aufzustellen und zu veranschlagen.

2. Eiserne Pfeiler und eiserner Überbau. Es sind drei Arten eiserner Pfeiler zu unterscheiden:

Wand- oder Pendelpfeiler,
Turmpfeiler,
Gerüstpfeiler.

Der Gang nachstehender Untersuchung, bei welcher die Arbeit von Engesser: „Über das Eigengewicht schmiedeiserner Brückenpfeiler⁷³⁾“ zu Grunde gelegt wurde, ist folgender: Es wird das Eisengewicht der Eisenkonstruktion (der Überbau ohne Schienen, Schwellen, Bettung und das Pfeilergewicht) für das laufende Meter Bauwerkslänge als Funktion der Weite L der Einzelöffnung dargestellt. Die Kosten des Grundmauerwerks der Pfeiler werden dadurch berücksichtigt, daß man dasjenige Eisengewicht ansetzt, welches gleiche Kosten verursacht, wie das Pfeilergrundmauerwerk auf die Einheitslänge des Bauwerkes. Nunmehr wird untersucht, für welche Weite L der Einzelöffnung das Eisengewicht zu einem Kleinstwert wird.

a) Pendelpfeiler und eiserner Überbau.

Es bedeutet:

L die Einzelstützweite in Metern;

q das Eigengewicht
 p die Verkehrslast } für das laufende Meter Überbau in Kilogramm;

h die Pfeilerhöhe in Metern;

w den Winddruck auf den Brückenträger und die Verkehrsbelastung für das laufende Meter Überbau;

w_1 den Winddruck auf das steigende Meter des Pfeilers.

Das Gewicht G eines Pendelpfeilers kann man dann nach Engesser setzen:

$$G = \frac{1,1 \cdot (q + 1,5 p) L h}{1000} + \frac{w L h + 0,5 w_1 h^2}{1000} 12 + 200 h + 6,2 h^2 + 1000 + 0,003 (q + 1,5 p) L.$$

Die Formel ist für Schweifseisen entwickelt; für den vorliegenden Zweck kann man dieselbe aber ohne bedeutenden Fehler auch für Flusseisen verwenden.

Eingleisige Eisenbahnbrücke. Das Pfeilergewicht für die Längeneinheit des Bauwerkes kann gesetzt werden:

$$q_1 = 17,8 h + 0,084 L h + \frac{200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3 + 1000}{L} + 28,8.$$

Das Eisengewicht des Überbaues beträgt nach § 4 (S. 8 u. 9) ohne das Gewicht des eigentlichen Oberbaues (Schienen, Schwellen, Bettung):

$$q_2 = a_2 + b L.$$

Die Werte für b sind in § 4 angegeben; es ist zu beachten, daß in dem hier einzuführenden Zahlenwert für b auch der auf S. 10 ermittelte Beiwert von L enthalten sein muß, der durch das Gewicht der Windverstrebung und Querversteifung bedingt ist.

Das Eigengewicht, welches gleiche Kosten verursacht, wie das Pfeilermauerwerk für die Längeneinheit des Bauwerkes, kann nach Engesser gesetzt werden:

$$q_3 = \frac{P}{L} + Q + R h.$$

⁷³⁾ Engesser, Fr. Über das Eigengewicht schmiedeiserner Brückenpfeiler. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1894, Heft 5.

Es ist demnach das in Betracht zu ziehende Eisengewicht für das laufende Meter Bauwerk:

$$q_4 = 17,8 h + 28,8 + a_2 + Q + R h + 0,08 h L + b L + \frac{200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3 + 1000 + P}{L}.$$

Die günstigste Einzelweite folgt aus der Gleichung:

$$\frac{d q_4}{d L} = 0 = 0,08 h + b - \frac{200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3 + 1000 + P}{L^2}$$

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3 + 1000 + P}{0,08 h + b}} \dots \dots \dots 66.$$

Nach Engesser kann man bei günstigen Verhältnissen $P = 1000 \text{ kg}$ setzen; führt man ferner, falls die Bettung nicht auf der Brücke durchgeführt ist, als Mittelwert $b = 36$ ein, so wird:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{2000 + 200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3}{0,08 h + 36}} \dots \dots \dots 66^*.$$

Man erhält für:

h	= 10	20	30	40	50 m
L_{\min}	= 11,31	15,4	19,6	23,9	28,2 m

Zweigleisige Eisenbahnbrücke. Das Pfeilergewicht für die Längeneinheit des Bauwerkes kann gesetzt werden:

$$q_1 = 32 h + 0,084 h L + 192 + \frac{200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3 + 1000}{L};$$

das Eisengewicht des Überbaues für die Längeneinheit des Bauwerkes:

$$q_2 = 2 a_2 + b L;$$

das dem Mauerwerk des Pfeilers gleichwertige Eisengewicht für die Längeneinheit des Bauwerkes:

$$q_3 = \frac{P}{L} + Q + R h.$$

Wenn man untersucht, für welches L die Summe $q_1 + q_2 + q_3$ ein Kleinstwert wird, erhält man:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3 + 1000 + P}{b + 0,084 h}} \dots \dots \dots 67.$$

und mit $P = 2000 \text{ kg}$ und $b = 64$:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{3000 + 200 h + 7 h^2 + 0,018 h^3}{b + 0,084 h}} \dots \dots \dots 67^*.$$

Die Formel giebt für:

h	= 10	20	30	40	50 m
L_{\min}	= 9,4	12,3	15,4	18,6	21,9 m.

b) Turmpfeiler und eiserner Überbau.

Eingleisige Eisenbahnbrücke. Das Gewicht des Turmpfeilers einer eingleisigen Eisenbahnbrücke ist nach Engesser (a. a. O.) mit den obigen Bezeichnungen:

$$G = \frac{(1,1 q + 4,2 p) L h}{1000} + 7,2 L h + 0,084 L^3 h + 300 h + 11 h^3 + 0,07 h^3 + 1500 + 0,012 (q + 1,5 p) L,$$

mithin das Eisengewicht für das laufende Meter des Bauwerkes:

$$q_1 = \frac{G}{L} = \frac{(1,1 q + 4,2 p)}{1000} h + 7,2 h + 0,012 (q + 1,5 p) + 0,084 L h + \frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500}{L}.$$

Das Eisengewicht des Überbaues für das laufende Meter ist (s. o. § 4, S. 8 u. 9)

$$q_2 = a_2 + b L,$$

in welchem Ausdruck a_2 das Eisengewicht des Fahrbahngerippes (ohne das Gewicht des Oberbaues) bedeutet.

Das Eisengewicht, welches gleiche Kosten bedingt, wie das auf das Meter der Bauwerkslänge entfallende Pfeilermauerwerk, ist:

$$q_3 = \frac{P}{L} + Q + R h.$$

Das für eingleisige Brücke in Betracht zu ziehende Eisengewicht für das laufende Meter Bauwerk ist demnach insgesamt:

$$q_4 = \frac{(1,1 q + 4,2 p) h}{1000} + 7,2 h + 0,012 (q + 1,5 p) + a_2 + Q + R h + \\ + (0,084 h + b) L + \frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500 + P}{L}.$$

Die Einzelweite, für welche das Eisengewicht ein Kleinstwert wird, folgt aus der Gleichung:

$$\frac{d q_4}{d L} = 0 = 0,084 h + b - \frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500 + P}{L^2} = 0,$$

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500 + P}{0,084 h + b}} \dots \dots \dots 68.$$

Setzt man $P = 2000 \text{ kg}$, $b = 36$ (Bettung nicht auf der Brücke), so wird für eingleisige Brücke:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{3500 + 300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3}{0,084 h + 36}} \dots \dots \dots 68^a.$$

Man erhält für eingleisige Brücke und:

h	= 10	20	30	40	50	60 m
L_{\min}	= 14,4	19,5	25,1	30,9	36,9	43,2 m

als diejenigen Werte der Einzelweiten, bei denen der Baustoffaufwand ein Kleinstwert wird.

Zweigleisige Eisenbahnbrücke. Es ist das Pfeilergewicht:

$$G = \frac{(1,1 q + 3,5 p) L h}{1000} + 7,2 L h + 0,084 L^2 h + 300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + \\ + 1500 + 0,02 (q + 1,5 p) L,$$

also:

$$q_1 = \frac{(1,1 q + 3,5 p) h}{1000} + 7,2 h + 0,02 (q + 1,5 p) + 0,084 L h + \\ + \frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500}{L};$$

ferner ist:

$$q_2 = a_2 + b L, \\ q_3 = \frac{P}{L} + Q + R h.$$

Mithin ist das Gesamtgewicht auf das laufende Meter Bauwerk:

$$q_4 = \frac{(1,1 q + 3,5 p) h}{1000} + 7,2 h + 0,02 (q + 1,5 p) + a_2 + Q + R h + \\ + (0,084 h + b) L + \frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500 + P}{L}$$

und

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3 + 1500 + P}{0,084 h + b}} \dots \dots \dots 69.$$

und mit $P = 3000 \text{ kg}$ und $b = 64$ für zweigleisige Brücke:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{4500 + 300 h + 11 h^2 + 0,07 h^3}{0,084 h + 64}} \dots \dots \dots 69^a.$$

Man erhält für zweigleisige Brücke und:

h	$= 10$	20	30	40	50	60 m
L_{\min}	$= 11,6$	$15,3$	$19,5$	$23,9$	$28,6$	$39,4$ m.

c) Gerüstpfeiler und eiserner Überbau.

Bei den Gerüstpfeilerbrücken werden abwechselnd je zwei Pfeilerjoche miteinander zu einem standfähigen Pfeiler verbunden; die Zwischenweiten der Joche und diejenigen der Pfeiler werden durch eiserne Überbauten überbrückt. Es sei die Ansichtsbreite eines Gerüstpfeilers = e , der Abstand zweier zu benachbarten Gerüstpfeilern gehörigen Joche = r , und es werde $L = r + e$ gesetzt. Dann ist nach Engesser (a. a. O.) das Pfeilergewicht:

Für eingleisige Bahn.

$$G = 24,5 h L + 0,048 h L^2 + 1500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3 + 55 L, \text{ und}$$

$$q_1 = 24,5 h + 55 + 0,048 h L + \frac{1500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3}{L}.$$

Das Gewicht für das laufende Meter Überbau ist:

$$q_2 = \frac{(a_2 + b e) e + (a_2 + b r) r}{L} = a_2 + \frac{b(e^2 + r^2)}{L}.$$

Das Eisengewicht, welches den Kosten des auf das Längenmeter Bauwerk entfallenden Pfeilermauerwerkes entspricht, ist wie oben:

$$q_3 = \frac{P}{L} + Q + R,$$

mithin:

$$q_4 = 24,5 h + 55 + a_2 + Q + R + 0,048 h L + \frac{1500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3 + P + b(e^2 + r^2)}{L}.$$

Führt man ein $e = r = \frac{L}{2}$, d. h. wählt man den Abstand aller Joche gleich groß = $\frac{L}{2}$, so wird $e^2 + r^2 = \frac{L^2}{2}$ und

$$q_4 = 24,5 h + 55 + a_2 + Q + R + 0,048 h L + b \cdot \frac{L}{2} + \frac{1500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3 + P}{L}.$$

Bedingungsleichung für L_{\min} ist dann:

$$0 = 0,048 h + \frac{b}{2} - \frac{1500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3 + P}{L},$$

woraus folgt:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{1500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3 + P}{0,048 h + \frac{b}{2}}} \dots \dots \dots 70.$$

Mit den Werten $P = 1000$ kg und $b = 36$ wird:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{2500 + 361 h + 13 h^2 + 0,07 h^3}{18 + 0,048 h}} \dots \dots \dots 70^a.$$

Man erhält für:

h	$= 10$	20	30	40	50 m,
L_{\min}	$= 20$	$28,5$	$38,2$	46	55 m,
$e = r = \frac{L}{2}$	$= 10$	$14,25$	$19,1$	23	$27,5$ m.

Für zweigleisige Bahn.

Man kann das Gewicht des Gerüstpfeilers für zweigleisige Eisenbahnbrücke setzen:

$$G = 24 Lh + 0,047 h L^2 + 13 h^2 + 0,07 h^3 + 358 h + 61 L + 1500$$

also: $q_1 = 24 h + 0,047 h L + 61 + \frac{1500 + 358 h + 13 h^2 + 0,07 h^3}{L}$,

ferner wie oben:

$$q_2 = a_2 + \frac{bL}{2}, \quad q_3 = \frac{P}{L} + Q + R.$$

Indem man, wie oben, verfährt, erhält man:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{1500 + 358 h + 13 h^2 + 0,07 h^3 + P}{\frac{b}{2} + 0,047 h}} \quad 71.$$

Mit $P = 2000 \text{ kg}$ und $b = 64$ wird:

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{3500 + 358 h + 13 h^2 + 0,07 h^3}{32 + 0,047 h}} \quad 71^a.$$

Man erhält für:

$h =$	10	20	30	40	50 m,
$L_{\min} =$	16	22,3	28,9	35,6	42,6 m,
$e = r = \frac{L}{2} =$	8	11,15	14,45	17,8	21,3 m.

d) Vergleich der verschiedenen Pfeileranordnungen.⁷⁴⁾

Unter Zugrundelegung der jeweils günstigsten Einzelweiten ergibt sich:

Die Turmpfeilerbrücken verlangen am meisten Material, weniger Gewicht bedingen die Gerüstpfeilerbrücken, am leichtesten sind die Pendelpfeilerbrücken. In annähernd gleichem Verhältnis stehen die Kosten. Die größere Billigkeit der Pendelpfeilerbrücken gegenüber den Gerüstpfeilerbrücken trifft jedoch nur zu, wenn das Bauwerk keine große Gesamtlänge hat. Bei großer Gesamtlänge können die Hauptträger wegen der Temperaturänderungen nicht auf die ganze Bauwerkslänge zusammenhängend ausgeführt werden. Es wird immer eine Anzahl von Öffnungen zu einer Abteilung vereinigt, zwischen den einzelnen Abteilungen werden Turmpfeiler angeordnet. Durch die höheren Kosten dieser Turmpfeiler ergeben sich dann die Kosten für das gesamte Bauwerk mit Pendel- und einzelnen Turmpfeilern etwa ebenso hoch, wie diejenigen einer Gerüstbrücke.

Die Turmpfeilerbrücken fallen bei mittleren Höhen (bis zu etwa 30 m) erheblich schwerer aus, als die Gerüstbrücken: sowohl die Überbauten wie auch die Pfeiler selbst erfordern bei ersteren mehr Material, als bei letzteren. Die Überbauten sind schwerer, weil die Öffnungsweiten bei den Turmpfeilerbrücken größere sind und nach § 3 u. 5 das Einheitsgewicht des Überbaues mit der Brückenweite wächst. Die Gewichte der Turmpfeiler sind größer als diejenigen der Gerüstpfeiler, weil sie von den Überbauten aus größere Kräfte aufzunehmen haben und weil die durch Bremskräfte erzeugten Spannungen in den einzelnen Säulen größer sind als bei den Gerüstpfeilern: denn die Ansichtsbreite der Turmpfeiler ist kleiner, als der Jocharstand der Gerüstpfeiler. Auch zu dem Grundmauerwerk der Turmpfeiler wird mehr Material gebraucht, als zu demjenigen der Gerüstpfeiler: einmal sind bei den Turmpfeilern die

⁷⁴⁾ Biedermann. Ein Beitrag zur Frage der Verwendung von Thalbrücken nach dem Gerüstbrückensystem. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1895, S. 376. — Biedermann. Die eiserne Thalbrücke über das Otterthal im Zuge der Eisenbahnlinie Ziegenrück-Hof. Zeitschr. f. Bauw. 1896, S. 531. — Meltzer, Die eisernen Gerüstbrücken der Lokalbahn Waldhofen-Gaming. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1899, S. 113.

auf die Sockel ausgeübten Zugkräfte größer als bei den Gerüstpfeilern, sodann kann man sich mit den vier vereinzelt stehenden Sockeln eines Gerüstpfeilers ganz dem Gelände anpassen und mit wenig Mauerwerk auskommen. Aus diesen Gründen sind bei mittleren Höhen die Gerüstpfeilerbrücken wesentlich billiger, als die Turmpfeilerbrücken. Bei großen Höhen nimmt die für die Gerüstpfeilerbrücken günstige Ersparnis ab. Besonders tritt sie in Erscheinung bei langen Bauwerken mit nicht zu großer Höhe (etwa 20 m), also bei langen Thal- und Vorflutbrücken.

Als weitere Vorzüge der Gerüstbrücken mögen angeführt werden die Möglichkeit leichter Aufstellung und ihre Anpassung an selbst scharfe Krümmungen. Durch ihre kleinen Einzelstützweiten sind diese Brücken ganz besonders für Bauwerke in scharfen Kurven geeignet; die Excentricität zwischen Brückenachse und Kurvenachse fällt wegen der kleinen Weite gering aus.

Eine Weite von etwa 10 m zwischen den Einzeljochen scheint bei mittleren Höhen besonders zweckmäßig zu sein: man wird diese meistens durch Blechträger überbrücken. Bei dem in der Fußnote 74 angegebenen Beispiel ist diese Weite als der Minimalweite naheliegend ermittelt; auch in Amerika hat man für ähnliche Höhen vielfach Weiten gewählt, welche nahe an 10 m liegen.

e) Einige Formeln für Pfeilergewichte und Kosten.

Nachstehend sind einige Formeln zusammengestellt, welche Engesser⁷⁵⁾ aufgestellt hat (h = Pfeilerhöhe in Metern, L = Einzelstützweite in Metern).

I. Wandpfeiler, Pendelpfeiler.

1. Pfeilergewicht für das steigende Meter in Kilogramm:

$$\alpha. \text{Eingleisige Eisenbahn: } g = 140 + 27 L + 6 h,$$

$$\beta. \text{Zweigleisige Eisenbahn: } g = 220 + 41 L + 6 h,$$

$\gamma.$ Strafenbrücke von 7 m Breite mit Schotterbahn für Landstraßen:

$$g = 140 + 27 L + 6 h.$$

Die Formeln können angewendet werden innerhalb der Grenzen:

$$L = 25 \text{ m bis } L = 80 \text{ m und}$$

$$h = 10 \text{ m bis } h = 50 \text{ m.}$$

2. Günstigste Stützweite für eingleisige Eisenbahn:

$$L_0 = 7,5 + 0,42 h_0,$$

h_0 und L_0 in Metern, h_0 ist die mittlere Bauwerkshöhe.

3. Kosten für das Längenmeter des Bauwerkes bei eingleisiger Eisenbahn:

$$K = (280 + 26,5 h_0) \text{ Mark.}$$

Giltig innerhalb der Grenzen: $h_0 = 10 \text{ m bis } h_0 = 70 \text{ m.}$

Die Kosten für das Kilogramm Eisen sind dabei gerechnet: $\pi = (30 + 0,2 h_0) \text{ Pf.}$

Kosten für das Quadratmeter der Sichtfläche bei eingleisiger Eisenbahn:

$$\frac{K}{h_0} = \left(\frac{280}{h_0} + 26,5 \right) \text{ Mark.}$$

Gesamtkosten des Bauwerkes:

$$K = \left(\frac{280}{h_0} + 26,5 \right) F + W.$$

⁷⁵⁾ Engesser, Fr. Über das Eigengewicht schmiedeeiserner Brückenpfeiler. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1894, Heft 5.

In dieser Formel bedeutet: F die Sichtfläche des Bauwerkes zwischen den Endpfeilern, W die Kosten der Endpfeiler.

Vorstehende Formeln gelten unter der Annahme, dafs die günstigsten Einzelweiten gewählt sind.

II. Turmpfeiler.

Pfeilergewicht für das steigende Meter in Kilogramm:

α. Einleisige Eisenbahn: $g = 40L + 18h$ (innerhalb der Grenzen $L = 40$ m bis $L = 120$ m und $h = 30$ m bis $h = 70$ m).

β. Zweigleisige Eisenbahn: $g = 55L + 19h$ (innerhalb der Grenzen $L = 50$ m bis $L = 100$ m und $h = 40$ m bis $h = 70$ m).

III. Gerüstpfeiler.

Weiten: $e =$ Abstand zweier zu einem Gerüstpfeiler verbundenen Joche,

$\lambda =$ Abstand zweier nicht miteinander verbundenen Joche,

$$L = \lambda + e.$$

Die Angaben gelten für einleisige Eisenbahn.

1. Günstigste Weite: $L_0 = 7,5 + 0,8 h_0$,

$$\text{mit } e = \frac{h_0}{3}, \lambda = 7,5 + 0,47 h_0.$$

2. Eisengewicht für Pfeiler und Überbau auf das Längensmeter des Bauwerkes: $e = (800 + 63,5 h_0)$ kg.

3. Gesamtkosten der Längeneinheit des Bauwerkes, ausgedrückt in Kilogramm Eisen: $k = (1190 + 63,5 h_0)$ kg.

4. Kosten in Mark für das Längensmeter des Bauwerkes: $K = 280 + 30 h_0$.
(Die Kosten für das Kilogramm Eisen sind, wie oben, mit $\pi = (30 + 0,2 h_0)$ Pfennige gerechnet.)

5. Kosten für das Flächenmeter Sichtfläche: $\frac{K}{h_0} = \left(\frac{280}{h_0} + 30\right)$ Mark.

Gesamtkosten des Bauwerkes: $K = \left(\frac{280}{h_0} + 30\right) F + W$.

In dieser Formel bedeutet: F die Sichtfläche des Bauwerkes zwischen den Endpfeilern, W die Kosten der Endpfeiler.

Litteratur.

- Böhm. Zur Bestimmung der Öffnungszahl eiserner Brücken. Civ.-Ing. 1868, S. 299 bis 316.
 Meyer. Ökonomisch vorteilhafteste Öffnungsweite bei Brückenbauten. Deutsche Bauz. 1874, S. 374 bis 375.
 Böhm. Bestimmung der Öffnungszahl eiserner Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1875, S. 248 u. 249.
 Winkler. Zweckmässigste Anzahl der Öffnungen oder Felder einer Brücke. Mitteilungen d. Arch.- u. Ing.-Ver. für Böhmen 1868, S. 41 u. 42.
 Weifs. Dimensionierung und ökonomisch günstigste Zahl von Zwischenpfeilern mit eisernen Balkenträgern und mit gemauerten Pfeilern. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1880, Heft 4 bis 7.
 Engesser, Fr. Über das Eigengewicht schmiedeiserner Brückenpfeiler. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1894, Heft 5.
 Biedermann, E. Ein Beitrag zur Verwendung von Thalbrücken nach dem Gerüstbrückensystem. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1895, S. 376.
 Biedermann, E. Die eiserne Thalbrücke über das Otterthal im Zuge der Eisenbahnlinie Ziegenrück-Hof. Zeitschr. f. Bauw. 1896, S. 531.
 Meltzer. Die eisernen Gerüstbrücken der Lokalbahn Waldhofen-Ganing. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1899, S. 113.

§ 26. Ermittlung der Gröfse und Zahl der Öffnungen mit Hilfe graphischer Darstellungen. Die im vorstehenden Paragraphen besprochene Aufgabe läfst sich auch mit Hilfe graphischer Darstellungen nach Art der auf T. I vorgeführten mit Erfolg behandeln. Der Inhalt dieser Tafel ist den Vorlagen der K. K. Direktion der Staatseisenbahnen in Österreich durch gefällige Vermittelung des Professors Fr. Steiner in Prag entnommen, welcher auch die nachstehenden Erläuterungen geliefert hat. Es ist darauf aufmerksam zu machen, das Ausarbeitungen der in Rede stehenden Art nicht allein für den oben erwähnten Zweck, sondern überhaupt für Vorentwürfe, für Schätzungen bei näherungsweise Kostenvoranschlägen, für Ermittlung des zu wählenden Konstruktionssystems u. s. w. dienlich sind; solche Ausarbeitungen ermöglichen eine rasche Lösung der einschlägigen Aufgaben und auferdem die Berücksichtigung mancher Umstände, z. B. einer schiefen Lage der Brücken oder Lage derselben in einer Krümmung, welche in § 25 unerwähnt geblieben sind. Allerdings erfordert die Herstellung von Darstellungen der fraglichen Art ausgedehnte Arbeiten; dieselbe wird somit hauptsächlich bei den Vorarbeiten einer großen Eisenbahnverwaltung für den Bau längerer Bahnlilien am Platze sein, während man bei Untersuchungen über einzelne Bauwerke auf den in § 25 besprochenen Weg angewiesen ist.

Zur Erläuterung des auf T. I Gegebenen diene folgendes:

Die F. 1 bis 5 bringen Blechträgerformen für Lichtweiten von 2 bis 12 m, ferner findet man in F. 6 bis 12 Fachwerksbalkenträger, während F. 13 Bogenträger vorführt.

F. 18 giebt das Gewicht eiserner Brücken der Hauptbahnen für die in F. 1 bis 17 gezeichneten Konstruktionen. Als Abscissen sind die Stützweiten, als Ordinaten die Gewichte aufgetragen. Die Bestimmung der Stützweite aus der meist gegebenen Lichtweite erfolgt nach F. 14, die maßgebenden Höhen sind nach F. 15 ermittelt, F. 17 giebt die Vermehrung der Konstruktionsgewichte infolge schräger Stellung der Brückenachse und durch Lage der Brücken im Bogen.

Das Gewicht der Lager ist in F. 18 unten ersichtlich. Zur Auflagerung dienen bis 20 m Stützweite Platten, von 20 bis 90 m Stelzenlager, von 90 bis 100 m Kipp- und Stelzenlager, in den Auflagergewichten sind Stahl und Blei mit einbegriffen.

Bei Bauten von mehr als 30 m Stützweite erhält das Gleis Auszugsvorrichtungen.

Hiernach ergibt sich z. B. für eine Brücke von 36 m Lichtweite, Bahn „versenkt“, Parallelträger, 45° schief, 300 m Radius, Hauptbahn, allgemeine Anordnung nach F. 6:

Stützweite (F. 14) $36 + 2 \cdot 0,65 = l \dots\dots\dots 37,3 \text{ m}$

Trägerhöhe $h_1 = \frac{37,5}{9}$ angenähert $\dots\dots\dots 4,0 \text{ „}$

Breite (F. 16) $2,75 + \frac{l^2}{8R} \dots\dots\dots 3,3 \text{ „}$

Gewicht:

Schmiedeeisen (Fig. 18) $1675 \times 37,3 \text{ m} \dots\dots\dots 62\,480 \text{ kg}$

Zuschlag nach A (F. 17) 2% $\dots\dots\dots 1\,250 \text{ „}$

Zuschlag nach B (F. 17) 8% $\dots\dots\dots 5\,000 \text{ „}$

68\,730 kg

Auflager (Fig 18, Striche unten) $\dots\dots\dots 4\,400 \text{ kg}$

Holz (Bemerkung bei F. 15) $37,3 \cdot 0,5 \dots\dots\dots 19 \text{ cbm.}$

In F. 19 u. 20 sind Formen eiserner Gerüstbrücken dargestellt, während F. 21 eiserne Turmpfeiler bringt. F. 28 giebt die zugehörigen Gewichte.

Beispiel. Gerüstbrücke mit Öffnungen von 20 m Stützweite, zwei Gerüstpfeiler von 50 m Höhe; über den Gerüstpfeilern Blechträger, Bahn oben, zwischen den Pfeilern drei Halbparabelträger, Bahn oben.

Gesamtlänge	$3.20 + 2.10$	80 m
Verbaute Fläche	$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20.50 + 40.50$	3 000 qm

Gewicht:

Brückenüberbau (F. 18)	$2.570.10 + 3.800.20$	59 400 kg
Pfeiler (F. 28)	$2.62 000$	124 000 „
		<u>183 400 kg</u>

also für das Quadratmeter erbaute Fläche 61 kg.

F. 22 giebt Formen und Abmessungen von Steinpfeilern für Thalbrücken, bei deren Entwurf Folgendes angenommen ist: Die mittlere Pressung in den Mauerwerksfugen soll ohne Winddruck bei Vollbelastung der Brücken und bis 40 m Pfeilerhöhe nicht mehr als 7 kg f. d. qcm, bei höheren Pfeilern bis 40 m unter der Brückenbahn ebenfalls 7 kg f. d. qcm, in den unteren Partien aber 9 kg f. d. qcm betragen. Durch sämtliche Beanspruchungen einschliesslich des Winddruckes dürfen die äussersten Fugen höchstens 1 kg Zug bzw. 14 kg Druck f. d. qcm erleiden. Das Pfeilermauerwerk muss aus vorzüglichen lagerhaften Bruchsteinen in hydraulischem Mörtel bestehen.

Die unvermeidlichen elastischen Schwankungen beim Befahren während heftigen Windes betragen bei den Pfeilern wie F. 22 etwa $\delta \text{ mm} = 0,0015 l \text{ m} \times h \text{ m}$, bei Pfeilern wie F. 19 u. 20 $\delta \text{ mm} = 0,025 l \text{ m} \times h \text{ m}$, wobei l die halbe Summe der anschliessenden Stützweiten und h die Pfeilerhöhe in Metern bedeuten. Pfeiler wie F. 19 u. 20 sind der Schwankungen wegen bei Höhen über 50 m ausgeschlossen.

F. 23 zeigt ein Baugerüst für Weiten bis 40 m. Die Anschaffungskosten werden mit etwa 300 M. f. d. m Stützweite angegeben. Die Umstellungskosten betragen etwa 1000 M. für eine Öffnung.

F. 24 enthält Gerüstanordnungen für Weiten über 40 m.

F. 27 bringt eine graphische Darstellung des Bedarfs an Holz und Schmiedeeisen für diese Gerüste.

Beispiele. Die Konstruktionen F. 25 u. 26 sind hinsichtlich der Kosten zu vergleichen.

F. 25.

Erdaushub	$90.6.2 = 1080 \text{ cbm}$	zu 4 M. = 4 320 M.
Pfeilergrundmauerwerk	$66.6.2 = 792$	„ „ 20 „ = 15 840 „
Steinpfeiler	$2540 + 2730 = 5270$	„ „ 26 „ = 137 020 „
Mauerschleifsen	$60.100.2 = 12 \text{ t}$	„ 400 „ = 4 800 „
Widerlager	$2.400 = 800 \text{ cbm}$	„ 22 „ = 17 600 „
Gerüstholz	$750 + 2.120 = 990$	„ 50 „ = 49 500 „
Gerüsteisen	$24 + 2.4,8 = 33,6 \text{ t}$	„ 400 „ = 13 440 „
Auflager	$13,3 + 2.5,9 = 25,1 \text{ t}$	„ 480 „ = 12 048 „
Brückenüberbau	$3.100 + 2.0,85.45 = 466,5 \text{ t}$	„ 480 „ = 223 920 „
Brückenbelag	$190.0,5 = 95,0 \text{ cbm}$	„ 70 „ = 6 650 „
		<u>485 138 M.</u>

F. 26.

Erdaushub	2680 cbm	zu 4 M. = 10 720 M.
Pfeilergrundmauerwerk	2324	„ „ 20 „ = 46 480 „
Steinpfeiler	$2.1300 + 2.3100 = 8800$	„ „ 26 „ = 228 800 „
Mauerschleifsen	$38. [52 + 76 + 78 + 53] = 9,8 \text{ t}$	„ 400 „ = 3 920 „
Widerlager	$2.400 = 800 \text{ cbm}$	„ 22 „ = 17 600 „
Aufstellungsgerüste	$38.150 =$	„ 1000 „ = 15 400 „
Auflager	$5.4,4 = 22 \text{ t}$	„ 480 „ = 10 560 „
Brückenüberbau	$5.1,5.38 = 285 \text{ t}$	„ 480 „ = 136 800 „
Brückenbelag	$190.0,45 = 85 \text{ cbm}$	„ 70 „ = 5 986 „
		<u>476 266 M.</u>

Es käme mithin die Konstruktionsweise F. 26 um etwa 9000 M. billiger; auch die Möglichkeit der Anordnung im Bogen und gröfsere Standsicherheit gegen Winddruck würden Vorteile der zweiten Anordnung sein, während Schönheitsrücksichten mehr für F. 25 sprechen würden.

Die mitgeteilten Eisengewichte sind seit Einführung der neuen Brückenverordnung in Österreich als etwas zu klein anzusehen. In der ganzen Darlegung der besprochenen Tafel wolle der Leser nur die Möglichkeit rascher oberflächlicher Orientierung, aber keineswegs unumstößlich feststehende Zahlen sehen.

§ 27. Allgemeine Grundlagen für die Anordnung des eisernen Überbaues. Hauptbestandteile desselben. Für die Anordnung des eisernen Überbaues sind hauptsächlich maßgebend:

- Die Lage der Brücke im Grundrifs;
- die gegenseitige Höhenlage der beiden Verkehrswege, welche sich an der Brückenstelle kreuzen;
- die vorgeschriebenen Hauptmaße der Brücke, nämlich die Lichtweite und die Breite.

Bei Besprechung der einzelnen Punkte ist die Bekanntschaft mit den Benennungen der einzelnen Brückenteile notwendig, weshalb die Hauptbestandteile der eisernen Brückenüberbauten zunächst vorgeführt werden sollen; dabei möge sogleich hier darauf hingewiesen werden, dafs ein eiserner Brückenüberbau durchaus nicht alle nachstehend vorzuführenden Teile zu enthalten braucht, vielmehr meistens nur einige derselben aufweist.

1. Hauptteile der eisernen Überbauten.

a) Die Hauptträger. Dieselben übertragen die sämtlichen auf die Brücke wirkenden Lasten nach den Pfeilern, seien es gemauerte oder eiserne, End- oder Mittelpfeiler. Jeder eiserne Überbau hat wenigstens zwei Hauptträger.

b) Die Querträger. Die Aufgabe der Querträger ist, sowohl das Gewicht der Fahrbahn, als auch das der Verkehrslast an einzelnen Punkten auf die Hauptträger zu übertragen. Sie stehen im Grundrifs in den weitaus meisten Fällen senkrecht zu den Hauptträgern; es kommen aber auch Querträger vor, welche mit den Hauptträgern spitze bzw. stumpfe Winkel bilden und deshalb schiefe Querträger genannt werden. Dieselben werden möglichst vermieden, da sie eine schwierige und damit teure Arbeit verlangen.

Querträger sind nicht immer erforderlich, so beispielsweise dann nicht, wenn bei Eisenbahnbrücken die Schienen oder die Querschwellen unmittelbar auf den Hauptträgern angeordnet werden bzw. bei Strafsenbrücken, wenn die Fahrbahn direkt von den Hauptträgern getragen wird. Das ist nur möglich, wenn die Hauptträger einander sehr nahe liegen, also die Brücke kleine Spannweite hat. Querträger werden meistens angeordnet, bei gröfseren Brücken stets.

c) Die Längsträger zweiter Ordnung. Dieselben übertragen die Lasten auf die Querträger. Bei den Eisenbahnbrücken werden sie auch wohl Bahnträger, oder falls sie Querschwellen tragen, Schwellenträger genannt. Sie sind fast stets im Grundrifs den Hauptträgern parallel.

Wenn keine Querträger angeordnet sind, fehlen die Längsträger zweiter Ordnung ebenfalls; auch sonst werden sie fortgelassen, wenn die Querträger einander so nahe liegen, dafs die Schienen bzw. die für die Fahrbahntafel verwendeten Formeisen sich von einem Querträger zum anderen frei tragen können. Bei grofsen Brücken werden

sie wohl niemals fehlen, weil sonst die Querträger und damit auch die Knotenpunkte der Hauptträger einander zu nahe kommen würden.

d) Quer- und Längsträger höherer Ordnung. Unter Umständen, besonders bei Strafsenbrücken, aber auch bei Eisenbahnbrücken, sobald bei diesen auch auf der Brücke eine durchgehende Kies- bzw. Schotterbettung gewählt ist, kann es empfehlenswert sein, noch Querträger zweiter Ordnung, auch wohl noch Längsträger dritter Ordnung anzubringen, so z. B. wenn es sich darum handelt, für die Buckelplatten der Fahrbahntafel rechteckige Felder zu bilden.

Wenn man die Querträger und die Längsträger als ein Ganzes betrachtet, so kann man dasselbe in Beziehung auf die Fahrbahn das „Fahrbahngerippe“ nennen.

e) Die Fahrbahn ist sehr verschiedenartig, je nachdem es sich um eine Eisenbahn- oder um eine Strafsenbrücke handelt. Bei den Strafsenbrücken unterscheidet man die Fahrbahntafel, d. h. den die Fahrbahn tragenden Teil (Buckelplatten, Zores-Eisen, Hängebleche u. s. w.) und die Fahrbahndecke (Pflaster, Beschotterung u. dergl.). Bei den Eisenbahnbrücken mit Kies- oder Schotterbettung kann man die Fahrbahntafel und den eigentlichen Oberbau unterscheiden. Bei den Eisenbahnbrücken ohne durchgehende Bettung fehlt die Fahrbahntafel.

f) Die Windverstrebung (auch wohl Horizontalverband genannt) dient dazu, die wagerechten Kräfte, welche auf die Brücke wirken, also die wagerechten Stöße beim Überfahren der Züge und Wagen, die Fliehkräfte in den Kurven, den durch Wind auf die Konstruktion bzw. die Verkehrslast ausgeübten Druck u. s. w. nach den Stützpunkten der Träger, demnach nach den Pfeilern zu übertragen. Die Windverstrebung darf bei einer gut konstruierten Brücke nicht fehlen; sie wird bei Strafsenbrücken mit starrer Fahrbahntafel (Wellblech, Buckelplatten u. s. w.) durch diese zum Teil ersetzt. Bei Brücken von geringer Trägerhöhe wird gewöhnlich eine, bei Brücken mit hohen Trägern werden zwei Windverstrebungen angeordnet, meistens eine in der Höhe einer jeden Gurtung. Windverstrebungen in Ebenen, welche zwischen den Gurtungen, etwa in halber Trägerhöhe, liegen, sind fehlerhaft, es sei denn, daß für dieselben besondere Windgurtungen angeordnet werden.

g) Die Querversteifung (auch wohl Querverband genannt) dient dazu, eine Veränderung des rechteckigen Querschnittes der Brücke zu verhüten. Womöglich ist sie durch Anordnung von Diagonalen herzustellen, welche den Querschnitt in mehrere Dreiecke teilen; das ist stets möglich, wenn die Fahrbahn oben, also annähernd in der Ebene der oberen Gurtung liegt. Bei unten liegender Fahrbahn ist, falls die Trägerhöhe nicht eine Querverbindung über der Fahrbahn gestattet, nur eine mangelhafte Querversteifung möglich; solche sogenannten offenen Brücken sind deshalb möglichst zu vermeiden. Ist dagegen bei tief liegender Fahrbahn über dieser und den verkehrenden Wagen eine Querverbindung möglich, so ist die Querversteifung freilich besser, als bei den offenen Brücken, die ganze Querschnittsfigur ist aber noch immer eine verschiebliche, nämlich ein Rechteck. Um dieselbe einigermaßen unverschieblich zu machen, versteift man die Ecken, soweit der verlangte Lichtraum dies gestattet, durch Dreiecke, welche den Kopfbändern des Zimmerwerks entsprechen; dadurch befähigt man die Ecken, Momente aufzunehmen.

h) Die Fußwege und Geländer. Die Fußwege liegen entweder zwischen den Hauptträgern oder auf Auslegern. Bei kleinen Brücken fallen sie nicht selten mit der Fahrbahn zusammen, wie weiter unten eingehender besprochen wird.

2. Rücksichten auf die Lage der Brücke im Grundrifs.

a) Gerade Brücken. Der einfachste Fall liegt vor, wenn die Achsen der beiden einander an der Brückenstelle kreuzenden Verkehrswege gerade Linien sind, welche einen rechten Winkel miteinander bilden. Man hat dann eine sogenannte gerade Brücke. Bei den geraden Brücken werden die Hauptträger einander und der Achse des überzuführenden Weges parallel angeordnet, die Querträger senkrecht zu ersteren, die Längsträger zweiter Ordnung den Hauptträgern parallel. Der Grundrifs des Überbaues ist ein Rechteck.

Auch wenn der zu überbrückende Weg an der Überschreitungsstelle in einer Kurve liegt, ordnet man gerade Brücken an; denn es kommt hierbei von der Kurve nur ein Stück in Frage, dessen Länge gleich der verhältnismäßig geringen Breitenabmessung der Brücke ist.

b) Schiefe Brücken. Wenn der Winkel, unter welchem sich die Achsen der beiden Wege schneiden, ein spitzer bzw. stumpfer ist, so heißt die Brücke eine schiefe. Die schiefen eisernen Brücken machen bei dem heutigen Stande der Technik, wenn die Schnittwinkel nicht sehr spitz sind, keine besonderen Schwierigkeiten; eine sehr große Zahl schiefer eiserner Brücken ist ausgeführt. Immerhin ist eine schiefe Brücke stets schwieriger herzustellen und dadurch teurer, als eine gerade. Der Grundrifs des Überbaues ist bei den schiefen Brücken in der Regel ein Parallelogramm.

Die Pfeiler, sowohl Mittel- wie Endpfeiler, müssen der Achse des zu überbrückenden Weges bzw. Stromes vollständig oder nahezu parallel sein, um der Bewegung des Wassers, der Wagen, Fußgänger u. s. w. möglichst geringen Widerstand bzw. geringe Schwierigkeit zu bereiten. Die Hauptträger der Brücke dagegen werden zweckmäßig der Achse des überzuführenden Weges parallel gestellt, woraus die Notwendigkeit folgt, die Hauptträger in dieser Richtung gegeneinander zu verschieben. Das Maß e der Verschiebung ist von dem Abstände der Hauptträger (b) und dem Schnittwinkel α der beiden Wege abhängig; es ist (vergl. Fig. 67 in § 33) gewöhnlich $e = b \cotang \alpha$.

Die schiefen Anschlüsse im Grundrifs, sowohl der Querträger an die Hauptträger, wie der Zwischenträger an die Querträger u. s. w. sind schwierig und teuer; sie sind möglichst zu vermeiden bzw. in ihrer Zahl zu verringern. Man setzt deshalb, soviel wie irgend thunlich, die Querträger und Querverbindungen senkrecht zu den Hauptträgern — im mittleren Teile der Brücke ist das stets ohne Schwierigkeit erreichbar; man vergleiche Fig. 69 in § 33.

Wegen der eingehenden Besprechung der schiefen Brücken wird auf § 33 verwiesen.

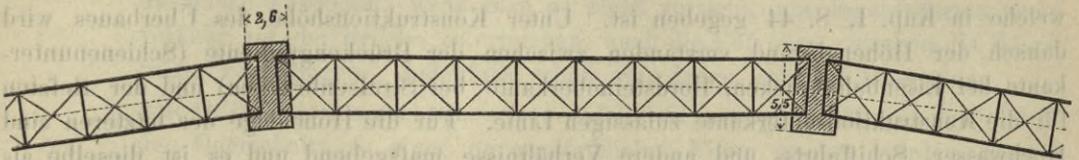
c) Kurvenbrücken. Wenn die überzuführende Straße in einer Kurve liegt, ist es oft notwendig, auch auf der Brücke die Kurve beizubehalten; man erhält dann eine sogenannte Kurvenbrücke.

Zunächst ist zu erwähnen, daß es weder empfehlenswert noch üblich ist, die Hauptträger im Grundrifs nach einer Kurve zu krümmen; vielmehr werden dieselben in jeder Öffnung einander parallel und mit gerader Achse hergestellt. Zweckmäßig ist es ferner, die Hauptträger parallel zu der in der Öffnungsmitte an die Kurve gelegten Tangente anzuordnen. Die Träger zweier Nachbaröffnungen bilden demnach einen Winkel miteinander, welcher von 180° verschieden ist.

Hinsichtlich der Stellung der Brückenpfeiler sind zwei Anordnungen zu unterscheiden, welche man als gerade und schiefe Kurvenbrücken bezeichnen kann. Wenn für die Stellung der Pfeiler keine besonderen Bedingungen vorliegen, so wird man jeden

Fig. 39. Viadukt über die Ravenna-Schlucht (Höllenthal-Bahn).

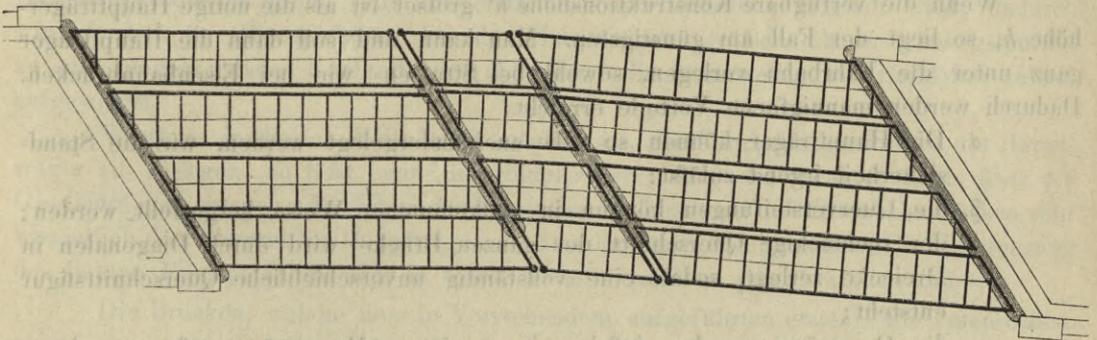
M. 1 : 500.

Äußerer Träger $L = 35,255$ m. Innerer Träger $L = 34,745$ m. Radius 240 m.

derselben so stellen, daß seine lange Achse den Winkel halbiert, welchen die Hauptträger der beiden Nachbaröffnungen miteinander bilden. Der Pfeilergrundriss ist in diesem Falle ein Viereck, dessen lange Seiten genau oder nahezu radial stehen (Fig. 39); demnach kann man hier wohl von einer geraden Kurvenbrücke reden. Bei nicht sehr scharfer Kurve können beide Träger einer jeden Öffnung gleich lang gemacht werden, wobei dann die Auflagermitten verschieden weit hinter der Pfeilervorderkante zurückliegen. Bei schärferen Kurven dagegen muß man den äußeren Träger länger anordnen als den kürzeren.

Fig. 40. Unterführung der Strafse Alt-Moabit (Berliner Stadteisenbahn).

M. 1 : 400.



Ist die Stellung des Pfeilers durch die Richtung des zu überbrückenden Weges (des Flusses, der Strafse u. s. w.) vorgeschrieben, so schneiden die Pfeilerachsen die Kurventangenten unter Umständen in spitzen Winkeln (Fig. 40), sodafs man eine schiefe Kurvenbrücke erhält. Jede einzelne Öffnung wird alsdann einen Überbau aufweisen, welcher mit demjenigen einer schiefen Brücke fast ganz übereinstimmt; der Schnittwinkel der Achse des zu überbrückenden Weges und der Achse des Überbaues ändert sich von Öffnung zu Öffnung. Die Pfeiler werden auch hier rechteckig hergestellt, unter Umständen mit Vorköpfen. Man setze die Querträger auch bei den Kurvenbrücken so viel wie irgend möglich senkrecht zu den Hauptträgern, und verweise die Unregelmäßigkeiten auf die Endfelder.

d) Trapezförmige oder Fächerbrücken. Dieselben kommen neuerdings vielfach, hauptsächlich bei Unterführungen unter Bahnhöfen vor; aber auch bei Strafsenbrücken können sie wohl am Platze sein. Der Grundriss des Überbaues ist ein Viereck, bei welchem entweder zwei Seiten einander parallel sind oder keine Seite ihrer Gegenseite parallel läuft. Diese Brücken haben grose Ähnlichkeit mit den schiefen Brücken und werden in § 33 noch weiter besprochen.

3. Einfluss der Höhenverhältnisse.

Zunächst möge an die Erklärung des Begriffes Konstruktionshöhe erinnert werden, welche in Kap. I, S. 44 gegeben ist. Unter Konstruktionshöhe des Überbaues wird danach der Höhenabstand verstanden zwischen der Brückengradiente (Schienenunterkante bei Eisenbahnbrücken, Bordsteinoberkante bei Strafsenbrücken) und der tiefsten für die Konstruktionsunterkante zulässigen Linie. Für die Höhenlage der letzteren sind Hochwasser, Schifffahrts- und andere Verhältnisse maßgebend und es ist dieselbe als etwas Gegebenes zu betrachten. Dieser Höhenabstand h' , den wir die verfügbare Konstruktionshöhe nennen wollen, ist meistens für die Wahl der Konstruktion ausschlaggebend. Die für die Konstruktion nötige Höhe zwischen Brückengradiente und wirklichem, tiefsten Punkte des Überbaues ist durchaus nicht genau vorgeschrieben; bekannt ist meistens nur eine geringste Höhe, welche man wenigstens gebraucht. Je größer die verfügbare Konstruktionshöhe ist, desto billiger und besser kann im allgemeinen die Konstruktion hergestellt werden. Es ist zweckmäßig, die nachfolgende Betrachtung für Balkenbrücken, Hängebrücken und Bogenbrücken getrennt vorzunehmen.

a) Balkenbrücken. Die Mittenhöhe h der Hauptträger ist mit der Stützweite L veränderlich; da sie aber für dieselbe Stützweite nicht sehr verschieden gewählt werden kann, so darf sie innerhalb gewisser Grenzen als gegeben angesehen werden. Betreffs der Konstruktionshöhe sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

Wenn die verfügbare Konstruktionshöhe h' größer ist als die nötige Hauptträgerhöhe h , so liegt der Fall am günstigsten. Man kann und soll dann die Hauptträger ganz unter die Fahrbahn verlegen, sowohl bei Strafsen- wie bei Eisenbahnbrücken. Dadurch werden mannigfache Vorteile erreicht:

- α. Die Hauptträger können so nahe aneinandergelegt werden, wie die Standicherheit irgend zulässt;
- β. die Querversteifungen können in vollkommener Weise hergestellt werden; der rechteckige Querschnitt der ganzen Brücke wird durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, sodafs eine vollständig unverschiebliche Querschnittsfigur entsteht;
- γ. die Querträger werden infolge der geringen Hauptträgerentfernung kurz, also leicht und billig; die Brückenpfeiler erhalten aus demselben Grunde geringe Länge. Man kann die Fußwege und unter Umständen sogar einen Teil der Fahrbahn auf über die Hauptträger-Senkrechte hinausragende Teile der Querträger oder auf ausgekragte Ausleger legen. Man kann sogar die Querträger ganz fortlassen und Eisenbahn- bzw. Strafsenfahrbahn direkt auf den Hauptträgern anordnen;
- δ. kein Teil der Hauptträger ragt über die Fahrbahn hinaus, es wird also weder der Verkehr auf der Brücke noch die Aussicht von derselben irgendwie behindert.

Ist die verfügbare Konstruktionshöhe h' sehr gering und wesentlich kleiner als die nötige Hauptträgerhöhe h , so muß man die Fahrbahn zwischen die Hauptträger verlegen, womit man eine sogenannte tiefe Konstruktion erhält. Dann sind Querträger und meistens auch Längsträger zweiter Ordnung zu verwenden. Diese Konstruktion ist wesentlich weniger gut, als die erstere, und zwar aus folgenden Gründen:

- α. Die Entfernung der Hauptträger wird im allgemeinen wesentlich größer, sowohl bei Eisenbahn- wie Strafsenbrücken. Bei ersteren muß, falls es sich

um einigermaßen große Brücken handelt, die ganze Umgrenzung des lichten Raumes zwischen den Hauptträgern Platz finden, bei letzteren wenigstens die ganze Fahrbahn, wenn man es nicht vorzieht, um ungehinderten Querkehr auf der Brücke zu erreichen, auch die Fußwege zwischen die Hauptträger zu verlegen. Jedenfalls erhält man lange, schwere Querträger;

- β. gute Querversteifung ist sehr schwer, vielleicht unmöglich. Diagonalen, welche den Querschnitt zu einer unverschieblichen Figur machen würden, können wegen der freien Durchfahrt nicht angebracht werden; eine Verbindung der oberen Gurtungsknotenpunkte zweier Hauptträger ist aber nur zu ermöglichen, wenn die Trägerhöhe groß genug ist, um unter den Querverbindungen her den Wagenverkehr zu gestatten. Keinenfalls ist aber diese Verbindung so gut wie Diagonalverbindung. Bei kleineren Brücken, bis etwa zu 35 m Stützweite, ist aber selbst diese Verbindung nicht möglich; die Anordnung mit tief liegender Fahrbahn bei solchen Brücken ist deshalb möglichst zu vermeiden.

Der dritte Fall tritt ein, wenn die verfügbare Konstruktionshöhe h' annähernd so groß, auch wohl etwas kleiner ist, als die zweckmäßige Trägerhöhe h . Alsdann legt man, wenn irgend möglich, die Hauptträger ebenfalls unter die Fahrbahn und bringt, um dieses zu erreichen, Opfer bei der Konstruktion der Hauptträger. Man wählt die Hauptträgerhöhe so klein, daß die erwähnte Lage derselben möglich wird; dadurch wird freilich der Eisenaufwand bei den Hauptträgern größer, als er günstigstenfalls zu sein braucht; dieser Nachteil wird aber durch die anderweitigen Vorteile bei weitem aufgewogen.

Wenn es in diesem Falle nicht möglich ist, die Fahrbahn ganz über die Hauptträger zu verlegen, so läßt man die Hauptträger mehr oder weniger hoch über die Gradien herausragen; die Höhe des Herausragens bestimmt bei Eisenbahnbrücken sehr wesentlich den Abstand der Hauptträger, da dieselben entweder ganz unter die Umgrenzung des lichten Raumes fallen oder in einen Absatz desselben gelegt werden müssen.

Die Brücken, welche dem in Vorstehendem aufgeführten ersten Falle entsprechen, nennt man auch Brücken mit oben liegender Bahn oder Deckbrücken, diejenigen dagegen, welche dem zweiten Falle entsprechen, Brücken mit unten liegender Bahn. Die letzteren werden offene Brücken genannt, wenn oberhalb der Fahrbahn keine Querverbindung der Hauptträger stattfindet, dagegen geschlossene Brücken, wenn daselbst eine Querverbindung vorhanden ist.

b) Hängebrücken. Die Hängebrücken zeigen eine Brückenform mit sehr tief liegender Fahrbahn; die notwendige Konstruktionshöhe ist annähernd so groß, wie die Dicke der Fahrbahn einschließlic der Höhe der Querträger. Die Fahrbahn liegt stets zwischen den Hauptträgern; die Konstruktion weist alle Mängel auf, welche für diese Anordnung oben (bei den Balkenbrücken) nachgewiesen sind. Gute Querversteifung ist sehr schwierig zu erreichen.

c) Bogenbrücken. Die Bogenbrücken erfordern in gewissem Sinne eine sehr große, in anderem Sinne nur eine sehr geringe verfügbare Konstruktionshöhe. Man muß zunächst fordern, daß bei Strombrücken kein Teil der Eisenkonstruktionen in das Hochwasser eintauche bzw. durch vom Hochwasser mitgeführte Gegenstände beschädigt werde; demnach muß der ganze Bogen über Hochwasser liegen, es muß also zwischen Hochwasser und Brückengradiente eine Höhe verfügbar sein, welche sich aus Bogenpfeil,

Bogenhöhe, Fahrbahndicke und dem Mafse zusammensetzt, welches angiebt, wie tief das Hochwasser unter dem tiefsten Punkte der Eisenkonstruktion liegen mufs. Diese Höhe ist bei grofsen Brücken ziemlich bedeutend, sodafs bei Bogenbrücken eine grofse verfügbare Höhe zwischen Hochwasser und Brückengradiente verlangt werden mufs. Dagegen genügt als verfügbare Höhe über den höchsten Punkten der Schiffe, welche bei höchstem schiffbaren Wasserstande den Fluß befahren, in der Regel ein kleines Mafs. Da die freie Höhe, welche für die Schifffahrt erforderlich ist, meistens nicht auf die ganze Breite der Brückenöffnungen verlangt wird, so kann man den Bogen leicht so konstruieren, dafs er aufserhalb der verlangten Breite tiefer, bis zu den Kämpfern, hinabreicht. Daraus ergibt sich dann das Mafs für die hier nötige Konstruktionshöhe als die Summe aus der Fahrbahndicke, der Bogenstärke im Scheitel und der Pfeilhöhe des mittleren Bogenteiles, welcher der vorgeschriebenen freien Breite entspricht. Es ist ein grofser Vorzug der Bogenbrücken, dafs man die unter der Fahrbahn verfügbare, mitunter sehr geringe Höhe vorzüglich ausnutzen kann.

Man hat hier alle Vorteile, welche bei der hohen Fahrbahnlage der Balkenträger angeführt sind: Die Hauptträger liegen ganz unter der Fahrbahn, sie können so angeordnet werden, dafs sie in jeder Hinsicht vorteilhaft liegen, die Querversteifung ist eine sehr vollkommene, die Fufswege können ausgekragt werden. Dazu kommt noch die schöne Form, welche unter Umständen für die Wahl des Systems ausschlaggebend ist.

4. Einflufs der Breite.

Unter Breite der Brücke soll hier im besonderen der Abstand der beiden äufsersten Hauptträger verstanden werden; in den meisten Fällen sind gewisse Grenzen gegeben, innerhalb deren dieses Mafs liegen mufs.

Bei den Eisenbahnbrücken ist die Breite hauptsächlich von der Höhenlage der Fahrbahn abhängig. Liegt die Fahrbahn oben, also ganz über den Hauptträgern, so ist man in der Breitenbemessung ziemlich unabhängig; besonders darauf ist dann zu achten, dafs die Brücke genügende seitliche Standsicherheit gegen Umkanten durch Wind bietet. Ausführliches darüber bringt § 28. Liegt die Fahrbahn dagegen unten, also zwischen den Hauptträgern in der Höhe der unteren Gurtung derselben, so mufs man die Hauptträger mit ihren Achsen so weit auseinander legen, dafs zwischen ihnen mindestens die Umgrenzung des lichten Raumes Platz findet; demnach ist dann die lichte Breite zwischen den Hauptträgern bei eingleisigen Brücken wenigstens auf 4,0 m, bei zweigleisigen Brücken wenigstens auf 7,5 m zu bemessen. Wenn die Hauptträgerhöhe nach den Auflagern zu abnimmt und zwar bis zu einer Höhe, welche weniger als rund 3,20 m über Schienenoberkante liegt, sind die erwähnten Mafse noch jederseits so weit zu vergrößern, dafs kein Teil der oberen Gurtung in das Normalprofil fällt. Allgemein ist jedoch zu beachten, dafs sowohl die Rücksicht auf den Betrieb, wie die Unterhaltung des Bauwerkes und des Gleises einen zu engen Anschlufs des Bauwerkes an das lichte Profil verbieten. Man bemesse also den Spielraum zwischen dem Überbau und der Umgrenzung des lichten Raumes reichlich. Falls keine Fufswege ausgekragt werden, so empfiehlt es sich, die erwähnten Kleinstmafse jederseits so viel zu vergrößern, dafs ein Arbeiter neben einem fahrenden Zuge Platz findet; es genügt dafür, weil zwischen den weitest vorspringenden Teilen des Zuges und der seitlichen Begrenzung des Lichtraumes noch 0,425 m freier Raum sind, etwa 0,40 bis 0,50 m. In Österreich ist als kleinstes zulässiges Mafs 0,15 m vorgeschrieben. Man vergl. Kap. I, § 13, S. 77.

Bei einer mittleren Höhenlage der Fahrbahn gegen die Hauptträger bestimmen sich die Breiten der Brücken ebenfalls aus der Umgrenzung des lichten Raumes und fallen um so größer aus, je höher die höchsten Punkte der Hauptträger über Schienenoberkante liegen. Hiervon wird in § 28 eingehender die Rede sein; ebendasselbst sollen auch die Breiten der Kurvenbrücken erörtert werden.

Für Strafsenbrücken ist die Breite der Fahrbahn (zwischen den Bordsteinen) und der Fußwege meistens vorgeschrieben. Man vergleiche darüber Kap. I, § 13, S. 74 u. 75. Besonders wichtig ist hier die Lage der Fußwege gegen die Hauptträger.

Allgemein wird es stets günstig sein, die Fußwege auszukragen, also auf Auslegern anzubringen. Wenn die Fahrbahn oben liegt, so empfiehlt dies sich bei großen Brücken fast stets; immerhin kann es unter Umständen, namentlich bei kleineren Brücken, billiger sein, einen besonderen, leichten Hauptträger aufsen zu verlegen, welcher den Querträgern bezw. den Belageisen der Fußwegtafel zur Stütze dient.

Liegt jedoch die Fahrbahn unten, so ist die Frage betreffs der Fußweglage und damit auch der Brückenbreite recht schwierig zu entscheiden. Werden die Fußwege zwischen die Hauptträger gelegt, so ergeben sich sehr lange und schwere Querträger; da in solchem Falle auch gewöhnlich geringe Konstruktionshöhe verfügbar ist, so wird die Anordnung für den Eisenaufwand der Querträger doppelt ungünstig. Dagegen erreicht man den Vorteil ungehinderten Querverkehrs auf der Brücke, welcher bei verkehrsreichen Strafsen von großer Bedeutung ist. Falls dagegen die Fußwege ausgekragt werden, wenn also nur die Fahrbahn zwischen den Hauptträgern liegt, so ergeben sich kurze und billige Querträger. Man muß dann die Hauptträger mit genügend großen Öffnungen konstruieren, um den Querverkehr zu ermöglichen. Die letzte Anordnung ist meistens vorzuziehen.

Nummehr soll auf die Anordnung der Hauptträger gerader Eisenbahn- und Strafsenbrücken näher eingegangen werden.

§ 28. Anordnung der Hauptträger der Eisenbahnbrücken. Anzahl und Entfernung der Hauptträger stehen, dem besonderen Zwecke dieser Brücken gemäß, in enger Beziehung zu den getragenen Gleisen und der Lage der Bahn in Bezug zu jener der Träger.

1. Brücken mit oben liegender Bahn.

a) Eingleisige Brücken.

1. Anordnung zweier Träger. Die Trägerentfernung muß mindestens gleich der Entfernung der Schienenstränge sein.

Ist e die Trägerentfernung, s die Entfernung der Schienen, so ist demnach

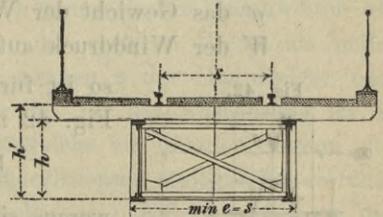
$$\min e = s, \text{ und für normale Spurweite:}$$

$$\min e = 1,5 \text{ m (s. Fig. 41).}$$

Dieser Abstand der Träger hat jedoch nur für gerade Bahnstrecken Geltung. Liegt die Brücke in einer Kurve, deren Krümmungshalbmesser $= r$ ist, und bedeutet l die Trägerlänge, so müßte, damit die Gleisstränge nicht außerhalb der Mittelebenen der Träger fallen, $\min e = s + f$ werden, wobei f die Pfeilhöhe des Bogens bedeutet. Bei normaler Spurweite ist dann mit Beachtung, daß

$$f = \frac{1}{8} \frac{l^2}{r}, \quad \min e = 1,5 \text{ m} + \frac{1}{8} \frac{l^2}{r}.$$

Fig. 41.



Diese Kleinstwerte von e sind blofs mit Rücksicht auf die Gleisweite ermittelt; es treten jedoch noch andere Umstände ein, welche auf dieses Mafs Einfluß haben. Es ist dies hauptsächlich die Forderung nach ausreichender Sicherheit der Brücke gegen seitlich wirkende wagerechte Kräfte. Dafs dieser Bedingung durch angemessene Entfernung der Hauptträger am zweckmäßigsten entsprochen werden kann, bedarf wohl keiner Begründung.

Einfluß der wagerechten Kräfte auf die Trägerentfernung. Die zur Wirkung gelangenden seitlichen wagerechten Kräfte sind:

1. Der Winddruck,
2. die seitlichen Drücke, hervorgerufen durch Stöße der rollenden Verkehrsmittel, und
3. bei Brücken in Kurven die von den bewegten Lasten ausgeübte Fliehkraft.

Namentlich der Winddruck ist es, der vermöge seiner Stärke die anderen Kräfte weitaus übertrifft, und dessen Wirkung demnach auch als maßgebend für die Beurteilung der Standsicherheit der Brücke angesehen werden muß.

Nachdem der Eisenbahnverkehr während herrschender Orkane unstatthaft ist, und höchstens bei einem Winddrucke, welcher der Standsicherheit unbeladener Güterwagen entspricht, noch ausführbar ist, werden die anzustellenden Untersuchungen für Brücken unter zwei verschiedenen Annahmen durchzuführen, und wird das ungünstigere Ergebnis, als das maßgebende, beizubehalten sein. Die erste Annahme setzt die Belastung der Brücke mit unbeladenen Güterwagen und die Wirkung eines Winddruckes voraus, der etwa der Stabilität der Wagen entspricht, die zweite Annahme die freie, dagegen dem größten Winddrucke ausgesetzte Brücke. Für die erste Annahme möge hier die Größe des Winddruckes mit 150 kg auf 1 qm, für die zweite mit 280 kg auf 1 qm eingeführt werden. Man vergl. § 11 dieses Kapitels.

Sei nun:

- F die dem Winddrucke ausgesetzte Fläche der Brückenträger f. d. lfd. m,
 F' die dem Winddrucke ausgesetzte Fläche des Wagenzuges f. d. lfd. m,
 h die Trägerhöhe,
 l die Trägerlänge,
 e die Entfernung der Träger,
 h' die Höhe des Schwerpunktes der vom Winde getroffenen Wagenfläche über Schienenhöhe,
 mh die Höhe des Druckmittelpunktes der Trägerfläche über der Umsturzkannte,
 g das Gewicht der Brücke f. d. lfd. m,
 g' das Gewicht der Wagen f. d. lfd. m und
 W der Winddruck auf 1 qm der getroffenen Fläche,

so ist für den Gleichgewichtszustand der Brücke mit Bezug auf Fig. 42 näherungsweise:

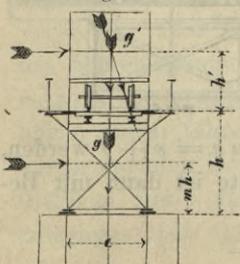
$$W [F \cdot m \cdot h + F' (h + h')] = (g + g') \cdot \frac{e}{2}$$

woraus sich der erforderliche Kleinstwert von e ergibt:

$$\min e = 2 W \frac{F \cdot m \cdot h + F' (h + h')}{g + g'}$$

F und mh sind von dem Trägersysteme und der Konstruktion der Träger abhängig; in dem Werte von F' ist über-

Fig. 42.



dies auch noch jener Anteil der Fläche des zweiten Trägers enthalten, der bei nicht normal gegen die Trägerebenen gerichteten Winddrucke getroffen erscheint. Man kann $F = n \cdot h$ setzen, wobei n ein Beiwert ist, der sowohl dem Einfluß des Trägersystems, als dem erwähnten Flächenanteil der zweiten Wand näherungsweise entspricht, und etwa annehmen:

Für vollwandige Balkenbrücken: $F = 1,3 h$, $m = 0,5$;

für Parallel-Gitterträger: $F = 0,53 h$, $m = 0,5$;

für Bogenträger: $F = 0,3 h$, $m = 0,7$.

Entsprechend den Mäßen ausgeführter neuerer Güterwagen ist:

$$F' = 2,4 \text{ qm}, \quad h' = 2,0 \text{ m}, \quad g' = 800 \text{ kg},$$

sodafs:
$$\min e = 2 W \frac{F \cdot m \cdot h + 4,8 + 2,4 h}{g + 800}.$$

Der ersten Annahme gemäfs ist $W = 150 \text{ kg}$ auf 1 qm , mithin

$$\min e = 300 \frac{F \cdot m \cdot h + 4,8 + 2,4 h}{g + 800},$$

für die zweite dagegen, mit $W = 280 \text{ kg}$ auf 1 qm , folgt:

$$\min e' = 560 \frac{F \cdot m \cdot h}{g}.$$

Um mittleren Verhältnissen entsprechende Werte zu erhalten, soll für g der Näherungsausdruck $g = 30 l + 800 \text{ kg}$ zu Grunde gelegt und mit den Mittelwerten $F = 0,4 h$ und $m = 0,6$ die Rechnung durchgeführt werden. Es ergibt sich alsdann:

$$\min e = 7,2 \frac{h^2 + 10 h + 20}{3 l + 160},$$

$$\min e' = 13,5 \frac{h^2}{3 l + 80}.$$

Unter der Annahme $h = \frac{l}{10}$ berechnet sich hiermit für

$$l = 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 80 \quad 100 \text{ m}$$

$$\min e = 1,44 \quad 1,69 \quad 1,95 \quad 2,20 \quad 2,45 \quad 2,95 \quad 3,44 \text{ m}$$

$$\min e' = 0,38 \quad 0,71 \quad 1,08 \quad 1,46 \quad 1,86 \quad 2,69 \quad 3,54 \text{ m}.$$

Den Werten von $\min e$ entspricht die Gleichung:

$$\min e = 0,94 + 0,25 h.$$

Die Annahme $h = \frac{1}{8} l$ ergibt für

$$l = 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 80 \quad 100 \text{ m}$$

$$\min e = 1,67 \quad 2,06 \quad 2,44 \quad 2,82 \quad 3,20 \quad 3,96 \quad 4,71 \text{ m}$$

$$\min e' = 0,59 \quad 1,11 \quad 1,68 \quad 2,27 \quad 2,90 \quad 4,20 \quad 5,52 \text{ m},$$

wonach die Gleichung $\min e = 0,92 + 0,304 h$ angenäherte Werte für $\min e$ liefert.

Unter den angegebenen Verhältnissen ergibt sich hiernach für Spannweiten bis zu 70 m $\min e$ gröfser als $\min e'$ und es würden daher die ersteren Werte als maßgebend anzusehen sein. Die eben gerechneten Entfernungen e der Hauptträger entsprechen aber dem mathematischen Gleichgewichtszustande; für die Ausführung ist es empfehlenswert, auch auf unvorhergesehene Zufälle Rücksicht zu nehmen, indem die erhaltenen Werte von $\min e$ noch mit einem Sicherheitskoeffizienten multipliziert werden.

Obwohl die angenommene Gröfse des Winddruckes von 150 kg auf 1 qm die Standsicherheit unbeladener Güterwagen bereits gefährdet⁷⁶⁾, also der Verkehr während

⁷⁶⁾ Je nach Konstruktion der Wagen wechselt der dem Gleichgewichte entsprechende seitliche Druck f. d. qm Wagenfläche zwischen 100 bis 130 kg. Die bis zur vollen Tragfähigkeit belasteten Wagen sind noch bei einem Seitendrucke von 300 kg f. d. qm standfähig.

eines derartigen Sturmes nahezu unstatthaft ist, so liegt es dennoch im Bereiche der Möglichkeit, daß einmal der Fall eintrete, wo ein Zug genötigt sein kann, auf einer Brücke stehen bleiben und einem heftigen Winde daselbst standhalten zu müssen (z. B. infolge von Schneeverwehungen oder anderen Unfällen). Erreicht dann auch die Größe des Winddruckes nicht jene angenommene Stärke (obschon dies nach dem Früheren auch nicht ausgeschlossen ist), so ist doch weiter zu beachten, daß das angenommene und in Rechnung gezogene Gewicht der Brücke thatsächlich größer als das wirkliche Gewicht sein kann. Diese Erwägungen rechtfertigen die Einführung eines Sicherheitskoeffizienten in die obigen Rechnungen. Nimmt man für denselben z. B. die Größe 1,5 an, so würde die den Hauptträgern zu gebende Entfernung $e = 1,5 \cdot \min e$ sein. Für diese Annahme ergibt sich:

$$e = 10,8 \frac{h^2 + 10h + 20}{3l + 160};$$

für $h = \frac{1}{10} l$ würden $e = 1,4 + 0,37h$, und für $h = \frac{1}{8} l$, $e = 1,4 + 0,45h$ als angenäherte Ausdrücke betrachtet werden können.

Nach diesen Beziehungen ergibt sich für $h = \frac{1}{10} l$, für

$$l = 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \text{ m}; \quad e = 2,14 \quad 2,50 \quad 2,88 \quad 3,25 \quad 3,62 \text{ m.}$$

Ausführungen der österreichischen Südbahn zeigen für

$$l = 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \text{ m}; \quad e = 2,2 \quad 2,5 \quad 3,0 \quad 3,5 \quad 4,0 \text{ m.}$$

Die Brücken der österreichischen Nordwestbahn erhielten für

$$l = 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \text{ m}; \quad e = 2,6 \quad 2,6 \quad 3,0 \quad 4,0 \quad 4,0 \text{ m.}$$

Für die Brücken der österreichischen Staatsbahnen bei Bahn „oben“ (versenkt) wurde die Entfernung der Hauptträger

$$\text{bei } l = 12 \text{ m mit } e = 1,8 \text{ m}$$

$$\text{„ } l = 100 \text{ m „ } e = 5,0 \text{ m}$$

und durch geradliniges Einschalten zwischen diesen beiden Grenzwerten für dazwischenliegende Spannweiten bestimmt. Diesem entspricht jedoch die Gleichung:

$$e = 1,4 + 0,036 l$$

und für $l = 10h$:

$$e = 1,4 + 0,36 h,$$

also eine Beziehung, die nur unbedeutend von der obigen abweicht.

Für $h = \frac{1}{8} l$, würde für

$$l = 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \text{ m}; \quad e = 2,52 \quad 3,08 \quad 3,65 \quad 4,20 \quad 4,77 \text{ m}$$

folgen.

Die in Obigem gefundenen Ergebnisse entsprechen selbstverständlich nur den gemachten Voraussetzungen. In jedem bestimmt vorliegenden Falle sind die thatsächlichen Verhältnisse maßgebend und es muß dem Ermessen des Konstrukteurs überlassen bleiben, die Anordnung der Träger mit Rücksicht auf die Standsicherheit der Brücke je nach der Ortslage und der daselbst auftretenden Heftigkeit der Winde und nach anderen maßgebenden Umständen vorzunehmen. Um sicher zu gehen, empfiehlt es sich, den Winddruck etwas größer in die Rechnung einzuführen, als er ungünstigstenfalls je werden kann; die Breite, bei welcher unter dieser Annahme Gleichgewicht herrscht, ist als ausreichend zu bezeichnen.

Entfernung der Hauptträger bei Brücken in Kurven. Es wurde bereits erwähnt, daß in diesem Falle die Brückenachse parallel zur Bogensehne, welche durch den Schnitt der Bahnkurve mit den die Lichtweite eingrenzenden Ebenen entsteht, zu

legen ist. Es handelt sich nun darum, die Entfernung der Brückenachse von der Bogensehne zu bestimmen, um hiernach die Hauptträger zweckmäfsig anordnen zu können.

Von dem Grundsatz ausgehend, dafs Gleichartigkeit und Gleichmäfsigkeit der Konstruktion der Hauptträger Bedingung einer zweckmäfsigen Anordnung sei, wird man bestrebt sein, dieselbe so zu wählen, dafs die grösste Beanspruchung für jeden Hauptträger annähernd die gleiche Gröfse erhalte. Die mit verschiedenen Geschwindigkeiten verkehrenden Züge werden die Hauptträger auch verschieden beanspruchen, da die Überhöhung des äufseren Schienenstranges der grössten Zuggeschwindigkeit angemessen ist. Es wird also durch Züge mit geringerer Geschwindigkeit der dem inneren Schienenstrang näher liegende Hauptträger mehr beansprucht als der zweite, für den wieder die Schnellzüge eine Mehrbeanspruchung bewirken. Wollte man diesen Umständen Rechnung tragen, so könnte dies in der Art geschehen, dafs der für jeden Hauptträger ungünstigst wirkende Belastungsfall ins Auge gefafst und die Lage des Bogens zwischen den Trägern nach der Bedingung gleich grösster Beanspruchung der Hauptträger ermittelt wird. Streng genommen läfst sich diese Aufgabe schwer lösen, da die Wirkungen der Fliehkraft auf die Beanspruchung der Träger mit berücksichtigt werden müfsten; wenn es sich jedoch blofs um näherungsweise Ermittlungen handelt, so genügt die nachstehende einfache Berechnung, welche die seitlichen Beanspruchungen der Hauptträger aufser Acht läfst.

Nennt man:

- l die Trägerlänge (im Grundrifs),
- e die Entfernung der Hauptträger,
- s die Entfernung der Schienenmitten,
- r den Krümmungshalbmesser des Bogens,
- f die Pfeilhöhe des Bogens,
- z die Überhöhung des äufseren Schienenstranges,

und nimmt — unter Voraussetzung einer rechtwinkligen Kreuzung — den in die Brückenmitte fallenden Bogenscheitel O (Fig. 43) zum Ursprung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes, von welchem die beiden Hauptträger um a_1 bzw. a_2 abstehen mögen, so ist für einen Punkt m des Bogens näherungsweise

$$y = \frac{x^2}{2r}.$$

Wird ferner vorausgesetzt, dafs eine gleichmäfsige Belastung p f. d. Längeneinheit mit der Geschwindigkeit v längs des Bogens über die Brücke bewegt werde, so wirkt in dem Querschnitte x das Gewicht des bewegten Lastelementes $p dx$ und die von demselben geäußerte Fliehkraft $p dx \cdot \frac{v^2}{gr}$; wobei $g = 9,81$ m. Es entstehen hierdurch in den Punkten a und b des Querschnittes x (s. Fig. 44) die lotrechten Drücke:

$$dD = \frac{p dx}{e} \left\{ a_2 - \frac{x^2}{2r} - \left[c \sin \alpha - \frac{v^2}{gr} \left(\frac{z}{2} + c \cos \alpha + w \right) \right] \right\} \text{ und}$$

$$dD' = \frac{p dx}{e} \left\{ a_1 + \frac{x^2}{2r} + \left[c \sin \alpha - \frac{v^2}{gr} \left(\frac{z}{2} + c \cos \alpha + w \right) \right] \right\},$$

wobei w die Höhe des Schienenkopfes der inneren Schiene über der Ebene des nächst liegenden Windverbandes bedeutet.

Setzt man:

$$c \sin \alpha - \frac{v^2}{gr} \left(\frac{z}{2} + c \cos \alpha + w \right) = k,$$

Fig. 43.

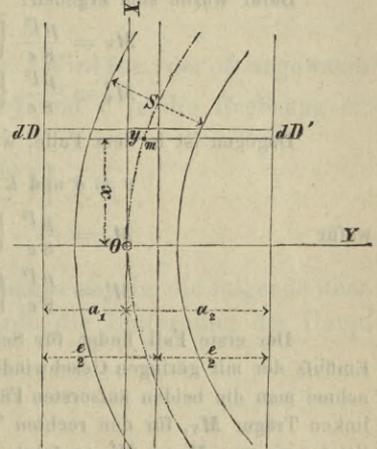
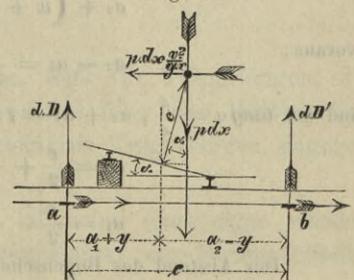


Fig. 44.



so ergibt sich der Gesamtdruck des linken bzw. rechten Trägers mit:

$$D = \frac{p}{e} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left\{ a_2 - \frac{x^2}{2r} - k \right\} dx = \frac{pl}{e} \left\{ a_2 - k - \frac{1}{24} \frac{l^2}{r} \right\} \text{ und}$$

$$D' = \frac{p}{e} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left\{ a_1 + \frac{x^2}{2r} + k \right\} dx = \frac{pl}{e} \left\{ a_1 + k + \frac{1}{24} \frac{l^2}{r} \right\}.$$

Bei Balkenträgern, die auf zwei Stützen frei aufliegen, treten die größten Biegemomente mit Rücksicht auf die Symmetrie der Anordnung in den Trägerritten auf. Bezeichnen M und M' diese Größtmomente für den linken bzw. rechten Hauptträger, so ist:

$$M = \frac{Dl}{4} - \int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot dD = \frac{pl^2}{8e} \left\{ a_2 - k - \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} \right\}$$

und entsprechend

$$M' = \frac{pl^2}{8e} \left\{ a_1 + k + \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} \right\}.$$

Für die größte Zuggeschwindigkeit, welcher die Überhöhung z des äußeren Schienenstranges entspricht, ist $v = V$ und $\frac{V^2}{gr} = \tan \alpha$, mithin $k = -\left(w + \frac{z}{2}\right) \tan \alpha$.

Dafür würde sich ergeben:

$$M_V = \frac{pl^2}{8e} \left\{ a_2 + \left(w + \frac{z}{2}\right) \tan \alpha - \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} \right\}$$

$$M'_V = \frac{pl^2}{8e} \left\{ a_1 - \left(w + \frac{z}{2}\right) \tan \alpha + \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} \right\}.$$

Dagegen ist in dem Falle, wo die Last ruhig auf der Brücke steht:

$$v = 0 \text{ und } k = c \sin \alpha = c \cdot \frac{z}{s},$$

wofür

$$M_o = \frac{pl^2}{8e} \left\{ a_2 - c \frac{z}{s} - \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} \right\} \text{ und}$$

$$M'_o = \frac{pl^2}{8e} \left\{ a_1 + c \frac{z}{s} + \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} \right\} \text{ folgt.}$$

Der erste Fall findet für Schnellzüge, der zweite dagegen nur ausnahmsweise statt. Um den Einfluss der mit geringen Geschwindigkeiten verkehrenden, jedoch schweren Lastzüge zu berücksichtigen, nehme man die beiden äußersten Fälle $v = V$ und $v = 0$ in Rechnung. Selbstverständlich sind für den linken Träger M_V , für den rechten Träger M'_o als die relativ größten Biegemomente einzuführen. Setzt man nun $M_V = M'_o$, so folgt:

$$a_2 + \left(w + \frac{z}{2}\right) \tan \alpha - \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} = a_1 + c \frac{z}{s} + \frac{1}{48} \frac{l^2}{r},$$

woraus:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{24} \frac{l^2}{r} + c \frac{z}{s} - \left(w + \frac{z}{2}\right) \tan \alpha,$$

und mit $\tan \alpha = \frac{z}{s}$, $a_2 + a_1 = c$:

$$a_2 = \frac{c}{2} + \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} + \frac{z}{2s} \left(c - w - \frac{z}{2}\right) \text{ und}$$

$$a_1 = \frac{c}{2} - \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} - \frac{z}{2s} \left(c - w - \frac{z}{2}\right) \text{ sich ergibt.}$$

Der Abstand des Bogenseitels von der Brückenachse bestimmt sich aus:

$$f' = a_2 - \frac{e}{2} = \frac{1}{48} \frac{l^2}{r} + \frac{z}{2s} \left(c - w - \frac{z}{2}\right).$$

Für normalspurige Bahnen ist $2s = 3 \text{ m}$; führt man außerdem die Pfeilhöhe des Bogens $f = \frac{l^2}{8r}$ in die Rechnung ein, so folgt:

$$f' = \frac{1}{6} f + \frac{z}{3} \left(c - w - \frac{z}{2}\right).$$

Mit den Mittelwerten $c = 1,3 \text{ m}$ und (bei oben liegender Bahn) $w = 0,34 \text{ m}$ erhält man dann:

$$f' = \frac{1}{6} \left[f + z(1,92 - z) \right] = \frac{f}{6} + \frac{z}{3} \left(1 - \frac{z}{2}\right).$$

Nach der im obigen Sinne geführten Rechnung ergibt sich im Hinweis auf Fig. 43, S. 169 die Entfernung der Hauptträger, indem einerseits

$$a_2 = \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8\left(r - \frac{s}{2}\right)}$$

gesetzt wird, mit $\min e = s + \frac{1}{4} \frac{l^2}{r - \frac{s}{2}} - 2f'$, bezw. für $a_1 = \frac{s}{2}$,

andererseits: $\min e = s + 2f'$.

Von diesen beiden Werten ist der grössere als maßgebend beizubehalten.

Um beurteilen zu können, unter welchen Umständen der eine dieser Werte größer wird als der andere, bildet man die Differenz beider; das positive Vorzeichen derselben entspricht dann dem größeren Werte. Je nachdem nun

$$\frac{1}{4} \frac{l^2}{r - \frac{s}{2}} - 4f' \geq 0,$$

hat der erste bezw. der zweite Giltigkeit.

Näherungsweise kann man:

$$\frac{1}{8} \frac{l^2}{r - \frac{s}{2}} = f$$

setzen, wodurch sich die Beziehung $f - 2f' \geq 0$ ergibt. Wird für s der oft angewandte Wert $s = \frac{40}{r}$ angenommen und werden die Werte für f und f' in die Rechnung eingeführt, so folgt:

$$\frac{l^2}{8r} - \frac{1}{3} \left[\frac{l^2}{8r} + \frac{40}{r} \left(1,92 - \frac{40}{r} \right) \right] \geq 0,$$

woraus

$$\left(\frac{l}{2} \right)^2 \geq 40 \left(1,92 - \frac{40}{r} \right).$$

Da $r \geq 180$ m, so geht obige Beziehung annäherungsweise in die folgende über: $l \geq 16,4$ m, d. h. für Trägerlängen größer als 16 m würde die Entfernung der Hauptträger mit:

$$\min e = s + \frac{1}{4} \frac{l^2}{r - \frac{s}{2}} - 2f',$$

für Trägerlängen kleiner als 16 m dagegen mit:

$$\min e = s + 2f'$$

zu bemessen sein.

Gleichzeitig folgt aus dem angestellten Vergleiche, daß für Trägerlängen, die größer als 16 m sind, $f > 2f'$ wird, daher die Brückenachse über den Halbierungspunkt der Pfeilhöhe gegen den Bogenscheitel hin, bei kleineren Trägerlängen dagegen gegen die Sehne hin vorrückt.

Die geringste Trägerentfernung und damit die kürzesten Querträger würden erhalten werden, wenn die Brückenachse in den Halbierungspunkt der Bogenpfeilhöhe verlegt wird.

Dann ist:

$$M = \frac{p l^2}{8e} \left[\frac{e}{2} + \frac{f}{3} - k \right],$$

$$M' = \frac{p l^2}{8e} \left[\frac{e}{2} - \frac{f}{3} + k \right].$$

Von Interesse sind die beiden Fälle, wenn 1. ein Zug auf der Brücke stehen bleibt, also $v = 0$ wird und 2. wenn ein Zug mit der größten Geschwindigkeit über die Brücke fährt.

Im ersten Falle ist:

$$k = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \frac{z}{s}$$

und daher:

$$M_o = \frac{p l^2}{8 e} \left(\frac{e}{2} + \frac{f}{3} + c \cdot \frac{z}{s} \right),$$

$$M'_o = \frac{p l^2}{8 e} \left(\frac{e}{2} - \frac{f}{3} + c \cdot \frac{z}{s} \right),$$

im zweiten Falle ist:

$$\frac{v^2}{g r} = \tan \alpha = \frac{z}{s},$$

mithin:

$$k = - \left(w + \frac{z}{2} \right) \cdot \frac{z}{s}$$

und daher:

$$M_v = \frac{p l^2}{8 e} \left[\frac{e}{2} + \frac{f}{3} + \frac{z}{s} \left(w + \frac{z}{2} \right) \right],$$

$$M'_v = \frac{p l^2}{8 e} \left[\frac{e}{2} - \frac{f}{3} - \frac{z}{s} \left(w + \frac{z}{2} \right) \right].$$

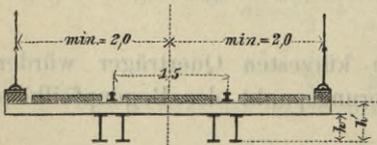
Bei einer derartigen Anordnung werden die größten Biegemomente für jeden Hauptträger verschieden und nach dem Größtwerte zu berücksichtigen sein.

In Obigem ist vorausgesetzt, daß die Hauptträger in lotrechten Ebenen liegen. Damit die seitliche Beanspruchung derselben infolge der Fliehkraft vermieden bzw. herabgemindert werde, hat man sie auch normal zur Gleisebene — entsprechend der Überhöhung — angeordnet. Hierdurch wird erreicht, daß die Ebenen der Tragwände eine parallele Lage zur Richtung der aus dem Belastungsgewichte und der Fliehkraft resultierenden Kraft erhalten und somit die Träger bloß normal beansprucht werden. Allerdings tritt dies nur auf für Züge, die mit einer der Überhöhung entsprechenden Geschwindigkeit verkehren. Die erwähnte Anordnung kann nur für kleine Brücken angewendet werden und dürfte dort, wo keine zu großen Überhöhungen vorkommen und auf ästhetische Rücksichten nur ein geringes Gewicht gelegt wird, ganz vorteilhaft sein.

2. Die Anordnung dreier Hauptträger findet nur in seltenen Fällen Anwendung und ist nicht zu empfehlen. Falls besondere Umstände eintreten, welche eine derartige Anordnung rechtfertigen, so können die Trägerentfernungen aus der Bedingung abgeleitet werden, daß die Belastung sämtlicher Träger eine gleiche Größe erreiche; hiervon wird im X. Kapitel eingehender die Rede sein. Bei anderen Trägerentfernungen finden ungleichmäßige Belastungen der Träger statt, welche dann auch verschiedene Beanspruchungen der Träger oder verschiedene Abmessung der Trägerquerschnitte bedingen.

3. Bei Anordnung von vier Hauptträgern ist es das beste, jeden Schienenstrang durch ein Trägerpaar derart zu stützen, daß die Träger symmetrisch gegen die Schienenmitte liegen (Fig. 45). Die Entfernung der ein Trägerpaar bildenden Träger ist dann jedoch so klein als möglich zu machen, damit der Unterschied der auf jeden Träger entfallenden Drücke möglichst klein werde. Die Größe dieser Entfernung würde demnach zwischen 200 bis 300 mm zu wählen sein.

Fig. 45.



Bei Brücken mit kleinen Spannweiten und bei beschränkter Konstruktionshöhe, insbesondere jedoch dort, wo kein Konstruktionsteil oberhalb der Schienen liegen darf, kann diese Anordnung vorteilhaft Verwertung finden.

Den Übergang von eingleisigen zu zweigleisigen Bauwerken bilden die Brücken, für welche — wie beispielsweise für die Wechselbrücke bei Graudenz — eine sogenannte Gleisverschlingung angeordnet ist. In diesem Falle tritt eine angemessene Vermehrung der Breite und der Hauptträgerentfernung ein. Man vergleiche Kap. I, S. 78.

b) Zweigleisige Brücken. Ausführungen dieser Brücken zeigen die Anwendung von zwei, drei und vier Trägern; ausnahmsweise findet sich, insbesondere bei älteren Brücken, auch eine gröfsere Trägeranzahl vor.

1. Anordnung mit zwei Hauptträgern (Fig. 46). Die Trägerentfernung ist mit Rücksicht auf den geringsten Abstand der Gleisachsen, welcher nach den Technischen Vereinbarungen 3,5 m beträgt,

$$\min e = 3,5 + 1,5 = 5,0 \text{ m.}^{77)}$$

Wenn dieses Mafs verglichen wird mit den aus Standsicherheitsrücksichten ermittelten Trägerentfernungen eingleisiger Brücken und wenn hierbei beachtet wird, dafs zweigleisigen Brücken nahezu das doppelte Eigengewicht zukommt, so ergibt sich, dafs letztere eine jedenfalls ausreichende Sicherheit gegen wagerechte Seitenkräfte besitzen.

Anordnung in Bahnkurven. Man ermittelt in ähnlicher Weise, wie dies bei eingleisigen Brücken geschehen, die Lage der Brückenachse gegen den Bogenseitel, indem man einmal die beiden Gleise voll mit einer ruhenden Belastung, das zweite Mal mit einer der grössten Geschwindigkeit entsprechenden

Belastung beider Gleise behaftet annimmt, wodurch im ersten Falle der innere, im zweiten hingegen der äufsere Hauptträger meist beansprucht erscheint, setzt die grössten Biegemomente für beide Träger gleich und bestimmt aus dieser Bedingung den Abstand der Brückenachse vom Bogenseitel. Ist dieser Abstand = f' , so ergibt sich die Entfernung der Hauptträger:

$$\min e = s + 3,5 + 2f'$$

bezw. mit

$$\min e = s + 3,5 - 2f' + \frac{1}{4} \frac{l^2}{(r - 2,5)},$$

von welchen Werten der gröfsere mafsgebend ist. Für normalspurige Bahnen ist $s = 1,5 \text{ m}$, mithin:

$$\min e = 5,0 + 2f'$$

bezw.

$$\min e = 5,0 - 2f' + \frac{1}{4} \frac{l^2}{r - 2,5}.$$

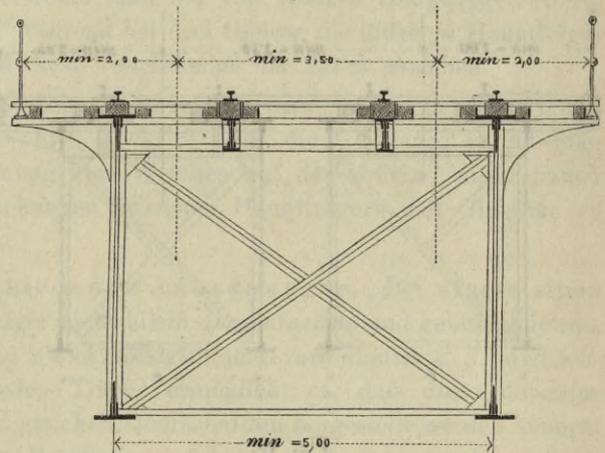
Hierbei ist:

$$f' = \frac{1}{6} f + \frac{z}{3} \left[c - w - \frac{z}{2} \right].$$

2. Die Anordnung mit drei Hauptträgern erfordert für den Fall, dafs die Gleisachsen in die Mitte zwischen je zwei Träger gelegt werden, eine Trägerentfernung $e = 3,5 \text{ m}$, sodafs die äufseren Träger dann voneinander um 7,0 m abstehen.

Das Kleinstmafs der Trägerentfernungen ergibt sich jedoch mit $\min e = 2,5 \text{ m}$, wobei die äufseren Schienenstränge über die äufseren Hauptträger zu liegen kommen.

Fig. 46.



⁷⁷⁾ Bei Erbauung neuer Bahnen ist eine Entfernung von Mitte zu Mitte der Gleise von mindestens 4 m empfohlen (Techn. Vereinbarungen vom Jahre 1882).

Im ersten Falle ist die größte Belastung durch die zufällige Last für den mittleren Träger doppelt so groß, wie für jene der äußeren; im zweiten Falle verhalten sich die

Fig. 47.

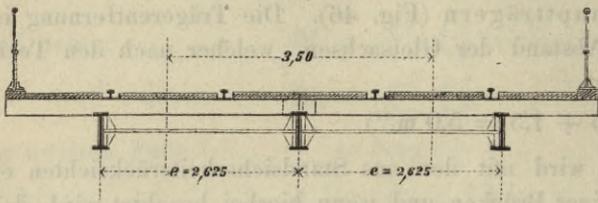


Fig. 48.

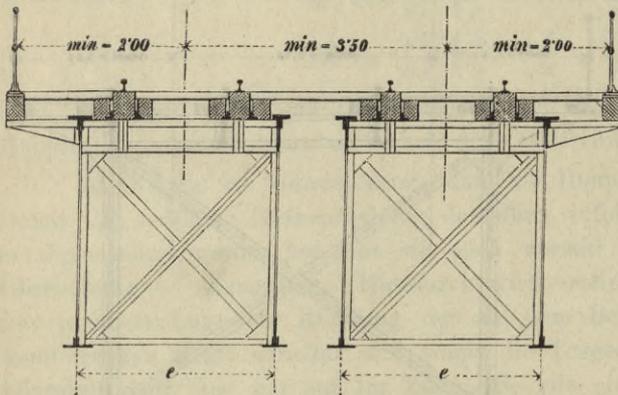
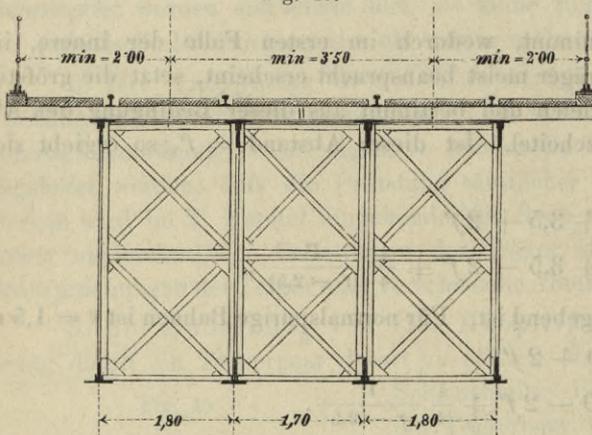


Fig. 49.



größten Belastungen der äußeren Träger zu jenen des mittleren wie 7:6. Sollen die größten Belastungen der Träger unter der zufälligen Last gleiche Größe erhalten, so müßte $e = 2,625$ m, also der Abstand der äußeren Träger $= 2e = 5,25$ m gemacht werden (Fig. 47).

3. Die Anordnung mit vier Hauptträgern kann auf zweierlei Art bewerkstelligt werden:

Erstens. Jedes Gleis erhält zwei zu einer eingleisigen Brücke verbundene Hauptträger, derart, daß die Anordnung aus zwei unmittelbar nebeneinander befindlichen eingleisigen, jedoch voneinander gänzlich unabhängigen Brücken besteht. Die Trägerentfernung ist dann für jede Brücke nach den Bestimmungen für eingleisige Brücken zu ermitteln (Fig. 48).

Zweitens. Je zwei der die Gleise tragenden Hauptträger werden in verhältnismäßig geringe Entfernungen voneinander gestellt und gegenseitig mittels Querverbänden in Zusammenhang gebracht (Fig. 49). Die kleinste Entfernung der äußeren Hauptträger beträgt

$$\min e = 3,5 + 1,5 = 5,0 \text{ m,}$$

wobei die äußeren Schienenstränge über den Hauptträgern liegen.

c) Brücken mit mehr als zwei Gleisen. Die Anordnungen der Hauptträger sind hier verschieden; die folgenden Arten sollen angeführt werden:

1. Jeder Schienenstrang wird von einem Hauptträger direkt getragen; die Entfernung der Hauptträger ist dann gleich der Gleisweite. Diese Anordnung findet Anwendung bei Brücken mit geringen Spannweiten, insbesondere bei Bahnhofsgleisen.
2. Jeder Schienenstrang wird von Zwillingsträgern aufgenommen. Bei kleinen Spannweiten bis zu etwa 10 m. Die Entfernung der Zwillingsträgermittel ist wie im früheren Falle gleich der Gleisweite.

3. Jedes Gleis erhält ein besonderes Hauptträgerpaar, das wie bei eingleisigen Brücken angeordnet wird. Die Gleisachsen fallen mit den Achsen der so entstandenen eingleisigen Brücken zusammen.
4. Man ordnet bei drei Gleisen vier, bei vier Gleisen fünf Hauptträger an, wobei die innen liegenden Hauptträger als gemeinsame Träger für je zwei Nachbargleise dienen. Die Entfernung der Hauptträger voneinander ist entweder gleich, oder es werden die äusseren Hauptträger in geringeren Entfernungen als die inneren angelegt. Im ersten Falle werden die inneren Träger stärker belastet, als die äusseren. Um eine gleichmässige Druckverteilung zu erzielen, können die äusseren Schienenstränge über die äusseren Hauptträger gelegt werden, wobei man bei vier Gleisen Hauptträgerentfernungen von je 3,0 m erhält, während bei drei Gleisen die äusseren Hauptträger 3,0 m von den inneren und diese voneinander um 2,5 m abstehen.
5. Wenn die Bettung auf der Brücke durchgeführt wird, so legt man die Hauptträger womöglich ebenfalls unter Rücksicht auf die Gleislage; es ist aber hier, besonders bei Anordnung von Weichen auf der Brücke, nicht immer möglich, regelmässige Beziehungen zwischen Hauptträgern und Gleislage zu erreichen.

Wertschätzung der verschiedenen Anordnungen. Bei eingleisigen Brücken ist die Anordnung zweier Träger nicht allein die einfachste und gebräuchlichste, sondern in den meisten Fällen auch die zweckmässigste und vorteilhafteste. Die gleichmässige Verteilung der Lasten auf jeden Träger ermöglicht es, dass diese durchaus übereinstimmend durchgebildet und mit gleichen Querschnitten hergestellt werden können, wodurch die Möglichkeit gleichmässiger Bearbeitung geboten und die gute Herstellung erleichtert wird. Die Stoffausnützung ist bei dieser Anordnung eine vollständigere, als dies bei einer grösseren Trägerzahl erreichbar, da der zur Herstellung eines jeden Trägers erforderliche Aufwand den theoretischen Bedarf übertrifft, und sonach dieser Überschuss um so grösser ausfallen wird, je grösser die Anzahl der Träger ist.

Mit der grösseren Trägerzahl wächst die Arbeit, sowohl bei Anfertigung der Träger in der Fabrik, als bei der Montierung und Aufstellung am Bauplatz. Es ist leicht einzusehen, dass diese Arbeit mit der zunehmenden Grösse des Bauwerkes wiederum wächst. Es ist ferner erforderlich, dass die Träger nicht blofs die genaue geometrische Gestalt erhalten, sondern sie müssen ausserdem in die richtige gegenseitige Lage gebracht und darin erhalten werden. Die genaue Herstellung der Träger und das Einbringen derselben in die richtige Lage, insbesondere die Gleichmässigkeit der Auflagerung auf den Widerlagern unter Erhaltung der vorgeschriebenen gegenseitigen Lage und das Anpassen der Verbandstücke ist um so schwieriger zu erreichen, je grösser die Trägerzahl.

Aus allen diesen Erwägungen ist ersichtlich, dass mit der Anordnung zweier Träger den gestellten Anforderungen am leichtesten entsprochen wird, und dass nur unter zwingenden Umständen die Anordnung einer grösseren Trägerzahl gerechtfertigt erscheint.

Bei zweigleisigen Brücken gelten die obigen Erwägungen gleichfalls, jedoch bleibt noch Folgendes hinzuzufügen.

Bei Anordnung zweier Hauptträger treten, unter Belastung nur eines Gleises, ungleichmässige Durchbiegungen der Träger auf, indem der dem belasteten Gleise nächstliegende Träger eine verhältnismässige grössere Durchbiegung erleidet, als der entferntere.

Hierdurch vollzieht sich eine Verwindung der Brücke — eine Torsion — die, wenn auch den Bestand des Bauwerkes nicht bedrohend, insbesondere die Querverbände, deren Zweck es ist, die Träger in ihrer gegenseitigen Lage zu erhalten, überaus ungünstig beansprucht. Eine gleiche Erscheinung findet auch bei Anordnung dreier Träger statt, wobei der mittlere derselben eine größere Widerstandsfähigkeit besitzen muß, als jeder der äußeren. In diesem Falle tritt noch der beachtenswerte Umstand hinzu, daß der mittlere stärkere Träger andere Abmessungen erhalten muß, als die beiden anderen, wodurch die Konstruktion notwendigerweise verwickelter wird.

Vier (nach Fig. 49, S. 174) miteinander verbundene Hauptträger, wovon je zwei einem Gleis zur Stützung dienen, werden bei Belastung eines Gleises gleichfalls verschiedene Formänderungen annehmen, indem die direkt belasteten Träger bei ihrer Durchbiegung mittelst des lotrechten Querverbandes die nachbarlichen Träger in Mitleidenschaft ziehen und hierdurch eine seitliche Verdrehung der Konstruktion erstreben. Es erhellt jedoch aus der Natur der ganzen Anordnung, daß in diesem Falle die Wirkung ungleicher Formänderung bei bloß einseitiger Belastung im Vergleich zu den früher besprochenen eine verhältnismäßig geringe sein wird. Diese Anordnung gestattet eine gleiche Trägenerausteilung und verhältnismäßig geringe Breitenausmaße der Pfeiler.

Durch die Möglichkeit, die Träger nahe aneinanderrücken zu können, ohne die Standsicherheit der Brücke zu gefährden, wird es möglich, die Querträger der Bahn leicht zu halten, sodaß das Eisengewicht bei dieser Trägeranordnung im Vergleich zu anderen sich sehr günstig stellt.

Die Anordnung gesonderter Brücken für jedes Gleis erfüllt in vollkommenster Weise die Bedingung des von der Belastung des Nachbargleises unabhängigen Verhaltens der Träger; ein Vorteil, der mit Rücksicht auf die Schonung der Konstruktion nicht hoch genug anzuschlagen ist. Außerdem ermöglicht diese Anordnung die dem ersten Bedürfnis oft genügende Ausführung von nur einer eingleisigen Brücke und erleichtert die Aufstellung der meist erst später erforderlichen zweiten Konstruktion. Hierdurch stellt sich das ursprüngliche Baukapital geringer und es wird, im Gegensatz zur Anlage einer gemeinsamen zweigleisigen Brücke, die durch Nichtausnützung des zweiten Gleises verlorene Verzinsung des bezüglichen Kapitalteiles vermieden.

Obschon im allgemeinen derartige Anlagen größere Pfeilerbreiten notwendig machen, als dies von Brücken mit nur zwei Trägern erforderlich sein würde, so beträgt dennoch bei mittleren Spannweiten, bis zu 30,0 m, diese erforderliche Mehrbreite nur 0,5 bis 1,0 m, wogegen das Gewicht der Eisenkonstruktion im Gegenhalte zu jenem zweigleisiger Brücken mit gemeinsamen Trägern sich hier entschieden günstiger stellt. Man kann daraus schließen, daß für Spannweiten über 30,0 m die Anordnung zweier und dreier Träger wirtschaftlich günstiger ist, als jene mit gesonderten Brücken für jedes Gleis, daß hingegen bei geringeren Spannweiten der letzten Anordnung unbedingt der Vorzug gegeben werden muß. Bei dieser Schlusfolge ist jedoch die Notwendigkeit gleichzeitiger Ausführung der beiden Gleise vorausgesetzt; unter anderen Umständen müßte erst eine besonders anzustellende Rechnung über die vorteilhafteste Anordnung entscheiden.

2. Brücken mit zwischen den Trägern liegender Bahn.

Die Entfernung der Hauptträger ist durch die Breitenmaße des für den Verkehr frei zu haltenden Raumes bestimmt, sodaß die Bahn seitlich durch die Träger abgegrenzt erscheint. In der Regel gelangen auch nur zwei Träger zur Verwendung und nur

ausnahmsweise, wenn die Bahn der Länge nach abgeteilt werden darf, oder bei kleinen Spannweiten und sehr beschränkter Konstruktionshöhe findet man mehrere Träger angeordnet. Die Trägerentfernung ist namentlich abhängig von der Umgrenzung des lichten Raumes, der Konstruktions- und der Trägerhöhe.

Die Umgrenzung des lichten Raumes ist gegeben durch die Bestimmungen der Technischen Vereinbarungen, die Konstruktionshöhe ist durch die örtlichen Verhältnisse bedingt. Die Trägerhöhe steht in Beziehung zur Spannweite, dem Trägersystem und wird auf Grund besonderer Erwägungen ermittelt.

In den nachfolgenden Erörterungen werden wir — wie fast überall üblich — die Bezeichnung „Bahniveau“ auf die Höhenlage der „Schwellenoberfläche“ in der Bahnachse beziehen und dafür den Ausdruck „Schwellenhöhe“, „Schwellenoberkante“ gebrauchen.

a) Eingleisige Brücken.

1. Bei Anordnung zweier Hauptträger (Fig. 50 u. 51) ist die erforderliche geringste Trägerentfernung aus der Umgrenzung des lichten Raumes (Fig. 50) und den über die Schienen hinausragenden Trägerhöhenabschnitten zu ermitteln. Nennt man:

- h die Trägerhöhe,
- b die größte Breite des Trägerquerschnitts,
- h' den Höhenunterschied zwischen Schwellenhöhe und Unterkante der Träger und
- u die Schienenhöhe,

so ist die Differenz $\Delta h = h - h'$ im Zusammenhalte mit dem Lichtraum maßgebend für die kleinsten Trägerabstände.

Aus der Umgrenzung des lichten Raumes folgt beispielsweise:

- für $\Delta h \leq 0,76 \text{ m} + u$, für $\text{min } e = 3,30 + b$,
- „ $\Delta h > 0,76 \text{ m} + u$, „ $\text{min } e = 4,00 + b$.

Die in Fig. 50 gezeichneten Linien entsprechen dem älteren Normalprofile, es ist jedoch zu beachten, daß die unteren Stufen desselben in vielen Fällen als zu eng bemessen sich ergaben. So z. B. haben die Schneepflüge einiger Bahnen größere Breitenmaße, als die untersten Stufen des Normalprofiles ausweisen, und es ist ferner darauf aufmerksam zu machen, daß selbst die Ausnutzung des Raumes der dritten Stufe in der Höhe $\Delta h = 0,76 + u$ bedenklich ist, da hierdurch Beschädigungen des Fahrpersonales veranlaßt werden können. Seit dem Jahre 1882 ist in den Technischen Vereinbarungen statt der unteren zwei Stufen eine Abschrägung empfohlen (Fig. 51); es entfällt daher für die Zukunft die volle Ausnutzung derselben (vergl. hierüber Kap. I, S. 77). Es ist auch zu beachten, daß seit dem genannten Jahre die untere wagerechte Linie des Lichtraumes 0,05 m über Schienenkopf liegt.

Die Trägerentfernung bei Brücken in Bahnkurven ergibt sich folgendermaßen:

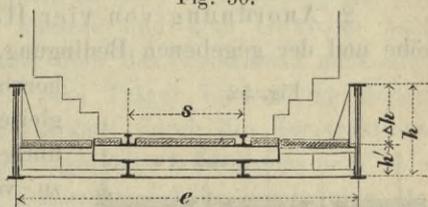


Fig. 50.

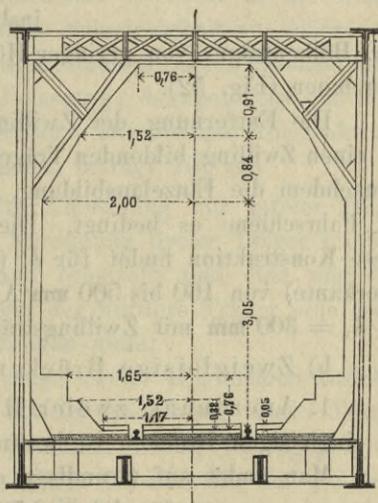


Fig. 51.

Nennt man allgemein die dem Lichtraum entsprechende und mit Δh veränderliche Breite β , die Schienenüberhöhung z , und mit Rücksicht auf das bei eingleisigen Brücken Gesagte den Abstand des Bogenscheitels von der Brückenachse f' , die Trägerlänge l und den Krümmungshalbmesser des Bogens r , so ergibt sich:

$$\min e = b + \beta + 2 \left[\frac{z}{s} \cdot \Delta h + \frac{1}{8} \frac{l^2}{r - \frac{\beta}{2}} - f' \right],$$

bezw. $\min e = b + \beta + 2f'$.

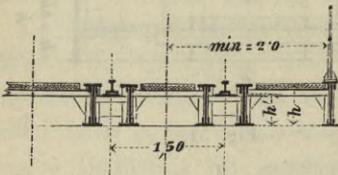
Von diesen Werten ist alsdann der gröfsere zu nehmen. Der erste Wert ist gröfser oder kleiner als der zweite, wenn

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{l^2}{r - \frac{\beta}{2}} + \frac{z}{s} \cdot \Delta h \geq 2f'.$$

Die Gröfse Δh hat selbstverständlich nur Bedeutung, insofern sie nicht gröfser ist als die Höhe des Lichtraumes selbst, d. h. Δh hat Geltung innerhalb der Grenzen Null und $(4,8 \text{ m} + u)$. Bei scharfen Kurven ist auch auf die Spurerweiterung der Gleise nach Mafsgabe bestehender Vorschriften Rücksicht zu nehmen.

2. Anordnung von vier Hauptträgern. Bei sehr beschränkter Konstruktionshöhe und der gegebenen Bedingung, dafs die Träger über das Niveau der Gleise nicht hervorragen dürfen, — was bei Brücken, die Bahnhofsgleise tragen, oft der Fall ist, — bleibt nichts anderes übrig, als die Spannweiten auf das zulässige Kleinmafz zu verringern, um möglichst geringe Trägerhöhen anwenden zu können, und wenn zwei Träger nicht ausreichen, die Trägerzahl zu vermehren. Im letzten Falle eignet sich insbesondere die Anordnung sogenannter „Zwillingsträger“,

Fig. 52.



d. h. Balkenträger von geringer Höhe, die zu zweien gekuppelt je einen Schienenstrang aufnehmen (Fig. 52).

Die Entfernung der Zwillingsträgerachsen entspricht dann der Gleisentfernung; die einen Zwilling bildenden Träger sind in Abständen von 300 bis 500 mm angeordnet, je nachdem die Einzelausbildung, insbesondere der erforderliche Raum zur Befestigung der Fahrschiene es bedingt. Die Trägerhöhe wird mit 300 bis 600 mm ausgeführt. Diese Konstruktion findet für h' (Höhendifferenz zwischen Schwellenhöhe und Trägerunterkante) von 160 bis 500 mm Anwendung. Spannweiten bis zu 10,0 m können selbst bei $h_1 = 300 \text{ mm}$ mit Zwillingsträgern überbrückt werden.

b) Zweigleisige Brücken.

1. Anordnung zweier Hauptträger. Die Trägerentfernung ist ähnlich wie bei eingleisigen Brücken zu bestimmen.

Man findet auf Grundlage einer Entfernung der Gleisachsen von 3,5 m:

$$\text{für } \Delta h \leq 0,76 + u, \min e = 6,80 + b,$$

$$\text{„ } \Delta h > 0,76 + u, \min e = 7,50 + b.$$

Liegt die Brücke in einer Bahnkurve, so ist mit Hinweis auf die bei eingleisigen Brücken gebrauchten Bezeichnungen:

$$\min e = b + \beta + 2 \left[\frac{z}{s} \cdot \Delta h + \frac{1}{8} \frac{l^2}{r - \frac{\beta}{2} - 1,75} - f' \right] + 3,5$$

bezw. $\min e = b + \beta + 2f' + 3,5,$

wobei, wie dort, der gröfsere der beiden Werte zu nehmen ist.

2. Anordnung dreier Hauptträger. Der Trägerabstand ist mit Rücksicht auf den Lichtraum und den kleinsten Abstand der Gleisachsen mit 3,5 m auszumitteln. Es ist der Abstand der Träger:

$$\begin{aligned} \text{für } \Delta h \leq 0,76 + u, \text{ min } e &= 3,30 + \frac{b}{2} + \frac{b'}{2}, \\ \text{„ } \Delta h > 0,76 + u, \text{ min } e &= 4,00 + \frac{b}{2} + \frac{b'}{2}, \end{aligned}$$

wenn mit b' die größte Breite des Querschnittes am mittleren Träger bezeichnet wird. In diesen Fällen liegt die Gleisachse nicht in der Mitte zwischen beiden Trägern; würde dies beabsichtigt, so ergäben sich andere Werte für die Trägerabstände.

3. Die Anordnung mit vier Hauptträgern entspricht der Anlage zweier nebeneinander befindlichen, eingleisigen Brücken, deren Trägerentfernung diesen gemäß zu bemessen ist.

Wertschätzung der verschiedenen Anordnungen. Eingleisige Brücken mit größeren Spannweiten müssen immer zwei Träger erhalten, deren Entfernung mindestens $4,00 + b$ beträgt. Bei kleineren Spannweiten können, wenn die Größen Δh dies gestatten, die Stufungen der Umgrenzung des lichten Raumes berücksichtigt werden, wodurch kleinere Trägerentfernungen und mithin kürzere und dem Gewichte nach leichtere Querträger erzielt werden. Dürfen die Träger über das Gleisniveau nicht oder nur um 0,05 m vorragen, so können ebenfalls noch zwei Träger Verwendung finden. Die Anwendbarkeit dieser Anordnung ist jedoch beschränkt durch die Konstruktionshöhe und die Spannweite. Es ist hier nämlich die Trägerhöhe h höchstens $= h' + u + 0,05$ m. Es ist somit die Trägerhöhe durch die Konstruktionshöhe beschränkt. Bei gegebenen Spannweiten kann der Fall eintreten, daß die Herstellung des benötigten Trägerquerschnittes konstruktive Schwierigkeiten verursacht. Hier ist es am Platze, durch Anordnung von „Zwillingsträgern“ die vorhandene Schwierigkeit zu heben. Im allgemeinen erfordern die Zwillingsträger an und für sich einen größeren Eisenaufwand, als zwei Träger von gleicher Höhe, Spannweite und Belastung; dagegen tritt auf Seite der ersteren eine Ersparnis am Material der Querträger ein. Die kleinste Konstruktionshöhe, die sich bei ausgeführten Zwillingsträgern vorfindet, beträgt 160 mm.

Bei zweigleisigen Brücken findet meist die Anordnung nur zweier Träger statt, da insbesondere bei größeren Spannweiten die Anordnung dreier Träger größere Auflagerbreiten erfordert, einen größeren Stoffaufwand erheischt und eine ungleichmäßige Konstruktion der Träger im Gefolge hat, indem der mittlere Träger eine zweimal so große Tragfähigkeit als jeder der äußeren erhalten muß.

Die Anordnung von vier Trägern bzw. die Anlage zweier eingleisigen Brücken nebeneinander erfordert noch größere Pfeilerbreiten als die Anordnung dreier Träger, stellt sich im Eisenbedarf etwas, wenn auch nicht erheblich höher, ist dagegen von dem wertvollen Vorteil begleitet, daß die Belastung eines Gleises nur auf die demselben angehörig Träger eine Wirkung ausübt und die nachbarliche Brücke hierdurch nicht beeinflusst wird, während bei Anordnung zweier oder dreier Träger die letzteren verschieden belastet werden, demnach verschiedene Biegungen annehmen und dadurch Verdrehungen der Brücke veranlassen. Der wirtschaftliche Vorteil, welcher mit der dem ersten Bedarfe genügenden Ausführung nur eines Gleises zusammenhängt und erst bei gesteigertem Verkehre und den zunehmenden Mitteln an die Herstellung eines zweiten Gleises heranzutreten erlaubt, findet auch für die letztgenannte Anordnung Bedeutung und Berechtigung.

3. Einfluss der Fußwege auf die Anordnung der Hauptträger.

Es ist notwendig, daß die Eisenbahnbrücken für Fußgänger begehbar sind; nicht bloß die Rücksicht auf die Bahnbeamten und Bahnarbeiter erfordert dies, sondern auch die Vorsicht, welche gebietet, bei eintretenden Unfällen die Brücken für die Reisenden benutzbar zu machen. Mitunter werden die Eisenbahnbrücken auch mit Fußwegen für den öffentlichen Verkehr ausgestattet, in welchem Falle dieselben bei tief liegender Bahn außerhalb der Hauptträger auf Auslegern zu liegen pflegen. Fußwege, welche lediglich dem Bahnbetrieb dienen, finden bei kleinen Bauwerken in unmittelbarer Nähe der Gleise ihren Platz, während es sich bei größeren Brücken empfiehlt, für die Fußwege einen Raum seitlich der Gleise zu schaffen, von dessen Abmessungen bereits die Rede gewesen ist (siehe S. 164). Als ein Mittelweg ergibt sich die Anordnung einzelner Erweiterungen des Brückenplanums behufs Herstellung von Ausweicheplätzen.

Die Anzahl der Hauptträger wird von den Fußwegen gewöhnlich nicht beeinflusst. Nur bei kleinen Trägerhöhen und namentlich bei der Anordnung von Zwillingsträgern (Fig. 52, S. 178) ordnet man in Abständen, welche sich aus der Breite der Fußwege ergeben, besondere Träger für die letzteren an; diese Träger liegen den Hauptträgern parallel, werden angemessen schwächer hergestellt als jene und sind mit ihnen durch schwache Querträger verbunden, auf welchen die Bahn des Fußweges ruht. — Im übrigen ist wegen der Anordnung der Fußwege bei Eisenbahnbrücken auf das Kapitel über die Brückenbahn zu verweisen.

4. Einfluss der Lage der Bahn auf die Wirtschaftlichkeit der Anlage.

Ein Vergleich zwischen den Brücken mit oben liegender Bahn mit jenen, wo die Bahn sich zwischen den Trägern befindet, führt zur Erkenntnis, daß bis zu Spannweiten von 60 m die Trägerentfernung bei ersteren im allgemeinen geringer ist, als bei letzteren. Infolge dessen erheischen die Brücken mit Bahn „unten“ größere Pfeilerbreiten. Weiter ergibt sich, daß bei oben liegender Bahn bei Trägerentfernungen bis zu 2,5 m, in Ausnahmefällen auch bis zu 3,0 m, die Anordnung von Bahnträgern (Schwellenträgern) entfallen kann, während die zwischen den Trägern liegende Bahn derselben unter allen Umständen bedarf. Die Bahnquerträger selbst fallen bei Bahn oben kürzer aus, erfordern somit weniger Eisen; diese Brücken ergeben sich demnach im Gewichte leichter, und zwar um so mehr, je kleiner die Spannweite ist. Man findet, daß bei kleinen Brücken bis zu 16,0 m Spannweite die Brücken mit unten liegender Bahn um 50 bis 100% schwerer sind, als jene mit Bahn oben, so zwar, daß bei Brücken mit 3,2 m Spannweite der letzte, bei solchen mit 16,0 m jedoch der erste Prozentsatz gilt. Je größer die Spannweite, desto geringer wird der Gewichtsunterschied, der für eingleisige Brücken bei Spannweiten zwischen 50 und 60 m dann verschwindet. Über 80 m hinaus erscheinen die eingleisigen Brücken mit Bahn unten sogar etwas leichter, als bei oben liegender Bahn, was mit der im letzten Falle erforderlichen größeren Trägerentfernung und dem Mehrbedarf an Aussteifungskonstruktionen zusammenhängt. Man vergleiche T. I, F. 18.

Obschon die Brücken mit Bahn unten stabiler sind, weil sie eine tiefere Schwerpunktlage haben, so ist andererseits zu beachten, daß für $\Delta h < 4,80 + u$ die Trägerwände über das Gleisniveau frei hervorragen müssen und demnach an und für sich

gegen seitlich wirkende Kräfte geringe Widerstandsfähigkeit besitzen, die zu vermehren wieder Aufwand an Aussteifungskonstruktionen erfordert, ohne dafs es hiermit möglich wird, der Brücke jene Steifigkeit zu geben, welche bei Brücken mit oben liegender Bahn durch einfache und wirksame Querverbände erzielt wird.

Überschreitet jedoch Δh die Gröfse $4,8 + u$, was schon bei Trägerhöhen von 6,0 m — also für $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ bei Spannweiten von 60,0 m — der Fall ist, so ist die Möglichkeit geboten, die Hauptträger auch oben gegenseitig zu verbinden und dadurch eine geschlossene Konstruktion des Querschnittes herzustellen.

Bei gröfseren zweigleisigen Brücken, die bei Lage der Bahn zwischen den Trägern, insbesondere für Bahn „unten“, einen Abstand der Hauptträger von 7,7 bis 8,0 m erfordern, stellt sich das Konstruktionsgewicht immer höher, als bei Brücken mit oben liegender Bahn. Überblickt man die Verhältnisse der Anordnungen der Brücken, wie sich dieselben infolge des Einflusses der Bahnlage gestalten, so gelangt man zu der Erkenntnis, dafs die Brücken mit Bahn „oben“ in den weitaus meisten Fällen die wirtschaftlich günstigste Anordnung gestatten. Auch der Bedarf an Pfeilerbaustoff ist für Brücken mit oben liegender Bahn wegen der geringeren Pfeilerhöhen geringer, so wie auch die Montierungsgerüste leichter und billiger herstellbar sind, als — gleiche Umstände vorausgesetzt — bei Brücken mit unten liegender Bahn.

§ 29. Anordnung der Brücken für Nebenbahnen. Die allgemeinen Grundsätze, welche für die Anordnung des Überbaues der Brücken in Hauptbahnen entwickelt wurden, finden auch auf Nebenbahnen Anwendung. Die Brücken der Nebenbahnen unterscheiden sich von jenen der Hauptbahnen insbesondere dadurch, dafs dieselben mit Rücksicht auf die besonderen Verkehrsverhältnisse, wie diese dem Zwecke und der Anlage der Nebenbahnen entsprechen, angeordnet werden. Da aufser den mit normaler Spurweite angelegten Nebenbahnen auch solche mit schmaler Spur ausgeführt werden, so wird hinsichtlich der Anordnung des Überbaues zu unterscheiden sein zwischen Brücken für normalspurige und für schmalspurige Bahnen.

Für Brücken normalspuriger Bahnen gelten die bei Hauptbahnen maßgebenden Anordnungen hinsichtlich der Entfernung und der Anzahl der Hauptträger, da die Bedingungen, welche auf die Ausmafs der Umgrenzung des freien Raumes gegründet sind, auch bei normalspurigen Nebenbahnen zutreffen. Obwohl im allgemeinen die Brücken für normalspurige Nebenbahnen ein geringeres Eigengewicht haben, weil die hier verkehrenden, der Konstruktion zu Grunde zu legenden Lokomotivlasten kleiner sind, so können dennoch die für Brücken mit oben liegender Bahn mit Rücksicht auf Winddruck entwickelten Entfernungen der Hauptträger für Hauptbahnen auch hier Anwendung finden. Der Einfluß des geringeren Eigengewichtes der Brücken wird durch den hier wohl zulässigen geringeren Wert des Sicherheitskoeffizienten aufgewogen werden.

Bei Brücken für schmalspurige Bahnen ist neben der Gröfse der Spurweite die hier einzuhaltende Umgrenzung des freien Raumes für die Anordnung der Hauptträger in derselben Art maßgebend, wie dies für Brücken der Hauptbahnen der Fall war.

1. Brücken mit Bahn „oben“. a) Anordnung zweier Hauptträger. Ist die Gleisweite = s , so ist die Entfernung der beiden Hauptträger *min* $e = s$.

Rücksichtlich der Standsicherheit des Überbaues gegen Winddruck wird bemerkt, dafs wegen der geringeren Standsicherheit unbeladener Wagen die Stärke des gegen die belastete Brücke wirkenden Windes erheblich geringer angenommen werden mufs, als bei Hauptbahnen. Einschlägige Berechnungen zeigen, dafs hier die Wirkung des Wind-

druckes gegen die unbelastete Brücke (280 kg f. d. qm) als maßgebend für die Entfernung der Hauptträger anzusehen sein würde.

Nimmt man für das durchschnittliche Gewicht des Überbaues f. d. lfd. m $g = 20 l + 520 \text{ kg}$ an, so ergibt sich nach der auf S. 167 angestellten Entwicklung

$$\min e' = 6,7 \frac{h^2}{l + 26}$$

als kleinster Abstand der Hauptträger.

Bei Brücken, die in Bahnkurven liegen, können die Hauptträger in ähnlicher Weise wie bei Hauptbahnen angeordnet werden, wenn man nicht vorzieht, die Überhöhung der äußeren Schiene durch Höherlagerung des einen Hauptträgers herzustellen.

b) Anordnung von drei und vier Hauptträgern. Hier gelten die allgemeinen, für Hauptbahnen entwickelten Grundsätze.

2. Brücken mit unten liegender Bahn. Es werden wohl meist zwei Hauptträger Anwendung finden. Die Entfernung derselben muß dem freizuhaltenden Raume entsprechen. Nach den „Grundzügen“⁷⁸⁾ soll die Spurweite 1,0 oder 0,75 m betragen.

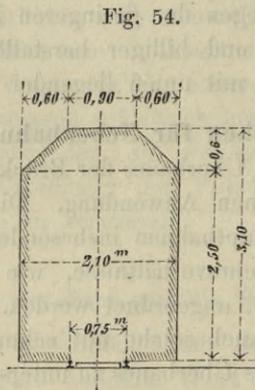
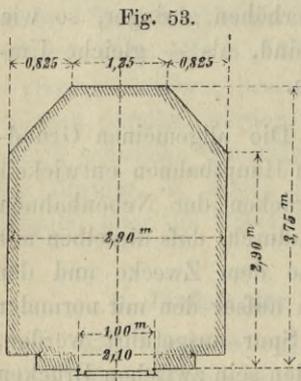
Für die erstere ist eine Breite des Lichtraumes von 2,9 m, für die zweite eine solche von 2,1 m festgesetzt. Diese Lichträume schließen in der Höhe des Schienenkopfes ab, s. Fig. 53 u. 54.

Hiernach würde die Entfernung der Hauptträger

$$\min e = 2,9 + b; \text{ bzw.}$$

$$\min e = 2,1 + b \text{ betragen,}$$

wobei b die größte Breite des Hauptträgerquerschnittes bedeutet.



Ragen die Hauptträger um $\Delta h \geq 3,75 + u$, bzw. um $\Delta h \geq 3,1 + u$ über Schwellenhöhe vor, so können die Hauptträger auch oben durch Querverbände verbunden werden, wogegen für $\Delta h < 3,75 + u$ bzw. $\Delta h < 3,1 + u$ ein offenes Querprofil entsteht.

§ 30. Anordnung der Hauptträger der Strafenbrücken. Die Anordnung der Träger steht im Zusammenhange mit der Breite, dem Querschnitt und der Konstruktion der Bahn; sie ist abhängig von der Konstruktions- und Trägerhöhe.

Die Breite und der Querschnitt der Bahn werden bedingt von den Verkehrsverhältnissen und sind demnach abhängig von der Wegegattung (Hauptstrafe, Feldweg, Fußweg u. s. w.), der Art und Größe des Verkehrs und dem Orte der Brücke. Insbesondere erlangt dies bei Anordnung des Brückenquerschnittes Bedeutung. Die Verkehrsverhältnisse beeinflussen dermaßen diese Anordnung, daß aus derselben wieder auf die Natur des Verkehrs selbst zurückgeschlossen werden kann.

Hierauf bezüglich unterscheidet man:

- a) Strafenbrücken ohne besondere Fußweganlagen,
- b) Strafenbrücken mit besonderen Fußwegen,
- c) Brücken für Fußgänger.

⁷⁸⁾ Grundzüge für den Bau und Betrieb der Lokaleisenbahnen. Herausgegeben von der geschäftsführenden Direktion des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen. Berlin 1887.

Zur Beurteilung und Bemessung der erforderlichen Breitenmaße der Straßenbrücken sei bemerkt, daß schwerbeladene Wagen mit einer Breite von 2,6 m, zwei-spännige leichtere Fuhrwerke mit 1,5 bis 1,7 m, die Wagen normalspuriger Pferdeisenbahnen mit 2,2 m, ein Reiter mit 0,9 m und ein Fußgänger mit 0,6 m Breite in Rechnung gezogen werden können. Zwischen den einander begegnenden Fuhrwerken, sowie zwischen diesen und den Tragwänden der Konstruktion oder den Geländern muß ein gewisser Spielraum vorgesehen werden; die Größe desselben hängt wesentlich von der Verkehrsgröße und der Länge der Brücke ab. Ein Zuschlag zur Wagenbreite von beiderseits 0,3 bis 0,4 m ist hierzu ausreichend. In dem Falle, wo die Fußwege unmittelbar zu beiden Seiten der Fahrbahn liegen, ist es zulässig, die Ausladung der Fuhrwerke bis knapp an die Fußweggrenze anzunehmen; ausnahmsweise ist auch ein geringes Übertreten der Fußwege gestattet. Die lichte Höhe über der Bahn ist mit 4,5 bis 5,4 m zu bemessen.

Ist nun die Anzahl und Größe der Fuhrwerke, sowie die Zahl der Fußgänger, welche gleichzeitig nebeneinander eine Brücke zu benutzen im Stande sein sollen, bekannt, so ist es nicht schwer, nach obigen Angaben die erforderlichen Breitenmaße der Brücke zu ermitteln.

1. Brücken mit oben liegender Bahn.

Die Fahrbahntafel (Bahnunterlage) liegt auf den Hauptträgern entweder direkt oder mittels des Fahrbahngerippes (der Bahnträger) auf. Die Entfernung der Hauptträger bzw. jene der Bahnträger ist demnach in engem Zusammenhange mit der Tragweite der Bahnunterlagen stehend. Letztere ist abhängig von der Belastungsgröße, deren Wirkungsart und der Widerstandsfähigkeit der Bahnunterlagen. Die üblichen Konstruktionen weisen Tragweiten von 0,8 m bis 2,0 m auf, es werden demnach die Entfernungen der Hauptträger bzw. der Bahnträger innerhalb dieser Grenzen anzuordnen sein.

In Bezug auf die erforderliche Standsicherheit des Überbaues gegen seitlich wirkende wagerechte Kräfte ist zu bemerken, daß die Breite der Bahn und damit auch die Entfernung der äußersten Träger eine solche Größe erhält, die in den weitaus meisten Fällen auch die Standfähigkeit der Brücke sichert. Nur bei sehr geringen Bahnbreiten, wie beispielsweise bei Fußstegen, würde behufs Erzielung der erforderlichen Sicherheit die Trägerentfernung mit Rücksicht auf die Wirkungen des Winddruckes auszumitteln sein. Es würde dann in gleicher Weise, wie dies im § 28 gefunden, der Wert

$$\min e' = 2 W \cdot \frac{F \cdot h \cdot m}{g}$$

in Betracht gezogen werden müssen.

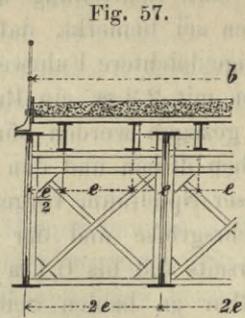
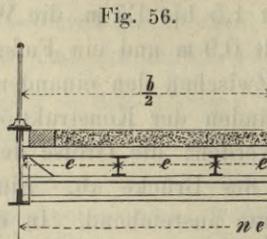
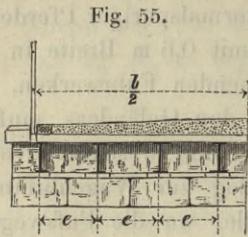
a) Straßenbrücken ohne Fußweganlagen. Die Bahn bildet hier eine durchlaufende, seitlich durch das Gelände abgegrenzte Fläche. Der Bahnkörper ruht mittels seiner tragfähigen Unterlage auf den Hauptträgern bzw. den Bahnträgern, welche meist in gleichen Abständen voneinander angeordnet sind. — Ist

b die Breite der Bahn zwischen den Geländern,

e der Abstand der Träger, und

n deren Anzahl,

so ist $b = (n - 1) e$, woraus $n = \frac{b}{e} + 1$ folgt (s. Fig. 55, bei Anordnung von Bahnträgern Fig. 56 u. 57). e ist der Tragweite der Bahnunterlage angemessen, wobei n selbstverständlich eine ganze Zahl.



b) Strafsenbrücken mit besonderen Fußweganlagen. Ist ein größerer Personenverkehr über die Brücke zu gewärtigen, so erfordert es die Rücksicht auf unbehindertes Begehen der Brücke, daß die Bahn für Fuhrwerke von jener der Fußgänger geschieden werde. Die Höherlegung der letzteren über das Niveau der Fahrbahn läßt in einfacher und wirksamer Weise diesen Zweck erreichen, ohne den Personen die Möglichkeit des Übertritts von einer Bahn zur anderen zu benehmen.

Die Anordnung der Träger kann dann in mannigfacher Art erfolgen; im Folgenden werden die einfachsten und gebräuchlichsten Anordnungen vorgeführt:

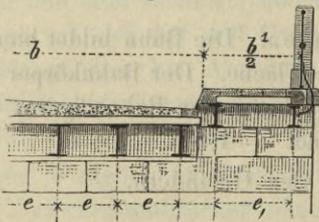
1. Die Austeilung der Träger findet ohne Rücksichtnahme auf die Verschiedenheit der Bahnen statt, indem die Träger der Gesamtbreite der Bahn (d. i. Fahrbahnbreite + Fußwegbreite) entsprechend gleichmäßig ausgeteilt, und die beiden auf gemeinsamer Unterlage ruhenden Bahnen selbst bloß durch die Konstruktion des Bahnkörpers hergestellt werden.

2. Die Trägersausteilung unter der Bahn folgt den Anordnungen der Bahnen derart, daß Fahr- und Fußwege eine verschiedene Austeilung der Träger erhalten. Es können hierauf bezüglich folgende Anordnungen Platz greifen:

α. Die beiden Bahnen sind voneinander vollständig getrennt und unabhängig; die Fahrbahn und die Fußwege haben, ein jedes für sich, besondere Träger. Dieser Anordnung, die bei kleinen Spannweiten vorteilhaft Verwendung finden kann, entspricht Fig. 58.

β. Die Anordnung der Träger erfolgt zunächst für die Fahrbahn, so zwar, daß der Raum zwischen den äußersten, in die Grenze der Fahrbahnbreite fallenden Trägern — die man „Grenzträger“ nennen könnte — in eine Anzahl gleicher Teile für die Zwischenträger unterteilt wird. Die „Grenzträger“ dienen hierbei gleichzeitig als gemeinsame Träger für Fahrbahn und Fußweg, und letzterer erhält außer diesem noch einen äußeren, meist auch die Geländer tragenden Träger von entsprechend schwächerer Konstruktion, s. Fig. 59.

Fig. 58.



γ. Die Träger der Fahrbahn werden unter derselben nach Bedarf ausgeteilt, wogegen die Fußwege von besonderen Auslegern, welche seitlich der äußersten Träger an denselben befestigt sind, getragen werden, s. Fig. 60.

Fig. 59.

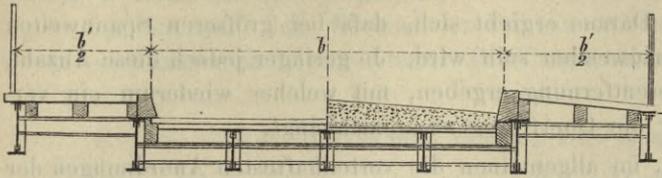
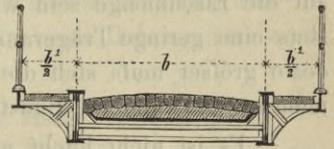


Fig. 60.



c) Brücken für Fußgänger. Diese Brücken gehören zu den selteneren Ausführungen. Sie erhalten in der Regel nur zwei Träger, deren Entfernung gleich der Fußwegbreite ist. Da diese Brücken ihrer Natur nach in der Regel sehr leicht zu halten sind und meist, ihrer geringeren Breite wegen, nahe gestellte Hauptträger haben, so ist eine Untersuchung auf Standfähigkeit gegen Winddruck anzustellen und falls diese durch die Trägerentfernung nicht gesichert erscheint, muß eine anderweitige, auf den Pfeilern anzuordnende Aussteifungs-Konstruktion Anwendung finden.

Wertschätzung der verschiedenen Anordnungen der Träger. Die Anzahl der Hauptträger ist vom theoretischen Standpunkte für die Wirtschaftlichkeit der Anlage gleichgiltig, da das gesamte Tragvermögen derselben den aufzunehmenden Lasten entsprechen, also für einen gegebenen Fall konstant sein muß. Vom Gesichtspunkte der Ausführung betrachtet ist jedoch zu berücksichtigen, daß die konstruktive Durchbildung der Träger immer einen Mehraufwand an Baustoff gegenüber dem theoretischen Erfordernis notwendig macht. Dieser Mehraufwand ist um so größer, je kleiner die theoretische Eisenmenge je eines Trägers im Verhältnis zur ausführbaren ist, woraus folgt, daß derselbe mit der Trägeranzahl wächst.

Das angewandte Trägersystem ist indessen auch von Einfluß. Trägersysteme, bei welchen das Eisen mit seiner Normalfestigkeit allein Widerstand leistet, gestatten eine vollständigere Ausnutzung des Baustoffes, also eine größere Annäherung der auszuführenden Querschnitte an das theoretische Erfordernis, als jene, bei welchen der Biegungswiderstand zur Wirkung kommt. So wird beispielsweise bei Anwendung von Bogenträgern die Anordnung einer größeren Anzahl von Trägern sich vorteilhaft erweisen können, während bei Balkenträgern und namentlich bei Blechträgern — unter sonst gleichen Umständen — dieselbe für die vorteilhafteste Anordnung geringer gewählt werden mußte.

Bei kleinen Spannweiten ist im allgemeinen die Anordnung einer größeren Trägerzahl nicht unvorteilhaft, indem hierdurch die Trägerentfernung derart verringert werden kann, daß die Notwendigkeit der Einschaltung besonderer Bahnträger entfällt. Dieses Ersparnis kann den Mehraufwand an Baustoff für die Hauptträger ganz oder teilweise aufwiegen. Hierzu kommt noch, daß die Konstruktion, insbesondere jene der Bahn und deren Verbindung mit den Trägern an Einfachheit gewinnt, was von Bedeutung ist, da dieser Umstand um so mehr ins Gewicht fällt, als das an und für sich geringe Baustoffvermögen von Brücken kleiner Spannweiten, also auch der durch die vermehrte Trägerzahl herbeigeführte Mehraufwand und die damit zusammenhängende Mehrarbeit nur unerheblich im Vergleiche zu den erzielbaren Vorteilen sich erweisen wird.

Bei größeren Spannweiten, wo der Eisenaufwand für den einzelnen Hauptträger — selbst für den Fall, daß derselbe mit möglichst geringen Abmessungen ausgeführt würde — ein beträchtlicher ist, kommt der zur Herstellung erforderliche größere Arbeits-

aufwand mit zur Geltung. Derselbe wächst natürlich mit der Trägeranzahl und ist auch dann ausschlaggebend, wenn die Anzahl der Träger ohne erheblichen Einfluss auf die Eisenmenge sein würde. Daraus ergibt sich, dass bei größeren Spannweiten stets eine geringe Trägeranzahl anzuwenden sein wird. Je geringer jedoch diese Anzahl, desto größer muss sich die Trägerentfernung ergeben, mit welcher wiederum ein vermehrter Aufwand an Baustoff für die Querträger zusammenhängt.

Es ist nicht leicht möglich, im allgemeinen die vorteilhaftesten Anordnungen der Träger durch Zahlen zum Ausdruck zu bringen; es ist vielmehr Aufgabe einer anzustellenden besonderen Rechnung, die einem gegebenen Falle entsprechende günstigste Anordnung zu ermitteln.

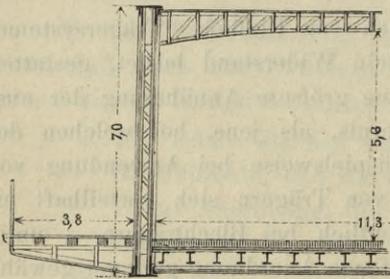
Hinsichtlich der Träger der Fußwege ist zu bemerken, dass nur bei kleinen Spannweiten eigene, die Spannweite übersetzende Träger vorteilhafte Anwendung finden. Bei größeren Spannweiten hingegen ist es meist das beste und zweckmäßigste, für die Fußwege Ausleger anzuordnen.

2. Die Bahn liegt zwischen den Trägern.

Die Hauptträger ragen hier über das Niveau der Straße vor, weshalb deren Entfernung der erforderlichen Bahnbreite angemessen sein muss. Es finden demgemäß in der Regel nur zwei Hauptträger Anwendung. Nur dort, wo eine Unterteilung der Bahn statthaft ist, kann eine größere Trägerzahl angeordnet werden.

Fig. 61.

*Brücke über den Donaukanal
in Wien.*



Bezüglich der Trägerentfernung ist auch hier in Betracht zu ziehen, ob besondere Fußweganlagen anzubringen sind und ob dieselben zwischen den Trägern oder außerhalb derselben angeordnet werden.

Im ersten Falle ist die Trägerentfernung

$$e = b + b + \beta,$$

wobei

b die Breite der Fahrbahn,

b , die Breite der Fußwege, und

β die Breite des Trägerquerschnittes

bedeutet.

Im zweiten Falle ist $e = b + \beta$, die Fußwege liegen außerhalb der Träger, sind von der Fahrbahn durch die Träger selbst getrennt und werden von Kragträgern getragen (Fig. 61, Brücke über den Donaukanal in Wien).

Diese Anordnung hat gegenüber der ersten den Vorteil, dass die Querträger um die Breite der Fußwege kürzer und daher entsprechend leichter ausfallen.

§ 31. Vereinigte Brücken für Straßen und Eisenbahnen. Die gemeinschaftliche Überführung von Straße und Eisenbahn mittels einer Brücke bietet bedeutende, insbesondere jedoch wirtschaftliche Vorteile dar. Für die betreffenden Anordnungen sind im allgemeinen die Höhenlagen der Bahnen maßgebend, und man unterscheidet hinsichtlich der Anzahl und Entfernung der Hauptträger zwei Fälle:

1. Die Bahnen befinden sich in derselben oder in nur wenig verschiedener Höhe. Alsdann gelangen zwei nebeneinander gelegene Brücken, von welchen jede einer der zu überführenden Wegegattungen besonders angehört, zur Anwendung.

2. Die Bahnen liegen in verschiedenen Höhen. In diesem Falle ordnet man eine einzige Brücke an, welche gleichzeitig beiden Wegegattungen dient, so zwar, daß die eine der Bahnen zwischen, die andere hingegen über die Träger zu liegen kommt. Die Träger sind dann für beide Bahnen gemeinsam.

1. Die Bahnen befinden sich in gleicher Höhe.

Abgesehen von der vergleichsweise seltenen Herstellung einer Brückenbahn, welche abwechselnd dem Strafsenverkehr und dem Eisenbahnverkehr dient (s. Kap. I, S. 79), sind zwei Anordnungen namhaft zu machen:

- a) Für jede Wegegattung wird eine besondere Brücke hergestellt, sodafs zwei nebeneinander befindliche Brücken entstehen, wovon jede von der anderen unabhängig ist, und blofs die Pfeiler beiden gemeinsam sind.
- b) Die nebeneinander befindlichen Brücken haben einen gemeinsamen Zwischen-Hauptträger, der sowohl der Strafsen als der Eisenbahn zugleich dient (Fig. 62, Brücke über den Rhein bei Konstanz).

Fig. 62.

Brücke über den Rhein bei Konstanz.



Fig. 64.

Elbebrücke bei Aussig.

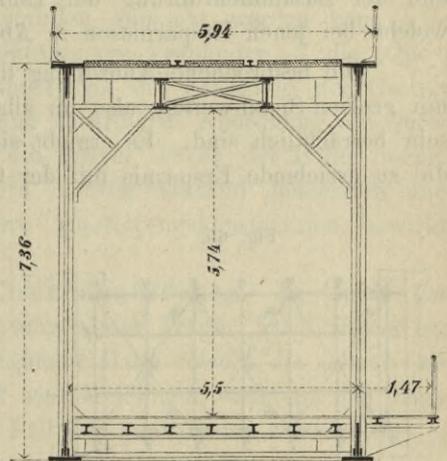
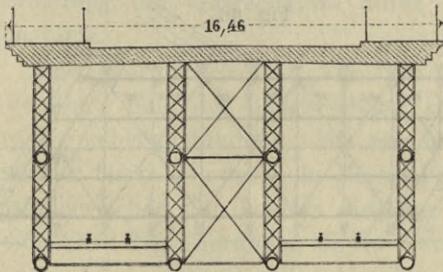


Fig. 63.

Brücke über den Mississippi bei St. Louis.



Die Entfernung der Hauptträger ist für beide Anordnungen nur abhängig von den durch die zu tragenden Verkehrswege gegebenen Bedingungen. Es werden hiernach die Träger der Strafsenbahn in Entfernungen zu setzen sein, welche dieser entsprechen, wogegen die Träger der Eisenbahn mit Rücksicht auf die Gleise und den Lichtraum auszuteilen sind. Der Fall b) unterscheidet sich von dem ersten nur dadurch, daß statt der beiden unmittelbar nachbarlichen ein gemeinsamer Träger angeordnet ist.

2. Die Bahnen befinden sich in verschiedener Höhe.

Diese Anordnung setzt voraus, daß die Trägerhöhe ein Übereinanderlegen der Bahnen gestattet. Da die eine der Bahnen zwischen den Trägern anzuordnen ist, so muß die Trägerentfernung der notwendigen Breite dieser Wegeart entsprechen. Genügt dieser Trägerabstand auch der oben befindlichen Bahn, so finden in der Regel zwei

Hauptträger Anwendung (Fig. 64, Elbbrücke der österreichischen Nordwestbahn bei Aussig). Dasselbe gilt von Bogenbrücken, welche oben eine Eisenbahn und in der Höhe der Bogensehne eine an die Bogen gehängte Fahrbahn tragen, was indessen nur selten vorkommt. Man vergleiche die hiermit verwandte Anordnung der Strafsenbrücke Luiz I. über den Douro bei Oporto (s. die 5. Abteilung dieses Werkes, Kap. XVI).

Erfordert dagegen die obere Bahn eine gröfsere Trägerentfernung, so können zweckmäfsig auch vier Hauptträger angeordnet werden, deren Abstand dann mit Rücksicht auf den unteren Verkehrsweg so auszumitteln ist, dafs der erforderliche Raum hergestellt und die Querträger die angemessene Länge erhalten (Fig. 63, Brücke über den Mississippi bei St. Louis).

Wertschätzung dieser Anordnungen. Ein grosser Vorteil derartiger Anlagen liegt in der hiermit zu erreichenden Ersparnis an Pfeilermauerwerk, die insbesondere dann von hervorragender Bedeutung ist, wenn schwierige und kostspielige Gründungen notwendig werden. Namentlich die Anordnung mit übereinander befindlichen Bahnen ermöglicht die Erzielung erheblicher wirtschaftlicher Vorteile, da nicht blofs die Gründung und der Mauerwerksaufwand, sondern auch der Aufwand an Eisen gegenüber der Anordnung von zwei gesonderten Brücken wesentliche Einschränkungen erleidet. Allerdings ist zu beachten, dafs die Mafsnahmen zur Gewinnung der erforderlichen Höhe und der Zusammenführung der Linien gleichfalls mit Kosten in Verbindung stehen, welche bei jenen Ersparnissen in Absatz gebracht werden müssen.

Die besprochene Anordnung findet selbstverständlich nur Anwendung bei Brücken mit grossen Spannweiten, also im allgemeinen dort, wo die Kosten der Pfeilerherstellung sehr beträchtlich sind. Es ergibt sich hieraus, dafs unter sonst gleichen Umständen die zu erzielende Ersparnis mit der Gröfse der Spannweiten wächst.

Fig. 65.

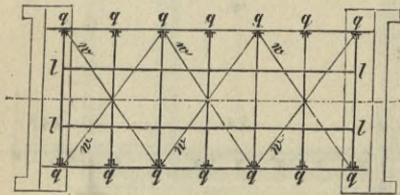
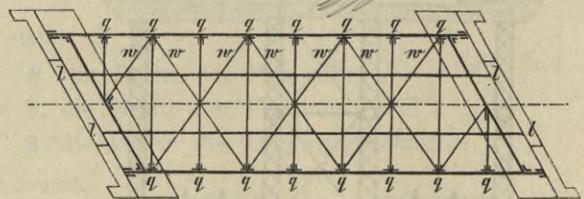


Fig. 66.



§ 32. Allgemeine Anordnung der Zwischenkonstruktionen. Die Teile des Überbaues, welche sich zwischen die Hauptträger einfügen und dementsprechend Zwischenkonstruktionen oder Querkonstruktionen genannt werden, sind nach Zweck und Vorkommen bereits in § 27 vorläufig besprochen. Auf das dort Gesagte hinweisend, genügt es, an dieser Stelle die bei Eisenbahnbrücken oft vorkommenden Anordnungen, welche in den Fig. 65 u. 66 dargestellt sind, als Beispiele vorzuführen. Dieselben zeigen die Querträger q und die von denselben unterstützten Bahnträger ll für eine gerade bzw. für eine schiefe Brücke; bei letzterer kommen zwei „schiefe Querträger“ vor. Auf die sonstigen Zwischenkonstruktionen soll in Nachstehendem näher eingegangen werden.

Die Konstruktion und Abmessung der Haupt-, Quer- und Bahnträger erfolgt hauptsächlich auf Grundlage der dieselben angreifenden äusseren lotrechten Kräfte, die von den Verkehrslasten und dem eigenen Gewichte der Konstruktion herrühren. Sie er-

halten hiernach hauptsächlich den angemessenen lotrechten Widerstand. Der Widerstand des Überbaues gegen wagerechte Kräfte, den Winddruck, die Fliehkraft, die seitlichen Stöße der Fahrzeuge u. s. w. muß aber ebenfalls vorhanden sein und dieser wird in zweckmäßigster und einfachster Weise dadurch erzielt, daß die Träger wagerecht miteinander in eine Verbindung gesetzt werden, welche den Überbau auch in dieser Hinsicht standfähig macht. Diese Verbindung wird naturgemäß von den Stützpunkten der Träger aus längs derselben sich erstrecken müssen. Im allgemeinen wird dieser „Längsverband“ (auch „Horizontalverband“ oder „horizontaler Querverband“ u. s. w. genannt) an den Hauptkonstruktionsteilen der Hauptträger — den Gurtungen — anzubringen sein und demnach längs derselben sich entwickeln.

Denkt man sich einen ebenen Schnitt normal zur Brückenachse durch den Überbau geführt, so entsteht durch den Schnitt mit den lotrechten Trägerebenen und den Flächen, in welchen sich der Längsverband befindet, im allgemeinen ein Rechteck. Es ist klar, daß die bloße Anordnung des Längsverbandes der Gurte nicht ausreicht, um die Standsicherheit einer derartig verbundenen Konstruktion gegen wagerechte Seitenkräfte zu sichern, und daß zu diesem Zwecke noch eine andere besondere Zwischenkonstruktion angeordnet werden muß. Zugleich ist ersichtlich, daß eine Formveränderung des entstandenen Rechtecks in einfachster und zweckmäßigster Art durch Einschaltung von Konstruktionsgliedern, deren geometrische Achsen in die Diagonalen des Rechteckes fallen, verhindert und die Konstruktion zu einer stabilen gemacht werden kann. Es ist also nebst dem Längsverband noch eine zweite Gattung von Verbänden — die „Querverbände“ oder „Querversteifungen“ —, deren Hauptzweck die Erhaltung der Gestalt des Querschnittes ist, notwendig. Jene einfachste und natürlichste Anordnung von Querverbänden ist aber nur dann durchführbar, wenn die Träger unter der Bahn liegen, wogegen bei Lage der Bahn zwischen den Trägern hiervon Abstand genommen und die Erhaltung des Querschnittes durch eine andere Aussteifungskonstruktion bewirkt werden muß.

Anordnung des Längsverbandes bei Eisenbahnbrücken. Es wurde bereits erwähnt, daß der Längsverband an den Gurtungen der Träger anzubringen ist, und es ist selbstverständlich, daß nur bei oben liegender Bahn sowohl die oberen als die unteren Gurte hierdurch in Verbindung gesetzt werden können, während bei Lage der Bahn zwischen den Trägern dies nur dann der Fall sein kann, wenn $\Delta h > 4,8 + u$ ist. Sonst ist die Anordnung dieses Verbandes nur an den Untergurten möglich.

Der Längsverband selbst besteht aus geraden stabförmigen Gliedern, deren Achsen mit den zu verbindenden Gurtungen eine Aneinanderreihung von Dreiecken bilden. Zumeist findet man diesen Verband durch normal zu den Gurten gelegte Konstruktionsglieder und diagonal in den so entstandenen Rechtecken angeordnete Stäbe hergestellt. Dem Grundsätze folgend, daß — wo dies thunlich — direkte Verbindung und unmittelbare Anknüpfung an bereits anderweitig festgelegte Punkte die beste Konstruktionsregel ist, verlegt man die Knotenpunkte des Längsverbandes in die entsprechenden Orte der Hauptträger. Es sind dies die Orte, wo sich die Querträger an die Gurte anschließen, die schon an und für sich als Verbindungskonstruktion zur Geltung kommen und welche selbst wieder in den Knotenpunkten der Hauptträger angeordnet werden. Wo Querträger nicht vorhanden sind, wird dahin zu streben sein, die Knotenpunkte des Längsverbandes in die Nähe der Knotenpunkte der Hauptträger, oder bei vollwandigen Trägern an Orte, wo sich lotrechte Aussteifungen befinden, zu verlegen. Man vergl. Fig. 65 u. 66, woselbst die Stäbe des Längsverbandes mit w bezeichnet sind.

Da der Längsverband die Verbindung der Träger zu einem widerstandsfähigen Ganzen gegen wagerechte seitliche Kräfte, deren wichtigste der Winddruck ist, bezweckt, und die Größe des Winddruckes insbesondere maßgebend für die Querschnittsbestimmung dieses Verbandes erachtet wird, so erscheint die oft vorkommende Benennung desselben: „Windverband“, „Windverstrebung“ u. dergl. begründet.

Jedoch nicht allein die genannten seitlichen wagerechten Kräfte sind es, welche den Längsverband beanspruchen. Die ungleichmäßigen Längsspannungen der Träger, insbesondere der Gurte, beanspruchen in hohem Grade diese Verbände, indem durch dieselben die bestehenden Spannungsunterschiede zur Übertragung gelangen. So bewirkt die ungleiche Erwärmung der Träger durch die Sonnenstrahlen oder der verschiedene Reibungswiderstand in den Auflagern der verbundenen Träger Zusatzspannungen in denselben, indem die unabhängige Ausdehnung durch den Widerstand des Längsverbandes behindert, letzterer also in Spannung versetzt wird. Die bei Belastung eintretende Formänderung der Träger, namentlich die Längenänderung der Gurte, zieht naturgemäß den Längsverband ebenso in Mitleidenschaft. Die Querträger, die bei Belastung die Hauptträger aus der lotrechten Lage zu drängen streben, beanspruchen gleichfalls den die Gurte zusammenhaltenden Längsverband u. s. w.

Man erkennt, daß bei jeder Widerstandsäußerung der Träger der Längsverband mit beansprucht erscheint, und daß demselben die wichtige Rolle eines die Einheit der ganzen Konstruktion bewirkenden Hauptbestandteiles zukommt.

Anordnung der Querverbände bei Eisenbahnbrücken. Diese bezwecken zunächst die Erhaltung der Gestalt des Querprofils des Überbaues, ermöglichen hierdurch die volle Wirksamkeit des Längsverbandes und machen die Konstruktion überhaupt zu einer standfähigen. Der Querverband, in seiner einfachsten Anordnung aus den beiden wagerechten, die Gurte verbindenden Gliedern, welche meist zugleich dem Längsverbände angehören, und zwei sich kreuzenden Diagonalen bestehend, befindet sich in lotrechten, normal zur Brückenachse liegenden Ebenen und wird in bestimmten, meist gleichen Entfernungen, entsprechend den Orten der Knotenpunkte des Längsverbandes, angeordnet. Man vergleiche Fig. 41, S. 165, Fig. 46, S. 173, Fig. 48, S. 174 u. a. Über den Pfeilern, wo die Hauptträger die direkte Stützung haben, sind auch die Orte für die wirksamste Lage der Querverbände. Werden diese daselbst ausgiebig stark konstruiert, so genügt die Anordnung von schwächeren Zwischenverbänden, die in geeigneten Orten des frei schwebenden Überbaues — oft in größeren Entfernungen voneinander — angebracht werden.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die gewöhnliche Anordnung des Längsverbandes nur möglich ist bei bestimmter Höhenlage der Bahn und entsprechender Trägerhöhe; ein Gleiches gilt naturgemäß auch für die Querverbände. Bei oben liegender Bahn ist es möglich, den Querverband in der günstigst wirkenden Weise anzuordnen, während bei tieferen Bahnanlagen derselbe an die Querträger anschließend zwischen denselben und den unteren Gurtungen, bei unten liegender Bahn jedoch gar nicht zur Ausführung gebracht werden kann. Im letzten Falle muß, wie erwähnt, zur Anwendung besonderer Aussteifungskonstruktionen geschritten werden, welche den Zweck — die Erhaltung der Gestalt des Querprofils — wenn auch in minder direkter und wirksamer Weise durch möglichste Festhaltung der rechten Winkel desselben erfüllen. Diese Querverbände werden mit Benutzung der Querträger, in deren lotrechten Ebenen die Querverbände ja liegen, dadurch hergestellt, daß, soweit dies der erforderliche lichte Breiten-

raum der Brücke gestattet, die konstruktive Verbindung zwischen Haupt- und Querträgern zugleich ausreicht, um die rechten Winkel im Querprofil zu sichern (s. Fig. 50, S. 177). Sind auch obere Längsverbände angeordnet, wobei also $\Delta h > 4,8 + u$ ist, so wird in ähnlicher Weise die wagerechte Querverbindung mit den Tragwänden in Verband gebracht (s. Fig. 51 daselbst).

Die Querverbände werden in Anspruch genommen bei ungleichmäßiger Lastanteilnahme der Träger und ungleicher lotrechter Durchbiegung derselben, kurz durch alle Umstände, welche eine gegenseitige Lageänderung der Träger, eine Verschiebung oder Verdrehung des Gesamtquerschnittes anstreben. Ganz besonders ist dies der Fall bei schiefen Brücken, wo in demselben Querschnitte verschiedene lotrechte Durchbiegungen der Träger bei Belastung notwendigerweise eintreten. Der Widerstand der Querverbände jedoch bringt es mit sich, daß gleichzeitig eine Verdrehung der Träger, ein Ausweichen derselben aus der lotrechten Lage, eingeleitet wird.

Bei Brücken, die in Bahnkurven liegen, ist im allgemeinen der Lastanteil der Hauptträger ungleich und infolge dessen ebenfalls die eintretende Durchbiegung derselben. Auch hier sind es die Querverbände, welche zunächst hierdurch Beanspruchungen erleiden. Die seitlich wirkenden Kräfte, insbesondere der Winddruck, die Stosswirkungen der Fahrzeuge und die Fliehkraft bei Brücken, die in Bogen liegen, rufen nicht minder den Widerstand der Querverbände wach.

Bei Strafsenbrücken stellt die Bahnunterlage (Fahrbahntafel) in vielen Fällen eine gute Verbindung der Träger her, sodafs mit Rücksicht hierauf die Längsverbände konstruktiv leichter gehalten werden dürfen; bei kleinen Brücken sind dieselben oft gänzlich weggelassen worden.

Die Querverbände haben hier dieselbe Aufgabe und Bedeutung, wie bei Eisenbahnbrücken, obschon die angreifenden, eine Formänderung des Querprofils hervorrufenden Kräfte hier in ihrer Wirkung geringer sind.

Bei kleinen Brücken, namentlich bei solchen mit geringen Trägerhöhen, hat man indessen auch diesen Verband oft weggelassen, da das Anbringen desselben mit Schwierigkeiten verbunden und die auftretenden Formänderungen jedenfalls um so geringer werden, je kleiner die Spannweite ist. In diesen Fällen muß die Bahnunterlage und die Lagerung der Träger auf den Stützen den Zusammenhang der Träger herstellen und die Standfähigkeit der Brücke genügend sichern.

Die schiefen Brücken und die Fächerbrücken sollen im folgenden Paragraph für sich behandelt werden. Die Besprechung wird sich nicht streng auf Hauptträger und Zwischenkonstruktionen beschränken, weil es sich empfiehlt, das jenen Bauwerken Eigenartige im Zusammenhange vorzuführen.

§ 33. Schiefe Brücken und Fächerbrücken.

1. Schiefe Brücken.

Bei der Konstruktion schiefer eiserner Brücken sind nachstehend aufgeführte Punkte zu beachten; dabei sind nur Balken- und Bogenbrücken ins Auge gefaßt. Die bei den selten vorkommenden Hängebrücken nötigen Abänderungen ergeben sich ohne Schwierigkeit.

a) Auflager. Die Auflagermitten der Träger dürfen sich der Vorderkante des Pfeilermauerwerkes nicht zu sehr nähern; das hier einzuhaltende Maß, senkrecht zur

Vorderkante gemessen, ist je nach der Gröfse der Stützweite, also des Brückengewichtes verschieden. Für Stützweiten zwischen 40 und 100 m kann man diesen Abstand setzen:

$$w = (0,5 + 0,005 L) \text{ Meter.}$$

Für Stützweiten unter 40 m kann man annehmen:

$$w = (0,25 + 0,01 L) \text{ Meter.}$$

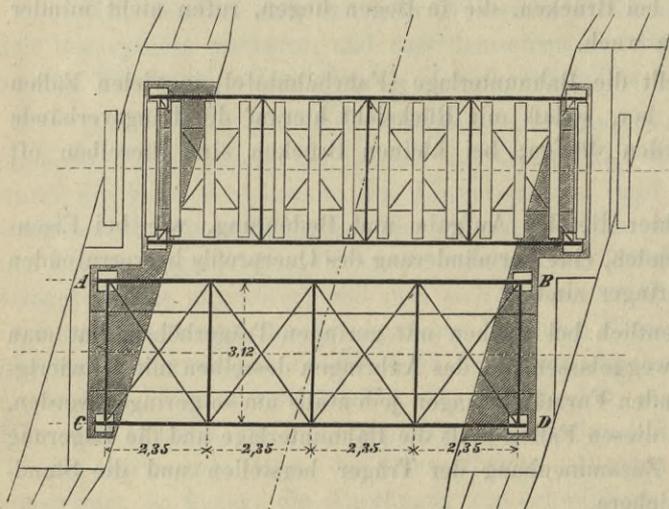
L ist die Stützweite in Metern. Die vorgeführten Formeln ergeben die kleinsten zulässigen Abstände. Man gehe aber selbst bei sehr kleinen Brücken nicht unter

$$w_{\min} = 0,3 \text{ Meter.}$$

b) Querträger und Querverbindungen. Wie oben (§ 27) bereits angeführt, sind die schiefen Anschlüsse der Querträger bzw. Querverbindungen an die Hauptträger, sowie der Zwischenträger an die Querträger u. s. w. nach Möglichkeit zu vermeiden.

Wenn der Schnittwinkel der Achsen nur wenig von einem rechten Winkel abweicht, so kann man sämtliche Querträger bzw. Querversteifungen wie diejenigen einer geraden Brücke herstellen, indem man die Auflager der Träger normal einander gegenüber-

Fig. 67. M. 0,006 (1 : 167).



setzt (Fig. 67); dadurch wird die Stützweite der Brücke gröfser, als unumgänglich nötig ist, weil die Lager A und D weiter von der Mauerkante zurückliegen, als die statischen Rücksichten verlangen. Diese Anordnung wird um so leichter möglich, je näher die Hauptträger aneinander liegen; bei zwei- und mehrgleisigen Brücken behandelt man deshalb zweckmäfsig jedes Gleis als besondere Brücke mit zwei Hauptträgern und verschiebt diese

Brücken gegeneinander entsprechend der Schiefe (s. Fig. 67). Diese Konstruktion ist auch bei Bogenbrücken möglich.

c) Endanordnung. Wenn der Schnittwinkel der Achsen wesentlich von einem rechten Winkel abweicht, so wird bei der soeben angegebenen Konstruktion die Stützweite sehr grofs und das Pfeilermauerwerk sehr stark. Alsdann wird zweckmäfsig nur der mittlere Teil der Brücke, etwa $AECF$ (Fig. 68), als normale Überbrückung hergestellt, wobei die Lage der Querträger bzw. Querversteifungen AF und EC durch die Auflager A und C bestimmt ist; die durch die Schiefe bedingte Unregelmäfsigkeit ist demnach in die Endfelder verwiesen, welche hier im Grundrisse die Dreieckform zeigen. Man ist aber mit den letzten normalen Querverbindungen nicht an die Auflager A und C gebunden, kann dieselben vielmehr auch an eine andere geeignete Stelle legen (z. B. nach FG und HJ in Fig. 70). Alsdann werden die Endfelder im Grundrifs Paralleltrapeze.

Fig. 68.

Eisenbahnbrücke in der Sektion Bruck
(Gerber).

M. 0,006 (1 : 167).

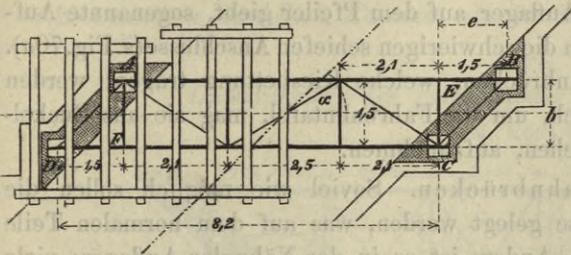


Fig. 69.

Wege-Unterführung auf der Bahn
Schwarzenbeck-Oldesloe.

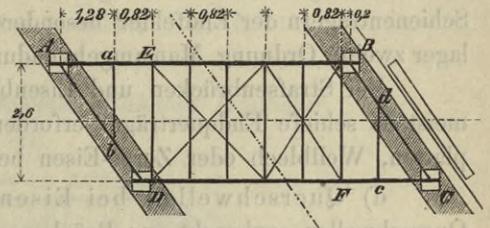


Fig. 70.

Unterführung der Gutenbergstraße, Bahnhof Hannover.

M. 0,006 (1 : 167).

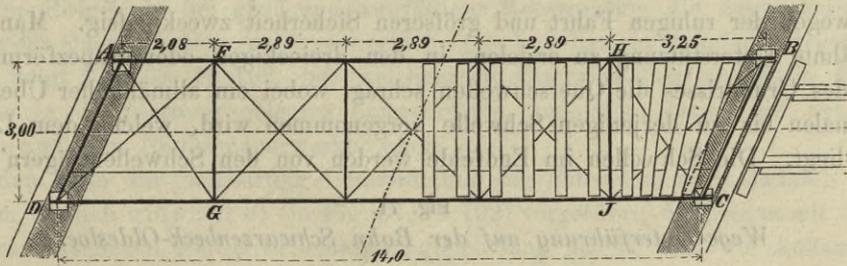
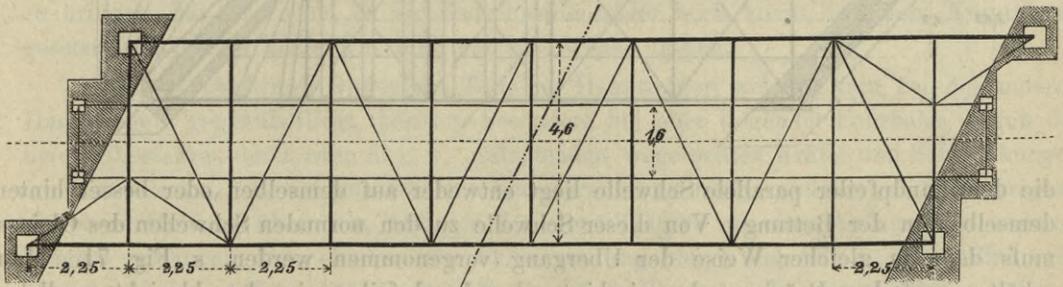


Fig. 70 a.

Eisenbahnbrücke über die Oppenheimer Landstraße. Trapezträger (Gerber).

M. 0,006 (1 : 167).



Häufig werden schiefe Endquerträger angeordnet; dieselben werden bei Eisenbahnbrücken meistens nötig sein, wenn die Schienen unmittelbar von den Querträgern getragen werden (Fig. 69); alsdann unterstützen die schiefen Endquerträger (A D bzw. B C) die Schienen. Falls die Entfernung der letzten normalen Querträger D E bzw. B F und der schiefen Endquerträger A D bzw. B C an den Schienenunterstützungen so groß ist, daß die Schienen sich auf diese Länge nicht frei tragen können, so können noch kleine Querträger (a b bzw. c d, Fig. 69) eingeschaltet werden. Es ist empfehlenswert, die Abstände der Querträger voneinander gleich zu wählen; nur die letzten Felder

Aa und *Cc* erhalten meistens ein anderes Maß, als der Abstand der übrigen Querträger beträgt.

Wenn Schwellen und Schienen durch besondere Längsträger zweiter Ordnung getragen werden, bieten die schiefen Endquerträger oft den Längsträgern der Endfelder die Endauflager. Zweckmäßiger vermeidet man sie in diesem Falle, indem man den Schienenträgern der Endfelder besondere Auflager auf dem Pfeiler giebt, sogenannte Auflager zweiter Ordnung. Man umgeht dadurch die schwierigen schiefen Anschlüsse (s. Fig. 70a).

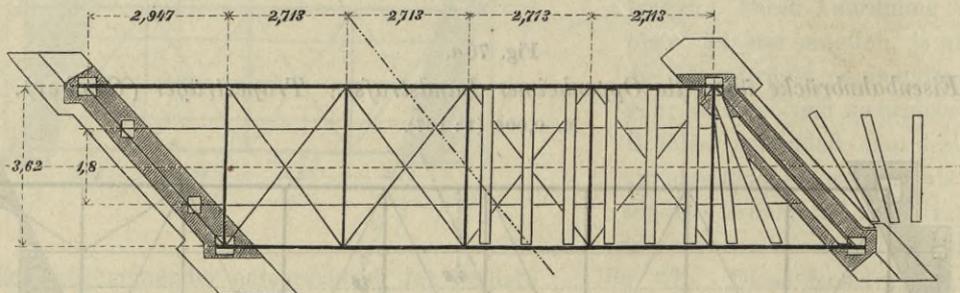
Bei Straßentrassenbrücken und Eisenbahnbrücken, welche Kiesbettung tragen, werden meistens schiefe Endquerträger erforderlich, um die Fahrbahntafel, mag sie aus Buckelplatten, Wellblech oder Zores-Eisen bestehen, aufzunehmen.

d) Querschwellen bei Eisenbahnbrücken. Soviel wie möglich sollen die Querschwellen senkrecht zur Brückenachse gelegt werden, was auf dem normalen Teile der Brücke keine Schwierigkeiten macht. Anders ist es in der Nähe der Auflager; viele Konstrukteure fordern, daß jede Querschwelle gleichartig unterstützt sei. Sie vermeiden es demnach, dieselbe Querschwelle einerseits durch die Eisenkonstruktion, andererseits durch das Pfeilermauerwerk zu unterstützen; gleicherweise wird vermieden, dieselbe Querschwelle zum Teil auf das Mauerwerk, zum Teil in die Bettung zu verlegen. Es ist das wegen der ruhigen Fahrt und größeren Sicherheit zweckmäßig. Man legt, um die erwähnte Unterstützung zu erzielen, in den dreieckigen oder trapezförmigen Endfeldern des Grundrisses die Querschwellen schräg, wobei ein allmählicher Übergang von der normalen bis zu derjenigen Schwelle vorgenommen wird, welche dem Landpfeiler parallel liegt. Die Schwellen im Endfelde werden von den Schwellenträgern getragen,

Fig. 71.

Wege-Unterführung auf der Bahn Schwarzenbeck-Oldesloe.

M. 0,006 (1 : 167).



die dem Landpfeiler parallele Schwelle liegt entweder auf demselben oder besser hinter demselben in der Bettung. Von dieser Schwelle zu den normalen Schwellen des Gleises muß dann in gleicher Weise der Übergang vorgenommen werden, s. Fig. 71. Man erhält so auf dem Brückenende, wie hinter dem Landpfeiler, eine Anzahl nicht paralleler Schwellen, deren größter Abstand nach der Tragfähigkeit der Schienen zu bemessen ist. Für diese Anordnung sind die dreieckigen Endfelder im Grundriss unzweckmäßig, weil bei derselben die Schwellenköpfe an der einen Seite sehr nahe aneinander zu liegen kommen; die trapezförmigen Endfelder sind hier vorzuziehen, weil sich bei ihnen der Übergang bequemer gestaltet (s. Fig. 70, S. 193).

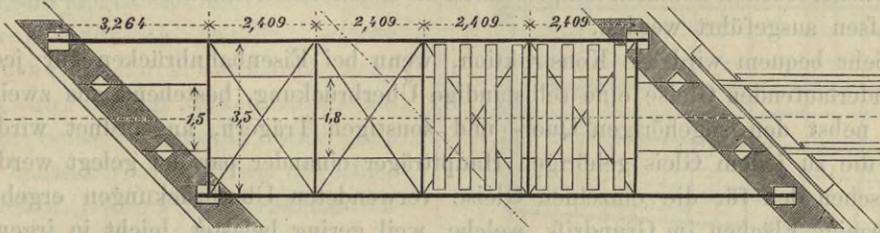
Wesentlich einfacher wird die Konstruktion, wenn die Schienen unmittelbar von den Längsträgern zweiter Ordnung getragen werden, besonders, wenn auf der freien Strecke eiserner Langschwellenoberbau anschließt. Die Schienen ruhen dann auf den

Schienträgern bis zu deren Ende und haben sich von diesem bis zu einer hinter dem Pfeilermauerwerk schräg in der Bettung liegenden Querschwelle freizutragen; hinter letzterer beginnen die eisernen Langschwellen. Diese Anordnung kann auch für die unregelmäßigen Endfelder gewählt werden, wenn in dem mittleren, normalen Teile der Brücke Querschwellen liegen; selbstverständlich müssen dann in den Endfeldern die Schienträger denselben Abstand wie die Schienen haben (Fig. 72).

Fig. 72.

Unterführung des Engelposteler Dammes, Bahnhof Hannover.

M. 0,006 (1 : 167).



Im übrigen ist bei genügend sorgfältiger Konstruktion die ungleichartige Unterstützung der Querschwellen nicht verwerflich; Gerber hat sie mehrfach ausgeführt. Ein Beispiel zeigt Fig. 68, S. 193, bei welchem die Querschwellen an ihrem einen Ende auf einer in die Bettung gelegten Langschwelle, außerdem bezw. auf dem eisernen Überbau und dem Pfeilermauerwerke ruhen.

Man kann die gleichartige Unterstützung der Schwellen auch dadurch erreichen, daß man, ähnlich wie unter b) (in Fig. 67, S. 192) vorgeführt, die beiden mit besonderen Auflagern versehenen Endschwellerträger gleich lang macht, also die Auflager normal einander gegenüber anordnet (s. Fig. 70a). Das Pfeilermauerwerk wird alsdann an der Hinterseite, soweit es sonst der ersten Landschwelle im Wege sein würde, senkrecht zur Brückenachse begrenzt. Diese Anordnung ist sehr zweckmäßig; man erreicht dabei durchgehends normale Schwellenlage. Bei größeren Stützweiten bildet diese Konstruktion die Regel. Um die letzte Brückenschwelle möglichst nahe an die erste Landschwelle zu bringen, hat man wohl an die Endschwellerträger noch kurze Konsolen (Kragträger) gesetzt, welche die letzte Querschwelle der Brücke tragen.

e) Aussteifung. Diejenigen Teile der Hauptträger, welchen kein Teil des anderen Hauptträgers gegenüberliegt, müssen, besonders bei oben liegender Fahrbahn, gegen die beim Überfahren der Lasten u. s. w. auftretenden wagerechten Kräfte und Schwankungen versteift werden. Es ist deshalb eine Querversteifung nötig, welche bei Balkenträgern die obere Gurtung über dem Auflager des einen Trägers mit dem Auflager des anderen Trägers verbindet, d. h. eine schiefe Endversteifung (vergl. Fig. 68, S. 193). Eine ganz ähnliche Endversteifung ist bei dem Streckgurt der Bogenbrücken anzuordnen. Bei den schiefen Bogenbrücken legt man die Querversteifungen entweder parallel zur Achse des zu überbrückenden Weges, in welchem Falle man schiefwinkelige Anschlüsse erhält, oder normal zur Brückenachse. Bei letzterer Anordnung ist der Querschnitt jeder Versteifung ein Viereck, dessen untere Seite nicht wagerecht ist; denn die Punkte der beiden Bogen, welche einander normal gegenüberliegen, also miteinander verbunden werden, haben verschiedene Höhe, weil die Bogen gegeneinander verschoben sind.

f) Herstellungsrücksichten. Man richtet es zweckmäßig so ein, daß die beiden zu einem Gleise gehörigen Hauptträger einander gleich sind, sodafs man also

jeden derselben sowohl nach AB , wie nach CD legen kann (Fig. 68, 69, 70). Bei Herstellung der Fahrbahntafel für Strafsen- oder Eisenbahnbrücken ist dahin zu streben, daß man möglichst rechteckige Felder schafft; Buckelplatten von nicht rechteckiger Grundform können freilich heute ohne Schwierigkeit angefertigt werden; sie sind aber immer etwas teurer, als normale. Für die Endfelder kann man jedoch Buckel- oder Hängeplatten von ungewöhnlicher Form, schief abgeschnittene Wellblechtafeln, Belageisen u. s. w. nicht ganz vermeiden.

2. Fächerbrücken.

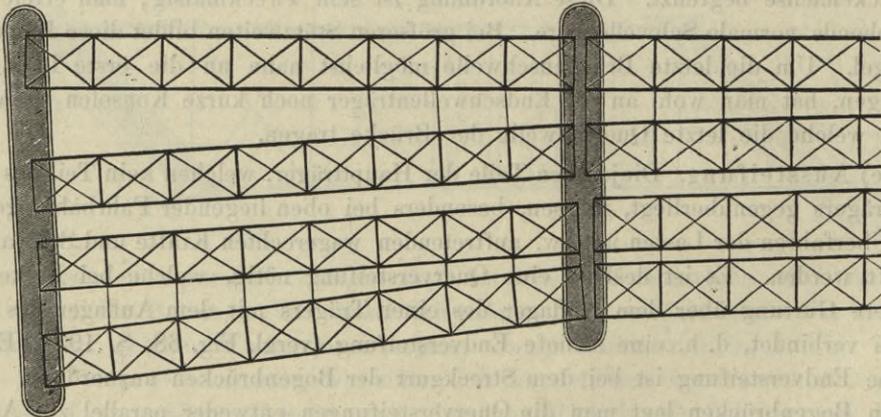
Fächerbrücken kommen hauptsächlich als Eisenbahnbrücken vor, können aber auch für Strafsen ausgeführt werden.

Sehr bequem wird die Konstruktion, wenn bei Eisenbahnbrücken für jedes der auseinanderlaufenden Gleise eine selbständige Überbrückung, bestehend aus zwei Hauptträgern nebst den zugehörigen Quer- und sonstigen Trägern, angeordnet wird; dann können die zu jedem Gleis gehörigen Hauptträger einander parallel gelegt werden und nur zwischen den für die einzelnen Gleise verwendeten Überbrückungen ergeben sich trapezförmige Flächen im Grundrifs, welche, weil gering belastet, leicht in irgend einer Weise geschlossen werden können, sei es durch Bohlenbelag, Wellblech, Buckelplatten, Glastafeln u. dergl., welche aber auch unter Umständen ganz oder teilweise offen bleiben können. Auf den Pfeilern erhält man geringe Unregelmäßigkeiten, die aber, besonders wenn die Vorderflächen des Pfeilers in mittlere Linien gelegt werden, nur gering sind und meistens einen ganz normalen Überbau nach Art der Fig. 67, S. 192, gestatten, indem die Auflagermitten der Träger verschieden weit hinter den Vorderkanten der Pfeiler zurückliegen (s. Fig. 73).

Fig. 73.

Brücke über den Humboldt-Hafen, Berliner Stadteisenbahn.

M. 1 : 400.



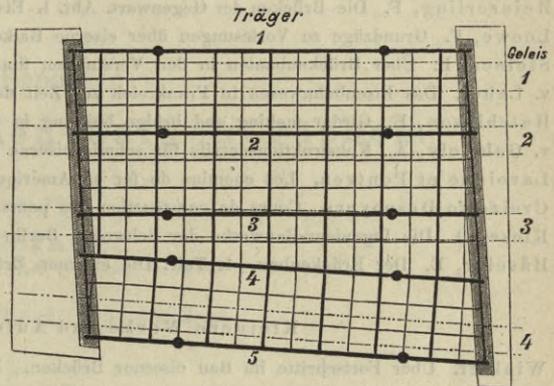
Wenn man für die Verschiebung der Gleise und die Einlegung von Weichen auf der Brücke freie Hand behalten will, so werden zweckmäßig die Gleise auch auf der Brücke in Bettung gelegt, welche auf einer Fahrbahntafel ruht. Hierbei wie auch bei Strafsenbrücken mit Fahrbahntafel ist ebenfalls die ganze Grundfläche in Gruppen zu zerlegen, in deren jeder die Hauptträger einander wo möglich parallel gelegt werden. Die Endhauptträger legt man in die nicht parallelen Seiten des trapezförmigen Grundrisses, die anderen diesen Endhauptträgern parallel. Die unregelmäßigen Flächen liegen

zwischen je zwei Gruppen. Hier wird man aber die Konstruktion überall, also auch in den unregelmäßigen Flächen, gleich tragfähig herstellen müssen. In den einzelnen Gruppen hat man Brücken, welche in allen wesentlichen Punkten nach den für schiefe Brücken entwickelten Gesichtspunkten zu konstruieren sind; auch die unregelmäßigen Flächen zwischen den Gruppen bieten keine Schwierigkeiten. Man vergleiche Fig. 74.

Erwähnt mögen hier noch die trapezförmigen Brücken werden, welche durch eine Keilform der überbrückten Öffnung bedingt werden und welche an jeder Seite verschieden, aber ganz ähnlich behandelt werden, wie die schiefen Brücken. Dieser Fall tritt namentlich bei Kurvenbrücken nicht selten ein.

Fig. 74.
*Unterführung der Straße Spandauer Brücke,
Berliner Stadteisenbahn.*

M. 1 : 400.



Litteratur,

die eisernen Brücken im allgemeinen betreffend.

Sammelwerke und größere Sonderwerke über eiserne Brücken.

- Etzel, C. Brücken und Thalübergänge schweizerischer Eisenbahnen. Basel 1856.
Supplement hierzu. Basel 1859.
- Becker, M. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 2. Bd. Der Brückenbau in seinem ganzen Umfange. Stuttgart 1854 (4. Aufl. 1873).
- Molinos et Pronnier. Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques. Paris 1857.
- Bauernfeind. Vorlegeblätter zur Brückenbaukunde. 1. Aufl., München 1854. 3. Aufl. von Frauenholz und Asimont. Stuttgart 1876.
- Müller, H. Die Brückenbaukunde in ihrem ganzen Umfange. Leipzig 1860.
- v. Klein. Sammlung eiserner Brückenkonstruktionen, ausgeführt bei den Bahnen des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen. Stuttgart 1860.
- Humber, W. A complete treatise on cast and wrought iron bridge construction. 2. edition. London 1864.
- Schwarz. Der Brückenbau. Berlin 1866.
- Laissle und Schübler. Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eisenkonstruktionen. Stuttgart 1869 (4. Aufl. 1876).
- Heinzerling. Die Brücken in Eisen. Leipzig 1870.
- Maw and Dredge. Modern examples of road and railway bridges. London 1872.
- Mary. Cours de routes et ponts, professé à l'école centrale des arts et manufactures. Paris 1873.
- Malézieux, M. Travaux publics des Etats-unis d'Amérique en 1870. Paris 1873.
- Baker. Long and short-span railway bridges. London 1873.
- Debaue. Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées. 11. Fasc. Ponts et viaducs en bois et en métal. Paris 1874.
- von Kaven, A. Disposition von Brücken und praktische Details. 20 Tafeln mit beige-schriebenem Text. Aachen 1874.
- Morandière, R. Traité de la construction des ponts et viaducs en pierre, en charpente et en métal pour routes, canaux et chemins de fer. Paris 1876.
- Rziha, F. Eisenbahn-Unter- und -Oberbau. 2. Bd. Brückenbau. Wien 1877.

Winkler, E. Vorträge über Brückenbau. Wien, Gerold. Davon sind erschienen:

- I. Teil. Theorie der Brücken. 1. Heft: Äußere Kräfte der Balkenträger (1. Aufl. 1873, 3. Aufl. 1886). 2. Heft: Innere Kräfte. Theorie der gegliederten Balkenträger (2. Aufl. 1881).
- IV. Teil. Eisernen Brücken. 2. Heft: Gitterträger und Lager gerader Träger. (1. Aufl. 1873, 2. Aufl. 1875). 4. Heft: Die Querkonstruktionen der eisernen Brücken (1. Aufl. 1879, 2. Aufl. 1884).
- III. Teil. Hölzerne Brücken. 1. Heft: Balkenbrücken. 2. Aufl., Wien 1887.
- Heinzerling, F. Die Brücken der Gegenwart. Abt. I. Eisernen Brücken, Heft 1—6. Aachen u. Leipzig 1873/97.
- Loewe, F. Grundzüge zu Vorlesungen über eisernen Balkenbrücken. München 1877.
- Steiner, F. Über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nordamerika. Wien 1878.
- v. Leber. Das Eisenbahnwesen in Frankreich zur Zeit der Pariser Weltausstellung i. J. 1878. Wien 1880.
- Hutchinson, E. Girder making and bridge building in wrought iron. London 1879.
- v. Gabriely, A. Konstruktionsdetails für schmiedeeiserne Brücken. Graz 1879.
- Lavoigne et Pontzen. Les chemins de fer en Amérique. 1. Bd. Paris 1880.
- Croizette Desnoyers. Cours de construction des ponts. Paris 1885.
- Riese, O. Die Ingenieur-Bauwerke der Schweiz. Berlin 1887.
- Häselser, E. Der Brückenbau. 1. Teil: Die eisernen Brücken. 1. bis 3. Lieferung. Braunschweig 1888/97.

Kleinere Werke und Aufsätze in Zeitschriften.

- Winkler. Über Fortschritte im Bau eiserner Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1876.
- Gleim, O. Der amerikanische Brückenbau der Neuzeit. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1876.
- Steiner. Zum gegenwärtigen Stande des Brückenbaues. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1883.
- Ebert, E. Über Eisenbrücken. Bayerisches Industrie- und Gewerbeblatt 1886.
- Die Bauwerke der Berliner Stadteisenbahn. Berlin 1886.
- Brik, J. Über die Erkenntnis abnormaler Zustände in eisernen Brücken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887. Sonderdruck. Leipzig 1891.
- Lang, G. Über Berechnung und Konstruktion der Bauten in Eisen. Riga'sche Industriezeitung 1886, No. 23; 1887, No. 13 bis 18.
- Emperger, F. v. Über die Zulässigkeit schwerer Fahrbetriebsmittel vom Standpunkt einer neuen Brückenverordnung für Eisenbahnbrücken. Wien 1887.
- Zampis, G. Die Brückenverordnung des k. k. österr. Handelsministeriums vom 15. Sept. 1887 nebst dem Entwurfe einer Instruktion für die Erprobung und Instandhaltung der Brücken. Wien 1888.
- v. Leber, M. Die neue Brückenverordnung des k. k. österr. Handelsministeriums und ihre technische Begründung. Wien 1888.
- Stöckl und Hauser. Hilfstabellen für die Berechnung eiserner Träger, mit besonderer Rücksichtnahme auf Eisenbahnbrücken. Wien 1888.
- Ritter, W. Der Brückenbau in den Ver. Staaten Amerikas. Zürich 1895.
- v. Leibbrand, K. Die König Karls-Brücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt. Berlin 1895.
- Der Bau der neuen Eisenbahnbrücken über die Weichsel bei Dirschau und über die Nogat bei Marienburg. Berlin 1896.
- Baltzer, F. Die Elektrische Stadtbahn in Berlin. Berlin 1897.
- Seefehlner, J. Die Franz Josef-Brücke in Budapest. Zeitschr. f. Arch. u. Ing. 1898, Heftausgabe, S. 193. — Sonderdruck Hannover 1898.
- Mehrtens. Der Brückenbau sonst und jetzt. Zeitschr. f. Arch. u. Ing. 1898, Heftausgabe, S. 17. — Schweiz. Bauz. 1898, Bd. XXXII. Sonderdruck Zürich 1899.
- Fülscher. Der Bau des Kaiser Wilhelm-Kanals. Zeitschr. f. Bauw. 1896, 1897, 1898, 1899. Sonderausgabe Berlin 1899.
- Foerster, M. Neue Brückenbauten in Oesterreich und Ungarn. Leipzig 1899.

Weitere Litteraturangaben auf S. 63/65.

VIII. Kapitel.

Theorie der eisernen Balkenbrücken.

Bearbeitet von

Fr. Steiner,

Diplom. Ingenieur, Professor an der deutschen Technischen Hochschule in Prag.

(Hierzu Tafel II bis VI und 110 Textfiguren.)

§ 1. Einleitung. Die Theorie der Brücken stellt sich als Aufgabe, die Anordnung des Bauwerkes auf seine Stabilität zu untersuchen, die Wirkung der äußeren Kräfte auf die einzelnen Bestandteile des Bauwerkes, bzw. die auftretenden Spannungen zu ermitteln, wobei für jede Spannung die größten und kleinsten Werte zu suchen sind, welche bei der wechselnden Belastung auftreten können, eine Aufgabe, die wir auch als die Ermittlung der gefährlichsten Belastungsweise bezeichnen, ferner die Bestimmung der Formänderung, welche das Bauwerk unter der Belastung annimmt. Vielfach ist die Ermittlung der Spannungen überhaupt nur unter gleichzeitiger Untersuchung bestimmter Formänderungen möglich, so bei statisch unbestimmten Systemen.

Ehe wir auf besondere Brückensysteme eingehen, möge eine ganz allgemeine Untersuchung vorausgeschickt werden.

Für die anzustellenden Untersuchungen fassen wir die Brücke als Tragwerk auf, welchem die Aufgabe zukommt, die äußeren Kräfte auf bestimmte Stützkörper zu übertragen.

Jedes Tragwerk ist entweder ein den Raum stetig erfüllender Vollkörper, z. B. ein Tonnen- oder Kuppelgewölbe, oder es besteht aus einzelnen Teilen, welche im Sinne der Trägerlehre als Tragkörper, Scheiben oder Stäbe aufgefaßt werden können.

Den auf ein Tragwerk wirkenden äußeren Kräften, das sind die direkt angreifenden Kräfte, wie die Belastung, der Wind, die Flichkraft, müssen die Widerstände der Stützkörper das Gleichgewicht halten.

Ersetzt man die Wirkung der Stützkörper durch die entsprechenden Auflagerwiderstände, so müssen diese mit den angreifenden Kräften ein im Gleichgewicht befindliches räumliches System bilden; es müssen also 6 Auflagerbedingungen erfüllt sein.

Ist ein Tragwerk so beschaffen, daß es stabil bleibt, wenn man beliebige Punkte desselben zu Auflagerpunkten macht, so ist es ein geschlossenes oder einteiliges Tragwerk, trifft dies nicht zu, löst sich das Tragwerk in zwei oder mehrere Teile, so ist es ein zusammengesetztes Tragwerk. Jedes mehrteilige Tragwerk kann durch Einschaltung gedachter (fiktiver) Stäbe zum einteiligen gemacht werden.

Je nachdem man lediglich nach dem Gleichgewichtszustande der Kräfte forscht und von diesem aus die Bestimmung der unbekanntenen Gegenkräfte und inneren Kräfte vornimmt oder je nachdem man die unbedingt oder unter Umständen möglichen Bewegungen des elastischen Systems, welches den Träger darstellt, in Betracht zieht, wird die Theorie entweder eine statische oder eine kinematische.

Letztere, in der Entwicklung wesentlich jünger, hat gleichwohl bereits zu einer Reihe von Vereinfachungen und schönen Anwendungen geführt. Wir werden uns in Nachstehendem beider Verfahren, die in ihren Anwendungen selbstverständlich zu denselben Ergebnissen führen, unter Angabe der bezüglichen Quellen bedienen.

Beide Verfahren sind der graphischen Behandlung fähig; erstere beruht in ihrem Urwesen auf dem Kräfte-, letztere auf dem Geschwindigkeits-Parallelogramm, mithin auf derselben geometrischen Grundlage.

Im vorgenannten Sinne verstehen wir unter Tragkörpern solche Teile des Tragwerkes, welche Kräfte aller Richtungen widerstandsfähig aufnehmen und auf bestimmte Stützpunkte zu übertragen vermögen. Scheiben sind solche Teile eines Tragwerkes, welche Kräfte aller Richtungen einer Ebene, der Scheibenebene, widerstandsfähig aufnehmen und auf bestimmte Punkte dieser Ebene zu übermitteln vermögen. Stäbe sind Teile des Tragwerkes, welche nur befähigt sind, solche Kräfte, welche in die gerade Achse derselben fallen, von einem Endpunkt des Stabes zum anderen widerstandsfähig zu übertragen.

Liegen alle Teile des zu betrachtenden Tragwerkes in einer Ebene, in welcher auch die angreifenden und widerstehenden Kräfte wirken, so spricht man von einem ebenen Tragwerke.

Jedes ebene Tragwerk setzt sich aus Scheiben und Stäben, jedes räumliche aus Tragkörpern, Scheiben und Stäben zusammen.

Setzt sich ein Tragwerk nur aus einzelnen Stäben zusammen, so spricht man von einem Fachwerke.

Als Brückenbauwerk muß ferner jedes Tragwerk die Bedingung erfüllen, daß es stabil ist. Die Übermittlung der angreifenden Kräfte auf die Stützkörper durch das Tragwerk muß erfolgen, ohne daß, abgesehen von den elastischen Formänderungen, eine bleibende Ortsveränderung desselben eintritt. Wir setzen also bei unseren Belastungen stets voraus, daß die Teile des Tragwerkes in sich widerstandsfähig und so verbunden sind, daß das Tragwerk mit dem Verschwinden der äußeren Kräfte seine ursprüngliche Form und Lage wieder einnimmt.

Die Stützung des Tragwerkes erfolgt theoretisch in bestimmten Punkten, welche fest sein können oder eine bestimmte Beweglichkeit besitzen. Die Bewegungen werden in Wirklichkeit stets mit Reibung verbunden sein. Wir wollen die auftretenden Reibungswiderstände zunächst außer Acht lassen, und sie in einem besonderen Abschnitt bei der Lehre von den Zusatzspannungen behandeln. Es sind dann im allgemeinen drei Arten von Stützungen zu unterscheiden:

1. Der Stützpunkt ist in einer Fläche geführt. Der die Wirkung einer solchen Stützung ersetzende Widerstand ist senkrecht zur Stützfläche im Berührungspunkt. Kinematisch entspricht dies der Bedingung, daß die Bewegung des Stützpunktes in einer gegebenen Fläche stattfinden muß, also senkrecht zur selben keine Bewegung stattfinden darf.
2. Der Stützpunkt wird in einer Linie geführt. Die Stützungswiderstände sind durch zwei Kräfte gegeben, welche in einer Ebene liegen, die senkrecht zum

Linienelemente steht, welches im Berührungspunkte dem Stütz- und Tragkörper gemeinschaftlich ist. Die Richtungen dieser Kräfte in der Ebene selbst können beliebig angenommen werden, doch müssen sie sich im Berührungspunkte schneiden. Kinematisch ist diese Stützung an die Bedingung geknüpft, daß die Bewegung des Stützpunktes bei der Formänderung nur in der Richtung des gemeinsamen Linienelementes erfolgen kann, also senkrecht zu diesem Elemente keinerlei Bewegung stattfinden darf; das ist erfüllt, wenn die Bewegung nach zwei beliebigen, zum gemeinsamen Elemente senkrechten Richtungen null wird.

3. Ist der gemeinsame Punkt C unbedingt festgehalten, so verlangt die Erfüllung dieser Bedingung die Einführung dreier Kräfte als Auflagerwiderstände, welche in ihren Richtungen beliebig sind und sich in C schneiden; sie ist kinematisch an die Forderung geknüpft, daß nach drei beliebigen, sich in C schneidenden Richtungen keine Bewegung stattfinden darf.

Die nach gegebenen Richtungen wirkenden Stützenwiderstände lassen sich auch als die Spannungen von Stäben auffassen, welche den Stützpunkt C mit festen Punkten verbinden. Die Bedingung unter 1. kann durch einen, die zweite durch zwei, die dritte durch drei Stäbe ersetzt werden.¹⁾

Obwohl wir es in Wirklichkeit ausschließlich mit Raumgebilden zu thun haben, pflegt man doch die Einteilung der Träger nach Erwägungen vorzunehmen, welche sich unmittelbar an ebene Gebilde, Scheiben oder Fachwerke aus Stäben knüpfen. Diese denkt man sich von Kräften beansprucht, die derselben Ebene angehören. Wir wollen daher die Betrachtung dieser Systeme voranstellen und daran erst einige allgemeinere Untersuchungen räumlicher Natur reihen.

§ 2. Ebene Tragwerke. Liegen alle Kräfte, welche auf einen Körper wirken, in einer Ebene, bzw. kann die in Betracht kommende Konstruktion durch ein ebenes System ersetzt gedacht werden, so kann ein Auflagerpunkt entweder vollständig festgehalten, oder es kann seine beim Auftreten äußerer Kräfte infolge der Formänderung entstehende Bewegung nur beschränkt werden, indem man ihn zwingt, hierbei auf einer gegebenen Linie zu bleiben, welche, da wir bei all unseren praktisch wichtigen Entwürfen nur sehr kleine Formänderungen voraussetzen, stets als Gerade betrachtet werden kann. Diesen Zwang nennt man eine dem Auflagerpunkte vorgeschriebene Auflagerbedingung.

Jedes Gleitlager stellt kinematisch die Bedingung vor, daß sich der Auflagerpunkt auf einer bestimmten Geraden bewegen muß, statisch die Bedingung, daß der Auflagerdruck senkrecht zu der Bahn stehen muß; mithin in beiden Fällen eine Bedingung. Das feste Auflager knüpft statisch oder kinematisch betrachtet zwei Bedingungen an sich, ein eingespanntes Trägerende deren drei.

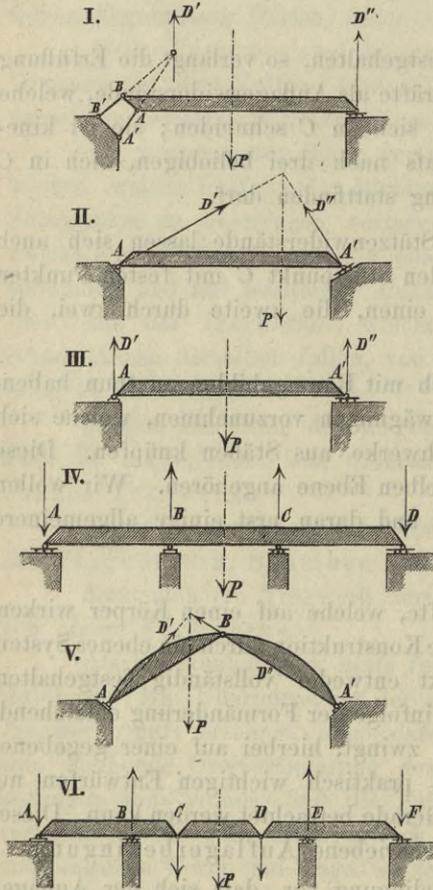
Kräfte in einer Ebene, die sich das Gleichgewicht halten, müssen drei Bedingungen erfüllen, bzw. es stehen für die Ermittlung der Auflagerdrücke drei Gleichungen zur

¹⁾ Erfolgt die Stützung in denselben Punkten und in jedem Punkte für jede Belastung auf dieselbe Art, so sprechen wir von unveränderlicher Stützung. Beispiele veränderlicher Stützungsart sind z. B. Lager, die erst zur Geltung kommen, wenn sich das bezügliche Ende um ein bestimmtes Stück gesenkt hat, ein Fall, der bei Drehscheiben und Drehbrücken vorkommt; ja jedes Gleitlager, welches erst dann als Gleitlager wirkt, wenn die Reibung überwunden ist, bildet in diesem Sinne ein Beispiel veränderlicher Stützung. Wir kommen auf hierher gehörige Fälle an anderer Stelle zurück.

Verfügung, welche z. B. so gegeben sein können, daß sie besagen: Es muß 1. die Summe der wagerechten, 2. die Summe der lotrechten Seitenkräfte und 3. die Summe der statischen Momente für irgend einen Punkt der Ebene gleich Null sein.

Um eine fortschreitende Bewegung des Trägers zu hindern, sind mindestens drei Auflagerbedingungen nötig. Sind nur drei solcher gegeben, so sagen wir, der Träger sei hinsichtlich der äußeren Kräfte „statisch bzw. kinematisch“ bestimmt.

Fig. 1.



Man kann die statisch bestimmten Träger in zwei Gruppen teilen, von denen bei der einen die drei Auflagerbedingungen in drei verschiedenen Punkten vorgeschrieben erscheinen, während bei den Trägern der anderen Klasse zwei der Auflagerbedingungen sich auf denselben Punkt beziehen. Bisher sind meistens die Träger der letzteren Klasse zur Anwendung gelangt.

In Fig. 1 zeigt I einen Träger als Beispiel der ersten Gruppe. Die Punkte A und B sind gezwungen, sich normal zu $A'A$ bzw. $B'B$ zu bewegen. D' und D'' versinnlichen die Richtungen der Auflagerwiderstände, welche einer angreifenden Kraft P das Gleichgewicht halten. Man nennt die Anordnung der beiden Glieder $A A'$, $B B'$, welche einen festen Punkt ersetzen, ein imaginäres Gelenk. II stellt einen Träger der zweiten Art dar. An ihm ist A festgehalten, A' gezwungen, sich auf einer geradlinigen Bahn zu bewegen. D' und D'' geben wieder die einer äußeren Kraft P das Gleichgewicht haltenden Auflagerdrücke.

Unter den statisch bestimmten Trägern der zweiten Klasse sollen hier zunächst nur jene näher hervorgehoben werden, bei welchen die Richtungslinie der geraden Auflagerbahn des einen Auflagerpunktes A' durch den anderen festgehaltenen Auflagerpunkt A geht. Nimmt man außerdem die Bahn von A' wagerecht an, so ergibt sich die allgemeine Form des sogenannten einfachen Balkenträgers, III. Jede lotrechte Kraft erzeugt in den Auflagerpunkten lotrechte Auflagerdrücke.

Unter den statisch unbestimmten Trägern ist hier zunächst nur jener Träger zu betrachten, welcher an einem Stützpunkte festgehalten ist, an allen übrigen Auflagerpunkten sich wagerecht frei verschieben kann. Man hat es in diesem Falle mit einem durchlaufenden Balken zu thun. Die Grundgleichungen der Statik reichen hier, wie bei allen Trägern dieser Art, zur Bestimmung der Auflagerdrücke nicht mehr aus, sondern es müssen letztere mit Hilfe gewisser Bedingungen, welche aus der elastischen Formänderung sich ableiten lassen, ermittelt werden.

Andere statisch unbestimmte Systeme sind z. B. der Bogenträger mit zwei Kämpfergelenken, der Bogen ohne Gelenke (vier bzw. sechs Auflagerbedingungen), sowie der

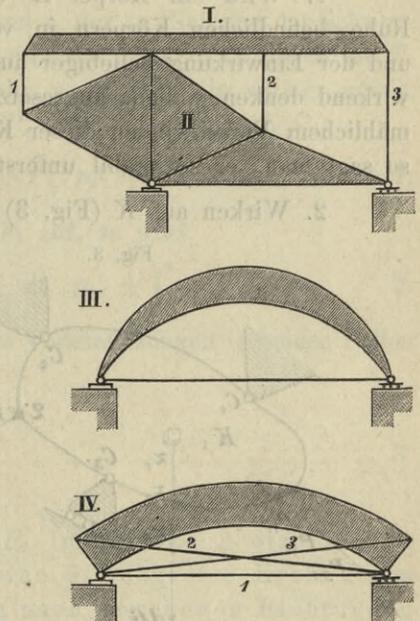
beiderseits eingespannte Balken, bei welchen an jedem der beiden Auflager mindestens drei, also im ganzen mindestens sechs Auflagerbedingungen erfüllt sind u. s. w.²⁾

In vielen praktischen Fällen wird zu Überbrückungen nicht ein Träger benutzt, sondern es kommen deren mehrere in Anwendung; alsdann kann entweder jeder der Träger für sich als abgeschlossenes Ganze auftreten, wie dies bei einer Reihe von aufeinander folgenden einfachen Balkenbrücken der Fall ist, oder es können die Träger sich gegenseitig beeinflussen, in welchem Falle durch die Einwirkung der Träger aufeinander die zur ausreichenden Festlegung eines Trägers nötigen drei oder mehr Auflagerbedingungen sich erfüllen lassen. Ein bekanntes Beispiel dieser Trägerkonstruktionen bildet der Bogenträger mit zwei festen Kämpfergelenken $A A'$ (s. obige Fig. 1, V.) und einem Scheitelgelenk B , welcher als Verbindung zweier Scheiben AB und $A'B$ aufgefaßt werden kann. A ist fest, B gezwungen, auf einem Bogen vom Radius $A'B$ zu bleiben, der Gegendruck in B ist daraus durch die Richtung $A'B$ bestimmt, hierdurch aber auch D' , weil sich P , D' und D'' in einem Punkte schneiden müssen. Man sieht hieraus, daß sich der Träger dieser Art in zwei Träger von der Form II (Fig. 1) zerlegt. Die nähere Betrachtung dieser Konstruktion erfolgt in dem Kapitel über Bogenbrücken. Auch hier kann B durch ein imaginäres Gelenk ersetzt werden.

Eine wichtige Trägeranordnung entsteht, wenn man zwei oder mehrere einfache Balkenträger derart verbindet, daß einer oder beide Stützpunkte eines einfachen Trägers durch die überragenden Enden eines benachbarten einfachen Trägers gebildet werden. Fig. 1 zeigt unter VI eine solche Anordnung, welche namentlich von Gerber ausgebildet ist und deshalb den Namen Gerber-Träger führt. In diesem Falle sind die äußeren Kräfte in jedem einzelnen Träger bestimmt, da keiner derselben mehr als drei Auflagerbedingungen unterworfen ist. Auch hier kann man an Stelle wirklicher Gelenke imaginäre anordnen; doch gelangten letztere bisher nicht zur Durchführung.

Bei der allgemeinen Betrachtung der Träger von praktischer Bedeutung erscheint es oft zweckmäßig, gegebene Auflagerbedingungen durch gedachte Stäbe zu ersetzen und dadurch jedes Fachwerk auf den Fall zurückzuführen, in welchem man es mit einem festen und einem auf einer Geraden gleitenden Auflager zu thun hat, was stets möglich ist. Man macht dadurch den Träger zu einem in Bezug auf die äußeren Kräfte statisch bestimmten, d. h. einem solchen, für welchen die in jedem Knotenpunkte angreifenden Kräfte ohne Berücksichtigung der Formänderung angegeben werden können. So läßt sich z. B. der durchlaufende Träger I (Fig. 2) auf drei beweglichen und einer festen

Fig. 2.



²⁾ Einen allgemein gehaltenen Beitrag zur Systemkunde der Träger, in welchem einzelne der hier angedeuteten Gesichtspunkte ausführlich erörtert und durch Beispiele erläutert werden, lieferte A. Föppl in: „Theorie des Fachwerks“. Leipzig 1880. Siehe auch R. Land. Über die statische und geometrische Bestimmtheit der Träger. Centrabl. d. Bauverw. 1887. Ferner die Abhandlungen von Winkler, Müller-Breslau u. a.

Stütze sofort auf den umstehenden Fall zurückführen, wobei II ein statisch bestimmtes Fachwerk aus unendlich starken Stäben und 1, 2, 3 Stäbe unendlich großen Querschnitts sind. Man wird sich die Untersuchung erleichtern, wenn man hierbei die Anzahl der benutzten gedachten Stäbe auf ein Minimum bringt. Sind die Stützen des in Natur vorkommenden Trägers I nachgiebig, so wird man diesem Umstande Rechnung tragen können, indem man die Stäbe 1, 2, 3 durch entsprechend elastische ersetzt. Der Fachwerksbogenträger mit zwei oder drei Gelenken läßt sich auf einen einfachen Träger zurückführen, bei welchem die Unnachgiebigkeit des rechten Auflagers durch einen horizontalen Stab unendlich großen Querschnitts ersetzt ist (Fig. 2, III). Der Bogenträger IV ohne Gelenke kann durch Einschaltung der gedachten starren Stäbe 1, 2, 3 in einen einfachen Träger verwandelt werden. Die Spannungen der gedachten Stäbe werden die Auflagerbedingungen ersetzen.

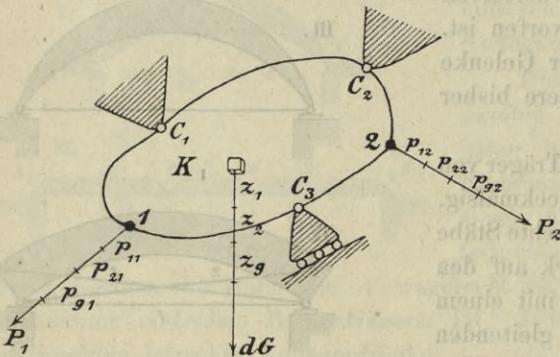
Durch derartige Annahmen kann jeder Träger hinsichtlich der äußeren Kräfte auf einen statisch bestimmten zurückgeführt werden; die Ermittlung gewisser Auflagerdrücke führt immer auf die Bestimmung der Spannungen notwendiger oder überzähliger Stäbe zurück.

§ 3. Grundlehren der Formänderung.

1. Wird ein Körper K vom Gewichte G von anderen unnachgiebigen und in Ruhe befindlichen Körpern in verschiedenen Punkten C seiner Oberfläche gestützt, und der Einwirkung beliebiger äußerer Kräfte, die wir uns stets von Null anwachsend wirkend denken wollen, ausgesetzt, so ändert sich seine Form. Nimmt K nach allmählichem Verschwinden dieser Kräfte seine ursprüngliche Form und Lage wieder an, so sagt man, er sei stabil unterstützt und vollkommen elastisch.

2. Wirken auf K (Fig. 3) bleibend mehrere äußere Kräfte und tritt an irgend

Fig. 3.



einem Punkte 1 seiner Oberfläche eine neue Kraft P_1 hinzu, so entsteht in 1, nach Richtung von P_1 gemessen, eine Verschiebung p_{11} und in irgend einem anderen Punkte 2 des Körpers, nach irgend einer anderen Richtung 2 gemessen, eine Verschiebung p_{12} , wobei wir unter p_{11} und p_{12} die Projektionen der wirklichen Verschiebungen der Punkte 1 u. 2 verstehen und den projizierenden Strahl senkrecht zu Richtung 1 bzw. 2 annehmen.

3. Die Erfahrung lehrt, daß für Körper aus bestimmten Stoffen, so lange die vorhandenen und neu hinzukommenden Kräfte gewisse Grenzen nicht überschreiten, die Verschiebungen p_{11} und p_{12} der angreifenden Kraft P_1 proportional sind und mit P_1 gleichzeitig verschwinden, ferner unabhängig von den bereits vorhandenen Kräften sind, was nur bei solchen Formänderungen zutrifft, welche gegen die übrigen Abmessungen des Körpers sehr klein sind. Ist dies für jeden Punkt des Körpers der Fall, so sagen wir, die Einwirkung der Kraft überschreite die Proportionalitätsgrenze nicht, was in den nachstehenden Untersuchungen stets vorausgesetzt werden soll. Unsere ganzen Untersuchungen werden hierdurch wesentlich beschränkt. Sie sind nicht gültig für Bau-

stoffe, bei denen eine Proportionalitätsgrenze selbst für verhältnismäßig kleine Formänderungen nicht besteht, wie dies z. B. bei Gufseisen der Fall ist; wohl aber gelten sie für Flufs- und Schweifseisen und auch für Stein und Beton haben sie, wie die Gewölbeversuche des österr. Ing.- u. Arch.-Vereins erwiesen haben, innerhalb bestimmter Grenzen Geltung.

4. Die nach dem Vorhergegangenen in 1 und 2 für $P_1 = 1$ entstehenden Verschiebungen wollen wir die spezifischen Verschiebungen nennen und mit δ_{11} und δ_{12} bezeichnen.

5. Bringt man in 2 nach Richtung 2 eine Kraft P_2 an, so wird diese in 1, nach Richtung 1 gemessen, die Verschiebung p_{21} , in 2, nach Richtung 2 gemessen, die Verschiebung p_{22} erzeugen.

Die zugehörigen spezifischen Verschiebungen in 2 und 1 sollen mit δ_{22} und δ_{21} bezeichnet werden, wobei sich wie oben die erste Ziffer auf die Kraft, die zweite auf Punkt und Richtung bezieht.

6. Wir wollen im Folgenden voraussetzen, dafs die Stützpunkte C des Körpers K entweder absolut fest sind oder nur solche Bewegungen zulassen, denen sich kein Widerstand entgegensetzt (reibungslös gedachte Rollenlager des Brückenbaues).

Ist dG das Gewicht eines Elementes von K und z_1 der in Richtung der Schwere zurückgelegte Weg des Elementes, wenn P_1 allein einwirkt, tritt dann die Kraft P_2 hinzu und ist z_2 der Weg, den dG zurücklegen würde, wenn P_2 allein wirken würde, so wird die Arbeit der äufseren Kräfte, falls zuerst P_1 auftritt und danach P_2 :

$$W_a = \frac{1}{2} P_1 \cdot p_{11} + \int z_1 \cdot dG + \frac{1}{2} P_2 \cdot p_{22} + P_1 \cdot p_{21} + \int z_2 \cdot dG \quad \dots \quad 1.$$

Tritt hingegen zuerst die Kraft P_2 und dann P_1 auf, so wird

$$W_a = \frac{1}{2} P_2 \cdot p_{22} + \int z_2 \cdot dG + \frac{1}{2} P_1 \cdot p_{11} + P_2 \cdot p_{12} + \int z_1 \cdot dG \quad \dots \quad 2.$$

Die Arbeit mufs unter den vorher angegebenen Voraussetzungen in beiden Fällen dieselbe sein.

Die Subtraktion beider Gleichungen liefert:

$$P_1 \cdot p_{21} = P_2 \cdot p_{12} \quad \dots \quad 3.$$

Für $P_1 = P_2$ wird $p_{21} = p_{12}$ oder in Worten:

Die Verschiebung, welche eine Kraft P_1 im Punkte 2 erzeugt, ist ebenso grofs wie die Verschiebung, welche eine gleichgrofse Kraft P_2 im Punkte 1 erzeugt, Kräfte und Verschiebungen nach gegebenen Richtungen gemessen (Maxwell).

Daraus folgt naturgemäfs

$$\delta_{21} = \delta_{12} \quad \dots \quad 4.$$

Der Satz gilt für alle im Hoch- und Brückenbau vorkommenden Träger aus den bezeichneten Baustoffen innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen, gleichgiltig, ob das System statisch bestimmt oder unbestimmt, belastet oder unbelastet ist.

7. Die Addition der Gleichungen 1 und 2 giebt, durch 2 dividiert:

$$W_a = \frac{1}{2} P_1 (p_{11} + p_{21}) + \frac{1}{2} P_2 (p_{22} + p_{12}) + \int (z_1 + z_2) \cdot dG \quad \dots \quad 5.$$

schiebung des Körpers im Punkte 1 nach Richtung 1 gemessen. (Der Satz gilt unter der Bedingung, daß die Auflagerdrücke keine Arbeit verrichten, für alle Körper bezeichneter Art.)

10. Läßt man auf das ursprünglich spannungs- und gewichtslos gedachte Raumbgebilde zuerst G , dann P_2 , dann P_1 , wie früher beschrieben, einwirken, so wird die Formänderungsarbeit

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \int z \cdot dG + \int z_2 \cdot dG + \frac{1}{2} P_2 \cdot p_{22} + \frac{1}{2} P_1 \cdot p_{11} + \int z_1 \cdot dG + p_{12} P_2$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \int \zeta \cdot G \cdot dG + \int \zeta_2 \cdot P_2 dG + \frac{1}{2} \delta_{22} P_2^2 + \frac{1}{2} \delta_{11} P_1^2 + \int \zeta_1 P_1 dG + \delta_{21} P_2 P_1.$$

Differentiiert man nach P_1 , so erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial P_1} = \delta_{11} P_1 + \int \zeta_1 \cdot dG + \delta_{21} P_2 = p_1 \dots \dots \dots 11.$$

Drückt man die Formänderungsarbeit eines ursprünglich spannungs- und gewichtslos gedachten Körpers als Funktion des Gewichtes und aller äußeren Kräfte aus, so liefert die Differentiation dieses Ausdruckes partiell nach P_1 die gesamte Verschiebung p_1 des Punktes 1 nach der Richtung P_1 gemessen.

11. Die nochmalige Differentiation liefert:

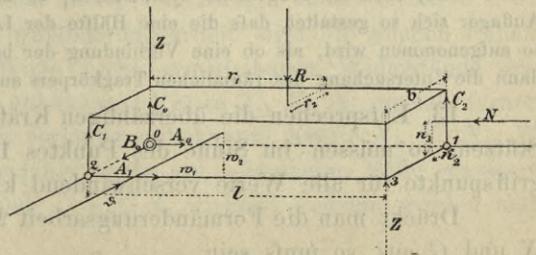
$$\frac{d^2 \mathfrak{A}}{d P_1^2} = \delta_{11}, \quad \frac{d^2 \mathfrak{A}}{d P_1 \cdot d P_2} = \delta_{12} \dots \dots \dots 12.$$

Die spezifischen Verrückungen der Kraftangriffspunkte entsprechen den zweiten Differentialquotienten der Formänderungsarbeit partiell, nach den angreifenden Kräften genommen.

12. Wirken auf einen Körper äußere Kräfte P_1, P_2, G und ist derselbe in mehreren Punkten, deren Bewegung beschränkt oder aufgehoben ist, unterstützt, so läßt sich die Wirkung jeder Stütze C auf den Körper durch äußere Kräfte ersetzen; ist C festgehalten, müssen drei, ist C gezwungen auf einer Linie zu bleiben, müssen zwei Kräfte, ist C gezwungen auf einer Ebene zu bleiben, muß eine Kraft in C angebracht werden. Die n -Stützenkräfte und die angreifenden Kräfte P_1, P_2, G müssen ein im Gleichgewicht befindliches Kraftsystem bilden. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen liefern für Kräfte im Raume sechs, für ebene Gebilde drei Gleichgewichtsbedingungen. Ist die Anzahl der unbekannteten Stützenwiderstände im ersten Falle größer als 6, im zweiten Falle größer als 3, so sind im allgemeinen unendlich viele Stützenwiderstände denkbar, welche das nötige Gleichgewicht herstellen, und wir können $n - 6$, bzw. $n - 3$ Stützenwiderstände zunächst ganz willkürlich annehmen. Wir wollen sie mit $X_1, X_2 \dots$ bezeichnen. Nach deren Annahme sind die übrigen Stützenwiderstände aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen ermittelbar.

Eines der einfachsten Tragwerke ist der prismatische Balken. Nach den entwickelten Regeln ist zu seiner stabilen Stützung es genügend, wenn der Auflagerpunkt 0 (Fig. 4), den wir gleichzeitig als Mittelpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems auffassen wollen, festgehalten wird, Stützpunkt 2 gezwungen ist, auf der y -Achse zu bleiben, Stützpunkt 1 genötigt erscheint, auf der Ebene xy sich zu bewegen. Eine Stützung des vierten Punktes 3 der Grundfläche, die in praktischen Fällen wohl meist stattfinden wird, ist überflüssig,

Fig. 4.



bedingt also schon die Einführung einer überzähligen Auflagerbedingung, bezw. die Einführung einer überzähligen äußeren Kraft.

Unter Einführung der in Fig. 4 ersichtlichen Auflagerwiderstände $A_0, B_0, C_0, A_1, C_1, C_2$ und der angreifenden Kräfte R, N, \mathfrak{S} , deren Angriffspunkte durch die Koordinaten $r_1, r_2, w_1, w_2, n_2, n_3$ festgelegt sind, findet sich:

Aus der Bedingung, daß die Summe aller Kräfte parallel zur x -Achse Null sein müsse:

$$A_0 + A_1 = N,$$

dasselbe für die y -Achse:

$$B_0 = \mathfrak{S},$$

und für die z -Achse:

$$C_0 + C_1 + C_2 = R.$$

Die Bedingung, daß die Summe der Drehmomente um die x -Achse Null sein müsse:

$$C_1 b + \mathfrak{S} w_2 - R r_2 = 0,$$

dasselbe für die y -Achse:

$$- C_2 l + R r_1 - N n_3 = 0,$$

und für die z -Achse:

$$- A_1 b - \mathfrak{S} w_1 + N n_2 = 0.$$

Daraus ergeben sich die Auflagerwiderstände:

$$A_0 = N + \frac{w_1}{b} \mathfrak{S} - \frac{n_2}{b} N; \quad C_0 = \left(1 - \frac{r_1}{l} - \frac{r_2}{b}\right) R + \frac{w_2}{b} \mathfrak{S} + \frac{n_3}{l} N,$$

$$A_1 = -\frac{w_1}{b} \mathfrak{S} + \frac{n_2}{b} N; \quad C_2 = \frac{r_1}{l} R - \frac{n_3}{l} N,$$

$$B_0 = \mathfrak{S}; \quad C_1 = \frac{r_2}{b} R - \frac{w_2}{b} \mathfrak{S}.$$

Denkt man sich die Wirkung einer Stütze in 3 durch eine nach oben wirkende Kraft Z ersetzt, die senkrecht zur Ebene xy wirkt, also der Bedingung entspricht, daß der Stützpunkt in der Ebene xy zu bleiben gezwungen ist, so entsprechen dieser Kraft als angreifende Kraft Stützenwiderstände, die sich für $R = -Z, \mathfrak{S} = 0, N = 0$, ferner $r_1 = l, r_2 = b$ leicht mit $+Z, -Z, -Z$ in Stütze 0, 1, 2 rechnen.

Es wirken also, wie erwähnt, die freien Kräfte

$$R, \mathfrak{S}, N, Z$$

und die Auflagerwiderstände:

$$A_0, A_1, B_0, C_0 + Z, C_1 - Z, C_2 - Z.$$

Ein in sich stabiler Brückenträger, ein massiver Balken, ein stabiles Fachwerk, kurz das, was wir einen Tragkörper nennen wollen, ist hinsichtlich der Auflagerdrücke, wenn er auf 4 Punkten aufgelagert ist, niemals statisch bestimmt gelagert, ähnlich wie ein Tisch auf vier Füßen wackeln wird, wenn selbe nicht genau dem stützenden Boden angepaßt sind. Ein lotrechter Auflagerdruck ist stets überzählig. Die Senkung einer der 4 Stützen wird stets Nebenspannungen erzeugen.

Wir sehen daraus, daß schon die einfachsten Trägerformen zu sehr schwierigen Untersuchungen Veranlassung bieten können. Diese Untersuchungen zeigen in bestimmten Fällen aber, daß es mit großer Annäherung erlaubt ist, für bestimmte Belastungsweise vereinfachende Annahmen zu machen.

Eine solche Annahme ist zunächst die, daß wir uns den Balken durch zwei Tragwände ersetzt denken können, die oben und unten durch Querstäbe verbunden sind und daß R sich in zwei gleich große Seitenkräfte zerlegen läßt, von denen die eine auf die vordere, die andere auf die hintere Tragwand wirkt; sind die Tragwände symmetrisch, so findet sich, daß die Verteilung der Kräfte auf die Auflager sich so gestaltet, daß die eine Hälfte der Last von der vorderen, die zweite von der hinteren so aufgenommen wird, als ob eine Verbindung der beiden Wände nicht vorhanden wäre. Es erscheint dann die Untersuchung des räumlichen Tragkörpers auf jene der ebenen Wände (Scheiben) beschränkt.

13. Entsprechen die überzähligen Kräfte X_1, X_2, X_3 den Gegenwirkungen fester Stützen, so müssen im Sinne des Punktes 11 (S. 207) die Verschiebungen ihrer Angriffspunkte für alle Werte verschwindend klein sein.

Drückt man die Formänderungsarbeit \mathfrak{A}_a des Körpers als Funktion der Größen P, X und G aus, so muß sein

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_1} = 0, \text{ bzw. } \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_2} = 0, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_3} = 0. \dots \dots \dots 13.$$

Ferner

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial X_1^2} = \xi_{11}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial X_2^2} = \xi_{22} \text{ u. s. w.}$$

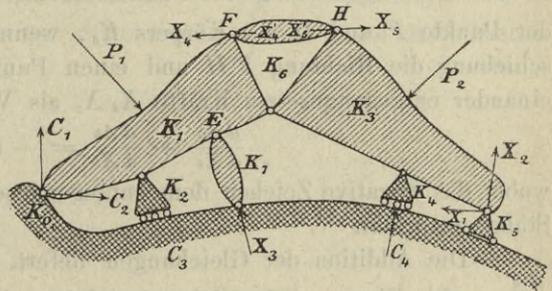
Da die ersten Differentialquotienten Null sind und die zweiten partiellen Differentialquotienten nicht alle verschwinden, besitzt \mathfrak{A} für die richtigen Werte X einen eminenten Wert, der der Natur der Aufgabe nach nur ein Minimum sein kann.

Unter allen möglichen Systemen äußerer Kräfte, welche die Einwirkung fester Stützkörper ersetzen, tritt stets jenes auf, für welches die Formänderungsarbeit ein Minimum wird.

14. Es wird durch wirkliche oder gedachte Lösung des Zusammenhanges einzelner Teile eines Körpers und Einschaltung bestimmter zwangsläufiger Verbindungen in vielen Fällen möglich, den zu untersuchenden Gesamtkörper in einzelne Teile zu zerlegen, für welche die Berechnung der Formänderungsarbeit möglich wird, wenn die Einwirkung der gekuppelten benachbarten Teilkörper durch an den Verbindungsstellen angreifende, äußere Kräfte ersetzt wird. Jede räumliche Gelenkverbindung wird wie oben durch drei, die Bedingung des Gleitens eines Punktes auf einer Linie durch zwei äußere Kräfte, des Gleitens in einer Ebene durch eine Kraft ersetzt werden können u. s. w. Die einschlägigen Untersuchungen führen in das Gebiet der Kinematik.

Fig. 5 stellt eine stabile Verbindung elastischer (einfach schraffiert) und starrer (doppelt schraffiert) Scheiben K_1 bis K_7 dar, auf welche wir uns in der Ebene dieser Scheiben äußere Kräfte wirkend denken, und an welchen wir weitere Beziehungen kennen lernen wollen, die ohne weiteres auch auf räumliche Systeme ausdehnbar sind.

Fig. 5.



Die aus der Figur ersichtliche Wirkungsweise der Teilkörper führt zu den heute im Brückenbau maßgebenden Trägerformen. Es ist z. B., wenn nur vorhanden,

K_0, K_1, K_2 (einfacher Träger mit überragendem Ende auf einer festen und beweglichen Stütze),

K_0, K_1, K_2 dicht an K_0 (am Ende eingespannter Träger),

K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 (Gerberträger mit freischwebenden Stützpunkten),

K_0, K_1, K_3, K_5 (Bogenträger mit 3 Gelenken),

$K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_6$ (durchlaufender Träger auf 3 Stützen, welcher durch Ausschalten des Gliedes K_6 [unter Umständen überflüssiger Stab eines Fachwerkes] in einen Gerberträger verwandelt werden kann),

K_0, K_1, K_2 dicht an K_0, K_6, K_3, K_4 dicht an K_5 (Bogenträger ohne Gelenk) u. s. w.

15. Die Berechnung der gesamten Formänderungsarbeit wird in solchen Fällen möglich, wenn man die auf statischem Wege nicht ermittelbaren Widerstände des stützenden Grundkörpers K_0 durch vorläufig unbekannte Kräfte X_1, X_2, X_3 ersetzt, ferner die Wirkung von Zwischenkörpern K_6 durch vorläufig unbekannte Kräfte X_4, X_4', X_5, X_5' ersetzt, von denen in unserem Beispiele, welches leicht auf allgemeine Fälle erweitert werden kann, X_4 auf K_1, X_5 auf K_3, X_4' und X_5' auf K_6 wirkend gedacht werden und $X_4 = X_4' = X_5 = X_5'$ sein muß.

Da der unter 10. gewonnene Satz ohne weiteres auf das ganze stabile System $K = \Sigma (K_1, K_2, K_3 \dots)$ angewendet werden darf, erhalten wir:

$$\mathfrak{A} = \Psi (P_1, P_2, X_1, X_2, X_3 \dots),$$

wobei wir voraussetzen, daß die Stützenreaktionen C_1, C_2, C_3, C_4 statisch als Funktionen von P und X ermittelbar sind. Dann aber liefert die Bedingung, daß die Verschiebung des Angriffspunktes von X_1 (feste Stütze) Null sein muß, die Gleichung $\frac{dA}{dX_1} = 0$; ebenso muß $\frac{dA}{dX_2} = 0$ werden. Bezeichnet man die Arbeit des Systems, welches nach Hinweglassung des Stützkörpers K_7 entsteht, mit A_{K-7} , so wird die Verschiebung des Angriffspunktes E ergeben $\frac{dA_{K-7}}{dX_3} = x_3$, während die Formänderungsarbeit A_7 des Körpers K_7 für die Verschiebung von E liefern muß $\frac{dA_7}{dX_3} = -x_3$, da der Zusammenhang in E nicht gelöst werden darf.

Wir haben daher wieder

$$\frac{dA_{K-7}}{dX_3} + \frac{dA_7}{dX_3} = \frac{dA}{dX_3} = 0.$$

Der zweite Differentialquotient würde liefern

$$\frac{d^2 A}{dX_3^2} = \xi_3 + \xi'_3.$$

Schaltet man K_6 aus, so erhält man die Verschiebung des Punktes F mit $\frac{dA_{K-6}}{dX_4} = x_4$, ebenso die Verschiebung des Punktes H mit $\frac{dA_{K-6}}{dX_5} = x_5$ und für die Verschiebung der Punkte F und H des Körpers K_6 , wenn man sich für die Ermittlung der Verschiebung die Richtung FH und einen Punkt derselben festgehalten denkt, in dem einander entgegengesetzte Kräfte $X_4 X_5$ als Widerstände wirken,

$$\frac{dA_6}{dX_4} + \frac{dA_6}{dX_5} = -(x_4 + x_5),$$

wobei das negative Zeichen dem entgegengesetzten Sinne der Kräfte am eingeschalteten Stabe entspricht.

Die Addition der Gleichungen liefert, wenn man $X_4 = X_5$ setzt, den Ausdruck $\frac{dA}{dX_4} = 0$. Ebenso läßt sich wie oben zeigen, daß der zweite Differentialquotient positiv sein muß.

Wir haben daher allgemein

$$\frac{dA}{dX_m} = 0 \text{ und } \frac{d^2 A}{dX_m^2} > 1 \dots \dots \dots 14.$$

Diese Bedingungen entsprechen, wie oben, einem Minimum und wir können sagen:

Drückt man die Formänderungsarbeit einer stabilen Verbindung elastischer Körper als Funktion der angreifenden Kräfte und gewisser, vorläufig unbekannter und unabhängig veränderlich anzunehmender Widerstände X des stützenden Grundkörpers und innerer Teilkörper aus, so tritt stets jene Formänderung ein, für welche die gesamte Formänderungsarbeit, als Funktion der X betrachtet, ein Minimum wird.

Da man ebenso viele Bedingungsgleichungen als Unbekannte erhält, ist die Aufgabe gelöst.

16. Bildet man die einzelnen Gleichungen $\frac{dA}{dX} = 0$, so ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} X_1 (\xi_{11} + \xi'_{11}) + X_2 \xi_{12} & + & X_3 \xi_{13} + \dots = Q_1 \\ X_1 \xi_{12} & + & X_2 (\xi_{22} + \xi'_{22}) + X_3 \xi_{23} + \dots = Q_2 \\ X_1 \xi_{13} & + & X_2 \xi_{23} & + & X_3 (\xi_{33} + \xi'_{33}) + \dots = Q_3 \\ \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

wenn Q nur von der Belastung P abhängige Größen. Diese Q_1, Q_2, Q_3 sind nichts anderes, als die Verschiebungen, welche in Richtung von $X_1, X_2, X_3 \dots$ im verbleibenden, statisch bestimmten System von den Kräften P erzeugt werden.

17. Die Symmetrie der Werte ξ_{mn} und ξ_{nm} ist Folge des Satzes unter 6. ξ_{11} ist die spezifische Verschiebung des freien Angriffspunktes, ξ'_{11} die spezifische Verschiebung des Punktes am Stützkörper oder des eingeschalteten Zwischenkörpers (Punkt E bzw. F unseres Beispiels).

Ist l die Länge, F die mittlere Querschnittsfläche des stabförmig gedachten Stützkörpers, so wird $\xi'_{11} = \frac{l}{EF}$.

Die Auflösung des Gleichungssystems nach X_1 liefert

$$X_1 = \frac{L}{(\xi_{11} + \xi'_{11})M + N}, \dots \dots \dots 15.$$

wobei L, M, N von ξ_{11} und ξ'_{11} unabhängige Größen sind.

Für einen starren Stützkörper wird $\xi'_{11} = 0$:

$$X_0 = \frac{L}{\xi_{11}M + N} \dots \dots \dots 16.$$

Für einen vollständig nachgiebigen ($F = 0$):

$$\xi'_{11} = \infty, \text{ daher } X = 0.$$

Die Inanspruchnahme σ_0 eines stabförmigen Stützkörpers (überzähligen Stabes eines Fachwerkes) wird im Falle eines starren Stützkörpers $\frac{X_0}{F} = 0$ und im Falle eines vollkommen nachgiebigen

$$\sigma' = \frac{L}{\frac{Ml}{E}},$$

woraus leicht, wenn c eine Konstante,

$$\sigma = \frac{\sigma'}{1 + cF} \dots \dots \dots 17.$$

Hieraus ergeben sich die Sätze:

Der Widerstand, den ein eingeschalteter Stützkörper (Spannung des überzähligen Stabes eines Fachwerkes) der Formänderung entgegenstellt, wird am größten, wenn der Stützkörper starr wird. Die größte Inanspruchnahme σ , welche ein stabförmiger Stützkörper überhaupt erleiden kann, tritt für den ideellen Fall $F = 0$, also für einen sehr kleinen Querschnitt des überzähligen Stabes ein.

Für dazwischen liegende Querschnitte erscheint der Zusammenhang nach Formel 17 gegeben.

A. Allgemeine Trägerlehre.

I. Die inneren Kräfte und Arbeitsgrößen bestimmt belasteter Tragkörper (Theorie der Vollwandträger).

§ 4. Allgemeines. Zur Bestimmung der inneren Kräfte eines Tragkörpers, der von äußeren Kräften angegriffen wird, ist vor allem nötig, daß die denselben angreifenden Kräfte und Gegenwirkungen der Stützen ein im Gleichgewichte befindliches Kräftesystem bilden, ganz gleichgiltig, ob dieselben direkt bekannt sind oder, wenn überzählige Auflagerbedingungen vorhanden sind, als vorläufig unbekannt Größen eingeführt werden.

Jeder Untersuchung dieser Art wird die Festlegung des Systems der äusseren Kräfte vorangehen müssen, die unter der Annahme erfolgt, dass wir den Körper zunächst als starr betrachten und die angreifenden Kräfte und überzähligen Stützendrücke aus den statisch bestimmbareren Stützengegenkräften ins Gleichgewicht bringen, eine Aufgabe, die wir allgemein an einem Beispiele bereits auf S. 203, Fig. 2, gezeigt haben.

Denkt man sich im Innern eines von äusseren Kräften beanspruchten Körpers eine sehr kleine materielle Kugel vom Mittelpunkte M und ersetzt man die Wirkung der Umgebung der Kugel auf dieselbe durch Kräfte, welche die Oberfläche derselben beanspruchen, so wird auf jedes Oberflächenelement dF eine kleine Kraft dR kommen, welche sich in zwei Seitenkräfte zerlegen lässt, von denen die eine dN radial, die andere dQ tangential wirkt; die auf die Flächeneinheit des Elementes dF kommende Kraft $\frac{dR}{dF} = \rho$ heisst die resultierende Spannung, $\frac{dN}{dF} = \sigma$ heisst die Normalspannung, $\frac{dQ}{dF} = \tau$ die Schubspannung im Elemente dF . Trägt man die Werte ρ nach Grösse und Richtung vom Elemente aus als Strecke FP auf, so liegen die Punkte P auf einem Ellipsoid, dem Spannungsellipsoid, dessen Mittelpunkt mit jenem der Kugel zusammenfällt. Die drei Hauptachsen des Ellipsoids treffen die Kugel in 6 Elementen, in denen die resultierende Spannung senkrecht auf den Elementen steht und ihren relativ grössten bzw. kleinsten Wert erreicht. Diese Spannungen heissen die Hauptspannungen, wir wollen sie mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bezeichnen. Die Hauptspannungen zweier auf demselben Durchmesser gegenüberliegender Kugeloberflächenelemente sind einander gleich. Die durch die Hauptachsen gehenden drei Hauptebenen schneiden die Kugel in drei Kreisen; die Oberflächenelemente dieser Kreise werden ebenfalls nur von Normalspannungen beansprucht.⁴⁾

In einem homogenen Körper, dessen Elasticität in allen Punkten und nach allen Richtungen gleich ist, geht eine ursprünglich sehr kleine Kugel in ein sehr kleines Ellipsoid über. Jeder Punkt F der Kugeloberfläche erfährt eine relative Ortsveränderung, die auf eine Längenänderung des Abstandes vom Mittelpunkt und auf eine Verschiebung tangential zur Kugeloberfläche zurückgeführt werden kann.

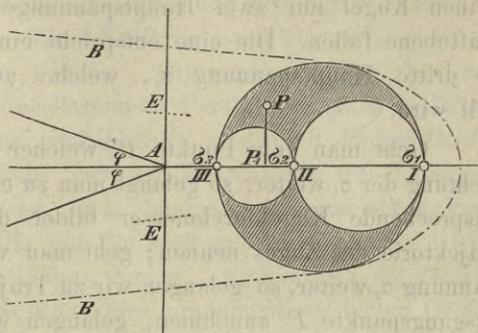
Kommt F durch die Formänderung in die Lage F^* und bezeichnet man die Projektion von FF^* auf den Kugelhalbmesser FM mit FF' , jene parallel zur Kugeloberfläche mit FF'' , so heissen $\frac{FF'}{FM} = \lambda$ und $\frac{FF''}{FM} = \delta$ die Dehnungen (λ) bzw. Schiebungen (δ) des Elementes. Trägt man λ und δ in derselben Weise wie die Werte σ und τ als Strecken vom Elemente aus auf, so erhält man ebenfalls ein Ellipsoid von entsprechenden Beziehungen, das Dehnungsellipsoid; doch fallen die Achsen beider Ellipsoide im allgemeinen nicht zusammen.

Die Hauptaufgabe der Elasticitäts- und Festigkeitslehre besteht darin, die Abmessung der Baukonstruktionen, in unserem Falle der Brücken, so zu bestimmen, dass die Formänderungen innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Die vollständigste mit dem geringsten Stoffaufwande verbundene Lösung wäre vorhanden, wenn in allen Punkten des Trägers diese Grenze gleichzeitig erreicht würde. Man hat bisher insbesondere die Dehnungen in Rechnung gestellt und die Bedingungen für die Schiebungen aufser Acht gelassen, zweifellos spielen selbige ebenfalls eine grosse Rolle. Etwas leichter als die Werte λ und δ können die Werte σ und τ richtig ermittelt werden, und es

⁴⁾ Vergl. Mohr. Darstellung des Spannungszustandes. Civilingenieur, Bd. XXVIII, woselbst auch die Beweise für die sonstigen obigen Sätze.

mufs festgehalten werden, dafs in keinem Punkte M der Konstruktion die grösste der auftretenden Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, welche Zug- oder Druckspannungen sein können, eine gewisse zulässige Grenze überschreiten darf. Sind $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ die gegebenen Hauptspannungen einer sehr kleinen Kugel (Fig. 6), und trägt man die in irgend einem Oberflächenpunkte F auftretende Normalspannung $\sigma = AP_1$ als Abscisse, die zugehörige Tangentialspannung $\tau = P_1P$ als Ordinate auf, so erhält man Punkte P , welche stets innerhalb der schraffierten Fläche liegen müssen, wenn

Fig. 6.



$$AI = \sigma_1; \quad AII = \sigma_2; \quad AIII = \sigma_3$$

gemacht wird. Die grösste Schubspannung, welche daher auftreten kann, ist durch $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ gegeben, sie entspricht dem Halbmesser des grössten Kreises I III. Dieser Kreis wird auch der Halbkreis der Darstellung genannt. Im Falle $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, schrumpft die Darstellung zu einem Punkt I zusammen: es treten keine Schubspannungen auf (vollkommene Flüssigkeiten).

Entsprechendes ergibt sich für die Schiebungen und Dehnungen.

Würde man alle jene Formänderungszustände, welche in irgend einem Punkte M eben die Festigkeitsgrenze überschreiten, durch entsprechende Hauptkreise darstellen, so berühren dieselbe eine Hüllkurve. Für kohäsionslose Massen vom Reibungswinkel φ geht diese Hüllkurve in zwei Gerade über, welche sich unter dem Winkel 2φ in A schneiden. Für die Spannungen und Formänderungen an der Elastizitäts- und Bruchgrenze ergeben sich je zwei solcher Umhüllungskurven E und B , die leider versuchsweise nur für kleine Teile dieser Linien bisher festgestellt sind. Auf der Kurve B liegen Punkte, die jenen Teil der Kurve abschliessen, für welchen an Stelle des Trennens, Brechens, das Fließen tritt. Unter allen Umständen müssen bei spröden Körpern verhältnismässig grosse Schubspannungen wirksam sein, um das Fließen herbeizuführen. Die Bruchkurven sind nach links stets offen. Druckspannungen, welche nicht mit gröfseren Schubspannungen verknüpft sind, führen die Zerstörung nicht herbei.

Die genaue Ermittlung der Werte $\sigma, \tau, \lambda, \delta$ stöfst auch in den allereinfachsten Fällen auf mathematische Schwierigkeiten, welche nur in ganz wenigen Beispielen unter in Wirklichkeit nie vollkommen zutreffenden Annahmen gelöst wurden (Probleme De Saint Venant, Kirchhoff, Pochhammer u. a.). Man ist daher immer auf Näherungswerte angewiesen, die einerseits auch aus den genauen mathematischen Lösungen als erste Näherungen sich ergeben haben, andererseits durch den Versuch bestätigt wurden. Freilich auch hier nur wieder für ganz einfache Fälle. Hingegen ist es nicht schwierig, die allgemeine Arbeitsgleichung zu erweisen, die wir im folgenden Paragraphen bringen wollen.

Die Hauptachse einer Hauptspannung σ_1 einer unendlich kleinen Kugel bildet für sich ein Kurvenelement, das uns nach einem gleichwertigen der Nachbarkugel u. s. w. führt. Der Hauptspannung σ_1 entspricht eine Trajektoriallinie.

Schneidet bei einem Balkenträger die Ebene der äufseren Kräfte, in welcher zugleich die Stabachse liegen soll, sämtliche Querschnitte in Geraden, welche Hauptachsen

in Bezug auf die Trägheitsmomente des Querschnittes sind, so treten in jeder unendlich kleinen Kugel nur zwei Hauptspannungen $+\sigma_1$ und $-\sigma_2$ auf, deren Achsen in die Kraftebene fallen. Die eine entspricht einem Zuge, die andere einem Drucke, während die dritte Hauptspannung σ_3 , welche auf der Kraftebene senkrecht steht, gleich Null wird.

Geht man vom Punkte P , welcher eine unendlich kleine Kugel darstellt, in der Richtung der σ_1 weiter, so gelangt man zu einer zweiten, u. s. w. Der der Hauptspannung entsprechende Kugeldurchmesser bildet das Element einer Kurve, welche wir eine Trajektorie des Zuges nennen; geht man vom selben Punkte aus in Richtung der Hauptspannung σ_2 weiter, so gelangen wir zu Trajektorien des Druckes. Indem wir verschiedene Ausgangspunkte P annehmen, gelangen wir zu ganzen Kurvenscharen der σ_1 und σ_2 , welche sich in jedem Punkte P unter rechten Winkeln treffen. Die Trajektorien des größten Zuges bilden zugleich Leitlinien für unendlich kleine Cylinderflächen, deren Erzeugende auf der Kraftebene senkrecht stehen und Flächenelemente umfassen, welche nur Druck aufzunehmen haben, während die Trajektorie des größten Druckes zugleich die Leitlinie für die Cylinderfläche größter Zugspannung ist. Es ist leicht, derartige Gebilde auch für allgemeine Fälle weiter zu verfolgen, wenn eben die Spannungen berechenbar sind, was ja immer nur auf Grund von oft gewagten Annahmen erfolgen kann.

Wir können uns nicht versagen, die Ansichten hier wiederzugeben, welche an anderer Stelle Mohr ausspricht, indem er sagt: „Eine genaue Bestimmung der Formänderungen und Spannungen bei unseren eisernen Trägern mit vollen Wandungen ist so verwickelt, daß sie durch die Rechnung nicht verfolgt werden kann, und jedenfalls giebt die auf die gebräuchliche Biegungstheorie eines homogenen Balkens gegründete Theorie auch nicht einmal ein angenähertes Bild der Wirklichkeit. Es hat daher keinen Wert, auf dem bezeichneten Wege ebenso lange wie unrichtige Formeln abzuleiten. Auf kürzerem Wege wird man ohne Zweifel ein genaueres Resultat erzielen, wenn man für den Zweck der Berechnung der Formänderungen und der statisch nicht bestimmbareren Auflagerdrücke den Blechträger in ein Fachwerk verwandelt, indem man die den Gurtungen und Versteifungsstäben zunächst liegenden Blechstreifen mit diesen Konstruktionsteilen vereinigt und einen Teil — etwa die Hälfte oder zwei Dritteile — des Restes der Blechwand eines jeden Faches zu einer Diagonalstrebe umformt. In den meisten Fällen wird die Formänderung der Füllungsteile eines solchen Fachwerks einen verschwindend kleinen Einfluß auf das Resultat der Rechnung ausüben und daher vernachlässigt werden dürfen.“

Durch einen derartigen Vorgang werden viele hier zu lösende Aufgaben auf die Behandlungsweisen des nächsten Abschnittes zurückgeführt.

Demungeachtet wollen wir in den folgenden Paragraphen die wichtigsten Regeln bringen, wie solche bisher bei vollwandigen Brückenträgern üblich sind.

§ 5. Die Arbeitsgleichung der Formänderung. Auf die Oberfläche eines Tragkörpers wirke die Kraft P , welche mit den Widerständen der Stützkörper ein im Gleichgewichte befindliches System bildet. Ferner seien das Gewicht des Tragkörpers und andere Kräfte (Ergänzungskräfte der relativen Bewegung) vorhanden, welche an die Massenelemente des Tragkörpers gebunden sind.

Wir denken uns aus dem Tragkörper ein unendlich kleines Parallelepiped herausgeschnitten, so werden wir die Wirkung der Umgebung durch sechs Kräfte ersetzen

können, welche in den Flächenelementen angreifen und unendlich kleine Größen zweiter Ordnung sind, da sie als das Produkt einer endlichen Spannung mit dem Flächeninhalt des unendlich kleinen Rechteckes erscheinen. Diese Kräfte müssen für sich im Gleichgewichte sein. Sie sollen mit Σ_1 bezeichnet werden. Außerdem werden aber noch Differenzen der Spannungen in den gegenüberliegenden Flächenelementen auftreten, welche mit dem Inhalte der Flächenelemente multipliziert, unendlich kleine Größen dritter Ordnung darstellen, also Größen, welche mit der Massenkraft des Elementes, die an den Kubikinhalte desselben gebunden ist, und ebenfalls eine unendlich kleine Größe dritter Ordnung repräsentiert, ebenfalls ein für sich am Elemente im Gleichgewicht befindliches System von Kräften (Σ_2) bilden werden. Ändert sich die Kraft P um δP , so werden sich die Flächenkräfte des Elementes um unendlich kleine Größen dritter Ordnung ändern, da die Spannungen sich um eine unendlich kleine Größe erster Ordnung ändern und die Flächenelemente ihrer Größe nach als konstant bleibend aufgefaßt werden können. Das System dieser Zusatzspannungen muß ebenfalls für sich im Gleichgewichte stehen.

Durch das Auftreten von δP erleidet das Element eine Orts- und Formveränderung. Wir wollen die mit dieser Bewegung verbundenen Arbeitsgrößen, wie dies bei allen derartigen Betrachtungen zulässig ist, statt gleichzeitig, nach einander eintretend auffassen und zuerst die Ortsveränderung, die in einer fortschreitenden Bewegung des Massenmittelpunktes und in einer Drehung um eine Achse bestehen wird, vornehmen.

Die Gesamtarbeit dieser Bewegung der Elemente muß Null sein, da die Kräfte im Gleichgewicht sind. Sie wird sich ausdrücken lassen durch eine Arbeit, welche sich (δA_m) auf die Massenkraft, und eine Arbeit (δA_r), welche sich auf die Flächenkräfte (Spannungen) bezieht, wir haben also:

$$(\delta \mathcal{A}_r) + (\delta \mathcal{A}_m) = 0.$$

Nun wollen wir für jedes Element die eigentliche Formänderung vornehmen, wobei der Schwerpunkt desselben unverändert bleibt, jedoch die relative Lage der Flächenelemente sich ändert, aus dem rechtwinkligen ein schiefes Parallelepiped wird. Hierbei erleidet, wie erwähnt, der Schwerpunkt des Elementes als Angriffspunkt der Massenkraft keine Verschiebung, wohl aber werden sich relativ die Angriffspunkte der Flächenkräfte im Elemente verschieben. Die Summe der Formänderungsarbeit sei ($\delta \mathcal{A}_i$). Die Gesamtarbeit ist dann

$$(\delta \mathcal{A}) = (\delta \mathcal{A}_m) + (\delta \mathcal{A}_r) + (\delta \mathcal{A}_i).$$

Denkt man sich nun den Körper wieder als Ganzes, erwägt man, daß Flächenelemente, welche vorher sich gedeckt haben, dies auch nach der Formänderung noch thun müssen, so sieht man ein, daß mit Ausnahme der Oberflächenelemente, die ungedeckt bleiben, an keinem Flächenelemente Arbeit geleistet wird, denn je nachdem man die Spannung eines Flächenelementes, einmal als Spannung am einen Volumelemente, einmal als Spannung am anderen auffaßt, wird die Kraft entgegengesetzt dieselbe, während der Weg, den das Flächenelement bei der Gesamtverschiebung zurücklegt, derselbe ist. Die Summe der Arbeit wird mithin

$$(\delta \mathcal{A}) = (\delta \mathcal{A}_m) + (\delta \mathcal{A}_o),$$

wenn ($\delta \mathcal{A}_o$) die Arbeit der Oberflächenkräfte ist; diese muß nun aber offenbar gleich der Arbeit der an der Oberfläche angreifenden äußeren Kräfte P sein und wir bekommen

$$(\delta \mathcal{A}_o) = \delta P \Delta p.$$

Aus den angeführten Gleichungen ergibt sich aber sofort

$$(\delta \mathfrak{A}_i) = \delta P \Delta p + (\delta \mathfrak{A}_m).$$

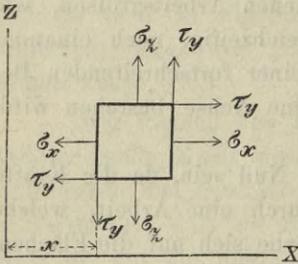
Denkt man sich die Kräfte nach einem beliebigen Gesetze von 0 bis P anwachsend und entsprechend die Spannungen, so ist für alle drei Größen das Integral \int_0^P zu nehmen und man erhält, da $\Delta p = \pi P$, wenn π die Verschiebung für $P = 1$, $\sum \int_0^P \pi P \delta P = \frac{\sum \pi P^2}{2} = \frac{\sum \Delta p P}{2}$, mithin

$$\mathfrak{A}_i = \frac{\sum P p}{2} + \mathfrak{A}_m, \dots \dots \dots 18.$$

wenn sich \mathfrak{A}_i auf die Arbeit bezieht, die geleistet wird, wenn die Spannungen von 0 bis zum Endwerte anwachsen.

Die innere Arbeit als Funktion der Spannungen. Auf ein unendlich kleines Parallelepipid vom Inhalte $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ sollen senkrecht zu den Flächenelementen die Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (Fig. 7) wirken, wobei zu beachten ist, daß die einander gegenüber stehenden Spannungen sich nur um unendlich kleine Größen unterscheiden können, daher sie für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zu vernachlässigen sind. Dasselbe gilt bei endlichem Gewichte von der Wirkung der Massenkkräfte am unendlich kleinen Teilchen. Die Schubspannungen in den unendlich kleinen Teilchen, welche auf die Flächenelemente $dx \, dy, dx \, dz, dy \, dz$ wirken und für die gegenüberliegenden Flächen ebenfalls gleich

Fig. 7.



sind, geben, wenn man die Momentengleichungen derselben für den Mittelpunkt des Elementes aufstellt, die Bedingung, daß Schubspannungen, welche sich in derselben Kante des Elementes schneiden, einander gleich sein müssen; sie sollen daher mit τ_x, τ_y und τ_z bezeichnet werden, je nachdem diese Kante eine Parallele zur Achse x, y oder z ist.

Ändern sich die anfänglichen Längen dx, dy, dz um von Null anwachsende Strecken $\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$, so leisten die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Arbeiten

$$\frac{1}{2} \sigma_x \cdot dy \, dz \cdot \Delta dx; \quad \frac{1}{2} \sigma_y \cdot dx \, dz \cdot \Delta dy; \quad \frac{1}{2} \sigma_z \cdot dx \, dy \cdot \Delta dz.$$

Ändern sich die Winkel jener Seitenflächen, welche sich in den Kanten dx, dy, dz schneiden, um die Größen $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, so wird die Arbeit der Schubkräfte

$$\frac{1}{2} \tau_x \cdot dx \, dz \cdot \gamma_x \, dy; \quad \frac{1}{2} \tau_y \cdot dy \, dx \cdot \gamma_y \, dz; \quad \frac{1}{2} \tau_z \cdot dz \, dy \cdot \gamma_z \, dx.$$

Bezeichnet man die relativen Längenänderungen $\frac{\Delta dx}{dx}, \frac{\Delta dy}{dy}, \frac{\Delta dz}{dz}$ mit $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, so findet sich leicht für die Arbeit $d\mathfrak{A}$ der Kräfte am Volumelemente

$$d\mathfrak{A} = \frac{1}{2} [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z] dV \dots \dots \dots 19.$$

Für isotrope, d. h. für Körper, welche in allen Punkten gleich beschaffen und ursprünglich spannungslos angenommen sind, entsteht infolge Wirkung von σ_x und einer Temperaturerhöhung um t° gegen den Anfangszustand, welche eine Verlängerung des Elementes erzeugt, die Längenänderung $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} + \epsilon t$ und infolge von σ_y und σ_z die Längenänderung $-\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$, wobei $\frac{1}{m}$ ($\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ bei Metallen) den Beiwert der

Querdehnung bedeutet, während die von den Schubspannungen abhängigen Gleitungen $\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$, $\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$, $\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$ werden, wenn $G = \frac{mE}{1(m+1)} = 0,375$ bis $0,400 E$ die Schub-Elasticitätsziffer bedeutet. Unter Einführung dieser Werte erhält man für die gesamte wirkliche innere Formänderungsarbeit

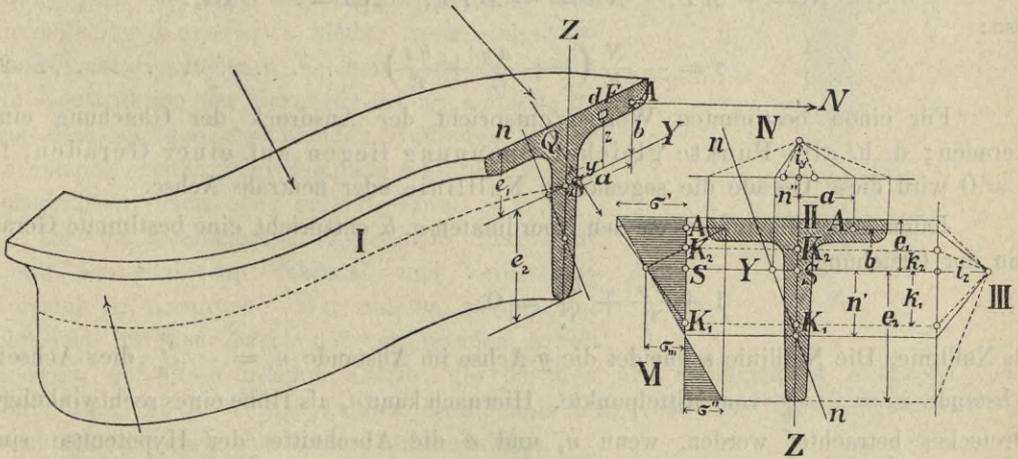
$$\mathfrak{A}_i = \frac{1}{2} \int \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] \frac{dV}{E} + \frac{1}{2} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G} + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \varepsilon t dV \dots 20.$$

Sind die Spannungen, welche ein Element dx, dy, dz beanspruchen, gegeben, so sind die Größen der Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die drei Wurzeln nachstehender kubischen Gleichung, wenn man dieselbe nach σ auflöst:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_x - \sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_y^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0 \dots 21.$$

§ 6. Die inneren Kräfte eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten gekrümmten Vollstabes. Bewegt sich der Flächenschwerpunkt einer geschlossenen ebenen Figur senkrecht zu den Elementen einer Raumkurve, der Achse eines Stabes, so entsteht ein doppelt gekrümmter Vollstab. Wird die Raumkurve zur ebenen, so heißt der Stab ein einfach gekrümmter, wird die Stabachse eine Gerade, so heißt der Stab ein gerader. Ändert die ebene Figur während der Bewegung ihre Gestalt, so heißt der Stab ein solcher von veränderlichem Querschnitt, bleibt der Querschnitt derselbe, so heißt er ein Stab konstanten Querschnittes.

Fig. 8.



Der Vollstab vermag äußere Kräfte aller Richtungen aufzunehmen und auf bestimmte Punkte seiner Oberfläche wirksam zu übertragen, er ist ein Tragkörper zum Unterschiede von dem Stabe schlechtweg, der nur Kräfte von der Richtung seiner Achse aufzunehmen und zu übertragen vermag.

Auf einen Vollstab wirken die Kräfte $P \dots$ und Stützenwiderstände. Denken wir uns einen Normalschnitt durch denselben geführt, so lassen sich alle Kräfte links des Schnittes auf zwei Kräfte zurückführen, die das verbleibende räumliche Kräftesystem links des Schnittes ersetzen. Diese Kräfte können stets so ermittelt werden, daß eine, N , auf dem Normalschnitt senkrecht steht und Achsialkraft genannt wird, die andere in die Ebene des Normalschnittes fällt; letztere wird als Querkraft bezeichnet. Macht

man den Schwerpunkt des Normalschnittes zum Mittelpunkte eines räumlichen Koordinatensystems, dessen x -Achse die Stabachse tangiert, so werden sich die unendlich kleinen Abstände Δx des benachbarten Querschnittes als lineare Funktion von y und z ausdrücken lassen. Durch die Belastung wird eine relative Bewegung der beiden Nachbarschnitte hervorgerufen. Unter der Annahme, daß die Normalschnitte auch nach der Formänderung eben bleiben, eine Annahme, deren annäherungsweise Richtigkeit sich für Vollstäbe, falls die Querschnittsabmessungen gegen die Längsabmessungen klein sind, durch Versuche erweisen läßt, müssen auch die Längenänderungen $\partial \Delta x$ lineare Funktionen der Koordinaten werden. Die auf ein Flächenelement dF entfallende Spannung wird daher:

$$\sigma = \frac{\partial \Delta x}{\Delta x} E^m \dots \dots \dots 22.$$

Nach dem obigen ergibt sich, wenn man die Veränderlichkeit des Δx aufser Betracht läßt:

$$\sigma = A + By + Cz.$$

Sind a und b die Koordinaten des Angriffspunktes der Achsialkraft, so fordert das Gleichgewicht:

$$\int \sigma dF + N = 0, \quad \int \sigma y dF + Na = 0, \quad \int \sigma z dF + Nb = 0,$$

woraus, wenn man die Werte einsetzt und bedenkt, daß in unserem Falle, wenn die Koordinatenachsen Hauptachsen des Querschnittes (siehe § 7) sind:

$$\left. \begin{aligned} \int dF &= F, & \int y dF &= 0, & \int z dF &= 0, & \int yz dF &= 0 \\ \int y^2 dF &= J_y = i_y^2 \cdot F, & \int z^2 dF &= J_z = i_z^2 \cdot F \end{aligned} \right\} \dots \dots 23.$$

mithin:

$$N = -AF, \quad Na = -BFi_y^2, \quad Nb = -CFi_z^2,$$

also:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \left(1 + \frac{ay}{i_y^2} + \frac{bz}{i_z^2} \right) \dots \dots \dots 24.$$

Für einen bestimmten Wert σ entspricht der Ausdruck der Gleichung einer Geraden; d. h. alle Punkte gleicher Spannung liegen auf einer Geraden, für $\sigma = 0$ wird diese Gerade die sogenannte Nulllinie oder neutrale Achse.

Jedem Angriffspunkte von den Koordinaten a, b entspricht eine bestimmte Gerade von der Gleichung:

$$1 + \frac{ay}{i_y^2} + \frac{bz}{i_z^2} = 0$$

als Nulllinie. Die Nulllinie schneidet die y -Achse im Abstände $n_1 = -\frac{i_y^2}{a}$, die z -Achse im Abstände $n_2 = -\frac{i_z^2}{b}$ vom Mittelpunkte. Hiernach kann i_y als Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes betrachtet werden, wenn n_1 und a die Abschnitte der Hypotenuse sind. Hieraus ergibt sich leicht die in der Fig. 8 gezeigte Konstruktion des Abstandes n_1 aus a mit Hilfe von i_y und ebenso die Konstruktion von n_2 mit Hilfe von b und i_z .

In umgekehrter Weise können die Werte a und b ermittelt werden, wenn n_1 und n_2 bekannt sind.

Die Spannung σ_m im Schwerpunkte, welche den Werten $y = 0, z = 0$ entspricht, ist durch $\sigma_m = \frac{N}{F}$ gegeben, also unabhängig von der Lage des Angriffspunktes, also auch unabhängig von der Größe der Momente Na und Nb .

⁵⁾ Ist das Material des Vollstabes nicht homogen und isotrop, gilt diese Regel nicht mehr. Bach setzt $\frac{\partial \Delta x}{\Delta x} = \frac{\sigma_m}{E}$, für Schweifs- und Flusseisen, mit dem wir es hier ausschließlicly zu thun haben, wird $m = 1$.

Fasst man die parallelen Ränder des Querschnittes, deren Abstand vom Schwerpunkt mit e_1 und e_2 bezeichnet werden, als Nulllinien auf, so entsprechen ihnen Punkte K_1 und K_2 , die wohl auch Kernpunkte genannt werden.

Ihre Konstruktion ist aus Fig. 8, III. ersichtlich, auch sie ergeben sich als Abschnitte der Hypotenuse eines Dreieckes, dessen Höhe i_z ist.

Mit Hilfe der Kernpunkte ist es leicht, die Verteilung der Spannungen am Querschnitte längs einer Achse zu konstruieren. Trägt man (Fig. 8, VI) den Wert $\sigma_m = \frac{N}{F}$ in S auf, verbindet das Ende von σ_m mit den Kernpunkten K_1 und K_2 durch Gerade, so schneiden diese, entsprechend verlängert, die Spannungen σ_o und σ_u auf der Vertikalen durch A ab, welche auf die Ränder projiziert, eine Verbindungslinie zu ziehen gestatten, die die Verteilung der Spannungen giebt. Die Verteilungslinie schneidet die Achse K_1, K_2 in einem Punkte, der dem Abstände der Nulllinie für A als Angriff entspricht, wodurch eine Überprüfung der Richtigkeit der Konstruktion geboten wird.

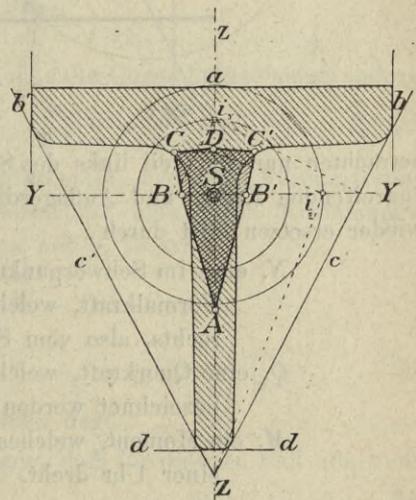
Bewegt (Fig. 9) sich der Angriffspunkt einer Achsialkraft auf einer Geraden c , so drehen sich die zugehörigen Nulllinien um einen Punkt, den Angriffspunkt C für c als Nulllinie und umgekehrt. Nulllinie und Angriffspunkt sind einander zugeordnet. Den Nulllinien, die einen gegebenen Querschnitt umhüllen, entspricht eine Folge von Punkten der Kernfigur, die den Kern umschließen (s. Fig. 9).

Jeder Geraden der Umhüllung entspricht ein Punkt, jeder Ecke der Umhüllung eine Gerade der Kernfigur. So lange der Angriffspunkt der Last innerhalb der Kernfigur bleibt, treten im Querschnitte nur Spannungen gleichen Vorzeichens auf. Die Konstruktion der Kernfigur erfolgt einfach, indem man zu den umhüllenden Nulllinien $abcd$ die entsprechenden Angriffspunkte ermittelt, welche Konstruktion schon oben gezeigt wurde.

Die im Querschnitte angreifende Schubkraft nimmt den Stab auf Scherung und Verdrehung (Torsion) in Anspruch. Wir müssen es uns mit Rücksicht auf den Zweck der vorliegenden Arbeit versagen, auf diese inneren Kräfte, die bei den uns vorliegenden Aufgaben meist relativ sehr klein werden, näher einzugehen und verweisen diesbezüglich auf die einschlägigen Lehrbücher über Festigkeitslehre.

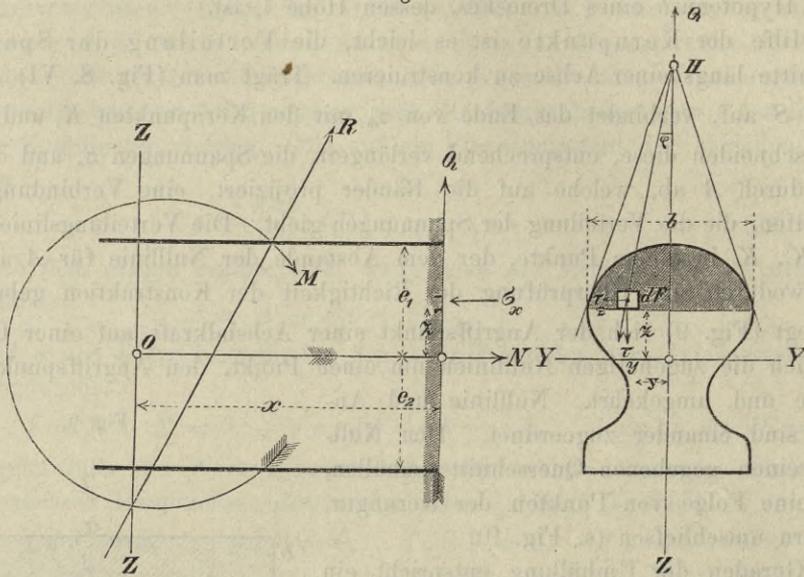
§ 7. Die inneren Kräfte des geraden, durch ein ebenes Kraftsystem belasteten Vollstabes. Bewegt sich eine geschlossene ebene Figur so, daß ihr Schwerpunkt stets auf einer Geraden bleibt und sind die Abmessungen des Querschnittes klein gegen die Länge des hierbei entstehenden Raumgebildes, so sprechen wir, falls ein so begrenzter materieller Körper vorliegt, von einem geraden Stabe. Jede ebene Figur besitzt zwei in ihrer Ebene liegende, durch ihren Schwerpunkt gehende und aufeinander senkrecht stehende Achsen, für welche das Trägheitsmoment J seinen Größt- bzw. Kleinstwert erreicht. Liegen diese sogenannten Hauptachsen des sonst beliebig veränderlich gedachten Querschnittes in je einer Ebene, — welche die Hauptebenen des Stabes genannt werden und bei symmetrisch gebauten Formen, wie

Fig. 9.



sie bei Brückenträgern meist vorkommen, mit den Symmetrie-Ebenen zusammenfallen, — so wirken in einer Hauptebene senkrecht zur Stabachse äußere Kräfte P und Stützendrücke (Auflagerreaktionen), s. Fig. 10. Führen wir einen Schnitt senkrecht zur Stabachse und

Fig. 10.



betrachten nur den Teil links des Schnittes, so lassen sich alle auf diesen Teil fallenden angreifenden Kräfte und Auflagerdrücke zu einer Mittelkraft R vereinigen, welche sich wieder ersetzen läßt durch

- N , eine im Schwerpunkt des Querschnittes auf demselben senkrecht stehende Normalkraft, welche wir als positiv bezeichnen wollen, wenn sie nach rechts, also vom Schnitte weg wirkt; ferner durch
- Q , eine Querkraft, welche in die Ebene des Querschnittes fällt und als positiv bezeichnet werden soll, wenn sie nach aufwärts wirkt; endlich in
- M , ein Moment, welches positiv genannt werden soll, wenn es wie der Zeiger einer Uhr dreht.

In einem Flächenelemente $dF = dy \cdot dz$, welches von dem durch O gelegten Achsenkreuz die bezw. Abstände y und z hat, entstehen die Normalspannung σ_x und die Schubspannungen τ_y und τ_z ; dann gilt, wie sich aus dem vorhergehenden Paragraphen leicht nachweisen läßt, unter der Annahme, daß die Kraftebene den fraglichen Querschnitt in einer Hauptachse des Querschnittes schneidet, und unter der Annahme, daß der Querschnitt auch nach der Formänderung eben bleibe und diese überhaupt eine sehr kleine ist: $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$ und

$$\sigma_x = -\frac{N}{F} - \frac{Mz}{J}, \dots \dots \dots 25.$$

wenn F die Querschnittsfläche des Stabes an der fraglichen Stelle, z der Abstand des Flächenelementes von der Ebene XY durch den Schwerpunkt,

$J = \int z^2 dF$ das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt parallel zu y gezogene Achse ist und Zugspannungen positiv bezeichnet werden.

Für die oberste Faser im Abstände e_1 und die unterste Faser im Abstände e_2 von der Achse durch den Schwerpunkt wird

$$\sigma' = -\frac{N}{F} - \frac{M e_1}{J}; \quad \sigma'' = -\frac{N}{F} + \frac{M e_2}{J} \quad \dots \quad 25^a.$$

Ist h die Höhe des Querschnittes, also $h = e_1 + e_2$, nimmt man ferner an, daß die Faser im Schwerpunkt ihre Temperatur um t_0 geändert habe, und setzt man noch voraus, daß nach aufwärts und abwärts die Temperatur nur von dem Abstände z nach linearer Funktion abhängig sei, und die Temperaturänderung auf die Höhe h die Größe Δt betrage, so wird im Abstände z vom Schwerpunkte die Temperaturänderung, wenn ε der Wärme-Ausdehnungskoeffizient ist,

$$t = t_0 + \frac{\Delta t}{h} z \quad \dots \quad 26.$$

mithin die relative Änderung der Länge des Elementes dx :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon \left(t_0 + \frac{\Delta t}{h} z \right), \quad \dots \quad 27.$$

bezw. im obersten und untersten Punkte

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta dx_1}{dx} &= \frac{\sigma'}{E} + \varepsilon \left(t_0 + \frac{\Delta t \cdot e_1}{h} \right) \\ \frac{\Delta dx_2}{dx} &= \frac{\sigma''}{E} + \varepsilon \left(t_0 - \frac{\Delta t \cdot e_2}{h} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 28.$$

Der Winkel $d\tau$, um welchen sich zwei unendlich nahe Querschnittsebenen ändern,

$$d\tau = \frac{\Delta dx_1 - \Delta dx_2}{h} = \left[-\frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \right] dx \quad \dots \quad 29.$$

Die Linie der ursprünglich geraden Schwerpunktsachse, nach der Formänderung die elastische Linie, fällt in die Kraftebene. Bezeichnet man ihren Krümmungshalbmesser mit ρ , die Abscissen mit x , die Ordinaten mit y , so wird

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{dx} = -\frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h}$$

oder auch angenähert

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h}, \quad \dots \quad 30.$$

wobei ρ positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt unten liegt.

Hinsichtlich der Schubspannungen ist zu beachten, daß für unseren Fall allgemein

$$\tau_x = 0 \quad \dots \quad 31.$$

Ist die Kraftebene eine Symmetrie-Ebene des Querschnittes und zieht man in den Punkten des Querschnittumrisses, welche um z von der wagerechten Schwerpunktsachse abstehen, Tangenten an denselben, so erhält man einen Punkt H der Symmetrielinie, durch welchen jene Schubspannung τ des Elementes $dy dz$ geht, welche in der Querschnittsebene selbst liegt.⁶⁾ Sie zerlegt sich in zwei Komponenten τ_y und τ_z ; für τ_y ergibt die eingehendere Untersuchung

$$\tau_y = \frac{-S}{b \cdot J} Q, \quad \dots \quad 32.$$

wenn Schubspannungen, welche im Sinne der positiven Richtung von z , also nach aufwärts wirken, mit dem positiven Zeichen bezeichnet werden. Ferner ist

$$\tau_z = \tau_y \cdot \text{tang } \varphi, \quad \dots \quad 33.$$

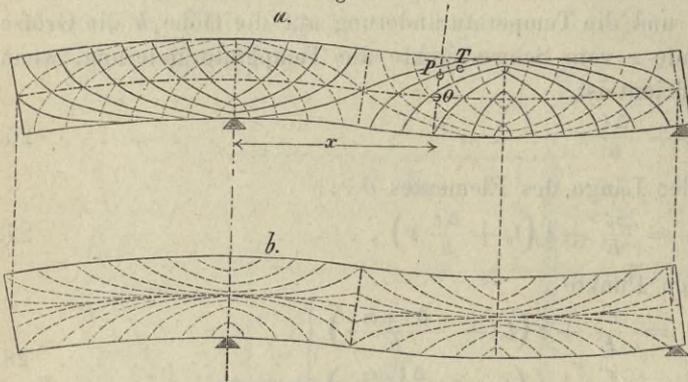
wenn φ der aus der Zeichnung ersichtliche Winkel, und es bedeutet

⁶⁾ Grashof. Theorie der Elasticität und Festigkeit.

S das statische Moment der schraffierten Fläche (Fig. 10, S. 220),
 b die Breite des Querschnittes in der fraglichen Faserschicht,
 J das Trägheitsmoment des gesamten Querschnittes, bezogen auf die Achse Y ,
 Q die Schubkraft im fraglichen Querschnitt.

Die Normalspannung erreicht ihr Maximum in den von der Schwerpunktsachse
 entferntesten Punkten, die Schubspannung bei den in Wirklichkeit vorkommenden Trägern

Fig. 11.



meist in der Schwerachse selbst.

Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 in P (Fig. 11) treten für die durch diesen Punkt gehenden, auf der Kraftebene senkrechten Elemente ein, welche mit der Normalebene zur Stabachse die der Gleichung

$$\tan 2 \alpha = - \frac{2 \tau_y}{\sigma_x} \dots 33^a$$

entsprechenden, voneinander stets um 90° verschiedenen Winkel α_1 und α_2 einschließen. In den äußersten Fasern wird $\sigma_x = \max$ und $\tau_y = 0$, demnach $\tan 2 \alpha = 0$, welcher Gleichung die Werte $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 90^\circ$ entsprechen; für $\sigma_x = 0$ wird $\tan 2 \alpha = \infty$, welchem Ausdrücke $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = -45^\circ$ genügen. Die Werte für die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 ergeben sich aus Gl. 21 bei Vernachlässigung von τ_z mit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_y^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 34.$$

Die eine ist stets ein Druck, die andere Zug.

Die Hauptschubspannungen τ_1, τ_2 wirken in zur Kraftebene normalen Ebenen, welche mit der Normalebene zur Stabachse in P die der Gleichung

$$\tan 2 \beta = \frac{\sigma_x}{2 \tau_y} \dots \dots \dots 35.$$

entsprechenden, voneinander stets um 90° abstehenden Winkel β_1, β_2 einschließen. In der äußersten Faser wird $\tau_y = 0$, daher $\left\{ \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\} = \pm 45^\circ$; für $\sigma_x = 0$ daher $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 90^\circ$.

Für die Hauptschubspannung selbst erhält man:

$$\tau_1 = -\tau_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_y^2} \dots \dots \dots 36.$$

Das unter α_1 oder α_2 geneigte Element hat keine Schubspannungen aufzunehmen. Geht man in der Richtung desselben bis zu einem unendlich nahen Punkt des unmittelbar anschließenden Normalschnittes und bestimmt für diesen das zu der daselbst auftretenden Haupt- $\left\{ \begin{matrix} \text{Zug-} \\ \text{Druck-} \end{matrix} \right\}$ Spannung gehörige Element und so fort, so giebt der Inbegriff aller dieser Elemente eine Fläche im Innern des Stabes, welche nur $\left\{ \begin{matrix} \text{Zug} \\ \text{Druck} \end{matrix} \right\}$ erfährt und eine Trajektorialfläche des größten $\left\{ \begin{matrix} \text{Zuges} \\ \text{Druckes} \end{matrix} \right\}$ genannt wird.

Folgt man bei einem Balken, in welchem $N = 0$ ist, den Elementen, welche die größte Schubspannung in P (Fig. 11) aufnehmen, bis zu einem Punkte P' des nächsten

Querschnittes und bestimmt für diesen die Lage des Elementes, welches die größte Schubspannung erfährt, so giebt bei entsprechender Fortsetzung der Inbegriff aller dieser Elemente eine Fläche, welche man eine Trajektorie des größten Schubes nennt.

Diese drei Arten von Flächen, als deren Repräsentanten wir ihre Durchschnittslinien mit der Kraftebene betrachten und somit von Zug-, Druck- und Schubkurven sprechen wollen, stehen in mancherlei Beziehungen zueinander.

In jedem Punkte bilden die Richtungen des größten Zuges und Druckes mit den Richtungen des größten Schubes Winkel von 45°. Die Kurven des größten Zuges verlassen die äußerste Druckfaser unter Winkeln von 90°, schneiden die Null-Linie unter 45° und legen sich, soweit dies bis zum Maximalmomentenpunkt möglich ist, asymptotisch an die äußerste Zugfaser. Die Kurven des größten Druckes verlassen die äußerste Zugfaser unter Winkeln von 90°, schneiden die Null-Linie unter 45° und legen sich, soweit möglich, asymptotisch an die äußerste Druckfaser. Die Linien des größten Schubes verlassen die beiden äußersten Fasern unter Winkeln von 45° und legen sich asymptotisch an die Null-Schicht oder schneiden dieselbe normal. Alle Kurven des größten Zuges oder Druckes schneiden die ihnen begegnenden Linien des größten Druckes oder Zuges unter rechten Winkeln und alle Kurven des größten Schubes unter Winkeln von 45°.

Die Kurven des größten Zuges oder Druckes geben die Spuren derjenigen auf die ganze Breite sich erstreckenden Flächen, längs welcher keine Schubkräfte stattfinden. Denkt man sich die Körperelemente durch Ebenen begrenzt, welche tangential zu den sie treffenden Linien des größten Zuges bezw. Druckes verlaufen, so wird jedes solches Element in der Richtung der einen Tangente nur gedrückt bezw. gezogen. Eine weitere Beanspruchung der so gerichteten Elemente findet nicht statt.

In der Natur sind Zug- und Druckflächen vielfach ausgeprägt und in den Hölzern, dem Gewebe der Spongiosa, den Knochen der Tiere zu erkennen.

In obiger Fig. 11, S. 222 ist der ungefähre Verlauf der Spannungskurven für alle vorkommenden Krümmungsfälle eines Stabes dargestellt. Hierbei ist der Verlauf der zweiten Schubspannungs-Trajektorie nicht zur Anschauung gebracht.

Für die Querschnittsbestimmung vollwandiger Träger werden verschiedene Gesichtspunkte als Anhalt aufgestellt. In der Regel wird als Bedingung gesetzt, daß in keinem Punkte die daselbst auftretende Haupt- $\left\{ \begin{matrix} \text{Zug-} \\ \text{Druck-} \end{matrix} \right\}$ Spannung die zulässige Inanspruchnahme $\left\{ \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\}$ auf $\left\{ \begin{matrix} \text{Zug} \\ \text{Druck} \end{matrix} \right\}$ überschreiten dürfe, d. h. für jeden Punkt

$$k_1 \geq \sigma_1, \quad k_2 \geq \sigma_2 \dots \dots \dots 37.$$

sein müsse. Bei den praktisch vorkommenden Fällen tritt nun in einem Querschnitte x die größte Haupt- $\left\{ \begin{matrix} \text{Zug-} \\ \text{Druck-} \end{matrix} \right\}$ Spannung fast stets in den äußersten Fasern für $\max M_x$ ein; ist daher e_1 der Abstand der am meisten gezogenen, e_2 der am meisten gedrückten Faser, so hat man, falls N gleich Null ist,

$$k_1 \geq \frac{\max M_x e_1}{J}, \quad k_2 \geq \frac{\max M_x e_2}{J}, \dots \dots \dots 38.$$

wobei diejenige Gleichung für die Querschnittsbestimmung maßgebend ist, welche den größeren Wert für k ergibt. Bezeichnet man mit $\frac{J}{e_1} = W_1, \frac{J}{e_2} = W_2$ die Widerstandsmomente, so kann man auch schreiben

$$W_1 = \frac{\max M_x}{k_1}, \quad W_2 = \frac{\max M_x}{k_2} \dots \dots \dots 39.$$

Genauer erfolgt die Bestimmung des Querschnittes nach der Bedingung, daß die Längenänderung in keinem Punkte nach irgend einer Richtung eine gewisse Grenze überschreiten dürfe. Jene den Hauptlängenänderungen $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ (deren Richtungen bei isotropen Körpern mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen), entsprechenden Spannungen, welche dieselben Längenänderungen $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ hervorbringen würden, wenn jede für sich allein in der Richtung von ε_1 bzw. ε_2 wirkte, ohne daß in irgend einer anderen Richtung Spannungen thätig wären, sollen nach Winkler die idealen Hauptspannungen $\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2$ heißen. Sie sind, wenn wir das Verhältnis der transversalen Längenänderung zur longitudinalen mit $\frac{1}{3}$ ansetzen, gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{3} \sigma_x + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_x^2 + \tau_y^2} = \sigma_1 + \frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_x) \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{3} \sigma_x - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_x^2 + \tau_y^2} = \sigma_2 + \frac{1}{3} (\sigma_2 - \sigma_x) \end{aligned} \right\} \dots 40.$$

Die ideale Hauptspannung ist daher stets um $\frac{1}{3}$ des Unterschiedes zwischen Haupt- und Normalspannung des betreffenden Punktes größer als die eigentliche Hauptspannung.

Ist dann wieder $\left\{ \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\}$ die zulässige Inanspruchnahme auf $\left\{ \begin{matrix} \text{Zug} \\ \text{Druck} \end{matrix} \right\}$, so lautet die Bedingung, daß für alle Punkte des Querschnittes

$$k_1 \geq \bar{\sigma}_1, \quad k_2 \geq \bar{\sigma}_2 \dots \dots \dots 41.$$

sein muß. In den äußersten Punkten führt diese Bedingung zu denselben Gleichungen, wie die erstere Regel.

In jedem Punkte P des Querschnittes muß endlich die Hauptschubspannung $\tau_1 = -\tau_2$ unter einer gewissen Grenze k_3 , der zulässigen Inanspruchnahme auf Schub, bleiben, oder

$$k_3 \geq \tau_1 \dots \dots \dots 42.$$

sein. — Wir werden weiter unten Gelegenheit haben, die Berechnung an einem Beispiele zu zeigen.

Setzt man die Werte für die Normal- und Schubspannungen, wie wir sie als Funktionen der äußeren Kräfte für die Annahme eines geraden Stabes kennen gelernt haben, in den Ausdruck ein, so bekommen wir

$$\mathfrak{U}_1 = \underbrace{\int \frac{N^2 dx}{2EF}}_I + \underbrace{\int \frac{M^2 dx}{2EJ}}_{II} + \underbrace{\beta \int \frac{Q^2 dx}{2GF}}_{III} + \underbrace{\int \varepsilon t_0 N dx}_{IV} + \underbrace{\int \varepsilon \Delta t \frac{M}{h} dx}_V \dots 43.$$

Das erste Glied rührt her von der Längs- oder Achsialkraft, das zweite von den Biegemomenten, das dritte von der Schubkraft, das vierte von der gleichmäßigen Erwärmung des gesamten Trägers, das fünfte von der unregelmäßigen Erwärmung.

Bemerkung I. Die Form III ist der von den Schubspannungen herrührende Anteil von A :

$$\frac{1}{2} \int (\tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{G} \int \tau_y^2 (1 + \tan^2 \varphi) dy \cdot dz \text{ und es ist } \tan \varphi = \frac{2y \tan \varphi_1}{b}.$$

Das Innere des zweiten Integrales ist auf den ganzen Querschnitt auszudehnen und liefert von der Form desselben abhängige Werte, was im Integral III durch den Koeffizienten β zum Ausdruck gelangt. Für das Rechteck wird $\beta = \frac{6}{5} = 1,2$, für den Kreis $\beta = \frac{32}{27} = 1,18$ u. s. w.

Bemerkung II. Für einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Höhe $h = 0,1 l$ ist, wird bei gleichförmiger Belastung desselben, wenn man $J = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{1200} b h \cdot l^2 = \frac{1}{1200} Fl^2$ setzt:

$$\int \frac{M^2 dx}{2EJ} = 35 \frac{q^2 l^3}{EF} \text{ und } \beta \int \frac{Q^2 dx}{2GF} = 0,125 \frac{q^2 l^3}{EF},$$

wie man sieht, relativ sehr klein, wenn sich auch für andere Belastungsweisen diese GröÙe ausgiebiger gestaltet; sie ist im allgemeinen doch klein gegen die erste und wird bei Trägerberechnungen meist vernachlässigt. Im vorliegenden Falle ergäbe das II. Glied allein so viel, als II und III zusammen, wenn man statt E aus Gleichung 35, $125 \frac{q^2 l^3}{E F} = 35 \frac{q^2 l^3}{E' F}$ den Wert $E' = 0,996 E$ einführen würde.

Hat man es, wie oft bei Brückenträgern, mit einer Verbindung von Fachwerken mit Tragkörpern zu thun, die ihrerseits als volle Stäbe im Sinne des vorigen Paragraphen aufgefaßt werden können, so kann man zunächst die Arbeit der Schubkräfte vernachlässigen, ferner die veränderlichen Werte F, J durch unveränderliche Mittelwerte ersetzen.

II. Innere Kräfte und Arbeitsgrößen des bestimmt belasteten Fachwerks.

§ 8. Allgemeines. Die Arbeitsgleichung des Fachwerks. Beim vollwandigen Träger treten unter dem Einflusse der formändernden Kräfte in jedem Punkte Zug-, Druck- und Schubspannungen auf, welche untereinander wesentlich nach GröÙe und Richtung verschieden sind, und keineswegs in allen Punkten gleichzeitig das zulässige Maß erreichen, sodafs vielfach überflüssiger Stoff vorhanden ist. Das Bestreben, sämtliche Teile nur nach ihrer Längenrichtung — soweit möglich in allen Querschnittsteilen gleich stark — und für die Grenzbelastungen mit dem zulässigen Maße zu beanspruchen, führte zur Herstellung von Tragkörpern aus einzelnen Stäben, zur Bildung der sogenannten „Fachwerke“.

Sollen die Stäbe eines Fachwerks nur Längsspannungen aufnehmen, so erfordert dies, dafs die Stäbe an ihren Verbindungspunkten, den „Knoten“, durch reibungslos wirkende Gelenke, welche kleine Drehungen zulassen, verbunden sind, und dafs kein Ausknicken der Stäbe bei Aufnahme von Druckspannungen eintritt; es müÙten sodann die äußeren Kräfte sich ausschließlichs an diesen Gelenkpunkten übertragen, auch das Eigengewicht müÙte nur in diesen Punkten zusammengefaßt sein. Ferner mag zunächst noch angenommen werden, dafs sämtliche Kräfte und Stabachsen in einer Ebene liegen und in dieser auch während des ganzen Verlaufes der Formänderung bleiben. Freilich lassen sich alle diese Bedingungen in Wirklichkeit nur bis zu einem gewissen Grade, nie aber vollständig erfüllen.

Die unter Annahme drehbarer Stabenden und eines ebenen Systems für das Eigengewicht und die bewegliche Belastung in der Tragwand ermittelten Spannungen pflegt man primäre Spannungen zu nennen, alle Kräfte, welche sonst noch in den Stäben eines Fachwerks auftreten, sei es infolge der Starrheit der Knotenpunkte, des Einflusses der Temperatur u. s. w. aber als sekundäre oder Zusatzspannungen zu bezeichnen.

Es sei K_m der Knotenpunkt eines geschlossenen räumlichen Fachwerks, P_m die in demselben angreifende äußere Kraft.

Der Inbegriff aller in den n -Knoten angreifenden Kräfte bilde das System Σ_1 .

Es seien im Knoten K die Stäbe $s_1, s_2, s_3 \dots$ vereinigt; man denke sich einen kugelförmigen Schnitt geführt und in jedem Stabschnitte zwei einander entgegengesetzte Kräfte S', S angebracht, von denen die Kräfte S'_1, S'_2, S'_3 als System Σ' u. s. w. auf den Knoten wirken und mit P_m ein im Gleichgewicht befindliches System bilden, während die Kräfte S_1, S_2, S_3 als System Σ_2 auf die Stäbe wirken.

Es sei $\Delta r = K K^*$ eine mögliche, endliche, sehr kleine Verschiebung von K , deren positive Richtung wir durch den Strahl $K \infty$ festgelegt denken wollen. Bezeichnen

wir die Projektion dieser Verrückung auf die in K angreifenden Kräfte mit $\Delta p_m, \Delta s_{1m}, \Delta s_{2m}, \Delta s_{3m} \dots$, ferner die Projektion der Kräfte auf die Richtung $K \infty$ mit $\bar{P}_m, \bar{S}'_1, \bar{S}'_2, \bar{S}'_3$ u. s. w., so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\begin{aligned} \bar{P}_m \Delta r &= P_m \cdot \Delta p_m \quad \text{und} \quad \bar{S}'_1 \cdot \Delta r = S'_1 \cdot \Delta s_{1m}; \\ \bar{S}'_2 \cdot \Delta r &= S'_2 \cdot \Delta s_{2m} \dots \end{aligned}$$

Die Addition aller auf K_m bezüglichen Gleichungen dieser Art liefert:

$$\Delta r (\bar{P}_m + \bar{S}'_1 + \bar{S}'_2 + \bar{S}'_3 + \dots) = P_m \Delta p_m + S'_1 \Delta s_{1m} + S'_2 \Delta s_{2m} + \dots = 0$$

welcher Ausdruck Null sein muß, da sich die Kräfte um K_m im Gleichgewicht befinden.

Bildet man die vorstehende Summe für jeden Knotenpunkt, setzt an Stelle der Spannungen S'_1, S'_2 u. s. w. die Werte $-S_1, -S_2$ u. s. w., bedenkt man, daß dann jede Spannung zweimal vorkommen wird, so S_{1m} für die Knoten 1 und m , ferner daß die Längenänderung jedes Stabes aus der Summe der Änderungen in beiden Knoten sich ergeben wird, denen er angehört, also z. B. $\Delta s = \Delta s_{1m} + \Delta s_{m1}$ sein wird, so findet sich direkt der für die ganze Trägerlehre wichtige Satz:

$$\Sigma P \cdot \Delta p = \Sigma S \Delta s,$$

wobei die erste Summe auf alle Knoten, die zweite auf alle Stäbe auszudehnen ist.

Die Gleichung gilt bei von 0 anwachsenden Kräften für jedes unendlich kleine Zeitteilchen, wir können also auch schreiben:

$$\Sigma P \cdot d \Delta p = \Sigma S \cdot d \Delta s;$$

hieraus ergibt sich, wenn π und σ die Verrückung bzw. Verlängerung ist, die die Kraft $P = 1$ bzw. $S = 1$ hervorbringt, und also $\Delta p = \pi \cdot P, \Delta s = \sigma S$ ist:

$$\Sigma \pi P \cdot d P = \Sigma \sigma S \cdot d S,$$

oder wenn man beiderseits von 0 bis P bzw. S integriert:

$$\begin{aligned} \Sigma \int_0^P \pi P d P &= \Sigma \int_0^S \sigma S d S, \\ \mathfrak{A} &= \Sigma \frac{\pi P^2}{2} = \Sigma \frac{\sigma S^2}{2}, \end{aligned}$$

oder wenn man die Endwerte mit $\Delta p = \pi P$ und $\Delta s = \sigma S = \frac{S \cdot s}{EF}$ wieder einführt,

auch

$$\mathfrak{A} = \Sigma \frac{P \cdot \Delta p}{2} = \Sigma \frac{S \cdot \Delta s}{2} = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF}.$$

Die Arbeitsgleichung eines Fachwerks, mag dasselbe eben oder räumlich sein, gestaltet sich mithin außerordentlich einfach. Wir wiederholen: Ist S die Spannung in einem Fachwerkstabe, s die Länge desselben, E der Elastizitätsmodul, F seine Querschnittsfläche, ε der Wärmeausdehnungskoeffizient, t die Temperaturdifferenz zwischen dem ursprünglichen und dem neuen Zustande und nimmt man an, daß die äußeren Kräfte, welche die Spannungen erzeugen, von 0 an wachsen, so wird die Arbeitsgleichung:

$$A_1 = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s, \dots \dots \dots 44.$$

wobei sich das Summenzeichen auf sämtliche Stäbe bezieht und noch angenommen wird, daß bei der Temperaturänderung eines Stabes die Endspannung S dieses Stabes den Weg $\varepsilon t s$ zurücklege.

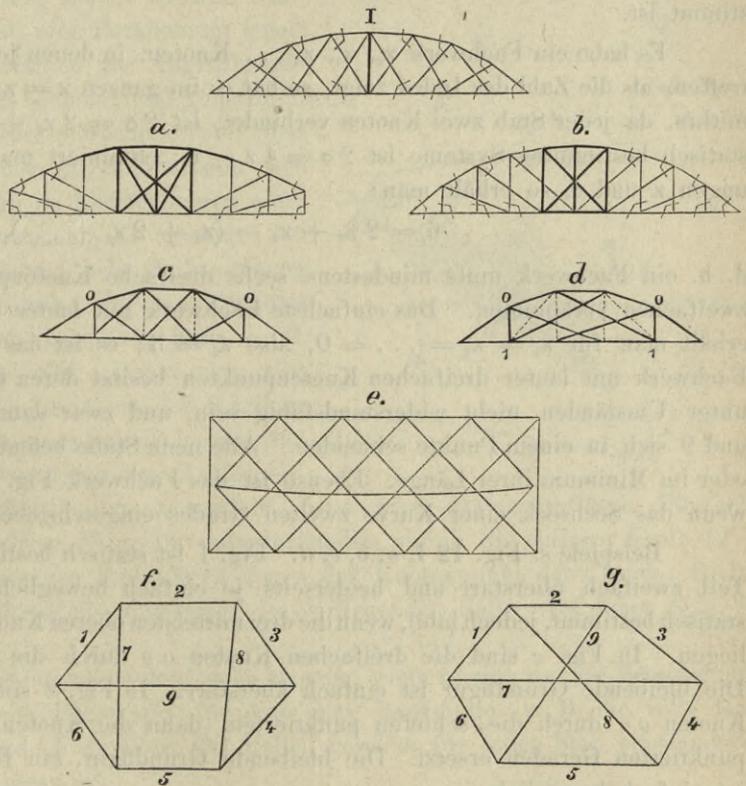
Wir werden uns zuerst dem bestimmt belasteten ebenen Fachwerke zuwenden und daran die Untersuchung am räumlichen Fachwerke anschließen.

§ 9. Das ebene Fachwerk. Bezeichnet man mit z die Anzahl der Knotenpunkte eines ebenen Fachwerks, so erhält man an jedem Knotenpunkt zwei Gleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte, mithin im ganzen $2z$ solcher; die äußeren Kräfte müssen für sich im Gleichgewicht sein, also 3 Bedingungen erfüllen. Für die Berechnung der σ Stabspannungen erhält man hiermit $2z - 3$ Gleichungen, d. h. es muß $2z - 3 = \sigma$ sein, wenn, gewisse Ausnahmefälle abgerechnet, das Fachwerk statisch bestimmt sein soll.

Die Längenänderung eines bestimmten Stabes eines Fachwerks ist bei konstant bleibenden Längen der übrigen Stäbe nicht unbeschränkt, sie findet ihre Grenzen, wenn der Stab das von den übrigen Stablängen bedingte Maximum bezw. Minimum annimmt. Einer Überschreitung dieser Grenzen würden die übrigen Teile Widerstand entgegenzusetzen.

Wird z. B. im einfachsten Falle ein Stab AC eines Dreiecks ABC immer kleiner und kleiner, bis AC in die Gerade AB fällt, so werden sich der weiteren Verkürzung die Stäbe CB und AB entgegenstellen. Für den Fall des Maximums oder Minimums ändert ein Stab bei einer unendlich kleinen Änderung des Fachwerks die Länge nicht.

Fig. 12.



Werden auf ein Koordinatensystem bezogen in der Ebene z Punkte durch Stäbe von der Länge l_1, l_2, l_3, \dots miteinander zu einem Fachwerke verbunden, so ist dasselbe geometrisch bestimmt, wenn die Anzahl der Stablängen in Verbindung mit den

Auflagerbedingungen eben ausreicht, die z Punkte eindeutig festzulegen. Ebenso umgekehrt, wenn die Ordinaten der z Punkte gerade ausreichen, die Stablängen zu

ermitteln. Wird ein Punkt C an zwei gegebene Punkte A und B , welche selbst festliegen, nur durch zwei Gerade AC und BC angeschlossen, so ist dieser bestimmt, sobald $AC + BC > AB$ ist; jeder solche zweifache Knotenpunkt kann weggelassen werden, ohne daß an der geometrischen Bestimmtheit etwas geändert wird; auch in statischer Hinsicht ist die Hinweglassung unbedenklich, da jede Knotenpunktskraft in C eindeutig in zwei den Stäben AC und BC entsprechende Seitenkräfte zerlegt werden kann, die nun für das weitere Fachwerk als äußere Kräfte an Stelle der Stäbe treten. Nur wenn ein Knoten lediglich durch zwei in eine Gerade fallende Stäbe verbunden wäre, würde sich

die Stablänge bei $AC + BC = AB$ im Grenzzustande befinden; statisch kann ein solcher Punkt nicht mehr jede beliebige Kraftrichtung aufnehmen. Der Punkt des betreffenden Fachwerks und damit dieses selbst ist nur für den Fall fähig, eine Knotenkraft aufzunehmen, wenn diese ebenfalls in die Richtung AB fällt; für jede andere Lage entständen unendlich große Spannungen.

Ein Fachwerk kann daher meist sofort auf ein einfacheres zurückgeführt werden, wenn man alle zweifachen Knotenpunkte der Reihe nach wegstreicht. Jeder dreifache Knotenpunkt kann weggestrichen werden, wenn man ihn durch einen neuen Stab ersetzt, der zwei Endpunkte der Stäbe des gestrichenen Knotens verbindet. Hierdurch gelangt man zu einer einfacheren Figur, der Grundfigur, welche auch auf eine Gerade zusammenschrumpfen kann, und welche dann für sich zu betrachten ist. — Den Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens findet man weiter unten.

Das Fachwerk ist nur dann statisch bestimmt, wenn die Loslösung der zwei- und dreifachen Knotenpunkte auf eine geometrisch bestimmte Figur führt. Diese ist geometrisch bestimmt, wenn ihre Form durch die gegebenen Längen eindeutig bestimmt ist.

Es habe ein Fachwerk $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots$ Knoten, in denen je so viele Stäbe zusammen treffen, als die Zahl des Index zeigt, so hat es im ganzen $\alpha = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots$ Knoten, mithin, da jeder Stab zwei Knoten verbindet, ist $2\sigma = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + \dots$. Beim statisch bestimmten Systeme ist $2\sigma = 4\alpha - 6$; eliminiert man aus diesen drei Gleichungen α und σ , so erhält man:

$$6 = 2\alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_5 + 2\alpha_6 + \dots),$$

d. h. ein Fachwerk muß mindestens sechs dreifache Knotenpunkte haben, wenn keine zweifachen vorkommen. Das einfachste Fachwerk mit lauter zweifachen Knotenpunkten erhält man für $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0$, also $\alpha_2 = 3$; es ist das Dreieck. Das einfachste Fachwerk mit lauter dreifachen Knotenpunkten besitzt deren 6. Dieses Fachwerk kann unter Umständen nicht widerstandsfähig sein, und zwar dann, wenn (Fig. 12 *f*) 2, 5 und 9 sich in einem Punkte schneiden. Alle neun Stäbe befinden sich dann im Maximum oder im Minimum ihrer Länge. Ebenso ist das Fachwerk Fig. 12 *g* statisch unbestimmt, wenn das Sechseck einer Kurve zweiten Grades eingeschrieben ist.⁷⁾

Beispiele s. Fig. 12 I, *a, b, c, d*. Fig. I ist statisch bestimmt. Fig. *a* im mittleren Teil zweifach überstarr und beiderseits je einfach beweglich. Fig. *b* im allgemeinen statisch bestimmt, jedoch labil, wenn die drei mittelsten oberen Knotenpunkte in einer Geraden liegen. In Fig. *c* sind die dreifachen Knoten *oo* durch die punktierten Stäbe ersetzt. Die bleibende Grundfigur ist einfach überstarr. In Fig. *d* sind zunächst die dreifachen Knoten *oo* durch die schiefen punktierten, dann die Knoten 1, 1 durch die lotrechten punktierten Geraden ersetzt. Die bleibende Grundfigur, ein Rechteck ohne Diagonalen, ist einfach beweglich.

Statisch unzureichend bestimmte Systeme sind als Träger unzulässig. Bei Behandlung statisch unbestimmter, stabiler Systeme wird man bei Loslösung der statisch überzähligen Stäbe zu achten haben, ob das zurückbleibende System auch sicher statisch bestimmt ist. Dies ist z. B. bei Fig. 12 *e*, welche durch Weglassung der anscheinend überzähligen Pfosten der Schiffkorntträger entsteht, nicht der Fall.

⁷⁾ Vergl. Müller-Breslau, Graphische Statik 1887, S. 208; ferner die Arbeiten von Mohr und Land. — Nähere Angaben folgen im Litteraturverzeichnis.

§ 10. Spannungen in ebenen statisch bestimmten Systemen. Graphische Methoden. Die Ermittlung der durch das Eigengewicht und die zufällige Last erzeugten inneren Kräfte kann auf graphischem Wege, durch Berechnung oder mittels einer Verbindung beider Verfahren erfolgen. Wir bringen mehrere Verfahrensarten, welche sich zunächst für die Bestimmung der Spannungen bei einer gegebenen Belastungsweise eignen.

a) Cremona's Methode. Es seien (Fig. 13) P_1, P_2, \dots die in den Knotenpunkten wirkenden Kräfte, wobei durch gewisse Kräfte die Stützendrücke dargestellt sind. Man

zeichnet das dem System der P entsprechende Kräftepolygon, indem die Kräfte, ihrer Richtung nach, in der Weise aneinandergereiht werden, wie sie am Umfange des Stabsystems aufeinander folgen; dabei hält man zweckmässig, aber nicht notwendigerweise, die Reihenfolge im Uhrzeigersinne ein. Da die Kräfte im Gleichgewicht sind, muß das erhaltene Kraftpolygon sich schliessen. Man zieht nun durch jede Ecke des Kräftepolygons, welche von den Kräften P_n, P_{n+1} gebildet wird, eine Parallele zu jenem Umfangsstabe, welcher zwischen den Angriffspunkten von P_n und P_{n+1} sich befindet, und konstruiert zwischen den Parallelen eine gebrochene Linie derart, daß jene Stäbe, welche im Stabpolygon sich in einem Punkte schneiden, im Kräftepolygon einer geschlossenen Figur entsprechen. Es erscheint bei dieser (cyklischen) Anordnung jede Stabspannung nur einmal. Das so ermittelte Polygon gestattet rasch die Entscheidung, ob irgend ein Stab, z. B. b , gedrückt oder gezogen wird. Denkt man sich einen der Knotenpunkte, in welchem der fragliche Stab wirkt, z. B. 7, durch einen Schnitt losgetrennt, sucht man die geschlossene Figur im Kräftepolygon, welche diesem Schnittpunkte entspricht (also hier das schraffierte Fünfeck $P_7 G a b F$) und umfährt diese Figur im entsprechenden, durch die äußere Kraft (P_7) gegebenen Sinne, so entsprechen Richtungen gegen den Knotenpunkt den Druck-, Richtungen vom Knotenpunkt den Zugspannungen. Im vorliegenden Falle wird daher G, a, F gezogen, b gedrückt.

Dieses Verfahren ist besonders dann sehr bequem, wenn es sich um die Ermittlung sämtlicher Spannungen eines Fachwerks für eine ganz bestimmte, z. B. die volle Belastung handelt, verliert jedoch an Wert für Fälle, woselbst für jeden Stab eine andere Belastung zu Grunde zu legen ist.

Die cyklische Anordnung mit nur einmaligem Vorkommen der Stabspannungen ist übrigens nicht immer durchführbar.

Die Regeln für jene Anordnung des Kräftepolygons, bei welcher jede Stabspannung nur einmal erscheint, hat zuerst Cremona gegeben, indem er zeigte, daß sich Fachwerk und zugehöriger Kräfteplan als bestimmte Projektionen einander reziproker Polyeder auffassen lassen. Jedem Stabstrahlenbüschel im Fachwerksschema entspricht ein geschlossenes Polygon im Kräfteplan, dessen Seiten der Reihe nach den Strecken des Büschels äquipollent sind u. s. w. Man sehe speziell: Cremona. Le figure reciproche nelle statica grafica. Mailand 1872. Deutsch von Migotti. Ferner Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1873, S. 230, sowie Culmann. Graphische Statik, 2. Aufl. 1875, S. 313.

Fig. 13.

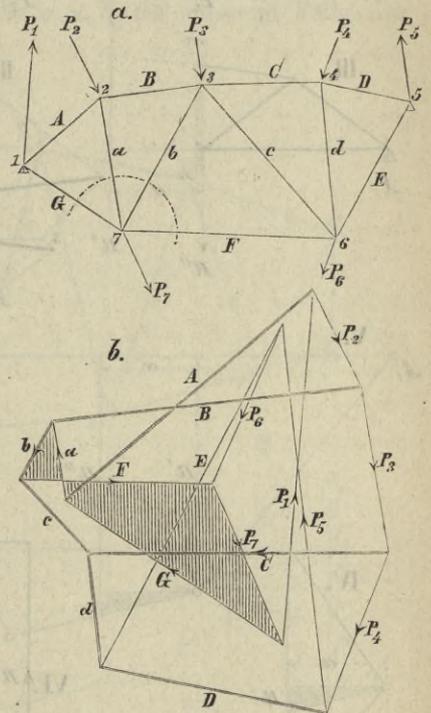
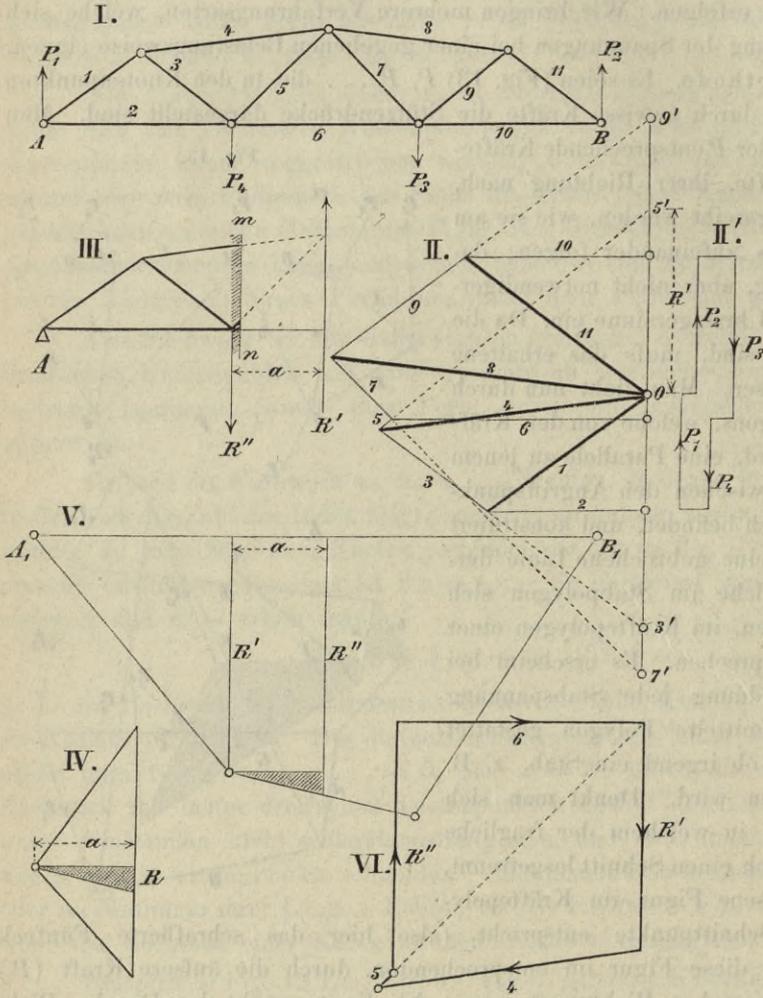


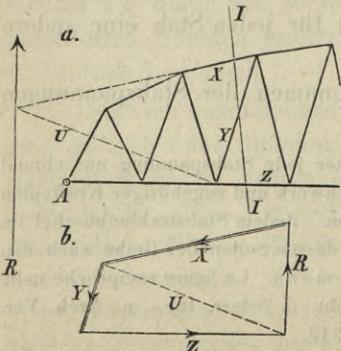
Fig. 14 bringt eine Anwendung dieser Methode auf einen Fachwerkträger, auf welchen die Lasten $P_3 P_4$ und die Stützendrücke $P_1 P_2$ wirken. Das Kräftepolygon fällt in eine Gerade zusammen, die in dem Schema II' der Übersichtlichkeit halber auseinander gezerzt ist. II zeigt das Vieleck der Stabspannungen. Die beim Konstruieren unvermeidlichen Zeichenfehler, welche zu Ungenauigkeiten führen und das Vieleck nicht zum Schluß bringen, lassen sich im vorliegenden Falle durch ein einfaches, von Mohr herrührendes Verfahren fast ganz beseitigen. Handelt es sich z. B. um Bestimmung der Spannungen $S_4 S_5 S_6$, so konstruiere man zunächst mit Hilfe der Pol-distanz a und des Kräftepolygons IV das Seilpolygon V. Führt man den Schnitt mn in III, so lassen sich die Kräfte links des Schnittes durch die beiden Kräfte R' und R'' , deren Größe aus V entnommen werden kann, ersetzen. Der Beweis hierfür liegt in dem Umstande, daß (siehe V) das Moment in mn durch $R' \cdot a$ und die Querkraft durch $R = R'' - R'$ gegeben ist. Man kann nun direkt das geschlossene Polygon VI zeichnen, welches mit Hilfe von R' und R'' die unbekanntenspannungen 6, 4 und 5 giebt. Hieraus läßt sich aber sofort ableiten, daß in Polygon II $0,5' = R'$ sein muß, was allgemein zu dem Satze führt, daß in Fällen, wie der vorliegende, jede Diagonale auf der Lotrechten durch 0 eine Strecke abschneidet, welche jener Seilpolygons-Ordinate in V entspricht, die durch ihren Fußpunkt geht. Die hier unter VI gezeigte Zerlegung ist insbesondere auch dann bequem, wenn in Methode b) die Mittelkraft der äußeren Kräfte außerhalb der Zeichenfläche fällt.

Fig. 14.



Schemata II' und II zeigen die Kräftepolygone, die in dem vorliegenden Falle durch ein einfaches, von Mohr herrührendes Verfahren fast ganz beseitigen. Handelt es sich z. B. um Bestimmung der Spannungen $S_4 S_5 S_6$, so konstruiere man zunächst mit Hilfe der Pol-distanz a und des Kräftepolygons IV das Seilpolygon V. Führt man den Schnitt mn in III, so lassen sich die Kräfte links des Schnittes durch die beiden Kräfte R' und R'' , deren Größe aus V entnommen werden kann, ersetzen. Der Beweis hierfür liegt in dem Umstande, daß (siehe V) das Moment in mn durch $R' \cdot a$ und die Querkraft durch $R = R'' - R'$ gegeben ist. Man kann nun direkt das geschlossene Polygon VI zeichnen, welches mit Hilfe von R' und R'' die unbekanntenspannungen 6, 4 und 5 giebt. Hieraus läßt sich aber sofort ableiten, daß in Polygon II $0,5' = R'$ sein muß, was allgemein zu dem Satze führt, daß in Fällen, wie der vorliegende, jede Diagonale auf der Lotrechten durch 0 eine Strecke abschneidet, welche jener Seilpolygons-Ordinate in V entspricht, die durch ihren Fußpunkt geht. Die hier unter VI gezeigte Zerlegung ist insbesondere auch dann bequem, wenn in Methode b) die Mittelkraft der äußeren Kräfte außerhalb der Zeichenfläche fällt.

Fig. 15.

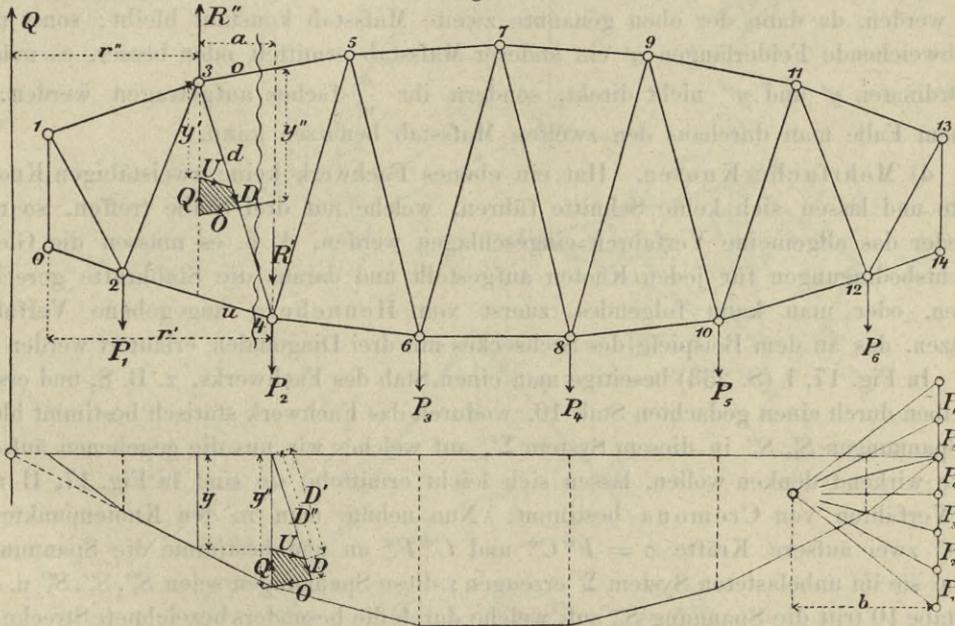


b) Legt man durch ein Fachwerk einen Schnitt (Fig. 15), welcher nur drei Stäbe trifft, und zerlegt man die Mittelkraft, welche auf einen der hierdurch erhaltenen (in der Figur links des Schnittes liegenden) Teile wirkt, in zwei Teilkräfte, von denen die erstere einem der drei durchschnittenen Stäbe entspricht und die Spannung desselben giebt, die andere durch den Schnittpunkt der beiden anderen Stäbe geht, so läßt sich letztere wieder in zwei Teilkräfte zerlegen, welche den

Spannungen der übrigen beiden Stäbe entsprechen. Es sei R die auf den Teil links des Schnittes I in Fig. 15 a wirkende Mittelkraft, so stellt Fig. 15 b das für die Stäbe XYZ erhaltene Kräfteviereck vor, in welchem die Diagonale parallel zu U ist. Umfährt man das Viereck im Sinne des Pfeiles, so sieht man, daß X und Y gegen den Schnitt gerichtet Druckspannungen darstellen, Z vom Schnitte laufend einen Zug bedeutet.

c) Zimmermann's Verfahren. Mit dem Vorgeführten verwandt ist die Zimmermann'sche Methode. An einem durch die Kräfte $P_1, P_2 \dots$ belasteten Träger (Fig. 16) seien die Stabspannungen O, U, D der Stäbe o, u, d (in unserem Falle der Stäbe 3 5, 2 4, 3 4) zu bestimmen.

Fig. 16.



Wir führen einen Schnitt durch die drei Stäbe und ersetzen die Mittelkraft Q links des Schnittes durch zwei Kräfte R'' und R' .

Ist das für die Poldistanz b konstruierte Seilpolygon der Kräfte ermittelt, so sind die Momente M', M'' der äußeren Kräfte in Punkt 3 und 4 gegeben durch $M' = y' b$; $M'' = y'' b$, wenn y' und y'' die Ordinaten des Seilpolygons sind, und bemerkt wird, daß in Fig. 16 das linksseitige y des Seilpolygons in y' zu verbessern ist. Sollen R'' und R' die Wirkung der Querkraft Q links des Schnittes ersetzen, so findet sich für 4 als Momentenpunkt $Q(r'' + a) = y'' b = R'' a$ und für 3 als Momentenpunkt $Q r'' = + y' b = - R' a$. Daraus:

$$R'' = y'' \cdot \frac{b}{a}; \quad R' = - y' \cdot \frac{b}{a},$$

d. h. die Kräfte R'' und R' sind den Ordinaten des Seitenpolygons proportional, dem negativen Zeichen von R' ist in unserer Zeichnung durch Umkehrung der Pfeilrichtung Rechnung getragen. Führt man einen neuen Kräftemaßstab ein, dessen Einheit das $\frac{a}{b}$ -fache von derjenigen des Kräftepolygons ist, so geben nach diesem gemessen y' und y'' unmittelbar die Werte für R'' und R' . y'' zerlegt man nun in zwei Komponenten O und D'' , parallel zu o und d , ebenso y' in zwei Komponenten D' und U . Der

richtige Wert von D ist $D'' - D'$, ebenso wie $y'' - y' = Q$ wird. Man erhält das geschlossene schraffierte Polygon, das durch die cyklische Umfahrung den Sinn, durch die nach dem zweiten Maßstabe zu messende Länge die Größe der Stabkräfte O , D und U liefert.

Anstatt nun diese Zerlegung unten vorzunehmen, kann man auch die Werte y'' und y' nach oben übertragen und erhält dann durch das Ziehen der Parallelen zu o und u das obere Viereck, mithin die Spannung der Diagonale in dieser selbst aufgetragen.

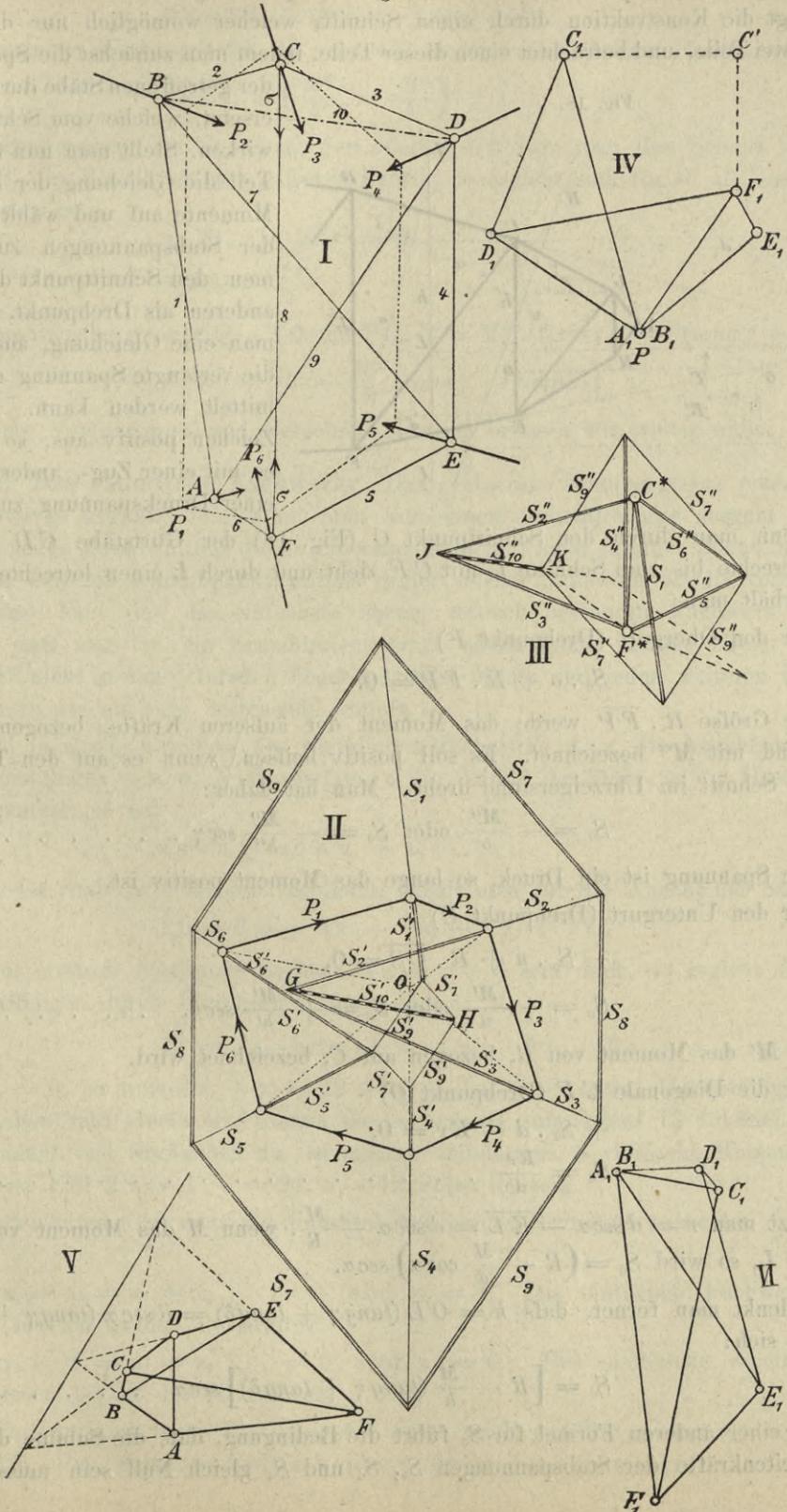
Wir begnügen uns, die Methode grundsätzlich vorgeführt zu haben. Für die praktische Durchführung ist erforderlich, daß das Gerippe des Fachwerks in großem Maßstabe gezeichnet wird und die Ordinaten des Seilpolygons nirgends größer als die Höhen des Fachwerks werden, was man durch passende Wahl der Poldistanz b ganz in der Hand hat. Besonders praktisch wird das Verfahren, wenn die Felderlängen a gleich groß werden, da dann der oben genannte zweite Maßstab konstant bleibt; sonst muß für abweichende Felderlängen a' ein anderer Maßstab ermittelt oder besser, es müssen die Ordinaten y' und y'' nicht direkt, sondern ihr $\frac{a}{a'}$ -faches aufgetragen werden, in welchem Falle man durchaus den zweiten Maßstab benutzen kann.

d) Mehrfache Knoten. Hat ein ebenes Fachwerk keine zweiständigen Knotenpunkte und lassen sich keine Schnitte führen, welche nur drei Stäbe treffen, so muß entweder das allgemeine Verfahren eingeschlagen werden, d. h. es müssen die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Knoten aufgestellt und daraus die Stabkräfte gerechnet werden, oder man kann folgendes, zuerst von Henneberg angegebene Verfahren benutzen, das an dem Beispiele des Sechseckes mit drei Diagonalen erläutert werden soll.

In Fig. 17, I (S. 233) beseitigt man einen Stab des Fachwerks, z. B. 8, und ersetzt denselben durch einen gedachten Stab 10, wodurch das Fachwerk statisch bestimmt bleibt. Die Spannungen S'_1, S'_2 in diesem System Σ' , auf welches wir uns die gegebenen äußeren Kräfte wirkend denken wollen, lassen sich leicht ermitteln, sie sind in Fig. 17, II nach dem Verfahren von Cremona bestimmt. Nun nehme man in den Knotenpunkten F und C zwei äußere Kräfte $\sigma = F^* C^*$ und $C^* F^*$ an und bestimme die Spannungen, welche sie im unbelasteten System Σ' erzeugen; diese Spannungen seien S''_1, S''_2, S''_3 u. s. w. Im Stabe 10 tritt die Spannung S''_{10} auf, welche durch die besonders bezeichnete Strecke JK gegeben ist. Man ändere nun die Größe $C^* F^*$ so, daß die in 10 erzeugte Spannung der Größe nach gleich dem S''_{10} , dem Sinne nach jedoch entgegengesetzt wird. Da in unserer Figur S''_{10} eine Zugspannung, $JK = S''_{10}$ ebenfalls ein Zug wird, so hat man einfach die Werte $S'' \cdot \frac{GH}{JK}$ zu bilden, was mit Hilfe eines Proportionalwinkels sehr leicht geschehen kann und die so erhaltenen Werte von den Größen S'_1, S'_2 u. s. w. zu subtrahieren, was in der Figur erfolgt ist, oder man kann die Fig. III mit dem Werte $F^* C^* \cdot \frac{GH}{JK}$ nochmals konstruieren, wodurch man die Spannungen u. s. w. erhält, welche von $S'_1, S'_2, S'_3 \dots$ algebraisch subtrahiert, die wahren Spannungen S_1, S_2 u. s. w. geben.

Auf kinematischem Wege ist es leicht, ein Kennzeichen für solche verschiebliche Systeme zu finden. Stellt man AB fest (Fig. IV), entfernt den Stab FC und erteilt dem Punkte F die Geschwindigkeit PF , so ist das Geschwindigkeitspolygon der verbleibenden kinematischen Kette vollkommen bestimmt. $C_1 F_1$ giebt die relative Geschwindigkeit der Punkte FC , welche sich in die Dehnungsgeschwindigkeit $F_1 C'$ und die Drehungsgeschwindigkeit $C_1 C'$ zerlegen läßt. Wird $F_1 C' = 0$, d. h. $F_1 C_1$ senkrecht auf FC , so ist eine Bewegung des Systems möglich, ohne daß FC seine Länge ändert, es könnte also auch ein Stab FC eingeschaltet werden, welcher das System nicht starr macht, obwohl die Zahl der Stäbe dann ausreichend ist.

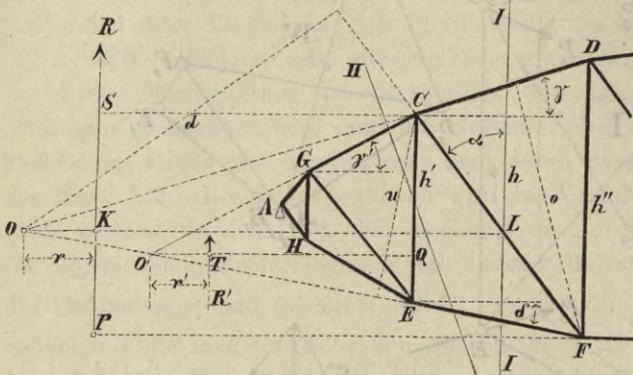
Fig. 17.



§ 11. Rechnungsmäßige Ermittlung der Spannungen (Ritter's Methode).

Man zerlegt die Konstruktion durch einen Schnitt, welcher womöglich nur drei Stäbe trifft, in zwei Teile, und betrachtet einen dieser Teile, indem man zunächst die Spannungen

Fig. 18.



der getroffenen Stäbe durch Kräfte ersetzt, welche vom Schnitte weg wirken. Stellt man nun für diesen Teil die Gleichung der statischen Momente auf und wählt, um eine der Stabspannungen zu bestimmen, den Schnittpunkt der beiden anderen als Drehpunkt, so erhält man eine Gleichung, aus welcher die verlangte Spannung direkt ermittelt werden kann. Fällt das Zeichen positiv aus, so hat man es mit einer Zug-, andernfalls mit einer Druckspannung zu thun.

Wenn man durch den Schnittpunkt O (Fig. 18) der Gurtstäbe CD und EF eine Wagerechte bis zum Schnitte L mit CF zieht und durch L einen lotrechten Schnitt legt, so erhält man:

Für den Obergurt (Drehpunkt F)

$$S_o \cdot o + R \cdot \overline{FP} = 0.$$

Die Größe $R \cdot \overline{FP}$ werde das Moment der äußeren Kräfte, bezogen auf F , genannt und mit M'' bezeichnet. Es soll positiv heißen, wenn es auf den Trägereil links vom Schnitt im Uhrzeigersinne dreht. Man hat daher:

$$S_o = -\frac{M''}{o} \text{ oder } S_o = -\frac{M''}{h''} \sec \gamma \dots \dots \dots 45^a.$$

Die Spannung ist ein Druck, so lange das Moment positiv ist.

Für den Untergurt (Drehpunkt C)

$$-S_u \cdot u + R \cdot \overline{CS} = 0,$$

daraus

$$S_u = +\frac{M'}{u} \text{ oder } S_u = +\frac{M'}{h'} \sec \delta, \dots \dots \dots 45^b.$$

wenn mit M' das Moment von R , bezogen auf C , bezeichnet wird.

Für die Diagonale CF (Drehpunkt O)

$$+S_d \cdot d - Rr = 0,$$

daraus

$$S_d = \frac{Rr}{d} \dots \dots \dots 46.$$

Setzt man $r = d \sec \alpha - \overline{KL} = d \sec \alpha - \frac{M}{R}$, wenn M das Moment von R bezogen auf L , so wird $S_d = \left(R - \frac{M}{d} \cos \alpha \right) \sec \alpha$.

Bedenkt man ferner, daß $h = OL (\tan \gamma + \tan \delta) = d \sec \alpha (\tan \gamma + \tan \delta)$, so ergibt sich:

$$S_d = \left[R - \frac{M}{h} (\tan \gamma + \tan \delta) \right] \sec \alpha \dots \dots \dots 47.$$

Zu einer anderen Formel für S_d führt die Bedingung, daß die Summe der wagerechten Seitenkräfte der Stabspannungen S_o , S_d und S_u gleich Null sein müsse.

Man erhält

$$S_o \cos \gamma + S_d \sin \alpha + S_u \cos \delta = 0$$

und wenn man die Werte aus Gl. 45^a und 45^b einsetzt, nach kurzer Rechnung:

$$\sin \alpha S_d = \left(\frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right) \dots \dots \dots 48.$$

Zur Bestimmung der Spannung der Pfosten *CE* lege man den Schnitt II. Für diesen sei *R'* die Mittelkraft der äußeren Kräfte, so ergibt sich für *O'* als Drehpunkt, wenn *O'Q = v* ist:

$$- S_v \cdot v - R' r' = 0,$$

somit:
$$S_v = - \frac{R' r'}{v} \dots \dots \dots 49.$$

Setzt man wieder *r' = O'Q - TQ* und *TQ · R' = M'''*, ferner *h' = v (tang γ' + tang δ)*, so wird:

$$S_v = - \left[R' - \frac{M'''}{h'} (tang \gamma' + tang \delta) \right] \dots \dots \dots 50.$$

Weitere Verfahrens- und Berechnungsweisen bringen wir weiter unten.

§ 12. Das räumliche Fachwerk. Das einfachste Bildungsgesetz eines räumlichen Fachwerks ergibt sich, wenn man von einem Grunddreiecke ausgeht und an dieses einen neuen Punkt mittels dreier widerstandsfähiger, nicht in einer Ebene liegender Stäbe, jeden weiteren Knotenpunkt mittels dreier solcher Stäbe an bereits vorhandene knüpft; ebenso baut sich das einfachste ebene, statisch bestimmte Fachwerk in der Weise auf, daß man an ein Grunddreieck einen neuen Punkt mittels zweier in der Ebene, jedoch nicht in einer Geraden liegender Stäbe bindet und jeden weiteren Knotenpunkt gleicherweise an zwei bestehende knüpft.

Es sei in einem geschlossenen räumlichen Fachwerke α_3, α_4 die Anzahl der dreiständigen, vierständigen u. s. w. Knotenpunkte, σ die Anzahl der Stäbe, α die Gesamtzahl der Knotenpunkte, so ist:

$$\alpha = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \dots \dots$$

Da jeder Stab zwei Knoten verbindet, erhält man für die Anzahl der Stäbe:

$$2 \sigma = 3 \alpha_3 + 4 \alpha_4 + 5 \alpha_5 + 6 \alpha_6 + 7 \alpha_7.$$

Da für statisch bestimmte Systeme $3 \alpha = \sigma + 6$ sein muß, so ergibt sich aus beiden Gleichungen durch Elimination von σ und α :

$$12 = 3 \alpha_3 + 2 \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7 - 2 \alpha_8 - 3 \alpha_9 \dots \dots \dots (\alpha).$$

Ist $\alpha_3 = 0$, so muß $2 \alpha_4 + \alpha_5 = 12 + \alpha_7 + 2 \alpha_8 + 3 \alpha_9$ sein. Daraus folgt: Sind keine dreifachen und vierfachen Knoten da, so müssen mindestens 12 fünffache, sind keine dreifachen und fünffachen da, so müssen mindestens 6 vierfache Knotenpunkte und für diesen Fall $2 \sigma = 4 \cdot 6 = 24$, $\sigma = 12$ Stäbe da sein.

Die Gleichungen (α) deuten die statisch bestimmten Grundfachwerke an, die möglich sind.

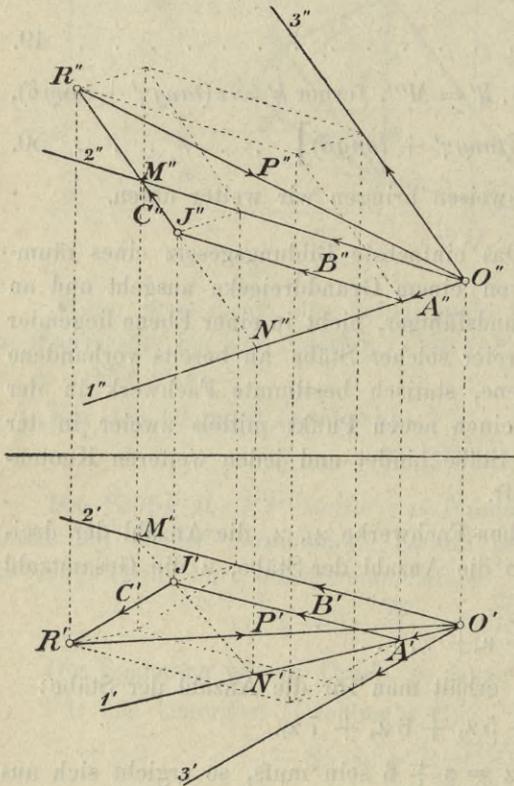
Für $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 \dots = 0$ wird $\alpha_3 = 4$. Das einfachste Fachwerk mit dreiständigen Knoten ist das Tetraëder.

Für $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 \dots = 0$ wird $\alpha_4 = 6$. Das einfachste regelmäßige Fachwerk dieser Art ist das Hexaëder.

Das Fachwerk mit lauter fünfständigen Knoten ergibt sich für $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_8 \dots = 0$ wird $\alpha_5 = 12$. Das regulärste Zwölfeck dieser Art ist das Ikosaëder.

§ 13. Bestimmung der Spannungen im Raumbachwerk. Sind in einem räumlichen Stabwerk mit dreiständigen Knoten die in den Knotenpunkten angreifenden Kräfte bekannt, so ist es sehr einfach, die inneren Kräfte zu bestimmen; wir haben nur die im Knoten angreifende Kraft P in drei Kräfte zu zerlegen, die in die Richtung der Stäbe fallen, eine Aufgabe, die mit Hilfe des Kräfteprismas, wonach P die Diagonale eines Prismas ist, dessen im Angriffspunkte sich schneidende drei Kantenrichtungen den Stabrichtungen entsprechen, leicht lösen läßt.

Fig. 19.



Sind 1, 2, 3 die von O ausgehenden, durch ihre Projektionen $1', 2', 3'$ und $1'', 2'', 3''$ gegebenen Stabrichtungen, ist P die durch die Projektionen P' und P'' nach Größe und Richtung gegebene Kraft, so ziehe man durch R eine Parallele C zu 3 und bringe sie zum Schnitte mit der Ebene der Stäbe 1, 2, so erhält man einen Eckpunkt des Prismas, dessen Kanten die Stabkräfte darstellen. Für die graphische Ermittlung dieses Durchstoßpunktes lege man durch die Gerade C eine zur zweiten Projektionsebene senkrechte Ebene und suche die den Schnittpunkten M'' und N'' entsprechenden Horizontalprojektionen $M' N'$, so giebt der Schnitt der Geraden C' mit $M' N'$ die Horizontalprojektion des Durchstoßpunktes und zugleich durch $R' J'$ die Horizontalkomponente der Stabkraft C ; die anderen Komponenten können durch Ziehen der Parallelen gefunden werden. Für die eigentliche Konstruktion werden selbstverständlich die übrigen in der Zeichnung punktierten Linien, die das Kräfteprisma in beiden Projektionen darstellen, entbehrlich.

Verfahren mittels Ersatzstäben. Wenn ein räumliches Fachwerk an sich oder ein durch Ausschaltung der dreifachen Knoten aus einem solchen entstandenes vereinfachtes Fachwerk nur vierfache oder höhere Knoten aufweist, so ist die Anwendung der Methode, wonach jede Knotenkraft in drei Stabkräfte eindeutig zerlegt wird, nicht mehr möglich. Ganz dasselbe gilt, wenn in einem ebenen Fachwerke lauter dreifache Knoten vorkommen und kein ebener Schnitt möglich ist, der weniger als vier Stäbe trifft; in solchen Fällen kommt zweckmäßig das Verfahren der Ersatzstäbe zur Anwendung.

Es besteht darin, daß man aus dem gegebenen Fachwerke Σ einen Stab a ausschaltet und durch einen anderen e ersetzt, der zwei Endpunkte der verbleibenden Stäbe verbindet, wobei die Einschaltung dieses Stabes an die Bedingung geknüpft ist, daß Σ' , das so umgestaltete Fachwerk, neuerdings statisch bestimmt sei.

Man ersetze die Wirkung des ausgeschalteten Stabes durch die Spannungen X und betrachte diese als äußere Kraft, so ergibt sich für den eingeschalteten Stab im System Σ' :

$$S_e = \varphi(P) + \alpha X,$$

wobei $\varphi(P)$ die von der Belastung des Σ herrührende, α die von $X = 1$ herrührende Spannung ist. Aus der Bedingung, daß $S_e = 0$ sein muß, ergibt sich:

$$X = \frac{-\varphi(P)}{\alpha}.$$

Bei Wahl des Ersatzstabes ist mit Vorsicht zu verfahren; im untenstehenden Falle würde die Wahl des Stabes GD als Ersatzstab für CB unzulässig sein, da das verbleibende Fachwerk nicht statisch bestimmt ist, vielmehr durch Einschaltung dieses Stabes ein überstarres Viereck, bzw. ein Tetraëder mit in einer Ebene liegenden Stäben bliebe. Die Methode kann für die Berechnung des allgemeinen Brückenfachwerks angewendet werden.

Weist das Fachwerk fünffache Knotenpunkte auf, so kann ganz derselbe Vorgang eingeschlagen werden. Es seien a, b die ausgeschalteten Stäbe des Systems Σ , e und f die Ersatzstäbe des Systems Σ' .

Die Spannungen, welche die äußeren Kräfte im System Σ' hervorrufen, seien S'_m , die Spannungen der ausgeschalteten Stäbe seien X, Y , die Spannungen, welche $X = 1$ bzw. $Y = 1$ im Systeme Σ' erzeugen, α_m, β_m , mithin für die wirkliche Spannung:

$$S_m = S'_m + \alpha_m X + \beta_m Y.$$

Für die beiden Stäbe e und f findet sich:

$$S_e = S'_e + \alpha_e X + \beta_e Y = 0,$$

$$S_f = S'_f + \alpha_f X + \beta_f Y = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen rechnen sich die Werte X und Y und mit diesen die wahren Werte S_m .

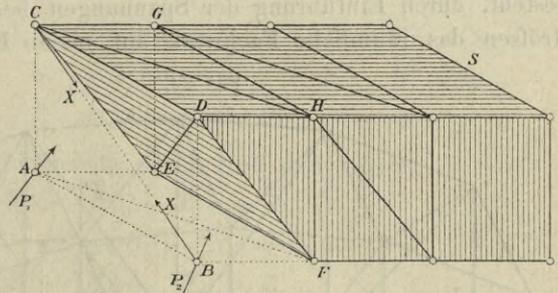
Die Methode läßt sich sehr leicht auch graphisch durchführen.

Die Ausschaltung des Stabes CB und Anordnung des Ersatzstabes DE gestaltet das verbleibende Fachwerk wieder zu einem gegliederten Tragkörper, was es als Ganzes war (Fig. 20).

Die Kräfte P_2 und X können nach den drei Richtungen in B zerlegt und dadurch der Knoten ausgeschaltet und durch die Stabkräfte ersetzt werden. Der verbleibende Tragkörper $CEDFS$

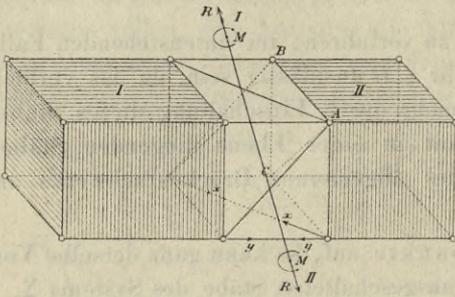
kann nun wieder durch Ausschaltung des Stabes ED und Einschaltung eines Stabes GF in einen kleineren Tragkörper $GEHFS$ und sechs Stäbe zerlegt werden. Da X so zu zählen ist, daß es die Spannung des ersten Ersatzstabes zu Null macht, ist für die weitere Zerlegung diese Spannung Null anzunehmen. Wir erhalten dadurch zunächst einen Dreistabknoten D , auf dem zwei Kräfte P' und αX wirken werden, die wir wieder nach den drei Stabrichtungen zerlegen müssen; nun läßt sich C ausschalten, das nunmehr dreistäbig ist u. s. w.

Wir haben durch diesen Vorgang den ganzen Tragkörper um ein Feld verkürzt und können so fortfahren, den ganzen Träger schließlic auf einen keilförmigen Tragkörper zurückzuführen.



Ersetzt man in einem beliebigen Felde (Fig. 21) zwei Stäbe X u. Y durch Ersatzstäbe, welche die beiderseits verbleibenden Fachwerke zu zwei Tragkörpern I und II machen, so

Fig. 21.

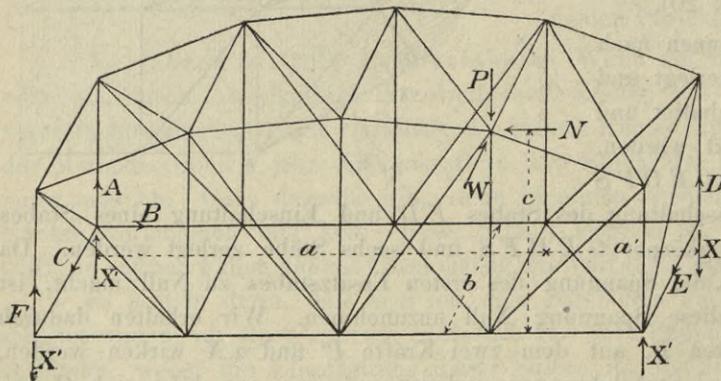


kann man alle äußeren Kräfte, welche auf einen Tragkörper wirken, allgemein auf eine Resultierende R und ein senkrecht zu derselben drehendes Kräftepaar zurückführen; da der ganze Körper im Gleichgewichte ist, muß R und M für den zweiten Tragkörper den ersten Werten entgegengesetzt gleich sein. Aus den sechs Gleichgewichtsbedingungen lassen sich die sechs Stabkräfte direkt als Funktion der äußeren Kräfte R, M rechnen. Hierzu kommen aber noch X und Y als äußere Kräfte.

Die Bestimmung der Spannungen in den Stäben eines räumlichen Fachwerks jener Art, wie wir sie bei Balkenbrücken treffen, stößt schon unter der Annahme bestimmter Stützenwiderstände als äußere Kräfte auf nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten, da keine oder höchstens zwei Knotenpunkte vorkommen, in denen sich nur drei Stäbe treffen und selbst in letzterem Falle nach Hinwegschaffung dieser dreifachen Knoten durch Ermittlung und Einführung der ersetzenden Stabspannung an Stelle der angreifenden Knotenkraft, alle verbleibenden Knotenpunkte mehr als dreistäbig sind. Die Bestimmung der Stabkräfte nach Verfahrensarten, welche etwa jenen von Cremona oder Ritter für ebene Stabgebilde entsprechen würden, versagt und nur die Einführung von Ersatzstäben nach Henneberg, welche wir bei der Ermittlung von Stabspannungen mit dreistäbigen ebenen Fachwerken kennen gelernt haben, bieten ein immerhin unständliches Mittel, das räumliche Fachwerk auf ein einfacheres zurückzuführen, stößt aber bei der wirklichen Ausführung auf die Bewältigung weitläufiger Berechnungen.

Wir wollen hier noch ein anderes Verfahren kennen lernen, das im Wesen darin besteht, durch Einführung der Spannungen bestimmter Stäbe als vorläufig unbekannte Größen das räumliche Fachwerk auf ebene Fachwerke zurückzuführen und aus den

Fig. 22.



Gleichgewichtsbedingungen für diese die vorläufig unbekanntten Spannungen und mit ihrer Hilfe alle übrigen zu bestimmen.⁸⁾

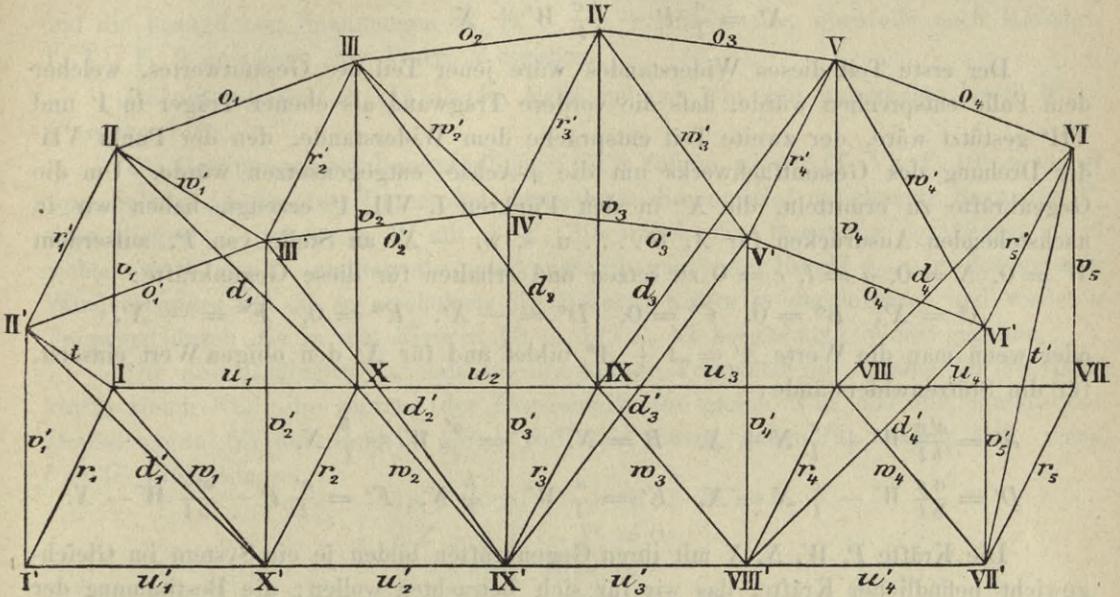
Wir erläutern das System an einem bestimmten Beispiele (s. auch T. VI).

Ein räumliches Fachwerk I II ..., I' II' ... X' (Fig. 22 u. 23) werde in irgend einem Knotenpunkte von drei Kräften P, N, W

angegriffen. Die Stabspannungen sind zu ermitteln. Die Stabbezeichnungen sind in Fig. 23, die Kräfte in Fig. 22 eingetragen.

⁸⁾ Wesentliche Betrachtungen über das oben vom Verfasser entwickelte Verfahren finden sich bei: F. Engesser. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken. Berlin 1892.

Fig. 23.



Die Bestimmung der Auflagerwiderstände setzt voraus, dass wir über die Art der Festhaltung der Auflagerpunkte im Klaren sind. Wir wollen zuerst annehmen, dass I, welchen Punkt wir gleichzeitig als den Ursprung eines Koordinatensystems auffassen, festgehalten sei, VII gezwungen sei, sich auf der x -Achse I VII zu bewegen und I' stets auf der x, y -Ebene bleiben müsse. Sind a, b, c die Koordinaten des Lastangriffspunktes und ist l die Stützweite, so findet sich für die in der Figur gezeichneten Auflagerwiderstände $A B C D E F$:

$$\begin{aligned} \text{Summe der Seitenkräfte parallel zur } z\text{-Achse} &= 0, \quad A + D + F - P = 0, \\ \text{'' '' '' '' '' } y\text{-Achse} &= 0, \quad C + E - W = 0, \\ \text{'' '' '' '' '' } x\text{-Achse} &= 0, \quad B - N = 0. \end{aligned}$$

Ferner dass die Summe der Drehmomente gleich Null sein müsse:

$$\begin{aligned} \text{um die } x\text{-Achse} & Fb - Pb + Wc = 0, \\ \text{'' '' } y\text{-Achse} & -Dl + Pa - Nc = 0, \\ \text{'' '' } z\text{-Achse} & El + Nb - Wa = 0. \end{aligned}$$

Daraus nach kurzer Zusammenziehung der Werte, wenn wir $l - a = a'$ schreiben:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{a}{l} P + \frac{c}{b} W + \frac{c}{l} N, \\ B &= + N, \\ C &= \frac{a'}{l} W + \frac{b}{l} N, \\ D &= +\frac{a}{l} P - \frac{c}{l} N, \\ E &= +\frac{a}{l} W - \frac{b}{l} N, \\ F &= P - W \frac{c}{b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 51.$$

Wir wollen nun annehmen, daß in VII eine weitere Kraft als vorläufig unbekannter Widerstand angreife, für den wir setzen:

$$X' = \frac{a}{l} P - \frac{a c}{b l} W + X.$$

Der erste Teil dieses Widerstandes wäre jener Teil des Gesamtwertes, welcher dem Falle entsprechen würde, daß die vordere Tragwand als ebener Träger in I' und VII' gestützt wäre, der zweite Teil entspräche dem Widerstande, den der Punkt VII' der Drehung des Gesamtfachwerks um die x -Achse entgegengesetzt würde. Um die Gegenkräfte zu ermitteln, die X' in den Punkten I, VII, I' erzeugt, haben wir in nachstehenden Ausdrücken für $A, B \dots$ u. s. w. — X' an Stelle von P , außerdem $W = 0, N = 0, a = l, c = 0$ zu setzen und erhalten für diese Gegenkräfte:

$$A^* = X', \quad B^* = 0, \quad C^* = 0, \quad D^* = -X', \quad E^* = 0, \quad F^* = -X',$$

oder wenn man die Werte $A' = A + A^*$ bildet und für X' den obigen Wert einsetzt, für die Stützenwiderstände:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{a'c}{bl} W + \frac{c}{l} N + X, & B &= N, & C &= \frac{a'}{l} W + \frac{b}{l} N, \\ D' &= \frac{ac}{bl} W - \frac{c}{l} N - X, & E' &= \frac{a}{l} W - \frac{b}{l} N, & F' &= \frac{a'}{l} P - \frac{a'c}{bl} W - X. \end{aligned}$$

Die Kräfte P, W, N, X mit ihren Gegenkräften bilden je ein System im Gleichgewicht befindlicher Kräfte, das wir für sich betrachten wollen; die Bestimmung der Größe von X ist nur mit Hilfe der Formänderungsarbeit möglich und soll erst später erfolgen.

Als 1. Belastungsfall betrachten wir die Wirkung der lotrechten Kraft P , die von uns angegebene Belastung erzeugt die Spannungen:

$$S = \alpha P + \beta X.$$

Die Werte α entsprechen im vorliegenden Falle den Strecken eines Cremona-planes für die Vorderwand, wenn wir diese als ebenes Fachwerk betrachten und eine bestimmte Strecke als Einheit annehmen. Dieser Cremonaplan ist unter F. 19, T. VI gezeichnet.

Für die Ermittlung der Werte β wird das Verfahren umständlicher. Wir nehmen zunächst an, daß in dem Riegel t eine Druckspannung wirke, welche in der Länge dieses Riegels ihr Maß finde. Daraus ergibt sich, daß in den Riegeln $r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, r'_5$ des oberen Windverbandes Zugspannungen, in den Diagonalen w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 Druckspannungen auftreten, die durch die Länge dieser Stäbe gemessen werden und in T. VI, F. 3 u. 4 dargestellt sind; denkt man sich einen ebenen Schnitt dicht an der Hinterwand parallel zu dieser geführt, so werden neben den Kräften X die zur Hinterwand parallelen Seitenkräfte der Winddiagonalen als äußere Kräfte auftreten (T. VI, F. 5). Die von diesen Spannungen herrührenden Kräfte haben die Eigenschaft, daß sie im vorliegenden Falle durch die Umfassungsstäbe der Tragwand gemessen werden und diesen Umfang dem Uhrzeigersinne entgegen durchlaufen. Für solche Kräfte entspricht das Moment der Kräfte für irgend einen Punkt innerhalb des Umfanges dem doppelten Flächeninhalte der umschlossenen Figur. Ist h die Höhe, l die Basis eines Rechteckes vom gleichen Inhalt wie die umschlossene Figur, so ist das Moment durch $2lh$ gegeben. Die Gleichgewichtsbedingung für den Auflagerpunkt VII ergibt $X \cdot l - 2lh = 0$ oder $X = 2h$; die Größe X ist durch die doppelte Höhe des flächengleichen Rechteckes gegeben.

Konstruiert man einen Maßstab, indem man $2h = 1$ macht (T. VI, F. 9), so geben die nach diesem Maßstabe abgemessenen Werte O_1, O_2 u. s. w. der F. 6 die Werte β .

In gleicher Weise wurde mittels eines Schnittes 22 die vordere Wand abgetrennt und die bezüglichen Spannungen $O'_1, O'_2 \dots$ ermittelt, die, ebenfalls nach Maßstab T. VI, F. 9 gemessen, die Werte β ergeben.

Belastungsfall 2. In diesem Falle nehmen wir eine wagerechte Kraft W in V' wirkend an.

Die Bestimmung wird umständlicher. Wir führen wieder (T. VI, F. 10) zunächst einen Schnitt parallel zur Hinterwand, bezeichnen die zunächst unbekannte Spannung R'_2 eines Riegels r'_2 links von W mit $+Y$, die unbekannte Spannung der Riegel r'_4, r'_3 rechts von W mit Y' , endlich die unbekannte Spannung der Riegel r_2, r_3, r_4 des unteren Windverbandes mit Z , so erscheinen die äußeren Kräfte in der hinteren und vorderen Tragwand durch die in den Figuren 10 u. 12, T. VI bezeichnete Weise gegeben.

Die drei Bedingungen, daß für die hintere Tragwand die Summe der Vertikalkräfte gleich Null, die Summe der Horizontalkräfte gleich Null und die Summe der Drehmomente für den Punkt I gleich Null sein müsse, geben für unseren Fall, wenn $l = 16$ Einheiten:

$$\begin{aligned} -16 Y + 26 Y' - 16 \cdot 5 W &= 0, \\ -4 Z + 3 Y - Y' &= 0, \\ -Y - Y' + W &= 0, \end{aligned}$$

woraus: $Z = 0,024 W, Y = 0,226 W, Y' = 0,774 W.$

Diese Werte erfüllen auch die Gleichgewichtsbedingungen für die Vorderwand. Mit ihnen wurden die Cremonapläne unter Annahme einer bestimmten Strecke für das Maß von W gezeichnet.

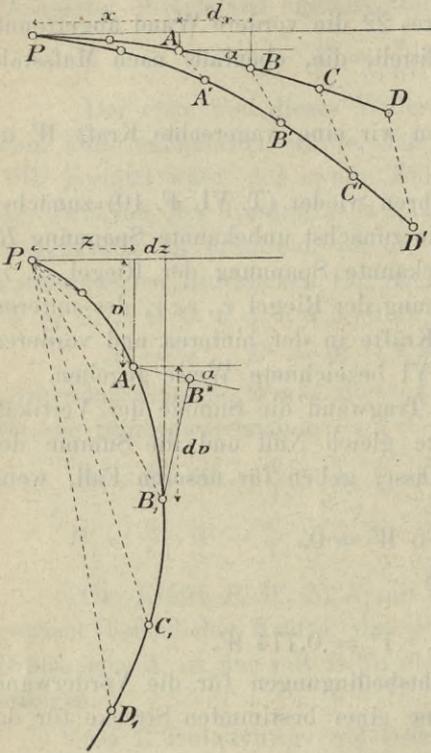
Die Werte O_1, O_2 u. s. w. $O'_1, O'_2 \dots$ nach diesem Maße als Einheit gemessen, geben die Werte α für den vorliegenden Belastungsfall.

III. Die Ermittlung der Formänderung.

§ 14. Allgemeines. Verschiebungspläne ebener und räumlicher Kurven.

Macht ein elastischer Körper aus irgend einer Ursache eine sehr kleine Formänderung durch, so wird irgend ein Punkt A seiner Oberfläche in eine neue Lage A' gelangen. Trägt man AA' oder ein bestimmtes Vielfaches dieser Strecke nach Größe, Richtung und Sinn von einem festen Pole P aus auf, so erhält man einen Punkt A_1 . Der Inbegriff aller so erhaltenen Punkte A_1 liefert eine Fläche, die wir die Williotfläche nennen wollen. Sind A und B zwei Punkte der Oberfläche, so entsprechen ihnen zwei Punkte A_1, B_1 der Williotfläche. $A_1 B_1$ heißt die relative Verrückung der Punkte AB . Diese läßt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen eine $A_1 B_1^*$ parallel zu AB ist, die andere $B^* B_1$ in eine Ebene fällt, die senkrecht zum Elemente steht. Wird $A_1 B_1^*$ gleich Null, so findet zwischen AB keine Längenänderung statt. Das entsprechende Element der Williotfläche steht senkrecht auf der Geraden AB . Findet keinerlei Drehung statt, so werden die Elemente der Williotfläche parallel zu jenen des Körpers. Es ist für bestimmte Belastungen und bestimmte Formen des Körpers möglich, die entsprechende Williotfläche graphisch zu ermitteln. Erscheint der fragliche Körper durch ein räumliches Fachwerk ersetzt, so entsprechen den Knotenpunkten ABC u. s. w. Punkte A_1, B_1, C_1 eines Polyeders. Es ist nicht schwierig, dieses Polyeder zu ermitteln, wenn man die einzelnen Längenänderungen kennt.

Fig. 24.

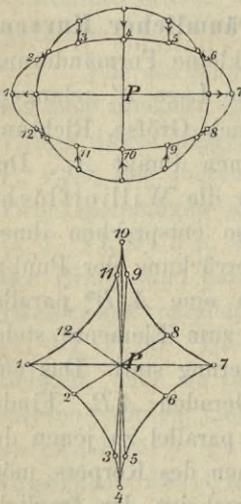


Wir werden später auf Aufgaben dieser Art zurückkommen und wollen hier uns zunächst dem geraden und gekrümmten Stabe zuwenden. Wir binden ferner unsere Untersuchung zunächst an die Annahme, daß die Achse des Stabes in einer Ebene liege und während der Formänderung nicht aus derselben heraustrete.

Ändert eine Kurve, Fig. 24, die Stammkurve, ihre Form und Lage, betrachtet man zwei sehr nahe liegende Momente dieser Änderung, sind A und A' zwei zusammengehörige Punkte und trägt man ein Vielfaches der Strecke AA' nach Größe, Richtung und Sinn von einem festen Pole P aus auf, so erhält man eine andere Kurve $P_1 D_1$, welche wir die Williotkurve nennen wollen. Sind A und B zwei unendlich nahe liegende Punkte der Stammkurve, so entsprechen ihnen zwei Punkte $A_1 B_1$ der Williotkurve. $A_1 B_1$ läßt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die erste $A_1 B^*$ parallel zu AB , die zweite $B_1 B^*$ senkrecht zu AB sich erstreckt. $A_1 B^*$ entspricht der Verlängerung Δds der kleinen Strecke $AB = ds$. Die Strecke $B^* B_1$ stellt eine Drehung dar, welche B senkrecht zum Elemente erleidet. Erleiden

die Elemente der Kurve keine relativen Drehungen, so werden die Strecken $B^* B_1 = 0$. Die Elemente der Williotkurve schließens denselben Winkel ein wie jene der ersten Kurve. Williotkurve und Stammkurve werden einander ähnlich. Findet

Fig. 25.



aufser der elastischen Formänderung keinerlei Ortsveränderung der Stammkurve statt und ändern die Elemente der Stammkurve ihre Länge nicht, machen dieselben also ausschliesslich Winkeländerungen durch, so erhalten wir eine Williotkurve, deren Elemente senkrecht auf den Elementen der Stammkurve stehen. In nebenstehendem Beispiele ist die Williotkurve für einen Kreis gezeichnet, welcher ohne Längenänderung der Kurvenelemente in eine Ellipse übergeht. Ist die Stammkurve die Achse eines gekrümmten Stabes, so ist die Winkeländerung $d\gamma$ zweier Elemente durch den Ausdruck $d\gamma = \frac{M ds}{EJ}$ gegeben.

Denkt man sich zur Feststellung der Kurve ein Element o in P festgehalten, so wird das nächste bei der Formänderung nicht nur die Drehung um das Nachbarelement, sondern aller vorhergegangenen mitmachen, es wird daher

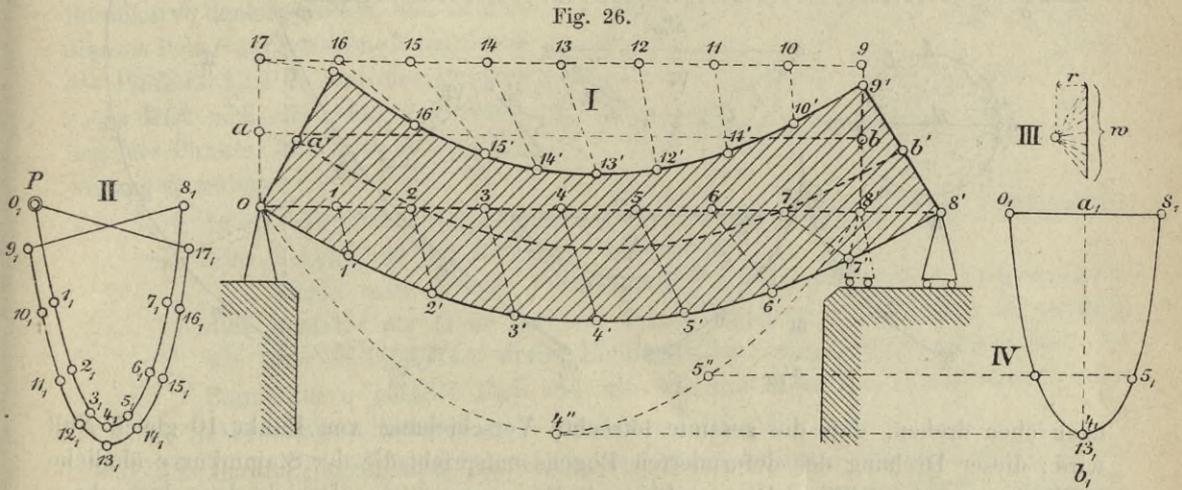
$$B_1 B^* = \int_0^B d\gamma ds = \int_0^B \frac{M ds^2}{EJ},$$

während wir für die Längenänderung des Elementes die Größe

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF} \text{ erhalten.}$$

In nachstehender Fig. 26 ist die relativ sehr grofse Formänderung eines Trägers I gezeichnet. Die Wege der Umfangspunkte sind in doppelter Gröfse von P , einem festen Pole, aus aufgetragen und wurde dadurch ein Verschiebungsplan erhalten. Der geschlossenen Figur $0\ 1\ 2\ \dots\ 17\ 0$ entspricht eine geschlossene, in sich verschlungene Figur $0_1\ 1_1\ 2_1\ \dots\ 17_1\ 0_1$.

Werden die Verschiebungen sehr klein, so fallen in II die beiden Kurven in eine zusammen, ebenso die beiden Geraden $0_1\ 17_1$ und $8_1\ 9_1$; die diesbezügliche Darstellung ist in Figur IV gegeben.



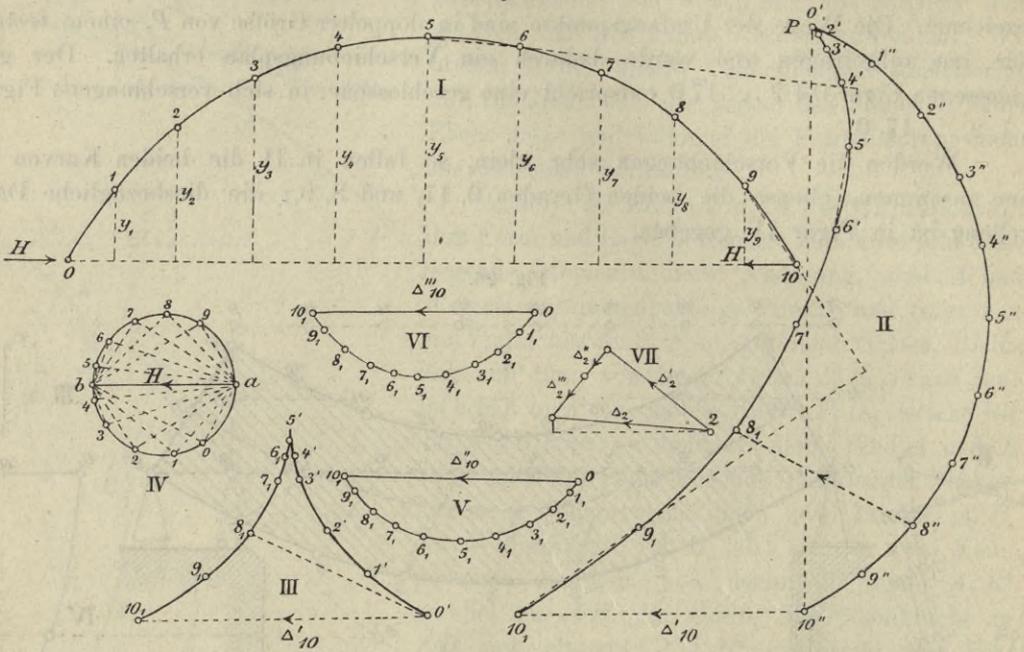
Der Figur liegt die Annahme zu Grunde, dafs die Schubkräfte bei Ermittlung der Durchbiegung vernachlässigt werden. Der Mittellinie des Trägers ab entspricht als Williotkurve die Gerade $a_1\ b_1$, sie steht senkrecht auf ab , längs dieser Linie finden keine Längenänderungen der Elemente statt, es müssen also auch die sich entsprechenden Elemente der Stammkurve und Williotkurve aufeinander senkrecht stehen.

Trägt man die den Winkeländerungen zwischen zwei Elementen entsprechenden Bogenlängen als Kräfte auf und wählt r als Polabstand (s. Fig. 26, III), so erhält man die in § 17 erklärte Biegungslinie; die einander entsprechenden Punkte $4''$ und 4_1 , $5''$ und 5_1 müssen je in einer Wagerechten liegen.

Wir gehen nunmehr daran, das Verfahren weiter in Beispielen zu erläutern. In Fig. 27 (S. 244) stellt I als Stammkurve ein Kreissegment dar. Es wird angenommen, dafs die Winkeländerung zwischen den Elementen $0\ 1$, $1\ 2$ proportional y_1 , die Winkeländerung zwischen $1\ 2$, $2\ 3$ proportional y_2 u. s. w. sei. Hält man zunächst das Element $0\ 1$ fest und wählt P als Pol, so entspricht die feste Lage des Poles den Punkten $0'\ 1'$. Der Weg, den 2 bei der Drehung um Punkt 1 beschreibt, ist nach obigem αy_1 , wenn α ein Zahlenquotient (in unserer Figur $\alpha = 0,1$). Wir erhalten unter II eine Williotkurve $0'\ 1'\ 2'\ 4'\ \dots\ 10_1$, deren Elemente senkrecht auf den bezüglichen Elementen der Stammkurve stehen und deren Längen der Reihe nach sind $0'\ 2' = \alpha y_1$, $2'\ 3' = \alpha (y_1 + y_2)$, $3'\ 4' = \alpha (y_1 + y_2 + y_3)$, $4'\ 5' = \alpha (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \dots$ Die Lage des Punktes 10_1 giebt uns durch $P\ 10_1$ die Verschiebung des Punktes 10. Diese Verschiebung läfst sich in eine Wagerechte Δ'_{10} und eine Lotrechte zerlegen. Letztere entspricht einer Drehung des Punktes 10 um 0.

Ist die Bedingung gegeben, dafs 10 auf einer Wagerechten bleiben mufs, so gelangen wir zu den wahren Verschiebungen, indem wir den deformierten Bogen derart

Fig. 27.



nach oben drehen, daß die gesamte lotrechte Verschiebung von Punkt 10 gleich Null wird; dieser Drehung des deformierten Bogens entspricht die der Stammkurve ähnliche Williotkurve $0'1''2''3''\dots$. Die resultierende Bewegung $8''8_1$ entspricht dann der wahren und die wahren Bewegungen, von einem festen Pole 0 (Fig. III) aufgetragen, geben die wahren Verrückungen. Die Elemente $0'1', 1'2''$ u. s. w. in III müssen wieder auf den entsprechenden Elementen der Stammkurve senkrecht stehen.

Es ist im gegebenen Falle leicht die Kurve in III direkt zu konstruieren. Wir denken uns 5 festgehalten und nehmen $5'$ in III als Pol an, nehmen ferner an, daß sich die Elemente 54 und 56 je um die halbe Größe αy_5 um 5 drehen, machen also $5'6_1 = \frac{\alpha y_5}{2} \perp 56$ und $5'4' = \frac{\alpha y_5}{2} \perp 54$, im weiteren ergibt sich dann $6_1 7_1 = \alpha \left(\frac{y_5}{2} + y_6 \right)$; $7_1 8_1 = \alpha \left(\frac{y_5}{2} + y_6 + y_7 \right)$ u. s. w.

In Fig. 27, V ist die Williotkurve für den Fall dargestellt, daß Verkürzungen der Elemente eintreten, und die Größe dieser Verkürzung der Achsialkraft proportional sei, welche eine Horizontalkraft H im Elemente erzeugt. Diese Achsialkräfte in den Elementen $01, 12, 23$ sind in unserem Falle in IV durch die Strecken $a0, a1, a2$ u. s. w. gegeben, wenn $ab = H$ gemacht wird. Die Verkürzungen der Elemente $01, 12, 23, \dots$ in V sind als irgendwelche Teile (in unserem Beispiele $\frac{1}{4}$) der den Elementen entsprechenden Achsialkräfte aufgetragen.

In Fig. VI ist angenommen, daß jedes Element der Stammkurve eine gleichgroße Verkürzung erleide, wie dies bei gleichmäßiger Abkühlung vorkommt. Die Williotkurve wird eine der Stammkurve ähnliche.

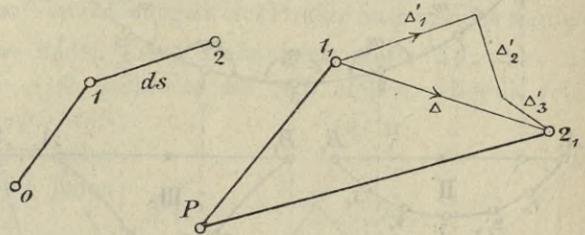
Schließlich wurde für einen Punkt 2 der Stammkurve die Gesamtverschiebung ermittelt, indem $\Delta'_2 = 0'2'$ aus III, $\Delta''_2 = 02_1$ aus V, $\Delta'''_2 = 02_1$ aus VI abgegriffen und geometrisch addiert wurden. Die Summe $\Delta_2 = \Delta'_2 + \Delta''_2 + \Delta'''_2$ in VII gibt die Ge-

samtverschiebung von 2, sie läßt sich wieder in eine wagerechte und eine lotrechte Verschiebung zerlegen.

Die Williotkurven V und VI sind Kurven der Dehnungen. III ist eine Kurve der Drehungen. Die Elemente der Dehnungskurven sind zu den bezüglichen Elementen der Stammkurve, jene der Drehungskurve zu den Normalen der entsprechenden Elemente der Stammkurve parallel.

Formänderungen im Raume. Sind 012 zwei aufeinander folgende Elemente einer Stammkurve, die wir uns als Raumkurve denken wollen, und ist $P1_1$ die vom Pole P aufgetragene Verrückung des Punktes 1, $P2_1$ jene des Punktes 2, so läßt sich die relative Verrückung der Punkte, d. i. $1_1 2_1$ in drei Bewegungen zerlegen:

Fig. 28.



1. In eine Verrückung Δ'_1 in Richtung des Elementes selbst, die eine Verlängerung oder Verkürzung des Elementes bedeutet.

Denkt man sich die Formänderung der Stammkurve so vorgenommen, daß zunächst nur diese Art von Verrückungen sich vollziehen, so erhalten wir eine Williotkurve, deren Elemente den entsprechenden Elementen der Stammkurve parallel sind und die wir wie oben die Williotkurve der Dehnungen nennen.

2. In eine Verrückung Δ'_2 , welche der Drehung des Punktes 2 um 1 in der Ebene der Elemente 01, 12 entspricht, sie wird $\Delta'_2 = \frac{ds \cdot w_2}{r}$, wenn $\frac{w_2}{r}$ die Winkeländerung der Elemente in der Tangentialebene gegeben ist.

Nimmt man wieder an, daß die Stammkurve ausschließlich eine solche Formänderung durchmacht, so erhält man die Williotkurve der Drehungen, ihre Elemente stehen senkrecht auf den entsprechenden Elementen der Stammkurve und sind parallel zu den Tangentialebenen der Stammkurve.

3. In eine Verrückung Δ'_3 senkrecht zur Tangentialebene in 1; wir wollen diese Verrückung die Verwindung nennen. Vollziehen sich an einer Kurve nur Verwindungen, so erhält man die Williotkurve der Verwindungen. Ihre Elemente stehen senkrecht auf den entsprechenden Elementen der Stammkurve und sind senkrecht zu den Tangentialebenen der Stammkurve.

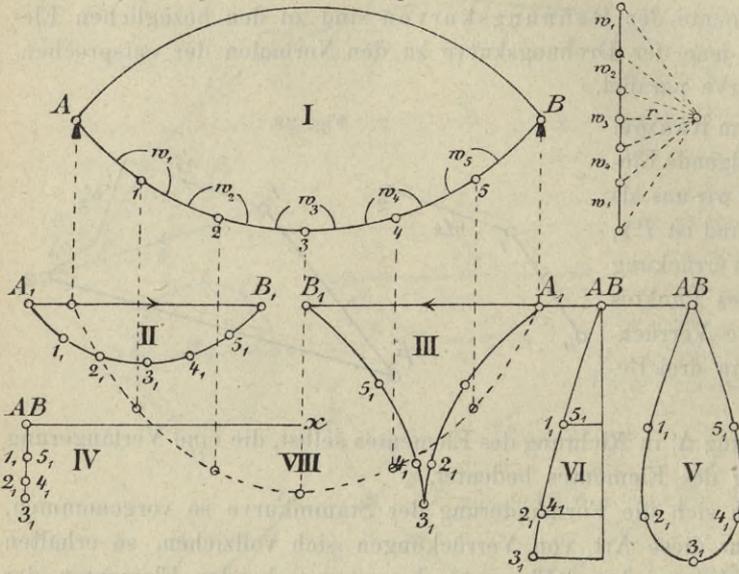
Ist die Stammkurve eine ebene, so fallen sämtliche Elemente derselben in eine Ebene, die der Inbegriff aller Tangentialebenen ist. Die Williotkurve der Verwindungen wird in diesem Falle eine zur Ebene der Stammkurve senkrechte Gerade.

Ist AB die Kante eines Tragkörpers (Gurte eines Fachwerkträgers), der von wagerechten und lotrechten Kräften in Anspruch genommen wird (Fig. 29), so entsprechen dem Zuge $A12345B$ als Williotkurven

- a) für die Dehnungen eine Kurve II, deren Elemente \perp zu jenen der Stammkurve liegen und in die Zeichenebene fallen,
- b) für die Drehungen eine Kurve III in der Zeichenebene, deren Elemente \perp zur Stammkurve liegen,

c) für die Verwindungen eine Gerade IV senkrecht zur Zeichenebene mit den Punkten $A_1, 2, 3, 4, 5, B$.

Fig. 29.



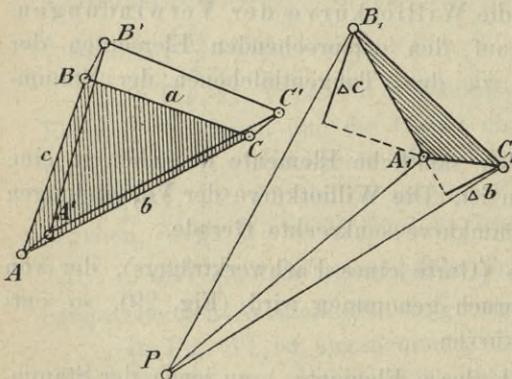
Verbindet man II mit III, so erhält man die Williotkurve V der wahren Verschiebungen in der Zeichenebene; verbindet man V mit IV, so erhält man eine Raumkurve, deren Projektion in der Zeichenebene durch V gegeben ist und deren Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Zeichenebene durch VI gegeben ist. Die Williotkurve der gesamten Verschiebungen liegt auf einer Cylinderfläche, deren Er-

zeugende senkrecht zur Ebene der Stammkurve sind und deren Schnitt mit der Zeichenebene durch die Kurve V gegeben ist.

§ 15. Verschiebungspläne des ebenen Fachwerks. Allgemeine Bezieh-

ungen. Bewegen sich die Punkte ABC eines Dreiecks, indem dasselbe gleichzeitig eine Formänderung durchmacht und trägt man ein Vielfaches der sehr klein gedachten Wege der Punkte von einem festen Pole P aus auf, so erhält man ein Dreieck $A_1 B_1 C_1$, welches der Williot'sche Verschiebungsplan des Dreiecks ABC heißt. $B_1 A_1$ stellt die relative Verschiebung der Punkte B und A vor; sie läßt sich in eine Verschiebung Δc zerlegen, welche in die Richtung BA fällt, also eine Verlängerung oder Verkürzung der Strecke c darstellt und in eine Strecke senkrecht dazu, welche einer Drehung des Punktes A um B entspricht. Ganz dasselbe gilt von der Strecke $C_1 A_1$. Aus der Figur ist aber nun zugleich die Lösung der wichtigen Aufgabe ersichtlich:

Fig. 30.



Die relative Verschiebung $B_1 C_1$ zweier Punkte eines Dreiecks ABC ist bekannt, es soll die Lage des dritten Punktes A_1 im Verschiebungsplan gefunden werden, wenn Δb und Δc die Längenänderungen der Seiten b und c sind.

Wir tragen zunächst von C_1 aus die Strecke Δb parallel zu b auf und zwar im Sinne von C gegen A , wenn Δb eine Ver-

längerung, also positiv, im entgegengesetzten Sinne, wenn Δb eine Verkürzung, also negativ ist.

Am Ende der Strecke Δb errichten wir eine Senkrechte. Ebenso tragen wir von B_1 aus Δc parallel zu c und im Sinne BA auf, wenn Δc eine Verlängerung ist, im entgegengesetzten Sinne, wenn es eine Verkürzung der Strecke bedeutet. Errichtet man im Endpunkte von Δc eine Senkrechte zu Δc , so schneiden sich die beiden Senkrechten im Punkte A_1 . Setzt sich ein Stabgebilde aus mehreren Dreiecken zusammen, so wird das Verfahren fortgesetzt und immer wieder ein Punkt des Verschiebungsplanes aus den gegebenen Verschiebungen der beiden anderen entwickelt.

Hierbei muß von einer bestimmten Verschiebung zweier Punkte ausgegangen werden.

Bleibt das System starr, so finden keine Dehnungen statt; $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ müssen gleich Null werden, also muß $A_1 B_1$ senkrecht auf AB stehen. Hieraus folgt leicht, daß der Verschiebungsplan Σ_1 jeder starren Figur Σ geometrisch ähnlich der Figur selbst ist bezw. die Seiten von Σ_1 senkrecht auf jenen von Σ stehen müssen, s. Fig. 31.

Für jede mögliche kleine Bewegung eines starren Systems entspricht dem Punkte P_1 in Σ_1 ein bestimmter Punkt \mathfrak{P} in Σ , welcher der Pol oder das Momentancentrum heißt. Jede mögliche ebene Bewegung eines starren Systems läßt sich mithin in jedem Augenblicke auf die Drehung um einen bestimmten Punkt zurückführen.

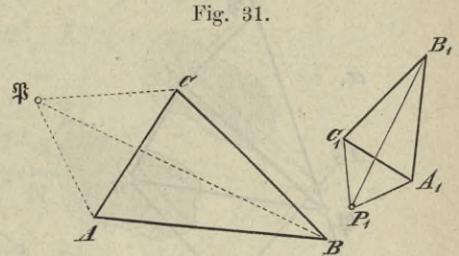


Fig. 31.

Jede Bewegung einer beliebigen Verbindung eines Gebildes von Punkten $ABC\dots$ der Ebene (kinematische Kette), bei welcher das Gebilde seine Form ändert, läßt sich auf zwei Bewegungen zurückführen. Man kann zunächst dem starr gedachten Gebilde eine Drehung erteilen, bei welcher eine Gerade JK des Gebildes den für sie vorgeschriebenen Weg so zurücklegt, daß J in die neue feste Lage und K in die Richtung der neuen Lage von JK kommt. Man kann dann J feststellen und die vorgeschriebene Formänderung der Kette vornehmen oder man kann auch den umgekehrten Weg einschlagen.

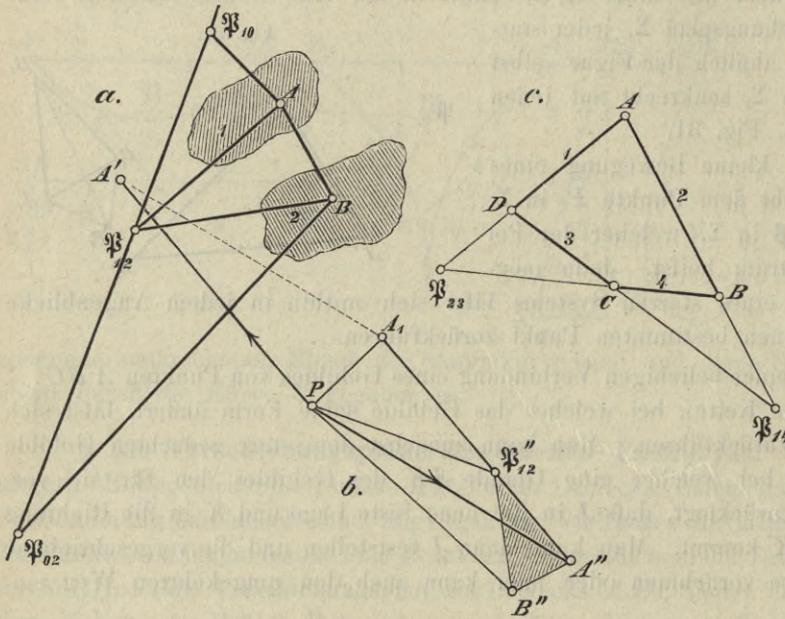
Diese Methode führt zu einer graphischen Ermittlung der Formänderung eines elastischen Fachwerks. Sind S_1, S_2, \dots u. s. w. die für eine bestimmte Belastung ermittelten Spannungen der Fachwerkstäbe von den Längen s_1, s_2, s_3 u. s. w., F_1, F_2, F_3 die Stabquerschnitte, E_n die Elastizitätsmoduln, so geben $\Delta s_1 = \frac{S_1}{E_1 F_1} s_1, \Delta s_2 = \frac{S_2}{E_2 F_2} s_2$ u. s. w. die Längenänderungen.

Es seien zwei starre Gebilde 1 2 (Fig. 32a) gegeben, welche sich in Bezug auf ein drittes 0, die Zeichenebene, welche wir uns in Ruhe denken wollen, einen Augenblick frei bewegen. Hierbei wird sich relativ 1 gegen 2 bewegen. Man kann die Gesamtbewegung vollziehen, indem man zuerst 2 ruhen läßt und 1 die entsprechende relative Bewegung erteilt: hierbei bleibt ein Punkt $\mathfrak{P}_{1,2}$, der Pol der relativen Bewegung, in Ruhe und der Erfolg ist derselbe, als ob 1 und 2 in $\mathfrak{P}_{1,2}$ durch ein Gelenk verbunden wären. Hierbei werde die Verschiebung von A durch PA' im Verschiebungsplane Fig. 32b gegeben. Nun denken wir uns 1 und 2 starr verbunden, was durch Festlegung des Dreiecks $AP_{1,2}B$ erfolgen kann und erteilen diesem Gebilde die zweite Bewegung, welche durch Dreieck $A''B''\mathfrak{P}'_{1,2} \sim$ Dreieck $AB\mathfrak{P}_{1,2}$ gegeben ist. Die Zusammensetzung beider Bewegungen giebt die den Punkten $A, \mathfrak{P}_{1,2}$ und B entsprechenden Verschiebungen $PA_1, P\mathfrak{P}'_{1,2}$ und PB' . Der Pol $\mathfrak{P}_{1,0}$ der gesamten Bewegung des Systems 1 ist in Fig. 32a durch die Geraden $A\mathfrak{P}_{1,0}$ senkrecht zu A_1P und $\mathfrak{P}_{1,2}\mathfrak{P}_{1,0}$.

senkrecht zu $P\mathfrak{P}'_{1,2}$, der Pol der gesamten Bewegung von 2 durch $\mathfrak{P}_{1,2}$ $\mathfrak{P}_{0,2}$ senkrecht zu $P\mathfrak{P}'_{1,2}$ und $B\mathfrak{P}_{0,2}$ senkrecht zu PB'' gegeben. Infolge der Konstruktion müssen $\mathfrak{P}_{1,2}$, $\mathfrak{P}_{0,2}$ und $\mathfrak{P}_{1,0}$ auf einer Geraden liegen.

Bewegen sich zwei Gebilde 1 und 2 relativ und gleichzeitig in einer festen Ebene 0 (bezw. relativ zu einem dritten ruhenden Gebilde), so liegen der Pol $\mathfrak{P}_{1,2}$ der relativen Bewegung von 1 und 2, ferner die Pole $\mathfrak{P}_{0,1}$ und $\mathfrak{P}_{0,2}$ der absoluten Bewegung der Systeme in Vergleich zu 0 auf einer Geraden.

Fig. 32.



Sind (Fig. 32c) vier Stäbe 1, 2, 3, 4 gelenkförmig verbunden (Gelenkvier-eck), so sind die Pole der relativen Bewegung zweier gegen-überliegenden Seiten die Durchschnittspunkte der beiden anderen; denn denkt man sich z. B. AB in Ruhe, so müssen die Punkte C und D Bewegungen senkrecht zu 4 und 1 beschreiben, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt in $\mathfrak{P}_{2,3}$ liegt.

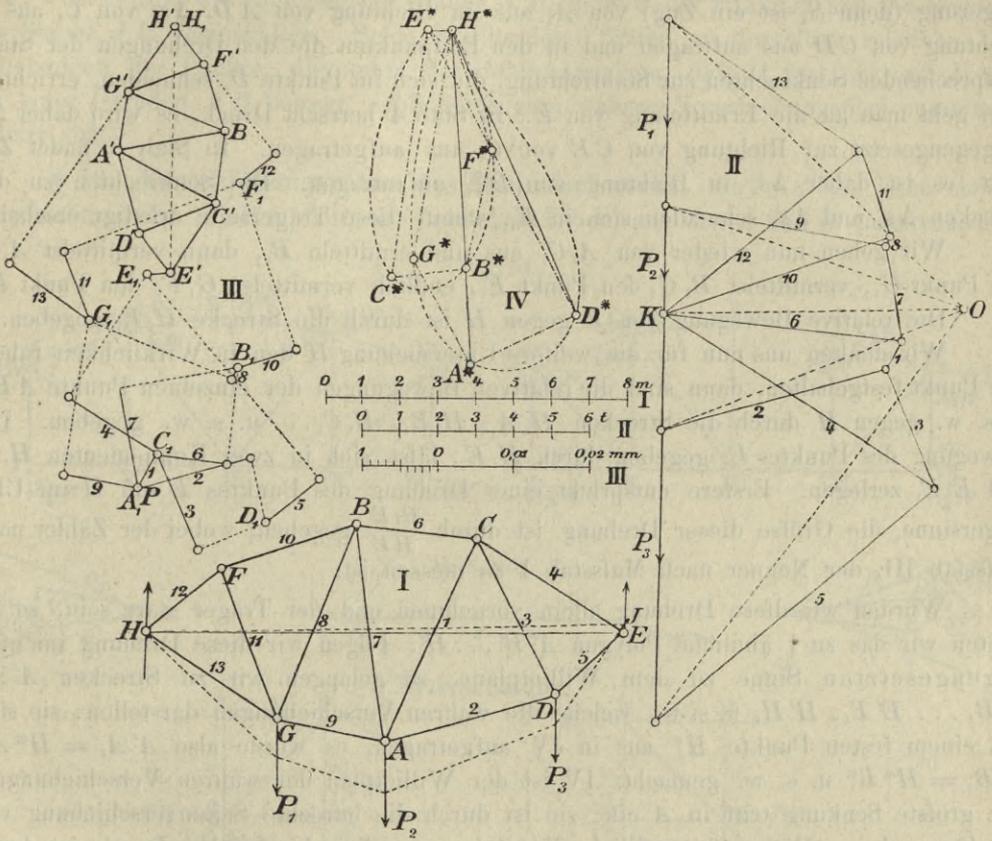
Jedem ebenen Fachwerke ABC , dessen Stäbe s ihre Längen um Δs ändern, entspricht ein Verschiebungsplan, dessen Punkte A_1, B_1, C_1 die relativen Verschiebungen des Fachwerks angeben; für das räumliche Fachwerk tritt an Stelle des ebenen Verschiebungspolygons ein Verschiebungspolyeder.

In nachstehender Fig. 33 ist als Beispiel die Ermittlung der Formänderung eines Trägers I durchgeführt, der in H fest, in E längs einer Geraden HE beweglich gelagert ist und auf den die Kräfte P_1, P_2, P_3 wirken.

In Fig. II wurden zunächst die Kräfte $P_1 = 5 \text{ t}$, $P_2 = 6 \text{ t}$, $P_3 = 7,6 \text{ t}$ längs einer Geraden abgetragen; es wurde ein beliebiger Pol O angenommen und mit Hilfe des Kräftepolygons in II das Seilpolygon in I ermittelt; die Schlufslinie HJ desselben führt im Kräftepolygon durch $OK \parallel JH$ zu Punkt K , der die Kräftevertikale nach den Auflagerwiderständen in H und E unterteilt.

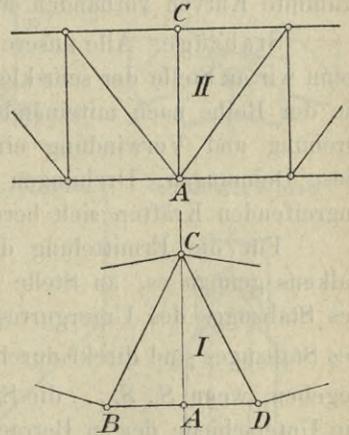
Nun ist es leicht, den Cremonaplan zu konstruieren, der zur Kenntnis der Spannungen im Systeme führt. Mit Zuhilfenahme dieser Spannungen und der als bekannt vorausgesetzten Querschnittsflächen F sind die Längenänderungen Δs der Stäbe ermittelt worden, es ist z. B., wenn $F = 42 \text{ cm}^2$, $\Delta s_1 = \frac{0,8 \text{ t} \cdot 1000 \cdot 5,8 \text{ m} \cdot 1000}{42 \cdot 2000000} = 0,055 \text{ mm}$. Nun wird ein Maßstab für die Längenänderung gewählt; es ist dies unter III geschehen. Mit Hilfe desselben ist es leicht, den Williotplan für das Fachwerk zu ermitteln.

Fig. 33.



Hinsichtlich der Annahme des Poles bzw. der Wahl jenes Punktes und jener Richtung, die für die erste Konstruktion des Williotplanes als fest zu betrachten sind, ist zu bemerken, daß dieselbe zunächst vollständig freisteht und unabhängig von jenem Punkte ist, der in Wirklichkeit festliegt. Bei Trägern mit frei aufliegenden Enden wird es sich stets empfehlen, zunächst jene Stabrichtung als fest anzunehmen, welche sich bei der zu untersuchenden Formänderung voraussichtlich gar nicht oder nur sehr wenig ändern wird. Bei Trägern mit symmetrischem Bau und symmetrischer Belastung wird man den mittelsten Punkt und eine durch denselben gehende lotrechte oder wagerechte Richtung als feststehend annehmen, bei Fig. 34, I den Punkt A und die Richtung BD , bei Fig. II die Richtung AC und den Punkt A u. s. w. und hieraus einen symmetrischen Williotplan erhalten.

Fig. 34.



Bei unsymmetrischer Belastung ist eine zweckmäßige Wahl schwieriger, doch an sich gleichgiltig.

Wir wollen in unserem zum letzten Falle gehörigen Beispiele für die Konstruktion des ersten Williotplanes III in Fig. 33 zunächst den Punkt A und die Richtung 1 des Stabes AC festgehalten denken. Wir wählen die Lage des Poles P zusammenfallend mit A ,

in IV beliebig; da in 1 Zug herrscht, tragen wir Δs_1 von A_1 aus in Richtung AC auf und gelangen zu C_1 . Nun schreiten wir zur Ermittlung von D_1 , indem wir Δs_2 als Verlängerung (denn S_2 ist ein Zug) von A_1 aus in Richtung von AD , Δs_3 von C_1 aus in Richtung von CD aus auftragen und in den Endpunkten die den Drehungen der Stäbe entsprechenden Senkrechten zur Stabrichtung, die sich im Punkte D_1 schneiden, errichten. Nun geht man an die Ermittlung von E . In Stab 4 herrscht Druck, es wird daher Δs_4 entgegengesetzt zur Richtung von CE von C_1 aus aufgetragen. In Stab 5 findet Zug statt, es ist daher Δs_5 in Richtung von DE aufzutragen. Die Senkrechten zu den Strecken Δs_4 und Δs_5 schneiden sich in E_1 , womit diese Trägerseite erledigt erscheint.

Wir gehen nun wieder von $A_1 C_1$ aus und ermitteln B_1 , dann vermittelt $A_1 B_1$ den Punkt G_1 , vermittelt $B_1 G_1$ den Punkt F_1 , endlich vermittelt $G_1 F_1$ den Punkt H_1 .

Die relative Bewegung von E gegen H ist durch die Strecke $H_1 E_1$ gegeben.

Wir denken uns nun für die weitere Untersuchung H den in Wirklichkeit ruhenden Punkt festgehalten, dann sind die relativen Bewegungen der einzelnen Punkte $A B C$ u. s. w. gegen H durch die Strecken $H_1 A_1$, $H_1 B_1$, $H_1 C_1 \dots$ u. s. w. gegeben. Die Bewegung des Punktes E , gegeben durch $H_1 E_1$, läßt sich in zwei Komponenten $H_1 E'$ und $E' E_1$ zerlegen. Erstere entspricht einer Drehung des Punktes E um H im Uhrzeigersinne, die Größe dieser Drehung ist durch $\frac{H_1 E'}{H E}$ gegeben, wobei der Zähler nach Maßstab III, der Nenner nach Maßstab I zu messen ist.

Würden wir diese Drehung allein vornehmen und der Träger starr sein, so erhielten wir das zu I ähnliche Polygon $A' B' \dots H'$. Fügen wir diese Drehung im entgegengesetzten Sinne zu dem Williotplane, so gelangen wir zu Strecken $A' A_1$, $B' B_1 \dots E' E_1$, $H' H_1$ u. s. w., welche die wahren Verschiebungen darstellen; sie sind von einem festen Punkte H^* aus in IV aufgetragen, es wurde also $A' A_1 = H^* A^*$, $B' B_1 = H^* B^*$ u. s. w. gemacht. IV ist der Williotplan der wahren Verschiebungen. Die größte Senkung tritt in A ein; sie ist durch die lotrechte Seitenverschiebung von $H^* A^*$ gegeben. Die größte seitliche Verrückung nach rechts erfährt D ; sie ist durch die wagerechte Seitenverschiebung von $H^* D^*$ gegeben. C verrückt sich am meisten nach links. Die in IV gestrichelt gezeichneten Kurven stellen dar, wie sich etwa die Williotkurven gestalten werden, wenn an Stelle der Polygonzüge der Gurte stetig gekrümmte Kurven vorhanden wären.

Stabzüge. Alle unsere bisherigen Untersuchungen gelten naturgemäß auch noch, wenn wir an Stelle der sehr kleinen Elemente einer Kurve endliche Strecken treten lassen, die der Reihe nach miteinander gelenkig verbunden sind und ihrer relativen Dehnung, Drehung und Verwindung einen bestimmten Widerstand entgegensetzen bzw. wenn diese Dehnungen, Drehungen und Verwindungen der Elemente des Stabzuges aus den angreifenden Kräften sich berechnen lassen und damit als solche gegeben erscheinen.

Für die Ermittlung der Durchbiegungen eines einfachen ebenen Fachwerksbalkens genügt es, an Stelle der Formänderung aller Stäbe lediglich die Williotzüge des Stabzuges des Untergurtes zu zeichnen. Die Dehnungen der Elemente s_1 , s_2 , s_3 des Stabzuges sind direkt durch die Werte $\Delta s_1 = \frac{S_1 s_1}{E F_1} + \mu t_1 s_1$, $\Delta s_2 = \frac{S_2 s_2}{E F_2} + \mu t_2 s_2$ gegeben, wenn $S_1, S_2 \dots$ die Spannungen in den Randstäben $s_1 s_2 s_3 \dots$ und $t_1 t_2$ u. s. w. die Unterschiede der in Betracht zu ziehenden Stabtemperaturen gegen die Aufstellungstemperatur sind.

Die Winkeländerungen können nach den im nächsten Paragraphen gegebenen Regeln leicht ermittelt werden.

Auf T. V sind ganz nach dem Vorliegenden die Spannungen und Verschiebungen eines Fachwerkträgers unter Zugrundelegung eines Einzellastsystems durchgeführt. In F. 4 ist A und die Richtung des Stabes AB , in F. 6 der Punkt H und die Richtung des Stabes JH festgehalten. Beide Williotpläne führen zu denselben relativen Verschiebungen der Punkte, die unter der Schlufsannahme, dafs A fest sei und B sich auf einer Geraden AB bewegt, schliesslich zum wahren Verschiebungsplan zusammengesetzt sind.

§ 16. Verschiebungspläne des Raumfachwerks. So wie wir beim ebenen Verschiebungsplan als Hauptaufgabe betrachtet haben, aus den A und B entsprechenden

Fig. 35.

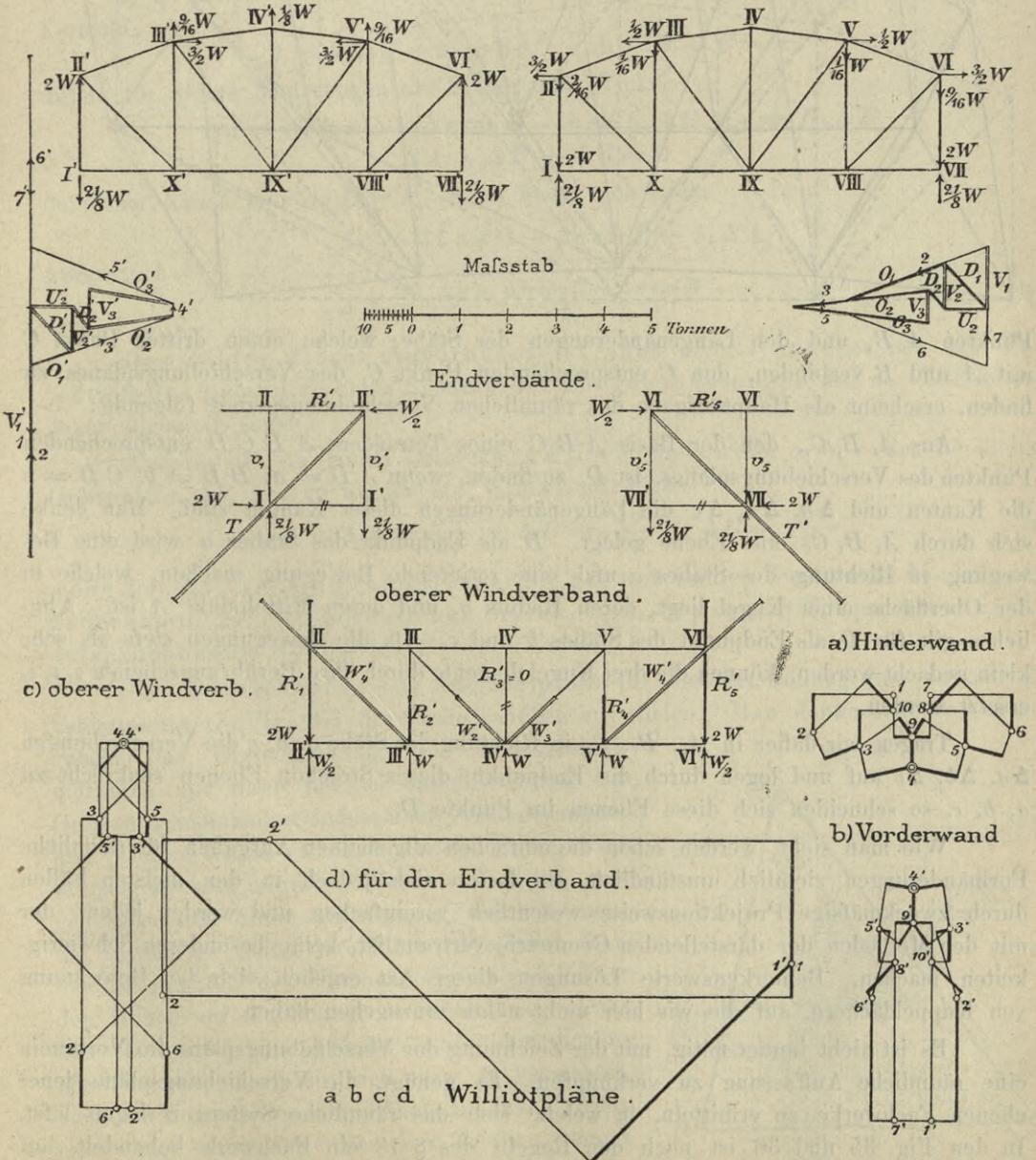
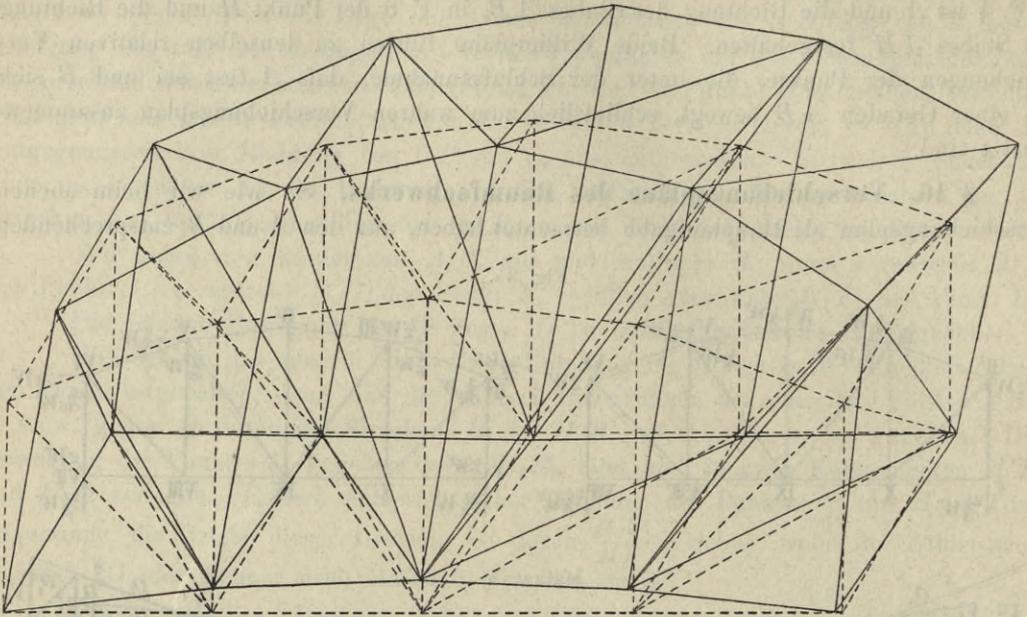


Fig. 36.



Punkten A, B_1 und den Längenänderungen der Stäbe, welche einen dritten Punkt C mit A und B verbinden, den C entsprechenden Punkt C_1 des Verschiebungsplanes zu finden, erscheint als Hauptaufgabe des räumlichen Verschiebungsplanes folgende:

Aus A_1, B_1, C_1 , den der Basis ABC eines Tetraeders $ABCD$ entsprechenden Punkten des Verschiebungsplanes, ist D_1 zu finden, wenn $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ die Kanten und Δa , Δb , Δc die Längenänderungen dieser Kanten sind. Man denke sich durch A_1, B_1, C_1 eine Ebene gelegt. D als Endpunkt des Stabes a wird eine Bewegung in Richtung des Stabes a und eine rotierende Bewegung machen, welche in der Oberfläche einer Kugel liegt, deren Radius a , und deren Mittelpunkt A ist. Ähnliches gilt für D als Endpunkt des Stabes b und c . Da die Bewegungen stets als sehr klein gedacht werden, können die drei Kugелеlemente durch ihre Berührungsebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ersetzt werden.

Tragen wir daher in A_1, B_1, C_1 in Richtung der Stäbe a, b, c die Verschiebungen $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ auf und legen durch die Endpunkte dieser Strecken Ebenen senkrecht zu a, b, c , so schneiden sich diese Ebenen im Punkte D_1 .

Wie man sieht, werden schon die einfachen allgemeinen Aufgaben für räumliche Formänderungen ziemlich umständlich, sie lassen sich jedoch in den meisten Fällen durch zweckmäßige Projektionsweise wesentlich vereinfachen und werden jedem, der mit den Methoden der darstellenden Geometrie vertraut ist, keine besonderen Schwierigkeiten machen. Bemerkenswerte Lösungen dieser Art ergeben sich bei Berechnung von Kuppeldächern, auf die wir hier nicht näher einzugehen haben.

Es ist nicht immer nötig, mit der Zeichnung der Verschiebungspläne im Vorhinein eine räumliche Auffassung zu verknüpfen. Es genügt, die Verschiebungspläne jener ebenen Fachwerke zu ermitteln, in welche sich das räumliche System zerlegen läßt. In den Fig. 35 und 36 ist nach den Regeln des § 13 ein Fachwerk behandelt, auf dessen vorderen Obergurt die Windkräfte W wirken. Für den oberen und unteren

Windverband, sowie für die Querverbände sind auf Grund der ermittelten Spannungen die Verschiebungspläne konstruiert und ist aus diesen die Verschiebung des Gesamtfachwerks in den einzelnen Knotenpunkten in axonometrischer Darstellung erfolgt.

§ 17. Die Biegungslinie eine Seilkurve der Winkeländerungen.

1. Fachwerkträger.

Für viele Aufgaben der Trägerlehre spielt die Ermittlung der Winkeländerungen zwischen den Fachwerksstäben eine wichtige Rolle. Wir wollen zunächst die Winkeländerungen eines Dreiecks betrachten.

a) Graphische Ermittlung. Für das vorliegende Dreieck Fig. 37 gelten die Formeln:

$$a = b \cos C + c \cos B; \quad A + B + C = \pi,$$

mithin für kleine Änderungen der Seiten und Winkel

$$\Delta a = \Delta b \cos C + \Delta c \cos B - b \sin C \cdot \Delta C - c \sin B \cdot \Delta B$$

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C = 0$$

da ferner $b \sin C = c \sin B = h_a$ ist, so findet sich leicht

$$\Delta a = \Delta b \cos C + \Delta c \cos B + h_a \Delta A,$$

woraus:

$$\Delta A = \frac{\Delta a - \Delta b \cos C - \Delta c \cos B}{h_a} \dots \dots \dots 52.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist aber nichts anderes als die Projektion der geometrischen Summe der Längenänderungen auf a . Wir können daher allgemein sagen:

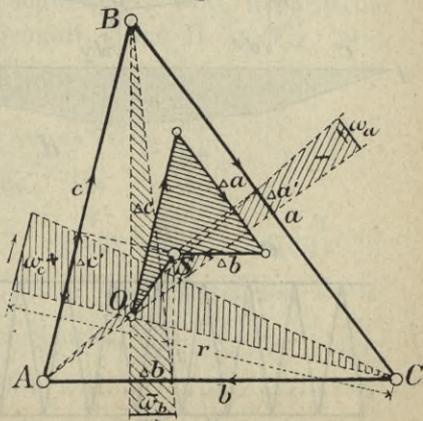
Ändern sich in einem Dreiecke ABC die drei Seiten a, b, c um die kleinen Größen $\Delta a, \Delta b, \Delta c$, so werden die Winkeländerungen

$$\Delta A = \frac{\Delta a'}{h_a}; \quad \Delta B = \frac{\Delta b'}{h_b}; \quad \Delta C = \frac{\Delta c'}{h_c} \dots \dots \dots 53.$$

wenn $\Delta a', \Delta b', \Delta c'$ die Projektionen der geometrischen Summe Δs der Längenänderungen auf die bezüglichen Seiten, h_a, h_b, h_c die den Eckpunkten A, B, C entsprechenden Höhen des Dreiecks sind.

Es ist zweckmäÙig, als Ausgangspunkt für die Ermittlung der Summe den Schnittpunkt O (Fig. 37) der Dreieckshöhen zu wählen. Man denke sich von A ausgehend den Dreiecksumfang im Uhrzeigersinne umfahren und reihe bei der Summenbildung die Größen Δ aneinander, indem man Verlängerungen, also positive Werte von Δ , im selben Sinne, Verkürzungen, also negative Werte von Δ , im entgegengesetzten Sinne aufträgt, in welchem man die zugehörige Seite durchfährt. Projiziert man den Endpunkt S des Summenpolygons parallel zu den Höhen auf die Seiten, so erhält man direkt die Abschnitte $\Delta a', \Delta b', \Delta c'$. Sie sind positiv oder negativ, wenn sie sich, aus O betrachtet, von den Fußpunkten der Höhen aus nach rechts oder links erstrecken. Dasselbe Zeichen kommt der Winkeländerung zu.

Fig. 37.



Fällt S mit O zusammen, sind also sämtliche Längenänderungen den zugehörigen Seiten proportional, so werden die Strecken $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$ und damit die Winkeländerungen Null.

Um die Winkeländerungen direkt entnehmen zu können, bringe man die Werte auf einen gemeinsamen Radius r . Trägt man r von A aus auf die Höhe h_a auf und zieht durch den Endpunkt dieser Strecke eine Parallele zu a , so schneidet die Gerade, welche A mit dem Endpunkte von $\Delta a'$ verbindet, auf der genannten Parallelen eine Strecke ω_a ab, für welche gilt

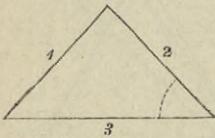
$$\Delta A = \frac{\Delta a'}{h_a} = \frac{\omega_a}{r};$$

in ganz derselben Weise erhält man:

$$\Delta B = \frac{\Delta b'}{h_b} = \frac{\omega_b}{r}; \quad \Delta C = \frac{\Delta c'}{h_c} = \frac{\omega_c}{r}; \quad \dots \dots \dots 53^a.$$

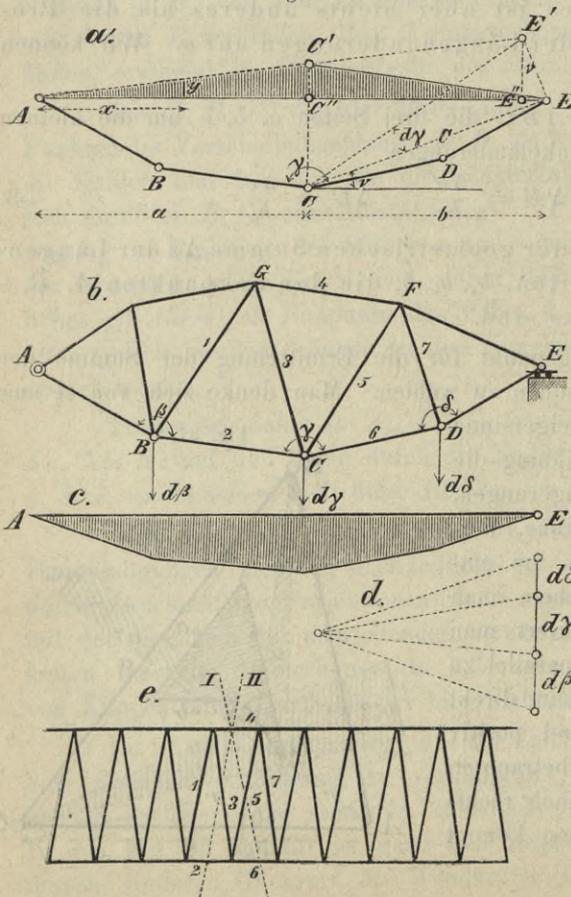
Da die Summe der Dreieckswinkel auch nach der Formänderung 180° bleibt, muß $\omega_a + \omega_b + \omega_c = 0$ sein.

Fig. 38.



Da die Werte der Längenänderungen stets sehr klein sind, arbeite man mit zwei Maßstäben, mit dem Maßstabe I ($1:n$) für die Größen $a, b, c, h_a, h_b, h_c, r$ und mit dem Maßstabe II ($1:m$) für die Größen $\Delta a, \Delta b, \Delta c$, nach welchem dann auch die Größen $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ abzugreifen sind.

Fig. 39.



b) Durch Rechnung. Es erweist sich vielfach zweckmäßig, die Stäbe eines Dreiecks mit l_1, l_2, l_3 , die Winkel derselben mit (12), (23), (13) zu bezeichnen (Fig. 38), sind ferner

$$\lambda_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1}; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2}; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3}$$

die relativen Längenänderungen, so findet sich einfach:

$$\Delta(23) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cotang(12) + (\lambda_1 - \lambda_3) \cotang(13) \dots 54.$$

Die Gleichheit beider Formeln 52 u. 54 läßt sich leicht nachweisen, es ist Formel 54 in Schreibweise der Formel 52.

$$\Delta A = \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \right) \frac{\cos C}{\sin C} + \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c} \right) \frac{\cos B}{\sin B}$$

und da $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = c \frac{\sin A}{\sin C}$,

ferner $b \sin C = c \sin B = h_a$, nach kurzer Rechnung:

$$\Delta A = \frac{\Delta a}{h_a \sin A} (\sin B \cos C + \sin C \cos B) - \frac{\Delta b \cos C}{h_a} - \frac{\Delta c \cos B}{h_a},$$

was mit 1 übereinstimmt, wenn man $\sin A = \sin(180 - B - C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ setzt.

Das Biegungspolygon. In einem Polygone $ABCDE$ (Fig. 39), dessen Endpunkte lotrechte Durchbiegungen nicht durchmachen, ändere sich der Winkel γ um $d\gamma$. Denkt man sich zunächst ABC fest, so gelangt hierbei E nach E' , wobei $EE' = cd\gamma$ wird; die lotrechte Veränderung von E' wird

$$E'E'' = EE' \cdot \cos \nu = c \cdot \cos \nu \cdot d\gamma = b d\gamma.$$

Dreht man nun das ganze System um A wieder zurück, sodafs E' nach E'' kommt, so wird die Verrückung von C

$$C'C'' = \frac{a}{a+b} E'E'' = \frac{ab}{a+b} d\gamma.$$

Die lotrechten Verrückungen der Punkte $ABCD$ werden durch die Ordinaten des schraffierten Dreiecks $AC'E$ gegeben und sind positiv, wenn $d\gamma$ einen Zuwachs, negativ, wenn $d\gamma$ eine Verminderung des Winkels γ bedeutet. Die schraffierte Fläche $AC'E$ stimmt überein mit dem Momentenpolygon einer Einzellast $d\gamma$, welche in C wirkt, wenn der Träger in A und E frei aufrucht; treten mehrere Winkeländerungen $d\beta, d\gamma, d\delta$ auf, so addieren sich die bezüglichen Momente und wir erhalten den wichtigen Satz: Trägt man die Winkeländerungen $d\beta, d\gamma, d\delta$ der Untergurte als lotrechte Kräfte auf und konstruiert einen Seilzug, so geben die Ordinaten desselben von der Schlufslinie aus gemessen die Durchbiegungen. Entsprechendes gilt für den Obergurt.

Die elastische oder Biegungs-Linie des Unter- bzw. Obergurtes ist ein Seilpolygon, für welches die Winkeländerungen der Gurtstäbe die Einzellasten sind.

Für die Rechnung des $d\gamma$ ergäbe sich in unserem Falle, indem man der Reihe nach die Dreiecke BCG, GCF, FCD betrachtet:

$$\lambda_1 = \frac{S_1}{E_1 F_1}, \quad \lambda_2 = \frac{S_2}{E_2 F_2} \dots \dots \dots \lambda_7 = \frac{S_7}{E_7 F_7},$$

$$\Delta \gamma = d(26) = \begin{cases} + \cotang (12) (\lambda_1 - \lambda_2) + \cotang (13) (\lambda_1 - \lambda_3) \\ + \cotang (43) (\lambda_4 - \lambda_3) + \cotang (45) (\lambda_4 - \lambda_5) \\ + \cotang (75) (\lambda_7 - \lambda_5) + \cotang (76) (\lambda_7 - \lambda_6) \end{cases}$$

Sehr häufig genügt es, lediglich die Längenänderungen der Gurte zu berücksichtigen; in diesem Falle wird einfacher

$$\Delta \gamma = \lambda_4 [\cotang (43) + \cotang (45)] - \lambda_2 \cotang (12) - \lambda_6 \cotang (76).$$

Für ein Fachwerk mit parallelen Gurten von der Querschnittsfläche F , der Trägerhöhe h und unendlich dichtem Netzwerke von der Maschenweite dx wird, wenn M das Moment der äußeren Kräfte für die unendlich nahen Schnitte I und II ist (Fig. 39 e),

$$S_2 = \frac{+M}{h}, \quad S_6 = \frac{+M}{h}, \quad S_4 = \frac{-M}{h},$$

$$\cotang 43 = \cotang 45 = \cotang 12 = \cotang 76 = \frac{dx}{2h}$$

und bei Vernachlässigung der Dehnungen der Gitterstäbe

$$d\gamma = -\frac{M}{hEF} \left[\frac{dx}{2h} + \frac{dx}{2h} \right] - \frac{M}{hEF} \frac{dx}{2h} - \frac{M}{hEF} \frac{dx}{2h} = -\frac{M}{hEF} 4 \frac{dx}{2h} = -\frac{2M}{h^2EF} dx.$$

Sind y und x die Koordinaten der elastischen Linie des Untergurtes, so ist $d\gamma = \frac{d^2 y}{dx^2}$ und $\frac{h^2 F}{2} = J$ das Trägheitsmoment des Querschnittes, also $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$.

Die elastische Linie ist ein Seilpolygon, für welches die Momentenfläche die Belastungsfläche ist.

Das Biegungspolygon kann nicht nur zu rascher Bestimmung der Durchbiegungen eines Trägers, dessen Spannungen gegeben sind, sondern auch direkt zur Ermittlung der äußeren Kräfte statisch unbestimmter Systeme benutzt werden. Siehe die später folgenden Beispiele.

Ermittelt man bei einem Fachwerke die Winkeländerung für einen Punkt C in der Form $\Sigma \frac{\omega}{r}$, wenn ω sich auf die einzelnen im Punkte zusammentreffenden Dreiecke bezieht, so wählt man am besten die Strecken $\Sigma \omega$ als Kräfte, die Strecke r als Basis des Kräftepolygons.

In T. V, F. 8 ist die Biegelinie für das unter F. 1 hinsichtlich seiner Belastung dargestellte Fachwerk gezeichnet. Die Winkeländerungen in den Punkten $A D F H L N P$ sind für jedes Dreieck I bis XIV nach dem Verfahren der Fig. 37 auf S. 253 bestimmt. Für Dreieck V ist die Figur näher beschrieben. Die Längenänderungen $\Delta_9, \Delta_{10}, \Delta_{11}$ der Stäbe 9, 10, 11 sind vom Schnittpunkte O der Höhen des Dreiecks V aus algebraisch addiert, wobei die Werte Δ in 50facher Naturgröße aufgetragen wurden. OS entspricht wie in Fig. 37 auch hier der algebraischen Summe, wobei auf das Vorzeichen zu achten ist. Macht man $FF' = 1 \text{ m}$ im Maßstabe (1:100) des Fachwerks und projiziert S auf 10 , wodurch man S' erhält, so schneidet die Gerade $S'F$ die dem Dreiecke V entsprechende Strecke ω_V auf der durch F' gezogenen Parallelen durch F' ab. Eine ähnliche Konstruktion liefert die Werte ω_{IV} und ω_{VI} für Dreieck IV und VI. Dem Punkte F entspricht die Größe $\Sigma \omega_F = \frac{\omega_{IV} + \omega_V + \omega_{VI}}{r}$ als Winkeländerung.

Würden wir r und $\Sigma \omega_F$ in dem Maßstabe auftragen, den wir in T. V, F. 8 zu Grunde gelegt haben, so würden wir die Durchbiegungen, wenn wir die $\Sigma \omega$ als Kräfte, r als Polabstand für unser Kräftepolygon auftragen würden, in 50facher Naturgröße erhalten. Wir verkleinern die Ordinaten des Seilpolygons auf $\frac{1}{5}$, können also für die Biegelinie den Maßstab wie zu F. 4 bis 6 der T. V benutzen, wenn wir den Polabstand des Kräftepolygons auf das Doppelte, also mit $2r$ bemessen und statt der vollen Summe für $\Sigma \omega_F$ (und für alle anderen) $\frac{\Sigma \omega_F}{5}$ auftragen, was in F. 8, T. V geschehen ist.

Um einer Überladung der F. 8 vorzubeugen, haben wir uns begnügt, die Konstruktion für ein Dreieck V zu beschreiben, für alle übrigen wird sich der Leser leicht zurechtfinden.

2. Vollwandträger.

Ist AE die Achse eines gekrümmten oder geraden Stabes, der in A festgehalten ist, in B sich längs einer Geraden bewegt, so kann dieselbe durch eine stetige Folge von Elementen ds ersetzt gedacht werden, die der Winkeländerung einen gewissen Widerstand entgegensetzte. Die Winkeländerung $d\tau$, um welche sich zwei unendlich nahe Querschnittsebenen ändern, ist nach Gleichung 29 (S. 221) durch

$$d\tau = \left[-\frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \right] ds$$

gegeben. Es unterliegt keinem Anstande, ganz dieselben Schlüsse, die wir in Bezug auf das Stabpolygon $ABCDE$ gemacht haben, auch auf das Achsenpolygon anzuwenden und wir erhalten somit den Satz, daß die elastische Linie der Stabachse ein Seilpolygon ist, wenn man die Winkeländerungen als parallele Lasten auffaßt. Da die Stabelemente eine stetig gekrümmte Linie bilden, geht der Inbegriff der Winkeländerungen in eine Belastungsfläche über.

Sieht man zunächst von den Änderungen infolge der Temperaturunterschiede ab, so wird die Winkeländerung für die laufende Einheit $d\tau = -\frac{M}{EJ}$.

Ist E_0 ein konstanter mittlerer Elastizitätsmodul, J_0 ein konstantes mittleres Trägheitsmoment, a eine beliebige konstante Länge, so kann man auch schreiben:

$$d\tau = -\frac{\frac{M}{a^2} \cdot \frac{E_0 J_0}{EJ}}{\frac{E_0 J_0}{a^2}} \dots \dots \dots 55.$$

In diesem Ausdrucke ist der Zähler eine thatsächliche Last für die laufende Einheit, also eine Belastungshöhe, $\frac{E_0 J_0}{a^2}$ eine thatsächliche Kraft. Wir nennen $\frac{M}{a^2} \cdot \frac{E_0 J_0}{EJ}$ die dividierte Momentenfläche oder auch, für $a = 1$ und veränderliches EJ , eine verzerrte Momentenfläche. — Man kann den Satz unmittelbar ableiten.

Trägt man die lotrechte Belastung p_x für die laufende Einheit eines stetig belasteten Trägers I (Fig. 40) für alle Punkte als Ordinate auf, so erhält man eine Belastungsfläche.

Für irgend einen Punkt C von der Abscisse x_1 wird das Moment der äußeren Kräfte

$$M_x = M_0 + Q_0 x_1 - \int_0^{x_1} p_x (x_1 - x) dx,$$

wenn M_0 das Moment und Q_0 die Querkraft bei dem Querschnitt $x = 0$, dem beliebigen Anfangspunkt der Zählung ist. Bezeichnet man die Querkraft im Punkte C mit Q_x , so wird

$$Q_x = Q_0 - \int_0^{x_1} p_x dx = Q_0 - Q_1.$$

Denkt man sich die Querkraft Q_1 in C einmal nach oben und gleichzeitig nach unten wirkend, so wird für das Moment im Abstände $x_1 + dx$ vom Anfangspunkte der Zählung

$$M_x + dM_x = M_0 + Q_0 (x_1 + dx) - \int_0^{x_1} p_x (x_1 - x) dx - Q_1 dx,$$

wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{2} p_x dx \cdot dx$ vernachlässigt, also $\frac{dM_x}{dx} = Q_0 - Q_1 = Q_x$; die nochmalige Differentiation giebt, wenn man bedenkt, daß $dQ_x = -p_x dx$ ist, $\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -p_x$.

Eine Seilkurve, welche der stetigen Belastung entspricht, liefert den Ausdruck $M_x = \eta H$, wenn H der der Konstruktion zu Grunde liegende Horizontalschub, die Poldistanz des Kräftepolygons, η der Abstand der Seilkurve von der Schlußlinie derselben ist. Die zweimalige Differentiation liefert:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{d^2 M_x}{H \cdot dx^2} = -\frac{p_x}{H}, \dots \dots \dots 56.$$

d. i. die Differentialgleichung der Seilkurve als Funktion der Belastung.

Nach Formel 30 wird die Gleichung der elastischen Linie eines Balkens $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ}$, wofür man auch schreiben kann:

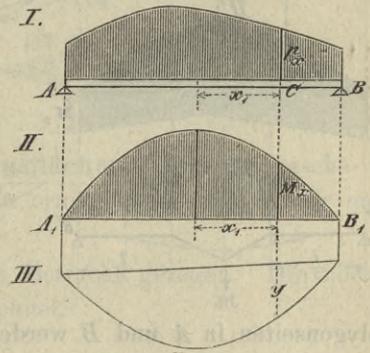
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{M_x}{a^2}\right) \frac{E_0 J_0}{EJ}}{\left(\frac{J_0 E_0}{a^2}\right)}, \dots \dots \dots 57.$$

wenn a eine beliebige Länge und mithin die Größe $\frac{M_x E_0 J_0}{a^2 EJ}$, wie schon oben bemerkt, einer Last für die laufende Einheit, die Größe $\frac{E_0 J_0}{a^2}$ einer Kraftgröße gleichwertig ist.

Man kann daher die elastische Linie III des belasteten Balkens I als Seilkurve eines gedachten Balkens II auffassen, bei welchem die Belastungshöhen durch die Werte $\frac{M_x E_0 J_0}{EJ}$ gegeben sind, und bei welchem zur Konstruktion dieser Seilkurve der Horizontalschub $H = \frac{E_0 J_0}{a^2}$ gemacht wird. Da die Momentenfläche immer stetig ist, muß auch die aus ihr abgeleitete elastische Linie stetig sein; doch ist sie, wenn der Träger durch Einzelkräfte belastet ist, aus Stücken von verschiedenen stetigen Kurven zusammengesetzt.

Sind die Längen der Zeichnung in $\frac{1}{n}$ Naturgröße aufgetragen, und wählt man, auf dem Kräftemaßstab gemessen, $H = \frac{EJ}{n a^2}$, so erhält man die Durchbiegungen in natürlicher Größe.

Fig. 40.

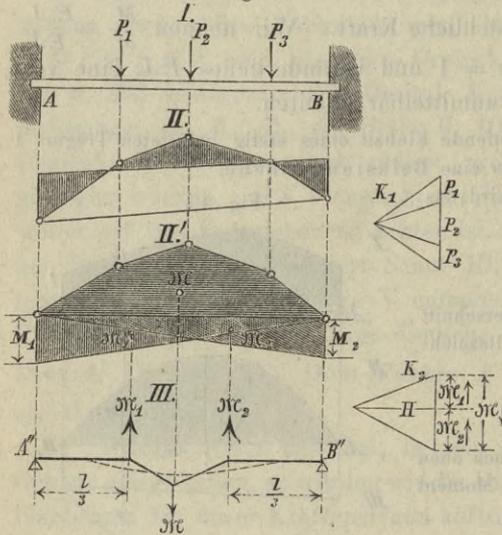


Ist der Querschnitt konstant, so bleibt a^2 konstant und kann gleich dem Quadrate der Längeneinheit gewählt werden; in diesem in dem Folgenden meist vorausgesetzten Falle sind die wirkliche und die dividierte Momentenfläche in der Darstellung gleich.

Den Nullpunkten der Momentenfläche entsprechen Wendepunkte der elastischen Linie, positiven Momentenflächen entsprechen nach abwärts, negativen nach aufwärts gebogene Teile der elastischen Linie.

Für das Zeichnen der Kurve selbst ist noch zu beachten, dafs, wenn Anfangs- und Endpunkte der elastischen Linie in einer Wagerechten liegen, auch die Schlußlinie

Fig. 41.



des Seilpolygons III wagerecht zu legen ist, mithin dafs, wenn der Balken an einem bzw. beiden Enden wagerecht eingespannt ist, auch die Tangenten an III in dem betreffenden Endpunkt wagerecht sein müssen. Die grösste Durchbiegung eines Trägers ist der lotrechte Abstand der Schlußlinie von einer zur letzteren parallelen Tangente an die Seilkurve.

Handelt es sich nicht um die Kenntnis der ganzen elastischen Linie III, sondern nur um die Lage der Tangenten an dieselbe an irgend zwei Auflagerpunkten A und B, so ist es gleichgiltig, in welcher Weise die Momentenfläche II innerhalb AB zum Zwecke der Konstruktion eines Seilpolygons in einzelne Flächenteile zerlegt wird, die

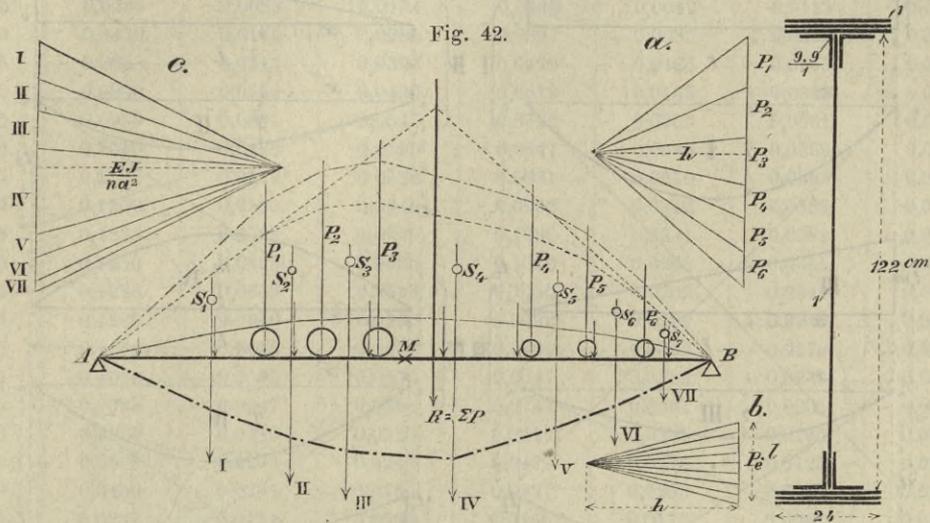
Polygonseiten in A und B werden stets Tangenten an die elastische Linie bleiben. So können wir z. B. beim wagerecht eingespannten Balken Fig. 41 die Momentenfläche II zerlegt denken in eine einfache Momentenfläche \mathfrak{M} , welche nur positive Momente aufweist und direkt die Momente gäbe, wenn AB frei aufläge, und in die Momentenflächen \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 , welche negativ sind und als Endordinaten die Momente M_1 und M_2 besitzen, welche an den Einspannungsstellen entstehen. Die Konstruktion des Polygons III zeigt, dafs — wie aus dem zweiten Kräftepolygon hervorgeht — die Endtangente in A'' und B'' nur dann wagerecht sein können, wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ ist, oder mit anderen Worten, dafs die in II auf beiden Seiten der Schlußlinie liegenden Momentenflächen einander gleich sein müssen.⁹⁾

Beispiel. Durchbiegung einer Blechbrücke bei einer gegebenen Laststellung (Fig. 42). Die Brücke habe eine Spannweite von 16 m. Wir führen einen mittleren Wert $J_m = 1030000 \text{ cm}^4$ für einen Träger bzw. $J = 2060000 \text{ cm}^4$ für die ganze Brücke ein. Wir wählen als Kräftemaßstab 1 mm = 2 t, als Längenmaßstab 5 mm = 1 m, also $n = 200$ und als Poldistanz für die Kräftepolygone a und b den Wert $H = 40 \text{ t}$ zur Zeichnung der Seilpolygone für Eigengewicht und Verkehrslast. Das Eigengewicht beträgt $p_0 = 1,3 \text{ t f. d. lfd. m}$ der Brücke, die Einzellasten haben die Gröfsen $P_1 = P_2 = P_3 = 13 \text{ t}$, $P_4 = P_5 = P_6 = 9 \text{ t}$, der Wert eines mm^2 der gezeichneten Momentenfläche ist also $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 40 = 1,6 \text{ m}^2 \text{ t}$. Wählt man $a^2 = 32 \text{ qm}$, so entspricht $1 \text{ mm}^2 \frac{1,6}{32} = 0,05 \text{ t}$. Ermittelt man die zwischen den Radlotrechten angreifenden Momentenflächenstreifen in mm^2 und multipliziert dieselben mit 0,05 t, so erhält man die nach dem Kräftemaßstabe aufzutragenden Lasten I, II ..., z. B. für IV = $\frac{20}{2} (26 + 20) \cdot 0,05 = 23 \text{ t}$. Um die Durchbiegungen in natürlicher Gröfse zu erhalten, setze man

⁹⁾ In obiger Fig. 41 ist für die Konstruktion des zweiten Kräftepolygons, d. h. der Fig. III, der Pol irrthümlich links von der Kraftlinie gezeichnet; er müßte rechts liegen.

$H = \frac{EJ}{n \cdot a^2}$ und bekommt, da $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$, $J = 2060000 \text{ cm}^4$, $n = 200$, $a^2 = 320000 \text{ cm}^2$ den Wert $H = \frac{2000000 \cdot 2060000}{200 \cdot 320000} = 64400 \text{ kg} = 64,4 \text{ t}$.

Die Seilpolygonseiten sind infolge der Wirkung des Eigengewichts eigentlich flache Kurven, an deren Stelle hinreichend genau Gerade gesetzt werden dürfen.



§ 18. Biegelinien bestimmter Belastungsflächen. Um die rasche Berechnung der Biegelinie aus der Belastungsfläche zu ermöglichen, bringen wir nachstehende Tabelle und Belastungsweisen.¹⁰⁾

Wir haben (Fig. 43) sieben Belastungsarten in Betracht gezogen. Die höchste Ordinate der Belastungsfläche haben wir mit m bezeichnet.

I. Rechteckbelastung:

$$\eta = \frac{mx(l-x)}{2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] m l^2;$$

$$t_1 = l \cdot \frac{d\eta}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{1}{2} \cdot m l^2; \quad t_2 = l \frac{d\eta}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{m l^2}{2}$$

II. Rechts ansteigende Dreiecksbelastung: $\eta = \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] m l^2$

$$t_1 = \frac{1}{3} m l^2; \quad t_2 = \frac{1}{6} m l^2.$$

III. Rechts abfallende Dreiecksbelastung. Werte η symmetrisch zu II:

$$t_1 = \frac{1}{6} m l^2; \quad t_2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

IV. Symmetrische Parabelbelastung:

$$y = 4 \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] m; \quad \eta = \frac{1}{3} \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] m l^2,$$

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

V. Rechts ansteigende Parabelbelastung:

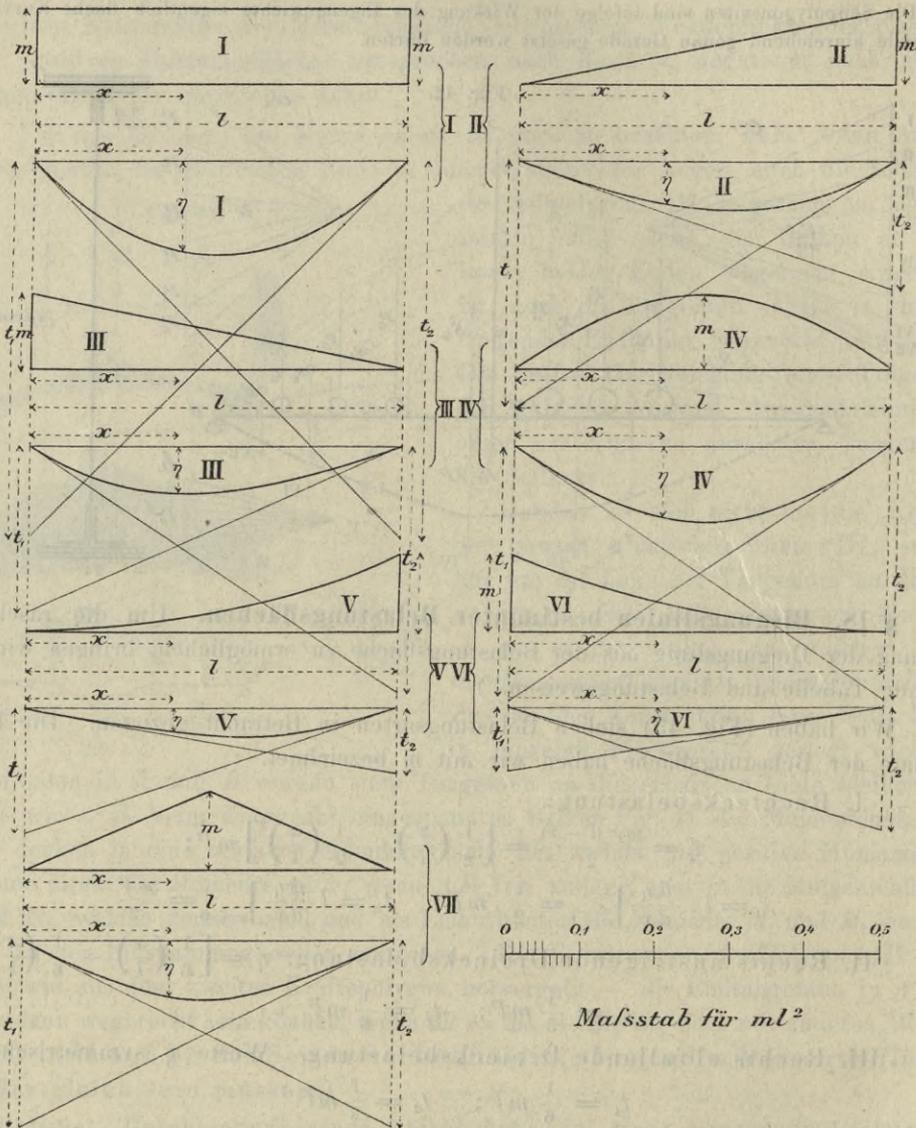
$$y = \left(\frac{x}{l} \right)^3 m; \quad \eta = \frac{1}{12} \left[\left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] m l^2; \quad t_1 = \frac{1}{6} m l^2; \quad t_2 = \frac{1}{12} m l^2$$

VI. Rechts abfallende Parabel. Werte symmetrisch zu V:

$$t_1 = \frac{1}{12} m l^2; \quad t_2 = \frac{1}{6} m l^2.$$

¹⁰⁾ Vergl. Müller-Breslau. Berechnung statisch unbestimmter Ausleger-Brücken. Berlin 1898. Auch: Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 503.

Fig. 43.



VII. Symmetrische Dreiecksbelastung für $\frac{x}{l} = 0$ bis $\frac{x}{l} = 0,5$:

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{4} m l^2 \quad \eta = \left[\frac{1}{4} \frac{x}{l} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] m l^2.$$

Die Zeichnung der Biegungs- (elastischen) Linie kann für eine bestimmte Belastungsfläche zunächst ganz beliebig erfolgen, die Bedingungen, die sie erfüllen muß, können nachträglich an derselben zur Geltung gebracht werden.

Wir erörtern die äußerst nutzbringende Anwendung der Tafeln an zwei Beispielen.

Beispiel 1. Es sei die Biegelinie für die trapezförmige Belastungsfläche $ABCD$ zu finden. Wir nehmen eine beliebige Richtung $A'B''$, Fig. 44 II (S. 262), als Endtangente in A an und tragen nach Belastungsfall II die Tangentenabstände $A'A'' = t_{11} = \frac{1}{3} m l_1^2$ und $B''B' = t_{21} = \frac{1}{6} m l_1^2$ auf; sie

$\frac{x}{l}$	$\eta =$						
	Belastungsfall:						
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
0,05	0,0238	0,0083	0,0154	0,0166	0,0042	0,0113	0,0125
0,10	0,0450	0,0165	0,0285	0,0327	0,0083	0,0203	0,0247
0,15	0,0638	0,0244	0,0393	0,0479	0,0125	0,0273	0,0364
0,20	0,0800	0,0320	0,0480	0,0619	0,0165	0,0325	0,0473
0,25	0,0938	0,0391	0,0547	0,0742	0,0205	0,0361	0,0573
0,30	0,1050	0,0455	0,0595	0,0847	0,0243	0,0383	0,0660
0,35	0,1138	0,0512	0,0626	0,0931	0,0279	0,0393	0,0732
0,40	0,1200	0,0560	0,0640	0,0992	0,0312	0,0392	0,0787
0,45	0,1238	0,0598	0,0639	0,1030	0,0341	0,0382	0,0821
0,50	0,1250	0,0625	0,0625	0,1042	0,0365	0,0365	0,0833
0,55	0,1238	0,0639	0,0598	0,1030	0,0382	0,0341	0,0821
0,60	0,1200	0,0640	0,0560	0,0992	0,0392	0,0312	0,0787
0,65	0,1138	0,0626	0,0512	0,0931	0,0393	0,0279	0,0732
0,70	0,1050	0,0595	0,0455	0,0847	0,0383	0,0243	0,0660
0,75	0,0938	0,0547	0,0391	0,0742	0,0361	0,0205	0,0573
0,80	0,0800	0,0480	0,0320	0,0619	0,0325	0,0165	0,0473
0,85	0,0638	0,0393	0,0244	0,0479	0,0273	0,0125	0,0364
0,90	0,0450	0,0285	0,0165	0,0327	0,0203	0,0083	0,0247
0,95	0,0238	0,0154	0,0083	0,0166	0,0113	0,0042	0,0125
	$m \cdot l^2$	$m \cdot l^2$	$m \cdot l^2$				
$t_1 =$	$\frac{1}{2} m l^2$	$\frac{1}{3} m l^2$	$\frac{1}{6} m l^2$	$\frac{1}{3} m l^2$	$\frac{1}{12} m l^2$	$\frac{1}{6} m l^2$	$\frac{1}{4} m l^2$
$t_2 =$	$\frac{1}{2} m l^2$	$\frac{1}{6} m l^2$	$\frac{1}{3} m l^2$	$\frac{1}{3} m l^2$	$\frac{1}{6} m l^2$	$\frac{1}{12} m l^2$	$\frac{1}{4} m l^2$

müssen sich mit der Lotrechten des Abstandes $\frac{2}{3} l_1$ von A' schneiden. Nun behalten wir $A'' B' C''$ als neue Endtangente in B' bei und tragen nach Belastungsfall I die Abstände $t_{12} = t_{22} = \frac{1}{2} m l_2^2$ von B' bzw. C'' nach abwärts bzw. aufwärts auf und erhalten dadurch die Tangente $B''' C' D''$ in C' , nehmen nun diese Tangente als fest an und tragen nach Belastungsfall III die Abstände t_{13} nach abwärts bzw. t_{23} nach aufwärts auf und erhalten dadurch die letzte Endtangente $C''' D'$.

Wäre AD ein frei aufliegender Träger und die Belastungsfläche eine Momentenfläche, welche zwei Lasten entspricht, die in B und C angreifen, so wäre $A' B' C' D'$ die elastische Linie.

Einzelne Ordinaten können leicht gerechnet werden; so würde z. B. y für $x = 0,5 l_3$ nach der Tabelle (Belastungsfall III) sich ergeben mit $y = 0,0625 m l_3^2$ u. s. w.

Wäre in Fig. 44 II hingegen AB ein durchlaufender Träger, der in ACD feste Punkte, in B ein Gelenk hat, so müssen $A''' C' D'$ auf einer Geraden liegen; bei B' tritt ein Knick der Biegelinie ein, A' ist nach A''' hinab zu schieben, A'' kommt nach A_V . In diesem Falle wäre es möglich gewesen, die Biegelinie unmittelbar für eine wagerechte Schlusslinie zu zeichnen, wenn man von D aus anfängt, was in Fig. 44 III geschehen ist.

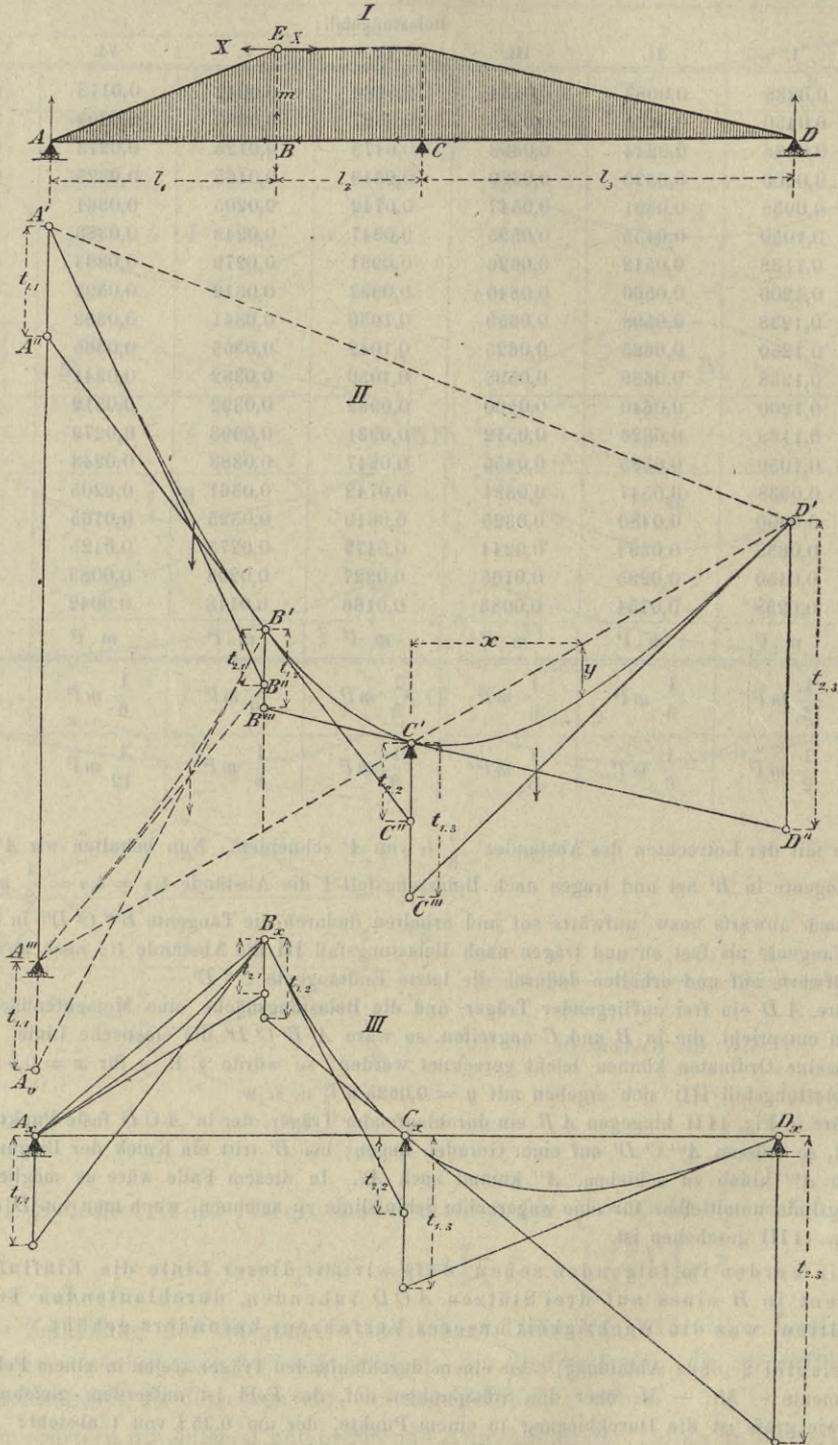
Wir werden im folgenden sehen, daß wir mit dieser Linie die Einflußlinie für ein Moment in B eines auf drei Stützen ACD ruhenden, durchlaufenden Trägers erhalten hätten, was die Wichtigkeit unseres Verfahrens besonders erhöht.

Beispiel 2 (ohne Abbildung). An einem durchlaufenden Träger treten in einem Felde 12 zwei Stützenmomente $-M_1, -M_2$ über den Stützpunkten auf, das Feld ist außerdem gleichmäßig mit q belastet; wie groß ist die Durchbiegung in einem Punkte, der um $0,35 l$ von 1 absteht? In unserem Beispiele fallen die Belastungsfälle III, II, IV zusammen. Die Ordinate wird:

$$y = \left[-0,0512 M_1 - 0,0626 M_2 + 0,0931 \cdot \frac{q l^2}{8} \right] \frac{l^2}{EJ}$$

Die Zahlenwerte sind unmittelbar der Tabelle entnommen.

Fig. 44.



§ 19. Rechnungsmäßige Ermittlung der Durchbiegungen für vollwandige und Fachwerkträger. Ein gerader Stab unveränderlichen Querschnittes, dessen Stabachse die x -Achse ist und dessen in Betracht gezogener Anfang mit dem Koordinaten-

ursprung O zusammen fällt, werde von den Kräften $P_0, P_1, P_2 \dots$ in den Abständen $0, a_1, a_2 \dots$ vom Ursprunge und von einer gleichmäßigen Belastung

$$p_x = p_0 \left(1 + \alpha x + \frac{\beta x^2}{2} + \dots \right)$$

belastet.

Ferner bezeichne E den Elasticitätsmodul, J das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes, y_x die Einsenkungstiefe in einem Punkte C vom Abstände $OC = x$, τ_x die Neigungstangente der elastischen Linie, M_x das Bieugungsmoment, Q_x die Querkraft. Wir wollen ferner alle Werte, die sich auf den Koordinatenursprung beziehen, mit dem Zeiger 0 versehen. Das positive Zeichen wollen wir festlegen für:

- Die Ordinaten der elastischen Linie, wenn sie nach abwärts sich erstrecken,
- die Neigungstangenten, wenn sie die Abscissenachse links von C schneiden,
- das Moment, wenn es in Bezug auf den links von C liegenden Teil wie der Zeiger einer Uhr dreht,
- die Querkraft des betreffenden Querschnittes, wenn sie in dem betrachteten Teil nach aufwärts wirkt,
- die angreifenden Einzelkräfte und die stetig verteilte Last, wenn sie nach abwärts wirken,

dann gilt innerhalb der Stetigkeitsgrenzen der Funktion, also innerhalb zweier Einzel-lasten, die Gleichungsfolge (siehe auch S. 257):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_x}{EJ}; \quad \frac{d M_x}{dx} = Q_x; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d Q}{dx} = - p_x \dots$$

Man pflegt die erste der Gleichungen innerhalb der Stetigkeitsgrenzen zu integrieren und aus den Bedingungen, die die elastische Linie bezw. die äußeren Kräfte an den Stetigkeitsgrenzen erfüllen müssen, die Integrationskonstanten zu ermitteln.

I. Viel einfacher gestaltet sich nach A. Franke¹¹⁾ die Aufgabe in vielen Fällen, wenn man unter Berücksichtigung aller drei Gleichungen den Ausdruck für y_x entwickelt und den Unstetigkeiten an den Angriffsstellen der Einzellasten, woselbst alle übrigen Größen, mit Ausnahme der Querkraft, unverändert bleiben, durch Einstellung je eines Wertes $\frac{x-a}{6EJ}P$ Rechnung trägt. Es wird dann für Punkt C im Abstände x , wenn sich das Summenzeichen nur auf jene Kräfte P_1 bis P_n bezieht, die zwischen O und C liegen:

$$y_x = y_0 + \tau_0 x + \frac{1}{EJ} \left[- M_0 \frac{x^2}{2} + P_0 \frac{x^3}{6} + p_0 \frac{x^4}{24} + p_0 \alpha \frac{x^5}{120} + p_0 \beta \frac{x^6}{720} + \dots \right] + \sum_1^n \frac{(x-a_m)^3}{6EJ} P_m \quad 58.$$

$$\tau_x = \frac{dy}{dx} = \tau_0 + \frac{1}{EJ} \left(- M_0 x + P_0 \frac{x^2}{2} + \frac{p_0 x^3}{6} + p_0 \alpha \frac{x^4}{24} + \dots \right) + \sum_1^n \frac{(x-a_m)^2}{2EJ} P_m \quad 59.$$

$$M_x = - EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M_0 - P_0 x - \frac{p_0 x^2}{2} - \frac{p_0 \alpha x^3}{6} + \dots - \sum_1^n (x - a_m) P_m \quad 60.$$

$$Q_x = - EJ \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = \left(- P_0 - p_0 x - \frac{p_0 \alpha x^2}{2} - \dots \right) - \sum_1^n P_m \quad 61.$$

$$p_x = + EJ \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = p_0 \left(1 + \alpha x + \frac{\beta x^2}{2} + \dots \right) \quad 62.$$

Es ist nicht schwierig, diese Gleichungen auch für Unstetigkeiten der Momente, an Gelenken u. s. w. zu entwickeln, sowie auf veränderlichen Querschnitt zu übertragen,

¹¹⁾ A. Franke. Die elastische Linie des Balkens. Zeitschr. f. Bauw. 1895, S. 439.

welche sprungweise Querschnittsänderungen und Stetigkeitsunterbrechungen bedingen; wir verweisen hinsichtlich dieser Fälle auf die unten angeführte Abhandlung.

Beispiel. Wir wollen unsere Gleichung auf den Fall anwenden, daß es sich um die Durchbiegung in einem Punkte handelt, der um u von der Stütze A eines einfachen Balkens AB absteht, während im Abstände v von der zweiten Stütze B die Einzellast P liegt (vergl. auch § 20, Fig. 46). Für diesen Fall wird:

$$y_0 = 0; \quad M_0 = 0; \quad p_0 = 0; \quad P_0 = -\frac{Pv}{l}; \quad P_1 = P; \quad a_1 = l - v,$$

für $x = l$ wird

$$y_l = \tau_0 l - \frac{Pv l^2}{6 EJ} + \frac{v^3 P}{6 EJ} = 0,$$

woraus

$$\tau_0 = \frac{Pv}{6 EJl} (l^2 - v^2),$$

für $x = u$ wird

$$y_u = \tau_0 u - \frac{Pv u^3}{6 EJl},$$

woraus mit Rücksicht auf τ_0

$$y_u = \frac{uv}{6 EJl} (l^2 - u^2 - v^2) P \dots \dots \dots 63.$$

II. Von besonderem Werte hat sich die Einführung der unmittelbaren Gleichung der elastischen Linie als Ausgangspunkt für die Ermittlung der äußeren Kräfte bei Untersuchungen erwiesen, wenn die Belastung von der Einsenkung abhängig wird. In diesem Falle wird $p_x = -kb \cdot y_x$, wenn b die Breite des Trägers und k eine konstante Kraft f. d. Kubikeinheit

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{p_x}{EJ} = -\frac{kb}{EJ} y_x \dots \dots \dots 64.$$

• III. Wir wollen jedoch auf diesen Fall nicht näher eingehen, indem wir auf die unten angegebenen, gleichzeitig erschienenen Abhandlungen aufmerksam machen.¹²⁾

Sehr einfach und sehr übersichtlich wird die oben gegebene Auffassung der elastischen Linie für die Berechnung der äußeren Kräfte und Durchbiegungen durchlaufender Träger. Wir verweisen diesbezüglich auf die Untersuchungen W. Dietz's in den Fortschritten der Ingenieur-Wissenschaften.¹³⁾

IV. Wir schreiten an die Untersuchung des Einflusses der Querkräfte auf die Durchbiegung, wollen uns jedoch hier eines anderen Verfahrens bedienen. Die Durchbiegung in irgend einem Querschnitte vom Abstände a von der linken Stütze, welche infolge des Auftretens der Querkräfte eintritt, läßt sich sehr einfach aus dem Ausdrucke für die Formänderungsarbeit ableiten. Man erhält bekanntlich die Durchbiegung y für ein gegebenes, im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem ΣP , wenn man den vorhandenen äußeren Kräften eine Kraft Z in Richtung der zu suchenden Durchbiegung zugesellt, ΣP und Z durch entsprechende Auflagergegenkräfte ins Gleichgewicht bringt, die Formänderungsarbeit des gesamten Trägers als Funktion aller äußeren Kräfte $\Sigma P, Z$ und der Auflagergegenkräfte ausdrückt, diese nach Z differenziert und schließlichs im Differentialquotienten $Z = 0$ setzt.

Ist n die Querkraft für $Z = 1$, so wird der auf die Querkraft entfallende Teil der Formänderungsarbeit (Formel 43, S. 224):

$$\mathfrak{A} = \beta \int_0^l \frac{(Q + nZ)^2 dx}{2GF},$$

¹²⁾ A. Franke. Beitrag zur Berechnung der elastischen Durchbiegung und der Beanspruchung der eisernen Querschwellen. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1895, S. 191. — F. Steiner. Berechnung des eisernen Oberbaues auf nachgiebiger Unterlage. Österr. Zeitschr. f. d. öff. Baudienst 1895, S. 189, 216.

¹³⁾ W. Dietz. Bewegliche Brücken. Leipzig 1897. S. 110 u. f.

mithin für $Z = 0$:

$$\frac{dM}{dZ} = \beta \int_0^l \frac{n Q dx}{GF} = y.$$

Für einen auf zwei Stützen A, B aufliegenden Balken wird mit Rücksicht auf einen Punkt C vom Abstände $AC = a$, wenn $AB = l$ ist, innerhalb AC das $n = \frac{l-a}{l}$ und innerhalb CB der Wert $n = -\frac{a}{l}$; es ergibt sich mithin für die gesamte Summe:

$$y = \beta \int_A^C \frac{Q dx}{GF} - \beta \frac{a}{l} \int_A^B \frac{Q dx}{GF}.$$

Nun ist aber bei unveränderlichem Querschnitt für eine Einzellast P die Größe $\int_A^B Q dx = 0$, mithin auch für das ganze System, und da $\frac{dM}{dx} = Q$, findet sich leicht:

$$y = \beta \int_A^C \frac{dM}{GF}, \text{ also } y = \beta \frac{M_c}{GF} \dots \dots \dots 65.$$

Die Ordinaten der Momentenlinie können daher unmittelbar als Biegungslinien für die Schubkräfte angesehen werden, wenn der Maßstab entsprechend gewählt wird.

Land¹⁴⁾ hat die vorliegende einfache Untersuchung auf statisch unbestimmte und auf Träger mit unveränderlichem und veränderlichem Querschnitte ausgedehnt und die Wirkung der Normalspannungen und Schubspannungen addiert. Er fand, daß die genauen Endstützendrücke, Biegemomente und Schubkräfte, verglichen mit den angenäherten, sich sämtlich in algebraisch positivem Sinne ändern, d. h. positive sich vergrößern, negative sich verkleinern. Der Wert β , von der Querschnittsform abhängig, kann auch graphisch gefunden werden, worüber Näheres in der Quelle.

V. Es ist ganz selbstverständlich, daß auch die Auffassung der elastischen Linie als Seilkurve, für welches die Momentenfläche die Belastungsfläche ist, und die hieraus sich ergebenden Schlüsse vielfach mit Nutzen für die rechnerische Ermittlung der Durchbiegungen zu Grunde gelegt werden kann. Wir verweisen diesbezüglich auf § 18, machen von dem Satze im Absatze IX dieses Kapitels eingehenden Gebrauch und wollen hier nur ein paar Bemerkungen anfügen.

Beispiel. Ist z. B. der einfache Balken unveränderlichen Querschnittes gleichmäßig mit p belastet, ist y_m die Durchbiegung in der Trägermitte, denkt man sich in der Trägermitte die Fig. 40 II durchschnitten, so muß das aus der Belastungsfläche abgeleitete Moment gleich dem aus der Seilkurve zu ermittelnden $H \cdot y_m$ sein. Die dividierte Momentenfläche ergibt sich für $a^2 = 1$ mit $\frac{1}{8} p l^2 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{12} p l^3$, mithin der Stützendruck in A_1 und B_1 je $\frac{1}{24} p l^3$, also für die Mitte $\frac{1}{24} p l^3 \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{24} p l^3 \cdot c = H \cdot y_m$, wobei c der Abstand des Schwerpunktes der halben Momentenfläche von der Mitte; setzt man $c = \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}$, $H = EJ$, so wird $y_m = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{EJ} = \frac{1}{76,8} \frac{p l^4}{EJ}$. Ist der Träger ein solcher konstanten Widerstandes, so wird bei gleichbleibender Trägerhöhe das Trägheitsmoment J dem angreifenden Momente proportional. Es ist also $J_x = \alpha M_x$ und für die Trägermitte $J_0 = \alpha M_0$, also $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_0}{E_0 J_0}$; die Ordinaten der dividierten verzerrten Momentenfläche werden für $a = 1$ sämtlich konstant, die verzerrte Momentenfläche wird ein Rechteck von der Höhe $\frac{1}{8} p l^2$; für dieses aber rechnet sich die Durchbiegung in der Mitte aus $\frac{1}{16} p l^3 \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{16} p l^3 \cdot \frac{l}{4} = EJ_0 \cdot y_m$, d. i. $y_m = \frac{1}{64} \frac{p l^4}{E J_0}$. In praktischen Fällen liegt die Durchbiegung zwischen beiden Werten und kann rund mit $\frac{1}{70} \frac{p l^4}{E J_0}$ angenommen werden, wenn J_0 das Trägheitsmoment in der Mitte bezeichnet.

VI. Der Einfluß der Achsialkraft auf die Durchbiegung eines geraden Stabes (Vollwandträgers), mit dem wir es hier zu thun haben, ist Null, wenn selbe im Schwer-

¹⁴⁾ R. Land. Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung statisch bestimmter und die Berechnung statisch unbestimmter vollwandiger Träger. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 611.

punkte der Endquerschnitte angreifen und die Durchbiegungen verschwindend klein bleiben. Ist letzteres nicht der Fall, werden also die Wirkungen der Formänderung mit berücksichtigt, so gelten unsere grundlegenden Voraussetzungen hinsichtlich der Formänderungsarbeit nicht mehr. Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mp \frac{N_0 y}{EJ} - \frac{M_x}{EJ} \dots \dots \dots 66.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn N_0 für den Stabteil links des Schnittes, in Richtung der positiven x -Achse angreift, also im Stabe Druckspannungen erzeugt werden; das untere für den entgegengesetzten Fall.

Je nachdem es sich um das obere oder untere Zeichen handelt, ergibt sich $y = \varphi(x)$ in anderer Form. Wir müssen uns begnügen, hier auf diesen Fall, der bei Berechnung der Knickungsfestigkeit, sowie bei langen Stäben (Schliesen, Zugbänder u. s. w.), deren Eigengewicht große Durchbiegungen erzeugt, vorkommt, hinzuweisen, kommen auf denselben bei Berechnung der Zusatzspannungen zurück und machen den Leser auf untenstehende Arbeit¹⁵⁾, insbesondere aber auf die übersichtliche Zusammenstellung der einzelnen Belastungsfälle und deren Schlufsergebnisse im Taschenbuch „Die Hütte“ aufmerksam.

VII. Eine gleichmäßige Wärmeänderung ist beim geraden Stabe ohne Einfluß auf die elastische Linie des geraden Stabes.

Die ungleichmäßige Erwärmung liefert nach S. 221 die Gleichung

$$\left. \begin{array}{l} \text{genau:} \quad \frac{1}{\rho} = \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \\ \text{angenähert:} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 67.$$

ist der Querschnitt unveränderlich, so bleibt im genauen Falle $\frac{1}{\rho}$ unverändert, die elastische Linie wird ein Kreisbogen vom Radius $\rho = \frac{h}{\varepsilon \cdot \Delta t}$, also z. B. für $\varepsilon = 0,000012$; $\Delta t = 10^\circ$; $\rho = 8333 h$. Für die größte Durchbiegung in der Mitte erhält man bei einem einfachen, frei aufliegenden Träger:

$$y_t = \frac{l^2}{8\rho} = \varepsilon \cdot \Delta t \frac{l^2}{8h}.$$

Für die Näherungsgleichung wird die elastische Linie eine Parabel, für welche man denselben Wert y_t erhält.

Fachwerksträger. Die Berechnung der Durchbiegung δ_D eines beliebigen Fachwerksträgers in einem beliebigen Knotenpunkte D nach einer bestimmten Richtung erfolgt, indem man in dem Knotenpunkte nach der gegebenen Richtung eine Kraft $P = 1$ annimmt und für diese Kraft die Spannungen α ermittelt, gleichgiltig, ob der Träger ein statisch bestimmter oder unbestimmter ist.

Sind Δl die Längenänderungen der einzelnen Fachwerksstäbe, die dieselben durch die thatsächlich auftretende Spannung S , durch Temperaturänderung $\mu t l$, oder absichtliche Verlängerung Δl_n , oder Verkürzung erleiden, ist also:

$$\Delta l = \frac{S l}{EF} + \mu t l + \Delta l_n,$$

so wird:

$$\delta_D = \sum \alpha \Delta l \dots \dots \dots 68.$$

¹⁵⁾ M. Tolle. Die steife Kettenlinie. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1897, S. 855. — Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“. 1899, S. 392—394.

Auf T. V ist ein diesbezügliches Beispiel durchgeführt. Es ist für den Parabelträger (F. 1) die Durchbiegung berechnet, welche das gegebene Einzellastsystem im Punkt D erzeugt. In F. 3 sind die Stabspannungen ermittelt; aus ihnen, den Längen und Querschnittsflächen der Stäbe berechnen sich die Δl , die in F. 9 tafelmäßig dargestellt sind. In F. 7 sind für eine Einzellast in D mittels eines Cremonaplanes die Werte α bestimmt. Die letzte Reihe der Tabelle (F. 9) enthält die Werte $\alpha \cdot \Delta l$. Es ist hierbei sofort ersichtlich, welcher Einfluss auf die Formänderung den Gurten und Gitterstäben zukommt.

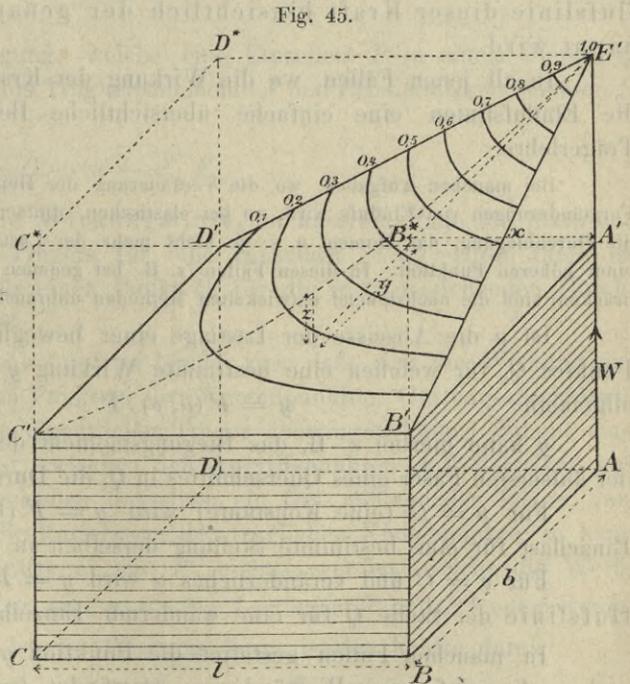
Im vorliegenden Falle ist der Einfluss der Pfosten und Diagonalen mit $+0,06$ und $-0,49$ mm berechnet, ein sehr kleiner gegenüber jenem für die Gurte, da er kaum 5% der Gesamteinsenkung beträgt.

Sehr einfach gestalten sich die Berechnungen bei ungleicher Erwärmung. Gesetzt, es würden in unserem Falle die Obergurte um 10° C. wärmer als die Untergurte werden, so erhalten wir für die Verlängerung jedes Obergurtstabes: $\Delta l = 10 \cdot 0,000012 \cdot l$ und diese Werte mit dem jeweiligen α multipliziert, ergeben eine Aufbiegung in D von $2,98$ mm.

IV. Theorie der Einflusslinien und Einflussflächen.

§ 20. Einflussfläche, Einflusslinie. Es sei W irgend eine Wirkung, welche an irgend einer Stelle A entsteht, wenn an irgend einem Punkte O der Oberfläche eines Tragwerkes eine Kraft P angreift. Drückt man die Gröfse dieser Wirkung W durch eine Strecke OE aus und trägt diese von O aus, im positiven oder negativen Sinne einer ursprünglich beliebigen festen Richtung auf, je nachdem W positiv oder negativ ist, bewegt man endlich P parallel zu sich selbst, sodafs die einzelnen Punkte einer bestimmten Oberfläche des Tragwerkes zu Angriffspunkten von P werden und führt das oben angegebene Verfahren für jeden Punkt der angegriffenen Oberfläche durch, so bildet der Inbegriff aller Punkte E eine Fläche, welche wir die Einflussfläche der Wirkung W von P für die Stelle A nennen.

Wir machen diese Begriffsbestimmung an einem Beispiele klar. Ist $ABCD D' C' B' A'$ ein Tragwerk, auf welches in den Elementen der ebenen Fläche $A' B' C' D'$ eine konstante, lotrechte Kraft von der Gröfse P wirkt, und ist das Tragwerk in den Punkten $ABCD$ unterstützt, so entsteht in A eine Auflagergegenkraft W (eine Wirkung), welche wir nach einer festen Richtung (als welche wir in unserem Beispiel die Richtung von P wählen) von O aus



als Strecke z auftragen und zwar in unserem Beispiele im entgegengesetzten Sinne von P , wenn wir auch gleichzeitig den Sinn von P als maßgebend für den Sinn beim Auftragen von $OE = W$ betrachten.

Legt man $A'D'$ als Abscissenachse, $A'B'$ als Ordinatenachse für die Punkte O fest, so wird bei einer bestimmten später zu erörternden Anordnung des Tragwerks

$$z = - \frac{(l-x)(b-y)}{b.l} P. \quad 69.$$

Die Endpunkte von z liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung; für $x = \frac{b}{2}$; $y = \frac{b}{2}$ wird $z = -\frac{P}{4}$ u. s. w. Die Fläche ist in Fig. 45 durch Schichtenlinien, welche den Werten $\frac{W}{P} = 0,1, 0,2, 0,3, \dots$ entsprechen, in schiefer Projektion dargestellt.

Ist der Tragkörper ein elastischer geschlossener Fachwerksbalken, so ist z durch eine höhere Funktion von xy bestimmt, der Fall selbst statisch unbestimmt; wir kommen auf denselben noch an anderer Stelle zurück.

Von besonderer Wichtigkeit werden die räumlichen Einflußflächen für die Berechnung von Kuppeldächern u. s. w.

Wir wollen uns hier jenen Vereinfachungen zuwenden, welche sich ergeben, wenn das Tragwerk ein ebenes ist.

Einflußlinie ebener Systeme. Bewegt sich eine Last P längs einer Geraden und trägt man eine bestimmte Wirkung, welche sie an einer bestimmten Stelle erzeugt, nach einer beliebigen festen Richtung im Lastangriffspunkte als Ordinate nach einem angenommenen Maßstabe nach Größe und Sinn auf, so geben die Endpunkte dieser Ordinaten eine Linie, welche die Einflußlinie dieser Kraft hinsichtlich der genannten Wirkung und Stelle genannt wird.

In all jenen Fällen, wo die Wirkung der Kraft dieser proportional ist, gestatten die Einflußlinien eine einfache übersichtliche Behandlung gewisser Aufgaben der Trägerlehre.

Bei manchen Aufgaben, wo die Veränderung der Hebelarme der Last schon bei sehr kleinen Formänderungen von Einfluß wird, so bei elastischen, dünnen Bogen, verstärkten Seilen u. s. w. wird die Durchbiegung, das Moment u. s. w. nicht mehr der Last proportional, sondern ändert sich nach einer höheren Funktion. In diesen Fällen (z. B. bei genauen Untersuchungen der Bogen- und Hängebrücken) sind die nachstehend entwickelten Methoden unbrauchbar.

Ist u die Abscisse der Lastlage einer beweglichen Last P , v die Abscisse eines Punktes Q , für welchen eine bestimmte Wirkung y der Kraft in Frage kommt, so ist allgemein:

$$y = F(u, v) \cdot P.$$

y kann hierbei z. B. das Biegemoment der äußeren Kräfte, die Spannung in der äußersten Faser eines Querschnittes in Q , die Durchbiegung im Punkte Q u. s. w. sein.

Für $u = C$ (eine Konstante) wird $y = F(C, v) P$, die Wirkungslinie der Einzellast für eine bestimmte Stellung derselben in P .

Für $v = C$ und veränderliches u wird $y = F(C, u) P$, die Gleichung der Einflußlinie der Stelle Q für eine wandernde Einzellast.

In manchen Fällen gestattet die Funktion y eine Vertauschung der Größen u und v , ohne daß eine Wertänderung stattfindet (symmetrische Funktion). In solchen Fällen wird jede Wirkungslinie zugleich eine Einflußlinie und umgekehrt, was gewisse Untersuchungen wesentlich vereinfacht.

Beispiel 1. Ist AB (Fig. 46) ein einfacher Träger, so wird das Moment M der äußeren Kräfte für einen Querschnitt Q im Abstände v von A , wenn eine Einzelast P im Abstände u von B liegt,

$$M = \frac{v \cdot u}{l} P \text{ bzw. } M = \frac{(l-u)(l-v)}{l} P, \dots \dots \dots 70.$$

je nachdem Q rechts oder links von P liegt.

Die Funktion ist in Bezug auf u und v linear. Die Wirkungslinien bilden mit AB ein Dreieck ACB . Dieses Dreieck ist die Wirkungslinie, in unserem Falle die graphische Darstellung der Momente aller Punkte des Trägers AB für eine Einzelast P in Q , und da die Funktion in Bezug auf u und v symmetrisch ist, gleichzeitig auch die Einflußlinie für den Querschnitt Q für alle Lagen der Einzelast P .

Fig. 46.

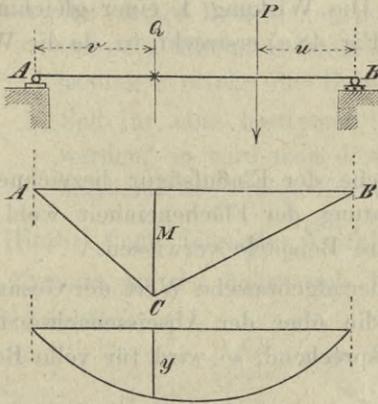
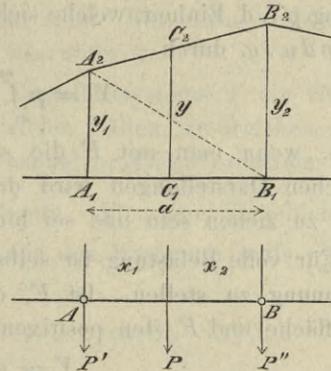


Fig. 47.



Beispiel 2. Die Durchbiegung, welche eine Einzelast P in einem Punkte Q erzeugt, ist für einen Balkenträger vom Trägheitsmomente J und Elastizitätskoeffizienten E nach Formel 63 gegeben durch

$$y = \frac{uv}{6EJl} (l^2 - u^2 - v^2) P.$$

Ist v konstant, so giebt y die Wirkungslinie, in unserem Falle die elastische Linie der Schwerpunktsachse des Trägers für eine Einzelast in Q . Diese Linie ist aber zugleich die Einflußlinie für einen Punkt Q , für die in Q entstehenden Durchbiegungen bei wandernder Einzelast.

Im Brückenbau insbesondere kommt es häufig vor, daß sich die Wirkung der Einzelasten nur in ganz bestimmten Punkten, den Knotenpunkten, Gurtungsanschlüssen u. s. w. auf den zu untersuchenden eigentlichen Träger übertragen kann. Nimmt man an, daß die Übertragung einer Last zwischen den Angriffspunkten AB derselben auf das System so erfolge, als wenn zwischen denselben ein frei aufliegender Träger vorhanden wäre und ist a (Fig. 47) die Entfernung der fraglichen Knotenpunkte, so kann die Wirkung von P durch zwei Kräfte P' und P'' ersetzt werden, welche die Werte $\frac{x_2}{a} P$ und $\frac{x_1}{a} P$ annehmen. Sind y_1 und y_2 die den Lastlagen P' und P'' entsprechenden Ordinaten der Einflußlinie, so ist die Wirkung dieser beiden Kräfte durch

$$P y = y_1 P' + y_2 P'' = \frac{x_2}{a} y_1 P + \frac{x_1}{a} y_2 P = \frac{P}{a} [x_2 y_1 + x_1 y_2] \dots \dots 71.$$

gegeben. Die analytische Entwicklung für die Größe $C_1 C_2$ liefert den Wert $\frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{a}$.

Daraus folgt der Satz, daß unter diesen Verhältnissen die Einflußlinie zwischen zwei Knotenpunkten stets durch eine Gerade dargestellt erscheint.

Trägt man eine bestimmte Wirkung einer längs einer Geraden wandernden, nach Größe und Sinn gleichbleibenden Einzellast $P = 1$ am Lastangriffspunkte als Ordinate auf und kann sich die Last nur an bestimmten Punkten $1\ 2\ 3\ \dots$ auf den Träger übertragen, so ist die Einflußlinie ein gebrochener Zug, dessen Ordinaten den Wirkungen entsprechen, welche die in den Punkten $1\ 2\ 3\ \dots$ stehende Last $P = 1$ erzeugt.

Nunmehr wollen wir einige Regeln für die Ermittlung der Wirkung verschiedener Belastungsweisen unter der Voraussetzung kennen lernen, daß die gezeichneten Ordinaten y der Einflußlinien irgend einer Wirkung sich auf den Wert $P = 1$ beziehen. Die Gesamtwirkung möge mit Y bezeichnet werden.

1. Stetige gleichförmige Belastung. Die Wirkung Y einer gleichmäßigen Belastung p f. d. Einheit, welche sich von C bis D (Fig. 48 a) erstreckt, ist, da die Wirkung $dY = p\ du \cdot y$, durch

$$Y = p \int_{u_1}^{u_2} y\ du = p \cdot F \dots \dots \dots 72.$$

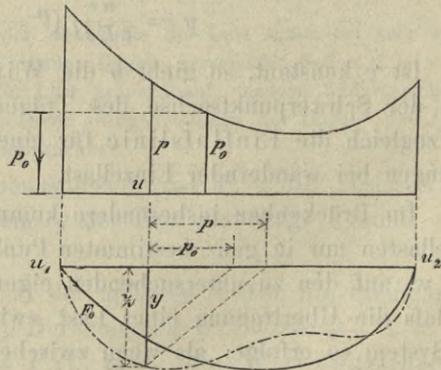
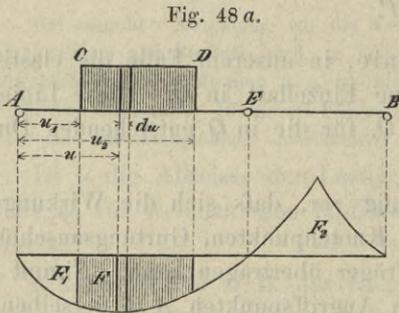
gegeben, wenn man mit F die schraffierte Fläche der Einflußfigur bezeichnet. Bei graphischen Darstellungen wird dabei die Bedeutung der Flächeneinheit wohl in Erwägung zu ziehen sein und sei hierfür auf spätere Beispiele verwiesen.

Für volle Belastung ist selbstverständlich der algebraische Wert der Gesamtfläche in Rechnung zu stellen. Ist F_1 die unter, F_2 die über der Abscissenachse liegende Einflußfläche und F_1 den positiven Werten y entsprechend, so wird für volle Belastung

$$Y = p (F_1 - F_2) \dots \dots \dots 73.$$

Die größte positive Wirkung $+ Y_{\max}$ einer Belastung q pro Einheit entsteht bei Belastung der Strecke AE , und ist $Y_{\max} = q F_1$; der größte negative Wert ist $Y_{\min} = - q F_2$.

Fig. 48 b.



2. Ist die Belastung f. d. Einheit stetig ungleichförmig, also allgemein $p = f(u)$, so ist die Wirkung Y innerhalb CD durch

$$Y = \int_{u_1}^{u_2} p y\ du \dots \dots \dots 74.$$

gegeben. Macht man $z = \frac{p y}{p_0}$, was graphisch nach Fig. 48 b geschehen kann, wo p_0 eine beliebige mittlere Belastungshöhe ist, so wird

$$Y = p_0 \int_{u_1}^{u_2} z \, du \dots \dots \dots 75.$$

und an Stelle der voll ausgezeichneten tritt für die Flächenbestimmung die Fläche F_0 zwischen der Achse und der strichpunktirten Linie.

3. Bestimmung der Wirkung eines Einzellastsystems. Sind y_1, y_2, y_3 die Ordinaten der Einflusslinie für die Last $P = 1$ in jenen Punkten, an denen die Lasten P_1, P_2, P_3 u. s. w. stehen, so ist die Gesamtwirkung

$$Y = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots \dots \dots 76.$$

welcher Ausdruck auch sehr einfach graphisch ermittelt werden kann.

4. Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise. Soll die Wirkung Y ein Größtwerth werden, so dürfen

- a) für stetige Belastungen nur die positive bzw. negative Wirkungen hervorruhenden Einflussstrecken mit Last bedeckt sein. Für diese teilweisen Belastungen erfolgt die Bestimmung selbst wie unter 2.
- b) Soll für eine bestimmte Stellung eines Einzellastsystems Y ein Größtwerth werden, so wird man diese Stellung in vielen Fällen, in welchen die Einflusslinie eine stetige Kurve ist, durch Versuche praktisch ermitteln.

Hierbei kann folgendes Verfahren von Wert sein. Für eine Verschiebung des ganzen Systems um du ändert sich Y um dY und für das Maximum muß $\frac{dY}{du} = 0$ sein, man erhält

$$\frac{dY}{du} = P_1 \frac{dy_1}{du} + P_2 \frac{dy_2}{du} + \dots = 0 \dots \dots \dots 77.$$

Die Werte $\frac{dy_1}{du}, \frac{dy_2}{du}$ sind die Werte der Tangenten an die Einflusslinie, s. Fig. 49.

Für alle Fälle, wo die Einflusslinie ein Dreieck bildet, gilt der Satz, daß ein Größtwerth von Y eintritt, wenn eine Last \bar{P} über dem fraglichen Querschnitt steht, welche in zwei positive Teile \bar{P}' und \bar{P}'' so geteilt werden kann, daß \bar{P}' zu den links vorn liegenden, \bar{P}'' zu den rechts liegenden Lasten zugeschlagen, sich rechts und links gleich große Belastungen f. d. Längeneinheit ergeben. Ob \bar{P} die richtige Last ist, ergibt sich daraus, daß sie einmal vollständig zu den links liegenden, einmal zu den rechts liegenden Lasten zugeschlagen, im ersten Falle ein größeres Übergewicht auf der einen, im zweiten auf der anderen Seite ergibt.

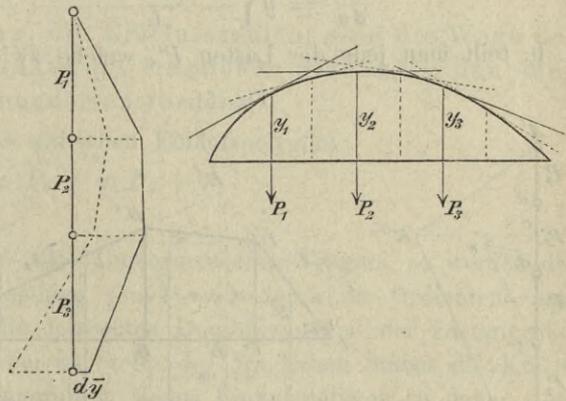
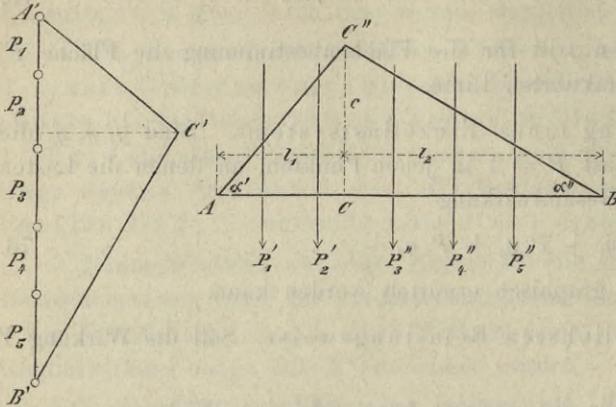


Fig. 49.

Beweis. Sind P'_1, P'_2 u. s. w. die Lasten links, $P''_3, P''_4 \dots$ die Lasten rechts des Querschnittes C , so sind die Tangenten der Neigungswinkel $\tan \alpha'$ und $-\tan \alpha''$, somit

$$\frac{dY}{du} = [(P'_1 + P'_2 \dots) \tan \alpha' - (P''_3 + P''_4 + \dots) \tan \alpha''] = 0,$$

Fig. 50.



daraus, da

$$\tan \alpha' = \frac{c}{l_1}, \quad \tan \alpha'' = \frac{c}{l_2}$$

ist, folgt die Bedingung des Größtwerts $\frac{\Sigma P'}{l_1} = \frac{\Sigma P''}{l_2}$, d. h. die Lasten f. d. Einheit sollen gleich werden. Trägt man die Lasten, welche überhaupt auf den Träger kommen, längs $A'B'$ (Fig. 50) auf und zieht $A'C' \perp AC''$; $B'C' \perp BC''$, so trifft eine Wagerechte durch C' jene Last, welche in C stehen muß; sie ist in unserem Falle P_2 .

Auch für das abgestumpfte Dreieck als Einflußfigur (Fig. 51) ergeben sich leicht einfache Regeln. Die Reihenfolge der Lasten wird durch Zeiger bezeichnet.

Es sei ohne Rücksicht auf den unteren Zeiger der Last

innerhalb AC	die Kraft P ,	die Ordinate y ,	die Tangente an das Vieleck $\tan \alpha$,
„ CD	„ P' ,	„ y' ,	„ „ $\tan \alpha'$,
„ DB	„ P'' ,	„ y'' ,	„ „ $\tan \alpha''$,

so ergibt sich

$$Y = \Sigma y P + \Sigma y' P' + \Sigma y'' P'', \dots \dots \dots 78.$$

und für den Größtwert

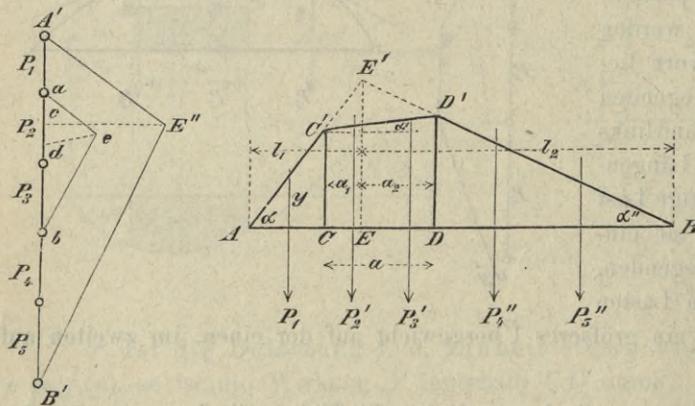
$$\frac{dY}{du} = \tan \alpha \Sigma P + \tan \alpha' \Sigma P' - \tan \alpha'' \Sigma P'' = 0, \dots \dots 79.$$

Unter der Annahme, daß $EE' = \bar{y}$ sei, und mit den in Fig. 51 gegebenen Bezeichnungen erhält man nach kurzer Rechnung

$$\frac{dY}{du} = y \left\{ \frac{\Sigma P + \frac{a_1}{a} \Sigma P'}{l_1} - \frac{\Sigma P'' + \frac{a_2}{a} \Sigma P''}{l_2} \right\} = 0, \dots \dots 80.$$

d. h. teilt man jede der Lasten P' , welche zwischen C und D liegen, nach dem Ver-

Fig. 51.



hältnisse $\frac{a_1}{a}$ und $\frac{a_2}{a}$ links bzw. rechts zu, so muß wieder die Bedingung, daß die Last f. d. Einheit zu beiden Seiten der Ordinate durch E möglichst gleich groß sein soll, erfüllt werden.

Trägt man alle auf den Träger kommenden Lasten längs $A'B'$ auf, macht

$$\begin{aligned} A'E'' &\perp A'E' \\ B'E'' &\perp B'E', \end{aligned}$$

so trifft eine Wagerechte durch E'' in c jene Lastengruppe, welche zwischen D und E stehen muß. Zieht man $ae \parallel A'E''$, $be \parallel B'E''$, $de \parallel C'D'$, so teilt d die innere Lastengruppe nach dem fraglichen Verhältnisse. Das Lastsystem muß nun nach rechts oder links geschoben werden, je nachdem d über oder unterhalb c fällt.

5. Belastungsgleichwerte (Belastungs-Äquivalente). In vielen Fällen handelt es sich darum, ein System von Einzellasten ΣP , welches die größte Wirkung Y_{max} hervorruft, durch eine gleichförmig verteilte Last q für die Längeneinheit zu ersetzen, welche dieselbe Wirkung hervorbringt. q heißt die dem System gleichwerte Last.

Ist in Fig. 48, S. 270 die Strecke AE mit den Einzellasten $P_1 P_2 P_3$ so bedeckt, daß die größte Wirkung Y entsteht, so muß für unseren Fall sein:

$$Y = \Sigma P y = q F_1, \text{ woraus } q = \frac{\Sigma P y}{F_1} \dots \dots \dots 81.$$

Der Belastungsgleichwert q ist bei einem gegebenen System von Einzellasten (Belastungszug) um so kleiner, je größer die dem Größtwerte entsprechende Länge ist; daraus folgt, daß z. B. bei großen Brücken die dem Belastungszug für die Berechnung der Gurte eines Trägers entsprechende gleichwerte Last q kleiner als bei kleinen Spannweiten ist. Der Belastungsgleichwert wird um so größer, je schneller die Einflußlinie von einem bestimmten Punkte aus abfällt.

Winkler hat für einzelne Formen der Einflußfläche näherungsweise Formeln für die Belastungsgleichwerte bestimmt, man sehe „Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin 1884“ und Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 460.

§ 21. Kinematische Bedeutung der Einflußzahlen und Einflußlinien.

Die Spannungen der Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerks sind von den (stets sehr klein gedachten) Längenänderungen, mit anderen Worten von den Querschnittsflächen der Stäbe unabhängig. Denkt man sich daher die Querschnitte aller Stäbe, mit Ausnahme eines einzigen S' , dessen Spannung bestimmt werden soll, sehr groß, die Stäbe unelastisch, so verschwinden in der Gleichung $\Sigma P dp - \Sigma S dl = 0$ alle Größen dl mit Ausnahme der auf Stab l' bezüglichen und man erhält

$$S' \cdot dl' = P_1 \cdot dp_1 + P_2 \cdot dp_2 \dots \dots \dots 82.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Formel 76 und setzt $dl' = 1$, so ergibt sich die Bedeutung der Werte y .

Die Werte y dieser Gleichung, die Einflußzahlen, sind die Wege der Kräfte P_1, P_2 , wenn sich die Endpunkte des fraglichen Stabes um den Weg eins in Richtung des Stabes voneinander entfernen.

Die Bedeutung der Gleichung des statischen Einflußpolygons:

$$S = y_1 P_1 + y_2 P_2 + y_3 P_3 + \dots$$

ist daher gleichzeitig eine kinematische.

Wirken lotrechte Kräfte am Ober- oder Untergurte eines Trägers, so werden die Spannungen S eines Stabes für jede Lastlage von $P = 1$ durch die Ordinaten eines Polygons gegeben, dessen Eckpunkte die lotrechten Durchbiegungen der Lastangriffspunkte für den Belastungsfall sind, wobei an Stelle des fraglichen Stabes die Kräfte 1, 1 an den Endpunkten dieses Stabes angreifen. Jedes Einflußpolygon ist daher stets auch ein Formänderungspolygon.

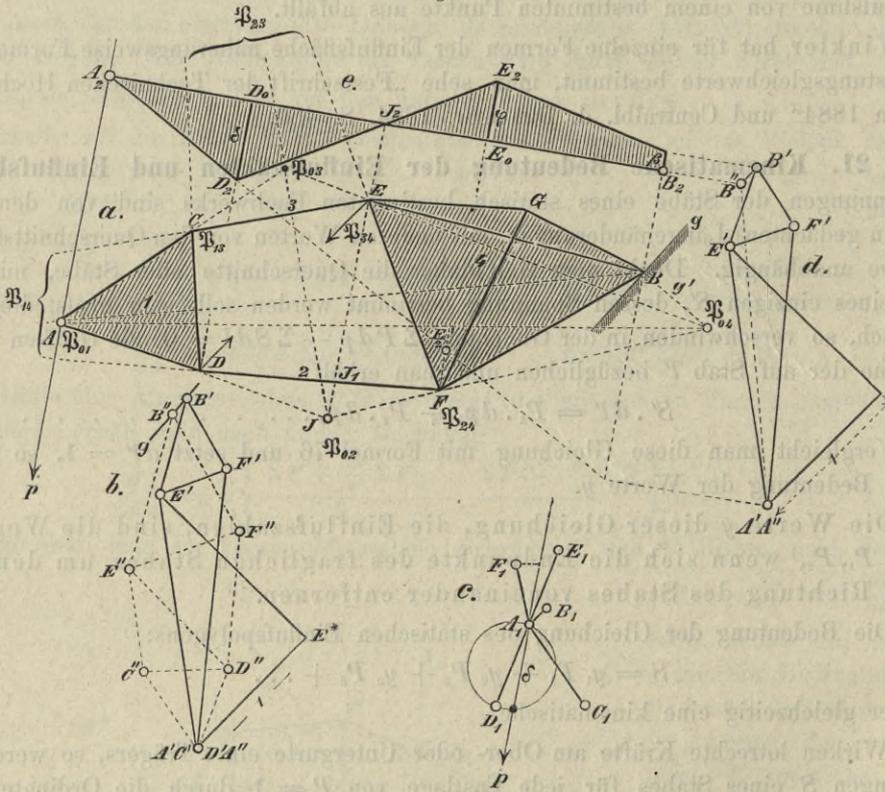
Entfernt man einen Stab DE (Fig. 52) aus dem statisch bestimmten Fachwerke, so bleibt eine zwangläufige, kinematische Kette übrig. Läßt man die Punkte D und E um den Weg 1 sich voneinander bewegen, zwingt man B auf einer Auflagergeraden g zu bleiben und ist A fest, so ist die Bewegung der Kette vollständig bestimmt.

In unserem Falle wird man die schraffierten Teile 1, 4 als Elemente der Kette (Scheiben), deren Punkte sich gegenseitig nicht verschieben, auffassen können. Man

kann die Bewegung so durchführen, daß man zunächst Scheibe 1 als ruhend betrachtet und E um den Weg 1 von D in der Richtung DE sich entfernen läßt. Der Geschwindigkeitsplan $A'E'F'B'$ (Fig. 52b) zeigt die betreffenden Geschwindigkeiten. E' wird aus dem Dreiecke CDE konstruiert, wobei CD fest ist, DE die Dehnungsgeschwindigkeit $D'E^* = 1$ und CE die Dehnungsgeschwindigkeit 0 hat.

Mit Hilfe von E' kann nun aus Dreieck DEF das F' und weiter aus Dreieck EFB die Lage von B' ermittelt werden. Da jedoch die wirkliche Bewegung von B nur längs g erfolgen kann, drehen wir B wieder nach g zurück; dies erfolgt, indem man zu $A'B'$ eine Komponente $B''A'$ hinzufügt, welche einer Drehung um den festen Punkt A des nunmehr starr gedachten Systems entspricht, wobei $B''A'$ senkrecht zu AB sein muß; so bleibt dann für B die resultierende Geschwindigkeit $B''B'$. Das zu $ACDE \dots$ ähnliche Polygon $A''C''D''E'' \dots$ stellt die Geschwindigkeiten für diese

Fig. 52.



Drehung dar. Die Strecken $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ geben die wirklichen Verschiebungsgeschwindigkeiten der Punkte ABC u. s. w. Wir tragen sie von einem Pole A_1 aus als Strahlen nach Richtung und Sinn auf (Fig. 52c) und erhalten dadurch den wahren Geschwindigkeitsplan für die verlangte Bewegung. Nach dem oben ausgesprochenen Satze sind die Projektionen dieser Geschwindigkeiten $A_1A_1 = 0$, A_1B_1 , A_1C_1 u. s. w. auf die Kräfterichtungen der in den Punkten A, B, C angreifenden Kräfte die Einflusswerte γ_1, γ_2 für die Spannung S im Stabe DE . Schlägt man über die Strecken A_1B_1 , A_1C_1 u. s. w. Kreise (ein solcher ist nur für A_1D_1 gezeichnet), so geben die Kreisabschnitte, welche der Kräfterichtung entsprechen, direkt die Werte $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ u. s. w. mit $A'E^*$ als Einheit gemessen.

Für ein Bündel paralleler Kräfte, deren Richtung in Fig. 52 *a* durch den Pfeil angedeutet ist, kann nunmehr auch leicht das Einflußpolygon im Sinne des § 20 direkt gezeichnet werden.

Wir nehmen an, daß sich die Kräfte nur auf den Untergurt übertragen können, und bezeichnen die Verschiebung von *D*, *F* und *B* in der Krafrichtung *p*, das sind die Projektionen der Strecken $A_1 D_1$, $A_1 F_1$ und $A_1 B_1$ auf die Richtung *p*, mit δ , φ und β . Zieht man eine zu *p* senkrechte Schlußlinie $A_2 B_2$ und trägt an derselben die Werte δ , φ und β dem Sinne nach auf, so ist die Einflußlinie gegeben. Hierbei ist zu bemerken, daß Kräfte, welche in Richtung der Verschiebung wirken, positive Spannungen, solche dagegen, welche gegen die Verschiebung wirken, negative Spannungen im Stabe *DE* hervorrufen werden. Es werden daher im Teile $A_2 J_2$ nach abwärts gerichtete Kräfte Zugspannungen, nach aufwärts gerichtete Druckspannungen in *DE* erzeugen.

Bei der eingeleiteten Bewegung dreht sich jeder Stab um einen festen Punkt, den Pol. Es sei *J* der Pol von *DF*, so wird ein Punkt J_1 , welchen die Krafrichtung auf *DF* projiziert, bei der unendlich kleinen Drehung im Sinne der Kraft keinen Weg zurücklegen. Er entspricht dem sogenannten Lastscheidepunkte. Es ist leicht die Belastungsscheide *J* auf kinematischem Wege zu finden. Betrachtet man 1, 2, 3, 4 der zwangläufigen Kette und zunächst 1 und 4 als bewegte Systeme, so ist der Pol \mathfrak{P}_{14} für die relative Bewegung von 1 und 4 durch den in der Figur nicht ersichtlichen Durchschnittpunkt \mathfrak{P}_{14} der Geraden *CE* und *DF* gegeben.

Für die Bewegung dieser beiden Systeme in Bezug auf die ruhende Zeichenebene 0 liegt der Pol \mathfrak{P}_{01} in *A*, der Pol \mathfrak{P}_{04} muß auf einer Senkrechten *g'* zu *g* durch *B* liegen, weil sich *B* längs *g* bewegt. Da die Pole \mathfrak{P}_{04} , \mathfrak{P}_{14} , \mathfrak{P}_{01} auf einer Geraden liegen müssen, ist der Pol \mathfrak{P}_{04} durch den Schnitt der Linie $\mathfrak{P}_{14} \mathfrak{P}_{01}$ mit *g'* bestimmt.

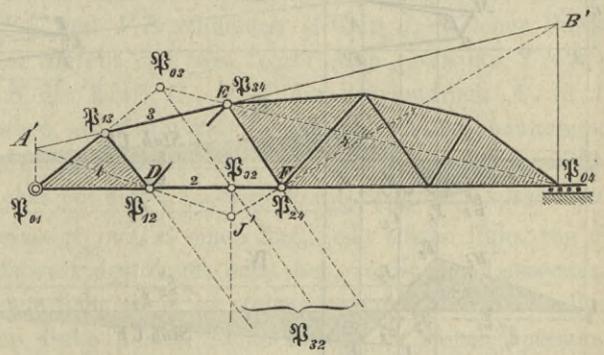
Die Pole \mathfrak{P}_{12} , \mathfrak{P}_{01} , \mathfrak{P}_{02} des Systems 1 und des Stabes *DF* (Scheibe 2) müssen in einer Geraden liegen, daher $J = \mathfrak{P}_{02}$ auf *AD*. Ferner müssen die Pole des Systems 4 und des Stabes 2 in einer Geraden liegen, es muß daher $J = \mathfrak{P}_{02}$ in die Gerade $\mathfrak{P}_{04} \mathfrak{P}_{14}$ fallen, wodurch $J = \mathfrak{P}_{02}$ bestimmt erscheint.

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich die Lage von \mathfrak{P}_{03} , der Lastscheidepunkt des Stabes *CE*, durch den Schnitt der Linien $\mathfrak{P}_{01} \mathfrak{P}_{13}$ bzw. *AC* und $\mathfrak{P}_{04} \mathfrak{P}_{34}$ bzw. $\mathfrak{P}_{04} E$. Die Punkte \mathfrak{P}_{02} und \mathfrak{P}_{03} müssen mit \mathfrak{P}_{23} in einer Geraden liegen, \mathfrak{P}_{23} aber ist durch den Schnittpunkt der Geraden *CD* und *FE* gegeben.

Ist der Untergurt gerade, so versagt die Konstruktion von \mathfrak{P}_{02} ihren Dienst. In diesem Falle kann man, wie in Fig. 53 angegeben, vorgehen. Verbindet man die statische Culmann'sche Konstruktion der Lastscheide von *DE*, s. § 22, mit der kinematischen, so ergeben sich interessante geometrische Beziehungen.

Eine raschere Konstruktion der Werte δ , φ , β kann man erhalten, wenn man (Fig. 52 *d*) zunächst nur die Dehnung von *DE* bei Festhaltung von 1 ausführt und die dem Diagramm $A'' B'' C'' \dots$ entsprechende Drehung des ganzen Trägers direkt durchführt, indem man $A'' B''$ auf die Krafrichtung projiziert und dadurch einen Schnitt-

Fig. 52 e.



punkt der Geraden $A_2 D_2$ mit der Krafrichtung durch B_2 erhält. Die Ordinate $D_0 D_2$ giebt unmittelbar die auf die Krafrichtung projizierte Verschiebungsgeschwindigkeit die bei der ersten Bewegung in Ruhe gewesenen Punktes D . Die Strecke $E'_2 E_2$ ist gleich der Projektion der Strecke $E' A'$ auf die Krafrichtung, wie eine einfache Überlegung zeigt.

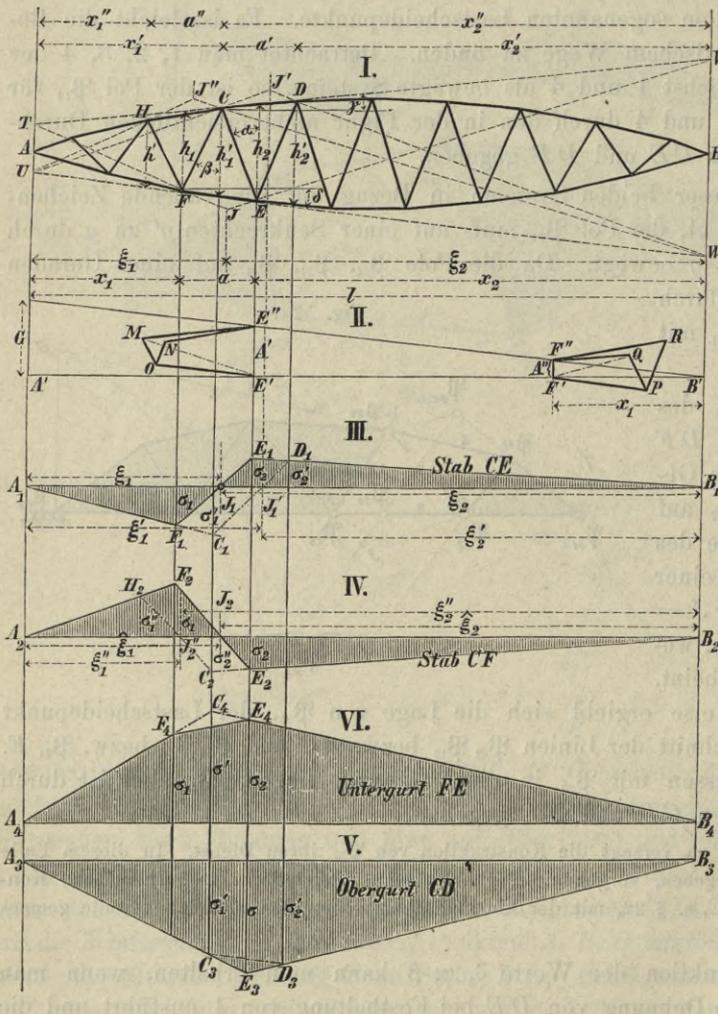
Das Beispiel lehrt ferner, dass in Bezug auf den fraglichen Stab jedem Knotenpunkte eine Krafrichtung entspricht, für welche die Spannung in ED ein relativer Größtwert wird. Diese Krafrichtung ist z. B. für D durch die Linie $A_1 D_1$ in Fig. 52 *c* gegeben. Die ungünstigste Richtung für C ist durch die Linie $A_1 C_1$ bestimmt u. s. w.¹⁶⁾

§ 22. Statische Ermittlung der Einflusslinien von Stabspannungen des Fachwerks. Stellt man (Fig. 53) die Spannung S eines bestimmten Stabes, welche eine Einzellast G erzeugt, im veränderlichen Lastangriffspunkte durch eine Ordinate dar, so erhält man die Einflusslinie des Stabes. Kann die Last G nur in bestimmten Punkten,

also hier den Knoten, dem Träger übermittelt werden, so wird innerhalb dieser die Kurve zur geraden Verbindungsline der den Knotenpunkten entsprechenden Werte; Fig. 53 (III bis VI) zeigt die den Stäben CE , CF , EF und CD entsprechenden Polygone, welche wir näher betrachten wollen, indem wir daran zugleich die wichtigsten Bemerkungen über die ungünstigste Belastungsweise schließen.

Wirkt die Last auf den Untergurt (Bahn unten), so wird die Einflusslinie des Obergurtes CD zum Dreieck $A_3 E_3 B_3$ (Fig. 53, V). Die größte Spannung entsteht, wenn eine Last in E (dem Momentenpunkt des Stabes CD) sich befindet. Die Spannung ist stets ein Druck, wie immer auch G liegt. Bezeichnet σ die Spannung, welche eine in E wirkende Last $G = 1$ erzeugt, so wird für gleichförmige Belastung des

Fig. 53.



¹⁶⁾ Zu diesem Paragraphen vergl. man die Abhandlungen von Mohr. Civiling. Bd. XXXIII, Heft 8 und Land. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1888, S. 11 u. ff.

ganzen Trägers $S_0 = \frac{\sigma l}{2} q$. Hat man es mit einem Systeme von Einzellasten zu thun, so gelten für die Bestimmung der ungünstigsten Stellung und die Berechnung oder graphische Ermittlung der größten Spannung die in § 20, S. 271 erörterten Regeln. Zur Konstruktion des Dreiecks hat man nur die Ermittlung der Gurtspannung für Last G in E nötig. Trägt man G als Endordinate (Fig. 53, II) auf, so giebt die Ordinate A' in E' den der Stellung von G in E entsprechenden Stützendruck, also die Resultierende, welche auf den Teil links des Schnittes entfällt. Hiernach ist es leicht, nach dem folgenden Paragraphen die Spannung der durchschnittenen Stäbe zu ermitteln.

Die Einflußlinie des Untergurtes zeigt Fig. 53, VI. Ihre Ordinaten sind sämtlich positiv; wie immer also auch eine Last liegen mag, sie erzeugt im Untergurte stets Zug. Die größten Werte entsprechen den Punkten E und F . Könnte sich in C eine Einzellast übertragen, so erhielte man für diesen Punkt die Größtordinate. Damit der Größtwert entstehe, muß entweder in E oder F eine Einzellast des Systems stehen.

Das Einflußpolygon eines Gitterstabes CE (Fig. 53, III) liegt zum Teil oberhalb, zum Teil unterhalb der Geraden $A_1 B_1$. Die den Zeichen nach stets verschiedenen Größtwerte für die Beanspruchung durch eine Einzellast treten in den Punkten E und F auf; die Belastungsscheide zwischen den positiven und negativen Werten wird durch J_1 (unter J in Fig. 53, I) gegeben. Diese Belastungsscheiden, deren man für jeden Füllungsstab eine erhält, lassen sich leicht nach folgender Regel ermitteln.

Man verlängert den nicht belasteten Gurt des Faches, dem der fragliche Stab angehört, bis zum Schnitt mit den Auflagerlotrechten und verbindet diese Schnittpunkte mit den betreffenden Knotenpunkten des belasteten Gurtes, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte einer Lotrechten, welche durch die Belastungsscheide geht (Culmann). Für unseren Stab CE erhält man hiernach durch Verlängerung von CD die Punkte T und V , die Geraden TF und VE schneiden sich in J , welcher Punkt lotrecht über J_1 liegt. Die Richtigkeit ergibt sich wie folgt: Man betrachte $TPEV$ als Seilpolygon. In P wirke G_1 , in E die Kraft G_2 , in T der Stützendruck A' , in V der Auflagerdruck A'' ; G_1 und G_2 geben als Mittelkraft G , die Seilpolygon-Spannungen in TV und FE für einen beliebigen Schnitt durch das Fach geben direkt die Gurtspannungen. Für den Gitterstab ist daher bei dieser Lastlage keine Spannung vorhanden.

Jede Einzellast rechts von J_1 erzeugt in CE einen Zug, jede solche links von J_1 einen Druck. Soll z. B. in CE Größtwert des Zuges entstehen, so ist das Lastsystem so zu stellen, daß die schwersten Lasten dicht an E zu stehen kommen und in E selbst eine solche liegt, über J hinaus gegen links dürfen keine Lasten zu stehen kommen. Die ungünstigste Stellung ist dadurch bedingt, daß die Last für die Einheit der Strecke JE der Last für die Einheit der Strecke EB möglichst gleichkommen soll.

Für den Füllungsstab CF erhält man (Fig. 53, IV) ein ganz ähnliches Polygon. Die Belastungsscheide wird gefunden, wenn man bei Bahn unten, wie vorausgesetzt, HC verlängert und die Schnittpunkte mit den Stützenlotrechten mit F und E verbindet. Jede Einzellast innerhalb $A_2 J_2$ (Fig. 53, IV) erzeugt Zug, also das Entgegengesetzte wie bei CE , jede Last innerhalb $J_2 B_2$ Druck u. s. w.

Erfolgt die Lastübertragung am Obergurt, so nehmen die Einflußpolygone jene Formen an, welche in der Figur durch strichpunktirierte Linien angedeutet sind. Um die Belastungsscheide J' für CE zu finden, ist FE zu verlängern, bis die Pfeilerlotrechten getroffen werden, und sind die Punkte U und W mit C und D zu verbinden, welche sich in J' treffen. Ebenso ergibt sich die Belastungsscheide J'' für CF durch

die Verbindungslinien UH und CW . Die Ordinaten der Einfluspolygone ergeben sich nach der in der Figur ersichtlichen Weise aus den Polygonen für Lastübertragung unten.

Für die einzelnen Trägerarten ergeben sich wohl eigene Verfahrungsweisen für die Einfluslinien; einen weiteren allgemeinen Vorgang, auf den schon hier besonders aufmerksam gemacht werden soll, bringen wir unter § 31.

V. Allgemeine Theorie statisch unbestimmter Tragwerke.

§ 23. Allgemeines Verfahren bei Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Ehe wir nunmehr zu der Anwendung der allgemeinen Theorie an einzelnen Ausführungen schreiten, wollen wir einen kurzen Überblick über den Vorgang halten, welcher bei Berechnung von Tragwerken auf Grund der neueren Methode heute wohl allgemein eingeschlagen wird.

Nachdem man das Tragwerk entworfen hat, wird es hinsichtlich der äußeren und inneren Kräfte dahin zu untersuchen sein, ob es stabil und statisch bestimmt oder überbestimmt ist. Sind mehr Auflagerbedingungen und Stabkräfte zu ermitteln, als die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen des Tragwerks ergeben, so verwandelt man zweckmäßig das vorliegende Tragwerk in ein oder mehrere stabile, statisch bestimmte Tragwerke, indem man die überzähligen Bedingungen durch vorläufig unbekannte Kräfte X_1, X_2 u. s. w. ersetzt. Welche Stäbe, Auflagerbedingungen, auszuschalten sind, welche Richtungen den unbekanntenen Kräften X zu geben sind, ist fallweise zu entscheiden. Es läßt sich naturgemäß ein und dieselbe Aufgabe auf ganz verschiedenem Wege behandeln; so kann man z. B. bei einem ebenen durchlaufenden Fachwerk durch Ausschaltung des Gurtstabes über der Mittelstütze dasselbe in zwei einfache Träger verwandeln, oder indem man die Mittelstütze durch einen unbekanntenen Auflagerdruck ersetzt, dasselbe auf ein statisch bestimmtes Tragwerk zurückführen u. s. w. Es ist auch durchaus nicht nötig, daß man das Tragwerk unter allen Umständen auf ein statisch bestimmtes zurückführe. Manche statisch unbestimmte Tragwerke sind so einfach zu berechnen, z. B. durchlaufende Träger, wenn man deren Festpunkte kennt, daß es oft durchaus nicht nötig ist, allzuvielen Unbekannten einzuführen.

Man ermittelt nunmehr in dem statisch bestimmten Tragwerk die Verrückung nach der Richtung einer Unbekannten X_m . Diese Verrückung wird sein: 1. Verrückung infolge des Eigengewichtes des Tragwerks. 2. Verrückung infolge der zufälligen Belastung, Verkehrslast, Wind u. s. w. 3. Verrückung infolge von Temperaturänderungen. 4. Verrückungen, welche sich aus der Natur des Angriffspunktes ergeben (Senkungen des Pfeilers, absichtliche Hebung der Stütze, Verlängerung oder Verkürzung des Stabes, welcher der ausgeschalteten Kraft X entspricht u. s. w.). 5. Verrückungen, welche in der Richtung von X_m durch die anderen Unbekannten hervorgerufen werden. Man führt die Ermittlung für die Richtungen nach allen Unbekannten durch.

Da die Verrückungen nach den Richtungen X gegeben sein werden, wird man im allgemeinen so viel Gleichungen erhalten, als Unbekannte vorhanden sind, deren Auflösung die Ermittlung der Unbekannten gestattet. Hierbei sind jedoch folgende wesentliche Gesichtspunkte zu beachten.

I. Zur Ermittlung der Verlängerungen und Verkürzungen der Stäbe, der Winkeländerungen der Querschnitte u. s. w. ist die Kenntnis des Querschnittes der Stäbe, also gerade jene Größe nötig, die man eigentlich berechnen will. Um diesen Übelstand zu beseitigen, schlägt man folgende Wege ein:

A. Man nimmt die Querschnitte der maßgebenden Teile als unveränderlich an, z. B. die Querschnitte der Gurte eines Bogenträgers, eines Fachwerksträgers, den Querschnitt eines vollwandigen Balkens u. s. w. und vernachlässigt jene Stäbe vollständig, deren Formänderung erfahrungsmäßig einen geringen Einfluss auf die Verrückungen besitzen, so die Füllungsglieder bei Bogenfachwerken u. s. w.

B. Man ersetzt in verwickelten Fällen Fachwerksträger mit Füllstäben zunächst durch vollwandige Träger unveränderlichen oder veränderlichen Querschnittes, für die man die Formänderung durchführt, und Näherungswerte für die Größen X bestimmt. Solche Regeln werden fallweise bei den einzelnen Tragwerken zu geben sein. Hat man nach Verfahren A. oder B. die Ermittlung durchgeführt, so kann man die Abmessungen des Trägers unter Zuhilfenahme der Näherungswerte festlegen, und auf Grund der so ermittelten Maße die Rechnung neuerdings durchführen. Ergeben sich für einzelne Teile des Tragwerks zu große Spannungen, so wird man diese durch Vermehrung des Querschnittes vermindern, während man umgekehrt die Stäbe mit zu kleinen Inanspruchnahmen, soweit es die übrigen Verhältnisse zulassen, in ihren Abmessungen herabdrücken kann. Eine dritte Überprüfung mit den nunmehr endgiltigen Werten wird sich in den seltensten Fällen als nötig erweisen und nur unbedeutende Abweichungen ergeben.

C. Man schaltet solche Stäbe oder Bedingungen aus, deren Einfluss auf das Tragwerk nachweislich oder erfahrungsmäßig ein sehr geringer ist, bestimmt die Querschnitte für das statisch bestimmte Tragwerk richtig und legt diese Maße der Berechnung des statisch unbestimmten Tragwerks zu Grunde. So lässt sich z. B. ein durchlaufender Träger mit zwei Feldern durch Ausschaltung eines Gurtstabes im zweiten Drittel des ersten Feldes in einen Träger mit überkragenden Enden und einen einfachen Träger verwandeln. Die Spannungen des ausgeschalteten Stabes sind im allgemeinen bei derartigen Anordnungen klein und die Maße der beiden oben genannten statisch bestimmten Tragwerke kommen dem durchlaufenden außerordentlich nahe.

Ein anderes, für gegebene feste Belastungsarten besonders zweckmäßiges Verfahren besteht darin, dass man nach Engesser die überzähligen Kräfte gleichzeitig durch bestimmte Näherungswerte, vermehrt um eine unbekannte Größe X , ersetzt, welche Werte X den Näherungswert zum richtigen verbessern. Der Vorgang bleibt im übrigen derselbe. Man erzielt dadurch den großen Vorteil, dass die Einflüsse von X überhaupt nur klein werden; man kann daher mit Berechtigung jene Einflüsse von X weglassen, welche erfahrungsgemäß überhaupt klein sind, man wird hierdurch das Verfahren wesentlich abkürzen. Wir fügen als Erläuterung bei, dass z. B. bei einem durchlaufenden Träger ABC unveränderlichen Querschnittes mit zwei gleichlangen Feldern der Stützendruck auf die Mittelstütze für gleichmäßige Belastung $\frac{5}{4} ql$ wird. Setzt man an Stelle der Mittelstütze eines entsprechenden Fachwerks die Kraft $\frac{5}{4} ql + X$ und berechnet für das statisch bestimmte Fachwerk die Verschiebung des Angriffspunktes, so wird man hierbei die Formänderung der Füllungsstäbe mit Beruhigung auslassen können und doch eine große Genauigkeit erzielen. Bei der Bestimmung der Spannungen eines Raumbachwerks haben wir übrigens von diesem Verfahren bereits Gebrauch gemacht.

Im weiteren kann nun die Ermittlung der Verrückungen auf rechnerischen oder zeichnerischen, sowie mittels solcher Verfahrungsweisen erfolgen, welche theils rechnerisch, theils graphisch sind.

Wir haben die Hauptsätze bereits kennen gelernt und werden im folgenden Paragraphen die Berechnungsverfahren allgemein an den einzelnen Beispielen zeigen. Unter den zeichnerischen Verfahrungsweisen nehmen wir insbesondere drei, welche geeignet erscheinen, die Verrückungen zu bestimmen.

Das I. Verfahren beruht auf dem Satze, daß die elastischen Linien als Seillinien aufgefaßt werden können, wenn die Winkeländerungen, bezw. die Momentenflächen, Belastungsflächen sind. Diese Methode, welche für vollwandige Träger zuerst Mohr entwickelt und welche von anderen, so von Müller-Breslau, Manderla und vom Verfasser für die Winkeländerung der Stabfachwerke erweitert wurde, wollen wir das Biegungslinien-Verfahren nennen.

II. Eine weitere Verfahrungsart, welche wir in § 14 bis 16 kennen gelernt haben und die zuerst von Williot aufgestellt, in ihren Grundzügen jedoch schon von Bukovsky entwickelt wurde, beruht auf der Ermittlung eines Verschiebungsplanes, welcher zu dem ursprünglichen Fachwerk sich verhält, wie der Geschwindigkeitsplan (Hodograph) der augenblicklichen Geschwindigkeit zu einem bewegten System; wir wollen dieses Verfahren das Williot'sche nennen. Es ist das allgemeinste, für alle Fachwerke mit dem geringsten Aufwand von Rechnung durchführbare Verfahren, es wird jedoch bei vielstabigen Fachwerken umständlich und wenig übersichtlich.

III. Ein von Müller-Breslau eingeführtes Verfahren ersetzt in manchen Fällen mit Vorteil das ebene Tragwerk durch einen Stabzug, dessen Winkeländerungen, Verlängerungen und Verkürzungen der einzelnen Teile in ähnlicher Weise wie beim Williot'schen Verfahren bestimmt werden. Das Verfahren in diesem Sinne ist eine abgekürzte Williot'sche Methode.

IV. Die Auflösung der Gleichungen, auf welche bei mehreren Unbekannten ein solches System stets führt, kann in bestimmten Fällen ganz wesentlich erleichtert werden; insbesondere kann durch zweckmäßige Wahl der unbekannt Gröfsen X das Gleichungssystem so gespalten werden, daß jede Gleichung nur eine Unbekannte enthält. Das diesbezügliche Verfahren ist ganz allgemein Folgendes: Es sei in einem statisch bestimmten Fachwerk 1 der Angriffspunkt von X_1 , 2 der Angriffspunkt von X_2 ; eine Kraft $X_1 = 1$ für sich erzeuge im statisch bestimmten Fachwerke in 2 die absolute Verrückung $\xi_{1,2}$, wählt man die Richtung von X_2 senkrecht zu $\xi_{1,2}$, so wird die Verrückung des Angriffspunktes 2 durch X_1 in Richtung der Kraft 2 gleich Null, es muß daher nach dem Maxwell'schen Satze auch die Verrückung des Angriffspunktes von 1 in Richtung der Kraft 1 für $X_2 = 1$ Null werden. Die Koeffizienten $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$ unseres Gleichungssystems fallen hinweg. Jede der beiden Gleichungen enthält nur eine Unbekannte.

Bei symmetrischen Anordnungen kann ebenfalls durch zweckentsprechende Annahmen die Anzahl der Gleichungen verringert werden. Ein wirksames Verfahren besteht auch darin, daß man die Belastung zu einer symmetrischen gestaltet. Wirken z. B. auf einen Bogenträger ohne Gelenke zwei symmetrisch zur Mitte stehende Einzelasten, so ist es klar, daß die lotrechten Auflagergegenkräfte untereinander und diesen Kräften gleich sein müssen. Es fällt hierdurch eine Bedingung für die Verschiedenheit der Auflagergegenkräfte fort; vom Horizontalschub läßt sich im vorhinein behaupten, daß er im gegebenen Falle doppelt so groß sein wird, als wenn nur eine Last vorhanden wäre u. s. w.

Für die Ermittlung der Wirkung bewegter Lasten bedient man sich am zweckmäßigsten des Verfahrens der Einflußlinien, für die wir im folgenden Paragraphen eine besonders bemerkenswerte Beziehung kennen lernen werden.

§ 24. Einflußlinien statisch unbestimmter Systeme. Es seien X_a, X_b, X_c die in bestimmten Punkten nach gegebenen Richtungen angreifenden unbekanntesten Widerstände, die bei der Formänderung eines Tragwerks auftreten.

Es bezeichnen im Einzelnen:

δ_{am} die Verschiebung, welche eine bewegliche Last $P_m = 1$, welche im Punkte M angreift, im Angriffspunkte A von X_a nach einer gegebenen Richtung a erzeugt,

δ_{aa} die Verschiebung, welche eine Kraft $P_a = 1$ im Angriffspunkte A von X_a nach Richtung a hervorruft,

δ_{at} die Verschiebung, welche der Angriffspunkt A von X_a in Richtung a durch eine Temperaturänderung erfährt, endlich

δ_{aw} die Verschiebung, welche aufer durch die obengenannten Ursachen, am Angriffspunkt A von X_a aus irgend einem anderen Grunde (beabsichtigte Senkung der Stütze u. s. w.) veranlaßt wird,

dann ist die Gesamtverschiebung $\delta_A = AA'$ des Angriffspunktes A von X_a in Richtung a

$$\delta_A = \Sigma P_m \delta_{am} + X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} + \dots + \delta_{at} + \delta_{aw},$$

ebenso wird für den Angriffspunkt von X_b

$$\delta_B = \Sigma P_m \delta_{bm} + X_b \delta_{bb} + X_a \delta_{ba} + \delta_{bt} + \delta_{bw}.$$

Sind diese Verschiebungen δ_A, δ_B u. s. w. gegeben, so lassen sich hieraus die Unbekannten berechnen.

Die Verrückungen δ lassen sich nach dem Früheren leicht ermitteln.

a) Eine Unbekannte. Wir wollen uns zunächst dem Falle einer einzigen Unbekannten zuwenden.

Es sei außerdem X_a die ersetzende Gegenwirkung eines festen Punktes; dann wird $\delta_{aw} = 0$, $\delta_{at} = 0$, und wir haben

$$X_a \delta_{aa} = - \Sigma P_m \delta_{am} = - [P_1 \delta_{a1} + P_2 \delta_{a2} + P_3 \delta_{a3} + \dots],$$

wenn wir an Stelle von m der Reihe nach die Angriffspunkte 1, 2, 3, 4 u. s. w. der Kraft P setzen.

Diese Gleichung läßt sich aber nach dem Satze von Maxwell stets umformen in:

$$- X_a \delta_{aa} = P_1 \delta_{1a} + P_2 \delta_{2a} + P_3 \delta_{3a} + \dots,$$

δ_{1a}, δ_{2a} u. s. w. sind aber nichts anderes als die Verschiebungen der Punkte 1, 2, 3 u. s. w. für eine Einzellast $X_1 = 1$ in A , und wir erhalten

$$- X_a = P_1 \frac{\delta_{1a}}{\delta_{aa}} + P_2 \frac{\delta_{2a}}{\delta_{aa}} + \dots \dots \dots 83.$$

Vergleichen wir diese Größen mit der Gleichung 76 (S. 271)

$$Y = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots,$$

so können wir sagen:

Die Ordinaten der Einflußlinien für X_a entsprechen den Quotienten aus den Ordinaten der Biegelinie für eine Last 1 im Angriffspunkte A von X_a in die Verrückung, welche $X_a = -1$ im Angriffspunkte wachruft.

Oder in anderer Weise:

Die Ordinaten der Einflußlinie entsprechen den negativen Ordinaten einer Biegelinie für eine wandernde Kraft $P_1 = P_2 = P_3 = \delta_{a,a}$.

Ersetzt X_a nicht die Gegenwirkung eines in Wirklichkeit festen Punktes, sondern erfährt derselbe eine Verrückung $A A' = \delta_a$, so wird aus dieser Ursache allein

$$X_a = \frac{\partial \Delta}{\partial a_a} = \delta_a \dots \dots \dots 84.$$

Die Einflußlinie bleibt dieselbe, nur rückt ihre Abscissenachse um das Stück δ_a hinab.

b) Mehrere Unbekannte. Hat man ein System von n Unbekannten, welche an den Punkten A bis N angreifen, und ist X_i eine derselben, so hat man die Gleichungen:

$$1) P_m \delta_{a_m} + X_a \delta_{a_a} + X_b \delta_{a_b} + \dots X_i \delta_{a_i} + \dots X_n \delta_{a_n} = \delta_A$$

$$2) P_m \delta_{b_m} + X_a \delta_{b_a} + X_b \delta_{b_b} + \dots X_i \delta_{b_i} + \dots X_n \delta_{b_n} = \delta_B$$

.....

$$i) P_m \delta_{i_m} + X_a \delta_{i_a} + X_b \delta_{i_b} + \dots X_i \delta_{i_i} + \dots X_n \delta_{i_n} = \delta_i$$

.....

$$n) P_m \delta_{n_m} + X_a \delta_{n_a} + X_b \delta_{n_b} + \dots X_i \delta_{n_i} + \dots X_n \delta_{n_n} = \delta_N$$

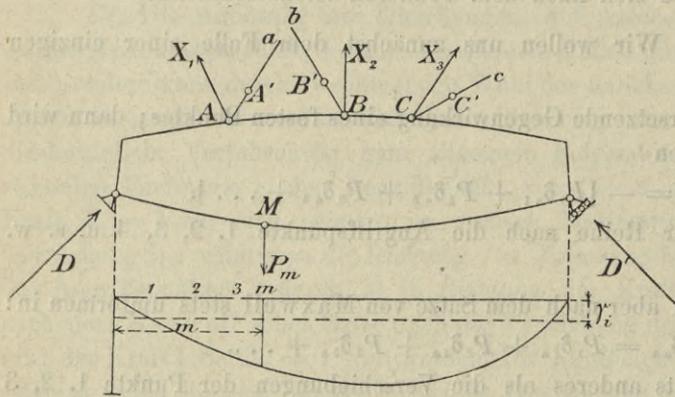
Löst man dieses Gleichungssystem nach X_i auf, so wird man diese Lösung stets in der Form schreiben können:

$$- X_i R = \delta_{m a} \cdot \alpha_{i a} P_m + \delta_{m b} \cdot \alpha_{i b} P_m + \dots \delta_{m i} \alpha_{i i} P_m + \gamma_{i i} \cdot R \dots 85.$$

Macht man $P_m = -R$, so findet sich:

$$X_i = + \delta_{m a} \cdot \alpha_{i a} + \delta_{m b} \alpha_{i b} \dots + \delta_{m i} \cdot \alpha_{i i} - \gamma_{i i} \dots 86.$$

Fig. 54.



Dies ist aber für $\gamma_{i i} = 0$ nichts anderes, als die Ordinate einer Biegelinie im Punkte M , wenn in den Punkten $A B C \dots J \dots N$ u. s. w. die Kräfte $\alpha_{i a}, \alpha_{i b} \dots \alpha_{i i}, \alpha_{i n}$ angreifen.

Die Einflußlinie für X_i ist mithin eine Biegelinie, die man erhält, wenn man in den Angriffspunkten $A B \dots J \dots N$ der überzähligen Kräfte X_i, X_n bestimmte

Kräfte $\alpha_{i a}, \alpha_{i b}, \alpha_{i i}, \alpha_{i n}$ wirken läßt. Die Größe der den Ordinaten der Einflußlinie entsprechenden wandernden Last ist durch $-R$ gegeben.

Will man eintretenden Veränderungen der Angriffspunkte Rechnung tragen, so verschiebt sich die Abscissenachse der Einflußlinie um $\gamma_{i i}$.

Wir wollen zum Zwecke einiger weiteren Untersuchungen dieselbe auf drei Unbekannte beschränken, wodurch wir der Allgemeinheit keinen Eintrag thun und von den Grundlehren der Determinanten Gebrauch machen; wir haben dann in anderer Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{a a} X_a + \delta_{a b} X_b + \delta_{a c} X_c &= -\delta_{a m} \cdot P_m + \delta_{\Lambda} \\ \delta_{b a} X_a + \delta_{b b} X_b + \delta_{b c} X_c &= -\delta_{b m} \cdot P_m + \delta_B \\ \delta_{c a} X_a + \delta_{c b} X_b + \delta_{c c} X_c &= -\delta_{c m} \cdot P_m + \delta_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 87.$$

Bezeichnet man mit R die Determinante

$$\begin{vmatrix} \delta_{a a} & \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_{b a} & \delta_{b b} & \delta_{b c} \\ \delta_{c a} & \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} = R, \dots \dots \dots 88.$$

so ist hinsichtlich derselben zu bemerken, daß sie eine sogenannte symmetrische ist, da allgemein

$$\delta_{i k} = \delta_{k i} \dots \dots \dots 89.$$

Für X_a findet sich

$$R \cdot X_a = - \begin{vmatrix} \delta_{a m} & \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_{b m} & \delta_{b b} & \delta_{b c} \\ \delta_{c m} & \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} \cdot P_m + \begin{vmatrix} \delta_{\Lambda} & \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_B & \delta_{b b} & \delta_{b c} \\ \delta_C & \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} \dots \dots \dots 90.$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} R \cdot X_a &= -\delta_{a m} \begin{vmatrix} \delta_{b b} & \delta_{b c} \\ \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} \cdot P_m + \delta_{b m} \begin{vmatrix} \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} P_m \\ &\quad - \delta_{c m} \begin{vmatrix} \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_{b b} & \delta_{b c} \end{vmatrix} \cdot P_m + \begin{vmatrix} \delta_{\Lambda} & \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_B & \delta_{b b} & \delta_{b c} \\ \delta_C & \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots 91.$$

Macht man $P_m = -R$, so kann man auch sagen:

Man erhält die Einflußlinie von X_a , wenn man die in der Determinante R der Kolonne $\delta_{a a} \delta_{a b} \delta_{a c}$ entsprechenden Unterdeterminanten $R'_a R'_b R'_c$ in den Punkten $A B C$ an Stelle der Kräfte $X_a X_b X_c$ angreifen läßt und die Biegelinie der Lastangriffspunkte $1 2 3 \dots m$ ermittelt.

Die Ordinaten dieser Biegelinie sind die Einflußwerte. Will man den bleibenden Veränderungen $\delta_{\Lambda} \delta_B \delta_C \dots$ gleichzeitig Rechnung tragen, so verschiebt sich die oben ermittelte Biegelinie um

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} \delta_{\Lambda} & \delta_{a b} & \delta_{a c} \\ \delta_B & \delta_{b b} & \delta_{b c} \\ \delta_C & \delta_{c b} & \delta_{c c} \end{vmatrix} : R \dots \dots \dots 92.$$

Wegen der Beispiele verweisen wir auf den Abschnitt über statisch unbestimmte Tragwerke.

§ 25. Mathematische und zeichnerische Lösungen der Gleichungen.

a) Zeichnerische Lösungen. Die bei statisch unbestimmten Aufgaben vorkommenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a X + b Y &= P_1 \dots g_1 \\ b X + c Y &= P_2 \dots g_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 93.$$

entsprechen analytisch den Gleichungen zweier sich schneidender Geraden, deren Schnittpunkt den Werten entspricht, die beide Gleichungen erfüllen. Ändern nur P_1 und P_2 ihre Werte in P'_1 und P'_2 , so bleiben die Geraden g'_1 und g'_2 parallel zu g_1 bzw. g_2 .

Die Werte $\frac{P_1}{b}, \frac{P'_1}{b}$ sind die Abstände, in denen die Geraden $g_1 g'_1$ die y -Achse schneiden; sie sind den Werten P_1 und P'_1 proportional. Trägt man die Werte P_1, P'_1

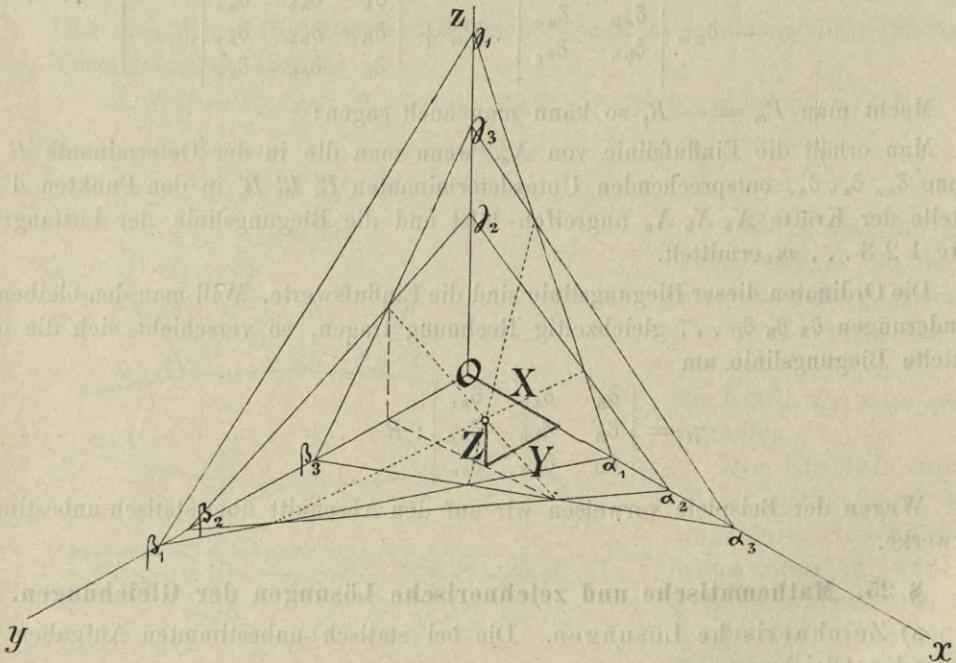
auf der x -Achse auf, so läßt sich durch das Ziehen einer Parallelen der Abstand finden, ohne mehr rechnen zu müssen, ebenso ergibt sich die neue Gerade g'_1 als Parallele zu g_1 . Dasselbe gilt für die Geraden g_2 und g'_2 . Sind also für die Wertepaare $P_1 P_2$ die Geraden $g_1 g_2$ gegeben, so lassen sich aus den neuen Wertepaaren $P'_1 P'_2$ die Geraden $g'_1 g'_2$ und damit die Wertepaare $X' Y'$ unmittelbar zeichnerisch ermitteln.

Wir unterlassen es, die Darstellung durch eine Figur zu unterstützen, die sich der Leser leicht selbst konstruiert und verweisen auf das Beispiel T. III, F. 22, wo auf diesem Wege die Stützendrücke eines durchlaufenden Trägers zeichnerisch ermittelt sind.

$$\left. \begin{aligned} \text{Die Gleichungen } a_1 X + b_1 Y + c_1 Z &= P_1 \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z &= P_2 \\ a_3 X + b_3 Y + c_3 Z &= P_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 94.$$

entsprechen den Gleichungen dreier Ebenen, die auf der Koordinatenachse die Werte $\alpha = \frac{P}{a}$, $\beta = \frac{P}{b}$, $\gamma = \frac{P}{c}$ abschneiden. Der Schnittpunkt der drei Ebenen, der sich leicht auf Grund einer axonometrischen Darstellung ermitteln läßt, liefert das die Gleichungen erfüllende Tripl X, Y, Z .

Fig. 55.



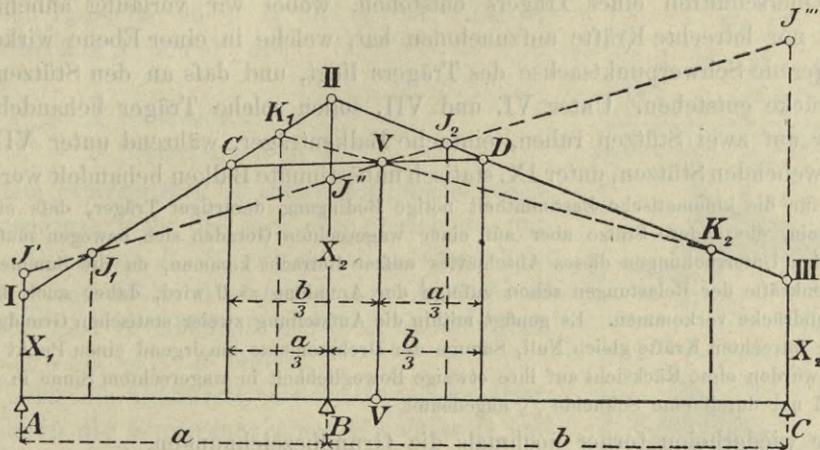
Tritt an Stelle des Wertetripls $P_1 P_2 P_3$ ein neues $P'_1 P'_2 P'_3$, so bleiben die neuen Ebenen den alten parallel, was die Ermittlung der Werte $X' Y' Z'$ unmittelbar auf zeichnerischem Wege möglich macht.

b) Die rechnerische Auflösung der Gleichungen, welche sich nach § 24 für die überzähligen Größen X ergeben, wird bei größerer Zahl dieser Überzähligen zweckmäÙig mit Hilfe der Determinanten vorgenommen. Wegen der hierbei anzuwendenden vereinfachenden Verfahren wird auf die einschlägigen Vorföhungen in der 2. Auflage dieses Werkes (§ 13, S. 246 bis 250) verwiesen.

e) Zeichnerische Lösung der Clapeyron'schen Gleichungen. Bei Aufgaben der Trägerlehre (so bei Ermittlung der Stützenmomente durchlaufender Träger, bei Untersuchung der Zwängungsspannungen an den Knotenpunkten der Gurte von Fachwerkträgern) stößt man häufig auf eigenartige Gleichungen, welche man nach Clapeyron, der auf sie stieß, wohl als Clapeyron'sche Gleichungen bezeichnet. Diese Gleichungen lassen sich meist auf die Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} a X_1 + 2(a + b) X_2 + b X_3 &= 3(a + b) V_2 \\ b X_2 + 2(b + c) X_3 + c X_4 &= 3(a + c) V_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 95.$$

Fig. 56.¹⁷⁾



Werden a, b thatsächliche oder gedachte Strecken und trägt man die Unbekannten als lotrechte Strecken in den Endpunkten auf, so legen die Drittel-Lotrechten auf dem Zuge I, II, III zwei Punkte C und D fest, deren Verbindungsgerade auf der verschränkten Mittellotrechten, deren Lage ebenfalls aus der Figur ersichtlich ist, den Wert V abschneidet. Der Beweis läßt sich durch unmittelbare Nachrechnung führen. Sind J_1 und J_2, K_2 und K_1 Festpunkte, die den Verhältnissen $\frac{X_1}{X_2}, \frac{X_2}{X_3}, \frac{X_3}{X_2}, \frac{X_2}{X_1}$ entsprechen, wenn die Werte V Null werden, so schneiden auch die Vertikalen durch J_1, J_2, K_1, K_2 auf I, II, III Punkte ab, deren Verbindungslinien sich in V schneiden. Hierdurch wird die zeichnerische Auflösung der Gleichungen ermöglicht. Der Beweis für die Richtigkeit folgt aus dem Satze der Geometrie, daß wenn zwei Seiten eines Dreiecks, deren Ecken sich auf drei Strahlen bewegen, durch feste Punkte gehen, dies auch hinsichtlich der dritten Seite der Fall sei.

Der Beweis läßt sich leicht damit führen, daß die Gerade $J' J'' J'''$ Strecken I J' , II J'' , III J''' abschneidet, welche dem festen Verhältnis für $V = 0$ entsprechen. Ganz dasselbe gilt hinsichtlich K .

Wir werden von diesen Sätzen bei der Lehre von den durchlaufenden Trägern und an anderen Stellen Gebrauch machen.

¹⁷⁾ In Fig. 56 ist statt X_2 am rechten Ende X_3 zu setzen.

B. Trägerlehre im Besonderen.

§ 26. **Allgemeines.** Die Belastungen und die sonstigen angreifenden Kräfte, welche die Brücken aufzunehmen haben, so das Eigengewicht, die Schneelast, der Winddruck, die Fliehkraft bei Brücken im Bogen, die Belastung durch Menschengedränge, die Radlasten der Fuhrwerke, die Achsdrücke der Eisenbahnfahrzeuge, die Einwirkungen des Bremsens der Züge u. s. w. wurden im VII. Kapitel eingehend behandelt und sind vielfach Gegenstand gesetzlicher Vorschriften. Wir wollen hier die Gröfse dieser Belastungen als bekannt voraussetzen und zunächst untersuchen, welche Auflagerdrücke an den Stützen, welche Momente und welche Quer-(Transversal-)Kräfte in den einzelnen Querschnitten eines Trägers entstehen, wobei wir vorläufig annehmen, dafs der Träger nur lotrechte Kräfte aufzunehmen hat, welche in einer Ebene wirken, in der auch die gerade Schwerpunktsachse des Trägers liegt, und dafs an den Stützen lotrechte Auflagerdrücke entstehen. Unter VI. und VII. sollen solche Träger behandelt werden, welche nur auf zwei Stützen ruhen, einfache Balkenträger, während unter VIII. Träger mit freischwebenden Stützen, unter IX. statisch unbestimmte Balken behandelt werden sollen.

Die für die kinematische Bestimmtheit nötige Bedingung derartiger Träger, dafs ein Auflagerpunkt fest sein, die andere Stütze aber auf einer wagerechten Geraden sich bewegen mufs, kann bei allen folgenden Untersuchungen dieses Abschnittes aufser Betracht kommen, da die Summe der wagerechten Seitenkräfte der Belastungen schon zufolge der Annahme $= 0$ wird, daher auch keine wagerechten Gegendrücke vorkommen. Es genügt mithin die Aufstellung zweier statischen Grundgleichungen: Summe aller lotrechten Kräfte gleich Null, Summe der Drehmomente um irgend einen Punkt gleich Null. Die Stützen wurden ohne Rücksicht auf ihre etwaige Beweglichkeit in wagerechtem Sinne in den Figuren in der Regel nur durch eine Schneide \triangle angedeutet.

Wir wiederholen ferner nochmals die Grundbezeichnungen.

Denkt man sich im Abstände x von der linken Stütze das belastete System durch einen lotrechten Schnitt in zwei Teile getrennt und betrachtet den Teil links des Schnittes, so nennt man die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte, in unserem Falle also die algebraische Summe aller lotrechten Kräfte links des Schnittes, die Querkraft (Transversalkraft) R_x und sieht sie als positiv an, wenn sie nach aufwärts wirkt. Das Moment dieser Mittelkraft in Bezug auf irgend einen Punkt vom Abstände x für einen lotrecht gedachten Schnitt wollen wir mit M_x bezeichnen und positiv nennen, wenn das entsprechende Kräftepaar eine rechtsläufige Drehung, wie solche bei dem Zeiger einer Uhr stattfindet, anstrebt.

In vielen Fällen kann die zufällige Last in allen Punkten der Lastbahn unmittelbar auf den Träger wirken (direkte Belastung), in anderen ausschliesslich nur an bestimmten Punkten übertragen werden, so z. B. nur an solchen Stellen, an denen die Querträger, welche die eigentliche Bahn aufnehmen, an die Hauptträger schliessen, an den Knotenpunkten der Fachwerksträger u. s. w. (mittelbare Belastung). Je nachdem man nun auf diesen Umstand Rücksicht nimmt, was um so eher erforderlich wird, je gröfser das Verhältnis der Querträgerentfernung bezw. der Knotenweite zur Spannweite ist oder nicht, ergeben sich Abweichungen in der Bestimmungsweise. Wir wollen beide Fälle betrachten und in Nachstehendem zunächst nur die ältere, rein statische Behandlungsweise befolgen, somit auf die kinematischen Beziehungen, welche sich leicht aus dem in den allgemeinen Abschnitten I. bis V. Gebotenen ergeben, nicht näher eingehen. Eine kurze Erinnerung an einige Grundbegriffe wird das Verständnis dieses praktisch besonders wichtigen Abschnittes ermöglichen; der Leser ist somit unbedingt an das Studium der vorhergehenden Abschnitte gebunden.

VI. Einfache ebene Balkenträger. Äußere Kräfte.

§ 27. Stützendrücke, Querkräfte und Momente bei direkter Belastung.

Bestimmung der Stützendrücke und Querkräfte. Eine Einzellast G , welche um z von der Stütze A absteht (Fig. 57), erzeugt in A und B die Stützendrücke A und B

$$A = \frac{G(l-z)}{l}, \quad B = \frac{Gz}{l}, \quad \dots \dots \dots 96.$$

wenn l die Länge des Trägers AB . Trägt man G von A_1 aus nach aufwärts, von B_1 aus nach abwärts auf, verbindet die Endpunkte dieser Strecken mit B_1 bzw. A_1 , so schneidet eine Lotrechte durch E die in der Figur ersichtlichen Strecken Y und Y' ab.

Fig. 57.

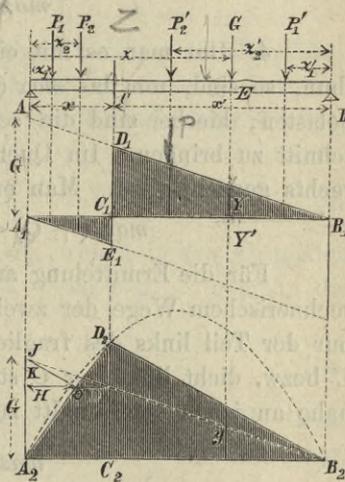
Es ist

$$Y = A \text{ Stützendruck in } A,$$

$$Y' = B \text{ Stützendruck in } B.$$

Der dem Stützendruck A entgegenwirkende gleichgroße Stützendruck giebt die nach oben gerichtete, mithin positive Querkraft R_x für irgend einen Querschnitt C zwischen A und E im Abstände x von A , während sich für eine Last G innerhalb AC ($z < x$) die Querkraft $Q_x = A - G = -B$ ergibt.

Trägt man die Querkraft, welche in einem Querschnitte C durch die Einwirkung einer Einzellast G entsteht, am veränderlichen Lastangriffspunkte E als Ordinate Y auf, so erhält man die aus Fig. 57 ersichtliche Darstellung, in welcher die positiven Ordinaten nach aufwärts aufgetragen sind. Man ersieht hieraus, daß eine Last rechts vom fraglichen Querschnitte C stets eine positive, eine Last links von demselben stets eine negative Querkraft erzeugt. Für eine beliebige, im Abstände z' von B befindliche Einzellast P ist die Querkraft durch $Y \frac{P}{G}$ gegeben. Die Linie $A_1 E_1 D_1 B_1$ ist die Einflußlinie für die Transversalkraft eines Querschnittes C (s. § 20).



1. Für eine gleichmäßig auf den ganzen Träger verteilte Belastung denke man sich zunächst ein Element dx im Abstände z von A gleichmäßig mit p für die laufende Einheit belastet, dann kann man, $p dx$ als Einzellast betrachtend, $p dx = P$ setzen und es wird die hiervon herrührende Querkraft in C durch $Y \frac{p dx}{G}$ gegeben. Für volle Belastung ist die Querkraft in C durch den Ausdruck $\frac{p}{G} \int Y dx$ bestimmt. Das Integral stellt die algebraisch genommene Fläche $A_1 E_1 C_1 D_1 B_1$ vor. Da Ordinate $C_1 D_1 = \frac{G}{l} x'$ und $C_1 E_1 = \frac{G}{l} x$ ist, so wird:

$$Q_x = \frac{p}{2l} (x'^2 - x^2) = \frac{p}{2} (l - 2x) \quad \dots \dots \dots 97.$$

2. Hat man es mit einem System ruhender Einzellasten $P'_1 P'_2 \dots P_1 P_2 \dots$ zu thun, welche in den Abständen $z'_1 z'_2 \dots$ von der rechten, bzw. $z_1 z_2 \dots$ von der linken Stütze liegen, und bezeichnen $y'_1 y'_2 \dots y_1 y_2 \dots$ die zugehörigen Ordinaten der Einflußlinie für $G = 1$, so ist:

$$Q_x = \Sigma (y' P') - \Sigma (y P), \quad \dots \dots \dots 98.$$

welche Form sehr geeignet erscheint, die Bestimmung von Q_x auf graphischem Wege vorzunehmen. Für die Berechnung bekommt man einfacher, die Werte y ausdrückend:

$$Q_x = \frac{\Sigma (P' z')}{l} - \frac{\Sigma (P z)}{l} \dots \dots \dots 99.$$

3. Eine gleichmäßig verteilte, bewegliche Belastung q für die laufende Einheit erzeugt die größte positive Querkraft, wenn man den Teil rechts des fraglichen Querschnittes, die größte negative, wenn man den Teil links desselben belastet. Man hat bei gleichem Vorgang wie oben für $\max (+ Q)$ die Fläche $C_1 D_1 B_1$, für $\max (- Q)$ die Fläche $A_1 C_1 E_1$ zu beachten.

$$\left. \begin{aligned} \max (+ Q) &= \frac{q x'^2}{2l} = \frac{q}{2l} (l - x)^2 \\ \max (- Q) &= - \frac{q x^2}{2l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 100.$$

4. Hat man es mit einem System beweglicher Einzellasten $P_1 P_2 \dots P'_1 P'_2 \dots$ zu thun, so sind, um das $\max (+ Q)$ zu erhalten, nur die Teile rechts des Schnittes zu belasten; hierbei sind die schwersten Lasten möglichst nahe an den fraglichen Querschnitt zu bringen. Im Querschnitte C selbst ist eine Last anzuordnen, welche dicht rechts gedacht wird. Man erhält:

$$\max (+ Q) = y'_1 P'_1 + y'_2 P'_2 + \dots = \Sigma (y' P') = \frac{1}{l} \Sigma P' z' \dots \dots 101.$$

Für die Ermittlung auf graphischem Wege ist der erste, für die Ermittlung auf rechnerischem Wege der zweite Ausdruck anzuwenden. Das $\max (- Q)$ tritt ein, wenn nur der Teil links des fraglichen Querschnittes belastet ist, wobei wieder eine Last in C bzw. dicht links vor C stehend gedacht wird, und die schwersten Lasten möglichst nahe an jenen Querschnitt zu bringen sind.

Es wird:
$$\max (- Q) = \Sigma y P = - \frac{1}{l} \Sigma P z \dots \dots \dots 102.$$

Wenn eine im Verhältnis zur folgenden sehr leichte Last vorausgeht, z. B. ein Pferdepaar einem schwer beladenen Wagen, so kann der geringe Einfluss der ersten Last, selbst wenn er auf die negative Beitragsstrecke AC kommt, noch immer von dem Einflusse überwogen werden, welcher dadurch hervorgerufen wird, daß nun schwere Lasten sich dem Punkte C auf der positiven Strecke nähern. In diesem Falle kann dann für den Größtwert auch die zweite Last an den fraglichen Querschnitt kommen. Meistens wird man durch Umkehrung des Lastsystems, indem man also z. B. die Wagenhinterachsen über C stellt und das Pferdepaar gegen B schauen läßt, einem solchen Falle ganz vorbeugen.

Bestimmung der Momente. Wirkt eine Einzellast G im Abstände z von der Stütze A , erzeugt dieselbe die Stützendrücke A und B , so wird das Moment M_x in einem Querschnitte C von der Abscisse x gegeben durch:

$$M_x = A x = G \frac{x(l-z)}{l}, \dots \dots \dots 103.$$

wenn die Last rechts von C , und

$$M_x = B x' = G \frac{z x'}{l}, \dots \dots \dots 104.$$

wenn die Last links von C liegt.

Setzt man $\frac{x(l-z)}{l} = y$ und $\frac{z x'}{l} = y'$, so geben diese Strecken die Werte der Ordinaten der Einflußfigur für einen Querschnitt C und eine Last $G = 1$. Sie entsprechen den Ordinaten des schraffierten Dreiecks $A_2 D_2 B_2$ (Fig. 57, S. 287). Die Konstruktion desselben erfolgt am einfachsten in der aus der Figur ersichtlichen Weise, in welcher $\overline{JA_2} = G$, $\overline{KJ} = B$, $\overline{A_2 K} = A$ gemacht ist und $D_2 B_2$ parallel zu JO gezogen wird; $\overline{K O} = H$ bezeichnet eine im allgemeinen willkürliche Poldistanz, wobei,

falls das Dreieck $A_2 D_2 B_2$ die Einflußfigur werden soll, $H = G = 1$ gemacht werden muß, während allgemein für eine Einzellast G im Punkte C der Wert $M_x = y \cdot H$ wird, wenn H nach dem Kräftemaßstabe, y nach dem Längenmaßstabe gemessen wird. Faßt man C als feste Stelle auf, für welche eine gewisse Wirkung (das Moment) einer wandernden Einzellast G ermittelt werden soll, die an der Lastangriffsstelle aufgetragen wird, so erscheint $A_2 D_2 B_2$ als Einflußlinie (C fest, E wandernd); gleichzeitig aber ist diese Figur die graphische Darstellung der Wirkung (des Momentes) für alle Punkte E des Trägers, wenn eine Einzellast in C steht und das Moment am fraglichen Querschnitte aufgetragen wird. Man vergleiche § 20, Fig. 46.

Man ersieht, daß, wo immer auch eine Einzellast liegen mag, sie stets ein positives Moment erzeugt. Das größte Moment ergibt sich, wenn in C selbst die Einzellast liegt, wofür speziell $M_x = \frac{x x'}{l} G$ wird.

1. Setzt man $G = p dx$, so wird für die gleichzeitige Wirkung an allen Lastangriffsstellen, also für eine gleichmäßig auf den ganzen Träger verteilte Last das Moment M_x für einen Querschnitt C , wenn y die Ordinate der Einflußfläche für eine Last $G = 1$ bezeichnet,

$$M_x = \int y \cdot p dx = p \cdot \text{Fläche } A_2 D_2 B_2 = \frac{p x x'}{2} = \frac{p x (l-x)}{2} \quad \dots \quad 105.$$

2. Für ein System ruhender Einzellasten $P'_1 P'_2 \dots P_1 P_2$, welche in den Abständen $z'_1 z'_2 \dots z_1 z_2$ von der rechten bzw. linken Stütze liegen, ist, wenn $y'_1 y'_2 \dots y_1 y_2 \dots$ die zugehörigen Ordinaten bezeichnen,

$$M_x = [\Sigma (P' y') + \Sigma (P y)] \frac{H}{G} \quad \dots \quad 106.$$

In dieser Form erscheint der Ausdruck für die Konstruktion des Wertes M_x direkt geeignet. Macht man $H = G$ und setzt $y' = \frac{C_2 D_2}{x'} z'$ bzw. $y = \frac{C_2 D_2}{x} z$, so erhält man den für die Berechnung brauchbaren Ausdruck:

$$M_x = \frac{x'}{l} \Sigma (P z) + \frac{x}{l} \Sigma (P' z') \quad \dots \quad 107.$$

3. Eine gleichmäßig verteilte bewegliche Belastung erzeugt das größte, stets positive Moment bei voller Belastung. Ist q die Last pro Einheit, so ist im Besonderen:

$$\max (+ M_x) = \frac{q x x'}{2} = \frac{q x (l-x)}{2} \quad \dots \quad 108.$$

4. Wir untersuchen in Folgendem ein System beweglicher Einzellasten und wollen uns hierbei einer etwas anderen Bezeichnungsweise bedienen, als wir sie oben angewendet haben. Wir fragen zunächst nach dem größten Moment, welches eine solche Belastungsart in einem bestimmten Querschnitt erzeugt. Diese Aufgabe ist nach § 20, S. 271, Absatz 4 ganz allgemein schon gelöst, da die Einflußlinie ein Dreieck bildet; demungeachtet wollen wir den Vorgang hier noch einmal schildern.

Aus dem graphisch dargestellten Einflusse, den jede Last auf das Moment M_x ausübt, ist ersichtlich, daß, um $\max M_x$ zu erzeugen, bei gegebener Auswahl verschiedener Lastsysteme man für jenes sich entschließen wird, welches möglichst viele und möglichst große Lasten bei möglichst kleinem Radstand enthält. Man wird das Lastsystem so stellen, daß der Teil desselben, welcher die größten Lasten in kleinsten Abständen aufweist, dem Querschnitte möglichst zugekehrt ist. Denkt man sich nun das so gewählte System in einer bestimmten Lage um Δz nach rechts verschoben, so wird,

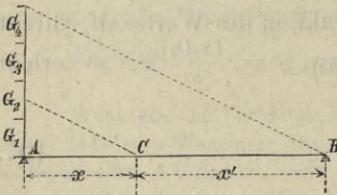
so lange keine Last über C schreitet, jedes z sich um $+\Delta z$, hingegen jedes z' sich um $-\Delta z$ ändern. Die Änderung des Momentes läßt sich darstellen durch:

$$\Delta M_x = \frac{x x'}{l} \left[\frac{\Sigma P}{x} - \frac{\Sigma P'}{x'} \right] \Delta z \dots \dots \dots 109.$$

Bedenkt man, daß die beiden Ausdrücke innerhalb der Klammer die Lasten auf die Längeneinheit auf der Strecke links und rechts von C darstellen, so sieht man, daß das System, wenn M_x wachsen soll, nach rechts oder links zu verschieben ist, je nachdem die auf die Längeneinheit wirksame Last links oder rechts vom Querschnitte die größere ist. Die Verschiebung hat immer nach der Seite zu erfolgen, auf welcher sich die kleinere Einheitslast befindet. Muß man, um M_x zum Maximum zu machen, das System nach rechts verrücken und kommt hierdurch links eine neue Last auf den Träger oder tritt eine andere rechts ab, so wird die Ungleichheit um so größer, sodaß die Verschiebung noch weiter fortzusetzen ist. Eine Änderung des Vorzeichens von ΔM kann nur stattfinden, wenn eine Last den Punkt C überschreitet. Man darf daher mit der Verschiebung zunächst nur so lange fortfahren, bis eine Last in den fraglichen Querschnitt gelangt. Nennen wir diese Last \bar{P} und wird die Einheitslast rechts größer oder kleiner als die Einheitslast links, je nachdem man \bar{P} zum rechten oder linken Teil rechnet, so findet unter \bar{P} das Maximum statt; wenn nicht, so hat man als \bar{P} die nächste Last jener Seite zu wählen, für welche in beiden obigen Fällen die Einheitslast die größere war.

Setzt man $p = \frac{\Sigma P + \Sigma P'}{l}$, die auf die Längeneinheit des ganzen Trägers entfallende Last, wenn die Summe der Lasten sich auf alle Werte bezieht, welche auf dem Träger für das fragliche Moment Platz finden, und beginnt man von links nach rechts

Fig. 58.



die Lasten zusammenzuzählen, so wird der Wert $p x$ überschritten, sobald man \bar{P} , die Last, unter welcher das Maximum eintritt, hinzufügt, woraus man sofort \bar{P} erkennt.

Trägt man (Fig. 58) die Lasten, welche auf AB von links nach rechts Platz finden, von A aus nach oben auf, verbindet den Endpunkt dieser Lastsumme mit B und zieht durch den fraglichen Querschnitt C

eine Parallele, so trifft diese jene Last, welche über C stehen muß, um M_x zum Größtwerth zu machen.

§ 28. Übersichtliche Darstellung der Querkräfte und der Momente bei direkter Belastung. Nach dem Vorhergegangenen ist man imstande, für einen gegebenen Querschnitt die Querkräfte und Momente durch Zeichnung und Rechnung zu bestimmen. Dehnt man das Verfahren auf eine Reihe von Querschnitten des gegebenen Trägers aus und stellt die erhaltenen Resultate Q_x und M_x als Ordinaten am entsprechenden Querschnitte dar, so erhält man ein Bild der Verteilungsweise dieser Größen, allgemein eine Querkräfte- bzw. Momentenkurve. Für die Berechnung sind die entwickelten Formeln bequem, für die Konstruktion führt nachstehendes Verfahren meist rascher zum Ziel.

Für ein ruhendes System von Einzellasten zeigt Fig. 59 die Konstruktion der Querkräfte und Momente. Man trägt zur Bildung des geradlinigen Kräftepolygons die Werte G der Reihe nach auf einer Geraden auf und zieht nach den so erhaltenen Punkten von einem beliebig gewählten Pol die Strahlen, zu diesen aber Parallele durch die Lastangriffspunkte, so sind die Momente den Ordinaten zwischen der Schlußlinie und dem Seilpolygon proportional und zwar ist für einen beliebigen Punkt

$$M_x = y H, \dots \dots \dots 110.$$

wenn H der Polabstand ist. Wird H nach dem Kräftemaßstab aufgetragen, so ist y auf dem Längenmaßstabe abzumessen und umgekehrt. Macht man die Längeneinheit gleich H Momenteneinheiten (Metertonnen), so erhält man einen Maßstab, auf dem man y als Momente direkt ablesen kann. Die Ordinaten des staffelförmigen Polygons geben die Querkräfte Q_x in jedem Punkt; die Abstände $B_1 C_1$ und $E_1 B_1$ sind die Stützdrücke in A und B .

Das $max M_x$ für den ganzen Träger findet an der Angriffsstelle jener Last statt, in welche der Punkt B_1 des Kräftepolygons fällt. Trifft B_1 mit einem Lasttrennungspunkt des Kräftepolygons zusammen, so wird die Seite des Seilpolygons, welche diesem Lasttrennungspunkte entspricht, parallel zur Schlußlinie und das Moment längs dieser Seite konstant.

Fig. 59.

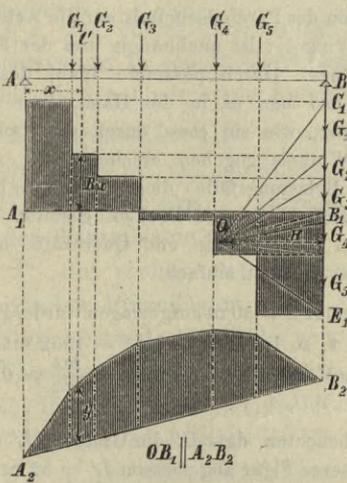
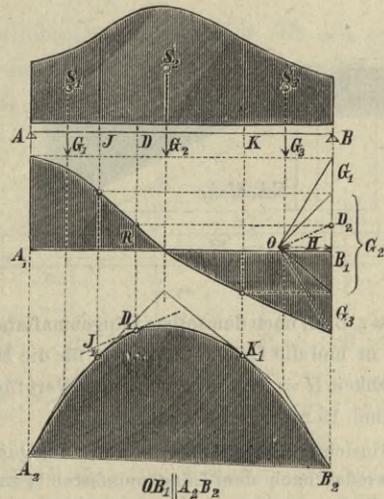


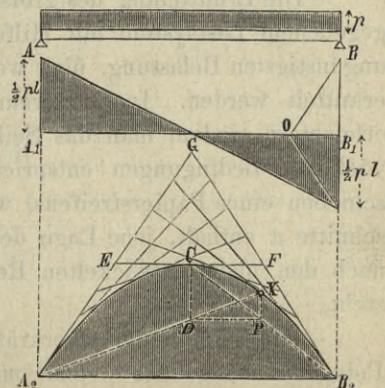
Fig. 60.



Wenn man es mit einer beliebigen stetig verteilten Belastung zu thun hat (Fig. 60), so kann man dieselbe in Teile zerlegen und durch Einzelkräfte ersetzen. Die Seiten des entsprechenden Seilpolygons sind Tangenten an die Seilcurve, die Berührungspunkte entsprechen den Trennungslinien. Die Querkraft in einem beliebigen Querschnitte D wird durch die Strecke $B_1 D_2$ am Kräftepolygon gegeben, deren Endpunkte den Parallelen zur Schlußlinie und zur Tangente an das Seilpolygon in D_1 entsprechen.

Für eine gleichförmig verteilte Belastung werden die Querkräfte durch die Ordinaten einer Geraden gegeben, welche durch die Mitte der Linie AB geht (Fig. 61). Die Momente werden durch die Ordinaten einer Parabel dargestellt. Zum Zeichnen derselben kann man sich der aus der Figur ersichtlichen Methode bedienen, wobei man die Curve als Eingehüllte ihrer Tangenten erhält, oder — was rascher zum Ziele führt — direkt eine Schablone verwenden.

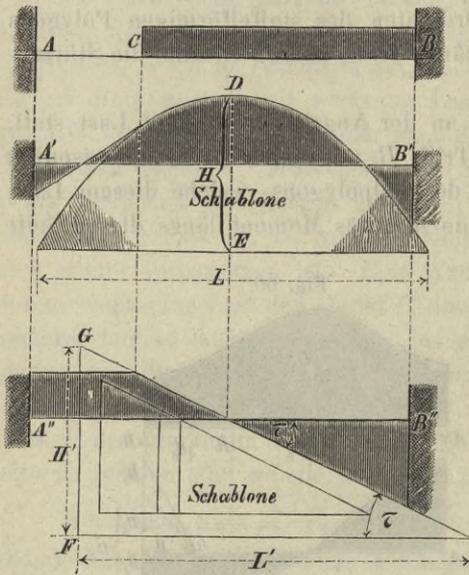
Fig. 61.



Über die Anwendung solcher Hilfsmittel wird bei der graphischen Behandlung der durchlaufenden und der Träger mit freischwebenden Stützpunkten Näheres gezeigt, hier sei vorläufig das Folgende bemerkt.

Ist ein Teil CB (Fig. 62) eines Trägers AB , der an den Enden irgendwie festgehalten sein mag, mit p für die laufende Einheit gleichförmig belastet und trägt man die Momente als Strecken auf, so entspricht dem belasteten Stücke eine Parabel von lotrechter Achse. Der Parameter dieser Parabel ist nur

Fig. 62.



von p , nicht aber von der Belastungs- und Felderlänge abhängig. Durch eine passende Wahl des Momentenmafsstabes hat man es in der Hand, eine bestimmte Parabel, welche man sich ein für allemal als Schablone darstellt, für die verschiedensten Belastungs- und Felderlängen zu benutzen, indem man sie in angemessener Weise verschiebt. Zur Zeichnung der Momentenkurve des belasteten Stückes ist dann nur die Kenntnis zweier Bedingungen notwendig, es genügt also, z. B. das Moment an zwei Punkten der belasteten Strecke zu kennen, um sofort die Schablone anlegen zu können.

Die Querkräfte innerhalb der belasteten Strecke stellen sich durch eine Gerade dar, welche durch die Projektion des Parabelscheitels auf die Achse $A''B''$ geht. Der Winkel τ ist unabhängig von der Feld- und Belastungslänge. Durch passende Wahl des Kräfte- mafsstabes hat man es in der Hand, eine und dieselbe Neigung, wie sie etwa durch die Kante eines hölzernen Winkels gegeben erscheint, für alle einschlägigen Belastungsfälle dieser Art zu benutzen. Mit Parabelschablone und Dreieck gestaltet sich die Konstruktion der Momente und Querkräfte mithin in vielen Fällen äußerst einfach.

Ist z. B. L , nach demselben Längenmafsstabe, nach welchem $AB = 50$ m aufgetragen wurde, gemessen, gleich 52 m und die Last f. d. Einheit für die Momente $p = 4$ t, so ist $H = \frac{1}{8} p L^2 = 1352$ mt, da nun in Wirklichkeit $H = 20,5$ mm, so ist der Wert für die Einheit des Momenten- mafsstabes $= \frac{20,5}{1352} = 0,015$ mm oder es sind 15 mm = 1000 mt.

Hinsichtlich des Mafsstabes für die Querkräfte ist zu beachten, daß H' die Größe $p L'$ darstellt. Ist also wieder nach dem Längenmafsstab (1 mm = 1 m) unserer Figur abgemessen $L' = 52$ m und hat man für die Querkräfte $p = 4,2$ t f. d. lfd. m angenommen, so bedeutet H' die Größe $52 \cdot 4,2 = 218,4$ t. Nun ist aber in Wirklichkeit $H' = 24,5$ mm, man hat daher für die Einheit des Kräfte- mafsstabes $\frac{24,5}{218,4} = 0,112$, d. h. man hat 100 t = $11,2$ mm zu machen.

Ist nur ein Teil des Trägers gleichmäfsig belastet, so entspricht diesem Teile eine Parabel als Momentenkurve, dem unbelasteten eine Gerade. Da die gleichmäfsige volle Belastung zugleich die ungünstigste ist, bedarf die Konstruktion dieses Falles hier keiner weiteren Betrachtung.

Die Ermittlung des gröfsten Momentes für einen beliebigen Querschnitt kann bei gegebenem Lastsystem mit Hilfe der Einflufsline oder mit Hilfe eines Seilpolygons der ungünstigsten Belastung, über welche nach dem Früheren zu entscheiden ist, entsprechend ermittelt werden. In letzterem Falle kann man sich aber die Aufgabe bedeutend erleichtern, indem man das Seilpolygon für ein Lastsystem, welches den in § 27 entwickelten Bedingungen entspricht, ein für alle Male konstruiert und dann durch Verschieben eines Papierstreifens, welcher die Trägerenden und die zu untersuchenden Querschnitte x enthält, jene Lage der Schluflinien des Seilpolygons ermittelt, in welcher die nach den oben entwickelten Regeln zu bestimmende Last am fraglichen Querschnitte steht.

Hinsichtlich der Querkräfte ist man in der Lage, direkt die Konstruktion eines Polygons anzugeben, welche $\max Q_x$ und $\min Q_x$ jedes einzelnen Querschnittes zeigt.

Man trage (T. II, F. 1) von der linken Stütze der Reihe nach von unten nach oben die einzelnen Kräfte $G_1 G_2 G_3$ auf und von der rechten Stütze aus nach links die Abstände der Kräfte, wobei man sich G_1 über der rechten Stütze stehend denkt. Konstruiert man nun ein Seilpolygon, für welches man die rechte Stütze als Pol des Kräftepolygons annimmt, so geben die Ordinaten zwischen dieser und der Trägerachse die Werte $+ Q_{max}$, das zum obigen kongruente Polygon $- Q_{max}$ erstreckt sich von der linken Stütze aus beginnend nach abwärts. Die Richtigkeit erhellt aus dem Umstande, daß für irgend einen Querschnitt x die Ordinate die Summe $\frac{1}{l} \Sigma (P'x')$ darstellt (Gl. 101).

Für eine gleichmäßig verteilte, fortschreitende Last, die jedesmal nur bis zum fraglichen Querschnitt rechts oder links sich erstreckend reicht, wird das oben beschriebene Polygon zur Parabel, welche in B ihren Scheitel hat und auf der lotrechten Linie in A die Strecke $\frac{ql}{2}$ abschneidet.

Für die rasche Berechnung und übersichtliche Darstellung der für ein gegebenes Einzellastsystem in jedem Querschnitte C eines einfachen Trägers auftretenden Momente empfiehlt sich nachstehende Ausdrucksweise. Es seien:

P die in C liegende Last, die wir die

Querschnittskraft nennen wollen,

$P'_1 P'_2 P'_3$ die links von P angreifenden Einzellasten,

$P''_1 P''_2 P''_3$ die rechts von P angreifenden Einzellasten,

$a'_1 a'_2 a'_3$ die Abstände der links von P liegenden Lasten von P ,

$a''_1 a''_2 a''_3$ die Abstände der rechts von P liegenden Lasten von P ,

$M' = \Sigma P' a'$ das statische Moment aller links liegenden Lasten in Bezug auf C ,

$M'' = \Sigma P'' a''$ das statische Moment aller rechts liegenden Lasten in Bezug auf C ,

$R = \Sigma P' + P + \Sigma P''$ die Summe aller Lasten,

$u =$ Abstand des Querschnittes C von A ,

$v =$ Abstand des Querschnittes C von B ,

dann wird der Stützendruck in A und B :

$$A = \frac{1}{L} [v R + M' - M''],$$

$$B = \frac{1}{L} [u R - M' + M''],$$

die Querkraft Q' dicht links und jene dicht rechts von C :

$$Q' = A - \Sigma P',$$

$$Q'' = -B + \Sigma P'',$$

das Moment in C :

$$M = \frac{uv}{L} R - \frac{v}{L} M' - \frac{u}{L} M''.$$

Fig. 63.

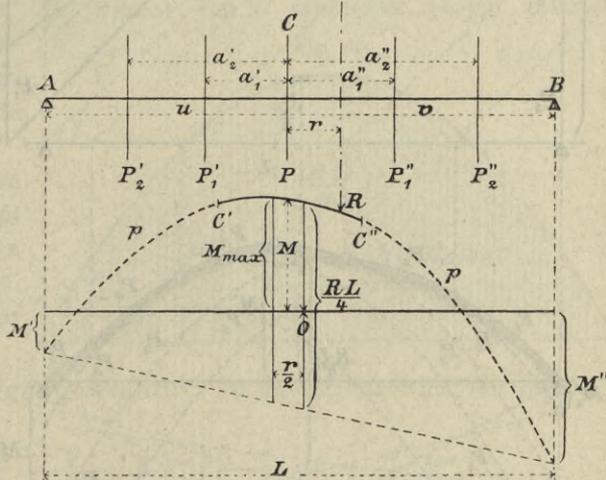
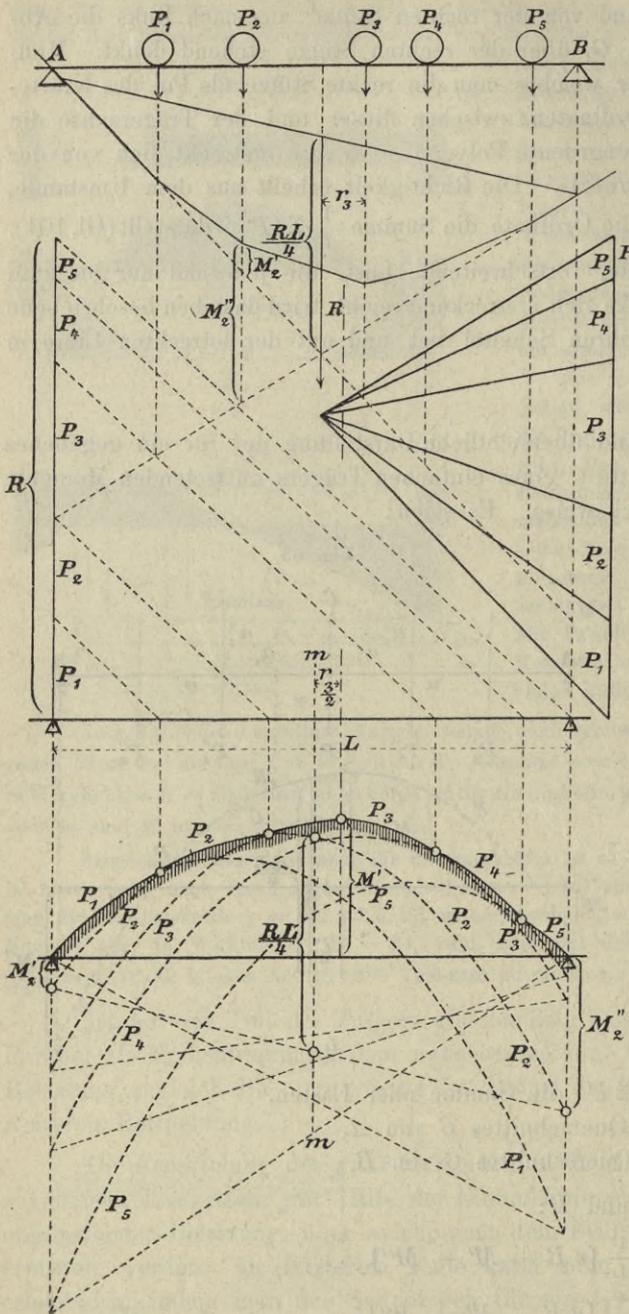


Fig. 64.



Ändert das System, also C , seine Lage und trägt man im Angriffspunkte der Last P das Moment als Ordinate auf, so erhält man eine Parabel p , die auf den Pfeilerlotrechten die Normalmomente M' und M'' abschneidet, da für $v = L - u$, $M = \varphi(u)$ die Gleichung einer Parabel darstellt. Von dieser Parabel hat nur jenes Stück $C' C''$ eine reelle Bedeutung, welches zwischen jenen Lagen von C liegt, die man erhält, wenn einerseits die äußerste Linkslast P' in A , andererseits die äußerste Rechtslast P'' in B zu stehen kommt.

Jeder Last des Systems P_n als Querschnittslast entspricht eine bestimmte Parabel p_n . So lange keine neue Last hinzu- bzw. hinwegkommt, bleiben alle Parabeln zu einander kongruent.

Beweis: Setzt man $v = L - u$, so ist in $M = \varphi(u)$ der Quotient von u^2 unabhängig von M' und M'' , also von den Größen a , während R für alle Parabeln unter der oben angegebenen Bedingung konstant bleibt. Nennt man die Verbindungslinie der Momente M' und M'' die Schlußlinie, so ergibt sich sofort, daß für alle Parabeln die von der Schlußlinie gemessene Ordinate in der Trägermitte konstant und gleich $\frac{RL}{4}$ wird.

Bedenkt man, daß $dv = -du$, so erhält man für das Maximum von M , wenn man mit

$$r = \frac{M'' - M'}{R} \dots 111.$$

den Abstand der Resultierenden aller Lasten von C bezeichnet, aus der Bedingung $\frac{dM}{du} = 0$ nach kurzer Rechnung $v - u = r$.

Diese Gleichung liefert mit der Bedingung $u + v = L$ die Werte:

$$v = \frac{L}{2} + \frac{r}{2}; \quad u = \frac{L}{2} - \frac{r}{2}.$$

Bei jeder Parabel steht der Scheitelpunkt, für welchen das jeweilige M ein Maximum wird, um $\frac{r}{2}$ von der Trägermitte ab, er liegt rechts von der Mitte 0, wenn $M' > M''$, links von der Mitte, wenn $M' < M''$ ist, d. h. in jeder Trägerhälfte, welcher das kleinere Normalmoment entspricht.

Für das Größtmoment erhält man nach kurzer Rechnung, wenn M_0 das Moment (die Parabelordinate) für die Trägermitte ist:

$$M_{\max} = M_0 + \frac{r^2}{4L} R \dots \dots \dots 112.$$

Jedem festen Querschnitt $u' v'$ entsprechen so viele Parabelordinaten, als Einzellasten vorhanden sind (Fig. 64); es ändern sich nur M' und M'' , liegt P_1'' (Fig. 63) an Stelle von P in C , so vermindert sich M'' um $a_1'' \Sigma P''$ und M' vermehrt sich um $a_1'' [P + \Sigma P']$. Das Moment bleibt dasselbe, gleichgiltig, ob P oder P' in C liegt, wenn

$$\frac{v'}{L} [\Sigma P' + P] - \frac{u'}{L} [\Sigma P''] = 0, \text{ d. h. :}$$

$$\frac{u'}{v'} = \frac{\Sigma P' + P}{\Sigma P''} \text{ oder: } \frac{v'}{v' + u'} = \frac{v'}{L} = \frac{\Sigma P''}{R},$$

d. h. die den benachbarten Lasten P und P_1'' entsprechenden Parabeln p und p_1'' schneiden sich in den Vertikalen eines Querschnittes, welche die Spannweite L ebenso unterteilt, als der Grenzpunkt von P und P_1'' die Summe von R sämtlicher Lasten unterteilt. Hiernach ist es leicht, die Schnittpunkte der einzelnen Parabeln zu ermitteln, was eine wichtige Kontrolle bietet (s. Fig. 64).

Da alle Parabeln unter der oben angegebenen Bedingung kongruent sind, kann man sich zum Zeichnen derselben einer Schablone bedienen, die man am besten in Kartonpapier ausschneidet (s. Fig. 65).

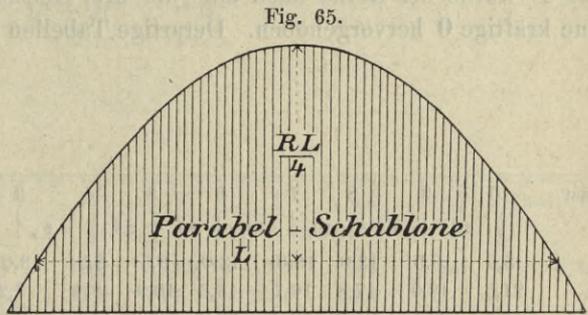


Fig. 65.

Berücksichtigung des Eigengewichtes. Ist das Eigengewicht der Brücke Q , so wird für das Gesamtmoment:

$$M = \frac{uv}{L} \left[\Sigma P' + P + \frac{Q}{2} + \Sigma P'' \right] - \frac{v}{L} M' - \frac{u}{L} M''.$$

Dieselbe Wirkung erzeugt ein gedachtes Einzellastsystem, dessen jeweilige Querschnittslast um $\frac{Q}{2}$ erhöht wird. Eine mit P vereinigte Einzellast $\frac{Q}{2}$ ersetzt das Eigengewicht.

Ist \bar{R} die Mittelkraft des gedachten Systems und \bar{r} ihr Abstand von der Querschnittslast $P + \frac{Q}{2}$, so wird wie oben:

$$\bar{r} = \frac{M'' - M'}{R + \frac{Q}{2}}; R + \frac{Q}{2} = \bar{R},$$

$$M = M_m + \frac{\bar{r}^2}{4L} \bar{R}.$$

Jeder Einzellast P_n entspricht eine Parabel p_n ; zu ihrer Zeichnung kann ebenfalls eine Schablone benutzt werden.

Das Maximum entsteht in der Regel unter jener Last, welche für die Trägermitte die gefährlichste ist. Der Abstand des gefährlichsten Querschnittes von der

Trägermitte wird gleichartig wie oben $\frac{r}{2}$; da $\bar{r} < r$, läßt sich ohne weiteres der Satz aussprechen, daß durch die Wirkung des Eigengewichtes der gefährlichste Querschnitt der Mitte näher gerückt wird.

Der oben für die Parabeln p hinsichtlich der Schnittpunkte entwickelte Satz hat auch für die anderen Parabeln Giltigkeit, da sich leicht nachweisen läßt, daß die Abscisse des Durchschnittspunktes zweier Parabeln p' und p'' sich nicht ändert, wenn zu dem Koeffizienten von uv in beiden Parabelgleichungen eine Konstante hinzutritt, welche der Eigengewichtsparabel entspricht.

Die graphische Behandlung eines Falles, dessen Verständnis nach dem Entwickelten keine Schwierigkeiten bereiten dürfte, zeigt Fig. 64. Die Regeln gelten endlich mit gewissen Abänderungen auch dann, wenn außer den Einzellasten auch noch vor und hinter dem System eine gleichmäßig verteilte Belastung sich erstreckt.

Um die Berechnung zu erleichtern, kann man mit Zimmermann eine bestimmte Last eines gegebenen Lastsystems als P annehmen, und zu jeder Last P'_m links von C die Werte a' , $\Sigma P'$, $\Sigma(a'P')$, ferner ebenso zu jeder Last P rechts von C die Werte a'' , $\Sigma P''$, $\Sigma a''P''$ schreiben. Dies ist in nachstehender Tabelle geschehen; hierbei sind die mittleren Maschinen eines Zuges Engerth'scher Lokomotiven einmal Brust an Brust, einmal alle Maschinen in gleicher Richtung dargestellt. Für P wurde der Reihe nach eine der drei Achsen von je 13 t angenommen und durch eine kräftige 0 hervorgehoben. Derartige Tabellen gestatten nicht nur die rasche Berech-

M o m e n t e n -

Mittlere Maschinen

Last	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1'	2'	3'	4'
	2,5	1,2	1,1	1,1	4,7	2,5	1,2	1,1	1,1	5,0	1,1	1,1	1,2	2,5
	8,5	8,5	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	13,0	13,0	13,0	13,0	13,0	13,0	8,5
a'	21,5	19,0	17,8	16,7	15,6	10,9	8,4	7,2	6,1	5,0	0	1,1	2,2	3,4
$\Sigma P'$	112,0	103,5	95,0	82,0	69,0	56,0	47,5	39,0	26,0	13,0	0	13,0	26,0	34,5
$\Sigma a'P'$	1397	1215	1053	822	605	402	309	238	144	65	0	14	43	72
a'	22,6	20,1	18,9	17,8	16,7	12,0	9,5	8,3	7,2	6,1	1,1	0	1,1	2,3
$\Sigma P'$	125,0	116,5	108,0	95,0	82,0	69,0	60,5	52,0	39,0	26,0	13,0	0	13,0	21,5
$\Sigma a'P'$	1535	1343	1172	926	695	478	376	295	187	94	14	0	14	34
a'	23,7	21,2	20,0	18,9	17,8	13,1	10,6	9,4	8,3	7,2	2,2	1,1	0	1,2
$\Sigma P'$	138,0	129,5	121,0	108,0	95,0	82,0	73,5	65,0	52,0	39,0	26,0	13,0	0	8,5
$\Sigma a'P'$	1687	1485	1305	1045	799	568	457	367	244	136	43	14	0	10

Maschinen in

Last	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1'	2'	3'	4'
	1,1	1,1	1,2	2,5	4,7	1,1	1,1	1,2	2,5	4,7	1,1	1,1	1,2	2,5
	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	13,0	13,0	13,0	8,5
a'	21,2	20,1	19,0	17,8	15,3	10,6	9,5	8,4	7,2	4,7	0	1,1	2,2	3,4
$\Sigma P'$	112,0	99,0	86,0	73,0	64,5	56,0	43,0	30,0	17,0	8,5	0	13,0	26,0	34,5
$\Sigma a'P'$	1537	1261	1000	753	602	472	334	210	101	40	0	14	43	72
a'	22,3	21,2	20,1	18,9	16,4	11,7	10,6	9,5	8,3	5,8	1,1	0	1,1	2,3
$\Sigma P'$	125,0	112,0	99,0	86,0	77,5	69,0	56,0	43,0	30,0	21,5	13,0	0	13,0	21,5
$\Sigma a'P'$	1674	1384	1109	848	687	548	395	258	134	64	14	0	14	34
a'	23,4	22,3	21,2	20,0	17,5	12,8	11,7	10,6	9,4	6,9	2,2	1,1	0	1,2
$\Sigma P'$	138,0	125,0	112,0	99,0	90,5	82,0	69,0	56,0	43,0	34,5	26,0	13,0	0	8,5
$\Sigma a'P'$	1826	1522	1232	956	786	638	471	319	181	102	43	14	0	10

nung der Querkräfte und Momente für einen gegebenen Querschnitt, sondern auch die schnelle Berechnung des absolut größten Momentes.

Die maßgebenden Formeln lauten mit Rücksicht auf die Bezeichnungen der Tabelle:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{L} [u \cdot v (P + \Sigma P' + \Sigma P'') - v \Sigma (P' a') - u \Sigma (P'' a'')] \\ Q_x &= \frac{1}{L} \left[\begin{array}{l} + P v \\ - P u \end{array} + (v \Sigma P'' - \Sigma P'' a'') - (u \Sigma P' - \Sigma P' a') \right] \end{aligned} \right\} \dots 113.$$

Wir lassen nunmehr ein Beispiel folgen:

Für einen Träger von 32 m Stützweite sei das Moment für einen Punkt im Abstände $x = 12$ m zu rechnen, wenn die mittleren Maschinen Brust an Brust stehen und an den fraglichen Querschnitt die Last 1' des Schemas zu stehen kommt. Wie ein Blick auf die Wertreihe der a zeigt, finden links von 1' = P die Lasten 1 bis 5, rechts von P die Lasten 2' bis 10' Platz. Es wird:

$$M_x = \frac{1}{32} [12 \cdot 20 (13 + 56 + 99) - 20 \cdot 402 - 12 \cdot 837] = 694,9 \text{ mt.}$$

Für die Querkraft in demselben Punkte erhält man:

$$Q_x = \frac{1}{32} \left[\begin{array}{l} + 13 \cdot 20 \\ - 13 \cdot 12 \end{array} + (20 \cdot 99 - 837) - (12 \cdot 56 - 402) \right] = \begin{array}{l} + 35,39 \text{ t} \\ + 22,39 \text{ t} \end{array}$$

wobei sich das obere Zeichen auf einen Schnitt dicht links, das untere auf einen Schnitt dicht rechts von 1' bezieht.

Liegen n Lasten am Träger, so läßt sich das größte Moment, welches entsteht, mit Rücksicht auf Formel 112 schreiben:

$$M_n = \frac{RL}{4} - \frac{M' + M''}{2} + \frac{r^2 R}{4L}$$

S c h e m a .

Brust an Brust.

5'	6'	7'	8'	9'	10'	11'	12'	13'	14'	15'	Last
4,7	1,1	1,1	1,2	2,5	4,7	1,1	1,1	1,2	2,5		
8,5	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	t
5,9	10,6	11,7	12,8	14,0	16,5	21,2	22,3	23,4	24,6	27,1	a'' m
43,0	56,0	69,0	82,0	90,5	99,0	112,0	125,0	138,0	146,5	155,0	$\Sigma P''$ t
122	260	412	578	697	837	1113	1403	1707	1916	2147	$M'' = \Sigma P'' a''$ mt
4,8	9,5	10,6	11,7	12,9	15,4	20,1	21,2	22,3	23,5	26,0	a'' m
30,0	43,0	56,0	69,0	77,5	86,0	99,0	112,0	125,0	133,5	142,0	$\Sigma P''$ t
75	198	336	488	598	729	990	1265	1555	1755	1976	$M'' = \Sigma P'' a''$ mt
3,7	8,4	9,5	10,6	11,8	14,3	19,9	20,1	21,2	22,4	24,9	a'' m
17,0	30,0	43,0	56,0	64,5	73,0	86,0	99,0	112,0	120,5	129,0	$\Sigma P''$ t
42	151	274	412	512	634	881	1142	1418	1608	1820	$M'' = \Sigma P'' a''$ mt

gleicher Richtung.

5'	6'	7'	8'	9'	10'	11'	12'	13'	14'	15'	Last
4,7	1,1	1,1	1,2	2,5	4,7	1,1	1,1	1,2	2,5		
8,5	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	13,0	13,0	13,0	8,5	8,5	t
5,9	10,6	11,7	12,8	14,0	16,5	21,2	22,3	23,4	24,6	27,1	a'' m
43,0	56,0	69,0	82,0	90,5	99,0	112,0	125,0	138,0	146,5	155,0	$\Sigma P''$ t
122	260	412	578	697	837	1113	1403	1707	1916	2147	M'' mt
4,8	9,5	10,6	11,7	12,9	15,4	20,1	21,2	22,3	23,5	26,0	a'' m
30,0	43,0	56,0	69,0	77,5	86,0	99,0	112,0	125,0	133,5	142,0	$\Sigma P''$ t
75	198	336	488	598	729	990	1265	1555	1755	1976	M'' mt
3,7	8,4	9,5	10,6	11,8	14,3	19,0	20,1	21,2	22,4	24,9	a'' m
17,0	30,0	43,0	56,0	64,5	73,0	86,0	99,0	112,0	120,5	129,0	$\Sigma P''$ t
42	151	274	412	512	634	881	1142	1418	1608	1820	M'' mt

Dieser Ausdruck läßt sich auch in der Form geben:

$$M_n = AL - B + \frac{C}{L}.$$

Kommt eine neue Last hinzu, so wird sich finden:

$$M_{n+1} = A'L - B' + \frac{C'}{L}.$$

Beide Ausdrücke werden für einen bestimmten Wert von L einander gleich, welchen Wert wir die Grenzstützweite nennen wollen.

Es lassen sich für ein gegebenes Lastsystem mit Hilfe des Zimmermann'schen Momentenschemas leicht die Werte:

$$A = \frac{R}{4}; \quad B = \frac{M' + M''}{2}; \quad C = \frac{r^2 R}{4}$$

für jedes Lastsystem ermitteln.

In etwas umständlicher Weise durch Einführung des Abstandes x der ersten Last von der linken Stütze als Unbekannte, hat Labes die Werte $A B C$, sowie die Grenzstützweiten für den Belastungszug der preussischen Brückenverordnung ermittelt. Man kann auch unmittelbar jene Schlußlinie des Seilpolygons eintragen, welches das größte Moment enthält.

Man vergleiche im Besonderen: Bestimmung größter Momente für eiserne Brücken mit geringen Stützweiten von Puller. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 381. — Bestimmung größter Momente und Querkräfte für Eisenbahnbalkenbrücken von J. Labes. Centralbl. d. Bauverw. 1899, S. 173.

1	2			3	4	5	6	7	8	9		10
	$M_{\max} = AL - B + \frac{C}{L}$									Auf der Brücke befindlich die Lasten	M_{\max} tritt ein unter der Last	
	Die Angaben gelten für ein Gleis, sowie für m und t.			No.	No.					von	bis	
	A	B	C									
M_3	10,0	18,575	0,026	5-7	6	0,03	—	3,27	5,09			
M_4	13,25	36,125	5,152	4-7	6	—	0,31	5,09	7,56			
M_5	15,0	48,725	0,256	4-8	6	—	0,07	7,56	11,71			
M_6	17,25	75,61	6,74	3-8	5	0,22	—	11,71	12,84			
M_7	20,25	114,16	6,80	2-8	5	—	0,29	12,84	15,10			
M_8	23,25	162,81	57,4	1-8	5	—	0,77	15,10	17,26			
M_9	25,00	190,81	19,1	1-9	5	—	0,44	17,26	21,08			
M_{11}	31,75	332,29	2,6	1-11	6	0,14	—	21,08	22,49			
M_{12}	35,00	408,05	63,0	1-12	6	0,67	—	22,49	24,16			
M_{13}	38,25	492,6	204,1	{ 1-13 4-16	6 11	1,17 —	{ — 1,17 }	24,16	27,70			
M_{14}	41,25	570,4	61,4	4-17	11	—	0,61	27,70	31,63			
M_{15}	43,50	640,1	16,0	3-17	10	—	0,30	31,63	32,23			
M_{16}	46,50	740,2	125,6	2-17	10	—	0,82	32,23	34,51			
M_{17}	49,50	850,2	348,9	1-17	10	—	1,33	34,51	36,80			
M_{18}	52,50	954,4	119,9	1-18	10	—	0,76	36,80	42,83			
M_{19}	55,50	1080,2	4,9	1-19	10	—	0,15	42,83	46,54			
M_{20}	58,50	1219,8	2,8	1-20	11	—	0,23	46,54	52,07			
M_{21}	61,50	1376,8	44,1	1-21	11	0,42	—	52,07	56,82			
M_{22}	64,50	1551,7	301,9	1-22	11	1,08	—	56,82	62,68			
M_{23}	67,50	1748,3	838,1	1-23	11	1,76	—	62,68	—			
M_{24}	—	—	—	1-24	12	1,77	—	—	70,0			
M_{26}	—	—	—	1-26	13	2,52	—	—	80,0			
M_{28}	—	—	—	1-28	13	3,95	—	—	90,0			
M_{31}	—	—	—	1-31	15	3,64	—	—	100,0			
M_{37}	—	—	—	1-37	18	4,10	—	—	120,0			
M_{43}	—	—	—	1-43	21	3,66	—	—	140,0			

§ 29. Querkräfte und Momente bei indirekter Belastung. Bestimmung der Querkräfte. Liegt der fragliche Querschnitt im Abstände x von A und innerhalb zweier Querträger, so nimmt die Einflusslinie, deren Ordinaten an den Lastangriffspunkten die Werte von Q_x für eine Last G darstellen, die aus Fig. 66 ersichtliche Form $A' F J' E B'$ an.

Man ersieht, dass eine Last stets eine positive Querkraft erzeugt, so lange sie zwischen J' und der rechten Stütze liegt, eine negative, wenn sie innerhalb J' und der linken Stütze bleibt. Für die Abstände $J' D' = c_2$, $C' J' = c_1$, $C' D' = c$ hat man

$$c_1 = \frac{c}{l-c} x_1, \quad c_2 = \frac{c}{l-c} x_2 \quad \dots \quad 114.$$

Fig. 66.

1. Für eine gleichmäßig auf den ganzen Träger verteilte Belastung ist die Querkraft Q_x durch das Produkt aus der Last für die Längeneinheit p in die Fläche $A' B' E J' F A'$ gegeben; man erhält, ähnlich wie unter § 27 vorgehend, nach kurzer Rechnung:

$$Q_x = \frac{p}{2} \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{l-c} \quad \dots \quad 115.$$

Dieser Ausdruck ist für alle Punkte innerhalb CD konstant. Fig. 67 zeigt die Konstruktion.

2. Für ein System ruhender Lasten ergibt sich, wenn z' die Abstände der Lasten P' zwischen B und D von der rechten Stütze, z für Lasten P zwischen A und C von der linken Stütze und z'' jene zwischen J' und C von J' nach links bzw. z''' zwischen J und D nach rechts gerechnet werden und $G = 1$ gesetzt wird:

$$Q_x = \left\{ \sum (P' z') - \sum (P z) + \frac{l-c}{c} \left[\sum (P''' z''') - \sum (P'' z'') \right] \right\} \frac{1}{l} \quad \dots \quad 116.$$

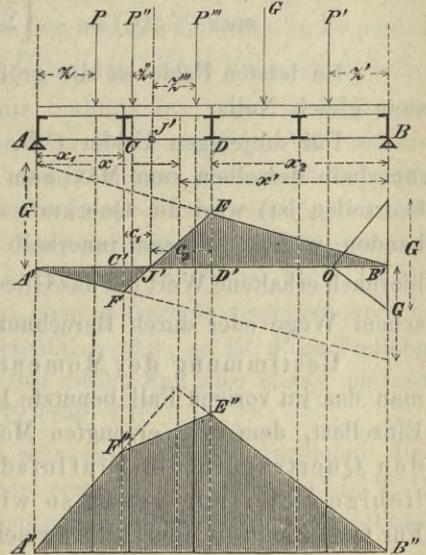


Fig. 68, S. 300 zeigt eine übersichtliche Darstellung für eine bestimmte Laststellung.

3. Eine fortschreitende, gleichförmig verteilte Last erzeugt das Maximum $max(+Q_x)$, wenn die Strecke $J' B$, das $max(-Q_x)$, wenn die Strecke $A J'$ belastet ist; man erhält:

$$max(+Q_x) = q \cdot \text{Fläche } J' E B' = \frac{q x_2^2}{2(l-c)},$$

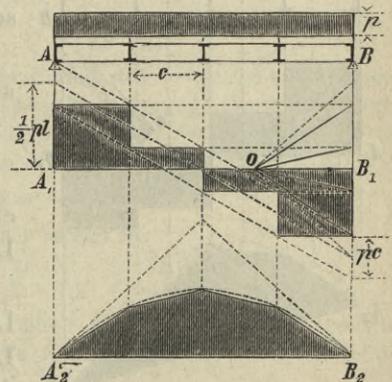
$$max(-Q_x) = q \cdot \text{Fläche } A' F J' = \frac{-q x_1^2}{2(l-c)}.$$

Demnach ist, wie ein Vergleich mit den Formeln 100 in § 27 (S. 288) zeigt, die Querkraft ebenso groß, wie sie für einen Träger ohne Querträger mit der Länge $(l-c)$ wäre.

4. Hat man es mit einem System beweglicher Einzellasten zu thun, so liegt der Fall ganz so, wie bei Bestimmung des Maximums einer Wirkung bei dreieckiger Einflussfläche und die Richtigkeit nachfolgender Regel wird sofort einleuchten.

Man belaste (Fig. 66) die Strecke $J' D' B'$, ordne die Lasten so, dass die schwersten dicht um D' zu liegen kommen und suche eine Last \bar{P} , für welche die Einheitsbelastung

Fig. 67.



der Strecke $J' D$ größer oder kleiner als die Einheitslast der Strecke $D' B'$ wird, je nachdem man \bar{P} einmal den Lasten links von D' , einmal jenen rechts von D' beizählt. Dann ist jene Stellung die ungünstigste, für welche \bar{P} eben über D liegt. Ist $D B$ gegen $J' D$ groß, so wird auf die Strecke $J' D$ meist gar keine Last zu liegen kommen.

Für die Bestimmung der größten negativen Querkraft gilt dasselbe hinsichtlich der Strecke $A J'$. Für die ungünstigste Stellung muß das in gleicher Weise ermittelte \bar{P} über C liegen. Zur Berechnung erhält man die Formel, wenn \bar{P} die über D und \bar{P}' die über C liegende Last ausdrückt:

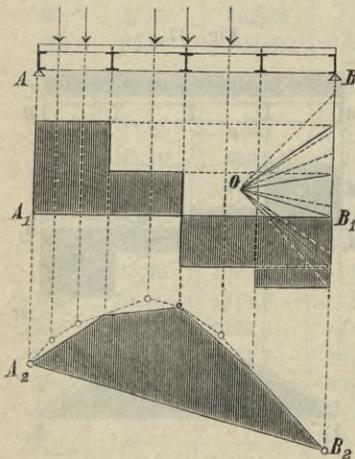
$$\begin{aligned} \max (+ Q_x) &= \left[\Sigma (P' z') + \bar{P} x_2 + \frac{l-c}{c} \Sigma (P'' z'') \right] \frac{1}{l} \Bigg| \\ \max (- Q_x) &= - \left[\Sigma (P z) + \bar{P}_1 x_1 + \frac{l-c}{c} \Sigma (P'' z'') \right] \frac{1}{l} \Bigg| \dots \quad 117. \end{aligned}$$

Im letzten Felde ist die größte positive, im ersten die größte negative Querkraft stets gleich Null.

Für diejenigen Felder CD , in welchen keine Einzellast liegen muß, um $+ Q_x$ innerhalb derselben zum Maximum zu machen (was nach dem vorigen Paragraphen zu beurteilen ist) wird die Querkraft ebenso groß wie in D , wenn keine Querträger vorhanden wären. Müssen innerhalb CD eine oder mehrere Lasten liegen, so ist der hiernach erhaltene Wert um das Glied $\frac{l-c}{c} \Sigma (P'' z'')$ zu vermehren, welches auf graphischem Wege oder durch Berechnung ermittelt werden kann.

Bestimmung der Momente in einem gegebenen Querschnitt. Konstruiert man das im vorigen Fall benutzte Polygon, dessen Ordinaten im Lastangriffspunkte einer Einzellast, dem in x erzeugten Momente M_x proportional sind, so sieht man, daß an den Querträgern die Einflußdreiecke und mithin die Momente für eine beliebige Belastung genau so wie ohne Rücksicht auf die Querträger werden. Für Querschnitte x innerhalb zweier Querträger tritt (Fig. 66) das Viereck $A'' B'' E'' F''$ an Stelle des Dreiecks. Für praktische Zwecke wird es daher stets genügen, nur die Momente an den Querträgern nach dem vorhin gezeigten Verfahren zu konstruieren und die so erhaltenen Punkte durch Gerade zu verbinden. Wir wollen jedoch noch einige Regeln zur Berechnung und Konstruktion der Werte M_x für x innerhalb CD anschließen.

Fig. 68.



1. Für eine volle gleichmäßige Last ergibt sich aus der Berechnung der Fläche $A'' F'' E'' B''$:

$$M_x = \frac{p}{2l} [x_1 x' (x_1 + c) + x_2 x (x_2 + c)]. \quad \dots \quad 118.$$

Dieser innerhalb CD gültige Ausdruck ist vom ersten Grade. Fig. 67, S. 299, zeigt die übersichtliche Darstellung der Momente in jedem Querschnitt.

2. Ruhendes Einzellast-System. Bezeichnet man die Lasten zwischen C und D mit \bar{P} und die Abstände dieser Lasten \bar{P} von C und D mit u und u' , das übrige nach der aus Fig. 66 ersichtlichen Weise, so ist:

$$M_x = \frac{x'}{l} \left[\Sigma (P z) + \frac{x_1}{c} \Sigma (\bar{P} u') \right] + \frac{x}{l} \left[\Sigma (P' z') + \frac{x_2}{c} \Sigma (\bar{P} u) \right]; \quad \dots \quad 119.$$

da die Glieder innerhalb der Klammer konstant sind, so ist M_x innerhalb CD vom ersten Grade. Fig. 68 zeigt die übersichtliche Zusammenstellung.

3. Da die volle gleichmäßige Belastung zugleich die gefährlichste hinsichtlich der Momente ist, wird auch, wenn $x' = l - x$:

$$\max M_x = \frac{p}{2l} [x_1 x' (x_1 + c) + x x_2 (x_2 + c)]. \dots 120.$$

4. Für die Bestimmung des grössten Momentes für ein System beweglicher Einzel-lasten rückt man das unter 2. bezeichnete System um Δz nach rechts und erhält:

$$\Delta M_x = \frac{x x'}{l} \left\{ \frac{\Sigma P + \frac{x-x_1}{c} \Sigma \bar{P}}{x} - \frac{\Sigma P' + \frac{x'-x_2}{c} \Sigma \bar{P}}{x'} \right\} \Delta z = \frac{x x'}{l} [p - p'] \Delta z,$$

wenn p und p' die Werte der Brüche innerhalb der Klammern bedeuten. Vergleicht man den gewonnenen Ausdruck mit dem für ΔM ermittelten, im Falle keine Querträger vorhanden, so ist die Ähnlichkeit unverkennbar. Die zwischen den Querträgern liegenden Lasten \bar{P} sind nach dem Verhältnis $\frac{x-x_1}{c}$ und $\frac{x'-x_2}{c}$ zu den Lasten links von C bzw. rechts von D zu schlagen. Faßt man eine bestimmte Stellung ins Auge, so muß man das System stets nach der Seite verschieben, welche dem kleineren Werte der auf die Längeneinheit verteilten Last entspricht. Das Auf- und Abrücken einer Last über die Stützen macht die Ungleichheit gröfser und zwingt zu weiterer Verschiebung nach derselben Seite. Anders verhält es sich, wenn durch die Verschiebung eine Last \bar{P} entweder eben in das fragliche Feld CD oder aus demselben kommt. In diesem Falle ist sie einmal als Last des fraglichen Feldes, das andere Mal eben auferhalb desselben stehend zu betrachten, wird hierbei einmal $p > p'$, das andere Mal $p < p'$, so ist diese Stellung die ungünstigste hinsichtlich der Momente. Es muß für diesen Fall also stets eine Last entweder in C oder in D stehen. Man vergl. S. 272, Fig. 51.

Für die Auflagerpunkte der Querträger erhält man zwei Werte, je nachdem dieselben einmal zum rechten, einmal zum linken Felde geschlagen werden. F. 5, T. II zeigt die übersichtliche Darstellung der Momente für den ganzen Träger. Die Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich.¹⁸⁾

Ein Beispiel der Berechnungs- und graphischen Bestimmungsweise eines mit Querträgern versehenen einfachen Trägers von 8 m Stützweite zeigt F. 1 bis 5 B, T. II. Als Eigengewicht des Trägers selbst wurde 0,2 t f. d. lfd. m angenommen.

Die Querkräfte, welche von dem Eigengewichte herrühren, berechnen sich wie für eine gleichförmig verteilte Last für die Querschnitte

	A	II	IV	VI	B
mit	0,8	0,4	0	- 0,4	- 0,8 t.

Das Eigengewicht der Querträger tritt als ein System von Einzellasten von je 0,8 t auf, wobei die äußersten in A und B außer Betracht bleiben können. Die hiervon stammende Querkraft rechnet sich nach Formel 116, wobei das letzte Glied des Trinoms entfällt, da zwischen den Querträgern eben keine Einzellasten angreifen; hieraus rechnet sich für x innerhalb der Querschnitte 1 und 2 z. B.:

$$Q = \frac{1}{8} [0,8 \cdot 4 + 0,8 \cdot 2 - 0,8 \cdot 2] = + 0,4 \text{ t.}$$

Innerhalb zweier Querträger ist die Querkraft konstant und beträgt in

A	II	IV	VI	B
+ 1,2	+ 1,2 + 0,4	+ 0,4 - 0,4	- 0,4 - 1,2	- 1,2 t.

In F. 1 B sind die Eigengewichts-Querkräfte graphisch durch feine volle Linien dargestellt. Zur Konstruktion der Maximalmomente wurden in F. 1 B die Einflußlinien für die Querschnitte A, II, IV, VI, B eingezeichnet.

¹⁸⁾ Ausführliches über die in den Paragraphen 27—29 dargestellten Sätze enthält in ähnlicher Weise entwickelt: Weyrauch. Maximalmomente einfacher Träger. Zeitschr. d. Arch- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1875, S. 467. — Stelzl. Theorie der Brückenträger. Wien 1880. Siehe auch die Werke von Culmann, Winkler, Müller-Breslau u. a.

Es ist hier vor allem zu untersuchen, ob hinsichtlich der ungünstigsten Belastungsweise für Punkte des ersten Feldes eine Last zwischen A und II zu stehen kommen muß oder nicht. Für dieses Feld trifft J (vergl. Fig. 66, S. 299) mit A zusammen. Betrachten wir zunächst in Querschnitt 1 unserer Tafelfigur die Last G_2 , zwischen A und C die Last G_1 ruhend, so wird die Einheitslast auf der Strecke AC , wenn wir G_2 zu AC rechnen: $\frac{5,9 + 5,9}{2} = 5,9$; die Einheitslast der Strecke CB : $\frac{5,9 + 3,5 + 4,9}{6} = 2,4$, wir haben daher das System nach rechts zu schieben. Denken wir uns die zweite Last zur Strecke CB gerechnet, so wird Einheitslast links $\frac{5,9}{2} = 2,95$, Einheitslast rechts $\frac{2 \cdot 5,9 + 3,5 + 4,9}{6} = 3,4$; wir haben daher das System nach links zu schieben und sehen zugleich, daß diese Stellung die ungünstigste ist, vorausgesetzt, daß wir die Lasten $G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$ im Auge haben, welche sämtlich Platz finden (1. Belastungsfall in F. 1 B). Für diesen Fall rechnet sich aus Gl. 117:

$$\max Q = \left[5,9 \cdot 4,65 + 3,5 \cdot 3,4 + 0,6 \cdot 4,5 + 5,9 \cdot 6 + \frac{8-2}{2} (5,9 \cdot 0,65) \right] \frac{1}{8} = 11,15 \text{ t.}$$

Es ist aber demungeachtet auch noch der Fall in Betracht zu ziehen, daß nur die Lasten $G_1 G_2 G_3 G_4$ am Träger Platz finden. Es läßt sich leicht wie oben zeigen, daß dann G_1 in II liegen müsse. Für diesen Fall wird:

$$\max Q' = [5,9 \cdot 6 + 5,9 \cdot 4,65 + 5,9 \cdot 3,30 + 3,5 \cdot 2,05] \frac{1}{8} = 11,207 \text{ t.}$$

Wir sehen hier, daß dieser Belastungsfall der ungünstigere ist, wenn auch das Ergebnis nur sehr wenig von dem vorigen abweicht. Darf nun schon im ersten Felde keine Last liegen, um Q zum Maximum zu machen, so ist dies in den übrigen Feldern, wo der Abstand des Punktes J (vergl. Fig. 66) vom nächsten rechten Querträger noch kleiner wird, um so weniger der Fall. Es wird daher in unserem Beispiel in jedem Felde die Querkraft zum Maximum, wenn am nächsten rechten Querträger die erste Last liegt. Dies ist aber zugleich die ungünstigste Stellung für diese Querschnitte, wenn keine Querträger in denselben vorhanden wären. Hieraus erklärt sich die Konstruktion in F. 1 B. Das eingezeichnete staffelförmige Polygon mm entspricht den $\max Q$. Die Eckpunkte dieses Polygons liegen auf einem in der Figur gestrichelt dargestellten Streckenzug, welcher mit dem Polygone mm in F. 1 A übereinstimmt.

So wie oben durch Berechnung, kann man mit Hilfe der Einflußlinien durch Konstruktion für beide Laststellungen die G_1 in C (Laststellung 1) und G_2 in C (Laststellung 2) die Werte Q ermitteln. Jene Ordinaten, welche anderen als Lasten von 5,9 t entsprechen, sind nach dem bezüglichen Verhältnis graphisch zu reduzieren.

Für die Berechnung der Momente gilt hinsichtlich der zufälligen Last, soweit die Punkte A, II, IV, VI, B in Betracht kommen, ganz dasselbe, wie in dem Beispiele für direkte Lastübertragung. Die gleichförmig verteilte Eigenlast erzeugt Momente, die den Ordinaten einer Parabel entsprechen. Die Einzelwerte rechnen sich z. B. für den Querschnitt II nach $M_{II} = \frac{p \cdot x \cdot x'}{2} = \frac{0,2 \cdot 2 \cdot 6}{2} = 1,2 \text{ mt.}$ Die Parabel ist als Kurve h in F. 5, T. II eingetragen. Die Querträgerdrücke repräsentieren ein System gleicher ruhender Einzellasten, die Momente rechnen sich nach Gl. 107 bzw. 119 z. B. für Querschnitt II :

$$M_{II} = \frac{2}{8} (0,8 \cdot 6 + 0,8 \cdot 4 + 0,8 \cdot 2) = 2,4 \text{ mt.}$$

Das Polygon q in F. 5 giebt die den einzelnen Querschnitten entsprechenden Werte.

Damit für einen Querschnitt zwischen zwei Querträgern das Maximum des Momentes eintrete, muß eine Last am rechten oder linken Querträger liegen. Wir untersuchen das Feld II, IV . Für die Trägermitte gilt als ungünstigste Stellung G_2 über IV ; für diese Lage wird das Moment in II durch die Strecke y_1 in F. 3 gegeben, welche um die Querträgerentfernung $c = 2 \text{ m}$ vom Querschnitt 2 absteht. Trägt man y_1 in F. 5 über Querschnitt II als Ordinate auf, und verbindet den Endpunkt derselben mit $\max M$ in IV , so giebt die Gerade die Momente für alle Querschnitte zwischen II und IV für die bezeichnete Stellung. Für Querschnitt II erzeugt G_1 über II das Maximalmoment, für diesen Belastungsfall giebt y_2 in F. 3 das in IV entstehende Moment. In entsprechender Weise wie oben erhält man eine zweite Gerade in F. 5, welche die Momente für alle Querschnitte zwischen II und IV hinsichtlich dieser zweiten Laststellung giebt. Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte, für welchen beide Stellungen gleich ungünstig sind. In praktischen Fällen kann die Konstruktion dieser Linien, welche stets einspringende Winkel zwischen den Querträgern bilden, unterbleiben.

§ 30. Ersatz eines Einzellastensystems durch eine gleichmäÙig verteilte Last. Obwohl es keinerlei Schwierigkeiten macht, die Querkräfte und Momente für jeden einzelnen Querschnitt unter Zugrundelegung der wirklichen Lastenzüge zu bestimmen, so führt doch in vielen Fällen, namentlich wenn man es mit großen Spann-

weiten zu thun hat, eine Berechnung unter Annahme einer gleichförmig verteilten Last rascher zum Ziele und vereinfacht die Untersuchung.

Es sei $\max M_x$ das Moment, $\max Q_x$ die Querkraft, welche in einem beliebigen Querschnitte x durch ein Einzellastsystem erzeugt wird, $q_1 \varphi(x)$ und $q_2 \psi(x)$ seien die an derselben Stelle durch eine gleichförmig verteilte Belastung entstehenden Werte des Momentes und der Querkraft, wobei φ und ψ von der Trägerart abhängige Funktionen bezeichnen. φ und ψ besitzen also andere Formen bei einfachen, andere bei kontinuierlichen, bei Bogenträgern u. s. w. Setzt man die Maximalwerte einander gleich, so erhält man:

$$q_1 = \frac{\max M_x}{\varphi(x)}, \quad q_2 = \frac{\max Q_x}{\psi(x)} \dots \dots \dots 121.$$

Man sieht, daß q_1 und q_2 im allgemeinen Funktionen von x , also von der Lage des Querschnittes abhängig sind. Ebenso sind q_1 und q_2 untereinander keineswegs selbst für denselben Querschnitt gleich. Die Bestimmung einer gleichförmigen Belastung, welche in jedem Querschnitte dasselbe größte Moment und dieselbe größte Querkraft erzeugt, wie ein bewegliches System von Einzellasten, ist daher unmöglich. Dagegen kann man sowohl diejenige gleichmässig verteilte Belastung ermitteln, welche in einem Querschnitte dasselbe größte Moment erzeugt, wie der Lastenzug, als auch diejenige, welche ebenso große Maximal- und Minimal-Querkräfte hervorruft, wie der Lastenzug in seiner ungünstigsten Stellung. Die Ermittlung dieser Belastungen (Ersatzlasten, Belastungs-Äquivalente), soll in nachstehendem für den einfachsten, aber zugleich auch wichtigsten und häufigsten Fall, den Träger auf zwei Stützen, vorgeführt werden.

a) Gleichmässig verteilte Belastung q_b für die Längeneinheit zur Ermittlung der größten positiven und negativen Querkräfte. In einem um x_1 vom rechten Auflager entfernten Querschnitte wird durch eine gleichmässig verteilte Belastung die größte Querkraft dann hervorgerufen, wenn nur der Balkenteil rechts vom Querschnitte, also bis zum rechten Auflager, belastet, der Trägerteil links vom Querschnitte aber unbelastet ist. Dann ist für den betreffenden Querschnitt:

$$\max Q = \frac{q_b x_1^2}{2L}.$$

Falls ein System von Einzellasten den Träger belastet, so ist die Lastenlage, welche die größte Querkraft im Querschnitt erzeugt, in den allermeisten Fällen diejenige, bei welcher die erste Last P am Querschnitte liegt, die anderen Lasten $P'_1, P'_2 \dots$ sich rechts vom Querschnitte befinden (vergl. den Ausdruck für A auf S. 293; M' ist hier gleich Null):

$$\max Q_x = A = \frac{1}{L} [x_1 R - M''].$$

Die Gleichsetzung beider für $\max Q_x$ gefundenen Ausdrücke ergibt denjenigen Wert q_b , welcher in dem betreffenden Querschnitte gleiches $\max Q$ erzeugt, wie das System von Einzellasten. Man erhält:

$$q_b = \frac{2R}{x_1} - \frac{2M''}{x_1^2} \dots \dots \dots 122.$$

Der vorstehende Ausdruck giebt das bemerkenswerte Ergebnis, daß die Größe der in Betreff der Querkräfte stellvertretenden Belastung q_b von der Stützweite L des Trägers ganz unabhängig ist. Sie hängt nur von der Länge x_1 der belasteten Strecke und dem Lastenzuge ab. Man kann demnach behaupten: „Die in Betreff der Querkräfte stellvertretende gleichmässig verteilte Last q_b für die Längeneinheit ist für irgend einen Querschnitt nur von der Lage des betreffenden Querschnittes gegen die Auflager, also von der Länge der belasteten Strecke, nicht aber von der Stützweite des

Trägers abhängig.¹⁹⁾ Dieses Gesetz macht die Ermittlung von q_b zu einer sehr einfachen Arbeit. Nennt man die Mittelkraft aller rechts vom betreffenden Querschnitt liegenden Lasten R_m , den Abstand derselben vom rechten Auflager r , so ist auch

$$\max Q = \frac{R_m r}{l} \quad \text{und} \quad \max Q = \frac{q_b x_1^2}{2l}, \quad \text{mithin} \quad q_b = \frac{2 R_m r}{x_1^2}.$$

Um nun für einen bestimmten Lastenzug die Werte von q_b zu finden, braucht man nur einen Träger von sehr großer Weite (etwa 100 m bis 150 m) anzunehmen, auf diesen den Lastenzug zu stellen und für die verschiedenen Werte von x_1 die entsprechenden $R_m r$ zu ermitteln, woraus dann die q_b leicht folgen. In welcher Weise zu diesem Zwecke ein einfaches graphisches Verfahren verwendet werden kann, ist in der in Anmerkung 19 bezeichneten Arbeit (Centralbl. d. Bauverw. 1888) vorgeführt. Die erhaltenen Werte von q_b gelten für beliebige Stützweiten.

Die größte negative Querkraft $\min Q_x$ tritt ein, wenn nur der Trägerteil links vom Querschnitt, sei es mit der Last q'_b für die Längeneinheit, sei es durch Einzelasten, derart belastet ist, daß die erste Last am Querschnitt liegt. Für die Aufsuchung von $\min Q_x$ ist demnach allgemein ein anderer Wert von q_b zu Grunde zu legen, als für $\max Q_x$. Derselbe ergibt sich aber leicht aus der Gleichung für q_b , wenn man statt x in dieselbe $(l - x)$ einführt.

b) Gleichmäßig verteilte Belastung q_a für die Längeneinheit zur Ermittlung der größten Momente. In einem um u bzw. v von den Stützen A und B abliegenden Querschnitte C wird durch gleichmäßig verteilte Belastung dann das größte Moment hervorgerufen, wenn der ganze Balken belastet ist; dann ist im Querschnitt C ein Moment

$$M_x = -\frac{q_a u \cdot v}{2}.$$

Nach dem oben (S. 293) Entwickelten wird für ein System von Einzellasten:

$$M = \frac{uv}{L} R - \frac{v}{L} M' - \frac{u}{L} M''.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke für M ergibt:

$$q_a = \frac{2R}{L} - \left[\frac{M'}{u} + \frac{M''}{v} \right] \frac{2}{L}.$$

Gelegentlich des Entwurfes einer neuen Brückenverordnung vom 15. September 1887 wurden in Österreich ausgedehnte Untersuchungen zur Ermittlung der Werte von q vorgenommen. q_b wurde für verschiedene Lastenzüge ermittelt, ebenso q_a , letzteres für die Trägermitte und einen Punkt, welcher um ein Sechstel der Spannweite von den Stützpunkten absteht. Die Werte wurden aufgetragen und durch ein Polygon umhüllt; die Ordinaten der Eckpunkte der q_a und q_b entsprechen den gesetzlichen Skalen a und b der Brückenverordnung.²⁰⁾

Sehr sorgfältige und eingehende Untersuchungen über die Ersetzung der Lastenzüge für die Berechnung durch gleichmäßig verteilte Lasten, d. h. über die Belastungsgleichwerte der Brücken, sind von Winkler²¹⁾ angestellt. Der Grundgedanke der

¹⁹⁾ Schäffer. Deutsche Bauz. 1876, S. 348. — Landsberg. Centralbl. d. Bauverw. 1888, S. 190.

²⁰⁾ Querschnitten innerhalb des ersten Sechstels der Stützweite entsprechen vielfach größere Werte q_a , als die gesetzliche Vorschrift fordert; diese Trägerteile werden aber aus konstruktiven Gründen, wenigstens bei Parallelträgern, meist stärker gehalten, als es die äußeren Kräfte fordern. Siehe speziell: v. Leber. Die neue Brückenverordnung, I. u. II. Bd. Ausführliches Werk mit Erläuterungen, Hilfstabellen und Tafeln. Wien 1888.

²¹⁾ E. Winkler. Über die Belastungs-Gleichwerte der Brückenträger. Festschrift der Königl. Techn. Hochschule zu Berlin. Auch in: Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 460, und in Winkler. Theorie der Brücken, I. Heft, 1886.

Schlussfolgerungen, welche in den unten angeführten Quellen studiert werden können, ist folgender:

Nennt man die Ordinaten der Einfluslinie, welche beim Überfahren einer Einzelast gleich der Einheit über den Träger entsteht, y , so ist die gesuchte Größe, sei es ein Moment, eine Querkraft oder eine Spannung u. dergl.:

$$Y = \Sigma (G y).$$

In dieser Gleichung bedeuten die G die einzelnen Lasten, die y sind die Ordinaten der Einfluslinie an den Lastpunkten. Eine gleichmäßig über die Länge der Einflusfigur verteilte Last p für die Längeneinheit erzeugt einen Einfluss:

$$Y = \Sigma (p y dx) = p \Sigma (y dx) = p \int y dx.$$

$\int y dx$ ist der Flächeninhalt der Figur, welche von der Abseissenachse und der Einfluslinie eingeschlossen wird, d. h. der Einflusfigur. Soll der durch die gleichmäßige Belastung erzeugte Einfluss Y demjenigen gleich sein, welchen das System von Einzellasten hervorruft, so muß sein:

$$p \int y dx = \Sigma (G y),$$

und, wenn man $\int y dx = F$ setzt,

$$p = \frac{\Sigma (G y)}{F}.$$

Statt der gleichmäßigen Last p kann man auch eine gleichmäßige Belastung p' und außerdem eine Einzellast P einführen, wobei P an derjenigen Stelle liegt, wo die Einflusfigur ihre größte Höhe h hat. Dann ist offenbar

$$\text{bei der ersteren Belastungsart } Y = p \int y dx = p F,$$

$$\text{bei der zweiten Belastungsart } Y = p' F + P h.$$

Beide Y sollen gleich sein, also muß sein:

$$p F = p' F + P h, \quad p = p' + \frac{P h}{F}.$$

Setzt man $F = h l \cdot A$, wo A von der Gestalt der Einflusfigur abhängt, so wird

$$p = p' + \frac{P}{l A} \dots \dots \dots 123.$$

Winkler bestimmt nun für verschiedene Formen der Einflusfläche und unter Zugrundelegung eines bestimmten Lastenzuges die Werte von p und zwar für das rechtwinkelige, das gleichschenkelige Dreieck, das Dreieck im allgemeinen, das abgestumpfte Dreieck, das Vieleck, die Parabelfläche u. a.

§ 31. Durchbiegung einfacher Träger. Für Träger unveränderlichen Querschnittes lassen sich auch für Systeme von Einzellasten einfache Formeln aufstellen.

Wir bringen im nachstehenden die Regeln, wobei wir das bisher Vorgenommene als bekannt voraussetzen.

α . Die größte Durchbiegung. Für die Durchbiegung in Q wird, wenn eine Einzellast in P steht (vergl. Fig. 46 auf S. 269):

$$y = \frac{u \cdot v}{6 E J l} (l^2 - u^2 - v^2) P.$$

Für ein gegebenes v wird die Durchbiegung ein Maximum, wenn $\frac{dy}{du} = 0$, d. i.

$$\text{für } u = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{l^2 - v^2}.$$

Für $v = \frac{l}{2}$ wird $u = \frac{l}{2}$, d. h. für die Mitte wird der Lastangriffspunkt zum Punkte der größten Einsenkung. Jedem anderen Lastangriffspunkt entspricht ein anderer Punkt größter Einsenkung.

Für $v = 0$ wird $u = \frac{\sqrt{3}}{3} l = 0,577 l$. Dieser Punkt steht um $0,077 l$ von der Trägermitte ab. Die größte Einsenkung findet daher, wie immer auch die Last liegen mag, zwischen zwei Punkten $c^* c^*$ statt, die symmetrisch zur Mitte liegen und um $0,154 l$ voneinander abstehen.

Mit großer Abrundung nach oben können wir daher auch sagen: die größte Einsenkung für ein beliebiges System von Einzellasten findet stets im mittleren Sechstel des Trägers statt.

Für ein gegebenes v wird die größte Einsenkung, d. i. für $u = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{l^2 - v^2}$

$$y^* = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{v (l^2 - v^2)^{3/2}}{E J l}$$

und die Einsenkung für Last P in der Mitte, d. i. für $u = \frac{l}{2}$,

$$y_m = \frac{v (3 l^2 - 4 v^2)}{48 E J},$$

also das Verhältnis $\frac{y^*}{y_m} = \varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{16 (3 l^2 - 3 v^2)^{3/2}}{27 (3 l^2 - 4 v^2) l},$$

d. i. für	$v = 0$	$0,25$	$0,5$
	$\varepsilon = 1,026$	$1,016$	$1,000,$

d. i. die größte überhaupt mögliche Durchbiegung überschreitet jene in der Mitte um höchstens $2,6\%$.

β. Berechnung der Durchbiegung unter einem System von Einzellasten. Aus der allgemeinen Formel ergibt sich für die Durchbiegung in C , wenn die Lasten P', P, P'' wirken:

$$y = \frac{u v}{6 E J l} (l^2 - u^2 - v^2) P + \frac{v(u - a')}{6 E J l} [l^2 - v^2 - (u - a')^2] P' + \frac{u(v - a'')}{6 E J l} [l^2 - (v - a'')^2 - u^2] P''$$

daraus nach entsprechender Reduktion des Ausdrucks und unter der Annahme, daß an Stelle der Einzellasten P' und P'' je ein System von Einzellasten P'_1, P'_2, P'_3 u. s. w. in den Abständen $a'_1, a'_2, a'_3 \dots$ u. s. w. wirkt und dasselbe hinsichtlich P'' der Fall ist und wenn man bedenkt, daß $u + v = l$ wird:

$$y = y^* + \frac{u v}{6 E J l} [2(u - v) [\Sigma \alpha' P' - \Sigma \alpha'' P''] - 3 \Sigma \alpha'^2 P' - 3 \Sigma \alpha''^2 P'' + \frac{1}{u} \Sigma \alpha'^3 P' + \frac{1}{v} \Sigma \alpha''^3 P'']$$

dabei ist:

$$y^* = \frac{u^2 v^2}{3 E J l} [\Sigma P' + P + \Sigma P''],$$

d. i. die Durchbiegung in C , wenn die Resultierende aller Lasten in diesem Punkte liegen würde.

Ähnlich wie bei der Berechnung der Maximalmomente kann man die Ermittlung der Durchbiegung y außerordentlich erleichtern, wenn für einen gegebenen Belastungszug die Werte $\Sigma \alpha P, \Sigma \alpha^2 P, \Sigma \alpha^3 P$ als ein- für allemal berechnete Werte einer Tabelle entnommen werden können.

Eine solche ist für den österreichischen Normalbelastungszug anbei angeschlossen.

Achselbelastungen	Tender			Lokomotive				Lokomotive				Tender			
	10	10	10	13	13	13	13	13	13	13	13	13	10	10	10 t
Abstände	1,5	1,5	4,4	1,2	1,2	1,2	6,0	1,2	1,2	1,2	4,4	1,5	1,5	m	
$a =$	9,8	8,3	6,8	2,4	1,2	0	1,2	7,2	8,4	9,6	10,8	15,2	16,7	18,2	
$\Sigma P =$	56	46	36	26	13	0	13	26	39	52	65	75	85	95	
$\Sigma a P =$	295,8	197,8	114,8	46,8	15,6	0	15,6	109,2	218,4	343,6	483,6	635,6	802,6	984,6	
$\Sigma a^2 P =$	2205,3	1244,9	556,0	93,6	17,7	0	18,7	692,6	1609,9	2808,0	4324,3	6634,7	9423,6	12736,1	
$\Sigma a^3 P =$	18476	9064	3346	202	22	0	22	4875	12580	24081	40458	75576	122150	182436	
$a =$	11,0	9,5	8,0	3,6	2,4	1,2	0	6,0	7,2	8,4	9,6	14,0	15,5	17,0	
$\Sigma P =$	69	59	49	39	26	13	0	13	26	39	52	62	72	82	
$\Sigma a P =$	378,6	268,6	173,6	93,6	46,8	15,6	0	78,0	171,6	280,8	405,6	545,6	700,6	870,6	
$\Sigma a^2 P =$	3014,6	1804,6	902,1	262,1	93,6	18,7	0	468,0	1141,9	2059,2	3257,3	5217,3	7619,8	10509,8	
$\Sigma a^3 P =$	27812	14502	5929	809	202	22	0	2808	7660	15365	26867	54307	91546	140676	

Beispiel. Nebenstehende Figur zeigt ein Einzellastsystem, welches der österreichischen Brückenverordnung entspricht. Es sei die Durchbiegung zu rechnen:

a) Für die Trägermitte, wenn die zweite Last der ersten Lokomotive über der Trägermitte steht. Für diesen Fall werde:

$l = 20 \text{ m,}$
 $u = v = 10 \text{ m,}$
 $J = 0,05 \text{ m}^4,$
 $E = 20000000 \text{ t/qm,}$

ferner:

$\Sigma P' + P + \Sigma P'' = 56 + 13 + 52 = 121 \text{ t,}$
 $\Sigma a' P' = 295,8,$
 $\Sigma a'^2 P' = 2205,3,$
 $\Sigma a'^3 P' = 18476,$
 $\Sigma a'' P'' = 343,6,$
 $\Sigma a''^2 P'' = 2808,0,$
 $\Sigma a''^3 P'' = 24081.$

Daraus berechnet sich:

$y^* = 0,0202 \text{ m,}$
 $y = 0,0202 - 0,0090 = 0,0112 \text{ m.}$

b) Für einen Punkt, der um 1,2 m rechts von der Mitte absteht, für dasselbe Lastsystem und dieselbe Stellung:

$l = 20 \text{ m, } u = 11,2 \text{ m, } v = 8,8 \text{ m, } J = 0,05 \text{ m}^4, E = 20000000 \text{ t/qm,}$

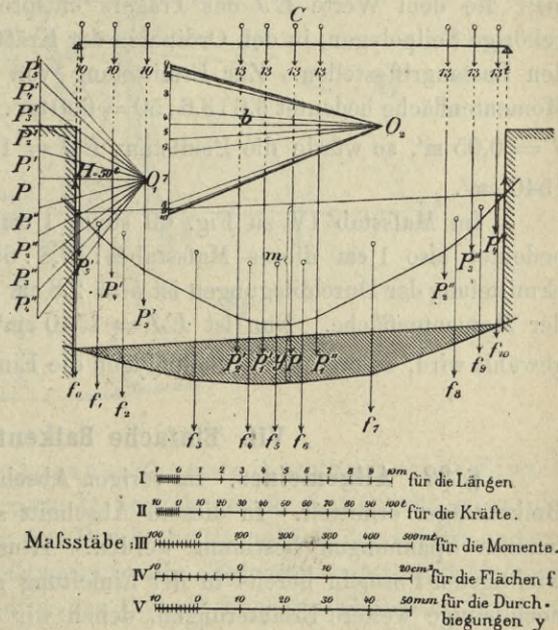
ferner:

$\Sigma P' + P + \Sigma P'' = 69 + 13 + 39 = 121 \text{ t,}$
 $\Sigma a' P' = 378,6, \quad \Sigma a'^2 P' = 3014,6, \quad \Sigma a'^3 P' = 27812,$
 $\Sigma a'' P'' = 280,8, \quad \Sigma a''^2 P'' = 2059,2, \quad \Sigma a''^3 P'' = 15365,$

woraus:

$y^* = 0,0195 \text{ m, } y = 0,0195 - 0,0084 = 0,0111 \text{ m.}$

Fig. 69.



Die Durchbiegung wird also in beiden Fällen nahezu die gleiche und ist im vorliegenden Falle in der Mitte etwas größer. Wir ergänzen das Beispiel durch seine graphische Lösung aus dem Früheren.

Zeichnerische Ermittlung der Durchbiegung eines einfachen Trägers unter einer Folge von Einzellasten. Unter Annahme eines bestimmten Längenmaßstabes I (1:360 natürliche Größe) wurde die Länge des Trägers und die zu untersuchende Lastenfolge aufgetragen; unter Annahme eines zweiten Maßstabes II (100 t = 28 mm) und einer Poldistanz $H = 50$ t ein Kräftepolygon O_1 und mit Hilfe derselben das Seitenpolygon gezeichnet. Wird H nach dem Kräftemaßstabe gemessen, so geben die nach dem Längenmaßstabe gemessenen Ordinaten m des Seilpolygons mit H multipliziert die Momente.

Es bedeutet also die gemessene Länge eines Meters Moment 50 mt. Konstruiert man einen Maßstab III, sodass die Länge eines Meters nach I gemessen 50 mt bezeichnet, so gestattet dieser Maßstab unmittelbar das Abgreifen der Momente, die Strecke m auf III gemessen, giebt das Moment in der Mitte, in unserem Falle 285 mt.

Rechnet man die zwischen den Lastordinaten liegenden Flächen F_0, F_1, F_2, \dots der Momentenfläche in qcm aus und läßt diese Flächenwerte in ihren Schwerpunkten als Fläche angreifen; konstruiert man ferner ein Kräftepolygon O_2 , als dessen Poldistanz b man die dem Werte EJ des Trägers entsprechende Fläche wählt, so giebt das zugehörige Seilpolygon, in den Ordinaten der Kräfte P_1, P_2 gemessen, die Durchbiegungen an den Lastangriffsstellen. Zur Ermittlung von b führt folgende Überlegung: 1 cm² der Momentenfläche bedeutet $3,6 \cdot 3,6 \cdot 50 = 650$ tm². Ist für unser Beispiel $E = 20000000$ t/qm; $J = 0,05$ m⁴, so würde die Poldistanz $EJ = 1000000$ tm² oder entsprechend $\frac{1000000}{650} = 1540$ cm².

Im Maßstab IV zu Fig. 69 stellt 1 cm: 2,8 cm² der Momentenfläche dar²²⁾; es bedeutet also 1 cm dieses Maßstabes: $2,8 \cdot 650 = 1820$ tm². Die Poldistanz für die Ermittlung der Durchbiegungen ist $b = 2,8$ cm gewählt, bedeutet also $2,8 \cdot 2,8 = 7,84$ cm² der Momentenfläche. Nun ist $EJ = 1540$ cm²; wenn die Poldistanz nur $b = 7,84$ cm² gewählt wird, so ergibt das Seilpolygon die Einsenkung $\frac{1540}{7,84}$ -fach = ~ 200 fach verzerrt.

VII. Einfache Balkenfachwerksträger.

§ 32. Allgemeines. Im vorigen Abschnitte wurden die äußeren Kräfte einfacher Balkenträger ermittelt. In diesem Abschnitt sollen auf Grund der äußeren Kräfte die inneren Spannungen bestimmt werden. Hinsichtlich der Vollwandträger wurden die wichtigsten Formeln bereits in der Einleitung gebracht. Die Fachwerksträger verlangen noch einige weitere Erläuterungen, denen wir eine eingehendere Behandlung besonderer Trägerarten in den folgenden Paragraphen anfügen.

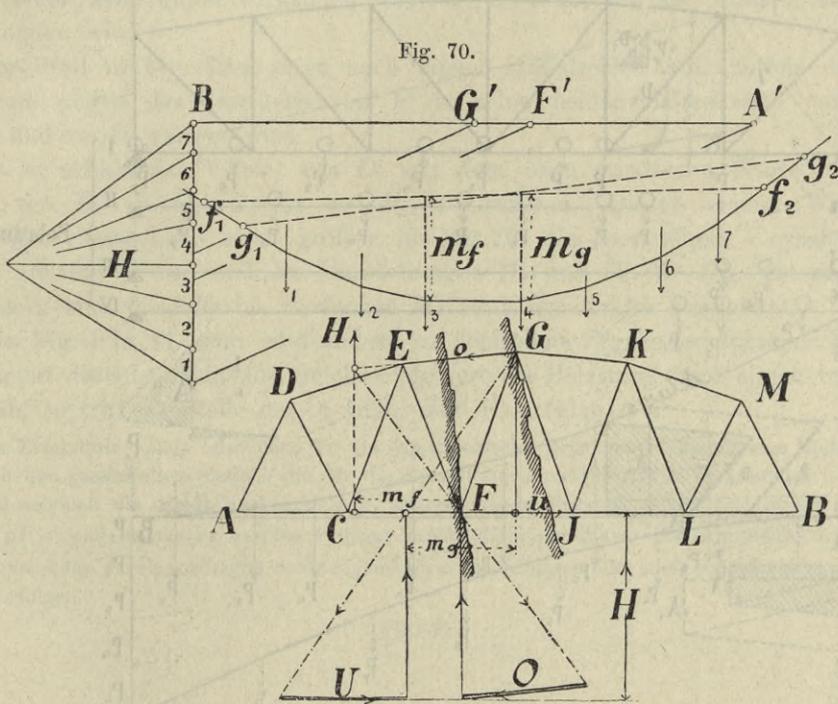
Die durch das Eigengewicht (die bleibende) und die Verkehrslast (die wechselnde Belastung) in den einzelnen Stäben eines Fachwerks entstehenden Spannungen werden am besten getrennt behandelt.

Für die Bestimmung der Spannungen durch das Eigengewicht bedient man sich am zweckmäßigsten eines Cremonaplanes nach § 10, den man unter Zugrundelegung der auf die einzelnen Knoten verteilten Belastung ermittelt. Nur wenn es sich um das Herausheben der Spannung eines bestimmten Stabes handelt, wird man sich zweckmäßiger der in dem § 11 gegebenen Verfahrungsweise bedienen.

²²⁾ Der Maßstab IV in Fig. 69 ist infolge eines Versehens unrichtig.

Für die Ermittlung der Spannungen, welche die Verkehrslast erzeugt, kommt die Art derselben in Betracht. Nimmt man dieselbe als gleichförmig verteilt und am Ober- und Untergurte wirkend an, so ermittelt man wieder die Knotenlasten und erhält die bei der Belastung des ganzen Trägers eintretenden Höchstwerte der Gurtspannungen zweckmäßig mit Hilfe eines Cremonaplanes; für die Füllungsstäbe kommen Belastungen einzelner Trägerteile in Betracht.

Bei Eisenbahnbauten, sowie bei Straßebauten, für welche Wagenbelastungen zu berücksichtigen sind, macht es keine Schwierigkeit, direkt das wandernde Einzellastsystem zu Grunde zu legen. Wir wollen diese Methode zunächst allgemein behandeln.



Ermittlung der größten Gurtspannung unter Annahme eines Einzellastsystems. Die Spannung im Obergurte O erreicht einen Größtwert, wenn das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf den Durchschnittpunkt F der beiden anderen vom Schnitte getroffenen Stäbe einen Größtwert erreicht. Ermittelt man jene Schlußlinie des Seilpolygons der Einzellasten, für welche das Moment in F ein Größtwert wird, so ist $M_r = m_r \cdot H$, wobei m_r und H der Zeichnung entnommen werden. Die Ermittlung von O kann nun unmittelbar nach dem Ausdrucke $O = \frac{M_r}{o_r}$ erfolgen, wenn o_r den normalen Abstand des Gurtstabes von F bedeutet, oder in nachstehender Weise: Man trage m_r von F aus nach links auf, denke sich hier H als Vertikalkraft wirkend, zerlege H im Schnittpunkte mit dem in Frage stehenden Gurtstab in zwei Seitenkräfte, von denen die eine durch F geht, die andere in die Richtung von O fällt.

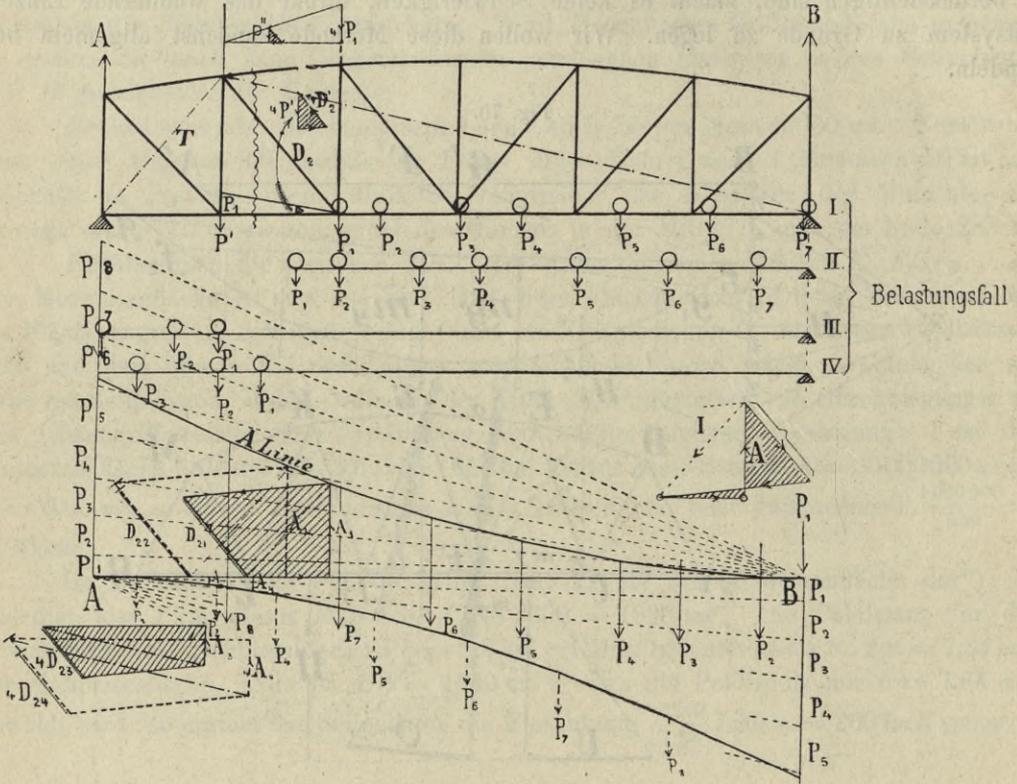
In ganz ähnlicher Weise wird für den Untergurt G der Momentenpunkt und g_1, g_2 die Gerade, welche an dem Seilpolygon den Höchstwert m_g abschneidet. Am Träger kann das Moment durch eine nach aufwärts gerichtete Kraft H ersetzt werden, welche im Abstände m_g von G nach aufwärts wirkt; diese Kraft kann wieder in eine durch

den Momentenpunkt G gehende Seitenkraft und in eine Horizontalkraft zerlegt werden, welche der Spannung des Untergurtes entspricht.

Beispiel. Auf T. IV ist ein Beispiel unter Zugrundelegung des preussischen Normalzuges, mittlere Maschinen Brust an Brust, dargestellt.

Die Achsdrücke sind unmittelbar nach dem Lastmaßstabe aufgetragen; an Stelle von H ist $\frac{H}{2}$ in der F. 2 gewählt. Man erhält dann die Spannungen so, wie sie sich für eine Tragwand ergeben.

Fig. 71.



Für die Füllungsstäbe (Fig. 71) (Lotrechte und Diagonalen) kommen einseitige Belastungen in Betracht.

Wir führen einige einschlägige Verfahrungsweisen vor.

a) Verfahren mittels der A -Linie. Trägt man die Lasten des in Betracht kommenden Zuges $P_1 P_2 P_3 \dots$ hinsichtlich der Lastabstände von B aus, in welchem Punkt man sich P_1 stehend denkt, in der Richtung von B gegen A auf, die Größe der Lasten aber von A aus mit P_1 beginnend in der Richtung nach aufwärts und bildet man ein Kraftpolygon für B als Pol und verzeichnet das hierzu gehörige Seilpolygon, so giebt dieses die sogenannte A -Linie. Die Ordinate dieser Linie für einen Punkt C auf AB giebt den Stützendruck in A , wenn sich die Lasten $P_1 P_2 \dots$ von C aus nach rechts erstrecken. Wir haben den Nachweis für die Richtigkeit bereits auf S. 293 geführt. Für eine gleichmäßig verteilte Last p f. d. m wird die A -Linie eine Parabel, die in B ihren Scheitel hat und auf der Lotrechten durch A den Wert $\frac{pl}{2}$ hat.

In Fig. 71 ist auch die Untersuchung gezeigt, ob nicht die Stellung der Last P_2 am Fußpunkt der Diagonalen (Belastungsfall II) eine größere Spannung in der

Diagonalen erzeugen kann, als wenn P_1 am Fußpunkt der Diagonalen liegt (Belastungsfall 1).

Im Falle II ist der Stützendruck A durch A_2 gegeben; die Zerlegung dieser Größe nach den Richtungen Untergurt, Obergurt und Diagonale führt unter Berücksichtigung der Hilfsrichtung T zu einer Spannung der Diagonalen D_{22} , welche jedoch noch einer Korrektur bedarf, da sich im Belastungsfall II die Kraft P_1 in zwei Seitenkräfte P' und P'' zerlegen läßt, die in den Endpunkten des zu D_2 gehörigen Untergurtstückes angreifen.

Außer der nach oben wirkenden Kraft A_2 in A haben wir es links des Schnittes noch mit einer nach unten wirkenden Kraft P' zu thun, die als Ordinate eines Dreiecks gewonnen wird.

Der Pfeil in Fig. 70 *a* zeigt nach einem Hilfsdreieck hin, mittels dessen der Deutlichkeit wegen das Vierfache von P' in seine beiden Seitenkräfte parallel zum Obergurt und zu D_2 zerlegt wird.

Es ist mithin das Viertel von D'_2 von dem oben erhaltenen Werte für D_{22} abzuziehen, um die richtige Größe von D_{22} zu erhalten. Dieser letztere Wert ist in unserer Figur thatsächlich etwas größer, als der für die Laststellung I erhaltene.

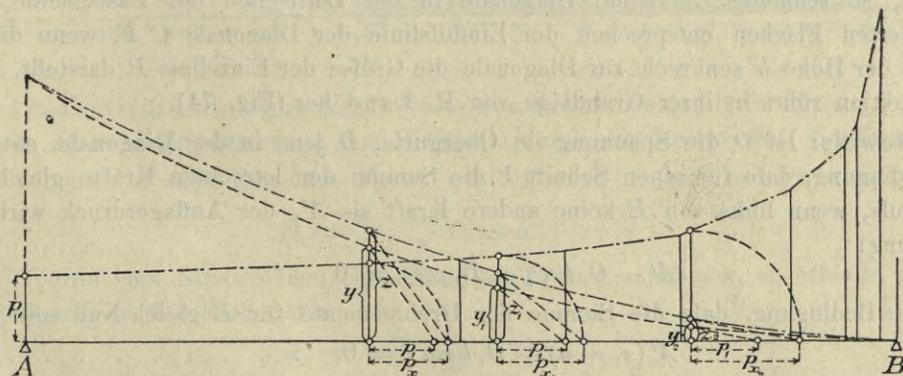
In gleicher Weise sind die Laststellungen III und IV für D_{\min} untersucht. Die Kraftvierecke sind diesfalls im vierfachen Maßstab der Kräfte gezeichnet.

Die Fig. I in 71 zeigt eine andere zu demselben Ergebnisse führende Zerlegung.

Nimmt die anzunehmende gleichmäßig verteilte Belastung nach einem bestimmten Gesetze ab, so tritt an Stelle der A -Linie eine Ersatzlinie.

Die Ersatzlinie spielt besonders für die österreichische Brückenberechnung eine Rolle. Man ermittelt nach der gesetzlichen Skala b die für die Spannweite l entsprechende Verkehrslast f. d. laufende Einheit und zeichnet die dieser Verkehrslast p_1 entsprechende Parabel, deren Endordinate am linken Auflager $\frac{1}{2} p l$ ist und welche im zweiten Auflager ihren Scheitelpunkt hat. Die Ermittlung dieser Parabel (untere Kurve) kann durch Auftragen rechnermäßiger Koordinaten oder nach irgend einem graphischen Verfahren erfolgen.

Fig. 72.

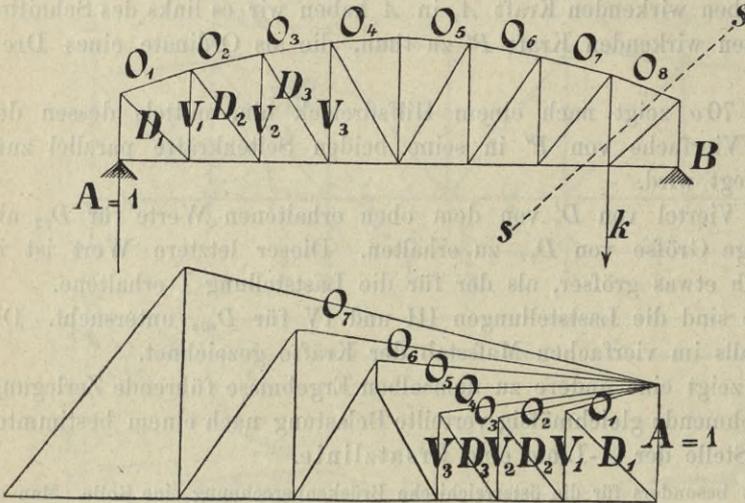


Man setze einen Maßstab für Belastungen pro laufende Einheit fest, bei mittleren Spannweiten etwa 1 Tonne = 10 mm, trage von der rechten zur linken Stütze die Längen 1,0, 1,5, 2, 2,5, 5, 10, 15, 20, 40, 80, 120, 160 m auf, soweit sie auf den Träger Bezug nehmen (Fig. 72), errichte in jeder Abszisse eine Ordinate, welche der Last pro Einheit nach Skala b entspricht, und erhält durch das Verbindungspolygon der aufgetragenen Punkte die graphische Darstellung der Skala b .

Nun vergrößert man die Parabelordinate nach dem Verhältnis $\frac{p_x}{p_1}$, bildet also eine neue Kurve, deren Ordinate $z = \frac{p_x}{p_1} y$ ist, wenn y die der Abszisse x , vom Scheitel ab gerechnet, entsprechende

Parabelordinate, p_x die dieser Abscisse entsprechende Belastung der Skala b der österreichischen Brückenverordnung und p_1 die der ganzen Spannweite entsprechende Ordinate nach Skala b ist. Diese Konstruktion kann zweckmäßig graphisch erfolgen und es zeigt Fig. 72 eine diesbezügliche Anordnung. Durch diese Konstruktion erhält man eine virtuelle, etwas oberhalb liegende Querkraftkurve, welche sich, mathematisch betrachtet, aus einzelnen Stücken kubischer Parabeln zusammensetzt. — Jeder geraden Polygonseite des Belastungsschemas nach Skala b entspricht das bestimmte Stück einer bestimmten kubischen Parabel. Die so erhaltene obere Kurve möge die Ersatz- A -Linie (virtuelle Kurve der Querkräfte) heißen.

Fig. 73.



b) Verfahren nach Müller-Breslau. Legt man dicht neben B eine Knotenlast k , welche in A einen Auflagerwiderstand 1 erzeugt, so genügt es, die für diesen Wert erhaltenen Spannungen $D_1 D_2 \dots V_1 V_2 V_3$ der Füllungsstäbe mit dem richtigen Werte des Auflagerwiderstandes (der zugehörigen Ordinate) der A -Linie zu multiplizieren, um den wahren Wert der Spannungen zu erhalten.

c) Verfahren des Verfassers. — Einflußlinien nach Land. Diagonalen: Zum Verständnisse der Konstruktion erscheint es nötig, einiges über die Einflußlinien vorzuschicken.

Ist A' der Schnittpunkt des verlängerten Obergurtes $C'E$ mit der Pfeilerlotrechten, so schneidet $A'B$ die Diagonale in der Lotrechten der Lastscheide. Die schraffierten Flächen entsprechen der Einflußlinie der Diagonale $C'E$, wenn die Projektion der Höhe h senkrecht zur Diagonale die Größe der Einzellast P darstellt. Diese Konstruktion rührt in ihrer Grundlage von R. Land her (Fig. 74).

Beweis: Ist O die Spannung im Obergurte, D jene in der Diagonale, so liefert die Bedingung, daß für einen Schnitt I die Summe der lotrechten Kräfte gleich Null sein muß, wenn links von E keine andere Kraft als A' , der Auflagerdruck wirkt, die Gleichung:

$$A' - O_1 \sin \gamma - D_1 \cos \alpha = 0 \quad \dots \dots \dots 124.$$

und die Bedingung, daß die Summe der Drehmomente für E gleich Null sein muß:

$$A'(x_1 + a) - O_1 h \cos \gamma = 0, \quad \dots \dots \dots 125.$$

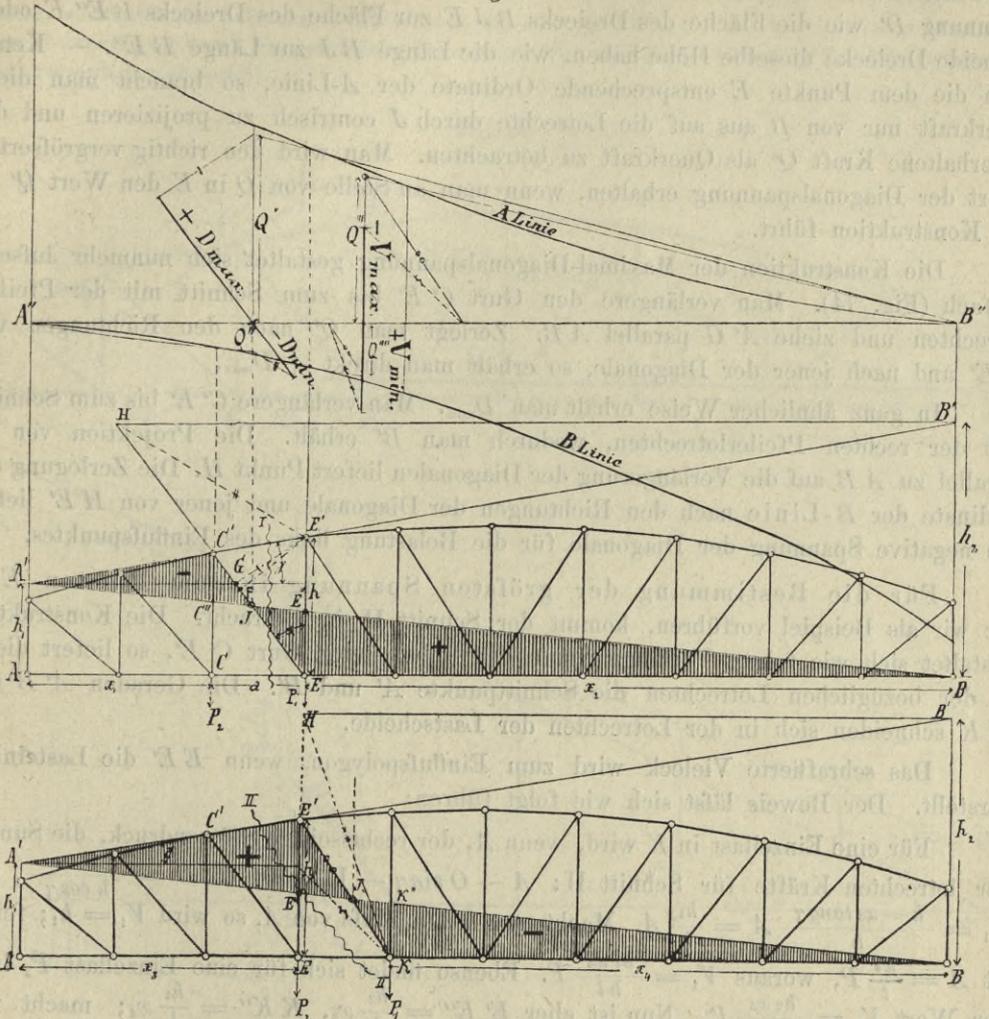
wenn γ den Winkel bezeichnet, den $C'E$ mit der Wagerechten, α den Winkel angiebt, den die Diagonale mit der Lotrechten einschließt. Bezeichnet man die Strecke $AA' = h - (x_1 + a) \tan \gamma$ mit h_1 , so findet sich nach kurzer Rechnung

$$D_1 = A' \cdot \frac{h_1}{h} \cdot \sec \alpha \quad \dots \dots \dots 126.$$

Gesetzt, in Fig. 74 wäre $\overline{EG} = h_1 \sec \alpha = D$ das Maß für die Spannung in der Diagonale, so fände sich

$$A' = h,$$

Fig. 74.



d. h.: Ist die Größe der Querkraft links des Schnittes durch die Strecke $h = EE'$ gegeben, so ist die Spannung in der Diagonale durch die Strecke EG bestimmt.

Liegt in E eine Einzellast P_1 , so wird $A' = \frac{x_2}{l} P_1$ und es ergibt sich:

$$D_1 = \frac{x_2}{l} \cdot \frac{h_1}{h} P_1 \sec \alpha.$$

Würde man entsprechend eine Einzellast P_2 in C annehmen, so erhielte man für die Spannung in der Diagonale:

$$D_2 = - \frac{x_1}{l} \cdot \frac{h_2}{h} P_2 \sec \alpha.$$

Würde man $EE' = \frac{x_2}{l} h_1$ als das Maß von D_1 und $C'C'' = \frac{x_1}{l} h_2$ als Maß von D_2 ansehen, so erhielte man übereinstimmend $P_1 = P_2 = h \cos \alpha = EF$, wenn $E'F$ senkrecht zur Diagonale gezogen wird. Es können daher EE' und $C'C''$ als die Ordinaten der Einflußlinien der Spannungen für die Diagonale betrachtet werden, wenn die Größe der beweglichen Last durch die Strecke EF gegeben ist.

Würde die Verkehrslast lediglich bis zur Lotrechten E reichen, so würde die Spannung D' der Diagonalen der Dreiecksfläche $BE'E''$ proportional werden. Ist auch

das Stück zwischen E und J belastet, so verhält sich die vermehrte Spannung zur Spannung D' wie die Fläche des Dreiecks BJE zur Fläche des Dreiecks $BE''E$ oder, da beide Dreiecke dieselbe Höhe haben, wie die Länge BJ zur Länge BE'' . — Kennt man die dem Punkte E entsprechende Ordinate der A -Linie, so braucht man diese Querkraft nur von B aus auf die Lotrechte durch J centrisch zu projizieren und die so erhaltene Kraft Q' als Querkraft zu betrachten. Man wird den richtig vergrößerten Wert der Diagonalspannung erhalten, wenn man an Stelle von Q in E den Wert Q' in die Konstruktion führt.

Die Konstruktion der Maximal-Diagonalspannung gestaltet sich nunmehr äußerst einfach (Fig. 74). Man verlängere den Gurt $C'E'$ bis zum Schnitt mit der Pfeilerlotrechten und ziehe $A'G$ parallel AB . Zerlegt man Q' nach den Richtungen von $G'E'$ und nach jener der Diagonale, so erhält man direkt $+D_{\max}$.

In ganz ähnlicher Weise erhält man D_{\min} . Man verlängere $C'E'$ bis zum Schnitte mit der rechten Pfeilerlotrechten, wodurch man B' erhält. Die Projektion von B' parallel zu AB auf die Verlängerung der Diagonalen liefert Punkt H . Die Zerlegung der Ordinate der B -Linie nach den Richtungen der Diagonale und jener von HE' liefert die negative Spannung der Diagonale für die Belastung links des Einflusses.

Für die Bestimmung der größten Spannung in dem Pfosten EE' , die wir als Beispiel vorführen, kommt der Schnitt II in Betracht. Die Konstruktion gestaltet sich wie folgt: Verlängert man den unbelasteten Gurt $C'E'$, so liefert dieser in der bezüglichen Lotrechten die Schnittpunkte A' und B' . Die Geraden $A'B$ und $E'K$ schneiden sich in der Lotrechten der Lastscheide.

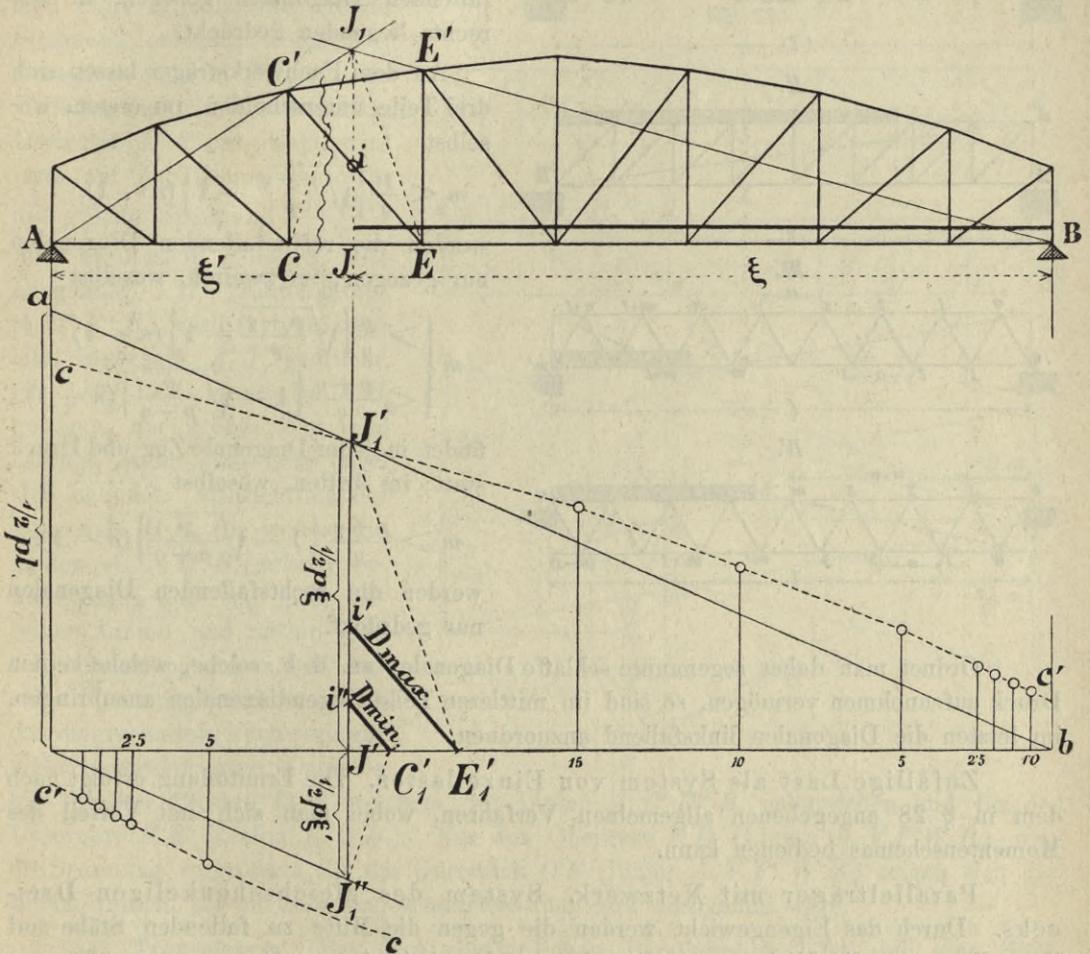
Das schraffierte Vieleck wird zum Einfluspolygon, wenn EE' die Lasteinheit darstellt. Der Beweis läßt sich wie folgt führen:

Für eine Einzellast in K wird, wenn A , der rechtsseitige Stützendruck, die Summe der lotrechten Kräfte für Schnitt II: $A - O \sin \gamma - V_1 = 0$, da $O = \frac{Ax_3}{h \cos \gamma}$, also $V_1 = \frac{h - x_3 \tan \gamma}{h} A = \frac{h_1}{h} A$. Macht man h zum Maß von A , so wird $V_1 = h_1$; ferner ist $A = \frac{x_4}{l} P$, woraus $V_1 = \frac{h_1 x_4}{h l} P$. Ebenso findet sich für eine Einzellast P_2 in E der Wert $V_2 = \frac{h_2 x_3}{h l} P$. Nun ist aber $E'E'' = \frac{h_2}{l} x_3$, $KK'' = \frac{h_1}{l} x_4$; macht man übereinstimmend $E'E''$ und KK'' zum Maß der Spannungen für den Pfosten, wenn eine Einzellast in E bzw. K liegt, so werden beide Gleichungen $\frac{h_1 x_4}{h l} P = \frac{h_1 x_4}{l}$; $\frac{h_2 x_3}{h l} P = \frac{h_2 x_3}{h}$ erfüllt, wenn $P = h$, d. h. die schraffierte Fläche wird zur Einflußfläche für den Pfosten, wenn die bewegliche Einzellast durch h gemessen wird.

d) Verfahren nach Melan (Fig. 75). Die Geraden AC' und BE' schneiden sich in einem Punkte J_1 der Lastscheidevertikalen. Die Gerade J_1J' teilt die Diagonale in zwei Abstände $C'i$ und $E'i$, die der größten negativen bzw. der größten positiven Spannung der Diagonalen entsprechen, wenn die Strecke J_1J' jeweilig die halbe gleichmäßig verteilte Gesamtlast $\frac{1}{2} p \xi'$ bzw. $\frac{1}{2} p \xi$ vorstellt. Hierbei ergibt sich eine Konstruktion, die aus der Figur ersichtlich ist; es ist zu bemerken, daß $E'_1J'_1$ parallel zu EJ_1 , ferner $J'_1C'_1$ parallel zu CJ_1 gemacht wurde. Hat man es mit Ersatzlasten zu thun, welche ein System von Einzellasten vertreten, so wird p veränderlich, da es mit abnehmender Spannweite wächst.

Die Werte $\frac{1}{2} p \xi'$ und $\frac{1}{2} p \xi$ entsprechen für veränderliche p nicht mehr den Ordinaten einer Geraden, sondern einem gebrochenen Kurvenzug (bei einer geradlinigen Einschaltung der p Parabeln). Dieser Kurvenzug ist durch die gestrichelte Linie angedeutet, welche den Ordinaten der österreichischen Brückenverordnung entspricht.

Fig. 75.



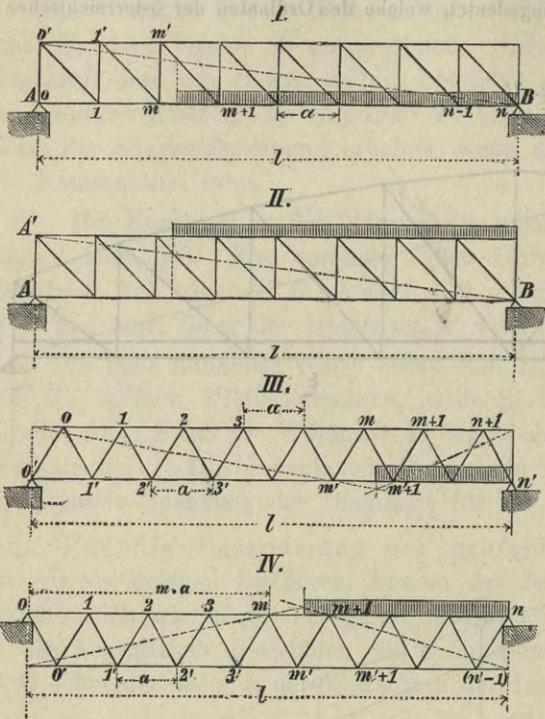
§ 33. Parallelträger. Trapezträger. Sind Ober- und Untergurt einander parallel, so wird in Fig. 18, S. 234 $\gamma' = \gamma = \delta = 0$, $h = h' = h''$ und die daselbst gewonnenen Formeln 45* bis 49 geben einfach:

$$S_o = -\frac{M''}{h}; \quad S_u = +\frac{M'}{h}; \quad S_d = R \sec \alpha = (M'' - M') \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{h}; \quad S_v = -R'.$$

Die Inanspruchnahme der Gurte ist dem Momente direkt, der Höhe umgekehrt proportional. Die Gitterstab-Beanspruchung ist der Querkraft proportional. Im Anschluß hieran sind einige häufiger vorkommende Fälle etwas näher zu untersuchen:

1. Parallelträger. System des rechtwinkligen Dreiecks. Bei gerader Anzahl der Felder werden infolge der Wirkung des Eigengewichts die rechtsfallenden Diagonalen in der linken Trägerhälfte gezogen, in der rechten Trägerhälfte gedrückt. Bei

Fig. 76.



ungerader Anzahl der Felder ist die Inanspruchnahme der Diagonale des mittleren Feldes infolge der Wirkung des Eigengewichtes Null, in den zur Linken liegenden Feldern werden die rechtsfallenden Diagonalen gezogen, in den rechts liegenden gedrückt.

An dem Fachwerksträger lassen sich drei Teile unterscheiden, im ersten, woselbst

$$m < \frac{p}{q} \left\{ \sqrt{\frac{p+q}{p}} - 1 \right\} (n-1),$$

werden die rechtsfallenden Diagonalen nur gezogen; im zweiten, woselbst

$$m \begin{cases} > \frac{p}{q} \left\{ \sqrt{\frac{p+q}{p}} - 1 \right\} (n-1) \\ < \frac{p+q}{q} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{p}{p+q}} \right\} (n-1), \end{cases}$$

findet in jeder Diagonale Zug und Druck statt; im dritten, woselbst

$$m > \frac{p+q}{q} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{p}{p+q}} \right\} (n-1),$$

werden die rechtsfallenden Diagonalen nur gedrückt.

Ordnet man daher sogenannte schlaife Diagonalen an, d. h. solche, welche keinen Druck aufzunehmen vermögen, so sind im mittleren Teile Gegendiagonalen anzubringen, im letzten die Diagonalen linksfallend anzuordnen.

Zufällige Last als System von Einzellasten. Die Ermittlung erfolgt nach dem in § 28 angegebenen allgemeinen Verfahren, wobei man sich mit Vorteil des Momentenschemas bedienen kann.

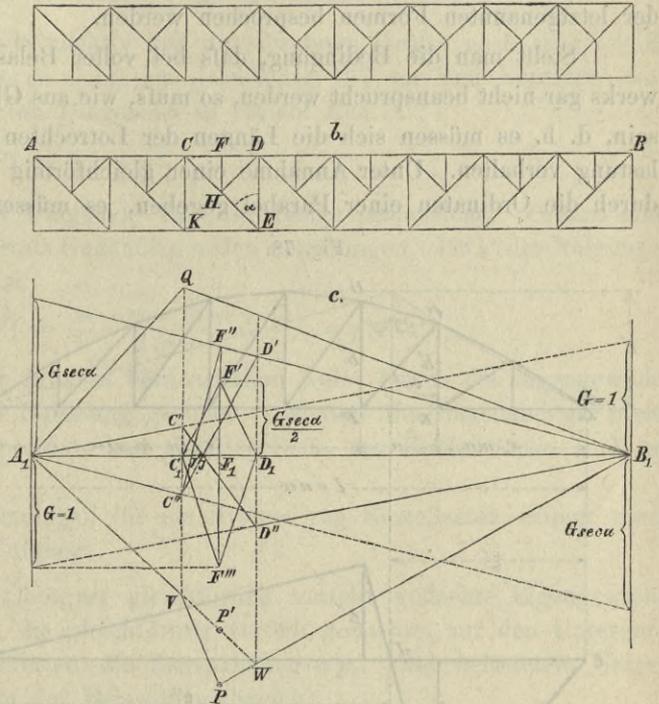
Parallelträger mit Netzwerk. System des gleichschenkeligen Dreiecks. Durch das Eigengewicht werden die gegen die Mitte zu fallenden Stäbe auf Zug, die gegen die Mitte zu ansteigenden auf Druck in Anspruch genommen. Die zufällige Last kann in jedem Stabe sowohl Zug als Druck hervorrufen. Bei symmetrischer Anordnung genügt die Berechnung für eine Hälfte.

Zusammengesetzte Fachwerke. Bei Trägern mit einfachem Fachwerke wird bei größeren Höhen die Entfernung der Knotenpunkte so bedeutend, daß man sich, um zu große Längen der Längsträger zweiter Ordnung zu vermeiden, genötigt sieht, auch zwischen den Knoten Querträger anzuordnen; um nun hierdurch nicht die Gurte auf Biegung zu beanspruchen, hat man Zwischenunterstützungen angeordnet. Man kann beispielsweise für die Obergurte Pfosten anbringen, welche sich auf die Diagonalen stützen (Fig. 77b), oder den mittleren Querträger zwischen zwei Hauptknoten an ein am oberen Knotenpunkte befestigtes Zugband, je zwei andere Querträger eines Feldes aber an Pfosten hängen, für welche der Aufhängepunkt durch ein Hängewerk, ähnlich wie in Fig. 77a geschaffen ist. Durch die Einschaltung derartiger Konstruktionen wird

die Spannung der Hauptstäbe beeinflusst, wie an dem nachstehenden, das sogenannte System Pettit darstellenden Beispiele nachgewiesen werden soll.

Fig. 77a u. b bringen zwei Anordnungen desselben, Fig. 77c die zu Fig. 77b gehörigen Einflußlinien und ihre Konstruktion. Für den Hilfspfosten gilt das Dreieck $C_1 F'' D_1$, die Spannung ist stets ein Druck, Belastungen der Strecken $A_1 C_1$ und $D_1 B_1$ sind ohne Einfluß, die größte Spannung entsteht, wenn eine Einzellast eben in F liegt. Die Hilfsdiagonale $H D$, welcher das Dreieck $C_1 D_1 F'$ entspricht, wird stets auf Zug beansprucht, für die größte Spannung $\frac{G \sec \alpha}{2}$ muß die Last in F liegen. Die Diagonale $C H$ (Einflußlinien $A_1 C'' F'' B_1$) wird für jede Lastlage innerhalb $A_1 J'$ gedrückt, für jede Last innerhalb $J' B_1$ gezogen, der größte Zug wird erzeugt, wenn eine Last in F sich befindet. Hinsichtlich der Diagonale $H E$, für welche die Linien $A_1 C'' D' B_1$ gelten, bemerke man, daß sich ganz dieselben Linien und mithin dasselbe Belastungsgesetz und dieselbe Spannung ergeben, als ob das eingeschaltete Fachwerk gar nicht vorhanden wäre. Dasselbe

Fig. 77.



gilt für den Pfosten $D E$, welchem die Linien $A_1 C'' D'' B_1$ entsprechen und für den Untergurt $K E$ (Linien $A_1 Q B_1$). Für den Obergurt $F D$ (Linien $A_1 V P W B_1$) wird die Spannung vergrößert, für das Gurtstück $C F$ (Linien $A_1 V P' W B_1$) zeigen sich dieselben Linien, als ob kein eingeschaltetes Fachwerk vorhanden wäre.

2. **Trapezträger.** Bei dem gewöhnlichen Parallelträger läßt sich eine Stoffersparnis durch Hinweglassung der Pfosten über den Auflagern erzielen, wodurch die Enden abgeschrägt erscheinen. Eine weitere Herabminderung des Stoffaufwandes wird erreicht, wenn man den Obergurt nur in dem mittelsten Teile parallel zum Untergurte anordnet, gegen die Enden zu ihn jedoch geradlinig zum Auflager führt. Wohl wird der Obergurt hierdurch etwas länger, da aber die Endständer wegfallen und die Stäbe wesentlich kürzer und schwächer sich gestalten, so läßt sich unter Umständen 7 bis 10% an Material gegenüber dem Parallelträger gewinnen. Bezeichnet man die Stützweite mit l , die Länge einer Abschrägung mit a , die Trägerhöhe mit h , so findet nach Winkler der kleinste Aufwand an Stoff für $a = 0,006 l + 1,08 h$ statt.

Hinsichtlich der Berechnung der einzelnen Teile sind wenige Bemerkungen ausreichend. Der mittlere Teil läßt sich wie ein Parallelträger behandeln, in dem abgeschrägten Ende werden die Stäbe von der zufälligen Last nur in einem Sinne beansprucht.

§ 34. Gekrümmte und vieleckige Gurte.

1. **Parabelträger.** Man kann wesentlich an Baustoff sparen und unter Umständen günstigere ästhetische Wirkungen erzielen, wenn man die Knotenpunkte der Gurte einer Kurve anpaßt. Für diese Kurven sind in mehr oder weniger willkürlicher Weise der Kreisbogen, die Ellipse u. s. w. gewählt worden. Man hat aber auch bestimmte Bedingungen für die Wirksamkeit der Kräfte im Innern des Trägers aufgestellt und die Form so bestimmt, daß diese Bedingungen erfüllt werden. Zunächst sollen einige der letztgenannten Formen besprochen werden.

Stellt man die Bedingung, daß bei voller Belastung die Diagonalen eines Fachwerks gar nicht beansprucht werden, so muß, wie aus Gl. 48, S. 235 hervorgeht, $\frac{M''}{h''} = \frac{M'}{h'}$ sein, d. h. es müssen sich die Längen der Lotrechten wie die Momente bei voller Belastung verhalten. Unter Annahme einer gleichförmig verteilten Last sind aber letztere durch die Ordinaten einer Parabel gegeben, es müssen daher die Knotenpunkte eines

Gurtes Punkte einer Parabel sein, wenn die des anderen auf einer Geraden oder einer Parabel liegen.

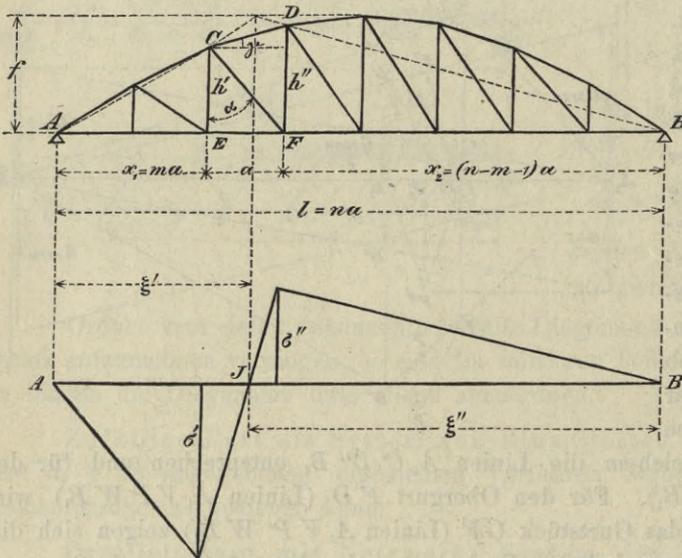
Betrachtet man zunächst einen Träger mit geradem Untergurt und bezeichnet die Pfeilhöhe der Parabel, zugleich die Länge des größten Pfostens bei gerader Felderanzahl, mit f , so ist die Höhe in der Entfernung x gegeben durch:

$$h_x = \frac{4x(l-x)}{l^2} \cdot f,$$

bei ungerader Felderanzahl ist die Höhe in der Mitte:

$$h_o = \frac{l^2 - a^2}{l^2} \cdot f.$$

Fig. 78.



Setzt man für die weitere Berechnung gleiche Felder voraus und nimmt $l = na$, $x_1 = m \cdot a$, so erhält man aus den allgemeinen Formeln für die Gleichung der Parabel

$$h_m = \frac{4m(n-m)}{n^2} \cdot f \dots \dots \dots 127.$$

Diagonalen. Zur Berechnung der Diagonalen CF bzw. $m'(m+1)$ beachte man, daß entsprechend Fig. 78

$$\tan \gamma = \frac{h'' - h'}{a}, \quad \text{also} \quad \tan \gamma = \frac{n - 2m - 1}{n} \cdot \frac{4f}{l}.$$

Da $x_2 = (n - m - 1)a$, so berechnet sich aus der Figur für die Belastungsscheiden der Diagonalen:²³⁾

$$\frac{\xi'}{\xi''} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{h''}{h'} = \frac{m+1}{n-m}; \quad \xi' = \frac{m+1}{n+1} l; \quad \xi'' = \frac{n-m}{n+1} \cdot l.$$

Für die Größen σ' und σ'' (Fig. 78) erhält man die einfachen Ausdrücke

²³⁾ Die für die Belastungsscheide gezeichnete Konstruktion gilt streng genommen für Lastangriff am Untergurt (vergl. S. 277), bei vorhandenen Pfosten ist es gleichgültig, ob EF oder CD verlängert wird.

$$\sigma' = - \frac{m(n-m)}{(m+1) \cdot n} \cdot \sec \alpha; \quad \sigma'' = \frac{m}{n} \cdot \sec \alpha.$$

Für eine gleichförmig verteilte einseitige Belastung wird daher, wenn JB belastet ist,

$$\max(+S) = \frac{m(n-m)}{2(n+1)} \cdot a q \sec \alpha.$$

Belastet man AJ , so wird

$$\max(-S) = - \frac{m(n-m)}{2(n+1)} \cdot a q \sec \alpha.$$

Letzterer Ausdruck ist stets negativ und der absoluten Größe nach $\max(+S)$ gleich. Führt man den Wert $m(n-m)$ aus Gleichung 127 ein und beachtet, daß $h_m \sec \alpha = d_m$, die Länge der m ten Diagonale, so ergibt sich

$$\max(+S) = q \cdot \frac{n}{8(n+1)} \cdot \frac{l}{f} \cdot d_m,$$

d. h. die größte Spannung jeder Diagonale ist ihrer Länge proportional. Ordnet man schlaife Diagonalen an, so sind stets Gegendiagonalen anzubringen. Ist α' der Neigungswinkel der Gegendiagonale, so ist

$$\max(+S') = \frac{(n-m-1)(m+1)}{2(n+1)} \cdot a q \sec \alpha'.$$

Die kleinste Spannung ist dann in beiden Fällen Null. Durch das Eigengewicht — als eine gleichförmig verteilte Belastung gedacht — werden die Diagonalen gar nicht in Anspruch genommen. Die positive und negative Seite der Einflußfläche sind an Größe einander gleich.

Die Bestimmung der Spannungen für ein System von Einzellasten erfolgt nach dem oben allgemein gezeigten Vorgang.

Die Pfosten. Das am Obergurt gleichförmig verteilt gedachte Eigengewicht erzeugt keinerlei Beanspruchung, die gleichförmig verteilt gedachte, auf den Untergurt entfallende Eigenlast in jedem Pfosten die Zugspannung $a p_u$. Bei belastetem Untergurt erhält man für die Abstände der Belastungsscheiden:

$$\frac{\xi'}{\xi''} = \frac{(n-m-1)(m+1)+2}{(n-m-1)(n-m)}; \quad \xi' = \frac{(n-m-1)(m+1)+2}{(n-m-1)(n+1)+2} \cdot l; \quad \xi'' = \frac{(n-m-1)(n-m)}{(n-m-1)(n+1)+2} \cdot l.$$

$$\sigma' = + \frac{n-m+1}{n}; \quad \sigma'' = - \frac{(m-1)(n-m-1)}{(n-m) \cdot n}$$

und daraus ergibt sich, wenn JA belastet ist,

$$\max(+S) = + \frac{[(n-m-1)(m+1)+2](n-m+1)}{(n-m-1)(n+1)+2} \cdot \frac{q a}{2} + a p_u$$

und falls JB belastet ist:

$$\max(-S) = - \frac{(n-m-1)^2(m-1)}{(n-m-1)(n+1)+2} \cdot \frac{q a}{2} + a p_u.$$

Erstere Spannung wird bei Anwendung schlaffer Diagonalen nicht auftreten können, da für den hierzu gehörigen Belastungsfall die Gegendiagonalen in Kraft treten. Für volle Belastung wird die Spannung = $+ a q$. Dasselbe ergibt sich sofort, wenn man die Gleichgewichtsbedingung für einen unteren Knotenpunkt aufstellt und bedenkt, daß die Diagonalen keinen Zug erleiden.

Gurte. Die Spannung im Untergurt ist durch

$$\max(+S) = + \frac{p+q}{8f} l^2$$

gegeben, sie ist in allen Teilen dieselbe.

Die Spannung im Obergurt ist

$$\max(-S) = -\frac{p+q}{8f} l^2 \cdot \sec \gamma.$$

Setzt man $l = n a$ und $a \sec \gamma = c$ der Länge des Gurtstückes, so hat man

$$\max(-S) = -\frac{n(p+q)}{8} \cdot \frac{l}{f} \cdot c,$$

d. h. die größten Spannungen der Gurte sind ihren Längen proportional.

Wir erklären die graphische Behandlung hinsichtlich der Formbestimmung und Ermittlung der Spannungen an einem besonderen Falle.

Beispiel. Für einen Parabelträger (Fig. 79) sei: Stützweite $l = 32 \text{ m}$, Felderanzahl $n = 8$, Felderlänge $a = \frac{l}{n} = 4 \text{ m}$, $f = 4 \text{ m}$. Eigengewicht für beide Träger $p = 2 \text{ t}$, wovon $p_0 = 0,5 \text{ t}$ auf dem Obergurt, $p_u = 1,5 \text{ t}$ auf den Untergurt wirken. Als zufällige Last ist für die Gurte $q_1 = 5,8 \text{ t}$, für die Gitterstäbe $q = 6,4 \text{ t}$ zu Grunde zu legen.

Formbestimmung. a) Graphisch. Trägt man in einem Endpunkt 8 der Stützweite auf einer Lotrechten die Strecke $4 f$ auf und teilt diese in n Teile, so schneiden die Strahlen 0 1, 0 2 . . . auf den Felder-Lotrechten die entsprechenden Höhen ab.

b) Analytisch. Aus Gl. 127 wird $h_m = \frac{4 m(8-m)}{64} \cdot 4 \text{ m}$. Dies gibt für

$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_m = 0$	1,75	3,00	3,75	4	3,75	3,00	1,75	0 m.

Ferner wird:

$$\tan \gamma_{m'm'+1} = \frac{h_{m+1} - h_m}{a}$$

	$\tan \gamma_{m'm'+1}$	0,4375	0,3125	0,1875	0,0625	0,1875	0,3125	0,4375
Daraus	$\sec \gamma_{m'm'+1}$	1,0915	1,0476	1,0174	1,0019	1,0174	1,0476	1,0915
Länge	$c_{m'm'+1} = a \sec \gamma_{m'm'+1}$	4,3660	4,1904	4,0696	4,0076	4,0696	4,1904	4,3660

Ebenso für die Diagonalen:

$$\tan \alpha_{m'm'+1} = \frac{h_m}{a}$$

	$\tan \alpha_{m'm'+1}$	0,4375	0,750	0,935	1,000	0,935	0,750
	$\sec \alpha_{m'm'+1}$	1,0915	1,250	1,369	1,4142	1,369	1,250
	$d_m = a \sec \alpha_{m'm'+1}$	4,3660	5,000	5,476	5,6568	5,476	5,000 m

Ermittlung der Spannungen. a) Analytisch. Durch das Eigengewicht allein für einen Träger: Die Diagonalen erfahren keine Beanspruchung. Die Pfosten werden durchweg mit

$$\frac{1}{2} p_u \cdot a = \frac{1,5 \cdot 4}{2} = 3 \text{ t}$$

gezogen. Die für den ganzen Untergurt gleich große Spannung rechnet sich mit

$$S_p = \frac{2}{2 \cdot 8 \cdot 4} \cdot 32^2 = + 32 \text{ t};$$

die Spannung im Obergurt mit

$$S_{m'm'+1}^p = -\frac{8 \cdot 2}{2 \cdot 8} \cdot \frac{32}{4} \cdot c_{m'm'+1} = 8 c_{m'm'+1},$$

daraus

Obergurt	0 0'	1' 2'	2' 3'	3' 4'	4' 5'	5' 6'	6' 7'	7' 8
Spannung	34,93	33,52	32,56	32,06	32,06	32,56	32,52	34,93 t.

Durch die zufällige Last allein für beide Träger:

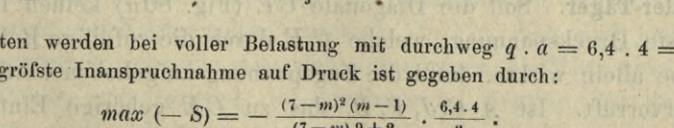
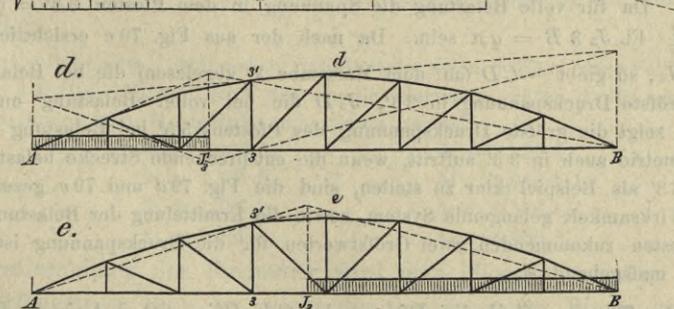
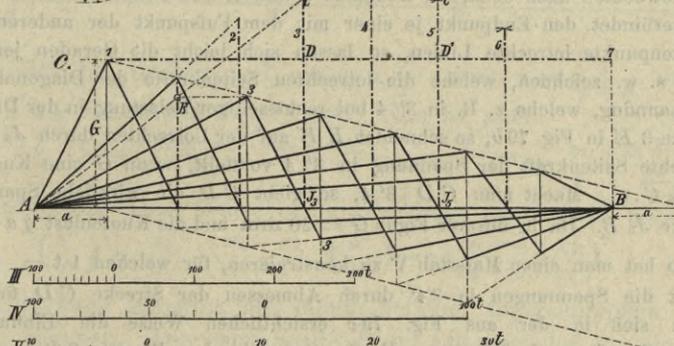
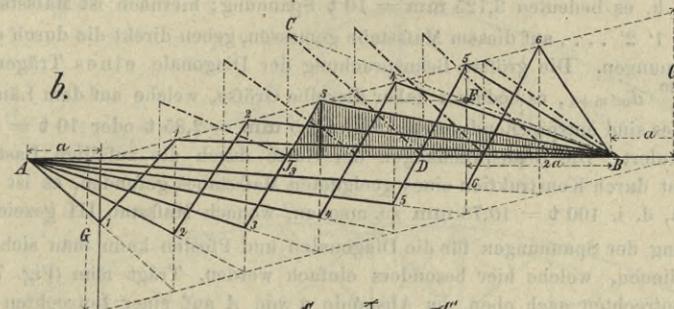
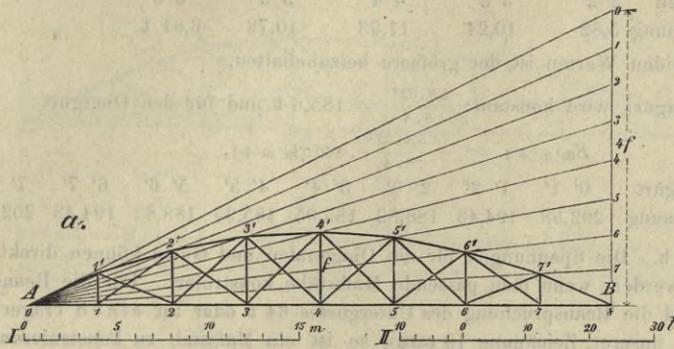
Für die Diagonale gilt $\max(+S_{m'm+1}) = 6,4 \cdot \frac{8}{8 \cdot 9} \cdot \frac{32}{4} \cdot d_{m'm+1} = 5,70 \cdot d_{m'm+1}$, die kleinste Beanspruchung ist 0. Somit

Diagonale	1' 2	2' 3	3' 4	4' 5	5' 6	6' 7
Spannung	24,89	28,50	31,21	32,24	31,21	28,50 t

und umgekehrt

Diagonale	1 2'	2 3'	3 4'	4 5'	5 6'	6 7'
Spannung	28,50	31,21	32,24	31,21	28,50	24,89 t.

Fig. 79.



Die Pfosten werden bei voller Belastung mit durchweg $q \cdot a = 6,4 \cdot 4 = 25,6 \text{ t}$ auf Zug beansprucht. Die größte Inanspruchnahme auf Druck ist gegeben durch:

$$\max(-S) = - \frac{(7-m)^2(m-1)}{(7-m)9+2} \cdot \frac{6,4 \cdot 4}{2}$$

Somit

Pfosten	1 1'	2 2'	3 3'	4 4'	5 5'	6 6'	7 7'
Spannung	—	6,81	10,78	11,93	10,24	5,82	— t

Ebenso ergibt sich aus der Symmetrie für Belastung links:

Pfosten	2 2'	3 3'	4 4'	5 5'	6 6'
Spannung	5,82	10,24	11,93	10,78	6,81 t.

Von diesen beiden Werten ist der größere beizubehalten.

Für den Untergurt wird konstant: $\frac{5,8 \cdot 32^2}{8,4} = 185,6 \text{ t}$ und für den Obergurt

$$S_{m'm'+1} = -\frac{5,8 \cdot 32^2}{8,4} \cdot \sec \gamma_{m'm'+1},$$

dies giebt	Obergurt	0' 1'	1' 2'	2' 3'	3' 4'	4' 5'	5' 6'	6' 7'	7' 8'
	Spannung	202,58	194,43	188,83	185,95	185,95	188,83	194,43	202,58 t.

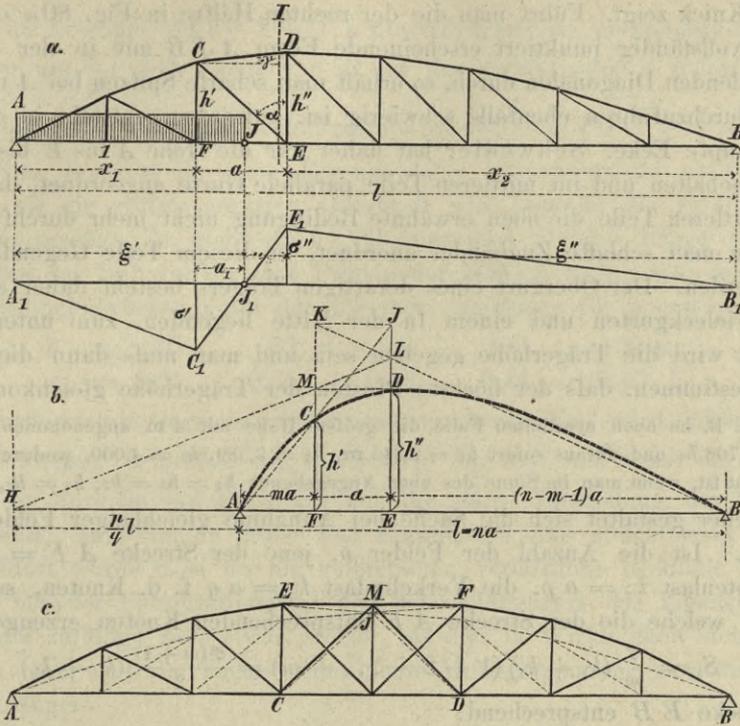
b) Graphisch. Die Spannungen für die Diagonalen und Gurte können direkt an den Längen der Stäbe abgelesen werden, wenn man passende Maßstäbe konstruiert. Für die Beanspruchung durch das Eigengewicht wird die Beanspruchung des Untergurtes 64 t oder für einen Träger 32 t ; setzt man diese Größe $= a$ (in unserer Zeichnung 10 mm), so ist ein Maßstab zu konstruieren, dessen Einheit $\frac{10}{32} = 0,3125 \text{ mm}$, d. h. es bedeuten $3,125 \text{ mm} = 10 \text{ t}$ Spannung; hiernach ist Maßstab IV konstruiert. Die Längen $0 \text{ 1, } 0 \text{ 1', } 1' \text{ 2' } \dots$, auf diesem Maßstabe gemessen, geben direkt die durch das Eigengewicht hervorgerufenen Spannungen. Die größte Beanspruchung der Diagonale eines Trägers durch die zufällige Last wird: $\frac{5,70}{2} d_{m'm+1}$, es bedeutet daher dieselbe Größe, welche auf dem Längenmaßstab 1 m darstellt, $2,85 \text{ t}$, d. h. es sind entsprechend unserer Figur $2,5 \text{ mm} = 2,85 \text{ t}$ oder $10 \text{ t} = 8,8 \text{ mm}$; danach ist Maßstab II konstruiert. Die Beanspruchungen der Gurte durch die zufällige Last werden ebenso wie beim Eigengewicht durch Konstruktion eines geeigneten Maßstabes gefunden, es ist für einen Träger $92,8 \text{ t} = a = 10 \text{ mm}$, d. i. $100 \text{ t} = 10,78 \text{ mm}$ zu machen, wonach Maßstab III gezeichnet ist.

Zur Ermittlung der Spannungen für die Diagonalen und Pfosten kann man sich auch mit Erfolg der Einflußlinien bedienen, welche hier besonders einfach werden. Trägt man (Fig. 79b) im Abstände a von B auf einer Lotrechten nach oben, im Abstände a von A auf einer Lotrechten nach unten die Größe $G = 1$ auf, verbindet den Endpunkt je einer mit dem Fußpunkt der anderen Lotrechten und zieht durch die Knotenpunkte lotrechte Linien, so lassen sich leicht die Geraden jener Einflußlinien $A \text{ 1 } 1 \text{ B, } A \text{ 2 } 2 \text{ B}$ u. s. w. zeichnen, welche die lotrechten Seitenkräfte der Diagonalspannung geben. Um die wirkliche Spannung, welche z. B. in $3' \text{ 4}$ bei rechtsseitiger Belastung in der Diagonale entsteht, zu erhalten, ziehe man 3 E in Fig. 79b, so schneidet BE auf der Lotrechten durch J_3 die Strecke $J_3 C$ ab, welche die lotrechte Seitenkraft der Spannung in $3' \text{ 4}$ vorstellt, wenn G eine Knotenlast darstellt, da Fl. $J_3 \text{ 3 B} = \overline{J_3 C} \cdot a$. Macht man $CD \parallel 3' \text{ 4}$, so giebt CD die wirkliche Spannung in $3' \text{ 4}$ bei Belastung der Strecke $J_3 B$. Da in unserer Figur $G = 20 \text{ mm}$ und die Knotenlast $qa = \frac{4 \cdot 6,4}{2} = 12,8$ für einen Träger, so hat man einen Maßstab V zu konstruieren, für welchen $1 \text{ t} = \frac{20}{12,8} = 1,563 \text{ mm}$ ist, falls man direkt die Spannungen in 3 4' durch Abmessen der Strecke CD finden will. Ganz entsprechend lassen sich in der aus Fig. 79c ersichtlichen Weise die Einflußlinien für die Pfosten konstruieren. Da für volle Belastung die Spannung in dem Pfosten $3 \text{ 3'} = qa = G$, so muß $\frac{q}{G}$ Fl. $A \text{ 3 } J_3 - \frac{q}{G}$ Fl. $J_3 \text{ 3 B} = qa$ sein. Da nach der aus Fig. 79c ersichtlichen Konstruktion $\overline{J_3 C} \cdot a = \text{Fl. } A \text{ 3 } J_3$, so giebt $-CD$ (auf dem Maßstabe V abgelesen) die bei Belastung der Strecke $B J_3$ entstehende größte Druckspannung in 3 3' , $J_3 D$ die bei voller Belastung entstehende größte Zugspannung. $C'D'$ zeigt die größte Druckspannung des Pfostens 5 5' bei Belastung der Strecke $J_5 B$, welche infolge Symmetrie auch in 3 3' auftritt, wenn die entsprechende Strecke belastet ist. Um beide Belastungsfälle für 3 3' als Beispiel klar zu stellen, sind die Fig. 79d und 79e gezeichnet; in beiden Fällen ist das zur Wirksamkeit gelangende System, sowie die Ermittlung der Belastungsscheide gezeigt. Von den jedem Pfosten zukommenden zwei Größtwerten für die Druckspannung ist der größere, in unserem Falle CD , maßgebend.

2. Schwedler-Träger. Soll die Diagonale CE (Fig. 80a) keinen Druck erfahren, so muß die größte Druckspannung, welche CE durch die zufällige Belastung erleiden würde, wenn diese allein wirkte, durch die Zugspannung aufgehoben werden, welche das Eigengewicht hervorruft. Ist $A_1 C_1 J_1 F_1 B_1$ das zu CE gehörige Einflußpolygon, so wird für die ungünstige Belastung auf Druck die Spannung S der Diagonale

$$S = \frac{1}{2} p (\sigma'' \xi'' + \sigma' \xi') + \frac{1}{2} q \xi' \sigma' = 0.$$

Fig. 80.



Dies giebt die Bedingung $\frac{\xi'}{\xi''} = -\alpha \frac{\sigma''}{\sigma'}$, wenn $\alpha = \frac{p}{p+q}$ das Verhältniß des Eigengewichtes zur Gesamtlast bezeichnet. Nun ist aber

$$\frac{\xi'}{\xi''} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{h''}{h'}; \quad \sigma' = \frac{x_1}{l} \left(\frac{x_2}{h''} - \frac{x_2+a}{h'} \right) \operatorname{cosec} \alpha; \quad \sigma'' = \frac{x_2}{l} \left(\frac{x_1+a}{h''} - \frac{x_1}{h'} \right) \operatorname{cosec} \alpha.$$

Die Einführung dieser Werte in die Gleichung für S giebt nach kurzer Rechnung

$$\left(\frac{h''}{h'} \right)^2 + \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\alpha x_2 - x_1}{x_2 + a} \cdot \left(\frac{h''}{h'} \right) = \alpha \frac{x_1 + a}{x_2 + a} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \dots \dots \dots 128.$$

Diese Gleichung gestattet, aus einem beliebig angenommenen h alle übrigen der Reihe nach zu rechnen. Die entstehende Form soll zunächst an einem Beispiel nachgewiesen werden.

Beispiel. Bei einem Träger von 32 m Stützweite seien 8 gleichlange Felder anzuordnen, ferner sei $p = 3 \text{ t}$, $q = 4 \text{ t}$ f. d. lfd. m. Setzt man in die Gleichung 128 an Stelle von h'' der Reihe nach h_2, h_3 u. s. w., so findet man, h_1 vorläufig unbestimmt lassend:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1,000 h_1 & h_5 &= 1,423 h_1 \\ h_2 &= 1,531 h_1 & h_6 &= 1,046 h_1 \\ h_3 &= 1,706 h_1 & h_7 &= 0,566 h_1 \\ h_4 &= 1,656 h_1 & h_8 &= 0,000 h_1. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung wird man überall, wo man es wie hier mit gleichen Felderlängen zu thun hat, nicht die thatsächlichen Werte von x_1 und x_2 , sondern nur die Anzahl der Knotenweiten einsetzen. In Fig. 80 a sind jene Werte graphisch aufgetragen, es ergibt sich, wie man sieht, eine gegen die Mitte unsymmetrische Form; der höchste Punkt, entsprechend der Ordinate h_3 , liegt in der linken Hälfte, eine verwandte Form wird erhalten, wenn man die Zugbänder nach links fallend annimmt. Behält man von jeder dieser Formen jene Hälfte, welche die größte Höhe enthält, bei, so bekommt man eine Form $A E J F B$ (Fig. 80 c), welche in der Mitte einen

unschönen und hinsichtlich der praktischen Durchführung einige Schwierigkeit verursachenden Knick zeigt. Führt man die der rechten Hälfte in Fig. 80a entsprechende, in Fig. 80c vollständig punktiert erscheinende Form AJB mit in der linken Hälfte nach links fallenden Diagonalen durch, so erhält man scharfe Spitzen bei A und B , welche konstruktiv durchzuführen ebenfalls schwierig ist, außerdem entsteht in der Mitte eine unschöne stumpfe Ecke. Schwedler hat daher nur die Höhe A bis E bis zur höchsten Ordinate beibehalten und im mittleren Teile parallele Gurte angeordnet, dann wird aber in diesem mittleren Teile die oben erwähnte Bedingung nicht mehr durchführbar und es müssen, wenn man schlaife Zugbänder anordnet, in diesem Teile Gegendiagonalen eingeschaltet werden. Der Obergurt eines derartigen Trägers besteht daher aus zwei symmetrischen Vieleckgurten und einem in der Mitte liegenden, zum unteren parallelen Teile. Meist wird die Trägerhöhe gegeben sein und man muß dann die anderen Ordinaten so bestimmen, daß der höchste Pfosten der Trägerhöhe gleichkommt.

Wird z. B. im oben erwähnten Falle die größte Höhe mit 4 m angenommen, so findet man $h_3 = 4 \text{ m} = 1,706 h_1$ und daraus sofort $h_1 = 2,345 \text{ m}$, $h_2 = 3,589$, $h_3 = 4,000$, wodurch die Form vollständig bestimmt ist, wenn man im Sinne des oben Angegebenen $h_4 = h_5 = h_3$, $h_6 = h_2$, $h_7 = h_1$ macht.

Einfacher gestaltet sich die Sache bei Annahme gleichlanger Felder und voller Knotenlasten. Ist die Anzahl der Felder n , jene der Strecke $AF = m$, die Eigengewichts-Knotenlast $k_1 = a p$, die Verkehrslast $k_2 = a q$ f. d. Knoten, so ist die Beanspruchung, welche die der Strecke AF entsprechenden Knoten erzeugen,

$$S_1 = \frac{\sigma'}{m} (k_1 + k_2) (1 + 2 + \dots + m) = \frac{\sigma' (m+1)}{2} (k_1 + k_2)$$

und für Strecke EB entsprechend:

$$S_2 = \frac{\sigma''}{n-m-1} (k_1) [1 + 2 + \dots + (n-m-1)] = \sigma'' \cdot \frac{n-m}{2} k_1;$$

für die Werte σ wird:

$$\sigma' = \frac{m}{n} \left(\frac{n-m-1}{h''} - \frac{n-m}{h'} \right) \cdot a \operatorname{cosec} \alpha; \quad \sigma'' = \frac{n-m-1}{n} \left(\frac{m+1}{h''} - \frac{m}{h'} \right) \cdot a \operatorname{cosec} \alpha.$$

Setzt man die Summe beider Werte S gleich Null, so ergibt sich:

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m} \cdot \frac{m + \frac{p}{q} n}{m+1 + \frac{p}{q} n}.$$

Dieser Ausdruck gestattet eine sehr einfache Konstruktion einer Größe h aus der anderen. Zu diesem Ende mache man (Fig. 80b) $HA = \frac{p}{q} l$ und ziehe, um z. B. h'' aus h' zu erhalten, der Reihe nach AJ durch C , $KJ \parallel AB$, dann die Linie KB , endlich LM durch H , $MD \parallel AB$ —. Die umgekehrte Folge liefert h' aus h'' .

Bezeichnet man die Höhe in der Mitte mit $h_{\frac{n}{2}}$ und bildet die Produkte

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} \cdot \frac{h_{m+2}}{h_{m+1}} \dots \frac{h_{\frac{n}{2}}}{h_{\frac{n}{2}-1}}$$

indem man die bezüglichen Werte einsetzt, so erhält man:

$$\frac{h_{\frac{n}{2}}}{h_m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{n-m} \cdot \frac{m + \frac{p}{q} n}{\frac{n}{2} + \frac{p}{q} n}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die oben vorgeführte Konstruktion von h_m auch dann noch gültig bleibt, wenn $h_{\frac{n}{2}}$ an Stelle der nächsten Höhe tritt. Bezeichnet man $m = \frac{x}{a}$, $n = \frac{l}{a}$, $h_{\frac{n}{2}} = \bar{h}$, so giebt die letztgefundene Gleichung: $h_x = \frac{2x(l-x)(q+2p)}{(pl+qx)l} \cdot \bar{h}$. Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, auf welcher die Knotenpunkte des Obergurtes

liegen. Eine Asymptote der Hyperbel ist die Lotrechte durch H , der Mittelpunkt derselben liegt im Abstände $2 \left(1 + 2 \frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{h}$ über H ; die zweite Asymptote geht durch einen Punkt, welcher um $\frac{p}{q} l$ nach rechts von B auf der verlängerten AB liegt.

Die größte Höhe der Hyperbel tritt für $x_1 = \frac{p}{q} \left\{ \sqrt{1 + \frac{p}{q}} - 1 \right\} l$ ein, d. i. an derselben Stelle, woselbst die vom Eigengewichte hervorgerufene positive Querkraft ebenso groß, als die größte negative Querkraft wird, welche die zufällige Last bei Belastung links erzeugt. x_1 giebt einen Näherungswert für die Länge jener Strecke, auf welche man das Schwedler'sche Prinzip durchführen kann; man erhält z. B. für eingleisige Eisenbahnbrücken unter den üblichen Annahmen für p und q :

l	=	10	30	50	100	150 m
x_1	=	0,24	0,35	0,38	0,44	0,45 . l.

Der mittlere mit Gegendiagonalen zu versehenen Teil wird mithin verhältnismäßig um so kleiner, je größer die Spannweite ist, weil mit dieser der Quotient $\frac{p}{q}$ wächst. Da die Formeln mit Rücksicht auf die starre Verbindung der Knotenpunkte und den Umstand, daß hier an Stelle von Einzellasten eine gleichförmig verteilte Belastung eingeführt wurde u. s. w., nie vollkommen verlässliche Resultate geben, ist es zweckmäßig, bei der Formbestimmung des Schwedlerträgers das Eigengewicht etwas kleiner oder die zufällige Last etwas größer, als dies in Wirklichkeit sich herausstellt, zu wählen, da dann nach der Theorie eine kleine Anfangsspannung zurückbleibt, welche die Fehler verringert.

Soll die Inanspruchnahme der Diagonale CE für alle Stellungen eines Einzellastsystems ≥ 0 sein, so sind insbesondere jene Lagen zu untersuchen, für welche entweder die erste oder die zweite Last in F liegt, alle übrigen nach links sich erstrecken. Bezeichnet man, Eigengewicht und zufällige Last wirkend gedacht, die Querkraft für den Schnitt I mit R und das Moment für E mit M , die Beanspruchung von CE mit S und geben wir den Größen den Index 1 oder 2, je nachdem die erste oder zweite Last in F ruht, so wird Gl. 47, S. 234

$$S_1 = \left[R_1 - \frac{M_1}{h''} \tan \gamma \right] \sec \alpha; \quad S_2 = \left[R_2 - \frac{M_2}{h''} \tan \gamma \right] \sec \alpha.$$

Nimmt man an, es sei die erste Stellung maßgebend, also $S_1 = 0$, bestimmt man aus $S_1 = 0$ den Wert γ und führt ihn in die zweite Gleichung ein, so wird

$$S_2 = M_2 \left[\frac{R_2}{M_2} - \frac{R_1}{M_1} \right] \sec \alpha.$$

Nimmt man an, es sei die zweite Stellung maßgebend, ermittelt aus $S_2 = 0$ den Wert γ und setzt ihn in die erste Gleichung für S_1 ein, so wird

$$S_1 = M_1 \left[\frac{R_1}{M_1} - \frac{R_2}{M_2} \right] \sec \alpha.$$

Da im ersten Falle S_2 , im zweiten S_1 positiv sein muß, ergibt sich sofort, daß jene Lastlage maßgebend ist, für welche der zugehörige Bruch $\frac{R}{M}$ den kleineren Wert erreicht. Die größte Höhe erreicht der Träger an der Lotrechten, an der die Querkraft das Zeichen wechselt.

Die Ermittlung der Trägerform gestaltet sich danach wie folgt. Man bestimmt vom linken Trägerende gegen das rechte für die Einzelfelder die größten negativen Querkraften, welche mit Rücksicht auf das Eigengewicht und das zu Grunde gelegte Einzellastsystem möglicherweise auftreten können. In den ersten Feldern wird der Einfluss

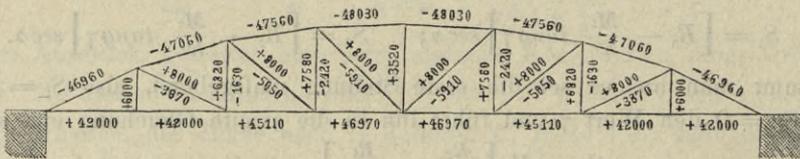
des positive Querkräfte erzeugenden Eigengewichts überwiegen, die grössten negativen Querkräfte werden also positiv sein. An der linken Lotrechten desjenigen Feldes, in welchem zuerst die grösste negative Querkraft wirklich negativ wird, erhält man die grösste Höhe h ; werden nun für die einzelnen Felder die möglichst kleinsten Werte von $\frac{R}{M}$ bestimmt, so können von der grössten Höhe an die vorhergehenden nach der Formel

$$h' = h'' - a \tan \gamma = \left[1 - \frac{R}{M} a \right] h''$$

berechnet werden. Diese Regel ist zuerst von Stelzel entwickelt.

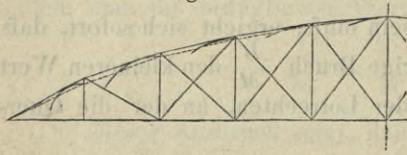
3. Sonstige Trägerformen. Ausser den vorstehend besprochenen Formen lassen sich noch eine Reihe anderer bilden. Man kann z. B. untersuchen, wie sich die Träger gestalten, wenn für die grösste oder kleinste Inanspruchnahme, welche eine bestimmte Stabschar des Trägersystems erleidet, ein gleich grosser Wert verlangt wird. Die Verfolgung dieses Prinzips führte uns auf den Schwedlerträger, welcher die Bedingung erfüllt, dass die Kleinstspannungen der Diagonalen gleich Null werden. Es lässt sich nun auch ein Trägersystem bilden, für welches die obere Spannungsgrenze der Diagonalen konstant ist. Bestimmt man dem alten Verfahren entsprechend die Querschnitte der Stäbe nach der grössten Spannung, welche sie aufnehmen sollen, so würden die Diagonalen einen konstanten Querschnitt erhalten, was gewisse praktische Vorteile mit sich bringt. Fig. 81 zeigt einen derartigen Träger, für welchen die Spannungszahlen unter Annahme eines Knotengewichtes von einer Tonne für die Eigenlast und von 5 t für die zufällige Last eingetragen sind. Um zu dieser Form zu gelangen, hat man in der allgemeinen Formel für die grösste Spannung einer Diagonale sämtliche Grössen durch h' und h'' (die Höhen der Lotrechten eines Feldes) auszudrücken und die Spannung gleich einer Konstanten zu setzen. Setzt man dann die Höhe der ersten Lotrechten h_1 , so kann man ähnlich, wie dies beim Schwedlerträger geschieht, alle übrigen Längen der Lotrechten als Funktion der ersten berechnen, wobei man die grösste oder die Höhe in der Mitte so bestimmen kann, dass sie einer gegebenen Länge entspricht.

Fig. 81.



Ebenso könnte man die Bedingung stellen, dass die obere oder untere Spannungsgrenze der Pfosten eine bestimmte konstante Grösse sei. In ähnlicher Weise kann man natürlich auch die Spannungen der Gurte bestimmten Bedingungen unterwerfen.

Fig. 82.



Die Forderung, dass die Maximalspannung des Obergurtes eine konstante Grösse sei, führt zur Bedingung $\frac{M}{h} = C$. Hierbei bedeutet h die Länge der Linie, welche vom Fusspunkte der Lotrechten normal auf den gegenüberliegenden Gurt gezogen wird. Auch beim Parabelträger ist der entsprechende Quotient konstant, wobei jedoch unter h die Höhe der Vertikalen selbst zu verstehen ist. Dies führt zu einer einfachen Konstruktion des Trägers mit konstanter oberer Gurtung aus dem Parabelträger. Beschreiben wir (Fig. 82) aus den Fusspunkten der Parabelträger-Lotrechten mit der Länge

...

derselben Kreisbögen, so erscheint die Form des Obergurtes jenes Trägers durch die Tangenten gegeben, welche vom Auflager ausgehend nacheinander die beschriebenen Kreise berühren.²⁴⁾ Wollte man auch im Untergurt konstante Spannungen erzielen, so ist solches nur dadurch erreichbar, dafs man auch diesen krümmt. Dieses Ziel verfolgt Pauli bei den nach ihm benannten Trägern (Fig. 83).

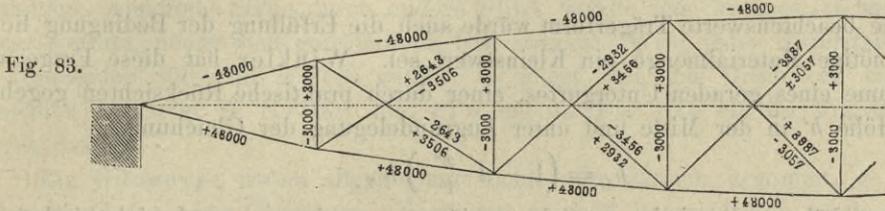


Fig. 83.

Bei Anwendung schlaffer Diagonalen wird eine genaue Durchführung jedoch nicht möglich. Man pflegt in diesem Falle die Gurte symmetrisch anzuordnen und die sogenannte mittlere Spannung $\frac{1}{2} \left(\frac{M'}{h'} + \frac{M''}{h''} \right) \sec \gamma$ gleich groß anzunehmen. Da M' und M'' die Momente bei voller Belastung, bezogen auf die Fußpunkte der Pfosten, sind und $\sec \gamma$ sich ebenfalls durch die Felderlänge und den Höhenunterschied $h'' - h'$ ausdrücken läßt, so ist es leicht, eine Höhe aus der anderen zu berechnen. Setzt man die Höhe in der Mitte = h_0 , so ergibt sich für die Höhe im Abstände x näherungsweise der Ausdruck

$$h_x = 4 h_0 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left[1 + 2 \frac{h_0^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right].$$

Die Bestimmung der Spannungen selbst kann bei gegebener Form nach den bekannten Regeln vorgenommen werden. Die konstante Spannung im Gurte ist hierbei

$$S = (p + q) \frac{l^2}{8 h_0}.$$

Die Durchführung eines gleichen Querschnittes für eine bestimmte Stabschar, welche gewisse praktische Vorteile bietet, läßt sich mit der Forderung, dafs die obere Spannungsgrenze für die gegebene Schar die gleiche sei, nicht vereinigen, wenn man nach einer Formel vorgeht, welche den Grenz-Inanspruchnahmen des Baustoffs Rechnung trägt. Es unterliegt jedoch die Auffindung von Formen, welche auch mit Rücksicht auf diese Berechnungsweise die Herstellung gleich großer Querschnitte ermöglichen, keinerlei Schwierigkeiten. Man braucht nur die Formel für die Querschnittsfläche eines Stabes aufzustellen, in dieser Formel alle Größen, welche sich auf die Form beziehen, soweit sie nicht gegeben sind, durch h' und h'' auszudrücken, und ist dann wieder wie oben im stande, durch Annahme einer Höhe aus derselben alle übrigen nach und nach zu bestimmen, und damit die Trägerform zu ermitteln. Es wird jedoch (einer der Gurte geradlinig vorausgesetzt) immer nur möglich sein, eine bestimmte Stabschar, so z. B. den Obergurt oder den Untergurt oder die Pfosten oder aber die Diagonalen mit gleichem Querschnitte durchzuführen. Für alle übrigen Teile ist dann die Forderung nicht gleichzeitig erfüllbar.

Eine andere Forderung, welche man der Gestaltung der Träger zu Grunde legen kann, ist in Folgendem enthalten: Wie sind die Querschnitte des Obergurtes einer Fach-

²⁴⁾ Über die erstmalige Untersuchung des Trägers mit konstanter oberer Gurtung und geradem Untergurt vergl. Schäffer. Zeitschr. f. Bauw. 1865, S. 150. Ausführungen: Brücken über die Donau bei Rechtenstein und Zell (Schlierholz, Schäffer).

Oder man zerlegt nach Culmann R in A zunächst in eine durch C gehende Kraft T parallel zu AC und eine Horizontale U (Fig. 85), alsdann T in die Seitenkräfte O parallel zu CD und S , die gesuchte Spannung parallel zu CE . Es lassen sich leicht verschiedene solcher Zerlegungen angeben.

§ 35. Mehrfaches Fachwerk (Gitterwerk). Fachwerke, deren zwischen den Gurtungen befindliche Stäbe durch andere Stäbe, welche jene kreuzen, in mehrere Teile zerlegt werden, nennt man gewöhnliche Gitterwerke. Wird jeder Gitterstab durch die ihn kreuzenden Stäbe in n Teile geteilt, so pflegt man das Gitterwerk ein n -teiliges zu nennen; so zeigt (s. S. 330) Fig. 87 *a* ein 5-, Fig. 87 *b* ein 6-, Fig. 87 *c* ein 4-teiliges System.

Ein Gitterwerk ist im allgemeinen nicht mehr statisch bestimmt, es fehlt zwar in der Regel nur eine Gleichung. Nach dem in § 23 Besprochenen würde es thunlich sein, die Spannung in den überzähligen Bestandteilen, als welche man beliebige auswählen kann, für eine gegebene Belastung zu bestimmen, der zahlreichen Unbekannten wegen wird jedoch die Rechnung äußerst langwierig. Man pflegt daher einem Näherungswege folgend das Tragwerk in n einteilige Tragwerke zu zerlegen. Hierbei tritt jeder Gitterstab in den einteiligen Tragwerke nur einmal auf, während jedes Gurtstück in sämtlichen Tragwerken vorkommt. Die Zerlegung ist zulässig, wenn sich bei der Formänderung der einzelnen Tragwerke, welche durch die äußeren Kräfte veranlaßt wird, eine vollkommene Übereinstimmung der Knotenpunkte ergibt.

Bei Trägern mit gekrümmten Gurten läßt sich das gegebene Tragwerk in Einzeltragwerke zerlegen, wenn man in den Knotenpunkten derselben diejenigen Lasten anbringt, welche in den entsprechenden Knotenpunkten des gegebenen mehrfachen Tragwerks wirken, und wenn man für die vieleckigen Gurtstücke im Einzeltragwerk gerade Gurtstücke unter Beibehalt der Knotenpunkte der Einzeltragwerke an die Stelle setzt. Um z. B. die Spannung des Gurtstückes BD (s. Fig. 86) zu ermitteln, hat man es als Bestandteil der drei einzelnen Systeme 1 1 1, 2 2 2, 3 3 3, in welche sich der Träger zerlegen läßt, zu betrachten. Schließt das fragliche Gurtstück BD mit der Wagerechten den Winkel γ ein, BC als zum ersten Tragwerk gehörig mit der Wagerechten den Winkel γ_1 und ist S_1 die Spannung des Stückes BC , so ist die wagerechte Seitenkraft $S_1 \cos \gamma_1$ und die vom ersten Tragwerk herrührende Spannung in BD gegeben mit $S_1 \cos \gamma_1 \sec \gamma$; ebenso ergibt sich für die vom zweiten Tragwerk herrührende Spannung in BD die Größe $S_2 \cos \gamma_2 \sec \gamma$ und vom dritten $S_3 \cos \gamma_3 \sec \gamma$. Man erhält daher für die Gesamtspannung S des Gurtstückes BD

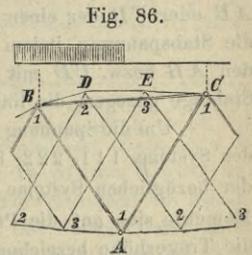


Fig. 86.

$$S = (S_1 \cos \gamma_1 + S_2 \cos \gamma_2 + S_3 \cos \gamma_3) \sec \gamma \dots \dots \dots 130.$$

Sind, wie dies bei schwach gekrümmten Gurten stets der Fall ist, die Werte $\gamma \gamma_1 \gamma_2 \dots$ wenig voneinander unterschieden, so ergibt sich kurz $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Die Spannung der Gitterstäbe ergibt sich unmittelbar aus dem einfachen System. Hinsichtlich der ungünstigsten Stellung einer gleichmäßig verteilten Last sei jedoch in Betreff der Gitterstäbe bemerkt, daß es nur darauf ankommt, den einen Knotenpunkt voll, den nächsten des einfachen Tragwerks gar nicht belastet zu haben. Wirkt, wie z. B. in unserem Falle, die Last auf den Obergurt, so wird für jede Belastung, welche nicht über E hinaus reicht, B voll, C dagegen gar nicht belastet. Innerhalb DE kann das Lastende beliebig liegen.

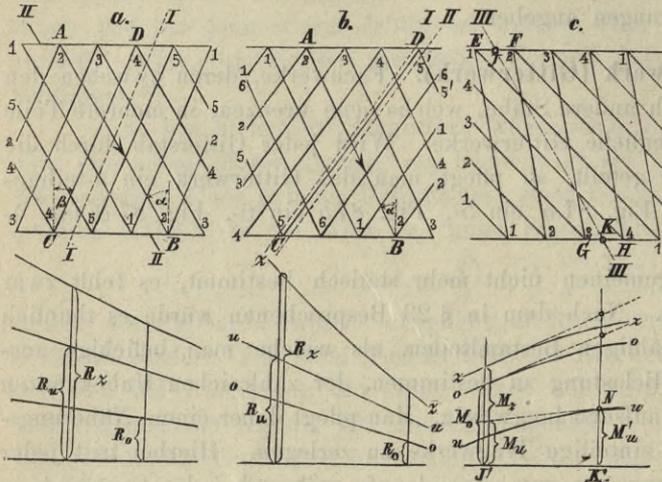
Für Träger mit parallelen Gurten werden die obengenannten Winkel γ stets sämtlich Null. Die Bestimmung der Spannungen geht in eine reine Addition über. In diesem Falle lassen sich einfache Regeln für die direkte näherungsweise Ermittlung der Gurt- und Gitterstabspannungen geben.

Führt man einen Schnitt I parallel zur zweiten Stablage (Fig. 87 *a*, n ungerade) durch die Mitte des Gitterstabes AB , dessen Spannung man bestimmen will, so muß die Summe der lotrechten Kräfte für den Teil links des Schnittes gleich Null sein. Man erhält daher, wenn R_1 die auf den Schnitt I entfallende Querkraft ist:

$$-(S_5 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \cos \alpha + R_1 = 0.$$

Setzt man ferner näherungsweise $\frac{S_1 + S_3}{2} = S_2$; $\frac{S_5 + S_4}{2} = S_2$ u. s. w., so wird $S_2 = \frac{1}{5} R_1 \sec \alpha$ und allgemein

Fig. 87.



$$S_{AB} = \frac{1}{n} R_1 \sec \alpha \quad . \quad 131.$$

Für einen Stab CD , welchem der Schnitt II in Fig. 87 a entsprechen würde, erhielte man entsprechend, wenn R_{II} die für diesen Schnitt entfallende Querkraft, β der Neigungswinkel des Stabes ist:

$$S_{CD} = - \frac{1}{n} R_{II} \sec \beta \quad . \quad 132.$$

Ist n eine gerade Zahl (Fig. 87 b, wo $n = 6$), so denke man sich wieder durch die Mitte von AB zwei Schnitte I und II, den einen dicht links von $5\ 5'$, den anderen dicht rechts geführt und stelle die Gleichgewichtsbedingungen auf, so hat man, für beide Schnitte dieselbe Querkraft R annehmend:

$$\text{für I} - (S_5 + S_6 + S_1 + S_{AB} + S_3 + S_4) \cos \alpha + R = 0 \text{ und}$$

$$\text{für II} - (S_5 + S_1 + S_{AB} + S_3 + S_4 + S_5) \cos \alpha + R = 0.$$

Addiert man beide Gleichungen und setzt wieder

$$S_{AB} = \frac{S_1 + S_3}{2} = \frac{S_4 + S_6}{2} = \frac{S_5 + S_5'}{2},$$

so wird wie früher $S_{AB} = \frac{1}{6} R \sec \alpha$, allgemein also $S_{AB} = \frac{1}{n} R \sec \alpha$. Dasselbe würde man für CD erhalten, wobei jedoch die Schnitte I und II parallel zu AB zu führen wären und R sich auf diesen Querschnitt zu beziehen hätte.

Es gilt daher allgemein: Ist R die Querkraft für einen Schnitt, welcher durch die Mitte eines Stabes AB oder CD der einen oder anderen Stablage parallel zu CD oder AB geführt wird, so findet sich die Stabspannung, indem man diese Querkraft mit dem n ten Teile der Sekante des Winkels multipliziert, den AB bzw. CD mit der Lotrechten einschließt. Für positive Querkräfte wird die rechtsfallende Stablage gezogen, die linksfallende gedrückt.

Um die Spannung in einem Gurtstabe EF zu finden, betrachte man EF der Reihe nach als Element des Systems 1 1 1, 2 2 2, 3 3 3, 4 4 4 u. s. w., so ist, wenn $S_1 S_2 S_3$ die Spannungen in EF als Bestandteile der bezüglichen Systeme sind, $S_1 = -\frac{M_1'}{h}$, $S_2 = -\frac{M_2}{h}$, $S_3 = -\frac{M_3}{h}$, $S_4 = -\frac{M_4}{h}$, wobei die Momente sich auf die Punkte 1' 2 3 4 des Untergurtes für die gegebene Belastung beziehen, während h die Trägerhöhe bezeichnet und für jedes M nur die Knotenpunkte des bezüglichen Systems belastet zu denken sind. Die Summierung der Werte S liefert die Spannung in EF , ΣM läßt sich angenähert dem Momente in K gleich setzen, welches die ganzen auf den Trägerteil links des Schnittes JK wirkenden äußeren Kräfte erzeugen. Man hat dann einfach:

$$S_{CD} = - \frac{M_K}{h} \text{ und ebenso würde sich finden: } S_{GH} = + \frac{M_J}{h}.$$

Bei positivem Momente M ist die Spannung im Obergurte stets ein Druck, im Untergurte ein Zug.

Es ergibt sich aus obigem allgemein, daß bei einem mehrteiligen Systeme die Spannungen der Gitterstäbe der Querkraft direkt, der Teilungszahl umgekehrt proportional sind, daß ferner der eine der sich kreuzenden Stäbe stets gezogen, der andere gedrückt ist, daß endlich die Spannungen der Gurtstäbe dem Momente direkt, der Trägerhöhe umgekehrt proportional sind und ein Gurt gezogen, der andere gedrückt wird.

Bei Benutzung dieser Näherungsregeln ist die Richtung des Schnittes wohl zu beachten. Wirkt z. B. (Fig. 87 c) die zufällige Last auf den Obergurt, das Eigengewicht auf beide Gurte und ermittelt man drei Momentenkurven, wovon die Kurve o die Momentenkurve der Obergurtsbelastung durch das Eigengewicht, u die Momentenkurve der Untergurtsbelastung durch das Eigengewicht, z jene durch die zufällige Last darstellt, so erhält man das Moment im Punkte J durch die Addition der Ordinaten M_o , M_z und M_u , wobei M_u erhalten wird, indem man durch den Punkt N , in welchem die Lotrechte durch K die Eigengewichts-Momentenkurve des Untergurtes trifft, eine Tangente an diese Kurve u zieht, welche auf der Lotrechten durch J das verlangte Stück abschneidet. Die Richtigkeit ergibt sich, wenn man

sich diese Tangente als Seilspannung, u als Seilkurve denkt. Bei Bestimmung der Spannung in GH wäre nur die in der Lotrechten K' liegende Ordinate M'_u ohne weiteres benutzbar, während man, um die Werte M'_z und M'_o zu erhalten, durch jene Punkte Tangenten zu ziehen hat, in welchen die Lotrechte JJ' die Kurven o und z trifft. Sind beide Stablagen unter gleichen Winkeln geneigt, so entfällt die erwähnte Verbesserung, da KJ lotrecht wird.

Ähnliches ist hinsichtlich der Querkräfte der Fall. Für die Bestimmung der Spannung des Stabes AB in Fig. 87 *b* hat man, wenn z. B. die Last auf den Untergurt wirkend gedacht wird und die Kurve z die größten Querkräfte der zufälligen Last, o die Querkraftslinie der Obergurts-Eigenbelastung, u jene der auf den Untergurt wirkenden Kräfte darstellt, einfach die Werte R_u , R_z und R_o zu addieren, welche dem punktierten Schnitte CD entsprechen.

Berechnung eines mehrteiligen Fachwerks ist auf T. V, F. 10 bis 15 vorgeführt; die Beschreibung folgt in § 40.

Systeme mit konstanter Gitterstabspannung. Man hat versucht, behufs einheitlicher Durchführung der Stabquerschnitte Anordnungen zu treffen, bei welchen die Gitterstabquerschnitte konstant ausfallen. Entsprechend Gl. 131, S. 330

$$S = \frac{1}{n} R \sec \alpha$$

kann man dies dadurch erreichen, daß man entweder die Teilungszahl n oder den Stellungswinkel α verändert, s. Fig. 88. Im zweiten Falle stellen sich die Gitterstäbe gegen das Ende zu steiler, im ersten rücken sie gegen die Mitte weiter auseinander; die letztere Konstruktion ist bei Brücken der österr. Staatsbahn, erstere bei der Brücke der österr. Kaiserin Elisabeth-Bahn über die Wien bei Wien zur Ausführung gekommen. Beide Anordnungen haben den Nachteil, daß die Maschenweite ungleich ausfällt, bei der ersteren tritt außerdem der mißliche Umstand hinzu, daß sich die Gitterstäbe am Knoten nicht in einem Punkte treffen, bei der zweiten, daß die Stoffmenge derselben sich wesentlich vergrößert.

Statisch bestimmte Parallelträger, deren Gitterstäbe nur in einem Sinne beansprucht werden, lassen sich bilden, wenn man in ein Hauptssystem von Fachwerkstäben ein Nebensystem so einschaltet, daß die Last einer gewissen Anzahl von Knotenpunkten des Nebensystems durch einen in der Mitte des Trägers befindlichen Pfosten ganz oder nur zum Teil auf das Hauptssystem übertragen wird; im letzteren Falle vermittelt ein zweites Nebensystem die Übertragung der verbleibenden Drücke auf die Enden. Auch dieser Anordnung stehen praktische Bedenken entgegen, welche einerseits in einem größeren Materialaufwande, andererseits in dem Umstande liegen, daß die Knotenpunkte des Nebensystems bei derartigen Anordnungen sich mehr als jene des Hauptsystems senken, wodurch eine unebene Bahn entsteht; endlich ist noch als Nachteil zu bezeichnen, daß die steif zu konstruierenden Druckstäbe des Haupt- und Nebensystems sich kreuzen. — Zur Ausführung ist genanntes System bisher nach Wissen des Verfassers nicht gekommen.²⁶⁾

Die Einflußlinien für mehrfache Fachwerke sind eigenen Bedingungen unterworfen, wir weisen diesbezüglich im besonderen auf die Untersuchungen Müller-Breslau's.

Als Beispiel einer genauen Berechnung der überzähligen Stäbe bringen wir das auf T. IV, F. 16 bis 29 behandelte Beispiel. Wir schalten in F. 24 die Gegenstreben aus und ersetzen sie durch unbekannte Kräfte X_1, X_2, \dots , die wir aus der Bedingung, daß die Formänderungsarbeit ein Kleinstwert werden müsse, rechnen.

²⁶⁾ Es wird an dieser Stelle auch auf den Vorschlag von Dietz hingewiesen, statisch bestimmte gegliederte Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem herzustellen. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1899, S. 230 und 873.

Fig. 88.

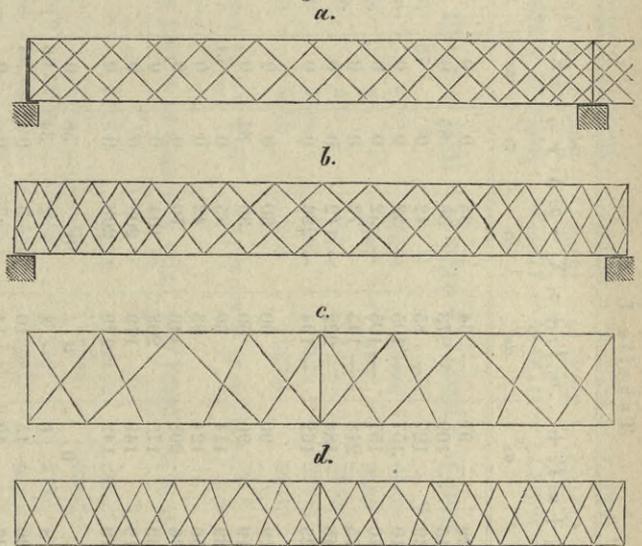


Tabelle II. Bestimmung der Abgeleiteten der Arbeitsgleichung.

$$1. \frac{d\mathfrak{A}}{dX_1} = \alpha_1 \rho \sigma_1 P_1 + \alpha_2 \rho \sigma_1 P_2 + \dots + \alpha_1^2 \rho X_1 + \alpha_1 \alpha_2 \rho X_2 + \dots = 0$$

O_2	9029	18058	15048	12039	9028	6079	3009	7073	—
U_2	-16848	-14494	-12069	-9720	-7290	-4860	-2430	6561	—
V_1	—	5220	0	0	0	0	0	3028	—
V_2	—	2361	-4564	577	420	315	210	105	3463
D_1	—	64997	17726	14774	11878	8863	5907	2952	56367
X_1	0	0	0	0	0	0	0	73920	—

Gleichung 1 . . . $-80397 P_1 + 16726 P_2 + 18330 P_3 + 14557 P_4 + 10916 P_5 + 7276 P_6 + 3636 P_7 + 142733 X_1 + 3463 X_2 = 0.$

$$2. \text{ Abgeleitete. } \frac{d\mathfrak{A}}{dX_2} = \alpha_1 \rho \sigma_2 P_1 + \alpha_2 \rho \sigma_2 P_2 + \dots + \sigma_2 \rho \sigma_1 X_1 + \sigma_2^2 \rho X_2 + \dots = 0$$

O_3	5051	10102	15153	12123	9092	6062	3031	—	5361
U_3	-7696	-15392	-12802	-10268	-8436	-5106	-2590	—	5476
V_2	-4583	-8860	-1120	815	611	407	204	3463	6721
V_3	-2604	-5208	-7812	2083	1562	1042	521	—	5623
D_2	-28775	-57551	28776	23019	17265	11510	5754	—	61213
X_2	0	0	0	0	0	0	0	—	80640

Gleichung 2 . . . $-38607 P_1 - 76909 P_2 + 24435 P_3 + 27772 P_4 + 20094 P_5 + 13915 P_6 + 6920 P_7 + 3463 X_1 + 165036 X_2 + 7187 X_3 = 0.$

$$3. \text{ Abgeleitete. } \frac{d\mathfrak{A}}{dX_3} = \alpha_1 \rho \sigma_3 P_1 + \alpha_2 \rho \sigma_3 P_2 + \dots + \sigma_3 \rho \sigma_1 X_1 + \sigma_3 \sigma_2 \rho X_2 + \sigma_3^2 \rho X_3 + \dots = 0$$

O_4	3546	7092	10638	14183	10638	7092	3546	0	0	4863
U_4	-5040	-10082	-14976	-11952	-8928	-5976	-3024	0	0	5184
V_3	-3328	-6655	-9983	2662	1997	1331	666	0	7187	9184
V_4	-936	-1872	-2540	-3476	-2546	-1872	-936	0	0	8691
D_3	-18495	-35835	-54334	43929	32368	21963	11559	0	0	74318
X_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	83280

Gleichung 3 . . . $-24253 P_1 - 47352 P_2 - 71195 P_3 + 45346 P_4 + 33529 P_5 + 22538 P_6 + 11811 P_7 + 7187 X_2 + 185520 X_3 + 8691 X_4 = 0.$

Infolge Symmetrie:

Gleichung 4 . . . $11811 P_1 + 22538 P_2 + 33529 P_3 + 45346 P_4 - 71195 P_5 - 47352 P_6 - 24253 P_7 + 8691 X_3 + 185520 X_4 + 7187 X_5 = 0.$

Gleichung 5 . . . $6920 P_1 + 13915 P_2 + 20094 P_3 + 27772 P_4 + 24435 P_5 - 76909 P_6 - 38607 P_7 + 7187 X_4 + 165036 X_5 + 3463 X_6 = 0.$

Gleichung 6 . . . $3636 P_1 + 7276 P_2 + 10916 P_3 + 14557 P_4 + 18330 P_5 + 16726 P_6 - 80397 P_7 + 3463 X_5 + 142733 X_6 = 0.$

Beispiel. Das in F. 24, T. IV dargestellte Fachwerk enthält 16 Knotenpunkte und 35 gegen Zug und Druck widerstandsfähige Stäbe, demnach $u = 35 - (2 \cdot 16 - 3) = 6$ überzählige Stäbe, als solche sind die Gegendiagonalen angenommen. Die Tabelle I, S. 332 enthält die weiteren Werte.

Die Werte α wurden ermittelt, indem für das einfache Fachwerk F. 16, T. IV die Einflußlinien ermittelt wurden. F. 21, 22, 23 zeigen die Ermittlung der Werte σ ; es sind dies nichts anderes als die in den bezüglichen Stäben entstehenden Spannungen, wenn an Stelle von X die Werte 1 treten. Macht man z. B. für das vierte Fach des Trägers $X_3 = 1$, so geben die in F. 23 erhaltenen Werte unmittelbar die Werte σ und zwar ist mit Bezug auf diese Figur O_4 der dem Obergurt entsprechende Wert von σ_3 , V_3 der dem Pfosten 3 entsprechende Wert von σ_3 u. s. w.; in die Tabelle wurden zunächst nicht die wahren Werte der α und σ , sondern das Hundertfache derselben eingetragen. Für die Aufstellung der Formänderungsarbeit ist der Satz $\mathfrak{A} = \Sigma \frac{S \cdot \Delta l}{2}$ benutzt, man erhält $\Delta l = \frac{S l}{E F}$ oder wenn man alle Werte Δl mit $\frac{E_0 F_0}{l_0} = \rho_0$ multipliziert, $\rho_0 \mathfrak{A} = \Sigma \frac{S^2 \cdot \rho_0}{2}$, wobei $E_0 F_0 l_0$ die den konstanten Untergurten entsprechenden Werte bedeuten und $\rho = \frac{l}{E F} \cdot \frac{E_0 F_0}{l_0}$ gesetzt ist.

Es ergeben sich folgende Gleichungen, wenn man die Koeffizienten durch 10000 dividiert, um die Werte auf die tatsächliche Einheit zu bringen und wenn man (was in der Originalrechnung nicht geschehen ist) nur drei Dezimalstellen beibehält:

$$\begin{aligned}
 14,273 X_1 + 0,346 X_2 &= 8,040 P_1 - 1,673 P_2 - 1,833 P_3 - 1,456 P_4 - 1,092 P_5 - 0,728 P_6 - 0,364 P_7 \\
 0,346 X_1 + 16,504 X_2 + 0,719 X_3 &= 3,861 P_1 + 7,691 P_2 - 2,444 P_3 - 2,777 P_4 - 2,009 P_5 - 1,392 P_6 - 0,692 P_7 \\
 + 0,719 X_2 + 18,552 X_3 + 0,869 X_4 &= 2,425 P_1 + 4,735 P_2 + 7,120 P_3 - 4,535 P_4 - 3,353 P_5 - 2,254 P_6 - 1,181 P_7 \\
 + 0,869 X_3 + 18,552 X_4 + 0,719 X_5 &= -1,181 P_1 - 2,254 P_2 - 3,353 P_3 - 4,535 P_4 + 7,120 P_5 + 4,735 P_6 + 2,425 P_7 \\
 + 0,719 X_4 + 16,504 X_5 + 0,346 X_6 &= -0,692 P_1 - 1,392 P_2 - 2,009 P_3 - 2,777 P_4 - 2,444 P_5 + 7,691 P_6 + 3,861 P_7 \\
 + 0,346 X_5 + 14,273 X_6 &= -0,364 P_1 - 0,728 P_2 - 1,092 P_3 - 1,456 P_4 - 1,833 P_5 - 1,673 P_6 + 8,040 P_7
 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= +0,558 P_1 - 0,128 P_2 - 0,125 P_3 - 0,098 P_4 - 0,074 P_5 - 0,049 P_6 - 0,024 P_7 \\
 X_2 &= +0,217 P_1 + 0,458 P_2 - 0,155 P_3 - 0,156 P_4 - 0,104 P_5 - 0,078 P_6 - 0,039 P_7 \\
 X_3 &= +0,125 P_1 + 0,244 P_2 + 0,399 P_3 - 0,227 P_4 - 0,195 P_5 - 0,130 P_6 - 0,067 P_7 \\
 X_4 &= -0,067 P_1 - 0,130 P_2 - 0,195 P_3 - 0,227 P_4 + 0,399 P_5 + 0,244 P_6 + 0,125 P_7 \\
 X_5 &= -0,039 P_1 - 0,078 P_2 - 0,104 P_3 - 0,156 P_4 - 0,155 P_5 + 0,458 P_6 + 0,217 P_7 \\
 X_6 &= -0,024 P_1 - 0,049 P_2 - 0,074 P_3 - 0,098 P_4 - 0,125 P_5 - 0,128 P_6 + 0,558 P_7
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werte bestimmen sich nun auch die Einflußwerte von $O_1 O_2 \dots U_1 U_2 \dots D_1 D_2 \dots V_1 V_2 \dots$. Man erhält zum Beispiel für V_2 :

$$V_2 = 0,45 P_1 + 0,87 P_2 - 0,11 P_3 - 0,08 P_4 - 0,06 P_5 - 0,04 P_6 - 0,02 P_7 - 0,65 X_3 - 0,65 X_4.$$

In dieser Weise wurde es möglich, die Einflußwerte durch Rechnung zu ermitteln. Es kann dies jedoch auch graphisch geschehen. Macht man in F. 23, T. IV X_3 der Reihe nach $= 0,125, 0,244, 0,399, -0,227, -0,195, -0,130, -0,067$ und zieht die Parallelen zum Stammviereck für $X_3 = 1$, so erhält man jene Werte der Spannungen O_4, V_3, V_4, D_3, U_4 , welche zu den Einflußwerten der Stäbe O_4, v_3, v_4, d_3, u_4 des statisch bestimmten Tragwerks algebraisch zu addieren sind, um die richtigen Einflußlinien zu erhalten.

Man sieht, daß in obigem Beispiele nur die lotrechten Fachwerksstäbe $V_2 V_3 V_4$ u. s. w. doppelten Einfluß haben, bezw. in jeder Gleichung 3 Unbekannte vorkommen. Näherungswerte für die Gleichungen erhält man, wenn man sich die vertikalen Fachwerksstäbe in unserem Falle in zwei Stäbe zerlegt denkt und hierbei jedem der Nachbarfelder einen Teil des gemeinsamen Ständerquerschnittes nach Schätzung zuweist²⁷⁾, wobei etwa für die letzten Lotrechten $V_1 V_7$ der volle, für die anderen zu jedem Fache der halbe Querschnitt gerechnet wird, oder etwa in unserem Falle angenähert in der 2. Gleichung $X_1 = X_3 = X_2$ gesetzt wird; dies ergäbe z. B. $X_2 = 0,219 P_1 + 0,438 P_2 + \dots$, Werte, die verhältnismäßig wenig von den oben ermittelten abweichen.

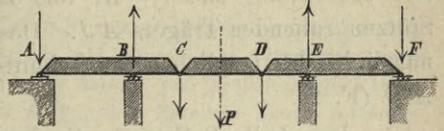
VIII. Mehrteilige ebene Träger. Träger mit schwebenden Stützen (Kragträger).

§ 36. Allgemeines. Ermittlung der äußeren und inneren Kräfte. Bei Trägern, welche sich ohne Unterbrechung über mehrere Öffnungen erstrecken, sind die auftretenden äußeren Kräfte wesentlich von der Höhenlage der Stützen und dem Ein-

²⁷⁾ Engesser. Zusatzkräfte und Nebenspannungen. Berlin 1882. S. 67.

flusse ungleichförmiger Erwärmung abhängig, hingegen fallen die Momente infolge der Gegenwirkung benachbarter Öffnungen und damit auch die Baustoffmengen für die Gurte kleiner als bei nebeneinander liegenden einfachen Trägern aus. Unter Vermeidung der eingangs erwähnten Übelstände läßt sich aber dieser Vorteil erreichen, wenn man den Träger in mehrere mit den Nachbarn gelenkartig verbundene Träger teilt, von denen jeder nur auf zwei Stützpunkten ruht.

Fig. 89.



Die so erhaltenen Träger haben verschiedene Benennungen erhalten. Da einzelne Teile über die Stütze hinauskragen, hat man sie wohl Kragträger, auch Träger mit freischwebenden Stützpunkten genannt. Wenn auch diese Träger schon früher theoretisch von Clark und Fowler (1846—1850), Köpcke, Ritter (1863) behandelt wurden, war es doch Gerber, der den Gedanken zum erstenmale an der Strafsenbrücke über den Main bei Hafsfurt ausführte, weshalb man diese Träger wohl auch als Gerberträger bezeichnet. Andere haben ihnen den Namen Auslegerträger (*cantilever, port à faux*) gegeben.

Hinsichtlich der Unterbringung der Gelenke sind zahlreiche Anordnungen möglich; zweckmäfsig erscheint es, in die aufeinanderfolgenden Öffnungen abwechselnd kein Gelenk und zwei Gelenke zu legen. F. 1 u. 4, T. III zeigen zwei derartige Anordnungen. Die Bestimmung der äufseren Kräfte wird an diesen Beispielen erläutert werden.

Für eine volle gleichmäfsige Belastung p lassen sich die Parabeln für die Momentenflächen aus der Bedingung konstruieren, dafs an den Gelenken JK die Momente gleich Null sein müssen. Im ersten Falle legt man die Eigengewichtsparabel (blaue Kurve F. 3, T. III) so, dafs sie durch A und J geht, hierdurch bestimmt sich das Pfeilmoment in B ; in entsprechender Weise findet man bei Beachtung des dritten Feldes das Moment in C , die Eigengewichtsparabel DE wird mittels der Schablone durch D und E gelegt. Für das erste Feld AB treten die ungünstigste Belastung für die gröfsten positiven Momente (innerhalb AJ) und die gröfsten negativen Momente (innerhalb JB) bei voller Belastung des ganzen Feldes ein; Momente anderen Zeichens können durch veränderliche Lasten nicht entstehen. Wir brauchen daher mittels der Schablone die Parabel für die Verkehrslast ebenfalls nur durch A und J zu legen. Im zweiten Felde entstehen die positiven Maximalmomente bei alleiniger Belastung des Mittelfeldes, weshalb die rote Parabel durch B und C zu legen ist. Die gröfsten negativen Momente entstehen, wenn das Mittelfeld gar nicht, die Nachbarfelder voll belastet sind; die Kurve wird eine Gerade FG .

Für die Summe beider Einwirkungen erhält man Momentenflächen (schwarze Linien), deren Zeichnung durch Benutzung einer Schablone für die Summenkurve leicht wird. Die schwarze Kurve (das Moment $M_p + M_g$ darstellend) mufs im ersten Felde durch die Punkte AJ , im zweiten durch die Punkte HL gehen. Für die negativen Maximalmomente erhält man eine zur Eigengewichtsparabel äquidistante Kurve HL . —

Hinsichtlich der Querkräfte ist zu beachten, dafs sich AJ wie ein in A und J gestützter einfacher Träger verhält.

Für das Eigengewicht erhält man in allen Feldern zu einander parallele gerade Abschnitte (blaue Linien), die Abstände an den Pfeilern sind bei angenommener Polweite H direkt durch die Tangenten an die blaue Parabel in A, D, E (F. 3) gegeben. Die blaue Gerade des ersten Feldes in F. 2 mufs durch die Mitte von AJ , jene des zweiten Feldes bei symmetrischer Anordnung durch die Mitte von BC gehen.

Bei beweglicher, gleichförmig verteilter Last q f. d. lfd. m muß für $max (+ R)$ der Teil rechts des fraglichen Querschnittes belastet sein, Lasten, welche über J hinaus reichen, sind ohne Einfluß. Innerhalb JB kann die Querkraft nicht positiv werden. Die Kurve der $max (+ R)$, rot zeigt daher die gewöhnliche Parabel des auf zwei Stützen ruhenden Trägers AJ . Das $max (- R)$ entsteht innerhalb AJ , wenn die Last nur links des fraglichen Querschnittes liegt. Man erhält auch hier die bekannte Parabel AD (F. 2).

Innerhalb DE muß die Last vom untersuchten Querschnitt bis zur Stütze A reichen. Die Querkräfte $max (- R)$ sind durch eine Gerade DE begrenzt, deren Endpunkt E durch die am Kräftepolygon abgeschnittene Strecke gegeben erscheint, welche der Tangente der Kurve AJF in F entspricht. Für $max (+ R)$ innerhalb BC muß zunächst das Feld AB ganz belastet sein und außerdem die Last innerhalb BC vom fraglichen Querschnitt bis zur rechten Stütze C reichen. Man erhält hierbei eine Parabel, wie wenn BC einfacher Träger wäre, nur erscheint F um ein Stück hinaufgerückt, welches im Kräftepolygon durch eine zu FC (in F. 3) parallele Gerade abgeschnitten wird. Für $max (- R)$ (in F. 2) gilt Entsprechendes. Die schwarzen Linien geben die Summe für Eigengewicht und Verkehrslast.

Nach dem hier Besprochenen wird es leicht, das zweite Beispiel T. III, F. 4 bis 6 zu verstehen. Sämtliche Parabeln des Mittelfeldes müssen durch die den Gelenken entsprechenden Punkte JK gehen. Die Länge JK verhält sich wie ein einfacher Träger auf zwei festen Stützen J und K .

Für die Ermittlung der Stabspannungen an Fachwerken dieser Art ist zu bemerken, daß, wenn die Anzahl der gleichzeitig wirksamen Stäbe in jedem Träger für sich $= 2k - 3$ ist (k bedeutet die Anzahl der Knotenpunkte), auch die Spannung jedes Stabes bestimmbar und damit das ganze System statisch bestimmt ist. Die graphische Ermittlung der Querkräfte und Momente für zwei Trägeranordnungen ist vorstehend besprochen. Handelt es sich um einen Träger mit parallelen Gurtungen, so sind die Querkräfte und Momente unmittelbar zur Bestimmung der größten Spannungen für Gurte und Füllungsstäbe verwendbar. In nachstehendem soll das Verfahren unter Zugrundelegung eines Systemes von Einzellasten und für die Fachwerksanordnung, welche T. IV, F. 6 zeigt, vorgeführt werden. Die Knotenpunkte des Untergurtes des überragenden Teiles und des Obergurtes des mittleren Trägers liegen auf einer Parabel. Ein derartiges Tragwerk hat den praktischen Vorteil, daß an Pfeilermauerwerk der Seitenöffnungen gespart und für die mittlere Durchfahrtsöffnung die ganze Höhe der Träger der Seitenöffnungen gewonnen wird.

Beispiel, s. F. 6 bis 15, T. IV. Zwei Mittelpfeiler teilen die eingleisige Eisenbahnbrücke in drei Öffnungen von 20 m, 24 m und 20 m, der mittlere Parabelträger von 20 m Stützweite sei freischwebend. Höhe des Parallelträgers 2,5 m, größte Höhe des Parabelträgers 2 m, Felderlänge durchgehend 2 m. Die Diagonalen sind schlaff konstruiert.

Die Ordinaten	1111'	1313'	1414'	1515'	1616'	1717'	1818'	1919'
berechnen sich mit	1,125	0,875	1,500	1,875	2,00	1,875	1,500	0,875 m.

Das Gewicht der Fahrbahn ist mit 0,8 t f. d. m und Gleis, das ganze Eigengewicht der Tragwände mit 1,244 t f. d. lfd. m angenommen. Es ergibt sich daraus das Gewicht eines oberen Knotenpunktes für einen Träger $P_o = \frac{1}{2} \left[\frac{1,244 - 0,8}{2} + 0,8 \right] 2 = 1,025$ t und für einen unteren Knotenpunkt $P_u = \frac{1}{2} \left[\frac{1,244 - 0,8}{2} \right] 2 = 0,225$ t.

In F. 13, T. IV ist nach Cremona's Methode der Kräfteplan für die Beanspruchungen durch das Eigengewicht dargestellt; hierzu ist die Kenntnis der in den Auflagerpunkten 0, 10 und J angreifenden

Kräfte nötig. Dieselben rechnen sich einfach, da in J das halbe Gewicht des Parabelträgers angreift und die Stützenkraft A_0 in 0 sich aus der Gleichung für die Momente um 10 ergibt.

Wir untersuchen zunächst die Querkräfte und Momente in den einzelnen Punkten unter Zugrundelegung des in der Figur dargestellten Einzellastsystems.

Querkräfte. Strecke AB . Im ersten Felde $0' 1'$ wird R zum Größtwert, wenn in $1'$ die Last I liegt; die Lasten II bis IX finden auf AB Platz, die übrigen sind wegzulassen. Legt man einen Papierstreifen, welcher den Träger darstellt, so, daß I und $1'$ sich decken und projiziert die Punkte A und B auf das Seilpolygon, so erhält man die Schlußlinie $A_1 B_1$, eine Parallele hierzu schneidet auf der Kräfteelotrechten die Strecke $max R_1 = 25,6 \text{ t}$ ab.

Im zweiten Felde muß I über $2'$ liegen, dieser Stellung entsprechen die mit dem Papierstreifen gefundenen Punkte $A_2 B_2$. Die Last IX, zur Gruppe VII VIII IX gehörig, fällt auf BJ , erzeugt daher eine negative Querkraft. Es fragt sich daher, ob diese Gruppe beizubehalten sei. Die Lage der Schlußlinien ergibt sich aus der Bedingung, daß die Momente in A und J gleich Null sein müssen. Verlängert man die Seilpolygon-Seite IX, X bis zum Schnitte B_2' , so schneidet die Parallele zu $A_2 B_2'$ durch den Pol O die dieser Stellung zukommende Querkraft R_2' ab. Wird die Lastgruppe VII bis IX als nicht vorhanden angenommen, so müssen die Projektionen B_2'' und J_2'' auf der verlängerten Seilpolygon-Seite VI VII liegen, man erhält für das Feld AB die Schlußlinie $A_2 B_2''$ und hieraus im Kräftepolygon R_2'' . Die Strecke R_2'' wird $> R_2'$, je nachdem B_2'' ober- oder unterhalb B_2 liegt. In letzterem Falle ist die fragliche Lastgruppe beizubehalten, im ersteren wegzulassen. F. 14^a zeigt die bezügliche Einzelheit des Seilzuges.

Die Ermittlung der (in F. 14 mit Ausnahme von $A_5 B_5$ nicht gezeichneten) Schlußlinien für $max R_3, R_4, R_5, R_7, R_8, R_9$ gestaltet sich wie für R_1 ; die Last I muß stets am bezüglichen Punkte $3', 4', 5', 7', 8', 9'$ liegen. Damit die Punkte A_m nicht zu weit nach links fallen, kann man Last VII an Stelle von I treten lassen, hat aber dann die Lasten I bis VI wegzulassen. Schlußlinie $A_5 B_5$ zeigt ein Beispiel.

Bei R_6 fällt (Schlußlinie nicht gezeichnet und I bis VI hinweggelassen) Last XI und XII auf Strecke BJ ; da Punkt B_6'' über B_6' zu liegen kommt, ist, wie oben ermittelt, Lastgruppe X bis XII als nicht vorhanden anzunehmen. Bei R_9 fällt (I bis VI hinweggelassen) Last IX in die Mittelöffnung, doch ergibt sich in eben angegebener Weise, daß demungeachtet eine positive Querkraft entsteht.

Die negativen Größt-Querkräfte setzen sich aus einem Teile, welcher durch die Belastung der Endöffnung selbst und einem zweiten Teile, welcher durch Belastung der Mittelöffnung entsteht, zusammen. Ersterer läßt sich ebenso wie bei einem Träger auf zwei Stützen bestimmen, letzterer ist für die Öffnung AB konstant. Aus der Betrachtung der Einflußlinie für die Querkräfte ergibt sich, daß die schwersten Lasten dicht um J stehen müssen und der ganze Teil BK zu belasten ist. Die Bedingung, daß die Einheitslast auf die Strecke BJ jener für JK möglichst gleichkommen soll, ergibt, daß Last II in J stehen muß. Wir ersetzen für die graphische Darstellung Last VII für I, lassen Last I bis VI weg und zeichnen einen Seilzug $A'B'K'$, wobei $A'B'K'$ den bezüglichen Punkten jener Lage des Papierstreifens entsprechen, in welcher J und der Lastangriffspunkt von VIII sich decken. Die Parallelen zu $A'B'$ und $A'K'$ durch 0 schneiden auf der Kräfteelotrechten den Abstand $max - R_{AB}$ ab. In dieser Weise wurde gefunden:

Feld	01	12	23	34	45	56	67	78	89	910
$max + R$	25,6	20,3	16,3	13,0	9,7	6,5	4,7	2,6	0,8	0 t
$max - R$	-5,4	-6,6	-8,0	-10,1	-12,2	-15,2	-18,4	-21,8	-26,0	-31,0 t

Größtmomente. Strecke AB . Die Ermittlung erfolgt wie bei einem einfachen Träger auf zwei Stützen. Als Kennzeichen für die ungünstigste Stellung gilt, daß die Einheitslast rechts und links des fraglichen Querschnittes möglichst gleich sein muß. Lastgruppen, welche auf BK zu stehen kommen, sind wegzulassen. Fällt für einen Querschnitt x nur ein Teil einer Lastgruppe über BJ hinaus, so ist ebenso wie bei Ermittlung der größten Querkräfte die Gruppe dann außer Betracht zu lassen, wenn B_x'' über B_x' zu liegen kommt. Als Beispiel einer Momentenbestimmung ist die Ermittlung für $5'$ dargestellt. Der Papierstreifen ist so zu legen, daß $5'$ desselben und der Lastangriffspunkt von VIII sich decken. Die Lasten I bis III, XIII bis XVIII sind weggedacht, die den Punkten AB am Streifen entsprechenden Punkte $A_5' B_5'$ am Seilzuge geben die Schlußlinie; das Moment $max M_5 = 123 \text{ mt}$ erscheint als Strecke über VIII und ist in der Figur bezeichnet. Für 7 bedingen die Radrücke X bis XII ein negatives Moment, sind also wegzulassen. Bei der in Rede stehenden Bestimmung ist ferner zu berücksichtigen, ob nicht vielleicht ein Vorrücken des Zuges von links nach rechts größere Momente

bedinge. Infolge Einwirkung des Nachbarfeldes, welche das Hinweglassen gewisser Lastgruppen nötig machen kann, fallen nämlich die Momente nicht symmetrisch aus, wie beim einfachen Träger, wo z. B. Moment in 3 bei Fahrrihtung rechts mit Moment in 7 bei Fahrrihtung links gleich ist, während man in unserem Falle die Zahlen 106 mt und 103 mt erhält. Um bei dieser Untersuchung die Zeichnung eines zweiten Seilzuges zu ersparen, wird man sich den Träger um die Symmetrie-Achse 16 16' umgeschlagen denken, also nur den Papierstreifen so zu legen haben, daß die ausgeschweifte Seite in der Figur nach unten kommt.

Die negativen Größtwerte der Momente im Felde AB sind durch die Ordinaten einer Geraden durch A gegeben, welche auf der Lotrechten in B den Wert $max - M_{10}$ abschneidet. Die Einflußlinie für die negativen Momente AB (für 3 als Beispiel dargestellt) zeigt, daß die schwersten Lasten dicht um J anzuordnen sind und die Einheitslasten BJ jener auf JK möglichst gleichkommen müssen. Es ist dieselbe Stellung, welche für $max - R_{AB}$ maßgebend war. Diesem Falle entspricht Polygon $A'B'K'$. Ferner erscheint $max - M_{10} = 109$ mt unter B' , $max - M_3$ rechnet sich hieraus z. B. mit $max - M_3 = \frac{3}{10} 109 = 33$ mt. Hiernach ergab sich:

Punkt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$max + M$	0	41	87	106	123	131	123	103	87	51	0 mt
$max - M$	0	11	21	33	44	55	65	76	87	98	109 mt.

Aus den Werten der Momente und Querkräfte lassen sich rechnerisch oder graphisch die Spannungen der Fachwerksstäbe ermitteln.

Für die rechtsfallenden Diagonalen $m'-1, m$ wird:

$$max + S_{m'-1, m} = max (+ R_m) \sec \alpha; \quad max - S_{m'-1, m} = max (- R_m) \sec \alpha;$$

man erhält, da $\sec \alpha = \sec \cdot \text{arc tang } \frac{2}{2,5} = 1,28$,

Stab	0 1	1' 2	2' 3	3' 4	4' 5	5' 6	6' 7	7' 8	8' 9	9' 10
$max + S$	+ 32,7	+ 26,0	+ 21,0	+ 16,7	+ 12,5	+ 8,3	+ 6,0	+ 3,3	+ 0,9	0 t
$max - S$	- 7,0	- 8,5	- 10,2	- 13,0	- 15,6	- 19,4	- 23,9	- 27,9	- 33,2	- 39,7 t.

Ermittelt man einen Maßstab, für welchen die Einheit $\frac{1}{1,28}$ mal jener für die Querkräfte gemacht wird, so kann man die Werte S ohne weiteres abmessen.

Für das Eigengewicht ergab sich bei rechtsfallenden Diagonalen:

$$S_p + 5,6 \quad + 4,0 \quad + 2,4 \quad + 0,8 \quad - 0,8 \quad - 2,4 \quad - 4,0 \quad - 5,6 \quad - 7,2 \quad - 8,8 \text{ t.}$$

Aus diesen Zahlen ergibt sich, daß in den ersten sieben Feldern Gegendiagonalen einzuschalten sind.

Die Diagonalen 10' 11 und 10 11' werden, da die Eckpunkte des Untergurtes auf einer Parabel liegen, durch das Eigengewicht gar nicht beansprucht. F. 9 zeigt die Einflußlinie für 10' 11; die größte Beanspruchung auf Zug entsteht, wenn die schwersten Lasten dicht um 11' liegen und nur die Strecke BS belastet ist. Es finden in unserem Falle die Lasten I, II, III um 11' Platz. Die Ermittlung der Spannung selbst erfolgt in bekannter Weise am einfachsten aus der Einflußlinie oder indem man mittels des Seilzuges für die betreffende Stellung die Werte M und R für einen Schnitt II ermittelt und hieraus $max + S_{10'11}$ durch Rechnung festlegt. Für die größte Zugspannung in 10 11' ist Strecke SK , und zwar mit den schwersten Lasten in 12 zu belasten.

Die Pfosten erfahren durch das Eigengewicht allein nachstehende Beanspruchungen, wobei zu beachten ist, daß für jeden Fall jene Diagonale beizubehalten ist, in welcher Zug entsteht.

Pfosten	0 0'	1 1'	2 2'	3 3'	4 4'	5 5'	6 6'	7 7'	8 8'	9 9'	10 10'	11 11'
S_p	- 5,4	- 4,2	- 2,9	- 1,7	- 0,4	- 1,7	- 2,9	- 4,2	- 5,4	- 6,7	- 7,9	- 1,0 t.

Bei Untersuchung des Einflusses der zufälligen Last ist auf das Eigengewicht mit Rücksicht zu nehmen, da in jedem Falle nur jene Diagonale zur Wirksamkeit gelangt, welche Zug erfährt.

In 0 0' tritt die Größtbeanspruchung auf, wenn der Stützendruck in A seinen größten Wert erreicht. Es ist I mit 1' zu decken und alle Lasten sind anzunehmen, welche auf AB fallen. Die Parallele zur Schlußlinie im Seilzuge schneidet auf der Kräftelotrechten den Stützendruck R_0 ab. Die größte Druckspannung in den Pfosten 0 0' bis 4 4' findet unter Wirkung der rechtsfallenden Diagonalen, der Pfosten 5 5' bis 7 7' unter Wirkung der linksfallenden statt. Die zufällige Last erzeugt in den Stäben 0 0' bis 7 7' keine Zugspannung, das Eigengewicht die kleinste, dem oberen Knotengewichte gleichkommende Druckspannung dann, wenn durch die zufällige Last links die rechtsfallenden, rechts

die linksfallenden Diagonalen zur Wirksamkeit gelangen, was nur innerhalb der Strecke, in welcher Gegendiagonalen vorhanden sind, geschehen kann.

Eine besondere Beachtung verlangt Pfosten 10 10'. F. 11, T. IV zeigt die Einflusslinie für den Fall, dafs Diagonale 10 11' zur Wirkung gelangt. Wir ersehen daraus, dafs die grösste Beanspruchung dann eintritt, wenn die ganze Strecke *AK* belastet ist. Die schwersten Lasten müssen dicht um *B* stehen. Für die gezeichnete Stellung des Zuges mufs Last VIII über *B* treffen, die Lasten I bis XVI finden Platz. *ℳℳ* zeigt den entsprechenden Seilzug. Um die Querkraft für Schnitt I (s. F. 11 u. 14^b) zu erhalten, welche der Spannung des Stabes 10 10' entspricht, sind im Kräftepolygon Parallele zu den Geraden *ℳℳ* und *ℳ'ℳ'* zu ziehen. *ℳ'ℳ'* tritt an Stelle der Seilzug-Seite, da sich die Lasten nur in den Knotenpunkten übertragen. Man findet $\max R_{10} = -\max(-S_{10\ 10'}) = 29,5 \text{ t}$. Für diesen Fall wäre zu untersuchen, ob nicht mittlere Maschinen Brust an Brust eine gröfsere Querkraft erzeugen. Es ergibt sich in der That für diesen Fall $R_{10} = 31,0 \text{ t}$. Kennt man die Teilwerte von R_{10} , welche durch Belastung links und rechts entstehen, so kann man auch für diesen Fall unseren Seilzug benutzen.

Kommt Diagonale 10' 11 zur Wirksamkeit (F. 12, T. IV), so trifft jeder Schnitt II II scheinbar vier Stäbe, demungeachtet ist es leicht, für drei Lagen von *G* die Spannung in 10' 11 zu ermitteln, da für *G* in 10' die Stäbe 10' 11', 9 10 und 10' 11 keine Beanspruchung erfahren, mithin als nicht vorhanden betrachtet werden können, da ferner bei *G* in *S*, dem Durchschnittspunkte von 10 11 mit 11' 12, dasselbe hinsichtlich 10' 11 der Fall ist und für Last *G* in 11' der Stab 10' 11' ohne Beanspruchung bleibt. Es ist danach leicht das Polygon für 10 10' zu konstruieren. Da jedoch eine Zugspannung in 10' 11 nur dann auftritt, wenn insbesondere die Strecke 10' *S* (s. F. 9, T. IV) belastet ist, während die Belastung der Strecke *SK* Druck erzeugt, und dieser bei der ungünstigsten Belastung für 10' 10 weitaus den Einfluss der einzigen Last IX überwiegt, welche innerhalb *BS* zu liegen kommt, so ist für $\max -S_{10\ 10'}$ einzig der Fall F. 11 maßgebend.

Wir stellen nunmehr die Beanspruchungen der Pfosten zusammen.

Pfosten	0 0'	1 1'	2 2'	3 3'	4 4'	5 5'	6 6'	7 7'	8 8'	9 9'	10 10'	11 11'
$\max + S$	-0,5	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-5,4	-6,7	-7,9	-1,0 t
	0	0	0	0	0	0	0	+0,8	+0	0	0	0 t
	-0,5	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-4,6	-6,7	-7,9	-1,0 t
$\max - S$	-5,4	-4,2	-2,9	-1,7	-0,4	-1,7	-2,9	-4,2	-5,4	-6,7	-7,9	-1,0 t
	-30,8	-25,6	-20,3	-16,3	-13,0	-12,2	-15,2	-18,4	-21,8	-26,0	-31,0	-13,0 t
	-36,2	-29,8	-23,2	-18,0	-13,4	-13,9	-18,1	-22,6	-27,2	-32,7	-38,9	-14,0 t

Die oberen Zahlen jeder Gruppe geben den Einfluss des Eigengewichtes, die unteren jenen der zufälligen Last, die fettgedruckten die Summe beider Einwirkungen an.

Die Bestimmung der Spannungen in den Gurten erfolgt direkt aus den Momenten nach der Regel $S = \frac{M}{h}$, doch ist einige Vorsicht hinsichtlich der Wahl des Momentenpunktes nötig, als welcher stets der Fußpunkt jener Diagonale zu nehmen ist, welche zur Wirksamkeit gelangt. Hierbei kommt noch die gleichzeitige Wirkung des Eigengewichtes in Frage. Man erkennt bei unserer Betrachtung sofort, dafs in den Feldern 1 bis 4 die rechtsfallenden, in den Feldern 5 bis 10 die linksfallenden Diagonalen wirksam anzunehmen sind und es bleibt nunmehr fraglich, welcher Stab im 5ten Felde der Behandlung zu Grunde zu legen ist. Die nähere Untersuchung zeigt, dafs für einen Schnitt durch das 5te Feld für jene Laststellungen, welche die Momente M_4 und M_5 zum Größtwert macht, die Querkraft positiv wird, daher in beiden Fällen die rechtsfallende Diagonale zur Wirksamkeit gelangt. Auch die Spannungen in den Gurten des überragenden Teiles erscheinen direkt aus den Momenten bestimmbar. Man erhält für die Spannungen, welche die zufällige Last erzeugt, nachstehende Ergebnisse:

Obergurt	0' 1'	1' 2'	2' 3'	3' 4'	4' 5'	5' 6'	6' 7'	7' 8'	8' 9'	9' 10'	10' 11'	11' 12'
$\max + S_x$	0	4,3	8,7	13,1	17,4	21,7	26,1	30,4	34,7	39,1	46,2	43,4 t
$\max - S_x$	-20,5	-34,9	-42,4	-49,0	-52,2	-52,2	-49,0	-42,4	-34,9	-20,5	0	0 t
Untergurt	0 1	1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	6 7	7 8	8 9	9 10	10 11	11 12
$\max + S_x$	0	20,5	34,9	42,4	49,0	49,0	42,4	34,9	20,5	0	0	0 t
$\max - S_x$	-4,3	-8,7	-13,1	-17,4	-21,7	-26,1	-30,4	-34,7	-39,1	-43,5	-55,9	-53,1 t

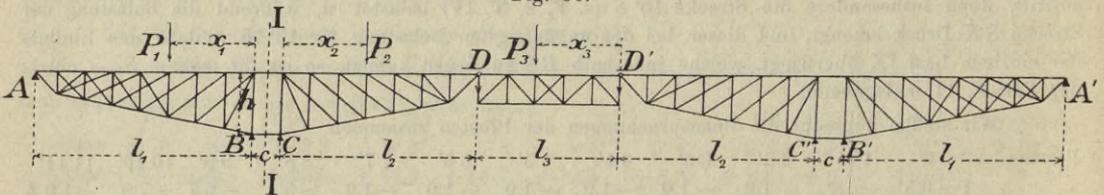
§ 37. Besondere Arten von Ausleger-Fachwerksbrücken. Die Ausleger-Fachwerksbrücken haben mannigfaltige Umbildungen namentlich in neuerer Zeit erfahren. Sind *n* Stützen vorhanden, von denen eine fest sein mufs, die übrigen

wagerecht beweglich angenommen werden sollen, so erhalten wir $n + 1$ Auflagerbedingungen, da der feste Stützpunkt zwei derselben bedingt. Da die Auflagerwiderstände mit den äußeren Kräften ein im Gleichgewichte befindliches Kraftsystem bilden müssen, so sind im allgemeinen zur Bestimmung der Auflagerwiderstände drei Gleichungen aufstellbar; es müssen also im allgemeinen $n - 2$ Gelenke eingeschaltet werden, um das Tragwerk statisch bestimmt zu gestalten. Im häufigst vorkommenden Falle haben wir es mit vier Stützen zu thun und werden die zwei notwendig werdenden Gelenke entweder je eines in den beiden Endfeldern oder beide im Mittelfelde angeordnet. Die Anordnung wird hierbei in der Regel symmetrisch gestaltet.

Man kann die Anordnung aber auch noch anders treffen. Wird nämlich z. B. kein Gelenk, sondern ein wagerecht bewegliches Lager angeordnet, so kann ein weiterer Punkt der Lager als fester durchgeführt werden, also etwa: A wagerecht verschiebbar, B fest, C gelenkförmig, D wagerecht verschiebbar, E fest, F wagerecht verschiebbar.

Auf die Art der Lagerung ist besonders dann Augenmerk zu legen, wenn es sich um schief angreifende Kräfte und um die Ermittlung der Verschiebungspläne handelt.

Fig. 90.



Bei Fachwerkträgern kann die statische Bestimmtheit der Stützenwiderstände auch noch in anderer Weise erzielt werden. Schneider, der Erbauer der Niagara-Brücke, hat die Mittelstützen verdoppelt, demungeachtet aber die statische Bestimmtheit des Tragwerks dadurch erzielt, daß er die Verstrebung zwischen den Mittelständern weggelassen hat, wie Fig. 90 zeigt. Daß in der That hierdurch ebenfalls der beabsichtigte Zweck erreicht wird, zeigt folgende kleine Untersuchung.

Für einen Schnitt I (Fig. 90) muß die Querkraft Null werden, da die wagerechten Gurte keine lotrechten Seitenkräfte übertragen können. Bezeichnen wir die Stützenwiderstände mit den Buchstaben der Auflager und aufwärts wirkende Widerstände mit dem positiven Zeichen, so liefert uns die obige Bedingung und der Satz, daß die Summe der Drehmomente um B gleich Null sein muß, wenn S die Spannung des Obergurtes im Felde BC ist, die Gleichungen:

$$+ A + B - P_1 = 0; \quad + A l_1 - P_1 x_1 + S h = 0.$$

Der mittlere Teil DD' ist als einfacher Träger auf zwei Stützen zu betrachten; er überträgt auf den Auslegerbalken AD in Punkte D die nach abwärts wirkende Kraft $P_3 \frac{x_3}{l_3}$, und das Moment für den Teil rechts des Schnittes, bezogen auf C , wird

$$P_2 x_2 + \frac{P_3 x_3}{l_3} l_2 - S h = 0,$$

ferner wird die Querkraft:

$$- C + P_2 + \frac{P_3 x_3}{l_3} = 0,$$

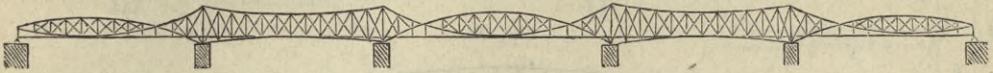
woraus sich berechnet:

$$S = \frac{P_2 x_2}{h} + \frac{P_3 x_3 l_2}{h l_3}; \quad A = \frac{P_1 x_1}{l_1} - \frac{P_2 x_2}{l_1} - \frac{P_3 x_3 l_2}{l_1 l_3};$$

$$B = \frac{P_1 (l_1 - x_1)}{l_1} + \frac{P_2 x_2}{l_1} + \frac{P_3 x_3 l_2}{l_1 l_3}; \quad C = P_2 + \frac{P_3 x_3}{l_3}.$$

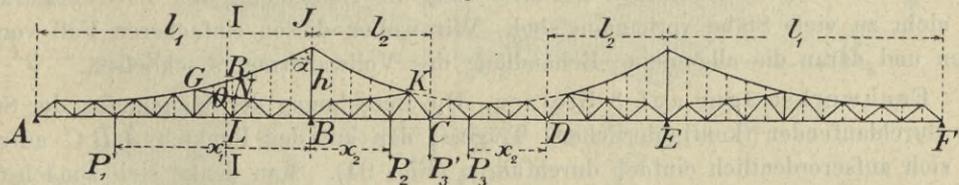
Wie man sieht, wird jede Last rechts der Stütze einen negativen Stützendruck in *A* bedingen, es muß daher dortselbst eine kräftige Verankerung angebracht werden, was auch bei der Ausführung des fraglichen Bauwerks geschehen ist.

Fig. 91.



Die Formgebung des Fachwerks bei neueren Auslegerbrücken ist in der verschiedensten Weise erfolgt. An der Straßenbrücke über den Main bei Hafsfurt sind im Mittelfelde zwei Gelenke vorhanden und es schliessen sich die Gurte der Kurve für die Größtwerte der Momente an, sodafs wir einen Träger von nahezu konstanten Gurtquerschnitten erhalten. Eine dieser verwandte Form zeigt Fig. 91. Die so erhaltenen Formen tragen dem Schönheitsgeföhle nicht immer entsprechend Rechnung, dieses wird in viel höherem Mafse von Formen befriedigt, die den gegliederten Träger mit der Hängekette verknüpfen und dem Ganzen hierdurch das Aussehen einer Hängebrücke (Fig. 92) geben, obwohl wir es auch hier mit Tragwerken zu thun haben, welche auf die Stützen nur lotrechte Kräfte übertragen, also als Balkenträger bezeichnet werden müssen. Die Berechnung derartiger Trägerformen gestaltet sich außerordentlich einfach. Die Auflagergegenkräfte werden ohne Rücksicht auf die Trägerform ermittelt. Für die Bestimmung der Stabspannungen wählen wir als stellvertretendes Beispiel zahlreicher anderer Ausführungen die nebenstehende Form. Die von der Kette zum Träger führenden Hängestangen ersetzen Kräfte, welche in den Aufhängeknotenpunkten der Träger nach aufwärts wirken. Das Hängewerk selbst erscheint als Seilzug, für welchen die lotrechten Hängewerksspannungen die angreifenden Kräfte sind, die wagerechte Spannung des Seilpolygons die Poldistanz des entsprechenden Kräftezuges ist.

Fig. 92.



Für die Berechnung der Spannungen mögen folgende Andeutungen genügen. Man ermittle zunächst die Stützenwiderstände und Momente unabhängig von der Trägerform unter der Annahme, daß ein durchlaufender Träger im Mittelfelde mit 2 Gelenken versehen sei, ganz ebenso, wie dies auf T. IV, F. 6 bis 15 geschehen ist. Man bedenke, daß in den einzelnen Kettengliedern der Kette *GJK* die Spannung *H. sec α* herrscht, wenn mit *H* die wagerechte Spannung in der Kette bezeichnet wird. Denken wir uns einen lotrechten Schnitt dicht rechts neben *BJ* geführt, so erhalten wir die Gleichung

$$Hh = P_2 x_2 + P'_3 l_2 = P_2 x_2 + \frac{P_3 x_3}{l_3} l_2.$$

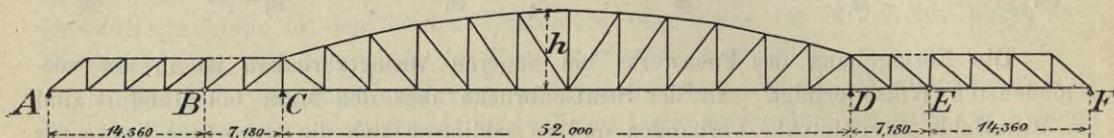
Lasten innerhalb *AB* bleiben auf die Spannung der Kette ohne Einfluß. Für Gurtstäbe innerhalb *GK* ist ein lotrechter Schnitt durch den fraglichen Gurtstab ins Auge zu fassen, an Stelle von *M* tritt *M + H · y*, wenn *y* der Abstand des lotrecht über dem Momentenpunkte des fraglichen Gurtstabes liegenden Kettenknotenpunktes vom Momentenpunkte ist.

Für die Spannung im Stabe O wird z. B., wenn $LN = h_0$, $LR = y$ ist:

$$O = - \frac{M + H \cdot y}{h_0} \text{ u. s. w.}$$

Für eine wandernde Einzellast werden die Werte M und H lineare Funktionen der Lastlage. Die Einfluslinien werden geradlinige Züge, ein Satz, der für alle Spannungen der Fachwerksstäbe gilt, falls keine überzähligen Stäbe vorhanden sind.

Fig. 93.



In Fig. 93 bringen wir die Fachwerksanordnung für eine neuere Auslegerbrücke, welche oberflächlich betrachtet den Eindruck macht, als wenn zur Überbrückung der drei Öffnungen von 20, 50, 20 m lichter Weite zwei seitliche Parallelträger dem einen mittleren Halbparabelträger angeschlossen wären; da jedoch die Stäbe über B und E unwirksam eingehängt sind, liegen ein Kragträger $BCDE$ und zwei einfache Träger AB und EF vor.

Das der Oderbrücke bei Schönbrunn²⁸⁾ entnommene Beispiel zeigt a. a. O. die Ermittlung der Einfluslinien für die einzelnen Stäbe, deren Deutung dem Leser keine Schwierigkeiten mehr verursachen dürfte, weshalb wir auf die Einzelheiten nicht näher eingehen und in allem übrigen auf die Quelle verweisen.

IX. Statisch unbestimmte Tragwerke.

§ 38. Allgemeines. Bei den durchlaufenden (kontinuierlichen) Trägern, welche ununterbrochen über mehr als zwei Stützen sich erstrecken, sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der Fachwerksträger, falls nicht zu viele Stäbe vorhanden sind. Wir wollen diesen einfacheren Fall voraussetzen und daran die allgemeine Behandlung des Vollwandträgers schliessen.

Fachwerksträger auf 3 Stützen. Die Berechnung der Spannungen der Stäbe eines durchlaufenden (kontinuierlichen) Trägers, der auf den Punkten ABC aufruhrt, läßt sich außerordentlich einfach durchführen (Fig. 94). Man denke sich zunächst im Punkte C eine beliebig große Einzellast Q und bestimme mittels eines Cremonaplanes die Spannungen \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 u. s. w. in den Fachwerksstäben des frei aufliegenden Trägers AB . Nun ermittle man nach irgend einem Verfahren (von Williot u. a.) die Durchbiegungslinie des Untergurtes. In den Figuren I, II, III ist dieselbe als Seilpolygon der Winkeländerungen nach dem bereits früher erörterten Verfahren durchgeführt. Es wurde die Linie $A_1C_2B_1$ erhalten, welche in den Figuren IV, V, VI aufgetragen ist. Nun stelle man folgende Betrachtung an.

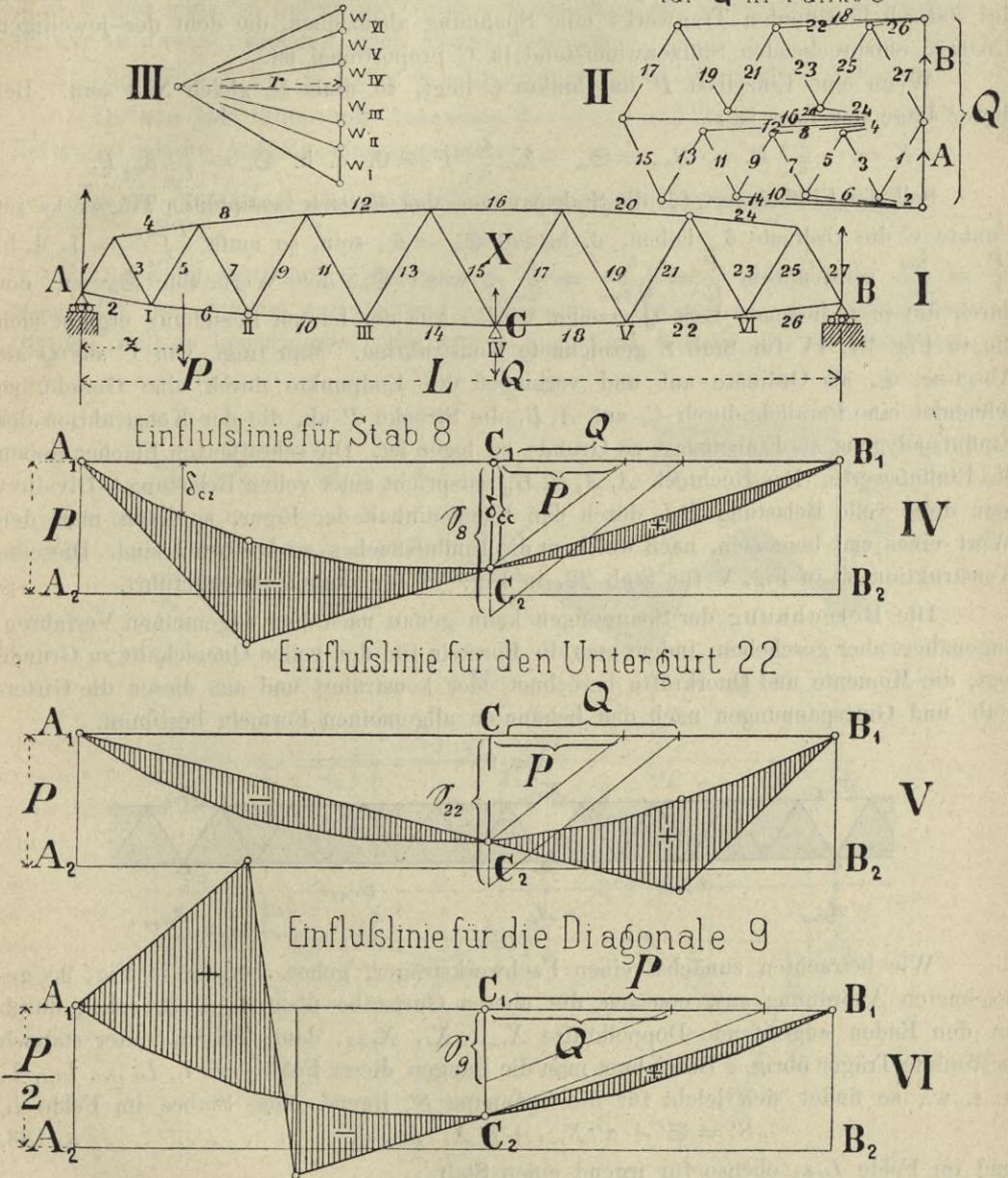
Um die Spannung S_m irgend eines Stabes zu ermitteln, bezeichne $\alpha_{m,p}$ jene Spannung, die im Stabe m entsteht, wenn eine Einzellast $P = 1$ im Abstände z wirkt. $\delta_{c,z}$ ist jene Senkung, die im statisch bestimmten Tragwerk im Abstände z von A eintritt, wenn eine Einzellast $Q = 1$ in C liegt, $\delta_{c,c}$ ist die Senkung des Punktes C bei dieser Belastung, $\beta_{m,c}$ die im Stabe m bei der angegebenen Belastung auftretende Spannung.

²⁸⁾ Siehe K. Haberkalt über diese Brücke. Wien. Allg. Bauz. Heft 3, 1900.

Fig. 94.

Kräfteplan der Winkeländerungen.

Cremonaplan der \mathcal{D} für Q in Punkt C



Da nach Maxwell $\delta_{cx} = \delta_{xc}$ ist, so stellen die Ordinaten des gezeichneten Biegungspolygons für $Q = 1$ auch die Werte δ_{xc} , die Ordinate unter C das δ_{cc} dar. Die gezeichnete Biegungslinie $A_1 C_2 B_1$ ist also auch die Einflußlinie der Senkungen des Punktes C im frei aufliegenden Tragwerk. Die Bedingung, daß in Wirklichkeit die Senkung der Mittelstütze Null sein müsse, führt zur Gleichung

$$\delta_{cx} \cdot P + \delta_{cc} \cdot X = 0, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{\delta_{cx}}{\delta_{cc}} P.$$

Die Ordinaten δ_{cx} der Biegungslinie entsprechen den Werten X für $P = \delta_{cc}$.

Die wirkliche Spannung in irgend einem Stabe ist $S_m = \mathfrak{S}_m + \beta_{mc} X$, wenn \mathfrak{S}_m die Spannung des Stabes im statisch bestimmten Träger AB bedeutet. Für ein und denselben Stab bleibt β_{mc} eine konstante Größe. Es ist daher von der Spannung des statisch bestimmten Tragwerks eine Spannung abzuziehen, die dem der jeweiligen Lastlage entsprechenden Stützenwiderstand in C proportional ist.

Wenn eine Einzellast P im Punkte C liegt, so muß S_m gleich Null sein. Bei dieser Lage der Last ist:

$$X = - \frac{\delta_{cc}}{\delta_{cc}} P, \quad S_{mc} = \mathfrak{S}_m - \beta_{mc} \frac{\delta_{cc}}{\delta_{cc}} P = 0, \text{ d. h. } \mathfrak{S}_m = \frac{\delta_{cc}}{\delta_{cc}} \beta_{mc} P.$$

Soll der Einflußwert für die Stabspannung des statisch bestimmten Tragwerks im Punkte C die Ordinate δ_{cc} haben, d. h. soll $\mathfrak{S}_m = \delta_{cc}$ sein, so muß $\frac{P \beta_{mc}}{\delta_{cc}} = 1$, d. h. $\frac{P}{1} = \frac{\delta_{cc}}{\beta_{mc}}$ sein, mithin $\frac{P}{Q} = \frac{\delta_{cc}}{Q \beta_{mc}} = \frac{\delta_{cc}}{\mathfrak{S}_{mc}}$, wenn \mathfrak{S}_{mc} der Wert von \mathfrak{S}_m ist, der durch die in C liegende Last Q erzeugt wird. Aus der letzten Beziehung ergibt sich die in Fig. 94, IV für Stab 8 gezeichnete Konstruktion. Man trägt von C aus Q als Abszisse, \mathfrak{S}_8 als Ordinate auf und verbindet die Endpunkte durch eine Gerade, so schneidet eine Parallele durch C_2 auf $A_1 B_1$ die Strecke P ab, die der Konstruktion des Einflußpolygons als Einheitslast zu Grunde zu legen ist. Die schraffierten Flächen geben die Einflußwerte. Das Rechteck $A_1 A_2 B_2 B_1$ entspricht einer vollen Belastung. Dividiert man diese volle Belastung PL durch den Flächeninhalt der Figur, so kann man den Wert eines cm^2 bemessen, nach welchem die Einflußflächen zu bewerten sind. Dieselbe Konstruktion ist in Fig. V für Stab 22, in Fig. VI für Stab 9 durchgeführt.

Die Berechnung der Spannungen kann genau nach dem allgemeinen Verfahren, angenähert aber geschehen, indem man die Formeln für den vollen Querschnitt zu Grunde legt, die Momente und Querkräfte berechnet oder konstruiert und aus diesen die Gitterstab- und Gurtspannungen nach den bekannten allgemeinen Formeln bestimmt.

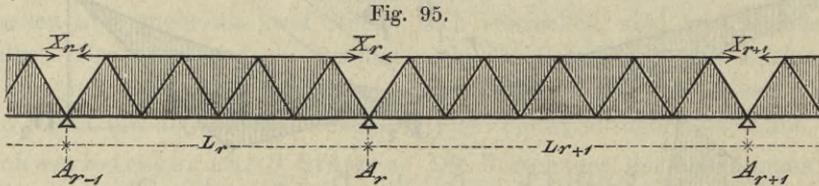


Fig. 95.

Wir betrachten zunächst einen Fachwerkträger, gehen von der in Fig. 95 gezeichneten Anordnung aus, ersetzen die oberen Gurtstäbe über A_{r-1}, A_r, A_{r+1} durch an den Enden angreifende Doppelkräfte X_{r-1}, X_r, X_{r+1} , dann bleiben lauter statisch bestimmte Träger übrig. Bezeichnet man die Längen dieser Felder mit $L_1, L_2, \dots, L_{r-1}, L_r$ u. s. w., so findet sich leicht für die Spannung S' irgend eines Stabes im Felde L_r ,

$$S' = \mathfrak{S}' + \alpha' X_{r-1} + \beta' X_r \dots \dots \dots 133.$$

und im Felde L_{r+1} ebenso für irgend einen Stab

$$S'' = \mathfrak{S}'' + \alpha'' X_r + \beta'' X_{r+1} \dots \dots \dots 134.$$

wenn \mathfrak{S} jene Spannungen sind, die das gegebene Belastungssystem in dem jeweiligen statisch bestimmten Träger erzeugt und α und β die leicht auf statischem Wege ermittelbaren Einflußgrößen der Stäbe für $X = 1$ bezeichnen. Die Formänderungsarbeit wird

$$\begin{array}{cc} \text{im Felde } L_r & \text{im Felde } L_{r+1} \\ \mathfrak{A}_r = \Sigma \frac{S'^2 l'}{2 E' F'} & \mathfrak{A}_{r+1} = \Sigma \frac{S''^2 l''}{2 E'' F''} \end{array}$$

wenn l, E und F die jeden einzelnen Stab betreffenden Größen der Länge, der

Poldistanz einen Seilzug, so entsprechen die durch die Auflager gehenden Seiten desselben den Tangenten der elastischen Linie an den Auflagern; sie werden die Pfeilertangenten genannt. Alle Kräfte in III mit Ausnahme jener, welche der einfachen Momentenfläche des belasteten Feldes entspricht, greifen in Drittelpunkten der einzelnen Felder an. Die jedem mittleren Drittel entsprechenden Seilpolygone nennt man die mittleren Polygonseiten.

Für den Linienzug IV lassen sich nun leicht nachstehende Eigenschaften nachweisen. Bei gleicher Höhenlage aller Stützen schneidet, wie immer auch ein Feld belastet sein mag, die mittlere Seilpolygoneite jedes unbelasteten Feldes die Achse AA in einem festen Punkte, welcher dem Wendepunkte der elastischen Linie entspricht. Diese Festpunkte liegen immer in den äußeren Dritteln der Felder. Jedes Feld besitzt zwei solcher Festpunkte, je nachdem das belastete Feld rechts oder links liegt. Die der einen Stütze rechts und links zunächst liegenden mittleren Seiten des Polygons IV schneiden sich stets in Punkten einer bestimmten Lotrechten, der verschränkten Pfeilerlotrechten. Diese steht von der nächsten Drittellotrechten des linken Feldes um ein Drittel des rechten Feldes ab und umgekehrt. — Die beiden mittleren Seiten eines belasteten Feldes gehen ebenfalls durch die Festpunkte.

Wäre der Träger bei A_2 fest wagerecht eingespannt, so fiel J in die Drittellotrechte. Der beiderseits fest eingespannte Träger kann wie das Feld eines kontinuierlichen Trägers behandelt werden, dessen Festpunkte das Feld in drei gleiche Teile teilen.

Die beiden mittleren Seiten eines belasteten Feldes kreuzen sich in der Schwerpunktslotrechten der einfachen Momentenfläche und schneiden auf den Stützenlotrechten dieses Feldes Strecken ab, welche nur von der Spannweite dieses Feldes und der Belastungsart, nicht aber von den übrigen Feldern des durchlaufenden Trägers abhängig sind.

Da gewisse Eigenschaften des Linienzuges der unbelasteten Felder unabhängig von der Größe und Art der Belastung des einen Feldes sind, so kann man die erste Seite des ersten Feldes beliebig wählen und so vorgehen, als ob vom linken Ende aus mehrere Felder unbelastet seien; man kommt durch Fortsetzung des Linienzuges dann sofort zur Kenntnis der Festpunkte. Die Bestimmung derselben ist bei der zeichnerischen Behandlung jedes durchlaufenden Trägers die erste Aufgabe und für ein Beispiel an F. 9, T. III zu ersehen.

Ist II die unter Annahme eines beliebigen Horizontalschubes H gezeichnete Seillinie von den Ordinaten η , so liefert die Gleichung für die Formänderungsarbeit bei Vernachlässigung der Einwirkung der Schubkräfte und für unveränderlichen Querschnitt die Bedingung $H^2 \int_{A_1}^{A_n} \eta^2 dx = \min$, d. h. unter allen möglichen Seilpolygone tritt jenes auf, welches sich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate am innigsten der Trägerachse anschließt.

Rotiert die Fläche II um $A_1 A_n$, so entsteht ein Rotationskörper kleinsten Volumens.

Ermittlung der Stützenmomente.

a) Kreuzlinien-Verfahren. Hat man die erste Seilkurve $A' A''$ mit Zugrundelegung der beliebigen Poldistanz h gefunden (Fig. 97), so begrenzt die Schlußlinie $A' A''$ III die sogenannte einfache Momentenfläche. Ihr Flächeninhalt sei \mathfrak{M} . Ermittelt man mit der Poldistanz $\frac{l}{6}$ und der Kräfte lotrechten $\frac{\mathfrak{M}}{l}$ ein Kräfte dreieck, zieht durch einen Punkt der Schwerpunktslotrechten Parallele zu den Strahlen des letztgenannten Kräfte dreiecks, so erhält man die sogenannten Kreuzlinien, welche auf den Pfeilerlotrechten die Abstände T' und T'' abschneiden. Zieht man ferner durch die bekannten Festpunkte

des Feldes Lotrechte und schneiden diese die Kreuzlinien in den Punkten *K* und *J*, so liefert die Verbindungslinie *KJ* auf den Pfeilerlotrechten unmittelbar die Stützenmomente *M'* und *M''*. Trägt man diese in Fig. 97, III von *A'* und *A''* auf, so ergibt sich die richtige Schlußlinie.

Die Ordinaten zwischen dieser und der ersten Seilkurve geben die Momente *M_x*. Zieht man zur Schlußlinie *B' B''* eine Parallele im Kräftepolygon und ebenso eine solche zur Tangente an *P'* im ersten Seilpolygon, so liefert diese die Querkraft *R_x* in *P*.

Der Beweis ergibt sich sehr einfach, wenn man sich in V das Seilpolygon für die elastische Linie unter Annahme einer Poldistanz $\frac{l}{6}$ gezeichnet denkt, wobei die drei Kräfte *P*, *P₁*, *P₂* durch die Größen

$$\frac{M}{l}, \frac{1}{2} \frac{M'l}{l}, \frac{1}{2} \frac{M''l}{l},$$

also bezw. $\frac{M}{l}$, $\frac{M'}{2}$ und $\frac{M''}{2}$, dargestellt erscheinen. Aus der Ähnlichkeit der in Fig. 97, V schraffierten Dreiecke ergibt sich sofort

$$A_1 C : \frac{l}{3} = \frac{M'}{2} : \frac{l}{6}, \text{ woraus } A_1 C = M',$$

ebenso ergibt sich *A₂D* = *M''*. Erwägt man nun, daß die Abstände *J₁L* und *K₁M* unveränderliche, nur von der Belastung bezw. dem Abstände der Kreuzlinien abhängige Größen sind, denkt sich die ganze Fig. V um *CD* umgeklappt und läßt *CD* an Stelle von *A' A''* in Fig. 97, IV treten, so leuchtet die Richtigkeit des Verfahrens für die Konstruktion der Stützenmomente ein; alles übrige bedarf keiner weiteren Erörterung.

Die Kreuzlinien sind durch die Abstände *T'* und *T''* gegeben. Jeder zusammengesetzte Belastungsfall eines Feldes kann in einfache Belastungsfälle 1, 2... zerlegt und für jeden derselben das Wertepaar *t'₁' t'₁''*; *t'₂' t'₂''*... bestimmt werden, dann ist *T' = Σ t'*, *T'' = Σ t''*. Für solche einfache Belastungsarten lassen sich aber meist kurze Konstruktionen angeben.

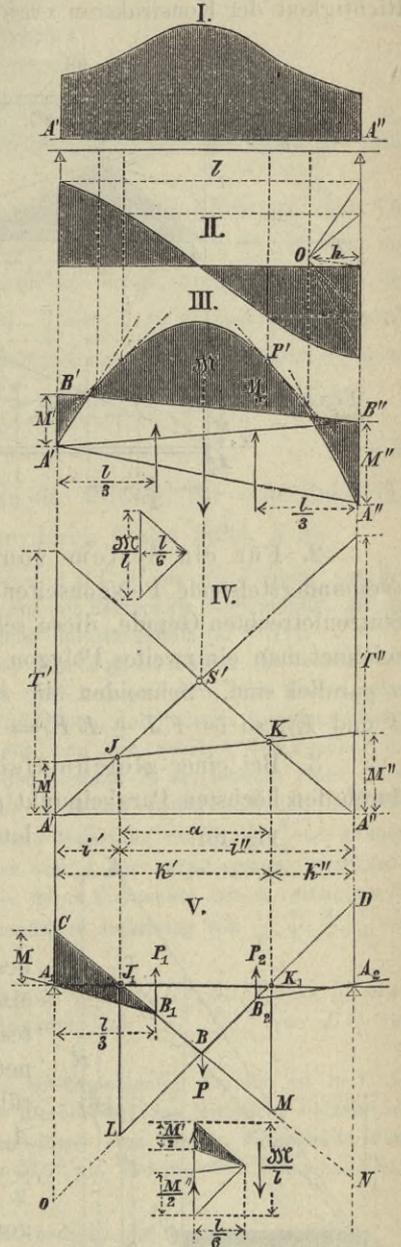
1. Für eine Einzellast. *ABC* (Fig. 98) sei die einfache Momentenfläche. Man mache *A' C' = C' B' = AB*, ziehe *A' C* und *B' C*, so erhält man *AF = t'* und *BE = t''*. Die Konstruktion der Stützenmomente erhellt aus der Figur. Die Berechnung giebt:

$$t' = + G \frac{x' x'' (l + x')}{l^2}; \quad t'' = + G \frac{x' x'' (l + x'')}{l^2} \dots \dots \dots 136.$$

Diese Gleichung läßt sich auch in der Form schreiben:

$$t' = \frac{l + x'}{l} M_c; \quad t'' = \frac{l + x''}{l} M_c,$$

Fig. 97.



wenn M_c das Moment durch die Einzellast G in C ist, woraus sich unmittelbar die Richtigkeit der Konstruktion ergibt.

Fig. 98.

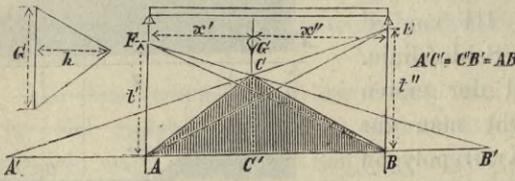


Fig. 99.

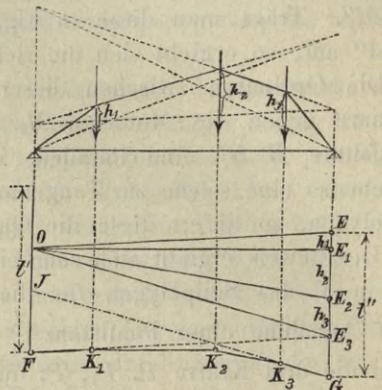
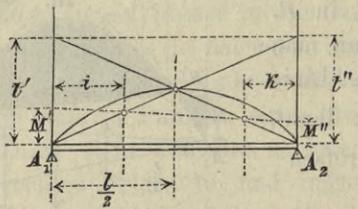


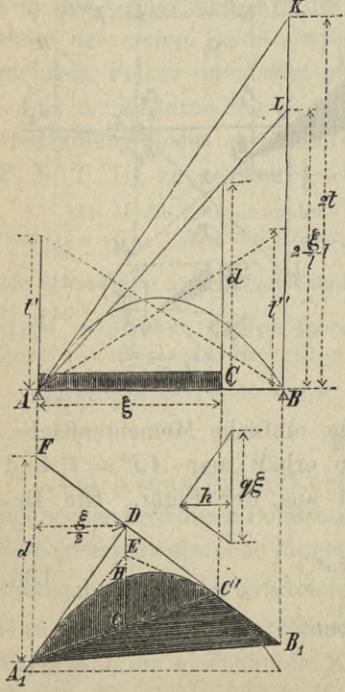
Fig. 100.



2. Für ein System von Einzellasten. Man verlängert (Fig. 99) je zwei aneinanderstossende Polygonseiten und legt durch den Durchschnitt derselben mit den Stützenlotrechten Gerade, diese schneiden die Höhen $h_1, h_2 \dots$ als Strecken ab. Hierauf zeichnet man ein zweites Polygon $K_1 K_2 K_3 \dots$, dessen Seiten den Strahlen des Büschels O parallel sind. Schneiden die letzten Seiten dieses Polygons die Pfeilerlotrechten in J und E_3 , so ist $FJ + EE_3 = t'$ und $GE_3 + EE_3 = t''$.

3. Bei einer gleichmäßigen Vollbelastung schneiden die von A_1 bzw. A_2 durch den höchsten Parabelpunkt gezogenen Geraden die Werte t' und t'' auf den Pfeilerlotrechten ab (s. Fig. 100), im besonderen wird

$$t = t' = t'' = \frac{1}{4} q l^2 \dots \dots \dots 137.$$



4. Für eine teilweise gleichmäßige Belastung besteht die Momentenfläche aus dem Abschnitte $A_1 H C'$ einer Parabel (Fig. 101), welche man wieder am leichtesten mit Hilfe einer Schablone (vergl. S. 292) zeichnet, und aus einem Dreiecke, dessen Seite $C' B_1$ berührend an die Parabel schließt. Die Parabeltangente $A_1 D$ und die Gerade $B_1 D$ schneiden sich im Abstände $\frac{\xi}{2}$ von A . Macht man $CE = \frac{2}{3} CD$, so hat das Polygon $A_1 E C' B_1$ mit der Momentenfläche gleichen Inhalt und dieselbe Schwerpunktslotrechte, es können daher für dieses Polygon die Abstände t'_ξ und t''_ξ direkt nach dem unter 2. Gesagten bestimmt werden, doch führt hier die Rechnung meist schneller zum Ziele. Setzt man für Vollbelastung $t = \frac{1}{4} q l^2$ und $\frac{\xi}{l} = v$, so ist:

$$t' = v^2 (2 - v^2) t; \quad t'' = v^2 (2 - v^2)^2 t \dots \dots 138.$$

Nachstehende Tabelle zeigt einige berechnete Werte:

ν	t'	t''
0,25	0,12109 t	0,19141 t
0,50	0,43750 t	0,56250 t
0,75	0,80859 t	0,87891 t
1,00	1,00000 t	1,00000 t .

Reicht die Last von der rechten Stütze auf die Strecke ξ in das Feld, so sind die Werte t' und t'' entsprechend zu vertauschen.

Von besonderer Wichtigkeit erweist sich für graphische Ermittlungen der Abstand $A_1 F' = d$, welcher ganz unabhängig von der Lage der Punkte $A_1 B_1$ ist und sofort die Ermittlung der Tangenten an die Momentenfläche in A_1 und B_1 erlaubt, da D in der Halbierungslotrechten von ξ liegt. Nun ist $d : \frac{\xi}{2} = q \xi : h$, also $d = \frac{q \xi^2}{2h}$, wenn h der zur Festlegung der Momentenfläche benutzte Polabstand ist. Für Vollbelastung wird $t = \frac{1}{4} q l^2$, $d = \frac{1}{2} q l^2 = 2t$, man hat daher $2t : \frac{l}{2} = q l : h$, woraus sich ergibt:

$$d = 2 \left(\frac{\xi}{l} \right)^2 t \dots \dots \dots 139.$$

Macht man $BK = 2t$, wobei AK Tangente an die Parabel für volle Belastung wird, und $BL = BK \cdot \frac{\xi}{l}$, so schneidet die Lotrechte durch C das Stück \tilde{d} ab.

Beispiele. In F. 9, T. III haben wir an einem Träger $ABCD$ mit drei Feldern von den Längen l_1, l_2, l_3 zunächst die aus § 39, S. 346 bekannte Konstruktion der Festpunkte durchgeführt. Hieran schließt sich die Ermittlung der Stützenmomente für verschiedene Belastungsfälle (s. F. 11).

Im Felde AB stellt die eingezeichnete Parabel zunächst jene Momentenkurve dar, welche entsteht, wenn AB an den Enden frei auflage und der Träger voll belastet wäre. Die Kurve selbst zeichnet sich am einfachsten mit Hilfe einer beliebigen Parabelschablone, durch deren Annahme jedoch der Maßstab für die Momente bereits bestimmt ist. Verbindet man den Scheitel der Parabel mit A und B , so schneiden die Geraden auf den Stützenlotrechten den Abstand T_4 ab, welcher einer vollen Belastung des ersten Feldes entspricht. Kennt man T_4 , so ist es leicht, durch Zeichnung oder Berechnung die Werte $T_3 T_2 T_1$ zu erhalten, welche der linksseitigen Belastung von $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ des Trägers AB entsprechen. Die Verbindungslinien der Endpunkte dieser von A aus aufgetragenen Strecken T schneiden auf der Lotrechten durch den Festpunkt F_1 Stücke ab, deren Endpunkte mit A verbunden die Stützenmomente $B1, B2, B3, B4$ in B geben, welche der linksseitigen Belastung von $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ von AB entsprechen.

In entsprechender Weise erhält man in F. 11 die Stützenmomente $B5, B6, B7, B8$ in B , sowie die Momente $C5, C6, C7, C8$ in C , welche der linksseitigen Belastung von $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ von BC entsprechen.

Man schreitet nunmehr zur Konstruktion der negativen Größtmomente; dieselbe ist in F. 13, T. III versinnlicht. Für alle Punkte zwischen A und F_1 ist hierbei nur das Mittelfeld belastet anzunehmen (Belastungsschema I). Die Momente in AB werden durch eine Gerade dargestellt; diese schneidet von A ausgehend auf der Lotrechten in B ein Stück $B0''$ ab, welches dem Stützenmomente ($B8$ in F. 11) bei voller Belastung des Mittelfeldes entspricht.

Ist ein Viertel des Feldes AB von der zufälligen Last bedeckt, so ist diese Laststellung die ungünstigste für einen Punkt, in welchem das Moment = 0 wird, wenn in 1 (F. 12) eine Einzellast liegt. Diesen Punkt, welcher zwischen F_1 und B liegt und den man leicht mit Hilfe einer Einzellast in 1 konstruieren könnte, brauchen wir jedoch zunächst nicht zu kennen, da sich die Kurve, welche die Größtmomente ($-M$) zwischen F_1 und B darstellt, direkt als Umhülle ihrer Tangenten ermitteln läßt. Als Tangenten treten die Geraden der Momentenfläche für einseitige Belastung auf, welche dem nicht belasteten Teile des Feldes entsprechen. Kennt man die Stützenmomente, welche dem zu betrachtenden Schema angehören, so hat man in unserem Falle nur vom Endpunkte des linksseitigen Stützenmomentes (in AB stets 0, also von A aus) den Abstand d_1 aufzutragen (s. Fig. 101) und den so erhaltenen Punkt $1'''$ mit dem Endpunkte des rechtsseitigen Stützenmomentes $1''$ zu verbinden. $1'''$ wird erhalten, indem man das Moment, welches in B entsteht, wenn $A1$ (Belastungsschema II) mit der Last bedeckt ist, vom Punkte $0''$ (in F. 13) aus aufträgt. Das benötigte Moment wird aus F. 11 entnommen.

Die zu dieser Konstruktion dienenden Werte d sind in F. 13 wie folgt ermittelt (schwarze Linien). Es wurde $A d_4 = 2 T_4$ gemacht und diese Strecke in vier gleiche Teile geteilt, die Teilpunkte mit B verbunden. Die so erhaltenen Strahlen schneiden in den Lotrechten durch $A, 1', 2', 3'$ Strecken ab, welche den Werten d_4, d_3, d_2, d_1 entsprechen. d_3 ist besonders hervorgehoben. In entsprechender Weise wie die Tangente $1'' 1''$ findet man die Tangenten $2'' 2'', 3'' 3'', 4'' 4''$.

Im Mittelfelde BC wurde ebenfalls zunächst (F. 13) die Kurve der negativen Größtmomente zwischen F_2 und C als Umhülle ihrer Tangenten $0 0, 5'' 5'', 6'' 6''$ u. s. w. konstruiert. $B 0$ und $C 0$ entsprechen den Momenten in B und C für Belastungsschema VI; die weiteren Tangenten $5'' 5''$ u. s. w. den Schemen VII, VIII, IX, X. Um die Punkte $6''$ u. s. w. zu finden, hat man von 0 aus auf der Stützenlotrechten von B den Wert $d_6 - M_6$ aufzutragen, wobei die Werte d im Felde BC ebenso wie in AB konstruiert wurden. Die Punkte $5'' 6''$ auf der Lotrechten C liegen in Abständen von 0 , welche den Stützenmomenten in C entsprechen, wenn $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ u. s. w. des Feldes BC belastet sind.

Auf die Konstruktion dieser Kurve als Umhülle folgt die Konstruktion für die übrigen Punkte, für welche sich die Kurve der $\max(-M)$ aus der Symmetrie ergeben.

Die Kurven für $\max(+M)$ kann man sofort erhalten, wenn man die Werte für $\max(-M)$ algebraisch von den Ordinaten für volle gleichmäßige Belastung abzieht. Die Kurven für volle gleichmäßige Belastung lassen sich mit Hilfe der Parabelschablone sofort zeichnen, wenn man berücksichtigt, daß sie auf den Stützenlotrechten Abschnitte erzeugen, welche der Summe der Momente bei Belastung aller Felder entsprechen.

Die Konstruktion der Querkräfte gestaltet sich äußerst einfach, wenn man bedenkt, daß die unter F. 12 gegebenen Belastungsschemen den ungünstigsten Belastungsweisen hinsichtlich der Werte $\max(-R)$ für die Punkte $0, 1, 2, 3, 4$ (dicht links), 4 (dicht rechts), $5, 6, 7, 8$ entsprechen. Trägt man von den Fußpunkten der Lotrechten $0, 1, 2 \dots$ in F. 14 die Poldistanz a auf und zieht durch die Endpunkte Parallele zu den Tangenten $0 0'', 1'' 1'', 2'' 2'' \dots$ in F. 13, so schneiden diese direkt die Werte $\max(-R)$ ab. Die Werte $\max(+R)$ erhält man wieder durch algebraische Subtraktion von den Ordinaten, welche einer vollen gleichmäßigen Belastung aller Felder entsprechen und in F. 14 durch rote zu einander parallele Gerade dargestellt werden.

Die Figuren 15 bis 17, T. III zeigen die Ermittlung der Querkräfte und Momente für volle gleichmäßige Belastung, wie sie u. a. der Einwirkung des Eigengewichtes entsprechen. Die Konstruktion erklärt sich aus dem Vorhergehenden. Unter Benutzung von Parabelschablonen ist die ganze Darstellung in wenig Minuten gemacht und so recht angethan, die außerordentliche Einfachheit der graphischen Verfahren darzulegen.

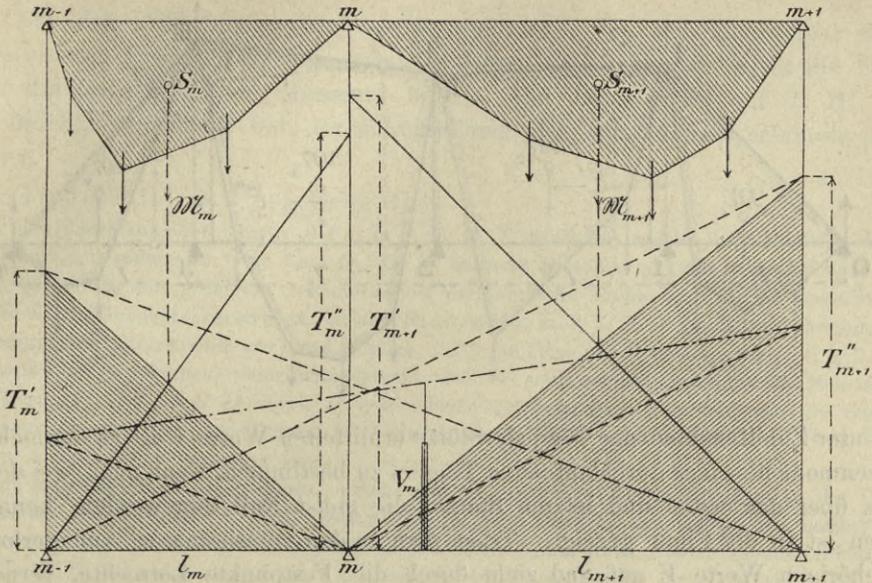
Hat man eine durch Zahlen gegebene bestimmte Belastung q im Auge, so erfordert die Ermittlung der Maßstäbe, welche ein unmittelbares Ablesen der Querkräfte und Momente in Tonnen und Metertonnen gestatten, noch einige Erwägungen, welche sich aus nachstehendem Beispiele ergeben. Das gezeichnete Schema auf T. III ist für alle Träger benutzbar, für welche $\frac{h}{l} = \frac{5}{4}$ ist. Die beliebig angenommene Schablone für die Parabel und die gewählte Poldistanz a ist direkt brauchbar. Wäre nun z. B. $h = 40 \text{ m}$ und mithin $l = 50 \text{ m}$, so hat man, da in der Zeichnung $AB = 40 \text{ mm}$ ist, die Einheit des Längenmaßstabes = 1 mm zu wählen, d. h. es bedeutet 1 mm in der Zeichnung = 1 m .

Wäre q für die Momente = $2,3 \text{ t f. d. lfd. m}$ eines Trägers, so wird $\frac{1}{8} q l^2 = 718,75 \text{ mt}$ und da in unserem Falle die Strecke $\frac{1}{8} q l^2$ durch eine Länge von 19 mm dargestellt wird, so bedeutet 1 mm Zeichnung als Momentenordinate abgelesen $\frac{718,75}{19} = 37,8 \text{ mt}$ oder man hat einen Maßstab zu konstruieren, auf dem die Einheit, eine Metertonne repräsentierend, durch $\frac{19}{718,75} = 0,0264 \text{ mm}$ dargestellt erscheint.

Wäre q für die Querkräfte = $2,5 \text{ t f. d. lfd. m}$ eines Trägers, so ist $q l = 2,5 \times 50 = 125 \text{ t}$. In unserem Beispiele wird diese Größe durch eine Strecke von 23 mm dargestellt, es bedeutet daher 1 mm Zeichnung als Querkraftsordinate abgelesen $\frac{125}{23} = 5,4 \text{ t}$ oder man hat einen Maßstab zu konstruieren, auf welchem die Einheit, eine Tonne repräsentierend, durch $\frac{23}{125} = 0,184 \text{ mm}$ sich ausdrückt und mittels dessen die Querkräfte in F. 14, T. III direkt in Tonnen abgelesen werden können.

b) Verfahrensweise auf Grund der V -Werte (Müller-Breslau). Wir haben die geometrischen Beziehungen kennen gelernt, die zwischen den Größen der Gleichungen nach Clapeyron'scher Art bestehen (S. 285).

[Fig. 102.]



An Stelle der Größen X_1, X_2, X_3 auf S. 285 treten hier die Werte M_{m-1}, M'_m, M_{m+1} . Sind ϑ'_m und ϑ''_m die Stützendrücke, welche die einfachen Momentenflächen $\mathfrak{M}_m, \mathfrak{M}_{m+1}$ an Stütze m erzeugen, wenn man sich die Felder als einfache Träger denkt, sind ferner ξ' bzw. ξ'' die Abstände der Schwerpunkte dieser Momentenflächen von den Stützen $m-1$ bzw. $m+1$, ist also $\vartheta'_m = \frac{\xi' \mathfrak{M}}{l_m}$; $\vartheta''_m = \frac{\xi'' \mathfrak{M}_{m+1}}{l_{m+1}}$, so wird

$$M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = 3 (l_m + l_{m+1}) V_m,$$

wenn

$$V_m = \frac{2(\vartheta'_m + \vartheta''_m)}{l_m + l_{m+1}} - \frac{2 E J \delta_m}{l_m l_{m+1}} + \frac{\varepsilon E J \Delta t}{h}.$$

δ_m ist die lotrechte Verschiebung des Stützpunktes m gegen die Verbindungslinie der beiden anderen. Δt ist der Unterschied der Temperaturerhöhung im obersten Punkte des Querschnittes gegen diejenige im untersten Querschnittspunkte; die Temperaturänderung ist im Querschnitte linear veränderlich angenommen; ε ist das Verlängerungsverhältnis für eine Temperaturerhöhung um 1°C . $\Delta t, t$ und ε sollen überall gleich sein.

Das zweite und dritte Glied wird man am besten durch Rechnung bestimmen, das erste Glied läßt sich leicht, wenn man es nicht auch durch Rechnung bestimmt, aus den Kreuzlinien ermitteln, wodurch gleichzeitig der Zusammenhang beider Verfahrensarten gegeben ist.

Für eine gleichförmig verteilte Last g wird

$$V_m = \frac{g(l_m^3 + l_{m+1}^3)}{12(l_m + l_{m+1})} = \frac{g}{12} (l_m^2 - l_m l_{m+1} + l_{m+1}^2).$$

Sind die in den Schwerpunktslotrechten der einfachen Momentenflächen \mathfrak{M}_m und \mathfrak{M}_{m+1} sich schneidenden Kreuzlinien gegeben, so stellen, wie sich leicht einsehen läßt, die schraffierten Dreiecksflächen die 3fachen Stützendrücke ϑ'_m und ϑ''_m der einfachen Momentenflächen an Stütze m dar. Führt man durch eine aus der Figur leicht ersichtliche Konstruktion die beiden Dreiecksflächen auf ein flächengleiches Trapez von der Basis $l_m + l_{m+1}$ zurück, so ist die Größe V_m durch $\frac{2}{3}$ des Wertes der mittleren Höhe dieses Trapezes gegeben.

Der Verfasser bringt in Folgendem ein etwas anderes Verfahren.

3. Aus den Einflußlinien für die Stützendrücke, die sich unmittelbar als Seil-
linien bestimmter Belastungsflächen ergeben, lassen sich ebenfalls leicht die Einfluß-
linien für die Querkräfte und Momente bilden. Ein Beispiel ist auf T. III, F. 19
bis 27 gebracht, und findet bei der Beschreibung des Stützendruckverfahrens nähere
Erläuterung.

Zu 1: Beispiel zu Verfahren 1.

Für den durchlaufenden Träger $ABCD$ (s. T. II, F. 6 bis 10) wurden in I zunächst die Fest-
punkte bestimmt und sodann für eine Last G , die in unserem Beispiel = 2 cm gemacht wurde, nach
dem in Fig. 98 auf S. 348 gezeigten zeichnerischen Verfahren der Reihe nach für die Lage von G in
1, 2, 3 . . . die Stützmomente konstruiert, welche Konstruktion in F. 7, T. II als Beispiel herausgehoben
ist. Bei Kenntnis der Stützmomente ist es möglich, für jeden einzelnen Belastungsfall (G in 1, 2, 3 . . .)
die Momentenfläche zu zeichnen, wenn man bedenkt, daß bei unbelastetem Mittelfeld die Momentenlinie
durch den Festpunkt F_2' , in $C'D'$ durch D' gehen muß, bei belastetem Mittelfeld aber die Endpunkte
der die Stützmomente über den Stützen $B'C$ darstellenden Strecken $B'5, B'6 . . . , C'5, C'6$ mit
den Punkten A' und D' zu verbinden sind.

Trägt man die einzelnen Abstände, welche die so erhaltenen Momentenkurven in der Ordinate
eines bestimmten Querschnittes, z. B. 2, abschneiden, in jenen Punkten auf, welche den Lastlagen ent-
sprechen, so erhält man die dem Querschnitte (2) entsprechende Einflußlinie. Die im besonderen betrachtete
Linie 2 (s. T. II, F. 10) steigt von A bis 2 an, erreicht in diesem Punkte ihren Größtwert und besitzt
dasselbe eine Spitze, fällt nunmehr gegen B ab, erreicht in Nähe des Punktes x' ihren negativen Größt-
wert, geht durch C und wird nun wieder positiv. In F. 9, T. II sind die Einflußlinien der Querkräfte
gezeichnet. Man erhält für jeden einzelnen Querschnitt, z. B. 2, die Querkräfte sehr einfach aus F. 8,
wenn man zu jeder Momentenlinie in 2, welche dem Belastungsfall G in 1, 2, 3 . . . entspricht, eine
Parallele im Kräftepolygon I' zieht; die Strecke, welche die Parallele vom Fußpunkte einer Wagerechten
durch den Pol gemessen auf der Lastlotrechten abschneidet, giebt die dem Belastungsfall zukommende
Querkraft, welche an der Lastangriffsstelle aufgetragen wird. Da (Querschnitt 2 in Betracht gezogen)
in diesem Querschnitte 2 die Momentenkurve, wie F. 7 zeigt, eine Ecke besitzt, so entsprechen dieser
Ecke zwei Werte der Querkraft, die in F. 9 als positive und negative Ordinate in 2 mit ersichtlich sind.
Für alle Querschnitte eines Feldes wird die Einflußlinie der Querkräfte in den anderen Feldern ein
und dieselbe, so ist (F. 9) z. B. für alle Querschnitte 0, 1, 2, 3, 4 die Querkrafts-Einflußlinie für das Mittel-
und Endfeld durch die eingezeichnete kräftige Linie dargestellt.

Die in F. 6 bis 10 eingezeichneten Gebilde sind für jeden beliebigen langen durchlaufenden Träger
von drei Feldern verwendbar, für welchen das Verhältnis der drei Felder dasselbe wie in unserem Falle,
nämlich 4:5:4 ist. Wir wollen zeigen, wie die entwickelten Einflußlinien zur Bestimmung der äußeren
Kräfte für einen durchlaufenden Blechträger von 8 + 10 + 8 m Stützweite benutzt werden können.

Durch die gegebene Felderlänge ist nunmehr der Längenmaßstab gegeben; er wird 1 cm Zeich-
nung = 2 m Wirklichkeit. Hiernach sind auch die Abstände der Lasten, welche durch die in F. 13
gezeichnete Lokomotive dargestellt werden, gegeben. In F. 9 ist die ungünstigste Stellung der Loko-
motive für den Querschnitt 4 eingezeichnet. Der Maßstab für die Querkräfte wurde so bestimmt, daß
 $G = 2 \text{ cm} = \frac{13}{2} \text{ t}$ gesetzt wurde. Es giebt dann beispielsweise Q_1 in F. 9 den Beitrag, welchen ein
Lokomotiv-Raddruck von 13 t für die Querkraft in 4 eines Trägers leistet. Die Ordinaten $Q_4 Q_5 . . .$
rühren von Raddrücken gleich 9 t her, sie dürfen daher nicht einfach addiert werden, sondern sind vorher
in dem Verhältnis von 9:13 zu verkleinern, was mit Hilfe eines Reduktionswinkels geschah. — Die
Stellung $Q_1' Q_2' Q_3'$ im ersten Felde (F. 9) entspricht der größten positiven Querkraft bei Belastung
dieses Feldes für alle Querschnitte des Mittelfeldes.

In F. 15, T. II wurde das für jeden Querschnitt erhaltene Ergebnis für $\max R$ aufgetragen, doch
Platzmangels halber nicht die ganze Summe der in F. 9 addierten Ordinaten, sondern nur $\frac{4}{5}$ derselben;
aus diesem Grunde mußte daher auch der Maßstab im selben Verhältnisse geändert werden. Alles
übrige ist aus der Figur klar.

Bei Bestimmung der Momente handelt es sich zunächst wieder um Ermittlung des Maßstabes.
Nach dem für unser Beispiel gegebenen Längenmaßstabe gemessen ist die Polweite des Kräftepolygons
2 m; es bedeutet daher die Einheit des Kräftemaßstabes, welche oben mit $\frac{40}{13} \text{ mm} = 3,08 \text{ mm}$ bestimmt
wurde, 2 mt, d. h. man hat als Einheit für den Momentenmaßstab 1 mt = 1,54 mm anzunehmen. In

F. 10 ist die ungünstigste Stellung des Lastsystems für Querschnitt 2 eingetragen. Die Ordinaten $m_1 m_2 m_3$, einer Last von 13 t für beide Träger entsprechend, geben addiert den Größtwert des Momentes für 2, soweit die Belastung des ersten Feldes in Betracht kommt. Einer Belastung des letzten Feldes entsprechen die Ordinaten $m_1' m_2' m_3'$. Würden neben den 13 t-Lasten noch solche von 9 t Platz finden, so wäre die den 9 t-Lasten entsprechende Ordinatensumme der m mit Hilfe des Reduktionswinkels auf $\frac{9}{13}$ ihres Wertes zu reduzieren.

Fig. 104.

In F. 14 sind die Größtwerte der Momente für alle Querschnitte zusammengestellt. Platzmangels halber wurde aber auch hier nur $\frac{4}{5}$ der jeweilig in F. 10 erhaltenen Summe aufgetragen, weshalb auch der Maßstab für die Momente im Verhältnisse 4 : 5 zu verändern war. Die parabelähnliche, gestrichelte Kurve K in F. 14 entspricht der Belastung des ersten, die Gerade L der Belastung des letzten Feldes. Die Gerade der negativen Momentenfläche des ersten Feldes in F. 14 entwickelt sich bei belastetem Mittelfelde. Der krumme Ansatz an diese Gerade unterhalb B im ersten Felde rührt von der Belastung des ersten Feldes für solche Punkte her, welche innerhalb des Festpunktes dieses Feldes und der Stütze liegen. $3\frac{1}{2}$ ist ein solcher Punkt. In ähnlicher Weise erklärt sich das Schema im Mittelfelde.

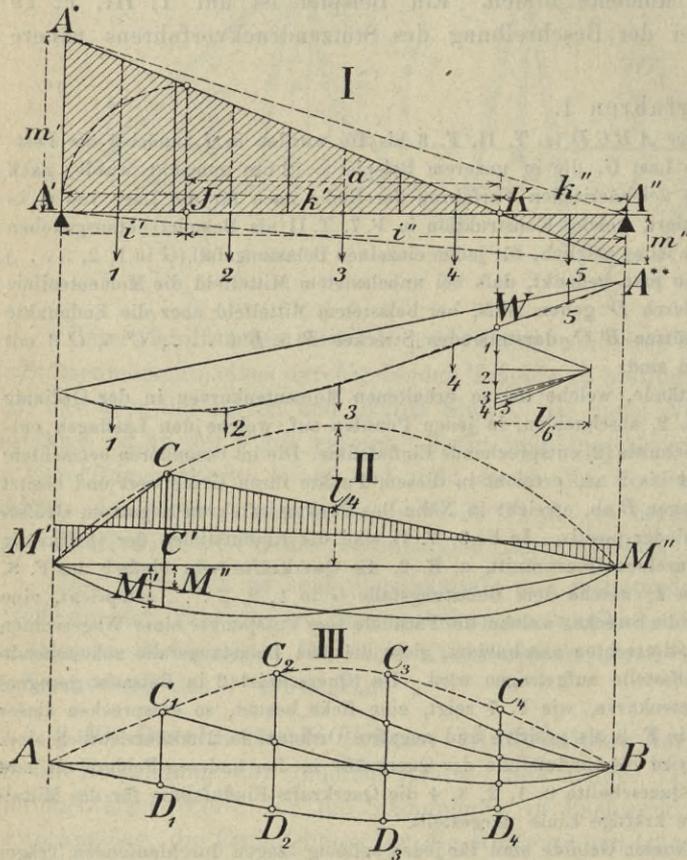
Zu 2: Weiteres zu dem Verfahren 2.

Sind die Festpunkte eines Feldes eines durchlaufenden Trägers gegeben, so kann man aus den Abständen dieser Festpunkte und der Feldlänge unmittelbar die Querkräfte und Momente für jeden Punkt des Feldes berechnen, die eine beliebige Belastung dieses Feldes erzeugten.

Für ein beliebiges Feld von der Länge l bedeute M' das Stützenmoment für die linke, M'' jenes für die rechte Stütze, u und v seien die Abstände eines Querschnittes C von der linken bzw. rechten Stütze, \bar{R}_u und \bar{M}_u die Querkraft und das Moment, wenn der Träger frei an den Stützen aufläge, dann ist die wirklich auftretende Querkraft

$$R_u = \bar{R}_u + \frac{M'' - M'}{l}$$

und für das Moment:

$$M_u = \bar{M}_u + \frac{u}{l} M'' + \frac{v}{l} M'$$


Zu 2: Weiteres zu dem Verfahren 2.

Sind die Festpunkte eines Feldes eines durchlaufenden Trägers gegeben, so kann man aus den Abständen dieser Festpunkte und der Feldlänge unmittelbar die Querkräfte und Momente für jeden Punkt des Feldes berechnen, die eine beliebige Belastung dieses Feldes erzeugten.

Für ein beliebiges Feld von der Länge l bedeute M' das Stützenmoment für die linke, M'' jenes für die rechte Stütze, u und v seien die Abstände eines Querschnittes C von der linken bzw. rechten Stütze, \bar{R}_u und \bar{M}_u die Querkraft und das Moment, wenn der Träger frei an den Stützen aufläge, dann ist die wirklich auftretende Querkraft

$$\left. \begin{aligned} R_u &= \bar{R}_u + \frac{M'' - M'}{l} \\ M_u &= \bar{M}_u + \frac{u}{l} M'' + \frac{v}{l} M' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 140.$$

Sind T' und T'' die Abstände der Kreuzlinien, so findet sich aus Fig. 97, IV, S. 347:

$$M' = -\frac{i'}{l} \cdot \frac{K' T'' - K'' T'}{a}; \quad M'' = -\frac{K''}{l} \cdot \frac{i'' T' - i' T''}{a}.$$

Die Ausdrücke für die Kreuzlinienabstände T' und T'' für eine Einzellast G lassen sich auch in der Form schreiben

$$T' = G \cdot l \cdot \left(\frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3} \right) \dots \dots \dots 141.$$

$$T'' = G \cdot l \cdot \left(\frac{x''}{l} - \frac{x''^3}{l^3} \right), \dots \dots \dots 142.$$

wenn x' und x'' die Abstände der Last von der linken bzw. rechten Stütze sind. Hat man es mit einer Dreieckbelastung zu thun, deren Höhe links m_1 , deren Höhe rechts m_r ist, so wird die Ordinate z' der Seillinie im Abstände x' , wenn b die Verwandlungsbasis für die Flächen und H der Horizontalschub ist, mit welchen die Seillinie ermittelt wurde:

$$b \cdot z' \cdot H = \frac{m_r \cdot l^2}{6} \cdot \left(\frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3} \right); \quad b \cdot z'' \cdot H = \frac{m_1 \cdot l^2}{6} \cdot \left(\frac{x''}{l} - \frac{x''^3}{l^3} \right).$$

Die Division beider Gleichungen giebt, wenn man $G = 1$ setzt:

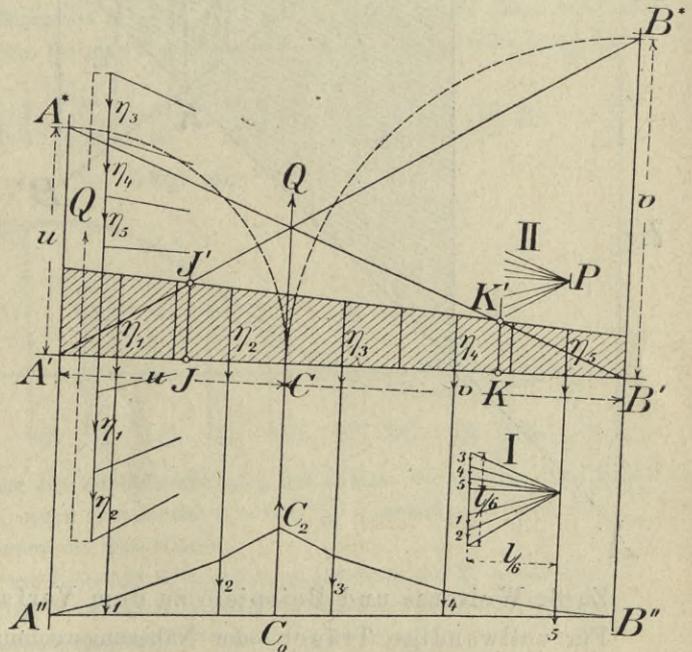
$$T' = \frac{6 H \cdot b}{m_r \cdot l} \cdot z'; \quad T'' = \frac{6 H \cdot b}{m_1 \cdot l} \cdot z''.$$

Macht man $H = \frac{l}{6}$; $b = l$; $m_r = -\frac{k'' \cdot i'}{a}$; $m_1 = \frac{k' \cdot i'}{a}$, so wird:

$$M' = -(z' + z'') \cdot G = z_1 \cdot G.$$

Die Ordinaten der Einflußfläche für das linke Stützenmoment entsprechen also den Ordinaten einer Seillinie für eine bestimmte Belastungsfläche. Diese ist durch die Strecken $A'A^*$ und $A''A^{**}$ gegeben. Letztere werden erhalten, wenn man durch K eine Gerade zieht, welche auf der Lotrechten durch J die Strecke i' abschneidet. Entsprechend erhalte man die Belastungsfläche für die Seillinie von M'' , wenn man durch J eine Gerade zieht, welche auf der Lotrechten durch K die Strecke k'' abschneidet; oder durch $M'' = z_2 \cdot G$.

Fig. 105.



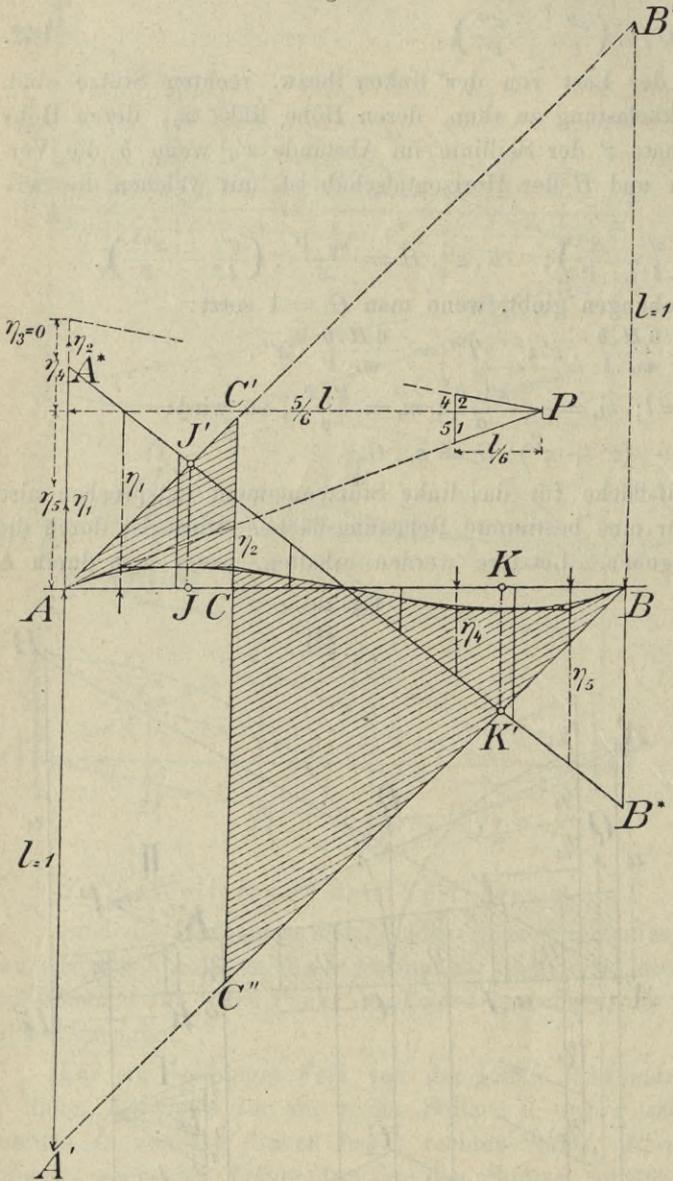
In Fig. 104 ist die Seillinie gezeichnet.

Diese Konstruktion ermöglicht ohne weiteres die Ermittlung der Einflußlinie für einen beliebigen Querschnitt C . Sie ist die Seillinie einer in C nach oben wirkenden Einzellast $Q = \frac{l}{6}$ und einer nach unten wirkenden trapezförmigen Belastungsfläche. Letztere wird auf Grund folgenden Verfahrens erhalten. Man trage die Abstände u und v des Punktes C von A' und B' als Ordinaten $A'A^* = u$, $B'B^* = v$ auf (Fig. 105): dann schneiden die Verbindungslinien $A'B^*$ und A^*B' auf den Lotrechten durch die Festpunkte J und K Punkte J' und K' ab, die der oberen Begrenzungslinie der trapezförmigen Belastungsfläche entsprechen. Der Beweis ist leicht zu erbringen.

Es wird:

$$M_u = \bar{m}_u \cdot G - \frac{u}{l} \cdot z_2 \cdot G - \frac{v}{l} \cdot z_1 \cdot G = \bar{m}_u \cdot G - z \cdot G,$$

Fig. 106.



wenn z_1 und z_2 die Einflusswerte der Stützmomente M' und M'' sind. \bar{m}_u sind die Einflusswerte für AB als einfachen Träger. Sie entsprechen den Ordinaten eines Seilpolygons für eine Einzellast $\frac{l}{6}$, wenn als Poldistanz $\frac{l}{6}$ gewählt wird. Die beiden übrigen Glieder entsprechen den Ordinaten der Seillinie für eine trapezförmige Belastungsfläche; für $x' = i'$ wird $z_1 = i'$, $z_2 = 0$, also $z = \frac{v}{l} \cdot i'$, für $x' = k''$ wird $z_2 = k''$ und $z_1 = 0$, also $z = \frac{u}{l} \cdot k''$, woraus sich die Richtigkeit der angegebenen Konstruktion leicht erkennen lässt. Die Konstruktion der Seillinie ist in Fig. 105 dargestellt.

Einflusslinie der Querkraft. Der Ausdruck

$$R_u = \bar{R}_u - \frac{M' - M''}{l}$$

lässt sich auch schreiben:

$$R_u = \frac{r_u}{l} G - \frac{z_1 - z_2}{l} G.$$

Denkt man sich die Gröfse G durch die Strecke l ausgedrückt, so wird

$$R_u = r_u - (z_1 - z_2).$$

Fig. 106 zeigt die Konstruktion der Einflusslinie.

Zu 3: Weiteres und Beispiele zu dem Verfahren 3.

Für vollwandige Träger oder Näherungsrechnungen empfiehlt sich wohl das Verfahren mit Hilfe der Ermittlung der Stützendrücke. Ein durchgehender Träger ruhe auf den festen Endstützen $A_0 A_n$, auf den Zwischenstützen $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ und sei irgendwie belastet; die Zwischenstützen sollen die Senkungen $s_1 s_2 \dots$ u. s. w. erfahren.

1. Man denke die Zwischenstützen hinweg und bestimme die Durchbiegungen $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ des nunmehr verbleibenden einfachen Trägers an den Stellen $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ der Zwischenstützen.

2. Man bringe der Reihe nach die nach aufwärts gerichteten, zunächst beliebigen Kräfte X_1 in A_1 , X_2 in A_2 , X_3 in A_3 u. s. w. an und bestimme die Hebungen, welche jede von ihnen für sich am einfachen Träger $A_0 A_n$ erzeugt; es möge hierbei allgemein $\delta_{u,v}$ die Hebung sein, welche in A_u entsteht, wenn in A_v die Einzellast 1 nach aufwärts wirkt.

3. Die Bedingung, daß die endgiltigen Senkungen der Stützen $A_1 A_2$ u. s. w. die Werte $s_1 s_2$ u. s. w. betragen müssen, liefert die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= a_1 - \delta_{11} X_1 - \delta_{12} X_2 - \delta_{13} X_3 \dots \\ s_2 &= a_2 - \delta_{21} X_1 - \delta_{22} X_2 - \delta_{23} X_3 \dots \\ &\dots \dots \end{aligned} \right\} n - 1 \text{ Gleichungen,}$$

woraus die Stützendrücke $X_1 X_2 \dots X_{n-1}$ u. s. w. ermittelt werden können, denn nach dem allgemein bewiesenen Gesetze der gegenseitigen Verschiebungen muß stets $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{u,v} = \delta_{v,u}$ sein u. s. w. Die Größen δ sind von der Belastung unabhängig.

Für die Berechnung der Durchbiegungen bei Einzellasten kann die auf S. 305 bereits gegebene Formel benutzt werden, welche wir nochmals anführen.

Es ist (Fig. 107) die Durchbiegung $\delta_{u,v}$ in A_u für eine Einzellast X in A_v und umgekehrt:

$$\delta_{u,v} = \frac{u v}{6 E J l} (l^2 - u^2 - v^2) X \dots 143.$$

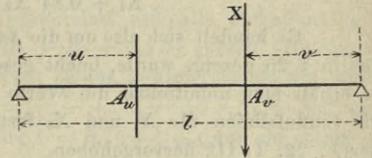
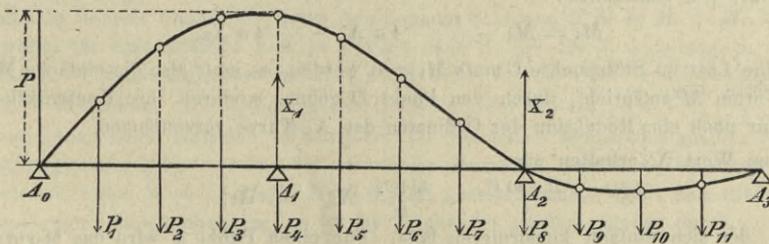


Fig. 107.

Beispiel a. Gegeben ein durchlaufender Träger auf zwei Mittelstützen, gleichlange Felder. Wir teilen (Fig. 108) die ganze Länge in 12 Teile und berechnen die einzelnen Werte der Durchbiegungen a_1 und a_2 in A_1 und A_2 , wenn eine Einzellast in $\frac{1}{12} l, \frac{2}{12} l$ u. s. w. liegt, immer unter Anwendung der Formel 143. Wir ermitteln z. B. $a_{1(1)}$ für eine Einzellast in P_1 in $\frac{1}{12} l$, indem wir $u = \frac{1}{12} l, v = \frac{8}{12} l$ setzen und erhalten:

$$a_{1(1)} = \frac{1}{6} \frac{l^4}{E J} \cdot \frac{1 \cdot 8}{12 \cdot 12} \left(\frac{12^2}{12^2} - \frac{1^2}{12^2} - \frac{8^2}{12^2} \right) P_1 = \frac{158 \cdot l^4}{6 \cdot 36 \cdot 144 E J} P_1.$$

Fig. 108.



Im weiteren genügt es, nur den Zahlenkoeffizienten des Zählers einzustellen. Die Koeffizienten von X_1 und X_2 werden erhalten, wenn man einmal $u = v = \frac{4}{12} l$, einmal $u = \frac{4}{12} l, v = \frac{8}{12} l$ setzt. Die Addition aller Teilwerte a liefert die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 158 P_1 + 304 P_2 + 426 P_3 + 512 P_4 + 550 P_5 + 552 P_6 &= 512 X_1 + 448 X_2 \dots \dots \dots \text{b.} \\ 127 P_1 + 248 P_2 + 357 P_3 + 448 P_4 + 515 P_5 + 552 P_6 &= 448 X_1 + 512 X_2 \dots \dots \dots \text{a.} \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,391 P_1 + 0,725 P_2 + 0,947 P_3 + P_4 + 0,828 P_5 + 0,575 P_6, \\ X_2 &= -0,094 P_1 - 0,150 P_2 + 0,133 P_3 + 0 \cdot P_4 + 0,281 P_5 + 0,575 P_6. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von P sind die Ordinaten der Einfluslinien für den Stützendruck in A_1 und A_2 für Lastlagen bis zur Trägermitte, der weitere Verlauf der Linien ergibt sich aus der Symmetrie.

Mit Hilfe dieser Einfluslinien ist man im Stande, die Stützendrücke für jede beliebige Belastung und damit die äußeren Kräfte zu ermitteln.

Beispiel b. F. 19 bis 27, T. III zeigen die graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe. Wir wissen, daß die Einflußlinie für die Durchbiegung im Punkte 1 eines Trägers, dem linken Mittelauflager in F. 20, der auf den Endstützen 0 und 26 aufruht, gleichbedeutend mit der Biegelinie für eine Last $P = 1$ in diesem Punkte ist. Diese Biegelinie aber ist eine Scillinie, für welche die Momentenfläche für eine Last $P = 1$ die Belastungsfläche ist. Diese Momentenfläche wurde in F. 20 unter Annahme eines Kräfteplanes F. 19 ermittelt, und durch Schraffierung hervorgehoben. Unter Zuhilfenahme einer zweiten Poldistanz wurde das Kräftepolygon F. 21 und mittels dieser die Scillinie gezeichnet.

Man könnte sie ebenfalls unmittelbar unter Berücksichtigung der in § 18 gegebenen Regeln nach der Tabelle auftragen. Die Bedingung, daß die Durchbiegung in 1 Null sein müsse, liefert die Gleichung

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} = P \delta_{a1},$$

wenn mit der zweiten Index-Ziffer die Stütze, mit der ersten die Lastlage bezeichnet ist und eine Last P im Querschnitte u liegend angenommen wird.

Ebenso findet sich für die Stütze 2 die Gleichung:

$$X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} = P \delta_{a2}.$$

In unserem Falle wird $\delta_{11} = \delta_{22}$, $\delta_{12} = \delta_{21}$; setzt man außerdem $\delta_{11} = 1$, so erhält man für $P = 1$ die Gleichungen:

$$X_1 + 0,84 X_2 = \delta_{a1} \quad \text{und} \quad 0,84 X_1 + X_2 = \delta_{a2}.$$

Es handelt sich also um die Auflösung zweier Gleichungen, die nach dem zeichnerischen Verfahren, das in § 25 gezeigt wurde, leicht geschehen kann. Löst man dieselben für verschiedene Werte δ_{a1} auf, so erhält man unmittelbar die Werte für X_1 und X_2 für die verschiedenen Lastlagen und kann hiernach die Einflußlinien für X_1 und X_2 festlegen. Die Lösung ist für die Last P in 4 und 11 besonders in der F. 22, T. III hervorgehoben.

Man kann aber auch die Einflußlinien für X_1 unmittelbar erhalten, wenn man sich des Satzes bedient, den wir in § 24 abgeleitet haben, indem wir die Lasten $P_1 = 1$ und $P_2 = -0,84$ in 1 und 2 wirken lassen, die Momentenfläche entwickeln und diese als Belastungsfläche für die Ermittlung der Biegelinie ansehen. Die Maßstäbe sind hierbei willkürlich. Die Ordinate der Biegelinie über der 2. Stütze ist schließlic die Einheit. Aus der Einflußlinie für X_1 ergibt sich jene für X_2 als symmetrisch hierzu gelegen; ebenso entwickeln sich aus dem Satze, daß die Stützenwiderstände sich das Gleichgewicht halten müssen, die Einflußlinien für die Stützenwiderstände X' und X'' in den beiden Endstützen. Aus den Einflußlinien für die Stützendrücke lassen sich jene für die Momente leicht festlegen. Es ist z. B. für Punkt 4, wenn wir eine Teillänge $01 = 12 = 23 = \dots = a$; ferner $AC = GB = l_1$; $CG = l_2$, $l = 2l_1 + l_2$ bezeichnen:

$$M_4 = \overline{M}_4 - \frac{l-l_1}{l} 4a X_1 - \frac{l_1}{l} 4a X_2.$$

Für eine Last im Stützpunkte C muß $M_4 = 0$ werden, es muß also die einfache Momentenfläche, welche den Werten \overline{M} entspricht, durch den Punkt D gehen, wodurch ihre Konstruktion gegeben ist. Es ist dann nur noch eine Reduktion der Ordinaten der X_1 -Kurve vorzunehmen.

Für den Wert X' erhalten wir:

$$X' = \frac{(l-u)P}{l} - \frac{l_1+l_2}{l} X_1 - \frac{l_1}{l} X_2,$$

ein Ausdruck, der sich einfach konstruieren läßt. Für einen Punkt 4 wird das Moment, wenn wir die Strecke 04 mit c bezeichnen, für eine wandernde Einzellast innerhalb 04 , also für $c > u$

$$M_4 = X' c - P(c-u) = c \left(X' - \frac{c-u}{c} P \right)$$

und für $c < u$, d. h. für eine Lastlage innerhalb der Punkte 4 bis 26 einfach $M_4 = X' c$.

Ebenso ergeben sich für andere Punkte und verschiedene Lastlagen die Werte für M als lineare Funktionen von X_1 und X_2 und \overline{M} , die leicht konstruiert werden können. In T. III, F. 26 ist die Konstruktion der Einflußlinie für die Momente in 4, 6 und 13 durchgeführt. Wir unterlassen es, auf die Einzelheiten derselben einzugehen, die dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten werden.

Zur Vorführung der Näherungsmethode bei Berechnung durchlaufender Träger, wie auch als Beispiel für die Behandlungsweise eines mehrteiligen Fachwerks diene das Nachstehende:

Beispiel c. In F. 10 bis 15, T. V ist die Hälfte eines durchlaufenden Trägers dargestellt. Die angegebenen Querkräfte und Momente wurden unter Zugrundelegung des Navier'schen Verfahrens berechnet (vergl. S. 165 der 3. Abteilung dieses Werkes, 2. Auflage) und nach den hierzu angenommenen

Mafsstäben für das Eigengewicht und die zufällige Last in F. 11 u. 12 gesondert aufgetragen. In F. 11 bedeutet QR die Querkraftskurve infolge der zufälligen Last, KP jene infolge der Eigenlast auf den Obergurt, JO jene für den Untergurt. Nach dem im § 35 vorgeführten Verfahren wurde nunmehr zunächst für die rechtsfallenden Stäbe, für welche z. B. die Schnittrichtung UV für Stab ST maßgebend ist, die Querkraft CD ermittelt, wobei die Verkehrslast auf den Obergurt wirkend gedacht wurde. Für die linksfallenden Stäbe gilt z. B. die Schnittrichtung ST für Stab UV ; die Querkraft CF wurde ebenfalls graphisch aufgetragen und das Verfahren in beiden Fällen für alle Stäbe durchgeführt. Die größte Zug- und Druckspannung jedes Stabes läßt sich hiernach direkt ermitteln. Für Stab ST ist z. B. die in der Lotrechten durch die Stabmitte erscheinende Ordinate die entsprechende Querkraft $CD = 42 \text{ t}$, daher ist die Spannung gegeben durch $\frac{42}{n} \cdot \sec \alpha = \frac{42}{4} \cdot 1,414 = 42 \cdot 0,371 = 14,8 \text{ t}$, weil das System ein vierteiliges und $\alpha = 45^\circ$ ist. Die in jedem Falle erforderliche Multiplikation mit dem Beiwert $0,371$ läßt sich durch eine Maßstabsverwandlung erzielen, wenn man die Einheit des Kräftemaßstabes $\frac{1}{0,371}$ mal größer macht. Die vollen Linien in F. 11 geben in ihren Ordinaten direkt die Spannungen der Gitterstäbe; innerhalb der Strecke II' werden die rechtsfallenden Stäbe auf Zug und Druck, innerhalb $A_1 I$ nur auf Zug, innerhalb $I' B_1$ nur auf Druck beansprucht.

Man kann auch die nötigen theoretischen Querschnittsflächen auf graphischem Wege bestimmen und es ist dies bei vorliegendem Beispiele unter Zugrundelegung der vereinfachten Winkler'schen Formel geschehen. Die Querkraft der Eigenlast wurde einhalbmal, die zufällige im selben Sinne wirkende Querkraft einmal, die entgegengesetzt wirkende Querkraft der Verkehrslast ebenfalls einhalbmal genommen, alsdann wurden die Werte addiert. Es ist also $\bar{R} = 0,5 R_0 + R_1 + 0,5 R_2$ gesetzt. Hierdurch ergaben sich die strichpunktierten Linien; die Ordinaten dieser Kurven stellen gewissermaßen die reduzierten Querkräfte dar. Für den Stab ST wird z. B. $\bar{R} = CE = \frac{HJ}{2} + \frac{NO}{2} + \frac{MN}{2} + NR$ gefunden. Will man nun die Querschnittsfläche F ablesen, so wird für $k = 0,75 \text{ t f. d. qcm}$ als zulässige Inanspruchnahme für diesen Stab

$$F = \frac{\bar{R}}{n \cdot k} \sec \alpha = \frac{1,414}{4 \cdot 0,75} \bar{R} = \frac{\bar{R}}{2,12}.$$

Konstruiert man einen Maßstab, für welchen die Einheit Quadratcentimeter durch 2,12 Einheiten des Tonnenmaßstabes für \bar{R} ausgedrückt erscheint, so kann man direkt die Flächen der Stäbe als Ordinaten der strichpunktierten Kurven ablesen. Jenes ist in „zu F. 11“ (unterer Maßstab) geschehen. Nach diesem ergibt sich z. B. für die nötige Zugfläche des Stabes ST (durch Abmessen der Strecken CE) 21 qcm. In ähnlicher Weise ist die Bestimmung der übrigen Flächen erfolgt; die Ergebnisse sind in F. 13 u. 14 eingetragen.

Für die Bestimmung der Gurtspannungen werden die Schnitte lotrecht. Das für die Gurte VW und XY entfallende Moment findet sich durch Addition der Strecken $C'E' = M_0 + M_1$. Die Momente wurden wie erwähnt für eine zufällige Last $p_2 = 2,5 \text{ t}$ nach S. 159 der 3. Abteilung, 2. Auflage dieses Werkes aufgetragen. Für das Eigengewicht ist es nicht nötig, die auf Ober- und Untergurt entfallenden Lasten getrennt zu behandeln. Die Spannung des Gurtes ergibt sich zu: $S = \frac{M_0 + M_1}{h}$. Da $h = 5 \text{ m}$, so hätte man nur nötig, einen Maßstab zu zeichnen, für welchen 5 Momenteneinheiten = 1 t gemacht werden. Die strichpunktierte Linie liefert die reduzierten Momente, der Winkler'schen vereinfachten Formel entsprechend, wobei $\bar{M} = 0,5 M_0 + M_1 + 0,5 M_2$ gesetzt wurde. Wählt man wieder $k = 0,75 \text{ t f. d. qcm}$ als zulässige Inanspruchnahme, so ist die Fläche des Gurtes gegeben durch

$$F = \frac{\bar{M}}{h \cdot k} = \frac{\bar{M}}{5 \cdot 0,75} = \frac{\bar{M}}{3,75}.$$

Macht man die Einheit des Flächenmaßstabes = 3,75 Einheiten des Momentenmaßstabes, wie dies zu F. 12 (unten) geschehen ist, so kann man die Inhalte durch Abmessen bestimmen. Dieselben sind in F. 15 schematisch zusammengestellt.

Litteratur.

a) Einfluslinien und allgemeine Theorie des Fachwerks betreffend.

- Maxwell. Reciprocal figures, frames and diagrams of forces. Edinburg 1869—70.
- Jenkin. On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains in frame-work. Abhandlungen der königl. Gesellschaft in Edinburg 1870.
- Keck. Über die Ermittlung der Spannungen in Fachwerkträgern mit Hilfe der graphischen Statik. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1870, S. 153.
- Keck. Ungünstigste Belastungsart für Fachwerksträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874, S. 352.
- Mohr. Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874, S. 223.
- Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Dasselbst 1874, S. 509 u. 1875, S. 17.
- Beiträge zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. d. bayer. Arch.- u. Ing.-Ver. 1875, S. 7.
- Schäffer. Zur Berechnung der Fachwerksträger auf zwei Stützpunkten. Deutsche Bauz. 1875, S. 367, 375, 385, 397.
- Knoll, K. Eine allgemeine Theorie der Formveränderungen des einfachen Fachwerks. Allg. Bauz. 1875, S. 54.
- Fränkel. Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes u. s. w. Civilingenieur 1875.
- Fränkel. Über die ungünstigste Einstellung eines Systems von Einzellasten auf Fachwerkträgern. Civilingenieur 1876, S. 441.
- Winkler. Die Durchbiegung der Gitterträger. Techn. Blätter 1876, S. 169.
- Beitrag zur Bestimmung der Maximalspannungen der Füllungsglieder einfacher Balkenfachwerke. Eisenbahn, Bd. IX, S. 17.
- Winkler. Über die Durchbiegung der Brückenträger. Wochenschr. d. österr. Ing.-Ver. 1876, S. 304.
- Über mehrfaches Fachwerk und eine neue Trägerform. Deutsche Bauz. 1876, S. 61, 101, 121, 176, 211, 245.
- Clarke. Graphische Bestimmung der Spannungen im Fachwerksträger. Engng. 1877.
- Cain, W. Maximum stresses in framed bridges. New-York (London) 1878.
- Föppl. Die neuen Trägersysteme für eiserne Brücken. Leipzig 1878.
- Graphisch-analytische Bestimmung der genauen Belastungsgrenzen beliebig geformter Fachwerksbalken. Eisenbahn 1878, S. 17—22.
- Herzmansky. Durchbiegung eiserner Fachwerke. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878, S. 185—189.
- Engesser. Über die Durchbiegung der Fachwerke und die hierbei auftretenden zusätzlichen Spannungen. Zeitschr. f. Bauk. 1879, S. 590—602.
- Föppl, A. Ausgewählte Kapitel der mathem. Theorie der Baukonstruktionen. I. Abteil. Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.
- Weyrauch, J. Kennzeichen statisch bestimmter Systeme. Zeitschr. f. Bauk. 1880, S. 248—251.
- Ritter. Beitrag zur Theorie der Fachwerke. Schweiz. Bauz. 1880, Bd. XII.
- Steiner, F. Studien über Fachwerke. Techn. Blätter 1880, S. 134.
- Weyrauch, J. Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Träger. Zeitschr. f. Bauk. 1881, S. 55.
- Castigliano. Theorie de l'équilibre des systèmes élastiques. Turin 1879. Deutsch von E. Hauff. Wien 1886.
- Tetmajer. Konstruktion der Einsenkung einfacher Balkenfachwerke. Schweiz. Bauz. 1881, Bd. XIV.
- Melan. Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerksträger mit Zugrundelegung des Prinzips der Influenzkurven. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1880.
- Bukowski. Über graphische Bestimmung der Deformation belasteter Fachwerkskonstruktionen. Mitteilungen des Arch.- u. Ing.-Ver. in Böhmen 1880, S. 5.
- Fränkel. Das Prinzip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882.
- Steiner. Zur Steifigkeit der Träger. Centrabl. d. Bauverw. 1883.
- Melan. Zur Steifigkeit der Träger. Dasselbst 1884.
- Skibinski. Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke. Zeitschr. d. österr. Arch.- u. Ing.-Ver. 1883.
- Müller-Breslau. Über die Anwendung des Prinzips der Arbeit in der Festigkeitslehre. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1883, S. 87, 274.
- Mohr. Über das sogenannte Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1883, S. 171, 299.
- v. Thullie. Graphische Bestimmung der im kontinuierlichen Gitterträger mit zwei Feldern wirkenden Kräfte. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1884, S. 45, 57.

- Weyrauch. Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1884, S. 290.
- Müller-Breslau. Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper. Berechnung der Formänderungen. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1884, S. 373.
- Müller-Breslau. Über kontinuierliche Bögen und Balken. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1884, S. 463.
- Müller-Breslau. Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 211.
- Müller-Breslau. Einflußlinien für kontinuierliche Träger mit drei Stützpunkten. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 277.
- Krohn. Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerksträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 269.
- Manderla. Die Formänderung des Fachwerks bei wechselnder Belastung. Allg. Bauz. 1884, S. 81.
- Zimmermann. Zur graphischen Bestimmung der Fachwerksspannungen. Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 281.
- Melan. Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1884, S. 100.
- Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Civilingenieur, Bd. XXXI (1885).
- Fränkel. Das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. Bd. XXVIII, S. 513.
- Landsberg. Ebene Fachwerkssysteme mit festen Knotenpunkten und das Prinzip der Deformationsarbeit. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 165.
- Durchbiegung eines Balkens mit sprungweise sich ändernden Querschnitten. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 140.
- Höch. Kräftepläne für bewegte Lastenzüge. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 117.
- Forchheimer. Zur Beurteilung einer Konstruktion nach ihrer Einsenkung. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 362, 446.
- Zimmermann. Zur Beurteilung einer Konstruktion nach ihrer Einsenkung. Dasselbst 1886, S. 373.
- Forchheimer. Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1886, S. 109.
- Schnirch. Bestimmung der Verschiebungs-Maxima und Minima im Fachwerk und starrem Träger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1886, S. 161.
- Steiner. Theorie statisch unbestimmter Systeme unter Berücksichtigung der Anfangsspannung. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1886, S. 179 und 1887, S. 158.
- Lang. Über Berechnung und Konstruktion der Bauten in Eisen. Riga'sche Industriezeitung 1886, S. 265; 1887, S. 145, 157, 193.
- Henneberg. Statik der starren Systeme. Darmstadt 1886.
- Mohr. Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne. Civilingenieur, Bd. XXXIII (1887).
- Grübler. Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks. Riga'sche Industriezeitung 1887.
- Land. Über die statische und geometrische Bestimmtheit der Träger, insbesondere der Fachwerksträger. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 363.
- Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie der ebenen Träger. Schweiz. Bauz. 1887, Bd. IX, S. 121; Bd. X, S. 129.
- Föppl. Zur Fachwerktheorie. Schweiz. Bauz. 1887, Bd. IX, S. 42.
- Müller-Breslau. Theorie statisch unbestimmter Systeme unter Berücksichtigung von Anfangsspannungen. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887, S. 157.
- Land. Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen als Grundlage einer allgemeinen Darstellung der Einflußlinien aller Trägerarten. Wochenbl. f. Baukunde 1887, S. 14.
- Mohr. Die Theorie der Streckensysteme. Civilingenieur, Bd. XXXIV.
- Müller-Breslau. Zur Theorie der ebenen Träger. Schweiz. Bauz. 1888, Bd. XI, S. 45.
- Land. Beitrag zur Starrheit der Fachwerke. Deutsche Bauz. 1888, S. 156, 350.
- Weyrauch. Zur Starrheit der Fachwerke. Deutsche Bauz. 1888, S. 198, 380.
- Land. Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1888, S. 11.
- Müller-Breslau. Berechnung statisch bestimmter ebener Träger mit Hilfe der geometrischen Bewegungslehre. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 191.
- Grübler. Beiträge zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks. Riga'sche Industriezeitung 1888, S. 277.
- Levy, M. La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris 1887.
- Koehlin, M. Applications de la statique graphique. Paris 1889.
- Müller-Breslau. Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger. Centralbl. d. Bauverw. 1889, S. 475, 499.
- Tolkmitt. Allgemeines über statische Untersuchungen und über die Kennzeichen einfacher Fachwerke. Zeitschr. f. Bauw. 1889, S. 433.

- Engesser. Über statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungsgesetze u. s. w. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1889, S. 733.
- Steiner. Die Grundgesetze der Formänderung elastischer Körper und ihre Anwendung in der Baumechanik. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1889, S. 177.
- Land. Über die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflußlinien für Träger. Zeitschr. f. Bauw. 1890, S. 105.
- Eddy. Auflagerdrucklinien und deren Eigenschaften. Zeitschr. f. Bauw. 1890, S. 397.
- Marloh. Die Bestimmung der Biegungslinien von Fachwerkträgern. Zeitschr. f. Bauw. 1890, S. 513.
- Koetter. Beitrag zur Lehre vom Fachwerk. Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 71.
- Land. Beziehungen zwischen Kräfte- und Seilpolygon. Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 94.
- Brennecke. Träger mit freischwebenden Stützpunkten. Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 121.
- Ritter, W. Anwendungen der graphischen Statik. Teil II. Das Fachwerk. Zürich 1890.
- Herzog. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Schweiz. Bauz. 1890, Bd. XV, S. 46; 1891, Bd. XVII, S. 49.
- Müller-Breslau. Über einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyron'schen Art führen. Zeitschr. f. Bauw. 1891, S. 103.
- Hübner. Durchgehende Träger mit Querkraft-Nullfeldern. Zeitschr. f. Bauw. 1891, S. 549.
- Land. Einfache Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente von Flächen nebst Ermittlung der Spannungsverteilung und des Kernes bei unsymmetrischen Querschnitten. Zeitschr. f. Bauw. 1891, S. 549.
- Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1891, S. 437; 1892, S. 201, 225, 244, 256.
- Müller-Breslau. Die graphische Statik der Bandkonstruktionen. Bd. I, 3. Aufl. 1901. Bd. II, 2. Aufl. 1892.
- Keck, W. Vorträge über Elastizitäts-Lehre. Hannover 1892.
- Müller-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. (2. Aufl.) Leipzig 1893.
- Johnson, Bryan, Turneaure. Theorie and practice of modern framed structures. New-York 1893.
- Engesser. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken. Berlin 1892 u. 1893.
- Marloh. Die Durchbiegung der Fachwerkträger. Zeitschr. f. Bauw. 1893, S. 473.
- Henneberg. Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie des einfachen Fachwerks. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. III. 1893.
- Claussen. Statik und Festigkeitslehre. Berlin 1893.
- Galliot. Essai de comparaison des effets des forces normales et obliques. Ann. des ponts et chaussées 1893, 2. Sem. S. 111.
- Hausser et Cung. Détermination des moments fléchissants les plus grands dans les sections d'une poutre posée librement sur deux appuis. Ann. des ponts et chaussées 1893, 2. Sem. S. 977.
- Flamant. De l'influence sur la flexion des poutres de la position superficielle de la charge. Ann. des ponts et chaussées 1893, 2. Sem. S. 228.
- Jasinski. La flexion des pièces comprimées. Ann. des ponts et chaussées 1894, 2. Sem. S. 233.
- Keck, W. Vorträge über graphische Statik. Hannover 1894.
- Kirsch. Graphische Berechnung der Fachwerkträger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1894, S. 779.
- Mayer. Zur Berechnung der Durchbiegung frei aufliegender Brückenträger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1894, S. 135.
- Labes. Die Berechnung der Durchbiegung gegliederter eiserner Balkenbrücken. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 119.
- Marloh. Die Durchbiegung der Fachwerkträger. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 625.
- Collignon. Méthode des deux surcharges continues. Ann. des ponts et chaussées 1895, 2. Sem. S. 5.
- Zschetzsche. Beitrag zur Berechnung von Tragwerken mit veränderlicher Höhe. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895, Nr. 48 u. 49.
- Melan. Graphische Ermittlung der größten Stabkräfte in einem Fachwerksbalkenträger. Österr. Monatsschr. f. d. öffentl. Baudienst, V. Jahrg. S. 157.
- Zschetzsche. Das Fachwerk mit künstlich gespannten Gliedern. Civilingenieur 1895, Bd. XLI, Heft 6.
- Mayer. Zur Theorie der Fachwerksbalkenträger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895, S. 177.
- Thullie. Spannungen in Gitterträgern mit mehrteiligem Gitterwerk. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895, S. 509.
- Engesser. Über Gitterträger. Schweiz. Bauz. 1896, S. 19.
- Maurel. Déformation des pièces prismatiques droites. Ann. des ponts et chaussées 1896, 1. Sem. S. 547.
- Puller. Bestimmung größter Momente für eiserne Brücken mit geringen Stützweiten. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 381.
- Höch. Auslegerträger mit Mittelstofs. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 113, 486.
- Schulz. Auslegerträger mit Mittelstofs. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 210.

- Müller-Breslau. Über die Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbrücken. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 501, 513.
- Ramisch. Bestimmung der größten Spannkkräfte in den Stäben eines ebenen Fachwerkbalkens. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 366, 488.
- Mehrtens. Summen-Einflusslinien und A -Polygone. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 178.
- Land. Die Einflusfläche der Spannkraft eines Zwischenstabes für ein einfaches Fachwerk. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 466.
- Hübner. Bemerkungen über räumliches Fachwerk. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1897, I. S. 477.
- Land. Die Säulenmomente. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1897, II. S. 1246.
- Bach, C. Elastizität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin 1898.
- Rascher. Statische Untersuchung räumlicher und ebener Fachwerke. Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurw., Heft-Ausgabe 1898, S. 399.
- Seyrig. Statique graphique des systèmes triangulés. Paris.
- Labes. Einfluß fehlender Stäbe in Fachwerksbalken. Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 93.
- Mehrtens. Statisch bestimmte mehrteilige Wandgliederung der Gitterträger. Zeitschr. f. Arch.- u. Ing.-Wesen, Wochen-Ausgabe 1898, S. 329.
- Kayser. Untersuchungen am Fachwerke ohne zweifache Knotenpunkte. Riga'sche Industrie-Zeitung 1898, No. 6 u. 7.
- Mohr. Beitrag zur Theorie der Träger. Zeitschr. f. Arch.- u. Ing.-Wesen, Heft-Ausgabe 1899, S. 585.
- Labes. Bestimmung größter Momente und Querkräfte für Eisenbahn-Balkenbrücken. Centralbl. d. Bauverw. 1899, S. 173.
- Dietz. Statisch bestimmte gegliederte Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1899, I. S. 230.
- Ritter, A. Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik (3. Aufl.). Leipzig 1899.
- Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig. Erster Band: Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. 1900. — Zweiter Band: Graphische Statik. 1900. — Dritter Band: Festigkeitslehre. 2. Aufl. 1900.
- Ramisch. Spannkkräfte in den Gegendagonalen eines einfachen Fachwerksträgers. Zeitschr. f. Arch.- u. Ing.-Wesen, Heft-Ausgabe 1900, S. 65.
- Ramisch. Kinematische Begründung der Theorie der statisch unbestimmten Fachwerksträger. Zeitschr. f. Arch.- u. Ing.-Wesen, Heft-Ausgabe 1900, S. 427.
- Müller-Breslau. Zur Berechnung von Gitterbalkenträgern mit gekrümmten Gurtungen. Centralbl. d. Bauverw. 1901, S. 543.

b) Allgemeine Belastungsgesetze. Konstruktion der äußeren Kräfte.

- Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860 u. 1868.
- Vojáček. Graphische Bestimmung der Biegemomente an kurzen Trägern. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1868, S. 503.
- Schäffer. Hilfssätze zur Berechnung der Fachwerksträger. Zeitschr. f. Bauw. 1870.
- Leygne. Étude sur les surcharges à considérer dans les calculs des tabliers métalliques d'après les conditions générales d'exploitation des chemins de fer. Paris 1871.
- Löwe. Über die variable Belastung der Eisenbahnbrücken. Zeitschr. d. bayer. Arch.- u. Ing.-Ver. 1874, S. 33, 43 (s. auch Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1875, S. 140).
- Weyrauch. Die Maximalmomente einfacher Träger bei festen und mobilen Lastsystemen. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1875, S. 467.
- Schuster. Bestimmung der Maximalmomente von Eisenbahnbrücken für konzentrierte Belastung. Zeitschr. f. Bauw. 1875, S. 99.
- Heinzerling. Belastungsäquivalente zur Bestimmung der durch fortschreitende Eisenbahnzüge erzeugten größten Vertikalscherkräfte in Brückenträgern mit 10 bis 150 m Stützweite. Zeitschr. f. Bauw. 1875, S. 509.
- Heinzerling. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbaukonstruktionen. Berlin 1876.
- Schäffer. Vergleich der Brückenbelastungen durch Lokomotivzüge mit gleichförmigen Belastungen. Deutsche Bauz. 1876, S. 348.
- Schäffer. Belastungsgesetze für den Balken auf zwei Stützpunkten. Zeitschr. f. Bauw. 1877, S. 523.
- Ritter. Die zufällige Belastung bei Eisenbahnbrücken. Riga'sche Ind.-Ztg. 1877, S. 61.
- Wittmann, W. Die graphische Bestimmung der Maximalmomente einfacher Träger. München (Separatdruck) 1877.

- Kleitiz. Sur la substitution, dans les calculs de stabilité de travées métalliques supportant de voies de terre, de surcharges uniformément réparties à celles qui résultent du passage des plus lourdes voitures. Ann. des ponts et chaussées XIV, 1877, S. 549—560 (s. auch Ann. des ponts et chaussées 1877, I. Sem., S. 21—45).
- Stahl. Die Maximalmomentenkurve eines mobilen Lastsystems. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1877, S. 7—12.
- Zimmermann. Das Momentenschema, ein Hilfsmittel zur Abkürzung der statischen Berechnung von Brückenträgern. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1877, S. 61—76.
- Bresse. Die Belastungsgesetze für den einfachen Balken, speziell für vollwandige Träger. Ann. des ponts et chaussées 1877, II. S. 320—328.
- Brik, J. E. Beitrag zur Berechnung der Balkenträger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878, S. 31 bis 35, 62 bis 72.
- Solin. Analytische Bestimmung des absoluten Maximalmomentes einfacher vollwandiger Brückenträger. Wochenschrift d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878, S. 217—218.
- Gaetani. Dei sopracarichi uniformemente distribuiti da considerarsi nel calcolo degli iforzi di taglio nelle travate metalliche per ferrovie. Giorn. gen. civ. 1879, S. 302.
- Lachner. Beitrag zur graphischen Berechnung von Brückenträgern. Deutsche Bauz. 1879, S. 64—66.
- Greve. Graphische Berechnung der Brückenträger. Deutsche Bauz. 1879, S. 288.
- Alexander, T. Biegemomente einfacher Träger mit voller Wandung. Engng. 1879, S. 33.
- Steiner, F. Die Parabelschablone als Hilfsmittel bei graphostatischen Konstruktionen. Techn. Blätter 1879, S. 233—234.
- Baldermann, O. Die graphische Integration und ihre Anwendung auf die Statik der äußeren Kräfte am einfachen Balken. Allg. Bauz. 1881.
- Stelzel. Über gefährlichste Belastung einfacher Träger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1878, S. 64.
- Winkler. Über die Belastungsgleichwerte der Brücken. Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 460. Auch: Festschrift der Techn. Hochschule zu Berlin.
- Fleck. Die Beanspruchung von Fachwerksträgern durch wagerechte Kräfte in der Trägerebene. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 502.
- Schwarz. Die Beanspruchung von Fachwerksträgern durch wagerechte Kräfte in der Trägerebene. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 80.
- Seipp. Berechnung auf Doppelbiegung beanspruchter Träger. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 393, 432.
- Landsberg. Stellvertretende gleichmäßig verteilte Belastung für die Ermittlung der Querkräfte bei Brücken. Centralbl. d. Bauverw. 1888, S. 190.
- Zaleski. Berechnung der Durchbiegungen von Trägern mit wechselnden Querschnitten. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1886, S. 165.
- Steiner. Die Grundgesetze der Formänderung elastischer Körper und ihre Anwendung in der Baumechanik. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1889, S. 177.
- Hoffmann. Belastungsgleichwerte für gerade Straßenbrücken. Zeitschr. f. Bauw. 1893, S. 331.

c) Durchlaufende (kontinuierliche) Träger.

- Clapeyron. Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement exposés. Comptes rendus 1857.
- Kontinuierliche Brückenträger. Civilingenieur 1860.
- Winkler. Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger. Civilingenieur 1862.
- Culmann. Der kontinuierliche Balken. 1866.
- Schmidt, H. Über die Bestimmung der äußeren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte. Allg. Bauz. 1866.
- Albaret. Etude des ponts métalliques à poutres droites reposant sur plus de deux appuis. Ann. des ponts et chaussées 1866.
- Renaudot. Mémoire sur le calcul et la contrôle de la resistance des poutres droites à plusieurs travées. Ann. des ponts et chaussées 1866.
- Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1868, S. 19; daselbst 1870, S. 41.
- Schmidt, H. Betrachtungen über Brückenträger, welche auf zwei und mehr Stützpunkten frei aufliegen, sowie über den Einfluß der ungleichen Höhenlage der Stützpunkte. Allg. Bauz. 1868.
- Fränkel. Über die ungünstigste Stellung eines Systemes von Einzellasten auf Trägern über eine und über zwei Öffnungen, speziell auf Trägern von Drehscheiben. Civilingenieur 1868.

- Ritter, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. Zürich 1871.
- Pierre. Note sur l'application sur laquelle on peut compter dans la méthode actuelle de calcul des poutres à plusieurs travées. Ann. des ponts et chaussées 1871.
- Lippich. Theorie des kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes. Allg. Bauz. 1871.
- Weyrauch. Allgemeine Theorie der kontinuierlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
- Solin. Geometrische Theorie der kontinuierlichen Träger. Mitteil. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Böhmen 1873 u. 1874.
- Schlöper, H. Über kontinuierliche Träger von konstantem Querschnitt mit ungleichförmiger Belastung. Deutsche Bauz. 1874.
- Greene, Ch. E. Graphical method for the analysis of bridge trusses extended to continuous girders and draw span. New-York 1875.
- Gaudard. Influence des dénivellations d'appuis dans les poutres à plusieurs travées solidaires. Ann. du génie civil 1875, S. 471.
- Vorrichtung zum Abwiegen der Auflagerdrücke kontinuierlicher Träger. Tijdschrift van het kon. inst. v. ing. 1875—1876, S. 327.
- Schäffer. Belastungsgesetze für den geraden stabförmigen Körper von konstantem Querschnitt. Zeitschr. f. Bauw. 1876.
- Kleitz. Theorie der kontinuierlichen Träger mit variablem Querschnitt der Gurten. Ann. des ponts et chaussées 1876, I. S. 115.
- Bender, Ch. Application of the theorie of continuous girders to economy in bridge building. Transact. of the americ. soc. of civ. eng. Vol. V, 1876, S. 147.
- Böhlke. Beitrag zur Theorie der kontinuierlichen Träger. Deutsche Bauz. 1877, S. 96—97, 114—115, 122—124.
- Steiner, F. Einfluß der Temperatur auf kontinuierliche Träger. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1877, No. 50.
- Fidler, C. Neue Ermittlung der Momente kontinuierlicher Träger. Engng. 1878, S. 6—7, 71, 128—129.
- Krohn, R. Einfluß der Querträger auf kontinuierliche Balken. Allg. Bauz. 1879, S. 24—29, 39—43. (Vergl. hierzu: Steiner, F. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1879, S. 584.)
- Weyrauch, J. Temperatureinflüsse bei kontinuierlichen Trägern. Zeitschr. f. Bauk. 1879, S. 437.
- Schleck. Berechnung eines kontinuierlichen Trägers von fünf Öffnungen nach Lippich's Methode. Allg. Bauz. 1880, S. 68—75.
- Krohn, R. Berechnung kontinuierlicher Fachwerksträger auf Grund der Deformation der einzelnen Fachwerkstäbe. Civiling. 1880, S. 583—594.
- Rytir. Der kontinuierliche Balken. Allg. Bauz. 1882, S. 37.
- Stelzel. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den kontinuierlichen Träger. Graz 1882.
- Landsberg. Beitrag zur graphischen Berechnung kontinuierlicher Träger. Centralbl. d. Bauverw. 1881, S. 164.
- Koenen. Abgekürztes Verfahren für die analytische Behandlung kontinuierlicher Balken. Centralbl. d. Bauverw. 1882, S. 190.
- Müller-Peterwitz. Einflußlinien für kontinuierliche Träger. Deutsche Bauz. 1888, S. 167.
- v. Leber. Die neue Brückenverordnung des österr. Handelsministeriums. Wien 1888.
- Thullie. Einflußlinien für die inneren Kräfte des kontinuierlichen Trägers mit 3 Stützpunkten. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1891, S. 416, 476.
- Müller-Breslau. Über die Einflußlinien kontinuierlicher Balken mit drei Stützpunkten. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1891, S. 476.
- Freitag. Vereinfachung in der statischen Bestimmung elastischer Balkenträger. Leipzig 1892.
- Klingatsch. Die graphische Behandlung kontinuierlicher Fachwerksbalken. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1892, S. 433.
- Goebel. Berechnung kontinuierlicher Träger. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1893, S. 1137.
- Zschetzsche. Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung einfacher Vollwandträger. Centralbl. d. Bauverw. 1893, S. 386.
- Fontriolant. Ponts métalliques à travées continues. Paris 1893.
- Engesser. Die zusätzlichen Beanspruchungen durchgehender (kontinuierlicher) Brückenkonstruktionen. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 305.
- Zschetzsche. Beitrag zur Berechnung durchgehender Balkenträger. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 597.
- Land. Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung statisch bestimmter und die Berechnung statisch unbestimmter gerader vollwandiger Träger. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 611.
- Pustau. Auflagerdrücke, Laststellungen und Durchbiegung vollwandiger durchlaufender Träger. Organ f. d. Fortschritte d. Eisenbahnwesens 1894. Neue Folge XXXI, S. 167.

- Daujon. Mémoire sur le calcul des poutres droites à travées solidaires. Ann. des ponts et chaussées 1894, 1. Sem., S. 759.
- Franke. Die elastische Linie des Balkens. Zeitschr. f. Bauw. 1895, S. 439.
- Franke. Der steife Seilträger. Zeitschr. f. Bauw. 1896, S. 567.
- Cart et Portes. Calcul des ponts métalliques à poutres droites à une ou plusieurs travées par la méthode des lignes d'influence. Paris 1895.
- Geusen. Über einige einfache Beziehungen zwischen den Momenten statisch bestimmter und statisch unbestimmter gerader Träger von konstantem Trägheitsmoment. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895, S. 401.
- Engesser. Über die Elastizitäts- und Festigkeits-Verhältnisse von Stäben mit veränderlichem Elastizitätsmodul. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, No. 52.
- Dupuy et Cuënot. Barèmes pour le calcul des ponts métalliques. Ann. des ponts et chaussées 1895, 2. Sem. S. 117; 1897, III, S. 91.
- Dietz. Einfache Formeln für den durchlaufenden Träger auf einheitlicher Grundlage (Franke'sche Gleichung). Anhang zu dem Heft: Bewegliche Brücken: Fortschritte der Ingenieur-Wissenschaften II. 5. Leipzig, Engelmann 1897.
- Schulz. Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Zeitschr. f. Arch.- u. Ing.-Wesen, Heft-Ausgabe 1898, S. 57, 157, 235, 485.
- Francke. Bemerkungen zu vorstehendem Aufsätze. Ebenda S. 173, 481.
- Jongebloed. Stützendrücke für durchlaufende Balken. Centralbl. d. Bauverw. 1899, S. 267.
- Ramisch. Entwicklung der Grundgleichungen eines Trägers überall gleichen Querschnittes auf beliebig vielen Stützen nach einem neuen Verfahren. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1900, S. 649.

d) Besondere Arten von Fachwerkträgern.

- Köpecke. Über Träger von gleichem Widerstande, insbesondere die Anwendung derselben zu Brücken durch Laves und Pauli. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1858.
- Schäffer. Über Träger mit gekrümmten Rahmen. Zeitschr. f. Bauw. 1865.
- Schwedler. Der eiserne Überbau der Brahe-Brücke bei Czernsk (Parabelträger). Zeitschr. f. Bauw. 1861.
- Schwedler. Die kurze und lange Oder-Brücke in Breslau (Schwedler-Träger). Zeitschr. f. Bauw. 1868.
- Schwedler. Der eiserne Überbau für die großen Öffnungen der Brücke über die Elbe in der Berlin-Lehrter Eisenbahn (Schwedler-Träger). Zeitschr. f. Bauw. 1868.
- Beschreibung des am 6. Dezember 1866 dem Ingenieur H. Gerber verliehenen Patentes auf Balkenträger mit freiliegenden Stützpunkten. Zeitschr. d. bayr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1870.
- Schäffer. Graphische Ermittlung der Ordinaten des Schwedler'schen Trägers. Zeitschr. f. Bauw. 1873, S. 237.
- Heuser. Graphische Ermittlung der Ordinaten des Schwedler'schen Trägers. Zeitschr. f. Bauw. 1873, S. 523.
- Schäffer. Graphische Ermittlung der Ordinaten u. s. w. für den Schwedler'schen Träger. Zeitschr. f. Bauw. 1874, S. 391.
- Launhardt. Neue Modifikation des Schwedler-Trägers. Deutsche Bauz. 1876, S. 61, 101, 121, 176, 211, 245.
- Pfeuffer. Die Ellipsen-Träger. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1876, S. 224.
- Eisenbahn-Brücke über die Weichsel bei Thorn (Ellipsen-Träger). Zeitschr. f. Bauw. 1876.
- Meyer und Hinrichs. Der eiserne Überbau der Warthe-Brücke bei Posen (Gerber'scher Gelenkträger). Zeitschr. f. Bauw. 1877.
- Kayser. Über die Grundform der sogen. Schwedler-Träger. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1877, S. 529.
- Quietmeyer. Berechnung der Form und der Spannungen eines Brückenträgers von 72 m Stützweite u. s. w. (Prinzip Schwedler). 1877, S. 233.
- Melan. Fachwerkträger mit konstanter Gurtspannung. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1876, S. 198. (Vergl. indessen hierzu: Schäffer. Zeitschr. f. Bauw. 1865.)
- Stelzel. Zur Formbestimmung des Schwedler'schen Trägers. Techn. Blätter 1879, S. 1.
- Ritter. Über das Schwedler'sche Fachwerk. Riga'sche Ind.-Ztg. 1879, S. 41.
- Häsel, E. Beitrag zur Theorie der eisernen Balkenträger. Civiling. 1879, S. 311—322.
- Die Lahn-Brücke der Staatsbahn bei Oberlahnstein (Parallel-Träger). Zeitschr. f. Bauw. 1882.
- Landsberg. Über Mittengelenkbalken. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1889, S. 629.
- Landsberg. Über eine besondere Art von Mittengelenkbalken. Deutsche Bauz. 1891, S. 277.
- Müller-Breslau. Über Langer'sche Brückenträger. Centralbl. d. Bauverw. 1891, S. 349.
- Mayer. Über Mittengelenkbalken. Deutsche Bauz. 1892, S. 343.
- Haberkalt. Die kubische Parabel als Trägerform. Centralbl. d. Bauverw. 1899, S. 19, 180, 230.

Nachtrag zu Kap. VII.

Zu § 9. Die Verkehrslasten der Eisenbahnbrücken.

Neueste Belastungsvorschriften.

Nach Drucklegung des Kap. VII sind neue Belastungsvorschriften für die eisernen Brücken seitens des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen und der preufsischen Staatseisenbahnverwaltung erlassen, welche nachstehend vorgeführt sind.

1. Vorschriften des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen.

Im September 1900 ist in die Technischen Vereinbarungen als bindende Bestimmung aufgenommen worden, daß die Tragfähigkeit neu zu bauender oder umzubauender Brücken mindestens dem in Fig. 1 vorgeführten Belastungszug entsprechen muß.

Fig. 1. Lastenzug des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen.

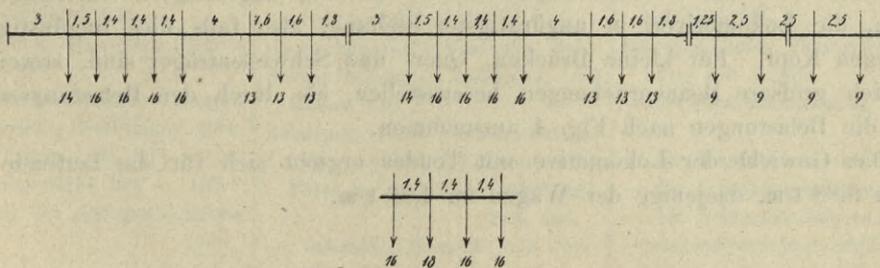


Fig. 2.

Es ist also ein Zug mit zwei Lokomotiven mit einer unbeschränkten Zahl einseitig angehängter Güterwagen einzuführen; die Lokomotiven sind in ungünstigster Stellung anzunehmen, d. h. falls sich hierdurch größere Beanspruchungen ergeben, so sind sie Kopf gegen Kopf zu stellen. Für kleine Träger ist das Belastungsschema der Fig. 2 zu Grunde zu legen, wenn dasselbe ungünstiger ist, als dasjenige der Fig. 1. Dabei ist stets das Gewicht der an ungünstigster Stelle stehenden Achse zu 18 t anzunehmen.

Das Gewicht für das laufende Meter Gleis beträgt für Lokomotive und Tender 6,61 t/m, für die Wagen 3,6 t/m.

Die Achslasten sind so groß und die Achsentfernungen so gering bemessen, daß die Brücken für die in absehbarer Zeit eintretenden Gewichtszunahmen der Züge genügen.

Infolge dieser neuen Bestimmung ist auch von der preufsischen Staatseisenbahnverwaltung ein neuer Lastenzug vorgeschrieben worden.

2. Belastungsvorschriften für die eisernen Brücken der preussischen Staatseisenbahnverwaltung vom April 1901.

Der neue Lastenzug der preussischen Staatseisenbahn (Fig. 3) ist etwas ungünstiger als derjenige des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen; er ist verschieden groß von dem letzteren gewählt, um die Rechenarbeit möglichst zu verringern. Zu diesem Zwecke sind nur zwei verschiedene Achsbelastungen (17 t für die Lokomotivachsen und 13 t für die Achsen der Tender und Wagen) angenommen; hierdurch wird besonders die Verwendung von Einfluslinien bei der Berechnung erleichtert; des weiteren sind alle Achsabstände durch 1,5 teilbar (sie betragen bezw. 1,5 m, 3 m, 4,5 m). Beide Veränderungen gegen den Lastenzug von 1895 und denjenigen des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen sind sehr zweckmäßige.

Fig. 3. Lastenzug der preussischen Staatseisenbahn vom April 1901.

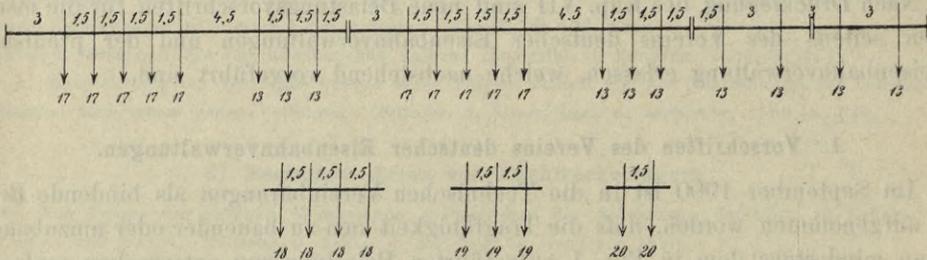


Fig. 4.

Auch hier sind zwei Lokomotiven mit einseitig angehängten Güterwagen einzuführen, die Lokomotiven in ungünstigster Stellung, also falls dies ungünstiger ist, Kopf gegen Kopf. Für kleine Brücken, Quer- und Schwellenträger sind, soweit hierdurch sich größere Beanspruchungen herausstellen, als durch den Belastungszug der Fig. 3, die Belastungen nach Fig. 4 anzunehmen.

Das Gewicht der Lokomotive mit Tender ergibt sich für das laufende Meter Gleis zu 6,88 t/m, dasjenige der Wagen zu 4,33 t/m.

Berichtigungen.

S. 63, Z. 4 v. u. setze: „Schübler“ statt „Schiebler“.

S. 199, Z. 6 v. o. setze: „108 Textfiguren“ statt „110 Textfiguren“.

S. 224, Z. 14 v. u. setze: „Arbeit“ statt „Annahme“.

Es wird besonders bemerkt, daß die Zahl der Textfiguren zu Kap. VIII nicht 110 beträgt, wie am Kopf des Kapitels irrtümlich angegeben ist, sondern 108.

Sachregister

der zweiten Abteilung.

Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

- A**-Linie. 310.
—, Ersatzlinie. 311.
Äquivalente, Belastungs-. 273, 304.
Alt-Moabit, Berlin, Unterführung der StraÙe —. 161.
Arbeit, Satz, vom Minimum der Formänderungsarbeit. 209, 210.
—, innere, als Funktion der Spannungen. 216.
Arbeitsgleichung des Fachwerks. 225.
— der Formänderung. 214.
Auflager, Reibungskräfte an den —. 57.
Auflagerbedingung 201.
Auflagerdrücke des ebenen Balkenträgers. 287.
— des durchlaufenden Trägers, zeichnerische Ermittlung. 284.
Ausleger-Träger. 334, 339.
Aussig, Elbebrücke bei —. 187.
Aussteifung der eisernen Brücken. 159.
- B**ahnkrümmungen, Fliehkraft in —. 38.
Balkenfachwerksträger, einfache, Allgemeines. 308.
—, Ausleger-Brücken. 334, 339.
—, Diagonal- und Pfostenspannungen nach Culmann. 230, 329.
—, einfache, Füllungsstabspannungen bei Einzellasten. 310.
—, statisch-unbestimmte, Gitterwerksträger. 329.
— mit gekrümmten und vieleckigen Gurten. 318.
—, einfache, Gurtspannungen bei Einzellastensystem. 309.
— mit konstanter oberer Gurtung. 326.
- Balkenfachwerksträger mit der kleinsten Materialmenge, von Winkler. 328.
Balkenträger, ebener, Momente bei direkter Belastung. 288, 290.
—, Momente durch Eigengewicht. 295.
—, Momente bei indirekter Belastung. 300.
—, Momenten-Schema von Zimmermann. 296.
—, Querkkräfte bei direkter Belastung. 287, 290.
—, — bei indirekter Belastung. 299.
—, Stützendrücke. 287.
Bauschinger's Versuche. 104.
Beanspruchung, zulässige, des Eisens. 110.
Belastung beim ebenen Balkenträger, direkte, Stützendrücke, Momente und Querkkräfte. 287, 288, 290.
—, indirekte, Momente und Querkkräfte. 299, 300.
Belastungsäquivalente. 273, 304.
Belastungsflächen, Biegungslinien bestimmter. 259.
Belastungsgleichwerte. 273, 304.
Belastungsscheiden, Konstruktion auf kinematischem Wege. 275.
—, Konstruktion auf statischem Wege. 277.
Belastungsvorschriften, Hauptbahnen, bayerische. 23.
—, — französische von 1891. 22
—, — österreichische von 1887. 22.
—, — preussische von 1895. 19.
—, — preussische von 1901. 368
—, — Reichsbahnen von 1897. 21.
—, — sächsische von 1895. 23.
—, — schweizerische von 1892. 23.
- Belastungsvorschriften des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen von 1900. 367.
—, Hauptbahnen, aufsergewöhnliche Verkehrslasten. 24.
—, Vorschläge von Engesser. 24.
—, Lokaleisenbahnen. 27.
—, Nebeneisenbahnen. 26.
—, stellvertretende gleichförmig verteilte Lasten bei Eisenbahnbrücken. 28.
—, StraÙenbrücken. 29.
—, stellvertretende gleichförmig verteilte Lasten bei StraÙenbrücken. 33.
Bewegte Lasten, Dynamische Wirkung der —. 39.
— bei Eisenbahnbrücken. 18, 367, 368.
— der Hauptbahnen. 19, 367, 368.
— der Lokaleisenbahnen. 27.
— der Nebeneisenbahnen. 26.
—, stellvertretende gleichförmig verteilte bei Eisenbahnbrücken. 28.
— der StraÙenbrücken. 29.
—, stellvertretende gleichförmig verteilte bei StraÙenbrücken. 33.
Biegung, innere Kräfte eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten gekrümmten Vollstabes. 217.
Biegungslinien bestimmter Belastungsflächen. 259.
— für Fachwerkträger. 253.
— für Vollwandträger. 256.
Biegemomente, größte. 20.
Biegunspolygone für Fachwerkträger. 255.
Bleche. 123.
Bolzen, Gelenk-. 136.
—, Schrauben-. 136.

- Breite, Einfluß der — bei Brücken. 164.
- Breiteisen. 124.
- Bremskräfte. 59.
- Bruck, Eisenbahnbrücke in der Sektion —. 193.
- Brücke über den Humboldt-Hafen, Berlin. 196.
- Brücken, Eigengewicht der eisenen, Allgemeines. 4.
- , — — — Eisenbahnbrücken. 5.
- , — — — Straßenbrücken. 11.
- , Einfluß der Breite. 164.
- , gerade. 160.
- , Höhenverhältnisse. 162.
- , Kurven-. 160, 197.
- , schiefe. 160, 191.
- , trapezförmige oder Fächerbrücken. 161, 196, 197.
- , vereinigte, für Straßen und Eisenbahnen, Allgemeines. 186.
- , — für Straßen u. Eisenbahnen, Lage der beiden Fahrbahnen. 187.
- , — für Straßen u. Eisenbahnen, Wertschätzung der verschiedenen Fahrbahnordnungen. 188.
- , Verkehrslasten, Allgemeines. 16.
- , — der Eisenbahnbrücken. 18, 367, 368.
- , — der Straßenbrücken. 29.
- Brückenbau, Flußeisen im — der Gegenwart. 100
- Centrifugalkraft in Krümmungen. 38.
- Clapeyron'sche Gleichungen, zeichnerische Lösung. 285.
- Cremona'sche Kräftepläne. 229.
- Culmann, zeichnerische Ermittlung der Diagonal- und Pfosten- spannungen bei Balken- fachwerksträgern. 329.
- Dehnung, innere Kräfte eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten gekrümmten Voll- stabes. 217.
- Dehnungsellipsoid. 212.
- Diagonalspannungen bei Balken- fachwerksträgern, Ermittlung nach Culmann. 329.
- Diagonalspannungen des Parabel- trägers. 318.
- Diagonalspannungen einfacher Bal- kenfachwerksträger bei Einzel- lasten. 310.
- Donaukanal-Brücke in Wien. 186.
- Doppel-T-Eisen. 129.
- Durchbiegung einfacher Träger bei einem Einzellastsystem. 305, 306, 307, 308.
- für vollwandige und Fachwerks- träger, rechnermäßige Er- mittelung. 262.
- Durchlaufender Träger, Einfluß- linien der Momente und Quer- kräfte. 352.
- , Festpunkte bei der zeichne- rischen Behandlung. 345.
- , Stützendrücke, zeichnerische Ermittlung. 284.
- , Stützenmomente. 346.
- , zeichnerische Behandlung. 345.
- Dynamische Wirkung der bewegten Lasten. 39.
- Ebenes Fachwerk, Allgemeines. 227.
- Ebenes Tragwerk. 201.
- Eigengewicht der Brücken, Allge- meines. 4.
- der Eisenbahnbrücken. 5.
- , Moment durch — beim ebe- nen Balkenträger. 295.
- der Straßenbrücken. 11.
- Einfaches T-Eisen. 128.
- Einflußflächen, Definition. 267.
- Einflußlinien, Definition. 267.
- ebener Systeme. 268.
- , kinematische Bedeutung. 273.
- nach Land zur Ermittlung der Füllungsstabspannungen bei ein- fachen Balkenfachwerksträgern. 312.
- der Stabspannungen des Fach- werks. 276.
- statisch unbestimmter Systeme. 281.
- der Momente und Querkräfte beim durchlaufenden Träger. 352.
- Einflußzahlen, kinematische Be- deutung. 273.
- Einzellastsystem, Ersatz durch eine gleichmäßig verteilte Last, Größe der Querkräfte und Momente. 302, 303, 304
- Eisen, Breiteisen. 124.
- , Flacheisen. 124.
- , Flußeisen. 81.
- , Flußstahl. 95.
- , Gußeisen. 69.
- Eisen, Quadranteisen. 134.
- , Roheisen. 69.
- , Schweifeseisen. 72.
- , Sextanteisen. 134.
- , einfaches T-Eisen. 128.
- , doppeltes T-Eisen. 129.
- , U-Eisen. 132.
- , Universaleisen. 124.
- , Winkeleisen. 125.
- , zulässige Inanspruchnahme. 110.
- Eisenbahnbrücken, Eigengewicht. 5.
- in der Sektion Bruck. 193.
- , Hauptträger, eingleisig. 165, 177.
- , Entfernung bei Brücken in Kurven. 168, 173, 177.
- , Fahrbahnhöhe maßgebend für die Wirtschaftlichkeit der An- lage. 180.
- , Einfluß der Fußwege. 180.
- , mehrgleisig. 173, 174, 178.
- , Anordnung bei Nebenbahnen. 181.
- , Wertschätzung der verschiede- nen Anordnungen. 175, 179.
- Eisenbahnbrücken, Längsverband. 189.
- über die Oppenheimer Land- strafse, Trapezträger. 193.
- , eiserne Pfeiler und eiserner Überbau. 149.
- , gemauerte Pfeiler und eiserner Überbau. 145.
- , Querverbände. 190.
- , vereinigte Straßen- und Eisen- bahnbrücken, Allgemeines. 186.
- , vereinigte Straßen- und Eisen- bahnbrücken, Lage der beiden Fahrbahnen. 187.
- , vereinigte Straßen- und Eisen- bahnbrücken, Wertschätzung der verschiedenen Fahrbahnord- nungen. 188.
- , Verkehrslasten. 18, 367, 368.
- , Verkehrslasten, stellvertretende gleichförmig verteilte. 28.
- Eisenbleche. 123.
- Eisensorten. 123.
- Eiserner Überbau, allgemeine An- ordnungsgrundlagen und Haupt- bestandteile. 158.
- Elastizität des Schweifeseisens. 76.
- Elastische Linie. 221, 255, 256.
- Elbebrücke bei Aussig. 187.

- Ellipsoid, Dehnungs-, 212.
 —, Spannungs-, 212.
 Ersatzlinie für die *A*-Linie bei Berechnung der Füllungsstabspannungen. 311.
- F**achwerk, Arbeitsgleichung. 225.
 —, Cremona'sche Kräftepläne. 229.
 —, ebenes. 227.
 —, ebenes, mit mehrfachen Knoten, Verfahren von Henneberg. 232.
 —, Einflußlinien von Stabspannungen. 276.
 —, Entstehung. 225.
 —, mehrfaches. 329.
 —, räumliches, Bildungsgesetz und Kennzeichen der statischen Bestimmtheit. 235.
 —, räumliches, Bestimmung der Spannungen. 236.
 —, Ritter's Methode zur Bestimmung der Stabspannungen bei ebenen Fachwerken. 234.
 —, Spannungen in ebenen statisch bestimmten Systemen. 229, 234.
 —, Spannungen im überzähligen Stab. 211.
 —, Verschiebungspläne des ebenen —. 246.
 —, Verschiebungspläne des räumlichen —. 251.
 —, Zimmermann's Verfahren der Stabspannungsbestimmung ebener Fachwerke. 231.
 —, zusammengesetzte. 316.
- Fachwerkstäbe, Winkeländerungen zwischen den —. 253, 254.
- Fachwerkträger, Ausleger-. 334, 339.
 —, einfache Balken-, Allgemeines. 308.
 —, Füllungsstabspannungen bei Einzellasten. 310.
 — mit Gitterwerk. 329.
 —, Gurtspannungen bei Einzellasten. 309.
 — mit gekrümmten und vieleckigen Gurtungen. 318.
 — mit konstanter oberer Gurtung. 326.
 — mit der kleinsten Materialmenge von Winkler. 328.
 —, Biegungslinie. 253.
 —, Biegungspolygon. 255.
 —, Durchbiegungen. 262, 305, 306, 307, 308.
 —, Parabelträger. 318.
- Fachwerkträger, Parallelträger. 315.
 —, Pauli-Träger. 327.
 —, Schwedler-Träger. 322.
 —, sonstige Formen für Balkenfachwerksträger. 326.
 — auf 3 Stützen. 342.
- Fächerbrücken. 161, 196, 197.
- Fahrbahn bei eisernem Überbau. 159.
 —, Einfluß der Lage zu den Hauptträgern auf die Wirtschaftlichkeit der Anlage. 180.
 Festigkeit des Schweißseisens. 76.
 Festpunkte bei der zeichnerischen Behandlung des durchlaufenden Trägers. 345.
- Flacheisen. 124.
 Fläche, Williot-Fläche. 241.
 Fliehkraft in Krümmungen. 38.
 Flußeisen. 81.
 — im Brückenbau der Gegenwart. 100.
- Flußstahl. 95.
- Formänderung, Arbeitsgleichung der —. 214.
 —, Grundlehren der —. 204.
- Formänderungsarbeit, Satz vom Minimum der —. 209, 210.
- Füllungsstabspannungen, zeichnerische Ermittlung nach Culmann bei Balkenfachwerksträgern. 329.
- Füllungsstäbe, Spannungen der — bei Einzellastensystem. 310.
- Fußgängerbrücken, Hauptträgeranordnung. 185.
- Fußweganlagen bei eisernem Überbau. 159, 180.
 — bei Eisenbahnbrücken. 180.
 — bei Straßenbrücken. 184.
- G**eländer bei eisernem Überbau. 159.
- Gelenkbolzen. 136.
- Gerade Brücken. 160.
- Gerader Stab, Definition. 217.
 —, Vollstab, innere Kräfte des durch ein ebenes Kraftsystem belasteten. 219.
- Gerber, ausgeführte Brücken. 193.
- Gerber-Träger. 203, 335.
- Gerüstpfeiler bei eisernem Überbau. 152.
- Geschwindigkeitsplan. 274.
- Gesetz von Wöhler. 104.
- Gewichte der Pfeiler, Formeln. 154.
- Gitterwerk. 329.
- Gleichwerte, Belastungs-, 273, 304.
- Grashof, Mittelwerte der Festigkeit und Elasticität des Schweißseisens. 76.
 Grenzstützweite, Definition. 298.
- Gurte, gekrümmte und vieleckige bei Balkenfachwerksträgern. 318.
- Gurtspannungen durch Einzellasten bei einfachen Balkenfachwerksträgern. 309.
 — des Parabelträgers. 319.
- Gurtung, konstante obere, bei Balkenfachwerksträgern. 326.
- Gurtungskurve beim Schwedler-Träger. 322, 325.
- Gußseisen. 69.
- H**annover, Unterführungen von Straßen auf Bahnhof —. 193, 195.
- Hafsurt, Straßenbrücke von Gerber über den Main bei —. 341.
- Hauptbahnen, Verkehrslasten. 19, 367, 368.
- Hauptspannungen. 212.
- Hauptträger. 158.
 — der Eisenbahnbrücken, Einfluß der Bahnlage auf die Wirtschaftlichkeit der Anlage. 180.
 — der eingleisigen Eisenbahnbrücken. 165, 177.
 — der mehrgleisigen Eisenbahnbrücken. 173, 174, 178.
 — der Eisenbahnbrücken, Einfluß der Fußwege. 180.
 —, Entfernung in Kurven. 168, 173, 177.
 — auf Nebenbahnen. 181.
 —, Wertschätzung der verschiedenen Anordnungen. 175, 179.
- Hauptträger der Straßenbrücken, Allgemeines. 182.
 —, Fahrbahnlage. 183, 186.
 —, Fußgängerbrücken. 185.
 — mit Fußweganlagen. 184.
 — ohne Fußweganlagen. 183.
 —, Wertschätzung der verschiedenen Anordnungen. 185.
- Henneberg, Verfahren von — bei ebenen Fachwerken mit mehrfachen Knoten. 232.
- Höhenverhältnisse bei Brücken. 162.
- Horizontalverband. 159.
- Humboldt-Hafen, Berlin, Brücke über den —. 196.

- Inspruchnahme**, zulässige, des Eisens. 110.
Innere Arbeit als Funktion der Spannungen. 216
Innere Kräfte eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten gekrümmten Vollstabes. 217.
 — des geraden, durch ein ebenes Kraftsystem belasteten Vollstabes. 219.
Kernfigur. 219.
Kernpunkte. 219.
Kette, kinematische. 273.
Kinematische Bedeutung der Einflußlinien und Einflußzahlen. 273.
Knoten, ebenes Fachwerk mit mehrfachen Knoten, Verfahren von Henneberg. 232.
Konstanz, Rheinbrücke. 187.
Konstruktionshöhe. 162.
Kontinuierliche Träger, siehe durchlaufende Träger.
Kosten der Pfeiler, Formeln. 154.
 —, Veränderlichkeit der Mauerpfeiler-Kosten bei Veränderung der Lichtweiten. 146.
Kräfte, innere, eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten gekrümmten Vollstabes. 217.
 —, des geraden, durch ein ebenes Kraftsystem belasteten Vollstabes. 219.
Kräftepläne, Cremona'sche. 229.
Kragträger. 334.
Kreuzlinien-Verfahren zur Ermittlung der Stützenmomente beim durchlaufenden Träger. 346.
Krummer Stab, Definition. 217.
Kurve, Williot-Kurve. 242.
Kurven, Entfernung der Hauptträger bei Brücken in Kurven. 168, 173, 177.
 —, Verschiebungspläne ebener und räumlicher. 241.
Kurvenbrücken. 160, 197.
Längsträger zweiter Ordnung. 158.
 — höherer Ordnung. 159.
Längsverband bei Eisenbahnbrücken. 189.
 —, bei Straßenbrücken. 191.
Land, Einflußlinien der Füllungsstabspannungen bei einfachen Balkenfachwerksträgern. 312.
Lasten, dynamische Wirkung der bewegten —. 39.
Lastsystem, Einzel-, Ersatz durch eine gleichmäßig verteilte Last, Größe der Querkkräfte und Momente. 302, 303, 304.
Lichtweiten, Veränderung der — maßgebend für die Veränderlichkeit der Pfeilerkosten. 146.
Lokaleisenbahnen, Verkehrslasten. 27.
Mainbrücke von Gerber bei Hafsfurt. 341.
Materialmenge, kleinste, bei Balkenfachwerksträgern von Winkler. 328.
Maxwell'scher Satz. 205.
Mehrfaches Fachwerk. 329.
Mehrteilige, ebene Träger. 334.
Melan, Verfahren zur Ermittlung der Füllungsstabspannungen eines einfachen Balkenträgers. 314.
Minimum der Formänderungsarbeit. 209, 210.
Mississippibrücke bei St. Louis. 187.
Momente des ebenen Balkenträgers bei direkter Belastung. 288, 290.
 — bei indirekter Belastung. 300.
 —, größte Biegungs-. 20.
 —, durch Eigengewicht beim ebenen Balkenträger. 295.
 —, Einflußlinien der — beim durchlaufenden Träger. 352.
 — des ebenen Balkenträgers bei Ersatz des Einzellastsystems durch eine gleichmäßig verteilte Last. 304.
 —, größte, an verschiedenen Stellen der Brücke. 20, 21.
Momenten-Maßstab. 291.
Momenten-Schema für rollende Einzellasten beim ebenen Balkenträger. 297.
 —, Stützenmomente beim durchlaufenden Träger. 346.
Müller-Breslau, Bestimmung der Füllungsstabspannungen eines einfachen Balkenträgers. 312.
 —, Bestimmung der Stützenmomente beim durchlaufenden Träger. 350.
Nebeneisenbahnen, Hauptträger bei Brücken der —. 181.
 —, Verkehrslasten der —. 26.
Netzwerk, Parallelträger mit —. 316.
Niagara-Brücke von Schneider. 340.
Niete. 137.
Null-Linie. 218.
Oberbrücke bei Schönbrunn. 342.
Öffnungen, Größe und Zahl. 143, 156.
Oldesloe-Schwarzenbeck, Wege-Unterführungen auf der Bahn —. 193, 194.
Oppenheimer Landstraße, Eisenbahnbrücke über die —, Trapezträger. 193.
Parabelschablone. 295.
Parabelträger. 318.
 — mit Netzwerk, System des gleichschenkeligen Dreiecks. 316.
 —, System des rechtwinkligen Dreiecks. 315.
Pauli-Träger. 327.
Pendelpfeiler. 149.
Pfeiler, eiserne. 149.
 —, Gerüstpfeiler. 152.
 —, Pendelpfeiler. 149.
 —, Turmpfeiler. 150.
 —, Vergleich der verschiedenen Pfeileranordnungen. 153.
Pfeiler, Formeln für Gewichte und Kosten. 154.
 —, gemauerte, eiserner Überbau, Allgemeines. 144.
 —, eiserner Überbau, Eisenbahnbrücken. 145.
 —, eiserner Überbau, Straßenbrücken. 145.
 —, eiserner Überbau, Veränderlichkeit der Kosten bei Veränderung der Lichtweiten. 146.
Pfostenspannungen bei Balkenfachwerksträgern, zeichnerische Ermittlung nach Culmann. 329.
 — einfacher Balkenfachwerksträger bei Einzellastsystem. 310.
 — des Parabelträgers. 319.
Quadrant-Eisen. 134.
Querkkräfte des ebenen Balkenträgers bei direkter Belastung. 287, 290.
 — bei indirekter Belastung. 299.
 — bei Ersatz des Einzellastsystems durch eine gleichmäßig verteilte Last. 303.

- Querkräfte, Einfluslinien der — beim durchlaufenden Träger. 352.
 Querträger. 158.
 — höherer Ordnung. 159.
 Querverbände. 159, 190, 191.
 Querversteifung. 159.
Räumliches Fachwerk, Bildungsgesetz und Kennzeichen der statischen Bestimmtheit. 235.
 —, Spannungen. 236.
 —, Verschiebungspläne. 251.
 Ravenna-Schlucht, Viadukt über die —. 161.
 Reaktionen des ebenen Balkenträgers. 287.
 — des durchlaufenden Trägers. 284.
 Reaktionsbedingung. 201.
 Reibungskräfte an den Auflagern. 57.
 Rheinbrücke bei Konstanz. 187.
 Ritter's Methode zur Bestimmung der Stabspannungen bei ebenen Fachwerken. 234.
 Roheisen. 69.
St. Louis, Mississippibrücke bei —. 187.
 Schiefe Brücken. 160, 191.
 Schneider, Niagara-Brücke von —. 340.
 Schönbrunn, Oderbrücke bei —. 342.
 Schraubenbolzen. 136.
 Schwarzenbeck-Oldesloe, Wegeunterführungen auf der Bahn —. 193, 194.
 Schwebende Stützen, Träger mit —. 334.
 Schwedler-Träger. 322.
 —, Regel von Stelzel zur Bestimmung der Gurtungskurve. 325.
 Schweifeseisen. 72.
 —, Mittelwerte der Festigkeit und Elasticität nach Grashof. 76.
 —, Verhalten bei wiederholten Anstrengungen. 104.
 Sextant-Eisen. 134.
 Spandauer Brücke, Berlin, Unterführung der Strafe —. 197.
 Spannungen in ebenen statisch bestimmten Fachwerkssystemen. 229, 234.
 Spannungen im räumlichen Fachwerk. 236.
 Spannungen der Füllungsstäbe einfacher Balkenfachwerksträger bei Einzellastsystem. 310.
 —, der Gurtungen einfacher Balkenfachwerksträger bei Einzellastsystem. 309.
 Spannungsellipsoid. 212.
 Stab, gerader, Definition. 217.
 —, krummer, Definition. 217.
 —, überzähliger, eines Fachwerks, Spannung darin. 211.
 Stabspannungen, Einfluslinien für die — des Fachwerks. 276.
 — ebener Fachwerke, Ritter's Methode. 234.
 —, Zimmermann's Verfahren. 231.
 Stahl, Verhalten bei wiederholten Anstrengungen. 104.
 Statisch bestimmte Träger. 202.
 — unbestimmte Balkenfachwerksträger, Gitterwerksträger. 329.
 — unbestimmte Träger. 202, 278, 342.
 — — Systeme, Einfluslinien. 281.
 Steiner, Spannungen der Füllungsstäbe einfacher Balkenfachwerksträger bei Einzellasten. 312.
 Stelzel, Regel zur Ermittlung der Gurtungskurve beim Schwedler-Träger. 325.
 Strafenbrücken, Eigengewicht. 11.
 —, Hauptträger, Allgemeines. 182.
 —, —, Fahrbahnlage. 183.
 —, —, Fußgängerbrücken. 185.
 —, — bei Brücken mit Fußweganlagen. 184.
 —, — bei Brücken ohne Fußweganlagen. 183.
 —, — Wertschätzung der verschiedenen Systeme. 185.
 —, Längsverband. 191.
 —, gemauerte Pfeiler und eiserner Überbau. 145.
 —, Querverbände. 191.
 —, vereinigte mit Eisenbahnbrücken, Allgemeines. 186.
 —, vereinigte mit Eisenbahnbrücken, Lage der beiden Fahrbahnen. 187.
 —, vereinigte mit Eisenbahnbrücken, Wertschätzung der verschiedenen Fahrbananordnungen. 188.
 —, Verkehrslasten. 29.
 —, — gleichförmig verteilte stellvertretende. 33.
 Stützen, Fachwerksträger auf drei —. 342.
 —, Träger mit schwebenden —. 334.
 Stützendrucke ebener Balkenträger. 287.
 — durchlaufender Träger. 284.
 Stützenmomente durchlaufender Träger. 346.
 Stützweite, Grenzstützweite, Definition. 298.
T-Eisen, einfaches. 128.
 —, doppeltes. 129.
 Träger, Ausleger-. 334, 339.
 —, durchlaufender, zeichnerische Behandlung. 345.
 —, —, Einfluslinien der Momente und Querkräfte. 352.
 —, —, Stützenmomente. 346.
 —, —, Festpunkte der zeichnerischen Behandlung. 345.
 —, Durchbiegung einfacher bei einem System von Einzellasten. 305, 306, 307, 308.
 —, Fachwerksträger auf drei Stützen. 342.
 —, Formen, besondere. 326.
 —, Gerber-. 203, 335.
 —, Krag-. 334.
 —, mehrteilige ebene. 334.
 —, Parabel-. 318.
 —, Parallel-. 315, 316.
 —, Pauli-. 327.
 —, Schwedler-. 322.
 —, statisch bestimmte. 202.
 —, statisch unbestimmte. 202, 278, 342.
 —, statisch unbestimmte Balkenfachwerksträger, Gitterwerksträger. 329.
 —, Stützendrucke eines durchlaufenden —. 284.
 —, mit schwebenden Stützen. 334.
 —, Trapez-. 317.
 Tragwerke, ebene. 201.
 Trapezträger. 317.
 —, Beispiel, Eisenbahnbrücke über die Oppenheimer Landstrafe. 193.
 Trapezförmige Brücken. 161, 196, 197.
 Turmpfeiler und eiserner Überbau. 150.

- U-Eisen** 132.
 Überbau, eiserner, allgemeine Anordnungsgrundlagen und Hauptbestandteile. 158.
 Überzähliger Stab eines Fachwerks, Spannung darin. 211.
 Universaleisen. 124.
 Unterführung der Strafe Alt-Moabit, Berlin. 161.
 — der Strafe Spandauer Brücke, Berlin. 197.
 Unterführungen auf Bahnhof Hannover. 193, 195.
 —, Wege- auf der Bahn Schwarzenbeck-Oldesloe. 193, 194.
- Verband, Längs-** 189, 191.
 Verbände, Quer-. 159, 190, 191.
 Verbindungsmittel 135.
 Vereinigte Brücken für Straßen u. Eisenbahnen, Allgemeines 186.
 —, Lage der beiden Fahrbahnen. 187.
 —, Wertschätzung der verschiedenen Fahrbahnanordnungen. 188.
 Verkehrslasten der Brücken, Allgemeines 16.
 — der Eisenbahnbrücken. 18, 367, 368.
 — der Hauptbahnen. 19, 367, 368.
 — der Lokaleisenbahnen. 27.
 — der Nebeneisenbahnen 26.
 — der Eisenbahnbrücken, stellvertretende gleichförmig verteilte. 28.
- Verkehrslasten der Strafenbrücken. 29.
 —, stellvertretende gleichförmig verteilte. 33.
 Verschiebungspläne des ebenen Fachwerks. 246.
 — ebener und räumlicher Kurven. 241.
 — des Raumbachwerks. 251.
 —, Williot'sche —. 246.
 Versteifung, Quer-. 159.
 Verstrebung, Wind-. 159.
 Versuche von Bauschinger. 104.
 Vertikalen, Spannungen beim Balkenfachwerksträger, zeichnerische Ermittlung nach Culmann. 329.
 — bei einfachen Balkenfachwerksträgern, Spannung durch Einzelasten. 310.
 —, Spannungen beim Parabelträger. 319.
 Viadukt über die Ravenna-Schlucht. 161.
 Vollstab, gekrümmter, innere Kräfte eines auf Dehnung und Biegung beanspruchten 217.
 —, gerader, innere Kräfte des durch ein ebenes Kraftsystem belasteten. 219.
 Vollwandträger, Biegungslinie. 256.
 —, Durchbiegung. 262.
 —, Theorie. 211.
- Wege-Unterführungen** auf der Bahn Schwarzenbeck-Oldesloe. 193, 194.
 Wien, Donaukanal-Brücke. 186.
 Williot-Fläche. 241.
 Williot-Kurve. 242.
 Williot'sche Verschiebungspläne. 246.
 Winddruck 34.
 Windverstrebung. 159.
 Winkeländerungen zwischen den Fachwerkstäben. 253, 254.
 Winkeleisen. 125.
 Winkler, Balkenfachwerksträger mit der kleinsten Materialmenge. 328.
 —, Belastungsgleichwerte, Belastungsäquivalente. 304.
 Wirtschaftlichkeit der Brückenanlage in Bezug auf die Lage der Fahrbahn zu den Hauptträgern. 180.
 Wöhler's Gesetz. 104.
- Zimmermann's Verfahren** zur Stabspannungsermittlung ebener Fachwerke. 231.
 Zulässige Inanspruchnahme des Eisens. 110.
 Zusammengesetzte Fachwerke. 316.
 Zwischenkonstruktionen, allgemeine Anordnung. 188.

Atlas

zum

Handbuch des Brückenbaues.

Zweite Abteilung.

Dritte vermehrte Auflage.

Inhalt.

- Tafel I. **Allgemeine Anordnung der eisernen Brücken und Materialaufwand.** (Eigengewicht eiserner Brücken. Bedarf an Material für Gerüste, Gerüstbrücken, eiserne Pfeiler, steinerne Brücken u.a.)
- Tafel II bis VI. **Theorie der eisernen Balkenbrücken.**
- „ II. Äußere Kräfte der Balkenträger. (Graphische Ermittlung der äußeren Kräfte eines einfachen und eines durchlaufenden Balkens.)
 - „ III. Äußere Kräfte der Balkenträger. (Querkräfte und Momente eines Trägers mit schwebenden Stützpunkten und eines durchlaufenden Trägers. Ermittlung der Einflußlinien eines durchlaufenden Trägers als Biegungslinien.)
 - „ IV. Theorie des Fachwerks. (Stabspannungen in einem Balkenträger auf zwei Stützpunkten, einem Träger mit schwebenden Stützpunkten und einem statisch bestimmten, sowie einem statisch unbestimmten Parabelträger.)
 - „ V. Theorie des Fachwerks. (Spannungen und Verschiebungen eines Fachwerkträgers, Konstruktion der Biegungslinie des Untergurtes eines Fachwerkträgers mittels der graphisch ermittelten Winkeländerungen, Ermittlung der Stabspannungen in einem durchlaufenden Träger mit mehrfachem Gitterwerk.)
 - „ VI. Raumbachwerk.
-

Inhalt

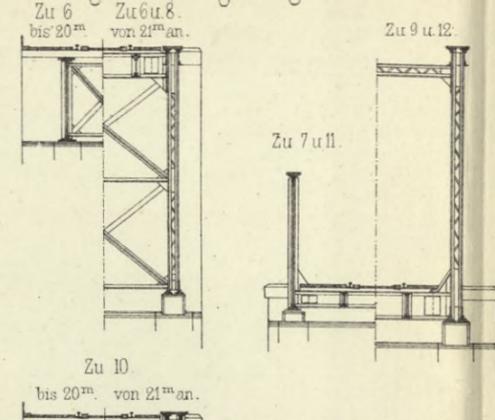
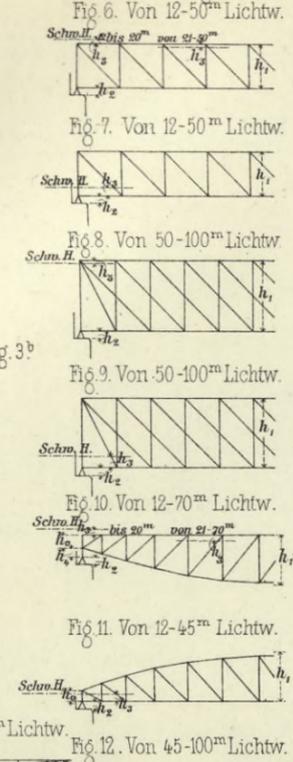
I	Allgemeine Einführung der Eisenbrücken und Metallbauwerke	1
II	Die Theorie der Eisenbrücken	15
III	Die Theorie der Eisenbrücken (Eisenbrücken)	15
IV	Die Theorie der Eisenbrücken (Eisenbrücken)	15
V	Die Theorie der Eisenbrücken (Eisenbrücken)	15
VI	Die Theorie der Eisenbrücken (Eisenbrücken)	15
VII	Die Theorie der Eisenbrücken (Eisenbrücken)	15

S. 61

Fig. 1-5. Blechträger.



Fig. 6-13. Fachwerkträger und Bogenträger.



Höhen h_0 und h_1
 Halbparabelträger: $h_1 = \frac{L}{6} - \frac{L}{8}$
 Parallelträger: $h_1 = \frac{L}{8} - \frac{L}{10}$
 Blechträger: $h_1 = \frac{L}{9} - \frac{L}{11}$

Fig. 17. Vermehrung der Konstruktionsgewichte.

A. Durch schiefe Stellung der Widerlager zur Brückenachse.

Bahn „unten“:	Bahn „oben“:
bis 20 ^m Stützweite 8%	bis 10 ^m Stützweite 7%
von 20-30 ^m 5%	von 10-30 ^m 3%
30-60 ^m 4%	30-60 ^m 2%
60-80 ^m 3%	60-100 ^m 1%
80-90 ^m 2%	
90-100 ^m 1,5%	

B. Durch Lage der Brücke in Bögen.

Stützweite	Radius			
	150	250	400	1000
10 ^m	8%	6%	4,5%	3,5%
20 ^m	9	6,5	5	3,5
40 ^m	12	9	7,2	5
60 ^m	17	13	10	8
80 ^m	24	18	13,7	10,5
100 ^m	34	25	18	13

Fig. 14. Tabelle zur Bestimmung der Stützweiten.

λ	a		b	
	Meter	Meter	Meter	Meter
2	0,15	0,40	25	0,90
3-4	0,20	0,40	30	1,00
5-6	0,25	0,45	35	1,00
7	0,30	0,50	40	1,10
8	0,30	0,55	50	1,20
9	0,35	0,60	60	1,30
10-12	0,40	0,65	70	1,40
15	0,45	0,65	80	1,50
18	0,45	0,70	90	1,60
20	0,50	0,80	100	1,70

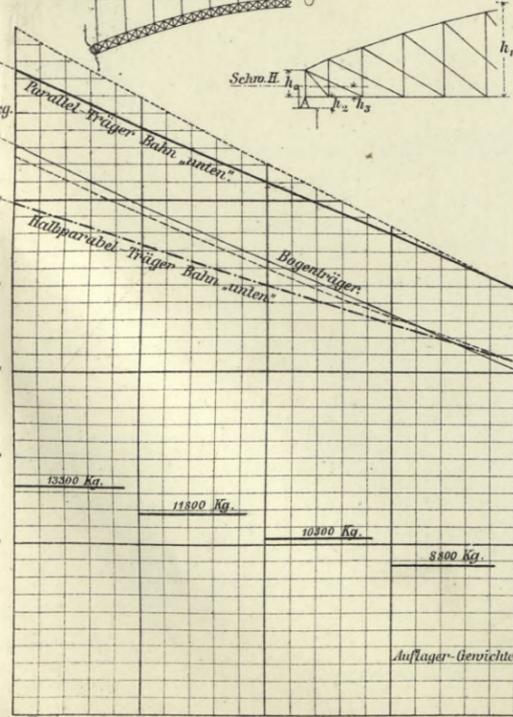


Fig. 18. Gewicht eiserner Brücken für Hauptbahnen.

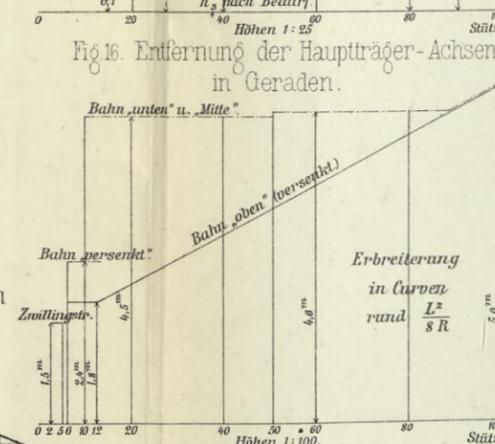


Fig. 16. Entfernung der Hauptträger-Achsen in Geraden.

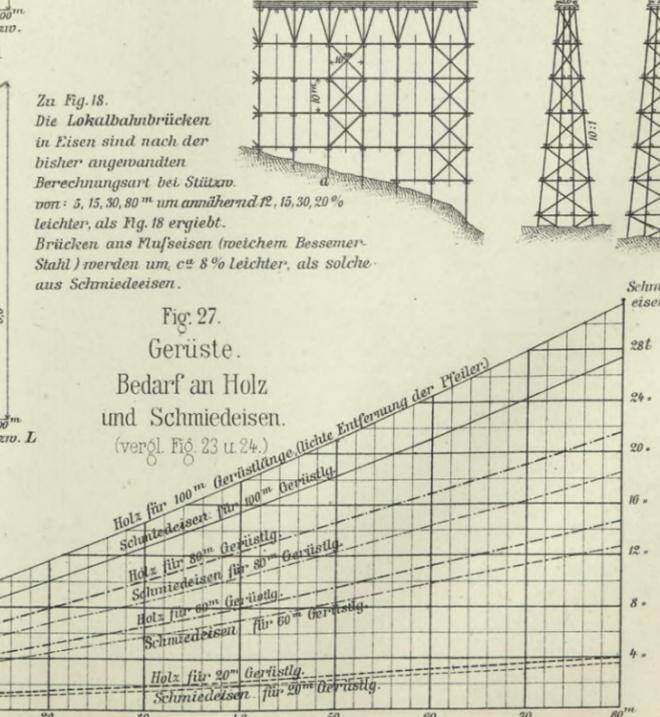


Fig. 27. Gerüste. Bedarf an Holz und Schmiedeeisen.

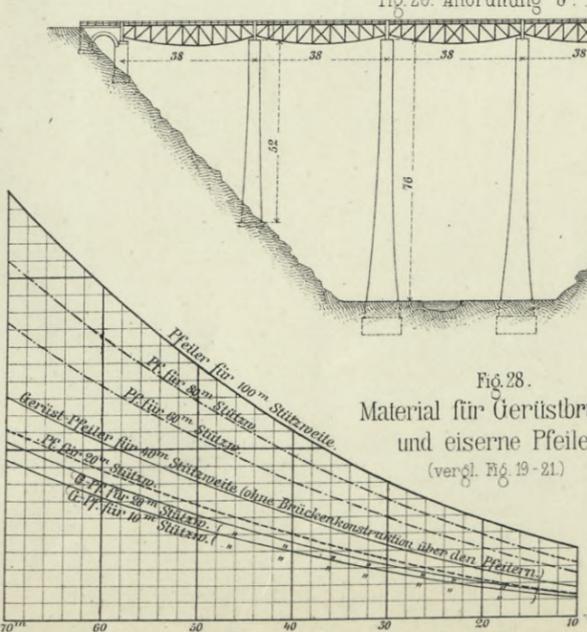
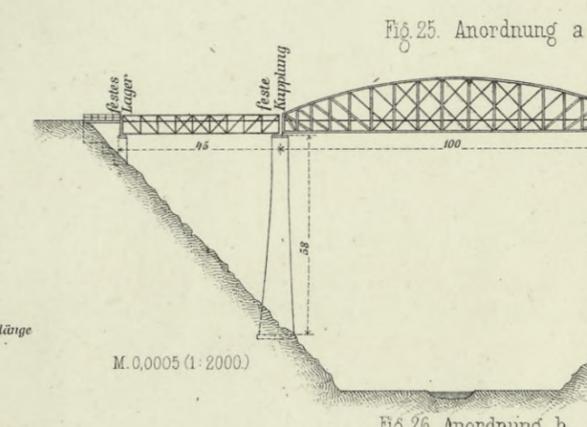
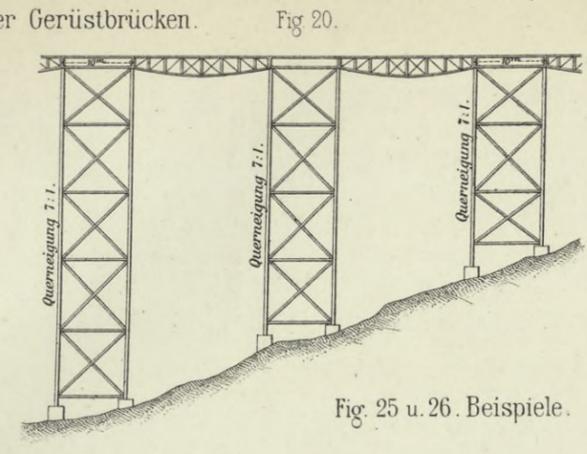
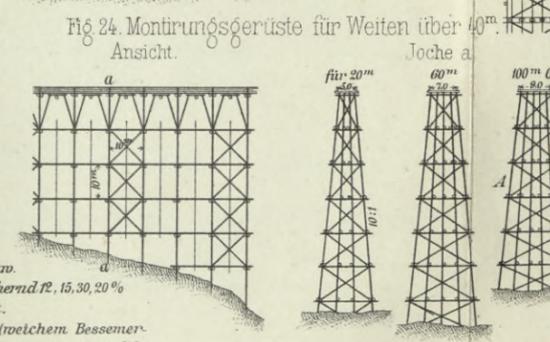
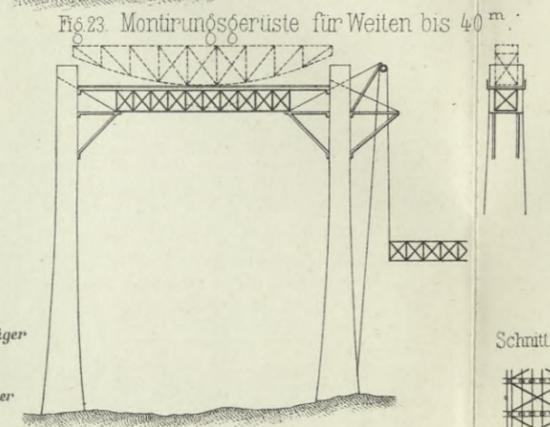
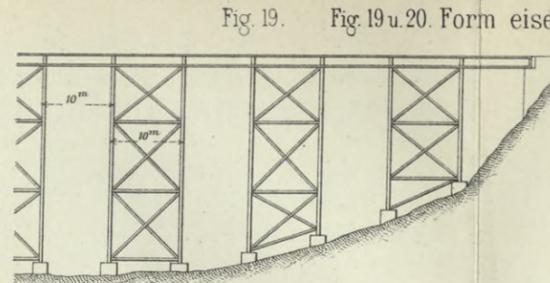


Fig. 28. Material für Gerüstbrücken und eiserne Pfeiler.

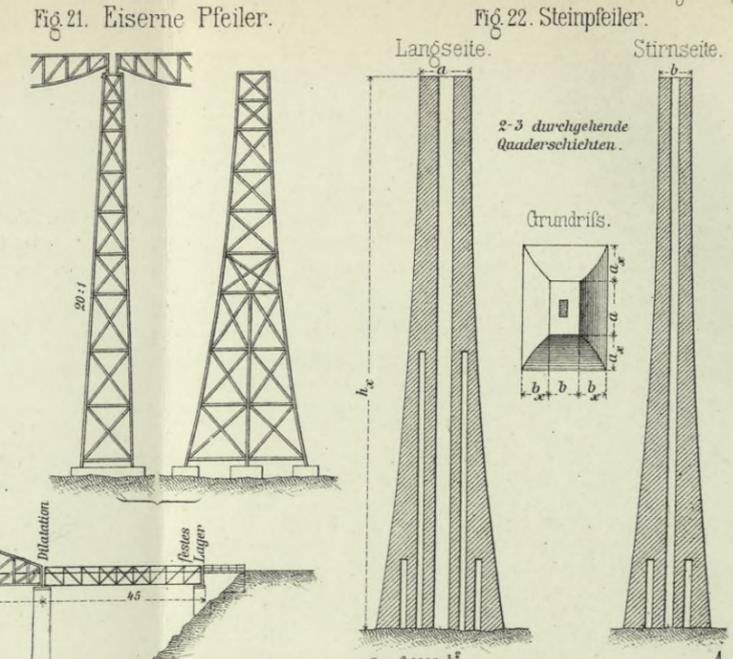


Table for masonry requirements (Fig. 29). Y-axis: height in meters (500 to 6000). X-axis: span length in meters (10 to 80).

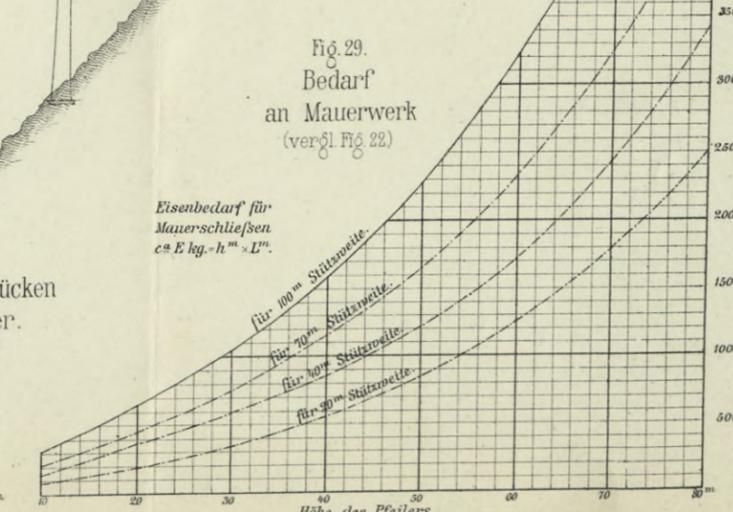
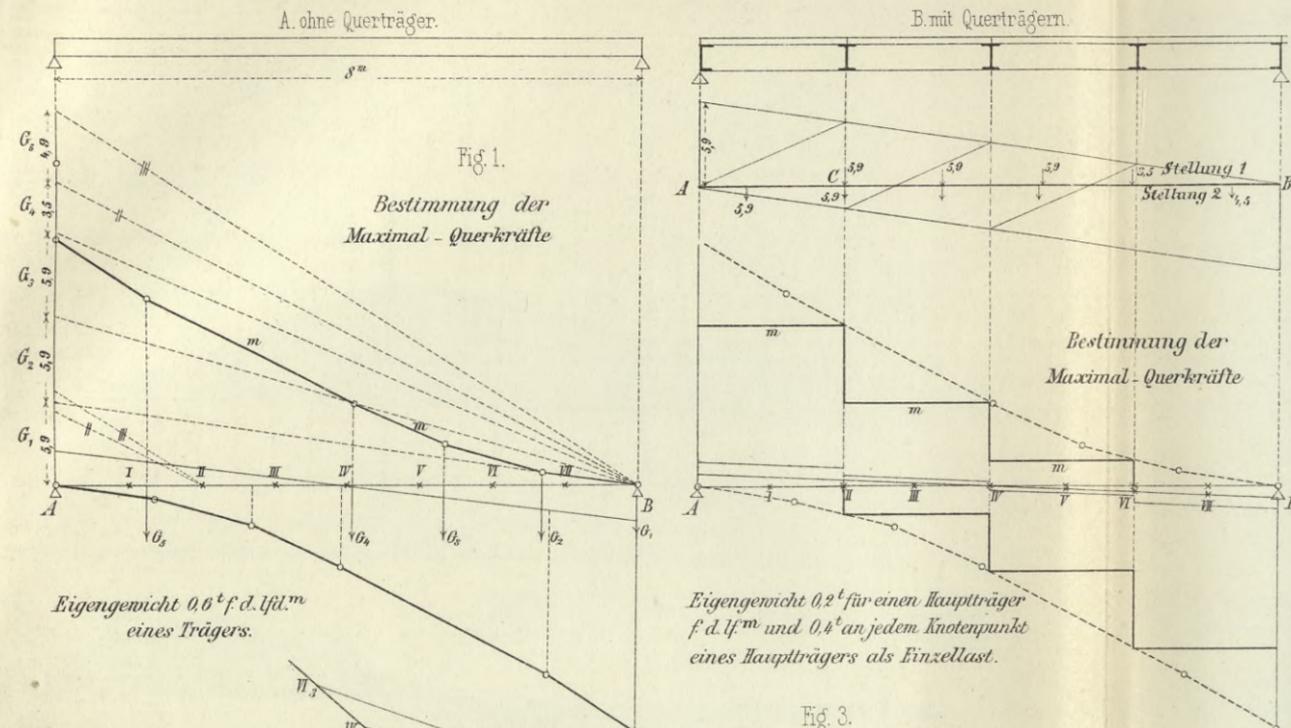


Fig. 29. Bedarf an Mauerwerk.

Der Belastungszug besteht aus 3 Achtkuppeln nebst beladenen Güterwagen, der Sicherheitskoeffizient auf Arbeitsfestigkeit ist 2,8. Bei Lokalbahnen treten Erleichterungen ein. Lth. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.

Nach einer Studie der K.K. Generaldirektion der österr. Staatsbahnen.

Fig. 1 bis 5 Graphische Ermittlung der äußern Kräfte einer einfachen Balkenbrücke.



Graphische Ermittlung der äußern Kräfte eines durchlaufenden Balkens mittels Einflusslinien.

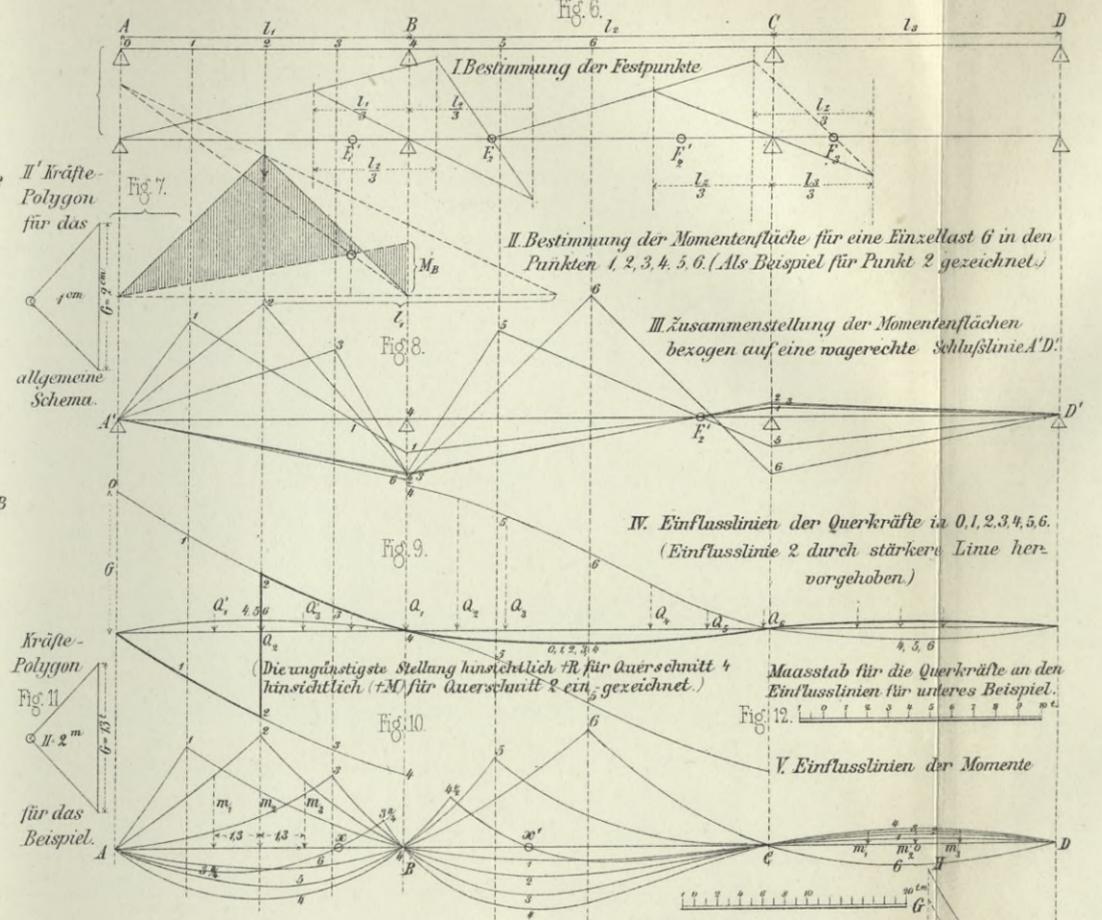


Fig. 17. Preussische Normallokomotive.

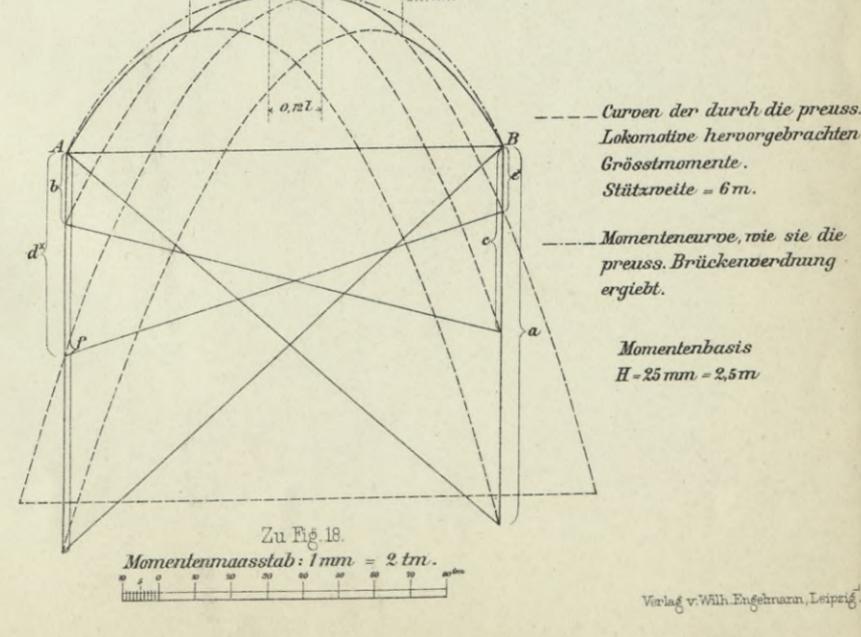
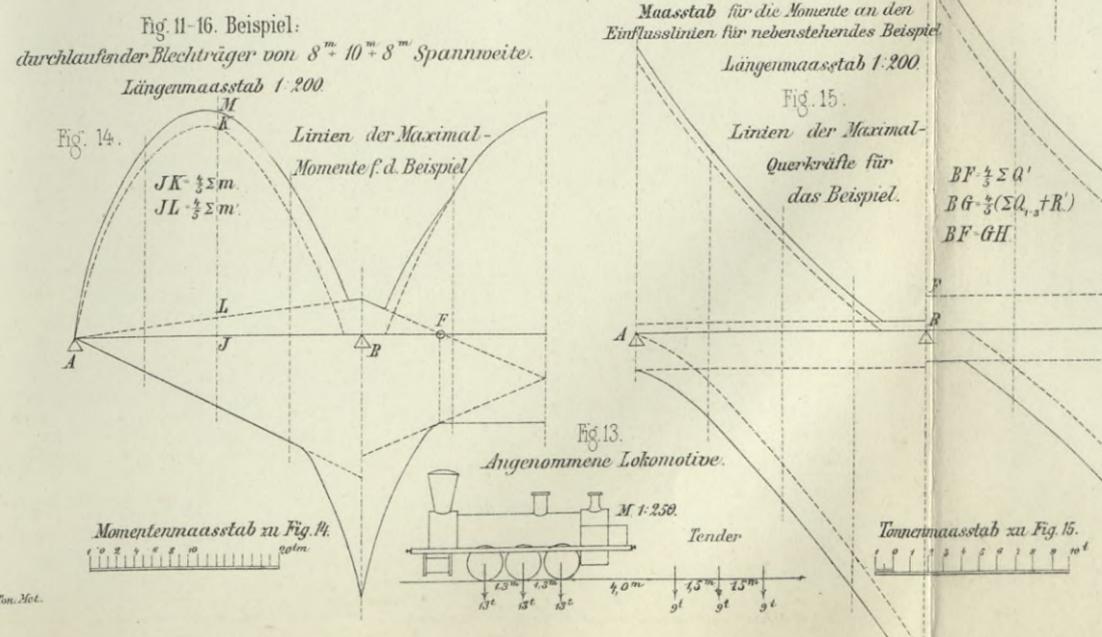
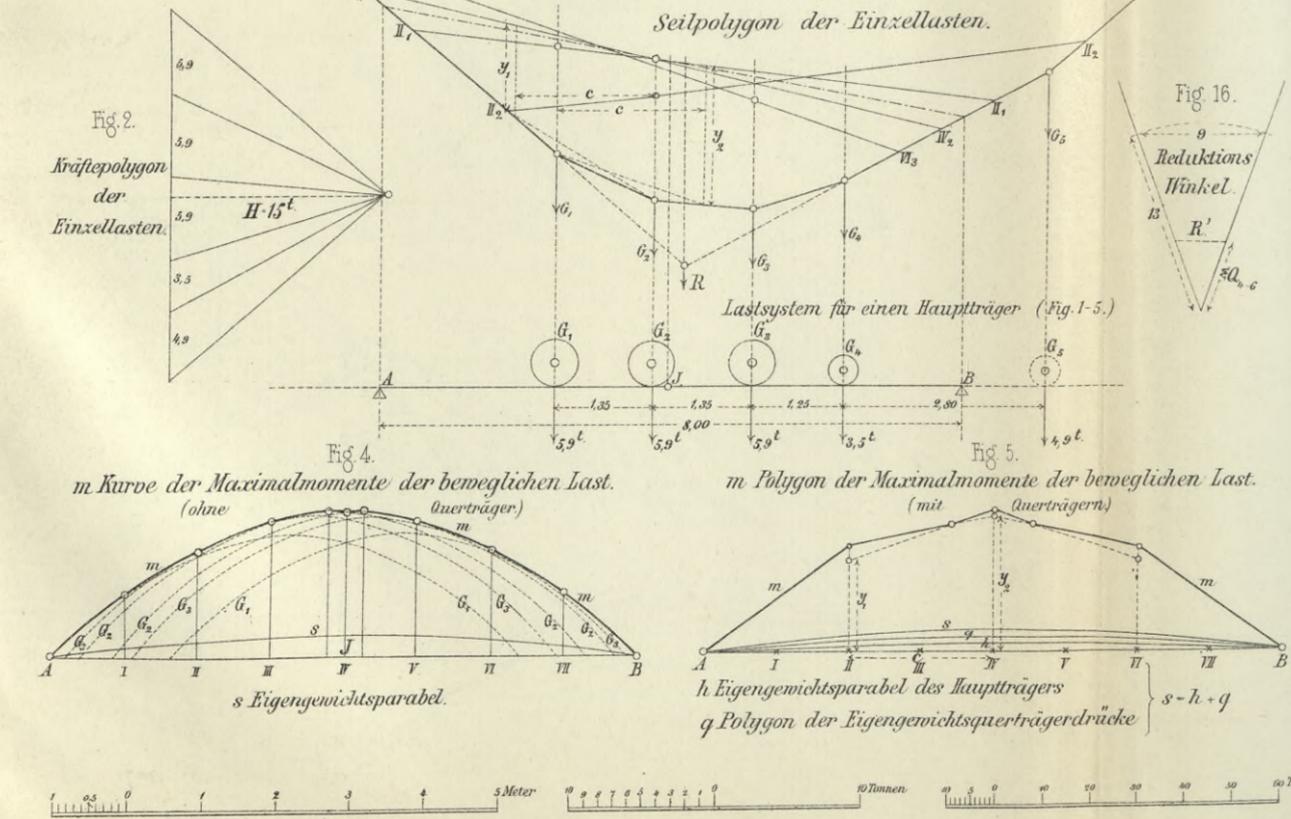
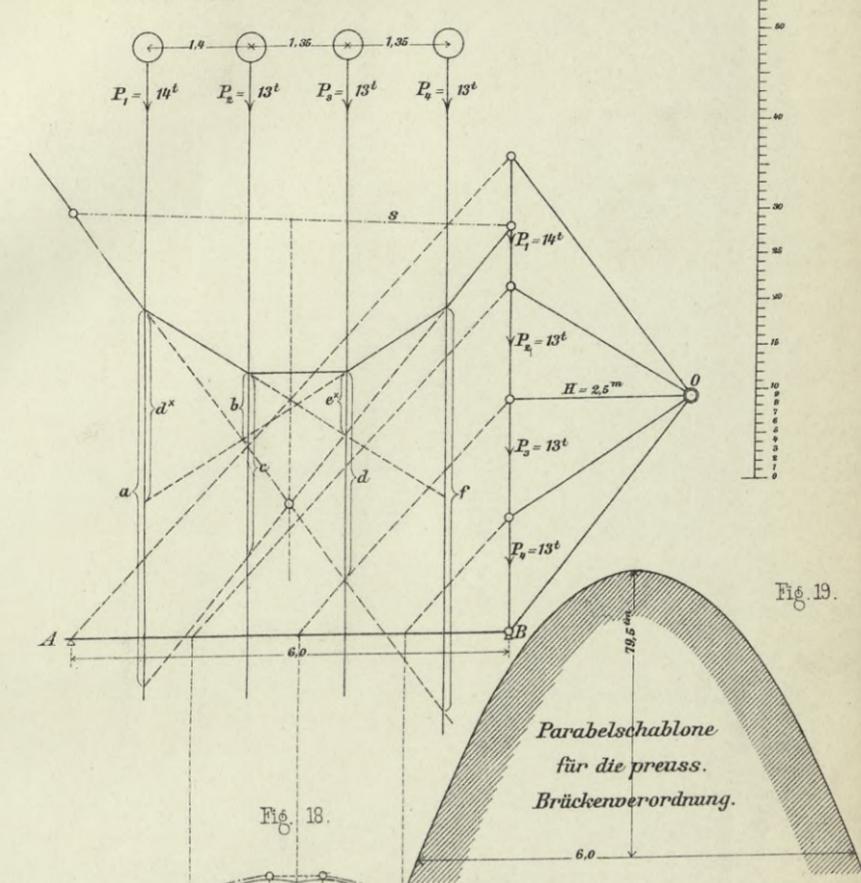
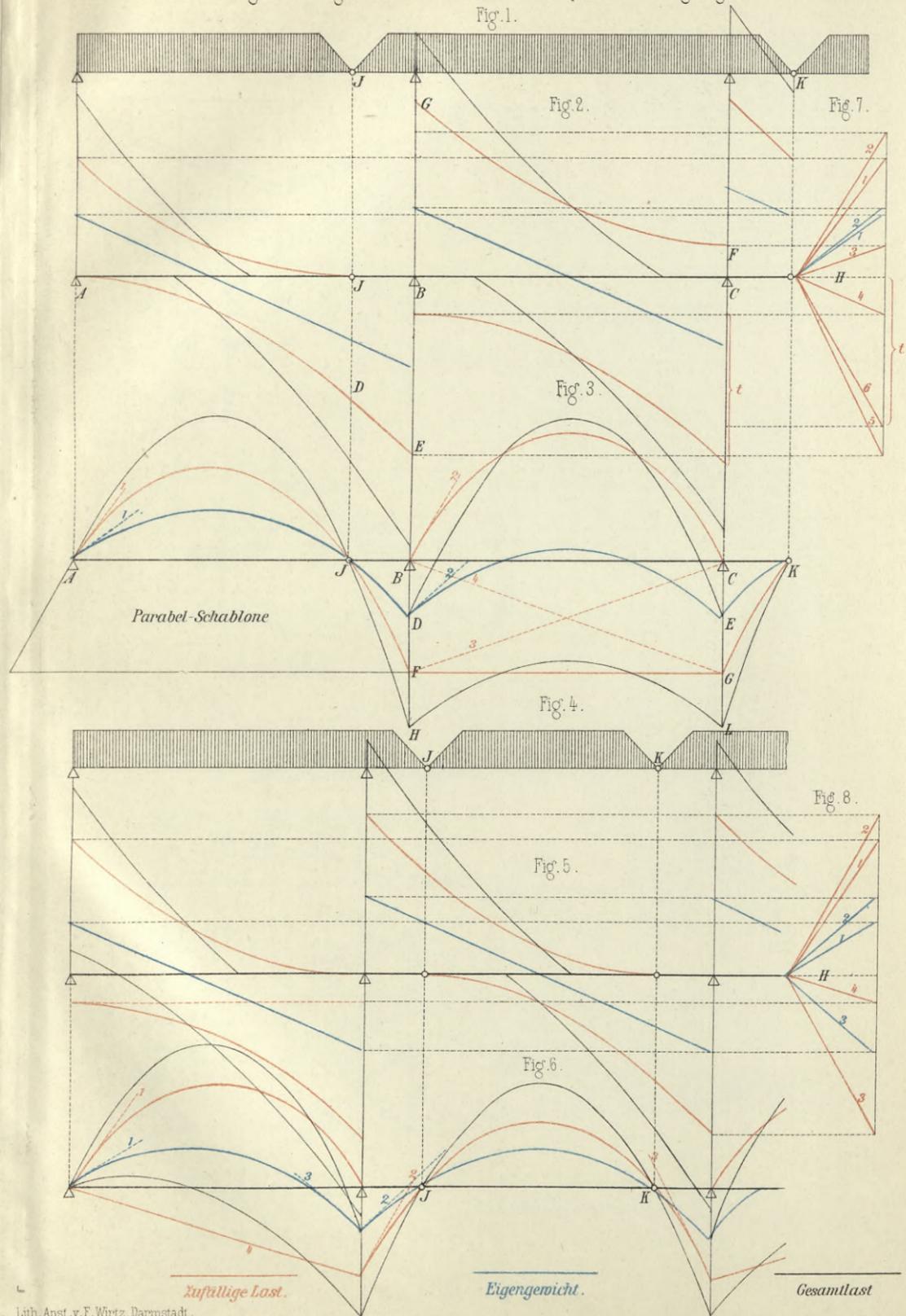


Fig. 1-8. Träger mit schwebenden Stützpunkten (Kragträger).



Äußere Kräfte der Balkenträger.

Fig. 9-18. Querkräfte und Momente eines durchlaufenden Trägers für stetig bewegte Last.

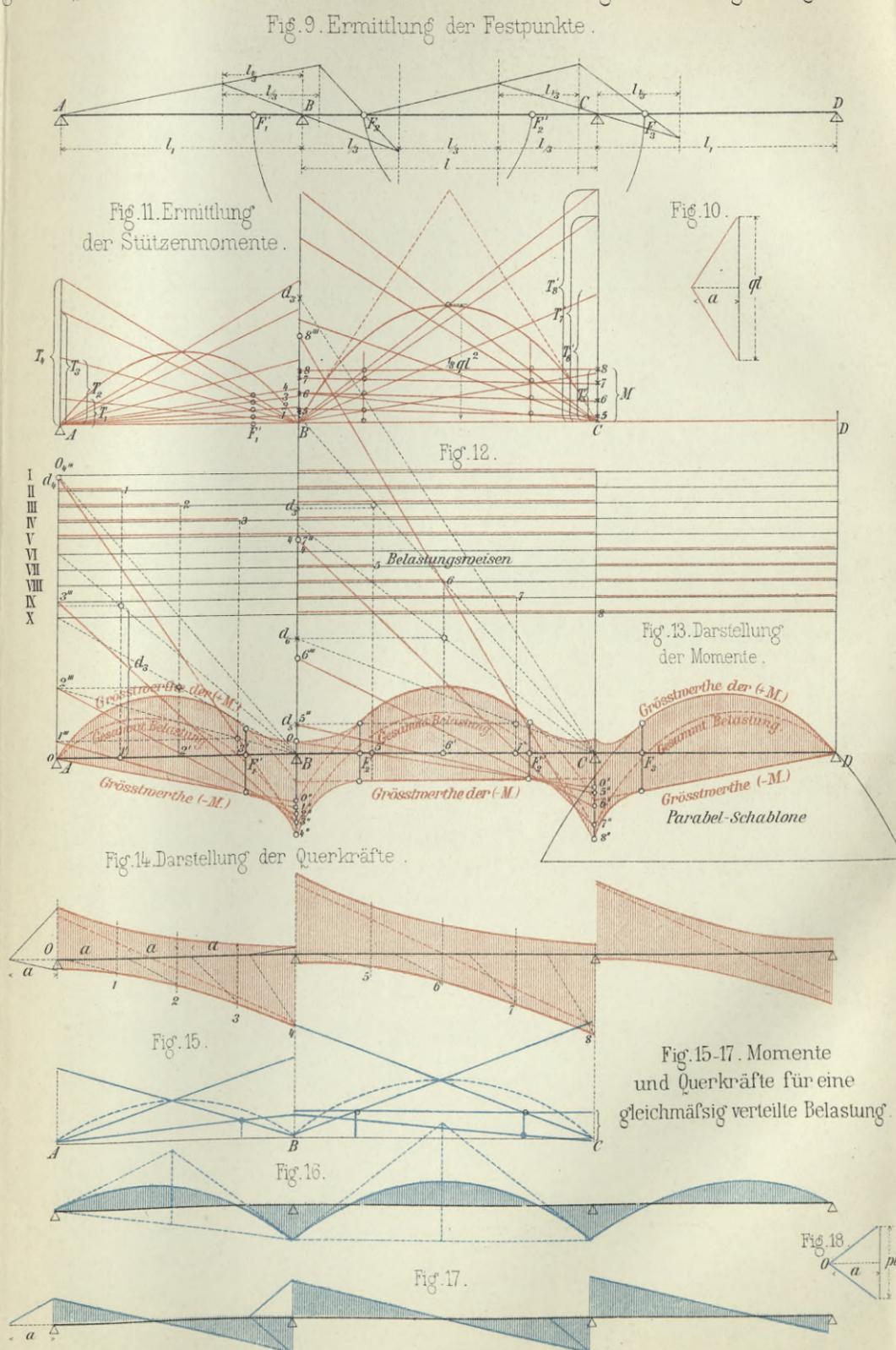


Fig. 19-27. Ermittlung der Einflußlinien eines durchlaufenden Trägers als Biege- und Querkraftlinien.

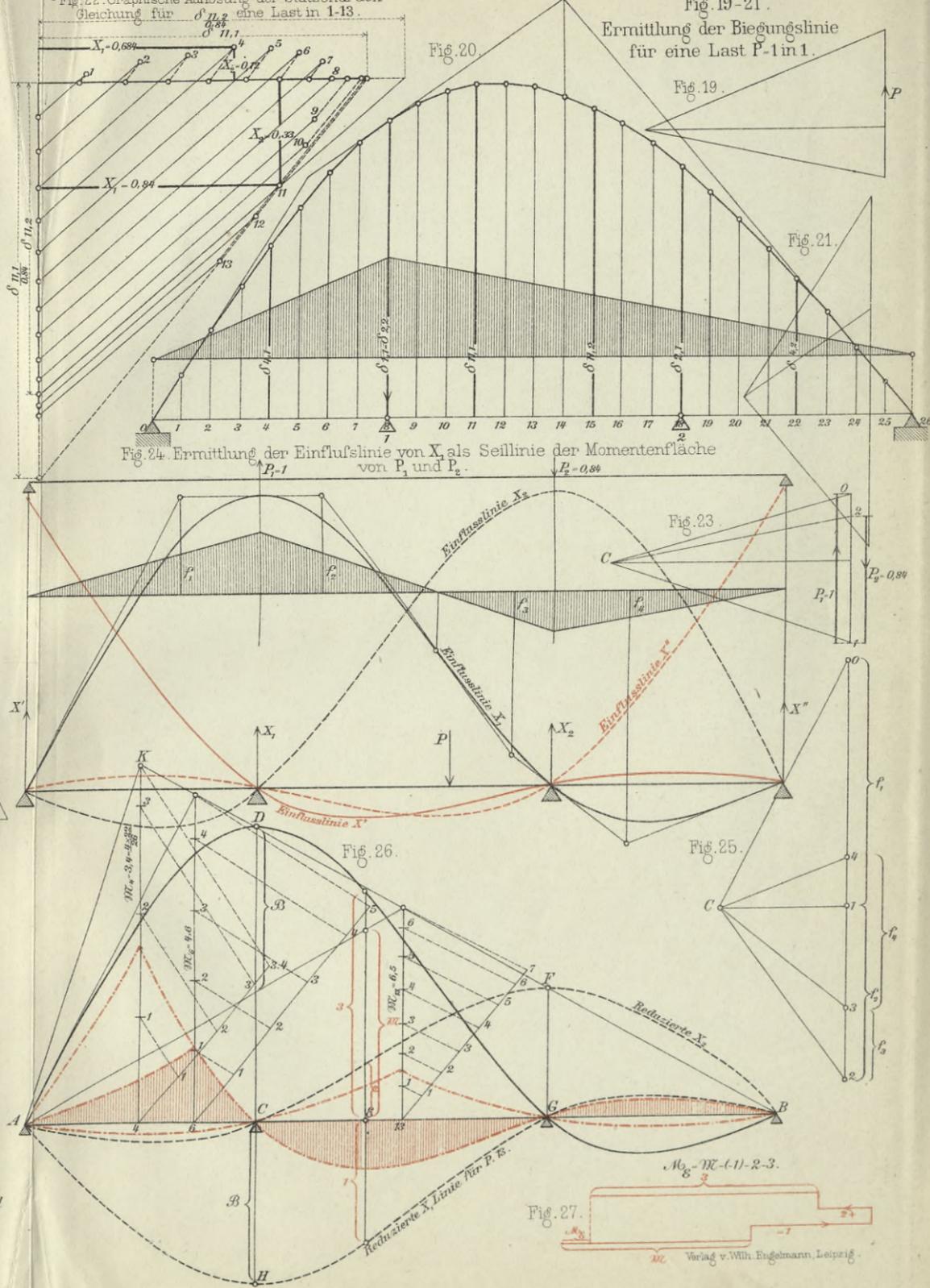


Fig. 1-5. Spannungen in einem Balkenfachwerk auf Grund eines Einzellastsystems.

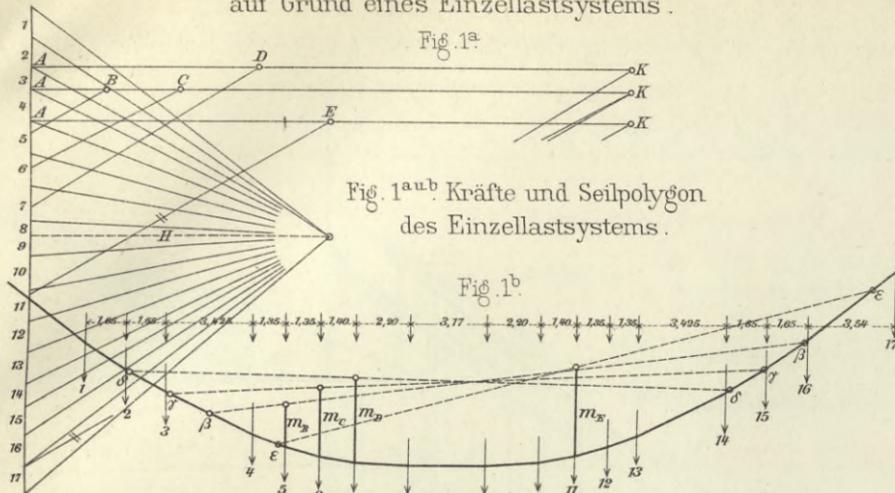


Fig. 2. Bestimmung der grössten Gurtspannungen.

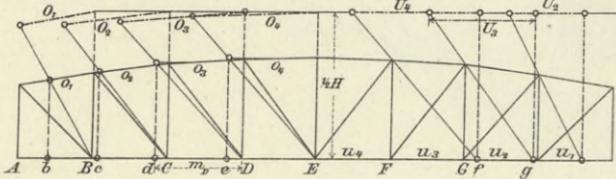
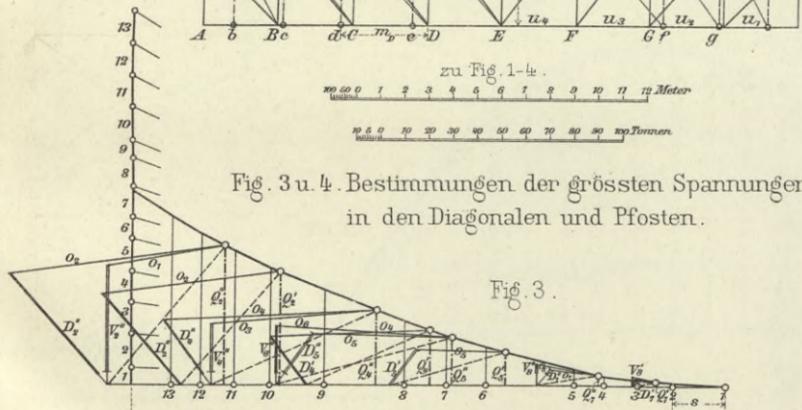


Fig. 3 u. 4. Bestimmungen der grössten Spannungen in den Diagonalen und Pfosten.



Halber Fig. 5. Kräfteplan der Eigengewichtspannungen.

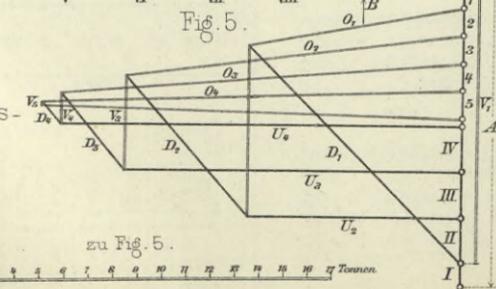


Fig. 6-15. Träger mit schwebenden Stützpunkten.

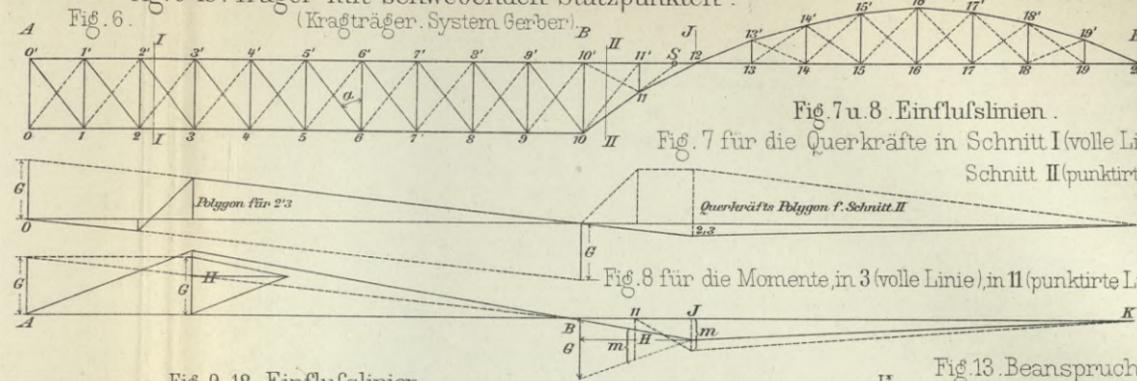


Fig. 9-12. Einflusslinien.

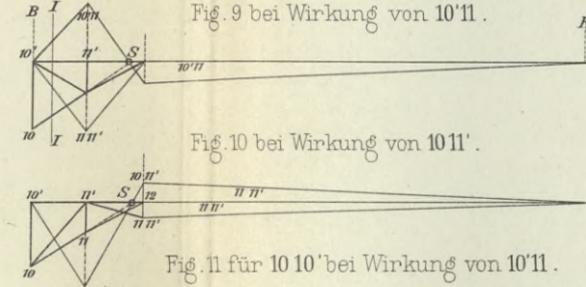


Fig. 13. Beanspruchungen durch das Eigengewicht.

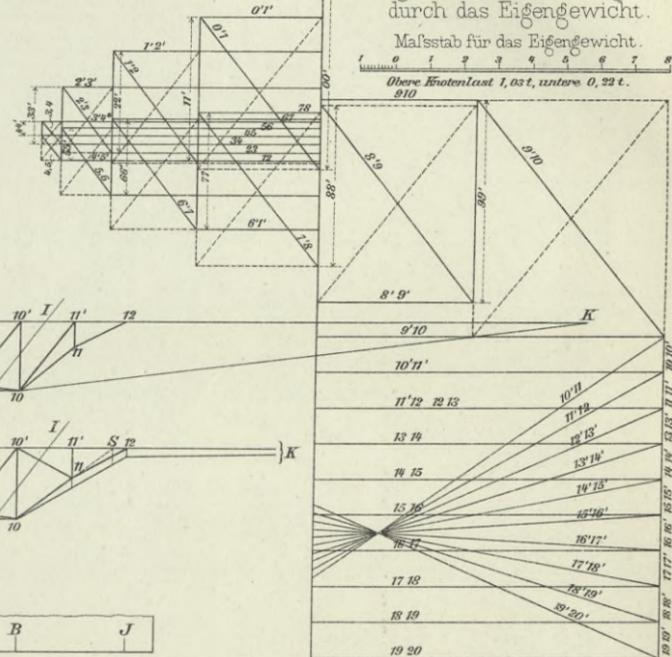
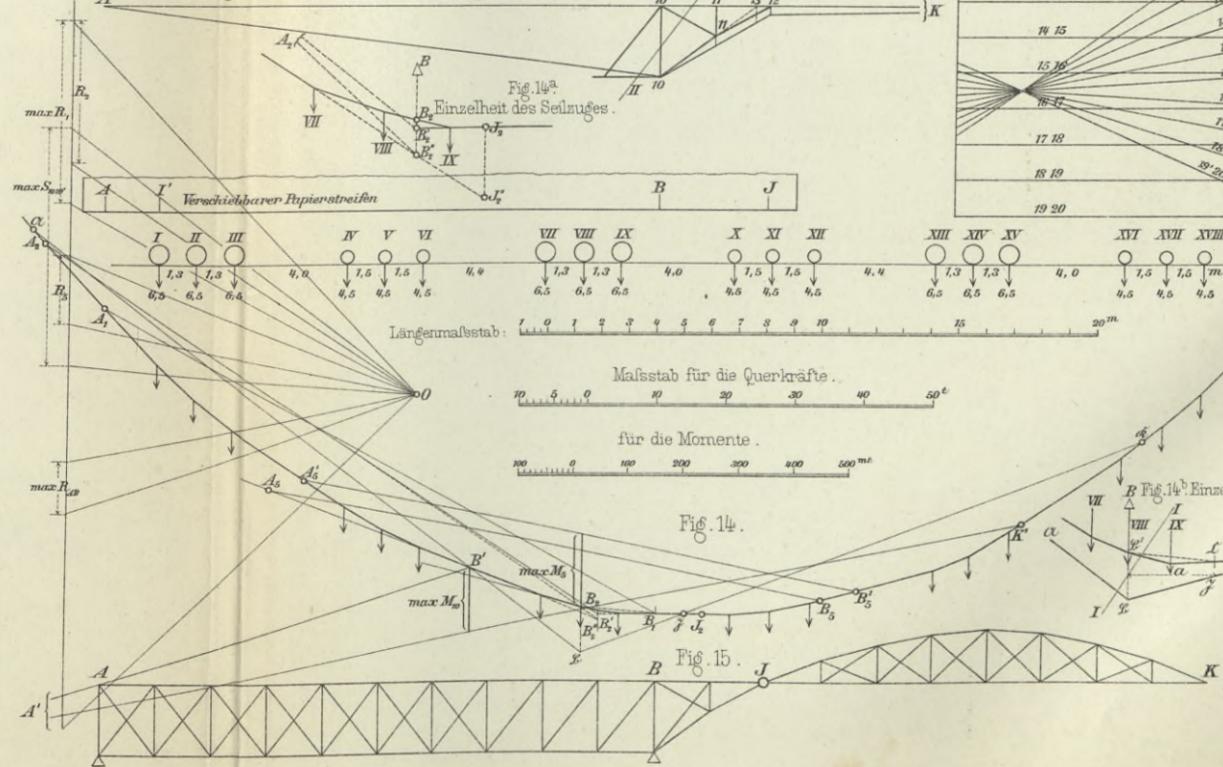
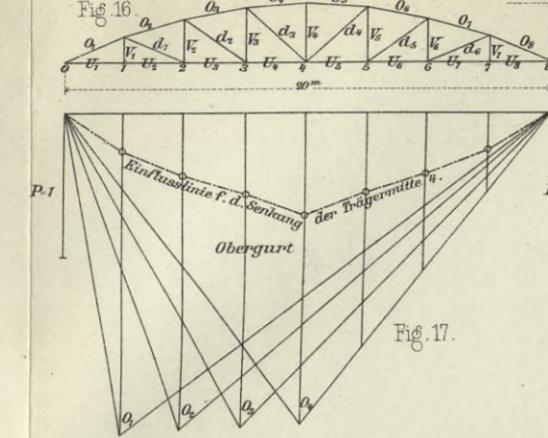


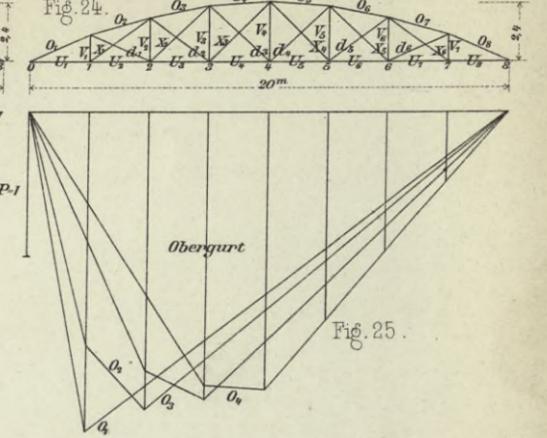
Fig. 14. Diagram showing the effect of a single load on the truss.



Parabelträger. Fachwerk statisch bestimmt (Fig. 16-20).



Parabelträger. Fachwerk statisch unbestimmt (Fig. 24-29).



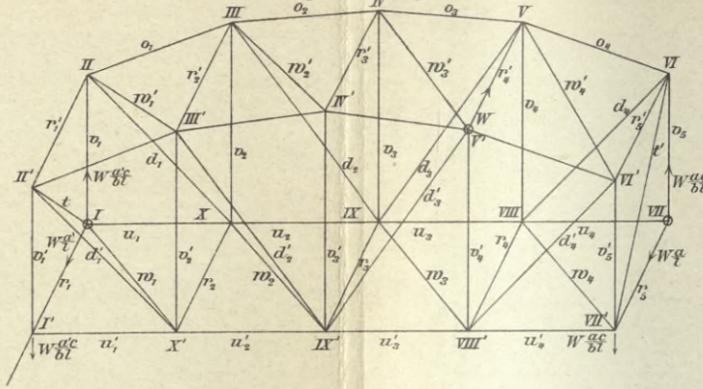
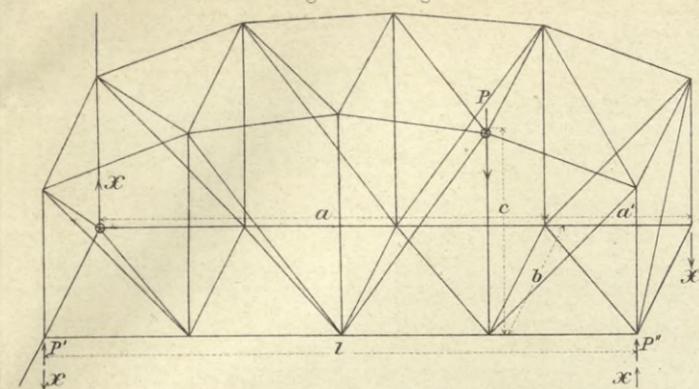
Maßstab für die Einflusslinie der Senkung der Trägermitte für 1st Last zu Fig. 17.

Maßstab für die Längen.

Fig. 1. Belastungsfall 1.

Raumfachwerk.

Fig. 2. Belastungsfall 2.



Bestimmung der Werthe β (Spannungen für $X = 1$).

Fig. 3. oberer Windverband.

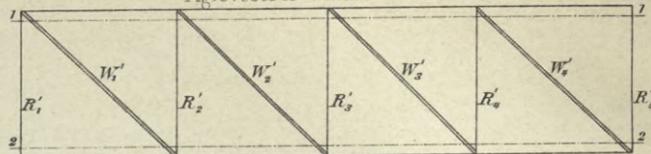


Fig. 4. unterer Windverband.

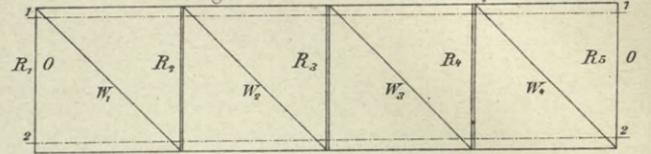


Fig. 5. Kräfte an der hinteren Tragwand.

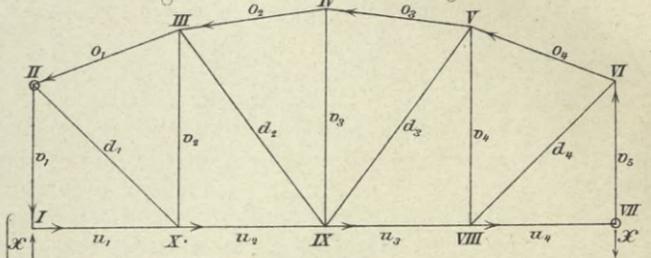


Fig. 6. Cremona Plan der Spannungen in der hinteren Tragwand.

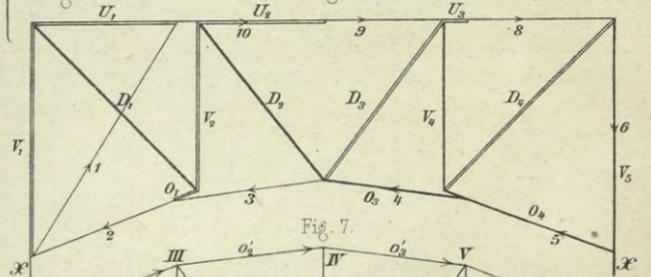


Fig. 7.

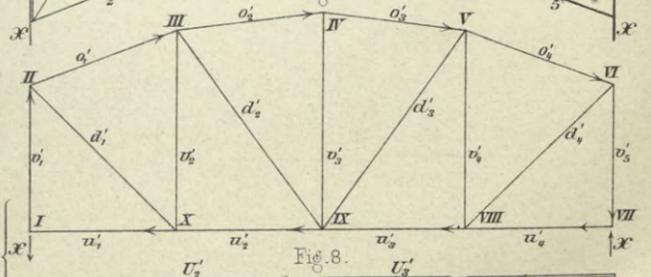


Fig. 7. Kräfte an der vorderen Tragwand.

Fig. 8. Cremona Plan der Spannungen in der vorderen Tragwand.

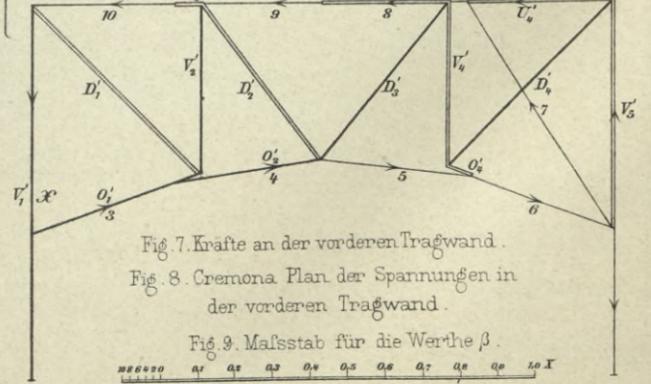


Fig. 9. Maßstab für die Werthe β .

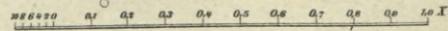
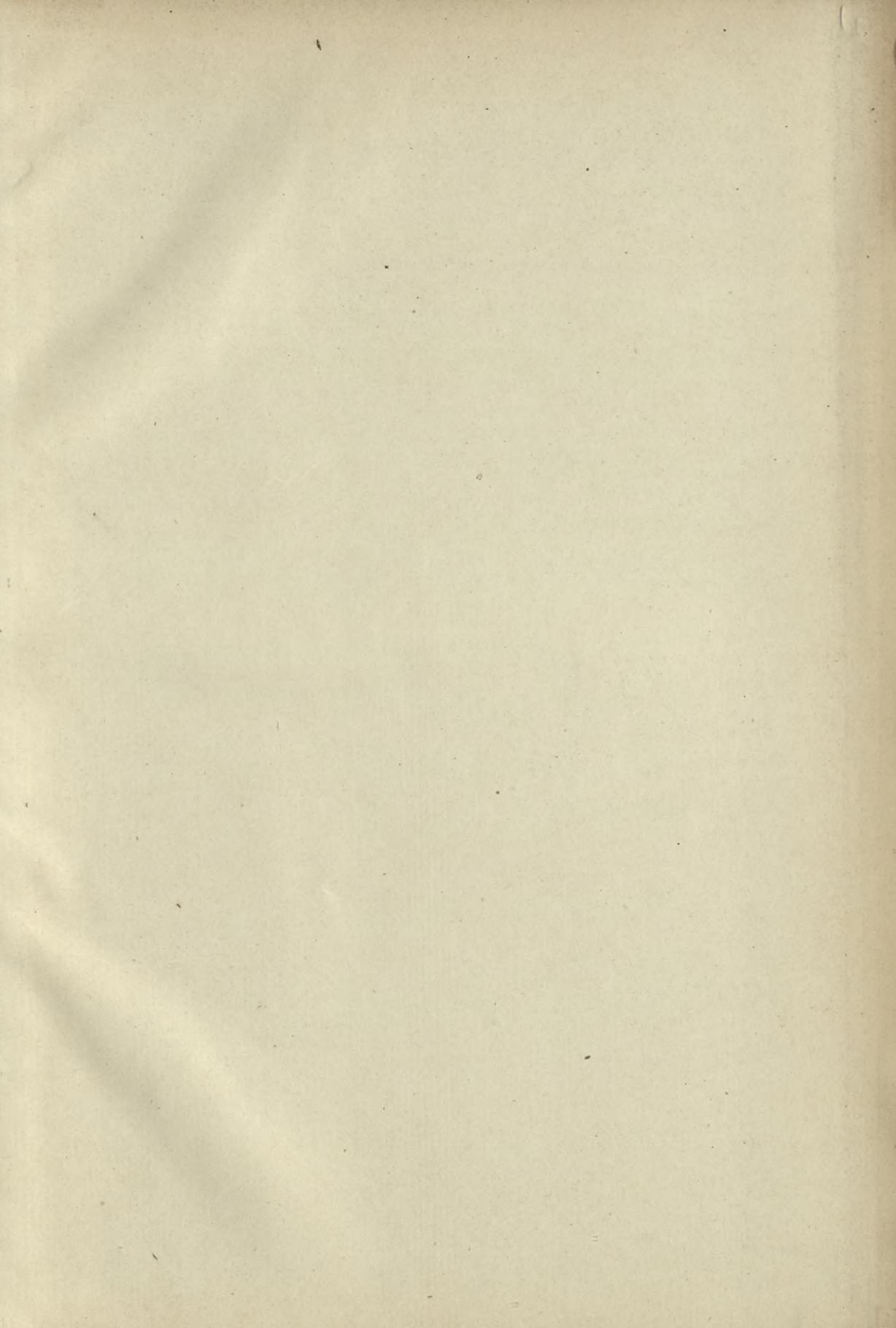


Tabelle zur Ermittlung von X.

Stab	Stammzahlen.					1. Belastungsfall Last Pin V'		1'. Belastungsfall Last Pin IV'		2. Belastungsfall Last Pin V'		Thatsächliche Spannung für Fall 2 für $S = \alpha W + \beta X$
	l cm Länge	cm ² F	10 ⁸ $\frac{W}{EF}$	β	$\frac{10^8}{\beta EF}$	α	$\alpha \beta \frac{10^8}{EF}$	α'	$10^8 \alpha' \beta \frac{10^8}{EF}$	α	$10^8 \alpha \beta \frac{10^8}{EF}$	
0 ₁	305	40	381	-0,06	+ 2	-	-	-	-	+ 0,14	- 3	- 0,15
0 ₂	301	40	376	-	-	-	-	-	-	+ 0,32	-	-
0 ₃	301	40	376	+ 0,39	+ 57	-	-	-	-	+ 0,55	+ 81	+ 0,58
0 ₄	305	40	381	+ 0,47	+ 84	-	-	-	-	+ 0,21	- 38	- 0,16
u ₁	300	40	375	- 0,39	+ 57	-	-	-	-	+ 0,03	- 7	- 0,01
u ₂	300	40	375	- 0,33	+ 41	-	-	-	-	+ 0,75	- 18	+ 0,72
u ₃	300	40	375	- 0,06	+ 13	-	-	-	-	+ 0,18	- 4	+ 0,17
u ₄	300	40	375	-	-	-	-	-	-	-	-	-
v ₁	300	30	500	- 0,62	+ 192	-	-	-	-	- 0,12	+ 37	- 0,13
v ₂	356	20	890	- 0,44	+ 172	-	-	-	-	- 0,08	+ 31	- 0,12
v ₃	373	20	932	-	-	-	-	-	-	- 0,08	-	- 0,08
v ₄	356	20	890	+ 0,44	+ 172	-	-	-	-	- 0,19	- 74	- 0,15
v ₅	300	30	500	+ 1,00	+ 500	-	-	-	-	- 1,03	- 515	- 0,93
d ₁	424	30	707	+ 0,63	+ 280	-	-	-	-	+ 0,12	+ 53	+ 0,18
d ₂	466	20	1165	+ 0,54	+ 340	-	-	-	-	+ 0,05	+ 31	+ 0,10
d ₃	466	20	1165	- 0,54	+ 340	-	-	-	-	+ 0,05	- 31	+ 0,00
d ₄	424	30	707	- 0,63	+ 280	-	-	-	-	+ 0,27	- 120	+ 0,21
					2530						- 574	
o ₁	305	40	381	+ 0,47	+ 84	- 0,19	- 34	- 0,38	- 69	+ 0,09	+ 16	+ 0,14
o ₂	301	40	376	+ 0,39	+ 57	- 0,33	- 48	- 0,66	- 97	- 0,11	- 16	- 0,17
o ₃	301	40	376	-	-	- 0,33	-	- 0,66	-	- 0,34	-	- 0,34
o ₄	305	40	381	- 0,06	+ 2	- 0,53	+ 12	- 0,38	+ 9	- 0,63	+ 14	- 0,64
u ₁	300	40	375	-	-	-	-	-	-	-	-	-
u ₂	300	40	375	- 0,06	+ 13	+ 0,18	+ 4	+ 0,35	- 8	- 0,10	+ 2	- 0,11
u ₃	300	40	375	- 0,33	+ 41	+ 0,54	+ 67	+ 0,35	- 43	- 0,12	+ 15	- 0,09
u ₄	300	40	375	- 0,39	+ 57	-	-	-	-	+ 0,02	- 3	- 0,02
u ₅	300	30	500	+ 1	+ 500	- 0,25	- 125	- 0,50	- 250	+ 0,30	+ 170	+ 0,44
v ₁	300	30	500	+ 0,44	+ 172	- 0,18	- 70	- 0,36	- 141	+ 0,09	+ 35	+ 0,13
v ₂	373	20	932	-	-	+ 0,08	-	- 0,82	-	+ 0,08	-	+ 0,08
v ₃	356	20	890	- 0,44	+ 172	- 0,54	+ 211	- 0,36	+ 141	+ 0,19	- 74	+ 0,15
v ₄	300	30	500	- 0,62	+ 192	- 0,75	+ 233	- 0,50	+ 155	- 1,03	+ 319	+ 1,07
v ₅	300	30	500	- 0,62	+ 192	- 0,75	+ 233	- 0,50	+ 155	- 1,03	+ 319	+ 1,07
d ₁	424	30	707	- 0,63	+ 280	+ 0,25	- 111	+ 0,50	- 223	- 0,12	+ 53	- 0,18
d ₂	466	20	1165	- 0,54	+ 340	+ 0,25	- 157	+ 0,52	- 264	- 0,06	+ 38	- 0,11
d ₃	466	20	1165	+ 0,54	+ 340	- 0,36	- 226	+ 0,52	+ 264	- 0,06	- 38	- 0,01
d ₄	424	30	707	+ 0,63	+ 280	+ 0,77	+ 343	+ 0,50	+ 223	- 0,26	- 116	- 0,20
					2530		+ 99		- 303		+ 415	
r ₁	300	20	750	-	-	-	-	-	-	-	-	-
r ₂	300	20	750	- 0,39	+ 114	-	-	-	-	+ 0,02	- 6	- 0,02
r ₃	300	20	750	- 0,39	+ 114	-	-	-	-	+ 0,02	- 6	- 0,02
r ₄	300	20	750	- 0,39	+ 114	-	-	-	-	+ 0,02	- 6	- 0,02
r ₅	300	20	750	-	-	-	-	-	-	- 0,75	-	- 0,75
w ₁	425	20	1063	+ 0,55	+ 322	-	-	-	-	- 0,03	- 18	+ 0,03
w ₂	425	20	1063	+ 0,55	+ 322	-	-	-	-	- 0,03	- 18	+ 0,03
w ₃	425	20	1063	+ 0,55	+ 322	-	-	-	-	- 0,03	- 18	+ 0,03
w ₄	425	20	1063	+ 0,55	+ 322	-	-	-	-	- 0,03	- 18	+ 0,03
					1630						- 90	
r ₁	300	20	750	+ 0,39	+ 114	-	-	-	-	+ 0,23	+ 67	+ 0,27
r ₂	300	20	750	+ 0,39	+ 114	-	-	-	-	+ 0,23	+ 67	+ 0,27
r ₃	300	20	750	+ 0,39	+ 114	-	-	-	-	+ 0,23	+ 67	+ 0,27
r ₄	300	20	750	+ 0,39	+ 114	-	-	-	-	- 0,77	- 225	- 0,73
r ₅	300	20	750	+ 0,39	+ 114	-	-	-	-	- 0,77	- 225	- 0,73
w ₁	432	20	1080	- 0,57	+ 351	-	-	-	-	- 0,33	+ 203	- 0,39
w ₂	426	20	1065	- 0,56	+ 334	-	-	-	-	- 0,33	+ 197	- 0,39
w ₃	426	20	1065	- 0,56	+ 334	-	-	-	-	- 0,33	+ 197	- 0,39
w ₄	432	20	1080	- 0,57	+ 351	-	-	-	-	+ 7,09	- 671	+ 1,03
					1960						- 323	
t	425	20	1063	- 0,55	+ 322	-	-	-	-	- 0,34	+ 199	- 0,40
t'	425	20	1063	- 0,55	+ 322	-	-	-	-	+ 7,09	- 687	+ 1,03
					9294		+ 99		- 303		- 1010	W

$X_1 = \frac{92}{9294} P = 0,0105 P$; $X_2 = \frac{303}{9294} P = 0,0326 P$; $X_3 = \frac{1010}{9294} W = 0,109 W$.

S. 61



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-306593

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298652