Encyklopädie
der mathematischen
Wissenschaften

II Bd. 2. T.

II B 1. ALLGEMEINE THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN a) EINER UND b) MEHRERER KOMPLEXEN GRÖSSEN

VON

W. F. OSGOOD

IN CAMBRIDGE, MASS.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

C. Briot et *C. Bouquet*, Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques, Paris 1859 (deutsch von *H. Fischer*, Halle 1862); 2. Aufl. (Théorie des fonctions elliptiques), Paris 1873.

H. Durège, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's. Leipzig 1864, 4. Aufl. 1893.

C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Leipzig 1865; 2. vermehrte Aufl. 1884.

J. Hoüel, Théorie élémentaire des quantités complexes. Paris 1867.

F. Casorati, Teorica delle funzioni di variabili complesse. Pavia 1868.

J. Thomae, Abriss einer Theorie der komplexen Funktionen und der Thetafunktionen einer Veränderlichen. Halle 1870; 3. vermehrte Aufl. 1890.

C. Méray, Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Paris 1894—98.

L. Koenigsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionenlehre, 1, Leipzig 1874.

J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Halle 1880; 2. vermehrte Aufl. 1898.

F. Klein, Einleitung in die geometrische Funktionentheorie [1880/81], (lith.) Göttingen 1892.

C. Hermite, Cours, 2. Aufl. 1881/82 (lith.) Paris 1883; 3. Aufl. 1887, 4. Aufl. 1891.

G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Leipzig 1882.

F. Klein, Über *Riemann*'s Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882.

K. Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre. Berlin 1886.

O. Biermann, Theorie der analytischen Funktionen. Leipzig 1887.

F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, ausgearbeitet und vervollständigt von *R. Fricke*, Bd. 1. Leipzig 1890.

G. Demartres, Cours d'analyse; 2^{me} partie, propriétés des fonctions analytiques. Paris 1892.

F. Klein, Riemann'sche Flächen, (lith.) Göttingen 1892.

A. R. Forsyth, Theory of Functions of a Complex Variable. Cambridge (Engl.) 1893; 2. Aufl. 1900.

J. Harkness and *F. Morley,* A Treatise on the Theory of Functions. New York 1893.

C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 2. Aufl. Paris. Bd. 1 1893, Bd. 2 1894.

E. Picard, Traité d'analyse 2, Paris 1893.

S. Pincherle, Lezioni sulla teorica delle funzioni. Bologna 1893.

F. Klein, Über die hypergeometrische Funktion, (lith.) Göttingen 1894.

F. Klein, Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, (lith.) Göttingen 1894.

W. Láska, Einführung in die Funktionentheorie. Stuttgart 1894.

O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 2. Teil, komplexe Veränderliche und Funktionen. Leipzig 1896.

H. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Leipzig 1897.

E. Picard et *G. Simart,* Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes; Bd. 1. Paris 1897.

E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Paris 1898.

J. Harkness and *F. Morley,* Introduction to the Theory of Analytic Functions. London 1898.

J. Petersen, Vorlesungen über Funktionstheorie. Kopenhagen 1898.

L. Bianchi, Teorica delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, Teil 1. Pisa 1899.

G. Vivanti, Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche, Reggio 1899 (lith.). Milano 1901.

Q. Timtschenko, Elemente der Theorie der analytischen Funktionen 1. Petersb. 1899.

E. Borel, Leçons sur les fonctions entières. Paris 1900.

R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen. Leipzig 1900.

E. Borel, Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

J. Hadamard, Scientia, La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris 1901.

A. Pringsheim, Vorlesungen über die elementare Theorie der unendlichen Reihen und der analytischen Funktionen. (Demnächst bei B. G. Teubner, Leipzig, erscheinend.)

W. F. Osgood, Allgemeine Funktionentheorie. (In Vorbereitung für B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.)

Ausserdem sei erwähnt der Bericht von *Brill* und *Noether,* über die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen; Jahresber. d. D. Math.-Ver. 3 (1892/93), p. 107—566; ferner: *Schwarz,* Ges. Werke 2. Berlin 1890.

Monographieen.

A. L. Cauchy (1789—1857). Mémoire sur les intégrales définies, lu à l'Institut le 22 août 1814, remis au Secrétariat pour être imprimé le 14 septembre 1825, Par. sav. étr. 1, p. 599 = Oeuvres (1) 1, p. 319. Über diese Abhandlung referierte *Poisson,* Bull. Soc. Philom. (3) 1 (1814), p. 185.

— Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, Paris 1825 = Bull. Darb. 7 (1874), p. 265; 8 (1875), p. 43, 148.

— De l'influence que peut avoir, sur la value d'une intégrale double, l'ordre dans lequel on effectue les intégrations, Exerc. de math. 1 (1826), p. 85 = Oeuvres (2) 6, p. 113.

— Sur diverses rélations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies, ebd. p. 95 = Oeuvres, ebd. p. 124.

— Mémoire sur divers points d'analyse, lu à l'Acad. le 3 septembre 1827, Par. Mém. 8 (1829), p. 97.

— Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de h, ζ étant une racine de l'équation $z - x - h\varpi(z) = 0$, ebd. p. 130.

— Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites, lu à l'Acad. de Turin le 11 octobre 1831; lithographierte Abhandlung. Eine italienische Übersetzung dieser Abhandlung (bezw. der ersten Teile davon) wurde in den Opuscoli matematici e fisici di diversi autori 2, p. 1, 133, 261, Milano 1834, sowie separat veröffentlicht. Der erste Teil, p. 1—48, welcher für die Funktionentheorie am wichtigsten ist, ist in der Ursprache von *Cauchy* in den Exerc. d'anal. et de phys. math. 2, Paris 1841, p. 41 gedruckt, das résumé auch Férussac Bull. 15 (1831), p. 260.

B. Riemann (1826—1866). Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse, Inaug.-Diss., Göttingen 1851 = Werke, p. 3.

— Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, darstellbaren Funktionen, Gött. Abh. 7 (1857) = Werke, p. 62 (2. Aufl., p. 67).

— Theorie der Abel'schen Funktionen, J. f. Math. 54 (1857), p. 101 = Werke, p. 81 (2. Aufl., p. 88).

— Gleichgewicht der Elektrizität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen. (Diese Arbeit gehört wahrscheinlich zu Riemann's frühesten Untersuchungen.) Nachlass, Werke 1. Aufl. (1876), p. 413; 2. Aufl., p. 440.

K. Weierstrass (1815—1897). Bemerkungen über die analytischen Fakultäten, Progr. Deutsch-Crone 1843, p. 3 = Werke 1, p. 87.

— Über die Theorie der analytischen Fakultäten, J. f. Math. 51 (1856), p. 1 = Werke 1, p. 153.
— Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Berl. Abh. 1876, p. 11 = Werke 2, p. 77.
— Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. Lithographiert, Berlin 1879 = Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886, p. 105 = Werke 2, p. 135.
— Über einen funktionentheoretischen Satz des Herrn *G. Mittag-Leffler*, Berl. Ber. 1880, p. 707 = Werke 2, p. 189.
— Zur Funktionentheorie, Berl. Ber. 1880, p. 719 = Werke 2, p. 201.
— Drei seinerzeit nicht veröffentlichte Abhandlungen: a) Darstellung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt (1841); b) Zur Theorie der Potenzreihen (1841); c) Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen (1842); Werke 1 (1894), p. 51—84.

Einleitende Bemerkungen.

Der Erfindung der Infinitesimalrechnung durch *Newton* und *Leibniz* folgte die Anwendung und Ausbildung derselben an zahlreichen Aufgaben verschiedenster Natur aus der Geometrie und der mathematischen Physik, sowie die formale Entwicklung der Integralrechnung incl. der bestimmten Integrale. Durch das Problem der zweidimensionalen Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit wurde man auf ein Paar von reellen Funktionen u, v der rechtwinkligen Koordinaten x, y geführt, die den beiden Relationen genügen:

$$\int u\,dx + v\,dy = 0, \quad \int v\,dx - u\,dy = 0,$$

wobei die Integrale über eine beliebige geschlossene Kurve hin erstreckt werden. Dieses Problem war typisch für eine Reihe von Problemen der Physik und der Geometrie (namentlich der Kartenprojektion), wo sich ein Funktionenpaar (u, v) einstellt, dessen Elemente den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

genügen. Man erkannte, dass die Funktion u eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist und dass jede Funktion von der Form

$$u = \varphi\left(x + y\sqrt{-1}\right) + \psi\left(x - y\sqrt{-1}\right),$$

wo φ, ψ „willkürliche Funktionen" sind, deren Summe nur reelle

Werte annimmt, eine Lösung dieser Gleichung liefert. Selbstverständlich fehlte zu der Zeit jede genaue Bestimmung des Funktionsbegriffs. Man definierte die Zahlen und die Funktionen nicht, man rechnete mit ihnen. Für den Fall, dass φ, ψ Polynome oder Potenzreihen mit reellen Koeffizienten oder sonstige aus den elementaren Funktionen zusammengesetzte Ausdrücke waren, war die Sache ja in Ordnung und um die Berechtigung zur Verallgemeinerung machte man sich keine Sorge.

Während dieser Zeit, also bis Ende des 18. Jahrhunderts, hatten sich die imaginären Grössen auch bei der formalen Entwicklung der Analysis als nützlich erwiesen. Die Trigonometrie war durch den De Moivre'schen Satz bereichert. Die elementaren Funktionen wurden für komplexe Werte des Arguments formal erklärt. Man gelangte zu der Einsicht, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer algebraischen Kurve m^{ter} mit einer solchen n^{ter} Ordnung nicht blos die Zahl mn zur oberen Grenze hat, wenn man die reellen Schnittpunkte ausschliesslich betrachtet, sondern dass bei Zulassung imaginärer Grössen (und bei geeigneter Festsetzung bez. des Verhaltens der Kurven im Unendlichen) diese Zahl in der That stets erreicht wird. In der Integralrechnung stellte sich heraus, dass die im Gebiete der reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen völlig von einander verschiedenen Formeln

$$\int \frac{dx}{1+ax^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{a}, & a > 0; \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{-a}} \log \dfrac{1+x\sqrt{-a}}{1-x\sqrt{-a}}, & a < 0, \end{cases}$$

im Gebiete der komplexen Grössen mit einander identisch sind. Diese Übereinstimmung sprach den ästhetischen Sinn der Mathematiker an. Für die Praktiker war der Umstand von Bedeutung, dass man die bekannten Formeln für die Auswertung bestimmter Integrale durch den Gebrauch imaginärer Grössen wesentlich erweiterte.

Die Existenzbeweise, welche das 19. Jahrhundert in der Mathematik auszeichnen, wurden um die Wende des Jahrhunderts durch den Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra eingeleitet. Auch die Darstellung komplexer Zahlen durch die Argand-Gauss'sche Zahlenebene kann gewissermassen als ein Existenzbeweis für die imaginären Grössen angesehen werden und ist in der That vielfach als ein solcher aufgefasst worden. Diese Darstellung trug entschieden dazu bei, den Gebrauch der komplexen Zahlen den Mathematikern sympathischer zu machen. Von welcher Wichtigkeit diese

Zahlen und die mittelst derselben erhaltenen Resultate bereits damals waren, zeugt der Umstand, dass die frühesten Forschungen der beiden ersten Mathematiker des Jahrhunderts, *Gauss* *) und *Cauchy*, sich auf diesem Gebiete der Mathematik bewegten. Allerdings war es *Cauchy* von vornherein nicht um die imaginären Grössen als solche zu thun. Er verhielt sich diesen gegenüber neutral, ja man könnte fast sagen, dass sein Bestreben eher darauf gerichtet war, derselben zu entraten. Erst nachdem er sein Problem unter Trennung der Funktionen in ihren reellen und rein imaginären Teil gelöst hatte, erkannte er, wie gut es ist, eine solche Trennung eben nicht vorzunehmen, sondern direkt von dem Satze

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

wo das Integral über eine beliebige geschlossene Kurve hin erstreckt wird, auszugehen**). Darauf gründet sich der Residuenkalkül, der ja nichts anders ist als die Methode des Herumintegrierens. Dieser Fortschritt ist durch den Versuch herbeigeführt, die durch formale Integration imaginärer Ausdrücke erhaltenen Formeln der Integralrechnung durch strenge Methoden zu begründen.

Eine Frage der ersten Wichtigkeit für die angewandte Mathematik ist die der Gültigkeit der verwendeten Reihenentwicklungen. Indem *Cauchy*, von der für die Astronomie besonders wichtigen Lagrange'schen Reihe ausgehend, sich die Aufgabe stellte, den Gültigkeitsbereich der Entwicklung einer Funktion nach ganzen positiven Potenzen zu bestimmen, wurde er auf eine der wesentlichsten Eigenschaften der analytischen Funktionen geführt, und zwar auf eine Eigenschaft, welche die Bildung der Funktion für komplexe Werte des Arguments unvermeidlich machte. Ist nämlich $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, welche sich für den Wert $x = x_0$ in eine Potenzreihe nach $x - x_0$ entwickeln lässt — es sei beispielsweise $f(x) = 1/1 + x^2$ — so stellt sich heraus, dass der Gültigkeitsbereich dieser Entwicklung für reelle Werte von x sich dadurch bestimmen lässt, dass man die Funktion $f(x)$ für komplexe Werte z des Arguments in naheliegender Weise definiert, die singulären Punkte derselben aufsucht (im vorliegenden Beispiel sind es

*) Man vgl. ferner die Briefe an *Bessel* vom 21./11. u. 18./12. 1811 (Briefwechsel, p. 152, 157, der 2. auch Werke 8, p. 90), sowie das demnächst in der Festschrift der Göttinger Ges. d. Wiss. erscheinende Tagebuch von *Gauss* (1798), Nr. 95.

**) Die beiden Gleichungen $\int u\,dx + v\,dy = 0$, $\int v\,dx - u\,dy = 0$, welche die mathematische Physik lieferte, werden also jetzt zu einer einzigen Gleichung zwischen komplexen Grössen vereinigt.

also die Punkte $z = \pm \sqrt{-1}$) und dann einen Kreis in der z-Ebene mit dem Mittelpunkt $z = x_0$ beschreibt, der durch die diesem Punkte am nächsten gelegene Singularität geht. Dieser Kreis schneidet auf der reellen Axe den Gültigkeitsbereich der reellen Potenzreihenentwicklung der reellen Funktion $f(x)$ ab. Nun wird aber die Singularität, welche den Radius dieses Kreises bestimmt, im allgemeinen nicht auf der reellen Axe liegen, so dass die Definition und die Untersuchung des Verlaufs der Funktion im komplexen Gebiet gar nicht zu vermeiden ist*). Aber noch mehr. Will man eine unendliche Reihe zum Zweck des numerischen Rechnens gebrauchen, so genügt nicht, von derselben blos zu wissen, dass sie konvergiert. Man muss ausserdem noch den Fehler abschätzen können, den man beim Abbrechen der Reihe begeht. Diese Abschätzungsformel für die Potenzreihenentwicklung**) ergiebt sich auch aus den Werten, welche die Funktion im komplexen Gebiete annimmt. Damit ist denn das Problem der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Potenzreihe zum Zweck des numerischen Rechnens in seinen beiden Teilen gelöst und zwar beruht die Lösung wesentlich auf dem Gebrauch imaginärer Grössen. Dieser Entdeckung *Cauchy*'s war durch seinen Cours d'Analyse vom Jahre 1821 eine strenge Begründung der Reihensätze für komplexe Grössen vorausgegangen.

Indessen hatten sich *Abel* und *Jacobi* in das Studium der elliptischen und höherer Transcendenten vertieft. Die Periodeneigenschaften dieser Funktionen, welche den Anstoss zu so vielen Untersuchungen der modernen Mathematik gegeben haben, wurzeln in den gemeinen komplexen Zahlen***), während die neuen Hülfsfunktionen (die Θ-Funktionen u. dergl.) mit dazu beitrugen, eine allgemeine Funktionentheorie anzubahnen. Es sei noch der Fortschritte der mathematischen Physik in dieser Periode, namentlich der Ausbildung der Methode der krummlinigen (insbesondere der isothermischen) Koordinaten gedacht.

---

*) Bei dieser Skizze des Verfahrens ist vorausgesetzt, dass die Funktion $f(z)$ entweder überhaupt eindeutig ist oder doch in dem in Betracht kommenden Bereich T der z-Ebene nicht mehrdeutig wird.

**) Es handelt sich hier im wesentlichen um die Formel $|a_n| \leqq Mr^{-n}$, wo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $|x - x_0| \leqq r$, $|f(z)| \leqq M$, $|z - x_0| = r$ und $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ ist.

***) Bei den arithmetischen Untersuchungen von *Gauss* und *Galois* spielten die imaginären Zahlen auch eine Hauptrolle.

Gegen Mitte des Jahrhunderts war nun der Boden bereitet für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Bei *Riemann*'s Untersuchungen war die Definition einer Funktion durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der leitende Gedanke, die Methode der konformen Abbildung ein wesentliches Hülfsmittel, während die Abgrenzung des Funktionsbegriffs durch analytische Fortsetzung von *Weierstrass* scharf betont wurde. Der prinzipielle Gebrauch von Funktionalgleichungen, um die analytische Funktion zu definieren und zu erforschen, nahm nunmehr eine Hauptstellung in der Theorie ein. Die Grundlage der modernen Funktionentheorie ist jetzt fertig*).

Stellt man sich die Frage, warum sich die Mathematiker so eingehend mit der Theorie dieser Funktionen beschäftigt haben, so ist der Grund wohl darin zu erblicken, dass aus einer geringen Anzahl einfacher Eigenschaften eine Fülle von Funktionsklassen hervorgeht, welche, an sich interessant, in enger Beziehung zu wichtigen Gebieten der reinen und der angewandten Mathematik stehen. Es zeigt sich also ein innerer Zusammenhang zwischen den gemeinen komplexen Zahlen und derjenigen Analysis, welche sich für die Mathematik, wie sie sich entwickelt hat, als brauchbar erweist.

I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Grösse.

1. Die Bereiche T, B, T'. Unter einem Kontinuum der $z=x+yi$-Zahlenebene (I A 4) versteht man eine Punktmenge T von der Beschaffenheit, a) dass jeder Punkt z von T ein innerer Punkt der Menge ist, d. h. dass alle Punkte z' eines genügend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkt z ($|z'-z|<\delta$) zur Menge gehören; b) dass je zwei Punkte von T sich durch eine reguläre[1]) Kurve verbinden

*) Näheres über die leitenden Gesichtspunkte dieser Theorie findet man in den Nrn. **30**, **13**, **16**, **19**ff. dieses Artikels.

1) Ein Kurvenstück soll in diesem Artikel *regulär* heissen, wenn die Kurve sich selbst nicht schneidet und in jedem Punkte eine Tangente besitzt, die sich längs des ganzen Stückes incl. der Endpunkte stetig dreht. Eine Kurve soll *regulär* heissen, wenn sie durch Aneinanderreihung einer endlichen Anzahl regulärer, einander nicht schneidender Kurvenstücke gebildet ist. Zum vorliegenden Zweck könnte man einfach festsetzen, dass die Kurve aus einer endlichen Anzahl analytischer oder sogar geradliniger Stücke bestehen soll.

Diese Definition des Kontinuums rührt von *Weierstrass* (Vorlesungen an der Berliner Universität) her; vgl. auch *Weierstrass*, Berl. Ber. 1880, p. 719, § 1; *Stolz*, Diff.- u. Int.-Rechn. 3, p. 119; sowie II A 1, Nr. **21**.

lassen, die ganz in T verläuft. In diesem Artikel soll schlechtweg unter einem *Bereich* T stets eine solche Menge verstanden werden[2]). Die Randpunkte eines Bereiches T gehören nicht zum Bereich. — Wird ein Kontinuum durch eine endliche Anzahl (n) regulärer Kurven vollständig begrenzt und zählt man die Randpunkte auch zu der Menge, so wird eine solche Punktmenge als ein *Bereich* B resp. B_n bezeichnet[2a]). Endlich wird ein in T beliebig gelegener Bereich B resp. B_n mit T' resp. T_n' bezeichnet. Der Begriff des Bereiches T' setzt also einen Bereich T voraus. Es sei bemerkt, dass die untere Grenze der Entfernung zwischen einem beliebigen Punkte von T' und einem beliebigen dem Bereich T nicht zugehörigen Punkte eine positive Grösse ist. Unter dem Ausdruck: z liegt *in* resp. *innerhalb* B, T', soll verstanden werden, dass z ein innerer oder Randpunkt resp. ein innerer Punkt von B, T' ist.

Unter der *Umgebung* (oder *Nähe*, *Nachbarschaft*) eines Punktes a versteht man einen den Punkt a enthaltenden Bereich T, dessen Punkte z sämtlich um weniger als eine zweckmässig anzunehmende positive feste Grösse h von a abstehen: $|z - a| < h$. Ist S eine Punktmenge von der Beschaffenheit, dass für jeden Wert von h mindestens ein Punkt von S der entsprechenden Umgebung von a angehört, so sagt man: in der Umgebung des Punktes a liegen Punkte von S. Überhaupt liegt es in dem Begriff der *Umgebung*, dass, wenn h_1 ein Wert von h ist, der den Anforderungen des Problems entspricht, jeder kleinere Wert $h_2 : 0 < h_2 < h_1$, denselben auch genügen muss.

2. Funktionen eines komplexen Arguments; analytische Funktionen. In einem Bereich T mögen zwei reelle Funktionen u, v eindeutig erklärt sein; man bilde die Funktion $f(z) = u + vi$. Sind u, v beide in T stetig, so heisst $f(z)$ in T stetig. Es besteht der Satz[3]):

---

2) Soll in einem besonderen Fall die schlichte Ebene als Trägerin des Kontinuums durch eine mehrblättrige *Riemann*'sche Fläche (Nr. **11**) ersetzt werden, so wird das ausdrücklich erwähnt; der betreffende Bereich wird dann mit einem Fraktur-$\mathfrak{T}$ bezeichnet. — Die Begrenzung von T kann durch reguläre Kurven und isolierte Punkte oder auch durch eine (geschlossene) Punktmenge komplizierten Charakters (vgl. Nr. **34**) gebildet werden.

2[a]) Dass jede geschlossene Kurve ohne mehrfachen Punkt die Ebene in äussere und innere Punkte zerlegt und dass die äusseren Punkte einerseits und die inneren Punkte andererseits ein Kontinuum bilden, hat *C. Jordan* (Cours d'anal. 1, 2. Aufl., p. 90) gezeigt, indem er die Richtigkeit dieser Sätze für den Fall eines Polygons als einleuchtend ansieht. Ist die Kurve eine reguläre, so bilden die inneren Punkte nebst den Punkten der Kurve einen B_1.

3) In dieser Form von *Ch. Sturm* ausgesprochen und bewiesen; J. de math.

Ist $f(z)$ in T stetig und verschwindet $f(z)$ in einem T_1' nicht, so kehrt eine Bestimmung des Winkels $\theta = \operatorname{arc\,tang} v/u$, welche sich stetig ändern soll, während z die Begrenzung von T_1' stetig durchläuft, in ihren Anfangswert wieder zurück. Daraus ergiebt sich ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, sowie der Stetigkeit und des analytischen Charakters einer algebraischen Funktion[4]). Vgl. auch Nr. 7.

Der Begriff des bestimmten Integrals $\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ als Grenzwert der Summe $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$, wo die Punkte z_i auf einer in T beliebig verlaufenden regulären Kurve liegen, ist von *Cauchy* eingeführt[5]), der sich der Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bedient und der Definition die Formel zu Grunde legt:

$$\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} (x'u - y'v)\,dt + i\int\limits_{t_0}^{T} (y'u + x'v)\,dt.$$

Man sagt: die Funktion $f(z)$ besitzt eine Ableitung $f'(z)$ in einem Punkte z_0 von T, falls der Quotient

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

---

1 (1836), p. 298. Vgl. auch *Stolz*, Diff.- u. Int.-Rechn. 2, XI. Abs., Nr. 7; sowie *Briot* et *Bouquet*, 2. Aufl., Nr. 21.

4) *Cauchy*, Turiner Abhandlung vom Jahre 1831; Exerc. d'anal. 2 (1841), p. 109; *Briot* et *Bouquet*, 2. Aufl., ch. 2.

Wegen *Cauchy*'s Leistungen sei überhaupt auf das Werk verwiesen: La vie et les travaux du Baron *Cauchy*, par *C.-A. Valson*, Paris 1868, sowie auf eine Besprechung desselben von *J. Bertrand*, Darb. Bull. 1 (1870), p. 105. Ferner vgl. man *Casorati*, Teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia 1868. Der Bericht von *Brill* und *Noether*, Jahresb. d. D. Math.-Ver. 3 (1892/93) enthält eine Übersicht und eine kritische Würdigung jener Leistungen auf dem Gebiet der Funktionentheorie. Die erste zusammenfassende Darstellung der *Cauchy*'schen Theorie ist von *Briot* und *Bouquet* gegeben worden: J. éc. pol. cah. 36, Bd. 21 (1856), p. 85—254; im Anschluss daran ihr Lehrbuch, vgl. Litteraturverzeichnis.

In dem Bericht von *Brill* und *Noether* wird auch die Vorgeschichte der heutigen Funktionentheorie geschildert. Die *Newton*'sche Reihenentwicklung einer impliciten algebraischen Funktion, der *Taylor*'sche und der *Maclaurin*'sche Lehrsatz, das Problem der Reihenentwicklung in einem singulären Punkte einer algebraischen Kurve, die Entstehung des Begriffs „Funktion“ (*Leibniz*) und die *Lagrange*'schen „fonctions analytiques“ werden besprochen.

5) Jedoch ohne Bezugnahme auf geometrische Vorstellungen; vgl. [13]).

gegen ein und denselben endlichen Grenzwert $f'(z_0)$ konvergiert, wie auch immer Δz dem Wert 0 zustrebt[6]).

Die Funktion $f(z)$ heisst *in T analytisch*[7]), wenn sie in jedem Punkte von T eindeutig erklärt ist und eine Ableitung $f'(z)$ besitzt. Bisher war man gezwungen, auch noch die Stetigkeit der Ableitung zu verlangen, denn sonst war kein Beweis des *Cauchy*'schen Integralsatzes (Nr. **3**) bekannt. Durch den neuen *Goursat*'schen Beweis[16]) ist man dieser Voraussetzung überhoben. — Zur vollständigen Definition der analytischen Funktion gehört noch der Begriff der analytischen Fortsetzung (Nr. **13**). Man darf wohl sagen, die bisherige Definition bezieht sich auf das Verhalten der Funktion *im Kleinen* (weiter war man ja vor *Weierstrass* nicht gekommen); es fehlt noch eine Festsetzung bezügl. des Verhaltens der Funktion *im Grossen*[8]). — Eine Funktion $f(z)$ *verhält sich im Punkte z_0 analytisch*[9]) oder *ist analytisch im Punkte z_0*, wenn $f(z)$ in der Umgebung des Punktes z_0 analytisch ist.

Eine hinreichende Bedingung, dass $f(z) = u + vi$ eine in T ana-

---

6) Die Mittelwertsätze der Differential- und Integralrechnung sind auf Funktionen eines komplexen Arguments von *G. Darboux* (J. de math. (3), 2 (1876), p. 291) und *K. Weierstrass* ausgedehnt worden; vgl. *Hermite*, Cours, 4. Aufl. (1891), 7e Leçon, p. 57; *Stolz,* Diff.- u. Int.-Rechn., 2, p. 66 u. 167.

7) Nach *Weierstrass*, in Anlehnung an *Lagrange*. *Weierstrass* legte eine der Form nach von der des Textes verschiedene Definition zu Grunde (Nr. **13**). *Holomorph, synectique* und *regulär* werden auch in diesem Sinne gebraucht. — *Cauchy* und seine Schüler führten eine grosse Anzahl neuer Bezeichnungen ein, wie z. B. *monodrom,* Exerc. d'anal. 4 (1847), p. 325 u. 345, u. Par. C. R. 36 (1853), p. 458; *monotrop*, *Briot* et *Bouquet,* 1, 2. Aufl., p. 10; *monogène,* ibid. p. 346; *synectique, Cauchy,* Par. C. R., 36 (1853), p. 459; *holomorph, Briot* et *Bouquet,* 1, 2. Aufl., p. 14, u. s. w. Die entsprechenden Definitionen sind jedoch von den Mathematikern mehrfach abgeändert worden.

8) Der Begriff des Verhaltens einer Funktion *im Kleinen* und *im Grossen* spielt in der Analysis eine wichtige Rolle und erstreckt sich auf alle Gebiete der Mathematik (namentlich auch auf die Geometrie), wo eine stetige Menge von Elementen das Substrat für die in Betracht zu ziehenden Gebilde bildet. In der Funktionentheorie versteht man unter dem Verhalten einer Funktion *im Kleinen* resp. *im Grossen* ihr Verhalten in der Umgebung eines festen Punktes a, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oder einer Punktmenge P (Nr. **40**) [der Kürze halber spricht man dann schlechtweg von ihrem Verhalten *im* Punkte a, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oder *in* der Punktmenge P] resp. in einem Bereich $T, T', \mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$ u. s. w., dessen Ausdehnung von vornherein feststeht und nicht erst hinterher den Bedürfnissen des vorgelegten Problems entsprechend bestimmt wird. In vielen Fällen folgt aus einem gegebenen Verhalten im Kleinen in jedem Punkte eines Bereiches T', $\mathfrak{T}'$ das entsprechende *gleichmässige* (Nr. **6**) Verhalten im Grossen.

9) Die Bezeichnungen *holomorph* u. s. w. werden auch gebraucht; vgl. [7]).

lytische Funktion von z ist, besteht darin, a) dass u, v beide in jedem Punkte von T eindeutig erklärt sind und ein erstes vollständiges Differential[10]) besitzen; b) dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sind. Dass diese Bedingung auch notwendig ist, ergiebt sich aus der in Nr. **3** nachgewiesenen Stetigkeit der Funktion $f'(z)$.

Die Gleichungen heissen die *Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen;* sie treten bereits bei *d'Alembert*[11]) auf.

Sind $f(z)$, $\varphi(z)$ zwei in T analytische Funktionen, so sind auch die Funktionen $f(z) + \varphi(z)$, $f(z) \cdot \varphi(z)$ und, wofern $\varphi(z)$ in T nicht verschwindet, $f(z)/\varphi(z)$ in T analytisch. Ferner, sei $\varphi(z)$ im

---

10) *Stolz,* Diff.- u. Int.-Rechn. 1, IV. Abs. § 8.

11) Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris 1752. Um die Geschwindigkeitskomponenten einer Flüssigkeit zu bestimmen, die sich in zwei Dimensionen bewegt, wird *d'Alembert* auf das Problem geführt (S. 60 des Essai): Es seien $u\,dx - v\,dy$, $v\,dx + u\,dy$ exakte Differentiale; man soll die Funktionen u, v bestimmen. Die Lösung bewerkstelligt er durch einen Kunstgriff, indem er bemerkt, dass sowohl

$$u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy) = (u + iv)(dx + i\,dy)$$

als auch

$$u\,dx - v\,dy - i(v\,dx + u\,dy) = (u - iv)(dx - i\,dy)$$

exakte Differentiale sind. Daraus schliesst er, dass $u + iv$ eine Funktion von $x + iy$ und dass $u - iv$ eine Funktion von $x - iy$ ist. Damit die Werte von u, v reell ausfallen, genügt es,

$$u + vi = \varphi(x + iy) + i\psi(x + iy)$$

zu setzen, wo φ, ψ zwei beliebige analytische Funktionen sind, die reelle Werte annehmen, wenn y verschwindet. Auf das *d'Alembert*'sche Resultat nimmt *Euler* Bezug: Berl. Mém. (année 1755), p. 356. Vgl. ferner *Stäckel,* Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 109; *Timtschenko,* Abh. neuruss. Ges. Naturf. 19, Odessa 1899; Revue sémestr. 8 (1899), p. 151. — Bei *Lagrange* treten diese Differentialgleichungen an verschiedenen Stellen auf; vgl. eine Abhandlung über Flüssigkeitsbewegung, Misc. Taur. 3 (1762—65), p. 205 = Oeuvres 1, p. 498, sowie seine Untersuchungen über Kartenprojektion, Berl. nouv. mém. (année 1779), p. 161 = Oeuvres 4, p. 637 = Ostwald, Klassiker, Nr. 55.

Als ein Vorläufer der *d'Alembert*'schen Arbeit ist ein Werk von *Clairaut,* Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique (Paris 1743) zu erwähnen, in welchem die Bedingung, dass der Wert des Integrals $\int P\,dx + Q\,dy$ vom Integrationswege unabhängig sei, nämlich die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, abgeleitet ist. Vgl. eine zweite Abhandlung von *Stäckel* zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert, wo der hydrodynamische Ursprung dieser Differentialgleichungen näher erörtert ist; Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 111.

Punkte z_0, $f(w)$ im Punkte w_0 analytisch, und sei $w = \varphi(z)$, dann wird $f(w)$, als Funktion von z betrachtet, im Punkte z_0 analytisch sein[12]).

3. Der Cauchy'sche Integralsatz; das Residuum. Einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie ist der sogenannte *Cauchy'sche Integralsatz*[13]): Ist die Funktion $f(z)$ in T analytisch und wird das Integral $\int f(z)\,dz$ längs der n Begrenzungskurven $C_1, \ldots, C_n$ eines beliebigen T_n' erstreckt, so hat das Integral den Wert 0:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0\,.$$

Der ursprüngliche *Cauchy*'sche Beweis, welcher mittelst der Variationsrechnung geführt wurde, ist von *Falk* streng gemacht worden[14]). Ein zweiter Beweis stützt sich auf den Satz der Integralrechnung[15])

12) Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem Satz der Potentialtheorie: Es sei u eine Lösung der *Laplace*'schen Differentialgleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ in einem Bereich T; führt man dann isothermische Koordinaten $\xi = \chi(x, y)$, $\eta = \omega(x, y)$ ein, wo $\Delta \xi = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$, so wird auch u der *Laplace*'schen Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ genügen.

Der Satz wird zuweilen wie folgt ausgesprochen: Eine analytische Funktion einer analytischen Funktion ist wieder eine analytische Funktion. Genauere Formulierung bei *Burkhardt*; vgl. Nr. **13**.

13) *Cauchy*, Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, Paris 1825; wieder abgedruckt in Darb. Bull. 7 (1874), p. 265 und 8 (1875), p. 43 und 148. Der Satz ist hier etwas anders formuliert und dient noch nicht zu den Zwecken einer allgemeinen Theorie der Funktionen; erst in den vierziger Jahren erscheint er im gegenwärtigen Lichte; vgl. *Brill* u. *Noether*, p. 172, Nr. 18 u. p. 181, Nr. 25. — *C. Jordan*, Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 196. *Jordan* definiert das komplexe Integral und beweist den Integralsatz unter der Voraussetzung, dass der Integrationsweg resp. die Begrenzungskurven $C_1, \ldots, C_n$ von T_n' bloss *rektifizierbar* sind. Vgl. auch *A. Pringsheim*, Münch. Ber. 25 (1895), p. 54.

Dem Integralsatz waren Untersuchungen von *Cauchy* über Integration durch imaginäres Gebiet vorausgegangen; vgl. Monographieen, *Cauchy*, (1). Der dritte *Gauss*'sche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (1816) beruht auch auf dem Verhalten eines Doppelintegrals bei Vertauschung der Integrationsfolge. Vgl. den Bericht von *Brill* und *Noether*, p. 157, sowie den Brief von *Gauss* an *Bessel* [18]).

Wegen Integration durch imaginäres Gebiet vgl. *Stäckel*, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 109. Vor *Cauchy* waren schon auf formalem Wege manche Integrationsformeln gewonnen; vgl. unten.

14) *Cauchy*, ibid.; *Falk*, Darb. Bull. (2) 7 (1883), p. 137.

15) *Cauchy*, Par. C. R. 23 (1846), p. 251; *B. Riemann*, Gött. Diss. 1851

(II A 2, Nr. 45): Sind P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in T eindeutige und stetige Funktionen von x, y und ist $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, so hat das Integral $\int P\,dx + Q\,dy$, längs der Begrenzung $C_1, \ldots, C_n$ eines beliebigen T_n' erstreckt, den Wert 0:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Noch einen dritten Beweis hat *E. Goursat*[16]) gegeben und später in der Weise ergänzt, dass bloss die Existenz, nicht aber die Stetigkeit der Ableitung vorausgesetzt wird.

Der Integralsatz gilt noch unter der Voraussetzung, dass $f(z)$ in einem Bereich B eindeutig und stetig und innerhalb B analytisch ist, wobei dann das Integral selbst längs der Begrenzung C von B erstreckt werden darf (Beweis etwa durch Grenzübergang[17])). — Aus dem Integralsatz ergiebt sich, dass das Integral $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, längs eines in einem T_1' gelegenen Weges erstreckt, eine in T_1' eindeutige und analytische Funktion von z darstellt[18]). — Der Integralsatz lässt auch eine Umkehrung zu: Ist $f(z)$ in T eindeutig und stetig und verschwindet $\int_C f(z)\,dz$, was auch immer für ein Bereich T_1' angenommen werden möge, so ist $f(z)$ in T analytisch[19]).

= Werke, p. 3; *Picard*, Tr. d'anal. 1, p. 73; 2, p. 4; *A. Pringsheim* a. a. O. p. 39; *M. Bôcher*, N. Y. Bull. (2) 2 (1896), p. 146.

16) Acta Math. 4 (1884), p. 197; Bull. Am. Math. Soc. (2) 5 (1899), p. 427; Amer. Trans. 1 (1900), p. 14.

17) *H. A. Schwarz*, Zür. Viert. 15 (1870), p. 113 = Werke 2, p. 174; vgl. *Stolz*, Diff.- u. Int.-Rechn. 2, p. 217. Der Beweis bedarf einer Ergänzung, da der Fall, wo die Randkurve durch eine Parallele zur x- resp. y-Achse unendlich oft geschnitten wird, nicht erledigt ist; vgl. *A. Pringsheim*, Amer. Trans. 2 (1901).

18) Diesen Satz spricht *Gauss*, nachdem er den Begriff des zwischen komplexen Grenzen erstreckten Integrals erklärt hat, in einem Brief an *Bessel* vom 18. Dez. 1811 aus, ohne jedoch den analytischen Charakter der Funktionen zu erwähnen. Mit Hilfe derselben zeigt er an dem Beispiel $\log x = \int_1^x \frac{dx}{x} + C$, dass die Definitionen einer Funktion einer reellen Variabeln in verschiedenen Intervallen der reellen Achse nicht unabhängig von einander getroffen werden dürfen, falls der stetigen Fortsetzung derselben durch das Imaginäre nicht Abbruch gethan werden soll (Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Bessel*, Leipzig 1880, p. 157 = Werke 8, p. 90).

19) *G. Morera*, Lomb. Rend. (2) 19 (1886), p. 304. Vgl. ferner *Osgood* [26]).

Mittelst des Integralsatzes lassen sich eine grosse Anzahl reeller bestimmter Integrale auswerten (II A 3) (man vgl. die gebräuchlichen Lehrbücher). In der That bildete das Bestreben, die auf formalem Rechnen mit imaginären Grössen beruhende Auswertung solcher Integrale durch strenge Methoden zu begründen, den Ausgangspunkt für *Cauchy*'s erste Untersuchungen auf dem Gebiet der Funktionentheorie [20]. Auch für den Residuenkalkül, dessen Anfänge man bereits in jener Abhandlung vom Jahre 1814 über bestimmte Integrale erblickt, bildet der Integralsatz die eigentliche Grundlage. Unter dem *Residuum* der Funktion $f(z)$ im Punkte a versteht man den Wert des Integrals $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz$, welches längs einer den Punkt a umschliessenden Kurve C in der positiven Richtung erstreckt wird. Dabei soll $f(z)$ in der Umgebung von a mit Ausnahme des Punktes a selbst analytisch sein. Das Residuum im Punkte a lässt sich auch als der Koeffizient des Termes $(z-a)^{-1}$ in der Entwicklung nach ganzen Potenzen von $z-a$ (Nr. **9**) erklären [21]. Es besteht der Satz: Ist $f(z)$ in jedem Punkte von T mit Ausnahme gewisser isolierter Punkte $z_1, z_2, \ldots$ eindeutig und analytisch und liegt keiner dieser Punkte auf der Begrenzung eines T_n', so ist der Wert von $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz$, längs des Randes von T_n' in der positiven Richtung erstreckt, gleich der Summe der Residuen von $f(z)$ in den innerhalb T_n' gelegenen Punkten $z_1, \ldots, z_k$. Weiteres über das Residuum und Verwandtes findet sich in Nr. **4**, **7**, **9**.

4. Die Cauchy'sche Integralformel; isolierte singuläre Punkte. Weitere Eigenschaften der analytischen Funktionen werden mit Hülfe einer expliciten Darstellung derselben abgeleitet. *Cauchy* hat zwei solche Formeln gegeben, die sogenannte *Cauchy'sche Integralformel* und die *Cauchy-Taylor'sche Reihe* (Nr. **7**). Auf diesen Formeln lässt sich die ganze Funktionentheorie aufbauen. Die *Integralformel* [22]: Ist

20) Vgl. Mém. sur les intégrales définies (1814), Par. sav. [étr.] 1 (1825), p. 599 = Werke (1) 1, p. 319; sowie die Schrift [13]).

21) *Cauchy,* Exerc. de math. 1, Paris 1826, p. 11. — Die erste im Text gegebene Definition hat den Vorteil, dass sie sich auf den Fall des Punktes $z=\infty$ (Nr. **8**), sowie eines Verzweigungspunktes endlicher Ordnung (Nr. **11**) unmittelbar ausdehnen lässt.

22) *Cauchy,* Turiner Abhandlung vom Jahre 1831 = Exerc. d'anal. 2 (1841), p. 52; strenge Ausführung des *Cauchy*'schen Beweises bei *Stolz,* Diff-. u. Int.-Rechn. 2, p. 248, Nr. 9. Der bekannte Beweis stammt wohl von *Riemann* her; vgl. *Roch,* Zeitschr. Math. Phys. 8 (1863), p. 24.

In späteren Noten (vgl. z. B. Par. C. R. 32 (1851), p. 207) bezeichnete *Cauchy*

$f(z)$ in T analytisch, so lässt sich der Wert von $f(z)$ in einem beliebigen *innern* Punkte eines T_n' mittelst der Werte $f(t)$, welche $f(z)$ auf dem Rande $C_1, \ldots, C_n$ von T_n' annimmt, durch die Formel ausdrücken[23]):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Diese Formel entspricht der Formel der Potentialtheorie (II A 7 b, Nr. **18**):

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C u(t)\,\frac{\partial G}{\partial n}\,dt,$$

wo G die *Green*'sche Funktion von T_n', $u(t)$ den Wert von $u(x, y)$ auf dem Rande bedeutet, und leistet für die Funktionentheorie auch ähnliche Dienste.

Die Ableitung von $f(z)$ wird durch die Formel

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}$$

dargestellt und erweist sich somit auch als eine in T stetige und sogar noch analytische Funktion von z. Allgemein ist[24])

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}},$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqq n!\,M r^{-n}, \quad \text{wo} \quad |f(z)| \leqq M, \quad |z - z_0| = r.$$

Die reellen Funktionen u, v besitzen in T stetige Ableitungen aller Ordnungen und genügen nebst denselben der *Laplace*'schen Differentialgleichung[25]) (II A 7 b, Nr. **2**):

---

das Integral $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi$ als „moyenne isotropique"; vgl. den *Gauss*'schen „Satz vom arithmetischen Mittel" (II A 7 b, Nr. **13**).

23) Zur Bestimmung des Integrals ist die Kenntnis der Funktionswerte in allen Punkten von C, also in einer *nicht abzählbaren* Punktmenge, nicht erforderlich; es genügt, diese Werte in einer *abzählbaren* überall dicht auf C gelegenen Punktmenge zu wissen; vergl. Nr. **13**.

24) *Cauchy,* Exerc. d'anal. 2 (1842), p. 51, 53.

25) *Stäckel* sagt in der letzten unter [11]) citierten Abhandlung, p. 117: „Zum ersten Mal scheint diese Gleichung in dem ersten, 1761 erschienenen Bande der Opuscules mathématiques von *d'Alembert* aufzutreten, der in der Abhandlung: Recherches sur les vibrations des cordes sonores (Bd. 1, p. 11) sagt, bei anderen als den üblichen Annahmen über die Kräfte komme man für die schwingende Seite zu der Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Diese Funktionen sind überdies analytische Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y (Nr. **40**).

Ist $f(z)$ in jedem Punkte z der Umgebung des Punktes a, höchstens mit Ausnahme des Punktes $z = a$ selbst, analytisch; bleibt $f(z)$ ferner in diesem Bereiche endlich, so ist $f(z)$ auch im Punkte a analytisch, wofern von einer durch Abänderung des Wertes von $f(z)$ im Punkte $z = a$ hebbaren Unstetigkeit abgesehen wird[26]). Hört $f(z)$ also in einem isolierten Punkte a auf, analytisch zu sein, ohne in a eine hebbare Unstetigkeit zu haben, so muss $|f(z)|$ eine beliebige positive Grösse G mindestens in einem Punkte der Umgebung von a übersteigen. Man unterscheidet zwei Fälle: a) ist $\lim_{z=a} f(z) = \infty$, so dass also die Funktion $F(z) = 1/f(z)$, $z \neq a$; $F(a) = 0$, in a analytisch ist, so heisst a ein *Pol* von $f(z)$ (*Briot* u. *Bouquet*) oder eine *ausserwesentliche singuläre Stelle* (*Weierstrass*[27])); b) ist dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, und liegt keine hebbare Unstetigkeit vor, so heisst a eine *wesentliche singuläre* Stelle der Funktion[27]). In der Nähe einer isolierten wesentlichen singulären Stelle kommt die

---

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

der durch

$$y = \varphi(x + \sqrt{-1}\,t) + \Delta(x - \sqrt{-1}\,t)$$

genügt werde.“ Bei *Lagrange,* Misc. Taur. 3 (1762—65), p. 205 = Oeuvres, 1 p. 498, erscheint der Satz als bekannt.

26) *Riemann,* Diss.[15]) § 12. Einen s. Z. nicht veröffentlichten Beweis dieses Satzes hatte *Weierstrass* 1841 gefunden; Werke 1 (1894), p. 63. Vgl. auch [41]). Ein unrichtiger Beweis des Satzes erschien wohl zuerst in der zweiten Auflage des *Durège*'schen Werkes über Funktionentheorie (1873, p. 112) und ist von späteren Autoren (*Biermann, Harnack, Forsyth*) weiter publiziert. In der ersten Auflage jenes Werkes findet sich ein strenger elementarer Beweis, der vielleicht von *Riemann* herrührt. *O. Hölder* hat auch einen Beweis des Satzes gegeben: Math. Ann. 20 (1882), p. 138; vgl. ferner *Osgood,* N. Y. Bull. (2) 2 (1896), p. 296.

Ist $f(z)$ in T eindeutig und stetig und bis auf die Punkte einer endlichen Anzahl regulärer Kurven überall analytisch, so ist $f(z)$ ausnahmslos analytisch in T; vgl. etwa *Harnack,* Diff.- u. Int.-Rechn. 1881, p. 369. Der Satz lässt sich aber nicht dadurch verallgemeinern, dass man an Stelle der Kurven eine beliebige Punktmenge vom Inhalt null setzt; der erste von *Chessin,* Par. C. R. 128 (1899), p. 605, ausgesprochene Satz ist falsch.

27) *Weierstrass,* Berl. Abh. 1876, p. 11, § 1 = Werke 2, p. 77, § 1. Allgemein bezeichnet man jeden Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs einer eindeutigen Funktion, der kein Pol der Funktion ist, als eine *wesentliche* singuläre Stelle; vgl. ferner Nr. **13**.

Funktion jedem vorgegebenen Werte beliebig nahe[28]). — Ist $f(z)$ in jedem Punkte der Ebene analytisch und bleibt $|f(z)|$ stets unterhalb einer festen Grösse G, so ist $f(z)$ eine Konstante[29]).

5. Die konforme Abbildung im Kleinen. Ist z_0 ein Punkt, in welchem $w = f(z)$ analytisch ist und $f'(z)$ nicht verschwindet, so ist umgekehrt z eine analytische Funktion von w. Die Gleichungen

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$

lassen sich nämlich, da die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig sind und die *Jacobi*'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$$

im Punkte (x_0, y_0) nicht verschwindet, eindeutig nach u, v auflösen und es bestehen zwischen den stetigen Ableitungen die Beziehungen[30]):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Denkt man sich die Werte der Funktion $w = f(z)$ in einer zweiten (der w-) Ebene aufgetragen, und ist $f(z)$ im Punkte $z = a$ analytisch und $f'(a) \neq 0$, so wird die Umgebung des Punktes a ein-

---

28) Satz von *Weierstrass* [27]) § 8. — Ein besonderer Fall dieses Satzes, wo a der Punkt $z = \infty$ (Nr. 8) ist und die Funktion keine Singularitäten im Endlichen hat, war bereits *Briot* u. *Bouquet* (1. Aufl. § 38; unrichtige Formulierung) bekannt. Der Satz ist von *Picard* verschärft, Nr. **29**.

29) *Cauchy,* Par. C. R. 19 (1844), p. 1377. Der Satz wird auch *Liouville* zugeschrieben. *Painlevé* hat folgenden Satz gefunden und bewiesen (Par. thèse 1887 = Toulouse Ann. 2 (1888), p. 18): Die Funktion $f(z)$ sei analytisch in jedem innern Punkte eines durch zwei Gerade OA, OB begrenzten Bereiches und bleibe endlich, wenn z längs irgend einer Kurve ins Unendliche rückt, welche in einem durch zwei Gerade OA_1, OB_1 begrenzten, innerhalb des ersten gelegenen Bereiche verläuft. Dann konvergiert $f'(z)$ und somit auch jede höhere Ableitung gegen 0, wenn z längs einer solchen Kurve ins Unendliche rückt.

30) *Jordan,* Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 191. Der Beweis stützt sich auf die Existenzsätze für reelle implicite Funktionen; diese Sätze sind eine unmittelbare Folge des Existenztheorems für die Lösung eines Systems totaler Differentialgleichungen (II A 4 a, Nr. **12**); sie sind zuerst von *U. Dini* direkt bewiesen: Analisi infinitesimale 1, p. 162 (lith.) Pisa 1877/78. Der *Dini*'sche Beweis ist zuerst von *Peano-Genocchi,* Calcolo differenziale, Turin 1884, Nr. 110—123; deutsche Übersetzung von *Bohlmann* und *Schepp*, Leipzig 1899, gedruckt worden. *C. Jordan* hat denselben reproduziert: Cours d'anal. 3, 1. Aufl. 1887, p. 583 = 1, 2. Aufl. 1893, p. 80.

eindeutig und stetig (mit stetigen ersten Ableitungen) auf die Umgebung des Punktes $b = f(a)$ bezogen. Schneiden sich zwei Kurven der z-Ebene in einem Punkte z_0 der Umgebung von a, so werden sich die entsprechenden Kurven der w-Ebene in einem Punkte w_0 der Umgebung von b schneiden und zwar *unter gleichem Winkel.* Die Umgebung von a wird somit auf die Umgebung von b konform abgebildet[31]); das Ähnlichkeitsverhältnis der konformen Abbildung im Punkte $z = z_0$ ist gleich $|f'(z_0)|$. Zwei Bereiche T, T^* heissen konform auf einander abgebildet, wenn eine ein-eindeutige Beziehung zwischen ihren Punkten besteht, während die Umgebungen je zweier entsprechender Punkte stets konform auf einander abgebildet werden (III D 6). — Umgekehrt wird durch die konforme Abbildung zweier Bereiche auf einander eine analytische Funktion definiert; vgl. Nr. **19**.

6. Gleichmässige Konvergenz. Die Funktion $s(z, \alpha)$ möge für jeden Wert des reellen oder komplexen Parameters α, welcher einer gegebenen Punktmenge mit Häufungsstelle $\bar{\alpha}$ (insbesondere kann $\bar{\alpha} = \infty$ sein; Nr. 8) zugehört, und für jeden Wert z eines Bereiches T resp. B eindeutig erklärt sein. Man sagt: die Funktion $s(z, \alpha)$ konvergiert in T resp. B *gleichmässig* gegen einen Grenzwert, wenn α gegen $\bar{\alpha}$ konvergiert, falls sich nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse ε die Existenz einer zweiten *von z unabhängigen* positiven Grösse δ (resp. G, im Falle $\bar{\alpha} = \infty$) nachweisen lässt, dergestalt, dass für alle Werte der α-Menge, die an die Bedingung $|\alpha - \bar{\alpha}| < \delta$, $|\alpha' - \bar{\alpha}| < \delta$ (resp. $|\alpha| > G$, $|\alpha'| > G$) geknüpft sind, und für einen beliebigen Punkt z von T resp. B,

$$|s(z, \alpha) - s(z, \alpha')| < \varepsilon$$

ist. Eine unendliche Reihe heisst sonach gleichmässig konvergent, wenn die Summe der ersten n Glieder $s_n(z)$ $(\alpha = n, \bar{\alpha} = \infty, G = m)$ gleichmässig[32]) konvergiert:

$$|s_{n+p}(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \quad n > m, \quad p = 1, 2, \ldots$$

31) *Lagrange,* Kartenprojektion[11]); *Gauss,* Astronomische Abh., Heft 3 (1825), p. 1 = Werke 4, p. 189 = Ostwald, Klassiker, Nr. 55. Die Bezeichnung *konform* ist von *Gauss* eingeführt, Gött. Abh. 2 (1844), p. 4 = Werke 4, p. 262.

32) *Weierstrass,* Berl. Ber., 12. Aug. 1880 = Werke 2, p. 202; sowie Werke 1, p. 67 (Abhandlung aus dem Jahre 1841). — Eine andere Definition der gleichmässigen Konvergenz hat *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegeben, wonach $s(z, \alpha)$ *in einem Punkte* $z = z_0$ *von* T gleichmässig konvergieren soll, wenn α gegen $\bar{\alpha}$ konvergiert, falls *in einer gewissen Umgebung des Punktes* z_0 die Bedingungen der im Text gegebenen Definition erfüllt sind. Nach dieser letzten Definition konvergiert insbes. eine Potenzreihe innerhalb

Satz. Ist $s(z, \alpha)$ für jeden der α-Menge zugehörigen Wert von α eine in T analytische Funktion von z und konvergiert $s(z, \alpha)$ in jedem T_1' gleichmässig, wenn α gegen $\bar{\alpha}$ konvergiert, so ist der Grenzwert $F(z)$ von $s(z, \alpha)$ ebenfalls in T analytisch und es ist

$$\int_{z_0}^{z} F(z)\,dz = \lim_{\alpha=\bar{\alpha}} \int_{z_0}^{z} s(z, \alpha)\,dz,$$

$$F'(z) = \lim_{\alpha=\bar{\alpha}} \frac{\partial s(z, \alpha)}{\partial z}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass es sich nur um *eigentliche* Integrale handelt. Die Funktion $\partial s(z, \alpha)/\partial z$ konvergiert ebenfalls gleichmässig in jedem T_n'. — Konvergiert insbesondere die Reihe

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots,$$

deren Glieder sämtlich in T analytische Funktionen sind, in jedem T_1' gleichmässig, so ist der Wert derselben $F(z)$ eine in T analytische Funktion und die Reihe lässt sich gliedweise integrieren und differenziieren. Dieser Reihensatz gehört zu den frühesten Entdeckungen *Weierstrass*'s [33]), der überhaupt die Bedeutung der gleichmässigen Konvergenz als ein Hülfsmittel für analytische Untersuchungen zuerst erkannte und sich dieser Methode prinzipiell bediente. Die wichtigste derartige Reihe ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, welche in jedem T_1' des Innern ihres Konvergenzkreises T gleich-

---

ihres Konvergenzkreises stets gleichmässig; nach der ersten Definition ist dies im allgemeinen nicht der Fall. — Vgl. übrigens II A 1, Nr. **16, 17**.

Abel hat zuerst bewiesen, dass eine Potenzreihe eine stetige Funktion darstellt, indem er den Rest der Reihe gleichmässig abschätzte; J. f. Math. 1 (1826), p. 311.

33) *Weierstrass* [32]); Beweis mittelst der Potenzreihen. Nachdem *Harnack* durch die Methoden der Potentialtheorie den ersten der beiden (II A 7 b, Nr. **30**) angeführten Sätze bewiesen hatte, bewies *Painlevé* in ähnlicher Weise durch Integration den obigen Reihensatz; Thèse, Paris 1887 = Toul. Ann. 2 (1888), p. B 11; *Burkhardt,* Anal. Funkt. p. 138. Der Satz des Textes ist eine Verallgemeinerung dieses Reihensatzes.

Ein Beispiel einer ungleichmässig konvergenten Reihe, deren Glieder ganze rationale Funktionen von z sind und die eine allenthalben analytische Funktion (nämlich die Null) darstellt, ist von *Runge* gegeben worden: Acta math. 6 (1885), p. 245. — Die in der Praxis vorkommenden Reihen (oder allgemeiner: Funktionen $s(z, \alpha)$) konvergieren häufig in einem Bereich T ungleichmässig; meines Wissens ist jedoch keine *solche* Reihe bekannt, die in jedem Punkte eines Bereiches T konvergierte, ohne in einem beliebigen T' gleichmässig zu konvergieren.

mässig konvergiert und somit eine analytische Funktion $f(z)$ definiert[34]). Dabei ist $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

Das eigentliche bestimmte Integral

$$\int_a^b f(\zeta, z)\, d\zeta$$

stellt eine analytische Funktion $F(z)$ von z dar, falls für jeden Punkt ζ des Integrationsweges $f(\zeta, z)$ eine in ein und demselben Bereich T analytische Funktion von z ist, welche als Funktion der unabhängigen Variabeln (ζ, z) betrachtet stetig ist; und es ist

$$\int_{z_0}^{z} F(z)\, dz = \int_a^b d\zeta \int_{z_0}^{z} f(\zeta, z)\, dz,$$

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z}\, d\zeta.$$

Dabei braucht $f(\zeta, z)$ keine analytische Funktion von ζ zu sein.

Die Hauptsätze dieses Paragraphen sind von *Ch. J. de la Vallée-Poussin*[35]) zusammengefasst und in einfacher Weise bewiesen worden.

7. Die Cauchy-Taylor'sche Reihe, nebst Anwendungen. Aus dem *Cauchy*'schen Integralsatz wird ferner die *Cauchy-Taylor'sche Reihe*[36]) abgeleitet. Sei $f(z)$ in T analytisch und sei z_0 ein beliebiger Punkt von T (man beachte jedoch, dass *alle* Punkte von T *innere* Punkte sind (Nr. **1**)); bezeichnet man dann mit R den Radius des grössten Kreises mit Mittelpunkt z_0, dessen innere Punkte sämtlich Punkte von T sind, so lässt sich $f(z)$ für alle inneren Punkte z dieses Kreises durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$$

darstellen. Ein besonderer Fall ist der, dass $f(z)$ in jedem Punkte der Ebene analytisch ist. $f(z)$ wird dann in ihrem Gesamtverlauf durch eine beständig konvergente Potenzreihe dargestellt und heisst eine

---

34) *Briot* et *Bouquet*, 1. Aufl., ch. 2.

35) Brux. Ann. Soc. Scient. 17 (1892—93), p. 323.

36) Turiner Abhandlung 1831, vgl. Monographieen; Gazette de Piémont, 22. Sept. 1832; Brief an Coriolis, Par. C. R. 4 (1837), p. 216; Exerc. d'anal. 1 (1841), p. 31; 2 (1841), p. 52. *O. Bonnet* (Brux. mém. cour. 23 (1849), p. 94); *C. Neumann* (das Dirichlet'sche Prinzip, Leipzig 1865, p. 9) und *Harnack* (Math. Ann. 21 (1883), p. 305) haben den Reihensatz aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen mittelst der Fourier'schen Reihen abgeleitet. Die Geschichte des Taylor'schen Lehrsatzes ist von *A. Pringsheim* eingehend behandelt worden; Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 433.

ganze (rationale oder transcendente) Funktion. Ist M der grösste Wert von $|f(z)|$ auf dem Kreise $|z - z_0| = r < R$, so ist[37])

$$|a_n| \leqq M r^{-n}.$$

Für den Rest der Reihe gilt die Formel[37a])

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right| \leqq M\left(\frac{r_1}{r}\right)^m \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^{-1}, \qquad |z - z_0| \leqq r_1 < r,$$

wodurch dann der Fehler beim Gebrauch einer endlichen Anzahl von Gliedern abgeschätzt werden kann.

Ist der wahre[38]) Konvergenzkreis der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ein endlicher, so lässt sich die so definierte Funktion ausserhalb dieses Kreises nicht so erklären, dass sie sich in jedem Punkte der Begrenzung desselben analytisch verhält. — Eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass die in T analytische Funktion $f(z)$ in der Nähe eines Punktes z_0 von T identisch verschwindet, besteht darin, dass

$$f(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Die Darstellung von $f(z)$ durch die Potenzreihe ist somit eindeutig. Als Bestimmungsstücke einer analytischen Funktion kann man also die abzählbare Wertemenge der Koeffizienten einer beliebigen Potenzreihe mit nicht verschwindendem Konvergenzkreis ansehen. Diese Bestimmungsweise legt *Weierstrass* zu Grunde; vgl. unten III. — Verschwindet $f(z)$ in einem Punkte z_0 von T, ohne identisch Null zu sein, so lässt sich $f(z)$ stets in der Form

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

darstellen, wo m eine positive ganze Zahl und $\varphi(z)$ eine in z_0 analytische, dort nicht verschwindende Funktion bedeutet. Ist z_0 ein Pol, so gilt eine ähnliche Darstellung:

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z).$$

---

37) *Cauchy,* Turiner Abh. 1831 = Exerc. d'anal. 2 (1841), p. 53; *Weierstrass,* s. Z. nicht veröffentlichte Abhandlung aus dem Jahre 1841, Werke 1 (1894), p. 59.

37a) *Cauchy* [37]). Damit eine Reihe zum Zweck des Rechnens brauchbar sei, genügt nicht die blosse Konvergenz, es muss auch möglich sein, den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn man nur die ersten n Terme derselben berücksichtigt. Auf solche Abschätzungsformeln legte *Cauchy* besonderes Gewicht.

38) Unter dem *wahren Konvergenzkreis* (oder einfach *Konvergenzkreis*) einer Potenzreihe versteht man einen Kreis, für dessen innere Punkte die Reihe konvergiert und für dessen äussere Punkte sie divergiert. Die Bezeichnung rührt wohl von *Weierstrass* her. — Dass der Konvergenzbereich einer Potenzreihe aus dem Innern eines Kreises besteht, hat *Abel* [32]) für den Fall der binomischen Reihe gezeigt.

Der Punkt z_0 heisst ein Nullpunkt resp. Pol m^{ter} Ordnung der Funktion. Die Nullpunkte sowie die Pole einer analytischen Funktion sind also isoliert und von endlicher ganzzahliger Ordnung. — Bilden die Nullpunkte von $f(z)$ eine Menge, die einen Punkt z_0 von T zur Häufungsstelle hat, so verschwindet $f(z)$ zunächst im Innern des Kreises (z_0, R), dann aber im ganzen Bereiche T identisch[39]. Zwei in T analytische Funktionen sind daher mit einander identisch, falls ihre Werte in den Punkten einer solchen Menge übereinstimmen. — Ist $f(z)$ in T, höchstens mit Ausnahme von Polen, analytisch, so kann $f(z)$ in einem T_n' nur eine endliche Anzahl von Nullpunkten und Polen haben; es gelten die Formeln:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(z-z_i)^j} + \psi(z) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{q} (z-z_j')^{\alpha'_j}}{\prod\limits_{j=1}^{p} (z-z_j)^{\alpha_j}}\, \varphi(z),$$

wo $\psi(z)$, $\varphi(z)$ in T_n' analytisch sind und $\varphi(z)$ dort nicht verschwindet. Vgl. auch Nr. **9**.

Sind keine Pole in T_n' vorhanden und liegt kein Nullpunkt auf der Begrenzung von T_n', so erhält man die Gesamtzahl der Nullpunkte, $\sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j'$, indem man z der Reihe nach die n Begrenzungskurven des Bereiches T_n' durchlaufen lässt und auf jeder Kurve den Zuwachs s_k des stetig sich ändernden Winkels $\theta = \text{arc tang}\, v/u$ der Funktion $f(z) = u + vi$ bestimmt (vgl. Nr. **2**). Der Gesamtzuwachs $S = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k$ hat den Wert $2\pi \sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j'$. Liegen Pole von $f(z)$ innerhalb T_n', so ist $S = 2\pi \left(\sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j' - \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j \right)$. Der Winkel θ ist gleich dem Koeffizienten des rein imaginären Teils der Funktion $\log(u+vi)$; der reelle Teil dieser Funktion ist eindeutig. Der Gesamtzuwachs der Funktion $\log f(z)$ beträgt also, wenn z die n Begrenzungskurven durchläuft, iS und man erhält die Formel

---

39) Es handelt sich hier um die analytische Fortsetzung im *uneigentlichen* Sinne. Vgl. Nr. **13**. Den Satz verdankt man *Riemann,* Gött. Diss. [15]).

Ist z_0 ein Randpunkt von T, so braucht $f(z)$ ja nicht identisch zu verschwinden. Besteht die Begrenzung von T zum Teil aus einer beliebigen Jordan'schen Kurve C und nähert sich $f(z)$ dem Werte Null, wenn z gegen einen beliebigen Punkt von C konvergiert, so verschwindet $f(z)$ in jedem Punkte von T; *Painlevé,* Par. Thèse 1887 = Toul. Ann. 2 (1888), p. 29.

$$iS = \int_C d\log f(z) = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j' - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\right).$$

Die letzte Gleichung lässt sich mittels des Residuenkalkuls (Nr. **3**) sofort hinschreiben. Sie gilt auch für einen Bereich $\mathfrak{T}_n'$ einer *Riemann*'schen Fläche (Nr. **11**—**13**).

Eine allgemeinere Formel erhält man, indem man noch eine Funktion $\varphi(z)$ in Betracht zieht, die in T analytisch ist. Es ist dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{q}\alpha_j'\,\varphi(z_j') - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\,\varphi(z_j).$$

Hat $f(z)$ insbesondere keinen Pol und nur einen einfachen Nullpunkt z_1' in T_n', und setzt man $\varphi(z) = z$, so ergiebt sich die Formel[39a]):

$$z_1' = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Eine bemerkenswerte Anwendung des Residuenkalkuls auf die Darstellung der ersten n Glieder einer unendlichen Reihe durch ein bestimmtes Integral ist von *Cauchy* gemacht und von *U. Dini* weiter ausgebeutet worden[39b]).

Mit der nach Potenzen von z fortschreitenden Cauchy-Taylor'schen Reihe ist eine zweite nach Potenzen einer linearen Funktion von z fortschreitende Entwicklung der Funktion $f(z)$ eng verwandt:

$$f(z) = a_0 + a_1\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + a_2\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)^2 + \cdots, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Diese Formel ist anwendbar, wenn $f(z)$ sich im Punkte z_0 analytisch verhält, wo $\alpha z_0 + \beta = 0$ ist. Sowohl z_0 als z_1, wo $\gamma z_1 + \delta = 0$ ist, dürfen beliebige Punkte der erweiterten Ebene (Nr. 8) sein; dabei versteht man z. B. unter $z_0 = \infty$ das Verschwinden des Koeffizienten α. Diese Reihe konvergiert in einem Gebiete, welches von einem Kreise (insbes. von einer Geraden) begrenzt ist, z_0, z_1 zu konjugierten Punkten im Sinne der Geometrie der reciproken Radien hat und den Punkt z_0 enthält. Das grösste derartige Gebiet, welches keinen singulären Punkt der Funktion im Innern enthält, bildet den wahren Konvergenzbereich der Reihe. Dies alles beweist man mittelst der linearen Transformation $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$.

39a) Turiner Abh. [36]) = Exerc. d'anal. 2, p. 64.

39b) *Cauchy,* Exerc. de math. 2 (1827), p. 341 = Oeuvres (2) 7, p. 393; *Picard,* Traité 2, p. 167. Auf diese Weise leitete *Cauchy* die Fourier'sche Reihe ab; die Methode ist von *Dini,* Serie di Fourier, u. s. w., Pisa 1880 (vgl. insbes. p. 139—156) noch auf andere Reihenentwicklungen ausgedehnt.

Wie bei den Darstellungen einer reellen Funktion neben der Fourier'schen Reihe noch das Fourier'sche Integral Platz greift, so kann man auch hier der Cauchy-Taylor'schen Reihe eine analoge Integraldarstellung gegenüberstellen. Die Funktion $f(z)$ sei analytisch in allen Punkten $z = x + iy$, wofür $x \leqq k$ ist, der Punkt $z = \infty$ eingeschlossen, und $f(\infty)$ sei $= 0$ (Nr. 8). Mittelst der Formel

$$\frac{1}{t-z} = \int_0^\infty e^{v(z-t)}\,dv,$$

wo v reelle positive Werte durchläuft und der reelle Teil von $z - t$ negativ ist, wird die Cauchy'sche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

umgeformt. Diese Formel gilt im vorliegenden Falle, wenn längs der Geraden $z = k$ von $-\infty i$ bis $+\infty i$ integriert wird. Es ergiebt sich durch Vertauschung der Integrationsfolge für alle Werte von $z = x + iy$, wofür $x < k$ ist, die Darstellung [39c]):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(v)\, e^{v(z-k)}\,dv, \qquad \text{wo} \qquad \varphi(v) = \int_{-\infty}^\infty f(k+is)\, e^{-ivs}\,ds.$$

Eine ähnliche Verallgemeinerung durch lineare Transformation von z, wie im Falle der Cauchy-Taylor'schen Reihe, ist auch hier möglich.

8. **Der Punkt** $z = \infty$. Der unendlich ferne Bereich der Zahlenebene wird als Punkt, der Punkt $z = \infty$ definiert, indem man den eigentlichen Punkten der Zahlenebene noch einen idealen Punkt, den Punkt $z = \infty$, adjungiert; denn für die Zwecke der Funktionentheorie empfiehlt es sich, an der Hand der Transformation $z' = 1/z$ das Verhalten einer Funktion, welche allenthalben ausserhalb eines genügend grossen Kreises mit Mittelpunkt $z = 0$ eindeutig und analytisch ist, wenn $|z|$ unendlich wird, mit dem Verhalten der Funktion $\varphi(z') = f(z)$ im Punkte $z' = 0$ dadurch in Verbindung zu bringen, dass man die Definitionen einführt: $f(z)$ ist analytisch im Punkte $z = \infty$, hat dort einen Nullpunkt oder Pol m^{ter} Ordnung oder eine wesentliche singuläre Stelle, je nachdem $\varphi(z')$ im Punkte $z' = 0$ analytisch ist (in dem Falle versteht man unter $\varphi(0) = f(\infty)$ den $\lim\limits_{z=\infty} f(z)$), dort einen Nullpunkt oder Pol m^{ter} Ordnung oder eine wesent-

39c) *Cauchy,* Par. C. R. 32 (1851), p. 215.

liche singuläre Stelle hat. Unter der Umgebung des Punktes $z = \infty$ versteht man den Bereich, welcher der Umgebung des Punktes $z' = 0$ entspricht. Ist $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ analytisch, so gilt die Darstellung:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad a_n = \int\limits_C t^{n-1} f(t)\, dt.$$

Durch Hinzunahme des Punktes $z = \infty$ wird die Ebene im geometrischen Sinne *„geschlossen"*. Projiziert man dieselbe stereographisch (III A 7) auf eine Kugel[40]), wobei das Projektionscentrum im *„Nordpol"* liegt und der Punkt $z = 0$ in den *„Südpol"* übergeht, so entsteht bei geeigneter Festsetzung bezüglich des Punktes $z = \infty$ nebst Umgebung eine ausnahmlos ein-eindeutige und konforme Abbildung der beiden Flächen aufeinander. Die Umgebung des Punktes $z' = 0$ wird ein-eindeutig und konform auf die Umgebung des Nordpols abgebildet. Ist also $w = f(z)$ im Punkte $z = \infty$ analytisch und ist $\varphi'(z')\,|_{z'=0} = \lim\limits_{z=\infty} (- z^2 f'(z)]$ von Null verschieden, so wird die Umgebung des Punktes $w_0 = f(\infty)$ konform auf die Umgebung des Nordpols bezogen. Für den Fall, dass an Stelle der schlichten Ebene eine mehrblättrige *Riemann*'sche Fläche (Nr. **11**) tritt, werden diese Definitionen in leicht ersichtlicher Weise erweitert.

9. Der Laurent'sche Satz; die rationalen Funktionen. Ist $f(z)$ in einem Kreisring T mit Mittelpunkt z_0 eindeutig und analytisch und ist T_2' ein zweiter mit T konzentrischer Ring, so ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)\, dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(t)\, dt}{t - z},$$

wo z einen inneren Punkt von T_2' bedeutet und C, Γ sich auf die äussere und innere Begrenzung von T_2' beziehen. Die Funktion $f(z)$ lässt sich somit als Summe zweier Funktionen darstellen, wovon die eine überall innerhalb der äusseren, die andere überall ausserhalb der inneren Begrenzung von T analytisch ist. Diese Funktionen können wieder in Potenzreihen nach $z - z_0$ entwickelt werden, wodurch die Formel entsteht, die man als den *Laurent'schen Satz*[41]) bezeichnet:

---

40) Die Einführung der Kugel rührt von *Riemann* her und ist zuerst von *C. Neumann*, Abel'sche Integrale, 1865, publiziert worden. Vgl. jedoch auch *Möbius*, Leipz. Ber. 1853, § 13 = Werke 2, p. 215; sowie *Gauss*, Nachlass, Werke 8 (1900), p. 351 u. *Stäckel*'s Bemerkungen dazu, ibid. p. 356.

41) Par. C. R. 17 (1843) p. 938. *Weierstrass* war bereits im Jahre 1841 im Besitze dieses Satzes nebst einem Beweis; s. Z. nicht veröffentlichte Abhandlung = Werke 1 (1894), p. 51.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t - z_0)^{n+1}},$$

$$|a_n| \leqq M r^{-n},$$

$$\text{wo } |f(z)| \leqq M \quad \text{für} \quad |z - z_0| = r,$$

und der Kreis $|z - z_0| = r$ ein beliebiger in T gelegener ist. Die Darstellung ist eindeutig. Der Radius des Kreises C kann insbesondere unendlich, der des Kreises Γ null werden.

In der Nähe einer isolierten singulären Stelle z_0 lässt sich $f(z)$ in der Form darstellen:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + \mathfrak{A}(z),$$

resp., falls $z_0 = \infty$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{p} a_n z^n + \mathfrak{A}(z),$$

wo $\mathfrak{A}(z)$ eine im Punkte z_0 analytische Funktion bedeutet und p eine positive ganze Zahl ist, falls z_0 ein Pol, $p = \infty$, falls z_0 eine wesentliche singuläre Stelle ist. Den ersten Term rechts nennt man wohl den *Hauptteil* der Funktion $f(z)$ im Punkte z_0. Für den Fall eines Poles lassen sich diese Formeln auf elementarere Weise ableiten (vgl. Nr. 7).

Die rationalen Funktionen lassen sich auf Grund ihrer funktionentheoretischen Eigenschaften wie folgt charakterisieren[42]). a) Ist $f(z)$ eine eindeutige Funktion von z, die in jedem Punkte der erweiterten z-Ebene (Nr. 8) analytisch ist, so ist $f(z)$ eine Konstante. b) Ist $f(z)$ eine eindeutige Funktion von z, die sich in der erweiterten z-Ebene mit Ausnahme von Polen allenthalben analytisch verhält, so ist $f(z)$ eine rationale Funktion von z.[43]) Hat $f(z)$ in keinem endlichen Punkte der Ebene einen Pol, so ist sie eine ganze rationale Funktion. c) Durch Angabe der Pole nebst dem Hauptteil der Funktion in jedem derselben, resp. durch Angabe der Nullpunkte und Pole (je mit der zugehörigen Ordnungszahl), wird eine rationale Funktion bis auf eine additive, resp. multiplikative Konstante bestimmt. Bei der letzten Bestimmung muss nur die Gesamtzahl der Nullpunkte und Pole die nämliche sein. — Der Beweis dieser Sätze stützt sich auf den Satz von Nr. 4, Ende.

---

42) *Briot* et *Bouquet,* 1. Aufl., ch. 4, p. 34; vgl. [29]).

43) *Méray,* Par. C. R. 40 (1855), p. 788.

Ähnliche Sätze lassen sich auch über die einfach und doppelt periodischen Funktionen aussprechen. Die letzteren rühren von *Liouville* her und waren die ersten Früchte der von *Cauchy* geschaffenen allgemeinen Funktionentheorie (Nr. **24** und [146]).

10. Mehrdeutige Funktionen; Schleifenwege. Jedem Punkte z eines Bereiches T mögen mehrere Werte $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$ zugeordnet werden. Ist z_0 ein beliebiger Punkt von T und ist $w_0^{(i)}$ einer der diesem Punkte zugeordneten Werte, so soll es möglich sein, jedem Punkte z der Umgebung $|z - z_0| < h_i$ des Punktes z_0 einen solchen Wert w zuzuordnen, a) dass w einer der dem Punkte z zugeordneten Werte $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$ ist; b) dass die Gesamtheit der herausgegriffenen w-Werte eine im Punkte $z = z_0$ analytische Funktion von z bildet, welche als $f_i(z, z_0)$ bezeichnet sein soll. Dabei wird h_i im allgemeinen sowohl von i als von z_0 abhängen. Wir setzen ferner fest[44]), *entweder* dass die Anzahl der w-Werte in jedem Punkte von T eine endliche sei und verlangen dann, dass die n_{z_0} Funktionen $f_i(z, z_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n_{z_0}$, die den Punkten der Umgebung von z_0 zugeordneten w-Werte genau erschöpfen (d. h. dass jeder solche w-Wert an einer und nur an einer dieser n_{z_0} Funktionen teilnimmt); in diesem Fall wird n für jeden Punkt von T denselben Wert haben; *oder* dass einem beliebigen Bereich T_1' eine positive konstante Grösse h entsprechen soll, welcher man h_i gleichsetzen darf für alle Punkte z_0 von T_1' und für alle Werte von i. Dann lassen sich die w-Werte *auch im Grossen*, nämlich *für einen beliebigen Bereich* T_1', in der Weise zusammenfassen, dass eine Reihe in T_1' eindeutiger analytischer Funktionen $f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \ldots$ entsteht, deren Werte sich mit den Werten $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$ gerade decken[45]). Um die stetige Fortsetzung

44) Es werden nämlich jetzt diejenigen isolierten Punkte, die sich später als Verzweigungspunkte erweisen werden, mit in die Begrenzung von T aufgenommen, so dass T beispielsweise aus den innern Punkten eines Kreises mit Ausnahme des Mittelpunktes bestehen kann. Man könnte noch von allgemeineren Voraussetzungen ausgehen. Der gewöhnliche Gang der Darstellung ist jedoch der, dass man die *Riemann*'sche Fläche zuerst für isolierte Windungspunkte im Kleinen herstellt, um dann an der Hand der analytischen Fortsetzung im eigentlichen Sinne (Nr. **13**) die Fläche in ihrem Gesamtverlauf zu konstruieren.

Die analytische Eigenschaft der Wertesysteme braucht man an dieser Stelle noch nicht zu verlangen; vielmehr genügt es, dass die w's sich zunächst im Kleinen zu *stetigen* Funktionen zusammenfassen lassen, die dann, weiteren Festsetzungen zufolge, in jedem T_1' *eindeutige* Funktionen abgeben. Vgl. *Stolz* [3]).

45) Strenger Beweis nach wohlbekannten von *Sturm* und *Weierstrass* herrührenden Methoden; vgl. [3]). *Puiseux* hat den Satz für die algebraischen Funktionen ausgesprochen und bewiesen; J. de math. 15 (1850), p. 365 (deutsche Übers. von *H. Fischer,* Halle 1861).

einer Bestimmung der Funktion längs eines gegebenen Weges zu verfolgen, bedient man sich einer Reihe übereinander greifender Kreise, deren Mittelpunkte auf dem Wege liegen[46]).

Das Verhalten einer mehrdeutigen Funktion in einem Punkte $z = a$, wo mehrere w-Werte zusammenfallen, ist zuerst von *Puiseux*[47]) für den Fall einer algebraischen Funktion untersucht worden. *Puiseux* zeigt, dass die verschiedenen Bestimmungen von w in der Nähe von a in einem oder mehreren Cyklen zusammenhängen und dementsprechend dort durch eine oder mehrere Reihen von der Form

$$w = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - a)^{\frac{n}{q}}$$

dargestellt werden können, wobei q eine positive ganze Zahl und m eine positive oder negative ganze Zahl, oder 0 bedeutet. (Vgl. Nr. **11** wegen *Riemann*'s Ableitung und Verallgemeinerung dieses Resultats.) Damit sind die Pole von den Verzweigungspunkten (Nr. **11**) zum ersten Mal scharf unterschieden worden. — Legt man um den Punkt a eine Schleife[48]), die vom Punkte z_0 ausgeht und nach diesem Punkte zurückkehrt, ohne einen zweiten solchen Punkt zu umfassen, so erfahren die verschiedenen Bestimmungen von w im Punkte z_0, indem man sie längs des Schleifenweges führt, eine für den Punkt $z = a$ charakteristische Vertauschung. Jeder von z_0 ausgehende und nach z_0 zurückkehrende Weg, welcher nur eine endliche Anzahl von Punkten a einschliesst, ist einer Reihenfolge von solchen Schleifenwegen äquivalent und die entsprechende Vertauschung der w-Werte lässt sich aus den zu den Schleifenwegen gehörigen Vertauschungen zusammensetzen. Die Bedeutung der *Puiseux*'schen Untersuchungen für die *Galois*'sche Theorie, wofern es sich um die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung (I B 3 c, d, Nr. **5**) handelt, hat *Hermite*[48a]) hervorgehoben. — Die Methode der Schleifenwege reicht für die Untersuchung der algebraischen Funktionen aus. Bei den komplizierteren Periodeneigenschaften ihrer Integrale ist aber erst durch die

---

46) *Puiseux*[45]) p. 379 und Fig. 7. *Weierstrass*, s. Z. nicht veröffentlichte Abhandlung aus dem Jahre 1842 = Werke 1 (1894), p. 82.

47) *Puiseux*[45]). Strenger Beweis nach der *Puiseux*'schen Methode bei *C. Jordan*, der die *Puiseux*'schen Voraussetzungen verallgemeinert: Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 361.

48) *contour élémentaire* (*Puiseux*[45]) p. 411); *lacet* (*Briot* et *Bouquet*, 1. Aufl., p. 69); *Schleife* (*Clebsch* und *Gordan*, Abel'sche Funktionen, Leipzig 1866, p. 82). Vgl. auch die *ligne d'arrêt* von *Cauchy*, Par. C. R. 32 (1851), p. 70; sowie die *coupures* von *Hermite*, J. f. Math. 91 (1881), p. 62.

48a) Par. C. R. 32 (1851), p. 458.

anschaulichen Mittel der *Riemann*'schen Fläche der Fortschritt gegeben worden[49]). (II B 2.)

11. Die Riemann'sche Fläche; das Verhalten einer mehrdeutigen Funktion im Kleinen. Den Bereich T_1' (Nr. **10**) denke man sich mit übereinander liegenden Blättern bedeckt, denen man resp. die Funktionen $f^{(1)}(z)$, $f^{(2)}(z), \ldots$ zuordnet. Jedes Blatt wird somit zum Träger einer in T_1' eindeutigen analytischen Funktion. Ist der Punkt $z = a$ ein isolierter Punkt der Begrenzung von T und besteht T_1' aus einem Kreisring mit dem Mittelpunkt a, der etwa längs eines Radius aufgeschnitten ist; werden ferner die Blätter längs des Schnittes in geeigneter Weise zusammengefügt, während die innere Begrenzung des Kreisrings auf den Punkt a zusammenschrumpft, so entsteht in der Nähe des Punktes a ein (aus einem oder mehreren Stücken bestehender) Teil einer *Riemann*'schen Fläche[50]), auf welcher die verschiedenen Bestimmungen von $w = f(z)$ eindeutig und, höchstens vom Punkt a abgesehen, analytisch sind. Hängen in a q (resp. unendlich viele) Blätter zusammen, so bildet der Punkt a einen *Windungs-* oder *Verzweigungspunkt* $q - 1^{\text{ter}}$ (resp. *unendlich hoher*) *Ordnung*[51]). Setzt man

$$z - a = t^q,$$

so wird der q-blättrige Bereich um den Punkt a auf einen schlichten Bereich um den Punkt $t = 0$ ein-eindeutig und, abgesehen vom Punkte $z = a$, konform abgebildet[52]). Die q Bestimmungen von w gehen in eine eindeutige, höchstens vom Punkt $t = 0$ abgesehen, analytische Funktion von t, $\varphi(t)$ über.

---

49) Wegen einer vergleichenden Betrachtung dieser Methode und der Methode der Querschnitte auf einer *Riemann*'schen Fläche (Nr. **12**) sei auf den Bericht von *Brill* und *Noether*, p. 190 ff. verwiesen; vergl. aber auch p. 227 des Berichts.

50) *Riemann*, Gött. Diss. [15]). Die *Riemann*'sche Funktionentheorie, deren Grundgedanken zunächst in der Inauguraldissertation und den Abhandlungen über die *Abel*'schen Funktionen und die *Gauss*'sche Reihe niedergelegt sind, erfuhr zuerst, wenigstens zum Teil, durch die Werke von *H. Durège, C. Neumann* und *F. Casorati* eine systematische Darstellung. Vgl. auch die Publikationen von *Riemann*'s Schülern, *Prym* (Berl. Diss. 1863; Wien. Denkschr. 24 (1864); sowie die Schrift: Z. Th. d. Funktionen in einer 2-blättrigen Fläche, Zürich 1866) und *G. Roch*, Zeitschr. Math. Phys. 1863, p. 12 u. 183. Das erste französische Werk, welches die Theorie behandelt, ist das *Hoüel*'sche. Vergl. auch *Simart*, Par. thèse 1882.

51) *Riemann* [15]), § 5. Wegen des „Verzweigungsschnittes" vgl. Nr. **12**.

52) *Riemann*, § 14. Die Umgebung des Punktes $z = a$ wird so in ihren *einblättrigen Zustand* versetzt. Vgl. *Neumann*, Abel'sche Int., 2. Aufl. (1884), 17. u. 18. Kap.

Aus der Darstellung mittelst des *Laurent*'schen Satzes: $\varphi(t) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n t^n$ ergiebt sich, dass die q Bestimmungen von w sich durch die Formel[53]) ausdrücken lassen:

$$w = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{\frac{n}{q}},$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl oder 0, oder auch $-\infty$ bedeutet. Es war dies die erste Anwendung der *Riemann*'schen Fläche, um neue analytische Sätze zu entdecken und zu beweisen. Hiermit wird auch (als spezieller Fall) eine strenge Ableitung der *Puiseux*'schen Reihenentwickelung gegeben. — Indem man w als *eindeutige Funktion auf der Fläche* ansieht, sagt man: die Funktion w ist im Verzweigungspunkte $z = a$ analytisch oder hat dort einen Nullpunkt oder Pol m^{ter} Ordnung resp. einen wesentlichen singulären Punkt, wenn die Funktion $\varphi(t)$ im Punkte $t = 0$ analytisch ist oder dort einen Punkt gleicher Bezeichnung besitzt (Nrn. 4, 7). Liegt ein Punkt der letzten Art vor, so gelten ähnliche Sätze, wie bei den eindeutigen Funktionen. — Ist $a = \infty$, so hat man $1/z$ an Stelle von $z - a$ treten zu lassen.

Wenn w im Punkte $z = a$ einen Pol m^{ter} Ordnung resp. falls $w(a) = b$ endlich ist, die Funktion $w - b$ im Punkte $z = a$ einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung besitzt, so wird die Umkehrfunktion $z(w)$ im Punkte $w = \infty$ resp. $w = b$ einen Verzweigungspunkt $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung haben[54]). Beide Flächen lassen sich auf die schlichte Umgebung des Punktes $t = 0$ ein-eindeutig durch die Formeln abbilden:

$$z - a = t^q \psi(t), \qquad w - b = t^m \omega(t),$$

wo $\psi(t)$, $\omega(t)$ eindeutige im Punkte $t = 0$ analytische, dort nicht verschwindende Funktionen bedeuten und q, m stets positiv und ganz angenommen werden dürfen, wofern man unter $z - \infty$, $w - \infty$ resp. z^{-1}, w^{-1} versteht. An Stelle von t kann jeder andere zugleich mit t verschwindende Parameter $\tau = F(t)$ treten, wo $F(t)$ im Punkte $t = 0$ analytisch und $F'(0) \neq 0$ ist. Jedem in Betracht kommenden Wertepaar (w, z) wird dann ein und nur ein Wert t resp. τ entsprechen[55]). Insbesondere kann man erreichen, dass eine beliebige der beiden Funktionen $\psi(t)$, $\omega(t)$ gleich 1 wird.

---

53) ibid. Den Fall $m = -\infty$ erwähnt *Riemann* nicht.

54) ibid. § 14, 15.

55) Vgl. *Weierstrass,* Vorlesungen über Abel'sche Funktionen, wo die Formel eingeführt und prinzipiell gebraucht wird.

Wird w als implicite Funktion von z durch die Gleichung

$$F(w, z) = 0$$

definiert (Nr. **44**), wo $F(w, z)$ eine im Punkte $z = a$, $w = b$ analytische Funktion der unabhängigen Variabeln w, z bedeutet und $F(w, a)$ nicht identisch verschwindet, so lassen sich die m nahe bei b liegenden Werte[56]) von w auf einer oder mehreren Windungsflächen um den Punkt a (worunter auch schlichte sich einstellen dürfen) eindeutig ausbreiten und dementsprechend durch eine oder mehrere Formeln von der Form darstellen:

$$w - b = \sum_{n=p}^{\infty} c_n (z - a)^{\frac{n}{q}}, \quad 1 \leqq q \leqq m, \quad \sum q = m.$$

Dabei darf sowohl $a = \infty$ als $b = \infty$ sein. Nach dem Vorhergehenden lässt sich diese Formel durch die Parameterdarstellung: $z - a = t^q \psi(t)$ $w - b = t^p \omega(t)$ ersetzen. — Ist insbesondere die Funktion $F(w, z)$ ein Polynom, so gelten solche Formeln für jeden Wert von z und die Gesamtheit der der Gleichung $F(w, z) = 0$ genügenden Wertepaare (w, z) — das sogenannte *algebraische Gebilde* (*Weierstrass*) — lässt sich durch eine *endliche* Anzahl dieser Formeln darstellen[57]).

12. Fortsetzung; algebraische Funktionen. Der Verlauf einer mehrdeutigen analytischen Funktion im Grossen wird durch eine mehrblättrige *Riemann*'sche Fläche veranschaulicht. Die Blätter der Fläche hängen im allgemeinen in Verzweigungspunkten zusammen und gehen längs Linien (*Verzweigungslinien* oder *-schnitte*), niemals aber bloss in isolierten Punkten in einander über. Die genaue Lage dieser Linien ist belanglos und ist niemals fest vorgeschrieben; sie verbinden im allgemeinen Verzweigungspunkte und dürfen sonst (wenigstens innerhalb gewisser Grenzen) beliebig verschoben werden.

Ist $F(w, z)$ ein Polynom (Nr. **11**), so lässt sich über die ganze Ebene (resp. Kugel) eine mehrblättrige mit einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten versehene *Riemann*'sche Fläche ausbreiten, auf welcher jede Bestimmung von w eindeutig ist und, abgesehen von Polen, sich allenthalben analytisch verhält. Eine notwendige und

56) Wegen des Beweises, dass diese Werte sich im Kleinen zu analytischen Funktionen zusammenfassen lassen, vgl. [4]) und Nr. **44**, **45**.

57) Der Satz lässt sich durch die Methoden der allgemeinen Funktionentheorie direkt beweisen, indem die Annahme eines unbeschränkten Wachsens der Anzahl der Formeln zu dem Widerspruch führen würde, dass in der Umgebung eines bestimmten Punktes des algebraischen Gebildes keine Darstellung der bewussten Art möglich wäre.

hinreichende Bedingung, dass das Polynom unzerlegbar sei, ist die, dass die *Riemann*'sche Fläche aus einem Stück bestehe[58]). w heisst dann eine *algebraische Funktion* von z. Die Fläche ist endlich vielfach zusammenhängend, d. h. sie lässt sich durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln[59]). — Eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine mehrdeutige Funktion w einer algebraischen Gleichung genügt, besteht darin, dass jedem Wert von z im allgemeinen m Werte von w entsprechen, wo m eine feste Zahl bedeutet, dass ferner diese m Bestimmungen sich in der Nähe eines beliebigen Punktes im allgemeinen zu eindeutigen analytischen Funktionen zusammenfassen lassen, und dass endlich in den Ausnahmepunkten die verschiedenen Bestimmungen von w höchstens Verzweigungspunkte und Pole aufweisen[60]). — Jede rationale Funktion von w, z: $v = R(w, z)$, ist auf der zu der algebraischen Funktion $w(z)$ gehörigen *Riemann*'schen Fläche eindeutig und, von Polen abgesehen, analytisch. Umgekehrt lässt sich jede Funktion v, die auf der Fläche eindeutig und, von Polen abgesehen, analytisch ist, als rationale Funktion von w, z darstellen. Fehlen alle Pole, so ist v eine Konstante. Sind die Werte, welche v für ein und denselben Wert von z in den verschiedenen Blättern annimmt, im allgemeinen alle verschieden, so heisst v eine zur Fläche gehörige Funktion[61]); es lässt sich dann umgekehrt w rational durch v und z darstellen, und w und v sind somit gleichberechtigt (II B 2). Eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass v eine zur Fläche gehörige Funktion ist, besteht darin, dass v auf der Fläche eindeutig und analytisch ist und dass ausserdem in jedem Verzweigungspunkte der Fläche dieselbe Anzahl von Zweigen der beiden Funktionen v, w im Cyklus zusammenhängen. Wie man sieht, drückt sich diese Bedingung durch das Verhalten der Funktion v *im Kleinen* aus. — Wegen anderer Gestalten der *Riemann*'schen Fläche vgl. man Nr. 22.

---

58) Die Notwendigkeit dieser Bedingung hat *Puiseux* (selbstredend in anderer Formulierung) dargethan; J. de math. 16 (1851), p. 233.

59) *Brill* und *Noether* (Bericht, p. 254) machen darauf aufmerksam, dass der Begriff des *Querschnitts*, auf den Raum übertragen, bereits vor *Riemann* in einer Abhandlung von *Kirchhoff* (Ann. Phys. Chem. 75 (1848), p. 189 = ges. Abh., p. 33) vorkommt; vgl. [255]).

60) *Briot* et *Bouquet*, 1. Aufl., p. 41 (lückenhafte Formulierung); 2. Aufl., p. 216.

61) Dabei ist *eine* Funktion auf der Fläche, nämlich z, von vornherein ausgezeichnet und man müsste eigentlich v als *in Bezug auf* z zur Fläche gehörig definieren. Näheres über diesen Begriff findet man in II B 2.

13. Die analytische Fortsetzung; endgültige Definition der analytischen Funktion; das analytische Gebilde. Der Begriff der stetigen Fortsetzung einer stetigen Funktion ist so alt wie die analytische Geometrie. Der Übergang zum *Riemann-Weierstrass*'schen Begriff der analytischen Fortsetzung wird durch einen *Gauss*'schen[62]) Satz vermittelt, welcher von *Riemann*[63]) in die Funktionentheorie übertragen ist und in der so modifizierten Fassung, wie folgt, lautet (Nr. 7 und [39])): Ist $f(z)$ eine in T analytische Funktion und verschwindet $f(z)$ längs einer in T gelegenen Linie (allgemeiner: in den Punkten einer Menge, die eine in T gelegene Häufungsstelle besitzt), so ist $f(z)$ in T identisch null. — Dabei sieht man die Funktion in dem in Betracht kommenden Bereich als bereits vorhanden an und verfolgt bloss deren Werte längs eines im Bereich gelegenen Weges etwa mittelst übereinander greifender Kreise[46]).

Unter der analytischen Fortsetzung im eigentlichen Sinne versteht man folgendes: An einen Bereich T möge ein Bereich $\overline{T}$ längs einer Kurve C derart angrenzen, dass die Punkte von T, $\overline{T}$, C (von den Endpunkten von C wird abgesehen), einen Bereich $\mathfrak{T}$ bilden. Die Bereiche T, $\overline{T}$ dürfen übereinander greifen und auch mehrblättrig sein; in beiden Fällen wird der Bereich $\mathfrak{T}$ mehrblättrig sein. In T möge $f(z)$ analytisch sein; kann man dann den Punkten von $\overline{T}$, C solche Werte $\varphi(z)$, W zuordnen, dass diese die Werte von $f(z)$ in T zu einer in $\mathfrak{T}$ eindeutigen und analytischen Funktion ergänzen, so lässt sich $f(z)$ über T hinaus in $\overline{T}$ analytisch fortsetzen[64]); die Werte $\varphi(z)$, W bilden die *analytische Fortsetzung* für den Bereich $\overline{T}$. Umgekehrt können die Werte $f(z)$, W als eine analytische Fortsetzung der in $\overline{T}$ analytischen Funktion $\varphi(z)$ angesehen werden. Es kann keine zweite analytische Fortsetzung von $f(z)$ über C hinaus in $\overline{T}$

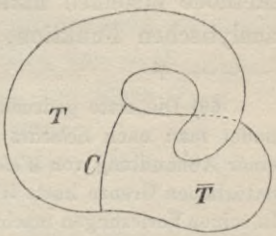

Fig. 1.

62) *Gauss,* Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats u. s. w., Beobachtungen des magnet. Vereins f. 1839, Leipzig 1840, Art. 21 = Werke 5 (1867), p. 223. Der *Gauss*'sche Beweis ist nicht stichhaltig, denn mit der Integralformel kommt man nicht durch; man muss sich etwa der Reihenentwicklung bedienen; vgl. *C. Neumann,* Log. u. Newton'sches Potential, 1877, p. 9.

63) Diss.[15]) § 15. Dem *Riemann*'schen Beweis haftet derselbe Mangel an, wie dem *Gauss*'schen.

64) *Riemann,* J. f. Math. 54 (1857), p. 102 = Werke, p. 82, sowie Werke, p. 413; *Weierstrass*[46]), p. 83 und Vorlesungen.

geben, die mit $\varphi(z)$ nicht identisch wäre. — Ist dagegen die Funktion $f(z)$ so beschaffen, dass sie sich längs keines Stückes von C über T hinaus analytisch fortsetzen lässt, so bildet die Kurve C eine *natürliche Grenze* [65]) der Funktion.

Auf Grund des Begriffs der analytischen Fortsetzung lässt sich die Definition einer analytischen Funktion vervollständigen. Man gehe von einem Bereich T aus, der von einer einzigen Kurve begrenzt ist und in welchem $f(z)$ eindeutig und analytisch ist. Lässt sich $f(z)$ über T hinaus analytisch fortsetzen, so wird das neue Gebiet zum alten Bereich T hinzugefügt. Dieser Prozess wird wiederholt. Und nun wird die analytische Funktion $f(z)$ in ihrem Gesamtverlauf als der Inbegriff der Werte von $f(z)$ in T und der Gesamtheit der durch Wiederholung des Prozesses der analytischen Fortsetzung zu gewinnenden Werte erklärt.

Den Gedanken, die analytische Fortsetzung als Mittel zu gebrauchen, um neues Gebiet zu gewinnen, in welchem die Funktion, ohne aufzuhören, analytisch zu bleiben, definiert werden kann, verdankt man *Riemann* [64]). *Weierstrass*, der schon vor *Riemann*'s Zeit diese Methode ersonnen hatte [66]), benutzte dieselbe, um dem Begriff der analytischen Funktion, wie soeben auseinandergesetzt ist, eine ge-

---

65) Die erste gedruckte Mitteilung über das Auftreten natürlicher Grenzen findet man nach *Schwarz* (J. f. Math. 75 (1873), p. 319 = ges. W. 2, p. 241) in einer Abhandlung von *Weierstrass*, Berl. Ber. 1866, p. 617. Die Möglichkeit einer natürlichen Grenze hatte *Weierstrass* bereits im Jahre 1842 erkannt; vgl. [46]), p. 84. In seinen Vorlesungen machte er 1863 auf diesen Gegenstand aufmerksam (*Schwarz*, a. a. O.). Beispiele von Funktionen, die eine natürliche Grenze haben, sind von *Hankel* (Universitätsprogramm: Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Funktionen, Tübingen 1870 = Math. Ann. 20 (1882), p. 63) veröffentlicht worden. *Kronecker* war 1863 im Besitz des Beispiels aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

(*Schwarz*, a. a. O., wo ein Beispiel *Weierstrass*'s aus der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen in Verbindung mit den elliptischen Modulfunktionen auch erwähnt wird); hier kommt die Funktion in der Nähe eines beliebigen Punktes der natürlichen Grenze jedem vorgegebenen Werte beliebig nahe. Vgl. ferner Nr. **20**. — In *Riemann's* Nachlass fanden sich Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen, wo der limes untersucht wird, dem eine solche Funktion zustrebt, wenn das Argument sich einem Punkte der Begrenzung des Definitionsbereiches der Funktion (vgl. unten), also einem Punkte einer natürlichen Grenze, nähert; Werke, 1. Aufl., p. 427 u. p. 438; 2. Aufl., p. 455 u. p. 466.

66) *Weierstrass* [46]), p. 83.

nauere Fassung zu geben, sowie um das Prinzip der Permanenz einer Funktionalgleichung in strenger Weise zu begründen[67]) (Nr. **16**). Den unmittelbaren Anstoss zu diesen Begriffsbildungen gab *Weierstrass* die Theorie der Differentialgleichungen. Es sei ein System totaler Differentialgleichungen vorgelegt:

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, \ldots, x_n), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

wo G_i eine im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytische Funktion der unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ (Nr. **40**) bedeutet. Dann existieren stets n Funktionen $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, welche in der Umgebung des willkürlichen Punktes $t = t_0$ analytisch sind, in diesem Punkte resp. die Werte $a_1, \ldots, a_n$ annehmen, und, in die n Differentialgleichungen eingetragen, denselben identisch genügen. Dieser Satz ist zuerst von *Cauchy*[68]) bewiesen worden. *Weierstrass*[46]) erfand unabhängig von *Cauchy* einen Beweis desselben und gelangte bei diesen Untersuchungen, über *Cauchy* hinaus, einerseits zu dem soeben besprochenen Begriff der analytischen Fortsetzung und zu der auf denselben sich stützenden Definition des Gesamtverlaufs des Systems von Lösungen der Differentialgleichungen (wobei auch der Begriff der natürlichen Grenze[65]) bereits vorkommt), andererseits zu dem durch die Methode der gleichmässigen Konvergenz der Reihen bewiesenen Satze, dass $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ analytisch von denjenigen Parametern abhängen, von denen $G_1, \ldots, G_n$ bei geeigneter Voraussetzung analytisch abhängen.

Eine analytische Funktion, die keine singuläre Stelle in der erweiterten z-Ebene hat, ist eine Konstante. Giebt es eine Bestimmung der Funktion, die höchstens für einen einzigen Wert von z eine singuläre Stelle hat, so ist die Funktion eindeutig. Man sagt: die im Punkte z_0 analytische Funktion $f(z)$ lässt sich längs eines den Punkt z_0 mit einem zweiten Punkt Z verbindenden Weges l bis in den Punkt Z analytisch fortsetzen, wenn sich eine endliche Anzahl analytischer Fortsetzungen angeben lässt, derart, dass die denselben entsprechenden Bereiche den Weg l der Reihe nach einmal vollständig überdecken[69]). Ist dagegen der Punkt Z so nicht zu erreichen, während durch solche Fortsetzungen in jede Umgebung des Punktes Z

67) Vorlesungen an der Berliner Universität. Durch diese Vorlesungen ist die Methode erst in weiteren Kreisen bekannt geworden.

68) Exerc. d'anal. 1 (1841), p. 355. Eine lithographierte Ausgabe dieser Abhandlung ist bereits im Jahre 1835 erschienen. Vgl. II A 4 a, Nr. **11**.

69) Der Weg l darf sich auch kreuzen, muss sich dann aber in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegen lassen, sodass der Funktion $f(z)$ längs jedes

gedrungen werden kann, so ist Z ein singulärer Punkt derjenigen Bestimmung der Funktion, die dem Wege l entspricht. Satz: Lässt sich die im Punkte z_0 analytische Funktion $f(z)$ längs eines Weges L, der vom Punkte z_0 ausgeht und ohne sich zu schneiden in den Punkt z_0 wieder zurückkehrt, bis in den Punkt $Z = z_0$ analytisch fortsetzen; stimmt ferner die letzte analytische Fortsetzung in der Umgebung des Punktes z_0 mit der ersten nicht überein, so giebt es innerhalb der Kurve L mindestens einen Punkt Z, in den $f(z)$ längs eines jeden innerhalb L gelegenen Weges l nicht analytisch fortgesetzt werden kann. M. a. W.: Ist z_0 ein Randpunkt eines Bereiches B_1 (Nr. **1**), Z irgend ein Punkt von B_1 und lässt sich die im Punkte z_0 analytische Funktion $f(z)$ längs eines beliebig in B_1 gelegenen, die Punkte z_0 und Z verbindenden Weges l bis in Z analytisch fortsetzen, so wird der so erhaltene Wert von $f(z)$ im Punkte Z vom Wege l unabhängig sein und die analytischen Fortsetzungen in die verschiedenen Punkte von B_1 definieren eine in B_1 eindeutige analytische Funktion[70]).

Diese Sätze beruhen im wesentlichen darauf, dass die erweiterte z-Ebene oder Kugel resp. der Bereich B_1 einfach zusammenhängend ist. Auf einer Ringfläche (Nr. **22**) resp. in einem B_n $(n > 1)$ können beispielsweise die verschiedenen Bestimmungen einer analytischen Funktion ausnahmslos analytisch fortsetzbar sein, ohne jedoch in diesem Bereiche eindeutig zu sein.

Um eine analytische Fortsetzung zu konstatieren, sind mehrere Mittel bekannt, insbesondere: 1) das „Prinzip der Symmetrie“[71]) (Nr. **20**), 2) die Methode der Potenzreihen. Diese Methode, welche *Weierstrass* der Funktionenlehre zu Grunde legt[67]), besteht darin, dass man als Ausgangsbereich T das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkt z_0 und Radius R_0 nimmt und die in T eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ in eine Potenzreihe nach $z - z_1$ entwickelt:

$$f(z) = \mathfrak{P}(z - z_1), \qquad |z_1 - z_0| < R_0.$$

Dabei möge R_0 der Radius des wahren Konvergenzkreises[38]) der

---

einzelnen Stückes die oben verlangte Eigenschaft zukommt. Die Bereiche dürfen stets als Stücke übereinander greifender Kreise angenommen werden, deren Mittelpunkte auf dem Wege l liegen; vgl. *Puiseux*[45]); *Weierstrass,* Vorlesungen.

70) Vgl. [45]); ferner *Briot* et *Bouquet,* 1, 2. Aufl., p. 35; *Jordan,* Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 346.

71) Ein allgemeineres, in gewissen Fällen mit dem „Prinzip der Symmetrie“ sich deckendes „Prinzip der analytischen Fortsetzung“ ist von *Klein* gegeben worden: Math. Ann. 21 (1883), p. 164; sowie Nrn. **25—27** dieses Artikels. Mit diesem Prinzip vgl. man die *Poincaré*'sche Methode der analytischen Fortsetzung durch die Transformationen einer vorgelegten Gruppe (II B 6 c) und [165]).

Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ sein. Ist nun der Radius R des wahren Konvergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}(z - z_1)$ grösser als $R_0 - |z_1 - z_0|$, so definiert diese Reihe eine analytische Fortsetzung von $f(z)$ über T hinaus. Lässt man den Punkt z_1 das ganze Innere des Kreises (z_0, R_0) durchlaufen, so wird ein Bereich $\mathfrak{T}^{(1)}$ der z-Ebene ausgefegt, in welchem die Funktion $f(z)$ durch analytische Fortsetzung eindeutig und analytisch definiert wird[72]). Dabei hat man sich einer nicht-abzählbaren Menge (I A 5) von Potenzreihen $\mathfrak{P}(z - z_1)$ bedient. Es genügt, um $\mathfrak{T}^{(1)}$ zu erhalten, den Punkt z_1 bloss die rationalen[73]) Punkte des Kreises (z_0, R_0) durchlaufen zu lassen, also bloss eine abzählbare Menge von Reihen zu gebrauchen, die man dann numerieren und als erste Zeile einer Tabelle anschreiben wird. Indem man ferner den Punkt z_1 die ausserhalb des Bereiches T gelegenen rationalen Punkte von $\mathfrak{T}^{(1)}$ durchlaufen lässt (wofern solche vorhanden sind), entsteht im allgemeinen eine Erweiterung des Bereiches $\mathfrak{T}^{(1)}$. Sollte der neue Bereich $\mathfrak{T}^{(2)}$ über sich selbst greifen, so wird man sich denselben als mehrblättrige *Riemann*'sche Fläche denken. Gewöhnlich lässt man solche übereinander liegende Blätter wieder zusammenfallen, die Träger identisch gleicher Funktionswerte sind[74]). Es kommt so eine weitere analytische Fortsetzung der Funktion $f(z)$ zustande; die neuen rationalen Punkte des Bereiches $\mathfrak{T}^{(2)}$ werden numeriert und als zweite Zeile der Tabelle angeschrieben. Der Prozess wird wiederholt. Und nun erhält man als Endresultat eine abzählbare Menge von Potenzreihen, welche den Gesamtverlauf der analytischen Funktion $f(z)$ darstellen. Die entsprechende *Riemann*'sche Fläche bildet den *Definitions-* oder *Stetigkeitsbereich*[75]) der Funktion und die Begrenzungspunkte der Fläche heissen singuläre Punkte für diejenige Bestimmung der Funktion, welcher das anstossende Blatt entspricht[75a]). Ein jeder Punkt

72) Dieser erste Bereich $\mathfrak{T}^{(1)}$ kann allerdings nicht über sich greifen; die spätern Bereiche $\mathfrak{T}^{(2)}$, $\mathfrak{T}^{(3)}$, ... können jedoch mehrblättrig werden.

73) D. h. solche Punkte, deren Koordinaten beide rationale Zahlen sind. Wegen dieser Methode vgl. man *Poincaré*, Pal. Rend. 2 (1888), p. 197, wo auch nachgewiesen wird, dass die Werte, welche eine analytische Funktion in irgend einem Punkte annehmen kann, stets eine abzählbare Menge bilden.

74) Es empfiehlt sich jedoch zuweilen, die Blätter getrennt bleiben zu lassen; vgl. Nr. 28.

75) *Weierstrass*[27]) für den Fall einer eindeutigen Funktion.

75a) Der Begriff eines nicht isolierten wesentlichen singulären Punktes lässt sich auf mehrdeutige Funktionen ausdehnen. Bildet ein schlichter, d. h. einblättriger Teil des Definitionsbereiches der Funktion einen Bereich T mit dem nicht isolierten Randpunkt a und lässt die Funktion in der Umgebung von a keine analytische Fortsetzung über T hinaus zu, so heisst a eine wesentliche singuläre Stelle der Funktion, oder genauer gesagt, des entsprechenden Zweiges der Fläche liegt in dem Konvergenzkreis einer jener Potenzreihen[76]) und ein jeder Weg l, längs dessen $f(z)$ sich in einen Punkt Z analytisch fortsetzen lässt, wird durch eine endliche Anzahl solcher Kreise vollständig überdeckt und liegt also in der *Riemann*'schen Fläche. Die Gesamtheit der den Punkten der *Riemann*'schen Fläche zugehörigen Wertepaare (w, z), wo $w = f(z)$ ist, incl. gewisser sogleich zu besprechenden Punkte, bezeichnet *Weierstrass* als das *analytische Gebilde*, oder, wenn er betonen will, dass jedes Element dieses Gebildes, $z - a = t^q \psi(t)$, $w - b = t^p \omega(t)$ (Nr. **11**) aus jedem anderen Element $z - \bar{a} = t^{\bar{q}} \bar{\psi}(t)$, $w - \bar{b} = t^{\bar{p}} \bar{\omega}(t)$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht (vgl. den eben zu citierenden Satz), spricht er von einem *monogenen analytischen Gebilde.* Nähert sich die Funktion w einem bestimmten Werte b, wenn z einem singulären Punkt a zustrebt (insbesondere kann sowohl $a = \infty$ als $b = \infty$ sein), so heisst (b, a) eine *Grenzstelle* des analytischen Gebildes. Wenn a ein Pol bezw. ein Verzweigungspunkt endlicher Ordnung ist, in welchem w sich analytisch verhält oder einen Pol hat, so rechnet *Weierstrass* die Grenzstelle auch zum analytischen Gebilde, sonst aber nicht. Es besteht dann der Satz: Ist $f(z)$ im Punkte $z = z_0$ analytisch und $f'(z_0) \neq 0$; bezeichnet man ferner die Umkehrung der Funktion $w = f(z)$ in der Umgebung dieses Punktes mit $z = \varphi(w)$, so fallen die beiden analytischen Gebilde, die aus den Funktionen $f(z)$, $\varphi(w)$ entspringen, in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen.

Der Definitionsbereich besteht aus einem im allgemeinen mehrblättrigen Kontinuum. Wird dasselbe insbesondere zu einem einblättrigen, so ist $f(z)$ eine eindeutige Funktion, ihre singulären Punkte bilden eine abgeschlossene Menge, deren Inhalt jedoch nicht Null zu sein braucht[77]) (Nr. **34** u. [198]). — Aus der *Riemann*'schen Fläche kann

---

(vgl. unten) der Funktion. Wegen verschiedener Möglichkeiten bei der Begrenzung von T vgl. [118]) und [198]).

76) *Osgood,* Cambridge Colloquium, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 5 (1898), p. 72.

77) Diese Definition der analytischen Funktion weicht der Form nach etwas von der *Weierstrass*'schen ab. *Weierstrass* geht von einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ aus und leitet aus derselben durch successive Fortsetzung die Reihen $\mathfrak{P}(z \mid z_0, z_1)$, $\mathfrak{P}(z \mid z_0, z_1, z_2), \ldots \mathfrak{P}(z \mid z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ab. Jede dieser Reihen lässt sich aus jeder der anderen auf die nämliche Weise ableiten. Die Gesamtheit der so zu erhaltenden Potenzreihen bildet nach *Weierstrass* eine *monogene analytische* Funktion. Jede einzelne dieser Reihen heisst ein *Element* der Funktion. *Weierstrass,* Vorlesungen an der Berl. Univ. von 1860 an; vgl. etwa die Werke von *Biermann* und *Harkness* and *Morley*. *Weierstrass,* Berl. Ber., 12. Aug. 1880, § 1 = Werke 2, p. 201. Der Begriff kommt bereits in der s. Z. nicht veröffentlichten Abhandlung[46]) und in der Abhandlung J. f. Math. 51 (1856), p. 1 = Werke 1, p. 155 vor.

man auf mannigfaltige Weise ein Blatt heraussondern; die zugehörigen Funktionswerte bilden einen *Zweig* der Funktion.

Es sei noch bemerkt, dass eine analytische Funktion einer analytischen Funktion nicht notwendig eine monogene analytische Funktion ist, sondern aus mehreren getrennten analytischen Funktionen bestehen kann; m. a. W.: ist $w = f(z)$, $z = \varphi(t)$, so braucht die Elimination von z aus den beiden Gleichungen nicht bloss eine einzige analytische Funktion $w = \psi(t)$ zu ergeben, vielmehr können sich mehrere Funktionen einstellen[78]. Beispiele:

$$w = z^{\frac{1}{2}}, \qquad z = e^t, \qquad w = e^{\frac{1}{2}t}, \quad -e^{\frac{1}{2}t};$$
$$w = \log z, \qquad z = e^t, \qquad w = t, \qquad t + 2\pi i, \ldots$$

Wird eine beliebige abzählbare Menge von Grössen $a_0, a_1, \ldots$ vorgelegt, die bloss so beschaffen sind, dass der Konvergenzkreis der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ nicht auf den Punkt $z = z_0$ zusammenschrumpft, so wird durch diese Reihe und die Methode der analytischen Fortsetzung eine analytische Funktion völlig bestimmt. Mit der Frage nach einer expliciten Formel für eine analytische Fortsetzung über den Konvergenzkreis der Reihe hinaus haben *Borel* und *Mittag-Leffler* sich beschäftigt. *Borel*[79] stellt sich eine allgemeinere Aufgabe und verfährt, wie folgt. Es sei

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \qquad (s_0 = 0),$$
$$s(a) = s_0 + s_1 a + s_2 \frac{a^2}{2!} + \cdots + s_n \frac{a^n}{n!} + \cdots$$

und man bilde den Ausdruck $s(a)e^{-a}$. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, so wird $s(a)e^{-a}$, wenn a reell ist und $a = +\infty$ wird, gegen denselben Grenzwert konvergieren. Divergiert die u-Reihe, so kann $s(a)e^{-a}$ trotzdem noch konvergieren. Es seien $u_0(z), u_1(z), \ldots, s(a, z)$ in einem Bereich T analytische Funktionen von z. Konvergiert dann $s(a, z)e^{-a}$ in jedem T' gleichmässig, so wird der Grenzwert

78) Vgl. *Burkhardt,* Anal. Funktionen, p. 198.

79) J. de math. (5) 2 (1896), p. 103. Der Satz auf p. 106 unten: „On en conclut . . .“ ist falsch; deswegen müssen in der Folge verschiedene Abänderungen eintreten. Eine zweite Arbeit enthält Anwendungen auf Potenzreihen, ibid. p. 441. Diese Untersuchungen sind in einer Preisschrift (1898) weiter geführt und die Theorie wird auf die Differentialgleichungen und ein *Stieltjes*'sches Problem (Nr. **39**) angewandt; Ann. éc. norm. (3) 16 (1899), p. 9. Vgl. ferner die Leçons sur les séries divergentes, 1901. Es sei auch auf *Servant,* Par. Thèse 1899, verwiesen. *Stieltjes* hatte bereits 1894, Toul. Ann. 8, p. J. 56, einen Satz erfunden, wodurch eine analytische Fortsetzung konstatiert wird. Vgl. auch I A 3, Nr. **40**.

$\lim\limits_{a=+\infty} s(a, z)\, e^{-a} = F(z)$ eine in T analytische Funktion von z sein. In dem Fall, dass die u-Reihe in einem gewissen in T enthaltenen Bereich D gleichmässig konvergiert, in anderen Punkten von T jedoch divergiert, wird somit eine analytische Fortsetzung der in D so definierten analytischen Funktion dargestellt.

Mittag-Leffler[80]) definiert zunächst einen „Stern" A, welcher ein Bereich T ist, und zeigt dann, dass $f(z)$ in diesem Bereich T sich durch eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)$$

darstellen lässt, die in jedem T' gleichmässig konvergiert. $G_n(z)$ ist ein Polynom, dessen Koeffizienten lineare Funktionen von $a_0, a_1, \ldots$ sind.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine analytische Fortsetzung hat *Painlevé*[80a]) gegeben. In einem Bereiche T, dessen Begrenzung zum Teil aus einer regulären Kurve[1]) C bestehe, sei $f(z)$ eine analytische Funktion, die in jedem innern Punkte von C einem bestimmten Grenzwert W zustrebt. (Diese Werte bilden dann, wie *Painlevé* zeigt, eine stetige Folge von Randwerten der Funktion $f(z)$). In einem zweiten Bereich $\overline{T}$, der ausserhalb T liegt und längs C an T stösst, sei $\varphi(z)$ eine analytische Funktion, die in jedem Punkte von C dem Werte W ebenfalls zustrebt. Dann bildet $\varphi(z)$ nebst den Randwerten W eine analytische Fortsetzung von $f(z)$ über C hinaus.

Über die stetige Fortsetzung einer analytischen Funktion über ihren Definitionsbereich hinaus existieren Arbeiten von *Borel*, *Fabry* und *Picard*[81]).

Sind mehrere Funktionen $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)$ vorgelegt, deren gleichzeitiger Verlauf verfolgt werden soll (etwa die n Funktionen, die dem obigen System von Differentialgleichungen genügen), so wird die zugehörige *Riemann*'sche Fläche derart konstruiert, dass jede Funktion für sich darauf eindeutig und analytisch ist.

---

80) Mitteilungen an die Akad. Wiss. Stockholm, 1898; Acta math. 23 (1899), p. 43; 24 (1900), p. 183, 205. Citate auf sich anschliessende Arbeiten befinden sich zu Anfang der letztgenannten Abhandlung. Vgl. auch Nr. **38**.

80a) Par. Thèse 1887 = Toul. Ann. 2 (1888), p. 28. Der *Painlevé*'sche Beweis stützt sich auf den Satz von [26]). — Man vgl. auch die *Schwarz*'sche Bedingung, Nr. **20**, Ende.

81) *Borel*, Par. Thèse, 1894 = Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), p. 9; *Fabry*, Par. C. R. 128 (1899), p. 78; *Picard*, ibid. p. 193. Eine explicite die Funktion $f(z)$ in ihrem Definitionsbereich darstellende Formel kann in einem anderen Teil der Ebene eine andere analytische Funktion $\varphi(z)$ definieren; *Weierstrass*, Berl. Ber., 12. Aug. 1880 = Werke 2, p. 201. Vgl. auch Note [195]). Dass auf

14. Geometrische Deutung durch ebene und Raumkurven[82]). Ist

$$f(w, z) = w^m + A_1(z)w^{m-1} + \cdots + A_m(z) = 0$$

ein Polynom in w, dessen Koeffizienten im Punkte $z = z_0$ analytische Funktionen von z sind und dort verschwinden, so definiert die Gleichung $f(w, z) = 0$ in der Umgebung des Punktes z_0 m analytische Funktionen $w^{(1)}, \ldots, w^{(m)}$, die auch zum Teil durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen resp. mit einander zusammenfallen können. Letzteres kann nur dann geschehen, wenn $\frac{\partial f}{\partial w} = f'_w(w, z)$ für eine derselben identisch verschwindet; dieser Fall sei ausgeschlossen. Ist z_0 reell und sind $w^{(1)}, \ldots, w^{(m)}$ für reelle Werte von z in der Umgebung des Punktes P: $z = z_0$, $w = 0$, alle reell, so lassen sich diese Funktionen in der (z, w)-Ebene der analytischen Geometrie durch Kurven veranschaulichen. Diese geometrische Deutung erstreckt sich auch auf das komplexe Gebiet, wenn zu den reellen geometrischen Elementen in der gewöhnlichen Weise noch die komplexen hinzugenommen werden. Zwischen dieser Deutung und der durch die *Riemann*'sche Fläche besteht nun folgende Beziehung:

a) Ist $m \geqq 1$ und fallen keine zwei der m Tangenten der Kurve $f = 0$ im Punkte P zusammen; ist ferner keine der Tangenten der w-Achse parallel, so liegen die m Blätter der entsprechenden *Riemann*schen Fläche schlicht übereinander. Der Punkt z_0 ist nur dadurch ausgezeichnet, dass die m Funktionen w dort alle denselben Wert haben. Es findet hier keine Verzweigung statt.

b) Die Tangente der Kurve $f = 0$ (bezw. eines Zweiges derselben) sei im Punkte P der w-Achse parallel; P sei ein gewöhnlicher Punkt der Kurve (bezw. dieses Zweiges derselben). Dem entspricht in der *Riemann*'schen Fläche ein einfacher Verzweigungspunkt.

---

diese Weise der Funktion $f(z)$ nicht stets eine einzige Funktion $\varphi(z)$ zugeordnet wird, hat *Poincaré* gezeigt: Am. J. of Math. 14 (1892), p. 211.

82) Die Beziehung zwischen *Riemann*'s Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale und der Theorie der algebraischen Kurven hat *Clebsch* (II B 2) zuerst erforscht. Von ihm rühren auch die hier ausgesprochenen Sätze her. Eine Beschränkung auf den algebraischen Fall ist jedoch unnötig. Auf Grund des *Weierstrass*'schen Theorems $F(w, z) = f(w, z)\,\Phi(w, z)$ (Nr. **45**) behalten nämlich diese Sätze ihre Gültigkeit auch für die durch eine beliebige Gleichung $F(w, z) = 0$ implicite definierte analytische Funktion (resp. Funktionen); denn es handelt sich um ein Verhalten im Kleinen, nämlich in der Umgebung des Punktes $z = z_0$, $w = 0$ und dort ist w als Funktion von z durch die Gleichung $f(w, z) = 0$ bestimmt. Für die hier in Betracht kommenden singulären Punkte eines allgemeinen analytischen Gebildes sind diejenigen der algebraischen Kurven typisch; vgl. die Parameterdarstellung, Nr. **11**.

c) Die Kurve habe einen der w-Achse parallelen Wendepunkt oder einen mehrfachen Punkt anderer Art als die vorhin erwähnten. Die Blätter der *Riemann*'schen Fläche hängen dann in einem oder mehreren Cyklen zusammen.

Singuläre Punkte einer Kurve können durch stetige Variation der Koeffizienten erzeugt werden. Die entsprechende Veränderung der *Riemann*'schen Fläche lässt sich mit Hülfe der vorhergehenden Beziehungen verfolgen. Als Beispiele mögen die Kurven dienen:

α) $$w^2 = z(z - \alpha)(z - \beta),$$

wo α und β reelle Grössen sind und β gegen α konvergiert. Es entsteht so ein Doppelpunkt, während andererseits die *Riemann*'sche Fläche zwei Verzweigungspunkte einbüsst.

β) $$w(w^2 - \alpha^2) = z.$$

Konvergiert α gegen 0, so bekommt die Kurve einen Wendepunkt. Dafür tauscht die *Riemann*'sche Fläche zwei einfache Verzweigungspunkte gegen einen Verzweigungspunkt zweiter Ordnung ein.

Im Falle β) ist die Umkehrfunktion in der Nähe des Punktes $w = 0$ eindeutig. Es gilt der allgemeine Satz: Ist der Punkt P kein mehrfacher Punkt der Kurve, so hängen die entsprechenden m Blätter der *Riemann*'schen Fläche im Punkte z_0 in einem Cyklus zusammen. Darauf beruht die Regel: Die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte der Umkehrung $w(z)$ einer rationalen Funktion $z = \frac{\varphi(w)}{\psi(w)}$ werden durch die Punkte der entsprechenden Kurve gegeben, in denen dieselbe der w-Achse parallel ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass $\varphi\psi' - \varphi'\psi = 0$, $\psi \neq 0$.

Zwischen einer Raumkurve und der entsprechenden *Riemann*'schen Fläche existieren ähnliche Beziehungen[83]).

15. Die Lagrange'sche Reihe. An eine Schrift von *Lambert*[84]) anknüpfend, worin eine Wurzel der Gleichung $x^m + px = q$ durch eine unendliche Reihe dargestellt ist, hat *Lagrange*[85]) eine Wurzel $z = \zeta$ der Gleichung $z = x + \alpha f(z)$ in folgende Reihe entwickelt:

---

83) Vgl. *Klein*, Riemann'sche Flächen.

84) Observationes variae in mathesin puram, Acta Helvetica 3 (1758), p. 128; die Reihe lautet $x = \frac{q}{p} - \frac{q^m}{p^m} + m\frac{q^{2m-1}}{p^{2m+1}} - \frac{m(3m-1)}{1\,.\,2}\frac{q^{3m-2}}{p^{3m+1}} + \cdots$ und ist durch die Methode der successiven Annäherungen abgeleitet.

85) Berl. Mém. 24, 1768 [1770], p. 251 = Oeuvres 3, p. 25. *Lagrange* setzt die Gleichung in der Form (p. 274) $\alpha - x + \varphi(x) = 0$ an und bezeichnet ihre

$$\zeta = x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d}{dx}[f(x)]^2 + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x)]^n + \cdots.$$

Genauer gesagt war es nicht diese Reihe, sondern eine allgemeinere, nämlich die für eine beliebige Funktion von ζ, $\Phi(\zeta)$, die *Lagrange* dort giebt:

$$\Phi(\zeta) = \Phi(x) + \alpha\,\Phi'(x)f(x) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\Phi'(x)f(x)^n] + \cdots.$$

Er hat die Reihe auf das *Kepler*'sche Problem, die Auflösung der Gleichung $z = x + \alpha \sin z$ nach z, angewandt[86]). Im Anschluss daran hat *Laplace*[87]) den Radiusvektor einer Planetenbahn explicite durch die Zeit ausgedrückt, indem er mittelst der *Lagrange*'schen Reihe aus den Gleichungen $R = 1 - \alpha \cos z$, $z = x + \alpha \sin z$, z eliminiert:

$$R = 1 - \alpha \cos x + \frac{\alpha^2}{1!}\sin^2 x + \cdots + \frac{\alpha^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-2}\sin^n x}{dx^{n-2}} + \cdots.$$

Hier bedeutet α die Excentrizität der Bahn; R, x sind resp. dem Radiusvektor und der Zeit proportional. Er bestimmte ferner den Konvergenzbereich dieser Reihe[88]). *Jacobi*[89]) leitete durch die *Lagrange*sche Reihe die Formel für die Kugelfunktionen ab:

$$X_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^2 - 1]^n.$$

Setzt man nämlich $z - x - \alpha\frac{z^2-1}{2} = 0$, $\zeta = \frac{1-\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{\alpha}$, so ist $\frac{\partial \zeta}{\partial x}(1-\alpha\zeta) = 1$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \alpha^n$ und man

---

Wurzel mit p, so dass die Reihe für eine beliebige Funktion von p, $\psi(p)$ wie folgt lautet:

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \varphi(\alpha)\psi'(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{d\varphi(\alpha)^2\psi'(\alpha)}{d\alpha} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}\varphi(\alpha)^n\psi'(\alpha)}{d\alpha^{n-1}} + \cdots.$$

Er beschäftigt sich auch mit der Frage nach der Konvergenz der Reihe. Vgl. *Brill* und *Noether*'s Bericht p. 153 u. 178, wo eine Skizze der Geschichte der *Lagrange*'schen Reihe sich findet; ferner eine Abhandlung von *Nekrassoff* über die Lagrange'sche Reihe, Matematičeskij Sbornik 12, Moskow 1885, die auch viele Litteraturangaben enthält.

86) Berl. Mém. 25, 1769 [1771], p. 204 = Oeuvres 3, p. 113.

87) Méc. cél. 1, livre II, Nr. 22 (1798—99) = Oeuvres 1, p. 196.

88) Par. Mém. 6 (1823 [27]), p. 61 = Méc. cél. suppl., oeuvr. 5, p. 473. Die Excentrizität α darf den Wert 0,6627 ... nicht überschreiten.

89) J. f. Math. 2 (1827), p. 223. Vgl. auch *Cauchy*, Par. Mém. 8 (1827) p. 118, der die *Lagrange*'sche Reihe ebenfalls zu diesem Zweck angewandt hat. Die Formel selbst rührt von *Rodrigues* (1816) her; vgl. *Heine*, Kugelfunktionen 1, p. 20.

braucht nur die *Lagrange*'sche Reihe für ζ nach x zu differenzieren und die Koeffizienten der beiden Reihen zu vergleichen.

Bei *Cauchy*'s ersten auf die Reihenentwicklung einer impliciten Funktion und die Abschätzung des Restes sich beziehenden Entdeckungen spielte die *Lagrange*'sche Reihe eine wesentliche Rolle[90]). Mittelst eines längs eines komplexen Weges erstreckten bestimmten Integrals schätzte *Cauchy* den Wert des allgemeinen Gliedes der Reihe ab, ohne jedoch die Frage nach der Konvergenz in ihrem vollen Umfang zu erledigen (s. unten). Eine strenge Begründung der *Lagrange*'schen Formel nach *Cauchy*'schen Methoden haben *E. Rouché* und *C. Hermite* gegeben[91]). Es mögen nämlich $\Phi(z)$, $f(z)$ im Bereich T analytische Funktionen, x ein beliebiger fester Punkt von T, und T_1' ein beliebiger Bereich sein, der x als innern Punkt enthält. Bestimmt man r dann so, dass für jeden Wert α im Kreise C: $|\alpha| < r$, und für jeden Wert z auf dem Rande von T_1': $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right| < 1$ ist, so gilt die *Lagrange*'sche Reihenentwicklung für $\Phi(\zeta)$ sicher, so lange $|\alpha| < r$ bleibt. Die Beziehung $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right| = 1$ hat zur Folge, dass gleichzeitig

$$F(z) = z - x - \alpha f(z) = 0,$$
$$F'(z) = 1 - \alpha f'(z) = 0,$$

dass also, für einen gewissen Wert von α auf dem Rande des Konvergenzkreises C der Reihe, z mehrfache Wurzel der Gleichung $F(z) = 0$ wird. „Der Ursprung des berühmten Satzes von *Cauchy* über den Konvergenzkreis kann hiernach auf jene wenig bekannte Abhandlung[90]) zurückgeführt werden“[92]). Die Gleichung $F(z) = 0$ kann aber für verschiedene Werte von α eine mehrfache Wurzel haben. Um welchen Wert von α handelt es sich denn hier? Denkt man sich die *Riemann*'sche Fläche für die Funktion $\zeta(\alpha)$ über die α-Ebene ausgebreitet,

---

90) *Brill* und *Noether* sprechen die Ansicht aus, dass man aus der Reihenfolge seiner Entdeckungen schliessen müsse, dass die Reihe von *Lagrange*, ihre Anwendung auf die *Kepler*'sche Gleichung u. s. w. geradezu der Ausgangspunkt für diese bedeutenden Untersuchungen überhaupt gewesen sei; Bericht, p. 178. Vgl. *Cauchy*[89]), p. 97 u. 130.

91) *E. Rouché*, J. éc. pol., cah. 39 (1861), p. 193; *C. Hermite*, Cours d'anal., 19. leçon = *Picard*, T. d'anal. 2, p. 262. *Hermite* leitet zunächst die Formel ab: $\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\Pi(x) f(x)^n\right]$, woraus sich dann die gewöhnliche Formel durch die Substitution $\Pi(z) = F'(z)\,\Phi(z)$ ergiebt. Vgl. auch die *Darboux*'sche Formel (unten).

92) *Brill* und *Noether*, Bericht, p. 179.

so sieht man, dass der Kreis C in einem bestimmten Blatt derselben liegt. Da $f(z)$ in T eindeutig ist, so entspricht der mehrfachen Wurzel eine Verzweigung der Funktion $\zeta(\alpha)$ (Nr. **14**). Nun kann es sehr wohl vorkommen, dass *andere* Blätter der Fläche in Verzweigungspunkten zusammenhängen, die, auf dieses Blatt projiziert, zu innern Punkten von C führen; die entsprechenden Werte von α spielen hier keine Rolle. Andererseits kann man nicht behaupten, dass unter den einem bestimmten Werte von α entsprechenden Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$ die durch die *Lagrange*'sche Reihe dargestellte stets den kleinsten absoluten Betrag hat. Man sieht somit die Schwierigkeit, der *Cauchy* begegnete und die sich erst dann hebt, wenn der Begriff der Zweige einer mehrdeutigen Funktion zu voller Klarheit gelangt ist. Auf anderem Wege hat *Nekrassoff*[93]) diese Frage erledigt, indem er über der z-Ebene die Fläche $Z = \left|\frac{f(z)}{z-x}\right|$ konstruiert, wobei Z die dritte Raumkoordinate bedeutet, und auf dieser Fläche gewisse Kurven untersucht. Ist $f(x) \neq 0$, so wird die Projektion der Kurve $Z = Z_0 = \text{const.}$ auf die z-Ebene für grosse Werte von Z_0 einen geschlossenen, den Punkt $z = x$ im Innern enthaltenden Zweig haben. Lässt man Z_0 stetig abnehmen, so kommt man bei geeigneten Voraussetzungen bezügl. $f(z)$ auf einen Grenzwert[94]) $Z_0 = k$, wofür dieser Zweig mit einem anderen im Punkte $z = c$ zusammenstösst. Dem Punkte c entspricht eine Verzweigung des durch die *Lagrange*'sche Reihe dargestellten Zweiges der Funktion $\zeta(\alpha)$ und der wahre Konvergenzkreis hat daher den Radius k^{-1}.

Laplace[95]) hat die *Lagrange*'sche Reihe für den Fall mehrerer Gleichungen auf formalem Wege verallgemeinert. Dem *Laplace*'schen Resultat hat *Darboux*[96]) für den Fall zweier Gleichungen:

$$F(w, z) = z - x - \alpha f(w, z) = 0$$

$$G(w, z) = w - y - \beta \varphi(w, z) = 0$$

die Form gegeben:

---

93) *Nekrassoff*[84]); vgl. auch Math. Ann. 31 (1888), p. 337.

94) Dies wird insbesondere stets eintreffen, wenn $f(z)$ eindeutig ist und keine anderen Singularitäten im Endlichen besitzt als Pole, wonach denn die für die Praxis wichtigsten Fälle der Methode zugänglich sind. — Diese Form des *Nekrassoff*'schen Beweises rührt von *N. Gernett* her; Vortrag, gehalten im Math. Sem. zu Göttingen, den 5. Juli 1899.

95) Par. Hist. 1777 [1780], p. 116 = Oeuvres 9, p. 330.

96) Par. C. R. 68 (1869), p. 324. Vgl. auch *Poincaré*, Acta math. 9 (1887), p. 357, sowie Nr. **41** dieses Artikels. Im Anschluss an *Darboux* behandelt *Stieltjes* den allgemeinen Fall; Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 93.

$$\frac{\Pi(\xi, \eta)}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(\xi, \eta)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \beta^n}{m!\, n!} \frac{\partial^{m+n} (\Pi f^m \varphi^n)}{\partial x^m \partial y^n}.$$

16. Funktionalgleichungen[97]). Es mögen $w_i = f_i(z)$, $i = 1, \ldots n$, Funktionen von z sein, die in der Umgebung des Punktes z_0 analytisch sind. Zwischen diesen n Funktionen möge für alle Punkte der Umgebung von z_0 die Beziehung bestehen:

$$G(w_1, \ldots, w_n) = 0,$$

wo G eine ganze rationale oder transcendente Funktion der n Argumente $w_1, \ldots, w_n$ bedeutet (Nr. **40**). Dann fährt diese Beziehung fort zu bestehen, wenn die n Funktionen $f_i(z)$ gleichzeitig längs eines beliebigen Weges analytisch fortgesetzt werden. Kann jede der Funktionen $f_i(z)$ in einen beliebigen Punkt ihres Definitionsbereichs längs eines Weges fortgesetzt werden, der ganz im Definitionsbereich jeder anderen dieser Funktionen liegt, so gilt die Beziehung für den Gesamtverlauf jeder Funktion, wofern nur jedesmal passende Zweige der Funktionen zusammengefasst werden[98]).

Würde man etwa bloss voraussetzen, dass G eine analytische Funktion der n Argumente sei, oder dass die Funktionen $f_i(z)$ sich in einem Punkte z_0 analytisch verhalten, so würde man nur schliessen können, dass bei gleichzeitiger analytischer Fortsetzung der n Funktionen $f_i(z)$ längs eines bestimmten Weges die Beziehung $G(w_1, \ldots, w_n) = 0$ so lange gilt, als der Punkt $(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ innerhalb des Definitionsbereiches der Funktion G bleibt. Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen: Es sei $\varphi(z)$ innerhalb des Einheitskreises analytisch und von Null verschieden und lasse keine analytische Fortsetzung über diesen Kreis hinaus zu[99]). Die Differentialgleichung

---

97) Diesem Prinzip eine genaue Fassung zu geben, war erst möglich, nachdem der Begriff der analytischen Funktion definitiv festgelegt war und ist ebenfalls das Verdienst von *Weierstrass*; Vorlesungen an der Berliner Universität. Das Prinzip findet man bereits in einer Abhandlung aus dem Jahre 1854, J. f. Math. 51 (1856), p. 1 = Werke 1, p. 153.

98) Es kann auch vorkommen, dass einige der Funktionen eine isolierte singuläre Stelle in einem Punkte z_1 haben, in welchem andere dieser Funktionen sich analytisch verhalten, dass aber, von solchen Stellen abgesehen, die Bedingung des Satzes erfüllt ist. Dann gilt der Satz noch, wenn bloss von diesen Stellen abgesehen wird.

99) Eine solche Funktion erhält man beispielsweise, wenn man zu der von mir aufgestellten Funktion $f(z)$ eine passende Konstante addiert; N. Y. Bull. (2) 4 (1898), p. 417. Der dort gegebene Beweis ist von *A. Hurwitz* vereinfacht; ibid. (2) 5 (1898), p. 17.

$$\frac{du}{dz} = \frac{u}{\varphi(z)}$$

hat dann die allgemeine Lösung

$$u = ce^{\int\limits_0^z \frac{dz}{\varphi(z)}}$$

und wird insbesondere durch die Funktion $u = 0$ befriedigt. Da nun aber die Differentialgleichung nur innerhalb des Einheitskreises überhaupt einen Sinn hat, so kann die Funktion $u = 0$ auch nur in diesem Bereich als Lösung angesehen werden. Die Beispiele sind dann:

(a) $$G(w_1, w_2, w_3) = w_3 - \frac{w_2}{\varphi(w_1)},$$

wo $\quad f_1(z) = z, \quad f_2(z) = u = 0, \quad f_3(z) = \frac{du}{dz}, \quad z_0 = 0;$

(b) $$G(w_1, w_2, w_3) = w_3 - \frac{w_2}{w_1},$$

wo $\quad f_1(z) = \varphi(z), \; f_2(z) = u = 0, \; f_3(z) = \frac{du}{dz}, \quad z_0 = 0.$

Die einfachere Differentialgleichung $\frac{du}{dz} = \frac{u}{z}$ leistet im wesentlichen dasselbe.

Funktionalgleichungen (die auch insbesondere die Differentialgleichungen umfassen) werden sowohl von vornherein zur Definition analytischer Funktionen als auch zur Ermittelung der analytischen Fortsetzung einer in einem gewissen Bereich erklärten Funktion verwendet. Es sei beispielsweise an die verschiedenen Definitionen der Exponentialfunktion erinnert:

(α) $\quad f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2), \qquad \lim\limits_{z=0} \frac{f(z) - 1}{z} = 1;$

(β)[100] $\quad f'(z) = f(z), \qquad f(0) = 1.$

Wie hier, so hat man auch im allgemeinen zur vollständigen Definition der Funktion ausser der Funktionalgleichung selbst noch gewisse Nebenbedingungen nötig. — Die Gammafunktion kann man zunächst für Werte von z, deren reeller Teil positiv ist, durch das bestimmte Integral:

100) Zu dieser Definition sind die allgemeinen Existenzsätze bezügl. der Lösung einer Differentialgleichung nicht nötig; vgl. etwa *Demartres*, Cours d'an. 2, p. 12, wo eine elementare Behandlung der Funktion nach dieser Definition gegeben ist. — *Moore* hat eine Definition der Funktion $\sin z$ auf Grund der Funktionalgleichungen $f(2z) f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 f(z) f\left(z + \frac{1}{2}\right)$, $f(-z) = -f(z)$ und gewisser Nebenbedingungen gegeben; Ann. of Math. 9 (1895), p. 43.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

wo t nur reelle positive Werte durchläuft, definieren, um dann für solche Werte des Arguments die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ zu konstatieren. Damit werden alle analytischen Fortsetzungen bestimmt. — Die doppeltperiodischen Funktionen werden nebst den elementaren Funktionen dadurch charakterisiert, dass sie allein ein algebraisches Additionstheorem zulassen:

$$G(f(z_1 + z_2), f(z_1), f(z_2)) = 0,$$

wo $G(w_1, w_2, w_3)$ eine ganze rationale Funktion von w_1, w_2, w_3 bedeutet (II B 6 a). Endlich sei noch der Rolle gedacht, welche die Monodromiegruppe in der Theorie der linearen Differentialgleichungen spielt (II B 4).

Die Ideen der *Galois*'schen Theorie werden auf die Funktionentheorie übertragen, indem man an Stelle der algebraischen Gleichung eine Funktionalgleichung treten lässt[100a]).

Näheres über diesen Gegenstand findet man in II B 8.

17. Bestimmte und Schleifenintegrale. Durch das bestimmte Integral

$$\int_p^q f(t, z)\, dt$$

wird bei geeigneten Voraussetzungen bezüglich der Funktion $f(t, z)$

100a) Man vgl. II B 4, sowie *Hölder,* Math. Ann. 28 (1887), p. 1, wo gezeigt ist, dass keine analytische Funktion, welche der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ genügt, eine Lösung einer algebraischen Differentialgleichung mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von z sind, sein kann. *Moore* knüpft an die *Hölder*'sche Untersuchung an, giebt eine systematische Darlegung des Begriffs des Rationalitätsbereiches, findet allgemeine Bedingungen für „transcendentally transcendental" Funktionen und stellt neue Beispiele solcher Funktionen auf; Math. Ann. 48 (1896), p. 49.

Eisenstein hat den folgenden Satz ausgesprochen: Ist eine Lösung einer algebraischen Gleichung durch eine Reihe $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ darstellbar, wo $c_0, c_1, c_2, \ldots$ rationale Zahlen in reduzierter Form sind, so kommt in den Nennern dieser Koeffizienten nur eine endliche Anzahl verschiedener Primzahlen vor und es ist stets möglich, x durch ein solches ganzzahliges Vielfache hx zu ersetzen, dass alle Koeffizienten in ganze Zahlen übergehen; *Eisenstein,* Berl. Ber. 1852, p. 441; *Heine,* J. f. Math. 48 (1854), p. 268; *Hermite,* Lond. Math. Proc. 7 (1876), p. 173. Im Anschluss daran zeigt *A. Hurwitz,* dass gewisse Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten Funktionen definieren, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen, Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 327. Vgl. auch *Pincherle,* J. f. Math. 103 (1888), p. 84.

eine analytische Funktion von z definiert (Nr. 6). Der Konvergenzbereich dieses Integrals kann jedoch beschränkter sein als der Definitionsbereich der Funktion, indem für die Punkte des letzten Bereiches nicht stets bis in den Punkt p resp. q integriert werden kann. Diesem Übelstand wird in einer wichtigen Klasse von Fällen dadurch abgeholfen, dass das obige Integral durch ein *Schleifenintegral* ersetzt wird. Es möge $f(t, z)$, als Funktion von t betrachtet, in den Punkten p, q Verzweigungspunkte haben und nach Umkreisung eines dieser Punkte sich nur um einen in Bezug auf t konstanten Faktor $e^{2\pi i\sigma}$ resp. $e^{2\pi i\tau}$ ändern. Lässt man den Punkt t einen *Doppelumlauf* beschreiben, d. h. einen Weg, der die Punkte p, q abwechselnd umkreist, und zwar einen jeden zuerst im positiven und dann im negativen Sinne, so kehrt die Funktion zum ursprünglichen Wert zurück; auf der *Riemann*'schen Fläche der Funktion $f(t, z)$ ist der Weg ein geschlossener.

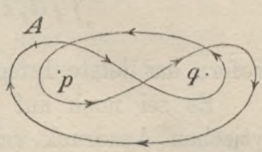

Fig. 2.

Das längs dieses Weges erstreckte Integral $\int^{(q,p,q^-,p^-)} f(t, z)\, dt$ hat stets einen Sinn. Konvergiert auch das frühere Integral, so ist

$$\int^{(q,p,q^-,p^-)} f(t, z)\, dt = (1 - e^{2\pi i\sigma})(1 - e^{2\pi i\tau}) \int_p^q f(t, z)\, dt.$$

Es wird also in der That, falls das Doppelumlaufintegral gleichmässig konvergiert, mittelst desselben eine analytische Fortsetzung der durch das frühere Integral definierten Funktion dargestellt[101]). Durch ein solches Integral wird insbesondere die hypergeometrische Funktion für alle Werte ihres Arguments dargestellt[102]). Im Falle, dass $\sigma = \tau$

---

101) Schleifenintegrale sind zuerst von *Riemann* gebraucht worden, der die Periodicitätsmoduln *Abel*'scher Integrale durch bestimmte Integrale definierte, welche längs eines auf der betr. *Riemann*'schen Fläche geschlossenen Weges, also längs eines *Schleifenweges* geführt werden. Aber auch Schleifenintegrale in dem hier betrachteten Sinne waren ihm geläufig; vgl. Gött. Abh. 7 (1857), p. 21 = Werke, 1. Aufl., p. 77, 2. Aufl., p. 82; Berl. Ber. 1859, p. 671 = Werke, 1. Aufl., p. 137, 2. Aufl., p. 146; Nachlass, Werke, 1. Aufl., p. 404, 2. Aufl., p. 428; ferner bei Riemann's Schülern *H. Hankel,* Zeitschr. Math. Phys. 9 (1864), p. 1 und *J. Thomae,* ibid. 14 (1869), p. 48. In neuerer Zeit sind solche Integrale auf die Darstellung der Lösung einer linearen Differentialgleichung, sowie auf die Behandlung der *Euler*'schen B- und Γ-Funktionen, von *C. Jordan,* Cours d'anal. 3, p. 241; *L. Pochhammer,* Math. Ann. 35 (1890), p. 470 und *P. A. Nekrassoff,* Math. Ann. 38 (1891), p. 509 angewandt worden. Den Doppelumlauf haben *Jordan* und *Pochhammer* unabhängig von einander erfunden (vgl. II A 3, Nr. **15**).

102) Vgl. *Schellenberg,* Gött. Diss. 1892. Hier wird auch prinzipieller Gebrauch von homogenen Variabeln (Nr. **49**) gemacht.

ist, genügt schon eine einmalige Umkreisung eines jeden der Punkte p, q und es ist dann[103])

$$\int^{(q,p^-)} f(t, z)\, dt = (1 - e^{2\pi i \sigma}) \int_p^q f(t, z)\, dt,$$

wofern das letzte Integral konvergiert.

Es sei noch auf einen anderen von *Weierstrass* gegebenen analytischen Ausdruck verwiesen, durch welchen eine analytische Fortsetzung der durch das bestimmte Integral $\int_p^q f(t, z)\, dt$ definierten Funktion ebenfalls dargestellt werden kann[104]).

18. Die Umkehrfunktion und die konforme Abbildung im Grossen. Eine in einem Bereich T analytische Funktion $w = f(z)$ definiert eine ein-eindeutige Abbildung eines Bereiches T_1' auf einen Bereich $\mathfrak{T}_1'$ einer über die w-Ebene ausgebreiteten *Riemann*'schen Fläche. Verschwindet $f'(z)$ in T_1' nirgends, so wird die Abbildung der Umgebung eines beliebigen Punktes z_0 von T_1' auf die Umgebung des entsprechenden Punktes w_0 konform sein. Dieser Umstand reicht jedoch noch nicht zum Schlusse aus, dass $\mathfrak{T}_1'$ nicht über sich selbst greift, m. a. W. dass die Umkehrfunktion $z(w)$ für die in Betracht kommenden Werte von w eindeutig ist[105]). Eine dazu hinreichende Bedingung gibt der Satz[106]): Ist $w = f(z)$ eine in einem Bereich B_1 (Nr. **1**) stetige und innerhalb B_1 analytische Funktion von z, die auf der Begrenzung C von B_1 ein und denselben Wert in zwei verschiedenen Punkten niemals annimmt, so geht C in eine geschlossene sich selbst nicht schneidende *Jordan*'sche Kurve[107]) Γ der w-Ebene

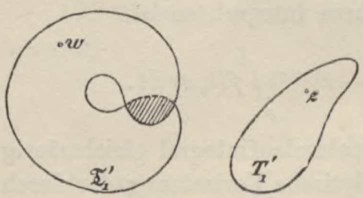

Fig. 3.

103) Mittelst eines solchen Integrals lässt sich beispielsweise die Γ-Funktion darstellen [101]), [102]).

104) *Weierstrass*, Progr. Braunsberg 1848/49, § 3 = Werke 1, p. 122.

105) *Klein*, Math. Ann. 21 (1883), p. 214; Differentialgleichungen (lith.) 1891, p. 78. Ein lückenhafter Beweis der eindeutigen Umkehrung der elliptischen Integrale erster Gattung beruht auf einer Verkennung der hier hervorgehobenen Sachlage; *Briot* et *Bouquet*, 1. Aufl., § 62; 2. Aufl., § 219; strenger Beweis bei *Picard*, Darb. Bull. (2) 14 (1890), p. 107 = Traité 2, p. 334.

106) *Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces etc. 1, Paris 1887, p. 173; *Picard*, Traité 2, p. 280.

107) Unter einer geschlossenen *Jordan*'schen Kurve ohne mehrfachen Punkt

über; der von Γ abgegrenzte schlichte Bereich der w-Ebene wird ein-eindeutig und stetig auf B_1, das Innere dieses Bereiches ausserdem noch konform auf das Innere von B_1 bezogen[108]). Die Umkehrfunktion $z(w)$ ist für die in Betracht kommenden Werte von w eindeutig. Der Satz kann so erweitert werden, dass der Bereich B_1 und dessen Abbildung beliebig auf den entsprechenden Kugeln (Nr. 8) liegen.

Eine vielfach angewandte Methode zur Untersuchung der durch eine explicite Formel definierten konformen Abbildung besteht darin, dass man von gewissen Kurven der einen Ebene (häufig der reellen Achse), deren Abbildung sich in der anderen Ebene leicht verfolgen lässt, ausgeht und diese Kurven so zusammenfasst, dass sie Bereiche $B_1^{(1)}$, $B_1^{(2)}$ abgrenzen, deren Abbildung man dann mittels des vorhergehenden Satzes bestimmen kann[109]). Eine grosse Anzahl durch die elementaren Funktionen und das elliptische Integral erster Gattung definierter konformer Abbildungen sind von *Holzmüller*[110]) untersucht worden.

Wegen der konformen Abbildung einfach resp. mehrfach zusammenhängender Bereiche auf einander vgl. Nr. **19** u. **21** resp. Nr. **23**.

II. Die geometrische Funktionentheorie.

19. Riemann's neue Grundlage für die Funktionentheorie. Von Alters her war bekannt[25]), dass der reelle (resp. der rein imaginäre)

---

verstehe ich die allgemeinste geschlossene Kurve ohne mehrfachen Punkt, deren Punkte sich ein-eindeutig und stetig auf die Peripherie eines Kreises abbilden lassen; vgl. *C. Jordan*, Cours d'anal. 1, 2. Aufl. 1893, p. 90, VIII; *A. Hurwitz*, Kongr. Zürich 1898, p. 101. Eine solche Kurve zerlegt die Ebene in äussere und innere Punkte[2a]). Dieser *Jordan*'sche Satz ist für den Satz des Textes wesentlich. — Ob Γ die allgemeinste *Jordan*'sche Kurve sein kann, ist noch nicht entschieden; vgl. Nr. **19**.

108) Auch in einem Randpunkte bleiben die Winkel erhalten, selbst wenn die Begrenzung nicht analytisch ist, falls Γ in der Umgebung des betr. Randpunktes eine reguläre Kurve[1]) ist; vgl. *Painlevé*, Par. C. R. 112 (1891), p. 653.

109) *Klein*, Leipziger Vorlesung 1881/82, wo die Umkehrung einer rationalen Funktion an Beispielen erläutert ist; im Anschluss daran *Bouton*, Ann. of Math. 12 (1898), p. 1. Die Umkehrung des elliptischen Integrals 1. Gattung haben *Appell* und *Goursat* nach dieser Methode behandelt: Fonctions algébriques, Paris 1895, p. 442. Vgl. ferner *Klein-Fricke*, Modulfunktionen 1, p. 69. In der Theorie der *Schwarz*'schen s-Funktion kommt das Prinzip auch zur Geltung (II B 4). — Wegen der linearen Transformation $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ vgl. die gebräuchlichen Lehrbücher.

110) Vgl. das Litteraturverzeichnis.

Teil einer analytischen Funktion von z der *Laplace*'schen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ (II A 7 b) genügt. Für die Theorie dieser Gleichung im Raume von drei Dimensionen, wie sie den Anforderungen der mathematischen Physik entsprechend entwickelt worden war[111]), war der Gesichtspunkt massgebend gewesen, die Lösung nicht durch arithmetische Formeln, sondern durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen zu bestimmen, also Funktionaleigenschaften an Stelle des Rechnens treten zu lassen. Diesen Gesichtspunkt übertrug *Riemann* auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, indem er den Gedanken an die Spitze stellte, eine Funktion so durch ihre Eigenschaften zu definieren, dass möglichst wenig Überflüssiges in die Definition mit aufgenommen wird. Als vermittelndes Element, wenigstens für eine ausgedehnte Klasse von Funktionen[112]), diente die *Laplace*'sche Differentialgleichung selbst, indem *Riemann* den Gedanken von neuem aufgriff, dass auch umgekehrt jede Lösung dieser Gleichung den reellen Teil einer analytischen Funktion $u + vi$ liefert, welche dann, und zwar durch eine Quadratur[113]):

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) + C$$

bis auf eine additive Konstante völlig bestimmt ist. Wenn sich auch die Anfänge der *Cauchy*'schen Theorie in seinen frühesten Arbeiten finden, so war *Cauchy* doch erst in den späten Jahren seiner wissenschaftlichen Thätigkeit zu der Idee einer *allgemeinen Funktionentheorie* durchgedrungen. Diese Idee nahm *Riemann* von vornherein auf; er ging aus von der Definition[15]): „$w = u + vi$ soll eine analytische Funktion von $z = x + yi$ heissen, wenn w eine Ableitung nach z besitzt“, und stellte die sogenannten *Cauchy-Riemann*'schen Differentialgleichungen (vgl. Nr. 2)

---

111) Es sei an die Untersuchungen von *Gauss, Green, Dirichlet* und *Thomson* erinnert; man vgl. auch [255]).

112) Namentlich für die algebraischen Funktionen und deren Integrale; vielleicht auch schon für gewisse Fälle der automorphen Funktionen; vgl. den Bericht von *Brill* und *Noether*, p. 258 unten; sowie *Noether*, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), hist.-litt. Abt., p. 201. — Doch sei auch andererseits an den prinzipiellen Gebrauch erinnert, den *Riemann* von *Funktionalgleichungen* machte; vgl. etwa die Arbeit über die *Gauss*'sche Reihe (1857).

113) *Riemann* [15]). Dass die zu einer Lösung u der *Laplace*'schen Gleichung konjugierte Lösung v auf diese Weise erhalten wird, hatte *Liouville* bereits gezeigt: J. de math. 8 (1843), p. 265. Vgl. aber auch [11]).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

nebst der *Laplace*'schen Gleichung an die Spitze seiner Theorie.

Jede Lösung dieser Gleichungen lässt sich auch ansehen als die Lösung eines Problems der Attraktion, der statischen Elektrizität, der stationären[114]) Strömung von Wärme, Elektrizität, oder von einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Geschwindigkeitspotential, sowie auch der konformen Abbildung zweier Flächen auf einander; und umgekehrt entspricht der Lösung eines jeden solchen Problems der Physik oder Geometrie eine analytische Funktion $w = u + vi$ von $z = x + yi$. Die hiermit in die Funktionentheorie eingeführten heuristischen Mittel haben sich auch in hohem Masse bewährt[115]).

Als erste Anwendung seiner Methoden (wenn man von der in Nr. **11** erwähnten absieht) giebt *Riemann* den Beweis des Satzes, dass zwei einfach zusammenhängende Flächen ein-eindeutig und konform auf einander abgebildet werden können, indem jede sich so auf einen Kreis beziehen lässt[15]). Sein Beweis stützt sich auf eine später von *Weierstrass* als lückenhaft erkannte Schlussweise (das sogenannte *Dirichlet*'sche Prinzip) (II A 7 b, Nr. **24**), welche zuerst von *Schwarz* und *Neumann* durch strenge Methoden anderer Art ersetzt wurde, neuerdings aber von *Hilbert*[116]) unter Aufrechterhalten des ursprünglichen Gedankengangs zu einem einwandfreien Beweisverfahren vervollständigt ist. Das Problem, einen vorgelegten Bereich auf einen Kreis konform abzubilden, zerfällt nach den bisherigen Methoden in zwei Teile: a) die *Green*'sche Funktion des Bereiches (II A 7 b, Nr. **18**) wird gebildet; damit wird das *Innere* des Bereiches ein-eindeutig und konform auf das *Innere* des Kreises abgebildet; b) der Nachweis für den stetigen Anschluss an die Randwerte wird geführt; dabei handelt es sich darum zu zeigen, dass der aus den innern und Randpunkten bestehende Bereich ein-eindeutig und stetig auf den Kreis, incl. Rand abgebildet wird.

---

114) In dem Sinne, dass der Bewegungszustand sich mit der Zeit nicht ändert.

115) Wegen *Riemann*'s physikalischer Anschauungen von Anbeginn seiner wissenschaftlichen Thätigkeit vgl. man *F. Klein,* Riemann's Theorie der algebr. Funktionen und ihrer Integrale; *Noether*[112]); *Burkhardt,* Bernhard Riemann, Göttingen 1892; *Klein,* Ges. Deutsch. Naturforscher u. Ärzte 1894, p. 3.

116) Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 184. Der Fehler beim *Dirichlet*'schen Prinzip besteht bekanntlich in der Annahme der Existenz einer Funktion, die ein gewisses Doppelintegral zum Minimum macht. *Hilbert* weist die Existenz der betr. Funktion direkt nach.

Diese Fragestellung lässt sich aber erweitern. Bisher war nämlich a) die Existenz der *Green*'schen Funktion nur für einen Bereich B_1 (Nr. **1**) nachgewiesen und für solche Bereiche ist dann b) auch der stetige Anschluss an den Rand festgestellt [117]). Nun giebt es aber einfach zusammenhängende Bereiche T, deren Begrenzung keine *Jordan*'sche Kurve [107]) ist. Die Punkte einer solchen Begrenzung lassen sich also den Punkten des Kreisrandes sicher nicht ein-eindeutig und stetig zuordnen, sodass von der Erfüllung der Forderung b) keine Rede sein kann. Trotzdem existiert die *Green*'sche Funktion selbst für den allgemeinsten einfach zusammenhängenden Bereich T, womit denn die ein-eindeutige und konforme Abbildung eines solchen Bereiches auf das Kreisinnere gegeben ist [118]). Die Frage, ob die konforme Abbildung des allgemeinsten von einer *Jordan*'schen Kurve begrenzten Bereiches T auf das Kreisinnere den stetigen Anschluss an den Rand nach sich zieht, ist wahrscheinlich zu bejahen. — Sowohl das ursprüngliche als auch das erweiterte Abbildungsproblem hängt von drei reellen Parametern ab [119]).

Bei den Abbildungs- und Existenzfragen der geometrischen Funktionentheorie spielt der zweite *Harnack*'sche Satz (II A 7 b, Nr. **30**, Ende) eine wichtige Rolle [119a]). Es sei auch auf den ersten *Harnack*'schen

---

117) In diesem Umfang von *Poincaré* und *Paraf*; vgl. II A 7 b, Nr. **31**, ferner *Painlevé* [108]).

118) *Osgood,* Am. Trans. 1 (1900), p. 310; 2 (1901), p. 484. Unter einem Begrenzungs- oder Randpunkt eines Bereiches T versteht man einen Punkt, der dem Bereiche nicht angehört, in dessen Nähe aber Punkte von T liegen. Es giebt Bereiche T, welche Randpunkte besitzen, denen man sich längs einer in T gelegenen stetigen Kurve nicht nähern kann, wie ein einfaches Beispiel zeigt. Der Bereich T soll aus der positiven Hälfte der $z = x + iy$-Ebene (also $y > 0$) mit Ausnahme folgender Punkte bestehen. In jedem der Punkte $y = 0$, $x = 0$, $\pm 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ errichte man ein Lot auf der reellen Achse. Die Punkte z dieser Lote, wofür $0 < y \leqq 1$ ist, sollen nicht zu T gehören. Der so definierte Bereich T ist sogar ein einfach zusammenhängender. Einem innern Punkte des Lotes $x = 0$, etwa dem Punkte $A: x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, kann sich ein beweglicher Punkt P längs einer in T gelegenen stetigen Kurve nicht nähern. Denn, um von einem beliebigen Punkte O von T in eine *nach* der Annahme von O genügend klein gewählte Nachbarschaft von A zu gelangen, muss der bewegliche Punkt P um mehr als die Entfernung $\frac{1}{2}$ vom Punkte A abweichen. Die Randpunkte von T können übrigens eine Menge von positivem Inhalt bilden; vgl. [198]). *Harnack* hat sich mit dem Beweise des Satzes befasst, ohne jedoch den allgemeinen Fall zu erledigen; Log. Potential, Leipzig 1887; § 39.

119) Die allgemeinste ein-eindeutige und konforme Abbildung des *Kreisinnern* auf sich selbst ist nämlich auch durch eine lineare Transformation gegeben, wie man leicht zeigt.

119a) Vgl. auch *Poincaré* [175]), sowie *Harnack*'s Bemerkung, l. c. p. 121.

Satz (ebenda), sowie wegen des stetigen Anschlusses an den Rand auf die *Painlevé*'schen Lemmata verwiesen[119b]).

20. Das Prinzip der Symmetrie; analytische Fortsetzung. Das Prinzip lautet, wie folgt: Es sei $f(z)$ eine Funktion von z, welche oberhalb einer Strecke (a, b) der reellen Achse analytisch ist und deren rein imaginärer Teil in den Punkten dieser Strecke sich dem Randwert 0 stetig anschliesst. Der reelle Teil schliesst sich dann von selbst in den Punkten dieser Strecke einer stetigen Folge von Randwerten stetig an. Innerhalb eines passend gewählten, an die Strecke (a, b) stossenden Streifens der positiven Halbebene wird $f(z)$ also eindeutig und analytisch sein. Sei P ein beliebiger Punkt dieses Streifens, P' der in Bezug auf die reelle Achse zu P symmetrisch gelegene Punkt.

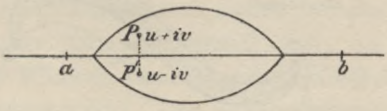

Fig. 4.

Ordnet man dem Punkte P' den zu dem Werte $u + iv$ von $f(z)$ in P konjugiert imaginären Wert $u - iv$ zu und definiert man $f(z)$ in den Punkten der Strecke (a, b) durch die Grenzwerte, denen $f(z)$ sich dort nähert, so wird $f(z)$ zu einer Funktion ergänzt, die in einem die Strecke (a, b) umfassenden Streifen analytisch ist und es findet eine analytische Fortsetzung von $f(z)$ über die Strecke (a, b) hinaus statt[120]).

Dieses Prinzip der Symmetrie lässt sich in folgender Weise verallgemeinern[121]): Es möge die analytische Kurve C durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dargestellt werden, wo die reellen Funktionen φ, ψ für jeden reellen Wert von t im Intervall $\alpha \leqq t \leqq \beta$ analytisch[122]) sind und $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2$ dort nicht verschwindet. Für

---

119b) Par. Thèse 1887 = Toul. Ann. 2 (1888), ch. 1, 2 und [108]).

120) Das Prinzip der Symmetrie spielt in der Theorie der Minimalflächen, sowie bei Untersuchungen über konforme Abbildungen eine Hauptrolle. Vgl. *Riemann,* Gött. Abh. 13 (1867), p. 1, § 13 = Werke, p. 296 der 1. Aufl.; *Schwarz,* Berl. Preisschrift 1867 = Werke 1, p. 12 (s. auch Anmerk. p. 109); sowie J. f. Math. 70 (1869), p. 106 = Werke 2, p. 66; man sehe auch [121]). — Der *Schwarz*'sche Beweis setzt die Stetigkeit der Werte von $f(z)$ in der Strecke (a, b) voraus. Diese Annahme, sowie die Notwendigkeit, den *Cauchy*'schen Integralsatz für den Fall eines Bereiches B (Nr. **3**) zu beweisen, lässt sich vermeiden, indem man sich des logarithmischen Potentials bedient; vgl. *Picard,* Traité 2, ch. X.

121) *Schwarz,* Berl. Ber. 1870, p. 773 = Werke 2, p. 149—151; *Picard* [120]).

122) Eine reelle Funktion heisst in einem Punkte analytisch, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes durch die *Taylor*'sche Reihe dargestellt werden kann. Sie heisst in einem Intervall analytisch, wenn sie in jedem Punkte des

die komplexe Umgebung eines Punktes t_0 des Intervalls (α, β) sollen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ durch die zugehörigen *Taylor*'schen Reihen definiert werden. Setzt man $z = x + yi = \varphi(t) + i\psi(t)$ und erteilt man t komplexe Werte, so wird ein die Kurve C umfassender Streifen der z-Ebene auf einen die Strecke (α, β) der reellen Achse der t-Ebene umfassenden Streifen konform abgebildet. Zwei Punkte P, P' des ersten Streifens heissen in Bezug auf C *symmetrisch*, wenn die entsprechenden Punkte Q, Q' des zweiten Streifens in Bezug auf die Gerade (α, β)

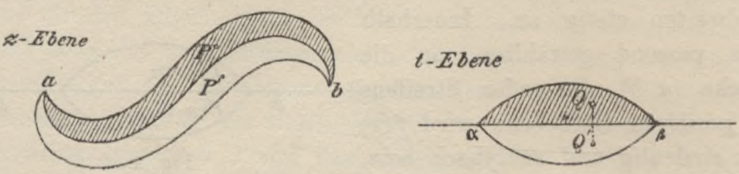

Fig. 5.

symmetrisch liegen. Die Kurve C darf sich auch schneiden; dann wird man sich den Streifen in einer *Riemann*'schen Fläche denken. Diese Zuordnung der Punkte P, P' bleibt bei konformer Abbildung des Streifens invariant. Ist C insbesondere ein Kreisbogen, so ist P' der *Spiegelpunkt* (III A 7) von P. — Satz[123]): Sei $f(z)$ eine auf der einen Seite von C analytische Funktion von z, die in den Punkten von C nur reelle Werte annimmt[123a]), und sei P ein auf dieser Seite von C beliebig gelegener Punkt des Streifens; ordnet man dem zu P symmetrischen Punkte P' den zu dem Werte $u + vi$ von $f(z)$ in P konjugiert imaginären Wert $u - vi$ zu, so wird $f(z)$ zu einer Funktion ergänzt, die im ganzen Streifen analytisch ist, und es findet eine analytische Fortsetzung von $f(z)$ über C hinaus statt.

Es ergiebt sich der allgemeine Satz[124]): Ist $f(z)$ eine an der einen Seite der analytischen Kurve C analytische Funktion, so besteht

---

Intervalls analytisch ist. — Eine Kurve heisst analytisch, wenn sie die Parameterdarstellung des Textes zulässt.

123) Ein spezieller Fall dieses Satzes, wo die Kurve C ein Kreisbogen ist, hat sich in *Riemann*'s Nachlass gefunden; Werke, 1. Aufl., Fragment XXV, p. 415, 2. Aufl., Fragment XXVI, p. 440.

123a) Vorauszusetzen braucht man ja nur, dass der rein imaginäre Teil von $f(z)$ dem Werte 0 zustrebt, wenn der Punkt z sich einem beliebigen Punkte von C nähert. Der reelle Teil von $f(z)$ wird sich dann von selbst einer stetigen Folge von Randwerten stetig anschliessen, welche man dann als den Wert der Funktion in den Punkten von C definieren wird.

124) *Schwarz*[121]); *Picard*[120]); *Painlevé*, Par. Thèse 1887 = Toul. Ann. 2 (1888), p. B 1.

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(z)$ über C hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, darin, dass der reelle (resp. der rein imaginäre) Teil von $f(z)$ längs C Werte annimmt, die von t analytisch abhängen. Auf Grund dieses Satzes lässt sich die Möglichkeit einer natürlichen Grenze[125]) (Nr. **13**) nachweisen.

21. Die konforme Abbildung analytisch begrenzter Bereiche auf den Kreis; geradlinige und Kreisbogenpolygone. Für die Zwecke der Funktionentheorie reicht vorläufig die Lösung des Abbildungsproblems von Nr. **19** in wesentlich beschränktem Umfang aus. Es genügt nämlich, nur solche Bereiche B_1 in Betracht zu ziehen, welche von einer endlichen Anzahl analytischer Kurven begrenzt sind, die entweder unter nicht verschwindenden Winkeln zusammenstossen oder doch in einer Spitze nicht gleich gekrümmt sind. Der Existenzbeweis für die *Green*'sche Funktion des Bereiches B_1 lässt sich hier nach den kombinatorischen Methoden von *Murphy*, *Schwarz* und *Neumann* (II A 7b, Nr. **28**) führen, indem die Randwertaufgabe zunächst für schmale an die Begrenzungskurven stossende Streifen gelöst wird, und zwar mittelst konformer Abbildungen und des *Poisson*'schen Inte-

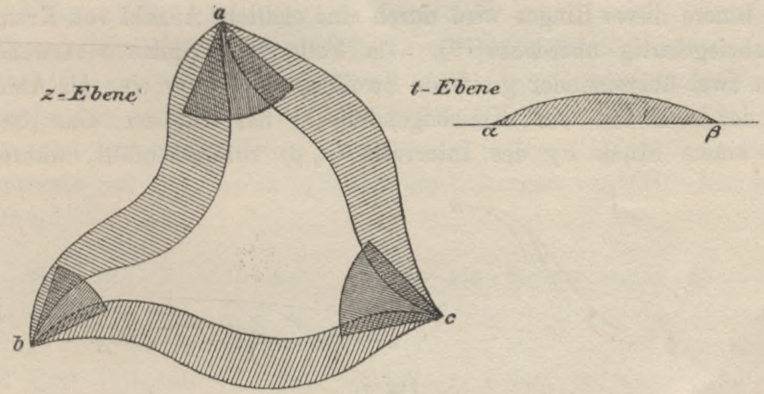

Fig. 6.

grals. Als Streifen ab wird nämlich, falls keine Spitze vorhanden ist, ein Bereich genommen, dessen Abbild in der t-Ebene ein Kreisabschnitt ist. Dieser Bereich lässt sich konform auf den Kreis ab-

---

125) *Schwarz* [121]). Vgl. auch [65]). Es giebt Funktionen, die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben, nebst allen Ableitungen innerhalb und auf diesem Kreise stetig sind und eine eindeutige Umkehrung zulassen; vgl. das *Fredholm*'sche Beispiel, Acta math. 15 (1891), p. 279 und Verhandl. Kongr. Zürich 1898, p. 109 u. [99]).

bilden[126]), und für den Kreis löst man die Randwertaufgabe mittelst des *Poisson*'schen Integrals. In die Ecken werden dann Kreissektoren gelegt, deren konforme Abbildung auf den Kreis ebenfalls bekannt ist. Die so übereinander greifenden Bereiche werden dann durch das

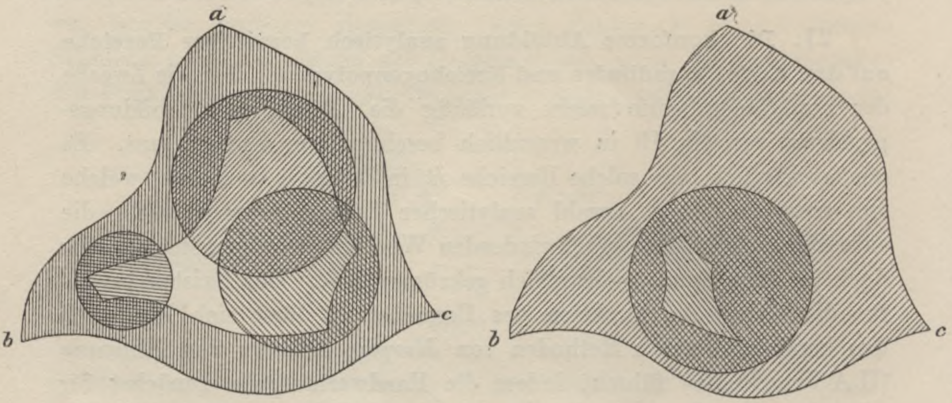

Fig. 7.

alternierende Verfahren zu einem Ring zusammengeschmolzen und das Innere dieses Ringes wird durch eine endliche Anzahl von Kreisen „dachziegelartig überdeckt"[127]). Im Falle einer Spitze a verwendet man zwei übereinander greifende Streifen, wovon der eine als Abbild in der t-Ebene ein Kreisbogendreieck hat, dessen eine Seite mit einem Stück $\alpha\gamma$ des Intervalls (α, β) zusammenfällt, während

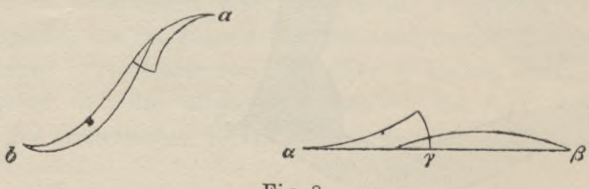

Fig. 8.

eine zweite Seite die erste im Punkte α berührt. Die dritte Seite steht senkrecht auf den beiden ersten. An Stelle des Kreissektors wird ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ in die Ecke a gelegt. — Der stetige Anschluss an den Rand ergiebt sich in der Nähe eines gewöhnlichen Randpunktes mittelst des Symmetrie-

126) *Schwarz*[121]), Werke 2, p. 148—149.

127) *Schwarz*, Berl. Ber. 1870, p. 784 = Werke 2, p. 161; *Picard*, Traité 2, p. 288—291.

prinzips; in der Nähe einer Ecke ist eine besondere Überlegung nötig[128]). Das Verfahren lässt sich auch auf einen endlich-vielblättrigen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}_1$ anwenden.

Dieser allgemeinen *Schwarz*'schen Methode, welche die Aufgabe mit verhältnismässig geringen Hülfsmitteln völlig erledigt, gingen Untersuchungen von *Schwarz* und *Christoffel* (II A 7b, Nr. **26**) über gradlinige und Kreisbogenpolygone[129]) voraus. Im ersten Fall entspricht die die Abbildung vermittelnde Funktion $w = f(z)$ der Differentialinvariante w''/w' und hat somit die Form

$$w = C\int\limits_{z_0}^{z}(z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\dots(z-l)^{\lambda-1}\,dz + C'.$$

Im zweiten Falle genügt w der Differentialgleichung

$$\{w, z\} = F(z),$$

wo $\{w, z\}$ die Differentialinvariante[130])

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

und $F(z)$ eine rationale Funktion von z bedeutet. Dieser Differentialgleichung dritter Ordnung (A) entspricht eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten (B), die zu (A) in folgender Beziehung steht: Irgend zwei linear unabhängige Lösungen y_1, y_2 von (B) liefern eine Lösung $w = y_1/y_2$ von (A); und umgekehrt liefert jede Lösung w von (A) (die nur keine Konstante ist) zwei linear unabhängige Lösungen von (B). Man vgl II B 4.

22. Die Riemann'sche Fläche als definierendes Element; algebraischer Fall. Dem in der Dissertation aufgestellten Programm zufolge entwickelte *Riemann* die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale auf neuer Grundlage, indem er dieselben direkt von einer beliebig gegebenen n-blättrigen über die ganze Ebene bez. Kugel ausgebreiteten Fläche $\mathfrak{T}$ aus definierte[131]) (II B 2). Auf einer

128) *Picard*, Traité 2, p. 277.

129) *Christoffel*, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 97; *Schwarz*, J. f. Math. 70 (1869), p. 117 = Werke 2, p. 80. Wegen der Möglichkeit der Konstantenbestimmung für ein beliebiges Polygon vgl. II A 7b, Nr. **26**.

130) „Schwarzian Derivative" nach *Cayley*. Geschichtliches über diese Differentialinvariante findet sich bei *Schwarz*, Werke 2, p. 351 ff. Vgl. I B 2, Nr. **20**.

131) J. f. Math. 54 (1857), p. 101 = Werke 1. Aufl., p. 81; 2. Aufl., p. 88.

solchen Fläche mögen n Punkte $a_1, \ldots, a_n$ willkürlich angenommen und die n Funktionen

$$\varphi_\nu(z) = A_\nu \log (z - a_\nu) + \sum_{i=1}^{m_\nu} B_\nu^{(i)} (z - a_\nu)^{-i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei nur $\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0$ ist, beliebig gegeben sein. Man zerlege $\mathfrak{T}$ durch ein Querschnittsystem in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{T}_1$. Den $2p$ Querschnitten $(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_{p+1}, \ldots, \mathfrak{A}_{2p})$ entsprechend seien $2p$ reelle Grössen $h^{(1)} \ldots, h^{(2p)}$ beliebig gegeben. Dann existiert stets eine Funktion $f(z)$, die sich in den Punkten a_ν so verhält, wie $\varphi_\nu(z)$, sonst aber allenthalben auf der Fläche analytisch ist, und ferner an dem Querschnitt $\mathfrak{A}_i$ einen Periodizitätsmodul mit reellem Teil $h^{(i)}$ aufweist. Die Funktion $f(z)$ ist so bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Dies ist das *Riemann*'sche Existenztheorem. Die Ableitung von $f(z)$ ist eine auf $\mathfrak{T}$ eindeutige Funktion, die keine anderen Singularitäten als Pole besitzt. Der Fläche $\mathfrak{T}$ entsprechen somit algebraische Funktionen und $f(z)$ wird entweder selbst eine solche oder das Integral einer solchen sein. Den Beweis des Existenztheorems stützte *Riemann* auch auf das *Dirichlet*'sche Prinzip. Strenge Beweise wurden von *Schwarz* und *Neumann* durch die kombinatorischen Methoden geliefert; vgl. Nr. **19**. *Neumann* verfährt folgendermassen[132]). Es sei P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}$, T' eine Kreisfläche mit Mittelpunkt P, die, falls P ein einfacher Punkt ist, keinen Verzweigungspunkt enthalten soll; ist aber P selbst ein Verzweigungspunkt, so soll T' eine mehrblättrige Kreisfläche mit Mittelpunkt P sein, die keinen weiteren Verzweigungspunkt enthält; ferner sei $F(z)$ irgend eine Funktion von z, die längs der Begrenzung C von T' eindeutig und analytisch ist; innerhalb T' darf $F(z)$ beliebige singuläre Stellen haben. Dann wird mittelst kombinatorischer Methoden bewiesen, indem die ganze Fläche $\mathfrak{T}$ mit T' und mit einer endlichen Anzahl weiterer ein- oder mehrblättriger Kreise dachziegelartig überdeckt[127]) wird, dass es ein logarithmisches Potential u giebt, das ausserhalb T' überall auf $\mathfrak{T}$ eindeutig ist und sich regulär verhält, und das ferner so beschaffen ist, dass die daraus hervorgehende analytische Funktion $u + vi$ (welche ja ausserhalb T' überall auf $\mathfrak{T}$ analytisch, nicht aber notwendig eindeutig ist) sich innerhalb T' wie $F(z)$ verhält; d. h. dass die Differenz $F(z) - (u + vi)$ innerhalb T' sich zu einer ausnahmlos analytischen Funktion ergänzen lässt. Daraus ergiebt sich sofort die Existenz von *Abel*'schen

132) Abel'sche Integrale, 2. Aufl., 1884, 18. Kap.

Integralen dritter Gattung, wofern die logarithmischen Unstetigkeitspunkte (a, b), (a', b') beide innerhalb einer solchen Kreisfläche liegen; sonst schaltet man eine endliche Anzahl von Punkten $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ auf der Verbindungslinie so ein, dass je zwei aufeinander folgende Punkte in einer derartigen Kreisfläche liegen. Die *Abel*'schen Integrale erster Gattung ergeben sich dann durch geeignete Zusammenfügung zweier Integrale dritter Gattung (*Neumann*). *Schwarz*[133]) hat eine Methode mitgeteilt, wodurch die Integrale erster Gattung direkt hergestellt werden können.

Anstatt als mehrfach überdeckte Ebene oder Kugel kann man sich die *Riemann*'sche Fläche, wofern es sich um eine geschlossene Fläche vom Geschlecht p (II B 2) handelt, auch als eine frei im Raum gelegene geschlossene Fläche, — etwa als eine Ringfläche oder als eine Kugel mit p Henkeln[134]), — denken. Diese Art, die *Riemann*'sche Fläche sich vorzustellen, rührt auch von *Riemann* her und ist zuerst von *Tonelli* publiziert, der sie aber selbständig erdacht hat[135]). Eine neue Art *Riemann*'scher Fläche hat *Klein*[136]) noch eingeführt, welche den Zusammenhang des Geschlechts mit den reellen Zügen der algebraischen Kurve hervortreten lässt. Während alle diese Flächen sich im Sinne der analysis situs (III A 4) in einander stetig verwandeln lassen, wofern sie nur denselben Zusammenhang besitzen[137]), wird im allgemeinen — vom Falle $p = 0$ abgesehen — eine konforme Abbildung zweier derselben auf einander nicht möglich sein. *Klein*[134]) machte auf physikalische Weise evident, dass eine beliebige Ringfläche sich auf eine mehrfach überdeckte Ebene oder Kugel konform abbilden lässt, und die *Schwarz-Neumann*'schen Methoden ermöglichen einen strengen analytischen Beweis dieses Satzes, wofern die vorgelegte Fläche in eine endliche Anzahl von Bereichen sich zerlegen lässt, welche die ganze Fläche „dachziegelartig" überdecken und einzeln

133) Math. Ann. 21 (1883), p. 157 = Werke 2, p. 303.

134) *Klein*, Über Riemann's Theorie u. s. w.

135) *Tonelli*, Linc. Atti (2) 2 (1875), p. 594 und Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 300; *Klein*, Math. Ann. 45 (1894), p. 142 und ibid. 46 (1895), p. 77. Vgl. auch *Clifford*, Lond. Math. Soc. Proc. 8 (1877), p. 292 = Werke, p. 241.

136) Math. Ann. 7 (1874), p. 558. — Diese Fläche dient allerdings nicht als definierendes Element für ein algebraisches Gebilde, sondern bezweckt bloss die Veranschaulichung des Verlaufs eines durch eine algebraische Gleichung definierten algebraischen Gebildes, wovon ein Teil durch reelle Kurvenzüge in der projektiven Ebene zur Darstellung gelangt.

137) Vgl. *Fr. Hofmann*, Methodik der stetigen Deformation von 2-blättrigen Riemann'schen Flächen, Halle 1888; sowie *Forsyth*, Th. of F., § 190.

auf eine Kreisscheibe konform abbildbar sind[138]). Es ist nicht bekannt, wie man umgekehrt von der mehrfach überdeckten Ebene (Kugel) ausgehend, dieselbe auf eine einfach gestaltete Ringfläche konform abbilden kann, falls $p > 1$ (und auch wenn $p = 1$ ist, im allgemeinen nicht). Es giebt jedoch eine Klasse von Raumflächen — allerdings sind es keine im Endlichen geschlossenen — auf welche sich eine solche Fläche konform abbilden lässt, nämlich die *Minimalflächen*[139]) (III D 5).

23. Die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf einander; algebraischer Fall. Ist B_n ein einblättriger Bereich der z-Ebene, der von n geschlossenen, je aus einer endlichen Anzahl analytischer Stücke bestehenden Kurven $C_1, \ldots, C_n$ völlig begrenzt ist, so lässt sich B_n auf eine über die positive Hälfte der w-Ebene ausgebreitete n-blättrige *Riemann*'sche Fläche S, die in $2n - 2$ Verzweigungspunkten zusammenhängt, ein-eindeutig und im allgemeinen konform abbilden. Die Fläche S kann dann durch Spiegelung an der reellen Achse zu einer (symmetrischen (Nr. 27)) algebraischen Fläche $\overline{S}$ ergänzt werden, die in $4n - 4$ Verzweigungspunkten zusammenhängt und somit das Geschlecht $p = n - 1$ besitzt (II B 2). Eine ähnliche Verallgemeinerung auf einen mehrfach überdeckten Bereich $\mathfrak{B}_n$, wie in Nr. 21, ist auch hier zulässig. Der Fall, in dem die Kurven $C_1, \ldots, C_n$ Kreise sind, ist von *Riemann*[140]) behandelt worden, der aus der die Abbildung vermittelnden Funktion eine zur Fläche $\overline{S}$ gehörige (Nr. 12) algebraische Funktion s durch Differentiation ableitet. s und w sind automorphe, zu dem durch B_n mittelst Spiegelung definierten Doppelbereich (Nr. 27) gehörige Funktionen, durch die sich jede weitere zum Doppelbereich gehörige algebraische automorphe Funktion rational ausdrücken lässt. *Noether*'s[112]) Ansicht nach gehört diese Note zu den frühesten Arbeiten *Riemann*'s, oder es bildet doch ihr Grundgedanke den Ausgangspunkt für *Riemann*'s Arbeiten über Funktionentheorie[140a]).

Damit zwei gegebene Bereiche B_n, B_n' ein-eindeutig und konform

---

138) *Klein,* Riemann'sche Flächen 1 (1892), p. 26; dort wird auch über die bisher bekannten Fälle, wo eine solche Abbildung möglich ist, berichtet. Vgl. dazu noch *Darboux*[106]), 4 (1896), Note von *Picard,* p. 353.

139) *Klein*[138]), p. 31.

140) Werke (1. Aufl., 1876), p. 413. Es handelt sich dabei in erster Linie um die Ermittlung der *Green*'schen Funktion zur Lösung eines elektrischen Problems.

140[a]) Vgl. auch *Riemann*'s eigene Angabe, Werke, 1. Aufl., p. 95; 2. Aufl., p. 102.

aufeinander bezogen werden können, ist also notwendig und hinreichend, dass die entsprechenden algebraischen Flächen $\bar{S}$, $\bar{S}'$ eine solche Abbildung zulassen, und das ist gleichbedeutend damit, dass die beiden den Flächen $\bar{S}$, $\bar{S}'$ entsprechenden algebraischen Gebilde zur selben Klasse gehören, d. h. rational in einander transformierbar sind (II B 2) (Satz von *Schottky*). Nach diesem Gesichtspunkt ist das Problem von *Schottky*[141]) behandelt worden und zwar durchaus im *Riemann*'schen Sinne. Ist insbesondere $n = 2$, so lässt sich B_2 auf die Hälfte einer zweiblättrigen elliptischen Fläche und somit auf eine einblättrige Ringfläche, deren Begrenzung aus zwei konzentrischen Kreisen besteht, konform abbilden. Zwei Flächen B_2, B_2' sind also dann und nur dann konform auf einander abbildbar, wenn die Moduln der entsprechenden elliptischen Gebilde in der bekannten Beziehung zu einander stehen, resp. wenn das Verhältnis der Radien der entsprechenden Ringfläche für beide Flächen denselben bezw. den reziproken Wert hat.

24. Funktionen mit Transformationen in sich; periodische Funktionen. Die analytische Funktion $f(z)$ lässt eine Transformation in sich zu, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: a) Es giebt eine analytische Funktion $z' = \varphi(z)$, die den Definitionsbereich der Funktion $f(z)$ im allgemeinen ein-eindeutig und konform auf sich selbst abbildet; b) sind z_0, z_0' zwei Punkte des Definitionsbereiches, deren Umgebungen also konform auf einander bezogen sind und bedeuten z, z' irgend zwei einander entsprechende Punkte dieser Umgebungen, so ist $f(z) = f(z')$. Diese Beziehung kann auch in der Form ausgedrückt werden

$$f(z) = f(\varphi(z)).$$

Dabei müssen nur solche Zweige der Funktionen zusammengefasst werden, wie die vorhergehende Erklärung es verlangt. Diese Funktionalgleichung wird dann für alle analytischen Fortsetzungen von $f(z)$ erhalten bleiben, also für den Gesamtverlauf der Funktion $f(z)$ gelten. Die periodischen Funktionen, allgemeiner die automorphen Funktionen, und gewisse algebraische Funktionen sind die einfachsten Beispiele von Funktionen mit Transformationen in sich (II B 6). Ausserdem sei auf die Funktionen verwiesen, die Funktionalgleichungen von der Form $f(z) = A f(\varphi(z))$ resp. $f(z) = f(\varphi(z)) + C$, wo A, C Konstante bedeuten, genügen (II B 6).

Ist $\varphi(z) = z + \omega$ (ω eine Konstante), so heisst $f(z)$ eine *perio-*

141) Diss. Berl. 1875; J. f. Math. 83 (1877), p. 300.

dische Funktion. Sei $f(z)$ eine eindeutige Funktion. Die Grösse ω heisst dann eine *primitive Periode*[142]), wenn keine der Grössen ω/n $(n = 2, 3, \ldots)$ eine Periode von $f(z)$ ist. Hat $f(z)$ keine weiteren Perioden als nur die Grössen $k\omega$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, so heisst $f(z)$ eine einfach periodische Funktion; $f(z)$ nimmt den ganzen Vorrat ihrer Werte in einem *Periodenstreifen*[143]) an. Hat $f(z)$ dagegen ausser der primitiven Periode ω noch eine weitere Periode Ω, so wird der rein imaginäre Teil von Ω/ω von Null verschieden sein[144]). Es lässt sich dann eine zweite Periode ω' so bestimmen, dass eine beliebige Periode Ω von $f(z)$ sich in der Form $\Omega = m\omega + m'\omega'$ $(m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ darstellen lässt, denn sonst könnte man die Existenz von unendlich kleinen Perioden nachweisen (*Jacobi*); die Perioden ω, ω' bilden dann ein *primitives Periodenpaar.* Es ergiebt sich somit, dass eine n-fach periodische eindeutige Funktion einer einzigen unabhängigen Veränderlichen, welche keine Konstante ist, nicht existiert, wofern $n > 2$ ist[145]). Sollen $\Omega = \mu\omega + \mu'\omega'$, $\Omega' = \nu\omega + \nu'\omega'$ ein zweites primitives Periodenpaar bilden, so ist notwendig und hinreichend, dass $\mu\nu' - \mu'\nu = \pm 1$. Der Flächeninhalt des durch ω, ω' (oder allgemeiner durch ein beliebiges primitives Periodenpaar) bestimmten Periodenparallelogramms ist numerisch gleich $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, wo $\omega = \alpha + \beta i$, $\omega' = \alpha' + \beta' i$ gesetzt sind. $f(z)$ nimmt den ganzen Vorrat ihrer Werte im Periodenparallelogramm an.

Um Eigenschaften der doppeltperiodischen Funktionen zu erschliessen, ging *J. Liouville*[146]) von dem Verhalten der Funktion in einem Periodenparallelogramm aus, indem er zeigte, dass in diesem Raume der Vorrat und die Verteilung der Werte eine ähnliche ist, wofern die Funktion eindeutig ist und keine anderen singulären

---

142) Index proprius, *Jacobi*, J. f. Math. 13 (1835), p. 55; primitive Periode, *Weierstrass*, Vorlesungen. — Das *Forsyth*'sche Werk enthält eine ausführliche Behandlung der einfach und doppelt periodischen Funktionen; vgl. aber [150]).

143) Die beiden Endpunkte des dem Periodenstreifen entsprechenden sichelförmigen Bereiches auf der Kugel muss man als zwei von einander verschiedene Punkte auffassen. Der Bereich greift also im Nordpol der Kugel über sich.

144) *Jacobi*[142]), p. 56.

145) *Jacobi*[142]), p. 61; geometrischer Beweis bei *Briot* et *Bouquet*, 1. Aufl., p. 76; streng gemacht in der 2. Aufl., p. 233; dieses elegante Verfahren für die Feststellung eines primitiven Periodenpaares bei den doppelt periodischen Funktionen kann auch mit Vorteil auf den entsprechenden Existenzbeweis für eine erste primitive Periode angewandt werden.

146) Vorlesung von Jahre 1847, herausgegeben von *Borchardt*, J. f. Math. 88 (1879), p. 277; *Liouville,* Par. C. R. 32 (1851), p. 450; *Briot* et *Bouquet,* 1. Aufl., livre 2, ch. 4.

Stellen im Parallelogramm als Pole hat, wie bei den rationalen Funktionen auf der schlichten Ebene bezw. bei den algebraischen Funktionen auf der zugehörigen *Riemann*'schen Fläche. Es sei beispielsweise an den *Liouville*'schen Satz erinnert, dass eine solche Funktion $f(z)$, die im Parallelogramm keine Pole[147]) oder höchstens einen Pol[146]) besitzt, eine Konstante sein muss; sowie an die Sätze, a) dass die Summe der Residuen der Funktion $f(z)$ im Parallelogramm gleich 0 ist[148]); b) dass die Funktion $f(z)$ jeden Wert im Parallelogramm gleich oft annimmt[146]), und c) dass zwischen zwei solchen Funktionen $f(z)$, $\psi(z)$, die zu demselben Parallelogramm gehören, eine algebraische Beziehung besteht[149]): $G(f(z), \psi(z)) = 0$. Das Geschlecht dieses algebraischen Gebildes wird entweder 0 oder 1 sein. Durch zwei geeignet gewählte Funktionen lässt sich jede andere Funktion der hier betrachteten Art rational ausdrücken[146]). Ähnliche Sätze lassen sich auch für die einfach periodischen Funktionen in ähnlicher Weise beweisen[150]).

Die periodischen Funktionen lassen sich in einfacher Weise behandeln, indem man den Fundamentalraum auf eine algebraische *Riemann*'sche Fläche konform abbildet. So lässt sich beispielsweise der Periodenstreifen einer eindeutigen Funktion $f(z)$ mit Periode ω durch die Transformation $w = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$ auf die etwa längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene w-Ebene abbilden, wodurch denn $f(z)$ in eine eindeutige Funktion von w, $\varphi(w)$ übergeht[151]). Ist $f(z)$ im Endlichen, höchstens mit Ausnahme von Polen, analytisch und nähert sich $f(z)$ einem Grenzwert A resp. B (dabei können A, B auch $= \infty$ sein), wenn z, stets im Periodenstreifen bleibend, nach der einen resp. nach der entgegengesetzten Richtung ins Unendliche rückt, so wird

147) Par. C. R. 19 (1844), p. 1262.

148) *Hermite*, Par. C. R. 32 (1851), p. 447.

149) *Briot* et *Bouquet*[146]). Die Funktion $f(z)$ wird insbesondere mit ihrer Ableitung $f'(z)$ durch eine solche Relation verknüpft; Satz von *Méray*, *Briot* et *Bouquet*[146]).

150) *Briot* et *Bouquet*, 1. Aufl., Nr. 57—59, wobei jedoch durch ungenügende Berücksichtigung des Verhaltens der Funktion in den unendlich fernen Punkten des Periodenstreifens eine zum Teil falsche Formulierung der Sätze sich ergeben hat und von späteren Autoren weiter gedruckt ist; vgl. *Forsyth*, Th. of Functions, ch. X; in der 2. Aufl. (1900) hat *Forsyth* die meisten Fehler verbessert. Richtige Darstellung bei *Méray*, Leçons nouv. s. l'anal. inf. u. s. w., 2 (1895), ch. VII, sowie bei *Burkhardt*, Anal. Funktionen, 1, 4. Abschn. (nach Vorlesungen von *H. A. Schwarz*).

151) *Burkhardt*[150]).

$\varphi(w)$ eine rationale Funktion von w sein, und umgekehrt[152]). Im wesentlichen beruht auf dieser Methode der Beweis des Satzes, dass eine eindeutige Funktion $f(z)$, die für alle endlichen Werte von z analytisch ist, in eine für alle Werte von z konvergente *Fourier*'sche Reihe entwickelt werden kann[151]):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{n\frac{2\pi i}{\omega}z} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\frac{2n\pi z}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{2n\pi z}{\omega}.$$

Setzt man nur voraus, dass die Funktion $f(z)$ für reelle Werte von z reell und analytisch ist und eine reelle Periode ω zulässt, so beweist man auf dieselbe Weise, dass $f(z)$ sich durch eine *Fourier*'sche Reihe mit reellen Koeffizienten B_n, C_n darstellen lässt. Die Reihe konvergiert innerhalb eines die reelle Achse umgebenden Streifens, also insbesondere für alle reellen Werte von z gleichmässig. Durch eine doppeltperiodische Funktion $w = f(z)$, die im Endlichen nur Pole aufweist, wird das Periodenparallelogramm auf eine algebraische *Riemann*'sche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ abgebildet. Setzt man $W = f'(z)$, so liefert W eine zur Fläche gehörige Funktion. Es entsteht so eine ein-eindeutige Beziehung zwischen Sätzen über doppeltperiodische Funktionen, die die Periode von $f(z)$ zulassen, und eindeutigen Funktionen auf einem algebraischen Gebilde vom Geschlecht 1.[153])

Durch Umkehrung *Abel*'scher Integrale (II B 2) entstehen ein- und mehrdeutige periodische Funktionen. Ist $p > 1$, so kann die Umkehrfunktion niemals eindeutig sein[154]).

Die periodischen Funktionen werden auch dadurch untersucht, dass man sie durch gewisse Hülfsfunktionen (etwa durch e^z resp. durch die ϑ- und σ-Funktionen (II B 6, 7) (Nr. **31**)), deren Eigenschaften direkt aus den sie definierenden Formeln abgeleitet werden, explicite darstellt. — Endlich sei noch auf die Untersuchungen von *Rausenberger*[155]) verwiesen.

---

152) Es entsprechen so den Sätzen über einfach periodische Funktionen, wie sie von *Briot* et *Bouquet* und *Méray* entwickelt worden sind, wohlbekannte Sätze über rationale resp. über eindeutige Funktionen, die höchstens in den Punkten $w = 0, \infty$ wesentliche Singularitäten aufweisen, woraus sich dann auch umgekehrt jene Sätze sofort ergeben. Vgl. *Burkhardt*[150]).

153) Vgl. *Appell* et *Goursat*, Fonct. alg., p. 450. Die Methode ist im wesentlichen in der Arbeit von *Klein* enthalten, Math. Ann. 21 (1883), p. 141.

154) *Appell* et *Goursat*[153]), p. 435.

155) *Rausenberger*, Periodische Funktionen, Leipzig, 1884.

25. Der Fundamentalbereich; zunächst der Bereich $\mathfrak{T}$; die Ecken. Die Beispiele der periodischen, sowie der elliptischen Modul- und der *Schwarz*'schen s-Funktionen gaben den Anstoss zu einer Ideenbildung, die als Verallgemeinerung des Begriffs der algebraischen *Riemann*'schen Fläche, sei dieselbe als mehrfach überdeckte Ebene oder Kugel, sei sie als Ringfläche gedacht, bezeichnet werden kann[156]). Es handelt sich um die Auffassung eines begrenzten ein- oder mehrblättrigen Bereiches $\mathfrak{T}$, dessen Begrenzungskurven einander paarweise zugeordnet sind, als eine längs eines solchen Paares von Begrenzungskurven im Sinne der analysis situs geschlossene Fläche[157]). Demnach soll eine Kurve als auf $\mathfrak{T}$ stetig verlaufend angesehen werden, wenn sie, nach Austritt am Randpunkte P aus $\mathfrak{T}$, am kongruenten Punkte P' wieder in $\mathfrak{T}$ eintritt. Verbindet sie P' mit P, so ist sie als geschlossen anzusehen. In den einfachsten Fällen[158]) wird $\mathfrak{T}$ schlicht oder doch endlich vielblättrig sein, in einer endlichen

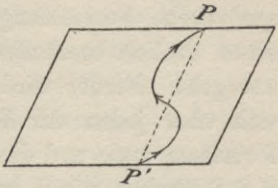

Fig. 9.

156) Die in den Nrn. **25—27** zu besprechenden Begriffe und Methoden bilden eine Weiterführung der *Riemann*'schen Funktionentheorie und sind zuerst von *Klein* in systematischer Weise dargelegt worden, Math. Ann. 21 (1883), p. 141; daselbst ausführliche Litteraturangaben. Dieser Abhandlung war eine Reihe von Noten und Arbeiten in den Math. Ann. vom 9. Bande (1875) an vorausgegangen (vgl. insbesondere Bd. 14 (1878), p. 111); ferner die Schrift „Über Riemann's Theorie" u. s. w. Aus neuerer Zeit sind zu erwähnen: *Klein-Fricke,* Modulfunktionen 1; *Ritter,* Gött. Diss. 1892 = Math. Ann. 41 (1892), p. 1; sowie eine Reihe autographierter Vorlesungshefte, Göttingen, von 1890 an; Selbstanzeigen in den Math. Ann. 45 (1894), p. 140, und 46 (1895), p. 77. *Fricke-Klein,* Automorphe Funktionen 1 (1897) u. 2 (1901). Endlich die Lehrbücher von *Picard,* Traité d'anal. 2 und *Burkhardt,* Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Vgl. auch II B 6 c.

157) Noch allgemeiner sieht *Klein* (Math. Ann. 21, p. 146) von der Forderung ab, dass $\mathfrak{T}$ ein ebener Bereich sei, indem er bloss eine zweidimensionale geschlossene „Riemann'sche Mannigfaltigkeit" voraussetzt, auf welcher ein Differentialausdruck (resp. Differential*gleichung*) zweiten Grades gegeben ist. Die Umgebung einer beliebigen (regulär vorausgesetzten) Stelle derselben muss sich auf ein Stück der Ebene konform abbilden lassen. — Andererseits beschränkt sich *Klein* in dieser Abhandlung auf *algebraische* Fundamentalbereiche (Nr. **27**).

158) Ausser den oben erwähnten sei noch an folgende Fälle erinnert: a) der in Nr. **23** besprochene *Riemann*'sche Doppelbereich; b) durch ein nicht spezialisiertes überall endliches *Abel*'sches Integral wird die n-blättrige algebraische Fläche auf einen aus p übereinander liegenden, in $2p - 2$ Verzweigungspunkten zusammenhängenden Parallelogrammen bestehenden Bereich abgebildet. Ein solcher Bereich kann auch als Bereich $\mathfrak{T}$ dienen; dabei sind die Transforma-

Anzahl von Verzweigungspunkten zusammenhängen und durch $2n$ Kurven (C_i, C_{n+i}, wo C_i und C_{n+i} sich gegenseitig entsprechen) begrenzt sein, die sämtlich als analytisch angenommen werden dürfen[159]). Des weiteren setzt man eine Transformation voraus:

$$S_i = (z, \varphi_i(z)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

welche C_i ein-eindeutig in C_{n+i} überführt, dergestalt, dass die Umgebungen zweier entsprechender innerer Punkte von C_i, C_{n+i} ein-eindeutig und konform auf einander abgebildet werden, während durch analytische Fortsetzung der Funktion $\varphi_i(z)$ der ganze Bereich $\mathfrak{T}$ in einen ähnlich beschaffenen längs C_{n+i} an $\mathfrak{T}$ grenzenden Bereich $\mathfrak{T}S_i$ übergeht. Ferner wird verlangt, a) dass jede der Funktionen $\varphi_i(z)$ sich über jeden der Bereiche $\mathfrak{T}S_k$ hin ($k = 1, 2, \ldots, n$) analytisch fortsetzen lasse und dass das so entstehende an $\mathfrak{T}S_k$ stossende Abbild $\mathfrak{T}S_kS_i$ ähnlich wie $\mathfrak{T}$ beschaffen sei; b) dass durch die inverse Transformation

$$S_i^{-1} = (z, \varphi_i^{-1}(z))$$

der Bereich $\mathfrak{T}$ auf einen ähnlich beschaffenen längs C_i an $\mathfrak{T}$ grenzenden Bereich $\mathfrak{T}S_i^{-1}$ konform abgebildet werde. Durch weitere Fortsetzungen der Funktionen $\varphi_i(z)$ sowie ihrer Inversion $\varphi_i^{-1}(z)$ sollen die immer neu entstandenen Bereiche durchweg ähnlich wie $\mathfrak{T}$ beschaffen sein. Die n ursprünglichen Funktionen $\varphi_i(z)$ erzeugen dann eine Gruppe[160]), durch deren Transformationen die aus allen den Teilbereichen sich zusammensetzende *Riemann*'sche Fläche $\mathfrak{S}$ stets in sich selbst übergeführt wird[161]). Die Teilbereiche sind alle gleichberechtigt in Bezug auf die Gruppe.

---

tionen S_i (unten) Translationen. Vgl. *Riemann,* J. f. Math. 54 (1857), p. 135 = Werke (1. Aufl.), p. 114, wo dieser Bereich der Definition des algebraischen Gebildes zu Grunde gelegt wird.

159) Die einander entsprechenden Paare von Kurven C_i, C_{n+i} können, wie die auf einer gewöhnlichen *Riemann*'schen Fläche gezogenen Querschnitte, beliebig (wenigstens innerhalb vernünftiger Grenzen) verschoben werden; auf die ihre Punkte einander zuordnende *Transformation* $(z, \varphi_i(z))$ (vgl. unten) kommt es allein an. — Übrigens braucht die Anzahl dieser Kurven durchaus keine endliche zu sein. Über diesen allgemeineren Fall liegen noch keine Untersuchungen vor.

160) Dieser auf *Riemann* zurückgehende Begriff der Gruppe ist erst von *Klein* und — allerdings nicht unmittelbar von dieser Seite her — von *Poincaré* zu einem Hauptmoment erhoben worden; vgl. [165]).

161) Ist eine Transformation S_i periodisch: $S^m = 1$, so lässt man gewöhnlich den Bereich $\mathfrak{T}S_i^m$ mit dem Bereich $\mathfrak{T}$ zusammenfallen.

Schneiden sich zwei Begrenzungskurven, so entsteht eine *reguläre*[162]) Ecke A von $\mathfrak{T}$, wenn, kurz gesagt, die Umgebung von A sich eineindeutig und konform auf die Umgebung eines Punktes O einer Ebene abbilden lässt. Ausführlicher: Stossen zunächst in A zwei einander entsprechende Kurven C_i, C_{n+i} zusammen, so nehme man auf denselben zwei einander entsprechende in der Nähe von A gelegene Punkte P, P' an und verbinde P, P' mit einander. Das so gebildete krummlinige Dreieck APP' muss sich dann auf einen schlichten längs einer analytischen Kurve OQ (die stets als Gerade angenommen werden darf) aufgeschnittenen Bereich einer Ebene eineindeutig und konform abbilden lassen und zwar so, dass die Seiten AP, AP' in die doppeltzählende Linie OQ in der Weise übergehen, dass zwei entsprechende Punkte dieser Seiten in übereinander liegende Punkte von OQ übergeführt werden. Stossen dagegen in der Ecke A zwei Kurven C_i, C_{n+k} zusammen, die einander nicht entsprechen, so wird noch ein in der Umgebung von A gelegenes Stück des benachbarten Bereiches $\mathfrak{T}S_k$ herangezogen. Entsprechen die Punkte der nicht mit C_{n+k} zusammenfallenden Begrenzung dieses Stückes den Punkten von C_i noch nicht, so geht man weiter, bis man schliesslich nach Heranziehung einer endlichen Anzahl solcher Stücke zu einem gelangt, dessen eine Begrenzung der Kurve C_i entspricht. Dann verbindet man zwei zusammengehörige Punkte P, P' dieser Begrenzungen miteinander und stellt bezüglich dieses krummlinigen Dreiecks APP' dieselbe Forderung wie vorhin. — Durch diese Abbildung wird die Umgebung der Ecke A in ihren *einblättrigen Zustand* versetzt.

26. Fortsetzung; Funktionen auf $\mathfrak{T}$; Definition des Fundamentalbereiches. Wird $f(z)$ als eine Funktion auf $\mathfrak{T}$ aufgefasst, so wird $f(z)$ in einer regulären Ecke A als analytisch bezeichnet, wenn a) $f(z)$ innerhalb des Bereiches APP' (Nr. 25) analytisch ist und b) nachdem die Umgebung von A in ihren einblättrigen Zustand versetzt ist, $f(z)$ in eine im einblättrigen Bereich eindeutige und analytische Funktion übergeht[163]). Verschwindet $f(z)$ in A, so wird die Ordnung des Nullpunktes als die Ordnung des Nullpunktes der transformierten Funktion im entsprechenden Punkte des einblättrigen Bereiches definiert. Eine ähnliche Definition gilt auch für Pole.

Als eine zum Bereich $\mathfrak{T}$ gehörige Funktion $f(z)$ wird jede analytische Funktion definiert, die überall da auf $\mathfrak{T}$ eindeutig ist, wo sie

162) Auf die Existenz nicht regulärer Ecken hat *Klein* in dem besonderen Fall der *hyperbolischen Ecken* aufmerksam gemacht, Math. Ann. 40 (1892), p. 130.
163) *Klein*, Math. Ann. 21 (1883), p. 149.

definiert ist, und jede der n Transformationen $\varphi_i(z)$ in sich (Nr. **24**) zulässt. Dazu genügt, dass $f(z)$ in $\mathfrak{T}$ eindeutig und im allgemeinen analytisch ist, und ausserdem in zusammengehörigen Randpunkten von $\mathfrak{T}$ den nämlichen Wert annimmt. Eine solche Funktion ist invariant in Bezug auf die Gruppe.

Existiert eine zum Bereich $\mathfrak{T}$ gehörige Funktion $f(z)$ und erstreckt sich der Definitionsbereich von $f(z)$ (Nr. **13**) nicht über $\mathfrak{S}$ (Nr. **25**) hinaus, so bildet $\mathfrak{T}$ einen *Fundamentalbereich*[164]) für die Funktion $f(z)$.

Der Theorie der automorphen Funktionen (II B 6 c), wie sie von der Göttinger Schule entwickelt wird, liegt der Begriff des Fundamentalbereiches als definierendes Element zu Grunde[165]). In der Theorie der Minimalflächen, namentlich im symmetrischen Falle (Nr. **27**), spielt dieser Begriff auch eine Hauptrolle[166]).

Im *Gauss*'schen Nachlass[167]) hat sich die Figur für die elliptische Modulfunktion $i^{-1}k^2(\omega)$ nebst Bemerkungen gefunden, aus welchen man ersieht, dass *Gauss* den Begriff des Fundamentalraumes für die Funktion gehabt hat. Auch die analytische Fortsetzung durch Aneinanderreihung solcher Räume ist durch die den Kreisbogendreiecken mit den Winkeln $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ zugehörige Figur angedeutet[168]). *Schwarz*

---

164) *Klein*[163]). Die Bezeichnung *Fundamentalpolygon* hatte *Klein* auch früher gebraucht, Math. Ann. 14 (1878), p. 133. — Dass die letztere Bedingung nicht notwendig eine Folge der ersteren ist, beweist das Beispiel von *Klein*[162]), Art. II.

165) Einem Bericht von *Poincaré* über seine auf automorphe Funktionen sich beziehenden Untersuchungen hat *Klein* die Note beigefügt: „Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allgemeinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu konstatieren, dass alle die hier in Frage kommenden Untersuchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrisches Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf *Riemann*'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. *Poincaré* geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen funktionentheoretischen Programms, welches *Riemann* in seiner Doktordissertation aufgestellt hat"; Math. Ann. 19 (1881), p. 564. Vgl. dazu *Poincaré*'s Zustimmungserklärung, Math. Ann. 20 (1882), p. 53; ferner den Brief von *Schottky* an *Klein*, Math. Ann. 20 (1882), p. 299 und *Klein*, Math. Ann. 21 (1883), p. 143, Fussnote.

166) *Riemann*, Werke, 1. Aufl., p. 283; *Weierstrass*, Berl. Ber. 1866, p. 612 u. p. 855; Vorlesungen an der Berliner Universität von 1860 an. *Schwarz*[120]).

167) Werke 3 (1866), p. 477—478.

168) Werke 8 (1900), p. 99. Ein demnächst erscheinendes *Riemann*'sches Vorlesungsheft über lineare Differentialgleichungen vom S.-S. 1859 enthält eine

legte seinen Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe[169]) die geometrische Methode des Fundamentalbereiches zu Grunde und entdeckte somit durch die Betrachtung des Kreisbogendreiecks und dessen Reproduktion durch Symmetrie die eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen; damit gab er auch zugleich die Grundlage für die geometrische Theorie des speziellen Falles der elliptischen Modulfunktionen.

27. Der algebraische Fall; symmetrische Riemann'sche Flächen. Hat $\mathfrak{T}$ eine endliche Anzahl von Blättern, die in einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten zusammenhängen, und sind ferner die Ecken, falls welche vorhanden sind, alle regulär, so lässt sich $\mathfrak{T}$ in ähnlicher Weise wie früher die n-blättrige im gewöhnlichen Sinne geschlossene algebraische Fläche (Nr. 22) durch eine endliche Anzahl von Kalotten „dachziegelartig überdecken" (Nr. 21) und somit weist man durch die kombinatorischen Methoden[170]) die Existenz von Funktionen nach, die in einer ähnlichen Beziehung zu $\mathfrak{T}$ stehen wie früher die *Abel*'schen Integrale und die algebraischen Funktionen zu jener algebraischen Fläche, indem sie sich auf $\mathfrak{T}$, abgesehen von Polen und logarithmischen Singularitäten, allenthalben analytisch verhalten. Die zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Funktionen darunter entsprechen den durch die Fläche von Nr. 22 definierten algebraischen Funktionen und jede derselben bildet den Bereich $\mathfrak{T}$ auf eine gewöhnliche mehrblättrige algebraische Fläche ein-eindeutig und im allgemeinen konform ab[171]). Es liegt nahe, einen solchen Bereich $\mathfrak{T}$ als *algebraischen Fundamentalbereich* und die zugehörigen Funktionen, die keine anderen Singularitäten als Pole besitzen, als *algebraische Funktionen auf* $\mathfrak{T}$ aufzufassen, wobei denn die anderen soeben erwähnten Funktionen die Rolle von *Abel*-

Figur, die die Aneinanderreihung dreizipfeliger Kreisbogendreiecke zeigt; vgl. *Klein,* Gött. Nachr. 1897, p. 190.

169) J. f. Math. 75 (1873), p. 292 = Werke 2, p. 211. — Wegen des dreizipfeligen Kreisbogendreiecks vgl. p. 241.

170) Vgl. *Ritter*[156]). *Picard,* Traité d'anal. 2, ch. 16. — Vgl. auch die Untersuchungen von *Ritter* über „die Stetigkeit der automorphen Funktionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereiches", Math. Ann. 45 (1894), p. 473 u. 46 (1895), p. 200.

171) Bezüglich solcher Funktionen lassen sich ähnliche Sätze aussprechen und durch Herumintegrieren beweisen, wie bei den periodischen Funktionen, Nr. 24. Während jedoch dort die Funktion als von vornherein vorhanden angesehen und der Fundamentalraum hinterher der Funktion angepasst wurde, bildet dagegen hier der Fundamentalbereich geradezu das definierende Element, aus dem die Funktion erst entwächst, und das ist eben das wesentliche an dem *Riemann*'schen Begriff der *Riemann*'schen Fläche.

schen Integralen auf $\mathfrak{T}$ spielen. Das Geschlecht dieses Fundamentalbereiches ist von *Klein* [172]) berechnet worden.

Gestattet der Bereich $\mathfrak{T}$ eine mit Umlegung der Winkel konforme ein-eindeutige Transformation in sich, die einmal wiederholt zur Identität zurückführt, so heisst $\mathfrak{T}$ ein *symmetrischer* [173]) Fundamentalbereich. Ein derartiger Bereich entsteht insbesondere dadurch, dass man von einem durch Kreisbogen (resp. Vollkreise) begrenzten Bereich ausgeht und denselben an jedem Begrenzungskreis spiegelt. Jeder der neuen Bereiche wird dann wiederum an jedem neuen Begrenzungskreis gespiegelt, u. s. w. Fasst man irgend zwei benachbarte der so entstandenen Bereiche zu einem einzigen Bereiche $\mathfrak{T}$ zusammen, so bildet $\mathfrak{T}$ einen symmetrischen automorphen Fundamentalbereich. Die Existenzbeweise lassen sich auf symmetrischen algebraischen Fundamentalbereichen dadurch führen, dass die Hälfte des Doppelbereiches etwa auf die obere, falls $p > 0$, mehrfach überdeckte Halbebene konform abgebildet wird (vgl. Nr. **21**, **23**).

28. Parameterdarstellung durch eine uniformisierende Variable. Von *Poincaré* und *Klein* ist der Satz [174]) entdeckt und bewiesen worden, dass sich irgend zwei durch eine irreducible algebraische Gleichung verknüpfte Grössen durch zwei *eindeutige* (automorphe) Funktionen eines Parameters t: $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$ darstellen lassen, und zwar so, dass die *Riemann*'sche Fläche für die Funktion $w = f(z)$ auf einen den Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eigenen Fundamentalraum der t-Ebene eineindeutig und, abgesehen von Verzweigungspunkten resp. regulären Ecken (wofern der Fundamentalraum überhaupt Ecken aufweist), konform abgebildet wird.

Ein ähnliches Theorem für eine beliebige mehrdeutige Funktion anzustreben, war der Zweck einer Untersuchung von *Poincaré* [175]), der den Satz bewies: Es sei $w = f(z)$ eine beliebige analytische Funktion von z; dann existieren stets zwei Funktionen, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eines Parameters t, die wie folgt beschaffen sind: a) die Funktion $\varphi(t)$ ist eindeutig und ihr Definitionsbereich T liegt innerhalb des Einheitskreises der t-Ebene; in T verschwindet $\varphi'(t)$ nirgends; b) in T ist $\psi(t)$ analytisch; c) setzt man

172) Math. Ann. 21 (1883), p. 152.

173) *Klein,* Über Riemann's Theorie u. s. w., p. 72 und [172]), p. 168.

174) Vgl. II B 6c. Litteraturangaben bei *Klein,* Math. Ann. 21 (1883), p. 142—143.

175) *Poincaré,* Bull. soc. math. 11 (1883), p. 112; *Osgood,* N. Y. Bull. (2) 5 (1898), p. 69, und Amer. Trans. 1 (1900), p. 314, wo *Poincaré*'s Resultate genauer präzisiert sind.

$$z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t),$$

so stellen diese Gleichungen das ganze analytische Gebilde $w = f(z)$, höchstens mit Ausnahme gewisser isolierter Punkte, dar. Genauer gesagt: Sei t_0 ein beliebiger Punkt von T; dem Punkte t_0 wird eine Stelle z_0 der *Riemann*'schen Fläche für die Funktion $f(z)$ durch die erste Gleichung zugeordnet, deren Umgebung schlicht und auf die Umgebung des Punktes t_0 konform bezogen ist, während die den Punkten dieser Umgebung entsprechenden Funktionswerte w durch die zweite Gleichung dargestellt werden. Umgekehrt, sei z_0 eine beliebige Stelle der *Riemann*'schen Fläche für $f(z)$; dann lässt sich $f(z)$ in der Umgebung dieser Stelle im allgemeinen durch die vorhergehenden Gleichungen darstellen, indem es im allgemeinen einen oder mehrere Werte t_0 giebt, welche gleichzeitig den Gleichungen genügen: $z_0 = \varphi(t)$, $f(z_0) = \psi(t)$. Ausnahmen treten nie ein, wenn es mindestens drei Punkte auf der Kugel giebt: $z = a, b, c$, in denen kein Zweig von $f(z)$ analytisch ist. Sonst wird es einen Wert $z = a$ (bezw. zwei oder drei solche Werte) geben, in dem mindestens ein Zweig von $f(z)$ analytisch ist, während die Gleichungen $a = \varphi(t)$, $f(a) = \psi(t)$ doch nicht gleichzeitig befriedigt werden können.

Durch dieses Verfahren wird die Umgebung eines Verzweigungspunktes oder Poles von $f(z)$ niemals auf die Umgebung eines innern Punktes von T bezogen. Über die Abbildung in der Umgebung einer Ecke von T giebt der Satz keinen Aufschluss.

Der Beweis des Satzes beruht auf der Möglichkeit, eine unendlich vielblättrige *Riemann*'sche Fläche, in welcher $f(z)$ analytisch ist, auf einen schlichten, innerhalb des Einheitskreises gelegenen einfach zusammmenhängenden Bereich T ein-eindeutig und konform abzubilden. Da jeder schlichte einfach zusammenhängende Bereich T auf das Innere eines Kreises ein-eindeutig und konform abgebildet werden kann (Nr. **19** [118])), so kann man die Funktion $\varphi(t)$ stets so bestimmen, dass ihr Definitionsbereich aus dem Innern eines Kreises besteht. Diese Funktion wird dann im allgemeinen eine automorphe sein und zwar stets dann, wenn einer einzigen Stelle des analytischen Gebildes der Funktion $w = f(z)$ unendlich viele Punkte von T entsprechen.

Picard [176]) hat folgenden Satz gefunden: Genügen die eindeutigen Funktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ einer irreduziblen algebraischen Gleichung vom Geschlecht $p > 1$: $G(\varphi(z), \psi(z)) = 0$, so können dieselben keinen isolierten wesentlichen singulären Punkt haben.

---

176) Darb. Bull. (2) 7 (1883), p. 107; der Beweis ist ungenügend. Acta math. 11 (1887), p. 1.

29. Der Picard'sche Satz. Nachdem *Weierstrass* [28]) gezeigt hatte, dass eine ganze transcendente Funktion in der Nähe des Punktes $z = \infty$ jedem Wert beliebig nahe kommt, bewies *E. Picard* [177]) zunächst den Satz: Ist $G(z)$ eine ganze Funktion von z, die keine Konstante ist, so kann es höchstens einen Wert geben, den $G(z)$ nirgends annimmt. Diesen Satz hat er dann wie folgt verallgemeinert: In der Umgebung des Punktes $z = a$ soll die Funktion $f(z)$, vom Punkte a selbst und eventuell von Polen abgesehen, eindeutig und analytisch sein. Hat $f(z)$ dort unendlich viele Pole, so kann es höchstens zwei Werte geben, die $f(z)$ in der Umgebung des Punktes a nicht annimmt. Sind dagegen keine Pole vorhanden, während $f(z)$ im Punkte a eine wesentliche singuläre Stelle besitzt, so kann es höchstens einen Wert geben, den $f(z)$ in der Umgebung von a nicht annimmt.

Durch die Untersuchungen von *Hadamard* und *Borel* hat der Satz neuerdings noch eine weitere Verallgemeinerung erfahren [178]).

III. Untersuchung der analytischen Funktionen mittelst ihrer Darstellung durch unendliche Reihen und Produkte.

30. Weierstrass. Bereits *Lagrange*, durch den in der damaligen Infinitesimalrechnung herrschenden Mangel an Strenge veranlasst, eine neue Grundlage für die Analysis zu suchen, hatte sich zu diesem Zweck der Methode der Potenzreihen bedient. Zu der Zeit fehlte jedoch jede scharfe Umgrenzung des Funktionsbegriffs, sowie der Grundbegriffe in der Analysis überhaupt, nicht weniger, als alle strengen Untersuchungen über die unendlichen Reihen, und dieses unentbehrliche Substrat für seine Theorie versäumte *Lagrange* herzustellen. Fast ein halbes Jahrhundert später nahm *Weierstrass* denselben Ausgangspunkt, wie damals *Lagrange*, und das Resultat seiner Forschung war eine neue Theorie der analytischen Funktionen, die in Bezug auf die genaue Fassung der Grundbegriffe und die Strenge der Methoden den Anforderungen der Jetztzeit völlig entspricht [179]).

---

177) Par. C. R. 88 (1879), p. 1024 und 89 (1879), p. 745; Ann. éc. norm. 1880, p. 145.

178) *Hadamard*, J. de math. (4) 9 (1893), p. 188, Nr. 15—17; *Borel*, Acta math. 20 (1897), p. 357; Fonctions entières, ch. V.

179) Verschiedene Andeutungen finden sich in den bereits zitierten Abhandlungen. Die Theorie ist jedoch erst durch die Vorlesungen an der Berliner Universität von 1860 an bekannt geworden; vergl. die Darstellung bei *Pincherle*, Giorn. d. mat. 18 (1880), p. 178 u. 317; sowie *Biermann*, Analytische Funktionen,

Aber auch in der Theorie der Funktionen reeller Veränderlicher lenkte *Weierstrass*'s durchgreifende Kritik die Aufmerksamkeit auf manche ungenaue Auffassung und lückenhafte Schlussweise[180]), während er konstruktiv die Analysis durch das Prinzip der gleichmässigen Konvergenz (Nr. **6**) bereicherte. Seinem Einfluss verdankt man in hohem Masse die strenge Begründung der Infinitesimalrechnung, deren wir uns heute freuen und durch welche es allein möglich war, die *Cauchy-Riemann*'sche Funktionentheorie einwandfrei zu entwickeln[181]).

Mit besonderem Erfolg hatte *Weierstrass* die Methode der Reihen- und Produktentwicklungen auf die Untersuchung eindeutiger Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen angewandt. Aus einer Abhandlung vom Jahre 1876 ist eine Reihe wichtiger Arbeiten hervorgegangen, die in der Folge besprochen werden.

31. Der Weierstrass'sche Satz. Eine ganze rationale Funktion $G(z)$ mit den Nullpunkten $z_1, \ldots, z_m$ kann durch die Formel

$$\frac{G(z)}{G(a)} = \prod_{n=1}^{m} \frac{z - z_n}{a - z_n}$$

dargestellt werden. Diese Formel auf ganze transcendente Funktionen

---

und die beiden Werke von *Harkness* und *Morley*. Der 3. und 4. Band der ges. Werke sollen diese Vorlesungen enthalten. — Wegen *Weierstrass*'s wissenschaftlicher Leistungen vgl. *Hilbert,* Gött. Nachr. (geschftl. Mitt.) 1897, p. 60; *Poincaré,* Acta math. 22 (1898), p. 1; *Lampe,* Gedächtnisrede, Verhandl. phys. Ges. Berl. 5. März 1897 = Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig. 6 (1899), p. 27; *Killing,* Rede, Natur und Offenbarung 43 (1897); ferner Fortschritte der Math. 28 (1897), p. 32.

Unabhängig von *Weierstrass* hat auch *C. Méray* (vgl. Litteraturverzeichnis) in Frankreich die Theorie der analytischen Funktionen auf Grund ihrer Definition durch die Potenzreihe entwickelt. Vgl. *A. Hurwitz,* Verhdlgn. Kongr. Zürich 1898, p. 106.

180) Man vgl. insbesondere seine Vorlesungen über Variationsrechnung.

181) Trotzdem konnte *Weierstrass* selbst sich mit dieser Theorie nicht zufrieden geben. Die Integration erschien ihm als ein zum Zweck des systematischen Aufbaus der Funktionentheorie unbefriedigender Prozess; vgl. Werke 2, p. 235. Indem er seiner Theorie die Methode der Potenzreihen zu Grunde legte, wurde die Anzahl der Grenzprozesse, auf denen dieselbe ruhte, allerdings eine beschränktere. Allein das konnte nur auf Kosten einer naturgemässen Entwicklung der Theorie geschehen, denn es liegt einmal im Wesen der Sache, dass gewisse Teile der Theorie sich der Behandlung mittelst des Grenzprozesses der Integration leichter und natürlicher fügen. Es sei beispielsweise an den Beweis des *Laurent*'schen Satzes, sowie des Satzes, dass auf dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe mindestens ein singulärer Punkt der Funktion liegen muss; ferner an den *Simart*'schen Beweis des *Weierstrass*'schen Satzes von Nr. **45** erinnert.

mit unendlich vielen Nullpunkten zu verallgemeinern, ist *Cauchy*[182]) in gewissen Fällen vermittelst des Residuenkalkuls gelungen. Das von *Gauss* untersuchte unendliche Produkt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z \log \frac{1+n}{n}} \right\}$$

gab *Weierstrass* den Schlüssel zur Lösung des allgemeinen Problems. Indem dieser erkannte, dass der zweite Faktor $e^{-z \log \frac{1+n}{n}}$ die Konvergenz erzeugt, bewies er den Satz[27]): Wird eine beliebige Reihe von Grössen $z_1, z_2, \ldots$, vorgelegt, die nur keine im Endlichen gelegene Häufungsstelle haben, so existiert stets eine ganze Funktion $G(z)$, die in jedem dieser Punkte einen Nullpunkt beliebiger Ordnung besitzt und sonst nirgends verschwindet. Die allgemeinste solche Funktion $G_1(z)$ wird durch die Formel gegeben:

$$G_1(z) = G(z)\, e^{\overline{G}(z)},$$

wo $\overline{G}(z)$ eine ganze Funktion bedeutet. Der Beweis lässt sich führen, indem $G(z)$ durch ein unendliches Produkt von Primfunktionen[183]):

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, m_n\right); \; E(z, 0) = 1 - z, \; E(z, m) = (1 - z)\, e^{\sum\limits_{r=1}^{m} \frac{z^r}{r}}$$

definiert wird, welches in jedem endlichen Bereich gleichmässig[184])

---

182) Exerc. de math. 4 (1829), p. 174. Es ergab sich, dass zu dem Produkt rechts im allgemeinen noch ein Faktor von der Form $e^{\overline{G}(z)}$ hinzutritt. Die direkte Veranlassung zu diesen Untersuchungen bildete bei *Cauchy* die Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch unendliche Produkte. Bei *Weierstrass* kamen noch die ϑ- und σ-Funktionen dazu.

183) „Ich nenne *Primfunktion* nach x jede eindeutige Funktion dieser Grösse, welche nur eine (wesentliche oder ausserwesentliche) singuläre Stelle und entweder nur eine oder gar keine Nullstelle hat. Der allgemeinste Ausdruck einer solchen Funktion ist, wenn die singuläre Stelle mit c bezeichnet wird, $\left(\frac{k}{x-c} + l\right) e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)}$, wo k, l Konstanten bedeuten, und zu beachten ist, dass k auch gleich Null und $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ eine Konstante sein kann." *Weierstrass*[27]) § 1. — Der Einfachheit halber wird angenommen, dass keine der Grössen z_n verschwindet.

184) Das unendliche Produkt $f_1(z) f_2(z) \ldots$, wo die Funktionen $f_n(z)$ in jedem Punkte eines Bereiches T eindeutig definiert sein mögen, konvergiert in T *gleichmässig*, wenn einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine von z unabhängige positive ganze Zahl m sich so zuordnen lässt, dass für alle Werte von z in T

$$| f_{n+1}(z) \cdot \ldots \cdot f_{n+r}(z) - 1 | < \varepsilon, \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

konvergiert. Das Produkt konvergiert auch unbedingt. Um eine brauchbare Reihe von Grössen m_n zu erhalten, genügt es, m_n so anzunehmen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-(m_n+1)}$, wo $r_n = |z_n|$ ist, konvergiert. Konvergiert diese Reihe insbesondere, wenn m_n gleich der konstanten ganzen Zahl (inkl. 0) E gesetzt wird, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-E}$ divergiert, und ist $\overline{G}(z)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade P, so heisst die grösste der beiden Zahlen E, P die *Höhe*[185]) der Funktion $G_1(z)$. — Die Funktion

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left\{\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right\}$$

hat die Höhe 1, während die Funktion

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

als Funktion von z^2 betrachtet, die Höhe 0 hat. In seinen Untersuchungen über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen

---

ist, wenn nur $n > m$ ist. *Weierstrass*[27]) § 2. Für die gleichmässige Konvergenz des Produktes ist notwendig und hinreichend, dass die unendliche Reihe $\sum_{n=n'}^{\infty} \log f_n(z)$ gleichmässig konvergiere. Sind die Funktionen $f_n(z)$ alle in T analytisch, so wird die durch das Produkt dargestellte Funktion ebenfalls in T analytisch sein. Vgl. *Stolz*, Allg. Arithm. 2, p. 245.

Die Definition der gleichmässigen Konvergenz eines Produktes weicht demnach von der allgemeinen Definition der gleichmässigen Konvergenz einer Funktion $s(z, \alpha)$ (Nr. **6**) insofern ab, dass Produkte, deren Rest $f_{n+1}(z) \cdot \ldots \cdot f_{n+r}(z)$ gegen 0 konvergiert, wenn r ins Unendliche wächst, wie gross die feste Zahl n auch nur angenommen sein mag, nicht zugelassen sind. Solche Produkte sind in der komplexen Funktionentheorie unbrauchbar und von der Betrachtung auszuschliessen, sei es von vornherein durch die Definition, sei es durch spätere Festsetzung. Vgl. I A 3, Nr. **42**.

185) *Genre* nach *Laguerre*, der die Bezeichnung eingeführt hat, ohne sie jedoch explicite zu erklären; vgl. Par. C. R. 94 (1882), p. 160 u. 635 = Oeuvres 1, p. 167, 171. Eine Reihe von Sätzen über solche Funktionen sind von ihm und anderen abgeleitet worden; Litteraturangaben bei *Forsyth*, Th. of F., p. 92. Das Wort *genre* giebt *v. Schaper* mit *Höhe* wieder, Gött. Diss. 1898. Die Dichtigkeit der Nullstellen wird durch die *Borel*'sche „wirkliche Ordnung" ϱ (*ordre réel; Borel*, Acta math. 20 (1896), p. 357; von *v. Schaper* als *Konvergenzexponent* bezeichnet) noch schärfer gekennzeichnet. ϱ ist nämlich diejenige Grösse, für welche bei beliebiger Annahme einer positiven Grösse ε die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-(\varrho+\varepsilon)}$ konvergiert, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-(\varrho-\varepsilon)}$ divergiert.

Grösse nahm *Riemann*[186]) an, dass die von ihm eingeführte Funktion $\xi(z)$, als Funktion von z^2 betrachtet, die Höhe 0 habe. Die Richtigkeit dieser Annahme hat zuerst *Hadamard* (Nr. **36**) nachgewiesen. Die *Weierstrass*'schen σ- und die *Jacobi*'schen ϑ-Funktionen haben die Höhe 2.

Aus dem *Weierstrass*'schen Satze ergiebt sich, dass auch die Pole einer eindeutigen Funktion, die sich sonst im Endlichen analytisch verhalten soll, beliebig[187]) vorgeschrieben werden dürfen. Die allgemeinste solche Funktion $f(z)$, deren Nullstellen ebenfalls beliebig vorgeschrieben werden können, wird durch die Formel gegeben:

$$f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)} e^{\bar{G}(z)},$$

wo $G_1(z)$, $G_2(z)$ ganze Funktionen sind, die nur in den Nullpunkten resp. Polen von $f(z)$ verschwinden, und $\bar{G}(z)$ eine beliebige ganze Funktion ist[188]).

32. Der Mittag-Leffler'sche Satz[189]). Es möge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, eine beliebige Reihe von Grössen sein, die nur keine im Endlichen gelegene Häufungsstelle haben; ferner sei $G_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$ irgend eine Funktion von z, die im Punkte α_n eine (wesentliche oder ausserwesentliche) singuläre Stelle hat und sich sonst überall analytisch verhält. Dann existiert stets eine eindeutige Funktion von $f(z)$, die, von den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ abgesehen, allenthalben im Endlichen analytisch ist und in jedem der Punkte α_n unstetig wird, wie $G_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$, indem die Funktion $f(z) - G_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$ sich im Punkte α_n analytisch verhält. Die allgemeinste solche Funktion $f_1(z)$ wird durch die Formel gegeben: $f_1(z) = f(z) + G(z)$, wo $G(z)$ eine ganze Funktion von z bedeutet.

---

186) Berl. Ber. 1859 = Werke, 1. Aufl., p. 136; 2. Aufl., p. 145. Vgl. *Ch. J. de la Vallée-Poussin,* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, etc., Brüssel 1899; Sonderdruck aus den Brux. Mém. cour. 59 (1899), p. 3.

187) Zunächst bloss ihrer Lage und ihrer Ordnung nach; dass auch ihr Hauptteil beliebig angenommen werden kann, besagt eben der *Mittag-Leffler*'sche Satz (Nr. **32**).

188) *Weierstrass*[27]), der den allgemeineren Fall einer eindeutigen Funktion mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen behandelt und explicite Formeln für die Darstellung einer solchen Funktion gegeben hat.

189) *Mittag-Leffler* bewies den Satz zunächst nur für den Fall, dass G_n eine rationale Funktion ist; Stockh. Öfv. 34 (1877). Seinen Beweis hat *Weierstrass* vereinfacht, Berl. Ber. Aug. 1880 = Werke 2, p. 189. — Vgl. ferner [194]).

33. Verallgemeinerungen der Sätze von Nr. 31 u. 32. *E. Picard*[190]) zeigte zunächst, dass der *Weierstrass*'sche Satz unter Anwendung derselben Beweismethode auf den Fall ausgedehnt werden kann, dass bloss $\lim\limits_{n=\infty} |a_n| = 1$, $|a_n| \neq 1$. Ist insbesondere stets $|a_n| < 1$, während sich die Punkte a_n in der Nähe eines jeden Punktes des Einheitskreises häufen, so bildet dieser Kreis eine natürliche Grenze für die Funktion[191]). Es sei an dieser Stelle auch auf die *Poincaré*'schen Θ-Reihen verwiesen[192]). Alsdann hat *Mittag-Leffler*[193]) den allgemeinen Satz bewiesen: Es sei eine beliebige isolierte Punktmenge Q mit den Punkten $a_1, a_2, \ldots$ vorgelegt, die nebst ihrer abgeleiteten Menge Q' die Begrenzung eines Bereiches T bilden möge; und es seien $n_1, n_2, \ldots$ eine beliebige Reihe positiver oder negativer ganzer Zahlen. Dann existiert stets eine Funktion, die in T analytisch ist und dort nicht verschwindet, in der Umgebung des Punktes a_i durch die Formel $(z - a_i)^{n_i} e^{\mathfrak{P}(z-a_i)}$ darstellbar ist, und somit in jedem Punkte von Q' einen wesentlichen singulären Punkt aufweist.

Den Satz von Nr. 32 hat *Mittag-Leffler*[194]) wie folgt verallgemeinert: Es sei eine beliebige isolierte Punktmenge Q vorgelegt, deren Punkte mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bezeichnet seien; ferner sei $G_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ irgend eine Funktion, die nur im Punkte α_n eine singuläre Stelle besitzt. Dann lässt sich stets ein analytischer Ausdruck bilden, welcher für jeden weder der Menge Q noch deren Ableitung Q' (I A 5, Nr. 1) angehörigen Wert z' von z eine Funktion von z definiert, die sich im Punkte z' analytisch verhält und ausserdem im Punkte α_n unstetig wird, wie $G_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right)$, indem die Differenz zwischen ihr und dieser Funktion sich dort analytisch verhält. In verschiedenen Bereichen kann jedoch der Ausdruck Funktionen darstellen, die nicht in einander analytisch fortsetzbar sind[195]). *Mittag-*

190) Par. C. R. 92 (1881), p. 690.

191) Vgl. auch *E. Picard*, Par. C. R. 94 (1882), p. 1405.

192) Verschiedene Noten in den Par. C. R. 92, 93 (1881); vgl. II B 6 c.

193) Acta math. 4 (1884), p. 32.

194) *Mittag-Leffler*[193]), p. 8. Einen ähnlichen Satz hat *Goursat* in den Par. C. R. 96 (1883), p. 567 ausgesprochen. Vgl. auch *Appell*, Acta math. 1 (1882), p. 145.

195) *Weierstrass* hatte bereits gezeigt, dass ein und derselbe analytische Ausdruck in verschiedenen Bereichen verschiedene analytische Funktionen darzustellen vermag; vergl. Berl. Ber. 12. Aug. 1880, § 3, sowie ibid. 21. Febr. 1881 = Werke 2, p. 208, § 3, u. p. 231. *E. Schroeder* war auf eine Reihe gestossen:

Leffler behandelt ferner den Fall, dass die singulären Stellen (resp. ein Teil davon) einer eindeutigen analytischen Funktion durch die Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenklasse (I A 5) abzählbar sind und leitet Formeln für die Darstellung einer solchen Funktion ab. Dabei findet die *Cantor*'sche Theorie der Punktmengen eine Anwendung in der Analysis[196]. — Auf eindeutige Funktionen auf einer algebraischen *Riemann*'schen Fläche sind die in dieser Nummer besprochenen Sätze[197] von *P. Appell* ausgedehnt.

34. Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereich. *Weierstrass* hat den Satz ausgesprochen[198]: Gegeben sei ein beliebiger Bereich T; dann existieren stets eindeutige Funktionen, die in jedem Punkte von T analytisch sind und in jedem Begrenzungspunkte von T einen singulären Punkt haben. Beweise sind unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen von *H. Poincaré* und *E. Goursat* gegeben worden[199]. In seiner vollen Allgemeinheit ist der Satz erst von *Runge*[200] bewiesen worden. Die *Runge*'sche Methode beruht

---

$\sum_{n=0}^{\infty} 1/(z^{2^n} - z^{-2^n})$, die gegen den Grenzwert $z/(z-1)$ resp. $1/(z-1)$ konvergiert, je nachdem $|z| < 1$ oder $|z| > 1$ ist; Zeitschr. Math. Phys. 22 (1876), p. 184. Diese Reihe kommt bereits bei *A. de Morgan*, Diff. and Int. Calculus, London 1842, p. 229 vor und ist mit einem speziellen Fall der später von *J. Tannery* gegebenen Reihe eng verwandt; *Weierstrass* a. a. O. 21. Febr. 1881. Andererseits hatte *Hermite* bemerkt, dass die Cauchy'sche Integralformel, welche innerhalb C die Funktion $f(z)$ darstellt, ausserhalb C stets den Wert 0 ergiebt; vgl. auch die Arbeit von *Runge*[200]. Mit dem Auftreten natürlicher Grenzen ist das soeben erwähnte Verhalten analytischer Ausdrücke nicht notwendig verknüpft. — Litteraturangaben über diesen Gegenstand bei *Hurwitz*[179].

196) Über diese Untersuchungen referiert *Hurwitz*[179].

197) Acta math. 1 (1882), p. 109, 132.

198) Berl. Ber. 12. Aug. 1880, § 6 = Werke 2, p. 223. Von dem Grad der Allgemeinheit dieses Theorems bekommt man einen Begriff, wenn man bedenkt, dass die Begrenzung eines Bereiches T nicht einmal vom Inhalt Null zu sein braucht und dass sie Punkte enthalten kann, denen man sich längs einer stetigen in T gelegenen Kurve nicht nähern kann[118]. Einfache Beispiele von Punktmengen ersterer Art habe ich im Cambridger Colloquium angeführt, N. Y. Bull. (2) 5 (1898), Lecture VI, p. 82.

199) *Poincaré*, Fenn. Acta 12 (1881), p. 341; wieder abgedruckt im Amer. J. of Math. 14 (1892); vgl. auch *Hermite*, Cours d'anal, 4. Aufl., p. 171; *Goursat*, Par. C. R. 94 (1882), p. 715; sowie Darb. Bull. 22 (1887), p. 109. Diese Beweise, welche im Grunde mit einander identisch sind, lassen sich leicht verallgemeinern; vgl. *Osgood*, N. Y. Bull. (2) 5 (1898), p. 14.

200) Acta math. 6 (1885), p. 229. Ein von *Stäckel* gegebener Beweis ist lückenhaft; J. f. Math. 112 (1893), p. 262. — Mittelst der *Runge*'schen Methode

darauf, eine Funktion, die in einem gewissen Bereich eindeutig und analytisch ist, annäherungsweise durch eine rationale Funktion darzustellen[201]); durch eine geeignete Reihe rationaler Funktionen wird dann die betreffende Funktion definiert.

Ob ein ähnliches Theorem für eine beliebige *Riemann*'sche Fläche als Definitionsbereich einer als vorhanden nachzuweisenden Funktion existiert, ist noch nicht entschieden. Durch die *Poincaré*'schen Untersuchungen (Nr. 28) wird der Existenzbeweis in gewissen sehr allgemeinen Fällen geliefert[202]).

35. Auf dem Konvergenzkreis gelegene singuläre Punkte, insbesondere Pole, und die Koeffizienten der Potenzreihe. Ist

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

eine beliebig angesetzte Potenzreihe und betrachtet man die erste Ableitung der Punktmenge $|\sqrt[n]{a_n}|$, so ist der Maximalwert dieser abgeleiteten Menge gleich dem reciproken Wert des Radius R des Konvergenzkreises[203]) der Reihe. Soll die Reihe insbesondere für alle Werte von z konvergieren, so ist notwendig und hinreichend, dass[204]) $\lim\limits_{n=\infty} |\sqrt[n]{a_n}| = 0$. Damit ein auf dem Konvergenzkreise beliebig gelegener Punkt z_0 ein singulärer Punkt der Funktion sein soll, ist notwendig und hinreichend, dass der Konvergenzkreis der *Taylor*'schen Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_1)\,\frac{(z-z_1)^n}{n!}$, wo z_1 einen innern Punkt des Radius $(0, z_0)$ bedeutet, den Radius $R - |z_1|$ habe. Daraus hat *Hadamard*[205]) eine

lässt sich auch eine Reihe von Sätzen über die Darstellbarkeit eindeutiger Funktionen durch Reihen beweisen; so z. B. der Satz: Besteht die Begrenzung des Definitionsbereiches der eindeutigen Funktion $f(z)$ aus einem Stück (d. h. aus einer zusammenhängenden Punktmenge) und ist a ein beliebiger Punkt der Begrenzung, so ist $f(z)$ durch eine Reihe darstellbar: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n\left(\frac{1}{z-a}\right)$, wo $G_n(w)$ eine ganze rationale Funktion von w bedeutet. Leichte Verallgemeinerung für eine beliebige Funktion.

201) Dazu bietet die *Cauchy*'sche Integralformel die Mittel; vgl. Nr. **38**.

202) Vgl. *Osgood* [198]), p. 73.

203) Unter „Konvergenzkreis" soll hier stets der *wahre Konvergenzkreis* [38]) verstanden werden.

204) *Cauchy*, Anal. alg. (1821), p. 59, 143, 151 = Oeuvres (2) 3, p. 63, 129, 136; Resumés anal. (1833), p. 47 = Oeuvres (2) 10, p. 57. Vgl. auch I A 3, Nr. **23**. Der Satz ist von *Hadamard* [205]) von neuem entdeckt.

205) J. de math. (4) 8 (1892), p. 101; Anwendung auf die *Weierstrass*'sche Funktion, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n z^{c^n}$. Eine allgemeinere Bedingung ist später von *Fabry* ent-

hinreichende Bedingung abgeleitet, dass die singulären Punkte von $f(z)$ auf dem Konvergenzkreise überall dicht liegen und somit diese Kurve ganz ausfüllen. Die von *Fabry* ausgesprochene Ansicht, dass die durch eine Potenzreihe definierten Funktionen ihren Konvergenzkreis im allgemeinen zur natürlichen Grenze haben, ist später von *Borel* und *Fabry* bestätigt worden[205a]).

Nachdem *Darboux*[206]) den Koeffizienten der Potenzreihe eine notwendige Bedingung entnommen hatte, dass die Funktion $f(z)$ auf dem Konvergenzkreise einen Pol, aber keinen weiteren singulären Punkt dort besitze, leitete *Hadamard*[207]) eine durch die Koeffizienten ausgedrückte notwendige und hinreichende Bedingung ab, dass $f(z)$ eine beliebige Anzahl von Polen je beliebiger Ordnung, sonst aber keinen singulären Punkt auf dem Konvergenzkreise aufweise. Diese Bedingung dehnte er dann auf den Fall aus, dass $f(z)$ noch in einem grösseren Kreise, insbesondere überhaupt im Endlichen keine anderen singulären Punkte als Pole haben soll, und er bestimmte[208]) die Pole durch die Koeffizienten der Reihe.

36. Die Nullpunkte einer analytischen Funktion, insbesondere einer ganzen Funktion. Ist eine analytische Funktion $\psi(z)$ durch die Reihe gegeben:

$$\psi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots \qquad (C_0 \neq 0),$$

so entsprechen den im Konvergenzkreise gelegenen Nullpunkten von $\psi(z)$ die in demselben Kreise gelegenen Pole der reciproken Funktion:

$$f(z) = 1/\psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

wo die a's sich rational durch die C's ausdrücken lassen. Es lassen

---

wickelt worden, Ann. éc. norm. (3) 13 (1896), p. 367. Weitere Litteraturangaben bei *Hurwitz*[179]). Ausführliches über den Gegenstand dieses und der folgenden Paragraphen nebst Litteraturangaben findet sich bei *Hadamard,* La série de Taylor et son prolongement analytique, Paris 1901.

205a) *Fabry*[205]), p. 399; *Borel,* Par. C. R. 123 (1896), p. 1051; *Fabry,* Acta 22 (1899), p. 65.

206) J. de math. (3) 4 (1878), p. 5. *Darboux* behandelt ferner den Fall eines Poles n^{ter} Ordnung, sowie gewisser Verzweigungspunkte.

207) *Hadamard*[205]); vgl. auch *v. Schaper*'s Dissertation[185]), wo ein einfacher Beweis *Hilbert*'s mitgeteilt wird. Der allgemeinste Fall wird von *v. Schaper* nicht behandelt. Ferner *Van Vleck,* Amer. Trans. 1 (1900), p. 293.

208) Es handelt sich dabei durchweg um die Häufungsstellen gewisser Punktmengen, deren Punkte explicite von den a's abhängen. Will man die Pole aus diesen Formeln wirklich berechnen, so fehlt vorläufig jede Abschätzung des Fehlers.

sich somit die Nullpunkte von $\psi(z)$ durch die C's bestimmen (Nr. **35** und [208]).

Diese Resultate wendet *Hadamard* an, um den Satz[209]) zu beweisen: Es sei

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

eine beliebige ganze Funktion. Man bestimme eine Funktion $\chi(n)$ derart, dass, sobald $n > m$ ist,

$$(\alpha) \quad |a_n| \leqq \frac{1}{\chi(n)}; \qquad\qquad (\beta) \quad \frac{\chi(n+2)}{\chi(n+1)} \geqq \frac{\chi(n+1)}{\chi(n)},$$

und setze $\varphi(n) = \sqrt[n]{\chi(n)}$. Andererseits mögen die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots$ von $F(z)$ so bezeichnet werden, dass $r_{n+1} \geqq r_n$, $(|z_n| = r_n)$. Dann lässt sich jeder positiven Grösse ε eine ganze Zahl μ so zuordnen, dass

$$r_n > (1 - \varepsilon)\,\varphi(n), \qquad n > \mu,$$

wofern $F(z)$ überhaupt unendlich viele Nullpunkte besitzt.

Es ist somit eine obere Grenze für die Anzahl der Nullpunkte einer ganzen Funktion gegeben, die in einem Kreise von beliebigem (genügend grossem) Radius liegen. Mit der Frage, ob diese obere Grenze nicht zu hoch ist, hat sich *E. Borel*[210]) beschäftigt.

Von der Stärke des Unendlichwerdens der Funktion $F(z)$, wenn $z = \infty$ wird, ausgehend ist *Schou*[211]) zu einem Satze gelangt, der ebenfalls eine obere Grenze für die Anzahl der Nullpunkte in einem grossen Kreise ergiebt: Satz: Ist $F(z)$ eine ganze Funktion von z, die der Bedingung genügt:

$$|F(z)| < e^{V(r)},$$

wo $V(r)$ eine positive mit r selbst unbegrenzt wachsende Funktion von r ist, so gilt für grosse Werte von n die Ungleichung:

$$n \log(s-1) < V(s r_n),$$

wo s eine beliebige Grösse > 2 ist.

37. Die Stärke des Unendlichwerdens einer ganzen Funktion, die Koeffizienten der Taylor'schen Reihe und die Höhe der Funktion. *Poincaré* bewies die beiden Sätze[212]): a) Ist $F(z)$ eine ganze Funktion von der Höhe E und lässt man $z = re^{\varphi i}$ längs eines beliebigen Halbstrahles $\varphi = \varphi_0$ ins Unendliche rücken; nimmt man

209) J. de math. (4) 9 (1893), p. 202.

210) Acta math. 20 (1897), p. 357. *Borel* bemerkt ferner, dass in der *Hadamard*'schen Formel $r_n > (1-\varepsilon)\,\varphi(n)$, $\varepsilon < (\log n)^{-\frac{1}{2}}$ ist.

211) Par. C. R. 125 (1897), p. 763.

212) Bull. soc. math. de France 11 (1883), p. 136.

ferner β so an, dass, wenn z so unendlich wird, $\lim e^{\beta z^{E+1}} = 0$ ist, so wird zugleich auch $\lim F(z) e^{\beta z^{E+1}} = 0$. b) Ist $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion von der Höhe E, so ist $\lim_{n=\infty} a_n n!^{\frac{1}{E+1}} = 0$. Es ist somit im wesentlichen für die Funktionen endlicher Höhe a) eine obere Grenze (nämlich $e^{\beta r^{E+1}}$, $|z| = r$) für die Stärke des Unendlichwerdens von $|F(z)|$, wenn $z = \infty$; b) eine obere Grenze für die Stärke des Nullwerdens von $|a_n|$, wenn $n = \infty$, gegeben worden.

Diese Sätze unter passenden Einschränkungen umzukehren resp. ihnen eine genauere Fassung zu geben, war die Veranlassung zu einer Reihe neuerer Arbeiten hauptsächlich französischer Mathematiker. *Hadamard* [213]) schätzte zunächst die Stärke des Unendlichwerdens einer beliebigen ganzen Funktion $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wenn $z = \infty$, ab, indem er zeigte, dass für alle Werte von $r > r_1$

$$|F(z)| < A r^{\varepsilon} e^{\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(r)}{r} dr}, \qquad \begin{cases} |z| = r; \quad r_1, A, \varepsilon = \text{const.}, \\ \varepsilon, \text{ beliebig klein,} \end{cases}$$

wo die Funktion $\psi(r)$ lediglich von den Koeffizienten a_n abhängt. Ist insbesondere $|a_n| \leqq (n!)^{-\alpha}$, $(n > m)$, so ist

$$|F(z)| < e^{H r^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (H = \text{const.}).$$

Andererseits leitete *Hadamard* für ganze Funktionen endlicher Höhe eine untere [214]) Grenze für den Wert von $|F(z)|$ ab, wenn $r = R_i$, $i = 1, 2, \ldots$, und $\lim_{i=\infty} R_i = \infty$ [215]).

Umgekehrt, sei $|F(z)| < e^{V(r)}$. Dann zeigt die *Cauchy*'sche Formel: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$, dass $|a_n| < r^{-n} e^{V(r)}$ und man erhält eine Abschätzung für $|a_n|$, indem man r einen solchen Wert beilegt, dass $r^{-n} e^{V(r)}$ zum Minimum wird. Ist insbesondere $V(r) = r^{\frac{1}{\alpha}}$, so ergiebt sich, dass

$$|a_n| \leqq \frac{e^{\alpha n}}{(\alpha n)^{\alpha n}} < \frac{\varepsilon}{n!^{\alpha - \delta}}, \qquad n > m, \qquad \varepsilon, \delta \text{ beliebig klein.}$$

Nun geht *Hadamard* weiter, indem er den Satz beweist: Ist $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

---

213) *Hadamard* [209]), p. 172—178.

214) a. a. O. p. 204.

215) Über eine ähnliche Abschätzung im allgemeinen Fall hat *Borel* [210]) Untersuchungen angestellt. Vgl. auch *v. Schaper*'s Dissertation [185]).

eine beliebige ganze Funktion von z, deren Koeffizienten an die Bedingung $|a_n| \leqq n!^{-\alpha}$, $n > m$, geknüpft sind, so ist die Höhe von $F(z)$ endlich und nicht grösser als $1/\alpha$. Damit ist die Umkehrung des zweiten *Poincaré*'schen Satzes geleistet, während die Umkehrung seines ersten Satzes sich wie folgt aussprechen lässt: Ist $F(z)$ eine ganze Funktion von z, die nicht stärker unendlich wird, wenn $r = \infty$, als e^{r^λ}, d. h. $|F(z)| < e^{r^\lambda}$, $r > r_1$, so ist die Höhe von $F(z)$ endlich und nicht grösser als λ.[216])

Auf Grund der soeben zitierten Sätze zeichnet sich eine besondere Klasse ganzer transcendenter Funktionen aus, die *Hadamard'schen Funktionen*[217]), deren Koeffizienten den Bedingungen genügen:

1) $|a_n| \leqq 1/n!^{\alpha-\delta}$, $n > m$; 2) $|a_n| > 1/n!^{\alpha+\delta}$, $n = m_1, m_2, \ldots$

wo $\alpha > 0$ als *Ordnung* der Funktion definiert wird und $\delta > 0$ beliebig angenommen werden darf. Sie sind Funktionen endlicher Höhe und *vom Typus* e^{r^λ}, d. h. es gilt:

$$|F(z)| < e^{r^{\lambda+\varepsilon}}, \quad r > r_1; \quad |F(z_i)| > e^{r_i^{\lambda-\varepsilon}}, \quad \lim_{i=\infty} z_i = \infty,$$

wo $\alpha\lambda = 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig angenommen wird. Die zwischen λ, der Höhe, und dem Konvergenzexponenten ϱ herrschenden Beziehungen sind auch von *v. Schaper*[185]) ermittelt worden.

38. Annäherungsformeln; Reihenentwicklungen nach Polynomen. Bei der Frage nach der angenäherten Darstellung einer analytischen Funktion $f(z)$ verlangt man in der Funktionentheorie[218]) entweder a) dass die Annäherungsfunktion $f_n(z)$ in einem oder mehreren Punkten $z_0, z_1, \ldots$ des Definitionsbereiches von $f(z)$ sich dieser Funktion möglichst eng anschmiegt, derart dass die *Taylor*'sche Reihenentwicklung für den Fehler $f(z) - f_n(z)$ im Punkte z_i mit dem Terme $(N_i + 1)^{\text{ten}}$ Grades anfängt, wo N_i bei gegebenem n möglichst hoch gemacht, bez. vorgeschrieben wird; oder b) dass $f_n(z)$ in einem ganzen Bereich T' eine gleichmässige Annäherung liefert, indem der Fehler $f(z) - f_n(z)$ in jedem Punkte z von T' dem absoluten Betrage nach

216) Diese Sätze hat *v. Schaper*[185]) unter einer genaueren Fassung bewiesen.

217) Die Benennung ist von *Hilbert* vorgeschlagen worden; vgl. *v. Schaper* a. a. O. Alle ganzen transcendenten Funktionen, die bisher in der Analysis eine Rolle gespielt haben, sind *Hadamard*'sche Funktionen.

218) Annäherungsformeln anderer Art (z. B. die semikonvergenten Reihen) erfüllen einen rechnerischen, aber keinen funktionentheoretischen Zweck. Übrigens dürfen unter den Punkten $z_0, z_1, \ldots$ auch isolierte Singularitäten von $f(z)$ auftreten, wobei dann die Definition der Anschmiegung in leicht ersichtlicher Weise abgeändert werden muss. Vgl. unten *Mittag-Leffler* und *Van Vleck*.

kleiner als eine beliebige von z unabhängige positive Grösse ε bleibt. Notwendig und hinreichend für b) ist, dass $f_n(z)$ in T' gleichmässig gegen $f(z)$ konvergiert, wenn n ins Unendliche wächst. Die Forderung b) braucht im Falle a) selbst in einer sehr kleinen von n unabhängigen Umgebung des Punktes z_i nicht erfüllt zu sein, wie Beispiele aus der Lehre der Kettenbrüche zeigen[219]. In der That kann der Kreis um z_i, innerhalb dessen der Fehler die Grösse ε nicht übersteigt, bei abnehmendem ε und zugleich zunehmendem n gegen den Punkt z_i zusammenschrumpfen.

Die einfachsten analytischen Funktionen sind die ganzen und die gebrochenen rationalen Funktionen und die einfachste Annäherung der ersten Art geschieht mit Hülfe eines Polynoms $f(z)$[220]. Hier kann man stets erreichen, indem man die $n+1$ Koeffizienten von $P_n(z)$ so bestimmt, dass

$$f^{(i)}(z_0) = P_n^{(i)}(z_0), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

dass die Reihenentwicklung für den Fehler in der Umgebung des Punktes z_0 mindestens mit dem Terme $(n+1)^{\text{ter}}$ Dimension anfängt:

$$f(z) - P_n(z) = c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots.$$

In diesem Fall wird auch der Forderung b) in jedem innerhalb des Konvergenzkreises gelegenen Bereich T' genügt, und $P_n(z)$ nähert sich der Funktion $f(z)$ in T' gleichmässig. — Nähert man $f(z)$ mittelst einer gebrochenen rationalen Funktion $P(z)/Q(z)$ an, so wird man auf Kettenbruchentwicklungen geführt (vgl. Nr. **39**). Der Forderung a) kann man dann stets gerecht werden, der Forderung b) wird dagegen im allgemeinen nicht genügt.

Für die eindeutigen analytischen Funktionen bez. für einen Zweig einer mehrdeutigen Funktion hat *Mittag-Leffler*[221]) im Fall a) Annäherungsformeln gegeben, indem er unendlich viele Punkte z_i zu-

---

219) Mit Hülfe des *Runge*'schen Verfahrens (Nr. **34**) kann man Beispiele zum Belege dieser Behauptung auch direkt aufstellen.

220) Dieser Gedanke geht auf *Newton*, Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, zurück; vgl. *H. Padé,* Par. Thèse 1892, p. 7 = Ann. éc. norm. (3) 9 (1892), p. S 7. An die Lagrange'sche Interpolationsformel knüpften *Cauchy* (Anal. alg., p. 528 = Oeuvres (2) 3, p. 431) und *Jacobi* (J. f. Math. 30 (1846), p. 127) an, indem sie statt Polynome gebrochene rationale Funktionen verwendeten. Die Beziehungen, welche zwischen mehreren Annäherungsbrüchen dieser Art bestehen, sind von *Frobenius* (J. f. Math. 90 (1880), p. 1) untersucht worden.

221) Vgl. [193]. Wir haben die Funktion $f(z)$ als gegeben angesehen und dieselbe dann mittelst rationaler Funktionen angenähert. Umgekehrt kann man

lässt, in deren jedem N_i einen beliebig vorgeschriebenen Wert hat; allgemeiner dürfen auch Pole von $f(z)$ in beliebiger Anzahl unter den Punkten z_i mit auftreten.

Eine allgemeine Lösung des Problems b), sowohl für eindeutige als auch für mehrdeutige Funktionen, wofern der Bereich T' der zugehörigen *Riemann*'schen Fläche nirgends über sich selbst greift, ist von *Runge*[200]) gegeben worden. Er geht von der *Cauchy*'schen Integralformel aus, die er, wie folgt, umformt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{C}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(t_i)(t_{i+1}-t_i)}{t_i-z}$$

$$= s_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty}[s_{n+1}(z) - s_n(z)],$$

wo
$$s_n(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(t_i)(t_{i+1}-t_i)}{t_i-z}.$$

Dabei wird das Integral längs des Randes $\bar{C}$ eines Bereiches $\bar{T}'$ erstreckt, der T' enthält, und die Punkte t_i werden schliesslich auf $\bar{C}$ überall dicht. Die Terme dieser Reihe, die ja rationale Funktionen sind, werden durch Polynome angenähert und es ergiebt sich somit eine Darstellung von $f(z)$ im Bereich T' durch eine gleichmässig konvergente Reihe von Polynomen. Die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe liefert die Funktion $f_n(z)$. Die *Runge*'sche Lösung des Problems b) setzt die Kenntnis der Werte der Funktion in einer abzählbaren überall dichten auf $\bar{C}$ gelegenen Menge voraus. *Mittag-Leffler*[80]) hat das Problem behandelt, indem er die Funktion als durch die Koeffizienten einer Potenzreihe — also wiederum durch eine abzählbare Menge von Konstanten — gegeben ansieht.

Insbesondere geht aus diesen Methoden hervor, dass jede eindeutige analytische Funktion von z, deren Definitionsbereich T der Punkt $z = \infty$ nicht angehört, sich in eine Reihe von Polynomen entwickeln lässt, die in einem beliebigen Bereich T' gleichmässig konvergiert. Die Reihe ist so nicht eindeutig bestimmt, denn es ist beispielsweise

---

sich, wie *Mittag-Leffler* ausführt, die rationale Funktion $R_i(z) = \sum_{n=M_i}^{N_i-1} a_n(z-z_i)^n$ geben und dieselbe dann durch einen analytischen Ausdruck $f(z)$ [Reihe oder Produkt] annähern, derart, dass in der Nähe des Punktes z_i die Beziehung gilt: $f(z) - R_i(z) = C_{N_i}(z-z_i)^{N_i+1} + \cdots$. Vgl. auch *E. Schering*, Gött. Abh. 27 (1881), p. 1. Inwiefern der Forderung b) genügt wird, ist nicht untersucht.

$$0 = \lim_{n=\infty} \frac{z^n}{n!} = z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{z^n}{n!}\right].$$

Noch eine andere Lösung hat *Hilbert*[222]) gegeben, indem er $f_n(z)$ durch die Reihe darstellt:

$$f_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(z)\,[G(z)]^i,$$

wo $G_i(z)$, $G(z)$ Polynome vom Grade $m-1$ resp. m sind. Die Reihe konvergiert in einem beliebigen innerhalb einer „Lemniscate" gelegenen Bereich gleichmässig.

Wegen anderer Entwicklungen nach Polynomen vgl. Nr. **39.** Ferner sei auf die Entwicklungen verwiesen, welche *Appell*[194]) und *Painlevé*[222a]) aufgestellt haben.

39. Kettenbruchentwicklungen[223]). Eine solche Entwicklung entsteht, indem man $f_n(z) = P_N(z)/Q_N(z)$ setzt, wo $P_N(z)$, $Q_N(z)$ Polynome vom m^{ten} Grade sind, wenn $N = 2m$ ist; vom $(m+1)^{\text{ten}}$ resp. vom m^{ten}, wenn $N = 2m+1$ ist[224]). Es ist stets möglich, P_N, Q_N so zu bestimmen, dass in der Umgebung des Punktes $z_0 = 0$

$$f(z) - \frac{P_N(z)}{Q_N(z)} = C z^{N+1} + \cdots.$$

Im allgemeinen wird $C \neq 0$ sein. Setzt man

$$Q_N f(z) - P_N = c_1^{(N)} z^{N+1} + c_2^{(N)} z^{N+2} + \cdots,$$

so ergiebt sich, dass

$$P_{N+2} = z P_N + a_{N+2} P_{N+1},$$
$$Q_{N+2} = z Q_N + a_{N+2} Q_{N+1},$$

wo $a_{N+2} = -c_1^{(N)}/c_1^{(N+1)}$ ist; ferner sei $Q_0 = 1$, $a_0 = P_0 = f(0)$, $Q_1 = f'(0)^{-1} = a_1$, $P_1 = a_0 a_1 + z$. Dann ist

$$\begin{vmatrix} Q_{N+1} & Q_N \\ P_{N+1} & P_N \end{vmatrix} = (-z)^{N+1}.$$

---

222) Gött. Nachr. 1897, p. 63. Mit der formalen Seite dieses Problem hatte sich *Jacobi* bereits beschäftigt, J. f. Math. 53 (1857), p. 103.

222a) Par. Thèse 1887 = Toul. Ann. 2 (1888), p. 1 B.

223) Vgl. auch I A 3, insbes. Nr. **55**, II B 4, 4 b, sowie *Van Vleck,* Gött. Diss. 1893 = Amer. J. of Math. 16 (1894), p. 1, wo zahlreiche Litteraturangaben sich finden und auch die Gruppeneigenschaften gewisser Kettenbrüche nach dem Vorbild *Heun*'s, Math. Ann. 33 (1889), p. 180 besprochen werden. — Zwischen den Kettenbrüchen und den divergenten Reihen besteht ein enger Zusammenhang. Man vgl. die Darstellung bei *Borel,* Séries divergentes, 1901; sowie *H. Padé,* Acta 18 (1894), p. 97.

224) N ist somit gleich der Summe der Grade von P_N, Q_N. Andere Festsetzungen bezüglich dieser Grade werden später erwähnt.

Der Übergang zu einer Form des Kettenbruchs geschieht nun, indem man $\varphi_N(z)$ durch die Gleichung einführt:

$$f(z) = \frac{P_{N+1} + P_N \varphi_N}{Q_{N+1} + Q_N \varphi_N}; \quad \text{also} \quad \varphi_N(z) = \frac{z}{a_{N+2} + \varphi_{N+1}(z)},$$

wofern nicht $\varphi_N(z) = 0$ ist;

$$f(z) = a_0 + \cfrac{z}{a_1 + \cfrac{z}{\ddots \, \cfrac{}{a_N + \cfrac{z}{a_{N+1} + \varphi_N(z)}}}}.$$

Eine hinreichende Bedingung für die Kettenbruchentwicklung ergiebt sich sofort: Konvergiert P_N/Q_N gegen einen Grenzwert $F(z)$; konvergiert ferner $Q_N\varphi_N/Q_{N+1}$ gegen irgend einen von -1 verschiedenen Grenzwert (incl. ∞), so ist $F(z) = f(z)$.

Es gilt die Formel:

$$\frac{P_{N+1}}{Q_{N+1}} - \frac{P_N}{Q_N} = \frac{-(-z)^{N+1}}{Q_N Q_{N+1}}.$$

Daraus geht folgendes hervor: Konvergiert die Reihe

$$\sum_{N=1}^{\infty} (-z)^{N+1} / Q_N Q_{N+1}$$

in einem Bereich T gleichmässig, so konvergiert P_N/Q_N in T gleichmässig gegen eine analytische Funktion $F(z)$, die jedoch mit $f(z)$ nicht identisch zu sein braucht[225]). Ist aber der Punkt $z = 0$ im Bereich T enthalten, so ist $F(z) = f(z)$. Der Grenzwert von P_N/Q_N ist nämlich nach Nr. **6** eine analytische Funktion, deren Ableitungen im Punkte $z = 0$ im letzteren Fall sämtlich mit den entsprechenden Ableitungen von $f(z)$ dort übereinstimmen.

Ähnliche Formeln gelten, wenn $f(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ durch den Bruch $P_N(z)/Q_N(z)$ angenähert wird, indem man sich der Entwicklung bedient[226]):

$$f(z) = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 z + c_1 + \cfrac{a_2}{b_2 z + c_2 + \cfrac{a_3}{\ddots}}}$$

Setzt man formal eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{-i}$ an, so wird im allgemeinen

225) Vgl. *Padé* [220]).

226) Vgl. *Possé,* Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Petersburg 1886. *T. J. Stieltjes*, Toul. Ann. 8 (1894), J 1; (Fortsetzung) 9 (1895) A 1. Es sei auch auf verschiedene Untersuchungen von *Tschebyscheff* und *Markoff* verwiesen, worüber zum Teil von *Possé* referiert ist.

ein zugehöriger Kettenbruch dieser Form eindeutig bestimmt. Es kann nun vorkommen: a) dass der Kettenbruch gleichmässig konvergiert und somit eine analytische Funktion darstellt, obwohl die Reihe beständig divergiert[227]); b) dass der Kettenbruch divergiert, obwohl die Reihe konvergiert[228]).

Der Gedanke, eine vorgelegte analytische Funktion der Forderung a) Nr. 38 gemäss mittelst gebrochener rationaler Funktionen anzunähern, geht auf *Lagrange*[229]) zurück. Das Problem ist von *Frobenius*[229a]) und erst neuerdings eingehend von *Padé*[220]) untersucht worden. An Stelle von $P_N(z)$, $Q_N(z)$ treten jetzt Polynome $P(z)$, $Q(z)$ vom m^{ten} resp. n^{ten} Grade, die so bestimmt werden, dass die *Taylor*'sche Reihenentwicklung für $f(z) - P(z)/Q(z)$ womöglich mit einer höheren als der $(m+n+1)^{\text{ten}}$ Potenz von z anfängt. (Nach *Padé*'s Bezeichnungsweise ist $m = p - \omega_{pq}$, $n = q - \omega_{pq}$.) *Padé* untersucht Kettenbrüche von den beiden Formen:

$$\text{(I)} \qquad a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2} \dotplus \frac{\alpha_3}{a_3} \dotplus \cdots$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\alpha_1}{a_1} \dotplus \frac{\alpha_2}{a_2} \dotplus \cdots,$$

wobei α_1 eine nicht verschwindende Konstante, die übrigen α's Monome in z und die a's Polynome sind, die für den Wert $z = 0$ nicht verschwinden. Bei dieser Festsetzung reduziert sich nämlich die Formel

$$U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i = (-1)^i \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{i+1} \qquad \text{im Fall (I)}$$

$$\text{resp.} \quad U_i V_{i+1} - U_{i+1} V_i = (-1)^{i+1} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{i+1} \qquad \text{„ „ (II)}$$

rechter Hand auf ein Monom in z. Es stellt sich heraus, dass es im allgemeinen Fall überhaupt nur drei Typen von regulären Kettenbrüchen giebt, nämlich die folgenden:

---

227) Die divergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n!\, z^{-n}$ führt beispielsweise auf die Kettenbruchentwicklung für $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\xi} d\xi}{z - \xi}$; vgl. *Stieltjes*[226]).

228) *Halphen,* Par. C. R. 100 (1885), p. 1451; ibid. 106 (1888), p. 1326; Fonctions elliptiques 2, Paris 1888, chap. XIV.

229) Berl. Nouv. Mém. 1776 = Oeuvres 4, p. 301; vgl. auch die Besprechung *Euler*'s, *Lambert*'s und *Lagrange*'s diesbezüglicher Leistungen bei *Padé*[220]), p. 38.

229a) Vgl. [220]). *Frobenius* stellt übrigens die Formeln dort auf, welche die Koeffizienten des Kettenbruchs mit denjenigen der zugehörigen Reihe, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i z^{-i}$ verknüpfen.

$$\mathfrak{A} = 1 + az + \cfrac{\alpha z}{1 + bz + \cfrac{\beta z}{1 + cz + \cfrac{\gamma z}{\ddots}}} \qquad \mathfrak{B} = 1 + \cfrac{\alpha z}{1 + \cfrac{\beta z}{1 + \cfrac{\gamma z}{\ddots}}}$$

$$\mathfrak{C} = 1 + az + \cfrac{\alpha z^2}{1 + bz + \cfrac{\beta z^2}{1 + cz + \cfrac{\gamma z^2}{\ddots}}}$$

Die Theorie wird auf die Funktion e^z angewandt[229b]).

Über verallgemeinerte Kettenbrüche liegen Arbeiten von *Pincherle, Hermite* und *Padé* vor[229c]).

Besondere Funktionen sind schon früh in Kettenbrüche entwickelt (I A 3, Nr. **55** und [229]). Eine viele dieser Entwicklungen als spezielle Fälle umfassende Formel ist der von *Gauss* gegebene und von *Riemann* und *Thomé* in Bezug auf Konvergenz behandelte Kettenbruch für

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, z)}{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}. \text{ [230])}$$

Auf die Exponentialfunktion hat *Hermite*[231]) die Methode der Kettenbrüche angewandt. Hyperelliptische und ähnliche Integrale hat *Van Vleck* mittelst mehrdeutiger Funktionen angenähert, die sich zugleich in mehreren Verzweigungspunkten des Integrals demselben bis auf eine additive Konstante anschmiegen. Die homogenen Variabeln (Nr. **49**) werden dabei prinzipiell angewandt.

Die Kettenbruchentwicklung einer durch die Formel

$$f(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{z - \xi}$$

229b) Vgl. *Padé*, Ann. éc. norm. (3) 16 (1899), p. 395, wo die verschiedenen Kettenbruchentwicklungen der Exponentialfunktion in einer solchen Weise dargestellt werden, dass sie als eine Einleitung in die Theorie der allgemeinen Kettenbrüche dienen können.

229c) *Pincherle,* Bologna Mem. (4) 10 (1890), p. 513; Ann. di mat. (2) 19 (1891), p. 75; *Hermite,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 289; *Padé,* J. de math. (4) 10 (1894), p. 291.

230) *Gauss,* Disquis. gen. circa seriem inf., 1812 = Werke 3, p. 134. *Riemann,* Nachlass, Werke, 1. Aufl., p. 400, 2. Aufl., p. 424; der Beweis stützt sich auf ein längs eines komplexen Weges erstrecktes Integral (Nr. **17**) und ist von *H. A. Schwarz* ergänzt worden. *Thomé,* J. f. Math. 66, 67 (1866, 1867). Die Formel enthält insbesondere die Kettenbrüche für $(1+z)^m$, $\log(1+z)$, $\log\dfrac{z+1}{z-1}$, e^z. Ferner *Van Vleck,* Ann. of math. (2) 3 (1901), p. 1.

231) Par. C. R. 77 (1873), p. 18, 74, 226, 285; Sur la fonction exponentielle, Paris 1874. Vgl. ferner *Padé* [220]) u. [229b]).

darstellbaren Funktion ist Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. Sind α, β, ξ reell und ist $\varphi(\xi)$ eine reelle Funktion von ξ, die im Intervall $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ nirgends negativ wird, so konvergiert der Kettenbruch in einem beliebigen keinen Punkt dieses Intervalls enthaltenden Bereich T' gleichmässig. Eine der Integrationsgrenzen darf auch unendlich werden [232]).

Setzt man insbesondere $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\varphi(\xi) = 1$, so ist $f(z) = \log \frac{z+1}{z-1}$. Die Nenner dieses Kettenbruchs sind Kugelfunktionen erster, die Reste solche zweiter Art [233]). Die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion nach Kugelfunktionen ist formal von *Heine* [234]) behandelt worden; das entsprechende Problem der Entwicklung nach den Nennern des Kettenbruches für

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{z - \xi}$$

hat *O. Blumenthal* [235]) völlig erledigt.

A. Markoff [235a]) untersucht die Funktion

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\, dy - \xi \int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\, dy,$$

wo $a < b < c < d$ ist und $g(y)$, $f(y)$ positiv sind, auf die Nullstellen der Nenner ihrer Kettenbruchentwicklung hin. Bei geeigneter Wahl von g, f, ξ sind diese Nenner *Lamé*'sche Polynome.

Pincherle [235b]) findet folgende Sätze. Der Kettenbruch

---

232) *Heine*, Berl. Ber. 1866, p. 436; Kugelfunktionen 1, 2. Aufl., Berlin 1878, p. 286; *Laguerre*, J. de math. (4) 1 (1885), p. 135; *Possé* [226]); *Markoff*, Acta math. 19 (1895), p. 93; *Stieltjes* [226]); *O. Blumenthal*, Gött. Diss. 1898. Einen speziellen Fall dieses Integrals hat bereits *Gauss* untersucht; vgl. [233]).

233) *Gauss*, Methodus nova integralium valores u. s. w., 1814 = Werke 3, p. 163.

234) Kugelfunktionen 1, p. 292. *Pincherle* hat das Problem der Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen, welche einer linearen Differenzengleichung r^{ter} Ordnung genügen, in welcher z linear vorkommt, behandelt: Linc. Atti (4) 5 (1889), p. 640; Ann. di mat. 12 (1884), p. 11 u. 107; Acta math. 16 (1893), p. 341; vgl. auch den kurzen Auszug in „Papers read at the Intern. Congress" Chicago, 1893 (erschienen 1896), p. 278. Auf Grund der *Poincaré*-schen Sätze, Am. J. of Math. 7 (1885), p. 203, lässt sich der Konvergenzbereich der Entwicklung nach Kugelfunktionen angeben. Vgl. II B 4 b.

235) Vgl. [232]). *Blumenthal* behandelt auch das Problem der Entwicklung einer reellen nicht analytischen Funktion nach denselben Nennern.

235a) Math. Ann. 27 (1886), p. 143, 177.

235b) Linc. Rend. (4) 5 (1889), p. 640; ferner Ann. éc. norm. (3) 6 (1889),

$$\sigma = \cfrac{1}{\alpha_0 - \cfrac{1}{\alpha_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 - \cdots}}}$$

konvergiert, falls durchweg $|\alpha_n| > 2 + \eta$ ($\eta > 0$) ist; sonst darf aber α_n eine beliebige komplexe Zahl sein. Es ist $|\sigma| < 1$. Er setzt $\alpha_n = b_n z - a_n$, wo a_n, b_n bei wachsendem n Grenzwerten zustreben, und bestimmt in Anlehnung an *Poincaré* [234]) den Konvergenzbereich bezw. einen Teil davon.

Sätze über die Konvergenz des allgemeinen Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

waren bisher noch nicht bekannt. Den Fall, dass die a's sämtlich reelle positive Grössen sind, hat *Stieltjes* [226]) untersucht. Er findet folgendes: a) Divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so konvergiert der Kettenbruch in einem beliebigen keinen Punkt der negativen reellen Achse (incl. $z = 0$) enthaltenden Bereich T' gleichmässig. Die so definierte Funktion $f(z)$ lässt sich auch durch die Formel darstellen:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{z - \xi},$$

wo längs der negativen reellen Achse integriert wird und $\varphi(\xi)$ eine reelle nirgends negative Funktion von ξ ist. b) Konvergiert dagegen diese Reihe, so konvergieren die geraden sowie die ungeraden Teilzähler $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ und Teilnenner $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ in jedem endlichen Bereich gleichmässig gegen ganze Funktionen $p(z)$, $p_1(z)$, $q(z)$, $q_1(z)$, die alle von der Höhe 0 (Nr. **31**) sind, deren Nullpunkte alle einfach sind und auf der negativen reellen Achse liegen, und zwischen denen die Beziehung gilt:

$$q(z) p_1(z) - q_1(z) p(z) = 1.$$

Die geraden sowie die ungeraden Annäherungsbrüche konvergieren

---

p. 145, wo einige allgemeine funktionentheoretische Sätze aufgestellt sind. *A. Pringsheim* hat neuerdings ein weitergehenderes Konvergenzkriterium gefunden: Münch. Ber. 28 (1898), p. 311.

somit im vorbezeichneten Bereich T' gleichmässig; ihre Grenzwerte $p(z)/q(z)$ resp. $p_1(z)/q_1(z)$ stimmen jedoch nicht miteinander überein. Ferner zeigt *Stieltjes*: die notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Kettenbruch

$$\cfrac{b_1 z}{1 + \cfrac{b_2 z}{1 + \cfrac{b_3 z}{1 + \cdots}}}$$

wo b_i eine reelle positive Grösse bedeutet, eine analytische Funktion von z mit keinen anderen als nur ausserwesentlichen singulären Punkten im Endlichen darstelle, besteht darin, dass $\lim\limits_{i=\infty} b_i = 0$ ist.

Die *Stieltjes*'schen Sätze sind zum Teil von *Van Vleck* neu bewiesen und verallgemeinert worden. *Van Vleck* findet u. a. folgenden Satz[235c]): Gegeben sei der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{b_1 z + c_1 - \cfrac{1}{b_2 z + c_2 - \cfrac{1}{b_3 z + c_3 - \cdots}}}$$

wo die reellen Grössen $b_1, b_2, \ldots$ entweder alle positiv oder alle negativ und $c_1, c_2, \ldots$ zunächst beliebige reelle Grössen sind; a) dann werden die Nullstellen der Teilzähler und der Teilnenner sämtlich auf der reellen Achse liegen; b) konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$, so konvergieren die geraden, sowie die ungeraden Teilzähler und Teilnenner in jedem endlichen Bereich gleichmässig gegen ganze Funktionen, deren Nullstellen auf der reellen Achse liegen; c) divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und hat $|c_n|/|b_n|$ eine obere Grenze, so konvergiert der Kettenbruch in jedem endlichen Bereich T', dem kein Punkt der reellen Achse angehört, gleichmässig und stellt somit in jeder Halbebene eine analytische Funktion dar. Ob diese beiden Funktionen zusammenfallen, bleibt dahingestellt. In einer zweiten Arbeit erweitert *Van Vleck*[235d]) den *Stieltjes*'schen Satz bezüglich des Kettenbruchs

235[c]) Amer. Trans. 2 (1901), p. 232. Allgemeine Kriterien für die Konvergenz von Kettenbrüchen werden entwickelt und insbes. zu funktionentheoretischen Zwecken verwendet.

235[d]) Amer. Trans. 2 (1901), p. 476. — Wegen einer anderen Verallgemeinerung eines *Stieltjes*'schen Satzes vgl. *H. v. Koch,* Bull. Soc. Math. de France 23 (1895), p. 33.

$$\cfrac{b_1 z}{1+\cfrac{b_2 z}{1+\cdots}}$$

und zeigt insbesondere, dass der Kettenbruch noch konvergiert, wenn $b_1, b_2, \ldots$ beliebige von Null verschiedene komplexe Zahlen sind, wofür nur $\lim\limits_{n=\infty} b_n = 0$ ist und die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert.

Wegen der Verwendung von Kettenbrüchen zur Lösung von Differentialgleichungen vgl. II B 4.

IV. Analytische Funktionen mehrerer komplexen Grössen.

40. Die Bereiche (T), (B), (T'); analytische Funktionen[236]**.** Die n unabhängigen Variabeln $z_1, \ldots, z_n$ mögen in n verschiedenen Zahlenebenen gedeutet werden. Der Komplex von n Werten $(z_1, \ldots, z_n)$ — oder kurz (z) — heisst ein *Punkt*; $z_1, \ldots, z_n$ heissen die *Koordinaten* des Punktes (z). In jeder Ebene wird ein Bereich $T^{(i)}$ resp. $B^{(i)}$ (Nr. **1**) angenommen. Die Gesamtheit der Punkte (z), deren Koordinaten z_i je dem Bereich $T^{(i)}$ resp. $B^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ angehören, soll als Bereich (T) resp. (B) bezeichnet werden. Wird je ein Bereich $B^{(i)}$ in $T^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ beliebig angenommen, so wird der entsprechende Bereich (B) als ein Bereich (T') definiert; man sagt: (T') *liegt in* (T). Jede der n Ebenen wird durch den Punkt ∞ (Nr. **8**) geschlossen; die unendlich fernen Punkte (z) sind solche, für welche mindestens eine Koordinate unendlich ist; sie bilden eine $(2n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Unter der *Umgebung* eines Punktes (a) versteht man einen Bereich (T) von der Beschaffenheit, dass die Koordinaten z_i ihrer Punkte je der Umgebung des Punktes a_i angehören[236a]. Der Punkt (z) konvergiert gegen den Punkt (a), wenn die Koordinaten von (z) gleichzeitig gegen die Koordinaten von (a) konvergieren. Zu manchen Zwecken empfiehlt es sich, den Punkt (z) als Punkt eines $2n$-fach ausgedehnten Raumes zu deuten, dessen Koordinaten x_i, y_i sind, wo $z_i = x_i + iy_i$ gesetzt ist.

---

236) Vgl. II A 1, Nr. **21—24**.

236a) Allgemeiner darf an Stelle des einzelnen Punktes (a) eine Punktmenge P treten, die etwa aus den Punkten von (T) besteht, welche auf einer oder mehreren Mannigfaltigkeiten $\omega_k(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$, $(k = 1, 2, \ldots)$ liegen. Die *Umgebung von P* wird dann von denjenigen Punkten z von (T) gebildet, welche der Beziehung $|z_i - t_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügen, wobei ε eine zweckmässig anzunehmende positive Konstante und (t) einen beliebigen veränderlichen Punkt von P bedeutet.

Es sei eine Funktion

$$f = f(z_1, \ldots, z_n) = u + vi$$

in jedem Punkte (z) von (T) eindeutig erklärt. Sie heisst in (T) *stetig,* wenn u, v beide als Funktionen der $2n$ reellen Veränderlichen $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ betrachtet, für die in Betracht kommenden Wertsysteme stetig sind. Sie heisst in (T) *analytisch,* wenn sie folgenden Bedingungen genügt: a) $f(z_1, \ldots, z_n)$ soll eine in $T^{(i)}$ analytische Funktion von z_i sein, wenn man jedem anderen Argument z_k einen in $T^{(k)}$ beliebig gelegenen festen Wert beilegt; b) $f(z_1, \ldots, z_n)$ soll in (T) stetig sein. Die Voraussetzung b) lässt sich durch eine weniger umfangreiche ersetzen, etwa durch die Annahme, dass f in (T) bezw. in jedem (T') endlich bleibt; die Frage, ob ausser der Forderung a) überhaupt noch eine weitere b) gestellt werden muss, ist noch nicht entschieden[237]. Diese auf das Verhalten der analytischen Funktion im Kleinen sich beziehende Definition wird im Grossen durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung (Nr. **13**) ergänzt[238].

41. Der Cauchy'sche Integralsatz; das Residuum. Es möge $f(z_1, z_2)$ eine in (T) stetige Funktion von (z) sein — der Einfachheit halber wird $n = 2$ gesetzt. Unter dem Integral von $f(z_1, z_2)$, längs der Begrenzung (C) eines Bereiches (T') erstreckt,

$$\int_{C_2} dz_2 \int_{C_1} f(z_1, z_2)\, dz_1 \quad \text{oder} \quad \iint_{(C)} f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2,$$

versteht man folgendes: Der Punkt z_2 wird auf der Kurve C_2 beliebig angenommen und festgehalten, während das Integral $\int f(z_1, z_2)\, dz$ längs der Kurve C_1 erstreckt wird; die so entstandene Funktion von z_2 wird dann längs der Kurve C_2 integriert; sowohl C_1 als C_2 können aus mehreren Stücken bestehen. Der Wert des Integrals hängt nicht von der Reihenfolge der Integrationen ab (Beweis durch Zerlegung in einen reellen und rein imaginären Teil).

Das Doppelintegral der Funktion $f(z_1, z_2)$ ist von *Poincaré*[239])

237) *Osgood,* Math. Ann. 52 (1899), p. 462; 53 (1900), p. 461.

238) *Weierstrass,* Vorlesungen; vgl. das *Biermann*'sche Werk § 42, 44, sowie das 8. Kapitel.

239) Par. C. R. 102 (1886), p. 202; Acta math. 9 (1887), p. 321, wo auf frühere, die Gegenstände dieses Paragraphen teilweise betreffende Arbeiten von *Marie* und *Picard* verwiesen ist. *Poincaré* vermeidet die Geometrie eines vierdimensionalen Raumes R_4, indem er den in Betracht kommenden Teil desselben auf einen R_3 bezieht. Ferner vgl. man *Picard,* Traité 2, ch. IX; sowie *Picard* et *Simart,* Théorie des fonct. alg., etc. (Litteraturverzeichnis). — Einer ähnlichen

wie folgt definiert worden. Der Punkt (z) wird in einem R_4 gedeutet und durch die 4 Gleichungen $x_i = \varphi_i(s, t)$, $y_i = \psi_i(s, t)$, $i = 1, 2$, wo φ_i, ψ_i reelle Funktionen der reellen Parameter (s, t) bedeuten, wird bei geeigneten Einschränkungen bezüglich dieser Funktionen eine Fläche S definiert. Dann wird das komplexe Doppelintegral dadurch erklärt, dass man

$$\iint_S f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 = \iint_S f(z_1, z_2) \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s, t)}\, ds\, dt$$

setzt und die rechter Hand auftretenden reellen Doppelintegrale über die Fläche S hin erstreckt. Das vorhin eingeführte Integral ist ein spezieller Fall eines Doppelintegrals. Die Fläche S heisst *geschlossen*, falls jeder Punkt des R_4, in dessen Nähe Punkte der Fläche sich befinden, ein regulärer Punkt der Fläche ist und die Fläche stetig auf einen Punkt resp. eine reguläre Kurve zusammengezogen werden kann.

Der Cauchy'sche Integralsatz: Ist die Funktion $f(z_1, z_2)$ in (T) analytisch und wird das Integral $\iint f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2$ längs der Begrenzung (C) eines beliebigen (T') erstreckt, so hat das Integral den Wert 0:

$$\iint_{(C)} f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 = 0.$$

Bei Einführung des *Poincaré*'schen Begriffs des Doppelintegrals erhält der Satz folgende Formulierung[240]): Es sei $f(z_1, z_2)$ in einem Bereich (T) analytisch, dem ein Bereich (R) des R_4 entspricht; ferner sei S eine geschlossene Fläche, welche, ohne aus (R) auszutreten, stetig auf einen in (R) gelegenen Punkt resp. eine reguläre Kurve zusammengezogen werden kann. Dann ist der Wert des über S erstreckten Doppelintegrals von $f(z_1, z_2)$ gleich Null:

$$\iint_S f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 = 0.$$

Dem *Residuum* einer Funktion einer Veränderlichen in einem Punkte entspricht hier das über eine geschlossene Fläche hin erstreckte Doppelintegral, die sich auf einen isolierten Punkt der Begrenzung von (T) bezw. auf eine reguläre Kurve, die einen isolierten Teil der Begrenzung von (T) bildet, zusammenziehen lässt. Es giebt jedoch hier, den zweierlei Arten geschlossener Flächen entsprechend, sowohl

Definition des n-fachen Integrals einer Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ steht keine prinzipielle Schwierigkeit im Wege.

240) *Poincaré* [239]).

Punkt- als *Kurvenresiduen.* Ist insbesondere $f(z_1, z_2)$ eine gebrochene rationale Funktion, so führen diese Integrale auf die Periodicitätsmoduln *Abel*'scher Integrale. *Poincaré* erstreckt das Doppelintegral auch über solche geschlossene Flächen, bei denen der Integrand in isolierten Punkten einfach unendlich wird. Derartige Integrale führen auf *Abel*'sche Integrale, die nicht längs eines geschlossenen Weges zu erstrecken sind; ihr Wert ändert sich stetig mit einer stetigen Verschiebung der Fläche S. — Des weiteren wendet *Poincaré* das Doppelintegral an, um *Stieltjes'* Resultate bezüglich der Verallgemeinerung der *Lagrange*'schen Reihe (Nr. **15**, Ende) einwandfrei zu begründen. Es sei noch erwähnt, dass man hier bereits mit der engeren Definition des Doppelintegrals zum Ziele kommt.

42. Die Cauchy'sche Integralformel; singuläre Punkte. Ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ in (T) analytisch, so lässt sich der Wert von f in einem beliebigen innern Punkte (z) eines (T') durch die Formel ausdrücken[241]:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_n} \frac{dt_n}{t_n - z_n} \cdots \int\limits_{C_1} \frac{f(t_1, \ldots, t_n)\, dt}{t_1 - z_1}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} = \frac{k_1! \ldots k_n!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{C_n} \frac{dt_n}{(t_n - z_n)^{k_n + 1}} \cdots \int\limits_{C_1} \frac{f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1}{(t_1 - z_1)^{k_1 + 1}}.$$

Darum sind alle Ableitungen von f auch in (T) analytische Funktionen. Ist (a) ein beliebiger Punkt von (T) und wird die Begrenzung C von (T) durch die Kreise $|z_i - a_i| = r_i$ gebildet; ist ferner in allen diesen Begrenzungspunkten $|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqq M$, so ist

$$\left| \left(\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} \right)_{(z) = (a)} \right| \leqq k_1! \cdots k_n!\, M r_1^{-k_1} \cdots r_n^{-k_n}.$$

Die Funktionen u, v (Nr. **40**) genügen zunächst der *Laplace*'schen und den *Cauchy-Riemann*'schen Differentialgleichungen. Durch Elimination von v aus den Relationen:

241) Aus dem Beweis des „2e Théorème", Exerc. d'anal. 2 (1841), p. 55 (= Turiner Abh. (1831), vgl. Monographieen), geht hervor, dass *Cauchy* diese Verallgemeinerung der Integralformel als unmittelbar einleuchtend ansah. Die Formel findet sich bei *C. Jordan,* Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 206; ohne jedoch zu wissen, dass das Integral gleichmässig konvergiert (Nr. **6**), kann man nicht viel mit ihr anfangen. — Die Integralformel lässt im Falle $n = 2$ eine Verallgemeinerung zu, indem man das Doppelintegral der Funktion $(2\pi i)^{-2} f(t_1, t_2)/(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)$ über eine geschlossene Fläche S erstreckt, die, ohne aus dem (R), in welchem der Integrand analytisch ist, auszutreten, stetig in die besondere bei der obigen Formulierung vorkommende Fläche umgeformt werden kann.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial y_k}, \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_k} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial y_k}$$

ergiebt sich, dass u ausser den n *Laplace*'schen noch anderen Differentialgleichungen genügen muss. Ist insbesondere $n = 2$, so sind es im Ganzen folgende vier Gleichungen[242]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0.$$

Diese Bedingungen, nebst geeigneten Stetigkeitsannahmen, sind auch ausreichend, damit u den reellen Teil einer in (T) analytischen Funktion $f(z_1, z_2)$ liefere. Es stellen sich hiernach einer ähnlichen Behandlung der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, wie sie vorhin bei den Funktionen einer Veränderlichen auf Grund der *Laplace*'schen Gleichung mit Erfolg durchgeführt ist, erhebliche Schwierigkeiten entgegen, indem bereits im Falle $n = 2$ *vier* partiellen Differentialgleichungen genügt werden muss. Der reelle (bezw. der imaginäre) Teil u genügt offenbar der *Laplace*'schen Gleichung in $2n$ Variabeln: $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} \right) = 0$, sodass u eine harmonische Funktion in $2n$ Veränderlichen ist. Genügt u noch den weiteren Bedingungen des Textes, so nennt es *Poincaré* eine *biharmonische* Funktion. Davon ausgehend hat *Poincaré* die Methoden der Potentialtheorie auf Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen ausgedehnt[242a].

Eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, die in allen endlichen Punkten analytisch ist und dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grösse bleibt, ist eine Konstante. Eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ kann keine isolierte singuläre Stelle haben, in deren Umgebung sie eindeutig ist, falls $n > 1$ und von einer hebbaren Unstetigkeit abgesehen wird[243]. In einem Teil der Umgebung des Punktes (a) möge f eindeutig und analytisch sein, nicht aber im Punkte (a) selbst. Existieren zwei im Punkte (a) analytische Funktionen $P(z_1, \ldots, z_n) \not\equiv 0$, $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$; $Q(z_1, \ldots, z_n)$, welche so beschaffen sind, dass in allen Punkten der Umgebung von (a), in denen $P(z_1, \ldots, z_n)$ nicht verschwindet, die Relation

242) *Poincaré,* Par. C. R. 96 (1883), p. 238; Acta math. 2 (1883), p. 99; *Picard,* Traité 2, p. 236.

242a) *Poincaré,* Acta math. 2 (1883), p. 97; ibid. 22 (1898), p. 89; im Anschlusse daran *H. Baker*, Cambr. Trans. 18 (1900), p. 403.

243) Der Satz lässt sich mittelst der *Cauchy*'schen Integralformel direkt beweisen.

$$P(z_1, \ldots, z_n)\, f(z_1, \ldots, z_n) = Q(z_1, \ldots, z_n)$$

besteht, so heisst der Punkt (a) eine *ausserwesentliche singuläre Stelle* der Funktion. Solche Stellen zerfallen in zwei Klassen: a) lassen sich P, Q so annehmen, dass $Q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ ist, so wird f unendlich, wie auch immer (z) gegen (a) konvergiert; b) im anderen Falle nimmt f jeden vorgegebenen Wert in jeder Nähe von (a) an; vgl. ferner Nr. **45**. Genügt f dagegen keiner solchen Relation und wird f in der Umgebung von (a) nicht mehrdeutig, so heisst (a) eine *wesentliche singuläre Stelle* von f. [244])

43. Gleichmässige Konvergenz; die Cauchy-Taylor'sche Reihe. Die Sätze von Nr. **6** lassen sich ohne weiteres auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausdehnen[245]). Dabei treten an Stelle von z, α die Wertsysteme $(z_1, \ldots, z_n) = (z)$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (\alpha)$. Der *Cauchy-Taylor*'sche Lehrsatz lautet wie folgt: Ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ in (T) analytisch und ist (a) ein beliebiger Punkt von (T), so lässt sich f durch die Reihe darstellen:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1=0, \ldots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \ldots (z_n - a_n)^{k_n},$$

$$a_{k_1, \ldots, k_n} = \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right)_{(z)=(a)},$$

wo (z) einen innern Punkt eines (T') bedeutet, dessen Begrenzung C aus den Kreisen $|z_i - a_i| = r_i$ besteht. Die Grössen $r_1, \ldots, r_n$ haben obere Grenzen $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, die im allgemeinen von einander abhängen, wie das Beispiel

$$f = (1 - z_1 - \cdots - z_n)^{-1}, \qquad (a) = (0), \qquad \varrho_1 + \cdots + \varrho_n = 1$$

zeigt. — Ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Punkte (a) analytisch und verschwindet sie in allen Punkten der Umgebung von (a) bezw. für alle Punkte einer geeigneten abzählbaren Punktmenge [246]), so verschwinden alle Koeffizienten $a_{k_1, \ldots, k_n}$ und f verschwindet identisch.

244) *Weierstrass,* J. f. Math. 89 (1880), p. 1 = Werke 2, p. 128. Eine Reihe von Sätzen über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen, nebst Beweisen, sind von *Dautheville* zusammengestellt worden; Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), suppl. — Hat jede der $m > n$ Funktionen $f_i = Q_i/P_i$, $i = 1, \ldots, m$, in (a) eine ausserwesentliche singuläre Stelle, so werden die m Grenzwerte, denen sich die m Grössen f_i nähern, wenn (z) gegen (a) konvergiert, einen gewissen geometrischen Ort bilden. Dieser Ort ist von *L. Autonne* untersucht worden, Acta math. 21 (1897), p. 249.

245) *Weierstrass* bewies seinen Reihensatz von vornherein für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

246) Dazu kann beispielsweise die Menge dienen: $(z_1^{(i_1)}, \ldots, z_n^{(i_n)})$, wo

44. Implicite Funktionen. Hauptsatz: Es möge jede der Funktionen $F_i(w_1, \ldots, w_p, z_1, \ldots, z_n)$, $i = 1, \ldots, p$, im Punkte $(b_1, \ldots, b_p, a_1, \ldots, a_n)$ analytisch sein und dort verschwinden:

$$F_i(b_1, \ldots, b_p, a_1, \ldots a_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, p;$$

während die *Jacobi*'sche Determinante (I B 1 b, **19—21**)

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial w_1}, \cdots, \frac{\partial F_p}{\partial w_p}$$

in diesem Punkte von Null verschieden ist. Im Falle $p = 1$ versteht man unter J die Funktion $\partial F_1 / \partial w_1$. Dann existieren stets p und nur p Funktionen:

$$w_j = f_j(z_1, \ldots z_n), \qquad j = 1, \ldots p,$$

die alle im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytisch sind, in diesem Punkte resp. die Werte $b_1, \ldots, b_p$ annehmen, und, indem man in jeder der Funktionen $F_i(w_1, \ldots, w_p, z_1, \ldots, z_n)$ das Argument w_j durch die Funktion $f_j(z_1, \ldots, z_n)$ ersetzt, diese Funktionen identisch zum Verschwinden bringen:

$$F_i(w_1, \ldots, w_p, z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Durch die p Funktionen $w_j = f_j(z_1, \ldots, z_n)$ werden auch alle Werte $(w_1, \ldots, w_p, z_1, \ldots, z_p)$ der $p + n$ Argumente erschöpft, welche in der Nähe des Punktes $(b_1, \ldots, b_p, a_1, \ldots, a_n)$ liegen und die p Funktionen $F_i(w_1, \ldots, w_p, z_1, \ldots, z_n)$ zum Verschwinden bringen. M. a. W.: Bei den obigen Voraussetzungen definieren diese p Gleichungen auf eindeutige Weise p Funktionen $w_j = f_j(z_1, \ldots, z_n)$, die in der Umgebung des Punktes $(a_1, \ldots, a_n)$ analytisch sind und in diesem Punkte resp. die Werte $b_1, \ldots, b_p$ annehmen[247]).

$i_1, \ldots, i_n$ unabhängig von einander die Werte $0, 1, 2, \ldots$ durchlaufen und die Menge $z_k^{(i_k)}$, $i_k = 0, 1, 2, \ldots$, bei festem k die Häufungsstelle a_k hat; vgl. *Stolz*, Allgemeine Arithmetik 1, p. 294.

247) *Cauchy* verallgemeinerte eine auf dem Residuenkalkul basierende Methode, die er für die *Lagrange*'sche Reihe (Monographieen, *Cauchy*, (5), (6)) ersonnen hatte, und erhielt so einen Beweis des Satzes für den Fall $p = 1$; Turiner Abh., Monographieen (7) = Exerc. d'anal. 2, p. 65. *C. Neumann* bediente sich derselben Methode, Leipz. Ber. 35 (1883), p. 85 = Abel'sche Integrale, 2. Aufl., 6. Kap. Einen zweiten auf dem Existenzsatz für die Lösung einer Differentialgleichung beruhenden Beweis geben *Briot* et *Bouquet*, 2. Aufl. 1873, p. 336; der Beweis ist nur für den Fall $n = 1$ durchgeführt (vgl. unten). Ein dritter Beweis stützt sich auf die *Dini*'schen Existenzsätze für die Lösungen reeller Gleichungen [30]); vgl. *C. Jordan*, Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 191. *Weierstrass* hat wieder andere Beweise gegeben; für den Fall $p = 1$ vgl. Nr. **45**; im allgemeinen Fall hat sich *Weierstrass* der Methode der successiven Annäherungen bedient. Diesen Beweis führte er zunächst für den Fall, dass $p = 1$ und F

Verschwindet dagegen J identisch, so lassen sich die p Gleichungen $F_i = 0$ bei willkürlicher Annahme eines Punktes $(z_1, \ldots, z_n)$ der Umgebung von $(a_1, \ldots, a_n)$ im allgemeinen durch keine Werte $(w_1, \ldots, w_p)$ der Umgebung von $(b_1, \ldots, b_p)$ befriedigen. Wenn gewisse weitere Bedingungen erfüllt sind, giebt es eine Lösung, die aber niemals eindeutig bestimmt ist.

Zusatz: Es sei insbesondere

$$z_i = \varphi_i(w_1, \ldots, w_p), \qquad i = 1, \ldots, p,$$

wo φ_i eine im Punkte $(b_1, \ldots, b_p)$ analytische Funktion von $(w_1, \ldots, w_p)$ bedeutet. Ist die *Jacobi*'sche Determinante

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_p}{\partial w_p}$$

im Punkte (b) von Null verschieden, so lassen sich diese Gleichungen eindeutig umkehren:

$$w_j = f_j(z_1, \ldots, z_p), \qquad j = 1, \ldots, p,$$

wo f_j im Punkte $(a_1, \ldots, a_p)$ analytisch ist und dort den Wert b_j annimmt. Verschwindet J dagegen identisch, so besteht zwischen den p Funktionen φ_i eine oder mehrere identische Beziehungen von der Form: $\Psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = 0$, wo $\Psi(z_1, \ldots, z_p)$ eine im Punkte $(a_1, \ldots, a_p)$ analytische, dort verschwindende Funktion der p unabhängigen Argumente $(z_1, \ldots, z_p)$ bedeutet[248]. — Des weiteren vgl. Nr. **46**.

Verschwindet J im Punkte (b), ohne jedoch identisch zu verschwinden, während die übrigen Voraussetzungen des Zusatzes bestehen bleiben, so kann die Auflösung des Gleichungssystems nach $w_1, \ldots, w_p$, wie Beispiele zeigen, auf mehrdeutige Funktionen führen, die im Punkte $(z) = (a)$ nicht analytisch sind. Dies dürfte wohl stets der Fall sein.

Der Hauptsatz ergiebt sich aus dem Existenzsatz für die Lösung eines Systems totaler Differentialgleichungen (II A 4a, **12**) und wurde auch für den Fall $n = 1$ auf diese Weise begründet, *Briot* et *Bouquet*[247]. Ist $n > 1$, so wird man $z_2, \ldots, z_n$ zunächst als Parameter auffassen. Der Existenzbeweis für die Lösung des betr. Systems

---

ein Polynom ist, in einer Arbeit durch, die er in der Berliner Ak. d. Wiss. am 12. Dez. 1859 vorlegte; Werke 1, p. 247; allgemein bei *Biermann*, Anal. Funktionen, § 42. *Picard* beweist den allgemeinen Satz mittelst des *Weierstrass*schen Satzes von Nr. **45**; Traité 2, p. 247. Es sei noch auf *Méray,* Leçons nouvelles, 1, ch. XI und *E. Lindelöf,* Darb. Bull. (2) 23 (1899), p. 68 verwiesen.

248) Vgl. *Peano*[30]) = *C. Jordan*, Cours d'anal. 1, 2. Aufl., § 94, wo die entsprechenden Sätze für reelle Funktionen entwickelt wurden.

von Differentialgleichungen, den man nun wohl am bequemsten nach *Picard* führt, berechtigt noch immer zu denselben Schlüssen, da es sich um gleichmässig konvergente Reihen handelt, deren Glieder analytische Funktionen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind.

Für reelle Funktionen reeller Veränderlicher besteht ein dem Hauptsatz analoger Existenzsatz, wobei an Stelle der *analytischen* Funktionen F_i jetzt *stetige, mit stetigen Ableitungen ausgestattete* Funktionen treten (II A 2, 9). Diesen Satz kann man ebenfalls mit Hülfe des *Picard*'schen Verfahrens auf den entsprechenden Existenzsatz für die Differentialgleichungen begründen. *Dini*[30]) hat zuerst einen direkten Beweis für denselben gegeben. Auf Grund dieses Satzes beweist man am einfachsten nach *Jordan* oder *Picard*[247]) den Hauptsatz dieses Paragraphen.

Über *Cauchy*'s erste Arbeiten betr. implicite Funktionen berichten *Brill* und *Noether*[249]). Vgl. auch Nr. **14, 42, 43.**

45. Der Weierstrass'sche Satz und die Teilbarkeit im Kleinen. Es möge $F(w, z_1, \ldots, z_n)$ eine im Punkte $(b, a_1, \ldots, a_n)$ analytische Funktion sein, die dort verschwindet, ohne dass $F(w, a_1, \ldots, a_n)$, als Funktion von w betrachtet, identisch Null ist; sei m die Ordnung des Nullpunktes $w = b$. Dann lässt sich F in der Form darstellen:

$$F(w, z_1, \ldots, z_n) = f(w, z_1, \ldots, z_n)\,\Phi(w, z_1, \ldots, z_n),$$

$$f(w, z_1, \ldots, z_n) = w^m + \sum_{i=1}^{m} A_i(z_1, \ldots, z_n)\, w^{m-i},$$

wo A_i eine im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytische Funktion von $(z_1, \ldots, z_n)$ und Φ eine im Punkte $(b, a_1, \ldots, a_n)$ analytische, dort nicht verschwindende Funktion von $(w, z_1, \ldots, z_n)$ bedeutet. Ferner ist $f(w, a_1, \ldots, a_n) = (w - b)^m$.

Im Falle dass $F(w, a_1, \ldots, a_n)$ identisch verschwindet, lassen sich die Argumente $(w, z_1, \ldots, z_n)$ mittelst einer linearen Transformation durch andere $(w', z_1', \ldots, z_n')$ ersetzen derart, dass für F, als Funktion von $(w', z_1', \ldots, z_n')$ betrachtet, der Satz besteht[250]).

Auf Grund des *Weierstrass*'schen Satzes lässt der Algorithmus des grössten gemeinsamen Teilers eine Ausdehnung auf analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu, die in einem Punkte verschwinden[251]). Es mögen $F, \Phi \not\equiv$ zwei Funktionen von $(z_1, \ldots, z_n)$ sein,

249) Bericht, p. 183.

250) *Weierstrass*, Vorlesungen an der Berliner Universität von 1860 an; Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 105, § 1 = Werke 2, p. 135. Ein einfacher Beweis rührt von *Simart* her, *Picard,* Traité 2, p. 241.

251) *Weierstrass*[250]), § 2; *Dautheville*[244]).

die im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytisch sind. F heisst im Punkte (a) durch Φ *teilbar*, wenn F und Φ der Relation genügen: $F = Q\Phi$, wo Q ebenfalls in (a) analytisch ist. Ist in (a) sowohl F durch Φ als auch Φ durch F teilbar, so mögen F und Φ im Punkte (a) *äquivalent* heissen. Verschwindet F in (a), so heisst F in (a) *reducibel*, wenn $F = F_1 F_2$ ist, wo F_1, F_2 in (a) analytisch sind und beide dort verschwinden. Es besteht der Satz: Eine Funktion F, die im Punkte (a) analytisch ist und dort verschwindet, lässt sich stets auf eine und nur auf eine Weise in das Produkt einer endlichen Anzahl irreducibler Faktoren zerlegen, wofern zwei solche Faktoren als identisch angesehen werden, wenn sie äquivalent sind. Sind F und Φ zwei Funktionen, die in (a) analytisch sind und dort verschwinden, und haben F und Φ in (a) keinen gemeinsamen Faktor, so werden sie auch in keiner Stelle der Umgebung von (a), in welcher sie beide verschwinden, einen gemeinsamen Faktor haben. Solche Stellen bilden eine $2n - 4$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Haben sie dagegen in (a) einen gemeinsamen Faktor G, so werden sie auch in allen Stellen der Umgebung von (a), in denen G verschwindet, sonst aber nirgends, einen gemeinsamen Faktor, nämlich G, haben.

Zu den in Nr. **42** angeführten Sätzen kann man noch den folgenden Satz hinzufügen: Ist (a) eine ausserwesentliche singuläre Stelle 1^{ter} resp. 2^{ter} Art der Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, so bilden die Stellen der Umgebung von (a), in denen $F = \infty$ resp. F völlig unbestimmt wird, eine $2n - 2$fach resp. (falls $n > 2$) eine $2n - 4$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

In der Algebra spielt der folgende Satz eine wichtige Rolle[252]): Verschwindet das Polynom $F(z_1, \ldots, z_n)$ für alle Punkte (z) der Umgebung eines Punktes (a) bezw. für alle Punkte einer geeigneten endlichen Menge (vgl.[246]), für welche ein zweites irreducibles Polynom $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ verschwindet, so ist F durch Φ teilbar. Setzt man dabei die Irreducibilität von Φ nicht voraus, so folgt, dass F und Φ einen gemeinsamen Faktor haben. Dieser Satz lässt sich auch auf die Teilbarkeit zweier analytischer Funktionen im Kleinen übertragen.

46. Die Parameterdarstellung im Kleinen; implicite Funktionen. Verschwindet die im Punkte (a) analytische Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ in diesem Punkte, während von den Ableitungen $\partial F/\partial z_1, \ldots, \partial F/\partial z_n$ mindestens eine dort von Null verschieden ist, so lassen sich die Koordinaten aller derjenigen Punkte (z) der Umgebung von (a), in

252) *O. Hölder* hat wohl den ersten Beweis des Satzes veröffentlicht: Math.-naturwiss. Mitteil. 1 (1884).

welchen F verschwindet, mittelst $n-1$ Parametern $u_1, \ldots, u_{n-1}$ darstellen, indem man

$$z_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

setzt, wo φ_i eine geeignete, im Punkte $(0, \ldots, 0)$ analytische Funktion von $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ bedeutet. Zwischen den in Betracht kommenden Punkten (z) und den Punkten (u) der Umgebung des Punktes $(u) = (0)$ besteht eine ein-eindeutige Beziehung[253]). Die Frage, ob der Satz auch dann noch gilt, wenn alle die ersten Ableitungen in (a) verschwinden, wobei jedoch dann an Stelle des einen Gleichungssystems $z_i = \varphi_i$ mehrere solche Gleichungssysteme treten können, ist wahrscheinlich zu bejahen[253a]); für den Fall $n = 3$ ist er richtig[254]).

Auf Grund dieses Satzes lassen sich die Koordinaten aller Punkte $(z_1, \ldots, z_n)$ der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$, wofür die p Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p < n,$$

wo F_i eine in (a) analytische, dort verschwindende Funktion von (z) bedeutet, mittelst $m \geqq n - p$ Parameter $u_1, \ldots, u_m$ darstellen, und zwar durch eine endliche Anzahl von Gleichungssystemen je von der Form

$$z_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_m), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wo φ_i eine im Punkte $(0, \ldots, 0)$ analytische Funktion von $(u_1, \ldots, u_m)$ bedeutet. Zwischen den in Betracht kommenden Punkten (z) und den Punkten (u) der Umgebung des Punktes $(u) = (0)$ besteht eine im allgemeinen ein-eindeutige Beziehung. — Sind insbesondere die Funktionen $F_i(z_1, \ldots, z_n)$ alle Polynome, so lässt sich das ganze durch die Gleichungen $F_i(z_1, \ldots, z_n) = 0$ definierte algebraische Gebilde durch eine *endliche* Anzahl solcher Formeln darstellen. Vgl. Nr. **11**, Ende.

47. Das analytische Gebilde. Der Begriff der analytischen Fortsetzung einer zunächst in einem Bereich (T) definierten ana-

253) Der Beweis ergiebt sich sowohl aus dem Satze von Nr. **44** als auch aus dem *Weierstrass*'schen Satze Nr. **45**. Es genügt, $u_j = z_j$ zu setzen.

253a) Dem Punkte $(z) = (a)$ werden aber im allgemeinen unendlich viele Punkte (u) entsprechen.

254) Mit dem Beweise dieses Satzes (oder, genauer gesagt, mit dem speziellen Fall desselben, wo F ein Polynom ist) hat sich *G. Kobb*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 385 beschäftigt. Seine Untersuchung weist jedoch wesentliche Lücken auf; vgl. *B. Levi*, Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 219. Ein strenger Beweis für den Fall $n = 3$ ist von *C. Black* durchgeführt worden; Harvard Thesis 1901 = Am. Ac. of Arts and Sci. Proc. 37 (1901).

lytischen Funktion mehrerer Veränderlichen $f(z_1, \ldots, z_n)$ über diesen Bereich hinaus lässt sich in analoger Weise festlegen, wie früher im Falle $n = 1$, Nr. **13**, indem man in der Ebene der Grösse z_k einen zweiten Bereich $\overline{T}_k$ in Betracht zieht, welcher am Bereich T_k längs einer regulären Kurve C_k angrenzt und den Bereich T_k also zu einem neuen Bereich $\mathfrak{T}_k$ ergänzt. Eine solche Ausdehnung des Bereiches T_k kann in jeder Ebene: $k = 1, 2, \ldots, n$, oder auch nur in einigen dieser Ebenen geschehen. Der erweiterte Bereich sei mit $(\mathfrak{T})$ bezeichnet. Kann man den Punkten von $(\mathfrak{T})$ solche Werte zuordnen, dass eine in $(\mathfrak{T})$ analytische Funktion entsteht, die in (T) mit der ursprünglichen Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ zusammenfällt, so sagt man, dass $f(z_1, \ldots, z_n)$ über (T) hinaus analytisch fortgesetzt werden kann. Der Definitionsbereich der Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ besteht nun aus dem Ausgangsbereich (T) nebst allen Erweiterungen, welche analytischen Fortsetzungen der Funktion entsprechen und ist, falls die Funktion vieldeutig ist, als mehrfacher *Riemann*'scher Raum[255]) aufzufassen. Die Gesamtheit der zugehörigen Funktionswerte bildet die analytische Funktion[256]).

Um bei den analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen eine analytische Fortsetzung zu konstatieren, bedient sich *Weierstrass* der Methode der Potenzreihen. Es sei $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytische Funktion. Vom Punkte (a) aus wird eine reguläre Kurve $\mathfrak{L}$ beschrieben:

$$z_1 = \varphi_1(t), \qquad z_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots z_n = \varphi_n(t),$$

wo der reelle Parameter t das Intervall: $t_0 \leqq t \leqq t_1$ durchläuft und $a_i = \varphi_i(t_0)$, $b_i = \varphi_i(t_1)$ ist. Längs der Kurve $\mathfrak{L}$ wird $f(z_1, \ldots, z_n)$ in analoger Weise analytisch fortgesetzt, wie im Falle $n = 1$ (Nr. **13**). Kann $f(z_1, \ldots, z_n)$ sowohl längs $\mathfrak{L}$ als auch längs einer zweiten solchen die Punkte (a) und (b) verbindenden Kurve $\mathfrak{L}'$ in (b) hinein analytisch festgesetzt werden (vgl. Nr. **13**), so erhält f beide Mal in (b) denselben Wert, wofern $\mathfrak{L}'$ stetig in $\mathfrak{L}$ verwandelt werden kann,

255) Durch die mathematische Physik wird der Begriff eines mehrfachen Raumes nahe gelegt. Vgl. die Citate bei *Brill* und *Noether*, Bericht, p. 254, 255, auf *Kirchhoff* (1847) und *Helmholtz*. Die analytische Fortsetzung einer Potentialfunktion im R_3 ist von *Stahl* behandelt; J. f. Math. 79 (1875), p. 265. Ein einfaches Beispiel einer mehrwertigen Potentialfunktion im R_3 hat *Appell* gegeben; Math. Ann. 30 (1887), p. 155. Derartige Funktionen sind von *Sommerfeld* untersucht; Lond. Math. Proc. 28 (1897), p 397. Daran schliesst sich eine Arbeit von *Carslaw*, ebenda, Bd. 30 (1899), p. 121.

256) Nach *Weierstrass* eine *monogene analytische Funktion.* Wegen des analytischen Gebildes vgl. unten.

ohne dass für die Zwischenlagen dieser Kurve die analytische Fortsetzung der Funktion f von (a) bis (b) unmöglich wird.

Wenn insbesondere die Funktionen $\varphi_i(t)$ alle *analytisch* sind, kann die analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{L}$ auch dadurch geschehen, dass man $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, als Funktion von t betrachtet, längs der reellen Achse von t_0 bis t_1 analytisch fortsetzt. Es wäre aber ein Fehler zu glauben, dass alle Punkte (b), bis in welche man $f(z_1, \ldots, z_n)$ *auf diese Weise* analytisch fortsetzen kann, zum Definitionsbereich von f gehören. Als Beleg dafür diene folgendes Beispiel. Es sei die Funktion $\psi(z)$ im Einheitskreise analytisch und von 0 verschieden und lasse keine analytische Fortsetzung über diesen Kreis hinaus zu. Bildet man die Funktion

$$f(z_1, z_2) = z_1 \frac{\psi(z_1)}{\psi(z_2)},$$

so ist dieselbe nur in demjenigen Bereich (T) definiert, wo $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ ist. Die Kurve $z_1 = t$, $z_2 = t$, $(0 \leqq t)$ führt über diesen Bereich hinaus, wenn t genügend wächst. Längs dieser Kurve hat f den Wert t und lässt sich somit unbegrenzt analytisch fortsetzen. Diesen Sachverhalt kann man geometrisch so erklären, dass man die Gleichung

$$w = z_1 \frac{\psi(z_1)}{\psi(z_2)}$$

als Fläche deutet und dann bemerkt, dass die Kurve $z_1 = t$, $z_2 = t$, $w = t$ eine Zeit lang auf der Fläche verläuft, später aber eine natürliche Grenze der Fläche überschreitet und von da ab von der Fläche getrennt verläuft. Allgemein kann man also sagen: Die analytische Fläche

$$w = f(z_1, \ldots, z_n)$$

deckt sich nicht mit der Gesamtheit der analytischen Kurven:

$$z_i = \varphi_i(t), \qquad w = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

die zum Teil auf der Fläche liegen.

Eine analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ hängt von einer abzählbaren Menge von Bestimmungsstücken ab. In der That wird $f(z_1, \ldots, z_n)$ zunächst in der Umgebung eines Punktes $(a_1, \ldots, a_n)$ durch die abzählbare Menge von Koeffizienten der *Taylor*'schen Reihenentwicklung festgelegt, und nun genügt es, um alle möglichen analytischen Fortsetzungen zu beherrschen, bloss eine abzählbare Menge davon in Betracht zu ziehen. Es sei der Einfachheit halber $n = 2$ gesetzt und man bezeichne die zusammengehörigen Konvergenzradien der Potenzreihe:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{i=0, k=0}^{\infty, \infty} A_{ik} (z_1 - a_1)^i (z_2 - a_2)^k$$

mit r_1, r_2. Ferner sei R_1 die obere Grenze von r_1, wenn r_2 gegen Null konvergiert. Jedem rationalen Werte von r_1 ($< R_1$) sei der grösstmögliche Wert von r_2 zugeordnet. Die rationalen Punkte des Bereiches $|z_1 - a_1| < r_1$, $|z_2 - a_2| < r_2$ bilden eine abzählbare Menge und die Gesamtheit dieser den verschiedenen rationalen Werten von r_1 entsprechenden Mengen liefert eine abzählbare Menge von Punkten (α_j, β_j), die wie folgt beschaffen sind: Ist $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ein beliebiger innerer Punkt des Konvergenzbereiches der obigen Potenzreihe, so giebt es einen Punkt (α_j, β_j) derart, dass die aus jener Potenzreihe unmittelbar (d. h. durch algebraische Umformung der Reihe) abgeleitete Potenzreihe $\sum A'_{ik} (z_1 - \alpha_j)^i (z_2 - \beta_j)^k$ den Punkt $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ im Innern ihres Konvergenzbezirks birgt. Die Menge (α_j, β_j) bildet demnach die naturgemässe Verallgemeinerung der Menge der im Konvergenzkreise der ersten *Taylor*'schen Reihe gelegenen rationalen Punkte im Falle $n = 1$ (Nr. **13**). Eine ähnliche weitere Überlegung wie in jenem Fall führt dann zu einem analogen Resultat, was der Inhalt der vorhin ausgesprochenen Behauptung ist.

Es mögen jetzt r analytische Funktionen

$$z_{n+i} = f_i(z_1, \ldots, z_n), \qquad i = 1, \ldots, r,$$

vorgelegt sein, die auch durch implicite Gleichungen:

$$F_i(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+r}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

definiert werden können und welche sich alle im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ analytisch verhalten. Diese Funktionen werden gleichzeitig analytisch fortgesetzt. Ein Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, der sich auch nur für eine einzige derselben als singulär erweist, gilt als ein singulärer Punkt des Systems, vgl. Nr. **13**, Ende. Man wird also wie im Falle $r = 1$ zu einem Definitionsbereich des Systems geführt. Die zugehörigen Funktionenwerte bilden ein *analytisches Funktionensystem* [257]). Die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte $(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+r})$ bildet unter Hinzunahme gewisser sogleich zu besprechenden Grenzpunkte *das analytische Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiet von $n + r$ Veränderlichen* (*Weierstrass*). Die Stelle $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+r})$ heisst eine *Grenzstelle* des analytischen Gebildes, falls die r Funktionen $f_i(z_1 \ldots, z_n)$ sich bezw. den Werten a_{n+i} nähern, wenn der Punkt $(z_1, \ldots, z_n)$ dem

257) Nach *Weierstrass* ein *monogenes* System. Das *monogene analytische Gebilde* wird hier in ähnlicher Weise definiert, wie in Nr. **13** für den Fall $n = r = 1$.

Grenzpunkte $(a_1, \ldots, a_n)$ des Definitionsbereiches zustrebt. Sie wird dann und nur dann zum analytischen Gebilde gerechnet, wenn sie als die naturgemässe Verallgemeinerung einer der Singularitäten angesehen werden kann, die die *algebraischen* Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiet von $n + r$ Veränderlichen aufweisen, d. h. wenn die in Betracht kommenden Bestimmungen der r Funktionen $z_{n+i} = f_i(z_1, \ldots, z_n)$ in der Umgebung des Punktes $(z_1, \ldots, z_n)$ einem bezw. mehreren Gleichungssystemen von der Form genügen:

$$\Phi_i(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+r}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

wo die Funktionen Φ_i in der Umgebung des Punktes $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+r})$ alle analytisch sind und dort verschwinden. Dabei spielt der unendlich ferne Bereich keine besondere Rolle, die Koordinaten $a_1, \ldots, a_{n+r}$ dürfen zum Teil oder alle unendlich sein.

Das so definierte analytische Gebilde ist im allgemeinen unabhängig von der besonderen Wahl der unabhängigen Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n)$. Greift man nämlich irgend n andere aus den $n + r$ Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{n+r}$ heraus: $z_1', \ldots, z_n'$ und bildet man die Funktionaldeterminante

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1''} \cdots \frac{\partial \Omega_r}{\partial z_r''},$$

wo

$$\Omega_i = z_{n+i} - f_i(z_1, \ldots, z_n)$$

gesetzt ist und die übrigen Veränderlichen durch $z_1'', \ldots, z_r''$ bezeichnet sind, so wird J im allgemeinen nicht identisch verschwinden; alsdann lassen sich die r Gleichungen $\Omega_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$, in der Umgebung eines nicht spezialisierten Punktes $(a_1', \ldots, a_n', a_1'', \ldots, a_r'')$ nach $z_1'', \ldots, z_r''$ auflösen und das aus diesen neuen Funktionen:

$$z_{n+i}'' = \bar{f}_i(z_1', \ldots, z_n'), \qquad i = 1, \ldots, r,$$

entspringende analytische Gebilde fällt mit dem ursprünglichen zusammen (*Weierstrass*). Der Übergang von den $z_1, \ldots, z_n$ zu den $z_1', \ldots, z_n'$ ist dagegen unmöglich, wenn J identisch verschwindet.

Das Prinzip der Funktionalgleichungen gilt in derselben Formulierung wie in Nr. **16** auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

48. Einige Sätze über das Verhalten im Grossen. Hat eine analytische Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ keine anderen als nur ausserwesentliche singuläre Stellen, so lässt sich dieselbe als eine rationale Funktion darstellen[258]); hat sie bloss im Endlichen keine anderen

---

258) Dieser Satz ist zuerst von *Weierstrass*[244]) ausgesprochen und von *A. Hurwitz,* J. f. Math. 95 (1883), p. 201 mittelst Potenzreihen bewiesen worden.

als ausserwesentliche singuläre Stellen, so lässt sie sich als der Quotient zweier ganzer (rationaler oder transcendenter) Funktionen darstellen, die im Endlichen höchstens in singulären Punkten der Funktion gleichzeitig verschwinden[259]).

Da eine analytische Funktion von $n > 1$ Argumenten keine isolierte singuläre Stelle haben kann (Nr. **42**), so ist eine unmittelbare Ausdehnung des Satzes von Nr. **34** auf solche Funktionen nicht möglich. Es besteht jedoch nach *Weierstrass*[260]) der engere Satz: Einem beliebigen Bereich (T) des Punktes $(z_1, \ldots, z_n)$ entsprechen eindeutige Funktionen, die in (T) keine anderen als nur ausserwesentliche singuläre Stellen haben und in jedem Begrenzungspunkte von (T) einen wesentlichen singulären Punkt aufweisen.

49. Homogene Variable. Die homogenen Variabeln, welche in der Formentheorie eine Hauptstellung einnehmen, sind in die Funktionentheorie von *Aronhold* eingeführt und von *Clebsch*, *Klein* und anderen vielfach verwendet worden[261]). Sie bezwecken einmal die Beseitigung der Sonderstellung, welche dem unendlich fernen Bereich sonst zufällt; dann aber wird darüber hinaus eine Symmetrie der Formeln erzielt, in welcher die Äquivalenz im Grunde gleichberechtigter Dinge ihren analytischen Ausdruck findet. Unter einer *analytischen Form* versteht man eine homogene analytische Funktion von n Veränderlichen, d. h. eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, welche für alle Punkte der Umgebung eines Punktes $(a_1, \ldots, a_n)$ des Definitionsbereiches von f und für alle Punkte t der Umgebung des Punktes $t = 1$ der Gleichung genügt:

$$f(tz_1, \ldots, tz_n) = t^\lambda f(z_1, \ldots, z_n),$$

wo λ eine konstante Grösse, die sogenannte *Dimension* der Form, bedeutet und unter t^λ derjenige Zweig dieser Funktion verstanden ist,

---

259) Der Satz ist zuerst von *Poincaré* für den Fall $n = 2$ mit Hülfe der partiellen Differentialgleichungen, denen der reelle Teil der Funktion genügt (Nr. **42**), bewiesen worden[242]); *Poincaré* spricht daselbst noch folgenden Satz aus: Si Y est une fonction quelconque de X, non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie et qui ne puisse pas, pour une même valeur de X, prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres; elle pourra être considerée comme la solution d'une équation: $G(X, Y) = 0$, où G est une fonction entière. Einen Beweis für den allgemeinen Fall — und zwar zugleich unter Erweiterung der Voraussetzungen des Satzes — hat *P. Cousin* gegeben; Par. Thèse 1894 = Acta math. 19 (1895), p. 1.

260) *Weierstrass*[244]). Es ist mir kein Beweis dieses Satzes bekannt.

261) *Aronhold,* J. f. Math. 61 (1863), p. 95; *Clebsch* und *Gordan,* Abel'sche Funktionen, 1866; *Klein,* vgl. unten.

welcher für $t=1$ den Wert 1 annimmt[262]). Es sei insbesondere $n=2$.[263]) Setzt man $t=z_2^{-1}$, $z=z_1/z_2$, so ergiebt sich, dass

$$f(z_1, z_2) = z_2^\lambda f(z, 1) = (zu)^\lambda (u_2 z - u_1)^{-\lambda} f(z, 1),$$

wo $(zu) = u_2 z_1 - u_1 z_2$ und u_1, u_2 willkürliche Grössen bedeuten; es lässt sich somit die Form $f(z_1, z_2)$, welche als Funktion zweier unabhängiger Variabeln aufzufassen ist, auf die Änderung hin, welche sie erleidet, wenn der Punkt (z_1, z_2) in dem vierdimensionalen Raum dieser Veränderlichen einen beliebigen geschlossenen Weg beschreibt, dadurch untersuchen, dass man *einzeln* die Änderungen a) der Funktion $(u_2 z - u_1)^{-\lambda} f(z, 1)$ und b) der Funktion $(zu)^\lambda$ bestimmt, wenn z resp. $t = (zu)$ unabhängig von einander den entsprechenden Weg in seiner Ebene durchläuft[264]).

Das Integral

$$\int_{(a)}^{(b)} f(z_1, z_2)\,(z\,dz),$$

wo $f(z_1, z_2)$ eine analytische Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist, wird definiert, indem man im vierdimensionalen Raum der Variabeln (z_1, z_2) den Punkt (a_1, a_2) mit dem Punkt (b_1, b_2) durch einen Weg verbindet, der ganz im Definitionsbereich der Funktion $f(z_1, z_2)$ verläuft:

$$z_1 = \varphi_1(t) + i\psi_1(t), \quad z_2 = \varphi_2(t) + i\psi_2(t), \quad t_a \leqq t \leqq t_b;$$

262) Diese Definition stützt sich auf das Verhalten der Funktion im Kleinen; mittelst analytischer Fortsetzung bestimmt man dann im Grossen, welche Zweige $f(tz_1, \ldots, tz_n)$, $f(z_1, \ldots, z_n)$ zusammengehören. Ein bemerkenswerter Fall kommt in der Variationsrechnung vor. Es handelt sich um die reelle homogene Funktion 0^{ter} Dimension $F(x', y') = \dfrac{\alpha x' + \beta y'}{\sqrt{f_2(x', y')}}$, wo f_2 eine positive definite quadratische Form bedeutet, die Quadratwurzel positiv genommen wird und α, β reelle Konstante sind. $F(x', y')$ ist daher eine reelle eindeutige stetige Form 0^{ter} Dimension in den reellen homogenen Variabeln x', y'. Trotzdem ist $F(-x', -y')$ nicht $= F(x', y')$, sondern $= -F(x', y')$. Daraus ersieht man, dass die stetige Fortsetzung von $F(x', y')$ im Reellen und die analytische Fortsetzung von $t^\lambda F(x', y')$ im Komplexen zu verschiedenen Resultaten führen können.

263) Bei der Anwendung der *Abel*'schen Integrale auf Kurvengeometrie (II B 2) ist häufig $n > 2$ zu nehmen; doch sei auch in diesem Fall an die Untersuchungen von *Klein* erinnert, bei denen das algebraische Gebilde, wie im hyperelliptischen Fall, auf einem binären Gebiet behandelt wird; Math. Ann. 36 (1890), p. 1.

264) *Burkhardt*, Math. Ann. 32 (1888), p. 410; *Ritter* [156]), p. 17. Man trifft gewöhnlich noch die Übereinkunft, dass z_1, z_2 niemals unendlich werden und auch nicht gleichzeitig verschwinden. Endlich kann man $(zu) = 1$ setzen, indem man z den Wert u_1/u_2 nicht anzunehmen gestattet.

und das Integral längs dieses Weges erstreckt:

$$\int_{(a)}^{(b)} f(z_1, z_2)\,(z\,dz) = \int_{t_a}^{t_b} f(z_1, z_2)\,(z_2 z_1' - z_1 z_2')\,dt = \int_a^b f(z, 1)\,dz,$$

wo $z = z_1/z_2$, und $a = a_1/a_2$, $b = b_1/b_2$ ist. Zwei solchen Wegen, welche stetig in einander umgeformt werden können, entsprechen gleiche Werte des Integrals. — Von solchen Integralen ist beispielsweise bei der Behandlung der hypergeometrischen Funktionen mittelst des bestimmten resp. Schleifenintegrals ausgiebiger Gebrauch gemacht worden[265]). Die homogenen Variabeln finden fernerhin eine Anwendung in der Theorie der automorphen Funktionen (II B 6 c), sowie der linearen Differentialgleichungen (II B 4)[266]).

265) Vgl. *Schellenberg*[102]). *Klein,* Hypergeometrische Funktionen, Vorlesung vom W.-S. 1893/94 (lithographiert), Göttingen 1894.

266) *Ritter*[156]); ferner Math. Ann. 44 (1894), p. 261 u. 47 (1896), p. 157; *Klein,* Gött. Nachr. 1890, p. 85; Math. Ann. 38 (1891), p. 144; sowie *Pick,* ibid., p. 139.

(Abgeschlossen im August 1901.)

II B 2. ALGEBRAISCHE FUNKTIONEN UND IHRE INTEGRALE

VON

WILHELM WIRTINGER

IN INNSBRUCK.

Inhaltsübersicht.

A. Allgemeines.

B. Besondere Darstellungen und Funktionen.

Litteratur.

Lehrbücher.

C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig, 1. Aufl. 1865, 2. Aufl. 1884.

A. Clebsch und *P. Gordan,* Theorie der Abel'schen Funktionen, Leipzig 1866.

L. Koenigsberger, Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale, Leipzig 1878.

Ch. Briot, Fonctions abéliennes. Paris 1879.

F. Klein, Autographierte Vorlesungen über Riemann'sche Flächen 1, 2, Göttingen 1891/92.

P. Appell und *E. Goursat*, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris 1895.

H. Stahl, Theorie der Abel'schen Funktionen, Leipzig 1896.

H. F. Baker, Abel's Theorem and the allied Theory, Cambridge 1897.

E. Picard et *G. Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indép., Paris 1897.

K. Hensel u. *G. Landsberg*, Vorlesungen über algebraische Funktionen und ihre Integrale, Leipzig 1901.

Historische Darstellungen.

R. L. Ellis, Report of the British Association 1847, p. 34.

A. Brill und *M. Nöther*, Jahresber. der deutschen Mathem.-Vereinigung, 3, Berlin 1894.

H. Hancock, Report of the British Association 1898, p. 560.

Ausserdem enthalten mehr oder weniger hierhergehöriges die Lehrbücher über elliptische Funktionen von *Briot* und *Bouquet*, *Koenigsberger*, der Funktionentheorie von *Forsyth*, *Harkness* and *Morley*. Auszugsweise Darstellungen bei *Picard*, Traité d'anal., Paris 1893, p. 348 ff.; *Klein* und *Fricke*, Elliptische Modulfunktionen, Leipzig 1890, 1892, 1, p. 493—571; 2, 476—554.

Bei der engen Verbindung mit der Theorie der algebraischen Kurven und der *Abel*'schen Funktionen ist ausser II B 1 auch die Litteratur von II B 6 b und III C 2, 8 heranzuziehen. In Bezug auf die Beziehungen zur Kurventheorie bes. *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie 1, Leipzig 1876.

Für die *arithmetische* Behandlung der algebraischen Funktionen vergleiche man den folgenden Artikel II B 2 a.

A. Allgemeines.

1. Definition. Ist eine komplexe Veränderliche y Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen einer Veränderlichen x sind, und hat diese Gleichung $f(xy) = 0$ keinen in x und y ganzen rationalen Teiler, so heisst y eine algebraische Funktion von x. Das erste Auftreten solcher allgemeinen algebraischen Funktionen geht auf die Geometrie des *Cartesius* [1]) und auf *Newton* [2]) zurück. *Euler* [3]) gab ihre formelle Definition. *Abel* [4]) zog sie zum erstenmal in den Bereich eines Satzes und wird darum mit Recht als der Begründer ihrer Theorie bezeichnet. Für die Geschichte der algebraischen Funktionen und ihren Zusammenhang mit

---

1) *René Descartes*, Geometrie 1637, deutsch von *Schlesinger* 1894, 2. Buch am Anfang.

2) *I. Newton*, Methodus fluxionum (Opusc. coll. Castillioneus, Lausanne & Genf 1744).

3) *L. Euler*, Introductio in Analysin infin. 1754, 1. Buch, 1. Kap. § 7.

4) Näheres über *Abel* s. unten Nr. 41.

der Entwicklung der Funktionentheorie und der Theorie der algebraischen Kurven sehe man den Bericht von *Brill* und *Nöther* im Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinig. 3 (1892—93), erschienen 1894[5]).

2. Die algebraische Funktion in der Umgebung einer einzelnen Stelle. Ist $f(xy)$ vom Grade n in y, so gehören zu jedem Werte von x auch n Werte von y. Diese heissen Zweige[6]) der Funktion. Durchläuft x einen geschlossenen Weg, so geht entweder jeder einzelne Zweig in sich über, oder aber es verteilen sich die einzelnen Zweige in Teilsysteme, Cyklen[7]) genannt, deren einzelne Elemente sich beim Umlauf cyklisch unter einander vertauschen. Ein solcher Cyklus kann auch nur ein Element enthalten. Die Zweige eines aus mehreren Elementen bestehenden Teilsystems nehmen an bestimmten Stellen gleiche Werte an und hängen so miteinander zusammen. Diese Stellen heissen daher Verzweigungsstellen[8]) jener dem Cyclus angehörigen Zweige, die x-Werte selbst Verzweigungswerte. Sie sind nur in endlicher Anzahl vorhanden, da in ihnen die Diskriminante von $f(xy)$ nach y verschwinden muss. Die Umgebung des unendlich fernen Punktes ist besonders durch Einführung von x^{-1} statt x zu untersuchen. Unendlich können einer oder mehrere Zweige nur dann werden, wenn entweder x selbst unendlich wird, oder der Koeffizient der höchsten Potenz von y verschwindet. Die Zahl der Unendlichkeitsstellen ist also ebenfalls endlich. Ist a keine Verzweigungsstelle eines bestimmten Zweiges, so ist dieser in der Umgebung von a nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelbar, und zwar treten negative Potenzen nur in endlicher Zahl und nur an einer endlichen Zahl von Stellen auf. Gehen in der Umgebung einer Verzweigungsstelle k Zweige in einander über, so heisst diese eine $k - 1$-fache, oder von der $k - 1^{\text{ten}}$ Ordnung. In der Umgebung einer solchen werden sämtliche k in ihr zusammenhängende Zweige durch eine und

5) Im folgenden kurz mit Ber. und Seitenzahl citiert.

6) *Riemann,* Abel'sche Funktionen, J. f. Math. 54 (1857) = Werke, hsgg. von *H. Weber,* Leipzig 1892 (2. Aufl.), p. 90; künftig mit R. A. F. citiert.

7) *Puiseux,* Recherches sur les fonctions algébriques, J. de math. 15 (1850), Nr. 19 (auch deutsch von *Fischer,* Halle 1861). Vgl. *Briot* u. *Bouquet,* Fonctions elliptiques, deux. édition, Paris 1875, p. 39.

8) R. A. F. p. 90, point critique bei *Briot* u. *Bouquet* l. c. und anderen. Einzelne Autoren, wie *Picard* (Traité d'anal. 2, p. 349) gebrauchen letzteren Ausdruck überhaupt für solche Stellen, an denen zwei oder mehr Werte von y einander gleich werden, während die Verzweigungspunkte points de ramification heissen.

dieselbe nach ganzen Potenzen von $(x - a)^{1/k}$ fortschreitende Reihe dargestellt. Negative Potenzen treten auch hier nur in endlicher Zahl auf. Im Unendlichen tritt x^{-1} an die Stelle von $x - a$ in den Reihen, was in Zukunft nicht mehr besonders erwähnt werden soll. Die Reihen konvergieren bis zur nächsten Verzweigungs- oder Unendlichkeitsstelle des oder eines der dargestellten Zweige[9]). Diese Eigenschaften sind für die algebraischen Funktionen auch charakteristisch, d. h. eine Funktion, welche überall n Werte annimmt und deren Entwicklungen das eben beschriebene Verhalten zeigen, wobei Verzweigungs- und solche Stellen, in deren Umgebung eine Entwicklung nach negativen Potenzen auftritt, nur in endlicher Zahl vorkommen dürfen, ist Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten[10]). Ist es überdies möglich, auf geeigneten Wegen von x jeden Zweig in jeden andern überzuführen ohne dass auf dem dabei benützten Wege zwei oder mehr derselben einander gleich werden, so ist diese algebraische Gleichung auch unzerlegbar. Im Gegenfalle lässt sie sich in eine endliche Anzahl solcher zerlegen.

3. Das algebraische Gebilde. *Weierstrass*[11]) bezeichnet die Gesamtheit der Wertepaare x, y, welche einer algebraischen Gleichung $f(xy) = 0$ genügen, als ein algebraisches Gebilde, das einzelne Wertepaar xy als eine Stelle[12]) des Gebildes. Ist a, b eine solche Stelle, so heisst sie regulär, wenn $f(a + \xi, b + \eta)$ in ξ und η lineare Glieder hat, sonst aber singulär. Die Anzahl der singulären Stellen, welche wohl zu unterscheiden sind von den singulären Stellen einer

---

9) Die Reihenentwicklungen beginnen mit *Newton* (l. c.) u. *Cramer,* Analyse des lignes courbes algébr., Genève 1750; *Lagrange,* Th. des fonctions analytiques, Paris 1796; Berl. Mém. 24 (1768) = Oeuvres 3, p. 5; ibid. 1776 = Oeuvres 4, p. 301). *Lacroix*'s Traité 1, p. 104 (2. éd. 1810) giebt Erläuterungen hierzu. *Cauchy* giebt den Satz von der Stetigkeit der einzelnen Zweigfunktionen (Exercices d'anal. 2, p. 109; Par. C. R. 12, 1841; seine allgemeinen Entwicklungen über implicite Funktionen siehe II B 1); *Minding* (J. f. Math. 23, 1841) die Entwicklung im Unendlichen, *Puiseux* den obigen Satz (l. c.). Eine andere Art der Entwicklung bei *Hermite,* J. f. Math. 116. Siehe auch Nr. **3**. — Ältere Litteratur bei *S. Günther,* Vermischte Untersuchungen zur Geschichte etc., Leipz. 1876, Kap. III; *A. Lechthaler,* Progr. Gymn. Melk 1885; Zusammenstellung bei *Harkness* u. *Morley,* Treatise (1893), p. 127.

10) R. A. F., p. 108. *Briot* et *Bouquet,* J. éc. pol., cah. 36 (1856); Fonctions elliptiques, 2. éd., p. 217. Hierher gehört auch *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1884, Werke 1, p. 543. Man sehe auch II B 1, Nr. **12**.

11) Zuerst in Vorlesungen. Vgl. Werke 2, p. 235. Auch *G. Hettner,* Gött. Nachr. 1880.

12) Point analytique bei *Appell* und anderen (Par. C. R. 94, 95; Acta math. 1).

Funktion, ist endlich. Sie geben zugleich die singulären Stellen[13]) der algebraischen Kurve $f(xy) = 0$. Alle Werte von x und y, welche in einer genügend kleinen Umgebung von a resp. b liegen und dem Gebilde angehören, lassen sich durch eine endliche Anzahl von Reihenpaaren, die nach ganzen Potenzen eines Parameters fortschreiten, darstellen[14]). Negative Potenzen treten dabei nur in endlicher Anzahl auf. In der Umgebung einer regulären Stelle reicht stets ein einziges Paar aus. Dabei ist wesentlich, dass die Wahl des Parameters so getroffen werden kann, dass jeder Stelle in der Nähe von a, b auch nur *ein* Wert des Parameters in der zugehörigen Entwicklung entspricht. Ein solcher kann sogar für die Umgebung einer bestimmten Stelle (a, b) als rationale Funktion von x, y gewählt werden, und soll in Zukunft mit t bezeichnet werden. Ein solches Reihenpaar nennt *Weierstrass* ein *Element* des algebraischen Gebildes. Zur Darstellung des ganzen Gebildes reicht stets eine endliche Anzahl von Elementen aus und sämtliche gehen aus einem unter ihnen durch analytische Fortsetzung hervor, wenn die definierende Gleichung unzerlegbar ist. Diese Eigenschaft des Gebildes bezeichnet *Weierstrass* als die *Monogeneität* des algebraischen Gebildes. Die in Nr. 2 erwähnten Reihenentwicklungen liefern unmittelbar Elemente, wenn als Parameter $x - a$ resp. $(x - a)^{1/k}$ gewählt wird.

4. Die Riemann'sche Fläche. Eine klare und übersichtliche Vorstellung von dem Gesamtverlauf der Werte einer algebraischen Funktion hat *Riemann*[15]) durch folgende Darstellung erreicht. Denkt man sich in n übereinanderliegenden Exemplaren der Ebene der komplexen Zahlen die Verzweigungswerte markiert und sämtlich durch einander nicht schneidende, in allen Blättern gleichverlaufende Linien mit einer Stelle, an der sämtliche Zweige der Funktion verschiedene Werte annehmen, verbunden, so ist in jedem Blatt der einzelne Zweig der Funktion eindeutig, wenn diese Linien als nicht überschreitbare Grenzen festgesetzt werden. Dabei werden zu beiden Seiten der Linien gleiche oder verschiedene Werte auftreten, je nachdem das

---

13) Litteratur hierzu Ber. p. 367 und III C 2.

14) *M. Hamburger,* Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871); *L. Koenigsberger,* Vorles. über ellipt. Funkt. (1874); *O. Stolz,* Math. Ann. 8 (1875); *O. Biermann,* Funktionentheorie § 39—41; *O. Stolz,* Grundz. d. Diff.- u. Integralrechnung 1, p. 177 ff.; einen andern Weg giebt *M. Ch. Méray,* Leçons sur l'analyse infinitésimale 2, Paris 1895, p. 121—167. Für die Behandlung auf arithmetischer Grundlage *Kronecker,* J. f. Math. 91 (1881); *Hensel,* Berl. Ber. 1895; siehe I B 1 c von *Hensel* u. *Landsberg,* Vorles.

15) Diss. Gött. 1851, Nr. 5 (Werke, p. 7); A. F. 1 (Werke, p. 88).

Ende der Linie Verzweigungsstelle des betrachteten Zweiges ist oder nicht. Ordnet man nun jedem Zweig ein bestimmtes Blatt zu, so finden sich die Werte auf einer Seite einer der Linien auf der entgegengesetzten Seite derselben Linie oder einer gleichverlaufenden in einem andern Blatt. Durchschneidet man daher sämtliche Blätter längs dieser Linien, und verbindet die einzelnen Blätter längs dieser Schnitte (Verzweigungsschnitte) in der Weise, dass solche Schnittränder, welche gleiche Funktionswerte tragen, miteinander verschmolzen werden, so erhält man eine die Ebene n-fach überdeckende Fläche, auf welcher die Funktion y eindeutig ausgebreitet ist, die *Riemann'sche Fläche.* Ihre Konstruktion kann auf mannigfache Art abgeändert werden. Wesentlich ist dabei nur, dass die Verbindung der einzelnen Blätter den Übergang der einzelnen Zweige der Funktion ineinander richtig wiedergiebt. Die Konstruktion kann ebenso an die Ausbreitung der komplexen Zahlen auf der Kugelfläche geknüpft werden[16]. Damit wurde zum erstenmal die Zuordnung des gesamten Wertevorrats der einzelnen algebraischen Funktion zu den Werten der unabhängigen Veränderlichen und der Zusammenhang aller Funktionswerte untereinander klar erfasst. Die Gruppe der Vertauschungen, welche die Funktionswerte bei geschlossenen Wegen der unabhängigen Variablen erleiden, heisst die *Monodromiegruppe*[17] der Gleichung $f(y, x) = 0$. Aus der Verzweigungsart hat *Frobenius*[18] Kriterien für die Auflösbarkeit von $f(y, x) = 0$ nach y durch Wurzelzeichen hergeleitet. Eine *Riemann*'sche Fläche ist durch Angabe der Verzweigungswerte und der Cyklen um diese noch nicht vollständig bestimmt, vielmehr muss auch der Zusammenhang der einzelnen Zweige von einem Verzweigungspunkt zum andern gegeben sein[19]. Die Anzahl der *Riemann*schen Flächen bei gegebenen Verzweigungswerten und ihren Cyklen und die Gruppe dieses Problems hat *Hurwitz*[20] bestimmt, nachdem schon früher *Thomae*[21] für 3- und 4-blättrige Flächen mit transcendenten Mitteln die zugehörigen Funktionen angegeben hatte.

---

16) Ausführliches über die Konstruktion solcher Flächen in den Lehrbüchern von *C. Neumann, Durège, Koenigsberger, Petersen, Burkhardt, Appell* et *Goursat, Harkness* and *Morley, Baker.* Die ersten ausführlichen Anweisungen hierzu haben wohl *Prym* (Wien. Denkschr. 1864) und *Durège* gegeben; vgl. zur ganzen Nr. auch II B 1, Nr. **10**, **11**.

17) *Ch. Hermite,* Par. C. R. 32; *A. Kneser,* Math. Ann. 28 (1886).

18) J. f. Math. 74 (1872).

19) *J. Thomae,* J. f. Math. 75 (1873).

20) Math. Ann. 39 (1891), 55 (1901). Hierher gehört auch *Hoyer,* Math. Ann. 42 (1892); 47 (1896). Auch *Kasten,* Diss. Göttingen 1876.

21) Math. Ann. 18 (1881).

In einer mehr an *Puiseux*[22]) anschliessenden Weise haben *Clebsch* und *Gordan*[23]) den Übergang der Funktionswerte ineinander längs geschlossener Wege (Cyklen, Schleifen, Umgänge) ihrer Darstellung zu Grunde gelegt.

5. Zusammenhang und Geschlecht der Riemann'schen Fläche. Ist $f(xy)$ unzerlegbar, so bildet die *Riemann*'sche Fläche ein einziges zusammenhängendes Ganzes[24]), sonst liefert jeder Faktor von $f(xy)$ eine solche Fläche, welche mit den andern nicht zusammenhängt. Nur zu unzerlegbaren Gleichungen gehörige *Riemann*'sche Flächen sollen weiterhin in Betracht gezogen werden. Eine solche ist von bestimmtem Zusammenhang im Sinn der Analysis situs (III A 4) und zwar als geschlossene Fläche $2p+1$-fach zusammenhängend. Die Zahl p, bei *Weierstrass* mit ϱ bezeichnet, heisst das Geschlecht[25]) der *Riemann*'schen Fläche und der algebraischen Funktion, bei *Weierstrass* der Rang des algebraischen Gebildes. Sie hängt mit der Blätterzahl und den Ordnungszahlen der Verzweigungspunkte der *Riemann*'schen Fläche durch die Formel $w - 2n = 2p - 2$[26]) zusammen, wo w die Summe der Ordnungszahlen der Verzweigungspunkte bedeutet. Ist $f(xy)$ in y vom Grade n, in x vom Grade m, und hat die Kurve $f(xy) = 0$ nur einfache Doppelpunkte im Endlichen, so ist $p = (m-1)(n-1) - r$,[26]) wo r die Anzahl der im Endlichen gelegenen Doppelpunkte bedeutet[27]). Für die nähere Bestimmung des Geschlechtes aus den Singularitäten der Kurve $f(xy) = 0$ sehe man III C 2.

6. Zerschneidung der Riemann'schen Fläche; Querschnitte. Nach den Lehren der Analysis situs[28]) lässt sich die *Riemann*'sche Fläche auf mannigfache Art durch geeignete Quer- und Rückkehrschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Die folgende

22) *P.* stellt sich geradezu die Aufgabe, den Wert der algebr. Funktion zu bestimmen, wenn die unabh. Variable einen bestimmten Weg durchläuft. *C. Runge* erledigt diese Frage mit algebr. Mitteln, J. f. Math. 97 (1884).

23) *A. Clebsch* u. *P. Gordan,* Abel'sche Funktionen (1866); *Schläfli,* J. f. Math. 76 (1873); *F. Casorati,* Ann. di mat. (2) 3 (1869); (2) 15 (1887), 16 (1888).

24) *L. Koenigsberger* leitet mit Hülfe der Verzweigung der Riemann'schen Fläche Kriterien für die Unzerlegbarkeit der Gleichung $f(y, x) = 0$ her, Berl. Ber. 46 (1898); J. f. Math. 115.

25) Der Name zuerst bei *A. Clebsch,* J. f. Math. 64 (1865).

26) *Riemann,* A. F., Art. 7 (Werke, p. 114).

27) Auf diesen Fall kann der allgemeine immer zurückgeführt werden; vgl. Nr. **10** und III C 2, III C 8. Allgemeine Vorschriften bei *Hensel* u. *Landsberg,* Vorles. 1901.

28) III A 4.

Art der Zerschneidung wird als *kanonische*[29]) bezeichnet. Man legt p sich selbst und einander nicht schneidende Rückkehrschnitte, die Schnitte A, hierauf p weitere ebensolche Querschnitte, Schnitte B, von denen jeder die beiden Ränder eines Schnittes A verbindet. Endlich verbindet man die p so erhaltenen Schnittepaare durch p Schnitte C, welche von dem Rand eines Schnittepaares A, B zu dem eines nächsten führen, zu einem Ganzen. Die Schnitte C können ganz erspart werden, wenn man die Schnitte A, B von einem und demselben Punkt der *Riemann*'schen Fläche aus zieht, und kommen hier auch sonst nicht weiter in Betracht. Es darf jedoch kein Schnitt weder einzeln noch mit den andern zusammen die Fläche zerstücken[30]).

7. Spezialfälle und Normalformen. Die zweiblättrigen *Riemann*'schen Flächen, welche die Ausbreitung einer Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion wiedergeben, werden hyperelliptische[31]) Flächen genannt, wenn der Grad der ganzen rationalen Funktion grösser als 4 ist. Ist der Grad der ganzen rationalen Funktion gerade, so ist er $2p + 2$, sonst $2p + 1$. Im letzteren Fall hat die Fläche ausser den $2p + 1$ im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten, an denen die ganze rationale Funktion verschwindet, noch den unendlichen fernen Punkt zum Verzweigungspunkt, im ersten Fall aber liegen alle $2p + 2$ Verzweigungspunkte im Endlichen, so dass also ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Fällen nicht besteht. Die *Riemann*'sche Fläche wird hier einfach dadurch hergestellt,

29) *Riemann*, A. F., Art. 19.

30) Man sehe insbesondere das Lehrbuch von *C. Neumann*. Auch die kanonische Zerschneidung kann auf mannigfache Weise vollzogen werden. Der Zusammenhang der verschiedenen Arten der Zerschneidung ist für die Theorie der linearen Transformation der Abel'schen Funktionen wichtig; *Thomae*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 12; J. f. Math. 75 (1873); *Klein-Burkhardt*, Math. Ann. 35 (1889), p. 210, neuerdings *Wellstein*, Math. Ann. 52 (1899), siehe II B 6 b; *Clebsch* und *Gordan* ersetzen die Theorie der Querschnitte durch bestimmte Kombinationen von Schleifen, siehe Note 23, 32 und *Briot*, fonctions abéliennes, Paris 1879.

31) Deren Integrale waren die ersten über die elliptischen hinausgehenden Integrale algebraischer Funktionen, welche *Abel* in Betracht zog (vgl. Nr. **42**). Der Name rührt von *Legendre* her (Traité des fonctions elliptiques 3, p. 181); *Jacobi* schlug den Namen Abel'sche vor (J. f. Math. 8 (1832), Werke 1, p. 379). Beide Namen sind in der älteren Litteratur synonym; z. B. *Richelot*, J. f. Math. 12, 16, 23, 25; *Weierstrass*, J. f. Math. 47 (1854)); *A. Göpel* (J. f. Math. 35, Ostwald's Klassiker Nr. 67) machte zuerst den Vorschlag, die Benennung hyperelliptische Integrale in dem obigen Sinne zu gebrauchen, den Namen *Abel*'sche Integrale aber den Integralen allgemeiner algebraischer Funktionen vorzubehalten.

dass man die Verzweigungspunkte in $p+1$ Paare ordnet, die Punkte jedes Paares mit einander durch je einen Verzweigungsschnitt verbindet, und längs dieser $p+1$ Verzweigungsschnitte die beiden Blätter kreuzweise mit einander verbindet[32]). Die Zerschneidung der Fläche in eine einfach zusammenhängende kann so vorgenommen werden, dass man die p Schnitte A, von einem Punkt des ersten Verzweigungschnittes ausgehend, im ersten Blatte bis zu je einem Punkte eines der p übrigen Verzweigungsschnitte führt, und nach Überschreitung des letzteren im zweiten Blatt zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Die Schnitte B sind dann einfache Umläufe im ersten Blatt um die Paare von Verzweigungspunkten, ausgenommen das erste Paar. Die hyperelliptischen Flächen und algebraischen Funktionen für $p = 2, 3, 4$ etc. werden als von der ersten, zweiten, dritten etc. Ordnung bezeichnet, bei $p = 2$ die Ordnung häufig weggelassen. Wenn eine *Riemann*'sche Fläche nur einfache Verzweigungspunkte hat, so lässt sie sich durch geeignete Anordnung der Verzweigungsschnitte derart umformen, dass zwei Blätter nach Art der hyperelliptischen Fläche in $2p+2$ Verzweigungspunkten zusammenhängen, während die übrigen $n-2$ Blätter je in einem Paar von Verzweigungspunkten mit einem der ersten beiden zusammenhängen. Die Zerschneidung der ersten zwei Blätter nach Art der hyperelliptischen ist dann auch zugleich eine kanonische Zerschneidung der ganzen Fläche[32]).

8. Funktionen am algebraischen Gebilde und der Riemann'schen Fläche. Funktionen des Wertepaares x, y, welche in der Umgebung einer bestimmten Stelle des Gebildes analytische Funktionen des Parameters t sind, also auf der *Riemann*'schen Fläche solche von $x-a$ oder $(x-a)^{1/k}$, werden als analytisch in der Umgebung dieser Stelle am Gebilde bezeichnet, zeigen sie dieses Verhalten in der Umgebung jeder Stelle, so heissen sie analytische Funktionen am Gebilde oder der *Riemann*'schen Fläche; je nach ihrem Verhalten als Funktionen von t wird die Stelle als wesentlich oder ausserwesentlich singulär, als regulär, die Funktion selbst als ein- oder mehrdeutig in der Umgebung der Stelle bezeichnet. Die Ordnung des Null- oder Unendlich-werdens bei eindeutigen Funktionen ist eben durch dieselben Ordnungen bestimmt, die ihnen als Funktionen des Parameters t zukommen. Damit stimmt die Erklärung der bez. Ordnungen bei *Riemann* durch die Änderung des

32) *J. Lüroth,* Math. Ann. 3 (1871); Münch. Abh. 15 (1885), 16 (1887), dort auch weitere Litteratur; *Clebsch*, Math. Ann. 6 (1873); vgl. auch das Lehrbuch von *H. Stahl.*

Logarithmus der Funktion[33]) bei vollständiger Umlaufung der Stelle auf der *Riemann*'schen Fläche überein. Die Funktion heisst unverzweigt am ganzen algebraischen Gebilde oder auf der *Riemann*'schen Fläche, wenn sie es in der Umgebung jeder Stelle ist. Dies zieht jedoch keineswegs Eindeutigkeit am ganzen Gebilde nach sich, weil durch analytische Fortsetzung auf solchen Wegen, welche Querschnitte überschreiten, ev. vom Ausgangselement verschiedene Elemente erhalten werden können[34]). Eine Funktion, welche am ganzen algebraischen Gebilde oder der *Riemann*'schen Fläche eindeutig ist und nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzt, ist eine rationale Funktion von x und y und umgekehrt. Eine solche nimmt jeden Wert gleich oft am algebraischen Gebilde oder der *Riemann*'schen Fläche[35]) an.

9. Der Körper der rationalen Funktionen, Transformation des Gebildes und die Riemann'schen Klassen. Erhaltung von p. Die Gesamtheit der rationalen Funktionen von x und y bildet einen Körper und gestattet daher die Anwendung der arithmetischen Methoden[36]). Die einzelne rationale Funktion z von x und y ist selbst Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten in x. Der Grad dieser Gleichung ist entweder gleich n oder ein Teiler von n. Im ersten Fall ist y rational durch die neu eingeführte Funktion darstellbar, im zweiten Fall nicht. Nur im ersten Falle sind die zu z und y gehörigen *Riemann*'schen Flächen identisch, im zweiten Falle ist zwar z eindeutig auf der y zugehörigen *Riemann*'schen Fläche, nicht aber umgekehrt[37]). Das einfachste, jedoch triviale Beispiel solcher Funktionen sind die rationalen Funktionen von x allein.

Sind w und z zwei rationale Funktionen von x und y, von denen die erste jeden Wert r mal, die zweite s mal annimmt, so ergiebt die Elimination von x und y aus den drei Gleichungen $w = w(x, y)$,

---

33) *Riemann* hat wohl zuerst den Gedanken gefasst, ein algebraisches Gebilde als Träger von Funktionswerten aufzufassen, A. F. Art. 2.

34) Unverzweigt und eindeutig ist in der Litteratur nicht immer streng geschieden, da die unverzweigten Funktionen auf der durch Querschnitte zerschnittenen *Riemann*'schen Fläche eindeutig sind, jedoch nicht auf der unzerschnittenen.

35) *Briot* et *Bouquet*, J. d. éc. pol.. 1856; *Riemann*, A. F., Art. 5 (1857), doch unabhängig von *B.* et *B.*, s. Werke p. 102.

36) *Dedekind* u. *Weber*, J. f. Math. 92 (1882); die Arbeiten von *Kronecker*, *Hensel*, *Landsberg* siehe I B 1 c, Nr. **11**. Neuerdings der letztgenannte Math. Ann. 54 (1901). Ausgeführte Beispiele unter diesem Gesichtspunkt bei *L. Bauer*, Math. Ann. 41 (1893), 46 (1895). Eine systematische Darstellung unter diesem Gesichtspunkt *Hensel* u. *Landsberg*, Algebr. Funkt., Teubner 1901.

37) *Riemann*, A. F., Art. 5.

$z = z(x, y)$ und $f(x, y) = 0$ eine algebraische Gleichung zwischen w und z, welche in w vom s^{ten}, in z vom r^{ten} Grade ist: $F(w, z) = 0$. Diese ist entweder unzerlegbar oder Potenz einer unzerlegbaren Funktion. Im ersten Falle sind x und y selbst als rationale Funktionen von w und z darstellbar. Die beiden Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $F(w, z) = 0$ gehen dann durch rationale Transformation in einander über, die zugehörigen Gebilde und *Riemann*'schen Flächen sind eindeutig auf einander bezogen. Die *Riemann*'schen Flächen sind überdies konform auf einander abgebildet, und haben daher gleiches Geschlecht p. Die Gesamtheit aller Gleichungen, welche aus einer unter ihnen durch eine solche Transformation hervorgehen, nennt *Riemann* eine Klasse[38]) algebraischer Gleichungen. Die Gesamtheit der rationalen Funktionen von x und y, als Funktionen einer unter ihnen aufgefasst, bilden ein System gleichverzweigter algebraischer Funktionen. Die durch verschiedene Wahl der unabhängigen Veränderlichen entspringenden Systeme werden ebenfalls zu einer Klasse algebraischer Funktionen zusammengefasst, so dass jeder Klasse von Gleichungen eine Klasse von Funktionssystemen und umgekehrt entspricht.

10. Bedeutung des Klassenbegriffes. Aus der Zusammenfassung der algebraischen Funktionen in Klassen ergiebt sich die Forderung, die einzelne Funktion zu charakterisieren, unabhängig von ihrer Darstellung durch zwei besondere Funktionen der Klasse. Dies wird in der Theorie von *Weierstrass* dadurch erreicht, dass das Verhalten der Funktion in Bezug auf die zu den einzelnen Stellen gehörigen Parameter t zu ihrer Festlegung dient. Es ist hier das algebraische Gebilde aufgelöst in eine Anzahl von Bereichen der zu einer endlichen Anzahl von Stellen gehörigen Parameter t, welche durch die — die analytische Fortsetzung vermittelnden — Übergangssubstitutionen zu einem Ganzen verbunden sind. Die ursprüngliche algebraische Gleichung kann ebensogut durch jede andere der Klasse ersetzt werden. Auf ganz verschiedenem Weg erreichen *Dedekind* und *Weber*[39]) dieses Ziel mit den Hülfsmitteln der Idealtheorie. Der einzelne Punkt der *Riemann*'schen Fläche erscheint dann als Primideal. Ein dritter Weg führt zunächst zur Aufstellung von Funktionen, resp. Formen, welche selbst ihre Beziehung zum algebraischen Gebilde bei rationaler Transformation nicht ändern und Darstellung aller übrigen Funktionen

38) *Riemann,* A. F., Art. 12 (1857).

39) l. c. (Note 36), sowie die übrige dort angegebene Litteratur.

durch diese (invariante Darstellung)[40]). Ferner dient die rationale Transformation dazu, aus den Gleichungen einer Klasse nach verschiedenen Gesichtspunkten Repräsentanten (kanonische Formen, Normalformen)[41]) auszuscheiden, eine Aufgabe, welche mit der Festlegung der Klasse durch eine endliche Anzahl von Konstanten (Moduln der Klasse) aufs engste zusammenhängt.

11. Die Integrale der algebraischen Funktionen; ihre Perioden. Wird eine algebraische Funktion integrirt und das Integral als Funktion der Grenzen — meist der oberen — aufgefasst, so entstehen neue, zum algebraischen Gebilde gehörige Funktionen, welche *Abel*'sche Integrale[42]) genannt werden. Ausser den bei algebraischen Funktionen möglichen Unendlichkeitsstellen können bei ihnen auch logarithmische vorkommen, in deren Umgebung sie in der Form $A \log t + P(t)$ dargestellt werden, wenn $P(t)$ eine nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihe mit höchstens einer endlichen Anzahl negativer Potenzen bedeutet. Sie sind ferner am Gebilde und der *Riemann*'schen Fläche zwar unverzweigt, aber unendlich vieldeutig, wenn sie sich nicht auf algebraische Funktionen reduzieren. Die sämtlichen Werte eines Integrals gehen aus einem unter ihnen durch Hinzufügen einer linearen Verbindung gewisser Konstanten (Perioden oder Periodizitätsmoduln) mit ganzzahligen Koeffizienten hervor. Die Perioden sind von zweierlei Art, die der ersten (logarithmische Perioden) treten zu dem Funktionswert nach Umlauf einer logarithmischen Unstetigkeitsstelle, die der zweiten Art (Perioden oder Periodizitätsmoduln schlechtweg) treten hinzu, wenn der Integrationsweg auf der *Riemann*'schen Fläche solche geschlossene Wege durchläuft, welche sich nicht ohne Überschreiten von Verzweigungspunkten auf einen Punkt zusammenziehen lassen (Periodenwege). Alle Perioden-

---

40) *A. Brill* und *M. Nöther,* Math. Ann. 7 (1874), auch Gött. Nachr. 1873; *Nöther,* Erl. Ber. 1880, Math. Ann. 17 (1880). Neuerdings in allgemeiner Fassung *Wellstein,* Math. Ann. 54 (1901).

41) Siehe unter Nr. 30. Hierher gehört auch die Verwendung der rationalen Transformationen zur Auflösung von singulären Stellen, insbesondere zur Überführung der Gleichung $f(x, y) = 0$ in eine solche, deren zugehörige Kurve nur mehr einfache Doppelpunkte enthält. *L. Kronecker,* J. f. Math. 91 (1881); *M. Nöther,* Math. Ann. 9 (1875); 23 (1883); 34 (1889); weitere Litteratur in *Brill* und *Nöther*'s Bericht, p. 367 ff. Man sehe auch III, C, 2, 8. Neuerdings zeigt *E. Vessiot,* Toul. Ann. 1896, dass die in endlicher Zahl wiederholte Anwendung der Transformation $\xi = x$, $\eta = \dfrac{dy}{dx}$ auf $f(x, y) = 0$ auf eine Kurve mit lauter einfachen Doppelpunkten führt.

42) Siehe Note 31.

wege lassen sich aus $2p$ geeigneten unter ihnen zusammensetzen und darum die Perioden im engern Sinn sich durch $2p$ unter ihnen linear und homogen mit ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken. Die Querschnitte der *Riemann*'schen Fläche einer kanonischen Zerschneidung bilden immer ein dazu geeignetes Wegesystem[43]). Auf der zerschnittenen *Riemann*'schen Fläche sind die Integrale, abgesehen von logarithmischen Perioden, eindeutig, nehmen aber an beiden Seiten eines Querschnittes um eine längs des Schnittes konstante Grösse verschiedene Werte an. Wird an den Schnitten A beliebig eine positive und eine negative Seite festgesetzt, an den Schnitten B aber so, dass bei positiver Umlaufung der ganzen *Riemann*'schen Fläche man auf der positiven Seite der Schnitte B von der positiven Seite der Schnitte A auf die negative Seite kommt, so wird der Funktionswert auf der positiven Seite, vermindert um den auf der negativen Seite eines Querschnittes, als Periode an diesem Querschnitt bezeichnet und ist bei einem Schnitt A gegeben durch das Integral längs des zugehörigen Schnittes B, genommen in derjenigen Integrationsrichtung, welche von negativer Seite von A auf die positive führt. Das entsprechende gilt von den Schnitten B. Wird also das Integral in der *Riemann*'schen Fläche zunächst ohne Überschreitung der Querschnitte überallhin fortgesetzt, so wird überall ein bestimmter Wert erhalten. Für einen Integrationsweg, welcher die Querschnitte beliebig oft überschreitet, wird dann der Wert des Integrals aus diesem erhalten, indem man die den einzelnen Querschnitten zugehörigen Perioden so oft positiv hinzufügt, als der Querschnitt von

---

43) Die mehrfache Periodizität bei hyperelliptischen Integralen scheint zuerst *Abel* (Oeuvr. éd. S. et L. 2 p. 40) wohl 1826 bemerkt zu haben. Auch bei *Galois* finden sich (1832) Bemerkungen, welche zeigen, dass ihm diese Erscheinung bekannt war (Oeuvres éd. *Picard,* p. 29). Für hyperelliptische Integrale hat durch Rechnung *Jacobi* (J. f. Math. 9 (1832), 13 (1835) = ges. Werke 2, p. 5, 23) diese Eigenschaft dargelegt. Die Konsequenzen *Jacobi*'s für die Umkehrungsfunktionen, welche für die Theorie der *Abel*'schen Funktionen wichtig wurden, siehe II B 6 b und II B 7; s. auch die Bemerkung *Weber*'s zur Ausgabe der *Jacobi*'schen Abhandlung (J. f. Math. 13) in Ostwald's Klassikern Nr. 64. Aus der Theorie der komplexen Integrationswege wurde die Existenz der Perioden wohl schon von *Cauchy* (Par. C. R. 32 (1851) Oeuvres 11, p. 292, 300, 304) und bei algebraischen Funktionen von *Puiseux* (l. c.) (II B 1) erkannt, ohne dass ihm die Bestimmung der endlichen Zahl der linear unabhängigen gelungen wäre. Dies leisten auf *Puiseux*'scher Grundlage erst *Clebsch* und *Gordan* (1866) (Note 23); man sehe auch *Briot,* Fonctions abéliennes, Paris 1879. Die Periodizität des Integrals aus der Beschaffenheit des Bereiches erkannt zu haben und sie auf $2p$ zurückzuführen, ist das Verdienst *Riemann*'s (A. F., 1857).

der positiven zur negativen Seite überschritten wird und so oft negativ, als die entgegengesetzte Überschreitung stattfindet[44]). Funktionen, welche am algebraischen Gebilde oder der *Riemann*'schen Fläche ausser logarithmischen nur ausserwesentlich singuläre Stellen in endlicher Anzahl besitzen, auf der *Riemann*'schen Fläche unverzweigt sind, und längs der Querschnitte konstante Wertdifferenzen aufweisen, sind Integrale rationaler Funktionen von x und y, so dass also die angegebenen Eigenschaften für die Funktionen auch charakteristisch sind. Diese Funktionen enthalten die algebraischen als spezielle Fälle bei Wegfall der logarithmischen Unstetigkeiten und Verschwinden der Perioden[45]).

12. Riemann's Problemstellung. Man kann nun unabhängig von jeder algebraischen Gleichung eine die Ebene mehrfach überdeckende Fläche mit einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten, durch welche die einzelnen Blätter in bestimmter Weise zu einem zusammenhängenden Ganzen verbunden sind, vorgeben und fragen, ob es algebraische Funktionen giebt, deren *Riemann*'sche Fläche die vorgelegte Fläche ist. Dies ist der Ausgangspunkt *Riemann*'s[46]), welcher diese Frage im bejahenden Sinne beantwortete. Wenn auch das von *Riemann* zum Beweis benützte *Dirichlet*'sche Prinzip[47]) der Kritik von *Weierstrass* nicht Stand halten konnte, so haben doch die späteren Arbeiten von *Schwarz* und *C. Neumann* die Richtigkeit der *Riemann*'schen Sätze in dem hier in Betracht kommenden Umfang dargethan. Insbesondere hat *C. Neumann* den Existenzbeweis für die bisher allein erwähnte Form der *Riemann*'schen Fläche ausführlich dargestellt[48]).

13. Verallgemeinerung der Riemann'schen Fläche. Aber die *Riemann*'sche Fläche selbst ist noch einer erheblichen Verallgemeinerung fähig, welche zum Teil schon von *Riemann* selbst benutzt

---

44) Die Festsetzungen über positive und negative Richtung sind bei verschiedenen Autoren verschieden, was bei Vergleich der Formeln zu beachten ist.

45) *Riemann*, l. c., Art. 9.

46) *Riemann*, l. c., Art. 3—5.

47) *Riemann*, Dissertation, p. 30; A. F., Nr. 3, 4, Art. 1.

48) *H. A. Schwarz*, Berl. Ber. 1870 (ges. Abh., p. 133 und Noten, p. 356); *C. Neumann*, sächsiche Berichte 1870; Abel'sche Integrale, 2. Aufl. Auszugsweise Darstellung des Gedankenganges bei *Klein-Fricke*, Modulfunktionen 1, p. 508ff.; *Forsyth*, Theory of funct.; *Picard*, Traité 2. Die weitere Litteratur und näheres über das *Dirichlet*'sche Prinzip siehe II A 7b und II B 1. Neuerdings hat *D. Hilbert*, D. M. V. 1899 wieder auf die Minimalbetrachtungen zurückgegriffen und sie vervollständigt.

wurde. Zunächst lassen sich aus derselben im Sinne der Analysis situs äquivalente Flächen ableiten, auf welche das algebraische Gebilde punktweise eindeutig bezogen ist, und welche die Zusammenhangsverhältnisse einfach übersehen lassen[49]. *Clifford* und *Tonelli* geben der Fläche die Gestalt einer Kugel mit p angesetzten Henkeln[50].

Auch ist es nicht notwendig, dass die Fläche als geschlossene. vorgegeben ist, sondern es genügt, wenn die Fläche durch punktweise Zuordnung der Ränder im idealen Sinn eine geschlossene Mannigfaltigkeit wird. Solche Bereiche werden als *Riemann*'sche Bereiche oder auch Fundamentalbereiche bezeichnet[51]. Hierher gehören die Polygonnetze in der Ebene, in welchen jedes Blatt der *Riemann*'schen Fläche auf ein einzelnes Polygon bezogen ist und diese *neben* einander so angeordnet sind, wie die Blätter der *Riemann*'schen Fläche *über* einander[52]. Weiteres hierüber sehe man II B 6c. Noch in anderer Weise hat *Klein*[53] die Tangenten algebraischer Kurven benützt, um das algebraische Gebilde abzubilden, indem er den reellen Tangenten ihren Berührungspunkt, den komplexen aber den einzigen reellen Punkt derselben zuweist und so eine *Riemann*'sche Fläche direkt an der Kurve konstruiert. Über die Beziehung zu Minimalflächen III D 5[54].

14. Die allgemeinsten Riemann'schen Mannigfaltigkeiten, welche auf algebraische Funktionen führen, lassen sich erklären als wenigstens

---

49) Solche Umformungen giebt *Hoffmann*, Methodik der Deformation der Riemann'schen Fläche, 1887.

50) *Clifford*, Proc. of the Lond. Math. Society 8 (1877); *F. Klein*, Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale (1882), dazu die Note *Klein*'s, Math. Ann. 45 (autogr. Vorles.) und *Tonelli*, Linc. Rend. (5) 4 (1895).

51) *F. Klein*, Math. Ann. 21 (1883). Spezielle Fälle früher bei *Riemann*, Werke, p. 440 u. *Schottky*, J. f. Math. 83 (1876); *Schwarz*, J. f. Math. 75 (1872); *Dedekind*, J. f. Math. 83 (1877).

52) *F. Klein*, Math. Ann. 14 (1878); *W. Dyck*, Math. Ann. 17 (1880); 20 (1881). Diese Methoden erweisen sich insbesondere zur Untersuchung algebraischer Gebilde im Sinne der *Galois*'schen Theorie förderlich. Siehe Nr. **53** über Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Über ihre Bedeutung in der Theorie der automorphen Funktionen II B 6c.

53) Erl. Ber. 1874; Math. Ann. 7 (1874); 9 (1876). Ferner die autographierten Vorlesungshefte über *Riemann*'sche Flächen (p. 198 ff.), wo noch weitergehende Verallgemeinerungen zur Sprache kommen. Einzelausführungen bei *Harnack*, Math. Ann. 9 (1875); *Haskell*, Amer. J. of math. 13 (1890). Auch *Clebsch-Lindemann*, Vorles. über Geometrie 1, p. 610 ff.

54) *Riemann*, ges. Werke, p. 301; *K. Weierstrass*, Berl. Ber. 1866. Für die Beziehung zu unserm Gegenstand, *F. Klein* autographierte Vorlesungen, Riemann'sche Flächen, I (1892), p. 28, 153 ff.

in idealem Sinne geschlossene, zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten mit nicht umkehrbarer Indikatrix, auf welchen eine binäre, positive, quadratische Differentialform derart eindeutig gegeben ist, dass zufolge derselben die Umgebung jeder Stelle der Mannigfaltigkeit konform (im Sinne der durch die Differentialform an jeder Stelle der Mannigfaltigkeit gegebenen Massbestimmung) auf ein ebenes Flächenstück abgebildet werden kann und welche so mit einer endlichen Anzahl von Bereichen, deren jeder konform auf eine Kreisfläche abgebildet werden kann, überdeckt werden kann, dass jede Stelle der Mannigfaltigkeit dem Innern, nicht nur der Grenze, wenigstens eines dieser Bereiche angehört.

Ist die Mannigfaltigkeit als gewöhnliche Fläche gegeben, so kann das Quadrat des Bogenelementes als zugehörige Differentialform benützt werden, doch ist dies keineswegs notwendig, wie die am Schluss der vorigen Nummer erwähnten *Klein*'schen Flächen zeigen.

Auf solchen Mannigfaltigkeiten lässt sich nicht nur der Zusammenhang der Stellen des algebraischen Gebildes darstellen, sondern sie definieren geradezu eine Klasse algebraischer Funktionen[55]), wie sogleich näher zu erläutern ist.

Eine ausführliche Darstellung dieser allgemeinsten Fälle steht noch aus. Die Ausdrucksweise im folgenden knüpft an die Vorstellung gewöhnlicher Flächen des dreidimensionalen Raumes oder ebener, einfach oder mehrfach überdeckter Bereiche an.

15. Potentiale und Funktionen auf der allgemeinen Riemannschen Fläche. Der Beweis dafür, dass eine solche Mannigfaltigkeit eine Klasse algebraischer Funktionen definiert, erfordert die Herstellung solcher Potentiale (II A 7 b) auf der Fläche, welche an den Querschnitten gegebene Wertdifferenzen und auf der Fläche[56]) selbst nur solche Unstetigkeitsstellen in endlicher Anzahl haben, welche durch Subtraktion des reellen Teils einer Funktion von der Form

---

55) *F. Klein*, Autogr. Vorles. über Riemann'sche Flächen (1892), p. 16—28. Einzelne einfach zusammenhängende Flächenstücke versieht bereits *E. Beltrami* mit einer quadratischen Differentialform und studiert die so entstehenden Funktionen. Über die Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indikatrix (nach *Dyck*, Math. Ann. 32), zu denen auch die Doppelflächen gehören (siehe Analysis situs III A 4) und ihre Beziehung zu berandeten Flächen und deren Einordnung in die vorliegende Fragestellung sehe man *Klein*, Über Riemann's Theorie (1882), p. 78 ff.

56) *F. Klein* hat in der Schrift über Riemann's Theorie (1882) auf Grund physikalischer Vorstellungen von stationären Strömen auf einer *Riemann*'schen Fläche die Hauptzüge der Theorie anschaulich dargestellt und für die Theorie der konformen Abbildung verwertet. Man sehe *Picard*, Traité d'anal. 2, p. 459 ff.

$$A \log r + c_1 r^{-1} + c_2 r^{-2} + c_3 r^{-3} + \cdots + c_k r^{-k}$$

für die Umgebung der einzelnen Stelle behoben werden können. Dabei bedeutet r eine komplexe Funktion des Ortes auf der Fläche, welche an der Unstetigkeitsstelle von der ersten Ordnung verschwindet.

Werden diese Potentiale durch Hinzufügen der mit i multiplizierten konjugierten Potentiale zu komplexen Funktionen des Ortes auf der Fläche ergänzt, so erhält man ein System von solchen Funktionen auf der Fläche, welche nur logarithmische und ausserwesentlich singuläre Stellen und an den Querschnitten konstante Wertdifferenzen haben. Unter diesen sind die auf der ganzen unzerschnittenen Fläche eindeutigen besonders ausgezeichnet und heissen algebraische Funktionen auf der Fläche. Als Funktionen einer unter diesen aufgefasst bilden nämlich alle Funktionen des Systems ein System gleichverzweigter algebraischer Funktionen und ihrer Integrale. Jede einzelne solche Funktion bildet die ganze Fläche eindeutig und konform auf eine gewöhnliche, die Ebene mehrfach überdeckende *Riemann*sche Fläche ab und alle diese *Riemann*'schen Flächen gehören zur selben Klasse. Die Tragweite dieser Auffassung geht darin über die rein algebraische Behandlung hinaus, dass sie die Klasse algebraischer Funktionen unter sehr allgemeinen, von jeder speziellen Art der analytischen Darstellung unabhängigen Bedingungen zu erkennen und festzulegen gestattet, sowie das Verhalten der ganzen Klasse bei Abänderung einzelner Bestimmungsstücke zu untersuchen die Möglichkeit bietet[57]).

16. Die drei Gattungen von Integralen. Ist eine Funktion auf der *Riemann*'schen Fläche überall endlich und sind die reellen Teile ihrer Perioden an sämtlichen Querschnitten oder die Perioden an p Querschnitten A (oder B) gleich Null, so ist die Funktion eine Konstante. Die überall endlichen Funktionen mit nicht verschwindenden Perioden heissen *Funktionen erster Gattung.* Eine solche ist bis auf eine additive Konstante durch die reellen Teile ihrer Perioden an den Querschnitten vollständig bestimmt. Alle diese Funktionen

---

57) Den hier skizzierten Gedankengang, welcher eine Erweiterung des ursprünglich *Riemann*'schen auf allgemeine Mannigfaltigkeiten darstellt, hat *Klein* in den soeben zitierten Schriften eingehender entwickelt. Hierher gehören auch für den Fall ebener Polygone die Untersuchungen von *E. Ritter*, Math. Ann. 45, 46 (1894, 1895), in denen auch die Stetigkeit der Potentiale und Funktionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereiches untersucht wird. Diese letztere bildet eines der meist stillschweigend gemachten Postulate für alle Untersuchungen, bei denen die Verzweigungspunkte abgeändert werden. Hierüber II B 3 und II B 6 b, c.

sind (bis auf eine additive Konstante) durch p geeignet gewählte unter ihnen linear mit konstanten Koeffizienten darstellbar.

Als *Funktionen zweiter Gattung* werden solche Funktionen bezeichnet, welche nur an einer Stelle der *Riemann*'schen Fläche unendlich von der ersten Ordnung werden. Die *Funktionen dritter Gattung* sind solche, welche an zwei Stellen der *Riemann*'schen Fläche logarithmisch unendlich werden, und zwar wie $-\log t_1$ an der einen und wie $+\log t_2$ an der zweiten, wenn t_1, t_2 zwei an den beiden Stellen von der ersten Ordnung verschwindende Funktionen sind. Die Funktionen zweiter und dritter Gattung sind durch Angabe ihrer Unstetigkeiten erst bis auf eine Funktion erster Gattung bestimmt. Die Funktionen der drei Gattungen werden mit Rücksicht auf ihre Darstellung durch Integrale algebraischer Funktionen in der Regel als *Integrale 1., 2., 3. Gattung* bezeichnet. Die hier gegebenen Definitionen sind zuerst von *Riemann*[58]) aufgestellt, doch wird als Integral zweiter Gattung häufig auch eine Funktion bezeichnet, welche nur an weniger als $p+1$ Stellen so unendlich wird, dass die Summe der Ordnungszahlen $\leqq p$ ist. Solche Funktionen können aus dem gewöhnlichen Integral zweiter Gattung durch Differentiation nach dem Unstetigkeitspunkt erhalten werden. Ebenso kann das Integral zweiter Gattung aus dem dritter erhalten werden[59]). Aus dem reellen Teil eines geeigneten Integrals zweiter Gattung lassen sich alle Funktionen der drei Gattungen herleiten[60]).

17. Relationen zwischen den Perioden. Sind U und V zwei Integralfunktionen, so ergiebt die Integration des Differentials UdV über die Begrenzung der *Riemann*'schen Fläche durch die Querschnitte einerseits, andererseits um die etwa vorhandenen Unstetigkeitsstellen Relationen von der Gestalt

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p}(P_i Q_{p+i} - P_{p+i} Q_i) = \sum R,$$

wo P_i, P_{p+i} die Perioden von U resp. an den Querschnitten A_i, B_i und Q_i, Q_{p+i} die analogen Perioden von V bedeuten, R aber die aus der Integration um die einzelnen Unstetigkeitsstellen entspringenden Beiträge[61]). Sind U und V beide erster Gattung, so ist die rechte

58) *Riemann,* A. F., Art. 4, 5, 6.

59) *Riemann,* A. F., Art. 4; *F. Franklin,* Math. Ann. 41 (1892); *Clebsch* und *Gordan*, A. F., § 8.

60) *Klein,* Math. Ann. 21 (1883); ausführlicher bei *Klein-Fricke,* Modulf. 1.

61) *Riemann,* A. F., Art. 20, 22, 26; *Clebsch* und *Gordan,* A. F., § 25, 33, 37; *F. Prym*, J. f. Math. 71 (1870); vgl. auch die Lehrbücher von *C. Neumann* und

Seite von (1) Null. Ist U von der zweiten, V von der ersten Gattung, so ist die rechte Seite von (1) ein lineares Aggregat der Werte der Differentialquotienten von V an der Unstetigkeitsstelle von U. Ist endlich U von der dritten Gattung, V von der ersten, so wird die rechte Seite von (1)

$$-2\pi i\int_{x_1}^{x_2} dV,$$

wo x_1, x_2 die beiden logarithmischen Unstetigkeitsstellen von U bedeuten[62]). Wird U konstant und für V eine beliebige Integralfunktion oder der Logarithmus einer algebraischen Funktion genommen, so ergiebt (1), dass die Summe der logarithmischen Residuen für eine solche gleich Null ist, resp. die algebraische Funktion jeden Wert gleich oft annimmt. Wird für U der reelle, für V der imaginäre Teil eines Integrales erster Gattung genommen, so ergiebt die Umwandlung von $\int U dV$ in ein Doppelintegral und der Vergleich mit dem um die ganze Begrenzung der *Riemann*'schen Fläche erstreckten Integral, dass

$$\sum_{i=1}^{p}(P'_i P''_{p+i} - P'_{p+i} P''_i)$$

einen positiven Wert hat, wenn P', P'' den reellen und imaginären Teil der Perioden bedeuten.

18. Die transcendent normierten Integrale. Unter den Integralen erster Gattung lassen sich p so auswählen, dass jedes unter ihnen nur an je einem der Schnitte A die Periode 1 hat, an den übrigen Schnitten A aber die Periode Null. Diese werden als transcendent normierte Integrale erster Gattung[63]) bezeichnet und zwar soll mit v_k dasjenige Integral bezeichnet werden, welches am Querschnitt A_k die Periode 1 hat. Die Periode von v_k am Querschnitt B_i soll mit $\tau_{k,i}$ bezeichnet werden. Dann geben die Sätze der vorigen Nr. $\tau_{k,i} = \tau_{i,k}$. Ferner ist der imaginäre Teil der Summe

$$\sum_{i,k} n_i n_k \tau_{ik},$$

F. Stahl. Die Randintegration in dieser Weise ist seit *Riemann* ein vielverwendetes Hülfsmittel geworden.

62) Dieses sind die sogenannten *Bilinearrelationen* in der *Riemann*'schen Form. Für die äquivalenten *Weierstrass*'schen Relationen siehe Nr. **34**.

63) *Riemann*, A. F., Art. 18. Dort und auch bei anderen Autoren haben die v_k die Perioden πi an den Schnitten A_k. Die Einführung von 1 als Periode erfolgte mit Rücksicht auf die *Weierstrass*'sche Form der Thetareihen (II B 6, c; II B 7) und die Transformationstheorie.

in welcher die n_i ganze Zahlen bedeuten, wesentlich positiv. Diese Sätze über die τ_{ik} bilden die Grundlage für die Verwendung der Thetafunktionen[64]).

Die Integrale zweiter Gattung können durch Hinzufügen einer geeigneten Linearkombination von Integralen erster Gattung so normiert werden, dass sie an sämtlichen Schnitten A die Perioden Null haben. Beginnt die Entwicklung des Integrals in der Nähe der Unstetigkeitsstelle mit at^{-1}, so sind seine Perioden an den Querschnitten B_k gegeben durch

$$-2\pi i a \left(\frac{dv_k}{dt}\right)_{t=0}.$$

Solche Integrale werden als transcendent normierte Integrale zweiter Gattung bezeichnet[65]).

In gleicher Weise wird das Integral dritter Gattung[66]) normiert durch die Forderung, an den Querschnitten A verschwindende Perioden zu haben, an den Unstetigkeitsstellen x_1, x_2 aber sich zu verhalten wie resp. $-\log t_1$, $+\log t_2$. Die Perioden an den Schnitten B_k sind dann gleich

$$2\pi i \int_{x_1}^{x_2} dv_k.$$

19. Darstellung der Funktionen der Fläche durch die Integrale der drei Gattungen. Jede Funktion mit nur ausserwesentlichen und logarithmischen singulären Stellen lässt sich als ein lineares Aggregat von Integralen der drei Gattungen darstellen. Insbesondere sind die Funktionen mit verschwindenden Perioden und ohne logarithmische Unstetigkeiten als lineare Verbindungen von Normalintegralen zweiter Gattung, resp. als Grenzfälle von solchen darstellbar[67]).

Sind m Stellen gegeben, an denen allein die Funktion unendlich von erster Ordnung werden darf, ohne es zu müssen, so ergiebt die Untersuchung der Perioden, dass eine solche Funktion noch von $m-p+\tau+1$ Konstanten homogen und linear abhängt. Dabei bedeutet τ die Anzahl der linear-unabhängigen Differentiale erster Gattung, welche an den gegebenen m Stellen verschwinden (*Riemann-Roch*'scher Satz)[68]). Für ein Unendlichwerden höherer Ordnung ist

---

64) Siehe II B 7.

65) *G. Roch,* J. f. Math. 64 (1865).

66) *Clebsch* und *Gordan,* A. F., § 34 (1866).

67) *Riemann,* A. F., Art. 5.

68) *Riemann,* l. c. giebt den ersten Teil des Satzes ohne Rücksicht auf die durch das Eintreten der τ gegebene Modifikation. Diese fügt erst *G. Roch*

für m die Summe der Ordnungszahlen des Unendlichwerdens zu setzen und für τ die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung, welche an den gegebenen Stellen je von derselben Ordnung verschwinden, wie die Funktion unendlich werden darf. Dabei ist zu beachten, dass man so zwar alle Funktionen erhält, welche nirgends anders und nicht von höherer Ordnung als die gegebene unendlich werden, keineswegs aber an den gegebenen Stellen das vorgegebene Unendlichwerden wirklich einzutreten braucht[68a]).

B. Besondere Darstellungen und Funktionen.

20. Darstellung der Integranden als rationale Funktionen von x, y. Die *Riemann*'sche Definition der drei Gattungen von Integralen lässt dieselben zwar als die einfachsten Elemente zum additiven Aufbau der übrigen Funktionen erkennen, giebt jedoch nicht unmittelbar ihre Darstellung als Integrale algebraischer Funktionen des Gebildes. Für die hyperelliptischen Gebilde war bereits von *Abel*[69]) eine Reduktion der Integrale auf drei Gattungen gegeben. Er zeigt nämlich analog wie bei den elliptischen Integralen, dass, abgesehen von algebraischen und logarithmischen Summanden, jedes Integral von der Form

$$\int \frac{P}{Q} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo P und Q ganze rationale Funktionen von x bedeuten und $\varphi(x)$ eine solche vom Grade $2p+2$, sich darstellen lasse durch Integrale von der Form

$$\int \frac{x^a\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \int \frac{x^{p+a}\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad (0 \leqq a \leqq p-1) \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Die ersten beiden Formen und lineare Kombinationen der unter einer von ihnen enthaltenen Integrale werden von ihm und den Autoren bis *Riemann*, vereinzelt auch noch später, als Integrale erster, resp. zweiter Gattung bezeichnet. Ebenso die dritte Form als Integral

---

(J. f. Math. 64 (1865)) hinzu. Vgl. auch Nr. **22**, **23**, **25**—**29**. In der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen (I B 1 c, Nr. **11**) erscheint der Satz als Konsequenz einer Relation zwischen einer Basis und ihrer reziproken; *G. Landsberg*, Math. Ann. 50 (1897); *H. Hensel*, Math. Ann. 54 (1901). Vgl. auch den folgenden Artikel von *Hensel*; sowie *Hensel* u. *Landsberg*, Vorles. Eine Erweiterung des Satzes bei *Nöther*, Math. Ann. 15 (1879); siehe auch *Klein*, Autogr. Vorles. über Riemann'sche Flächen, p. 91 ff.

68a) Siehe unten Nr. **23**.

69) Oeuvres (éd. S. et L.), p. 450 ff.; J. f. Math. 3 (1828). Ausführlicher bei *Legendre*, Traité des fonctions elliptiques etc. 3, p. 181 (1832); auch *Ch. Hermite*, Cours lithogr., 4. éd., p. 28.

dritter Gattung. Mit der seit *Riemann* allgemein üblichen Benennung stimmt dies wohl für die erste und dritte Gattung (so lange nicht $\varphi(\alpha) = 0$) überein, nicht aber für die zweite. Für die zweite und dritte Gattung hat *Koenigsberger*[70]) die algebraischen Formen mitgeteilt für den hyperelliptischen Fall. Für allgemeine algebraische Funktionen hat *Riemann*[71]) die Darstellung der Integrale der drei Gattungen begonnen. Er giebt für die erste Gattung die Form

$$\int \frac{\varphi\begin{pmatrix} m-2 & n-2 \\ x\;, & y \end{pmatrix}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wo φ eine ganze rationale Funktion von x und y bedeutet und n und m die resp. Grade von $f(x, y)$ in y und x. Dabei ist vorausgesetzt, dass $f(x, y) = 0$ als Kurve im Endlichen nur einfache Doppelpunkte hat, an welchen dann $\varphi(x, y)$ verschwinden muss. Wird von vornherein eine algebraische Gleichung der Theorie zu Grunde gelegt, so muss die Übereinstimmung der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung mit der anderweitig definierten Zahl p besonders gezeigt werden. Dies geschieht bei *Christoffel*[72]) unter vereinfachenden Voraussetzungen für die singulären Stellen von $f(x,y) = 0$, bei *Elliot*[73]) unter allgemeinen Annahmen; der erstere giebt überdies Formen für die zweite und dritte Gattung[74]).

Allgemeine Rechenvorschriften zur Bildung der Integrale der drei Gattungen bei beliebigen Singularitäten der Grundkurve liefert die arithmetische Theorie[74a]).

21. Fortsetzung. Homogene Variable. Die Formen φ. Die von *Aronhold*[75]) für Gleichungen zweiten und dritten Grades zur Untersuchung der Integrale verwendeten homogenen Variablen werden von *Clebsch* und *Gordan*[76]) auch für die allgemeinen *Abel*'schen Inte-

---

70) Vorlesungen über hyperelliptische Integrale, Lpz. 1878. Explicite Formeln auch bei *Schirdewahn,* Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889); *E. Goursat,* Par. C. R. 97 (1883); *E. Picard,* Darb. Bull. (2) 14 (1890); *P. Appell*, Toul. Ann. 7 (1893). Die *Weierstrass*'schen Normierungen siehe unten Nr. **23**.

71) A. F., Art. 9.

72) Ann. d. mat. (2) 10 (1881).

73) Ann. éc. norm. (2) 5 (1876); auch *Ch. Briot,* F. abél.; *L. Raffy,* Ann. éc. norm. (1) 12 (1883).

74) Man sehe unten Nr. **32** ff.

74a) Man sehe die in Note 68 angeführten Arbeiten von *Hensel* u. *Landsberg*; vgl. auch unten Note 81.

75) Berl. Ber. 1861; J. f. Math. 61 (1862).

76) *A. Clebsch,* J. f. Math. 63 (1863); 64 (1864), p. 43 ff.; *Clebsch* und *Gordan,* A. F., § 4—8.

grale herangezogen. Ist $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die homogen gemachte Gleichung, welche das algebraische Gebilde definiert, so ergeben sich die Integrale erster Gattung in der Form

$$\int \frac{\varphi}{\sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} (cx\,dx),$$

wo φ eine ganze rationale homogene Form der x_1, x_2, x_3, von der $n-3^{\text{ten}}$ Ordnung bedeutet, welche zur Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ adjungiert ist, d. h. in jedem h-fachen Punkt derselben einen $h-1$-fachen hat, wobei aber mehrere Punkte verschiedener Vielfachheit in einem vereinigt liegen können[77]). Unter $(cx\,dx)$ ist die Determinante $\sum \pm c_1 x_2 dx_3$ verstanden. Von c wird das Integral ganz unabhängig. Das Integral dritter Gattung nimmt hier die Form an:

$$\int \frac{\Omega}{(x\,\xi\,\eta) \sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} (cx\,dx),$$

wo Ω eine adjungierte Form $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet, welche an den von ξ und η verschiedenen Stellen, in denen die Gerade $(x\,\xi\,\eta) = 0$ die Kurve $f = 0$ schneidet, verschwindet. Das Integral zweiter Gattung kann aus dem dritter Gattung nun durch Grenzübergang oder Differentiation nach einer der Unstetigkeitsstellen hergeleitet werden[78]). Über algebraische Normierung der zweiten und dritten Gattung wird später zu berichten sein (Nr. **32** ff.).

22. Definition des Geschlechtes auf Grund der Formen φ. Wird die algebraische Gleichung zum Ausgangspunkt der Theorie genommen, so kann man auch von vornherein die Anzahl der linear unabhängigen Formen φ als Geschlecht definieren (*Brill* und *Nöther*)[79]). Dabei erweisen sich die Formen φ selbst als invariant gegenüber rationaler Transformation. Beim Beweise dieses Satzes tritt dann als „Fundamentalsatz“[80]) die Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass der Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen von x und y zufolge der Gleichung $f(x, y) = 0$ als ganze rationale Funktion von x und y darstellbar ist. Endlich können die

77) So, dass der Quotient mit der ersten Polare eines veränderlichen Punktes im singulären Punkt nicht unendlich wird. *Brill* und *Nöther,* Math. Ann. 7 (1874); *M. Nöther,* Math. Ann. 8, 9 (1875, 1876). Arithmetische Definition bei *Hensel* u. *Landsberg,* Vorles.; siehe auch den folgenden Artikel von *Hensel.*

78) *Clebsch* und *Gordan,* l. c.

79) Math. Ann. 7 (1874); vgl. auch *Brill* und *Nöther,* Ber., p. 360 f.

80) *M. Nöther,* Math. Ann. 6 (1873); siehe I B 1 c, Nr. **20**.

Formen φ für jede Gleichung $f = 0$ lediglich durch rationale Operationen in endlicher Anzahl ermittelt werden[81]). Die einzelne φ verschwindet an $2p-2$ Stellen des Gebildes ausser den singulären. Diese sind es, an welchen das mit φ gebildete Differential erster Gattung verschwindet[82]).

23. Die Theorie von Weierstrass. Auf einer von transcendenten Hülfsmitteln freien und in algebraischer Hinsicht völlig allgemeinen Grundlage hat *Weierstrass*[83]) seine Theorie der algebraischen Funktionen aufgebaut. Seine wesentlichsten Hülfsmittel sind dabei die Entwicklung der rationalen Funktionen eines Paares nach Potenzen des Parameters t und der ohne Integralbetrachtungen abgeleitete Residuensatz, dem er die Form giebt:

$$\sum \left[F(x,y)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0, \tag{2}$$

wo unter dem Summenzeichen der Koeffizient der -1^{ten} Potenz in der Entwicklung des eingeklammerten Ausdruckes steht und die Summation über alle Stellen des Gebildes, an welchen negative Potenzen von t in der Entwicklung auftreten, zu erstrecken ist.

Das Geschlecht (bei *Weierstrass*: Rang ϱ) wird definiert als diejenige Zahl fester Stellen (a_α, b_α), $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, p)$, für welche zwar keine algebraische Funktion am Gebilde ausschliesslich und nur von der ersten Ordnung unendlich wird, wohl aber solche Funktionen existieren, welche an diesen Stellen und einer frei veränderlichen Stelle (x', y') und sonst nirgends von der ersten Ordnung[84]) unend-

81) *M. Nöther,* Math. Ann. 17 (1880), 23 (1884); *L. Raffy*, Ann. éc. norm. (2) 12 (1883); Math. Ann. 23 (1884). Vom Standpunkt der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen aus hat *K. Hensel*, J. f. Math. 117 (1896) die Aufstellung der φ erledigt und ihre Anzahl mit den Dimensionen der in einem Fundamentalsystem auftretenden Funktionen in Zusammenhang gebracht (I B 1 e, Nr. **11**). *Hensel* u. *Landsberg,* Vorles. Vgl. auch *F. Baker,* Abelian Theorem, London 1897, chap. IV.

82) *Riemann*, A. F., Art. 9, 10. — Da *Brill* und *Nöther* und die anschliessenden Entwicklungen die an die Ausdrucksweise der algebraischen Kurve anschliessende Darstellung in den Vordergrund stellen, so ist für Näheres III C 2 heranzuziehen.

83) In Vorlesungen. Eine authentische Darstellung seiner Theorie wird seit 1897 in nahe Aussicht gestellt und soll demnächst erfolgen. Mir stand ein von *P. Günther* stammender Auszug aus einer solchen Vorlesung zur Verfügung. Eine kurze Skizze von *Weierstrass* selbst in dem Briefe an *Schwarz* (1875), Werke 2, p. 235. Einen zusammenhängenden ausführlicheren Bericht in *Brill* und *Nöther*'s Bericht, p. 403 ff.

84) *F. Schottky,* J. f. Math. 83 (1877).

lich werden. Wird eine solche Funktion noch ausserdem so normiert, dass, wenn (x, y) und (x', y') demselben Element des Gebildes angehören, die Entwicklung mit $(x-x')^{-1}$ beginnt, und die Funktion an einer beliebig zu wählenden Stelle (x_0, y_0) verschwindet, so ist sie dadurch eindeutig bestimmt und wird mit $H(x, y, x', y')$[85]) bezeichnet. Durch Entwicklung nach Potenzen des Parameters t in der Umgebung einer der Stellen (a_α, b_α) in Bezug auf (x, y) erhält man

$$(3)\quad H(x, y, x', y') = t^{-1} H(x', y')_\alpha + H^0(x', y')_\alpha - tH(x', y')_{\alpha+p} + \cdots,$$

und hier erweisen sich die Funktionen $H(x', y')_\alpha$ als p Integranden erster Gattung, die Funktionen $H(x', y')_{\alpha+p}$ als p zugehörige Integranden zweiter Gattung, die Funktion $H(x, y, x', y')$ selbst aber als ein Integrand dritter Gattung. Bezeichnet (x'_t, y'_t) das zur Stelle (x', y') gehörige Reihenpaar, so liefert die Entwicklung

$$(4)\qquad H(x, y; x'_t, y'_t)\frac{dx'}{dt} = -\sum_\mu H(x, y; x', y')_\mu t^\mu$$

in den Koeffizienten $H(x, y; x', y')_\mu$ solche Funktionen von (x, y), welche an der Stelle (x', y') von der $\mu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung und zwar wie $t^{-\mu-1}$ unendlich werden, an den Stellen (a, b) dagegen nur von der ersten, sonst aber überall endlich bleiben.

Damit sind die wesentlichen Hülfsmittel für die Darstellung und Untersuchung der algebraischen Funktionen gegeben. Die Vergleichung der Anzahl der Null- und Unendlichkeitsstellen in den Integranden erster Gattung ergiebt die Bestimmung von p. Der Residuensatz liefert die Darstellung der allgemeinsten algebraischen Funktion als lineares Aggregat der Funktionen $H(x, y; x', y')$ und $H(x, y; x', y')_\mu$, wenn für die Variablen x', y' die Unendlichkeitsstellen der vorgegebenen Funktion eintreten. Die weiteren Bedingungen an den Stellen (a_α, b_α) endlich zu bleiben, ergeben den *Riemann-Roch*'schen Satz und treten an die Stelle der aus dem Verhalten der Perioden der Integrale zweiter Gattung hergeleiteten Bedingungen bei *Riemann*. In Verbindung damit ergiebt sich die weitere Definition des Geschlechtes als der grössten Zahl, für welche an einer frei veränderlichen Stelle eine Funktion, welche ausschliesslich an dieser Stelle und von dieser Ordnung unendlich wird, nicht existiert. Diese wird ergänzt und ver-

85) Die Definition von H und das Folgende nach *G. Hettner*, Gött. Nachr. 1880. Implicite tritt eine solche Funktion für hyperelliptische Gebilde schon in den Arbeiten von *Weierstrass*, J. f. Math. 47, 52 (1854, 1856) auf. Für $p = 4$ siehe *A. Wiman*, Diss. Upsala 1895; *O. Biermann*, Wien. Ber. 87 (1883); Monatshefte 3 (1892).

schärft durch den sogenannten Lückensatz[85a]), demzufolge in der Reihe der Funktionen, welche ausschliesslich an einer gegebenen Stelle unendlich werden, immer genau p Lücken, entsprechend p in der Reihe der Ordnungszahlen des Unendlichwerdens fehlenden Zahlen, auftreten. Diese p Zahlen stimmen im allgemeinen mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p$ überein und nur für eine endliche Anzahl von Stellen (*Weierstrass*-Stellen)[86]) sind sie von ihnen verschieden. Diese fehlenden p Ordnungszahlen lassen sich auch definieren als die möglichen Ordnungszahlen des Verschwindens eines Integrales erster Gattung an der betrachteten Stelle. Sind die in der Reihe der Ordnungszahlen des Unendlichwerdens an einer Stelle fehlenden Zahlen r_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, p)$, so verschwindet die Determinante

$$\left|\frac{d^\lambda u_k}{du^\lambda}\right| \qquad (k, \lambda = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

wo u_k p unabhängige Integrale erster Gattung und u irgend ein solches bedeutet, an dieser Stelle von der Ordnung $\sum r_i - \frac{1}{2} p (p+1)$, und die Summe der Ordnungszahlen ihres Verschwindens beträgt $(p+1) p (p-1)$[87]). Endlich liefert noch die Existenz solcher Funktionen, welche nur an einer Stelle des Gebildes unendlich werden, bei Einführung derselben als unabhängige Veränderliche den Beweis der Monogeneität des Gebildes. Über die Theorie der Integrale und die Normalformen siehe Nr. **32**, **33**, **34**.

24. Die Fälle $p = 0, 1$. Wird für ein algebraisches Gebilde $p = 0$, so existieren rationale Funktionen am Gebilde, welche jeden Wert nur einmal annehmen. Alle diese Funktionen sind linear gebrochen durch eine unter ihnen darstellbar. Ist x eine solche Funktion, so sind alle rationalen Funktionen am Gebilde auch gewöhnliche rationale Funktionen von x. Die Integrale erster Gattung entfallen, die Integrale zweiter Gattung reduzieren sich auf x oder linear gebrochene Funktionen von x, die Integrale dritter Gattung auf $\log (x - \xi)/(x - \eta)$[88]). Für diese Funktionen sehe man auch I B 1, III C 2, 3; für die Integrale II A 2.

Ist bei einem algebraischen Gebilde $p = 1$, so heisst es ellip-

---

85a) *M. Nöther,* J. f. Math. 92 (1882), 97 (1884), 99 (1886); *Baker,* Abel. Theor., p. 31 ff.

86) *Weierstrass*, Werke 4, p. 238 ff.; *A. Hurwitz,* Math. Ann. 41 (1892); *M. Haure*, Ann. éc. norm. (3) 13 (1896); *C. Segre,* Lincei Rend. ser. 5a, 8, 1899.

87) *Brill*, Math. Ann. 4, p. 530; *Brill* und *Nöther,* Math. Ann. 7 (1874); *A. Hurwitz,* l. c.

88) *A. Clebsch,* J. f. Math. 64 (1865).

tisch, und alle zugehörigen algebraischen Funktionen sind rationale Funktionen zweier unter ihnen, welche durch eine Gleichung von der Gestalt $y^2 = f(x)$ verbunden sind, wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion 4. Grades in x bedeutet. Über diese sehe man II B 6 a. Auf diese Fälle wird im folgenden nicht mehr besonders Rücksicht genommen.

25. Äquivalente Systeme von Stellen, Scharen von Stellen und Funktionen. Zwei Systeme von gleichviel Stellen der *Riemann*'schen Fläche (des algebraischen Gebildes, der ebenen Kurve etc.) heissen äquivalent[89]) oder auch korresidual[90]), wenn es eine algebraische Funktion giebt, welche an den Stellen je eines der beiden Systeme denselben Wert annimmt, also z. B. in denen des ersten Systems gleich Null, in denen des zweiten unendlich wird. Dabei sind die beiden Systeme von Stellen als völlig verschieden vorausgesetzt. Im Falle zwei Systeme von Stellen einzelne Stellen gemeinsam haben, wird der Begriff der Äquivalenz dahin verallgemeinert, dass zwei Systeme von Stellen allgemein als äquivalent gelten, wenn die nicht gemeinsamen Stellen es im oben definierten Sinne sind[91]). Die Gesamtheit der zu einem gegebenen System äquivalenten Systeme bildet eine Schar, in welcher als feste Stellen des einzelnen Systems die allen Systemen der Schar gemeinsamen Stellen bezeichnet werden, die übrigen Stellen aber als beweglich. Die beweglichen Stellen der Schar können auch erklärt werden als die Systeme der Nullstellen derjenigen Funktionen, welche an jeder der gegebenen Stellen nicht von höherer Ordnung unendlich werden, als die Anzahl der in ihr vereinigt gelegenen Stellen des gegebenen Systems, woraus ersichtlich ist, dass zwei zu einem dritten äquivalente Systeme auch untereinander äquivalent sind. Nach dem *Riemann-Roch*'schen Satz wird die einzelne Funktion und damit auch das einzelne System der Schar durch $m - p + \tau + 1$ homogene lineare Parameter bestimmt, wenn m die Zahl der Stellen eines Systems ist. Eine solche Schar wird daher als $m - p + \tau$-fach unendliche Vollschar bezeichnet. Sie enthält immer und nur dann r feste Stellen, wenn es r von einander linear unabhängige Integranden erster Gattung giebt, welche zwar an den $m - r$ übrigen Stellen eines der Schar angehörigen Systems, nicht aber an den r festen Stellen verschwinden (Reduktionssatz)[92]). Wird

89) Nach *Dedekind* und *Weber*, J. f. Math. 92 (1882).

90) *Brill* und *Nöther*, Math. Ann. 7. Beide Begriffe decken sich nur bei gleichviel Stellen.

91) Solche feste Stellen zuerst bei *Brill* und *Nöther* l. c.

92) *J. Bacharach*, Erl. Ber. 1879, Math. Ann. 26; *M. Nöther*, J. f. Math. 92 (1882), Math. Ann. 37 (1890), p. 417.

aus der Vollschar durch eine oder mehrere algebraische Bedingungen ein Teil ausgesondert, so wird dieser als Teilschar bezeichnet, insbesondere bei linearen Bedingungen als lineare Teilschar[93]). Ist für eine Schar das τ des *Riemann-Roch*'schen Satzes (der Überschuss) von Null verschieden, so heisst die Schar eine Spezialschar, die zugehörigen Funktionen Spezialfunktionen. Für eine Spezialschar und die Spezialfunktionen ist die Wertigkeit m notwendig kleiner oder gleich $2p-2$, und die Spezialfunktionen sind sämtlich als Quotienten von Integranden erster Gattung (φ-Quotienten) darstellbar[94]).

26. Die algebraischen Kurven im Raume von q Dimensionen. Wählt man aus der Gesamtheit der an m Stellen des Gebildes höchstens von der ersten Ordnung unendlichen Funktionen $q+1$ linear unabhängige aus und zwar solche, von denen wenigstens eine lineare Verbindung an den m Stellen wirklich unendlich wird, und setzt diese $q+1$ Funktionen proportional den $q+1$ homogenen Punktkoordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$ eines linearen Raumes von q Dimensionen, so erhält man eine Raumkurve der Ordnung m und des Geschlechtes p, welche ebenso als Träger des algebraischen Gebildes verwendet werden kann, wie die ebene Kurve oder die *Riemann*'sche Fläche[95]). Dabei ist zu beachten, dass die Raumkurve unter Umständen mehrfach überdeckt werden kann[96]), wenn die unabhängige Variable die ganze *Riemann*'sche Fläche durchläuft, und bei Bestimmung von Ordnung und Geschlecht dieser Umstand in Rechnung gezogen werden muss. Speziell für $q=1$ erscheint als „Kurve" des Raumes von einer Dimension die mehrfach und zusammenhängend überdeckte Gerade, welche, wenn man die Gesamtheit ihrer reellen und komplexen Stellen auf die Ebene der komplexen Zahlen abbildet, die gewöhnliche *Riemann*sche Fläche liefert[97]). Für $q=2$ tritt die gewöhnliche eventuell mehrfach überdeckte ebene algebraische Kurve ein. Die Schnittpunkte

93) *Brill* und *Nöther,* Math. Ann. 7, p. 275. Zur ganzen Nummer sehe man *Brill* und *Nöther*, Ber., p. 347 ff., sowie *C. Segre,* Ann. di mat. (2) 22 (1894) mit weiteren Litteraturangaben; *E. Bertini,* ebd.; *S. Macaulay*, Proc. of Lond. Math. Soc. 29, 31 (1898/99); *F. Klein*'s autogr. Vorlesung über Riemann'sche Flächen und *Klein-Fricke,* Modulfunktionen 1, Abschn. III; *E. Bertini,* Ann. di mat. (2) 22 (1894).

94) *Riemann*, A. F., Art. 10; *E. Netto,* Diss. Berl. 1870, siehe auch Nr. **29**.

95) *A. Brill,* Gött. Nachr. 1870; Math. Ann. 2, 3, 4; *W. K. Clifford,* Phil. Trans. 1878 (Coll. Papers, p. 385).

96) Von *F. Klein*, Math. Ann. 11 (1877) für $p=3$ und den hyperelliptischen Fall wohl zuerst herangezogen.

97) *F. Klein,* Math. Ann. 17 (1881) und autogr. Vorl. über Riemann'sche Flächen.

der Kurve mit den linearen Räumen von $q-1$ Dimensionen geben eine q-fach unendliche lineare Schar äquivalenter Stellen, welche, je nachdem sie Vollschar oder Teilschar ist, die Kurve als Vollkurve oder Teilkurve charakterisiert[98]).

27. Die Darstellung der algebraischen Funktionen an der Raumkurve. Ist die betrachtete Kurve nur einfach überdeckt, so lassen sich die algebraischen Funktionen als Quotienten ganzer rationaler homogener Funktionen der X_i $(i = 1, 2, \ldots, q, q+1)$ darstellen. Jedoch sind, im Falle die Kurve singuläre Stellen hat, Zähler und Nenner bestimmten Bedingungen unterworfen, wenn sie zur Darstellung der allgemeinsten algebraischen Funktion geeignet sein sollen, welche für $q = 2$ die Bedingungen für „adjungiertes Verhalten" in den singulären Stellen der ebenen Kurve sind. Für grösseres q und allgemeinere Singularitäten als gewöhnliche Doppelpunkte ist noch wenig bekannt[99]). Als ganze algebraische Funktion ist hier eine solche zu definieren, welche nur für $x_{q+1} = 0$ unendlich wird. Aus diesen entspringen die ganzen algebraischen Formen k^{ter} Dimension durch Multiplikation mit x_{q+1}^k, wo k so gewählt sein muss, dass das Produkt nirgends mehr unendlich wird. Die ganzen rationalen Formen sind im allgemeinen nur ein Teil der ganzen algebraischen[100]). Wenn jedoch in besonderen Fällen die ganzen algebraischen Formen bereits durch die ganzen rationalen sämtlich dargestellt sind, so heisst die Kurve eine „elementare"[101]). Beispiele elementarer Kurven sind die ebene singularitätenfreie Kurve, der vollständige singularitätenfreie Schnitt von $q-1$ Mannigfaltigkeiten von $q-1$ Dimensionen des Raumes von q Dimensionen[102]).

28. Die Normalkurve der φ. Von besonderer Bedeutung unter den zum algebraischen Gebilde gehörigen Raumkurven ist diejenige Kurve $2p-2^{\text{ter}}$ Ordnung des Raumes von $p-1$ Dimensionen, deren Koordinaten den Formen φ oder, was dasselbe ist, den Integranden

---

98) Zur ganzen Nummer sehe man *F. Klein,* Autogr. Vorl. über Riemannsche Flächen; *Klein-Fricke,* Modulfunktionen 1, Kap. 3, sowie 3, Kap. 2, 7.

99) Für $q = 3$ insbesondere *Nöther,* J. f. Math. 93 und Berl. Abh. 1882. Für das Verhalten nicht adjungierter Formen siehe *Nöther,* Math. Ann. 15 (1879), wo insbesondere der Riemann-Roch'sche Satz auf solche Formen ausgedehnt ist.

100) Man sehe *F. Klein*'s autogr. Vorl. über Riemann'sche Flächen, wo auch die Verbindung mit den arithmetischen Theorien eingehender dargelegt ist, sowie III C 2; ferner den folgenden Artikel von *Hensel.*

101) *F. Klein,* Math. Ann. 36 (1890).

102) *H. White,* Nova Acta Leop. 57 (1891).

erster Gattung proportional sind[103]). Den eindeutigen Transformationen des Gebildes entsprechen kollineare Umformungen dieser Kurve. Für ein hyperelliptisches Gebilde degeneriert sie in eine doppelt überdeckte rationale Normalkurve[103a]). Von diesem Fall abgesehen ist die Kurve immer eine elementare, und die Darstellung einer Funktion als projektive Invariante an der Normalkurve der φ ist von selbst eine invariante Darstellung gegenüber den eindeutigen Transformationen des algebraischen Gebildes. Die Zahl der linear unabhängigen Relationen n^{ter} Ordnung zwischen den Formen φ beträgt — den hyperelliptischen Fall ausgenommen —

$$\frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+m-1)}{m!} - (2m-1)(p-1).$$

Im besonderen tritt für $p=3$ die ebene singularitätenfreie Kurve vierter Ordnung, für $p=4$ der vollständige Schnitt einer Fläche zweiter mit einer der dritten Ordnung in allgemeiner Lage, für $p=5$ der vollständige Schnitt dreier Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung von drei Dimensionen im Raum von vier Dimensionen als Normalkurve auf[104]). Doch reichen bereits bei $p=5$ die quadratischen Relationen zwischen den Integranden erster Gattung nicht immer aus, um die Normalkurve algebraisch ohne Restschnitt darzustellen[104a]).

29. Spezialfunktionen und Spezialscharen. Als solche wurden in Nr. **25** diejenigen Scharen bezw. Funktionen bezeichnet, deren Überschuss von 0 verschieden ist. Diese sind zu Paaren zusammengeordnet durch den Reciprocitätssatz von *Brill* und *Nöther*[105]), nach welchem zu einer m-punktigen Vollschar mit dem Überschuss τ stets eine zweite m'-punktige mit dem Überschuss τ' gehört, so dass

$$m + m' = 2p - 2$$
$$m - m' = 2\tau' - 2\tau.$$

Das Problem der Aufsuchung der Spezialscharen fällt mit der Aufsuchung der die vorerwähnte Normalkurve in m Punkten schneidenden linearen Räume von $p-1-\tau$ Dimensionen zusammen[106]).

103) Die ersten Andeutungen schon bei *Riemann*, Vorlesungen = Werke, p. 490, 491; *H. Weber,* Math. Ann. 13 (1878); *L. Kraus,* Math. Ann. 16 (1880); *Nöther,* Math. Ann. 17 (1880).

103a) *L. Kraus* [103]), p. 251.

104) Die quadratischen Relationen bei *Riemann* l. c.; siehe die vorige Note. Näheres für $p = 5, 6, 7$ *Nöther,* Math. Ann. 26 (1885).

104a) *L. Kraus* [103]), p. 252, 259. Ein einfaches Beispiel hierfür mit $p=5$ ist die Kurve $xy(x+y) + (x^2+y^2)^2(x^2+xy+y^2) = 0$.

105) Math. Ann. 7. Eine Erweiterung bei *Study,* Leipz. Ber. 42 (1890) *Brill* u. *Nöther* (Math. Ann. 7) bezeichnen diesen Satz als *Riemann-Roch*'schen Satz

106) *G. Castelnuovo,* R. Acc. d. Linc. 1889.

Für die $\tau' - 1 = m - p + \tau$-fach unendlichen Spezialscharen von m Punkten, für welche bei gegebenen τ' die Anzahl m am kleinsten wird, d. i. also für die Kurven niedrigster Ordnung im Raum von $\tau' - 1$ Dimensionen, ergiebt sich

$$p = \tau\tau' + h \qquad (0 \leqq h < \tau'),$$

und die Existenz von ∞^h Scharen von $m = p + \tau' - \tau - 1$ Stellen. Die Anzahl der verschiedenen Systeme hat für $\tau' = 2$ *Brill*[107]) bestimmt und zwar ist sie für

$$p = 2\tau \text{ gleich } \frac{1}{\tau}\binom{2\tau}{\tau - 1}, \text{ für } p = 2\tau + 1 \text{ gleich } \frac{2}{\tau}\binom{2\tau+1}{\tau-1}.$$

Für $h = 0$ hat *Castelnuovo*[108]) die Anzahl der verschiedenen Systeme gleich

$$\frac{1!\,2!\,3!\ldots\ldots(\tau-1)!\,1!\,2!\,3!\,(\tau'-1)!}{1!\,2!\,3!\,4!\ldots\ldots(\tau+\tau'-1)!}$$

gefunden. Diese Zahlen gelten jedoch nur für allgemeine algebraische Gebilde und können in speziellen Fällen in mannigfacher Art ausarten[109]).

30. Normalformen. Die Kenntnis von Spezialscharen mit einer möglichst geringen Anzahl beweglicher Stellen und der zugehörigen Funktionen wird zur Aufstellung von Normalformen der definierenden algebraischen Gleichung benutzt. *Riemann*[110]) sucht den Grad in jeder Veränderlichen möglichst niedrig zu erhalten und findet für $p = 2$ in der einen 2, in der andern 3 als niedrigsten Grad. Für $p = 2m - 2$ oder $2m - 3$ dagegen m als niedrigsten Grad in jeder Veränderlichen. *Brill* und *Nöther*[111]) verwenden als Normalkurve die ebene Kurve niedrigster Ordnung, also diejenige von der Ordnung $p - m + 2$, wenn $p = 3m, 3m + 1, 3m + 2$ ist. *Weierstrass* führt in die das Gebilde definierende Gleichung zwei solche Funktionen ein, welche nur an einer einzigen der in Nr. 23 erwähnten *Weierstrass*-Stellen von möglichst niedriger Ordnung unendlich werden, jedoch mit der Beschränkung, dass sie zur rationalen Darstellung sämtlicher

107) *Brill* u. *Nöther,* Math. Ann. 7; *A. Brill,* Math. Ann. 36 (1890); auch *E. Ritter,* Math. Ann. 44 (1894).

108) l. c. Zu *Castelnuovo*'s Verfahren vgl. *Klein*'s autogr. Vorl. über Riemann'sche Flächen 2, p. 110 ff.; zur ganzen Nummer: *H. Burkhardt,* Gött. Nachr. 1896 und III C 2, 7, 10.

109) *L. Kraus,* Math. Ann. 16 (1880); dazu *G. Wiman,* Stockh. Handl. Bihang 1895.

110) A. F., Art. 5. Von *Weierstrass*'scher Grundlage aus *E. Netto,* Dissert. Berlin 1870.

111) Math. Ann. 7, p. 293

Funktionen des Gebildes noch geeignet sind. Durch Diskussion an der Hand des Lückensatzes erhält man so eine Reihe von Gleichungsformen, von denen jede ein Gebilde vom Geschlechte p definiert, und welche in einer Variablen der Reihe nach vom Grade $2, 3, 4, \ldots, p$ sind und resp. $2p - 1, 2p, 2p + 1, \ldots, 3p - 3$ noch willkürliche, durch rationale Transformation nicht mehr abzuändernde Konstante enthalten[112]). Doch kann man sämtliche Gleichungsformen aus der letzten durch geeignete Grenzübergänge erhalten. Auch die von *Christoffel*[113]) benützten Normalformen beruhen wesentlich auf der Einführung von Integranden erster Gattung in die Grundgleichung[114]).

31. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Gebilden. Innerhalb der Gesamtheit aller algebraischen Gebilde vom Geschlechte $p > 1$ ist eine einzelne Klasse durch $3p - 3$ Parameter bestimmt, oder anders ausgedrückt, das algebraische Gebilde hat gegenüber rationaler Transformation $3p - 3$ absolute und charakteristische, von einander unabhängige Invarianten. Diese Zahl wurde zuerst von *Riemann*[114a]) durch Abbildung der *Riemann*'schen Fläche mit Hülfe eines Integrals erster Gattung gefunden. Man erhält so ein System von p Parallelogrammen, welche durch $2p - 2$ Verzweigungspunkte mit einander zusammenhängen, also im Ganzen von $4p - 2$ Parametern abhängt. Da das Integral erster Gattung aber $p + 1$ willkürliche Parameter enthält, so verbleiben $3p - 3$ für die Klasse charakteristische frei. Die gleiche Zahl findet man, wenn man von der Bemerkung ausgeht, dass die m-blättrigen *Riemann*'schen Flächen einer Klasse von $2m - p + 1$ Parametern abhängen, dagegen die allgemeinste m-blättrige Fläche durch die $2m + 2p - 2$ Verzweigungswerte endlich vieldeutig bestimmt ist[115]). Diese Betrachtungen bedürfen der wesentlichen Ergänzung durch den Nachweis, dass nicht ein algebraisches Gebilde mit $p > 1$ Transformationen in sich selbst mit ein oder mehreren frei veränderlichen Parametern zulässt[116]). In

112) Brief an *Schwarz,* Werke 2, p. 235; *Brill* und *Nöther,* Math. Ann. 7, p. 302; *F. Schottky,* J. f. Math. 83 (1877), p. 317 ff., früher als Dissertation, Berlin 1875; *G. Valentin,* Diss., Berlin 1879; *F. de Brun,* Diss. Upsala (1895), Stockh. Öfvers. 1896; *F. Klein,* autogr. Vorl. Riemann'sche Flächen, p. 90 ff.

113) Ann. di mat. (2) 9 (1878).

114) *L. Raffy,* Ann. éc. norm. (2) 12 (1883) stellt die Bedingung dafür auf, dass in $f(s, z) = 0$ s ein Integrand erster Gattung sei.

114a) A. F., Art. 12. Diese Abbildung erörtert *F. Klein* in der autogr. V. über Riemann'sche Flächen.

115) *Riemann* l. c.; *F. Klein* über Riemann's Theorie der algebr. Funktionen (1882).

116) *H. A. Schwarz,* J. f. Math. 87 (1875); *Weierstrass* Brief an *Schwarz,*

einer auch für $p = 0, 1$ gültigen Weise kann der Satz in der Form ausgesprochen werden: Die Anzahl der Moduln beträgt $3p - 3 + r$, wo r die Anzahl der variablen Parameter bedeutet, von welchen die allgemeinste Transformation des Gebildes in sich selbst abhängt. Bekanntlich ist $r = 3$ für $p = 0$, $r = 1$ für $p = 1$ und nach dem eben angeführten Satz $r = 0$ in allen höheren Fällen[117]). Die so gefundene Zahl der Moduln bestätigt sich auch durch Abzählung an den verschiedenen Normalformen[118]). Aus den *Riemann*'schen Betrachtungen zieht *Klein*[117]) noch den Schluss, dass die Gesamtheit der algebraischen Gebilde vom Geschlechte p eine zusammenhängende $3p - 3 + r$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden.

In jeder der im vorigen erwähnten Normalformen können die noch willkürlichen Parameter als Moduln angesehen werden. Ebenso $3p - 3$ absolute unabhängige projektive Invarianten der Normalkurve der φ. Andere Festlegungen der Moduln entspringen aus der Theorie der *Abel*'schen und der automorphen Funktionen (II B 6c).

32. Vertauschung von Parameter und Argument. Wird das transcendent normierte Integral dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten ξ und η zwischen den Grenzen y und x genommen bezeichnet mit

$$\int_y^x d\Pi_{\xi\eta} = \Pi_{\xi\eta}^{xy}$$

so ergiebt die in Nr. **17** angeführte Randintegration von $\Pi_{\xi\eta}^{z,u}\, d\Pi_{xy}^{z,u}$ nach z die Gleichung

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{xy}^{\xi\eta}. \tag{5}$$

Die Stellen ξ und η werden als die Parameter, x und y als die Argumente des Integrals bezeichnet, das in (5) ausgesprochene Theorem als der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument[118a]).

Werke 2, p. 235; *G. Hettner,* Gött. Nachr. 1880; *F, Klein*, l. c. 1883; *M. Nöther*, Math. Ann. 20, 21 (1882); *F. Klein* bei *H. Poincaré*, Acta math. 7 (1884); *A. Hurwitz*, Gött. Nachr. 1887 = Math. Ann. 32; Math. Ann. 41 (1892); *E. Picard*, J. d. Math. (4) 5 (1889); Bull. Soc. Math. Fr. 21 (1893).

117) *F. Klein* l. c.

118) *Brill* u. *Nöther*, Math. Ann. 7; *A. Cayley* hatte die Zahl $3p - 3$ zuerst bezweifelt (Proc. Lond. Math. Soc. 1865).

118a) Zuerst bei elliptischen Integralen von *Legendre* entdeckt (II B 6a); *Abel* (Oeuvres ed. S. u. L. 1 (1826), p. 40; 2, p. 43, 47); *É. Galois*, Oeuvr. éd. *Picard* (1832), p. 30; *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 32 (1846) = Werke 2, p. 121. Die angedeutete Ableitung nach *Clebsch* u. *Gordan*, Abel'sche F. (1866), p. 112 ff.; vgl. unten Nr. **34**.

Das allgemeinste Integral dritter Gattung, welches auch als Funktion der Parameter betrachtet ein solches ist, hat demnach die Form

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} + \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} v_\beta^{\xi\eta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, p), \tag{6}$$

wo die v_α^{xy}, $v_\beta^{\xi\eta}$ die zwischen den Grenzen y, x resp. η, ξ genommenen Integrale erster Gattung bedeuten und die $c_{\alpha\beta}$ von x, y und ξ, η unabhängig sind. Ist das System der $c_{\alpha\beta}$ ein symmetrisches, so erhält man das allgemeinste Integral dritter Gattung, welches Vertauschung von Parameter und Argument gestattet, wenn aber dies nicht der Fall ist, so ändert sich (6) bei Vertauschung von x, y mit ξ, η nur um eine alternierende Bilinearform der v_α^{xy}, $v_\beta^{\xi\eta}$.

33. Integrale zweiter Gattung, Normalkombinationen. Durch Differentiation nach ξ entsteht aus dem Integral $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ ein Integral zweiter Gattung, welches nach (5) eine algebraische Funktion des Parameters ξ ist und mit E_ξ^{xy} bezeichnet werden soll. Die gleiche Eigenschaft in Bezug auf ξ kommt auch den aus (6) durch Differentiation nach ξ hergeleiteten Integralen zu, welche wir mit E_ξ^{xy} bezeichnen. Indem wir noch vorübergehend die Differentialquotienten der transcendent normierten Integrale erster Gattung v_α^{xy} nach x mit $\psi_\alpha(x)$ bezeichnen, die eines beliebigen Systems linear unabhängiger Integrale u_α^{xy} dagegen mit $g_\alpha(x)$, zeigt sich, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathsf{E}_\xi^{xy}, & \mathsf{E}_{\xi(1)}^{xy}, & \mathsf{E}_{\xi(2)}^{xy}, & \ldots, \mathsf{E}_{\xi(p)}^{xy} \\ \psi_1(\xi) & \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi^{(2)}), & \ldots, \psi_1(\xi^{(p)}) \\ \psi_2(\xi) & \psi_2(\xi^{(1)}) & \psi_2(\xi^{(2)}), & \ldots, \psi_2(\xi^{(p)}) \\ \vdots & & & \\ \psi_p(\xi), & & & \ldots, \psi_p(\xi^{(p)}) \end{vmatrix} \tag{7}$$

welche mit $p+1$ Stellen $\xi, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(p)}$ gebildet ist, eine algebraische Funktion von x, y und den Stellen $\xi, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(p)}$ ist und sich nur um einen von diesen unabhängigen Faktor ändert, wenn die Integrale E_ξ^{xy}, $\mathsf{E}_{\xi(\lambda)}^{xy}$ durch die allgemeineren E_ξ^{xy}, $E_{\xi(\lambda)}^{xy}$ und die ψ_α durch die g_α ersetzt werden. Die Entwicklung der so umgestalteten Determinante nach der ersten Vertikalreihe führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} E_\xi^{xy} = F(x, y; \xi, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(p)}) + g_1(\xi)\, Y_1^{xy} + g_2(\xi)\, Y_2^{xy} \\ + g_3(\xi)\, Y_3^{xy} + \cdots + g_p(\xi)\, Y_p^{xy}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei sind die Y_α^{xy} lineare Kombinationen von Integralen zweiter Gattung, deren Perioden von den Stellen $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(p)}$ gänzlich unabhängig sind, und nur von der Auswahl des Integrales dritter Gattung und der Integranden erster Gattung abhängen. Sie heissen Normalkombinationen. Die Perioden von Y_α^{xy} an den Schnitten A_k, B_k sollen mit $-\eta_{\alpha,k}$, $-\eta_{\alpha,p+k}$ bezeichnet werden. Die Funktion F ist nur in der Bezeichnung von der *Weierstrass*'schen Funktion H verschieden[119]). Ebenso bilden die *Weierstrass*'schen Integrale zweiter Gattung ein System von Normalkombinationen zum System erster Gattung, und zwar ein solches, in welchem jede Normalkombination nur einen einzigen Unstetigkeitspunkt hat.

34. Fortsetzung, die Weierstrass'schen Periodenrelationen. Die obige Darstellung setzt die Kenntnis der Periodeneigenschaften der Integrale zweiter und dritter Gattung voraus. Im Gegensatz dazu hat *Weierstrass*[120]) anknüpfend an eine Formel von *Abel*[121]) die Vertauschbarkeit von Parameter und Argument aus algebraischen Identitäten erschlossen und diese dann zur Erforschung der Periodeneigenschaften und zur Reduktion der Integrale benutzt. Durch Anwendung des Residuensatzes auf die Funktion

$$\frac{d}{d\xi} H(\xi, \eta; x, y) \cdot H(\xi, \eta; x', y')$$

als Funktion von (ξ, η), wobei wir die Bezeichnung von Nr. **23** wieder aufnehmen, findet er die Vertauschungsgleichung

$$(9) \quad \frac{d}{dx} H(x, y; x', y') - \frac{d}{dx'} H(x', y'; x, y)$$
$$= -\sum_{\alpha=1}^{p} (H(x, y)_\alpha H(x', y')_{p+\alpha} - H(x', y')_\alpha H(x, y)_{p+\alpha}).$$

Indem man diese Formel nach x und x' über geschlossene Wege integriert, erhält man durch genauere Diskussion die Existenz von $2p$ Wegen, welche in den wesentlichen Eigenschaften mit den Schnittepaaren eines kanonischen Querschnittsystems übereinstimmen, und durch Ausführung der Integration die folgenden Relationen zwischen den Perioden der Integrale erster und den Perioden der zugehörigen Integrale zweiter Gattung, welche in gleicher Weise auch für Normalkombinationen gelten:

$$(10) \qquad \sum_1^p{}^{\alpha} (\omega_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma} \eta_{\alpha\beta}) = 2\pi i \cdot \delta_{\beta\gamma},$$

---

119) Siehe *F. Klein*, Math. Ann. 36 (1890); vgl. auch die Darstellung bei *Baker*, Abel. Theor. p. 176 ff.; *O. Bolza*, Chicago Congr. Mathem. Papers 1 (1896).

120) Braunsberger Programm 1849 = Werke 1, p. 111 (für hyperelliptische Integrale), später in Vorlesungen; siehe *Brill* und *Nöther*, Ber., p. 426 ff.; *O. Biermann*, Wien. Ber. 87 (1883).

121) Siehe Note 118.

wo $\delta_{\beta\gamma} = 0$ oder ± 1 ist, je nachdem $|\beta - \gamma| \neq p$ oder $\beta - \gamma = \pm p$ ist.

Aus diesen kann man wieder die *Riemann*'schen Bilinearrelationen herleiten, sowie das Nichtverschwinden der Determinante der ersten Hälfte des Systems der Perioden erster Gattungen, und die übrigen Ungleichungen unter denselben [122]).

Wird nun gesetzt:

$$(11)\quad G(x, y; x', y') = \sum_1^p {}^{\alpha} H(x, y)_\alpha H(x', y')_{p+\alpha} - \frac{d}{dx'} H(x, y; x', y'),$$

so zeigt Formel (9), dass

$$(12)\qquad G(x, y; x', y') = G(x', y'; x, y)$$

und zugleich erweist sich $G(x, y; x', y')$ als ein Integrand zweiter Gattung. An den Eigenschaften von G wird nichts wesentliches geändert, wenn noch eine symmetrische Bilinearform der $H_\alpha(x, y)$, $H_\beta(x', y')$ hinzugefügt wird. Die Gleichung (12) enthält den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument in algebraischer Form, und er geht aus ihr durch Integration in Bezug auf x und x' hervor.

35. Die Reduktion der allgemeinsten algebraischen Integrale. Durch Anwendung des Residuensatzes auf

$$F(x_t, y_t)\, H(x_t, y_t; x, y)\, \frac{dx_t}{dt}$$

und Transformation des Resultates mit Hülfe des Vertauschungssatzes (9) und der durch Reihenvergleichung daraus hervorgehenden Gleichungen gewinnt *Weierstrass* [123]) die folgende Darstellung der rationalen Funktion $F(x, y)$:

$$(13)\quad F(x, y) = \sum_1^r {}^{\nu} C_\nu H(x_\nu, y_\nu; x, y)$$
$$- \sum_1^p {}^{\alpha} (g_{p+\alpha} H(x, y)_\alpha - g_\alpha H(x, y)_{p+\alpha}) + \frac{d}{dx} \sum_1^r {}^{\nu} F(x, y)_\nu.$$

---

122) *G. Frobenius,* J. f. Math. 89 (1880); *H. Burkhardt,* Math. Ann. 32, p. 400 ff. (1888). Die oft behandelte Determinantenrelation zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung (*Haedenkamp,* J. f. Math. 12 (18); *L. Fuchs,* J. f. Math. 71 (1870) u. a.) ist eine arithmetische Konsequenz der Relationen (10). Für die Untersuchung der Perioden als Funktionen der Moduln des algebraischen Gebildes II B 4.

123) *G. Hettner,* Diss., Berlin 1877; *G. Humbert,* Acta math. 10 (1887); für hyperelliptische Integrale siehe *L. Fuchs,* J. f. Math. 71 (1870), p. 103 ff.

Sind $\overset{\nu}{x}_t, \overset{\nu}{y}_t\ (\nu = 1, 2, \ldots, r)$ diejenigen Elemente, für welche $F(\overset{\nu}{x}_t, \overset{\nu}{y}_t)\frac{d\overset{\nu}{x}_t}{dt}$ negative Potenzen von t in der Entwicklung aufweist, so ist hier gesetzt:

$$F(\overset{\nu}{x}_t, \overset{\nu}{y}_t)\frac{dx_\nu}{dt} = C_\nu t^{-1} + \sum_\lambda^\lambda c_{\nu\lambda}\, t^{\lambda-1},$$

wo unter dem Summenzeichen der Wert $\lambda = 0$ auszuschliessen ist. Dann ist

$$F(x, y)_\nu = -\sum_{n>0} c_{\nu,-n}\left[H(x, y; \overset{\nu}{x}_t, \overset{\nu}{y}_t)\frac{d\overset{\nu}{x}_t}{dt}\right],$$

$$g_\alpha = \sum_1^r{}^{\nu} \sum_{n>0} c_{\nu,-n}\left[H(\overset{\nu}{x}_t, \overset{\nu}{y}_t)_\alpha \frac{d\overset{\nu}{x}_t}{dt}\right]_{t^{n-1}},$$

$$g_{p+\alpha} = -F(a_\alpha, b_\alpha) + \sum_1^r{}^{\nu} \sum_{n>0} c_{\nu,-n}\left[H(\overset{\nu}{x}_t, \overset{\nu}{y}_t)_{p+\alpha}\frac{d\overset{\nu}{x}_t}{dt}\right]_{t^{n-1}}.$$

Diese Formeln geben die Zerlegung einer algebraischen Funktion in Integranden erster, zweiter und dritter Gattung und den Differentialquotienten einer algebraischen Funktion, und zwar treten nur p bestimmt normierte Integranden zweiter Gattung ein. Diese Zerlegung ist überdies eine eindeutige bestimmte und giebt durch Integration unmittelbar die Reduktion eines allgemeinen Integrals auf die Integrale der drei Gattungen und eine algebraische Funktion.

Ausgehend von der Theorie der Formen φ und unter Voraussetzung einer Gleichung in homogenen ternären Variablen hat *Nöther*[124]) den Vertauschungssatz, sowie die anschliessenden Probleme der Darstellung und Reduktion algebraischer Funktionen ausführlich behandelt.

36. Die Integration durch algebraische Funktionen und Logarithmen solcher haben *Abel* und *Liouville* in Angriff genommen. *Abel*[125]) giebt den Satz, dass das Integral einer algebraischen Funktion y, wenn es überhaupt durch algebraische Funktionen und Logarithmen solcher ausdrückbar ist, nur die Form haben kann:

$$(14) \qquad \int y\,dx = P(x, y) + \sum_1^r{}^{\nu} A_\nu \log P_\nu(x, y),$$

wo $P(x, y)$ und $P_\nu(x, y)$ rationale Funktionen von x und y bedeuten.

---

124) Erl. Ber. 1884; Math. Ann. 37 (1890); vgl. auch *A. Cayley,* Amer. J. of math. 5, 7 (1882, 1885).

125) Brief an *Legendre* 1828 (Oeuvres 2, p. 277) 1, p. 545 (1829); 2, p. 206; vgl. *Stickelberger,* J. f. Math. 82 (1876).

Die Bedingungen dafür, dass das Integral einer algebraischen Funktion selbst algebraisch sei, hat *Liouville*[126]) zuerst näher untersucht. Sie ergeben sich mit Formel (13) nach *Weierstrass* einfach in der Weise, dass alle Grössen $C_\nu, g_\alpha, g_{p+\alpha}$ verschwinden müssen, damit das Integral $\int F(x, y)\,dx$ eine algebraische Funktion sei; zugleich entnimmt man aus (13) auch unmittelbar den Ausdruck des Integrals in algebraischer Form. Ein anderes Verfahren giebt *Ptaszycki*[127]).

Schwieriger ist die Entscheidung, wenn auch Logarithmen algebraischer Funktionen zugelassen werden, da es dann auf die arithmetische Beschaffenheit der Koeffizienten C_ν in (13) ankommt. Auch sind hier nur elliptische und hyperelliptische Integrale genauer bearbeitet[128]).

37. Klein's kanonische Kurven[129]). Eine besonders einfache Darstellung gestatten die Integrale und weitere aus ihnen herzuleitende transcendente Formen, wenn das algebraische Gebilde als ein- oder mehrfach überdeckte Kurve des Gebietes von n homogenen Variablen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (für $n = 2$ also als *Riemann*'sche Fläche) von solcher Beschaffenheit gegeben ist, dass man die Differentiale erster Gattung du_α proportional p ganzen algebraischen (nicht notwendig rationalen) Formen φ_α von der Dimension d setzen kann, welche keine Nullstelle gemeinsam haben. Durch den von α unabhängigen Quotienten

$$d\omega_z = \frac{du_\alpha}{\varphi_\alpha} \tag{15}$$

ist dann eine kanonische Differentialform definiert, mit der Eigenschaft, dass in der Entwicklung eines Differentials nach dem Parameter t in der Umgebung einer Stelle z

$$X\,d\omega_z = dt\,(t^\nu \mathfrak{P}(t)),$$

wo X eine Form von der Dimension d und $\mathfrak{P}(t)$ eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem ersten Glied ist, der Exponent ν lediglich die Ordnung des Null- oder Unendlichwerdens der Form X angiebt.

---

126) Par. sav. [étr.] 5 (1838). Er führt den *Abel*'schen Satz auf *Leibniz* und *Laplace* zurück. Es sind wohl die Bemerkungen in der Einleitung zum ersten Buch der Th. anal. des probab. gemeint.

127) Acta math. 11 (1888).

128) *Abel*, Oeuvres 1 (1826), p. 104 = J. f. Math. 1; *Weierstrass*, Berl. Ber. 1857 (Werke 1, p. 227); *Tschebyscheff*, J. f. Math. (1) 18, (2) 2; *L. Raffy*, Ann. éc. norm. (3) 2 (1885); *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 5 (1888); *G. Pick*, Math. Ann. 32 (1888); *E. Goursat*, Par. C. R. 118 (1894); *L. Koenigsberger*, Math. Ann. 11 (1877); vgl. dazu *Ptaszycki*, Math. Ann. 16 (1880).

129) Math. Ann. 36 (1890).

Die Dimension d ist dann ein Teiler von $2p-2$ und jede ganze Form der Dimension d auch eine Form φ. Das kanonische Differential lässt sich schreiben

$$(16)\qquad d\omega_z = \frac{\alpha_z \beta_{dz} - \alpha_{dz} \beta_z}{\Gamma_{d+2}(z_1, \ldots, z_n)},$$

wo $\Gamma_{d+2}(z_1, \ldots, z_n)$ eine bestimmte ganze Form von der Dimension $d+2$ bedeutet.

Das Integral dritter Gattung lässt sich in der Form

$$(17)\qquad P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x d\omega_z \int_\eta^\xi d\omega_\zeta \frac{\psi(z, \zeta; \alpha\beta)}{(\alpha_z\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_z)^2}$$

darstellen, wo $\psi(z, \zeta; \alpha\beta)$ in z und ζ eine ganze Form von der Dimension $d+2$ bedeutet, welche von der zweiten Ordnung verschwindet, wenn $(\alpha_z\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_z)$ Null ist, ohne dass z mit ζ zusammenfällt und welche für $z = \zeta$ mit $\Gamma_{d+2}^2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ identisch wird. Die hienach in ψ noch willkürlichen Grössen hat man in den bisher ausgeführten Fällen so zu bestimmen gesucht, dass ψ eine ganze rationale Kovariante der zur Definition des Gebildes verwendeten Formen im gewöhnlichen Sinne wird, also auch rational ganz in den Koeffizienten dieser Formen ist[130]).

Solche kanonische Kurven sind in erster Linie die Normalkurve der φ auch im hyperelliptischen Fall, der vollständige singularitätenfreie Schnitt von $n-2$ algebraischen Mannigfaltigkeiten von $n-2$ Dimensionen im Gebiet von n homogenen Variablen[131]), die ebene singularitätenfreie Kurve n^{ter} Ordnung[132]) und gewisse durch binomische Gleichungen definierte Gebilde[133]), sowie insbesondere die gewöhnliche Form des hyperelliptischen Gebildes[134]), also die zweiblättrigen *Riemann*'schen Flächen. Im letzterwähnten Fall lautet das normierte Integral dritter Gattung

$$(18)\qquad Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x d\omega_z \int_\eta^\zeta d\omega_\zeta \frac{\sqrt{a_z^{2p+2}}\sqrt{a_\zeta^{2p+2}} + a_z^{p+1} a_\zeta^{p+1}}{2(z\zeta)^2},$$

wo a_z^{2p+2} diejenige binäre Form, deren Nullstellen die Verzweigungs-

---

130) *G. Pick*, Math. Ann. 29 (1886); *F. Klein* l. c.; *E. Pascal*, Ann. di mat. (2) 17 (1889).

131) *H. White*, Acta Leop. 57 (1891) (= Göttinger Diss.); Math. Ann. 36.

132) *G. Pick* l. c.

133) *W. F. Osgood*, Diss. Erlangen 1890.

134) *F. Klein*, Math. Ann. 27 (1886), 32 (1888); *H. Burkhardt*, Math. Ann. 32 (1888).

stellen des hyperelliptischen Gebildes definieren, bedeutet, und die kanonische Differentialform

$$d\omega_z = \frac{(z\,dz)}{\sqrt{a_z^{2p+2}}}$$

ist. Das hieraus zu entwickelnde Formelsystem hat genauen Anschluss an die *Weierstrass*'sche Theorie der elliptischen Funktionen. Das Heranziehen invariantentheoretischer Gesichtspunkte findet seine weitere Verwertung in der Theorie der zugehörigen Theta- und Sigmafunktionen (II B 6 b).

38. Primfunktionen und Primformen[135]. Während die Darstellung der algebraischen Funktionen als Aggregate von Integralen zweiter Gattung nur die Unendlichkeitsstellen zur Geltung bringt, erfordert die Darstellung derselben als Produkt von einzelnen Faktoren, deren jeder nur an einer Stelle Null oder unendlich wird, eine Erweiterung der Hülfsmittel, weil eindeutige Funktionen dieser Art ohne wesentlich singuläre Stellen für $p > 0$ am algebraischen Gebilde nicht existieren. Diese kann auf zweierlei Art vorgenommen werden, indem man entweder mit *Weierstrass* wesentliche Singularitäten an p bestimmten festgewählten Stellen — welche auch vereinigt liegen können — zulässt, oder aber wie *Klein* unter Einführung homogener Variablen Formen bildet, welche dann keine wesentliche Singularität mehr zeigen, jedoch mehrdeutig sind. In beiden Fällen müssen noch gewisse accessorische Bildungen hinzutreten, um die Darstellung der algebraischen Funktionen zu leisten.

Weierstrass[136]) erklärt als „Primfunktion"

$$E(x, y;\, x_1, y_1 \,|\, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} H(x, y;\, x', y')\,dx'} \tag{19}$$

welcher Ausdruck eindeutig von der Stelle (x, y) abhängt, in (x_1, y_1) von der ersten Ordnung Null, in (x_0, y_0) von der ersten Ordnung unendlich wird und die Stellen (a_α, b_α) zu wesentlich singulären hat. Von den Stellen (x_0, y_0), (x_1, y_1) ist dagegen E nicht eindeutig abhängig, sondern ändert sich bei Durchlaufung eines Periodenweges um Faktoren, welche als Funktionen von (x, y) betrachtet nirgends verschwinden und sich, entsprechend den $2p$ Periodenwegen, durch $2p$ unter ihnen als Produkte ganzer Potenzen darstellen lassen. Diese

---

135) Siehe auch I B 1 c, Nr. **9**.

136) Brief an *Schwarz* (1875), Werke 2, p. 235; *Brill* und *Nöther*, Berl. Ber. p. 429; *Schottky*, J. f. Math. 101; vgl. auch *Baker*, Abel. Theor., ch. 7, 12; *O Biermann*, Wien. Ber. 87 (1883), 105 (1896); Wien. Monatsh. 3 (1892).

letzteren — mit $E_\alpha(x, y)$ bezeichnet ($\alpha = 1, \ldots, 2p$) — heissen nichtverschwindende Primfunktionen. Die Integrale der drei Gattungen lassen sich durch Logarithmen solcher Primfunktionen darstellen, die algebraischen Funktionen als Produkte von Funktionen der Form (19), deren jede nur eine Null- und eine Unendlichkeitsstelle der gegebenen algebraischen Funktion zu ebensolchen hat, und nicht verschwindenden Funktionen E, welche übrigens durch passende Wahl des Integrationsweges in (19) mit den andern vereinigt werden können. Diese letzteren spielen hier die Rolle von „Einheiten", während die durch (19) definierten Funktionen den Primidealen analog gesetzt werden können. *Weierstrass* giebt auch Andeutungen über die Reihenentwicklung der Primfunktionen, deren weitere Bearbeitung erwünscht wäre. Auf Grund der *Weierstrass*'schen Bildungen, welche noch verschiedener Modifikationen fähig sind, hat *Günther*[137]) die Sätze von *Weierstrass* und *Mittag-Leffler* über die Darstellung eindeutiger Funktionen[138]) auf solche Funktionen ausgedehnt, welche auf einem algebraischen Gebilde eindeutig sind, nachdem schon früher *Appell*[139]) die gleiche Aufgabe in anderer Weise behandelt hatte.

39. Fortsetzung. *Klein*[140]) führt eine Primform ein durch die Formel

$$\Omega(x, y) = \lim_{dx=0,\, dy=0} \sqrt{d\omega_x\, d\omega_y\, e^{-P_{xy}^{x+dx,\, y+dy}}},$$

wobei wieder die Bezeichnung von Nr. **37** aufgenommen ist und insbesondere das einzelne Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ mit einem Buchstaben x bezeichnet ist, und $P_{\xi\eta}^{xy}$ irgend ein Integral dritter Gattung von der Form (6) in Nr. **32** ist. Sie verschwindet nur für $x = y$ und ist sonst überall endlich und bestimmt. Bei Durchlaufung eines Periodenweges seitens x oder y ändert sie sich um einen Exponentialfaktor von der Form

$$\pm\, e^{\sum_\alpha \tilde{\eta}_\alpha \left(u_\alpha^{xy} + \frac{\tilde{\omega}_\alpha}{2}\right)}, \tag{21}$$

wo das Vorzeichen von dem Periodenweg abhängt und $-\tilde{\eta}_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha$ die auf diesem Weg erlangten Zuwächse der Normalkombinationen und der zugehörigen Integrale erster Gattung sind. Ebenso kann die

137) J. f. Math. 109 (1892). Vgl. auch *K. Ott,* Wien. Monatsh. 4 (1893).

138) II B 1.

139) Acta math. 1 (1883). Vgl. auch *G. Vitali,* Rend. Pal. 1900.

140) Math. Ann. 36 (1890). Früher für hyperelliptische Gebilde, s. Note 134. Siehe auch *G. Pick,* Math. Ann. 29 (1887).

Primform durch Modifikation des Integrationsweges in (20) um Faktoren von der Form (21) geändert werden, welche also hier die Rolle von „Einheiten“ spielen.

Der in (20) angedeutete Grenzübergang kann in verschiedener Weise ausgeführt werden und ergiebt z. B. für ein kanonisches Gebilde[141]):

$$\text{(22)} \quad \Omega(x, y) = \frac{\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x}{\sqrt{\Gamma_{d+2}(x_1, \ldots, x_n; \alpha\beta)\, \Gamma_{d+2}(y_1, \ldots, y_n; \alpha\beta)}}\, e^{\frac{1}{2}\Sigma P_{xy}^{x^{(i)} y^{(i)}}}$$

in der Bezeichnung von Nr. **37**, wobei noch $x^{(i)}, y^{(i)}$ diejenigen Stellen bedeuten, an welchen $\alpha_x \beta_z - \alpha_z \beta_x$ resp. $\alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y$, als Formen von z betrachtet, ausser x resp. y noch verschwinden. Die so erhaltene Primform stimmt für $p = 1$ genau mit der Funktion $\sigma(u^{xy})$ überein.

Zu dieser Primform tritt noch eine „Mittelform“, welche am algebraischen Gebilde ebenfalls unverzweigt ist, aber nirgends verschwindet. Sie wird für $2p - 2 = md$ definiert durch

$$\text{(23)} \qquad \mu(x)^m = \frac{\Pi\, \Omega(x, c^{(i)})}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \cdots + C_n x_n},$$

wo die $c^{(i)}$ die Nullstellen des Nenners bedeuten, von dessen spezieller Wahl die Mittelform selbst abgesehen von Einheiten unabhängig ist. Ihre Änderung bei Durchlaufung eines Periodenweges ergiebt sich aus (21). Diese Mittelform erlaubt dann auch die Darstellung algebraischer Formen als ein Produkt von Prim- und Mittelformen.

Die *Klein*'schen Ansätze werden von *Ritter*, *Fricke* und neuerdings von *Wellstein* weiter verfolgt[141a]) und präzisiert. Insbesondere giebt der letztere eine explicite Darstellung der in Betracht kommenden Funktionen bei beliebiger irreducibler Gleichung $f(x, y) = 0$.

40. Wurzelfunktionen und -Formen. Multiplikative Funktionen und Formen. Schon *Riemann*[142]) hat für die Untersuchung der Umkehrungsfunktionen der *Abel*'schen Integrale auch solche Funktionen betrachtet, welche am algebraischen Gebilde zwar überall unverzweigt sind, jedoch auf Periodenwegen sich mit n^{ten} Einheitswurzeln multiplizieren. Diese lassen sich als n^{te} Wurzeln algebraischer Funktionen darstellen und heissen daher Wurzelfunktionen[142a]), die entsprechenden homo-

---

141) Math. Ann. 36 (1890); eine andere Formel in den autogr. Vorles. über Riemann'sche Flächen.

141a) *E. Ritter,* Math. Ann. 41, 44 (1892, 94); *R. Fricke*, Gött. Nachr. 1900; *J. Wellstein*, Gött. Nachr. 1900.

142) A. F., Art. 27. Die Multiplikatoren ± 1 auch bei *Roch,* Habilit.-Schr., Halle 1863.

142a) Nach *Weber,* Abel'sche Funktionen, für $p = 3$.

genen Formen Wurzelformen[142b]). Näheres über sie wird in II B 6 a beigebracht werden. Allgemeinere Multiplikatoren hat dann *Prym*[143]) zugelassen und auch die Integrale derselben herangezogen. *Appell*[144]) hat diese Funktionen eingehend untersucht. *Hurwitz*[145]) hat auch solche Funktionen in Betracht gezogen, welche ausserdem in bestimmter Weise auf dem Gebilde verzweigt sind. *Ritter*[146]) hat die multiplikativen Formen mit Hülfe der *Klein*'schen Prim- und Mittelformen eingehend untersucht. Die Stellung der algebraischen Formen[147]) innerhalb der Gesamtheit der multiplikativen Formen erhält dadurch eine neue Beleuchtung. Die wichtigsten hier gewonnenen Ergebnisse betreffen die Erweiterung des *Riemann-Roch*'schen Satzes und die Theorie der automorphen Funktionen (II B 6 c)[148]). Von Anwendungen sind *Appell*'s[144]) Entwicklungen der hyperelliptischen Integrale in trigonometrische Reihen zu nennen.

C. Das Abel'sche Theorem.

41. Das Abel'sche Theorem. Anschliessend an das Additionstheorem der elliptischen Integrale unterzog *Abel*[149]) Summen von Interalen von gleichen Integranden, zwischen deren Grenzen aber algebraische Relationen bestehen, der Untersuchung. Er legt eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ zu Grunde, neben welche er eine zweite $g(x, y) = 0$ stellt, von deren Koeffizienten er sich einige $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ veränderlich denkt. Die gemeinsamen Lösungen $(x_\nu y_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots r)$ der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ können dann als Funktionen der a aufgefasst werden. Wird nun — unter $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x, y verstanden — die Summe

$$\sum_1^r R(x_\nu y_\nu)\, dx_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} G(a)\, da_\lambda \tag{24}$$

142b) *M. Nöther,* Math. Ann. 28.

143) J. f. Math. 71 (1870).

144) Acta math. 13 (1890); *E. Picard,* J. d. math. 1889; Amer. J. of math. 1894; *E. Landfriedt,* Toul. Ann. 9 G (1895).

145) Gött. Nachr. 1892; Math. Ann. 41 (1892).

146) Math. Ann. 46 (1895), 47 (1896).

147) Nach anderer Richtung geht *G. Pick,* Gött. N. 1894, Math. Ann. 1898.

148) Vgl. *Klein-Fricke,* Automorphe Funktionen II 1 (1901).

149) Par. sav. [étr.] 7 (1841), (prés. 1826) (= Oeuvres S. u. L. 1, p. 145), J. f. Math. 3 (1828) (= Oeuvres 1, p. 444), J. f. Math. 4 (1829) (= Oeuvres 1, p. 515). Den Namen führt das Theorem nach *Jacobi*'s Vorschlag J. f. Math. 8 (Werke 1, p. 373) und J. f. Math. 9 (Werke 2, p. 7); hier anschliessend *Rowe,* Phil. Trans. 1881; *A. Cayley,* ebenda; *F. Baker,* Cambr. Trans. 15, Math. Ann. 45.

als Differential nach den Grössen a dargestellt, so sind die $G(a)$ rationale Funktionen der a und darum die Summe rechts in (24) das Differential eines algebraisch logarithmischen Ausdruckes. Werden hier die a wieder durch die $x_\nu y_\nu$ ausgedrückt, und zwischen zwei solchen Wertsystemen der $x_\nu y_\nu$ integriert, welche zwei verschiedenen Wertsystemen der a_λ entsprechen, so ergiebt sich aus (24):

(25) $$\sum_{\nu=1}^{r} \int_{(x_\nu y_\nu)}^{(x'_\nu y'_\nu)} R(x,y)\,dx$$

$$= \text{algebr. logar. Funktionen von } (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots; x'_\nu y'_\nu, \ldots, x'_r y'_r).$$

Dieser Satz giebt das *Abel'sche Theorem* in seiner ursprünglichen Form. *Abel* selbst hat den Inhalt dieses Theorems wesentlich vertieft durch die Untersuchung, wie viele von den oberen Grenzen in (25) noch willkürlich bleiben, wenn die unteren Grenzen gegeben sind. Er findet, dass die Anzahl der durch die übrigen bestimmten oberen Grenzen eine nur von der Beschaffenheit von $f(x, y) = 0$ abhängige Zahl ist, welche mit dem späteren *Riemann*'schen Geschlecht p übereinstimmt. In der That, schreibt man die Gleichung $g(x,y) = 0$ in der Form $g_1(x, y)/g_2(x, y) = a$, wo nun a als einziger variabler Koeffizient genommen ist, so erkennt man sofort, dass die oberen und unteren Grenzen in (25) lediglich zu einander äquivalente Systeme von Stellen des algebraischen Gebildes zu sein brauchen, und hier sind in allen Fällen höchstens p Stellen eines Systems durch die übrigen mitbestimmt. Damit ergiebt die Gleichung (25) die Reduktion einer Summe von beliebig vielen Integralen mit demselben Integranden, aber verschiedenen Grenzen, auf eine Summe von höchstens p Integralen der gleichen Art und gegebenen unteren Grenzen, deren obere Grenzen algebraisch durch die Grenzen der vorgelegten Integrale bestimmt sind, und algebraisch-logarithmische Summanden. Als ein solches Reduktionstheorem hat auch *Abel* selbst sein Theorem in erster Linie aufgefasst und ist eben dadurch dazu geführt worden, die Abhängigkeit äquivalenter Systeme von Stellen zu erkennen und der Hauptsache nach festzulegen, eine Erkenntnis, welche den Schlüssel zum Verständnis der Theorie der algebraischen Funktionen bildet, welche überdies bei *Abel* zum ersten Mal einer Untersuchung unterworfen werden. *Abel* hat weiter sein Augenmerk auf diejenigen Bedingungen gerichtet, unter denen in (25) der algebraisch logarithmische Teil wegfällt, und gefunden, dass mindestens p solche linear-unabhängige Funktionen $R(x, y)$ existieren. Die Einteilung der Integrale, je nachdem in der zugehörigen Gleichung (25) rechts eine

Konstante, eine algebraische Funktion, oder nur ein Logarithmus steht, in Integrale erster, zweiter, dritter Gattung ist für die ältere Litteratur bis *Riemann* und vereinzelt auch noch später massgebend geblieben, trifft aber nicht völlig mit der *Riemann*'schen zusammen[150]. Für hyperelliptische und eine allgemeine Klasse binomischer Gleichungen hat *Abel* selbst sein Theorem ins einzelne dargelegt.

42. Das Abel'sche Theorem für die drei Gattungen der Integrale; spätere Beweise. Sind x_ν, y_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ zwei Systeme äquivalenter Stellen und r eine algebraische Funktion, welche die Stellen x zu Nullstellen, die Stellen y zu Unendlichkeitsstellen hat, bezeichnet ferner wie bisher $u_\alpha^{x, y}$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$ ein System von p linear unabhängigen Integralen erster Gattung genommen zwischen den Grenzen y, x, so gilt das System von Gleichungen

$$(26) \qquad \sum_{\nu=1}^{r} u_\alpha^{x_\nu y_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{2p} m_\varkappa \omega_{\alpha\varkappa} \qquad (\alpha = 1, \ldots, p),$$

wo die m ganze Zahlen bedeuten, welche von dem Integrationsweg in den einzelnen Summanden aber nicht von den Stellen x_ν, y_ν abhängen.

Für die Integrale dritter Gattung von der Form (6) gilt ferner die Gleichung

$$(27) \qquad \sum_{\nu=1}^{r} P_{\xi\eta}^{x_\nu, y_\nu} = \log \frac{r(\xi)}{r(\eta)} + \sum_{\varkappa=1}^{2p} m_\varkappa P_\varkappa,$$

wenn mit P_ν die Perioden des Integrals an den Querschnitten bezeichnet werden. Hieraus ergiebt sich durch Differentiation nach ξ

$$(28) \qquad \sum_{\nu=1}^{r} E_\xi^{x_\nu y_\nu} = \frac{d r(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{1}{r(\xi)} + \sum_{\varkappa=1}^{2p} m E_\varkappa$$

für die Integrale zweiter Gattung.

Der Beweis dieser Gleichungen ist auf verschiedenen Wegen erbracht worden, und zwar durch direkte algebraische Umformung der Differentialsumme links[151], durch funktionentheoretische Untersuchung der Integralsumme links unter Einführung von r als unabhängiger

---

150) Vgl. *Brill* und *Nöther*, Ber., p. 217.

151) *Clebsch* u. *Gordan*, A. F., p. 34 ff. auf Grund einer *Jacobi*'schen Identität, J. f. Math. 14 (1835) = Werke 3, p. 285; *A. Harnack*, Math. Ann. 9 (1875); *A. Brill* bei *Clebsch-Lindemann*, p. 812 ff. Für hyperelliptische Integrale *Jacobi*, J. f. Math. 30 (1845); über *Minding*, *Broch*, *Jürgensen*, *Rosenhain* siehe *Brill* u. *Nöther*, Ber. p. 229; *Boole*, Phil. Trans. 1857; *Cayley*, Amer. J. of math. 5 (1882); *A. R. Forsyth*, Phil. Trans. 1883; *M. Nöther*, Math. Ann. 37 (1890).

Variablen[152]), durch Integration von $U d \log r$[153]) um die ganze Begrenzung der *Riemann*'schen Fläche ($U =$ einem allgemeinen *Abel*schen Integral), durch Anwendung des Residuensatzes auf[154])

$$\frac{dU}{dx} \frac{d \log r}{dt},$$

wovon die letzten beiden Wege ohne Weitläufigkeiten auch bei allgemeinem U die explicite Darstellung der rechten Seite in (25) geben; endlich aus den Bedingungen regulären Verhaltens an den Stellen $(a b)$ in der *Weierstrass*'schen Darstellung von r durch Primfunktionen für die erste und zweite Gattung, während für die dritte Gattung diese Darstellung selbst bei Übergang zu den Logarithmen das Theorem liefert[155]).

43. Die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems. Anschliessend an *Euler*'s Ansatz für das Additionstheorem der elliptischen Integrale hat *Jacobi*[156]) im hyperelliptischen Fall das System von Differentialgleichungen in Betracht gezogen:

$$(29) \qquad \sum_{\nu=1}^{p+1} \frac{x_\nu^\lambda \, dx_\nu}{\sqrt{f(x_\nu)}} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1),$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $2p + 2$ bedeutet, und auf Grund des *Abel*'schen Theorems vollständig integriert. Setzt man nämlich bei direkter Integration die rechts auftretenden willkürlichen Konstanten in die Form einer Summe von p Integralen der gleichen Form wie links, und nimmt nun die oberen Grenzen dieser als Integrationskonstante, so ergiebt das *Abel*'sche Theorem unmittelbar diese oberen Grenzen als algebraische Funktionen der x, und damit die Integration des Systems in algebraischer Form. Indem nun *Jacobi* diese algebraischen Integralgleichungen des Systems (29) direkt herleitet, gelangt er zu einem neuen Beweise des *Abel*'schen Theorems[157]). Über die Anwendungen der so erhaltenen Formeln auf

152) *Riemann*, A. F., Art. 14.

153) *Riemann*, A. F., Art. 26; *Clebsch* u. *Gordan*, A. F., § 37; *H. Weber*, Math. Ann. 8 (1874); vgl. das Lehrbuch von *Stahl*, p. 143.

154) *Cauchy*, Par. C. R. 23 (1846), p. 321 = Werke (1) 10, p. 80; *Weierstrass* (in Vorlesungen). Siehe auch *Baker*, Abelian Funct.

155) *Weierstrass* Brief an Schwarz = Werke 1, p. 235.

156) J. f. Math. 9 (1832) = Werke 2, p. 5; J. f. Math. 13 (1835) = Werke 2, p. 23.

157) J. f. Math. 24 (1842) = Werke 2, p. 65. Dazu *Haedenkamp*, J. f. Math. 25 (1843); *Richelot*, J. f. Math. 23, 25 (1842/43). Ferner *Jacobi*, J. f. Math. 32 (1846) = Werke 2, p. 135; *Hermite*, Par. C. R. 18 = J. de math. 9; *Weierstrass*,

Geometrie und Mechanik[158]) siehe III C 4, III D 9, 10. Diese Auffassung des *Abel*'schen Theorems war es auch, welche *Jacobi* zur erfolgreichen Formulierung des Umkehrproblems der *Abel*'schen Integrale führte (II B 6 b). Allgemein hat *Riemann*[159]) auf Grund des *Abel*'schen Theorems gezeigt, dass das mit den Differentialen erster Gattung gebildete System von Differentialgleichungen

$$(30) \qquad \sum_{\nu=1}^{p+1} du_\alpha(x_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

vollständig integriert wird durch die zu beliebigen $p+1$ Stellen äquivalenten Stellen, wo bei besonderen Lagen der angenommenen Stellen auch eine oder mehrere fest sein können, sowie dass insbesondere das System

$$(31) \qquad \sum_{\nu=1}^{2p-2} du_\alpha(x_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p)$$

durch die $2p-2$ beweglichen Nullstellen einer φ integriert wird, wenn diese als Funktionen der $p-1$ willkürlichen Konstanten der φ aufgefasst werden. Solche Stellen heissen dann durch eine φ verknüpft.

44. Die Umkehrung des Abel'schen Theorems und die Erweiterung der Umkehrung. Auf Grund der eben berichteten Auffassung hat wohl allgemein zuerst *Clebsch*[160]) ausgesprochen, dass umgekehrt das Bestehen der p Relationen (26) zwischen zwei Systemen von je r Stellen x_ν und y_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ auch zur Folge hat, dass die beiden Systeme äquivalent sind, das *Abel*'sche Theorem also auch umkehrbar ist. Die Relationen (27), (28) sind daher eine Folge des Bestehens von (26). Dies ergiebt sich auch direkt aus der Untersuchung der Summe links in (27) oder aus der Darstellung einer Funktion, welche die Stellen x zu Null-, die Stellen y zu Unendlichkeitsstellen hat. Dieses Theorem bildet die Grundlage der ergebnissreichen Anwendungen, welche *Clebsch* von dem *Abel*'schen Theorem auf die Theorie der algebraischen Kurven gemacht hat[161]). Die alge-

---

Werke 1, p. 267; *Cauchy,* Par. C. R. 40 (1855); *Brioschi*, J. f. Math. 55 (1858); *Henrici,* 7. f. Math. 65 (1865); *Salvert,* Par. C. R. 116 (1893); Brux. Soc. 18 (1894).

158) *Jacobi*, Vorles. über Dynamik, p. 231; *Haedenkamp* l. c.

159) *Riemann,* A. F., Art. 14, 15, 16, 23.

160) J. f. Math. 63 (1864), 64 (1865). Spezielle Fälle bereits bei *Riemann* (Note 159). Das Theorem selbst tritt zuerst meist als Durchgangspunkt in der Theorie des *Jacobi*'schen Umkehrproblems auf (II B 6 c).

161) III C 2. Eine Übersicht bei *Clebsch-Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie.

braische Begründung der so erhaltenen Schnittpunktsätze war auch der Anstoss für die Arbeiten von *Brill* und *Nöther*.

Die Umkehrung des *Abel*'schen Theorems kann erweitert werden, indem man auch Integrale zweiter und dritter Gattung heranzieht. Bezeichnet man mit $dw_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m + p - 1)$ die $m + p - 1$ linear unabhängigen Differentiale, welche an m Stellen höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden, wenn diese Stellen sämtlich getrennt sind, und welche, falls einige vereinigt liegen sollten, an einer solchen Stelle nicht von höherer Ordnung unendlich werden als Stellen daselbst vereinigt sind, so geben die Gleichungen

$$(32) \quad \sum_{\nu=1}^{r} \int_{y_\nu}^{x_\nu} dw_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{2p} m_\varkappa P_{\lambda,\varkappa} + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu Q_\nu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m + p - 1)$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das System der r Stellen x_ν und der r Stellen y_ν einer Schar äquivalenter Stellen angehört, in welcher auch ein System existiert, von welchem die gegebenen m Stellen einen Teil bilden. Dabei bedeuten $P_{\lambda,\varkappa}$ die Perioden der w_λ an den Querschnitten, $2\pi i Q$ die eventuell vorhandenen logarithmischen Perioden. Das Theorem ergiebt sich unmittelbar durch Untersuchung der zu (27) analogen Summe von Integralen dritter Gattung als Funktionen der Unstetigkeitsstellen[162]). Es lässt sich aber auch als Grenzfall des blos auf Integrale erster Gattung bezogenen Theorems auffassen. Bei geeignetem Zusammenrücken von Verzweigungspunkten, sodass damit eine Erniedrigung des Geschlechtes verbunden ist, geht nämlich ein Teil der Integrale in solche dritter, resp. zweiter Gattung[163]) über. Das nämliche geschieht beim Auftreten neuer Doppel- oder Rückkehrpunkte bei Kurven. Die Erweiterung der Umkehrung wurde zuerst im Anschluss an das erweiterte Umkehrproblem[164]) entwickelt und für die Schnittpunktsysteme nicht adjungierter Kurven verwertet.

45. Anwendungen und Erweiterungen des Abel'schen Theorems. Die wichtigste analytische Anwendung des *Abel*'schen Theorems wurde bereits von *Jacobi*[165]) gemacht, nämlich die Herleitung eines Additions-

162) Vgl. *Nöther,* Math. Ann. 37 (1890), p. 475; *G. Humbert,* J. de math. (4) 3 (1887).

163) *Klein* (1874) nach Math. Ann. 36, p. 61; *Clebsch-Lindemann,* Vorles., p. 807. Für $p = 2$ erläutert den Grenzübergang ausführlich *Burkhardt,* Math. Ann. 36, p. 380 ff.

164) II B 6 c. *Clebsch*, J. f. Math. 64 (1895); *Brill* ebenda; *Clebsch* u. *Gordan,* A. F., p. 270 ff.; *Clebsch-Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie, p. 867.

165) J. f. Math. 13 (1834) = Werke 2, p. 38.

theorems für die *Abel*'schen Funktionen. Von geometrischen Anwendungen ist ausser den bereits genannten von *Clebsch* auf Schnittpunktsätze und von *Jacobi*[166]) und *Liouville*[167]) auf konfokale Mannigfaltigkeiten noch hervorzuheben die Bestimmung von Translationsmannigfaltigkeiten von *Lie*[168]) und die metrischen Sätze über algebraische Kurven von *Humbert*[169]).

Numerische Beispiele hat *Legendre*[170]) gegeben. Mit einer diophantischen Aufgabe bringt es *Jacobi*[171]) in Verbindung.

Inwieweit analoge Theoreme für andere Funktionsklassen — insbesondere durch Differentialgleichungen definierte — gelten, hat *Königsberger*[172]) untersucht. Eine Ausdehnung auf Doppelintegrale hat *Jacobi*[173]) beabsichtigt, doch ist hier nichts näheres überliefert. Auf vollständige Differentiale mehrerer Variablen von besonderer Art hat *Poincaré*[174]) das Theorem erweitert.

D. Ergänzungen.

46. Die Abel'schen Reduktionstheoreme. Die Betrachtung möglichst allgemeiner Beziehungen zwischen *Abel*'schen Integralen, das Problem der Vergleichung von Transcendenten der Integralrechnung, führte *Abel*[175]) zu dem Nachweis, dass in der allgemeinsten algebraischen Relation zwischen solchen Integralen und algebraischen Funktionen die Integrale nur linear mit konstanten Koeffizienten auftreten können. Ein zweites allgemeines Theorem in dieser Richtung, welches *Abel*[176]) der Theorie der elliptischen Funktionen zu Grunde legte, sagt aus, dass, wenn das Integral eines vollständigen algebraischen Differentials

---

166) Siehe Note 158. *R. Lipschitz*, J. f. Math. 74 (1872).

167) J. de math. (11) 12 (1847); *Haedenkamp*, J. f. Math. 25 (1843); *F. Klein*, Math. Ann. 28 (1887); *O. Staude*, Math. Ann. 22 (1883); *F. Sommer*, Math. Ann. 53 (1900).

168) Par. C. R. 114 (1892); Sächs. Ber. 1896, 1897.

169) J. de math. (4) 3, 5, 6 (1887—1890); auch für Doppelintegrale, neuerdings *Ch. Michel*, Ann. éc. norm. (3) 18 (1901).

170) Traité etc. 3, p. 207 ff.

171) J. f. Math. 13 = Werke 2, p. 51.

172) J. f. Math. 90 (1880), 100, 101 (1886, 1887); Münch. Ber. 1885.

173) J. f. Math. 8, p. 415; *Rosenhain*, J. f. Math. 40 (Briefwechsel mit Jacobi); *Scheibner*, Math. Ann. 34 (1889); *M. Nöther*, Math. Ann. 2 (1870); *Picard* et *Simart*, Fonct. algébr. d. deux variables 1 (1897), p. 190. Siehe auch Note 169.

174) Par. C. R. 100 (1885); Amer. J. of Math. 8 (1886).

175) Oeuvres ed. S. et L. 2, p. 206.

176) ibid. 2 (1828), p. 278; 1, p. 546 = J. f. Math. 4 (1829).

$$\int \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \, dx_\nu ,$$

wo die x unabhängige Veränderliche, die P aber rationale Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_\varkappa$ und den x sind, während die y algebraische Funktionen der x sind, durch algebraische und logarithmische Funktionen und elliptische Integrale darstellbar ist, dass dann stets auch eine Reduktion in der Art möglich ist, dass der algebraische Teil, die Logarithmanden und die oberen Grenzen der elliptischen Integrale rational von den x und y abhängen. Dieses Ergebnis kann leicht dahin verallgemeinert werden, dass beim Auftreten von Integralen höheren Geschlechtes in der Reduktion gleichartige Integrale eines bestimmten Geschlechtes p nur in Summen von p solchen auftreten, sodass die symmetrischen Funktionen der oberen Grenzen rational in den x und y sind[177]).

47. Das Problem der Transformation der Abel'schen Integrale. Die letzten Sätze bilden den Ausgangspunkt für die Erweiterung der Probleme der Transformation der elliptischen Integrale. Die Aufgabe verlangt, zwei algebraische Gebilde gleichen Geschlechtes so zu bestimmen, dass die symmetrischen Funktionen von p Stellen des ersten Gebildes rational abhängig sind von p Stellen des zweiten Gebildes[178]). Doch ist dieses Problem vorwiegend von der Theorie der *Abel*'schen Funktionen[179]) aus behandelt worden. Unter welchen Bedingungen eine solche Transformation für $p > 3$ überhaupt stattfindet, ist noch unbekannt[179a]). Die algebraischen Formulierungen sind nur für $p = 2$ ausführlicher diskutiert[180]). Eine mehrdeutige Beziehung algebraischer Gebilde bei *Weber*[180a]).

Das Problem der Teilung und der Multiplikation der *Abel*'schen Integrale liesse ebenfalls auf Grund des *Abel*'schen Theorems eine algebraische Behandlung zu, da es sich hier um die Beziehung zwischen den auf der rechten und linken Seite der Gleichungen

$$n \sum_{i=1}^{r} \int_{y_i}^{x_i} du_\varkappa \equiv \sum_{i=1}^{r} \int_{y'_i}^{x'_i} du_\varkappa \quad \text{(modd Perioden)}$$

auftretenden Grenzen handelt. Auch hier ist auf die Theorie der *Abel*'schen Funktionen zu verweisen (II B 6 b).

177) *Koenigsberger,* Math. Ann. 13, 15, 17; J. f. Math. 85, 86, 90.

178) *Hermite,* Par. C. R. 40 (1855), p. 250.

179) Siehe II B 6 b und II B 7.

179a) Vgl. *F. de Brun,* Stockh. Öfversigt 1897.

180) *Klein-Burkhardt,* Math. Ann. 35 (1889).

180a) J. f. Math. 76 (1873).

In algebraischer Form wird das Problem diskutiert von *Hermite*[181]), für hyperelliptische Integrale bei *Koenigsberger*[182]). In geometrischer Hinsicht führt die Aufgabe auf die Theorie der Berührungskurven[183]), in analytischer auf die Theorie der Wurzelfunktionen. Fallen die Grenzen auf der rechten Seite zusammen, so heisst das Teilungsproblem ein spezielles[184]).

48. Spezielle Reduktionsuntersuchungen. Auch die allgemeine Theorie der Reduktion *Abel*'scher Integrale auf solche niedrigeren Geschlechtes ist vom algebraischen Standpunkt aus noch wenig bearbeitet. Hierher gehören die Sätze, dass die Möglichkeit für eine solche Reduktion bei einem nicht durch algebraisch-logarithmische Funktionen ausdrückbaren Integral auch eine solche für die Integrale erster Gattung nach sich zieht[185]). Ferner, dass wenn ein Integral erster Gattung vom Geschlechte p reduzierbar ist auf ein einzelnes Integral erster Gattung niedrigeren Geschlechtes p', dass dann p' solche Integrale erster Gattung reduzierbar sind[186]). Der Körper des Gebildes vom Geschlechte p enthält dann einen solchen vom Geschlechte p'. Die Untersuchungen vom transcendenten Standpunkt aus — den Periodeneigenschaften — führen nur im Fall der Reduktion auf elliptische Integrale zu völlig abschliessenden Resultaten. Einen Bericht über die Litteratur der Reduktion auf elliptische Integrale giebt *Enneper-Müller*[187]).

Von allgemeinen Untersuchungen heben wir hervor, dass *F. de Brun*[188]) gezeigt hat, wie man durch eine endliche Anzahl von algebraischen Operationen bei einem vorgelegten Gebilde entscheiden kann, ob Reduktion auf elliptische Integrale möglich ist, und dass *Poincaré*[189]) gezeigt hat, dass jedes algebraische Gebilde einem solchen, dessen sämtliche Integrale erster Gattung auf elliptische reduzierbar sind, unendlich benachbart ist. Von Einzelresultaten führen wir an:

Die Reduktion des Integrals

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa x)(1-\lambda x)(1-\varkappa\lambda x)}}$$

181) Par. C. R. 17 (1843).

182) Vorles. über hyperellipt. Integrale 1878.

183) *Clebsch-Lindemann,* Vorles. über Geometrie, p. 838 ff.

184) *Clebsch* u. *Gordan,* A. F. § 67 ff.; vgl. auch I B 3 c, d, Nr. **29**.

185) *K. Weierstrass* bei *S. v. Kowalewski,* Acta math. 4, p. 394 für $p' = 1$.

186) *W. Wirtinger,* Thetafunktionen, Leipzig 1895, p. 73.

187) Elliptische Funktionen, 2. Aufl., Halle 1890, p. 501 ff.

188) Stockh. Öfversigt 1897.

189) Amer. J. of math. 8 (1886).

auf die Summe zweier elliptischer mit verschiedenem Modul durch *Jacobi*[190]), die zusammenfassende Arbeit von *Röthig*[191]), sowie die Arbeiten von *Goursat*[192]) und *Bolza*[193]) als auf algebraischer Grundlage entwickelt. Für die auf transcendenter Grundlage stehenden Untersuchungen von *Weierstrass*, *Picard*, *Poincaré*, *Kowalewski* und die anschliessende Litteratur verweisen wir auf *Baker*[194]).

49. Binomische Integrale, das sind solche, denen eine algebraische Gleichung von der Form

$$y^m = f(x)$$

— unter $f(x)$ eine rationale Funktion verstanden — zu Grunde liegt, sind schon von *Abel*[195]) besonders in Betracht gezogen worden Weitere Untersuchungen bei *Netto*[196]), *Hettner*[197]), *Thomae*[198]), *Pick* und *Ungar*[199]), *Rink*[200]), *Biermann*[201]), *Pick*[202]), *Osgood*[203]), *Ptaszycki*[204]), *Burkhardt*[204a]), *Wellstein*[205]).

50. Hyperelliptische Integrale. Die ältere Behandlungsweise der hyperelliptischen Integrale bevorzugt im Anschluss an *Legendre*'s Entwicklung für elliptische Integrale und mit Rücksicht auf die numerische Berechnung eine Reduktion der ersten Gattung auf die Form

$$\int \frac{A + B \sin^2 \varphi}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)(1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)}} d\varphi,$$

und analog für die übrigen Gattungen. Die Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 können

---

190) J. f. Math. 8 = Werke 1, p. 380.

191) Diss. Berlin 1847; J. f. Math. 56.

192) Darb. Bull. (2) 19 (1895).

193) Math. Ann. 50 (1898), 51 (1899); dort auch weitere Litteratur. Auch *J. C. Kluyver*, Amsterd. Versl. 7 (1898/99).

194) Abel's Theorem etc. 1897, p. 657 ff., auch *A. Krazer* in der Festschrift der Univ. Strassburg 1901.

195) Oeuvres ed. S. et L. 2, p. 209, 272.

196) Berl. Diss. 1870.

197) Berl. Diss. 1877.

198) Über eine spezielle Klasse Abel'scher F., Halle 1877.

199) Wien. Ber. 82 (1880).

200) Zeitschr. Math. Phys. 20 (1884); Quart. J. 19 (1883).

201) Wien. Ber. 87 (1883); Wien. Monatsh. 3 (1892).

202) Wien. Ber. 94 (1886); Math. Ann. 50 (1898).

203) Erlanger Diss. 1890 (Göttingen).

204) Praze mat. fiz. 2 (1890).

204a) Math. Ann. 42, 1892.

205) Math. Ann. 51 (1899); Nova Acta Leop. 74 (1899).

durch geeignete Wahl der Transformation absolut kleiner als Eins gemacht werden, und heissen die *Richelot*'schen Moduln[206]). Sie sind die Doppelverhältnisse, welche drei Verzweigungspunkte mit den drei nach Null, 1, ∞ transformierten bilden.

Dies ist eingehend bei *Richelot*[207]) durchgeführt. *Jacobi*[208]) hat eine Transformation zweiten Grades zur Reduktion auf die Normalform gegeben, welche das hyperelliptische Integral auf die Summe zweier anderer transformiert. *Richelot*[209]) hat ferner eine der *Landen*schen analoge Transformation angegeben, und zur numerischen Berechnung der Integrale ausgebildet.

Die Reihenentwicklung des hyperelliptischen Integrals und seiner Umkehrung in begrenztem Gebiet hat neuerdings *A. Söderblom*[210]) ausführlich behandelt und auch Tabellen für die auftretenden Zahlenkoeffizienten beigefügt.

Rechnerische Bearbeitung der Integrale bei *Roberts*[211]), Kettenbruchentwicklungen bei *Van Vleck*[212]). Eine Verallgemeinerung der *Gauss*'schen Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels bei *Borchardt*[213]) und *Hettner*[214]).

Für die Berechnung der Perioden aus den von *Fuchs* aufgestellten Differentialgleichungen und deren Verwendung zur Auflösung von Gleichungen siehe II B 3, 4; I B 3 f, Nr. **19**, Note 95. Formelsammlung bei *Thomae*[215]).

E. Korrespondenz und singuläre Gebilde.

51. Korrespondenzen auf dem algebraischen Gebilde. Geometrische Probleme führten dazu, den Punkten einer Kurve C diejenigen einer andern C' so algebraisch zuzuordnen, dass einem Punkt von C

206) J. f. Math. 12 (1834), 16 (1837); über die *Borchardt*'schen Moduln Berl. Ber. 1876 = Werke p. 327; J. f. Math. 83 (1877)) s. I B 3 f, Note 98.

207) l. c.; vgl. auch den Bericht *Koenigsberger*'s über *R.*'s Nachlass in *K.*'s Repertorium 1 (1877).

208) J. f. Math. 55 (1858) = Werke 2, p. 365.

209) Astr. Nachr. 13 (1836); Par. C. R. 2, p. 622; J. f. Math. 16 (1837).

210) Göteborgs Vetensk. Samh. Handlingar 1899 (2), p. 127 ff.

211) Ann. di mat. (2) 3, 4 (1869, 1871); Lond. Math. Soc. Proc. 12 (1881); Dubl. Trans. 1881; Abstract on the Add. of ell. and hyperell. integr., Dublin 1871.

212) Amer. J. of math. 16 (1894).

213) J. f. Math. 58 (1861) = Werke, p. 119; Berl. Ber. 1876 = Werke, p. 327; Berl. Abh. 1878 = Werke, p. 373. Coll. in memoriam *Chelini* 1881.

214) J. f. Math. 112 (1893).

215) Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und

α Punkte von C' und umgekehrt einem von C' β von C entsprechen. Eine solche Zuordnung heisst eine Korrespondenz (α, β). Liegen im besondern Fall C und C' vereinigt, so können sich selbst entsprechende Punkte auftreten, *Koincidenzen* genannt. Dieser Ansatz und die Benennung überträgt sich auf jede Form des algebraischen Gebildes. Ist in diesem Fall C vom Geschlecht Null, so liefert das *Chasles*'sche Korrespondenzprinzip[216]) die Anzahl der Koincidenzen gleich $\alpha + \beta$.

Cayley[217]) hat durch Induktion und *Brill*[218]) durch algebraische Untersuchungen die Anzahl der Koincidenzen unter gewissen Bedingungen auf einem Gebilde höheren Geschlechtes zu bestimmen gelehrt. Hierüber und über die Arbeiten von *Zeuthen* und *Bertini* III C 2, 8, 10.

52. Die allgemeine Korrespondenztheorie von Hurwitz und die singulären Gebilde. Die in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen auftretenden Modularkorrespondenzen und die aus ihnen fliessenden Klassenzahlrelationen für quadratische Formen[219]), welche ausserhalb der *Cayley-Brill*'schen Formel stehen, waren für *Hurwitz*[220]) der Anlass zur Entwicklung einer systematischen Theorie, welche die Gesamtheit der auf einem algebraischen Gebilde möglichen Korrespondenzen umfasst. Seine Darstellung bedient sich der Thetafunktionen, kann aber ebenso mit Primfunktionen durchgeführt werden[221]).

Die allgemeinste Korrespondenz kann definiert werden als eine analytische Abhängigkeit zwischen zwei Stellen desselben Gebildes vom Geschlechte p, sodass jeder Stelle x nur α mit x bewegliche und im allgemeinen von x verschiedene Stellen y: $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(\alpha)}$ entsprechen. Dann ergeben sich die p Gleichungen

$$(33) \qquad \sum_{r=1}^{\alpha} u_k(y^{(r)}) = \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden, Halle 1876. Korrekturen hierzu Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884).

216) III C 8, 10. Historische Darstellung bei *C. Segre,* Bibliotheca mathem. 1892. *Brill* u. *Noether,* Ber., p. 530 ff.

217) Par. C. R. 62 (1866) = Coll. Papers 5, Nr. 377; Phil. Trans. 158 (1868) = Papers 6, Nr. 407.

218) *A. Brill*, Math. Ann. 6 (1872).

219) II B 6 c, I C 3, 6.

220) Leipz. Ber. 1885; Math. Ann. 28 (1886).

221) *Klein-Fricke,* Modulfunktionen 2, p. 518; *H. F. Baker,* Abel. Theorem 1897, p. 639 ff.

Werden für die u die transcendent normierten Integrale erster Gattung gewählt, so ergiebt sich hieraus das Bestehen von p^2 Relationen

$$(34) \quad \sum_{l=1}^{p} h_{ki}\tau_{il} + \sum_{i=1}^{p} g_{mi}\tau_{km}\tau_{il} = H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\tau_{ki} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p).$$

Dabei bedeuten die g, h, G, H ganze Zahlen. Je nachdem diese Relationen für die τ_{ik} identisch erfüllt sind oder nicht, scheiden sich die Korrespondenzen in Wertigkeitskorrespondenzen und in singuläre Korrespondenzen. Die erstern sind auf jedem algebraischen Gebilde möglich und unterliegen der *Cayley-Brill*'schen Formel, die letzteren sind dagegen nur auf Gebilden mit spezialisierten Moduln, den *singulären* Gebilden möglich.

Für Wertigkeitskorrespondenzen nehmen die Gleichungen (33) die Gestalt an

$$(35) \qquad \sum_{r=1}^{\alpha} u_k(y^{(r)}) + \gamma u_k(x) = \pi_k,$$

wo die ganze Zahl γ die Wertigkeit der Korrespondenz genannt wird.

Die Korrespondenz kann nun vollständig definiert werden durch die Gleichung

$$(36) \qquad \prod_{r=1}^{\alpha} \Omega(y, y^{(r)}) = 0$$

und die Relationen (33), (34) ermöglichen eine vollständige Diskussion dieser Gleichung.

Hieraus ergiebt sich die Zahl der Koincidenzen allgemein als

$$\alpha + \beta - \sum_{i=1}^{h}(h_{ii} + g_{ii}),$$

welche für Wertigkeitskorrespondenzen in die *Cayley-Brill*'sche Formel

$$\alpha + \beta + 2\gamma p$$

übergeht [222a]).

Ferner folgt, dass jede Korrespondenz von nicht negativer Wertigkeit durch Nullsetzen einer einzigen algebraischen Funktion von x und y definiert werden kann, Korrespondenzen von negativer Wertigkeit hingegen und singuläre Korrespondenzen durch gleichzeitiges Verschwinden zweier algebraischer Funktionen. Auch über die Form dieser Funktionen lassen sich nähere Angaben machen.

Endlich lassen sich alle Korrespondenzen aus nicht mehr als $2p^2$ singulären und Wertigkeitskorrespondenzen mit positiver Wertigkeit zusammensetzen.

222a) 2γ ist stets $< \alpha + \beta$; *H. Burkhardt*, Par. C. R. 126 (1898), p. 1854.

Diese Reduktion auf eine endliche Anzahl von Fundamentalkorrespondenzen lässt es wünschenswert erscheinen, auch auf algebraischem Wege über das Vorhandensein singulärer Korrespondenzen entscheiden zu können. In dieser Richtung fehlt bisher jeder Ansatz.

53. Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Bereits in Nr. **31** war der Satz herangezogen, dass ein algebraisches Gebilde mit $p > 1$ eindeutigen Transformationen in sich, d. i. Korrespondenzen $(1, 1)$ nur in endlicher Anzahl besitzen kann. *Hurwitz* [222]) hat dem folgende Sätze hinzugefügt:

1) Jede eindeutige Transformation eines Gebildes in sich ist periodisch mit einer Periode gleich oder kleiner als $10(p-1)$. *A. Wiman* [223]) hat als genauere Grenze $2(2p+1)$ gegeben.

2) Jedes Gebilde mit einer solchen Transformation von der Periode n kann auf die Form $F(s^n, z) = 0$ gebracht werden.

3) Die Anzahl der verschiedenen Transformationen in sich ist immer kleiner oder höchstens gleich $84(p-1)$. Diese Zahl wird erreicht bei der zu einer G_{168} gehörigen Gleichung

$$x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1 = 0.$$

4) Zu einer vorgelegten endlichen Gruppe k^{ter} Ordnung giebt es immer algebraische Gebilde, welche eine holoedrisch isomorphe Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich gestatten. Einer solchen Gruppe entspricht dann auch eine holoedrisch isomorphe Gruppe von linearen homogenen Transformationen der Integrale erster Gattung. Auch die Mittel, das kleinste Geschlecht, für welches eine solche Gruppe möglich ist zu finden, werden angegeben [224]).

Die *Riemann*'schen Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich werden nach *Klein* [225]) auch als reguläre bezeichnet und können aufgefasst werden als zu *Galois*'schen Resolventen von Gleichungen mit einem Parameter gehörig. Sie sind unter diesem Gesichtspunkt von *W. Dyck* [226]) studiert. Die zugehörigen Kollineationsgruppen sind von *Wiman* [227]) bis $p = 6$ untersucht.

Hurwitz [228]) hat auch solche Gebilde untersucht, auf denen sich algebraische Funktionen bei geschlossenen Wegen in vorgegebener Weise linear gebrochen substituieren.

222) Gött. Nachr. 1887; Math. Ann. 32 (1888); 41 (1893).
223) Stockh. Bih. 21 (1895), p. 4.
224) Math. Ann. 41 (1893).
225) Math. Ann. 14 (1878).
226) Math. Ann. 17 (1880).
227) Stockh. Bih. 21[1] (1895); vgl. auch I B 3f., Nr. **24**.
228) Math. Ann. 39 (1891).

54. Symmetrie und Realität. Den Flächen mit Transformationen in sich sind diejenigen anzureihen, welche konforme Abbildung auf sich selbst, jedoch mit Umlegung der Winkel gestatten. Solche *Riemann*'sche Flächen heissen symmetrische[229]) und unter den zugehörigen algebraischen Gebilden sind stets solche vorhanden, welche durch algebraische Gleichungen mit reellen Koeffizienten definiert werden können und umgekehrt. Im besondern liefern Doppelflächen und berandete Flächen solche Gebilde, wenn sie doppelt überdeckt und die Doppelüberdeckungen längs der eventuellen Randkurven zusammenhängend gedacht werden[230]). Linien, welche bei symmetrischer Umformung in sich übergehen, heissen *Symmetrielinien.* Deren Zahl und Art giebt den Einteilungsgrund für diese Flächen in Arten. Diesen Symmetrielinien entsprechen bei der Darstellung des algebraischen Gebildes als Kurve die reellen Züge. Je nachdem die Fläche nach Zerschneidung längs sämtlicher Symmetrielinien in Stücke zerfällt oder nicht, heisst sie orthosymmetrisch oder diasymmetrisch. Man hat dann bei gegebenem Geschlecht p im Ganzen $p + 1$ Arten von diasymmetrischen und $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten von orthosymmetrischen Flächen. Die Fläche und damit das einzelne algebraische Gebilde einer Art hängt von $3p - 3 + \sigma$ reellen Parametern ab, wo σ die Anzahl der Parameter in den reellen Transformationen der Fläche in sich bedeutet. Für Flächen mit h Randlinien und vom Geschlechte π ergiebt sich damit die Anzahl der Moduln gleich $6\pi + 3h - 6 + \sigma$. Die Realitätsverhältnisse für die Perioden der Integrale erster Gattung[231]) und unter Zuziehung der Theta für Berührungsformen hat *Klein*[232]) untersucht. Die Anzahl der verschiedenen *Riemann*schen Flächen bei einem sich selbst konjugierten System von Verzweigungswerten, welche ebenfalls sich selbst konjugiert sind, hat *Hurwitz*[233]) bestimmt. Eine Aufzählung der regulärsymmetrischen Flächen für $p = 3$ bei *Dyck*[234]).

229) *F. Klein,* Über Riemann's Theorie, Leipzig 1882; autogr. Vorles. über Riemann'sche Flächen 2, p. 118; Math. Ann. 42 (1892).

230) Die ersten Ansätze in dieser Richtung bei *F. Schottky,* J. f. Math. 83; *H. A. Schwarz,* Berl. Ber. 1865; J. f. Math. 70, 75 (Abh. 1, p. 1; 2, p. 65, 211). Die allgemeine Formulierung und die Klassifikation der Flächen und algebr. Gebilde nach ihren Symmetrielinien bei *F. Klein,* Über R. Th., p. 79.

231) *G. Weichold*, Leipz. Diss. 1883; Zeitschr. Math. Phys. 28.

232) Math. Ann. 42 (1892) und autogr. Vorles. l. c.; Gött. Nachr. 1892.

233) Math. Ann. 39 (1891).

234) Math. Ann. 17 (1880).

F. Mehrere Variable.

55. Algebraische Funktionen mehrerer Variablen. Für diese liegen trotz mannigfacher Ansätze kaum nach irgend einer Richtung völlig abgeschlossene Resultate vor. Was das Verhalten solcher Funktionen in der Nähe einer einzelnen Stelle angeht, so ist von *G. Kobb* [235]) gezeigt worden, dass man auch hier den ganzen Wertevorrat der einer algebraischen Gleichung $f(x, y, z) = 0$ genügenden x, y, z durch eine endliche Anzahl von Potenzreihen darstellen kann. Jedoch ist hier ein wesentlicher Unterschied gegen die gleiche Darstellung bei einer Variablen darin begründet, dass singuläre Stellen, z. B. gewöhnliche mehrfache Punkte stets an der Grenze des Geltungsgebietes mehrerer Elemente und nicht im Innern eines derselben liegen. Das Beispiel eines Kegels lässt den Sachverhalt bereits übersehen.

In anderer Weise hat *K. Hensel* [236]) Entwicklungen längs ganzer algebraischer Gebilde erster Stufe gegeben. Er hat auch die Ausdehnung der Idealtheorie [236a]) auf dieses Gebiet in Angriff genommen.

Die Untersuchung der einzelnen Stelle und die Auflösung singulärer Stellen durch Transformation ist von *Nöther* [237]) in Angriff genommen worden. Hierüber III C 5, 8 und *Castelnuovo* und *Enriques* [238]).

Nach diesen Untersuchungen genügt es, im allgemeinen eine Fläche mit blos einer einfachen Doppelkurve und einer endlichen Anzahl von dreifachen Punkten zu Grunde zu legen [235]). Durch Aufsteigen in einen Raum von genügend vielen Dimensionen kann man auch zu einem völlig singularitätenfreien Gebilde gelangen, und zwar genügen nach *Picard* 5 Dimensionen für zwei Variable [239]).

Die Untersuchung wird hier wesentlich erschwert durch den Umstand, dass die birationalen Transformationen nicht ausnahmslos eindeutig umkehrbar sind, sondern Punkte in Kurven und umgekehrt überführen können. Die Existenz solcher Ausnahmekurven zieht ein in gewissem Sinn irreguläres Verhalten der Fläche nach sich. Endlich sind eindeutige Transformationen des Gebildes in sich nicht not-

---

235) J. de math. (4) 8 (1892). Dazu *B. Levi,* Ann. di mat. (2) 26 (1897) Tor. Atti 33 (1897). Siehe auch II B 1, Nr. **46**, Note 254.

236) I B 1 c, Nr. **11**. Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. 1898, 1899. Acta Math. 23 (1900).

236a) *G. Landsberg,* Berl. Ber. 1900.

237) Gött. Nachr. 1869; Math. Ann. 2 (1870); 8 (1875).

238) Math. Ann. 48 (1897).

239) *E. Picard* et *G. Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes 1, Paris 1897, p. 82 ff. Siehe auch 243a).

wendig birational[240]). Aus ihrem Vorhandensein folgen auch hier weitgehende Spezialisierungen der Fläche[241]).

56. Die Geschlechtszahlen der Fläche. *Clebsch*[242]) und in weiterem Sinne *Nöther* haben gezeigt, dass die Anzahl der linear unabhängigen zu einer gegebenen Fläche m^{ter} Ordnung adjungierten Flächen $m - 4^{\text{ter}}$ Ordnung bei birationaler Transformation der Fläche invariant bleibt, und der letztere hat auch die Invarianz der adjungierten Formen $m - 4^{\text{ter}}$ Ordnung Φ_{m-4} selbst dargethan. Dabei ist unter einer adjungierten Fläche eine solche verstanden, die in den singulären Stellen das Verhalten einer ersten Polare zeigt. Die Anzahl der linear-unabhängigen Φ_{m-4} wird als Flächengeschlecht bezeichnet.

Dazu fügt *Nöther* das Kurvengeschlecht, nämlich das Geschlecht einer nicht speziellen Schnittkurve einer adjungierten Fläche $m - 4^{\text{ter}}$ Ordnung mit der gegebenen Fläche. Zwei weitere invariante Zahlen, das numerische Flächengeschlecht und die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte zweier $\Phi_{m-4} = 0$ mit der gegebenen Fläche siehe III C 5, 8.[243a])

Nöther[244]) hat auch die Anzahl der unabhängigen Invarianten gegenüber birationaler Transformation bestimmt als $10(p+1) - 2p'$, wo p und p' das Flächen- und Kurvengeschlecht bedeuten. Er hat auch die Ausdehnung des *Riemann-Roch*'schen Satzes in Angriff genommen[245]).

57. Untersuchungen nach transcendenter Richtung. Hier kommt zu den erwähnten Schwierigkeiten noch hinzu, dass die Theorie der Funktionen mehrerer Variablen überhaupt noch wenig ausgebildet ist. Es ist im besondern noch nicht gelungen, das einzelne algebraische Gebilde durch eine endliche Anzahl von Bestimmungsstücken in ähnlicher Weise festzulegen, wie dies bei den verschiedenen Formen der *Riemann*'schen Fläche möglich ist.

Die Untersuchungen selbst setzen eine eingehende Bearbeitung der Analysis situs[246]) für mehrere Dimensionen voraus. Sie ziehen

240) *Picard*, J. de math. (4) 5 (1889), p. 203 ff.

241) *Castelnuovo* und *Enriques* l. c.

242) Par. C. R. 1868.

243) l. c.

243a) Siehe neuerdings *Castelnuovo* u. *Enriques*, Ann. di mat. (3) 6 (1901).

244) Berl. Ber. 1886.

245) Par. C. R. 1886; siehe auch Note 243a.

246) *E. Picard* et *Simart* l. c., p. 19 ff., dort auch die frühere Litteratur (*Betti*, *Riemann*, *Poincaré*); dazu *Heegard*, Diss. Kopenhagen 1898; *H. Poincaré*, Rend. Pal. 1899.

ferner eine Verallgemeinerung des *Cauchy*'schen Satzes auf mehr Variable heran[247]).

Auf Grund dessen werden behandelt:

1) einfache Integrale vollständiger Differentiale[248]). Diese werden analog den *Abel*'schen Integralen in drei Gattungen geteilt, je nachdem sie überall endlich bleiben, algebraisch oder logarithmisch unendlich werden. Integrale der ersten Gattung existieren nur auf speziellen Flächen und die Existenz zweier unabhängiger solcher Integrale hat zur Folge, dass die Koordinaten der Fläche rational durch hyperelliptische Funktionen darstellbar sind. Auch die Existenz eines solchen Integrals spezialisiert die Fläche in hohem Grade. Auch die Integrale zweiter Gattung reduzieren sich im allgemeinen auf rationale Funktionen.

Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale ist um Eins kleiner als der Linienzusammenhang (connexion lineaire) der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, auf welche das algebraische Gebilde von zwei Variablen bezogen wird[249]).

2) Doppelintegrale. Sie wurden zuerst von *Nöther*[250]) herangezogen und namentlich von *Picard*[251]) studiert. Sie liefern nicht eigentlich Funktionen zweier Variablen, sondern es sind vorwiegend die Integranden und die Integrale über geschlossene Mannigfaltigkeiten, welche in den Vordergrund treten. Als Doppelintegrale erster Gattung werden Integrale von der Form

$$\iint \frac{\Phi_{m-4}\, dx\, dy}{f'z}$$

bezeichnet, wo Φ_{m-4} dieselbe Bedeutung wie in Nr. **56** hat. Sind Integrale vollständiger Differentiale erster Gattung vorhanden, so können aus diesen immer Doppelintegrale hergeleitet werden[252]).

Für die Doppelintegrale zweiter Gattung und eine damit zusammenhängende neue invariante Zahl verweisen wir auf *Picard*[253]).

---

247) *Poincaré*, Acta math. 2 (1883); *Picard*, Traité d'anal. 2, p. 256.

248) *E. Picard*, J. de math. (4) 2 (1886); (4) 5 (1889); Par. C. R. 1897; *Nöther*, Math. Ann. 29 (1887).

249) *Picard* et *Simart* l. c., p. 145 ff.

250) Math. Ann. 2 (1870).

251) l. c.

252) *Picard* l. c.; *Hakon Grönwall*, Stockh. Öfversigt 1896.

253) J. de math. (5) 5 (1899); Par. C. R. 125, 126, 127 (1897—1899); *H. Poincaré*, Par. C. R. 125 (1897).

(Abgeschlossen im Oktober 1901.)

30,00