LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

J.-A. SERRET

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS

DEUTSCH BEARBEITET

VON

AXEL HARNACK

DR., UND PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

ZWEITER BAND: ERSTE HÄLFTE.

INTEGRALRECHNUNG.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1885.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Den zweiten Band des vorliegenden Werkes in zwei Hälften zu teilen, erschien mir aus äusseren Gründen zweckmässig, und war dem Inhalt nach leicht durchführbar. Die zweite Hälfte, deren Erscheinen nicht verzögert werden soll, behandelt die Differentialgleichungen, während die erste die direkten Integrationsprobleme umfasst.

Im Anhange habe ich einen kurzen Grundriss für die Theorie der Fourierschen Reihe hinzugefügt, da diese Theorie im Laufe der letzten Jahre einen gewissen Abschluss erreicht hat, und für die Lehre von den darstellenden Funktionen überhaupt massgebend ist. Ohne dabei die Beweise der Sätze in der gegenwärtig möglichen Allgemeinheit durchzuführen, habe ich doch die Beweismethoden von vornherein so zu formulieren gesucht, dass ihre volle Tragweite ersichtlich wird.

Oktober 1884.

Axel Harnack.

Inhalt

der

ersten Hälfte des zweiten Bandes.

Erstes Kapitel.

Die Integration der Differentiale.

Zweites Kapitel.

Theorie der bestimmten Integrale und der Integrale von Funktionen mehrerer Variabelen.

Drittes Kapitel.

Theorie der Eulerschen Integrale.

Viertes Kapitel.

Die Quadratur und Rektifikation von Kurven.

Fünftes Kapitel.

Die Kubatur der Körper und die Quadratur krummer Flächen. Vielfache Integrale.

Anhang.

Erstes Kapitel.

Die Integration der Differentiale.

Die Aufgabe der Integralrechnung.

406. In der Differentialrechnung haben wir die Regeln kennen gelernt, mittelst welcher die Differentiale verschiedener Ordnungen von Funktionen einer oder mehrerer Variabelen zu berechnen sind. Wir haben ferner gezeigt, wie man gewisse willkürliche Grössen eliminieren kann, indem man gegebene Gleichungen, in denen mehrere Variabele enthalten sind, mit den durch Differentiation aus ihnen abgeleiteten verbindet, und dass man auf diese Weise neue Gleichungen erhält, welche wir *Differentialgleichungen* oder *Systeme von Differentialgleichungen* nannten.

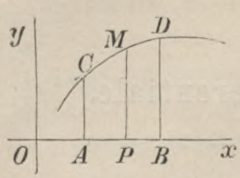
Die Integralrechnung behandelt die umgekehrten Probleme. Ihre Aufgabe ist erstlich die Bestimmung von Funktionen aus ihren Differentialen, zweitens die Untersuchung der Relationen, welche zwischen mehreren Variabelen bestehen, wenn diese gegebenen Differentialgleichungen genügen. Die erste Aufgabe ist in der zweiten enthalten und bildet den einfachsten Fall derselben; eine grosse Zahl wichtiger Fragen knüpft sich an dieselbe, und sie erfordert daher zunächst eine genaue und gründliche Untersuchung.

Wir hatten bereits im ersten Bande mehrfach Gelegenheit, Fragen zu behandeln, welche eigentlich der Integralrechnung angehören. Solche Fragen, die wir vermittelst der fundamentalen Eigenschaften der abgeleiteten Funktionen lösen konnten, sind eine nützliche Vorbereitung auf die Theorien, welche wir nun zu entwickeln haben.

Die unbestimmten und die bestimmten Integrale.

407. Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion der unabhängigen Variabelen x, welche für die reellen Werte von x zwischen den Grenzen x_0 und X stetig ist. Alsdann giebt es, wie wir im § 187 gesehen haben, immer eine stetige Funktion, deren Differential $f(x)\,dx$ ist. Denn wenn man die beiden rechtwinkligen Axen Ox und Oy konstruiert und vermittelst derselben die Kurve CMD darstellt, deren Ordinate y gleich $f(x)$ ist, so wird die Fläche $CAMP$, welche von zwei Ordinaten begrenzt ist, die zu Abscissen gehören, deren Werte zwischen x_0 und X liegen, eine Funktion von x, deren Ableitung $f(x)$ und deren Differential $f(x)\,dx$ ist. Dabei ist die Abscisse, welche zur Anfangsordinate CA gehört, als konstant, die andere, welche zur Endordinate MP gehört, als die Variabele x zu betrachten.

Fig. 1.



Wir wissen ferner (§ 15flg.), dass wenn zwei stetige Funktionen dasselbe Differential haben, ihre Differenz konstant sein muss. Also giebt es unendlich viele stetige Funktionen, deren Differential $f(x)\,dx$ ist; diese Funktionen unterscheiden sich aber nur um eine Konstante. Unsere geometrische Konstruktion zeigt uns die Existenz aller dieser Funktionen an, weil die feste Anfangsordinate CA, von welcher aus die Fläche $ACMP$ gerechnet wird, willkürlich gewählt worden ist. Wenn man an Stelle dieser Ordinate eine andere $C'A'$ wählt, so erhält man eine neue Fläche $A'C'MP$, die sich von der vorigen um eine bestimmte Grösse unterscheidet, und deren Differential ebenfalls gleich $f(x)\,dx$ ist.

Die stetige Funktion, deren Differential $f(x)\,dx$ ist, enthält also eine willkürliche Konstante. Sie heisst das *unbestimmte Integral* oder einfach *das Integral des Differentiales* $f(x)\,dx$, und wird durch das Symbol

$$\int f(x)\,dx$$

dargestellt. Demnach wird, wenn $F(x)$ einen Wert dieses Integrales bezeichnet, d. h. eine der stetigen Funktionen, für welche $f(x)\,dx$ das Differential ist,

1) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
wobei C eine willkürliche Konstante ist.

408. Die Aufgabe der Integration eines gegebenen Differentiales wird zu einer völlig bestimmten, wenn man noch die Bedingung hinzufügt, dass für einen gegebenen Wert x_0 von x das Integral null werden soll. Denn alsdann muss die Konstante in der vorigen Formel so bestimmt werden, dass

$$F(x_0) + C = 0$$

wird, also ist

2) $$\int f(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Dieser Ausdruck stellt die Fläche $ACMP$ dar, bei welcher die Anfangsordinate CA zum Abscissenwert x_0 gehört.

Giebt man auch dem Endwerte x einen bestimmten Wert X, so erhält das Integral (2) einen bestimmten Wert, nämlich

$$F(X) - F(x_0).$$

Man bezeichnet denselben mit

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

und nennt ihn *das bestimmte Integral des Differentiales* $f(x)\,dx$, *gebildet von der unteren Grenze* x_0 *bis zur oberen Grenze* X; es ist also

3) $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Dieses Integral repräsentiert die Fläche $ACDB$, begrenzt von der Kurve, deren Ordinate $f(x)$ ist, von der Abscissenaxe und den beiden Ordinaten CA, DB, welche zu den Abscissen x_0 und X gehören. In den §§ 187 und 188 haben wir aber gesehen: Teilt man das Intervall $X - x_0$ in n gleiche oder ungleiche Teile, die allgemein mit Δx bezeichnet werden, und konstruiert man die Rechtecke, deren Basis diese Teilstrecken und deren Höhe die Ordinaten der Kurve CD in den Anfangspunkten dieser Teilstrecken bilden, so konvergiert die Summe dieser Rechtecke $f(x)\,\Delta x$ nach einer Grenze, welche gleich ist der Fläche $ACDB$, wenn sämtliche Grössen Δx nach 0 konvergieren und demgemäss ihre Anzahl unbegrenzt wächst. Hieraus folgt, dass

$$4)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \sum_{x=x_0}^{x=X} f(x)\,\Delta x$$

ist, und dass man also den folgenden grundlegenden Satz als Definition des bestimmten Integrales hat:

Das bestimmte Integral des Differentiales $f(x)\,dx$, *gebildet zwischen den Grenzen* x_0 *und* X, *ist die Grenze, nach welcher die Summe aus den Werten* $f(x)\,\Delta x$ *konvergiert, wenn* x *von* x_0 *bis* X *variiert und die Teilstrecken* Δx *sämtlich unendlich klein werden.*

Auf Grund dieser Eigenschaft ist das Zeichen $\int$, der Anfangsbuchstabe des Wortes Summe, von Leibniz zur Bezeichnung eines Integrales gewählt worden.

Bei unserer Entwickelung ist nicht vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ immer dasselbe Vorzeichen behält, wenn x von x_0 bis X variiert wird, noch auch, dass die obere Grenze X grösser ist, als die untere Grenze x_0. Ist $X < x_0$, so sind die Inkremente Δx negativ, und jedes Produkt $f(x)\,\Delta x$ ist positiv oder negativ, je nachdem seine Faktoren gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

409. Die Bezeichnung, welche wir zur Darstellung eines bestimmten Integrales benutzten, kann auch für die unbestimmten Integrale verwandt werden. Betrachtet man nämlich in der Gleichung 3) die obere Grenze X des Integrales als variabel und schreibt x an Stelle von X, so folgt

$$5)\qquad \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Dieser Ausdruck repräsentiert einen der Werte des unbestimmten Integrales, dessen Differential $f(x)\,dx$ ist, nämlich denjenigen, welcher für $x = x_0$ null wird. Es ist demnach

$$6)\qquad \int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

wenn C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Die untere Grenze x_0 kann willkürlich gewählt werden, solange nur die Funktion $f(x)$ in dem fixierten Intervalle stetig bleibt. Betrachtet man sie als die willkürliche Kondass der eine Faktor das Differential einer bekannten Funktion v wird. Bezeichnet man dann mit u den andern Faktor, so ist

$$y dx = u \frac{dv}{dx} dx,$$

und nun wird, gemäss der Gleichung 1), das Integral des Differentiales $y dx$ in zwei Teile zerlegt, nämlich in einen integrierten Teil uv und einen noch zu integrierenden $-\int\left(v \frac{du}{dx}\right) dx$. Auf die Integration des Differentiales $\left(v \frac{du}{dx}\right) dx$ ist also die des Differentiales $y dx$ oder $u \frac{dv}{dx} dx$ zurückgeführt, und wenn das neue Differential einfacher ist als das ursprüngliche, so ist die Anwendung dieses Verfahrens von Vorteil. Vorausgesetzt ist dabei, dass auch die Funktion u eine stetige Ableitung $\frac{du}{dx}$ besitzt. Will man das Integral der Gleichung 1) derart bestimmen, dass es für $x = x_0$ null wird, so muss man sich Rechenschaft geben von der willkürlichen Konstante, die nun mit einem der beiden Integrale verbunden ist, z. B. dem auf der rechten Seite. Man kann setzen

$$\int_{x_0}^{x}\left(u \frac{dv}{dx}\right) dx = uv - \int_{x_0}^{x}\left(v \frac{du}{dx}\right) dx + \text{Const.},$$

und da für $x = x_0$ die linke Seite, sowie das Integral auf der rechten Seite verschwinden, so wird

$$0 = u_0 v_0 + C \quad \text{oder} \quad C = -u_0 v_0,$$

wenn man mit u_0 und v_0 die Werte bezeichnet, welche die stetigen Funktionen u und v für $x = x_0$ annehmen. Es ist demnach

$$\int_{x_0}^{x}\left(u \frac{dv}{dx}\right) dx = [uv - u_0 v_0] - \int_{x_0}^{x}\left(v \frac{du}{dx}\right) dx,$$

was man auch bisweilen in der Form schreibt:

$$\int_{x_0}^{x}\left(u \frac{dv}{dx}\right) dx = [uv]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}\left(v \frac{du}{dx}\right) dx.$$

Das Symbol $[uv]_{x_0}^{x}$ bezeichnet dann die Differenz $uv - u_0 v_0$ oder das Integral $\int_{x_0}^{x} \frac{d(uv)}{dx}\, dx.$

415. Beispiele. Im folgenden werden wir Gelegenheit haben, zahlreiche Anwendungen von diesem Integrationsverfahren zu machen; hier sollen nur einige Beispiele gegeben werden.

1. Betrachtet man das Integral

$$\int l(x)\, dx$$

und setzt man:

$$u = l(x), \qquad v = x, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dx}\, dx = dx,$$

so folgt

$$\int l(x)\, dx = x l(x) - \int x \frac{dx}{x} = x l(x) - \int dx.$$

Das letzte Integral ist gleich x plus einer Konstanten. Also ist

$$\int l(x)\, dx = x l(x) - x + C.$$

2. Im Integrale

$$\int x^m e^{-x}\, dx$$

zerlegen wir das Differential in die beiden Faktoren

$$x^m, \; e^{-x}\, dx,$$

von denen der zweite das Differential von $-e^{-x}$ ist. Die Funktionen, welche wir u und v nannten, sind also hier x^m und $-e^{-x}$, und es wird

$$\int x^m e^{-x}\, dx = -x^m e^{-x} + m \int x^{m-1} e^{-x}\, dx.$$

Das gegebene Integral ist demnach auf ein anderes derselben Form gebracht, welches sich nur dadurch von jenem unterscheidet, dass der Exponent m durch $m-1$ ersetzt ist. Ist die Zahl m positiv und grösser als eins, so ist das neue Integral einfacher als das erste; wenn dagegen m negativ ist, so findet das Umgekehrte statt; in diesem Falle kann man die Formel so ansehen, dass das Integral der rechten Seite auf das erste zurückgeführt ist; schreibt man an Stelle von m den Exponenten $-m+1$, so ergiebt dieselbe Formel:

$$\int x^{-m} e^{-x} dx = \frac{x^{1-m} e^{-x}}{1-m} + \frac{1}{1-m} \int x^{1-m} e^{-x} dx.$$

Ist m eine ganze positive Zahl und setzt man zur Abkürzung:

$$u_m = \int_0^x x^m e^{-x} dx, \qquad \alpha_m = - x^m e^{-x},$$

so ist nach der obigen Formel, weil α_m für $x = 0$ verschwindet,

$$u_m = \alpha_m + m\, u_{m-1};$$

giebt man also der Zahl m die Werte 1, 2, 3... bis m, so folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + u_0, \\ u_2 &= \alpha_2 + 2u_1, \\ u_3 &= \alpha_3 + 3u_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_m &= \alpha_m + m\, u_{m-1}. \end{aligned}$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man sie mit $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots \frac{1}{m!}$ multipliziert hat, so wird:

$$\frac{u_m}{m!} = u_0 + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2!} + \frac{\alpha_3}{3!} + \dots \frac{\alpha_m}{m!}.$$

Es ist aber

$$u_0 = \int_0^x e^{-x} dx = \Big[- e^{-x}\Big]_0^x = 1 - e^{-x},$$

also

$$\frac{1}{m!} \int_0^x x^m e^{-x} dx = 1 - \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^m}{m!}\right] e^{-x}.$$

416. Integration vermittelst Substitution. Ein anderes Integrationsverfahren, welches wir noch anzugeben haben, besteht in der Änderung der unabhängigen Variabelen. Dieses und die teilweise Integration bilden die wichtigsten Hilfsmittel in dem Teile der Integralrechnung, mit welchem wir es hier zu thun haben.

Es sei $f(x)\, dx$ ein gegebenes Differential; führt man eine neue unabhängige Variabele t ein, welche mit x durch eine Gleichung

1) $$x = \varphi(t)$$

verbunden ist, so ist

$$dx = \varphi'(t)\,dt,$$

und folglich wird

$$f(x)\,dx = f(\varphi[t])\,\varphi'(t)\,dt = \psi(t)\,dt.$$

Hieraus folgt:

2) $$\int f(x)\,dx = \int \psi(t)\,dt.$$

Kann man das Differential $\psi(t)\,dt$ integrieren, und findet man

$$\int \psi(t)\,dt = \Psi(t) + \text{const},$$

so ist auch

$$\int f(x)\,dx = \Psi(t) + \text{const},$$

und setzt man für t seinen Wert als Funktion von x ein, so erhält man

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{const},$$

wobei $F(x)$ eine bekannte Funktion ist. Dabei hat man indessen darauf zu achten, dass die Beziehung zwischen den Variabelen x und t eine umkehrbar eindeutige ist.

Die Anwendung dieser Substitutionsmethode kann selbst dann von Nutzen sein, wenn sie auch nicht zu einer Integration des gegebenen Differentiales führt. Sie lässt in der That in vielen Fällen das Integral $\int f(x)\,dx$ durch ein anderes einfacheres $\int \psi(t)\,dt$ ersetzen.

Soll das Integral des Differentiales $f(x)\,dx$ derart bestimmt werden, dass es für $x = x_0$ verschwindet, so muss auch das Integral des gleichen Differentiales $\psi(t)\,dt$ so bestimmt werden, dass es für denselben Wert von x null wird. Wenn man also mit t_0 den Wert bezeichnet, welchen t erhält für $x = x_0$, so wird

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\,dt.$$

Dabei müssen die Werte der Variabelen x von x_0 bis x, und der Variabelen t von t_0 bis t sich umkehrbar eindeutig entsprechen.

417. Beispiele. 1. In dem Integrale

$$\int (ax+b)^m\,dx$$

setzen wir:

$$ax+b=t, \qquad x=\frac{t-b}{a}, \qquad dx=\frac{dt}{a},$$

so folgt:

$$\int (ax+b)^m\,dx=\frac{1}{a}\int t^m\,dt=\frac{t^{m+1}}{(m+1)\,a}+\text{const},$$

oder

$$\int (ax+b)^m\,dx=\frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)\,a}+\text{const}.$$

2. In dem Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

seien p und q feste Werte, so dass $p^2-4q<0$. Setzt man

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,t, \qquad dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt,$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel positiv gewählt sein mag, so ist

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{dt}{t^2+1}.$$

Nun ist

$$\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctang} t+\text{const},$$

und folglich:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctang}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+\text{const}.$$

Die Integration der rationalen Differentiale.

418. Wir untersuchen zunächst die algebraischen Differentiale; dabei müssen wir uns indessen auf die einfachsten Fälle beschränken, diejenigen, bei denen das Integral sich durch die elementaren Funktionen darstellen lässt. Zuerst betrachten wir die rationalen Differentiale.

Jede rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ der Variabelen x lässt sich (§ 392) zerlegen in eine ganze Funktion, welche null wird, falls der Quotient ein echt gebrochener ist, und in Partialbrüche, deren Zähler konstant sind, und deren Nenner die Potenzen der linearen Binome enthält, welche die Faktoren von $f(x)$ bilden. Setzt man

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda,$$

so wird

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \\ &+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.\end{aligned} \tag{1}$$

Es ist nun

$$\int x^\mu \, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{const},$$

und wenn μ von 1 verschieden ist:

$$\int \frac{dx}{(x-g)^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1)(x-g)^{\mu-1}} + \text{const},$$

während für den Fall $\mu = 1$

$$\int \frac{dx}{x-g} = l(x-g) + \text{const}$$

wird. Integriert man also die beiden Seiten der Gleichung 1), nachdem man dieselben mit dx multipliziert hat, so folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \frac{a_0}{m+1} x^{m+1} + \frac{a_1}{m} x^m + \dots + \frac{a_{m-1}}{2} x^2 + a_m x + \text{const} \\ &- \frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} - \dots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1} l(x-a) \\ &- \frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \frac{B_1}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} - \dots - \frac{B_{\beta-2}}{x-\beta} + B_{\beta-1} l(x-\beta) \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &- \frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \frac{L_1}{(\lambda-2)(x-l)^{\lambda-2}} - \dots - \frac{L_{\lambda-2}}{x-l} + L_{\lambda-1} l(x-l).\end{aligned}$$

Aus dieser Formel folgt der Satz:

Das Integral eines rationalen Differentiales ist immer durch algebraische und logarithmische Funktionen darstellbar. Die explicite Darstellung erfordert die Zerlegung des Nenners der gebrochenen Funktion in seine Faktoren.

Die Bedingungen, unter denen das Integral eines rationalen Differentiales algebraisch ist.

419. Soll das Integral des rationalen Differentiales $\frac{F(x)}{f(x)}dx$ algebraisch sein, so darf die Entwickelung des Quotienten in seine Partialbrüche keine Glieder enthalten, deren Nenner vom ersten Grade sind. In den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sind also diese Bedingungen:

$$A_{\alpha-1} = 0, \qquad B_{\beta-1} = 0, \qquad C_{\gamma-1} = 0 \ldots$$

Dies erfordert vor allem, dass das Polynom $f(x)$ keine linearen Faktoren in erster Potenz enthält. Im § 398 haben wir gesehen, dass, wenn man setzt:

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)} \cdots$$

die Koeffizienten $A_{\alpha-1}$, $B_{\beta-1} \ldots$ die Werte erhalten:

$$A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{\alpha-1!}, \qquad B_{\beta-1} = \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{b-1!} \cdots$$

Mithin ist $\int \frac{F(x)}{f(x)}dx$ algebraisch, wenn

$$\varphi^{\alpha-1}(a) = 0, \qquad \psi^{\beta-1}(b) = 0, \ldots$$

sind, mögen nun die Werte der Wurzeln a, b, $c \ldots$ reell oder komplex sein.

Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist eben so gross wie die Anzahl der Wurzeln a, b, $c \ldots l$. Ist aber der Grad der Funktion $F(x)$ mindestens um zwei Einheiten kleiner, als der von $f(x)$, so ist eine dieser Bedingungen in den anderen enthalten. Denn bezeichnet man mit m den Grad von $f(x)$ und nimmt man an, dass $F(x)$ höchstens vom Grade $m-2$

ist, so enthält der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ keinen ganzen algebraischen Bestandteil. Bringt man nun alle Partialbrüche auf den gleichen Nenner und vergleicht ihre Summe mit dem Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$, so sieht man leicht, dass der auf diese Weise gebildete Bruch die Potenz x^{m-1} multipliziert mit dem Koeffizienten

$$A_{\alpha-1} + B_{\beta-1} + \ldots + L_{\lambda-1}$$

enthält. Dieser Koeffizient muss null sein, weil $F(x)$ höchstens vom Grade $m-2$ ist; also ist

$$\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{\alpha-1!} + \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{\beta-1!} + \ldots + \frac{\tilde{\omega}^{\lambda-1}(l)}{\lambda-1!} = 0,$$

und sonach ist eine der Bedingungen dafür, dass $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ algebraisch wird, in den anderen enthalten.

Die vorstehende Gleichung umfasst als besonderen Fall die im § 394 gegebene Formel.

Eine andere Form des Integrales der rationalen Differentiale.

420. Wenn unter den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ etwelche komplex sind, so enthält das Integral Logarithmen von komplexen Werten. Man kann dieselben indessen durch Kreisfunktionen ersetzen, wenn man die im § 371 gegebenen Formeln benutzt. Auf diese Weise erhält man ein reelles Resultat, sobald nur die Koeffizienten der Polynome $F(x)$ und $f(x)$ reell sind. Ist dieses der Fall, so kann man aber auch die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$, wie im § 401 gezeigt wurde, so zerlegen, dass nur reelle Grössen in den Partialbrüchen auftreten, und es ist leicht, auf Grund dieser neuen Zerlegung die Integration auszuführen.

Bei dieser Zerlegung enthält der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ ausser den Gliedern derselben Form, wie in § 418, noch andere von der Form

$$\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n},$$

wobei P und Q reelle Konstante sind, und $x^2 + px + q$ das Produkt zweier linearer Faktoren bedeutet, welche zu zwei konjugiert komplexen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gehören. Hinsichtlich der ersten Glieder haben wir in Bezug auf die Integration dem früher Gesagten nichts hinzuzufügen; es handelt sich also nur um die Integrale von der Form:

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}\, dx = \int \frac{Px + Q}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^n}\, dx.$$

Durch die Substitution

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, t$$

wird dies Integral gleich

$$\frac{P}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-1}} \int \frac{t\,dt}{(t^2 + 1)^n} + \frac{Q - \frac{1}{2} Pp}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n - \frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}.$$

Da nun $t\,dt$ gleich dem halben Differentiale von $t^2 + 1$ ist, so erhält man, wenn $n > 1$ ist:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2 + 1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)\,(t^2 + 1)^{n-1}} + \text{const},$$

und wenn $n = 1$ ist:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2}\, l\,(t^2 + 1) + \text{const}.$$

Es ist also nur noch das Integral

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

zu bestimmen. Führt man in den Zähler des Differentiales den Faktor $(t^2 + 1) - t^2 = 1$ ein, so folgt

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + 1)^n}.$$

Es ist nun

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int t\,\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n},$$

und

$$\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n} = d\left[-\frac{1}{(n-1)\,(t^2+1)^{n-1}}\right],$$

also ergiebt die teilweise Integration:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n} = -\frac{t}{2(n-1)\,(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Demnach wird

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{2(n-1)\,(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Schreibt man an Stelle von n die Exponenten $n-1$, $n-2, \ldots 2$, so folgt

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} = \frac{t}{2(n-2)\,(t^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-2}}.$$

. . . .

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctang} t + \text{const.}$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem sie mit

$$1)\qquad \frac{2n-3}{2n-2},\qquad \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)} \cdots \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 2}$$

multipliziert sind, so wird:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \left[\frac{1}{2n-2}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)\,(2n-4)}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-2}} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\,\frac{t}{t^2+1}\right] + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\operatorname{arctang} t + \text{const.}$$

Will man also nur reelle Grössen in das Integral eines rationalen Differentiales mit reellen Koeffizienten einführen, so muss man sagen, dass dasselbe durch *algebraische*, *logarithmische* und *cyklometrische* Funktionen darstellbar ist.

Irrationale algebraische Differentiale, bei denen die Irrationalität nur in gebrochenen Potenzen der Variabelen besteht.

421. Wir haben die Hauptfälle zu untersuchen, bei denen sich ein irrationales algebraisches Differential durch Änderung der Variabelen in ein rationales verwandeln lässt.

Diese Reduktion gelingt unmittelbar, sobald die Funktion $f(x)$ eine rationale Funktion von ganzen oder gebrochenen Potenzen der Variabelen x ist. Denn bezeichnet man in solchem Falle mit m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner sämtlicher Exponenten von x, welche in $f(x)$ vorkommen, so hat man

$$x = t^m, \qquad dx = mt^{m-1}\,dt$$

zu setzen, und es wird

$$f(x)\,dx = mf(t^m)\,t^{m-1}\,dt$$

ein rationales Differential.

Dieselbe Transformation bewirkt auch die gewünschte Reduktion, wenn $f(x)$ eine rationale Funktion von x und von gebrochenen Potenzen des Binomes $ax + b$ ist. Ist m durch sämtliche Nenner dieser Exponenten teilbar, und setzt man

$$ax + b = t^m, \qquad x = \frac{t^m - b}{a}, \qquad dx = \frac{m}{a}\,t^{m-1}\,dt,$$

so wird durch diese Substitution

$$f(x)\,dx = \varphi(t)\,dt$$

und $\varphi(t)$ eine rationale Funktion.

422. **Beispiele.** Das Differential

$$\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

wird, wenn man

$$x = t^6, \qquad dx = 6t^5 dt$$

setzt, gleich:

$$6\,\frac{t^8+t^5}{t^2+1}\,dt = 6(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1)\,dt + \frac{6t\,dt}{t^2+1} + \frac{6\,dt}{t^2+1};$$

also ist:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 6t + 3l(t^2+1) + 6\operatorname{arctang} t + C,$$

und setzt man an Stelle von t seinen Wert $x^{\frac{1}{6}}$:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{4}{6}} + 2x^{\frac{3}{6}} - 3x^{\frac{2}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}}$$
$$+ 3l(x^{\frac{2}{6}} + 1) + 6\operatorname{arctang} x^{\frac{1}{6}} + C.$$

Bemerkung. $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x}$ sind vieldeutig; dem entsprechend ist auch das Integral des gegebenen Differentiales vieldeutig. Beschränkt man sich auf reelle Werte desselben, so ist x positiv zu nehmen, und ist $\sqrt{x}$ positiv, $\sqrt[3]{x}$ die reelle Wurzel, so entspricht jedem Werte von x ein positiver Wert von t. Es ist dann für $t = x^{\frac{1}{6}}$ der eine positive reelle Wert zu wählen. Betrachtet man negative Werte von x, und ist $\sqrt{x}$ ein imaginärer Wert, etwa der Wurzelwert des Betrages von x, multipliziert mit $+i$, $\sqrt[3]{x}$ dagegen die reelle Wurzel, so ist t^6 negativ. Bedeutet dann t diejenige komplexe sechste Wurzel aus der negativen Zahl x, die, während x das Intervall von 0 bis -1 durchläuft, stetig von 0 bis zu einer sechsten Wurzel aus -1 variiert, während t^3 gleich dem Werte $+i\sqrt{-x}$, und t^2 gleich dem reellen Werte von $\sqrt[3]{x}$ ist, so ist die Beziehung eine durchaus eindeutige, und die obige Formel gilt für dieses Intervall. Übrigens setzt alsdann diese Umformung die allgemeine Kenntnis für Integrale komplexer Variabelen voraus.

Algebraische Differentiale, welche keine andere Irrationalität enthalten, als die Quadratwurzel aus einem Polynome zweiten Grades.

423. Der Fall, den wir hier zu behandeln haben, wird durch ein Differential von der Form

$$F(x, X)\,dx$$

dargestellt, in welchem X die Quadratwurzel aus einem Trinome zweiten Grades in x ist, und $F(x, X)$ eine rationale Funktion von x und X.

Es sei

$$X = \sqrt{a + bx + cx^2}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist, wenn keine nähere Bezeichnung angegeben ist, immer positiv gedacht. Wenn der Koeffizient c gleich null ist, so genügt es, um das Differential rational zu machen:

$$a + bx = t^2, \qquad dx = \frac{2}{b}\, t\, dt$$

zu setzen. Wir nehmen also an, dass c von null verschieden ist. Da man aus der Quadratwurzel einen Faktor absondern kann, der gleich ist dem numerischen Werte der Quadratwurzel aus dem Betrage von c, so können wir auch immer

$$X = \sqrt{a + bx \pm x^2}$$

setzen. Die Fälle, dass das Vorzeichen von x^2 positiv und negativ ist, sind gesondert zu betrachten.

Es sei zuerst

$$X = \sqrt{a + bx + x^2}.$$

Erste Transformation. Um das gegebene Differential rational zu machen, kann man $X = t \pm x$ setzen, wobei t die neue Variabele ist; wir wählen zum Beispiel

$$X = t - x,$$

erhebt man diese Gleichung zum Quadrat, so folgt:

$$a + bx = t^2 - 2t\,x,$$

also:

$$x = \frac{t^2 - a}{2t + b}, \quad X = \frac{t^2 + bt + a}{2t + b}, \quad b\,dx = 2(t - x)\,dt - 2t\,dx,$$

oder

$$dx = \frac{2(t - x)}{2t + b}\,dt = \frac{2(t^2 + bt + a)}{(2t + b)^2}\,dt.$$

Die Substitution dieser Werte ergiebt

$$F(x, X)\,dt = \Phi(t)\,dt,$$

wobei $\Phi(t)$ eine rationale Funktion von t ist.

Zweite Transformation. Man kann auch die Substitution

$$X = \sqrt{a} + tx$$

anwenden; sind jedoch a und b reelle Grössen, und will man die Einführung komplexer Werte vermeiden, so ist diese Transformation nur für den Fall, dass a positiv ist, zu gebrauchen. Erhebt man die Gleichung zum Quadrat, so wird

also
$$b + x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

$$x = \frac{2t\sqrt{a} - b}{1 - t^2}, \quad X = \frac{t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a}}{1 - t^2}, \quad dx = 2dt\sqrt{a} + 2t\,dt\,x + t^2 dx,$$

oder:
$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a} + tx}{1 - t^2}\,dt = \frac{2\,(t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a})}{(1 - t^2)^2}\,dt.$$

Die Substitution dieser Werte liefert ebenfalls
$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$
wobei $\Phi(t)$ eine rationale Funktion ist.

Der Zusammenhang zwischen den Variabelen t und x ist ein völlig eindeutiger, sobald das Vorzeichen von X fixiert ist.

Dritte Transformation. Eine dritte Transformation, welche wir noch anzugeben haben, ist reell, wenn die Gleichung $X^2 = 0$ reelle Wurzeln hat, was immer der Fall ist, sobald a negativ ist.

Sind dann x_0 und x_1 die beiden Wurzeln der Gleichung $X^2 = 0$, so dass also
$$X = \sqrt{(x - x_0)(x - x_1)}$$
ist, so setzt man, indem t die neue Variabele bezeichnet,
$$X = (x - x_0)\,t;$$
hieraus folgt durch Erhebung zum Quadrat
$$x - x_1 = (x - x_0)\,t^2,$$
also:
$$x = \frac{x_1 - x_0 t^2}{1 - t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0)\,t}{1 - t^2}, \quad dx = t^2 dx + 2t\,(x - x_0)\,dt,$$
oder:
$$dx = \frac{2t\,(x - x_0)}{1 - t^2}\,dt = \frac{2(x_1 - x_0)\,t}{(1 - t^2)^2}\,dt,$$
und es wird wiederum
$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt$$
ein rationales Differential.

424. **Beispiele.** 1. Das Differential
$$\frac{dx}{X} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}$$
ergiebt nach der ersten Transformation:

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{2t+b} = l(2t+b) + C = l\left(X + x + \frac{b}{2}\right) + \text{const},$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = l\left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{a+bx+x^2}\right) + \text{const};$$

nach der zweiten Transformation:

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = l\,\frac{1+t}{1-t} + \text{const}$$

$$= l\,\frac{x + X - \sqrt{a}}{x - X + \sqrt{a}} + \text{const};$$

nach der dritten Transformation:

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = l\,\frac{1+t}{1-t} + \text{const} = l\,\frac{x - x_0 + X}{x - x_0 - X} + \text{const}.$$

2. Das Integral des Differentiales

$$X\,dx = \sqrt{a+bx+x^2}\,dx$$

wird nach der ersten Transformation:

$$\int X\,dx = 2\int \frac{(t^2+bt+a)^2}{(2t+b)^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{\left[\left(t+\frac{b}{2}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4}\right]^2}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{b}{2}\right)dt + \frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\int \frac{dt}{t+\frac{b}{2}} + \frac{1}{4}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)^2 \int \frac{dt}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{8}\left(t+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right) l\left(t+\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)^2 \frac{1}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2} + \text{const}.$$

Die Grössen $t + \frac{b}{2}$ und $\dfrac{a - \frac{b^2}{4}}{t + \frac{b}{2}}$ sind aber bezüglich gleich

$x + \frac{b}{2} + X$ und $\dfrac{a - \frac{b^2}{4}}{x + \frac{b}{2} + X} = -x - \frac{b}{2} + X$, also ist:

$$\int \sqrt{a+bx+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\sqrt{a+bx+x^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right) l\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\text{const.}$$

Es ist indessen auch zu bemerken, dass man das gegebene Integral auf dasjenige des ersten Beispieles vermittelst der teilweisen Integration reduzieren kann; denn es wird

$$\int \sqrt{a+bx+x^2}\,dx = x\sqrt{a+bx+x^2} - \int \frac{x^2+\frac{b}{2}x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx.$$

Nun ist
$$\int \sqrt{a+bx+x^2}\,dx = \int \frac{a+bx+x^2}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx,$$
und addiert man diese Gleichung zu der vorigen, so folgt:

$$2\int \sqrt{a+bx+x^2}\,dx = x\sqrt{a+bx+x^2} + \int \frac{a+\frac{b}{2}x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx.$$

Das Integral der rechten Seite ist gleich

$$\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \frac{b}{2}\int \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx.$$

Das erste Integral ist durch das Beispiel 1 berechnet, und das zweite hat, wie leicht ersichtlich, den Wert $\frac{b}{2}\sqrt{a+bx+x^2}$. So ergiebt sich das bereits gefundene Resultat.

3. Wir betrachten schliesslich noch das Differential

$$\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

das häufig auftritt, und dessen Integral sich unmittelbar aus den Rechnungen, die wir zuletzt ausgeführt haben, ergiebt. Es ist

$$\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \left(\alpha-\frac{b\beta}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \beta\,\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

und demnach

$$\int \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx = \left(\alpha-\frac{b\beta}{2}\right) l\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\beta\sqrt{a+bx+x^2}+C.$$

425. Wir untersuchen nun den Fall, dass

$$X = \sqrt{a + bx - x^2}$$

ist. Um das Differential $F(x, X)\,dx$ auf eine rationale Form zu bringen, kann man die zweite oder die dritte Transformation im § 423 anwenden, wenn $a > 0$ ist. Ist aber $a < 0$, so muss man sich auf die dritte Transformation beschränken, wenn man bloss reelle Grössen einführen will.

1. Ist $a > 0$, und setzt man

$$X = \sqrt{a} + tx,$$

so wird, indem man das Quadrat bildet,

$$b - x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

also:

$$x = \frac{b - 2t\sqrt{a}}{1 + t^2},$$

$$X = \frac{\sqrt{a} + bt - t^2\sqrt{a}}{1 + t^2}, \quad -dx = 2dt\sqrt{a} + 2t\,dt\,x + t^2\,dx,$$

oder

$$dx = -2\frac{\sqrt{a} + tx}{1 + t^2}\,dt = -2\frac{\sqrt{a} + bt - t^2\sqrt{a}}{(1 + t^2)^2},$$

und die Substitution dieser Werte ergiebt:

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

wobei $\Phi(t)$ eine rationale Funktion ist.

2. Was auch der Wert der Konstante a sein mag, wir dürfen immer annehmen, dass die Gleichung $X^2 = 0$ reelle Wurzeln hat. Denn anderen Falles ist der Wert von X bei allen Werten von x imaginär. Zwar schliessen wir diesen Fall aus unserer Untersuchung nicht aus; indessen gehört er, da die Funktion X gleich $i\sqrt{-a - bx + x^2}$ ist, zu dem im § 423 erledigten. Bezeichnen wir also mit x_0 und x_1 die Wurzeln von $X^2 = 0$, wobei wir annehmen, dass $x_1 > x_0$ ist, so ist

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)}.$$

Die Transformation ergiebt sich nun, indem man setzt:

$$X = (x - x_0)\,t \quad \text{oder} \quad x_1 - x = (x - x_0)\,t^2,$$

also:

$$x = \frac{x_1 + x_0 t^2}{1 + t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0) t}{1 - t^2}, \quad - dx = 2t\, dt\, (x - x_0) + t^2 dx,$$

$$dx = -2 \frac{t(x - x_0)}{1 + t^2} dt = -2 \frac{(x_1 - x_0) t}{(1 + t^2)^2} dt,$$

und es wird wiederum

$$F(x, X)\, dx = \Phi(t)\, dt$$

ein rationales Differential.

426. Die verschiedenen Transformationen lassen alle Integrale, die unter die behandelte Form fallen, lösen. Doch ist es nicht immer notwendig, sie anzuwenden, es können bisweilen andere Transformationen leichter eine Lösung herbeiführen.

Das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$$

ist z. B. gleich:

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}},$$

und man erkennt leicht, dass sich dasselbe auf die elementare Form $\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ bringen lässt, wenn man setzt:

$$x - \frac{b}{2} = t \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}, \quad dx = dt \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}.$$

Es wird:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + \text{const} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}} + C.$$

Daraus folgt unmittelbar auch der Wert des Integrales

$$\int \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{a + bx - x^2}} dx = \left(\alpha + \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} - \beta \int \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)}{\sqrt{a + bx - x^2}} dx.$$

Das erste Integral ist soeben bestimmt worden; das zweite hat den Wert

$$-\beta \sqrt{a + bx - x^2}.$$

427. Auf eine rationale Form lässt sich auch das Differential

$$F(x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{a'+b'x})\, dx$$

bringen, wenn F eine rationale Funktion der drei Grössen $x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{a'+b'x}$ bedeutet. Denn dieser Fall ist in den untersuchten enthalten, indem man

$$a'+b'x = t^2, \quad x = \frac{t^2-a'}{b'}, \quad dx = \frac{2}{b'}\, tdt$$

setzt. Das Differential geht alsdann über in die Form

$$\Phi(t, T)\, dt,$$

wobei T die Quadratwurzel aus einem Polynome zweiten Grades in t, und Φ eine rationale Funktion bezeichnet.

Untersuchung der algebraischen Differentiale, welche keine andere Irrationalität als die Quadratwurzel aus einem Polynome dritten oder vierten Grades enthalten.

428. Auf die irrationalen algebraischen Differentiale, die wir erledigt haben, folgt das Differential von der Form:

1) $$dV = F(x, X)\, dx,$$

in welchem X die Quadratwurzel aus einem Polynome dritten oder vierten Grades und $F(x, X)$ eine rationale Funktion von x und X bedeutet. Die Integrale, welche wir in den vorigen Paragraphen berechnet haben, sind, wie wir sahen, durch algebraische, logarithmische oder cyklometrische Funktionen darstellbar. Dies gilt im allgemeinen nicht mehr von dem Integrale des Differentiales dV, welches wir nun zu untersuchen haben. Aus dieser Untersuchung wird vielmehr die Notwendigkeit hervorgehen, drei neue als elementare Funktionen in die Analysis aufzunehmen, welche Legendre *elliptische Integrale oder Funktionen* genannt hat. Dann wird das Integral V darstellbar durch algebraische, logarithmische, cyklometrische und elliptische Funktionen.

Es sei

2) $$X = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4};$$

man darf dabei annehmen, dass das Polynom unter der Wurzel keine vielfachen linearen Faktoren hat, denn sonst würde das

Differential dV zu der früheren Klasse (§§ 423 und 425) gehören, und das Integral V liesse sich lediglich durch algebraische, logarithmische und cyklometrisehe Funktionen darstellen. Auch können insbesondere die beiden Koeffizienten ε und δ nicht zugleich null sein, dagegen kann $\varepsilon = 0$ sein.

Es handelt sich zunächst darum zu untersuchen, ob sich die Form des Differentiales dV vereinfachen lässt. Wir wollen beweisen, dass sich das Differential, wenn die Konstanten desselben sämtlich reell sind, immer vermittelst einer linearen und reellen Substitution

$$3)\qquad x = \frac{p + qt}{1 + t}$$

auf die Form bringen lässt:

$$dV = \Phi(t, T)\, dt,$$

wobei T eine Wurzel von der Form:

$$T = \sqrt{\pm (t^2 + \lambda)(t^2 + \mu)}$$

ist, λ und μ reelle Konstante und Φ eine rationale Funktion von t und T bezeichnen.

429. Wir nehmen zuerst an, dass ε nicht null ist. Das Polynom unter der Wurzel kann immer in zwei reelle Faktoren zweiten Grades zerlegt werden, und folglich kann man schreiben:

$$4)\qquad X = \sqrt{(f - 2gx + x^2)(f' - 2g'x + x^2)\,\varepsilon}.$$

Vermittelst der in Gleichung 3) angegebenen Substitution wird

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1 + t)^2},$$

$$f' - 2g'x + x^2 = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1 + t)^2},$$

wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$5)\qquad \begin{aligned} F &= f - 2gp + p^2, & F' &= f' - 2g'p + p^2, \\ G &= -f + g(p + q) - pq, & G' &= -f' + g'(p + q) - pq, \\ H &= f - 2gq + q^2, & H' &= f' - 2g'q + q^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun weiter:

$$6)\qquad T=\sqrt{\pm\left(\frac{F}{H}-\frac{2G}{H}t+t^2\right)\left(\frac{F'}{H'}-\frac{2G'}{H'}t+t^2\right)},$$

so ist:

$$7)\qquad X=\frac{\sqrt{\pm\varepsilon HH'}}{(1+t)^2}T.$$

Das Vorzeichen $\pm$ ist dabei so zu wählen, dass das Produkt $\varepsilon HH'$ positiv wird. Die Formel 3) liefert aber auch

$$8)\qquad dx=(q-p)\frac{dt}{(1+t)^2},$$

und demnach wird das Differential dV durch diese Substitution gleich

$$dV=\Phi(t,T)\,dt;$$

Φ bedeutet eine rationale Funktion von t und T.

Nun haben wir aber zwei noch unbestimmte Grössen p und q eingeführt, über welche wir derart verfügen können, dass die ungeraden Potenzen von t unter der Wurzel in der Gleichung 6) verschwinden. Dazu genügt es $G=0$ und $G'=0$ zu setzen, d. h.

$$9)\qquad \begin{aligned} f-g(p+q)+pq&=0,\\ f'-g'(p+q)+pq&=0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$10)\qquad \begin{aligned} p+q&=\frac{f-f'}{g-g'},\\ pq&=\frac{fg'-f'g}{g-g'}, \end{aligned}$$

ferner:

$$11)\qquad p-q=\frac{\sqrt{(f+f'-2gg')^2-4(f-g^2)(f'-g^2)}}{g-g'}.$$

Abgesehen von dem Falle $g=g'$, auf welchen wir gleich noch zurückkommen werden, erkennt man, dass die Gleichung 11) zusammen mit der ersten Gleichung 10) die Koeffizienten p und q der linearen gebrochenen Substitution bestimmt. Nun hat man noch zu beweisen, dass diese Koeffizienten stets reell gemacht werden können.

Es seien mit a, b, c, d die vier Wurzeln der Gleichung $X^2 = 0$ bezeichnet und es werde $f = ab$, $g = \frac{a+b}{2}$, $f' = cd$, $g' = \frac{c+d}{2}$ gesetzt. Führt man diese Werte von f, f', g, g' in den Ausdruck für $p - q$ ein, so erkennt man, dass die Grösse unter der Wurzel für $a = c$, oder $b = d$ und ebenso für $b = c$ oder $b = d$ verschwindet. Hieraus folgt, dass

$$p - q = 2\frac{\sqrt{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}}{a+b-c-d}$$

wird. Sind die vier Wurzeln reell, so setze man

$$a > b > c > d.$$

Sind zwei Wurzeln reell und zwei konjugiert komplex, so nehme man für a und b die beiden reellen Wurzeln; dann sind die beiden Faktoren $a - c$ und $a - d$ konjugiert und liefern ein reelles Produkt; ebenso $b - c$ und $b - d$.

Sind die vier Wurzeln komplex, so wähle man a und b als zwei konjugierte, ebenso c und d. Alsdann sind die beiden Faktoren $a - c$ und $b - d$ konjugiert, und ebenso $a - d$ und $b - c$.

Für den Fall $g = g'$ kann man das vorgelegte Problem unmittelbar lösen, wenn man

$$x = g + t$$

setzt. Schliesslich bemerken wir noch, dass aus den beiden Gleichungen 7) und 8) durch Division folgt:

$$\frac{dx}{X} = r\frac{dt}{T},$$

wobei r eine bestimmte Konstante ist.

430. Wir haben noch den Fall $\varepsilon = 0$ zu untersuchen. Das Polynom unter der Wurzel X lässt sich in zwei reelle Faktoren zerlegen, von denen der eine vom ersten, der andere vom zweiten Grade ist. Es ist

$$X = \sqrt{-\delta(a-x)(f - 2gx + x^2)},$$

und durch die Substitution 3) wird:

$$a-x=\frac{a(1+t)-(p+qt)}{1+t}=\frac{(q-a)\left(\frac{a-p}{q-a}-t\right)(1+t)}{(1+t)^2}=\frac{F'-2G't+H't^2}{(1+t)^2},$$

$$f-2gx+x^2=\frac{F-2Gt+Ht^2}{(1+t)^2};$$

F, G, H haben die in den Gleichungen 5) angegebenen Werte. Die Gleichungen 6) und 7) bestehen also auch in diesem Falle, wenn man $-\delta$ an Stelle von ε schreibt, und die erste Potenz von t verschwindet aus jedem Faktor unter der Wurzel, wenn man $G=0$ und $G'=0$ setzt; d. h.

$$\frac{a-p}{q-a}=1, \qquad -f+g(p+q)-pq=0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{p+q}{2}=a, \qquad pq=2ga-f,$$

und

$$\frac{p-q}{2}=\sqrt{a^2-2ga+f}=\sqrt{(a-b)(a-c)},$$

wenn b und c die Wurzeln des Trinomes $x^2-2gx+f$ sind. Sind b und c reell, so hat man für a die grösste oder die kleinste der drei Wurzeln von $X^2=0$ zu wählen. Sind b und c komplex, so ist das Produkt der konjugierten Faktoren $a-b$, $a-c$ positiv.

431. Die rationale Funktion $\Phi(t, T)$ kann in der Form

$$\frac{M+Nt}{M'+N't}$$

dargestellt werden, wobei M, N, M', N' ganze Funktionen von t^2 und T sind. Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Quotienten mit $M'-N't$, so erhält er die Form

$$P+Qt,$$

wobei P und Q *rationale Funktionen* von t^2 und T sind. Also ist

$$dV=P\,dt+Qt\,dt.$$

Setzt man nun $t^2=u$, $2t\,dt=du$, so wird das Glied $Qt\,dt$ gleich $\frac{1}{2}Q\,du$, wobei Q eine rationale Funktion von u und der Quadratwurzel aus einem Trinome zweiten Grades in u ist. Demnach ist das Integral von $Qt\,dt$ durch algebraische, logarithmische und cyklometrische Funktionen von t und T darstellbar.

Das Differential $P\,dt$ ist von der Form

$$\frac{M+NT}{M'+N'T}\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{N+\frac{M}{T}}{N'+\frac{M'}{T}}\,dt,$$

wobei M, N, M', N' ganze Funktionen von t^2 sind, und multipliziert man Zähler und Nenner mit

$$N'-\frac{M'}{T},$$

so wird

$$P\,dt = \Psi(t^2)\,dt + \Phi(t^2)\,\frac{dt}{T},$$

wobei $\varphi(t^2)$ und $\psi(t^2)$ rationale Funktionen von t^2 sind. Das Differential $\Psi(t^2)\,dt$ ist ein rationales, und folglich ist sein Integral eine algebraische, logarithmische oder cyklometrische Funktion. Wenn man also

$$dU = \Phi(t^2)\,\frac{dt}{T}$$

setzt, so ist das Integral V durch algebraische, logarithmische und cyklometrische Funktionen darstellbar, und durch neue elementare Funktionen, welche das Integral U enthalten kann.

432. Transformation der Wurzel T. Das vorgelegte Problem ist also auf die Untersuchung des Differentiales von der Form

$$dU = \varphi(t^2)\,\frac{dt}{T}$$

zurückgeführt, wobei $\varphi(t^2)$ eine rationale Funktion von t^2 bedeutet, und T eine Wurzel, welche eine der fünf Formen haben kann:

1) $$T = \sqrt{+(t^2-\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

2) $$T = \sqrt{-(t^2-\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

3) $$T = \sqrt{+(t^2+\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

4) $$T = \sqrt{-(t^2+\lambda^2)(t^2-\mu^2)},$$

5) $$T = \sqrt{+(t^2+\lambda^2)(t^2+\mu^2)};$$

λ und μ sind reelle Konstante. Den Fall, dass

$$T = \sqrt{-(t^2+\lambda^2)(t^2+\mu^2)}$$

ist, schliessen wir deshalb aus, weil ihm ein bei allen reellen Werten von t imaginärer Wert von U entspricht; übrigens kommt derselbe durch Absonderung des Faktors $i = \sqrt{-1}$ auf den fünften Fall zurück.

In den fünf Fällen, welche wir zu untersuchen haben, kann die Wurzel auf die nämliche Form gebracht werden durch eine Änderung der Variabelen. Die gemeinsame Form, welche wir wählen, ist keineswegs die einzig mögliche; sie ist jedoch in mancher Hinsicht die geeignetste und die am häufigsten angewandte.

1. Im ersten Falle nehmen wir, was statthaft ist, $\lambda^2 < \mu^2$ an, und setzen

$$\frac{\lambda^2}{\mu^2} = k^2.$$

Damit die Wurzel T reell bleibt, muss

$$t^2 < \lambda^2 \quad \text{oder} \quad t^2 > \mu^2$$

sein. Wenn $t^2 < \lambda^2$ ist, so setzen wir

$$t = \lambda x, \qquad dt = \lambda\, dx,$$

und es durchläuft dann x das Intervall von 0 bis 1, oder was dasselbe ist, von 0 bis -1. Es wird:

$$T = k\mu^2 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

also:

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Ist $t^2 > \mu^2$, so setzt man

$$t = \frac{\mu}{x}, \qquad dt = -\frac{\mu\, dx}{x^2},$$

und es durchläuft x bei wachsenden Werten von t die Werte von 1 bis 0; es folgt

$$T = \frac{\mu^2}{x^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \qquad \frac{dt}{T} = -\frac{1}{\mu}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

2. Auch in dem zweiten Falle können wir annehmen, dass $\lambda^2 < \mu^2$ ist; wir setzen

$$\frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu^2} = k^2.$$

Es muss, damit T reell ist, t^2 zwischen λ^2 und μ^2 bleiben. Die Substitution

$$t^2 = \mu^2 (1 - k^2 x^2)$$

ergiebt:

$$dt = k^2 \mu \frac{-x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}, \qquad T = k^2 \mu^2 x \sqrt{1 - x^2},$$

folglich:

$$\frac{dt}{T} = -\frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Wenn t^2 die Werte von λ^2 bis μ^2 durchläuft, so geht x^2 von 1 bis 0.

3. Im dritten Falle erfordert die Realität von T, dass $t^2 > \mu^2$ ist. Wir setzen

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2$$

und führen die Substitution ein

$$t^2 = \frac{\mu^2}{1 - x^2}, \quad dt = \frac{\mu x\, dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \frac{\lambda \mu}{k} \frac{x \sqrt{1 - k^2 x^2}}{1 - x^2},$$

aus welcher folgt:

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Wiederum gehören, während t^2 das Intervall von μ^2 bis unendlich durchläuft, zu x^2 die Werte von 0 bis 1.

4. Im vierten Falle muss $t^2 < \mu^2$ sein. Wir setzen

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2,$$

ferner

$$t^2 = \mu^2 (1 - x^2), \quad dt = -\mu \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad T = \frac{\mu^2}{k} x \sqrt{1 - k^2 x^2},$$

$$\frac{dt}{T} = -\frac{k}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}};$$

x^2 durchläuft, während t^2 von 0 bis μ^2 wächst, das Intervall von 1 bis 0.

5. Im fünften Falle ist die Wurzel T bei allen reellen Werten von t reell; wir nehmen $\lambda^2 < \mu^2$ an und setzen:

$$\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2} = k^2.$$

Ferner wenden wir die Substitution an:

$$t^2 = \lambda^2 \frac{x^2}{1-x^2}, \quad dt = \frac{\lambda\, dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \lambda\mu \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{1-x^2}$$

und erhalten:

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

x^2 durchläuft das Intervall von 0 bis 1.

In allen Fällen lautet das Resultat: Setzt man

$$X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

wobei k^2 eine positive Grösse kleiner als 1 bedeutet, so ist $\frac{dt}{T}$ gleich dem Differentiale $\frac{dx}{X}$, multipliziert mit einer Konstanten. In allen den verschiedenen Transformationen, welche wir angewendet haben, ist aber t^2 als rationale Funktion von x^2 ausgedrückt. Also wird das Differential dU auf die Form gebracht:

$$dU = f(x^2)\frac{dx}{X},$$

wobei $f(x^2)$ eine rationale Funktion von x^2 ist.

433. Die Funktion $f(x^2)$ kann zerlegt werden in eine ganze Funktion und in Partialbrüche, deren Zähler konstant und deren Nenner gleich einer ganzen Potenz eines Binomes ist, welches durch Addition von x^2 und einer Konstanten entsteht. Ist diese Konstante null, so reduziert sich der entsprechende Partialbruch auf das Produkt einer Konstanten mit einer ganzen und negativen Potenz von x^2. Mithin ist jedes Glied der Funktion $f(x^2)$ entweder von der Form $x^{2\mu}$, oder von der Form $\frac{1}{(1+nx^2)^\nu}$, wenn man von dem Koeffizienten absieht, und mit n eine Konstante, mit μ und ν ganze Zahlen bezeichnet, von denen die erste auch null oder negativ sein kann. Setzt man also

$$1) \qquad Y_\mu = \int \frac{x^{2\mu}\, dx}{X}, \qquad Z_\nu = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X},$$

so ist das Integral U eine Summe von Gliedern, die sich aus Y_μ und Z_ν, multipliziert mit Konstanten, zusammensetzt. Es sind also diese Funktionen zu untersuchen.

Wir betrachten zuerst die Integrale Y_μ. Es ist

$$X^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

also:

$$\frac{X\,dX}{dx} = -(1 + k^2)\,x + 2k^2 x^3.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{x^{2\mu-3}\,dx}{X}$ und bildet man auf jeder Seite das Integral, so folgt:

$$2k\,Y_\mu - (1 + k^2)\,Y_{\mu-1} = \int x^{2\mu-3}\,\frac{dX}{dx}\,dx.$$

Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int x^{2\mu-3}\,\frac{dX}{dx}\,dx = x^{2\mu-3}\,X - (2\mu - 3)\int X x^{2\mu-4}\,dx.$$

Andererseits ist

$$\int X x^{2\mu-4}\,dx = \int \frac{X^2\,x^{2\mu-4}\,dx}{X} = \int \frac{x^{2\mu-4} - (1 + k^2)\,x^{2\mu-2} + k^2\,x^{2\mu}}{X}\,dx$$
$$= Y_{\mu-2} - (1 + k^2)\,Y_{\mu-1} + k^2\,Y_\mu.$$

Demnach erhält man:

$$2)\left\{\begin{array}{l} 2k^2\,Y_\mu - (1 + k^2)\,Y_{\mu-1} = x^{2\mu-3}X - (2\mu-3)\,(Y_{\mu-2} - [1 + k^2]\,Y_{\mu-1} + k^2 Y_\mu) \\ \qquad\text{oder:} \\ (2\mu-1)\,k^2\,Y_\mu - (2\mu-2)\,(1 + k^2)\,Y_{\mu-1} + (2\mu-3)\,Y_{\mu-2} = x^{2\mu-3}X. \end{array}\right.$$

Eine Konstante fügen wir auf der rechten Seite nicht hinzu, weil jedes der Integrale Y_μ eine willkürliche Konstante enthält. Auch ist zu bemerken, dass sich die Gleichung 2) noch kürzer ableiten lässt, indem man das Differential von $x^{2\mu-3}X$ bildet, und dann dasselbe integriert; es ist indessen der Weg, welchen wir eingeschlagen haben, ein mehr analytischer.

Setzt man nun in der Gleichung $\mu = 2, 3, 4 \ldots$, so kann man nach einander

$$Y_2,\ Y_3,\ Y_4 \ldots$$

als Funktion von Y_0, Y_1 und von algebraischen Funktionen bestimmen.

Setzt man $\mu = 1$, so erhält man Y_{-1} als Funktion von Y_1 und von algebraischen Grössen; setzt man endlich $\mu = 0$, $-1, -2, -3 \ldots$, so liefert die nämliche Gleichung die Werte von

$$Y_{-2},\ Y_{-3},\ Y_{-4}\ldots$$

als Funktionen von Y_0 und Y_1, und von algebraischen Grössen. Demnach führt die Untersuchung der Integrale Y_μ nur auf die neuen elementaren Funktionen Y_0 und Y_1.

434. Wir bestimmen nun die Funktion Z_ν. Der Index ν ist hierbei eine ganze positive Zahl. Es ist indessen zu bemerken, dass, wenn man demselben negative Werte beilegt, die entsprechenden Funktionen Z_ν Summen von Funktionen Y_μ sind; demnach lassen sie sich durch die Funktionen Y_0, Y_1 und durch algebraische Grössen darstellen. Es ist

$$Z_{-\nu}=\int\frac{(1+nx^2)^\nu}{X}\,dx=Y_0+\nu n Y_1+\ldots n^\nu Y_\nu+C.$$

Um nun für Z_ν eine ähnliche Reduktionsformel, wie vorhin zu gewinnen, kann man die teilweise Integration anwenden; rascher jedoch kommt man folgendermassen zum Ziele. Wir differentiieren die Funktion

$$\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}$$

und erhalten:

$$d\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]=\left[\frac{(2\nu-2)X^2}{(1+nx^2)^\nu}-\frac{(2\nu-3)X^2-\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx}}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]\frac{dx}{X}.$$

Ordnet man nun die Polynome X^2 und $\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx}$ nach Potenzen von $(1+nx^2)$, so findet man:

$$X^2=\frac{(n+1)(n+k^2)}{n^2}-\frac{n+(n+2)k^2}{n^2}(1+nx^2)+\frac{k^2}{n^2}(1+nx^2)^2,$$

$$\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx}=\frac{n+(n+2)k^2}{n^2}-\frac{n+(n+4)k^2}{n^2}(1+nx^2)+\frac{2k^2}{n^2}(1+nx^2)^2,$$

und setzt man:

$$3)\quad\begin{cases} A=(2\nu-2)\dfrac{(n+1)(n+k^2)}{n^2}, \\ B=(2\nu-3)\dfrac{n(n+2)+(2n+3)k^2}{n^2}, \\ C=(2\nu-4)\dfrac{n+(n+3)k^2}{n^2}, \\ D=(2\nu-5)\dfrac{k^2}{n^2}, \end{cases}$$

so erhält man nach den vorigen Formeln:

$$d\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right] = A\,dZ_\nu - B\,dZ_{\nu-1} + C\,dZ_{\nu-2} - D\,dZ_{\nu-3},$$

also durch Integration:

$$4) \quad AZ_\nu - BZ_{\nu-1} + CZ_{\nu-2} - DZ_{\nu-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}.$$

Der Koeffizient A ist null in den beiden Fällen $n = -1$ und $n = -k^2$; alsdann wird

$$B = -(2\nu-3)(1-k^2) \quad \text{oder} \quad B = +(2\nu-3)\frac{1-k^2}{k^2}.$$

B ist also nicht null, weil k^2 kleiner als 1 ist. Die Gleichung 4) reduziert sich also bei diesen Werten von n auf die Form:

$$5) \quad -BZ_{\nu-1} + CZ_{\nu-2} - DZ_{\nu-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}},$$

und giebt man dem Exponenten μ die Werte 2, 3, 4 ..., so bestimmt diese Gleichung nach einander die Werte von

$$Z_1, Z_2, Z_3 \ldots$$

als Funktionen algebraischer Grössen und der Integrale Z_0 und Z_{-1}, oder auch der Integrale Y_0 und Y_1, weil

$$Z_0 = Y_0, \; Z_{-1} = Y_0 + nY_1$$

ist. Also führt in allen Fällen, wo $1 + nx^2$ gleich einem der beiden Faktoren von X^2 ist, die Untersuchung der Funktion Z_ν zu keiner neuen analytischen Funktion.

Nimmt man aber an, dass n weder gleich -1 noch auch gleich $-k^2$ ist, so ist A nicht null, ausser für $\nu = 1$. Giebt man dem Exponenten ν die Werte 2, 3, 4..., so bestimmt die Gleichung 4) nach einander

$$Z_2, Z_3, Z_4 \ldots$$

als Funktionen von Z_1, Z_0, Z_{-1} und von algebraischen Grössen. Die Integrale Z_0 und Z_{-1} lassen sich aber, wie wir sahen, durch Y_0 und Y_1 darstellen. Mithin führt die Untersuchung der Funktionen Z_ν nur auf das eine neue Element Z_1.

Als Ergebnis unserer Betrachtungen ergiebt sich also, dass das Integral des vorgelegten Differentiales sich vermittelst der bereits bekannten elementaren Funktionen und der Integrale darstellen lässt, welche zu den drei Arten gehören:

$$Y_0, Y_1, Z_1.$$

Diese drei Integrale Y_0, Y_1, Z_1 bilden in der That drei neue analytische Elemente, welche im allgemeinen Falle nicht auf einander und nicht auf die früheren elementaren Funktionen reduzibel sind, wie sich aus weiter gehenden Untersuchungen der Eigenschaften dieser Funktionen ergiebt, worauf hier nicht eingegangen werden kann.

Die elliptischen Integrale und Funktionen.

435. Die drei mit Y_0, Y_1, Z_1 bezeichneten Integrale sollen derart bestimmt werden, dass sie zugleich mit x verschwinden; nennen wir sie alsdann u, v, w und ist x eine Variabele zwischen 0 und 1, so wird

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Die Transscendenten u, v, w heissen die *elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung.*

Die Funktionen der ersten und zweiten Gattung enthalten eine Konstante k, kleiner als eins, welche der *Modul* genannt wird. Die Funktion der dritten Gattung enthält ausser dem Modul k noch eine andere Konstante n, welche der *Parameter* heisst. Wir haben gesehen, dass, wenn der Parameter n entweder gleich -1, oder gleich $-k^2$ ist, die Funktion dritter Gattung durch die beiden ersten Funktionen und durch algebraische Grössen darstellbar ist. Es wird für den Fall $n = -1$ nach der Gleichung 4) im § 434:

$$(1-k^2)\,w + k^2(u-v) = \frac{x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-x^2},$$

und für den Fall $n = -k^2$

$$(-k^2)w - (u - k^2 v) = \frac{-k^2 x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2},$$

wie man sich leicht auch durch Differentiation überzeugen kann.

436. Die elliptischen Integrale reduzieren sich auf cyklometrische oder logarithmische und algebraische Funktionen in den Grenzfällen, wo der Modul gleich null oder gleich eins wird. Für den Fall $k = 0$ ist

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Die erste Gleichung ergiebt $u = \arcsin x$. In den Funktionen v und w kann man die Differentiale auf eine rationale Form bringen nach der Methode des § 423. Man kann indessen auch in folgender Weise vorgehen. Die teilweise Integration giebt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

und bildet man die Integrale derart, dass sie für $x = 0$ verschwinden, so wird

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich $u - v$; also ist

$$v = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x.$$

Das Differential dw wird rational durch die Substitution

$$t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es ist dann:

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und folglich:

$$dw = \frac{dt}{1+(1+n)t^2} = \frac{d \operatorname{arctang} t\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}},$$

also:

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Der Parameter n ist als reell vorausgesetzt. Für den Fall, dass $1+n$ negativ ist, kann man die Formel von dem imaginären Werte befreien, indem man an Stelle des Kreisbogens Logarithmen einführt (§ 372). Auch kann man alsdann schreiben:

$$dw = \frac{dt}{1+(1+n)t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{1+t\sqrt{-1-n}} + \frac{dt}{1-t\sqrt{-1-n}}\right),$$

also:

$$w = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\, l\, \frac{1+t\sqrt{-1-n}}{1-t\sqrt{-1-n}} = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\, l \left(\frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1-n}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-1-n}}\right).$$

Die vorstehenden Ausdrücke für w werden illusorisch, wenn $n = -1$ ist. In diesem Falle verschwinden Zähler und Nenner des Bruches

$$w = \frac{\operatorname{arctang} t\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}},$$

und man erhält

$$w = t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

437. Für den Fall $k^2 = 1$ wird:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2}, \qquad v = \int_0^x \frac{x^2\, dx}{1-x^2}, \qquad w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)}.$$

Die Differentiale der Funktionen u, v, w sind also jetzt rational. Wendet man die erste Regel im § 418 an, so findet man

$$u = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x} = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Ferner ist $du - dv = dx$, also

$$v = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - x.$$

Endlich ist

$$\frac{1}{(1+nx^2)(1-x^2)} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{n}{1+nx^2} + \frac{1}{1-x^2}\right),$$

und folglich:

$$w = \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2} + \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2} + \frac{u}{1+n}.$$

Ist n positiv, so wird, indem man $x\sqrt{n} = t$ setzt:

$$\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2} = \sqrt{n}\int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{n}\,\operatorname{arctang} t,$$

also:

$$w = \frac{1}{1+n}\, l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\sqrt{n}}{1+n}\operatorname{arctang}(x\sqrt{n}).$$

Ist aber n negativ, so setzt man $x\sqrt{-n} = t$ und erhält:

$$\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2} = -\sqrt{-n}\int_0^t \frac{dt}{1-t^2} = -\sqrt{-n}\; l\sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

also:

$$w = \frac{1}{1+n}\, l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\sqrt{-n}}{1+n}\, l\sqrt{\frac{1+x\sqrt{-n}}{1-x\sqrt{-n}}}.$$

Um den Wert von w für den Fall $n = -1$ zu erhalten, kann man den Grenzwert dieses Ausdruckes, welcher die Form $\infty - \infty$ erhält, nach § 124 bestimmen, oder direkt

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^2}$$

berechnen. Es wird

$$w = \frac{1}{4}\, l\,\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x^2}.$$

438. Die drei elliptischen Integrale u, v, w erhalten eine besonders einfache Form, wenn man den Winkel einführt, dessen Sinus die unabhängige Variabele x ist. Setzt man

$$x = \sin\varphi, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos\varphi,$$

und bezeichnet man ferner $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ mit $\Delta\varphi$, so wird:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad v = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad w = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Betrachten wir insbesonders das Integral der ersten Gattung; durchläuft φ das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so durchläuft u durchaus wachsend das Intervall von 0 bis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K$. Der Winkel φ wird die *Amplitude* von u genannt und

$$\varphi = am\, u$$

geschrieben. Es ist folglich:

$$x = \sin am\, u, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos am\, u, \qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\, u.$$

Bisher ist die Variabele u als Funktion von x betrachtet worden. Wenn man nun aber u als unabhängige Variabele ansieht, zunächst beschränkt auf das Intervall von 0 bis K, so werden x, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-k^2x^2}$, oder was dasselbe besagt, $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$ Funktionen von u. Diese Funktionen, auf welche wir später noch zurückkommen werden, heissen jetzt die *elliptischen Funktionen*. Sie stehen zu den Integralen, aus welchen sie abgeleitet sind, in derselben Beziehung wie die goniometrischen Funktionen $\sin u$, $\cos u$ zu den inversen Funktionen $\arcsin x$, $\arccos x$.

Nimmt man u zur unabhängigen Variabelen, so erhalten die elliptischen Integrale der zweiten und dritten Gattung, weil $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = du$ ist, die Form

$$v = \int_0^u \sin^2 am\, u\, du, \qquad w = \int_0^u \frac{du}{1+n\sin^2 am\, u}.$$

Die binomischen Differentiale.

439. Unter den algebraischen Differentialen sind noch diejenigen besonders zu berücksichtigen, welche man *binomische Differentiale* genannt hat, da dieselben sehr häufig auftreten. Ihre allgemeine Form ist

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

wobei a und b Konstante, m, n, p rationale Exponenten bedeuten.

Man kann dabei n als positiv voraussetzen; denn das vorgelegte Differential nimmt auch die Form an:

$$x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx,$$

welche sich von der ersten nur dadurch unterscheidet, dass der Exponent von x in der Klammer sein Zeichen gewechselt hat.

Ferner kann man auch m und n als ganze Zahlen voraussetzen; denn sind sie Brüche, so bringt man sie auf einen gemeinsamen Nenner r, und wenn man nun

$$x = t^r, \qquad dx = rt^{r-1} \, dt$$

setzt, so wird das Differential gleich

$$rt^{mr+r-1} (a + bt^{nr}) \, dt,$$

es behält seine frühere Form, aber die beiden Exponenten der Variabelen sind in der That ganze Zahlen.

Demnach werden wir annehmen, dass m und n beide ganze Zahlen sind, von denen die zweite positiv ist. Der Exponent p dagegen kann eine beliebige rationale Zahl sein.

440. Die Fälle der Integrabilität. Ist der Exponent p eine ganze Zahl, so ist das binomische Differential

$$1) \qquad dV = x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

rational, und folglich durch algebraische und logarithmische Funktionen integrabel. Es giebt noch zwei andere Fälle solcher Integrabilität; man kann dies unmittelbar vermittelst der Substitutionsmethode feststellen. Setzt man

$$a + bx^n = t,$$

also:

$$x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

so folgt:

$$dV = \frac{1}{nb}\, t^p \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt,$$

und dies Differential wird rational durch die Substitution $t = z^r$, wobei r den Nenner von p bedeutet, wenn

2) $$\frac{m+1}{n}$$

gleich einer ganzen Zahl ist. Ferner haben wir oben gesehen, dass das Differential dV sich nicht ändert, wenn man a mit b vertauscht und m und n bezüglich durch $m + np$, und $-n$ ersetzt. Es wird dann $\frac{m+1}{n}$ in $-\frac{m+np+1}{n}$ verwandelt. Also kann man das Differential auch auf eine rationale Form bringen, wenn

3) $$\frac{m+1}{n} + p$$

gleich einer ganzen Zahl ist. Ist eine der Bedingungen 2) oder 3) erfüllt, so ist das Integral des Differentiales dV durch algebraische und logarithmische Funktionen darstellbar. Dabei ist zu bemerken, dass sich diese beiden Bedingungen gegenseitig ausschliessen, sobald p eine gebrochene Zahl ist.

Reduktion der binomischen Integrale.

441. In den beiden angegebenen Fällen der Integrabilität kann die Integration des binomischen Differentiales vermittelst einer Substitution ausgeführt werden, durch welche das Differential rational wird. Man kann jedoch zu demselben Ergebnis auch durch eine zweckmässige Anwendung der teilweisen Integration gelangen. Wenn es sich aber um ein binomisches Differential handelt, das nicht zu den genannten beiden Fällen gehört, so muss man eine Reduktion seines Integrales herbeizuführen suchen, d. h. dasselbe auf möglichst einfache Typen zurückführen. Hierzu gelangt man vermittelst eines Verfahrens, das wir nun entwickeln wollen.

Es sei, wie bisher,

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

das gegebene Differential, m und n ganze Zahlen, n positiv. Dieses Differential ist das Produkt der beiden Faktoren:

$$x^{m-n+1}, \qquad (a + bx^n)^p x^{n-1} dx,$$

von denen der zweite das Differential von

$$\frac{(a + bx^n)^{p+1}}{(p+1) nb}$$

ist. Dasselbe Differential ist auch das Produkt der beiden Faktoren

$$(a + bx^n)^p, \qquad x^m dx,$$

von denen der zweite das Differential von

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

ist. Die teilweise Integration liefert also die beiden Gleichungen:

$$1) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a + bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m - n + 1}{(p+1)nb} \int x^{m-n} (a + bx^n)^{p+1} dx,$$

$$2) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{pnb}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx.$$

Durch dieselben wird das vorgelegte Integral auf ein anderes derselben Form gebracht, welches sich nur dadurch von dem früheren unterscheidet, dass die Exponenten m und p durch $m - n$ und $p + 1$, oder durch $m + n$ und $p - 1$ ersetzt sind. Man hat eine Reduktion des Problemes gewonnen, wenn die neuen Exponenten beide einfacher sind, als die ursprünglichen. Dagegen bietet die Transformation keinen Vorteil, wenn nur der eine Exponent verkleinert, der andere aber vergrössert wird. Man kann indessen noch andere Gleichungen ableiten, die sich auf alle Fälle beziehen.

Das Integral auf der rechten Seite der ersten Gleichung ist gleich

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)\,dx = a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx + b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Desgleichen folgt, wenn man $\frac{x^m(a+bx^n)-ax^m}{b}$ an Stelle von x^{m+n} im Integrale auf der rechten Seite der zweiten Gleichung schreibt:

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx = \frac{1}{b}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx - \frac{a}{b}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

Werden diese Werte in die obigen beiden Gleichungen eingesetzt, so ergeben sich folgende Ausdrücke für das vorgelegte Integral:

$$\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\ 3)\quad &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1+np)b} - \frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\ 4)\quad &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.\end{aligned}$$

Verwandelt man endlich m in $m+n$ bei der dritten Gleichung und p in $p+1$ bei der vierten, und löst man alsdann jede Gleichung nach dem Integrale auf der rechten Seite auf, so folgt:

$$\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\ 5)\quad &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+1+n+np)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\ 6)\quad &= -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+n(p+1)}{n(p+1)a}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx.\end{aligned}$$

Diese vier zuletzt abgeleiteten Gleichungen lassen die Reduktion, welche wir vorhaben, in allen Fällen ausführen. Bemerkt muss dabei werden, dass die Formeln 3) und 4) illusorisch werden, wenn

$$m+1+np=0 \quad \text{oder} \quad \frac{m+1}{n}+p=0$$

ist. Dann aber liegt der zweite Fall der Integrabilität vor, und das gegebene Integral lässt sich, wie im § 440 gezeigt wurde, in ein rationales verwandeln, zuvor aber auch noch durch die Formeln 5) oder 6) auf ein einfacheres reduzieren. Da die Zahl p als gebrochen vorausgesetzt ist, so wird die Gleichung 6) niemals illusorisch, dagegen wird es die Gleichung 5) für $m=-1$. Dann aber tritt der erste Fall der Integrabilität ein, und die Integration lässt sich durch die Methode der Substitution ausführen.

442. Wir untersuchen nun zuerst, wie man die Gleichungen in den beiden Fällen der Integrabilität zu benutzen hat.

1. Es sei

$$\frac{m+1}{n}=e \quad \text{oder} \quad m+1-en=0,$$

wobei e eine ganze Zahl ist. Da n immer positiv ist, so ist bei positivem Werte von m auch e positiv. Vermittelst der Gleichung 3) wird man nun nach einander das vorgelegte Integral auf andere der gleichen Form bringen, welche aus jenem dadurch hervorgehen, dass der Exponent m durch

$$m-n, \quad m-2n, \ldots m-(e-1)n$$

ersetzt ist. In dem letzten Integrale wird dann

$$m-(e-1)n=n-1,$$

und

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}+\text{const};$$

das vorgelegte Integral ist in diesem Falle algebraisch.

Ist m negativ und kleiner als -1, so ist auch e negativ; schreibt man also $-e$ an Stelle von e, so erhält man

$$\frac{m+1}{n}=-e \quad \text{oder} \quad m+ne+1=0.$$

Alsdann kann man das Integral vermittelst der Formel 5) auf andere zurückführen, bei denen der Exponent m durch

$$m+n,\quad m+2n,\ldots m+n(e-1),\quad m+ne=-1$$

ersetzt ist. Dies letzte aber kann nicht mehr nach derselben Formel reduziert werden, denn diese wird illusorisch für $m=-1$. Man muss alsdann zur Substitutionsmethode des § 440 übergehen. Dabei kann man indessen noch immer wenn dies vorteilhaft erscheint, den Exponenten p erniedrigen oder erhöhen, indem man die Gleichungen 4) oder 6) anwendet, wie im § 443 gezeigt werden wird.

2. Nehmen wir an, dass

$$\frac{m+1}{n}+p=\pm e \quad \text{oder} \quad (m\mp ne)+np+1=0$$

ist, wobei e immer eine ganze Zahl bezeichnet. Dieser Fall unterscheidet sich, wie wir im § 440 sahen, von dem vorigen nur durch eine Änderung in der Bezeichnung. Übrigens bemerkt man auch unmittelbar, dass, wenn $m+np+1$ negativ ist, die Gleichung 5) das vorgelegte Integral auf andere derselben Form successive zurückführt, bei denen m in

$$m+n,\quad m+2n,\ldots m+(e-1)\,n=-(np+1+n)$$

verwandelt ist. Das letzte Integral ergiebt sich dann aus derselben Formel:

$$\int x^{-(np+1+n)}(a+bx^n)^p\,dx=-\frac{x^{-(np+n)}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a}+\text{const.}$$

Ist $m+np+1$ positiv und bezeichnet man seinen Wert mit ne, so führt die Gleichung 3) das Integral auf ein anderes derselben Form zurück, bei welchem m in $m-ne=-np-1$ verwandelt ist, und dieses letzte Integral muss durch die Substitutionsmethode bestimmt werden.

443. Sehen wir nunmehr von den beiden Fällen der Integrabilität ab, so lehren die Gleichungen 3) und 5), dass das gegebene Integral stets auf ein anderes gebracht werden kann, bei welchem der Exponent m durch $m\pm in$ ersetzt ist, wobei i eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Man kann dieselbe derart wählen, dass $m\pm in$ zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von n enthalten ist, zum Beispiel zwischen 0 und n; man kann aber auch die Zahl i so bestimmen, dass $m+in$ zwischen $-\frac{n}{2}$ und $+\frac{n}{2}$ enthalten ist.

Ferner erkennt man aus den Gleichungen 4) und 6), dass das vorgelegte Integral stets auf ein anderes gebracht werden kann, bei welchem der Exponent p durch $p \pm j$ ersetzt ist, wobei j eine beliebige ganze positive Zahl ist. Was also auch der Wert von p sein mag, die ganze Zahl j kann so gewählt werden, dass $p \pm j$ zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen, zum Beispiel zwischen 0 und 1 liegt, oder auch zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$.

Das Ergebnis also ist, dass in allen Fällen die binomischen Differentiale, welche nicht zu den beiden Arten der Integrabilität gehören, auf solche sich zurückführen lassen, bei denen die Zahlen p und $\frac{m}{n}$ beide zwischen 0 und 1, oder auch, wenn man will, zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ gelegen sind.

444. Der Exponent n im binomischen Differentiale kann gleich eins gemacht werden; dann aber wird der Exponent m gebrochen. Es sei:

$$x^n = t, \quad \text{also} \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

Setzt man nun
$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$
so wird:
$$x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} t^q (a + bt)^p dt.$$

Die Fälle der Integrabilität sind also diejenigen, wo eine der Zahlen p, q oder $p + q$ eine ganze Zahl ist, und man kann immer das binomische Integral, welches nicht zu diesen Fällen gehört, auf die Form

$$\int t^q (a + bt)^p dt$$

bringen, wobei p und q zwischen 0 und 1, oder zwischen irgend zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen gelegen sind. Man kann sogar eine noch einfachere Form erhalten, wenn man

$$t = \pm \frac{a}{b} z, \qquad dt = \pm \frac{a}{b} dz$$

setzt, denn das vorige Integral wird durch diese Substitution gleich:

$$\int z^q (1 \pm z)^p dz,$$

wenn man von einem konstanten Faktor dabei absieht.

445. Beispiele. 1. Das Integral

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

in welchem m eine ganze Zahl ist, gehört zu der Klasse der binomischen; hier ist $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, und da eine der Zahlen $\frac{m+1}{2}$ oder $\frac{m}{2}$ eine ganze ist, so ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Die Gleichung 3) im § 441 wird für den vorliegenden Fall:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wir nehmen m als positiv an und betrachten nach einander m gleich $2\mu+1$ und m gleich 2μ, wobei μ eine ganze Zahl ist. Bei ungeradem m ist das Integral algebraisch und die vorstehende Formel lässt seinen Wert berechnen. Ist dagegen m gerade, so führt dieselbe Formel das Integral schliesslich auf die Bestimmung von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Bezeichnet man mit C eine willkürliche Konstante, so erhält man

$$\int \frac{x^{2\mu+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu+1}\left[x^{2\mu} + \frac{2\mu}{2\mu-1}x^{2\mu-2} + \frac{2\mu(2\mu-2)}{(2\mu-1)(2\mu-3)}x^{2\mu-4} \right.$$
$$\left. + \cdots \frac{2\mu(2\mu-2)\ldots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 1}\right] + C,$$

$$\int \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\left[x^{2\mu-1} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}x^{2\mu-3} + \cdots \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}x\right]$$
$$+ \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 3.1}{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}\arcsin x + C.$$

Ist m negativ, so muss man auf die Gleichung 5) in § 441 zurückgehen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in der obigen

Rekursionsformel statt m, $m+2$ schreiben und sie dann nach dem Integrale der rechten Seite auflösen. Es wird dann:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \frac{x^{m+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wir setzen nun nach einander $m=-2\mu$, $m=-(2\mu+1)$; im ersten Falle wird das vorgelegte Integral algebraisch; im zweiten reduziert es sich auf das Integral des Differentiales $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, das man durch eine Substitution rational machen kann. Einfacher noch gelangt man zu einer bekannten Form, wenn man $x=\frac{1}{t}$ setzt; dann wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -l\,(t+\sqrt{t^2-1})+C,$$

also

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+C.$$

Demnach findet man, indem man mit C eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$\int \frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu-1}\left[\frac{1}{x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-3}\,\frac{1}{x^{2\mu-3}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}{(2\mu-3)(2\mu-5)\ldots 1}\,\frac{1}{x}\right] + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\left[\frac{1}{x^{2\mu}} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}\,\frac{1}{x^{2\mu-2}} + \cdots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}\,\frac{1}{x^2}\right]$$
$$-\frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 3.1}{2\mu(2\mu-2)\ldots 4.2}\,l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+C.$$

2. Auf dieselbe Weise kann man das Integral

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

berechnen; indessen ist es noch einfacher, dasselbe aus dem vorigen abzuleiten. Denn es ist gleich dem Werte, den das Integral $-\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ annimmt, wenn man hier x in $\frac{1}{x}$, und m in $-(m+1)$ verwandelt.

3. Das Integral

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

kommt ebenfalls auf das oben berechnete zurück; denn setzt man:

$$x = at^2, \qquad dx = 2\,at\,dt,$$

so erhält man:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2\,a^m \int \frac{t^{2m}\,dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Bemerkt man, dass

$$\arcsin t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{1}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a},$$

so findet man, für den Fall, dass m eine ganze positive Zahl ist:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{\sqrt{ax - x^2}}{m} \left[x^{m-1} + \frac{2m-1}{2m-2}\,a x^{2m-2} + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)}\,a^2 x^{m-3} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\,a^{m-1} \right]$$
$$+ \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3\,.\,1}{2m(2m-2)\ldots 4\,.\,2}\,a^m \arccos \frac{a - 2x}{a} + C,$$

und für den Fall, dass m eine ganze negative Zahl ist, wenn man $-m$ an Stelle von m setzt:

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{ax - x^2}} = -\frac{2\sqrt{ax - x^2}}{(2m-1)\,a^{m+1}\,x^m} \left[a^m + \frac{2m-2}{2m-3}\,a^{m-1}\,x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{(2m-3)(2m-5)\ldots 1}\,a x^{m-1} \right] + C.$$

Über einige binomische Differentiale, deren Integral sich auf elliptische Funktionen reduziert.

446. Ein binomisches Differential, welches nach der angegebenen Methode reduziert ist, lässt bisweilen eine weitere Reduktion zu. In dieser Beziehung sind aber allgemeine Regeln nicht angebbar, wir beschränken uns daher nur auf zwei Beispiele, bei denen die Integration des Differentiales schliesslich auf elliptische Funktionen zurückkommt. Wir betrachten zuerst das Differential

1) $$dV = \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}};$$

man kann demselben die Form geben:

$$dV = \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{x^3}}},$$

und es ist angezeigt, die nicht rationale Substitution

2) $$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}}$$

zu versuchen, bei welcher t eine neue Variabele ist, welche für $x = 0$ und für $x = \infty$ null wird. Hieraus folgt:

3) $$x^3 - \frac{1}{x^3} = -2t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^3};$$

solange die Variabele x positiv ist, muss man den Faktor $t^{-\frac{3}{2}}$ mit dem positiven Zeichen nehmen; dagegen muss man der Wurzel $\sqrt{1-t^3}$ das positive Zeichen geben, wenn $x < 1$ ist, und das negative im entgegengesetzten Falle. Die Differentiation der Gleichung 2) giebt:

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\frac{dx}{x} = -t^{-\frac{5}{2}}dt,$$

also wird nach Gleichung 3)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t\sqrt{1-t^3}},$$

und

4) $$dV = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,\frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

und sonach kann das Integral V nach der Methode des § 429 durch elliptische Funktionen dargestellt werden.

Wir behandeln noch das binomische Differential

5) $$dV = \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Hier kann man zweckmässig die Substitution

6) $$\sqrt[3]{1-x^3} = (1-x)\,t$$

anwenden; man erhält durch Differentiation:

$$\frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-x}{1+x}\,dt = dV.$$

Nun ergiebt aber die Gleichung 6), wenn man sie auf die dritte Potenz erhebt:

$$t^3 = \frac{1-x^3}{(1-x)^3} = \frac{\frac{3}{4}(1+x)^2 + \frac{1}{4}(1-x)^2}{(1-x)^2}, \quad \text{also} \quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}},$$

und folglich wird:

$$7) \qquad dV = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}}\,dt.$$

Das Integral V lässt sich also auch nach der Methode des § 429 durch elliptische Funktionen darstellen.

Integration einiger transscendenter Differentiale.

447. Wenn ein transscendentes Differential, dessen Integral zu bestimmen ist, durch eine Substitution auf eine algebraische Form gebracht werden kann, so ist es im allgemeinen zweckmässig, diese Reduktion auszuführen. Wenn also f eine algebraische Funktion bezeichnet, so werden die Integrale:

$$\int f(e^{mx})\,e^{mx}\,dx, \qquad \int f(l[x])\,\frac{dx}{x},$$

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx, \qquad \int f(\cos x)\sin x\,dx, \qquad \int f(\operatorname{tang} x)\,\frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$\int f(\arcsin x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int f(\operatorname{arc\,tang} x)\,\frac{dx}{1+x^2}, \quad \cdots\cdots$$

auf Integrale algebraischer Differentiale gebracht, indem man setzt:

$t = e^{mx},\ \ l(x),\ \ \sin x,\ \ \cos x,\ \ \operatorname{tang} x,\ \ \arcsin x,\ \ \operatorname{arc\,tang} x, \ldots$

448. Es sei z eine transscendente Funktion der Variabelen x, und X irgend eine Funktion derselben Variabelen. Bedeutet nun n eine positive ganze Zahl und kann man die Reihe von Funktionen bestimmen:

$$X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_{n+1},$$

deren Ableitungen bezüglich gleich sind

$$X,\ X_1\frac{dz}{dx},\ \dots\ X_n\frac{dz}{dx},$$

so kann man auch das Integral

$$\int X z^n\,dx$$

ausführen. Denn die teilweise Integration ergiebt die Gleichungen:

$$\int X z^n\,dx = \int z^n \frac{dX_1}{dx}\,dx = X_1 z^n - n\int X_1 z^{n-1}\frac{dz}{dx}\,dx,$$

$$\int X_1 z^{n-1}\frac{dz}{dx}\,dx = \int z^{n-1}\frac{dX_2}{dx}\,dx = X_2 z^{n-1} - (n-1)\int X_2 z^{n-2}\frac{dz}{dx}\,dx,$$

. . . .

$$\int X_{i-1} z^{n-i+1}\frac{dz}{dx}\,dx = \int z^{n-i+1}\frac{dX_i}{dx}\,dx = X_i z^{n-i+1} - (n-i+1)\int X_i z^{n-i}\frac{dz}{dx}\,dx,$$

und hieraus folgt:

$$1)\ \left\{\begin{aligned} \int X z^n\,dx &= X_1 z^n - nX_2 z^{n-1} + n(n-1)X_3 z^{n-2}\dots \\ &\quad + (-1)^{i-1} n(n-1)\dots(n-i+2)\,X_i z^{n-i+1} \\ &\quad + (-1)^i n(n-1)\dots(n-i+1)\int X_i z^{n-i}\frac{dz}{dx}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, wie angenommen wurde, so mache man schliesslich $i = n$, und es folgt:

$$2)\ \left\{\begin{aligned} \int X z^n dx &= X_1 z^n - nX_2 z^{n-1} + n(n-1)X_3 z^{n-2} + \dots \\ &\quad + (-1)^n n(n-1)\dots 1\,X_{n+1} + C, \end{aligned}\right.$$

womit der Satz bewiesen ist.

449. Beispiele. 1. Wir betrachten das Integral

$$\int x^{m-1}(lx)^n\,dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl bedeutet. Hier ist

$$z = l(x),\quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},\quad X = x^{m-1},$$

und es wird

$$X_1 = \frac{x^m}{m},\quad X_2 = \frac{x^m}{m^2},\quad X_3 = \frac{x^m}{m^3}\cdots,$$

also:

$$3)\ \begin{cases} \int x^{m-1}(l[x])^n\,dx \\ = \frac{x^m}{m}\left[(lx)^n - \frac{n}{m}(lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}(lx)^{n-2} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{m^n}\right] + C. \end{cases}$$

Schreibt man e^x, x, $e^x dx$ an Stelle von x, $l(x)$, dx, so ergiebt diese Gleichung:

$$4)\ \begin{cases} \int e^{mx} x^n\,dx \\ = \frac{e^{mx}}{m}\left[x^n - \frac{n}{m}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{m^n}\right] + C. \end{cases}$$

Dieses Resultat unterscheidet sich nur der Form nach von dem im § 415 gewonnenen.

2. In dem Integrale:

$$\int (\arcsin x)^n\,dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist, wird

$$z = \arcsin x,\quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad X = 1,$$

und man kann demnach setzen:

$$X_1 = x,\quad X_2 = -\sqrt{1-x^2},\quad X_3 = -x,\quad X_4 = \sqrt{1-x^2}, \ldots$$

wonach dieselben Werte periodisch wiederkehren. Es ist also

$$5)\ \begin{cases} \int (\arcsin x)^n dx = x[(\arcsin x)^n - n(n-1)(\arcsin x)^{n-2} + - \cdots] \\ \quad + \sqrt{1-x^2}\,[n(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\arcsin x)^{n-3} + - \cdots] + C. \end{cases}$$

Schreibt man hier x, $\sin x$, $\cos x$, an Stelle von $\arcsin x$, x, $\sqrt{1-x^2}$, so folgt

$$6)\ \begin{cases} \int x^n \cos x\,dx = \sin x\,[x^n - n(n-1)x^{n-2} + - \cdots] \\ \quad + \cos x\,[nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + - \cdots] + C. \end{cases}$$

450. Wir kehren zu der Gleichung 4) zurück. Die Differentiale der beiden Seiten in dieser Gleichung sind einander identisch gleich, was auch der Wert der Konstanten m sein mag, und diese Identität wird nicht gestört, auch wenn man diese Konstante als komplex annimmt. Setzt man also $m = a + ib$, so folgt:

$$\int x^n e^{(a+ib)x}\,dx$$

$$= \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\left[x^n - \frac{nx^{n-1}}{a+ib} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(a+ib)^2} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{(a+ib)^n}\right] + C.$$

Wird nun $e^{(a+ib)x}$ durch seinen Wert

$$e^{ax}(\cos b + i\sin bx)$$

ersetzt, und werden alsdann die reellen und die imaginären Bestandteile auf beiden Seiten einander gleichgesetzt, so erhält man die Werte der beiden Integrale

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{und} \quad \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx$$

für den Fall, dass n eine ganze positive Zahl ist. Setzt man

$$a + ib = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

so erhält man:

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\Big[\frac{1}{\varrho}x^n\cos(bx-\alpha) - \frac{n}{\varrho^2}x^{n-1}\cos(bx-2\alpha)\ldots$$

$$\cdots + (-1)^n\frac{n!}{\varrho^{n+1}}\cos(bx-\overline{n+1}\,\alpha)\Big] + C,$$

$$\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\Big[\frac{1}{\varrho}x^n\sin(bx-\alpha) - \frac{n}{\varrho^2}x^{n-1}\sin(bx-2\alpha)\ldots$$

$$\cdots + (-1)^n\frac{n!}{\varrho^{n+1}}\sin(bx-\overline{n+1}\,\alpha)\Big] + C.$$

Der Fall $n = 0$ ist wichtig zu bemerken; es ist

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{\varrho}e^{ax}\cos(bx-\alpha) + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{\varrho}e^{ax}\sin(bx-\alpha) + C,$$

oder:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

Diese beiden Formeln erhält man auch direkt, wenn man die beiden Differentiale $e^{ax}\cos bx\,dx$ und $e^{ax}\sin bx\,dx$ teilweise integriert. Denn auf diese Weise gewinnt man zwei Gleichungen zwischen diesen Integralen, aus denen man die gewonnenen Ausdrücke herleiten kann.

451. Die Methode des § 448 und allgemeiner noch das Verfahren der teilweisen Integration lassen oftmals auch solche Integrale, deren Werte nicht durch algebraische, logarithmische Funktionen etc. ausdrückbar sind, auf einfachere zurückführen.

Betrachten wir z. B. das Integral

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n}\,dx,$$

in welchem n eine ganze positive Zahl ist. Da $\frac{dx}{x^n}$ das Differential von $-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ ist, so ergiebt die teilweise Integration:

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n}\,dx = -\frac{e^{-x}}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{-x}}{x^{n-1}}\,dx,$$

und vermittelst dieser Gleichung reduziert sich das gegebene Integral auf

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Integration der Differentiale Pdx, wobei P ein Produkt des Sinus und Kosinus linearer Funktionen von x ist.

452. Differentiale dieser Form treten bei vielen Problemen auf, und es ist leicht, ihr Integral zu bilden. Es sei zunächst

$$P = \cos(ax+b)\cos(a'x+b'),$$

alsdann setze man:

$$P = \frac{1}{2}\cos[(a+a')x+(b+b')] + \frac{1}{2}\cos[(a-a')x+(b-b')].$$

Sind also $a+a'$ und $a-a'$ von null verschieden, so wird

$$\int P\,dx = \frac{\sin[(a+a')x+(b+b')]}{2(a+a')} + \frac{\sin[(a-a')x+(b-b')]}{2(a-a')} + C,$$

und ist $a=a'$, so wird

$$\int P\,dx = \frac{\sin(2ax+[b+b'])}{4a} + \frac{x\cos(b-b')}{2} + C.$$

In derselben Weise kann man vorgehen, wenn P ein Produkt von n solchen Faktoren ist:

$$P = \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\ldots$$

Setzt man

$$\alpha = a \pm a' \pm a'' \pm \ldots,\quad \beta = b \pm b' \pm b'' \pm \ldots,$$

so ist P die Summe von 2^{n-1} Gliedern, welche durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos(\alpha x + \beta)$$

dargestellt werden. Es ist also

$$\int P\,dx = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C.$$

Das Glied $\dfrac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha}$ muss durch $x \cos\beta$ ersetzt werden, wenn α gleich null ist.

Wir haben alle Faktoren von P durch den Kosinus dargestellt, weil ein Faktor von der Form $\sin(ax + b)$ durch $\cos\left(ax + b + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ersetzt werden kann.

453. Wir betrachten z. B. das Integral

$$\int \cos^n x\,dx,$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist. Es wird, wenn n gerade ist:

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x$$
$$+ \cdots + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\cdots\frac{n}{2}},$$

und wenn n ungerade ist:

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-4)x$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n-1}{2}+2\right)}{1\,.\,2\cdots\frac{n-1}{2}}\cos x.$$

Also ist für ein gerades n:

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\cdots\frac{n}{2}}\,\frac{x}{2} + C,$$

und für ein ungerades n:

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n-1}{2}+2\right)}{1\,.\,2\cdots\frac{n-1}{2}}\sin x + C.$$

Verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} - x$, so erhält man den Wert von $\int \sin^n x\,dx$; im folgenden wird man neue Formeln für die nämlichen Integrale finden.

Integration der Differentiale von der Form $\sin^m x \cos^n x\,dx$.

454. Das Differential, welches hier untersucht werden soll, lässt sich auf ein binomisches zurückführen; denn setzt man

$$\sin x = t^{\frac{1}{2}}, \quad \cos x = (1-t)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2}\,t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

so wird es gleich

$$\frac{1}{2}\,t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt.$$

Dieses Differential ist integrabel, wenn eine der Zahlen

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

eine ganze Zahl ist (insbesondere also auch jedesmal, wenn m und n ganze Zahlen sind); anderen Falles lässt sich das Differential reduzieren, wie im § 443 gezeigt wurde.

Dieselben Resultate findet man auch, indem man direkt die teilweise Integration auf das Differential $\sin^m x \cos^n x\,dx$ anwendet, und da sich Ausdrücke dieser Art häufig darbieten, so wird es nicht überflüssig sein, diese Rechnung zu entwickeln.

Das Differential kann in der Form

$$\cos^{n-1} x\,.\,\sin^m x \cos x\,dx$$

dargestellt werden; der zweite Faktor ist das Differential von $\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, also ergiebt die teilweise Integration

$$1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx. \end{cases}$$

Führt man in dem Integrale auf der rechten Seite an Stelle des Faktors $\sin^2 x$ den Faktor $1 - \cos^2 x$ ein, so wird dasselbe gleich der Differenz

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

Bringt man das zweite Integral auf die linke Seite und multipliziert man dann beide Seiten mit $\frac{m+1}{m+n}$, so folgt:

$$2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx. \end{cases}$$

Verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} - x$, dx in $-dx$, und vertauscht man zugleich die Buchstaben m und n, so folgt nach Multiplikation mit -1:

$$3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx. \end{cases}$$

Ersetzt man endlich in der Gleichung 2) n durch $n+2$ und in der Gleichung 3) m durch $m+2$, und löst man alsdann jede Gleichung nach dem Integrale auf, welches auf der rechten Seite vorkommt, so erhält man die beiden neuen Formeln:

$$4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx, \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x\, dx. \end{cases}$$

Von den Gleichungen 4) und 5) wird die erste illusorisch, wenn $n = -1$ ist, die zweite, wenn $m = -1$ ist. In jedem dieser Fälle ist aber die Bedingung der Integrabilität erfüllt. Ebenso werden die Gleichungen 2) und 3) illusorisch, wenn $m + n = 0$ ist, was aber gleichfalls ein Fall der Integrabilität ist. Dann liefert aber noch die Gleichung 1) eine Reduktion, denn sie ergiebt für $n = -m$:

$$6)\qquad \int \operatorname{tang}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} dx,$$

oder, wenn man $m - 2$ an Stelle von m schreibt:

$$7)\qquad \int \operatorname{tang}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\, dx.$$

Lassen wir nun die Fälle der Integrabilität bei Seite, die sich schliesslich immer, wenn es notwendig sein sollte, auf ein rationales Differential bringen lassen, so sieht man, dass die Gleichungen 2) und 4) den Exponenten n immer um eine gerade Zahl verkleinern oder vergrössern lassen. Ebenso kann man vermittelst der Gleichungen 3) und 5) den Exponenten m um eine gerade Zahl verkleinern oder vergrössern. Also ist es immer möglich, diese Exponenten schliesslich auf Zahlen zu bringen, die zwischen -1 und $+1$, oder zwischen 0 und 2 liegen.

In dem besonderen Falle, dass die Exponenten m und n ganze Zahlen sind, kann man die Reduktion eines jeden solange fortsetzen, als derselbe nicht gleich -1 oder gleich und entgegengesetzt dem andern ist. In dem letzten Falle geht man zu den Gleichungen 6) und 7) über, mittelst deren man die Reduktion ausführt, bis die beiden Exponenten null oder $+1$ und -1 werden. Wir bemerken noch, dass die beiden Gleichungen 6) und 7) auch unmittelbar erhalten werden aus der Gleichung:

$$\int \operatorname{tang}^m x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} + C.$$

455. Als allgemeines Ergebnis erkennt man, dass das Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

bei welchem m und n ganze positive oder negative Zahlen sind, vermittelst der obigen Reduktionsformeln immer auf eines der folgenden zurückkommt:

$$\int dx, \quad \int \sin x\,dx, \quad \int \cos x\,dx, \quad \int \sin x \cos x\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \int \operatorname{tang} x\,dx, \quad \int \operatorname{cotg} x\,dx.$$

Die drei ersten haben die Werte:

$$x + C, \quad -\cos x + C, \quad \sin x + C,$$

wobei C eine Konstante ist. Das vierte ist gleich:

$$\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C;$$

C bedeutet immer eine willkürliche Konstante.

Ferner erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{1}{x}}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}x},$$

also:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + C,$$

was mit der Gleichung im § 44 übereinstimmt. Verändert man in dieser Formel x in $x + \frac{\pi}{2}$, sodann in $2x$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log\operatorname{tang} x + C.$$

Endlich erhält man

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log\sin x + C.$$

456. Ist die Zahl n gleich null, so ergiebt die Gleichung 3) des § 454 für den Fall, dass m eine gerade und positive Zahl ist:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5}x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)\cdots 3}{(m-2)(m-4)\cdots 2}\sin x\right]$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\cdots 5\cdot 3}{(m-2)(m-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{x}{m} + C,$$

und für den Fall, dass m ungerade und positiv ist:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + \cdots \frac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{(m-2)(m-4)\cdots 1}\right] + C.$$

Verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} + x$, so erhält man zwei andere Gleichungen, welche den Wert von

$$\int \cos^m x\,dx$$

für den Fall eines positiven geraden oder ungeraden m darstellen. Diese Formeln lassen sich auch aus den Gleichungen des § 445 ableiten, wenn man dort x durch $\sin x$ oder $\cos x$ ersetzt.

457. Das Integral

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$$

lässt sich auf eines der früheren zurückführen, indem man

$$a = r\sin\alpha, \quad b = r\cos\alpha$$

setzt; denn es wird dann gleich

$$\frac{1}{r}\int \frac{dx}{\cos(x-\alpha)}.$$

Auch das allgemeinere Integral

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

kann bestimmt werden, indem man

$$a = r\sin\alpha, \quad b = r\cos\alpha, \quad \frac{c-r}{c+r} = \pm k^2$$

setzt; es wird dann

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c-r} \int \frac{\dfrac{k\,dx}{2\cos^2\frac{1}{2}(x-\alpha)}}{1 \pm k^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(x-\alpha)},$$

oder wenn man $k \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-\alpha) = t$ setzt:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c-r} \int \frac{dt}{1 \pm t^2}.$$

Das Integral der rechten Seite hat den Wert $\operatorname{arctang} t$ oder $\log \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, je nachdem $\pm t^2$ positiv oder negativ ist.

Zweites Kapitel.

Theorie der bestimmten Integrale und der Integrale von Funktionen mehrerer Variabelen.

Die Fundamentaleigenschaften der bestimmten Integrale.

458. Die allgemeine Definition, welche wir am Schlusse des § 409 für das Integral einer Funktion erörtert haben, die innerhalb des Integrationsintervalles durchaus stetig bleibt, wollen wir nunmehr so ausdehnen, dass wir über die Funktion $f(x)$, deren Integral zu bilden ist, keine besonderen Voraussetzungen machen. Wir stellen uns vielmehr die allgemeine Frage: Wie beschaffen muss eine Funktion in einem Intervalle von a bis b sein, damit sie im Intervalle von a bis x, wobei x irgend einen Punkt zwischen a und b oder auch den Grenzpunkt b selbst bedeutet, eine Integration zulässt? Wir beschränken uns zunächst bei dieser Frage auf Funktionen, die für das angegebene Intervall durchaus endlich sind. Die Funktion besitzt ein bestimmtes Integral zwischen a und x, wenn sie folgende Eigenschaft hat. Teilt man das Intervall von a bis x in n gleiche oder ungleiche Teile durch die Teilpunkte

$$a, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x,$$

und bezeichnet man die Längen dieser Teilintervalle mit

$$d_1, d_2, d_3, \dots d_n,$$

ferner irgend einen Punkt, der im Innern oder an den Grenzen solch eines Teilintervalles liegt, mit

$$a + \theta_1 d_1,\; x_1 + \theta_2 d_2,\; x_2 + \theta_3 d_3,\; \dots x_{n-1} + \theta_n d_n,$$

wobei die Grössen θ_1, $\theta_2 \dots$ gleich oder grösser als null und gleich oder kleiner als 1 sind, so muss die Summe:

1) $S_n = d_1 f(a + \theta_1 d_1) + d_2 f(x_1 + \theta_2 d_2) + \ldots d_n f(x_{n-1} + \theta_n d_n)$

einem bestimmten von den Grössen θ unabhängigen Grenzwerte zustreben, wenn die Anzahl n der Teilintervalle über jede Grenze derart wächst, dass die Grössen d_1, d_2, ... d_n sämtlich nach null konvergieren, wobei aber stets die Summe $d_1 + d_2 + \ldots d_n = x - a$ ist.

Die Bedingung, unter welcher ein bestimmter Grenzwert zu stande kommt, ergiebt sich folgendermassen. Bezeichnet man mit G_1, G_2, ... G_n die algebraisch grössten Werte, welche die Funktion im Innern oder an den Grenzen der Intervalle d_1, d_2, ... d_n annimmt oder beliebig nahe erreicht, und ebenso mit g_1, g_2, ... g_n die algebraisch kleinsten, — alle diese Werte sind der Voraussetzung nach endlich —, so besteht die Ungleichung:

2) $G_1 d_1 + G_2 d_2 + \ldots G_n d_n \geqq S_n \geqq g_1 d_1 + g_2 d_2 + \ldots g_n d_n,$

oder kürzer:
$$A_n \geqq S_n \geqq B_n.$$

Wir nehmen nun zuerst an, dass die weitere Teilung des Intervalles a bis x in immer kleinere Teile so ausgeführt wird, dass man die einmal vorhandenen Teilintervalle d_1, d_2, ... d_n, jedes für sich, wieder in Unterabteilungen zerlegt. Jede weitere Teilung enthält dann immer auch zugleich die Teilpunkte der vorangegangenen. Alsdann konvergieren aber die Grössen A_n und B_n immer nach bestimmten Grenzen. Denn bei fortgesetzter Vergrösserung von n kann A_n niemals zunehmen, weil an Stelle eines Gliedes von der Form $G_n d_n$, wenn d_n in Unterabteilungen $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_k = d_n$ zerlegt wird, eine Summe
$$G'_n \delta_1 + G''_n \delta_2 + \ldots G_n^{(k)} \delta_k$$
tritt, in welcher kein Faktor $G_n^{(i)}$ grösser ist als G_n. Also bildet A_n bei beliebig wachsendem n eine Wertreihe, die niemals zunimmt, und die doch stets grösser bleibt als B_n, die also eine bestimmte Grenze hat. Und ebenso ist $\lim B_n$ ein bestimmter Wert, weil die Grössen B_n bei wachsenden Werten von n nicht abnehmen können und doch kleiner bleiben als A_n. Da nun S_n durch Wahl von θ dem Werte A_n sowohl, wie dem Werte B_n beliebig genähert werden kann, so folgt aus der Gleichung
$$\lim A_n \geqq \lim S_n \geqq \lim B_n$$
die notwendige Bedingung, dass $\lim A_n = \lim B_n$ oder

3) $\lim [d_1(G_1 - g_1) + d_2(G_2 - g_2) + \ldots d_n(G_n - g_n)] = 0$

werden muss. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend: d. h. ist dieselbe erfüllt für eine bestimmte Teilung und deren Fortsetzung in der oben angegebenen Art, so hat $\lim S_n$ stets denselben bestimmten Grenzwert, von welcher Teilung man auch ausgehen, und wie man dieselbe ins unendliche fortsetzen mag, vorausgesetzt nur, dass sämtliche Teilintervalle nach 0 konvergieren.

Wir beweisen zuerst, dass, wenn die Gleichung 3) für eine bestimmte Teilung und deren Fortsetzung erfüllt ist, die analoge Gleichung bei jeder andern Teilung besteht. Angenommen, es sei die Zahl n bereits so gross gewählt, dass

$$\sum_{p=1}^{p=n} d_p(G_p - g_p) < \sigma$$

ist, wobei σ beliebig klein fixiert sein möge. Eine zweite ganz andere Teilung des Intervalles a bis x in m Teile, $d'_1, d'_2, \ldots d'_m$ sei gewählt, wobei $m > n$ ist, und jeder Teil d' beliebig viel kleiner ist als die kleinste der Grössen d, so soll bewiesen werden, dass auch

$$\sum_{p=1}^{p=m} d'_p(G'_p - g'_p)$$

die Null zur Grenze hat. Betrachtet man die Strecke a bis x gleichzeitig mit der Teilung in die n Intervalle d und die m Intervalle d', so wird in jedem Intervalle d eine gewisse Anzahl von Intervallen d' gelegen sein; Endpunkte der Intervalle d' werden aber im allgemeinen nicht mit Endpunkten der Intervalle d zusammenfallen. Es sei nun

$$a + d'_1 + d'_2 + \ldots d'_\lambda < a + d_1 = x_1 < a + d'_1 + \ldots d'_\lambda + d'_{\lambda+1},$$

$$a + d'_1 + d'_2 + \ldots d'_\mu < x_1 + d_2 = x_2 < a + d'_1 + \ldots d'_\mu + d'_{\mu+1},$$

$$a + d'_1 + d'_2 + \ldots d'_\nu < x_2 + d_3 = x_3 < a + d'_1 + \ldots d'_\nu + d'_{\nu+1},$$

. . . .

so kann man die Summe $\sum_{p=1}^{p=m} d'_p(G'_p - g'_p)$ folgendermassen zerlegen:

$$\sum_{p=1}^{p=\lambda} d'_p(G'_p - g'_p) + d'_{\lambda+1}(G'_{\lambda+1} - g'_{\lambda+1}) + \sum_{p=\lambda+2}^{p=\mu} d'_p(G'_p - g'_p)$$
$$+ d'_{\mu+1}(G'_{\mu+1} - g'_{\mu+1}) + \cdots$$

Die einzelstehenden Glieder beziehen sich auf diejenigen Intervalle, welche die Endpunkte der ersten Teilung enthalten, mit Ausnahme des letzten Punktes x; ihre Anzahl ist $n - 1$. Nun ist, da $G_1 - g_1$ die grösste Differenz bezeichnet, welche im ganzen Intervalle d_1 vorkommt:

$$\sum_{p=1}^{p=\lambda} d'_p(G'_p - g'_p) \leqq d_1(G_1 - g_1),$$

$$\sum_{p=\lambda+2}^{p=\mu} d'_p(G'_p - g'_p) \leqq d_2(G_2 - g_2) \ldots$$

ferner ist die Summe aller einzelnen Glieder sicherlich kleiner als das $n-1$fache Produkt der grössten Zahl d', die unter ihnen vorkommt, mit dem grössten Wert $G-g$, der unter den Differenzen enthalten ist. Also ist

$$\sum_{p=1}^{p=m} d'_p(G'_p - g'_p) \leq \sum_{p=1}^{p=n} d_p(G_p - g_p) + (n-1)\, d'(G-g).$$

Da n eine bestimmt fixierte Zahl bedeutet, $G-g$ endlich ist, und d' beliebig klein wird, so wird auch das Produkt

$$(n-1)\, d'(G-g) = \varepsilon$$

beliebig klein; also ist die Summe

$$\sum_{p=1}^{p=m} d'_p(G'_p - g'_p) \leq \sigma + \varepsilon,$$

sie konvergiert demnach, wenn alle d' nach null konvergieren, ebenfalls nach null.

Mithin erkennt man, dass man auch einen bestimmten Grenzwert für die Summe S_n (Gleichung 1) erhält, wenn man von irgend einer andern Teilung des Intervalles a bis x ausgeht und dieselbe so fortsetzt, dass die Endpunkte einer Teilung immer zugleich auch die Endpunkte der vorhergegangenen in sich enthalten. Es muss noch bewiesen werden, dass alle diese Grenzen den nämlichen Wert haben, woraus dann auch hervorgeht, dass der Prozess der weiteren Teilung nicht an die Beibehaltung bestimmter Endpunkte der Teilintervalle gebunden ist, dass er vielmehr nur erfordert, dass jedes Teilintervall schliesslich kleiner als jede Grösse wird.

Es seien
$$a,\ x_1,\ x_2 \ldots x_{n-1},\ x,$$
$$a,\ x'_1,\ x'_2 \ldots x'_{m-1},\ x$$

die Endpunkte zweier Teilungen. Dieselben seien bereits so weit getrieben, dass der zur ersten gehörige Summenwert S_n von seinem Grenzwerte S nur noch um eine beliebig kleine Zahl ε abweicht, und ebenso der Summenwert S'_m der zweiten Teilung von seinem Grenzwert S' nur um die beliebig kleine Grösse ε' differiert. Denkt man sich die beiden Teilungen zu einer einzigen vereinigt, und bildet man die Summe $S_{n,m}$ in Bezug auf diese durch die Vereinigung hervorgegangene, so kann man dieselbe sowohl als einen Fortschritt in der Reihe der Werte S_n, als auch in der Reihe der Werte S'_m betrachten. Sonach ist auch:

$$S_{n,m} = S \pm (< \varepsilon), \qquad S_{n,m} = S' \pm (< \varepsilon').$$

Mithin ist
$$S - S' < \varepsilon + \varepsilon',$$

d. h. die Grenzwerte S und S' sind einander gleich.

Sonach ist die Gleichung 3) die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines bestimmten Grenzwertes der Summe S_n, und da diese Summe von den Grössen θ ganz unabhängig ist, so kann man dieselbe auch insbesondere so definieren, dass man alle Intervalle einander gleich, und alle Werte θ gleich null annimmt. Es wird dann für $d = \frac{x-a}{n}$:

$$4)\quad S_n = d\,[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_{n-1})] = \sum_{x=a}^{x=x_{n-1}} d f(x);$$

$\lim S_n$ für $n = \infty$ heisst das bestimmte Integral und wird mit dem Symbol

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Die Bedingung 3) lässt sich so aussprechen. Nennt man nach Riemann die Differenz $G - g$ des algebraisch grössten und kleinsten Wertes der überall endlichen Funktion $f(x)$ im Intervalle d die Schwankung der Funktion in diesem Intervalle, so muss die Summe aus den Produkten der Schwankungen der Funktion mit den zugehörigen Intervallen bei beliebiger Verkleinerung der letzteren nach null konvergieren.

Es ist einleuchtend, dass diese Bedingung erfüllt ist, sobald die Funktion $f(x)$ im Intervalle von a bis x stetig ist, und für diesen Fall ist die Integrierbarkeit schon direkt im § 409 bewiesen. Die stetige Funktion ist nämlich auch eine gleichmässig stetige (§ 187), und sonach kann man die Intervalle d_p sämtlich so klein machen, dass überall die Differenzen $G_p - g_p$ kleiner werden als eine bestimmte beliebig kleine Zahl σ; es ist also

$$\sum d_p (G_p - g_p) < (\sigma \Sigma\, d_p = \sigma\,[x-a])$$

und wird mit σ beliebig klein.

Sodann erkennt man auch: wenn es eine endliche Anzahl von Stellen giebt, an denen die Funktion nicht mehr stetig ist, vielmehr eine sprungweise Unstetigkeit erleidet, derart etwa, dass $\lim f(x+h)$ und $\lim f(x-h)$ bestimmte, aber von einander verschiedene Werte bekommen, so bleibt die Bedingung der Integrierbarkeit bestehen; denn diese Stellen, an denen die Differenz $G_p - g_p$ einen endlichen bestimmten Wert behält, lassen sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen, deren Summe kleiner ist als eine beliebig kleine Zahl ε, und abgesehen von diesen Intervallen lassen sich die Teilintervalle d sämtlich so klein annehmen, dass für sie die Grösse der Schwankung allenthalben kleiner wird als σ. Es ist dann

$$\sum d_p (G_p - g_p) < \sigma(x-a) + n\varepsilon(G-g),$$

wobei n die Anzahl der Unstetigkeitsstellen und $G - g$ die grösste Schwankung an denselben bezeichnet. Die rechte Seite kann nun durch Wahl von ε und σ beliebig klein gemacht werden.

Allgemein aber folgt: wenn die Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Schwankungen der Funktion $f(x)$ grösser sind als eine bestimmte beliebig kleine Zahl σ zwar in unendlicher Anzahl vorhanden sind, jedoch über das Intervall von a bis x so verteilt sind, dass sie sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen lassen, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann, so ist die Bedingung 3) erfüllt. Denn fixiert man eine beliebig kleine Zahl σ, und macht man die Summe der Intervalle, in denen die Schwankungen grösser sind als σ, kleiner als eine beliebig kleine Zahl ε, so ist

$$\sum d_p (G_p - g_p) < \sigma\,(x-a) + \varepsilon\,(G-g),$$

wobei $G - g$ die grösste Schwankung bezeichnet, die in den Intervallen mit der Gesamtlänge ε vorkommt. Auch dieser Ausdruck wird mit σ und ε beliebig klein.

Sonach umfasst, was hier nur kurz angedeutet werden sollte, der Begriff der Integrierbarkeit nicht nur die stetigen Funktionen, sondern auch Funktionen, die in jedem kleinsten Teile des Integrationsintervalles unstetig oder unbestimmt werden können.

Die im § 409 bewiesenen Sätze gelten auch, wenn die Funktion $f(x)$ nur die Bedingung der Integrierbarkeit erfüllt:

1. Das Integral ist eine stetige Funktion seiner oberen Grenze, wenn diese als variabel betrachtet wird; denn es ist

$$5)\qquad \int_x^{x+h} f(x)\,dx = [g + \theta\,(G-g)]\,h, \text{ also } \lim_{h=0} \int_x^{x+h} f(x)\,dx = 0,$$

wobei G und g die algebraisch grössten und kleinsten Werte der Funktion im Intervalle von x bis $x + h$ bezeichnen.

2. Nennt man $\int_a^x f(x)\,dx$ gleich $F(x)$, so ist

$$6)\qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1), \quad \text{denn es ist } \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x)\,dx - \int_a^{x_1} f(x)\,dx.$$

3. Der vorwärts genommene Differentialquotient des Integrales, gebildet in Bezug auf die obere Grenze als unabhängige Variabele, ist gleich $f(x)$, wenn die zu integrierende Funktion an

der Stelle x stetig ist, und liegt innerhalb der Schwankungen, welche die Funktion an der betrachteten Stelle vorwärts genommen besitzt, wenn sie dort vorwärts genommen unstetig oder unbestimmt wird, denn aus der Gleichung 5) folgt mit Benutzung der Gleichung 6):

$$7)\qquad g < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < G.$$

459. Aus der allgemeinen Definition des Integrales folgen noch weitere fundamentale Eigenschaften, die wir nun feststellen wollen.

Lehrsatz I. *Ein bestimmtes Integral ändert sein Zeichen und behält den nämlichen absoluten Wert, wenn man die beiden Grenzen mit einander vertauscht.*

Denn die Integrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{X}^{x_0} f(x)\,dx$$

sind die Grenzwerte von Summen, von denen die eine die Intervallstrecken von x_0 bis X, die andere die Intervallstrecken von X bis x_0 enthält. Diese Strecken können in beiden Fällen gleich gewählt werden, sie haben aber entgegengesetzte Vorzeichen.

460. Lehrsatz II. *Sind*

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1},\ X$$

Werte von x, *so dass die eindeutige Funktion* f(x) *integrabel bleibt, wenn* x *von einem dieser Werte zum folgenden variiert, so ist*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

Denn das Integral auf der linken Seite ist der Grenzwert einer Summe, die sich aus n Summanden zusammensetzt, von denen jeder eines der Integrale rechts zur Grenze hat, wenn die Werte x_0, x_1, $\ldots X$ der Grösse nach geordnet sind. Aber auch wenn dieses nicht der Fall ist, so gilt dasselbe; denn die Summanden, welche nicht in der Summe links enthalten sind, sind auf der rechten Seite zweimal und mit entgegengesetztem Zeichen vorhanden.

461. Lehrsatz III. *Es seien* $\varphi(x)$ *und* $f(x)$ *zwei Funktionen, welche für alle Werte von* x *gleich* x_0 *bis* $x = X > x_0$ *integrierbar sind. Wenn dann für alle diese Werte von* x *stets* $f(x) > \varphi(x)$ *ist, so ist auch*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

Denn von den Summen, deren Grenzwerte die beiden Integrale sind, ist die zur Funktion $f(x)$ gehörige stets grösser als die andere.

Folgerung. *Ist die integrierbare Funktion* $f(x)$ *der Grösse nach immer enthalten zwischen den beiden integrierbaren Funktionen* $\varphi(x)$ *und* $\psi(x)$ *bei allen Werten von* x *zwischen* x_0 *und* X, *so sind* $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$ *und* $\int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx$ *zwei Grenzen für das Integral* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

462. Beispiel. Es sei das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$ gegeben, in welchem m grösser als 2 ist. Es ist einleuchtend, dass dieses Integral vergrössert wird, wenn man m verkleinert, und dass es verkleinert wird, wenn man m vergrössert. Es ist also enthalten zwischen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

d. h. zwischen

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{und} \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0,523\ldots$$

463. Lehrsatz IV. *Es seien* u *und* v *zwei integrierbare Funktionen von* x. *Wenn nun die Funktion* v *bei allen Werten von* x *zwischen* x_0 *und* X *dasselbe Zeichen hat, so ist*

$$\int_{x_0}^{X} u\,v\,dx = U \int_{x_0}^{X} v\,dx.$$

Dabei bedeutet U *einen Wert, der zwischen dem algebraisch grössten und kleinsten Werte enthalten ist, welche zu der Funktion* u *im Intervalle von* x_0 *bis* X *gehören.*

Denn sind A und B der Minimal- und der Maximalwert der Funktion u, so ist bei allen diesen Werten von x, falls v positiv ist,

$$Av < uv < Bv,$$

und, falls v negativ ist

$$Av > uv > Bv.$$

Also ist der Wert des Integrales $\int\limits_{x_0}^{X} uv\,dx$ zwischen $\int\limits_{x_0}^{X} Av\,dx$ und $\int\limits_{x_0}^{X} Bv\,dx$ enthalten, d. h. zwischen den beiden Produkten, welche man erhält, indem man A und B mit $\int\limits_{x_0}^{X} v\,dx$ multipliziert. Diesen Satz pflegt man als den *ersten Mittelwertsatz* zu bezeichnen.

Wir haben hier den Satz vorausgesetzt: sind u und v zwei im Intervalle von x_0 bis X durchaus endliche und integrierbare Funktionen, so ist auch ihr Produkt uv integrierbar.

Derselbe beweist sich leicht. Denn bezeichnet man die Schwankung der Funktion uv in einem Teilintervalle von der Länge d mit $u_1 v_1 - u_0 v_0$, während die Schwankung der Funktion u in demselben Intervalle gleich $u'' - u'$, die Schwankung der Funktion v gleich $v'' - v'$ ist, so wird

$$u_1 v_1 - u_0 v_0 = u_1 (v_1 - v_0) + v_0 (u_1 - u_0).$$

Es ist nun der Betrag von

$$v_1 - v_0 \leqq v'' - v' \quad \text{und ebenso} \quad u_1 - u_0 \leqq u'' - u'.$$

Bezeichnet man also die grössten Beträge, welche die Funktionen u und v überhaupt im ganzen Intervalle von x_0 bis X annehmen oder beliebig nahe erreichen, mit U und V, so ist

$$u_1 v_1 - u_0 v_0 \leqq U(v'' - v') + V(u'' - u'),$$

und mithin wird

$$\Sigma d(u_1 v_1 - u_0 v_0) \leqq U \Sigma d(v'' - v') + V \Sigma d(u'' - u').$$

Die linke Seite konvergiert schliesslich nach null, weil beide Summen auf der rechten Seite zufolge der Integrierbarkeit von u und v schliesslich null werden.

Lehrsatz V. *Sind* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *und* $\varphi(\mathrm{x})$ *zwei integrierbare Funktionen, von denen die eine,* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, *im Intervalle von* x *bis* X *nicht wächst und positiv bleibt, während* x *das Intervall von* x_0 *bis* X *durchläuft, so ist*

$$\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\varphi(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_0+\theta(\mathrm{X}-\mathrm{x}_0)} \varphi(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}.$$

Dabei bedeutet in dem Integrale der rechten Seite die obere Grenze $\mathrm{x}_0 + \theta(\mathrm{X} - \mathrm{x}_0)$ *einen Wert im Innern oder an den Grenzen des Intervalles von* x_0 *bis* X.

Betrachtet man die Summe

$$[f(x_0)\,\varphi(x_0) + f(x_1)\,\varphi(x_1) + \ldots f(x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1})]\,d,$$

in welcher $d = \dfrac{X - x_0}{n}$ ist, und $x_0,\ x_1, \ldots x_{n-1}$ die Anfangspunkte der n Intervalle von der Länge d bedeuten, so ist, weil die Grössen $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_{n-1})$ eine Reihe von Werten bilden, die nicht zunehmen, nach dem Abelschen Satze (§ 121) die in der Klammer enthaltene Summe zwischen

$$f(x_0)\,G \quad \text{und} \quad f(x_0)\,g$$

gelegen, wenn man mit G und g den algebraisch grössten und den algebraisch kleinsten Wert bezeichnet, der in der Reihe

$$\varphi(x_0),\ \varphi(x_0) + \varphi(x_1),\ \varphi(x_0) + \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \ldots$$
$$\varphi(x_0) + \varphi(x_1) + \ldots \varphi(x_{n-1})$$

vorkommt. Das Produkt dieser Grössen mit der Länge d ist aber, wenn man die Teilung in n Intervalle so weit fortgesetzt hat, dass die Schwankungen der Funktion φ in den Teilintervallen eine Produktsumme liefern, die kleiner ist als σ, von den Integralen

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx,\quad \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x)\,dx, \ldots \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$$

nur noch um eine Grösse unterschieden, die kleiner ist als σ. Bezeichnet man also mit g' und G' die kleinsten und grössten Werte in dieser Reihe, so ist

$$f(x_0)\,[G' + \sigma] > [f(x_0)\,\varphi(x_0) + f(x_1)\,\varphi(x_1) + \ldots f(x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1})]\,d > f(x_0)\,[g' - \sigma].$$

Lässt man in dieser Gleichung n beliebig wachsen, so wird σ beliebig klein, während die Grössen G' und g' nicht über die Maximal- und Minimalwerte hinausgehen, welche das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$$

annimmt, während x das Intervall von x_0 bis X durchläuft. Bezeichnet man diese Werte mit M und m, so ist

$$f(x_0)\,M > \int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx > f(x_0)\,m.$$

Daraus folgt, dass es einen zwischen M und m gelegenen Wert giebt, welcher mit $f(x_0)$ multipliziert gleich dem gegebenen Integrale ist; dieser Wert muss, da $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ eine stetige Funktion von x ist, auch unter den Werten enthalten sein, welche dieses Integral annimmt, wenn x das Intervall von x_0 bis X durchläuft. Sonach besteht die zu beweisende Gleichung

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\theta(X-x_0)} \varphi(x)\,dx.$$

Folgerungen. 1. Ist $f(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X positive Funktion, welche nicht abnimmt, so kehre man die Grenzen des Integrales um. Alsdann ist

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(X)\int_{X}^{X+\theta(x_0-X)} \varphi(x)\,dx,$$

also

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(X)\int_{X+\theta(x_0-X)}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

2. Ist $f(x)$ eine im Intervalle von x_0 bis X negative Funktion, welche nicht zunimmt, so ist $-f(x)$ eine positive Funktion, welche, während x das Intervall von x_0 bis X durchläuft, nicht abnimmt. Also ist

$$-\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = -f(X)\int_{X+\theta(x_0-X)}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

oder

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(X)\int_{X+\theta(x_0-X)}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

3. Ist $f(x)$ eine Funktion, welche im Intervalle von x_0 bis X nicht zunimmt, dagegen von einem positiven Werte zu einem negativen übergeht, so ist $f(x) - f(X)$ eine Funktion, welche durchaus positiv ist und nicht zunimmt. Also ist

$$\int_{x_0}^{X} [f(x) - f(X)]\,\varphi(x)\,dx = [f(x_0) - f(X)] \int_{x_0}^{x_0+\theta(X-x_0)} \varphi(x)\,dx,$$

oder

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x_0) \int_{x_0}^{x_0+\theta(X-x_0)} \varphi(x)\,dx + f(X) \int_{x_0+\theta(X-x_0)}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

Diesen Satz nennt man den *zweiten Mittelwertsatz*.

Integration bei unendlichen Grenzen.

464. Bisher wurden bei der Definition, wie bei der Untersuchung der Eigenschaften eines bestimmten Integrals die Grenzen x_0 und X als beliebige, aber feste Grössen vorausgesetzt. Wir nehmen nun an, dass x_0 und X variabel sind, und wollen insbesondere den Fall untersuchen, dass die eine oder die andere dieser Grenzen unendlich wird.

Das Integral des Differentiales $f(x)\,dx$, gebildet zwischen zwei unendlichen Grenzen, oder zwischen einer endlichen und einer unendlichen, kann einen endlichen Wert erhalten, es kann aber auch unendlich oder unbestimmt werden, wenn man den Grenzwert zu bestimmen sucht, nach welchem das Integral konvergiert, während man die Grenzen desselben über jeden Betrag hinaus wachsen lässt. Wir wollen zunächst Beispiele für diese verschiedenen Fälle geben.

1. Das Differential $e^{-x}\,dx$ liefert, integriert zwischen den Grenzen x_0 und X:

$$\int_{x_0}^{X} e^{-x}\,dx = e^{-x_0} - e^{-X}.$$

Lässt man nun X nach $+\infty$ konvergieren, so folgt:

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-x_0}.$$

Lässt man aber x_0 nach $-\infty$ konvergieren, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{X} e^{-x}\,dx = +\infty.$$

2. Das Integral des Differentiales $\dfrac{dx}{1+x^2}$ zwischen den Grenzen x_0 und X ist:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctang} X - \operatorname{arctang} x_0,$$

und lässt man X nach $+\infty$ konvergieren, so wird

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang} x_0,$$

und lässt man nun x_0 nach $-\infty$ konvergieren, so wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3. Das Differential $\cos x\,dx$ giebt, zwischen den Grenzen 0 und X integriert:

$$\int_0^X \cos x\,dx = \sin X.$$

Es ist einleuchtend, dass dieses Integral zwar endlich bleibt, aber keinem bestimmten Werte zustrebt, wenn man X unendlich werden lässt.

465. Man kann kein allgemeines, aus der Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ abgeleitetes Kriterium aufstellen, welches in allen Fällen entscheiden lässt, ob das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ endlich und bestimmt bleibt, wenn die eine oder die andere der Grenzen unendlich wird. Indessen kann man doch einen Satz aufstellen, welcher bei einer sehr grossen Anzahl von Fällen ein Mittel zur Entscheidung giebt.

Lehrsatz. *Es sei* $f(x)$ *eine in jedem endlichen Intervalle integrabele Funktion, welche endlich bleibt bei allen Werten von* x *zwischen* x_0 *und* $+\infty$. *Wenn nun bei allen Werten von* x, *welche grösser sind als eine bestimmte Grösse* α, *der Betrag des Produktes* $x^n f(x)$ *beständig kleiner ist als eine bestimmte Zahl* K, *und dabei der Exponent* n *grösser als* 1 *ist, so konvergiert das Integral* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *nach einer endlichen bestimmten Grenze, während man* X *nach* $+\infty$ *konvergieren lässt.*

Wenn dagegen die Funktion $f(x)$ *bei allen Werten von* x, *welche grösser sind als eine bestimmte Grösse* α, *stets dasselbe Zeichen behält, und der Betrag des Produktes* $x^n f(x)$ *niemals kleiner wird als eine bestimmte Zahl* K, *während der Exponent* n *gleich oder kleiner als* 1 *ist, so wird auch das Integral* $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *zugleich mit* X *unendlich.*

Es ist nämlich

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int\limits_{\alpha}^{X} f(x)\,dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite hat einen bestimmten Wert; es genügt demnach nur das zweite zu betrachten.

1. Ist der Betrag des Produktes $x^n f(x)$ kleiner als K, für alle Werte von x zwischen α und $+\infty$, so ist einleuchtend, dass auch der Betrag des Integrales $\int\limits_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ stets kleiner ist als

$$\int\limits_{\alpha}^{X} \frac{K}{x^n}\,dx = \frac{K}{n-1}\left[\frac{1}{\alpha^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right].$$

Diese Grösse wird aber, unter der Annahme, dass $n > 1$ ist, für $X = \infty$, gleich

$$\frac{K}{(n-1)\,\alpha^{n-1}}.$$

Also bleibt das Integral $\int\limits_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ für $X = \infty$ endlich und wird bei beliebig wachsenden Werten von α beliebig klein, und mithin konvergiert auch

$$\int\limits_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx,$$

wenn man α über jede Grenze wachsen lässt, nach einem bestimmten endlichen Werte.

2. Ist der Betrag des Produktes $x^n f(x)$ nicht kleiner als eine bestimmte Zahl K bei allen Werten von x zwischen α und $+\infty$, und behält die Funktion $f(x)$ stets dasselbe Zeichen,

so ist der Betrag des Integrales $\int\limits_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ grösser als $\int\limits_{\alpha}^{X} \frac{K}{x^n}\,dx$.

Dieses letzte Integral hat den Wert

$$\frac{K}{1-n}\left(X^{1-n} - \alpha^{1-n}\right),$$

wenn $n < 1$ ist, und

$$K \log \frac{X}{\alpha},$$

wenn $n = 1$ ist. In beiden Fällen wird derselbe für $X = \infty$ unendlich. Also gilt dies auch für das ursprüngliche Integral.

Die Bedingung des Satzes kann man auch so aussprechen: Die zu integrierende Funktion $f(x)$ muss, wenn sie bei beliebig wachsenden Werten von x ihr Zeichen nicht mehr wechselt, von höherer als der ersten Ordnung für $x = \infty$ verschwinden, damit das Integral auch für $x = \infty$ endlich und bestimmt bleibt.

Bemerkung. Der vorstehende Satz gilt ebenso für den Fall, dass X nach $-\infty$ konvergiert. Denn verwandelt man x in $-x$, so ist

$$\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int\limits_{-x_0}^{-X} f(-x)\,dx,$$

und man hat also die obere Grenze $-X$ nach $+\infty$ konvergieren zu lassen.

Derselbe Satz ist auch noch anwendbar in dem Falle, dass die untere Grenze x_0 nach $\pm\infty$ konvergiert, da man die beiden Grenzen mit einander vertauschen kann.

466. Beispiele. 1. Wir betrachten das Integral $\int\limits_{x_0}^{X} e^{-x^2}\,dx$. Ist n eine beliebig grosse Zahl, K irgend eine bestimmte positive Grösse, so konvergiert der Betrag des Produktes $x^n e^{-x^2}$ nach null, wenn x gleich $\pm\infty$ wird. Man kann also einen Wert α für x so fixieren, dass von $x = +\alpha$ bis $x = +\infty$, oder von $x = -\alpha$ bis $x = -\infty$ der Betrag des Produktes $x^n e^{-x^2}$ kleiner als K wird. Hieraus folgt, dass das vorgelegte Integral einen endlichen bestimmten Wert $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2}\,dx$ behält, wenn X nach $+\infty$ und x_0 nach $-\infty$ konvergiert.

Allgemeiner noch erkennt man: Wenn $f(x)$ eine in jedem endlichen Intervalle integrierbare Funktion ist, welche bei allen Werten von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ endlich bleibt, so hat auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-x^2} dx$$

einen endlichen und bestimmten Wert.

2. Das aufgestellte Kriterium entscheidet nichts über die Giltigkeit eines Integrales bei unendlicher Grenze, sobald die Funktion unter dem Integrale mit beliebig wachsenden Werten von x fortwährend ihr Zeichen wechselt. In diesem Falle kann das Integral einer endlichen bestimmten Grenze zustreben, ohne dass die Funktion in bestimmter Weise von niederer als der ersten Ordnung für $x = \infty$ verschwindet. Ein wichtiges Beispiel dieser Art bietet das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Hier wird $f(x) \,.\, x = \sin x$, also eine Grösse, die bei beliebig wachsenden Werten von x immer zwischen den Grenzen -1 und $+1$ oscilliert. Dass dieses Integral nichtsdestoweniger einen bestimmten Wert hat, lässt sich leicht einsehen. Denn betrachtet man zunächst das Integral zwischen den Grenzen 0 und w, wobei w irgend ein Wert zwischen zwei ganzen Vielfachen von π ist, $w = k\pi + \alpha$ (k ganze Zahl, $\alpha \leqq \pi$), so ist:

$$\int_0^w \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\pi + \int_0^{2\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{k\pi+\alpha} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Die Glieder dieser Reihe, die für $k = \infty$ eine unendliche wird, bekommen wechselnde Zeichen und ihre Beträge nehmen ab. Denn vergleicht man die Integrale

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \text{und} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

so wird, wenn man in dem zweiten Integrale, vermittelst der Substitution $y = x - \pi$, die Grenzen denen des ersten gleich macht:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi}\, dy = -\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{y+\pi}\, dy.$$

Mit wachsenden Werten von k konvergieren die Beträge dieses Integrales nach null; denn der Betrag ist kleiner als der des Integrales

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dy}{y+\pi} = l\left(\frac{k+1}{k}\pi\right).$$

Mithin hat die unendliche Reihe und folglich das gegebene Integral für $w = \infty$ einen bestimmten Wert. (Siehe § 494, Gleichung 8.)

Integration in dem Falle, dass die Funktion an den Grenzen des Integrales unendlich wird.

467. Wir nehmen an, dass die Funktion $f(x)$ endlich und integrierbar bleibt für alle Werte von x zwischen x_0 und X, dass sie jedoch unendlich wird für $x = X$, d. h. dem Betrage nach über jede Grenze wächst, wenn x nach X konvergiert. Bezeichnet man mit ε eine Grösse von demselben Zeichen wie $X - x_0$, so versteht man unter dem Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ die Grenze, nach welcher

$$\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$$

konvergiert, wenn man ε dem Werte null beliebig nähert. Es kann auch eintreten, dass dieses Integral selbst über jede Grenze wächst oder auch unbestimmt wird; dann hat das vorgelegte Integral keinen endlichen bestimmten Wert.

Desgleichen ist, wenn $f(x)$ unendlich wird, für $x = x_0$ das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ die Grenze, nach welcher $\int_{x_0+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx$ konvergiert, wenn man mit ε wiederum eine Grösse von gleichem Zeichen wie $X - x_0$ bezeichnet, die sich dem Werte null beliebig nähert.

Wir wollen nun einen Satz beweisen, analog zu den im § 465, auf Grund dessen man in gewissen Fällen entscheiden kann, ob ein Integral einen endlichen Wert behält, wenn die zu integrierende Funktion an den Grenzen unendlich wird.

468. Lehrsatz. *Es sei* f(x) *eine Funktion, welche endlich und integrierbar ist bei allen Werten von* x *zwischen* x_0 *und* X, *die aber unendlich wird für* x = X. *Kann man nun eine Grösse* α *zwischen* x_0 *und* X *angeben, so dass für alle Werte von* x *zwischen* α *und* X *der Betrag des Produktes* $(X - x)^n f(x)$ *oder* $(x - X)^n f(x)$ *kleiner ist als eine bestimmte Grösse* K, *während* n *kleiner als* 1 *ist, so hat auch das Integral* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *einen endlichen bestimmten Wert.*

Wenn man dagegen eine Grösse α *zwischen* x_0 *und* X *angeben kann, so dass bei allen Werten von* x *zwischen* α *und* X *das Produkt* $(X - x)^n f(x)$ *oder* $(x - X)^n f(x)$ *dasselbe Zeichen behält und beständig grösser ist als eine bestimmte Grösse* K, *während* n *gleich oder grösser als* 1 *ist, so wird das Integral* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *unendlich.*

Denn es ist

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx + \lim \int_{\alpha}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite hat einen endlichen bestimmten Wert; es handelt sich also nur noch um den Grenzwert des zweiten.

1. Ist von $x = \alpha$ bis $x = X$ der Betrag des Produktes $[\pm(X - x)]^n f(x)$ immer kleiner als eine bestimmte Grösse K, während n kleiner als 1 ist, so leuchtet ein, dass der Betrag des Integrales kleiner ist als der Betrag von

$$\int_{\alpha}^{X-\varepsilon} K \frac{dx}{(X - x)^n} = \frac{(X - \alpha)^{1-n} - \varepsilon^{1-n}}{1 - n} K.$$

Konvergiert ε nach null, so wird die rechte Seite, weil $1 - n > 0$ ist, gleich

$$\frac{(X - \alpha)^{1-n}}{1 - n} K,$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein, wenn α dem Werte X beliebig genähert wird. Mithin konvergiert

$$\int_{\alpha}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$$

für $\varepsilon = 0$ nach einer Grenze, deren Betrag durch Wahl von α beliebig klein gemacht werden kann, d. h. auch

$$\int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

hat für $\alpha = X$ einen bestimmten endlichen Wert.

2. Nehmen wir an, dass von $x = \alpha$ bis $x = X$ das Produkt $(X - x)^n f(x)$ immer dasselbe Vorzeichen behält, und dass sein Betrag immer grösser ist als eine bestimmte Zahl K, während die Zahl n gleich oder grösser als 1 ist. Der Betrag des Integrales $\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$ wird dann grösser als der Betrag von $\int_{\alpha}^{x} \frac{K\,dx}{(X-x)^n}$; nun ist aber, wenn $n > 1$ ist:

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{K\,dx}{(X-x)^n} = \frac{K}{1-n}\left[\frac{1}{(X-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(X-x)^{1-n}}\right],$$

und wenn $n = 1$ ist:

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{K\,dx}{X-x} = K \log \frac{X-\alpha}{X-x}.$$

In jeder dieser Formeln wird die rechte Seite unendlich für $x = X$, und folglich ist auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\alpha}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$$

für $\varepsilon = 0$ unendlich.

Da man die Grenzen eines Integrales vertauschen kann, so gilt der vorstehende Satz auch für den Fall, dass $f(x)$ für $x = x_0$ unendlich wird.

469. Beispiele. 1. Wir betrachten das Integral:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hier ist $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot$ Ist x positiv, so ist dieser Wert kleiner als 1. Hieraus schliesst man, dass das Integral einen bestimmten endlichen Wert hat. Übrigens wissen wir hier von vornherein, dass dieses der Fall ist. Denn das Integral, gebildet von 0 bis $x < 1$, hat den Wert $\arcsin x$, und für $x = 1$ konvergiert diese Funktion nach dem Werte $\frac{\pi}{2}\cdot$

2. Für das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei k^2 eine positive Grösse kleiner als 1 ist, wird

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}\cdot$$

Die rechte Seite ist kleiner als $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ für alle Werte von x von 0 bis $+1$; also hat das Integral einen endlichen Wert.

3. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2},$$

auf welches sich das vorhergehende reduziert, für $k^2 = 1$. Hier ist $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und $(1-x) f(x) = \frac{1}{1+x}\cdot$

Die rechte Seite ist grösser als $\frac{1}{2}$ bei allen Werten von x von 0 bis 1. Folglich wird das Integral unendlich. Übrigens ist dieses Integral gleich dem Werte, den die Funktion

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

für $x = 1$ annimmt, und man sieht, dass dieser Wert in der That unendlich wird.

4. Wir betrachten schliesslich noch das Integral

$$\int_0^1 \frac{l(x)}{x^n}\, dx,$$

in welchem n eine Zahl zwischen 0 und 1 bezeichnet. Hier ist $f(x) = \frac{l(x)}{x^n}$, und diese Funktion wird unendlich für $x = 0$. Bezeichnet man mit ε eine Zahl zwischen 0 und $1 - n$, so ist

$$x^{n+\varepsilon} f(x) = x^\varepsilon l(x).$$

Konvergiert x nach null, so konvergiert auch das Produkt $x^\varepsilon l(x)$ nach null. Man kann also eine Grösse α bestimmen, so dass von $x = 0$ bis $x = \alpha$ das Produkt $x^{n+\varepsilon} f(x)$ kleiner ist als eine gegebene Grösse K; ferner ist $n + \varepsilon$ kleiner als 1. Also hat das Integral einen endlichen Wert.

Integration für den Fall, dass die Funktion zwischen den Grenzen des Integrales unendlich wird.

470. Wird die Funktion $f(x)$ unendlich für einen Wert x_1 von x, der zwischen x_0 und $X > x_0$ enthalten ist, d. h. wachsen die Beträge der Funktion über jede Grenze, wenn x von der einen oder andern Seite oder von beiden nach dem Werte x_1 konvergiert, so versteht man unter dem Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ die Grenze, nach welcher die Summe

$$\int_{x_0}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_1 + \eta}^{X} f(x)\, dx$$

konvergiert, wenn die Grössen ε und η dem Werte null sich beliebig nähern. Solch ein Integral kann einen endlichen und bestimmten Wert haben, es kann aber auch unendlich oder unbestimmt werden.

Betrachten wir z. B. das Integral

$$\int_{-\alpha}^{a} \frac{dx}{x^n},$$

in welchem a und α positive Zahlen bezeichnen und der Exponent n zwischen null und eins enthalten ist. Die zu integrierende Funktion ist eine eindeutig reelle, wenn wir annehmen, dass der Nenner des Exponenten eine ungerade Zahl ist. Nun ist:

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \lim \left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} + \int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n} \right),$$

aber

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} = \frac{(-\varepsilon)^{1-n} - (-\alpha)^{1-n}}{1-n}, \quad \int_{\eta}^{a} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n} - \eta^{1-n}}{1-n},$$

also:

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon=0,\ \eta=0} \frac{a^{1-n} - \eta^{1-n} + (-\varepsilon)^{1-n} - (-\alpha)^{1-n}}{1-n};$$

$(-\varepsilon)^{1-n}$ und η^{1-n} werden im Grenzfalle null. Das vorgelegte Integral hat also einen endlichen und bestimmten Wert, nämlich

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n} - (-\alpha)^{1-n}}{1-n}.$$

Ist n grösser als eins, so wird:

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-\varepsilon)^{n-1}}\right], \quad \int_{\eta}^{a} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\eta^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right].$$

Die Summe dieser beiden Integrale, nämlich:

$$\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-\varepsilon)^{n-1}}\right] + \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{\eta^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right],$$

wächst über jede Grenze, wenn die Grössen ε und η nach null konvergieren. Also wird auch das vorgelegte Integral unendlich.

Wir untersuchen noch den Fall $n = 1$. Das gegebene Integral ist dann:

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x} = \lim \left[\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{a} \frac{dx}{x} \right].$$

Setzt man $x = -t$, $dx = -dt$, so ist:

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{dt}{t} = \log \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

und

$$\int_{+\eta}^{a} \frac{dx}{x} = \log \frac{a}{\eta},$$

also ist:

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0,\ \eta=0} \log \frac{a\varepsilon}{\alpha\eta} = \log \frac{a}{\alpha} + \lim_{\varepsilon=0,\ \eta=0} \log \frac{\varepsilon}{\eta}\cdot$$

Die Grenze des Verhältnisses $\frac{\varepsilon}{\eta}$ ist unbestimmt; also ist auch das Integral $\int_{-\alpha}^{a} \frac{dx}{x}$ selbst unbestimmt.

471. Der allgemeine Ausdruck

$$1)\qquad \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta}^{X} f(x)\,dx$$

reduziert sich, wenn man $\varepsilon = \eta$ annimmt, auf

$$2)\qquad \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx.$$

Die Grenze, welcher diese Summe zustrebt, wenn man ε nach 0 konvergieren lässt, hat Cauchy den *Hauptwert* des bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ genannt. Also ist der Hauptwert des Integrales $\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x}$ der Wert $\log \frac{a}{\alpha}\cdot$

Wenn das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ einen endlichen und bestimmten Wert hat, so ist dieser Wert auch die Grenze, nach welcher die Summe

$$3) \qquad \int_{x_0}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\nu\varepsilon}^{X} f(x)\,dx$$

konvergiert, wenn ε null wird, die positiven Grössen μ und ν mögen irgend welche Werte haben. Also muss auch die Differenz der Summen 2) und 3), nämlich:

$$4) \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\nu\varepsilon} f(x)\,dx,$$

mit ε nach null konvergieren, was auch die Werte von μ und ν sein mögen. Kann man konstatieren, dass dieses nicht eintritt, so lässt sich hieraus schliessen, dass das vorgelegte Integral nicht einen endlichen und bestimmten Wert hat. Die Integrale

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\nu\varepsilon} f(x)\,dx,$$

in denen ε unendlich klein wird, hat Cauchy die *singulären bestimmten Integrale* genannt. Durch die Untersuchung dieser Integrale kann man das im § 470 gefundene Resultat aufs neue herleiten.

Wird die Funktion $f(x)$ unendlich für die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ zwischen x_0 und X, so muss man $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ als den Grenzwert definieren, nach welchem die Summe

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta_1}^{x_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \int_{x_2+\eta_2}^{x_3-\varepsilon_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+\eta_{n-1}}^{x_n-\varepsilon_n} f(x)\,dx + \int_{x_n+\eta_n}^{X} f(x)\,dx$$

konvergiert, wenn die Grössen ε und η sämtlich null werden. Dieser Fall kommt, wie man sieht, auf den vorigen zurück, indem man sich das Intervall von x_0 bis X in mehrere andere zerlegt denke.

Sind die Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$ im Intervalle von x_0 bis X selbst in unendlicher Anzahl vorhanden, so bedarf die Bestimmung des Integrales einer allgemeineren Definition, die auch zum Teil auf neue Sätze führt.

Neuer Beweis der Taylorschen Gleichung.

472. Die Betrachtung der bestimmten Integrale liefert einen sehr einfachen und eleganten Beweis für die Taylorsche Formel.

Es seien x und h zwei gegebene Grössen, t eine Variabele und $f(x+h-t)$ eine Funktion, von der wir voraussetzen, dass sie nebst ihren n ersten Ableitungen für alle Werte t von 0 bis h stetig ist. Die teilweise Integration ergiebt alsdann, indem man mit $f'(x+h-t)$, $f''(x+h-t)\ldots$ die successiven Ableitungen der Funktion $f(x+h-t)$ in Bezug auf die Variabele $x+h-t$ bezeichnet, die Gleichungen:

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = t f'(x+h-t) + \int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt,$$

$$\int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt = \frac{t^2}{2!}f''(x+h-t) + \int_0^t f'''(x+h-t)\frac{t^2}{2!}\,dt,$$

$$\int_0^t f'''(x+h-t)\frac{t^2}{2!}\,dt = \frac{t^3}{3!}f'''(x+h-t) + \int_0^t f^{IV}(x+h-t)\frac{t^3}{3!}\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^t f^{n-1}(x+h-t)\frac{t^{n-2}}{n-2!} = \frac{t^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(x+h-t) + \int_0^t f^n(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{n-1!}\,dt.$$

Addiert man alle diese Gleichungen und setzt dann $t=h$, so folgt, da

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = f(x+h) - f(x)$$

ist, die Gleichung:

$$1)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(x) + R_n,$$

wobei

$$2)\qquad R_n = \int_0^h f^n(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{n-1!}\,dt$$

ist. Die Gleichung 1) führt zu der Taylorschen Reihe, wenn die Bedingung der Stetigkeit für alle Ableitungen, wie viele man auch bilden mag, erfüllt ist, und wenn der Rest R_n nach null konvergiert, wenn n unbegrenzt wächst. Die Gleichung 2) giebt einen neuen Ausdruck für diesen Rest, der bisweilen von Nutzen ist, und aus dem man auch den früheren (§ 106) ableiten kann. Denn es folgt aus der Gleichung 2) im § 463:

$$R_n = U \int_0^h \frac{t^{n-1}}{n-1!}\, dt = \frac{h^n}{n!}\, U.$$

U bedeutet einen mittleren Wert der Funktion $f^n(x+h-t)$ im Intervalle von $t=0$ bis $t=h$. Ist diese Ableitung stetig, wie wir annahmen, so nimmt sie diesen mittleren Wert auch für einen bestimmten Wert von t an. Es ist also

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(x+\theta h).$$

Desgleichen erhält man die andere Form des Restes:

$$R_n = f^n(x+h-\theta h) \cdot \frac{(\theta h)^{n-1}}{n-1!} \int_0^h dt = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{n-1!} f^n(x+h\theta').$$

Die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe.

473. **Lehrsatz I.** *Es sei* $u_0 + u_1 + u_2 \ldots$ *eine unendliche Reihe, deren Glieder stetige Funktionen einer Variabelen* x *sind. Die Reihe sei konvergent bei allen Werten von* x *gleich* x_0 *bis zu* $x \leqq X$ *oder wenigstens bis zur Grenze* $x = X$; *ferner sei* $f(x)$ *die Summe der Reihe und* r_n *der Wert des Restes, wenn man die Reihe mit dem* n^{ten} *Gliede abbricht. Wenn man nun eine Zahl fixieren kann, so dass der Rest der Reihe bei allen Werten von* n, *die grösser sind als diese Zahl, immer, d. h. für jeden Wert von* x *zwischen* x_0 *und* X, *kleiner bleibt als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl* ε, *so ist auch die Reihe*

$$\int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \int_{x_0}^{x} u_2\, dx + \int_{x_0}^{x} u_3\, dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n\, dx \ldots \qquad (x_0 \leqq x < X)$$

konvergent, solange x *kleiner ist als* X, *und ihre Summe ist gleich dem Integrale*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

Denn setzt man

1) $$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + r_n,$$

wobei x die Werte von x_0 bis zu irgend einem Werte kleiner als X durchläuft, so ist:

2) $$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{x} r_n\,dx.$$

Nun ist aber (§ 463)

$$\int_{x_0}^{x} r_n\,dx = \varrho_n \int_{x_0}^{x} dx = \varrho_n (x - x_0),$$

wenn ϱ_n einen Wert bezeichnet, der zwischen dem grössten und kleinsten Werte der Funktion r_n, während x von x_0 bis x variiert, gelegen ist. Diese Werte sind aber der Voraussetzung nach in ihrem Betrage beide kleiner als die beliebig kleine Zahl ε, wenn n entsprechend gewählt ist; und folglich ist auch der Betrag von ϱ_n kleiner als ε. Daraus folgt, dass in der Gleichung 2) die Differenz des Integrales links und der n ersten Integrale rechts durch Wahl von n beliebig klein wird, d. h. dass die Gleichung besteht:

3) $$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \ldots \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \cdots$$

Die Bedingung des Satzes pflegt man auch so auszusprechen: Die zu integrierende Reihe konvergiert für alle Werte des Integrationsintervalles einschliesslich seiner Grenzen gleichmässig. Sie ist für die Giltigkeit der gliedweisen Integration einer Reihe nicht *notwendig;* denn diese verlangt nur, dass das Integral des Restes r_n mit beliebig wachsenden Werten von n null wird.

474. Lehrsatz II. *Es sei* $\mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \ldots$ *eine unendliche Reihe, deren Glieder stetige Funktionen einer Variabelen* x *sind von* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ bis $\mathrm{x} = \mathrm{X}$, *und die nach einer bestimmten Summe* $\mathrm{f(x)}$ *konvergiert. Wenn dann die abgeleitete Reihe*

$$\frac{d\mathrm{u}_0}{d\mathrm{x}} + \frac{d\mathrm{u}_1}{d\mathrm{x}} + \frac{d\mathrm{u}_2}{d\mathrm{x}} + \cdots$$

die Bedingung des vorigen Satzes erfüllt, d. h. wenn die Ableitungen der einzelnen Glieder stetige Funktionen von x *sind und die Reihe bei allen Werten von* x *innerhalb eines bestimmten*

Intervalles und an seinen Grenzen gleichmässig konvergiert, so ist ihre Summe bei allen diesen Werten von x *gleich* f'(x).

Da die Reihe $\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots$ als konvergent vorausgesetzt ist, so bezeichnen wir mit $F(x)$ ihre Summe; es ist

$$F(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots$$

und zwar ist diese Funktion, wie in der Anmerkung bewiesen werden wird, zufolge der gleichmässigen Konvergenz stetig. Also wird nach dem vorigen Satze:

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{du_0}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{du_1}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{du_2}{dx}\,dx + \cdots$$

Ist also u_n^0 der Wert von u_n für $x = x_0$, so wird

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = (u_0 - u_0^0) + (u_1 - u_1^0) + (u_2 - u_2^0) + \cdots$$

Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ konvergiert aber nach der Grenze $f(x)$, es ist also

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = f(x) + \text{const};$$

differentiiert man nach x, so folgt

$$F(x) = f'(x).$$

Wenn eine Reihe, deren Glieder stetige Funktionen von x sind, in einem Intervalle gleichmässig konvergiert, so ist auch die Summe der Reihe in diesem Intervalle allenthalben stetig.

Beweis. Bezeichnet man die Glieder der Reihe als Funktionen von x mit $u_n(x)$ und setzt man

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

wobei $S_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der Reihe bedeutet, also

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots u_{n-1}(x)$$

ist, und $R_n(x)$ den Rest der Reihe vorstellt, so muss gezeigt werden, dass an jeder Stelle, in deren Umgebung die Reihe gleichmässig konvergiert, der Betrag der Differenz

$$f(x \pm \Delta x) - f(x)$$

durch Wahl von Δx kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine Zahl δ. Bestimmt man nun zunächst n so gross, dass der Rest $R_n(x)$ kleiner wird als $\frac{\delta}{4}$, bei noch so grossen Werten von n und bei allen Werten von x zwischen $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$, was zufolge der gleichmässigen Konvergenz möglich ist, solange $\pm \Delta x$ in das gegebene Intervall hineinfällt, so wird

$$f(x \pm \Delta x) - f(x) = [S_n(x \pm \Delta x) - S_n(x)] + [R_n(x \pm \Delta x) - R_n(x)]$$
$$= [S_n(x \pm \Delta x) - S_n(x)] \pm \left(< \frac{\delta}{2}\right).$$

Da nun aber $S_n(x)$ die Summe einer endlichen Anzahl von stetigen Funktionen ist, so ist sie selbst eine stetige Funktion; und man kann Δx so klein wählen, dass der Betrag der Differenz $S_n(x \pm \Delta x) - S_n(x)$ ebenfalls kleiner wird als $\frac{\delta}{2}$; alsdann ist

$$\operatorname{abs}[f(x \pm \Delta x) - f(x)] < \delta.$$

Eine Reihe, deren Glieder stetige Funktionen von x sind, kann doch selbst eine unstetige Funktion sein; alsdann konvergiert sie aber nicht gleichmässig. Andererseits können die Reihenglieder, sowie die Reihe selbst stetig sein, ohne dass gleichmässige Konvergenz vorhanden ist. In diesem Falle gelten die Sätze über gliedweise Integration und Differentiation nicht ohne weiteres.

475. Der Satz I liefert ein Mittel, bestimmte Integrale durch unendliche Reihen zu berechnen.

Nehmen wir zunächst an, dass die Funktion $f(x)$ nach der Mac-Laurinschen Formel in eine unendliche Reihe entwickelbar ist, für alle Werte von x zwischen 0 und X. Es ist dann

$$1) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \cdots$$

Multipliziert man die beiden Seiten mit dx und integriert man dann zwischen den Grenzen 0 und x, was gestattet ist, weil jede Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzintervalles eine gleichmässig konvergente ist (§ 111), so wird nach dem vorigen Satze:

$$2) \quad \int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{1} f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \cdots \frac{x^{n+1}}{n+1!} f^n(0) + \cdots$$

was nichts anderes ist, als die Gleichung von Mac-Laurin, angewandt auf die Funktion $\int_0^x f(x)\,dx$.

Bezeichnet X die Grenze des Konvergenzintervalles für die Reihenentwickelung der Funktion $f(x)$, so gilt die durch Integration gewonnene Gleichung auch noch für $x = X$, sobald nur die rechte Seite noch für diesen Wert konvergent ist. Dieser Satz gilt, mag nun die ursprüngliche Reihe für $x = X$ konvergieren oder nicht. Im ersten Falle kann man beweisen, dass die gleichmässige Konvergenz auch noch einschliesslich des Wertes $x = X$ besteht, dass also die Reihe 2) ebenfalls konvergieren muss. Im zweiten Falle kann man zeigen, dass die Reihe 2), wenn sie für $x = X$ konvergiert, auch eine stetige Funktion einschliesslich dieses Wertes darstellt.

Wir wollen nun den letztgenannten Satz für Potenzreihen beweisen und zwar für Potenzreihen einer komplexen Variabelen, woraus zugleich der Beweis des ersten Satzes erkannt werden wird (vgl. §§ 111 und 121):

Wenn eine nach ganzen aufsteigenden Potenzen einer reellen oder komplexen Variabelen z *geordnete Reihe konvergent ist für alle Werte von* z, *deren Modul nicht grösser ist als* R, *und wenn sie auch konvergent ist für einen Wert* z, *dessen Modul gleich* R *ist, so ist ihre Summe eine stetige Funktion für alle Werte von* z, *für welche die Reihe konvergiert, einschliesslich der Grenzen.*

Wir bezeichnen mit $f(z)$ die Summe der konvergenten Reihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

mit $\varphi_n(z)$ die Summe der n ersten Glieder und mit $\psi_n(z)$ den Rest. Es sei zunächst z ein innerhalb des Konvergenzgebietes gelegener Wert. Man kann nun einen Wert von n bestimmen, so dass für diesen Wert, sowie für alle grösseren der Betrag von $\psi_n(z)$ kleiner bleibt als eine gegebene beliebig kleine Grösse δ. Es genügt n so zu wählen, dass

$$1) \qquad \alpha_n R'^n + \alpha_{n+1} R'^{n+1} + \cdots < \delta$$

wird, wobei α_n den Modul von a_n und R'_n irgend einen Wert kleiner als R bezeichnet. Diese Bedingung ist erfüllbar, denn da die vorgelegte Reihe auch konvergent ist, wenn der $\operatorname{mod} z = R$ ist, so bilden die Moduln ihrer Glieder eine konvergente Reihe, wenn man $\operatorname{mod} z < R$ annimmt. (Beweis aus § 104 Zusatz.)

Für jeden Modul $\varrho < R'$ hat man dann umsomehr

2) $$\alpha_n \varrho^n + \alpha_{n+1} \varrho^{n+1} + \cdots < \delta.$$

Es seien nun z und $z + h$ zwei Werte der Variabelen z, deren Modul zwischen null und R' liegt. Dann ist

$$f(z+h) - f(z) = [\varphi_n(z+h) - \varphi_n(z)] + [\psi_n(z+h) - \psi_n(z)].$$

Man kann zunächst n so gross wählen, dass $\operatorname{mod} \psi_n(z+h)$ und $\operatorname{mod} \psi_n(z)$ kleiner sind als δ. Denn die Moduln dieser Summen sind kleiner als die linke Seite der ersten Ungleichung. Ferner ist $\varphi_n(z)$ eine stetige Funktion von z und folglich kann man den Modul von h so klein wählen, dass der $\operatorname{mod} [\varphi_n(z+h) - \varphi_n(z)]$ kleiner wird als δ. Demnach ist

$$\operatorname{mod} [f(z+h) - f(z)] < 3\delta$$

und wird also mit h unendlich klein.

Aber auch in einem Punkte des Grenzkreises bleibt die Stetigkeit der Reihensumme bestehen, falls in demselben die Reihe konvergiert. Es sei $\operatorname{mod} z = R$ und man lasse die Variabele z auf einem Radius vom Werte $z - \delta$ bis zum Werte z sich ändern. Alsdann ist

$$\psi(z) = a_n z^n + a_n z^{n+1} + a_n z^{n+2} + \cdots$$

$$\psi(z-\delta) = a_n \left(\frac{z-\delta}{z}\right)^n z^n + a_{n+1} \left(\frac{z-\delta}{z}\right)^{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} \left(\frac{z-\delta}{z}\right)^{n+2} z^{n+2} + \cdots$$

Der Betrag von $\psi(z-\delta)$ ist kleiner als der Betrag von $\left(\frac{z-\delta}{z}\right)^n M$, unter M den grössten Betrag verstanden in der Reihe der komplexen Werte

$$a_n z^n, \quad a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1}, \quad a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} \ldots,$$

Denn hat man $z - \delta$ auf dem nach z führenden Radius gewählt, so ist $\frac{z-\delta}{z} = \varrho$ eine positive reelle Grösse kleiner oder höchstens gleich 1. Es wird also

$$\psi(z-\delta) = \varrho^n a_n z^n + \varrho^{n+1} a_n z^{n+1} + \varrho^{n+2} a_{n+2} z^{n+2} + \cdots$$

und die Potenzen von ϱ bilden eine abnehmende, nach null konvergierende Reihe, solange δ von 0 verschieden ist. Es besteht aber ein Abelscher Satz (§ 121), der allgemein so ausgesprochen werden kann: Bezeichnet man durch $t_0, t_1, \ldots t_m, \ldots$ eine unendliche Reihe von beliebigen komplexen oder reellen Grössen und ist der Betrag der Grösse

$$p_m = t_0 + t_1 + \cdots + t_m$$

bei allen Werten von m stets kleiner als G, so ist der Betrag von

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \cdots \varepsilon_m t_m + \cdots < G\varepsilon_0$$

bei allen Werten von m, wenn ε_0, $\varepsilon_1, \ldots$ reelle positive abnehmende Grössen sind. Denn es ist:

$$t_0 = p_0, \quad t_1 = p_1 - p_0, \quad t_2 = p_2 - p_1, \ldots t_m = p_m - p_{m-1}, \ldots$$

also:

$$r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1(p_1 - p_0) + \varepsilon_2(p_2 - p_1) + \cdots \varepsilon_{m-1}(p_{m-1} - p_{m-2}) + \varepsilon_m(p_m - p_{m-1}),$$

oder:

$$r = p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + p_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots p_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m.$$

Da die Differenzen in den Klammern sämtlich positiv sind, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} r \leqq (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \operatorname{mod} p_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{mod} p_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \operatorname{mod} p_2 + \cdots \\ + (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) \operatorname{mod} p_{m-1} + \varepsilon_m \operatorname{mod} p_m. \end{aligned}$$

Der Betrag der rechten Seite ist kleiner als

$$G(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \cdots \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m + \varepsilon_m) = G\varepsilon_0,$$

womit der Satz bewiesen ist. Also wird wie oben

$$\operatorname{abs}[\psi(z - \delta) - \psi(z)] < M(\varrho^n + 1) < 2M,$$

und also

$$\operatorname{abs}[f(z - \delta) - f(z)] < \operatorname{abs}[\varphi_n(z - \delta) - \varphi_n(z)] + 2M.$$

Man kann zunächst n so gross wählen, dass M beliebig klein wird, und alsdann δ so klein, dass die erste Differenz auf der rechten Seite beliebig klein wird.

Aus dem Beweise erkennt man zugleich, dass die gleichmässige Konvergenz einer Potenzreihe auf jedem Radius mit Einschluss des Grenzpunktes besteht, falls für diesen die Potenzreihe konvergiert.

476. Beispiele. 1. Man hat durch Division

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

und diese Reihe ist konvergent für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als 1. Multipliziert man mit dx und integriert teilweise von $x = 0$ an, so wird

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

bei allen Werten von x, deren Betrag kleiner ist als eins. Aber die Gleichung besteht auch noch für $x = \pm 1$, denn die

Reihe ist auch für diesen Grenzwert noch konvergent (§ 96). Es ist also:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2. Nach der Binomialformel ist für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als 1:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} x^6 + \cdots$$

Durch teilweise Integration von $x = 0$ an folgt also:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

eine Gleichung, die nicht nur für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$, sondern auch noch für $x = \pm 1$ besteht. Setzt man $x = 1$, so folgt:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{1}{7} + \cdots$$

Ausser den beiden für die Zahl π hier aufgestellten Formeln lassen sich aus diesen Reihen noch andere rascher konvergente bilden. Dass die Zahl π eine irrationale ist, wurde nicht aus diesen Summenreihen erkannt, sondern von Lambert mit Hilfe einer Kettenbruchentwickelung bewiesen; dass dieselbe überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann, hat Herr Lindemann (Math. Annal. Bd. 20) durch eine Verallgemeinerung des Hermite'schen Verfahrens bezüglich der Zahl e gezeigt, und damit die Unmöglichkeit der geometrischen Quadratur des Kreises bewiesen.

477. Eine Funktion $f(x)$ kann auch auf mehrere verschiedene Weisen in konvergente Reihen entwickelbar sein. Alsdann muss man die dem Probleme angemessenste Art zu bestimmen suchen. Wir betrachten z. B. das elliptische Integral erster Gattung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wobei die Wurzeln positiv genommen sind und k eine Zahl kleiner als 1 bedeutet. Nach der Binomialformel ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}=1+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4x^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}k^6x^6+\cdots$$

und diese Reihe konvergiert, solange $k^2x^2<1$ ist. Multipliziert man dieselbe mit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und integriert alsdann von $x=0$ an, so folgt:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}k^2\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\cdots$$

Ebenso wird für das elliptische Integral zweiter Gattung

$$\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}=\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}k^2\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4\int_0^x\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\cdots$$

Jedes der Integrale, welches in diesen beiden Gleichungen vorkommt, kann nach der Methode des § 445 bestimmt werden. Die in den Gleichungen enthaltenen Reihen sind sehr rasch konvergente, wenn k ein kleiner Bruch ist. Wenn aber k nur wenig von 1 unterschieden ist, so ist es notwendig, andere Entwickelungen anzuwenden.

Differentiation der Integrale.

478. Ein bestimmtes Integral

$$u=\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx,$$

in welchem die Grenzen x_0 und X als variabel betrachtet werden, ist eine stetige Funktion dieser Grenzen. Die partiellen Differentialquotienten von u nach X und x_0 sind, wenn die Funktion $f(x)$ eine durchaus stetige ist (§ 409 und § 458 Zusätze):

$$\frac{\partial u}{\partial X}=f(X),$$

und weil

$$u=-\int_{X}^{x_0}f(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}=-f(x_0).$$

Betrachtet man also u als Funktion der beiden Variabelen X und x_0 allein, so ist

$$1)\qquad du = f(X)\,dX - f(x_0)\,dx_0,$$

und diese Gleichung gilt sowohl für den Fall, dass X und x_0 zwei unabhängige Variabele sind, als auch für den, dass X und x_0 als Funktionen von einer oder von mehreren Variabelen betrachtet werden.

Enthält die Funktion $f(x)$ die Grössen $\alpha, \beta, \ldots$ welche ebenfalls als Variabele anzusehen sind, so muss man auf der rechten Seite der Gleichung 1) noch die partiellen Differentiale in Bezug auf diese Variabelen hinzufügen; es wird also:

$$2)\qquad du = f(X)\,dX - f(x_0)\,dx_0 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta}\,d\beta + \cdots$$

Wir müssen also noch zeigen, wie man diese partiellen Differentiale $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdots$ zu bilden hat, die so zu berechnen sind, dass dabei x_0 und X als unabhängig von den Variabelen $\alpha, \beta \ldots$ angenommen werden.

Die Differentiation unter dem Integralzeichen nach einem Parameter.

479. Wir betrachten das Integral

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

und nehmen an, dass die Funktion $f(x)$ eine Grösse α enthält, die als variabel betrachtet wird. Es ist dann u eine Funktion dieser Variabelen und wir stellen uns die Aufgabe, die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ zu berechnen. Nach dem Vorangegangenen hat man die Grenzen x_0 und X als unabhängig von α anzunehmen.

Um die Variabele α zur Evidenz zu bringen, bezeichnen wir die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $\frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}$ mit $f(x, \alpha)$ und $f'_\alpha(x, \alpha)$. Erteilt man α das Inkrement $\Delta\alpha$ und bezeichnet man die entsprechende Änderung von u mit Δu, so ist

$$\Delta u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx.$$

Wenn nun die Funktion $f'_\alpha(x, \alpha)$ bei jedem Werte von x, der zu dem Integrationsintervalle gehört, eine stetige Funktion von α ist, bei allen Werten von α bis $\alpha + \Delta\alpha$, so ist

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha \,.\, f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha);$$

θ ist eine Grösse zwischen 0 und 1, die im allgemeinen auch von x abhängig ist. Man erhält demnach unter dieser Voraussetzung:

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha)\, dx.$$

Hat nun die Funktion $f'_\alpha(x, \alpha)$ die Eigenschaft, dass sie in Bezug auf α eine gleichmässig stetige Funktion ist, d. h. dass bei allen Werten von $x = x_0$ bis $x = X$ ein und derselbe Wert von $\Delta\alpha$ ausreichend ist, damit

$$\text{abs}\, [f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, a)] < \delta$$

wird, so kann man $\Delta\alpha$ so klein wählen, dass

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx \pm (< \delta\, [X - x_0])$$

wird. Folglich wird

$$\lim_{\Delta\alpha = 0} \frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \frac{\partial u}{\partial\alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\, dx.$$

Man erhält also unter der Bedingung der gleichmässigen Stetigkeit von $f'_\alpha(x, \alpha)$ in Bezug auf α das Differential $\frac{\partial u}{\partial\alpha}\, d\alpha$, indem man die Differentiation unter dem Integrale ausführt. Dagegen kann diese Regel ihre Giltigkeit verlieren, sobald für die abgeleitete Funktion diese Eigenschaft nicht mehr besteht.

480. Wenn man ein unbestimmtes Integral nach einer Variabelen zu differentiieren hat, welche von der Integrationsvariabelen verschieden ist, so kann man diesen Fall auf den vorigen zurückführen. Denn es ist

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x)\,dx = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \frac{\partial C}{\partial\alpha}.$$

Es ist aber C eine willkürliche Konstante in Bezug auf x, also ist auch $\frac{\partial C}{\partial\alpha}$ eine willkürliche Konstante; man erhält demnach, wenn man die Differentiation unter dem Integrale rechts ausführen darf:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x)}{\partial\alpha}\,dx + \frac{\partial C}{\partial\alpha} = \int \frac{\partial f(x)}{\partial\alpha}\,d\alpha.$$

Die Integration nach einem Parameter.

481. Wir betrachten das bestimmte Integral

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx,$$

wobei $f(x, \alpha)$ eine überall endliche Funktion der Variabelen x und α bezeichnet, und in welchem die Grenzen x_0 und X von α unabhängig sein sollen. Die Grösse u hängt von x_0, von X und von α ab; wir betrachten sie insbesondere als eine Funktion von α. Wir setzen zunächst

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\,d\alpha = F(x, \alpha).$$

Die untere Grenze α_0 sei irgend eine bestimmte Grösse; ferner sei

$$\int_{x_0}^{X} F(x, \alpha)\,dx = v.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist nun, wenn

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} = f(x, \alpha)$$

eine gleichmässig stetige Funktion von α ist:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx,$$

also:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = u,$$

und da v für $\alpha = \alpha_0$ verschwindet, so ist

$$v = \int_{\alpha_0}^{\alpha} u\, d\alpha,$$

d. h.:

$$\int_{x_0}^{X} \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha\right] dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx\right] d\alpha.$$

Durch diese Gleichung ist der folgende Satz bewiesen:

Um das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx$ *nach dem Parameter* α *zu integrieren zwischen den Grenzen* α_0 *und* α, *kann man zuerst die Funktion unter dem Integralzeichen nach* α *integrieren und sodann die Integration nach* x *ausführen, wenn diese Funktion im Integrationsgebiete von* α_0 *bis* α *und* x_0 *bis* X *überall endlich und in Bezug auf die eine Variabele gleichmässig stetig, in Bezug auf die andere integrierbar ist.*

Man kann denselben Satz auch in der Form aussprechen:

Hat man das Differential

$$f(x, \alpha)\, dx\, d\alpha$$

zwischen den Grenzen x_0 *und* X, α_0 *und* α *zu integrieren, so kann man die beiden Integrationen in beliebiger Reihenfolge ausführen, falls die Grenzen der beiden Variabelen von einander unabhängig sind, und die Funktion* $f(x, \alpha)$ *im Integrationsgebiete die oben genannten Bedingungen erfüllt.*

Es wird sich später eine geometrische Interpretation dieses Satzes ergeben.

Die Bedingung, dass die Funktion $f(x, \alpha)$ in Bezug auf die eine Variabele gleichmässig stetig, in Bezug auf die andere integrierbar ist, kann durch die engere vertreten werden, dass $f(x, \alpha)$ im Gebiete von α_0 bis α, und x_0 bis X eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, einschliesslich der Randwerte. Denn für eine stetige Funktion zweier Variabelen besteht an jeder Stelle im Innern (oder am Rande) des Gebietes die Bedingung (§ 32):

$$\operatorname{abs}[f(x \pm \theta h, \alpha \pm \eta k) - f(x, \alpha)] < \delta, \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1,\ 0 \leqq \eta \leqq 1)$$

durch Wahl von h und k; und man kann weiter beweisen, dass hieraus auch die gleichmässige Stetigkeit in Bezug auf jede der beiden Variabelen folgt, d. h. dass sich ein bestimmter oberer Wert für h und k ausfindig machen lässt, welcher bei allen Werten von x und α ausreichend ist, um die obige Ungleichung zu erfüllen.

Denn wenn es keinen Wert für h und keinen für k geben sollte, die bei allen Werten von x und α (abgesehen von den Randwerten, bei welchen h und k so zu wählen sind, dass die Punkte $x + h$, $\alpha + k$ nicht ausserhalb des gegebenen Gebietes fallen), ausreichend sind, um die obige Ungleichung zu erfüllen, so heisst dies: es sinken die Werte von h oder k, während x und α nach einer bestimmten Grenzlage x' und α' konvergieren, schliesslich unter jeden Betrag herab. Bildet man also die Ungleichung

$$\operatorname{abs}[f(x' - \varepsilon \pm \theta h, \alpha' - \varepsilon' \pm \eta k) - f(x' - \varepsilon, \alpha' - \varepsilon')] < \delta,$$

so konvergieren h und k schliesslich nach null, wenn ε und ε' beliebig klein werden. Dies würde aber der Bedingung der Stetigkeit widerstreiten. Denn man kann an der Stelle x', α' endliche Grössen h' und k' ermitteln, so dass

$$\operatorname{abs}[f(x' \pm \theta h', \alpha' \pm \eta k') - f(x', \alpha')] < \frac{\delta}{2}$$

wird; und da ε und ε' beliebig klein sind, h' und k' endliche Grössen sind, so wird der Punkt $x' - \varepsilon$, $\alpha' - \varepsilon'$ in das Innere des Rechteckes mit den Eckpunkten $x' \pm k'$, $\alpha' \pm h'$ fallen. Demnach ist für den Punkt $x' - \varepsilon$, $\alpha' - \varepsilon'$ das Rechteck, welches ganz innerhalb des eben konstruierten liegt, ausreichend. Hat man also den Punkt $x' - \varepsilon$ und $\alpha' - \varepsilon'$ so fixiert, dass seine Entfernungen von den Seiten dieses Rechteckes endliche Grössen sind, deren kleinste den Wert l hat, so ist für alle weiteren Punkte $x' - \varepsilon$, $\alpha' - \varepsilon'$ die Länge $h = l$ und $k = l$ jedenfalls ausreichend, d. h. die Grössen h und k sinken nicht unter jede angebbare Grenze herab, wenn man sich dem Punkte x', α' beliebig nähert.

Übrigens ist auch die im Text gegebene Bedingung noch nicht die allgemeinste, diese wird vielmehr durch die doppelte Integrierbarkeit der Funktion $f(x, \alpha)$ in Bezug auf die beiden Variabelen x und α ausgedrückt.

Die Integration von Differentialen, welche mehrere unabhängige Variabele enthalten.

482. Die Integration von Differentialen, welche von mehreren Variabelen abhängen, lässt sich, wie gezeigt werden soll, leicht auf die Integration von Differentialen einer einzigen Variabelen zurückführen, indem man den Satz im § 479 anwendet.

Jede Funktion mehrerer unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$ $\ldots u, v$, die wir als regulär voraussetzen in dem Sinne, dass sie nebst ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes stetig ist, hat ein Differential von der Form:

$$1) \qquad X dx + Y dy + Z dz + \ldots + U du + V dv,$$

$X, Y, Z \ldots U, V$ sind stetige Funktionen der Variabelen $x, y, z \ldots$ Der umgekehrte Satz besteht aber nicht: Damit der vorstehende Ausdruck das totale Differential einer Funktion der Variabelen $x, y, z \ldots$ ist, oder, wie man auch sagt, *ein exaktes Differential* ist, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein. Denn ist der Ausdruck 1) das Differential einer Funktion $\Omega(x, y, z \ldots u, v)$, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = Z, \ldots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = V.$$

Betrachtet man zwei derselben, z. B.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y,$$

und differentiiert man die erste nach y, die zweite nach x, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

also:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Hieraus schliesst man, dass, wenn der Ausdruck 1) ein exaktes Differential sein soll, die Gleichungen notwendig sind:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \cdots \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \cdots \dfrac{\partial Y}{\partial v} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial U}{\partial v} = \dfrac{\partial V}{\partial u}, \end{cases}$$

welche bei allen Werten der Variabelen bestehen, also identisch innerhalb des gegebenen Gebietes erfüllt sein müssen. Die Zahl derselben ist gleich der Anzahl der Kombinationen zu zweien, gebildet aus den Variabelen $x, y, z \ldots$ Hat man nur zwei unabhängige Variabele x und y, so ist der Ausdruck 1):

$$X\,dx + Y\,dy$$

und die Bedingungen 2) reduzieren sich auf die eine:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

483. Wir wollen nun beweisen, dass, wenn die Bedingungen 2) erfüllt sind, eine Funktion Ω der unabhängigen Variabelen $x, y, z \ldots u, v$ existiert, für deren totales Differential $d\Omega$ die Gleichung besteht:

$$3)\quad d\Omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \cdots + U\,du + V\,dv.$$

Der allgemeine Ausdruck aller Funktionen Ω, deren partielle Ableitung nach x gleich X ist, lautet:

$$4)\qquad \Omega = \int_{x_0}^{X} X\,dx + \Omega_1;$$

Ω_1 bezeichnet dabei noch eine beliebige Funktion der Variabelen $y, z, \ldots u, v$, enthält aber x nicht mehr.

Man muss nun Ω_1 so bestimmen, dass

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = Z, \cdots \frac{\partial \Omega}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = V$$

wird. Nach dem Satze im § 479, den wir hier anwenden dürfen, weil wir voraussetzen, dass die partiellen Ableitungen der Funktionen $X, Y, \ldots$ ebenfalls stetige Funktionen der Variabelen sind, ist nun:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial X}{\partial y}\, dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}.$$

Substituiert man hier für $\frac{\partial X}{\partial y}$ den identisch gleichen Ausdruck $\frac{\partial Y}{\partial x}$, so folgt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = Y - Y_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y};$$

Y_1 bezeichnet die Funktion Y, wenn man in derselben für die Variabele x den bestimmten Wert x_0 setzt. Damit also $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ gleich Y wird, muss

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = Y_1$$

sein. Für die übrigen partiellen Ableitungen von Ω_1 gelten analoge Gleichungen. Also wird die Funktion Ω, welche durch die Gleichung 4) definiert ist, die Gleichung 3) erfüllen, wenn Ω_1, das nur von den Variabelen $y, z, \ldots u, v$ abhängt, die Differentialgleichung erfüllt:

5) $$d\Omega_1 = Y_1\, dy + Z_1\, dz + \cdots + U_1\, du + V_1\, dv;$$

$Y_1, Z_1, \ldots U_1, V_1$ bezeichnen die Werte, welche $Y, Z, \ldots U, V$ für $x = x_0$ annehmen.

Verfährt man nun mit der Gleichung 5) ebenso, so findet man:

$$\Omega_1 = \int_{y_0}^{y} Y_1\, dy + \Omega_2$$

und

$$d\Omega_2 = Z_2\, dz + \cdots + U_2\, du + V_2\, dv;$$

$Z_2, \ldots U_2, V_2$ sind die Werte, welche $Z, \ldots U, V$ erhalten für $x = x_0$, $y = y_0$.

Es ist ersichtlich, dass man auf diese Weise für die gesuchte Funktion Ω den Ausdruck erhält:

6) $$\Omega = \int_{x_0}^{x} X\, dx + \int_{y_0}^{y} Y_1\, dy + \int_{z_0}^{z} Z_2\, dz + \cdots + \int_{u_0}^{u} U_{n-2}\, du + \int_{v_0}^{v} V_{n-1}\, dv + C.$$

Dabei bezeichnet n die Zahl der Variabelen und der Index i bei den Funktionen $Y, Z, \ldots U, V$ giebt an, dass die i ersten

Variabelen in der Reihe $x, y, z, \ldots u, v$ durch die bestimmten Werte $x_0, y_0, z_0, \ldots u_0$ ersetzt sind. C bedeutet eine beliebige von den Variabelen unabhängige Grösse.

Betrachtet man z. B. den Fall zweier Variabelen x, y, und ist:

$$7)\quad \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy \quad \text{mit der Bedingung:} \quad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}$$

das gegebene Differential, so hat das Integral desselben, so bestimmt, dass es für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, den Wert

$$8)\qquad \int_{x_0}^{x}\varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y}\psi(x_0, y)\,dy.$$

Ist aber die Bedingung nicht erfüllt, so ist das totale Differential dieser Funktion nicht gleich dem obigen Differentiale.

484. Die Bestimmung des Integrales eines Differentiales mit n unabhängigen Variabelen ist also auf n Integrationen zurückgeführt, welche sich auf die n einzelnen Variabelen beziehen. Man erkennt, dass diese Integrationen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können, und diese Bemerkung ist nicht ohne Bedeutung. So ist z. B. das Integral des Differentiales 7) durch den Ausdruck 8) dargestellt, aber es ist auch gleich

$$9)\qquad \int_{y_0}^{y}\psi(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x}\varphi(x, y_0)\,dx.$$

Denn auch dieser Ausdruck verschwindet, für $x = x_0$, $y = y_0$. Setzt man die beiden einander gleich, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{x}\varphi(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x}\varphi(x, y_0)\,dx = \int_{y_0}^{y}\psi(x, y)\,dy - \int_{y_0}^{y}\psi(x_0, y)\,dy,$$

oder:

$$10)\quad \int_{x_0}^{x}[\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{y}[\psi(x, y) - \psi(x_0, y)]\,dy.$$

Diese Gleichung gilt also für zwei stetige Funktionen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, welche nur an die Bedingung gebunden sind, dass

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}$$

ist, und dass diese partiellen Ableitungen ebenfalls stetig sind.

Integration der Differentiale einer komplexen Variabelen.

485. Um die Theorie der Integration von Differentialen zu vervollständigen, müssen wir noch den Fall der komplexen Variabelen betrachten. Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Variabele und

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

eine gegebene Funktion dieser Variabelen; $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ bezeichnen reelle Funktionen der reellen Variabelen x und y. Wenn die Funktion $f(z)$ eine Funktion der komplexen Variabelen z im engeren Sinne ist, so hat sie eine bestimmte Ableitung, und es ist (§ 377):

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}.$$

Hieraus folgt, dass die Ausdrücke:

$$\varphi(x, y)\, dx - \psi(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad \psi(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy$$

exakte Differentiale sind. Bildet man die Summe dieser beiden Differentiale, nachdem man das zweite mit i multipliziert hat, so findet man:

$$[\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]\,(dx + i\,dy) = f(z)\, dz.$$

Es ist also $f(z)\, dz$ das Differential einer Funktion der Variabelen x und y, und es giebt nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen, abgesehen von der willkürlichen additiven Konstante nur *eine* Funktion der Variabelen x und y, deren totales Differential die Form

$$[\varphi(x, y] + i\psi(x, y)]\,(dx + i\,dy)$$

hat. Bezeichnet man diese Funktion mit

$$\Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y) + \text{const},$$

so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y} = i\varphi(x, y) - \psi(x, y),$$

also:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varphi(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \psi(x, y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Aus denselben folgt, dass die Funktion

$$\Phi(x, y) + i\Psi(x, y) + \text{const}$$

selbst eine Funktion der komplexen Variabelen $z = x + iy$ im engeren Sinne ist, d. h. dass sie als eine Funktion $z = x + iy$ allein dargestellt werden kann:

$$F(z) + \text{const},$$

deren Ableitung nach z den Wert $f(z)$ hat. Man hat demnach den Satz:

Das Differential $f(z)\,dz$, *in welchem* $f(z)$ *eine Funktion der komplexen Variabelen* z *im engeren Sinne ist, so dass innerhalb eines gegebenen Gebietes*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

ist, wobei diese partiellen Ableitungen stetige Funktionen der komplexen Variabelen $z = x + iy$ *sind, besitzt auch für dieses Gebiet ein bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmtes Integral* $F(z)$, *welches selbst eine Funktion der komplexen Variabelen* z *ist, und für welches die Gleichung besteht:*

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = f(z) = \frac{1}{i}\,\frac{\partial F}{\partial y}.$$

486. Beispiel I. Es sei das Integral des Differentiales

$$d\Omega = \frac{x}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{y\,(x-y)^2}\,dy$$

zu bestimmen.. Hier ist:

$$X = \frac{x}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^3},$$
$$Y = -\frac{x^2}{y(x-y)^2} = -\frac{1}{y} - \frac{x}{(x-y)^2} - \frac{1}{x-y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2x}{(x-y)^3};$$

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx = l(x-y) - \frac{y}{x-y} - l(x_0-y) + \frac{y}{x_0-y},$$

$$\int_{y_0}^{y} Y_1\,dy = -l(y) - \frac{x_0}{x_0-y} + l(x_0-y) + l(y_0) + \frac{x_0}{x_0-y_0} - l(x_0-y_0),$$

also:

$$\Omega = l\,\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} - l\,\frac{x_0-y_0}{y_0} + \frac{x_0}{x_0-y_0} + C,$$

oder:

$$\Omega = l\,\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} + C.$$

C bedeutet eine beliebige Konstante.

487. Beispiel II. Es sei das Integral des Differentiales

$$d\Omega = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$$

zu bestimmen. Hier ist

$$X = y+z, \quad Y = z+x, \quad Z = x+y,$$

und die Bedingungen des exakten Differentiales sind in der That erfüllt, weil:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 1 = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = 1 = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Nun wird

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx = (y+z)\,x - (y+z)\,x_0,$$

$$\int_{y_0}^{y} Y_1\,dy = (z+x_0)\,y - (z+x_0)\,y_0,$$

$$\int_{z_0}^{z} Z_2\,dz = (x_0+y_0)\,z - (x_0+y_0)\,z_0,$$

also:

$$\Omega = yz + zx + xy - y_0z_0 - z_0x_0 - x_0y_0 + C,$$

oder einfacher:

$$\Omega = yz + zx + xy + C.$$

C bezeichnet eine willkürliche Konstante.

Berechnung der Werte einiger bestimmter Integrale.

488. Es giebt eine grosse Anzahl bestimmter Integrale, welche in den Anwendungen der Analysis häufig auftreten und deren Berechnung ohne die Hilfe von Reihenentwickelungen ausgeführt werden kann. Wir wollen hier die verschiedenen Methoden angeben, welche bei derartigen Untersuchungen zu gebrauchen sind.

Wir bemerken vor allem, dass das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

unmittelbar erhalten wird, sobald man das unbestimmte Integral des Differentiales $f(x)\,dx$ vermittelst *bekannter* Funktionen ausdrücken kann. Denn bezeichnet man dieses mit $F(x) + \text{const}$, so hat man

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0);$$

$F(x)$ muss dabei eine stetige Funktion von x im Intervalle von x_0 bis X sein. Dies gilt auch bei der Berechnung des bestimmten Integrales für Grenzen, welche unendlich werden, sobald die Funktion $F(x)$ bei diesem Grenzprozesse einen bestimmten endlichen Wert erhält.

Mit dieser ersten Methode behandeln wir folgende Beispiele.

1. Es ist:

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

und hieraus schliesst man, wenn $a > 0$ angenommen wird:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right.$$

2. Im § 450 wurden die Integrale berechnet:

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = -\,e^{-ax}\,\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\,e^{-ax}\,\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

Hieraus folgt, unter der Annahme, dass $a > 0$ ist:

$$2)\qquad \int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2};$$

$$3)\qquad \int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

3. Den Wert des Integrales $\sin^m x\,dx$ haben wir im § 456 kennen gelernt für den Fall, dass m eine ganze positive, gerade oder ungerade Zahl ist. Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$4)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$5)\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Diese Integrale verwandeln sich in

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx,$$

wenn man x durch $\frac{\pi}{2} - x$ ersetzt, und in

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wenn man $\sin x$ durch x, dx durch $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ersetzt.

4. Wir hatten im § 454 gefunden:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Sind m und n positive ganze Zahlen und $n > 1$, so erhält man, indem man das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bildet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

Ersetzt man n einmal durch $2n$, sodann durch $2n+1$, wobei n immer eine ganze Zahl bedeutet, so ist nach dieser Reduktionsformel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(m+2n)(m+2n-2)\ldots(m+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2n\,.\,(2n-2)\ldots 2}{(m+2n+1)(m+2n-1)\ldots(m+3)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x\, dx.$$

Das Integral des Differentiales $\sin^m x \cos x\, dx$ ist

$$\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C,$$

also ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x\, dx = \frac{1}{m+1};$$

mithin wird das zweite der obigen Integrale

$$6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2\,.\,4 \ldots 2n}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2n+1)}.$$

Schreibt man in dem andern Integrale $2m$ an Stelle von m, so hat man nach Gleichung 4):

$$7)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1.3\ldots(2n-1).1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots(2m+2n)} \cdot \frac{\pi}{2};$$

das Integral in der Gleichung 6) wird gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^m x\, dx$$

durch Änderung von x in $\frac{\pi}{2} - x$.

489. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\, dx}{1+x},$$

in welchem p eine positive Zahl kleiner als 1 ist, hat einen endlichen Wert. Denn für $x = \infty$ wird die zu integrierende Funktion von höherer als der ersten Ordnung null, und für $x = 0$ wird sie zwar unendlich, aber von niederer als der ersten Ordnung. Dieses, zuerst von Euler untersuchte Integral hat eine wichtige Rolle in der Theorie der bestimmten Integrale und lässt sich, wie nun gezeigt werden soll, durch eine einfache Betrachtung rationaler Integrale berechnen. Wir bezeichnen mit m und n zwei ganze positive Zahlen, so dass $m < n$ ist, und zerlegen den rationalen Bruch

$$\frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}}$$

in seine Partialbrüche.

Setzt man

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

so sind die Wurzeln der Gleichung $1 + z^{2n} = 0$ durch die Formel $e^{\pm i\varphi_k}$ dargestellt, wenn man k die Werte $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ beilegt. Die Summe T_k der beiden Partialbrüche, welche zu den konjugierten Werten $e^{+i\varphi_k}$ und $e^{-i\varphi_k}$ gehören, wird

$$T_k = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(2m+1)\varphi_k}}{z - e^{i\varphi_k}} + \frac{e^{-i(2m+1)\varphi_k}}{z - e^{-i\varphi_k}}\right]$$

$$= \frac{-(z-\cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k + \sin\varphi_k \sin(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}.$$

Integriert man das Differential $T_k\,dz$ zwischen den Grenzen $z = -Z$ und $z = +Z$, so folgt:

$$\int_{-Z}^{+Z} T_k\,dz = -\frac{1}{2}\cos(2m+1)\varphi_k \log\frac{(Z-\cos\varphi_k)^2+\sin^2\varphi_k}{(Z+\cos\varphi_k)^2+\sin^2\varphi_k}$$
$$+\sin(2m+1)\varphi_k\left[\operatorname{arctang}\frac{Z-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}+\operatorname{arctang}\frac{Z+\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right].$$

Lässt man Z unendlich werden, so konvergiert der Logarithmus in dieser Gleichung nach dem Werte null, und die beiden Kreisbogen werden gleich $\frac{\pi}{2}$, weil φ_k kleiner als π, also $\sin\varphi_k$ positiv ist. Es ist also

$$\lim_{Z=\infty}\int_{-Z}^{+Z} T_k\,dz = \pi\sin(2m+1)\varphi_k.$$

Setzt man
$$\alpha = \frac{2m+1}{2n}\pi,$$
so ist
$$(2m+1)\varphi_k = (2k+1)\alpha, \quad \text{also} \quad \lim_{Z=\infty}\int_{-Z}^{+Z} T_k\,dz = \pi\sin(2k+1)\alpha.$$

Nun ist
$$\frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}} = T_0+T_1+T_2+\cdots+T_{n-1},$$
folglich:
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz = \lim_{Z=\infty}\int_{-Z}^{Z}(T_0+T_1+\cdots+T_{n-1})\,dz$$
$$= \pi[\sin\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha].$$

Multipliziert man die in der Klammer enthaltene Summe mit $2\sin\alpha$, so erhält man ein Produkt gleich
$$(1-\cos 2\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+\cdots+[\cos(2n-2)\alpha-\cos 2n\alpha],$$
also gleich:
$$1-\cos 2n\alpha = 1-\cos(2m+1)\pi = 2.$$

Demnach wird, indem man für α seinen Wert einsetzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz = \frac{\pi}{\sin\alpha} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{n}\pi\right)}, \qquad (m \leqq n-1).$$

Das Integral, dessen Wert wir hier bestimmt haben, ist gleich der Summe der beiden folgenden:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} dz, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}} dz.$$

Diese beiden sind einander gleich, denn ihre Elemente sind gleich, und z ist in beiden eine wachsende Grösse. Demnach ist auch

$$2n \int_{0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

Indem die Variabele z jetzt positiv bleibt, machen wir die Substitution

$$z = x^{\frac{1}{2n}}, \quad 2n\,dz = x^{\frac{1}{2n}-1} dx,$$

und setzen

$$\frac{2m+1}{2n} = p.$$

Die obige Gleichung erhält dann die Form:

$$8) \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

und dies ist die gesuchte Gleichung. Sie ist zunächst unter der Annahme bewiesen, dass die Zahl p, die zwischen 0 und 1 liegt, von der Form $\frac{2m+1}{2n}$ ist, wobei m und n beliebige ganze Zahlen sind und $m \leqq n-1$ ist. Die beiden Seiten dieser Gleichung sind aber stetige Funktionen von p. Von der linken Seite erkennt man dies folgendermassen:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p+\delta-1} - x^{p-1}}{1+x} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}(x^{\delta}-1)}{1+x} dx$$

kann durch Wahl eines beliebig kleinen Betrages von δ beliebig klein gemacht werden; denn es lassen sich zuerst die Grössen ε und w so bestimmen, dass die Integrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{x^{p+\delta-1}-x^{p-1}}{1+x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_w^\infty \frac{x^{p+\delta-1}-x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

unabhängig von einer weiteren Verkleinerung des Betrages von δ ihrem Betrage nach beliebig klein werden, und alsdann lässt sich δ so fixieren, dass

$$\int_\varepsilon^w \frac{x^{p-1}(x^\delta-1)}{1+x}\,dx$$

beliebig klein wird. Aus der Stetigkeit der beiden Seiten in der Gleichung 8) folgt, dass diese bei allen Werten von p zwischen 0 und 1 übereinstimmen, denn man kann immer eine unendliche Reihe von rationalen Brüchen von der Form $\frac{2m+1}{2n}$ bilden, welche nach der Grenze p konvergiert.

490. Ein gleicher Weg führt zur Bestimmung des Integrales

$$u = \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx,$$

in welchem p ebenfalls eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Dieses Integral hat einen endlichen bestimmten Wert, weil die zu integrierende Funktion für $x=0$ von niederer als der ersten Ordnung unendlich wird, und für $x=1$ endlich bleibt. Transformiert man x in $\frac{1}{x}$, dx in $-\frac{dx}{x^2}$, so werden die Grenzen ∞ und 1; dieselben lassen sich aber vertauschen, wenn man das Vorzeichen ändert; es wird also

$$u = \int_1^\infty \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx,$$

und durch Addition der beiden Gleichungen folgt:

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx.$$

Wir nehmen nun an, dass p eine rationale Zahl von der Form

$$p = \frac{2m+1}{2n}$$

ist. Führt man die Substitution

$$x = z^{2n}, \quad dx = 2nz^{2n-1}\,dz$$

aus, so wird

$$u = \int_0^\infty n\,\frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1 - z^{2n}}\,dz.$$

Die Funktion unter dem Integrale ist eine rationale, deren Zähler und Nenner von gerader Ordnung sind; denn $2np$ ist eine ganze ungerade Zahl. Man kann demnach das Integral von der unteren Grenze $-\infty$ an beginnen, wenn man nur das Mittel desselben nimmt; es ist also

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2}\,\frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1 - z^{2n}}\,dz.$$

Die Wurzeln des Nenners sind die Werte

$$e^{\frac{\pm k\pi i}{n}} = \cos\frac{k\pi}{n} \pm i\sin\frac{k\pi}{n};$$

k hat dabei die Werte $1, 2, 3 \ldots n-1$. Nennt man wiederum T_k die Summe der beiden Partialbrüche, welche zu konjugierten Wurzeln gehören, so wird

$$T_k = \sin kp\pi\,\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\left(z - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}},$$

und hieraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k\,dz = \sin kp\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{n}\,dz}{\left(z - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

Setzt man $z - \cos\frac{k\pi}{n} = t\sin\frac{k\pi}{n}$, so ist dieses Integral gleich $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$, also gleich $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ oder π. Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k\,dz = \pi \sin kp\pi = \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos(2k-1)p\pi - \cos(2k+1)p\pi}{\sin p\pi};$$

giebt man nun k die Werte $1, 2, \ldots n-1$, addiert alsdann die verschiedenen Quotienten und beachtet, dass

$$\cos(2n-1)p\pi = -\cos p\pi$$

ist, weil $2np$ eine ungerade ganze Zahl ist, so wird

$$u = \pi \operatorname{cotg} p\pi,$$

oder

$$9) \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{cotg} p\pi,$$

eine Gleichung, die bei allen Werten von p zwischen 0 und 1 giltig ist.

Einige Folgerungen aus den vorigen Gleichungen.

491. Das Resultat, welches wir zuletzt gewonnen haben, führt in einfacher Weise zu einer Entwickelung der Funktion $\operatorname{tang} x$ und $\operatorname{cotg} x$ in eine unendliche Reihe von Partialbrüchen.

Denn wenn man den Quotienten $\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$ vermittelst algebraischer Division in eine Reihe entwickelt, so erhält man

$$\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (x^{m+p-1} - x^{m-p}),$$

eine Reihe, die konvergent ist, solange $0 < x < 1$, und die in diesem Intervalle gleichmässig konvergiert, die aber divergiert für $x = 0$, für $x = 1$ ist die Gleichung ungiltig. Multipliziert man beide Seiten mit dx und integriert zwischen den Grenzen 0 und 1, so folgt, indem man das Restglied

$$R_n(x) = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p}}{1-x}$$

einführt:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}\,dx}{1-x} = \sum_{m=0}^{m=n-1} \int_0^1 (x^{m+p-1} - x^{m-p})\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p}}{1-x}\,dx.$$

Es wird nun $\int\limits_0^1 x^n \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx$ durch Wahl von n beliebig klein; denn bezeichnet θ einen echten Bruch, so kann man das Integral zerlegen in:

$$\int\limits_0^\theta x^n \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_\theta^1 x^n \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx.$$

Auf das erste Integral lässt sich, weil der Quotient ein unveränderliches Vorzeichen hat, der erste Mittelwertsatz § 463 anwenden, demzufolge es gleich ist dem Produkte aus einem mittleren Werte von x^n im Intervalle von 0 bis θ, multipliziert mit dem Integrale des zweiten Faktors; also

$$\int\limits_0^\theta x^n \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = M(x^n)\int\limits_0^\theta \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx.$$

Das zweite Integral kann man gleich setzen dem Produkte aus einem mittleren Werte des Quotienten, multipliziert mit dem Integrale des ersten Faktors:

$$\int\limits_\theta^1 x^n\cdot\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = M\left(\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\right)\cdot\frac{1-\theta^{n+1}}{n+1}.$$

Von beiden Ausdrücken rechts erkennt man, dass sie durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden können. In dem ersten Integrale ist dabei die Giltigkeit des ersten Mittelwertsatzes vorausgesetzt, auch für den Fall, dass die unter dem Integrale nachbleibende Funktion an der Grenze unendlich wird, was unschwer zu beweisen ist.

Die obige Formel liefert demnach die Reihenentwickelung

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{m+1-p}\right),$$

und man hat also nach der Formel 9) des vorigen Paragraphen die Gleichung:

$$\pi\operatorname{cotg} p\pi = \frac{1}{p}-\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1+p}\right)-\left(\frac{1}{2-p}-\frac{1}{2+p}\right)-\left(\frac{1}{3-p}-\frac{1}{3+p}\right)-\cdots$$

Setzt man nach einander $p\pi = x$ und $= \frac{\pi}{2} - x$, so folgt:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x}\right) - \cdots$$

$$\operatorname{tang} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) + \left(\frac{1}{\frac{5\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2} + x}\right) + \cdots$$

Da p zwischen 0 und 1 liegt, so setzt unsere Ableitung voraus, dass in diesen Reihen x zwischen 0 und π, oder zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt; da aber die beiden Seiten dieser Gleichungen die Periode π besitzen, so gelten sie bei allen Werten von x.

Da

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} x$$

ist, so folgt aus den beiden Reihen:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \left(\frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x}\right) - \cdots$$

und verwandelt man x in $\frac{\pi}{2} - x$, so wird

$$\sec x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) + - \cdots$$

Diese letzten Gleichungen ergeben sich auch aus der Formel 8) im § 489, denn diese kann leicht auf die Form gebracht werden:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1 + x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

492. Die Formel von Wallis. — Im § 488 wurde der Wert des Integrales

$$u_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$$

bestimmt, für den Fall, dass m eine ganze positive gerade oder ungerade Zahl ist. Dies Integral nimmt ab, wenn m

wächst; denn die Elemente $\sin^m x\,dx$ sind um so grösser, je kleiner m ist. Bezeichnet man also mit n eine ganze positive Zahl, so ist

$$u_{2n+1} < u_{2n} < u_{2n-1},$$

d. h.

$$\frac{2\,.\,4\ldots 2n}{3\,.\,5\ldots(2n+1)} < \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2\,.\,4\ldots(2n-2)}{3\,.\,5\ldots(2n-1)},$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Das Verhältnis der beiden ersten Seiten in diesen Ungleichungen ist gleich $\frac{2n}{2n+1}$, und hat die Einheit zur Grenze, wenn n unbegrenzt wächst; also ist

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}, \quad \text{für } n=\infty.$$

Diese bemerkenswerte Formel ist von Wallis noch vor der Entdeckung der Differentialrechnung aufgestellt worden; wir werden später Gelegenheit haben, sie zu benutzen.

Anwendung der Differentiation und Integration nach einem Parameter zur Berechnung bestimmter Integrale.

493. Vorbemerkung. Die im § 479 gegebene Regel der Differentiation unter dem Integralzeichen lässt sich unter gewissen Bedingungen auch auf den Fall ausdehnen, dass die Grenzen des Integrales unendlich sind. Es sei

$$u = \int_{x_0}^{\infty} f(x, \alpha)\,dx,$$

$$\Delta u = \int_{x_0}^{\infty} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\,dx.$$

Wenn nun die Funktion $f'_\alpha(x, \alpha)$ bei jedem Werte von X von $x = x_0$ bis $x = \infty$ eine gleichmässig stetige Funktion von α ist, und wenn überdies das Integral

$$\int_w^\infty f'(x, \alpha + \theta \Delta \alpha)\, dx$$

durch Fixierung einer unteren Grenze für w beliebig klein wird, unabhängig von dem Werte $\alpha + \theta \Delta \alpha$, so ist leicht zu beweisen, dass

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx$$

ist.

Desgleichen erkennt man: Aus dem Integrale

$$u = \int_{x_0}^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

folgt, wenn man

$$\int_{\alpha_0}^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha = F(x, \alpha) \quad \text{und} \quad \int_{x_0}^\infty F(x, \alpha)\, dx = v$$

setzt, dass

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = u, \quad \text{also} \quad v = \int_{\alpha_0}^\alpha u\, d\alpha$$

wird, falls die Funktion $f(x, \alpha)$ nicht nur eine gleichmässig stetige Funktion von α ist, sondern auch

$$\int_w^\infty f(x, \alpha)\, dx$$

durch Wahl einer unteren Grenze von w unabhängig von α beliebig klein gemacht werden kann.

Soll auch in Bezug auf den Parameter α die Integration bis zu einer unendlichen Grenze ausgedehnt werden, so muss man sich zuerst von der Giltigkeit der Gleichung

$$\int_{\alpha_0}^\alpha d\alpha \int_{x_0}^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int_{x_0}^\infty dx \int_{\alpha_0}^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha$$

überzeugen. Lässt man dann α beliebig wachsen, so konvergiert die linke Seite in den Wert

$$\int_{\alpha_0}^\infty d\alpha \int_{x_0}^\infty f(x, \alpha)\, dx,$$

falls dieses überhaupt ein bestimmter Wert ist; und die rechte Seite geht in den nämlichen Grenzwert über, falls

$$\int_{x_0}^{\infty} dx \int_{w}^{w'} f(x, \alpha)\, d\alpha \qquad (w' > w)$$

lediglich durch Wahl einer unteren Grenze für w beliebig klein gemacht werden kann. Für die folgenden Beispiele kann man ohne Schwierigkeit beweisen, dass diese Forderungen erfüllt sind.

1. Es ist nach § 488, wenn $\alpha > 0$ ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

Differentiiert man n-mal nach α, so folgt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}\, dx = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2^n\, \alpha^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2},$$

also:

$$1) \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2\alpha^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2. Nach § 488 ist bei positivem Wert von α

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha},$$

und differentiiert man $n-1$ mal nach α, so folgt:

$$2) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{n-1}\, dx = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)}{\alpha^n}.$$

Setzt man $\alpha = 1$, so erhält man die Gleichung:

$$3) \qquad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx = (n-1)!$$

494. Multipliziert man dieselbe Gleichung

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$$

beiderseits mit $d\alpha$ und integriert man $\alpha = b$ bis $\alpha = a$, so wird

$$\int_b^a d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \int_b^a \frac{d\alpha}{\alpha} = \log\frac{a}{b}; \qquad (a \text{ und } b > 0)$$

vertauscht man auf der linken Seite die Reihenfolge der Integrationen und beachtet, dass

$$\int_b^a e^{-\alpha x}\, d\alpha = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}$$

ist, so gewinnt man die Gleichung:

$$4)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\, dx = \log\frac{a}{b}.$$

Setzt man $b = 1$, so wird

$$5)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\, dx = \log a.$$

Im § 488 wurde gefunden für $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Integriert man beide Seiten nach a zwischen den Grenzen f und g, die beide positiv sein müssen, so folgt:

$$6)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \log\frac{g^2 + b^2}{f^2 + b^2},$$

$$7)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arctang}\frac{g}{b} - \operatorname{arctang}\frac{f}{b}.$$

Nimmt man b als positiv in der Gleichung 7) an und lässt zunächst f nach 0 konvergieren, so lässt sich beweisen, dass die linke Seite stetig in den Wert

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx$$

übergeht. Es folgt dies ohne Schwierigkeit aus der Erkenntnis (§ 466), dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz \qquad (z = bx)$$

einen endlichen Wert hat. Demnach ist:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-gx}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arctang} \frac{g}{b}.$$

In diesem Integrale kann man g positiv unendlich werden lassen, da beide Seiten stetig nach bestimmten Grenzen konvergieren, und sonach wird:

$$8) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (b > 0)$$

Es ist einleuchtend, dass, falls b negativ ist, der Wert des Integrales gleich $-\frac{\pi}{2}$ wird.

495. Die vorstehende Formel ist von sehr grosser Bedeutung und kommt bei schwierigen Untersuchungen zur Anwendung. Ersetzt man b durch $a+b$, und ferner durch $a-b$, wobei a und b beide positiv und $a > b$ angenommen werden, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(a-b)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Integrale findet man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\, dx = 0.$$

Diese beiden gehen durch Vertauschung der Buchstaben a und b aus einander hervor. Also ist

$$9) \qquad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $a > b$ oder $a < b$ ist; beide Grössen sind dabei als positiv vorausgesetzt. Für $a = b$ wird das Integral gleich

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}\,dx,$$

also gemäss der Gleichung 8) gleich $\frac{1}{2}$.

Wir haben also das Beispiel einer analytisch dargestellten Funktion der beiden Variabelen a und b, welche wesentlich unstetig ist. Der Wert dieser Funktion ist immer gleich 1 oder gleich 0, wenn a und b positiv sind.

Wir wollen nun eine Anwendung dieser Formel geben, welche zur Bestimmung eines neuen Integrales führt.

496. Wir gehen aus von der Gleichung

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

und multiplizieren beide Seiten mit $\frac{\cos b}{b}\,db$, so wird

$$\frac{\cos b}{b}\,db \int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}.$$

Indem wir nun nach b integrieren von $b = 0$ bis $b = \infty$, und dabei auf der linken Seite zuerst die Integration nach b ausführen, was gestattet ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,dx \int\limits_0^\infty \frac{\sin bx \cos b\,db}{b} = \int\limits_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}.$$

Das Integral nach x kann in zwei Teile zerlegt werden; der erste Teil besteht aus dem Integrale von $x = 0$ bis $x = 1$, der andere aus dem Integrale von $x = 1$ bis $x = \infty$. Solange aber $x < 1$ ist, wird der Faktor

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b\, db}{x} = 0$$

gemäss der Gleichung 9) im § 495; und derselbe Faktor ist gleich $\frac{\pi}{2}$, wenn $x > 1$ ist. Die obige Formel wird also

$$\frac{\pi}{2} \int_1^\infty e^{-ax}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos b\, db}{a^2 + b^2},$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{\cos b\, db}{a^2 + b^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$$

Die Konstante a ist wesentlich positiv. Setzt man also $b = ax$, $db = a\, dx$, so folgt:

$$10) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

und dies ist die Gleichung, welche wir ableiten wollten.

497. Wir wollen noch das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ betrachten, welches zu der Klasse von Integralen gehört, deren Theorie im folgenden Kapitel gegeben werden wird. Der Wert desselben lässt sich leicht bestimmen, indem man die Methode der Integration unter dem Integralzeichen anwendet. Wir setzen

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Substituiert man $x = \alpha t$, $dx = \alpha\, dt$, wobei α eine Konstante ist, so folgt

$$A = 2 \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha\, dt.$$

Multipliziert man mit $2e^{-\alpha^2} d\alpha$ beide Seiten, so wird:

$$A\, 2e^{-\alpha^2} d\alpha = 4e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha\, dt.$$

Integriert man nun nach α, zwischen den Grenzen 0 und ∞, so wird die linke Seite gleich

$$A\, 2\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha = A^2.$$

Auf der rechten Seite kann man die Integration nach α zuerst ausführen; es ist:

$$4\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\, \alpha\, dt = 4\int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\, \alpha\, d\alpha,$$

und da das unbestimmte Integral des Differentiales

$$2e^{-\alpha^2(1+t^2)}\, \alpha\, d\alpha = -\frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{1+t^2} + \text{const}$$

ist, so ist das Ergebnis dieser Integration

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Also ist

$$A^2 = \pi$$

und folglich

11) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

498. Von diesem Integrale ausgehend gelangt man zu anderen, die hier noch angegeben werden sollen. Bezeichnet a eine positive Grösse und ersetzt man x durch $x\sqrt{a}$, so folgt:

12) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}. \qquad (a > 0)$$

Differentiiert man diese Gleichung n-mal nach a, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\, dx = \sqrt{\pi}\, \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}\, a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

und für $a = 1$:

13) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n}\, dx = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}.$$

Bezeichnet man mit a eine reelle positive oder negative Grösse und ersetzt man in der Gleichung 11) x durch $x \pm a$, so bleiben die Grenzen der Integration ungeändert und es wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \mp 2xa}\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{a^2}.$$

Ersetzt man das zweideutige Zeichen auf der linken Seite einmal durch $+$, sodann durch $-$, und bildet alsdann die halbe Summe der Integrale, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{2}\, dx = \sqrt{\pi} \,.\, e^{a^2}.$$

Verwandelt man dann noch x in mx und a in $\frac{n}{m}$, so wird:

$$14) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2} \frac{e^{2nx} + e^{-2nx}}{2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{\frac{n^2}{m^2}},$$

eine Gleichung, bei welcher m positiv vorausgesetzt ist.

Über den Übergang von reellen Grössen zu komplexen.

499. Wenn zwei Funktionen einander gleich sind für alle reellen Werte der Variabelen (oder auch nur für alle Werte der Variabelen innerhalb eines bestimmten Intervalles), und beide Funktionen sind in konvergente Reihen entwickelbar, geordnet nach ganzen wachsenden Potenzen dieser Variabelen, so sind die Koeffizienten gleicher Potenzen in beiden Entwickelungen einander gleich (§ 111). Bleiben also die beiden Reihen konvergent, wenn man die Variabele komplex annimmt, und dieses ist sicher der Fall, solange der Modul des komplexen Wertes kleiner ist als der grösste Betrag, bei welchem die reelle Reihe konvergiert (§ 104, Zusatz), so besteht die Gleichheit zwischen den beiden Funktionen notwendig fort.

Auf Grund dieser Überlegung kann man die Werte von einigen neuen bestimmten Integralen ableiten.

Kehren wir z. B. zur Gleichung 14) des vorigen Paragraphen zurück. Man sieht leicht ein, dass sich die beiden

Seiten dieser Gleichung in konvergente Reihen, welche nach ganzen Potenzen von n fortschreiten, entwickeln lassen, und dass diese Konvergenz nicht gestört wird, wenn man für n den Wert ni einführt Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\,e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Man kann das Integral auch mit der unteren Grenze null beginnen, wenn man die rechte Seite mit 2 dividiert, und erhält so:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}\,e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Ein anderes Beispiel liefert die Gleichung 12) desselben Paragraphen, in welcher a eine positive Grösse bedeutet. Ersetzt man hier $\sqrt{a}$ durch $m(1+\alpha)$, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+\alpha)^2x^2m^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\alpha)}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung lassen sich in konvergente Potenzreihen in Bezug auf α entwickeln, bei allen reellen Werten von α zwischen -1 und $+1$. Es bleiben daher diese Reihen auch konvergent, wenn α einen komplexen Wert bezeichnet, dessen Modul kleiner als 1 ist. Setzt man nun $\alpha = \varrho i$, wobei ϱ reell und kleiner als 1 ist, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+2i\varrho-\varrho^2)m^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+i\varrho)} = \frac{1-i\varrho}{m(1+\varrho^2)}\sqrt{\pi}.$$

Setzt man die reellen und imaginären Bestandteile einzeln einander gleich, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\varrho^2)m^2x^2}\cos(2\varrho m^2x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\varrho^2)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\varrho^2)m^2x^2}\sin(2\varrho m^2x^2)\,dx = \frac{\varrho\sqrt{\pi}}{m(1+\varrho^2)},$$

oder, wenn man $(1-\varrho^2)m^2 = \mu$, $2\varrho m^2 = \nu$ einführt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2} \cos(\nu x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\mu + \sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu^2+\nu^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2} \sin(\nu x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu^2+\nu^2}}.$$

Diese Gleichungen setzen voraus, dass $\mu > 0$ ist.

Das Integral von Cauchy.

500. Es sei $z = \varrho e^{i\omega}$ eine komplexe Variabele und $f(z)$ eine Funktion derselben, welche kontinuierlich ist, und eine bestimmte, ebenfalls stetige Ableitung besitzt bei allen Werten von z, deren Modul nicht grösser ist als eine gegebene Grösse R. Es ist

$$dz = e^{i\omega} d\varrho + i\varrho e^{i\omega} d\omega,$$

und folglich

$$f(z)\, dz = \varphi(\varrho, \omega)\, d\varrho + \psi(\varrho, \omega)\, d\omega,$$

wenn man zur Abkürzung

$$\varphi(\varrho, \omega) = e^{i\omega} f(\varrho e^{i\omega}), \quad \psi(\varrho, \omega) = i\varrho e^{i\omega} f(\varrho e^{i\omega})$$

setzt. Wir haben im § 485 gesehen, dass dieser Ausdruck $f(z)\, dz$ das exakte Differential einer Funktion der beiden unabhängigen Variabelen ϱ und ω ist. Bezeichnet man also mit ϱ_0 und ω_0 irgend welche Anfangswerte von ϱ und ω innerhalb des gegebenen Gebietes für z, so ist nach § 484:

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} [\varphi(\varrho, \omega) - \varphi(\varrho, \omega_0)]\, d\varrho = \int_{\omega_0}^{\omega} [\psi(\varrho, \omega) - \psi(\varrho_0, \omega)]\, d\omega.$$

Wir wählen $\varrho_0 = 0$ und schreiben α an Stelle von ω_0. Da die Funktion $f(z)$ stetig sein soll für alle Werte von z, deren Modul nicht grösser ist als R, so haben auch die Integrale in dieser Gleichung einen endlichen Wert, wenn man $\varrho = R$, $\omega = \alpha + 2\pi$ setzt. Die Annahme der Stetigkeit von $f(z)$ enthält aber auch die Bedingung, dass diese Funktion dieselben Werte annimmt für $\omega = \alpha$ und $\omega = \alpha + 2\pi$, wenn ϱ denselben Wert behält. Hieraus folgt, dass die linke Seite in der obigen Gleichung null ist. Ferner wird auch die Funktion $\psi(\varrho, \omega)$

gleich null für $\varrho = 0$, weil $f(z)$ nicht unendlich sein kann; demnach ist

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \psi(R, \omega)\, d\omega = 0,$$

oder

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R e^{i\omega} f(R e^{i\omega})\, d\omega = 0,$$

oder auch

1) $$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} Z f(Z)\, d\omega = 0,$$

wobei Z den Wert bedeutet $Z = Re^{i\omega}$.

Diese Gleichung unterscheidet sich nur in der Form von derjenigen, die im § 382 aufgestellt wurde, und die Methode, mittelst derer wir sie hier gewonnen haben, ist im Grunde genau die nämliche, die wir dort anwandten. Bezeichnet man nun auch hier mit $F(z)$ eine Funktion, die stetig ist und eine bestimmte stetige Ableitung besitzt, bei allen Werten von z, deren Modul nicht grösser als R ist, bedeutet ferner x eine reelle oder komplexe Konstante, deren Modul kleiner als R ist, so kann man

$$f(z) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x}$$

in die Gleichung 1) einsetzen, und es wird

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z - x} [F(Z) - F(x)]\, d\omega = 0,$$

oder:

2) $$F(x) \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z - x}\, d\omega = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z - x} F(Z)\, d\omega.$$

Nun ist aber

$$\frac{Z}{Z - x} = 1 + \frac{x}{Z} + \frac{x^2}{Z^2} + \cdots + \frac{x^{\mu-1}}{Z^{\mu-1}} + \frac{x^{\mu}}{Z^{\mu}} \cdot \frac{Z}{Z - x},$$

und wenn m nicht null ist, so wird

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{x^m}{Z^m}\, d\omega = \frac{x^m}{R^m} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-mi\omega}\, d\omega = 0;$$

also ist

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z - x}\, d\omega = 2\pi + \frac{x^{\mu}}{R^{\mu}} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z - x}\, e^{-\mu\omega i}\, d\omega.$$

Der Modul von $\frac{x^\mu}{R^\mu}$ wird für $\mu = \infty$ null; also ist

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x}\, d\omega = 2\pi,$$

und die Gleichung 2) wird demnach

$$3)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x}\, F(Z)\, d\omega.$$

Diese von Cauchy gegebene Integralformel unterscheidet sich nicht von der Gleichung 12) im § 382, aus der wir die Reihenentwickelung der Funktion $F(x)$ abgeleitet haben. Differentiiert man dieselbe μ-mal nach x, oder, wenn man will, nach dem Modul von x, so kann auf der rechten Seite die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, und es wird:

$$4)\qquad F^\mu(x) = \mu!\,\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{ZF(Z)}{(Z-x)^{\mu+1}}\, d\omega.$$

Für $x = 0$ ergeben die Gleichungen 3) und 4), indem man $Re^{i\omega}$ an Stelle von Z schreibt:

$$5)\qquad F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} F(Re^{i\omega})\, d\omega,$$

$$6)\qquad F^\mu(0) = \mu!\, R^{-\mu}\,\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} e^{-\mu i\omega} F(Re^{i\omega})\, d\omega.$$

Bezeichnet man endlich mit x eine Konstante und wendet man die Gleichungen 5) und 6) auf die Funktion $F(z) = \Phi(x+z)$ an, so erhält man, indem man noch r an Stelle von R schreibt:

$$7)\qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \Phi(x + re^{i\omega})\, d\omega,$$

$$8)\qquad \Phi^\mu(x) = \mu!\, r^{-\mu}\,\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{-\mu i\omega}\, \Phi(x + re^{i\omega})\, d\omega.$$

Diese beiden Gleichungen gelten bei allen Werten von r, für welche die Funktion $\Phi(x + re^{i\omega})$ nebst ihrer ersten Ableitung stetig ist.

501. Aus den vorigen Formeln ergiebt sich die Berechnung einer grossen Anzahl von bestimmten Integralen, wofür wir einige Beispiele hier geben wollen.

1. Es werde

$$F(z) = \frac{1}{1 - z}$$

gesetzt; diese Funktion bleibt nebst ihrer Ableitung stetig für alle Werte von z, deren Modul kleiner als 1 ist. Aus der Gleichung 5) folgt also, wenn man $\alpha = 0$ und $R < 1$ annimmt:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - Re^{i\omega}} = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - R\cos\omega) + iR\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2}\, d\omega,$$

oder, wenn man die reellen und imaginären Teile trennt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - R\cos\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2}\, d\omega = 2\pi.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2}\, d\omega = 0.$$

Es ist zu bemerken, dass diese letzte Gleichung evident ist; denn die Elemente des Integrales, welche zu einem Werte ω und dem dazu komplementären $2\pi - \omega$ gehören, sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Die erste Gleichung gilt nicht mehr, wenn $R > 1$ ist; in diesem Falle ist der Wert des Integrales gleich 0. Denn es wird:

$$\frac{1 - R\cos\omega}{1 - 2R\cos\omega + R^2} + \frac{1 - \frac{1}{R}\cos\omega}{1 - \frac{2}{R}\cos\omega + \frac{1}{R^2}} = 1.$$

Multipliziert man diese Identität mit $d\omega$ und integriert alsdann von 0 bis 2π, so wird das Integral des ersten Quotienten gleich 2π, wenn $R < 1$ ist; folglich ist das zweite gleich null, und man erhält

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{R}\cos\omega}{1 - \frac{2}{R}\cos\omega + \frac{1}{R^2}} d\omega = 0.$$

Für den Fall $R = 1$ wird das Integral gleich:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos\omega}{2 - 2\cos\omega} d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2} = \pi.$$

2. Es sei $F(z) = e^z$; diese Funktion bleibt nebst ihrer Ableitung stetig bei allen Werten von z; setzt man also $\alpha = 0$, $R = m$, so ergiebt die Gleichung 5):

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega + i\, m \sin\omega} d\omega = 2\pi,$$

also

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega} \cos(m \sin\omega)\, d\omega = 2\pi.$$

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega} \sin(m \sin\omega)\, d\omega = 0.$$

Das Element des ersten Integrales bekommt denselben Wert, wenn man die in Bezug auf 2π komplementären Werte von ω einsetzt; daraus folgt, dass

$$\int_0^{\pi} e^{m\cos\omega} \cos(m \sin\omega)\, d\omega = \pi$$

ist, eine Formel, die Poisson auf anderm Wege im 19. Hefte des Journal de l'École Polytechnique abgeleitet hat.

3. Wir setzen noch

$$F(z) = l(1 + z) = l(1 + \varrho e^{i\omega});$$

ω variiere von $-\pi$ bis $+\pi$, ϱ sei kleiner als 1. Setzt man

$$1 + z = re^{i\psi},$$

so ist

$$1 + \varrho \cos \omega = r \cos \psi, \quad \varrho \sin \omega = r \sin \psi,$$

also:

$$r = \sqrt{1 + 2\varrho \cos \omega + \varrho^2}, \quad \psi = \operatorname{arctang} \frac{\varrho \sin \omega}{1 + \varrho \cos \omega}.$$

Die Funktion $F(z)$ ist stetig nur solange als der Modul ϱ kleiner als 1 ist (§ 375), also ist $\cos \psi$ immer positiv, und der Winkel ψ, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ variiert, ist durch seine Tangente vollkommen bestimmt. Nimmt man nun $R < 1$ an, so giebt die Gleichung 5):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (lr + i\psi)\, d\omega = 0,$$

d. h.:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} l(1 + 2R \cos \omega + R^2)\, d\omega = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{arctang} \frac{R \sin \omega}{1 + R \cos \omega}\, d\omega = 0.$$

Anwendung der Theorie der bestimmten Integrale zur Darstellung der Koeffizienten der trigonometrischen Reihe.

502. Die bestimmten Integrale

$$1) \qquad \int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx$$

haben alle beide den Wert null, wenn m und n ungleiche ganze Zahlen sind. Denn bildet man ihre Summe und ihre Differenz, so erhält man:

$$2) \qquad \int_0^\pi dx \cos (m - n) x, \quad \int_0^\pi dx \cos (m + n) x,$$

und man erkennt ohne weiteres, dass diese Integrale null sind, weil $dx \cos (m - n) x$ und $dx \cos (m + n) x$ die Differentiale der Funktionen

$$\frac{\sin(m-n)x}{m-n} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(m+n)x}{m+n}$$

sind, welche für $x=0$ und $x=\pi$ verschwinden.

Ist aber $m=n$, so wird nur das zweite der Integrale 2) gleich null, während das erste sich auf $\int_0^\pi dx=\pi$ reduziert. Also haben die beiden Integrale

$$3)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx,\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx$$

den Wert 1 oder 0, je nachdem die ganzen Zahlen m und n gleich oder ungleich sind. Dieser Schluss setzt indessen voraus, dass nicht gleichzeitig $m=n=0$ ist; in diesem Falle wird das erste der Integrale 3) gleich 2 und das zweite null.

503. Es seien nun $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen von x; von diesen beiden Funktionen sei bekannt, dass sie in konvergente Reihen der folgenden Art entwickelbar seien:

$$4)\qquad f(x)=\frac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\cdots+A_n\cos nx+\cdots$$

$$5)\qquad F(x)=B_1\sin x+B_2\sin 2x+B_3\sin 3x+\cdots+B_n\sin nx+\cdots,$$

d. h. innerhalb des Intervalles von $x=0$ bis $x=\pi$ konvergiere die erste Reihe und ebenso die zweite allenthalben und ihre Werte seien bezüglich gleich $f(x)$ und $F(x)$. Die erste Reihe wird dann für das Intervall von 0 bis $-\pi$ denselben Wert wie für das Intervall von 0 bis $+\pi$ darstellen; die zweite wird in jenem Intervalle Werte erhalten, die den anderen entgegengesetzt gleich sind. Ausserdem ist zu beachten, dass die zweite Reihe für $x=0$ und $x=\pi$ denselben Wert, nämlich null liefert, so dass wir also, wenn völlige Übereinstimmung zwischen der Funktion $F(x)$ und der Sinusreihe bestehen soll, was wir zunächst voraussetzen, annehmen müssen, dass diese Funktion insbesondere die Eigenschaft hat, dass $F(0)=F(+\pi)=0$ ist.

Es sollen nun die Koeffizienten in den beiden Reihen bestimmt werden. Der alte von Fourier eingeschlagene Weg ist der folgende.

Multipliziert man die Gleichung 4) mit $\frac{2}{\pi}\cos nx\,dx$ und integriert alsdann von 0 bis π, so werden alle Glieder auf der rechten Seite null, mit Ausnahme des mit A_n multiplizierten, welches den Wert erhält:

$$6)\qquad \frac{2}{\pi} A_n \int_0^\pi \cos nx \cos nx\,dx = A_n.$$

Es ist demnach

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = A_n.$$

Diese Gleichung besteht auch für $n = 0$, d. h. es ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = A_0.$$

Multipliziert man ebenso die Gleichung 5) mit $\frac{2}{\pi}\sin nx\,dx$ und integriert alsdann von 0 bis π, so werden alle Glieder wiederum gleich null mit Ausnahme des einen, welches den Wert erhält

$$\frac{2}{\pi} B_n \int_0^\pi \sin nx \sin nx\,dx = B_n.$$

Es ist also:

$$7)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = B_n.$$

504. Die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ haben die besondere Eigenschaft, dass die erste eine *paare*, die andere eine *unpaare* sein muss; sie bilden also nur einen besonderen Fall von periodischen Funktionen. Bezeichnet man allgemein mit $F(x)$ eine Funktion, von der bekannt ist, dass sie sich in eine konvergente trigonometrische Reihe entwickeln lässt, so hat diese Entwickelung die Form:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots + A_n\cos nx + \cdots \\ + B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + \cdots + B_n\sin nx + \cdots \end{aligned}\right.$$

Dabei ist zu bemerken, dass diese Reihe für $x = 0$ bis $x = 2\pi$ verschiedene Werte darstellt und zwar im Intervalle von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$ denselben Wert wie im Intervalle von $x = -\pi$ bis $x = 0$, dass sie also eine periodische Funktion ist mit der Periode 2π; ferner, dass sie für $x = 0$ denselben Wert annimmt, wie für $x = 2\pi$, so dass wir also wiederum, wenn völlige Übereinstimmung bestehen soll, von der Funktion $F(x)$ voraussetzen müssen, dass $F(0) = F(2\pi)$ und allgemein $F(x \pm 2\pi) = F(x)$ ist.

Gehen wir nun zur Bestimmung der Koeffizienten in derselben Weise vor, so erkennen wir wiederum, dass die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$$

gleich 1 oder gleich null sind, je nachdem die ganzen Zahlen m und n gleich oder ungleich sind. Ist $n = m = 0$, so wird das erste Integral gleich 2 und das andere null. Auch sieht man, dass das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx$$

immer null ist. Multipliziert man also die Gleichung 8) mit $\frac{1}{\pi}\cos nx\, dx$ und ebenso mit $\frac{1}{\pi}\sin nx\, dx$, und integriert man dann jedesmal von $x = 0$ bis $x = 2\pi$, so folgt:

$$9) \qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos nx\, dx,$$

$$10) \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin nx\, dx,$$

und die Gleichung 9) gilt auch für $n = 0$; sie ergiebt in diesem Falle den doppelten Wert A_0 des von x unabhängigen Koeffizienten in der Entwickelung der Funktion $F(x)$.

Anmerkung. Man kann auch in die Reihenentwickelung anstatt der trigonometrischen Funktionen die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument einführen. Alsdann kann die Gleichung 8) geschrieben werden:

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{nxi}, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

wobei A_n eine komplexe Zahl ist. Multipliziert man dann beide Seiten mit $\frac{1}{2\pi}e^{-mxi}$ und integriert von 0 bis 2π, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,e^{-mxi}\,dx=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(n-m)xi}\,dx.$$

Das Integral $\int_0^{2\pi} e^{(n-m)xi}\,dx$ ist gleich 2π, für $n=m$, aber gleich null, sobald m und n verschieden sind; folglich ist

$$A_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,e^{-mxi}\,dx,$$

und in dieser Gleichung kann m alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Die einfache Methode, wie hier die Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe bestimmt sind, durch welche eine Funktion $F(x)$ definiert ist, beruht auf zweierlei Voraussetzungen. Wir nahmen an, erstlich, dass von der Funktion $F(x)$ bekannt ist, dass sie sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln lässt, zweitens, dass diese trigonometrische Reihe die gliedweise Integration gestattet, also eine Reihe ist, welche „im allgemeinen" gleichmässig (§ 473, Zusatz) konvergiert. Nur unter diesen Beschränkungen ist der Satz bewiesen, dem man auch die Form geben kann:

In jeder trigonometrischen Reihe

$$\frac{1}{2}\mathrm{A}_0+\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}=\infty}\mathrm{A_k}\cos\mathrm{kx}+\mathrm{B_k}\sin\mathrm{kx},$$

welche im Intervalle von 0 *bis* 2π *eine integrierbare Funktion* F(x) *definiert und zugleich eine „im allgemeinen" gleichmässig konvergente Reihe ist, haben die Koeffizienten* $\mathrm{A_k}$ *und* $\mathrm{B_k}$ *die Werte:*

$$\mathrm{A_k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{F(x)}\cos\mathrm{kx\,dx},\quad \mathrm{B_k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{F(x)}\sin\mathrm{kx\,dx}.$$

Zumal die zweite Voraussetzung beeinträchtigt die allgemeine Anwendbarkeit dieses Satzes, und das eigentliche Problem, um welches es sich bei der Einführung der trigonometrischen Reihe handelt, ob nämlich jede im Intervalle von 0 bis 2π irgendwie definierte Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, wird hiermit keineswegs beantwortet. Ein kurzer Abriss der Theorie dieser Reihen ist daher am Schlusse dieses Buches gegeben.

Bemerkungen über die Transformation der Variabelen in bestimmten Integralen.

505. Es sei das bestimmte Integral $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ gegeben. Will man für x eine andere Variabele t einführen, so dass

$$x = \varphi(t),$$

und setzt man:

$$F(t) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t),$$

so wird (§ 416):

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{t_0}^{t} F(t)\,dt,$$

wenn man mit t_0 den Wert bezeichnet, welcher zum Werte $x = x_0$ gehört. Wenn man nun weiter $x = X$ einführt und man nennt T den Wert, welcher zu $x = X$ gehört, so folgt:

$$1) \qquad \int\limits_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} F(t)\,dt.$$

Diese Gleichung erfordert aber einige Vorbedingungen, wenn sie nicht zu falschen Resultaten führen soll. Wenn nämlich die Funktion $\varphi(t)$ nicht derart eindeutig ist, dass jedem Wert von t nur ein Wert von x entspricht, so kann es eintreten, dass man, um eine stetige Reihe von Werten x zu erhalten, die von x_0 bis X gehen, nach einander verschiedene Bestimmungen der Funktion $\varphi(t)$ anwenden muss. In diesem Falle muss man also einsehen, wie die verschiedenen Transformationen der Variabelen nach einander auszuführen sind.

506. Beispiel. Ein sehr einfaches Beispiel wird das Gesagte deutlich machen. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}},$$

wobei X positiv ist. Wir haben im § 446 gesehen, dass dasselbe auf ein elliptisches Integral zurückgeführt werden kann vermittelst der Substitution:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}},$$

woraus folgt:

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1 \pm \sqrt{1-t^3}), \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \pm 2t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^3},$$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \pm \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Will man, dass x und t zugleich null werden, so hat man für sehr kleine Werte von t

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1-\sqrt{1-t^3})$$

zu wählen. Wächst hier die Variabele t von 0 bis 1, so wächst auch x von 0 bis 1. Soll aber die Variabele x Werte annehmen, die grösser sind als 1, so muss man

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1+\sqrt{1-t^3})$$

setzen. Lässt man hier t von 1 bis 0 variieren, so wächst x von 1 bis ∞.

Es sei nun T der Wert von t, welcher zu $x = X$ gehört. Ist $X < 1$, so ist auch T kleiner als 1, und man erhält:

$$1) \qquad \int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Ist aber $X > 1$, so wird

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_1^T \frac{dt}{-\sqrt{t-t^4}}.$$

Man kann die Grenzen des zweiten Integrales vertauschen, wenn man das Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt; es wird also dieses Integral gleich

$$\int_T^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

und also erhält man für den Fall $X > 1$:

$$2)\quad \int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Diese Gleichung ist, wie man sieht, sehr verschieden von der Gleichung 1), die sich auf den Fall $X < 1$ bezieht. Für $X = 1$ geben beide Gleichungen übereinstimmend:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

507. Man kann jedes bestimmte Integral durch eine Substitution in ein anderes verwandeln, in welchem die Grenzen zwei willkürlich gewählte Grössen sind.

Ist das vorgelegte Integral $\int_{x_0}^X f(x)\,dx$, wobei x_0 und X endliche Grössen sind, und setzt man

$$\frac{x-x_0}{X-x_0} = \frac{t-t_0}{T-t_0}, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{X-x_0} = \frac{dt}{T-t_0},$$

wobei t eine neue Variabele, t_0 und T irgend welche endliche Grössen bedeuten, so wird $t = t_0$ für $x = x_0$ und $t = T$ für $x = X$. Folglich ergiebt diese Substitution ein Resultat von der Form:

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx = \int_{t_0}^T F(t)\,dt.$$

Wendet man die Substitution an

$$\frac{x-x_0}{X-x_0} = \frac{t-t_0}{t-t_0+1},$$

so wird $t = t_0$ für $x = x_0$ und $t = +\infty$ für $x = X$; also wird

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx = \int_{t_0}^\infty F(t)\,dt,$$

und nimmt man $t_0 = 0$, so ist

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} F(t)\,dt;$$

es ist einleuchtend, dass die umgekehrte Substitution das Integral $\int_0^{\infty} F(t)\,dt$ auf die Form $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ bringt.

508. Wir haben gesehen, dass ein unbestimmtes Integral in der Weise eines bestimmten dargestellt werden kann, indem man die untere Grenze, mit welcher die Integration beginnen soll, willkürlich fixiert. Auf Grund der vorigen Überlegung kann man nun noch hinzufügen, dass ein unbestimmtes Integral auf unendlich viele Weisen durch ein bestimmtes ausgedrückt werden kann, dessen Grenzen sich ganz willkürlich fixieren lassen. Denn ist das unbestimmte Integral $f(x)\,dx$, so ist:

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet. Bezeichnet man die Variabele unter dem Integrale mit α, so ist

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha + C;$$

$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha$ ist das bestimmte Integral des Differentiales $f(\alpha)\,d\alpha$, gebildet zwischen den Grenzen x_0 und x. Auf dieses kann man nun die Transformationen anwenden, von denen im vorigen Paragraphen gehandelt wurde.

Betrachten wir z. B. das unbestimmte Integral

$$\int x^{n-1} e^{-x}\,dx,$$

wobei wir den Exponenten n als positiv annehmen. Dieses Integral ist gleich

$$\int_0^{x} x^{n-1} e^{-x}\,dx + C \quad \text{oder} \quad \int_0^{x} \alpha^{n-1} e^{-\alpha}\,d\alpha + C.$$

Setzt man

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x\,dt,$$

so geht dasselbe über in

$$\int_0^1 x^n t^{n-1} e^{-tx} dt + C,$$

oder wenn man den Faktor x^n aus dem Integralzeichen heraushebt, in

$$x^n \int_0^1 t^{n-1} e^{-tx} dt + C.$$

Das elliptische Integral erster Gattung

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}}$$

wird, wenn man wiederum

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x\,dt$$

setzt, gleich

$$x \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}.$$

Über die vielfachen Werte, welche Integrale zwischen zwei bestimmten Grenzen annehmen können.

509. Im § 460 wurde bewiesen, dass die Gleichung besteht:

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^X f(x)\,dx,$$

welches auch die Werte der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ sein mögen, solange nur die Funktion $f(x)$ eindeutig bleibt, während x zwischen denselben Grenzen variiert. Diese Gleichung drückt also aus, dass das Integral

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx$$

denselben Wert hat, in welcher Weise man auch die reelle Grösse x variieren lässt von dem Anfangswerte x_0 zum Endwerte X.

Dies setzt aber wesentlich voraus, dass die Funktion $f(x)$ immer denselben Wert erhält, wenn x denselben Wert annimmt und ferner, dass die Variabele x in stetiger Weise von

x_0 zum Werte X übergeht. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, und x geht auf zwei verschiedenen Wegen von x_0 nach X über, so kann auch das Integral ganz verschiedene Werte erhalten.

Hieraus folgen z. B. die vielfachen Werte der Ausdrücke

$$\arcsin X, \quad \operatorname{arctang} X, \quad \operatorname{arcsec} X,$$

die ja nichts anderes sind, als die Werte der Integrale

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^X \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_1^X \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Diese Integrale hängen nämlich nicht nur von dem Werte X ab, sondern auch von der Art, wie x von der unteren zu der oberen Grenze variiert. Dieser Gegenstand erfordert einige Erläuterungen.

510. Wir betrachten zuerst das Integral

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dessen obere Grenze X eine beliebige Grösse zwischen -1 und $+1$ bedeutet.

Lässt man zunächst x in einerlei Sinne von 0 bis X variieren, so kann die Quadratwurzel $\sqrt{1-x^2}$ beim Ausgang willkürlich entweder mit dem Zeichen $+$ oder dem Zeichen $-$ genommen werden. Da aber diese Wurzel innerhalb des Intervalles von 0 bis X nicht null wird, so erfordert die Stetigkeit, dass man ihr während der Integration immer dasselbe Zeichen beilegt. Wir wählen das positive Zeichen und nehmen, um die Begriffe zu fixieren, an, dass X positiv ist. Wir bezeichnen ferner mit α den Wert des auf diese Weise bestimmten Integrales und schreiben:

$$\left[\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \alpha.$$

Die Klammern, welche wir hierbei benutzen, sollen anzeigen, dass x beim Übergang von der Grenze 0 zur Grenze X beständig in demselben Sinne, also nur wachsend, sich ändert.

Es sei K der Wert, den α annimmt, wenn $X = +1$ wird; es ist also

$$\left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = K.$$

Nachdem die Variabele x von 0 bis zu der oberen Grenze $+1$ gewachsen ist, lassen wir sie wieder von $+1$ zu 0 abnehmen und bilden zwischen diesen Grenzen das Integral des Differentiales $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, nämlich $\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Legt man jetzt der Quadratwurzel $\sqrt{1-x^2}$ das positive Zeichen bei, so bekommt dieses Integral den Wert $-K$, denn seine Elemente sind den Elementen des vorigen gleich und entgegengesetzt. Da aber der Ausdruck $\sqrt{1-x^2}$ für $x = +1$ null geworden war, so ist es angezeigt, sein Zeichen zu ändern (eine nähere Begründung dieses Verfahrens ergiebt sich aus der Betrachtung der Funktion bei komplexen Werten von x), und also wird:

$$\left[\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = K.$$

Die Variabele x ist dann wiederum gleich null geworden. Nimmt man nun an, dass sie noch weiter abnimmt bis zu der unteren Grenze -1, so muss die Wurzel ihr negatives Zeichen behalten, weil sie nicht null geworden ist, und es wird auch

$$\left[\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = K.$$

Für $x = -1$ wird $\sqrt{1-x^2}$ aufs neue null; legt man ihr folglich das positive Zeichen bei, wenn x von -1 zu 0 zurückkehrt, so wird auch

$$\left[\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = K\right],$$

und wenn man nun aufs neue x von 0 bis X wachsen lässt, so kommt man wieder zum Werte α.

Hieraus folgt also: Lässt man beim Übergange von 0 zu X erst x von 0 bis $+1$ wachsen, sodann von $+1$ zu -1 abnehmen, und endlich wiederum von -1 bis X wachsen, so bekommt das Integral

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

den Wert $4K+\alpha$.

Lässt man dagegen erst x von 0 bis -1 abnehmen, alsdann von -1 bis $+1$ wachsen, sodann von $+1$ zu 0 abnehmen und endlich von 0 bis X wachsen, so erhält man, wie leicht zu sehen, indem man wiederum die Quadratwurzel mit dem positiven Zeichen beginnen und beim Durchgang durch den Wert 0 ihr Zeichen ändern lässt, für dieses Integral den Wert $-4K+\alpha$. In beiden Fällen hat die Wurzel für die obere Grenze X den Wert $+\sqrt{1-X^2}$.

Also hat das betrachtete Integral den Wert

$$\pm 4nK+\alpha,$$

wobei n eine ganze Zahl bedeutet, wenn die Variabele x bei ihrer Änderung von 0 zu X jede der Grenzen $+1$ und -1 n mal erreicht hat.

Wir nehmen nun an, dass die Variabele x, nachdem sie n mal die Grenzen $+1$ und -1 erreicht hat, wieder den Wert 0 angenommen hat. Wir lassen sie alsdann von 0 bis $+1$ wachsen, das Integral wird dabei gleich $+K$; wir lassen sie ferner von $+1$ zu 0 abnehmen, und der entsprechende Integralwert ist wieder gleich $+K$; denn dx und $\sqrt{1-x^2}$ sind jetzt negativ. Lässt man nun schliesslich x von 0 bis X zunehmen, so behält die Quadratwurzel, da sie nicht null geworden ist, den Wert $-$; folglich ist das Integral in Bezug auf dieses neue Intervall gleich $-\alpha$.

Wenn also die Variabele x beim Übergang von 0 zu X die eine der Grenzen $+1$ und -1 einmal mehr als die andere erreicht, so wird der Wert des Integrales

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\pm 4n \pm 2)\,K - \alpha,$$

und wenn x den oberen Grenzwert X angenommen hat, so ist der Wert der Quadratwurzel gleich $-\sqrt{1-X^2}$.

Wir haben X als positiv angenommen; doch sieht man leicht, dass

$$\int_0^{-X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^{X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist. Aus unserer Untersuchung folgt: Setzt man

$$u = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so sind x und $\sqrt{1-x^2}$ eindeutig bestimmte Funktionen der Variabelen u ($\sqrt{1-x^2}$, indem man es positiv nimmt, wenn die Variabele x im selben Sinne von 0 bis x sich geändert hat); diese Funktionen haben die Periode $4K$, welche nichts anderes als die Kreisperipherie 2π ist. Wir haben hier nur wohlbekannte Resultate aufs neue gefunden. Doch war es wichtig, zu zeigen, wie dieselben aus der Betrachtung des Integrales hervorgehen.

511. Das Integral $\int_1^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ kommt durch die Substitution $x = \frac{1}{z}$ auf das vorige zurück; wir brauchen uns daher nicht mit demselben zu beschäftigen. Aber wir müssen noch das Integral

$$\int_0^{x} \frac{dx}{1+x^2}$$

betrachten, dessen Differential rational ist. Wir setzen

$$\left[\int_0^{X} \frac{dx}{1+x^2}\right] = \alpha.$$

Die Klammern sollen wie vorhin anzeigen, dass x immer in demselben Sinne von 0 bis X variiert; auch sei

$$\left[\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right] = K.$$

Um von $x = 0$ zu $x = X$ überzugehen, kann man x von 0 bis $+\infty$ wachsen lassen, alsdann das Zeichen dieser Variabelen ändern, sie aufs neue von $-\infty$ bis 0 wachsen lassen, und schliesslich sie im selben Sinne von 0 bis X erweitern. Oder man lässt x abnehmen von 0 bis $-\infty$, sodann von $+\infty$ bis 0, und lässt es endlich von 0 bis X im selben Sinne variieren.

Lässt man x von 0 bis $+\infty$ wachsen, ferner von $-\infty$ bis 0, so wird, da

$$\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}\right] = K$$

ist, das Integral

$$\int_{0}^{X} \frac{dx}{1+x^2} = 2K + \alpha.$$

Lässt man dagegen erst x von 0 bis $-\infty$, sodann von $+\infty$ bis 0 abnehmen, so wird

$$\left[\int_{0}^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right] = \left[\int_{+\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}\right] = -K,$$

und folglich wird der Wert unseres Integrales gleich $-2K + \alpha$.

Hieraus folgt, dass dieses Integral den Wert

$$\pm 2nK + \alpha$$

hat, wenn x von 0 bis X so variiert, dass es n mal die beiden Unendlichkeitswerte annimmt. Setzt man

$$u = \int_{0}^{x} \frac{dx}{1+x^2},$$

so ist x eine eindeutig bestimmte Funktion von u mit der Periode $2K = \pi$.

Die beiden Perioden der elliptischen Funktionen.

512. Die vorstehenden Betrachtungen lassen eine fundamentale Eigenschaft der elliptischen Funktionen erkennen.

Wir haben im § 455 *elliptisches Integral erster Gattung* das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

genannt, in welchem $k^2 < 1$ ist. Das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

bleibt reell, solange die Variabele x zwischen -1 und $+1$ enthalten ist. Wir integrieren dieses Differential zwischen den Grenzen 0 und $+1$ und nehmen dabei an, dass x beständig von der einen Grenze zur andern wächst und dass die Quadratwurzeln dabei das positive Zeichen haben. Den Wert, welchen das Integral dabei erhält, bezeichnen wir mit K; Legendre hat dasselbe das *vollständige Integral* (intégrale complète) genannt. Es ist

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Ist x enthalten zwischen 1 und $\frac{1}{k}$, oder zwischen -1 und $-\frac{1}{k}$, so ist das Differential $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ imaginär und gleich dem Produkte von

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

mit i. Integriert man dieses letztere Differential, indem man x von 1 bis $\frac{1}{k}$ wachsen lässt, und nennt man das auf diese Weise gebildete Integral K', so ist

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Man kann dasselbe leicht auf die Grenzen 0 und 1 bringen, indem man

$$k'^2 = 1 - k^2 \quad \text{oder} \quad k^2 + k'^2 = 1$$

setzt und die Substitution anwendet:

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2t^2}, \qquad dx = -\frac{k'^2\,t\,dt}{k\sqrt{1-k'^2t^2}}.$$

Die Grenzen der Integration nach t werden nun 1 und 0; vertauscht man dieselben, indem man zugleich das Vorzeichen des Differentiales ändert, und schreibt man schliesslich wiederum x an Stelle von t, so folgt:

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2 x^2}}.$$

Die Moduln k und k' hat Legendre *komplementäre* genannt; desgleichen sind die beiden elliptischen Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2 x^2}}, \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2 x^2}}$$

mit den Moduln k und k' *komplementäre Funktionen* von ihm genannt worden; K und K' sind also vollständige, komplementäre elliptische Integrale.

513. Nach diesen Festsetzungen bilden wir, übereinstimmend mit den Bezeichnungen im § 438:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2 x^2}} = u,$$

$$x = \sin\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\operatorname{am} u.$$

Es sei X ein Wert von x zwischen -1 und $+1$, und α der entsprechende Wert von u, wenn man so integriert, dass x in demselben Sinne sich von 0 bis X ändert, und dass dabei die beiden Wurzeln $\sqrt{1-x^2}$ und $\sqrt{1-k^2x^2}$ positiv genommen werden. Dann ist

$$X = \sin\operatorname{am}\alpha, \quad \sqrt{1-X^2} = \cos\operatorname{am}\alpha, \quad \sqrt{1-k^2X^2} = \Delta\operatorname{am}\alpha.$$

Wir nehmen nun $X > 0$ an und integrieren das Differential so, dass wir x von 0 bis 1 wachsen, alsdann von 1 bis 0 abnehmen und schliesslich aufs neue von 0 bis $-X$ abnehmen lassen. Im ersten Intervalle wird das Integral gleich K, im zweiten wird die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$, nachdem sie null geworden ist, negativ und das Integral hat ebenfalls den Wert K. Im letzten Intervalle endlich bleibt $\sqrt{1-x^2}$ negativ und das entsprechende Integral

$$\int_0^{-X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

ist gleich α. Demnach wird, indem man noch beachtet, dass $\sqrt{1-k^2x^2}$ positiv geblieben ist:

$$\text{2)} \qquad \begin{cases} -X = \sin\operatorname{am}(2K+\alpha), \\ -\sqrt{1-X^2} = \cos\operatorname{am}(2K+\alpha), \\ \sqrt{1-k^2X^2} = \Delta\operatorname{am}(2K+\alpha). \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass man dieselben Formeln erhält, indem man $X < 0$ annimmt. Vergleicht man sie mit den Gleichungen 1) und schreibt man u an Stelle von α, so ist:

$$\text{3)} \qquad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(2K+u) = -\sin\operatorname{am} u, \\ \cos\operatorname{am}(2K+u) = -\cos\operatorname{am} u, \\ \Delta\operatorname{am}(2K+u) = \Delta\operatorname{am} u. \end{cases}$$

Also ändern die Funktionen $\sin\operatorname{am} u$ und $\cos\operatorname{am} u$ nur ihr Zeichen, wenn man der Variabelen den konstanten Wert $2K$ hinzufügt. Daraus folgt, dass diese Funktionen sich nicht ändern werden, wenn man diese Addition noch einmal wiederholt. Es wird demnach:

$$\text{4)} \qquad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(4K+u) = \sin\operatorname{am} u, \\ \cos\operatorname{am}(4K+u) = \cos\operatorname{am} u, \end{cases}$$

woraus hervorgeht, dass diese beiden Funktionen die Periode $4K$ besitzen; die letzte der Gleichungen 3) besagt, dass $\Delta\operatorname{am} u$ die Periode $2K$ hat.

514. Der Wert X sei immer noch positiv und kleiner als 1. Wir nehmen nun an, dass man beim Übergang von 0 zu X die Variabele x erst von 0 bis $\frac{1}{k}$ wachsen lässt und dass man sie alsdann wiederum abnehmen lässt von $\frac{1}{k}$ bis X. Die Wurzeln $\sqrt{1-x^2}$ und $\sqrt{1-k^2x^2}$ sind im Anfangspunkte mit dem positiven Zeichen genommen. Von 0 bis 1 ist das Integral des Differentiales

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

gleich K. Von 1 bis $\frac{1}{k}$ ist dieses Differential imaginär und hat den Wert:

$$i\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Die Wurzel $\sqrt{1-k^2x^2}$ muss dabei immer noch mit dem positiven Zeichen genommen werden, aber das Zeichen von $\sqrt{x^2-1}$ ist unbestimmt. Es steht uns frei, das Zeichen $+$ zu nehmen, auf Grund der Zweideutigkeit des Zeichens von $i=\sqrt{-1}$. Von 1 bis $\frac{1}{k}$ wird also das Integral des vorstehenden Differentiales gleich $K'i$ (§ 512). Nimmt nun x wiederum ab von $\frac{1}{k}$ bis 1, so muss die Wurzel $\sqrt{1-k^2x^2}$, welche null geworden war, mit dem $-$ Zeichen genommen werden, und das Integral in Bezug auf dieses Intervall hat noch den Wert $K'i$. Man muss nun x von 1 bis X abnehmen lassen, alsdann wird das Differential wieder reell, die Wurzel $\sqrt{1-k^2x^2}$ bleibt negativ, dagegen ergiebt sich keine Bestimmung für das Vorzeichen von $\sqrt{1-x^2}$, da diese Wurzel von einem imaginären zu einem reellen Werte übergeht. Ich setze also das zweideutige Zeichen $\pm$ vor diese Wurzel, und also wird das Integral in diesem letzten Intervalle, wenn wir die Vorzeichen zur Evidenz bringen:

$$\int_1^X \frac{dx}{(\pm\sqrt{1-x^2})(-\sqrt{1-k^2x^2})}.$$

Da $X<1$ ist, so ist dx negativ, und das vorstehende Integral hat daher, wie man leicht erkennt, den Wert $\pm(K-\alpha)$. Geht also x von 0 bis X auf dem angegebenen Wege, so erhält man ein Integral, dessen Wert

$$K+2iK'\pm(K-\alpha)$$

ist, und es wird also:

$$5)\quad \begin{cases} X = \sin \operatorname{am}[K + 2iK' \pm (K - \alpha)], \\ \pm\sqrt{1 - X^2} = \cos \operatorname{am}[K + 2iK' \pm (K - \alpha)], \\ -\sqrt{1 - k^2 X^2} = \Delta \operatorname{am}[K + 2iK' \pm (K - \alpha)]. \end{cases}$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ kann sowohl durch $+$, als durch $-$ ersetzt werden. Welches Zeichen man auch wählen mag, man gelangt, wie sich gleich zeigen wird, zu dem nämlichen Resultate.

Vergleicht man die Formeln 5) mit den Formeln 1) und ersetzt man dabei zuerst das Zeichen $\pm$ durch $-$, so wird, wenn man u statt α schreibt:

$$6)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(2iK' + u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am}(2iK' + u) = -\cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(2iK' + u) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Ersetzt man u durch $u + 2K$ in der zweiten und durch $u + 2iK'$ in der dritten Gleichung, so wird auf Grund der zweiten Gleichung in 3):

$$7)\quad \begin{cases} \cos \operatorname{am}(2K + 2iK' + u) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(4iK' + u) = \Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen 6) zeigt, dass $\sin \operatorname{am} u$ die Periode $2iK'$ hat; die Gleichungen 7) besagen, dass $\cos \operatorname{am} u$ die Periode $2K + 2iK'$, $\Delta \operatorname{am} u$ die Periode $4iK'$ hat.

Ersetzt man in den Formeln 5) das Zeichen $\pm$ durch $+$, so giebt der Vergleich mit den Gleichungen 1):

$$8)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(2K + 2iK' - u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am}(2K + 2iK' - u) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(2K + 2iK' - u) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Nun erkennt man aber leicht, dass, wenn x in derselben Weise von 0 bis $+X$ und von 0 bis $-X$ variiert, das Integral des Differentiales $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}}$ in beiden Fällen denselben Wert, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, erhält, während die Werte von $\sqrt{1 - x^2}$ und $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ übereinstimmen. Daraus folgt, dass $\sin \operatorname{am} u$ eine unpaare Funktion von u ist, d. h. eine Funktion, welche mit dem Vorzeichen von u auch nur ihr Vorzeichen ändert, dass dagegen $\cos \operatorname{am} u$ und $\Delta \operatorname{am} u$ paare Funktionen sind. Verwandeln wir nun u in $-u$ in den Gleichungen 8) und lassen alsdann die halbe Periode $2K$ fort, indem wir auf den rechten Seiten in den Gleichungen für $\sin \operatorname{am} u$ und $\cos \operatorname{am} u$ das Vorzeichen ändern, so gelangen wir zu den Gleichungen 6), welche also sowohl für positive wie für negative Werte von u gelten. Zu denselben Resultaten wäre man auch ausgehend von der Annahme $X < 0$ gelangt.

Man erkennt aus dieser Untersuchung, dass die elliptischen Funktionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ die besondere Eigenschaft besitzen, doppelt periodisch zu sein. Die erste Funktion hat die Perioden $4K$ und $2iK'$, die zweite die Perioden $4K$ und $2K + 2iK'$, endlich die dritte die beiden Perioden $2K$ und $4iK'$. Um diese Eigenschaft festzustellen, haben wir nur die reellen Werte der ersten Funktion $\sin \operatorname{am} u$ betrachtet, doch können wir diese Untersuchungen nicht weiter verfolgen, ohne die Grenzen, welche wir uns gesteckt haben, zu überschreiten.

Drittes Kapitel.

Theorie der Eulerschen Integrale.

Die Eulerschen Integrale erster und zweiter Gattung.

515. Mit dem Namen „Eulersche Integrale“ hat Legendre die beiden bestimmten Integrale:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

bezeichnet, welche zuerst von Euler untersucht und seitdem von vielen Mathematikern weiter erforscht worden sind. Die Theorie dieser Integrale ist von grundlegender Bedeutung, ihre Entwickelung soll uns in diesem Kapitel beschäftigen, das eine Ergänzung des vorigen bilden wird.

Das erste Integral hängt von zwei Parametern p und q ab; wir werden es mit $B(p, q)$ bezeichnen. Das zweite hängt nur von dem einen Parameter p ab; wir werden es mit Legendre durch das Symbol $\Gamma(p)$ darstellen. Es ist also

$$1)\qquad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

$$2)\qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx;$$

e bezeichnet hier wie gewöhnlich die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Die Funktionen $B(p, q)$ heissen die Eulerschen Integrale erster Gattung, die Funktionen $\Gamma(p)$ die Integrale zweiter Gattung. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Funktionen endlich bleiben, ist die, dass die Parameter p und q positiv sind, oder dass ihre reellen Bestandteile positiv sind, falls die Parameter komplexe Werte haben. In diesem Falle hat man $e^{pl(x)}$ an Stelle von x^p zu setzen, und analog bei den anderen Faktoren.

Den Integralen B lässt sich noch eine andere Form geben. Setzt man

$$x=\frac{y}{1+y}, \quad 1-x=\frac{1}{1+y}, \quad dx=\frac{dy}{(1+y)^2}$$

in die Gleichung 1), so muss das Integral in Bezug auf y zwischen 0 und ∞ genommen werden; schreibt man schliesslich wieder x statt y, so wird

$$3) \qquad B(p,q)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx,$$

oder auch

$$B(p,q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Ersetzt man in dem zweiten Integrale x durch $\frac{1}{x}$, dx durch $-\frac{dx}{x^2}$, so werden die Grenzen 1 und 0. Indem man das Vorzeichen des Integrales ändert, kann man dieselben vertauschen, und man erhält

$$B(p,q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx+\int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx,$$

oder

$$4) \qquad B(p,q)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Funktion $B(p,q)$ symmetrisch in Bezug auf die beiden Grössen p und q ist, so dass also

$$B(p,q)=B(q,p)$$

ist. Diese Eigenschaft lässt sich übrigens auch aus der Gleichung 1) erkennen; denn wenn man daselbst x in $1-x$ verwandelt, so wird direkt $B(p,q)$ in $B(q,p)$ transformiert.

Reduktion der Integrale erster Gattung auf die der zweiten.

516. Wir wollen nun zeigen, dass sich die Funktionen $B(p,q)$ durch die Funktionen $\Gamma(p)$ ausdrücken lassen, so dass man sich bloss mit diesen letzteren zu beschäftigen hat.

Bezeichnet man mit m eine positive Konstante und setzt in der Gleichung 2) des § 515 $x = mx'$, so wird

$$1)\qquad \Gamma(p) = m^p \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1}\, dx',$$

oder:

$$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1}\, dx'.$$

Diese Gleichung, von welcher man in der Analysis öfters Gebrauch zu machen hat, dient uns zur Lösung der Aufgabe, die wir im Auge haben. Denn nach dieser Formel ist

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1}\, dx',$$

und also lässt sich die Gleichung 3) des § 515 folgendermassen schreiben:

$$B(p,q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{p-1}\, dx \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1}\, dx'.$$

Die Reihenfolge der Integrationen kann vertauscht werden, und also wird

$$B(p,q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{p+q-1}\, dx' \int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1}\, dx.$$

Nach Gleichung 1) ist aber $\int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1}\, dx$ gleich $\frac{1}{x'^p}\Gamma(p)$; demnach wird

$$2)\qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1}\, dx' = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Nunmehr gehen wir zur Untersuchung der wesentlichsten Eigenschaften der Funktionen zweiter Gattung über.

Erste Eigenschaft der Funktionen Γ.

517. Integriert man das Differential $x^{p-1}.e^{-x}dx$ teilweise, so folgt:

$$\int x^{p-1}e^{-x}dx = -x^{p-1}e^{-x} + (p-1)\int e^{-x}x^{p-2}dx.$$

Ist $p > 1$, so verschwindet das erste Glied der rechten Seite an den Grenzen 0 und ∞, und man erhält

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = (p-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{p-2}dx,$$

d. h.

1) $$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Diese Gleichung drückt die erste Eigenschaft der Funktionen Γ aus. Man folgert aus derselben unmittelbar, indem man mit m eine ganze Zahl kleiner als p bezeichnet:

2) $$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots(p-m)\Gamma(p-m),$$

und hieraus folgt: Ist der Wert der Funktion Γ bekannt für alle Werte des *Argumentes* p zwischen 0 und 1, oder allgemeiner zwischen zwei ganzen auf einander folgenden Zahlen, so ist diese Funktion auch bekannt für alle anderen reellen positiven Werte des Argumentes.

Ist p eine ganze Zahl und setzt man $m = p - 1$ in der Gleichung 2), so folgt:

$$\Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1)\Gamma(1).$$

Da aber das Integral $\int e^{-x}dx$ gleich $-e^{-x} + C$ ist, so wird:

3) $$\int_0^\infty e^{-x}dx = \Gamma(1) = 1,$$

also

4) $$\Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1) = (p-1)!$$

Ist also p eine ganze Zahl grösser als 1, so reduziert sich $\Gamma(p)$ auf das Produkt der $p-1$ ersten ganzen Zahlen, d. h. auf $p-1$ Fakultät, ein Resultat, das schon im § 493 erhalten wurde.

Zweite Eigenschaft der Funktionen Γ.

518. Die Eigenschaft, welche wir nun nachweisen wollen, gestattet das Zahlenintervall der Einheit, welches nach dem vorigen Satze für die Berechnung der Funktion Γ ausreicht, auf das Intervall $\frac{1}{2}$ zu reduzieren. Sie liefert z. B. die Werte der Funktion, welche zu den Werten $\frac{1}{2}$ bis 1 des Argumentes gehören, sobald man die Funktion für die Werte zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ kennt.

Setzt man in der Gleichung 2) des § 516 $q = 1 - p$, indem man hier p als eine Grösse zwischen 0 und 1 annimmt, so wird, weil $\Gamma(1) = 1$ ist:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = B(p, 1-p),$$

und also nach der Gleichung 3) des § 515:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}.$$

Wir wissen aber (§ 489), dass dies Integral den Wert $\frac{\pi}{\sin p\pi}$ hat; folglich ist

$$1)\qquad \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Diese Gleichung stellt die zweite Eigenschaft der Funktion Γ dar. Nimmt man insbesondere $p = \frac{1}{2}$ an, so liefert sie

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

also

$$2)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nicht von der im § 497 erhaltenen. Denn setzt man in dem Integrale x^2 an Stelle von x, so wird

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Dritte Eigenschaft der Funktionen Γ.

519. Nimmt man in der Gleichung 1) des § 515 $q=p$ an, so wird

$$1)\qquad B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx.$$

Man sieht, dass die zu integrierende Funktion dieselben Werte bekommt, wenn x die Werte $\frac{1}{2}+h$ und $\frac{1}{2}-h$ erhält; hieraus folgt, dass man das Integral von 0 bis $\frac{1}{2}$ bilden kann, wenn man den Wert desselben verdoppelt, so dass also

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx$$

ist. Setzt man nun $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$, $dx=-\frac{1}{4}\frac{dy}{\sqrt{y}}$, so werden die Grenzen des Integrales in Bezug auf y 1 und 0; vertauscht man dieselben, indem man das Vorzeichen ändert, so wird

$$B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{p-1}dy,$$

d. h.

$$2)\qquad B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right).$$

Ersetzt man B durch seine Werte in Γ nach der Gleichung 2) des § 516 und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ durch den Wert $\sqrt{\pi}$, so folgt:

$$3)\qquad \Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p).$$

Diese Gleichung drückt die dritte Eigenschaft der Funktionen Γ aus; sie ist in einer anderen viel allgemeineren enthalten, welche wir später entwickeln werden.

Darstellung der Funktion $\log \Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral.

520. Differentiiert man die Gleichung

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1}\, dy$$

und bezeichnet man mit $\Gamma'(x)$ die Ableitung von $\Gamma(x)$, so folgt

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1}\, l(y)\, dy.$$

Die Gleichung 1) des § 516 ergiebt, wenn man $p = 1$ setzt:

$$\frac{1}{y} = \int_0^\infty e^{-yz}\, dz,$$

und wenn man diese Gleichung mit dy multipliziert und alsdann zwischen den Grenzen 1 und y integriert, so wird, wie wir schon im § 494 sahen:

$$l(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-yz}}{z}\, dz.$$

Führt man diesen Wert von $l(y)$ in den obigen Ausdruck für $\Gamma'(x)$ ein, so erhält man:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1}\, dy \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-yz}}{z}\, dz.$$

Man kann die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und schreiben:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1}\, dy - \int_0^\infty e^{-(1+z)y} y^{x-1}\, dy \right].$$

Das erste der in der Klammer enthaltenen Integrale ist $\Gamma(x)$; das zweite hat den Wert (§ 516) $\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x}$; also ist

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right]\frac{dz}{z},$$

oder, indem man mit $\Gamma(x)$ dividiert:

$$1)\qquad \frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty [e^{-z} - (1+z)^{-x}]\,\frac{dz}{z}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dx und integriert sie alsdann zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt, weil $l\Gamma(1) = l(1) = 0$ ist:

$$2)\quad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)\,e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{l(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

Diesen Ausdruck für $l\Gamma(x)$ kann man folgendermassen vereinfachen. Setzt man $x = 2$, so wird, da $l\Gamma(2) = l(1) = 0$ ist:

$$3)\qquad 0 = \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{z(1+z)^{-2}}{l(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

Multipliziert man nun diese Gleichung mit $x-1$ und subtrahiert sie alsdann von der Gleichung 3), so folgt:

$$4)\quad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{z}\right]\frac{dz}{l(1+z)}.$$

Setzt man hier $l(1+z) = y$, $z = e^y - 1$, so ist das Integral nach y ebenfalls zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu bilden, und man erhält schliesslich

$$5)\qquad l\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)\,e^{-y} - \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{1 - e^{-y}}\right]\frac{dy}{y}.$$

Auf Grund der im § 493 gemachten Vorbemerkung hat man sich zu überzeugen, dass in der That die bei der Herleitung dieses Integrales angewandten Rechnungsoperationen statthaft sind.

Die Entwickelung der Funktion $l\Gamma(x)$ in eine Reihe.

521. Differentiiert man die zuletzt erhaltene Gleichung nach x, so folgt:

$$1)\qquad \frac{dl\Gamma(x)}{dx}=\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{-y}}{y}-\frac{e^{-yx}}{1-e^{-y}}\right)dy,$$

und durch wiederholte Differentiation:

$$\frac{d^2l\Gamma(x)}{dx^2}=\int\limits_0^\infty\frac{ye^{-xy}}{1-e^{-y}}\,dy.$$

Ersetzen wir hier den Faktor $\frac{1}{1-e^{-y}}$ durch seinen Wert

$$1+e^{-y}+e^{-2y}+e^{-3y}+\cdots+e^{-(n-1)y}+\frac{e^{-ny}}{1-e^{-y}},$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^2l\Gamma(x)}{dx^2}=\int\limits_0^\infty e^{-xy}y\,dy+\int\limits_0^\infty e^{-(x+1)y}y\,dy+\cdots+$$
$$+\int\limits_0^\infty e^{-(x+n-1)y}y\,dy+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(x+n)y}y}{1-e^{-y}}\,dy.$$

Indem man jedes Glied vermittelst der Gleichung 1) des § 516 auswertet, und von dem Restgliede, durch zweckmässige Anwendung des Mittelwertsatzes auf das in die Teile von 0 bis 1 und 1 bis ∞ zerlegte Integral, nachweist, dass es mit beliebig wachsenden Werten von n unendlich klein wird, erhält man die Entwickelung:

$$2)\qquad \frac{d^2l\Gamma(x)}{dx^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\cdots,$$

welche für jeden positiven Wert von x konvergent ist.

Integriert man diese für alle positiven Werte von x gleichmässig konvergente Reihe zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt:

$$3)\qquad \frac{dl\Gamma(x)}{dx}=-C+\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots,$$

und diese Reihe konvergiert wie die, aus deren Integration sie hervorgegangen ist, für alle positiven Werte von x. Die

Konstante $-C$ ist gleich dem Werte, welchen die Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ für $x=1$ annimmt, und also ist zufolge der Gleichung 1):

$$4)\qquad C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-y}}-\frac{1}{y}\right)e^{-y}\,dy.$$

Diese Grösse heisst die *Eulersche Konstante*; wir werden gleich sehen, auf welche Weise man ihren Wert berechnen kann. Integriert man die Gleichung 3) nochmals zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt, weil $l\Gamma(1)=0$ ist:

$$5)\quad \begin{cases} l\Gamma(x)=-C(x-1)+\left(\frac{x-1}{1}-l\frac{x}{1}\right)+\left(\frac{x-1}{2}-l\frac{x+1}{2}\right)+\cdots \\ \qquad\qquad +\left(\frac{x-1}{m}-l\frac{x+m-1}{m}\right)+\cdots \end{cases}$$

Man kann diese Gleichung auch leicht von der Konstante C befreien. Denn setzt man hier $x=2$, so wird:

$$6)\quad 0=-C+\left(\frac{1}{1}-l\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-l\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-l\frac{m+1}{m}\right)+\cdots,$$

und subtrahiert man von der Gleichung 5) diese, nachdem man sie mit $x-1$ multipliziert hat, so erhält man:

$$7)\quad \begin{cases} l\Gamma(x)=\left[(x-1)\,l\frac{2}{1}-l\frac{x}{1}\right]+\left[(x-1)\,l\frac{3}{2}-l\frac{x+1}{2}\right]+\cdots \\ \qquad\qquad +\left[(x-1)\,l\frac{m+1}{m}-l\frac{x+m-1}{m}\right]+\cdots, \end{cases}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$8)\quad l\Gamma(x)=\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(x-1)\,l\left(1+\frac{1}{m}\right)-l\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].$$

Wir wollen mit $l(1+\varepsilon_m)$ die Summe der Glieder bezeichnen, welche in den Gleichungen 7) und 8) auf das m^{te} folgen. Da die Reihe konvergent ist, so wird ε_m für $m=\infty$ zu null; man hat also

$$l\Gamma(x)=\left[(x-1)\,l\frac{2}{1}-l\frac{x}{1}\right]+\cdots+\left[(x-1)\,l\frac{m+1}{m}-l\frac{x+m-1}{m}\right]+l(1+\varepsilon_m),$$

oder, wenn man vom Logarithmus zum Numerus übergeht:

$$\Gamma(x) = \frac{(1.2\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}(1+\varepsilon_m);$$

da der Faktor $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}$ für $m=\infty$ die Grenze 1 hat, so kann man ihn mit $(1+\varepsilon_m)$ vereinigen und also schreiben:

$$9)\quad \Gamma(x) = \frac{(1.2\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

d. h. es ist:

$$10)\quad \Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \frac{(1.2\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}.$$

Wir bemerken noch, dass die Gleichung 6) für die Eulersche Konstante die Darstellung giebt:

$$11)\quad C = \lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-l(m)\right] \quad \text{für } m=\infty.$$

Die Entwickelung der Funktion $l\Gamma(1+x)$ in eine Potenzreihe.

522. Setzt man in der Gleichung 2) des vorigen Paragraphen für x den Wert $x+1$, so erhält man:

$$1)\quad \frac{d^2 l\Gamma(1+x)}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\cdots,$$

und differentiiert man $n-2$-mal, so wird:

$$2)\quad \frac{1}{n!}\frac{d^n l\Gamma(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(x+1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}+\cdots\right].$$

Wir bezeichnen nun allgemein:

$$S_n = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots,$$

so ist für $x=0$:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n l\Gamma(1+x)}{dx^n}\right]_{x=0} = (-1)^n\frac{S_n}{n},$$

falls $n>1$ ist; ferner hat man

$$\left[\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}\right]_{x=0} = -C,\quad l\Gamma(1)=0.$$

Die Formel von Mac-Laurin giebt also für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$:

$$3)\quad l\Gamma(1+x) = -Cx + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} - \cdots;$$

denn man überzeugt sich leicht, dass das Restglied der Entwickelung bei diesen Werten von x nach null konvergiert. Diese Gleichung ist für eine numerische Rechnung noch nicht bequem, weil die Summen S_n nicht rasch abnehmen, aber man kann leicht besser konvergente Reihen bilden. Addiert man zu der erhaltenen die Reihe:

$$0 = -l(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

so folgt:

$$4)\quad l\Gamma(1+x) = -l(1+x) + (1-C)x + \frac{1}{2}(S_2-1)x^2 - \frac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \cdots$$

Die Glieder dieser Reihe nehmen rasch genug ab, man kann aber die Konvergenz noch verstärken. Setzt man für x den Wert $-x$, so wird

$$5)\quad l\Gamma(1-x) = -l(1-x) - (1-C)x + \frac{1}{2}(S_2-1)x^2 + \frac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \cdots$$

Nun ist

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x),\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

multipliziert man diese Gleichungen, so wird

$$\Gamma(1+x)\,.\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x},$$

also

$$l\Gamma(1+x) + l\Gamma(1-x) = l\,\frac{\pi x}{\sin\pi x}.$$

Addiert man diese Gleichung zur Gleichung 4), subtrahiert alsdann die Gleichung 5) und dividiert das Resultat mit 2, so folgt $(-1 < x \leqq +1)$:

$$6)\quad l\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}l\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} + (1-C)x - (S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - \cdots$$

Nach den oben bewiesenen Eigenschaften ist die Funktion Γ für alle positiven Werte des Argumentes bekannt, sobald man diese Funktion für die Werte zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{2}$ und 1, 1 und $1+\frac{1}{2}$ etc. kennt. Die Gleichung 6) lässt nun $l\Gamma(1+x)$ für alle Werte von x zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ sehr rasch berechnen. In seinem *Traité des fonctions elliptiques* hat Legendre die Werte von S_n von $n=2$ bis $n=35$ auf 16 Dezimalstellen gegeben.

Nimmt man in der Gleichung 6) $x=1$ und $x=\frac{1}{2}$ an, was $l\Gamma(2)=0$ und $l\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ liefert, so erhält man zwei Gleichungen, welche zur Berechnung der Konstante C dienen können. Man findet, indem man beachtet, dass $l\frac{\pi x}{\sin \pi x}+l(1-x)=0$ wird für $x=1$:

$$1-C=\frac{1}{2}l\,2+\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{5}(S_5-1)+\frac{1}{7}(S_7-1)+\cdots,$$

$$1-C=l\frac{3}{2}+\frac{1}{3\,.\,4}(S_3-1)+\frac{1}{5\,.\,16}(S_5-1)+\frac{1}{7\,.\,64}(S_7-1)+\cdots$$

Es genügen vier Summen S, um C auf 15 Dezimalstellen zu erhalten; man findet so:

$$C=0{,}57721\,56649\,01532\,8. \tag{7}$$

Wir werden später ein noch rascheres Verfahren zur Berechnung von C kennen lernen, welches überdies nicht die vorangehende Berechnung der Summen S erfordert.

Bestimmung der Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ für rationale Werte von x.

523. Die Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ lässt sich in geschlossener Form durch eine endliche Anzahl von Gliedern allemal dann ausdrücken, wenn x eine rationale Zahl ist. Addiert man nämlich die beiden Gleichungen 1) und 4) im § 521, so folgt

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-yx}}{1 - e^{-y}}\, dy,$$

oder, wenn man $e^{-y} = z$ setzt:

$$1) \qquad \frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}\, dz.$$

Ist nun $x = \frac{m}{n}$, wobei m und n ganze Zahlen sind, und setzt man $z = y^n$, so erhält man:

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = -C + n\int_0^1 \frac{y^{n-1} - y^{m-1}}{1 - y^n}\, dy. \quad \left(\text{für } x = \frac{m}{n}\right)$$

Hier ist die zu integrierende Funktion eine rationale, und folglich lässt sich das Integral durch algebraische, logarithmische oder cyklometrische Grössen darstellen. Man erhält z. B. für $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = -C - 2\int_0^1 \frac{dy}{1 + y} = -C - \log 4.$$

Reduziert sich x auf eine ganze Zahl, so giebt die Gleichung 1):

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 (1 + z + z^2 + \cdots + z^{x-2})\, dz,$$

also:

$$2) \qquad \frac{dl\Gamma(x)}{dx} + C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1}.$$

Die in dieser Gleichung enthaltene Summe ist unter dem Namen der *harmonischen Reihe* bekannt.

Bestimmung des Minimums der Funktion $\Gamma(x)$.

524. Die Gleichung 2) des § 521 zeigt, dass die Funktion $\frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2}$ positiv ist für alle Werte der Variabelen x, welche als reell und positiv angenommen ist; folglich ist die Funktion $\frac{dl\Gamma(x)}{dx}$ oder $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ eine beständig wachsende. Ferner erkennt man aus der Gleichung 3) desselben Paragraphen, dass diese Funktion gleich $-\infty$ wird für $x=0$ und gleich $+\infty$ für $x=+\infty$. Hieraus folgt, dass die Funktion $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ nur ein einziges Mal null wird, dass also die Funktion $l\Gamma(x)$ und folglich auch die Funktion $\Gamma(x)$ nur ein einziges Minimum hat. Dieses Minimum tritt für einen Wert von x zwischen 1 und 2 ein, weil $\Gamma(2)=\Gamma(1)$ ist.

Wird x unendlich klein, so wird die Funktion

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\frac{1}{x}$$

unendlich. Wächst x bis $+\infty$, so nimmt $\Gamma(x)$ solange ab, bis es seinen Minimalwert erreicht hat und wächst dann wieder bis $+\infty$.

Um den Wert von x zu erhalten, welcher zu dem Minimum der Funktion $\Gamma(1+x)$ gehört, hat man die eine positive Wurzel der Gleichung $\Gamma'(1+x)=0$ oder $\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}=0$ zu bestimmen. Aus der Formel 4) des § 522 erhält man die Gleichung:

$$0=-\frac{1}{1+x}+(1-C)+(S_2-1)x-(S_3-1)x^2+\cdots$$

Man erkennt hieraus leicht, dass die Wurzel zwischen 0,4 und 0,5 gelegen ist, und findet weiter durch bekannte Annäherungsmethoden:

$$1+x=1{,}4616321\ldots$$

Ferner erhält man aus der Gleichung 4) oder 6) desselben Paragraphen:

$$\log\Gamma(1+x)=\bar{1}{,}9472392\ldots,$$

also:

$$\Gamma(1+x)=0{,}8856032\ldots$$

Bemerkung über die Interpolation der numerischen Funktion $1 . 2 . 3 \ldots (x-1)$.

525. Da $\Gamma(x) = 1 . 2 . 3 \ldots (x-1)$ ist, wenn x eine ganze Zahl ist, so kann die Funktion $\Gamma(x)$ zur Interpolation der Reihe dienen, deren allgemeines Glied $1 . 2 . 3 \ldots (x-1)$ ist. Denn diese Formel drückt in der That dieses Produkt vermittelst einer stetigen Funktion von x aus, in welcher die Variabele alle komplexen Werte annehmen kann, deren reeller Bestandteil positiv ist. Die Gleichung 8) oder 10) des § 521 liefert aber eine noch weit allgemeinere Art der Interpolation, denn sie lässt das Produkt $1 . 2 . 3 \ldots (x-1)$ durch eine stetige Funktion von x darstellen, bei welcher die Variabele einen beliebigen reellen oder komplexen Wert annehmen kann; nur für den Wert $x = 0$, sowie für alle ganzen negativen Werte wird diese Funktion unendlich. Da dieses Resultat von grosser Wichtigkeit ist, so ist es nicht überflüssig, einzusehen, wie man durch ganz elementare Betrachtungen unmittelbar zu diesen Formeln gelangt, wenn man die numerische Funktion $1 . 2 . 3 \ldots (x-1)$ zu interpolieren sucht.

Es seien x und m zwei ganze positive Zahlen, so konvergieren die $x-1$ Brüche

$$\frac{m+1}{m}, \quad \frac{m+2}{m}, \ldots \quad \frac{m+x-1}{m}$$

nach dem Werte eins, wenn m unbegrenzt wächst und x konstant bleibt; dasselbe ist mit dem Produkte dieser $x-1$ Brüche der Fall, und man erhält:

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+x-1)}{m^{x-1}} = 1 + \varepsilon_m,$$

wobei ε_m eine Grösse ist, welche für $m = \infty$ null wird. Denn es ist:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{x-1}{m}\right) < e^{\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\cdots+\frac{x-1}{m}} = e^{\frac{x(x-1)}{2m}},$$

weil

$$1+\frac{1}{m}<e^{\frac{1}{m}},\quad 1+\frac{2}{m}<e^{\frac{2}{m}},\cdots 1+\frac{x-1}{m}<e^{\frac{x-1}{m}}$$

ist. Folglich ist $\varepsilon_m < e^{\frac{x(x-1)}{2m}} - 1$, und wird mit beliebig wachsenden Werten von m gleich null. Multipliziert man die beiden Seiten der obigen Gleichung mit $1 . 2 \ldots m$, so erhält man vermittelst einfacher Umformung

$$1=\frac{(1 . 2 . 3 \ldots m)\, m^{x-1}}{1 . 2 . 3 \ldots (m+x-1)}(1+\varepsilon_m),$$

und wenn man weiter mit $1 . 2 . 3 \ldots (x-1)$ multipliziert:

$$1 . 2 . 3 \ldots (x-1)=\frac{(1 . 2 . 3 \ldots m)\, m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(m+x-1)}(1+\varepsilon_m),$$

oder

$$1 . 2 . 3 \ldots (x-1)=\lim\frac{(1 . 2 . 3 \ldots m)\, m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(m+x-1)}\;(\text{für } m=\infty)$$

Dies ist genau die Gleichung 10) des § 521 für den Fall eines ganzzahligen x, und ohne Schwierigkeit lässt sich hieraus die Gleichung 8) desselben Paragraphen ableiten.

Gauss hat in seinen Untersuchungen über diesen Gegenstand die Gleichung 10) als allgemeinen Ausdruck zur Definition der Funktion $\Gamma(x)$ gewählt, desgleichen ist Liouville (Journal de Mathém. 1. S. T. XVII), indem er denselben Ausgangspunkt annahm, zu mehreren interessanten Sätzen gelangt. Man erkennt aus der obigen Herleitung, dass dieser Weg in der That ein naturgemässer ist.* Nach der Entwickelung, welche wir gegeben haben, ist die rechte Seite der Gleichung 8) im § 521 eine Reihe, die konvergent ist bei allen positiven Werten von x, und folglich konvergiert auch unter derselben Annahme die rechte Seite der Gleichung 10) nach einer bestimmten Grenze. Um jedoch die neue Definition der Funktion Γ zu rechtfertigen, muss man zeigen, dass die

---

* Die Integraltheorie der Gammafunktionen ist von Dirichlet (Crelle, Journal B. 15) wesentlich gefördert worden. Betreffs der reichhaltigen Litteratur für dieses Gebiet siehe Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Leipzig 1871.

Konvergenz auch bei allen negativen oder komplexen Werten besteht.

Aus der Gleichung 10) erkennt man zunächst, dass $\Gamma(x)$ unendlich ist, wenn x gleich null oder gleich einer beliebigen ganzen negativen Zahl ist. Wird dieser Fall bei Seite gelassen, so kann man behaupten, dass die Gleichung 8) im übrigen immer konvergent ist. Das allgemeine Glied, in welchem m grösser als der Modul von $x-1$ angenommen wird, ist

$$(x-1)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\cdots\right)-\left[\frac{x-1}{m}-\frac{(x-1)^2}{2m^2}+\cdots\right],$$

oder

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2m^2}(1+\varepsilon_m);$$

ε_m bezeichnet eine Grösse, die mit $m=\infty$ nach null konvergiert. Hieraus folgt, dass von einer Stelle ab die Glieder der Reihe abnehmen wie die Glieder der Reihe $\sum\frac{1}{m^2}$. Diese Reihe ist aber konvergent, und folglich konvergiert auch die rechte Seite der behandelten Gleichung nach einer endlichen bestimmten Grenze.

Neue Beweise für die Eigenschaften der Funktion $\Gamma(x)$.

526. Die Eigenschaften der Funktion Γ, welche oben bewiesen wurden, fliessen unmittelbar auch aus der definierenden Gleichung:

$$\Gamma(x)=\lim\frac{(1\,.\,2\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}\quad \text{für } m=\infty.$$

Erste Eigenschaft. Es ist:

$$\Gamma(x)=\frac{(1\,.\,2\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

$$\Gamma(x+1)=\frac{(1\,.\,2\ldots m)\,m^{x}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}(1+\varepsilon'_m),$$

also:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=x\,\frac{m}{x+m}\cdot\frac{1+\varepsilon'_m}{1+\varepsilon_m}.$$

Lässt man m unendlich werden, so folgt:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

und dies ist die erste Eigenschaft der Funktion Γ.

527. Zweite Eigenschaft. Multipliziert man die beiden Gleichungen:

$$\Gamma(x) = \frac{(1\,.\,2\,\ldots\,m)\,m^{x-1}}{x\,(x+1)\ldots(x+m-1)}\,(1+\varepsilon_m),$$

$$\Gamma(1-x) = \frac{(1\,.\,2\,\ldots\,m)\,m^{-x}}{(1-x)\,(2-x)\ldots(m-x)}\,(1+\varepsilon'_m),$$

so folgt:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)(1+\varepsilon_m)\,(1+\varepsilon'_m)}{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)}.$$

Lässt man m unendlich werden, so reduziert sich der Zähler in diesem Quotienten auf den Wert eins und der Nenner auf den Wert $\frac{1}{\pi}\sin\pi x$ auf Grund der bekannten Formel:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Man erhält demnach:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

oder, wenn man mit x multipliziert:

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x}.$$

528. Dritte Eigenschaft. Die dritte Eigenschaft der Funktion Γ ist im § 519 nur für einen besonderen Fall bewiesen. Wir wollen sie hier in ihrer vollen Allgemeinheit ableiten.

Es sei x ein reeller oder komplexer Wert, n und i seien zwei ganze positive Zahlen. Ersetzt man x durch $x+\frac{i}{n}$, so wird:

$$\Gamma\left(x+\frac{i}{n}\right) = \frac{(1\,.\,2\,\ldots\,m)\,m^{x+\frac{i}{n}-1}}{\left(x+\frac{i}{n}\right)\left(x+\frac{i}{n}+1\right)\cdots\left(x+\frac{i}{n}+m-1\right)}\,(1+\varepsilon_m).$$

Giebt man nun i die n Werte $0, 1, 2, \ldots n-1$ und multipliziert alsdann die erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\frac{(1.2\ldots m)^n \cdot m^{nx-\frac{n+1}{2}}\, n^{mn}}{nx\,(nx+1)\,(nx+2)\ldots(nx+nm-1)}\,(1+\varepsilon_m);$$

ε_m bezeichnet nach wie vor eine Grösse, die für $m=\infty$ null wird. Aber die definierende Gleichung für Γ ergiebt auch, wenn man x durch nx ersetzt und für m den Wert mn schreibt:

$$\Gamma(nx)=\frac{(1.2\ldots mn)\,(mn)^{nx-1}}{nx\,(nx+1)\ldots(nx+nm-1)}\,(1+\varepsilon'_m),$$

und so erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-nx}\,\Gamma(nx)}=\frac{(1.2\ldots m)^n\, n^{mn+1}}{(1.2\ldots mn)\, m^{\frac{n-1}{2}}}(1+\varepsilon_m);$$

ε_m bezeichnet auch hier eine Grösse, welche für $m=\infty$ null wird. Die Grenze der rechten Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von n, welche unabhängig ist von x. Nennt man dieselbe $\varphi(n)$, so wird:

$$1)\quad \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=n^{-nx}\,\Gamma(nx)\,\varphi(n).$$

Die Funktion $\varphi(n)$ ist definiert durch die Gleichung:

$$\varphi(n)=\lim\frac{(1.2\ldots m)^n\, n^{mn+1}}{(1.2\ldots mn)\, m^{\frac{n-1}{2}}}\qquad \text{für } m=\infty.$$

Setzt man

$$\psi(m)=\frac{1.2.3\ldots m}{m^{m+\frac{1}{2}}},$$

so kann man schreiben:

$$\varphi(n)=\sqrt{n}\,\lim\frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}=\sqrt{n}\,A_n,$$

wobei

$$A_n = \lim \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}$$

ist, oder auch, wenn man m in $2m$ verwandelt:

$$A_n = \lim \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}.$$

Es ist aber:

$$A_n = \frac{A_n^2}{A_n} = \lim \frac{[\psi(m)]^{2n}}{[\psi(mn)]^2} : \lim \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}$$

$$= \lim \left[\frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}\right]^n : \lim \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}.$$

Die Grössen $\lim \frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}$ und $\lim \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}$ sind gleich A_2; folglich wird:

$$A_n = A_2^{n-1} \quad \text{und} \quad \varphi(n) = \sqrt{n}\, A_2^{n-1}.$$

Die Konstante A_2 ist gleich:

$$A_2 = \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \lim \frac{(1\,.\,2\,.\,3 \ldots m)^2\, 2^{2m+\frac{1}{2}}}{(1\,.\,2\,.\,3 \ldots 2m)\, m^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \sqrt{4\, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1}}.$$

Nach der Formel von Wallis (§ 492) hat die Grösse unter der Wurzel den Grenzwert $4\frac{\pi}{2} = 2\pi$; also ist

$$A_2 = \sqrt{2\pi},$$

folglich:

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

und

$$2)\quad \Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-nx+\frac{1}{2}}\, \Gamma(nx).$$

Diese Gleichung drückt die dritte Eigenschaft der Funktion Γ aus. Setzt man hier $n = 2$, so folgt:

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{-2x+1}\, \Gamma(2x),$$

was mit dem im § 519 gefundenen Resultate übereinstimmt.

Der Beweis, welchen wir hier für die Gleichung 2) gegeben haben, ist ein direkter und unabhängig von den anderen

Eigenschaften der Funktion Γ. Um die Konstante A_2 zu bestimmen, kann man sich indessen auch mit Nutzen der Gleichung $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ bedienen. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{2}$ und $n = 2$ in der Gleichung 1), so erhält man

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\,\varphi(2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,A_2, \quad \text{also} \quad A_2 = \sqrt{2\pi}.$$

Endlich kann man auch die Funktion $\varphi(n)$ sehr einfach bestimmen, wie dies Legendre gethan hat, wenn man die zweite Eigenschaft der Funktion Γ benutzt. Setzt man nämlich $x=0$ in der Gleichung 1), nachdem man zuvor $\Gamma(x)$ durch $\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ und $\Gamma(nx)$ durch $\frac{\Gamma(nx+1)}{nx}$ ersetzt hat, so folgt:

$$\frac{1}{n}\,\varphi(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

oder, wenn man die Reihenfolge der Faktoren rechts verändert:

$$\frac{1}{n}\,\varphi(n) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen und beachtet dabei, dass $\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-i}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{i\pi}{n}}$ ist, so wird

$$[\varphi(n)]^2 = \frac{n^2\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Man weiss aber, dass der Nenner dieses Quotienten gleich $\frac{n}{2^{n-1}}$ ist; folglich wird:

$$[\varphi(n)]^2 = n(2\pi)^{n-1} \quad \text{und} \quad \varphi(n) = \sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

wie bereits oben gefunden ist.

Die Gleichung $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ beweist man nach Dirichlet folgendermassen: Es stellt

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

die $n-1$ Wurzeln der Gleichung $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ dar, wenn man für k die Werte $1, 2, \ldots n-1$ substituiert. Demnach ist

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = \prod_{k=1}^{k=n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right),$$

oder für $x = 1$:

$$n = \prod_{k=1}^{k=n-1}\left(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right) = \prod_{k=1}^{k=n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right),$$

also:

$$n = \frac{2^{n-1}}{i^{n-1}}\prod_{k=1}^{k=n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\, e^{+i\frac{k\pi}{n}}.$$

Da nun

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} e^{+i\frac{k\pi}{n}} = e^{+i\frac{\pi}{n}(1+2+..+n-1)} = e^{+\frac{i\pi}{2}(n-1)} = (+i)^{n-1}$$

wird, so ist

$$\prod_{k=1}^{k=n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Anwendung der Eulerschen Integrale zur Berechnung einiger bestimmter Integrale.

529. Bezeichnet m eine positive Grösse, so ist (§ 516)

1) $$\int_0^\infty e^{-mx} x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{m^p}.$$

Diese Gleichung gilt auch noch, wenn m einen komplexen Wert hat, dessen reeller Bestandteil positiv ist; jedoch bedarf diese Behauptung eines Beweises. Wir ersetzen m durch $a - it$ und bezeichnen mit R und Φ den Modul und das Argument des Wertes, welchen dann das vorige Integral erhält. Es ist also

2) $$Re^{i\Phi} = \int_0^\infty e^{-(a-it)x} x^{p-1}\, dx,$$

und man sieht, dass dieser Ausdruck in der That einen endlichen Wert hat, wenn a positiv ist. Wir setzen

3) $$t = a \operatorname{tang} \varphi,$$

wobei φ ein Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ ist. $R \cos \Phi$ und $R \sin \Phi$ werden stetige Funktionen von φ, welche bezüglich gleich sind dem reellen und dem mit i multiplizierten Bestandteile des Integrales. Um die Differentiale dieser Funktionen zu erhalten, kann man die beiden Integralbestandteile unter dem Integralzeichen nach φ differentiieren; es ist aber einleuchtend, dass man dasselbe Resultat in einfacherer Weise erhält, wenn man die Differentiation an der Gleichung 2) ausführt. Man erhält sodann

4) $$Re^{i\Phi}\left(\frac{d \log R}{d\varphi} + i\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = \frac{ai}{\cos^2 \varphi}\int_0^\infty e^{-(a-it)x} x^p\, dx.$$

Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int e^{-(a-it)x} x^p\, dx = -\frac{e^{-(a-it)x} x^p}{a-it} + \frac{p}{a-it}\int e^{-(a-it)x} x^{p-1}\, dx,$$

und weil $a > 0$ und $p > 0$ ist, so wird

$$\int_0^\infty e^{-(a-it)x} x^p\, dx = \frac{p \cos \varphi\, e^{i\varphi}}{a} Re^{i\Phi},$$

und demnach reduziert sich die Gleichung 4) auf

$$\frac{d \log R}{d\varphi} + i\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{ipe^{i\varphi}}{\cos \varphi}.$$

Setzt man die reellen und ebenso die imaginären Teile auf beiden Seiten einander gleich, so folgt:

$$\frac{d \log R}{d\varphi} = -p\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \frac{d\Phi}{d\varphi} = p,$$

also:

$$\log R = -p\int \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\, d\varphi = \log(\cos \varphi)^p + \text{const},$$

$$\Phi = p\varphi + \text{const}.$$

Ist aber t oder φ gleich null, so hat man $\Phi = 0$, $R = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$, also ist:

$$\Phi = p\varphi, \quad R = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi,$$

und folglich ergiebt die Gleichung 2):

$$5) \qquad \int_0^\infty e^{-(a-it)x} x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \, e^{i\varphi},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$6) \qquad \int_0^\infty e^{-(a-it)x} x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{(a-it)^p};$$

und dies stimmt mit der Gleichung 1) überein, wenn man daselbst $m = a - it$ setzt. Da aber der Ausdruck $(a-it)^p$ mehrere Werte annehmen kann, wenn p eine gebrochene Zahl ist, so muss man beachten, dass das Argument dieser Potenz erhalten wird, indem man das zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegene Argument der Zahl $a - it$ mit p multipliziert. Die Gleichung 6) zerlegt sich in die beiden folgenden:

$$7) \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \cos p\varphi = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin^p \varphi \cos p\varphi, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \sin tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \sin p\varphi = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin^p \varphi \sin p\varphi, \end{cases}$$

wobei die drei Grössen a, t, φ durch die Relation

$$t = a \operatorname{tang} \varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right)$$

verbunden sind.

530. Wir haben erkannt, dass die Integrale, welche in diesen Gleichungen vorkommen, endliche und bestimmte Werte haben, solange die Grösse a, wie wir auch angenommen haben, positiv ist. Dieses ist aber nicht mehr ohne weiteres einleuchtend, wenn a null ist, wenn also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird und t einen endlichen Wert behält. In diesem Falle gelten die

Formeln 7) auch nur, falls p kleiner ist als 1. Um dieses zu beweisen, genügt es, das zweite der Integrale 7) zu betrachten; denn durch geeignete Transformation kann man alsdann die Untersuchung auch auf das erste übertragen. Die Grösse t werde als positiv angenommen, und es sei

$$\int_{\frac{m\pi}{t}}^{\frac{(m+1)\pi}{t}} x^{p-1} e^{-ax} \sin tx\, dx = (-1)^m u_m.$$

Macht man die Substitution $x = \frac{z + m\pi}{t}$, so wird

$$u_m = \frac{1}{t^p} \int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1} e^{-\frac{a}{t}(z+m\pi)} \sin z\, dz.$$

Nun sieht man leicht, dass das in der zweiten der Gleichungen 7) enthaltene Integral gleich ist der Summe der konvergenten Reihe:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots,$$

in welcher die Glieder alternierend positiv und negativ sind und dabei unbegrenzt nach null abnehmen, sobald $a > 0$ ist. Ist aber a gleich 0, so reduziert sich u_m auf den Ausdruck

$$U_m = \frac{1}{t^p} \int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1} \sin z\, dz,$$

und dieser wird nicht null für $m = \infty$, ausser wenn $p < 1$ ist. Unter dieser Annahme ist aber die Reihe

$$U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \cdots$$

konvergent, und man kann beweisen, dass ihre Summe gleich ist dem Werte, welchen die vorige Reihe für $a = 0$ annimmt. Denn bezeichnen s und S die Summen dieser beiden Reihen, s_n und S_n die Summen, welche durch die n ersten Glieder jedesmal gebildet werden, r_n und R_n die entsprechenden Reste, so ist

$$S - s = (S_n - s_n) + (R_n - r_n).$$

Die Differenz $S_n - s_n$ wird gleichzeitig mit a zu null; die Reste R_n und r_n können unabhängig von a lediglich durch

Wahl von n beliebig klein gemacht werden; also wird auch $S - s$ für $a = 0$ ebenfalls zu null.

Demnach folgt aus den Gleichungen 7) für $a = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \cos tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \cos \frac{p\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \sin tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin \frac{p\pi}{2}, \end{cases}$$

solange p zwischen 0 und 1 enthalten ist.

Ersetzt man $\Gamma(p)$ durch seinen Wert $\frac{\pi}{\Gamma(1-p)\sin p\pi}$, so wird

$$\int_0^\infty x^{p-1} \sin tx\, dx = \frac{\pi}{2t^p\Gamma(1-p)\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

Das Integral bleibt endlich für $p = 0$, und man erhält

$$9)\quad \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

wie schon im § 494 gefunden wurde.

531. Die vorigen Gleichungen lassen nun noch weiter eine grosse Anzahl von bestimmten Integralen berechnen; wir wollen einige Beispiele hierzu geben.

Wir bemerken zunächst, dass die Gleichungen 8) nicht die Eulersche Gleichung voraussetzen, aus welcher wir die zweite Eigenschaft der Gammafunktionen abgeleitet haben; es ist im Gegenteil sehr leicht, diese Formel hier zu gewinnen. Denn multiplizieren wir die erste der Gleichungen 8) mit $\frac{dt}{1+t^2}$ und integrieren alsdann von $t = 0$ bis $t = \infty$, so kann die Integration auf der linken Seite unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, und es wird

$$\int_0^\infty x^{p-1} dx \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2}\, dt = \Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2} \int_0^\infty \frac{t^{-p}\, dt}{1+t^2}.$$

Da x positiv ist, so ist das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,e^{-x}$ (§ 496); die linke Seite wird demnach $\frac{\pi}{2}\,\Gamma(p)$ und sonach erhält man:

$$2\int\limits_0^\infty \frac{t^{-p}\,dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

Setzt man $t = x^{-\frac{1}{2}}$ und schreibt $2p-1$ an Stelle von p, so folgt:

$$\text{10)}\qquad \int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

was die im § 489 bewiesene Gleichung ist. Unser jetziger Beweis setzt voraus, dass p zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten ist, aber die gewonnene Gleichung gilt für alle Werte von p zwischen 0 und 1; denn das Integral bleibt ungeändert, wenn man x in $\frac{1}{x}$ und p in $1-p$ verwandelt.

532. Es sei q eine Zahl zwischen 0 und 1, und es werde $p > q$ angenommen. Multipliziert man die Gleichungen 7) mit

$$t^{q-1}\,dt = a^q \operatorname{tang}^{q-1}\varphi\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

und integriert alsdann von $t=0$ bis $t=\infty$ oder von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so kann auf den linken Seiten wiederum die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden, und man erhält:

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\,dx\int\limits_0^\infty t^{q-1}\cos tx\,dt = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi\,\sin^{q-1}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi,$$

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\,dx\int\limits_0^\infty t^{q-1}\sin tx\,dt = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi\,\sin^{q-1}\varphi\,\sin p\varphi\,d\varphi.$$

Nach den Gleichungen 8) haben die Integrale links in Bezug auf t die Werte:

$$\frac{\Gamma(q)}{x^q}\cos\frac{q\pi}{2},\quad \frac{\Gamma(q)}{x^q}\sin\frac{q\pi}{2}.$$

Es werden demnach die linken Seiten gleich:

$$\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}\int_0^\infty x^{p-q-1}e^{-ax}\,dx,$$

$$\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}\int_0^\infty x^{p-q-1}e^{-ax}\,dx,$$

oder

$$\frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}},\quad \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}};$$

also ist:

$$11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\varphi\sin^{q-1}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)}\cos\frac{q\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\varphi\sin^{q-1}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p)}\sin\frac{q\pi}{2}. \end{cases}$$

Nimmt man $q = p - 1$ an, so wird $\Gamma(p-q) = 1$, $\Gamma(q) = \frac{\Gamma(p)}{p-1}$, also:

$$12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{1}{p-1}\sin\frac{p\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{p-1}\cos\frac{p\pi}{2}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist $p > 1$ vorausgesetzt.

In den Gleichungen 11) muss $q < 1$ sein. Da aber beide Seiten stetige Funktionen von q sind, so gelten die Gleichungen auch noch für $q = 1$; also ist:

$$13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \sin p\varphi \, d\varphi = \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Diese Formeln setzen noch voraus, dass $p > 1$ ist. Man kann aus ihnen die Gleichungen 12) ableiten, indem man φ in $\frac{\pi}{2} - \varphi$ verwandelt, und umgekehrt.

Ersetzt man $\Gamma(q)$ durch $\frac{\pi}{\sin q\pi\, \Gamma(1-q)}$ in der zweiten Gleichung 11) und lässt alsdann $q = 0$ werden, so folgt:

$$14)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \, \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

In dieser Gleichung muss p positiv sein; das Integral aber hat einen konstanten, von p unabhängigen Wert.

533. Wie wir im § 529 sahen, besteht die Gleichung

$$\frac{1}{(1-ix)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z(1-ix)} \, dz,$$

multipliziert man dieselbe mit der Funktion $\frac{e^{aix}}{(1+ix)^n}$, wobei a positiv ist, so folgt:

$$\frac{e^{aix}}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z^{n-1} e^{-z} e^{(a+z)ix}}{(1+ix)^n} \, dz.$$

Multipliziert man ferner beide Seiten mit $x^{p-1}\,dx$ und integriert alsdann von $x = 0$ bis $x = \infty$, so kann die Reihenfolge der Integrationen auf der rechten Seite vertauscht werden, und man erhält:

$$15)\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}e^{aix}}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z}dz\int_0^\infty \frac{x^{p-1}e^{(a+z)ix}}{(1+ix)^n}dx.$$

Ebenso ist

$$\frac{1}{(1+ix)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y(1+ix)}dy.$$

und multipliziert man mit $x^{p-1}e^{(a+z)ix}dx$:

$$\frac{x^{p-1}e^{(a+z)ix}dx}{(1+ix)^n} = \frac{dx}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}e^{(a+z-y)ix}x^{p-1}dy.$$

Durch Integration von $x=0$ bis $x=\infty$ erhält man:

$$16)\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}e^{(a+z)ix}}{(1+ix)^n}dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy\int_0^\infty x^{p-1}e^{(a+z-y)ix}dx.$$

Wir bezeichnen mit $\dfrac{G+iH}{\Gamma(n)}$ den Wert jedes Gliedes dieser Gleichung, so erhält die Gleichung 15) die Form:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}(\cos ax + i\sin ax)}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty (G+iH)\,z^{n-1}e^{-z}dz.$$

Setzt man die mit dem Faktor i behafteten Glieder auf beiden Seiten einander gleich und nimmt alsdann $p=0$ an, so folgt:

$$17)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty H z^{n-1}e^{-z}dz.$$

Der Wert von H ist durch die Gleichung 16) gegeben; für $p=0$ ist:

$$H = \int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}dx.$$

Es ist aber $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)\,x}{x}\,dx$ gleich $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ (§ 495), je nachdem y kleiner oder grösser ist als $a+z$; also ist:

$$H = \frac{\pi}{2}\left[\int\limits_0^{a+z} y^{n-1}e^{-y}\,dy - \int\limits_{a+z}^\infty y^{n-1}e^{-y}\,dy\right].$$

Differentiiert man nach a, so wird

$$\frac{dH}{da} = \pi(a+z)^{n-1}e^{-(a+z)}.$$

Differentiiert man auch die Gleichung 17) nach a, so folgt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int\limits_0^\infty \frac{dH}{da}\,z^{n-1}e^{-z}\,dz,$$

und man erhält also schliesslich die Gleichung, welche wir ableiten wollten:

$$18)\quad \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int\limits_0^\infty z^{n-1}(a+z)^{n-1}e^{-(a+2z)}\,dz,$$

wobei n irgend welche positive Zahl bedeutet. Ist n eine ganze Zahl, so wird

$$19)\quad \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2^{2n-1}\Gamma(n)}\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{\Gamma(2n-1-i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i)}(2a)^i$$

und für $n=1$ erhält man wieder die Gleichung:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

welche schon im § 496 gewonnen wurde. Für $n=2$ wird

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1+a)e^{-a}.$$

534. Die Gleichung 18) führt noch zu anderen bestimmten Integralen, welche einiges Interesse verdienen. Multipliziert man die erste der Gleichungen 7) nämlich

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos tx\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \cos p\varphi,$$

wobei $t = a \operatorname{tang} \varphi$ ist, mit

$$\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{a\, d\varphi}{\cos^2\varphi\, (1 + a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi)^n},$$

und integriert alsdann von $t = 0$ bis $t = \infty$ oder von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, indem man dabei die Reihenfolge der Integrationen auf der linken Seite vertauscht, so wird:

$$20)\quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx \int_0^\infty \frac{\cos tx}{(1+t^2)^n} dt = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1 + a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi)^n} d\varphi.$$

Nach der Gleichung 18) hat das Integral in Bezug auf t den Wert:

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty z^{n-1} (x+z)^{n-1} e^{-(x+2z)} dz,$$

oder wenn man xy an Stelle von z, $x\,dy$ an Stelle von dz setzt:

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty y^{n-1} (1+y)^{n-1} e^{-x(1+2y)} x^{2n-1} dy.$$

Multipliziert man dieses Integral mit $x^{p-1} e^{-ax} dx$ und integriert alsdann von 0 bis ∞, so erhält man einen Wert, welcher der linken Seite der Gleichung 20) gleich ist. Folglich ist:

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty y^{n-1} (1+y)^{n-1} dy \int_0^\infty x^{2n+p-2} e^{-(a+1+2y)x} dx$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1 + a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi)^n} d\varphi.$$

Auf der linken Seite hat das Integral nach x den Wert:

$$\frac{\Gamma(2n+p-1)}{(a+1+2y)^{2n+p-1}},$$

also ist:

$$21)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}\,d\varphi = \pi a^{p-1}\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)\,[\Gamma(n)]^2}\int_0^{\infty}\frac{y^{n-1}(1+y)^{n-1}\,dy}{(a+1+2y)^{2n+p-1}}.$$

Ist $a=1$, so reduziert sich das Integral rechts auf

$$\frac{1}{2^{2n+p-1}}\int_0^{\infty}\frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)^{n+p}} = \frac{1}{2^{2n+p-1}}\,\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)},$$

also ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}}\,\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n+p)},$$

oder wenn man $p+2n-2=q$ setzt:

$$22)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{q+1}}\,\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}.$$

Diese Gleichung wurde zuerst von Cauchy bewiesen. Für den Fall $q=p$ reduziert sie sich auf eine von Poisson gegebene Formel, nämlich:

$$23)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}}.$$

Setzt man in der Gleichung 21) $n=1$, so reduziert sich das Integral rechts auf

$$\int_0^{\infty}\frac{dy}{(a+1+2y)^{p+1}} = \frac{1}{2p\,(a+1)^p},$$

also ist:

$$24)\quad \int_0^{\pi} \frac{\cos^{p}\varphi \cos p\varphi}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^{p-1}}{(a+1)^p},$$

und diese Gleichung geht für $a=1$ in die Gleichung 23) über.

Über den angenäherten Wert des Produktes $1.2.3\ldots x$, wenn x eine grosse Zahl ist.

535. Der Logarithmus des Produktes der x ersten ganzen Zahlen lässt sich durch eine Reihe ausdrücken, welche nach ganzen und negativen Potenzen von x fortschreitet. Diese berühmte Reihe ist die Stirlingsche, ihre Theorie ist von vielen Mathematikern weiter entwickelt worden, unter denen insbesondere Cauchy, Binet, Malmsten und Liouville zu nennen sind.* Unter den verschiedenen Beweisen, die man für diese Formel aufgestellt hat, ist aber, wie mir scheint, keiner einfacher als der, welchen ich im Jahre 1860 der Akademie vorgelegt und in der vierten Ausgabe meines Cours d'Algèbre supérieure (deutsche Bearbeitung von Werthheim, Bd. 2, Kap. 4) wiedergegeben habe. Daselbst habe ich bewiesen, dass die bekannte Formel von Wallis vollständig zur Ableitung der Stirlingschen ausreicht, und diese Ableitung ist so einfach, dass man die zweite Formel gewissermassen als eine Transformation der ersten ansehen kann. Diese Entwickelungen hängen zugleich wesentlich mit der Theorie der Eulerschen Integrale zusammen, und ich halte es daher für nützlich, sie auch hier darzulegen.

536. Die Formel von Wallis ist (§ 492):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2x-2}{2x-3}\cdot\frac{2x-2}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x-1}, \qquad (\text{für } x=\infty)$$

und sie erhält die einfache Form:

$$\frac{[\varphi(x)]^4}{[\varphi(2x)]^2}=1, \qquad (\text{für } x=\infty)$$

oder indem man die Quadratwurzel auszieht:

$$1)\qquad \frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)}=1, \qquad (\text{für } x=\infty)$$

wenn man mit $\varphi(x)$ entweder den Ausdruck

---

* Siehe auch Jacobi, Crelles Journal Bd. 12, sowie die weitere Litteratur bei Meyer, a. a. O. pag. 145.

$$\frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}},$$

oder das Produkt dieses Quotienten mit einer Exponentialfunktion von der Form a^x bezeichnet, wobei a eine beliebige positive Konstante ist. Die Gleichung 1) gilt also, wenn man, mit e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnend,

$$2)\qquad \varphi(x) = \frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}}$$

setzt. Aus dieser Gleichung folgt:

$$3)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1+x\left(x+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{x}\right)},$$

oder:

$$4)\qquad l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = -1 + \left(x+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Nun wird, da $x > 1$ ist:

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{nx^n} + \cdots,$$

also:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} + \cdots + \frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{x^n} + \cdots,$$

mithin:

$$5)\quad l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} + \frac{3}{40x^4} - \cdots + \frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{x^n} + \cdots$$

In dieser Reihe sind die Glieder abwechselnd positiv und negativ; ferner ist der Betrag des Verhältnisses zwischen dem Gliede vom Range n und dem vorhergehenden:

$$\frac{n^2}{n^2+n-2}\,\frac{1}{x}.$$

Dieses Verhältnis ist gleich $\frac{1}{x}$ für $n = 2$, und kleiner als $\frac{1}{x}$ für alle Werte von n, die grösser sind als 2. Also nehmen, selbst wenn $x = 1$ ist, die Beträge der Glieder in der Reihe 5) von der zweiten Stelle an ab, und folglich ist

$$l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x^2},$$

oder

6) $$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < e^{\frac{1}{12x^2}}.$$

Man kann aber auch noch eine andere Grenze für diesen Quotienten bestimmen, welche kleiner ist. Da wir dieselbe später benutzen werden, so ist es zweckmässig, sie hier anzugeben.

Multipliziert man die Gleichung 5) mit $x+1$, so folgt:

$$(x+1)\,l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{120x^3} + \cdots + \frac{n-3}{2(n-1)n(n+1)}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots$$

In dieser Reihe fehlt das Glied $\frac{1}{x^2}$; die anderen sind abwechselnd positiv und negativ, und das Verhältnis des Gliedes $\frac{1}{x^n}$ zu $\frac{1}{x^{n-1}}$ hat den Betrag:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)+2(n-4)}\,\frac{1}{x}.$$

Dieses Verhältnis ist gleich $\frac{1}{x}$ für $n=4$, und kleiner als $\frac{1}{x}$ für $n>4$. Also nehmen die Glieder von der zweiten Stelle an ab, selbst wenn x gleich 1 wird, und man erhält:

$$(x+1)\,l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x},$$

oder

7) $$l\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x(x+1)}.$$

Die Gleichung 6) lehrt, dass

8) $$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\theta_0}{x^2}}$$

ist, wobei θ_0 eine positive Zahl kleiner als $\frac{1}{12}$ ist. Indem man x in $x+1$, $x+2$, $\ldots\, 2x-1$ verwandelt, und mit θ_1, θ_2, $\ldots\, \theta_{x-1}$ Brüche zwischen 0 und $\frac{1}{12}$ bezeichnet, erhält man die Gleichungen:

$$9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\theta_1}{(x+1)^2}} \\ \dfrac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\theta_2}{(x+2)^2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}} \end{cases}$$

Multipliziert man dann die Gleichungen 8) und 9), so erhält man, weil die Summe der x Brüche

$$\frac{\theta_0}{x^2} + \frac{\theta_1}{(x+1)^2} + \cdots + \frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}$$

kleiner ist als $\frac{1}{12x^2} \cdot x = \frac{1}{12x}$:

$$10)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta}{x}};$$

θ bezeichnet eine Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{12}$. Folglich ist:

$$11)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1 \qquad \text{(für } x = \infty).$$

Dividiert man nun die Gleichung 1) durch diese Gleichung, so folgt:

$$12)\qquad \varphi(x) = 1, \qquad \text{(für } x = \infty)$$

d. h. auf Grund der Gleichung 2):

$$13)\qquad 1.2.3\ldots x = \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_x);$$

ε_x bezeichnet eine positive Grösse, die für $x = \infty$ verschwindet, und für welche wir nun eine obere Grenze bestimmen wollen.

537. Es ist

$$14)\qquad \Gamma(x+1) = 1.2.3\ldots x,$$

und aus den obigen Gleichungen lässt sich ein exakter Ausdruck für die Funktion $\Gamma(x+1)$, oder, was dasselbe ist, für den natürlichen Logarithmus dieser Funktion herleiten, wenn x eine ganze Zahl ist. Zunächst wird nämlich, gemäss der Gleichung 2):

$$15)\qquad l\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\, l\, 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) lx + l\varphi(x).$$

Nun besteht die Identität:

$$l\varphi(x) = l\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} + l\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} + \cdots + l\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} + l\varphi(x+m+1).$$

Wenn aber m unbegrenzt wächst, so konvergiert die Funktion $\varphi(x+m+1)$ nach dem Werte eins, nach Gleichung 12), und ihr Logarithmus konvergiert nach null. Also ist

$$16)\qquad l\varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} l\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)},$$

oder nach der Gleichung 4):

$$17)\quad l\varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\left(x+m+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right].$$

Sonach wird

$$18)\ l\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}l(2\pi) - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)lx + \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\left(x+m+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right].$$

Diese Gleichung, welche von Gudermann aufgestellt wurde, lässt sich, wie man sieht, aus der einfachen Formel von Wallis leicht ableiten.

538. Da die Grösse $l\varphi(x)$ positiv ist, so ergiebt die Gleichung 15) zunächst:

$$19)\qquad l\Gamma(x+1) > \frac{1}{2}l(2\pi) - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)lx.$$

Ferner erhält man aus der Gleichung 16) auf Grund der Ungleichung 7):

$$l\varphi(x) < \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{12(x+m)(x+m+1)}.$$

Der Bruch $\dfrac{1}{(x+m)(x+m+1)}$ lässt sich aber in

$$\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+m+1}$$

zerlegen, also wird

$$12\,l\varphi(x) < \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\cdots$$

Die Reihe rechts hat die Summe $\frac{1}{x}$, und folglich ist

$$l\varphi(x) < \frac{1}{12x};$$

ferner:

$$20)\quad l\Gamma(x+1) < \frac{1}{2}\, l\, 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) lx + \frac{1}{12x}.$$

Die Gleichungen 19) und 20) geben uns die beiden gesuchten Grenzen. Geht man von dem Logarithmus zum Numerus über, so erhält man:

$$21)\quad \begin{cases} 1.2.3\,..\,x > \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}, \\ 1.2.3\ldots x < \sqrt{2\pi}\, e^{-x+\frac{1}{12x}} x^{x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Ausdehnung der Formeln auf die Fälle, wo x keine ganze positive Zahl ist.

539. In den bisherigen Untersuchungen ist angenommen, dass x eine ganze positive Zahl ist. Die rechte Seite der Gleichung 18) ist jedoch eine Funktion, bei welcher x einen beliebigen Wert annehmen kann. Mit Ausnahme der Fälle, wo x eine ganze negative Zahl ist, ist nämlich diese Reihe immer konvergent, denn ihre Glieder nehmen, wie man leicht nachweisen kann, ebenso ab wie die Glieder der Reihe $\sum\frac{1}{m^2}$. Nun kann man beweisen, dass diese Gleichung in der That bei allen Werten von x besteht, indem man auf die allgemeine Definition der Funktion Γ zurückgeht. Diese Definition ist in der Gleichung 8) des § 521 enthalten; ersetzt man daselbst x durch $x+1$ und schreibt man unter dem Summenzeichen $m+1$ an Stelle von m, so erhält man:

$$l\Gamma(x+1) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[xl\left(1 + \frac{1}{m+1}\right) - l\left(1 + \frac{x}{m+1}\right)\right].$$

Um die Identität zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 18) zu erweisen, genügt es, dieselben zweimal zu differentiieren. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{d^2 l\Gamma(1+x)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m+1)^2}.$$

Die rechten Seiten in den beiden Gleichungen haben demnach gleiche Ableitungen zweiter Ordnung. Da sie überdies ebenso wie ihre ersten und zweiten Ableitungen stetige Funktionen sind, so können sie sich nur um eine lineare Funktion unterscheiden; und weil sie bei allen ganzen positiven Werten von x einander gleich sind, so folgt weiter, dass ihre Differenz gleich null sein muss.

Die Reihe von Stirling.

540. Die Funktion $l\varphi(x)$ lässt sich leicht durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Differentiiert man nämlich die Gleichung 17) des § 537 zweimal nach einander, so findet man:

$$\frac{dl\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[l\left(1+\frac{1}{x+m}\right) - \frac{1}{x+m}\right],$$

$$\frac{d^2l\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2}.$$

Nun ist für jeden positiven Wert von z:

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-yz}\,dy, \quad \frac{1}{z^2} = \int_0^\infty e^{-yz}y\,dy.$$

Wenn also die Variabele x positiv bleibt, so ist:

$$\frac{d^2l\varphi(x)}{dx^2} = -\int_0^\infty e^{-yx}\left(1+\frac{y}{2}\right)dy + \int_0^\infty e^{-yx}\sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-my}y\,dy,$$

und da die Grösse $\sum\limits_{m=0}^{m=\infty} e^{-my}$ gleich $\frac{1}{1-e^{-y}}$ ist, so erhält man:

$$\frac{d^2l\varphi(x)}{dx^2} = \int_0^\infty e^{-yx}\left(\frac{y}{1-e^{-y}} - \frac{y}{2} - 1\right)dy.$$

Integriert man diesen Ausdruck zweimal und beachtet dabei, dass die Funktionen $l\varphi(x)$ und $\frac{dl\varphi(x)}{dx}$ für $x=\infty$ verschwinden, so folgt:

$$1) \qquad l\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{1}{y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)e^{-yx}\,dy.$$

Trägt man diesen Wert in die Gleichung 15) des § 537 ein, so erhält man einen Ausdruck für $l\Gamma(x+1)$, welcher von Cauchy gegeben ist.

541. Hieraus kann man nun die Stirlingsche Gleichung ableiten; jedoch muss man noch zuvor die Gleichung 1) transformieren. Die Gleichung

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

giebt:

$$l\Gamma(1+x) + l\Gamma(1-x) = l\,\pi x - l\sin \pi x,$$

und indem man differentiiert:

$$2)\quad \frac{dl\Gamma(1+x)}{dx} + \frac{dl\Gamma(1-x)}{dx} = \frac{1}{x} - \pi\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \pi i \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}.$$

Andererseits ist nach der Gleichung 18) im § 537:

$$\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right) + \cdots,$$

und wenn man x in $-x$ verwandelt:

$$-\frac{dl\Gamma(1-x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-x}\right) + \cdots$$

Trägt man also diese Werte in die Gleichung 2) ein, so erhält man:

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{2^2-x^2} + \frac{2x}{3^2-x^2} + \cdots = \frac{1}{x} - i\pi\frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}.$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Darstellung von $\operatorname{cotg} \pi x$ durch eine unendliche Reihe von Partialbrüchen, die wir schon im § 491 bewiesen haben. Wir hätten sie also hier von vornherein zur Grundlage der weiteren Entwickelungen wählen können, doch ist es, abgesehen davon, dass sie hier für alle reellen und komplexen Werte von x bewiesen ist, nicht ohne Interesse, sie mit den Gleichungen zu verknüpfen, welche wir in unserer Theorie der Gammafunktionen aufgestellt haben.

Setzt man $x = \frac{i\alpha}{2\pi}$, so wird die obige Gleichung:

$$3)\quad \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2},$$

und man erhält durch Division:

$$\frac{1}{4m^2\pi^2+\alpha^2}=\frac{1}{(2m\pi)^2}-\frac{\alpha^2}{(2m\pi)^4}+\cdots\pm\frac{\alpha^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}}\mp\theta_m\frac{\alpha^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}};$$

θ_m bezeichnet der Kürze halber die Grösse $\frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2+\alpha^2}$, deren Wert zwischen 0 und 1 liegt. Wir geben nun m die Werte 1, 2, 3 ... bis unendlich, addieren dann alle Gleichungen und bemerken, dass wenn man

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\theta_m\frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}=\theta\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}$$

setzt, θ ebenfalls zwischen 0 und 1 enthalten ist. Alsdann wird nach Gleichung 3):

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{(2m\pi)^2}-2\alpha^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{(2m\pi)^4}+\cdots$$
$$\pm2\alpha^{2n-2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{(2m\pi)^{2n}}\mp2\theta\alpha^{2n}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

und setzt man:

$$4)\quad \frac{B^n}{1.2.3\ldots2n}=\frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots\right),$$

so folgt:

$$5)\quad \begin{cases}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots2n}\alpha^{2n-2}\\ \qquad\qquad+(-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\alpha^{2n};\end{cases}$$

θ ist eine Grösse zwischen 0 und 1.

Dies bemerkenswerte Resultat ist von Cauchy gegeben worden. Die Funktion von α, welche die linke Seite der Gleichung bildet, wird ebenso wie ihre Ableitung nur unendlich und unstetig für die Werte von α, welche in der Formel $\alpha=2k\pi i$ enthalten sind; wobei k eine ganze positive oder negative von 0 verschiedene Zahl bedeutet. Hieraus folgt, dass diese Funktion gemäss der Mac-Laurinschen Formel in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar ist, für alle reellen oder komplexen Werte von α, deren Modul kleiner ist als 2π, so dass also bei diesen Werten die Gleichung besteht:

$$6)\quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^2+\cdots \\ \qquad\qquad +(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n-2}\ldots \end{cases}$$

Die Gleichung 5) gilt bei allen *reellen* Werten von α und liefert den Rest der Reihe 6), wenn man diese bei dem Gliede vom Range n abbricht.

542. Die Koeffizienten $B_1, B_2, B_3, \ldots$, welche in diesen beiden Gleichungen auftreten, sind unter dem Namen „*Bernoullische Zahlen*" bekannt. Der allgemeine Ausdruck für die n^{te} Bernoullische Zahl ist durch die Gleichung 4) gegeben. Dieselbe enthält indes die transscendente Zahl π und ausserdem die Summe einer unendlichen Reihe. Man kann aber auch leicht die Zahlen B, welche sämtlich rational sind, nach einander berechnen. Wir betrachten die Gleichung 6), wo wir der Konvergenz halber $\alpha < 2\pi$ annehmen, und ersetzen $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ durch den gleichen Wert $\frac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$, so folgt:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\right]=\frac{B_1}{2!}-\frac{B_2}{4!}\alpha^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B^n}{(2n)!}\alpha^{2n-2}+\cdots$$

oder:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha}\left[1+\frac{B_1}{2!}\alpha^2-\frac{B_2}{4!}\alpha^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n}+\cdots\right].$$

Ersetzt man die Exponentialfunktionen durch ihre Reihen, so wird:

$$\frac{1}{2}\left(2+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\alpha^2}{3!}+\cdots+\frac{\alpha^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots\right)\left(1+\frac{B_1}{2!}\alpha^2+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n}+\cdots\right).$$

Die beiden Faktoren der rechten Seite sind konvergente Reihen, und die zweite Reihe bleibt konvergent, wenn man ihren Gliedern die absoluten Werte giebt, denn die Reihe 6) ist auch noch konvergent, wenn man für α den Wert αi einführt, solange nur der Modul von α kleiner als 2π ist. Führt man also die Multiplikation der beiden Reihen rechts aus und ordnet man das Produkt nach ganzen Potenzen von α, so erhält man eine konvergente Reihe, die mit der Reihe auf der linken Seite identisch sein muss. Setzt man die Koeffizienten von α^{2n} auf beiden Seiten einander gleich, so findet man die Gleichung:

$$0=\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{(2n-1)!}\,\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{(2n-3!)}\,\frac{B_2}{4!}+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{\mu-1}}{(2n-2\mu+1)!}\,\frac{B_\mu}{(2\mu)!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{1}\,\frac{B_n}{(2n)!}.$$

Durch diese Gleichung wird B_n bestimmt, sobald man $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ kennt; setzt man also nach einander $n=1, 2, 3, \ldots$, so erhält man:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+B_1=0,$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}B_1-B_2=0,$$

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{6}{2}B_1-\frac{6\,.\,5\,.\,4}{2\,.\,3\,.\,4}B_2+B_3=0,$$

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}B_1-\frac{8\,.\,7\,.\,6}{2\,.\,3\,.\,4}B_2+\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}B_3-B_4=0,$$

. . . .

und hieraus:

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},$$

$$B_6=\frac{691}{2730},\quad B_7=\frac{7}{6},\ \cdots$$

Die Reihe der Bernoullischen Zahlen ist, wie man hier sieht, zuerst eine abnehmende, aber von B_3 an wird sie eine unbegrenzt wachsende.

543. Wir kehren nun zur Gleichung 1) zurück, welche den Ausdruck für $l\varphi(x)$ giebt. Mit Hilfe der Gleichung 5) erhält sie die Form:

$$7)\begin{cases} l\varphi(x) = \dfrac{B_1}{2!}\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}dy - \dfrac{B_2}{4!}\int_0^\infty e^{-xy}y^2\,dy + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-xy}y^{2n-2}\,dy \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\displaystyle\int_0^\infty \theta e^{-xy}y^{2n}\,dy. \end{cases}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,y^{\mu-1}\,dy = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu} = \frac{\mu-1!}{x^\mu}$$

für jeden ganzzahligen Wert von μ, ferner ist das Integral $\int_0^\infty \theta e^{-xy}y^{2n}\,dy$ positiv und kleiner als $\int_0^\infty e^{-xy}\,y^{2n}\,dy$, d. h. kleiner als $\frac{2n!}{x^{2n+1}}$, weil θ stets zwischen 0 und 1 bleibt; man kann demnach seinen Wert mit $\theta\,\frac{2n!}{x^{2n+1}}$ bezeichnen, wobei θ wiederum eine Grösse zwischen 0 und 1 bedeutet. Demnach wird der obige Wert für $l\varphi(x)$ gleich:

$$8)\begin{cases} l\varphi(x) = \dfrac{B_1}{1.2}\dfrac{1}{x} - \dfrac{B_2}{3.4}\cdot\dfrac{1}{x^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n-1)\,2n}\,\dfrac{1}{x^{2n-1}} \\ \qquad + (-1)^n\theta\,\dfrac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\dfrac{1}{x^{2n+1}}, \end{cases}$$

und trägt man denselben in die Gleichung 15) § 537 ein, so erhält man für jeden positiven Wert von x:

$$9)\begin{cases} l\Gamma(x+1) = \dfrac{1}{2}\,l(2\pi) - x + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)l(x) + \dfrac{B_1}{1.2}\dfrac{1}{x} - \dfrac{B_2}{3.4}\cdot\dfrac{1}{x^3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n-1)\,2n}\,\dfrac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n\,\theta\,\dfrac{B_{n+1}}{(2n+1)\,(2n+2)}\,\dfrac{1}{x^{2n+1}}. \end{cases}$$

Geht man auf der rechten Seite zur unendlichen Reihe über, so erhält man die Stirlingsche Formel, nämlich:

$$10)\begin{cases} l\Gamma(x+1) = \dfrac{1}{2}\,l(2\pi) - x + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)l(x) + \dfrac{B_1}{1.2}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{B_2}{3.4}\cdot\dfrac{1}{x^3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\,\dfrac{B_n}{(2n-1)\,2n}\,\dfrac{1}{x^{2n-1}} + \cdots \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Reihe divergent ist, wie gross auch der Wert sein mag, den man der Variabelen x beilegt; denn der Betrag des allgemeinen Gliedes

$$(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}}$$

ist nach der Gleichung 4) gleich dem Produkte der beiden Grössen

$$\frac{1}{2\pi x}\cdot\frac{2}{2\pi x}\cdot\frac{3}{2\pi x}\cdots\frac{2n-2}{2\pi x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi^2 x}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right).$$

Der zweite dieser Faktoren konvergiert nach dem Grenzwerte $\frac{1}{2\pi^2 x}$, wenn n unbegrenzt wächst; der erste dagegen wächst über jede Grenze, denn er ist ein Produkt, bei welchem die Faktoren kleiner als 1 nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, während die Zahl der Faktoren, die grösser sind als 1, ja sogar grösser als ein beliebig grosser Wert, selbst grösser werden kann als jede gegebene Zahl. Die Glieder der Reihe 10) wachsen also von einer bestimmten Stelle ab über jede Grenze, und folglich ist die Reihe divergent.

544. Es ist indessen sehr bemerkenswert, dass die Stirlingsche Reihe, ungeachtet ihrer Divergenz, ein sehr genaues und bequemes Verfahren liefert, um $l\Gamma(x+1)$ zu berechnen; die Annäherung, welche man auf diesem Wege erhält, ist um so grösser, je beträchtlicher x ist. Wenn nämlich x grösser ist als 1, so nehmen die mit den Zahlen B multiplizierten Glieder der Stirlingschen Reihe zunächst ab, und man erkennt aus der Gleichung 9), dass der Fehler, den man bei der Anwendung der Reihe 10) begeht, seinem Betrage nach immer kleiner ist, als der Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes. Man erhält demnach die grösste Annäherung, wenn man bei dem Gliede abbricht, welches dem Gliede mit kleinstem Werte vorangeht, und dieses kleinste Glied liefert selbst eine obere Grenze für den Fehler, welchen man begeht. Wenn man z. B. in der Gleichung 10) alle Glieder vernachlässigt, die mit B multipliziert sind, so wird der Fehler positiv und kleiner als $\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x}$ oder, weil $B_1=\frac{1}{6}$ ist, kleiner als $\frac{1}{12x}$; also ist:

$$11)\quad \begin{cases} l\Gamma(x+1) > \frac{1}{2}\, l(2\pi) - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) l(x), \\ l\Gamma(x+1) < \frac{1}{2}\, l(2\pi) - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) l(x) + \frac{1}{12x}, \end{cases}$$

oder

$$12)\quad \begin{cases} \Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \\ \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12x}}, \end{cases}$$

wie schon im § 538 gefunden wurde.

Indem man von diesen Formeln ausgeht, kann man zwei Grenzen für die Bernoullische Zahl B_n erhalten, von denen die eine uns für das folgende nützlich sein wird. Setzt man zur Abkürzung:

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots,$$

so ist nach Gleichung 4):

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\, S_{2n}, \quad B_1 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}\, \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \quad \frac{B_n}{B_1} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi_2{}^n{}_{-2}}\, \frac{S_{2n}}{S_2}.$$

Da aber $S_{2\mu}$ abnimmt, wenn μ wächst, so wird

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} < \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}, \quad \frac{B_n}{B_1} < \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

oder, weil $B_1 = \frac{1}{6}$ ist:

$$13)\quad \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_n}{4\pi^2},$$

$$14)\quad B_n < \frac{1}{12}\, \frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}.$$

Die Gleichung 14) giebt eine obere Grenze für B_n. Eine untere Grenze erhält man, wenn man S_{2n} durch 1 ersetzt; es ist:

$$15)\quad B_n > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Ersetzt man $\Gamma(2n+1)$ in der Gleichung 14) durch seine obere Grenze, die durch die Ungleichungen 12) gegeben ist, und in der Gleichung 15) durch seine untere Grenze, so erhält man:

$$16)\qquad \begin{cases} B_n < \dfrac{1}{12} \dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n} e^{\frac{1}{24n}}, \\[2ex] B_n > 2 \dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}} e^{-2n}. \end{cases}$$

Das Verhältnis dieser beiden Grenzen von B_n ist gleich $\frac{\pi^2}{6} e^{\frac{1}{24n}}$.

545. Die Formeln, welche wir aufgestellt haben, sind von Cauchy gegeben worden; sie lassen leicht die Annäherung bestimmen, mit welcher man $l\Gamma(x+1)$ nach der Stirlingschen Reihe berechnen kann. Wir bezeichnen mit u_n den Betrag des Gliedes dieser Reihe, welches vom Koeffizienten B_n abhängt, so ist

$$u_n = \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n} \frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^2}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt auf Grund der Ungleichung 13):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2},$$

und es wird also umsomehr

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{\pi^2 x^2} \quad \text{und} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{3x}\right)^2.$$

Also wird u_{n+1} kleiner als u_n, solange $n < 3x$ oder $n = 3x$ ist. Ist also x grösser als 1, so nehmen die ersten Glieder der Stirlingschen Reihe ab, und wenn x eine ganze Zahl ist, so findet diese Abnahme sicherlich bis zu dem Gliede vom Range $3x$ statt.

Bezeichnet man nun mit ε_n den Betrag des Fehlers, welchen man begeht, wenn man die Stirlingsche Reihe mit dem Gliede, das mit B_n multipliziert ist, abbricht, so ist, wie wir sahen:

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}},$$

und umsomehr, gemäss der Ungleichung 13):

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 x^{2n+1}},$$

und endlich, auf Grund der ersten Ungleichung 16):

17) $$\varepsilon_n < \frac{1}{6} \frac{(\pi n)^{\frac{1}{2}}}{x} \left(\frac{n}{e\pi x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}$$

eine Grenze, die sich mittelst Logarithmen leicht berechnen lässt.

Wir sahen nun, dass wenn x eine ganze Zahl ist, die Abnahme der Reihenglieder jedenfalls solange statt hat, als n kleiner oder gleich $3x$ ist; wählt man $n = 3x$, so giebt die Formel 17):

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72x}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x},$$

und weil x mindestens gleich 1 ist, so ist umsomehr:

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x};$$

nun ist

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} = 0{,}393409\ldots,$$

also

$$\varepsilon_{3x} < 0{,}393409\cdots \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6x}.$$

Bildet man die gewöhnlichen Logarithmen von beiden Seiten, so folgt:

18) $$\log \varepsilon_{3x} < \overline{1}{,}594844 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x} + (\overline{3}{,}3942331)\, x.$$

Für $x = 1$ hat man bereits

$$\log \varepsilon_3 < \overline{4}{,}9890775,$$

also $\varepsilon_3 < \frac{1}{1000}$; für $x = 10$ ist:

$$\log \varepsilon_{30} < \overline{27},047175,$$

und man sieht hieraus, dass man in diesem Beispiele für $x = 10$ die Berechnung von $l\Gamma(x+1)$ bis auf die 26[te] Dezimalstelle treiben kann, wenn man mit dem Gliede B_{30} abbricht.

Die Formel 17) beweist unsere Behauptung, dass die Stirlingsche Reihe $l\Gamma(x+1)$ allgemein mit einer Annäherung berechnen lässt, die um so grösser wird, je beträchtlicher x ist.

546. Man erhält brauchbare Formeln, indem man die Reihe von Stirling ein- oder mehrmal differentiiert; da diese aber eine divergente Reihe ist, so wird auch das nämliche bei den anderen der Fall sein. Indessen können sie doch auch, ebenso wie die Stirlingsche, zur numerischen Rechnung dienen, was wir nun zeigen wollen. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass die Grösse θ, welche in dem letzten Gliede der Reihe 7) vorkommt, unabhängig von x ist. Differentiiert man demnach diese Gleichung μ mal, so wird:

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu l\varphi(x)}{dx^\mu} = \frac{B_1}{1.2}\int_0^\infty e^{-xy} y^\mu\, dy - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-xy} y^{\mu+2n-2}\, dy$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^\infty \theta e^{-xy} y^{\mu+2n}\, dy.$$

Indem man nun ebenso vorgeht wie bei der Ableitung der Gleichung 8) aus 7), findet man:

$$19)\quad \begin{cases} (-1)^\mu \dfrac{d^\mu l\varphi(x)}{dx^\mu} = B_1 \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)}\dfrac{1}{x^{\mu+1}} - B_2\dfrac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(5)}\dfrac{1}{x^{\mu+3}} + \cdots \\ + (-1)^{n-1} B_n \dfrac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)}\dfrac{1}{x^{\mu+2n-1}} + (-1)^n \theta B_{n+1}\dfrac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)}\cdot\dfrac{1}{x^{\mu+2n+1}}. \end{cases}$$

θ bezeichnet stets eine Grösse zwischen 0 und 1. Wenn x hinreichend gross ist, so nehmen die Glieder auf der rechten Seite zunächst ab, wie bei der Stirlingschen Reihe, und der Fehler, welchen man begeht, indem man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht, ist kleiner als das folgende Glied und von demselben Zeichen wie dieses. Für den besonderen Fall $\mu = 1$ erhält man:

$$20)\quad \frac{dl\varphi(x)}{dx} = -\frac{B_1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{B_2}{4}\frac{1}{x^4} - \cdots + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\frac{1}{x^{2n}} + (-1)^{n+1}\theta \frac{B_{n+1}}{2n+2}\frac{1}{x^{2n+2}}.$$

Aus der Gleichung 15) im § 537 gewinnt man durch Differentiation:

$$\frac{dl\Gamma(x+1)}{dx} = l(x) + \frac{1}{2x} + \frac{dl\varphi(x)}{dx},$$

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu l\Gamma(x+1)}{dx^\mu} = \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + (-1)^\mu \frac{d^\mu l\varphi(x)}{dx^\mu},$$

also ist:

$$21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dl\Gamma(x+1)}{dx} &= l(x) + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2}\frac{1}{x^2} + \cdots + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\frac{1}{x^{2n}} \\ &\qquad + (-1)^{n+1}\theta \frac{B_{n+1}}{2n+2}\frac{1}{x^{2n+2}}, \end{aligned}\right.$$

$$22)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^\mu \frac{d^\mu l\Gamma(x+1)}{dx^\mu} &= \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + B_1 \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)}\frac{1}{x^{\mu+1}} + \cdots \\ &\qquad + (-1)^{n+1} B_n \frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)}\frac{1}{x^{\mu+2n-1}} \\ &\qquad + (-1)^n \theta B_{n+1} \frac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)}\frac{1}{x^{\mu+2n+1}}. \end{aligned}\right.$$

547. Die erhaltenen Resultate liefern ein sehr einfaches Mittel, um die Eulersche Konstante zu berechnen, welche wir mit C bezeichnet haben. Wir gehen von der Gleichung 2) im § 523 aus, bei welcher x als ganze positive Zahl vorausgesetzt ist und welche, wenn man x in $x+1$ verwandelt, die Form erhält:

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{dl\Gamma(x+1)}{dx}.$$

Ersetzt man $\frac{dl\Gamma(x+1)}{dx}$ durch seinen Wert aus der Gleichung 21), so folgt:

$$C=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}\right)-l(x)-\frac{1}{2x}+\frac{B_1}{2x^2}-\frac{B_2}{4x^4}+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2nx^{2n}}+\cdots,$$

und der Fehler, welchen man begeht, indem man mit dem Gliede, das B_n enthält, abbricht, ist seinem Betrage nach kleiner als $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)\,x^{2n+2}}$. Ersetzt man also die Zahlen B durch ihre Werte, so findet man:

$$C=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}\right)-l(x)-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{120x^4}+\frac{1}{252x^6}$$
$$-\frac{1}{240x^8}+\frac{1}{132x^{10}}-\frac{691}{32760\,x^{12}}+\cdots,$$

und bricht man die Entwickelung mit dem zuletzt geschriebenen Gliede ab, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{12x^{14}}$. Wählt man also $x=10$, so hat man die Gleichung:

$$C=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-l(10)-\frac{1}{20}+\frac{0{,}01}{12}-\frac{0{,}0001}{120}+\frac{0{,}000001}{252}$$
$$-\frac{0{,}00000001}{240}+\frac{0{,}0000000001}{132}-\frac{0{,}000000000691}{32760},$$

die den Wert von C auf 15 genaue Dezimalstellen angiebt.

Es ist

$$l(10)=2{,}302\;585\;092\;994\;045\;68$$

und

$$C=0{,}577\;215\;664\;901\;532,$$

wie schon im § 522 angegeben wurde.

548. Wir haben im § 542 eine Formel kennen gelernt, aus welcher man successive die Zahlen B_1, B_2, $B_3\ldots$ berechnen kann. Man kann ganz allgemein für B_n einen Ausdruck aufstellen, der von Transscendenten frei, allerdings aber etwas kompliziert ist. Immerhin halten wir es für nützlich, denselben zum Schlusse dieses Kapitels mitzuteilen. Die Bernoullischen Zahlen sind durch die Gleichung 6), § 541, definiert, der man die Form geben kann:

$$23)\quad \frac{1}{e^\alpha-1}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}\alpha-\frac{B_2}{4!}\alpha^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\alpha^{2n-1}+\cdots;$$

nun ist identisch:

$$\frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{e^z-1}-\frac{2}{e^{2z}-1}.$$

Ersetzt man die Quotienten der rechten Seite durch ihre Reihen, indem man die obige Entwickelung für $\alpha=z$ und $\alpha=2z$ bildet, so folgt:

$$24)\quad \frac{1}{e^z+1}=\frac{1}{2}-(2^2-1)\frac{B_1}{2!}z+(2^4-1)\frac{B_2}{4!}z^3-\cdots+(-1)^n(2^{2n}-1)\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}+\cdots$$

und diese Reihe ist konvergent für alle Werte von z, deren Modul kleiner ist als π. Also ist nach der Mac-Laurinschen Formel:

$$25)\qquad (-1)^n\frac{2^{2n}-1}{2n}B_n=\frac{d^{2n-1}\dfrac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}}\qquad (\text{für } z=0).$$

Die erste Ableitung der Funktion $(e^z+1)^{-1}$ ist $\dfrac{-e^z}{(e^z+1)^2}$, und es ist leicht zu sehen, dass man allgemein die Gleichung erhält:

$$\frac{d^{2n-1}(e^z+1)^{-1}}{dz^{2n-1}}=\frac{A_1e^{(2n-1)z}+A_2e^{(2n-2)z}+\cdots+A_{2n-1}e^z}{(e^z+1)^{2n}}.$$

Die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$ sind unabhängig von z. Weiter aber erkennt man aus der Gleichung 24), dass die erste Ableitung der Funktion $(e^z+1)^{-1}$ eine paare Funktion von z ist, die sich nicht ändert, wenn man z in $-z$ verwandelt. Dasselbe gilt dann auch für alle Ableitungen ungerader Ordnung. Durch diese Verwandlung von z in $-z$ wird aber der vorstehende Ausdruck:

$$\frac{A_{2n-1}e^{(2n-1)z}+A_{2n-2}e^{(2n-2)z}+\cdots+A_1z}{(e^z+1)^{2n}},$$

es muss also allgemein $A_{2n-i}=A_i$ sein, d. h.

$$26)\quad \frac{d^{2n-1}(e^z+1)^{-1}}{dz^{2n-1}}=\frac{A_1[e^{(2n-1)z}+e^z]+\cdots+A_{n-1}[e^{(n+1)z}+e^{(n-1)z}]+A_ne^{nz}}{(e^z+1)^{2n}}.$$

Nun ist weiter:

$$\frac{1}{e^z+1}=\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}=e^{-z}-e^{-2z}+e^{-3z}-\cdots+(-1)^{\mu-1}e^{-\mu z}+\cdots,$$

also:

$$\frac{d^{2n-1}(e^z+1)^{-1}}{dz^{2n-1}} = -e^{-z} + 2^{2n-1}e^{-2z} - 3^{2n-1}e^{-3z} + \cdots$$
$$+ (-1)^\mu \mu^{2n-1} e^{-\mu z} + \cdots;$$

ferner ist

$$(e^z+1)^{2n} = e^{2nz} + \frac{2n}{1}e^{(2n-1)z} + \cdots + \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-i+1)}{i!}e^{(2n-i)z} + \cdots$$
$$+ 2ne^z + 1.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen, so folgt aus der Gleichung 26):

$$A_1[e^{(2n-1)z} + e^z] + \cdots + A_{n-1}[e^{(n+1)z} + e^{(n-1)z}] + A_n e^{nz}$$
$$= [-e^{-z} + 2^{2n-1}e^{-2z} + \cdots + (-1)^\mu \mu^{2n-1}e^{-\mu z} + \cdots]$$
$$\times \left[e^{2nz} + \frac{2n}{1}e^{(2n-1)z} + \cdots + \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-i+1)}{i!}e^{(2n-i)z} + \cdots + 2ne^z + 1\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Funktion von e^z. Führt man also das Produkt auf der rechten Seite aus, so bleiben nur solche Glieder noch, welche positive Potenzen von e^z enthalten. Da die Glieder mit dem Faktor $e^{(2n-\mu)z}$ auf beiden Seiten einander gleich sind, so findet man

$$A_1 = -1$$

und für die Werte von μ grösser als 1:

$$27)\quad \begin{cases} A_\mu = (-1)^\mu \Big[\mu^{2n-1} - \frac{2n}{1}(\mu-1)^{2n-1} + \cdots \\ \qquad + (-1)^i \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-i+1)}{i!}(\mu-i)^{2n-1} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{\mu-1}\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-\mu+2)}{\mu-1!}1^{2n-1}\Big]. \end{cases}$$

Die Formeln 25) und 26) ergeben:

$$(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n}B_n = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + \frac{1}{2}A_n\right).$$

Also ist:

$$\frac{(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n}B_n$$
$$= -1 + (2^{2n-1} - 2n) - \left(3^{2n-1} - 2n\,2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2!}\right) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\left((n-1)^{2n-1} - 2n(n-2)^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{2n\ldots(n+3)}{(n-2)!}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(-1)^n\left(n^{2n-1} - 2n(n-1)^{2n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n\ldots(n+2)}{(n-1)!}\right).$$

Vereinigt man schliesslich die mit n^{2n-1}, $(n-1)^{2n-1}$ u.s.w. multiplizierten Glieder, so erhält man:

$$
28)\left\{\begin{aligned}
&\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n}B_n \\
&=\frac{1}{2}n^{2n-1}-\left(1+\frac{1}{2}\frac{2n}{1}\right)(n-1)^{2n-1}+\left(1+\frac{2n}{1}+\frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)}{1.2}\right)(n-2)^{2n-1} \\
&-\left(1+\frac{2n}{1}+\frac{2n(2n-1)}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\right)(n-3)^{2n-1} \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

eine Gleichung, in welcher das Gesetz, nach welchem die aufeinander folgenden Glieder zu berechnen sind, evident ist. Das Produkt der n^{ten} Bernoullischen Zahl mit $2^{2n-1}(2^{2n}-1)$ ist gleich einem ganzen Vielfachen von n.

Dieser letzte Satz ist von Herrn Lipschitz verallgemeinert worden: Journal f. Mathem. Bd. 96.

Viertes Kapitel.

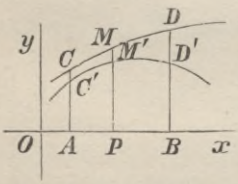
Die Quadratur und Rektifikation von Kurven.

Die Quadratur ebener Kurven.

549. Die Integration des Differentiales $f(x)\,dx$ wird häufig mit dem Namen *Quadratur* bezeichnet. In der That ist diese Operation, wie wir gesehen haben (§ 407) dieselbe, wie die, welche man auszuführen hat, um die Fläche zwischen der Kurve, deren Ordinaten $f(x)$ sind, der Abscissenaxe und zwei bestimmten Ordinaten zu berechnen.

Soll die Fläche gemessen werden, welche zwischen zwei gegebenen Kurven CMD, $C'M'D'$ und den Ordinaten $CC'A$ und $DD'B$ liegt, die den Abscissenwerten x_0 und X entsprechen, so hat man zu bemerken, dass diese Fläche die Differenz von $CDBA$ und $C'D'BA$ ist. Bezeichnet man also mit y und y' die Ordinaten MP, $M'P$ der beiden Kurven, die der variabelen Abscisse x entsprechen, so ist die gesuchte Fläche, im Falle rechtwinkliger Koordinaten

Fig. 2.



$$\int_{x_0}^{X} y\,dx - \int_{x_0}^{X} y'\,dx = \int_{x_0}^{X} (y - y')\,dx.$$

Diese Formel ist auch anwendbar auf den Fall, dass man die Fläche eines Segmentes sucht, zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne. Alsdann ist y' eine lineare Funktion gleich $ax + b$.

Eine ebene Fläche, welche von irgend welchen Kurvenstücken, die analytisch definiert sind, begrenzt ist, kann immer in mehrere positive oder negative Teile zerlegt werden, die einzeln berechenbar sind, wie wir noch näher angeben werden.

Bei den Problemen der Quadratur sind aber nicht immer nur geradlinige Koordinaten die Variabelen, welche man anzuwenden hat. Insbesondere ist es häufig von Vorteil, Polarkoordinaten einzuführen. Alsdann bestimmt man die Flächen gewisser Sektoren, welche von einem Kurvenbogen und zwei Radienvektoren begrenzt werden. Nennt man ϱ, ω die Polarkoordinaten, ω_0 und Ω die Werte von ω, welche zu den beiden äusseren Radien gehören, so wird der allgemeine Ausdruck für die Fläche solch eines Sektors (§ 201):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2\, d\omega.$$

Will man die Fläche bestimmen, welche zwischen zwei gegebenen Kurven und den Radienvektoren, die zu ω_0 und Ω gehören, gelegen ist, so hat man die Formel

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\Omega} (\varrho^2 - \varrho'^2)\, d\omega$$

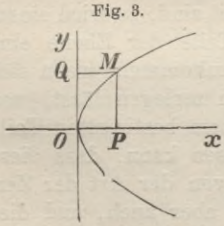
anzuwenden, in welcher ϱ und ϱ' die Radienvektoren der beiden Kurven bedeuten.

Schon in der Differentialrechnung haben wir verschiedene Beispiele von Quadraturen gegeben, bei denen sich die Integration unmittelbar ausführen lässt. Wir fügen diesen hier noch einige andere hinzu.

Dass ein von einer beliebigen geschlossenen, sich selbst nicht durchschneidenden Kurve begrenztes Stück der Ebene eine bestimmte Flächengrösse besitzt, ist ein Satz, welcher bewiesen werden muss (§ 187). Hat man als Masseinheit der Flächengrössen etwa ein Quadrat gewählt, dessen Seiten gleich der Längeneinheit sind, so wird einem von einer geschlossenen Kurve begrenzten Teile der Ebene eine bestimmte Flächengrösse dann und nur dann zukommen, wenn sich derselbe in eine bestimmte Anzahl von Teilen zerlegen lässt, von denen jeder gleich der Flächeneinheit oder einem bestimmten Teile derselben ist, und wenn man zugleich beweisen kann, dass diese Summe von Teilgrössen ganz unabhängig ist von der Art der Zerlegung. An Stelle der Zerlegung kann man aber auch, und dies geschieht in den meisten Fällen, das Verfahren einschlagen, dass man ein Polygon konstruiert, welches die gegebene ebene Fläche umfasst, und ein anderes, welches kleiner ist als dieselbe. Wenn die Inhalte dieser beiden Polygone einander beliebig genähert werden können, so konvergieren ihre Flächenzahlen nach einer bestimmten Grenze, und diese ist zugleich die Grösse der zu bestimmenden Fläche; denn in diesem Falle wird evident, dass jede Zerlegung dieser Fläche zu derselben Grösse führen muss. Man gewinnt demnach die Anschauung, dass ein begrenztes ebenes Gebiet jedesmal dann eine bestimmte Flächengrösse besitzt, die man vermittelst Ein- oder Umschreibung von Polygonen mit beliebiger Annäherung darstellen kann, wenn sich sämtliche Punkte der Begrenzung in eine endliche Anzahl von Polygonen einschliessen lassen, deren Flächensumme beliebig klein wird, mag dabei auch die Anzahl der Polygone oder der Polygonseiten schliesslich über jede Grenze hinaus wachsen. Ein solches Punktsystem kann man ein *lineares* System innerhalb der Ebene im Gegensatz zu einem *ebenen* nennen, bei welchem die Summe der einschliessenden Flächen endlich bleibt. (Ist diese Bedingung von den Grenzpunkten nicht erfüllt, so bedarf es einer umfassenderen Definition des Inhaltes, die auch in der That zu einer bestimmten Grösse führt. Math. Annal., Bd. 24). Durch die vorstehenden Integralsätze werden nun überdies Bedingungen erkannt, welche von der Begrenzungskurve erfüllt sein müssen, damit die bestimmte Flächenzahl durch einfache Integration berechenbar ist. So sagt z. B. die gewöhnliche Gleichung der Quadratur im geradlinigen Koordinatensysteme aus: Wenn die Punkte der begrenzenden Kurve durch parallele Projektion eindeutig auf die Punkte einer Geraden, die zur Abscissenaxe gewählt wird, bezogen werden können, oder wenn sich die ebene Fläche in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegen lässt, für deren Begrenzung diese eindeutige Zuordnung möglich ist, so ist der Inhalt der Fläche durch *ein* bestimmtes Integral oder durch mehrere ausdrückbar, falls die Ordinaten der Kurvenpunkte, d. h. die Längen der projizierenden Linien eine stetige (oder auch nur integrierbare) Funktion der Abscissenwerte sind.

550. Parabolische Kurven. Unter diesem Namen begreift man alle die Kurven, welche sich im geradlinigen Koordinatensysteme durch eine Gleichung von der Form

Fig. 3.



$$y^m = p x^n$$

darstellen lassen, wobei die Exponenten m und n positiv sind.

Wir bezeichnen mit u die Fläche OMP zwischen der Kurve, der Abscissenaxe und der Ordinate $MP = y$. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx,$$

also

$$u = p^{\frac{1}{m}} \int_0^x x^{\frac{n}{m}}\, dx = \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}+1} = \frac{m}{m+n} xy;$$

das Produkt xy ist gleich der Fläche des Rechteckes $OPMQ$, konstruiert mit den Koordinaten des Punktes M; also ist

$$\frac{OMP}{OPMQ} = \frac{m}{m+n} \quad \text{oder} \quad \frac{OMP}{OMQ} = \frac{m}{n}.$$

Die parabolische Kurve teilt also die Fläche des Rechteckes in zwei Teile, die in dem Verhältnis der Zahlen m und n zu einander stehen.

Umgekehrt ist auch jede Kurve, welche diese Eigenschaft hat, eine parabolische; denn die obige Gleichung, nämlich

$$\frac{u}{xy - u} = \frac{m}{n}$$

liefert

$$u = \frac{m}{m+n} xy, \quad du = y\,dx = \frac{m}{m+n}(x\,dy + y\,dx)$$

und

$$n\frac{dx}{x} - m\frac{dy}{y} = 0 \quad \text{oder} \quad dl(x^n) - dl(y^m) = 0.$$

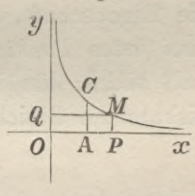
Hieraus folgt, dass das Verhältnis $\frac{y^m}{x^n}$ eine Konstante ist.

551. Hyperbolische Kurven. Mit diesem Namen bezeichnet man alle Kurven, die sich in geradlinigen Koordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$x^n y^m = p$$

darstellen lassen, wobei m und n positive Exponenten bedeuten. Wir nehmen an, dass m nicht kleiner sei als n, und betrachten den Zweig der Kurve, welcher zu positiven Koordinaten gehört und die beiden Axen zu Asymptoten hat.

Fig. 4.



Es seien $AC = y_0$ und $MP = y$ die Ordinaten, welche zu den Abscissen x_0 und x gehören, u die Fläche zwischen diesen Koordinaten, der Abscissenaxe und der Kurve. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist alsdann

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}}\, dx,$$

also wird, abgesehen vom Falle $m = n$:

$$u = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} \left(x^{\frac{m-n}{m}} - x_0^{\frac{m-n}{m}} \right);$$

man sieht hieraus, dass die Fläche u über jede Grenze hinaus wächst, wenn x unendlich wird, dass sie dagegen nach einer bestimmten Grenze

$$U = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} xy$$

konvergiert, wenn x_0 null wird. Diese Formel besagt, dass die Fläche U, welche sich ins Unendliche erstreckt, zu dem Rechteck $OPMQ$, das mit den Koordinaten des Punktes M konstruiert ist, in dem konstanten Verhältnisse von m zu $m-n$ steht.

Diese Eigenschaft kommt nur den hyperbolischen Kurven zu, denn die obige Formel ergiebt

$$dU = y\,dx = \frac{m}{m-n}(x\,dy + y\,dx),$$

und hieraus folgt:

$$m\frac{dy}{y} + n\frac{dx}{x} = 0 \quad \text{oder} \quad dl(x^n y^m) = 0, \quad \text{also} \quad x^n y^m = \text{const.}$$

552. Die Lemniskate. Unter den Kurven, deren Quadratur im Sinne der Geometrie vollkommen ausführbar ist, ist die Lemniskate von Bernoulli zu bemerken. Diese Kurve hat die Eigenschaft, *dass die Entfernungen jedes Kurvenpunktes von zwei festen Punkten, deren Abstand* 2a *ist, ein konstantes Produkt bilden, nämlich* a². In Polarkoordinaten erhält die Lemniskate die Gleichung

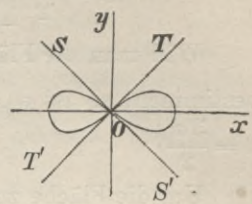
$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega;$$

ϱ bezeichnet den vom Centrum ausgehenden Radiusvektor. Die Fläche u eines Sektors, der durch die beiden Radien begrenzt ist, welche zu den Werten ω_0 und Ω von ω gehören, wird:

$$u = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2\,d\omega = a^2 \int_{\omega_0}^{\Omega} \cos 2\omega\,d\omega = \frac{a^2}{2}(\sin 2\Omega - \sin 2\omega_0).$$

Die Kurve ist symmetrisch zur Polaraxe Ox und der dazu senkrechten Axe Oy; sie besteht aus zwei geschlossenen Zweigen, deren Tangenten TT', SS' im Centrum O unter einem Winkel von 45^0 zur Axe geneigt sind. Will man also die Fläche bestimmen, welche von der einen Hälfte umschlossen wird, so hat man $\omega_0 = -\frac{\pi}{4}$ und $\Omega = \frac{\pi}{4}$ zu setzen, und dies ergiebt

Fig. 5.

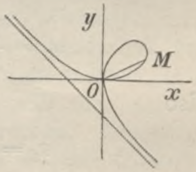


$$u = a^2.$$

553. Folium von Descartes. Die unter diesem Namen bekannte Kurve hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

Fig. 6.



a ist ein gegebener Parameter. Die Kurve hat eine Asymptote, nämlich die Gerade

$$x + y + a = 0.$$

Im Koordinatenanfangspunkt besitzt sie einen Doppelpunkt, die Tangenten desselben fallen mit den Axen zusammen. Substituiert man für x und y Polarkoordinaten ϱ und ω mittelst der Gleichungen:

$$x = \varrho \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\omega,$$

so wird die Gleichung der Kurve

$$\varrho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega},$$

und die der Asymptote

$$\varrho_1 = \frac{-a}{\sin\omega + \cos\omega}.$$

Die Fläche zwischen der Kurve und zwei Radien, die zu den Werten ω_0 und Ω gehören, wird demnach

$$u = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2 d\omega = \frac{3a^2}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{3 \operatorname{tang}^2\omega \dfrac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1 + \operatorname{tang}^3\omega)^2}.$$

Die Grösse unter dem Integrale ist das Differential von $-\frac{1}{1+\operatorname{tang}^3\omega}$, also ist

$$u=\frac{3a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{tang}^3\omega_0}-\frac{1}{1+\operatorname{tang}^3\Omega}\right].$$

Will man die Fläche der von der Kurve gebildeten Schleife bestimmen, so ist $\omega_0=0$, $\Omega=\frac{\pi}{2}$ zu setzen, und dies ergiebt $u=\frac{3a^2}{2}$.

Um die Fläche zu berechnen, die zwischen einem Teile der Kurve, ihrer Asymptote und zwei Radienvektoren liegt, muss man u von der Fläche u_1 abziehen, die durch die Asymptote und den zwei Radien begrenzt ist. Diese Fläche ist ein Dreieck, und man erhält für dieselbe den Ausdruck

$$u_1=\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\Omega}\varrho_1{}^2\,d\omega=\frac{a^2}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\Omega}\frac{\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1+\operatorname{tang}\omega)^2},$$

also

$$u_1=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{tang}\omega_0}-\frac{1}{1+\operatorname{tang}\Omega}\right].$$

Mithin folgt:

$$u_1-u=\frac{a^2}{2}\left[\frac{2-\operatorname{tang}\Omega}{1-\operatorname{tang}\Omega+\operatorname{tang}^2\Omega}-\frac{2-\operatorname{tang}\omega_0}{1-\operatorname{tang}\omega_0+\operatorname{tang}^2\omega_0}\right].$$

Will man die unendliche Fläche berechnen zwischen der Kurve, der Asymptote und dem negativeu Teile der x-Axe, so hat man $\omega_0=\frac{3\pi}{4}$, $\Omega=\pi$ zu setzen; hieraus folgt:

$$u_1-u=\frac{a^2}{2}.$$

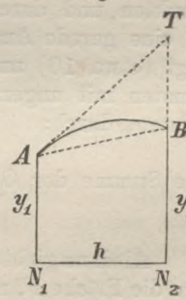
Den nämlichen Wert bekommt, wie leicht zu sehen, die zwischen der negativen y-Axe, der Kurve und ihrer Asymptote enthaltene Fläche. Addiert man zu diesen beiden Flächen das Dreieck, welches von der Asymptote und den beiden Axen gebildet wird, das ebenfalls gleich $\frac{a^2}{2}$ ist, so erhält man die gesamte Fläche $\frac{3a^2}{2}$ zwischen der ganzen Kurve und ihrer Asymptote. Diese Fläche ist ebenso gross wie die der Schleife.

Über angenäherte Berechnung ebener Flächen vermittelst linearer Messungen.

Soll der Flächeninhalt einer gezeichnet vorliegenden, von Kurven begrenzten ebenen Fläche bestimmt werden, bei welcher die Gleichung der Begrenzungskurve nicht gegeben ist, so erfordert die Bestimmung der Flächengrösse entweder besondere mechanische Hilfsmittel, wie z. B. das Planimeter, oder sie wird mit Annäherung durch lineare Messungen geleistet. Ebenso erfordert die analytische Berechnung des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn $f(x)$ eine Funktion ist, deren Integral sich nicht durch die elementaren Funktionen darstellen lässt, besonderer Annäherungsmethoden, indem man z. B., falls dies möglich ist, die Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt, oder dieselbe nach der Interpolationsmethode von Lagrange durch ein rationales Polynom ersetzt. In Bezug auf diese letztere Methode, die durch das Verfahren von Gauss (Ges. Werke, Bd. 3) zu einem wichtigen analytischen Hilfsmittel ausgebildet ist, verweise ich insonderheit auf den Abschnitt über „Mechanische Quadratur" in dem Handbuche der Kugelfunktionen, Bd. 2 von Heine, und will hier nur in Kürze die einfachsten Messungsmethoden besprechen. Dieselben sind von Herrn Mansion ausführlich behandelt worden *(Annales de la société scientif. de Bruxelles, 1881;* siehe auch Civilingenieur, Bd. 28).

Um den Flächeninhalt eines gezeichnet vorliegenden Diagrammes zu bestimmen, welches wir uns durch Parallele zur Ordinatenaxe in zum Teil geradlinig begrenzte Gebiete oder Flächenstreifen zerlegt denken, zu bestimmen, hat man an Stelle der krummlinig begrenzten Fläche zwei Polygone einzuführen, von denen das eine seinem Inhalte nach grösser, das andere kleiner ist, als die zu bestimmende Fläche. In der Konstruktion dieser Polygone, welche eine obere und eine untere Grenze für die gesuchte Flächenzahl liefern, muss zugleich die Möglichkeit einer beliebigen Annäherung enthalten sein. Dabei wird man, sobald es sich um eine graphisch (und nicht analytisch) gegebene Kontour handelt, die Benutzung der Ableitungen ausschliessen, weil die Konstruktion von Tangenten eine neue Fehlerquelle herbeiführen würde. Für einen einzelnen Flächenstreifen ABN_2N_1 (Fig. 7) bildet, wenn die konkave Seite der Fläche der Abscissenaxe zugekehrt ist, das gleichnamige Trapez ABN_2N_1 eine untere Grenze. Zur

Fig. 7.



Konstruktion einer brauchbaren oberen Grenze ist aber die Tangente in irgend einem Punkte der Kurve erforderlich. In diesem Umstande liegt es begründet, dass man die auszumessende Fläche in eine gerade Anzahl von Streifen zu zerlegen sucht. Denn konstruiert man für den Doppelstreifen (Fig. 8) die Tangente im mittleren Punkte B, so ist der Inhalt des Trapezes, welches durch diese Tangente, sowie durch die Abschnitte derselben auf den Ordinaten y_1 und y_3 bestimmt wird, gleich $2hy_2$, also durch die mittlere Ordinate ausdrückbar, ohne dass die Tangente gezeichnet werden muss.

Fig. 8.

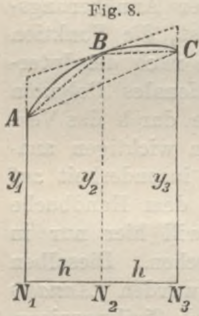
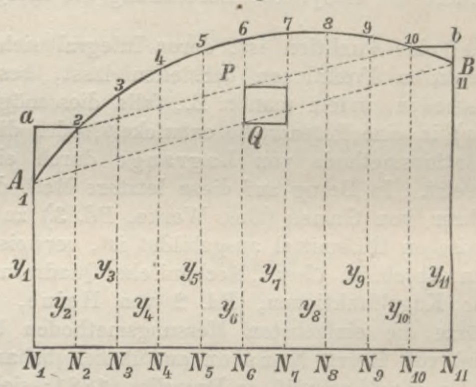


Fig. 9.



Demnach betrachten wir im folgenden ein Diagramm (Fig. 9), begrenzt erstlich durch die Kurve AB, bei welcher sich der Sinn der Krümmung nicht ändert, die also etwa durchweg ihre konkave Seite nach unten kehrt, ferner durch die Ordinaten in den Endpunkten und durch die Abscissenaxe. Wir denken uns dasselbe in eine gerade Anzahl von Streifen mit der gleichen Breite h zerlegt (etwa 10) und bezeichnen im folgenden die Summe der Ordinaten mit ungeradem Index, mit Ausnahme der ersten und der letzten, durch:

$$u = y_3 + y_5 + y_7 + y_9,$$

die Summe der Ordinaten mit geradem Index durch:

$$g = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}.$$

Alsdann giebt es nur eine einzige leicht berechenbare obere Grenze für die Fläche F, nämlich die Summe der Trapeze, welche durch die Tangenten in den Punkten 2, 4, 6, 8, 10 der Kurve gebildet werden und die Breite $2h$ besitzen. Die Summe ihrer Flächenzahlen ist:

$$M = 2h(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) = 2hg,$$

und es ist

$$M > F.$$

Brauchbare untere Grenzen lassen sich dagegen auf dreierlei Weisen bilden. Die erste, bei welcher nur die Ordinaten mit geradem Index und ausserdem die erste und letzte benutzt werden, erhält man, indem man die Geraden 12, 24, 46, 68, 810, 1011 zieht. Die Summe m_1 der auf diese Weise konstruierten sechs Trapeze wird gleich:

$$m_1 = h\left[\frac{1}{2}(y_1 + y_2) + (y_2 + y_4) + \cdots + (y_8 + y_{10}) + \frac{1}{2}(y_{10} + y_{11})\right],$$

oder $m_1 = 2gh - hd$, wobei $d = \frac{1}{2}(y_2 + y_{10}) - \frac{1}{2}(y_1 + y_{11})$ ist.

Die zweite untere Grenze, im allgemeinen minder genau, weil die Anzahl der Trapeze, aus denen sie sich zusammensetzt, um eins kleiner ist, erhält man, wenn man nur die Ordinaten mit ungeradem Index benutzt, indem man die Linien 13, 35, ... 911 zieht; es wird:

$$m_2 = h[(y_1 + y_3) + (y_3 + y_5) + \cdots + (y_9 + y_{11})] = 2hu + h(y_1 + y_{11}).$$

Endlich die dritte, welche der gesuchten Fläche am nächsten kommt, wird durch die Verbindung von je zwei auf einander folgenden Punkten gebildet; sie ergiebt den Wert:

$$m_3 = \frac{h}{2}[(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_{10} + y_{11})],$$

oder:

$$m_3 = \frac{h}{2}[2g + 2u + y_1 + y_{11}].$$

Die Formel von Poncelet setzt die gesuchte Fläche gleich dem arithmetischen Mittel aus den Grenzen M und m_1; ich bezeichne diesen Näherungswert mit F_1. Es ist

$$F_1 = \frac{1}{2}(M + m_1) = 2hg - \frac{1}{2}hd.$$

Der Fehler ε_1 ist höchstens gleich $\pm\frac{1}{2}(M - m_1)$, also $\varepsilon_1 \leqq \frac{1}{2}hd$.

Diese Formel benutzt also, ausser der ersten und letzten Ordinate, nur die Ordinaten mit geradem Index; zugleich lässt sich der Maximalwert des Fehlers sehr leicht graphisch darstellen; es ist:

$$\frac{1}{2}(y_2 + y_{10}) - \frac{1}{2}(y_1 + y_{11}) = PQ, \qquad \text{(Fig. 9)}$$

also hd gleich dem Rechtecke aus der Höhe PQ und der Breite h. Es ist aber auch

$$hd = h\left[\frac{1}{2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(y_{10} - y_{11})\right] = \Delta(1, 2, a) + \Delta(10, 11, b),$$

wobei die Dreiecke mit positivem oder negativem Zeichen zu berechnen sind, je nachdem $y_2 - y_1$ und $y_{10} - y_{11}$ positiv oder negativ ausfallen.

Die Formel von Parmentier geht von der Voraussetzung aus, dass die gesuchte Fläche der Grenze M näher kommt, als der Grenze m_1, wie das auch der Anblick der Figur bei Kurven, die nicht besonders stark gekrümmt sind, lehrt. Sie führt daher diese Grenzen mit verschiedenem Gewichte ein und setzt

$$F_2 = \frac{1}{3}(2M + m_1) = 2gh - \frac{1}{3}hd.$$

Der Fehler ε_2 kann hier gleich werden der Differenz $F_2 - m_1 = \frac{2}{3}hd$, die Fehlergrenze ist also, allgemein zu reden, ungünstiger als im vorigen Falle. Diese Grenze wird aber nur dann nahezu erreicht werden, wenn die Voraussetzung, dass $F > \frac{1}{2}(M + m_1)$ ist, nicht zutrifft. Ist dieselbe richtig, so kann ε_2 nicht grösser werden als $\frac{1}{3}hd$.

Auch diese Formel benutzt nur ebensoviel Ordinaten, und zwar die nämlichen wie die Ponceletsche.

Die Trapezformel setzt die Fläche gleich der unteren Grenze m_3, benutzt also sämtliche elf Ordinaten. Sie ist aber nichts anderes als das arithmetische Mittel zwischen M und m_2; es ist:

$$F_3 = m_3 = \frac{1}{2}(M + m_2) = h\left[g + u + \frac{1}{2}(y_1 + y_{11})\right].$$

Mithin wird auch hierbei der für jede Annäherungsformel wesentlichen Forderung genügt, dass die Fehlergrenze angebbar ist; denn es ist:

$$\varepsilon_3 \leqq \frac{1}{2}(M - m_2) = h\left[g - u - \frac{1}{2}(y_1 - y_{11})\right] = \frac{1}{2}h\delta.$$

Diese Grösse δ ist nicht so einfach zu konstruieren, wie d, doch lässt auch sie sich graphisch darstellen; der Betrag von δ ist immer kleiner als der Betrag von $2d$. Man erkennt schon aus dieser Herleitung, dass die Trapezformel, obwohl sie mehr

Ordinaten benutzt, doch minder genau ist als die beiden vorhergehenden. Denn es wird bei derselben die im allgemeinen minder genaue untere Grenze m_2 eingeführt.

Die Simpsonsche Regel nimmt als obere Grenze M, als untere m_3; aber wiederum nicht so, dass sie das arithmetische Mittel aus diesen Werten bildet, sondern sie erteilt der unteren Grenze m_3 ein grösseres Gewicht. Sie setzt

$$F_4 = \frac{1}{3}(M + 2m_3) = \frac{1}{3}h\,[2u + 4g + y_1 + y_{11}].$$

Die Fehlergrenze wird durch die grössere der Zahlen $M - F_4$ und $F_4 - m_3$ bestimmt, ist also:

$$\varepsilon_4 \leqq \frac{1}{3}h\,[2g - 2u - (y_1 + y_{11})] = \frac{1}{3}h\delta;$$

wird aber, da F im allgemeinen zwischen m_3 und $\frac{1}{2}(M + m_3)$ liegt, in den meisten Fällen kleiner sein als $\frac{1}{6}h\delta$.

Diese Herleitung der Simpsonschen Regel stützt sich nicht auf die Flächenbestimmung einer Parabel zweiter Ordnung, bei welcher, ebenso wie bei der Parabel dritter Ordnung, diese Regel ein exaktes Resultat liefert, sondern benutzt lediglich das Prinzip der um- und eingeschriebenen Polygone. Bei der bisher üblichen Ableitung der Regel, in der man die gegebenen Kurve durch Parabelbögen ersetzt, fehlt der Nachweis, dass man wirklich eine angenäherte Berechnung erreicht, sowie die Bestimmung der Fehlergrenze.

Das in den Formeln von Parmentier und Simpson enthaltene Verfahren, die obere und untere Grenze mit verschiedenem Gewichte einzuführen, beruht auf folgender Überlegung. Bezeichnen M und m die Grenzen für eine Fläche, welche durch Teilung der Abscissenaxe in Intervalle von der Länge h gewonnen sind, so wird der Wert der Fläche F exakt bestimmt sein, sobald das Verhältnis der positiven Differenzen $M - F$ und $F - m$ bekannt ist. Bezeichnet man dasselbe mit z, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{M - F}{F - m} = z$$

die Relation:

$$F = \frac{M + zm}{1 + z}.$$

Es giebt also die Grösse z das Verhältnis der Gewichte an, mit denen M und m in die Rechnung einzuführen sind. Während nun der Wert von z bei einer beliebigen endlichen Teilung der Abscissenaxe keineswegs bekannt ist, so gelingt es doch in den meisten Fällen, den Grenzwert zu fixieren, welchem sich z kontinuierlich nähert, wenn die Länge h der Teilintervalle nach 0 konvergiert. Ist dieser Grenzwert von z fixierbar, gleich z_0, so wird es angezeigt sein, auch schon bei einer endlichen, jedoch kleinen Länge h diesen Wert für z einzuführen, also die Annäherungsformel

$$F_1 = \frac{M + z_0 m}{1 + z_0}$$

anzusetzen. Denn es ist der wahre Wert der Fläche:

$$F = \frac{M + (z_0 + \delta) m}{1 + z_0 + \delta},$$

wobei δ eine Grösse bezeichnet, die um so kleiner wird, je kleiner h gewählt ist; und mithin der Unterschied

$$F_1 - F = \frac{(M - m)\delta}{(1 + z_0)(1 + z_0 + \delta)}$$

eine Grösse, in der schliesslich *beide* Faktoren des Zählers nach null konvergieren.

Betrachtet man z. B. einen einzigen Flächenstreifen (Fig. 7) mit der Breite h. Es ist nach dem Taylorschen Satze, wenn wir die Grösse der Fläche mit $F(x+h) - F(x)$ bezeichnen und die Ableitungen als stetig voraussetzen:

$$F = F(x+h) - F(x) = hf(x) + \frac{1}{2} h^2 f'(x) + \frac{1}{6} h^3 f''(x_1),$$

$$m = \frac{1}{2} h (y_1 + y_2) = \frac{1}{2} h [f(x) + f(x+h)],$$

$$= hf(x) + \frac{1}{2} hf'(x) + \frac{1}{4} h^3 f''(x'),$$

$$M = h\left[f(x) + \frac{1}{2} hf'(x)\right].$$

Also:

$$M - F = -\frac{1}{6} h^3 f''(x_1), \quad F - m = \frac{1}{6} h^3 f''(x_1) - \frac{1}{4} h^3 f''(x'),$$

und also:

$$z = \frac{-\frac{1}{6} f''(x_1)}{\frac{1}{6} f''(x_1) - \frac{1}{4} f''(x')}.$$

Konvergiert nun h nach 0, so wird der Grenzwert von x_1 sowohl wie von x' gleich x und demnach wird der Grenzwert von z gleich

$$z_0 = 2.$$

Betrachtet man eine in zwei Streifen zerlegte Fläche (Fig. 8). Die Fläche F hat den Wert:

$$F(x+2h) - F(x) = 2h\,f(x) + 2h^2 f'(x) + \frac{4}{3}\,h^3 f''(x_2)$$
$$(x < x_2 < x + 2h).$$

Die obere Grenze, gebildet durch die Tangente im mittleren Punkt B, hat den Wert:

$$M = 2hy_2 = 2h\,f(x+h) = 2h\,f(x) + 2h^2 f'(x) + h^3 f''(x_1)$$
$$(x < x_1 < x + h).$$

Führt man als untere Grenze die Summe der Trapeze ABN_2N_1 und BCN_3N_2 ein, so wird:

$$m = \frac{h}{2}\,[y_1 + 2y_2 + y_3] = \frac{h}{2}\,[f(x) + 2f(x+h) + f(x+2h)]$$
$$= 2h\,f(x) + 2h^2 f'(x) + \frac{h^3}{2}\,[f''(x') + 2f''(x'')]$$
$$(x < x' < x + h) \qquad (x < x'' < x + 2h).$$

Also ist:

$$M - F = h^3\left[f''(x_1) - \frac{4}{3}\,f''(x_2)\right],$$

$$F - m = h^3\left[\frac{4}{3}\,f''(x_2) - \frac{1}{2}\,f''(x') - f''(x'')\right],$$

und folglich:

$$z = \frac{f''(x_1) - \frac{4}{3}\,f''(x_2)}{\frac{4}{3}\,f''(x_2) - \frac{1}{2}\,f''(x') - f''(x'')}.$$

Mithin ist:

$$z_0 = \frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}} = 2,$$

und demnach der beste Annäherungswert:

$$\frac{M+2m}{3} = \frac{h}{3}\,[y_1 + 4y_2 + y_3],$$

wie die Simpsonsche Regel in der That vorschreibt. Zugleich ersieht man, dass dieser Wert genau richtig ist, wenn $f''(x)$ konstant ist, also bei einer Parabel zweiter Ordnung.

Die Formeln von Poncelet und Parmentier, welche sich auf eine in $2n$ Streifen geteilte Fläche beziehen, benutzen als obere und untere Grenze die Grössen M und m derart, dass für den ersten und letzten Streifen die Grösse z den Wert 2 erhalten müsste, für alle mittleren gepaarten Streifen müsste dagegen z den Wert $\frac{1}{2}$ bekommen. Die Ponceletsche Formel setzt nun für z durchweg den Wert 1, die Parmentiersche durchweg den Wert $\frac{1}{2}$, und letzteres ist insofern vollkommen berechtigt und führt eine grössere Annäherung herbei, als die Anzahl der mittleren Trapeze im allgemeinen grösser sein wird, als die Zahl 2 der beiden äusseren.

Für die angenäherte Berechnung des Integrales $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ nach diesen Methoden ist es auch von Wert, dass man leicht Korrektionsglieder angeben kann, durch welche die Annäherung erheblich gesteigert wird, sobald die Funktion $f(x)$ nebst einigen ihrer ersten Ableitungen stetig ist, so dass man wenigstens bis zu einer gewissen Stelle die Taylorsche Entwickelung anwenden kann. Nur für die Simpsonsche Regel, als der schon ohnehin zweckmässigsten Methode, will ich dasselbe kurz ableiten. Für einen Doppelstreifen wird:

$$F = F(x+2h) - F(x) = 2hf(x) + 2h^2f'(x) + \frac{4}{3}h^3f''(x) + \frac{2}{3}h^4f'''(x) + \frac{4}{15}h^5f^4(x) + \cdots$$

$$F_4 = \frac{1}{3}(M+2m) = \frac{1}{3}h\,[f(x) + 4f(x+h) + f(x+2h)].$$

Entwickelt man die Differenz $F_4 - F$ nach Potenzen von h, so wird das Anfangsglied derselben gleich:

$$\frac{1}{90}h^5f^4(x) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{180}h^4[f^3(x+2h) - f^3(x)].$$

Ist also die gesamte Breite der in $2n$ Streifen zerlegten Fläche gleich $b - a = 2nh$, so wird hier die obere Grenze des Fehlers durch

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{180}(b - a)\, h^4 f^4(x_\mu) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{180} h^4 [f^3(b) - f^3(a)]$$

fixierbar, wobei $f^4(x_\mu)$ den Maximalwert der vierten Ableitung im ganzen Intervalle bedeutet.

Wir betrachten für den Vergleich der vier Methoden als Beispiel folgenden einfachen Fall. Die von der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ begrenzte Fläche hat, während x von 1 bis 2 variiert, den Wert:

$$\int_1 \frac{dx}{x} = l(2) = 0{,}69314718.$$

Teilt man das Intervall von 1 bis 2 in zehn gleiche Teile und berechnet die dazu gehörigen Ordinaten, so wird:

$$g = 3{,}45953943, \qquad u = 2{,}72817460.$$

Nach der Trapezregel ist:

$$F_3 = 0{,}69377140, \text{ die Differenz } F_3 - F = +\,0{,}00062422.$$

Nach der Ponceletschen Formel ist:

$$F_1 = 0{,}69352272, \text{ die Differenz } F_1 - F = +\,0{,}00037554.$$

Nach der Parmentierschen Formel ist:

$$F_2 = 0{,}69298444, \text{ die Differenz } F_2 - F = -\,0{,}00016274.$$

Nach der Simpsonschen Formel ist:

$$F_4 = 0{,}69315023, \text{ die Differenz } F_4 - F = +\,0{,}00000305.$$

Fügt man dem Werte von F_4 das Korrektionsglied hinzu, so wird der verbesserte Wert:

$$F'_4 = 0{,}69314710, \text{ also } F'_4 - F = 0{,}00000008.$$

Die Rektifikation der Kurven.

554. Das Problem der Rektifikation ebener oder räumlicher Kurven lässt sich im allgemeinen auf ein Integrationsproblem zurückführen und zwar in folgender Weise:

Es sei s der Bogen einer ebenen Kurve, gerechnet von einem bestimmten aber willkürlichen Anfangspunkt; im rechtwinkligen Koordinatensysteme ist alsdann (§ 189):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Wir haben diese Gleichung bewiesen unter der Voraussetzung, dass $\frac{dy}{dx}$ eine stetige Funktion von x ist. Mit Hilfe des allgemeinen Integralbegriffes (§ 458) lässt sich aber der Beweis auch führen, dass jedes der Kurve eingeschriebene Polygon einen Umfang besitzt, dessen Grenze bei beliebiger Verkleinerung aller Seiten eine bestimmte Grösse s ist, sobald der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ eine durchaus endliche und integrierbare Funktion von x ist. Ich führe diesen Beweis hier nicht näher aus, weil die Methoden, die dabei zur Anwendung kommen, bei dem Probleme der Quadratur krummer Flächen sich in ganz analoger Weise wiederholen und dort ausführlich besprochen werden sollen.

Bezeichnet man also mit t die unabhängige Variabele, mit t_0 und T die Werte von t, welche zu dem Anfangs- und dem Endpunkte eines Bogens S gehören, so erhält man, falls t sich stets in demselben Sinne ändert, während man den Bogen S durchläuft:

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Wendet man Polarkoordinaten ϱ und ω an und bezeichnet wiederum mit t die unabhängige Variabele, so ist (§ 202):

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\, d\omega^2}}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Ist insbesonders x oder ω die unabhängige Variabele, so wird

$$S = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{oder} \quad S = \int_{\omega_0}^{\Omega} \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 + \varrho^2}\, d\omega.$$

Analoge Formeln gelten für Raumkurven. Bezeichnet man mit s den Bogen einer beliebigen Kurve, gerechnet von einem bestimmten, aber willkürlichen Anfangspunkt, so wird bei rechtwinkligen Koordinaten

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

und wenn man Polarkoordinaten r, θ, ψ anwendet, so erhält dasselbe Differential die Form (§ 259):

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2}.$$

Bezeichnet also t die unabhängige Variabele, S den Bogen, dessen Grenzpunkte den Werten t_0 und T entsprechen, so wird

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}\, dt,$$

oder

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2}}{dt}\, dt.$$

Handelt es sich um eine sphärische Kurve, und wählt man den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Radienvektoren, so ist $r = \text{const}$, und mithin wird die vorige Formel

$$S = r \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}}{dt}\, dt.$$

In der Differentialrechnung haben wir bereits die Formel für den Bogen der Parabel abgeleitet, und zugleich wurden wir dort von selbst auf die Rektifikation einiger anderer Kurven geführt. Es wäre überflüssig, diese Beispiele hier zu vermehren, wir beschränken uns daher bloss auf einige, die ein besonderes Interesse für die Geometrie sowohl als auch für die Analysis darbieten.

Es ist bemerkenswert, dass die Rektifikation einer durch eine analytische Gleichung definierte Kurve vermittelst eines bestimmten Integrales nicht nur auf der selbstverständlich erscheinenden Voraussetzung beruht, dass diese Kurve stetig ist, sondern auch die davon unabhängige Bedingung erfordert, dass die Funktion

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

integrierbar ist. Da es Funktionen der Variabelen x giebt, welche sich mit x durchaus eindeutig und stetig ändern und für welche dennoch der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an jeder Stelle unbestimmt oder bestimmt unendlich wird, so folgt, wenn man die geometrische Vorstellung dieser Funktionen auch als Kurve bezeichnen will, dass es stetige Kurven giebt, deren Länge jedenfalls nicht auf dem angegebenen Wege der Integration ermittelt werden kann. Es bedarf einer direkten Untersuchung, ob für solch eine Kurve der Umfang eines eingeschriebenen Polygones stets nach derselben bestimmten Grenze konvergiert, wenn die Ecken des Polygones einander in irgend welcher Weise unbegrenzt genähert werden, und es giebt stetige Kurven, bei denen solch eine bestimmte endliche Grenze, also eine bestimmte Kurvenlänge, nicht vorhanden ist. Für die Integrierbarkeit der Funktion $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ist es eine hinreichende Bedingung, dass der Quotient $\frac{dy}{dx}$ integrierbar ist, was insbesondere dann eintritt, wenn er stetig ist. Kurven mit stetiger Änderung der Tangentenrichtung, oder solche, bei denen sich die Tangente nur in einzelnen Punkten unstetig ändert, haben daher immer eine bestimmte Länge.

Es kann eintreten, dass für eine durchaus im endlichen verlaufende und stetige Kurve der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an einer oder an mehreren Stellen eines Intervalles bestimmt oder unbestimmt unendlich wird. Im ersteren Falle ist an solch einer einzelnen Stelle die Tangente der Ordinatenaxe parallel, und wenn diese Stelle nicht zugleich einen Maximalwert für die Abscisse x darstellt, so dass die Kurve daselbst rückläufig wird, so ist sie zugleich ein Wendepunkt der Kurve. Alsdann besitzt auch die Bogenlänge immer einen bestimmten endlichen Wert, wiewohl die zu integrierende Funktion unendlich wird; diese Länge kann man dann auch definieren als den Grenzwert, nach welchem die Kurvenlänge, gerechnet von einem festen Anfangspunkte an, konvergiert, wenn der Endpunkt des Kurvenbogens dem betrachteten Punkte beliebig nahe rückt. Denn ist c ein Punkt, an welchem $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ in bestimmter Weise unendlich wird, so ist:

$$\int_{x_0}^{c}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_{x_0}^{c} f'(x)\sqrt{1+\frac{1}{f'^2}}\,dx,$$

also

$$\int_{c-\delta}^{c-\varepsilon} f'(x)\sqrt{1+\frac{1}{f'^2}}\,dx = M\left(\sqrt{1+\frac{1}{f'^2}}\right)\int_{c-\delta}^{c-\varepsilon} f'(x)\,dx$$
$$= M\left(\sqrt{1+\frac{1}{f'^2}}\right)[f(c-\varepsilon)-f(c-\delta)];$$

wobei der erste Faktor einen Mittelwert der Grösse $\sqrt{1+\frac{1}{f'^2}}$ im Intervalle von $c-\delta$ bis $c-\varepsilon$ bezeichnet. Da derselbe der Voraussetzung nach endlich bleibt, während der zweite Faktor durch Wahl von δ und $\varepsilon < \delta$ beliebig klein wird, so ist die Bedingung für die Endlichkeit des bestimmten Integrales erfüllt.

Wird dagegen die Funktion $f'(x)$ an der Stelle c unbestimmt unendlich, so kann es eintreten, dass dieses Integral, auch wenn die Funktion $f(x)$ endlich und stetig bleibt, doch nicht mehr endlich und bestimmt ist. Wenn aber $f'(x)$ dabei sein Zeichen nicht ändert, so ist die Bogenlänge eine bestimmte endliche Grösse, denn es ist $\sqrt{1+[f'(x)]^2} \leqq 1 + f'(x)$. Sind die Punkte, in denen $f'(x)$ unendlich wird, auf dem Kurvenbogen in unendlicher Anzahl vorhanden, so liefert die soeben durchgeführte Grenzbestimmung im allgemeinen nicht mehr die Kurvenlänge, und es bedarf einer direkteren Untersuchung, ob eine Länge vorhanden ist. (Vergl. Math. Annal. B. 24, pag. 231 u. Scheefer, Acta Math. B. V.)

Rektifikation der Ellipse und Hyperbel.

555. Wir betrachten eine Ellipse, deren halbe grosse Axe zur Längeneinheit gewählt ist und deren Excentricität gleich k ist. Die rechtwinkligen Koordinaten der Kurve in Bezug auf ihre Axen werden (§ 221) $\sin\varphi$, $\sqrt{1-k^2}\cos\varphi$ und das Differential des Bogens wird $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$. Bezeichnet man also mit Legendre durch $E(\varphi)$ die Länge eines Ellipsenbogens, gerechnet von einem der Endpunkte der kleinen Axe, wo der Winkel φ null ist, bis zu einem Punkte, der zu irgend einem Werte von φ gehört, so ist

$$1)\qquad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

wofür man nach § 221 auch schreiben kann:

$$2)\qquad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2 \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Betrachtet man nun zugleich eine Hyperbel, deren transversale Halbaxe k und deren andere Axe $\sqrt{1-k^2}$ ist, so können die Koordinaten der Kurve in Bezug auf diese Axen durch $(1-k^2)\operatorname{tang}\varphi$ und $\dfrac{k\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$ dargestellt werden (§ 222). Bezeichnet man also mit $\Upsilon(\varphi)$ den Bogen der Hyperbel, gerechnet von dem Scheitelpunkte, für welchen $\varphi = 0$ ist, und begrenzt durch einen Punkt, der zu irgend einem Wert von φ gehört, so ist

$$3)\qquad \Upsilon(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wofür man auch schreiben kann (§ 222):

$$4)\quad \Upsilon(\varphi) = k^2\int\limits_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Die Gleichungen 2) und 4) zeigen, dass der Ellipsenbogen $E(\varphi)$ und der Hyperbelbogen $\Upsilon(\varphi)$ sich durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken lassen, und dass auch umgekehrt diese elliptischen Integrale vermittelst des Ellipsen- und des Hyperbelbogens ausgedrückt werden können. Dabei hat man sich zu erinnern, dass der algebraische Teil $\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ gleich ist der Länge der Tangente, die im Endpunkte des Bogens $\Upsilon(\varphi)$ errichtet und durch den Fusspunkt des Lotes vom Mittelpunkt auf die Tangente begrenzt ist (§ 222).

Legendre hat mit $F(\varphi)$ das elliptische Integral erster Gattung bezeichnet; also ist

$$5)\qquad F(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wenn man zur Abkürzung wie im § 438

$$6)\qquad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

setzt. Zugleich hat der berühmte Mathematiker als Funktion zweiter Gattung den Bogen der Ellipse $E(\varphi)$ gewählt, und daher rührt die Bezeichnung *„elliptische Integrale“* für diese Transscendenten. Die Gleichung 2) giebt:

$$7)\qquad \int\limits_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}\,[F(\varphi) - E(\varphi)],$$

so dass also die Funktion, welche wir früher der Bildung von Integralen zweiter Gattung zu Grunde gelegt haben, sich mittelst des Ellipsenbogens und des Integrales erster Gattung ausdrücken lässt.

Die Gleichung 4) liefert, wenn man die Formel 2) benutzt:

$$8)\qquad \Upsilon(\varphi) = (1-k^2)F(\varphi) - E(\varphi) + \Delta\varphi \operatorname{tang}\varphi.$$

556. Die Bogen der Ellipse und der Hyperbel, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Funktion $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ lassen sich in Reihen entwickeln (§ 473). Denn es ist nach der Binomialformel

$$\frac{1}{\Delta\varphi} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi + \ldots,$$

$$\Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi - \ldots;$$

also

$$9)\begin{cases} F(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\int_0^\varphi \sin^6\varphi\,d\varphi + \ldots, \\ E(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\int_0^\varphi \sin^6\varphi\,d\varphi - \ldots \end{cases}$$

Diese Reihen sind immer konvergent, weil $k < 1$ ist, und überdies werden wir später sehen, dass man diesen Modul stets beliebig klein machen kann. Die erste Gleichung haben wir schon im § 477 aufgestellt; die Integrale, welche hier auftreten, sind durch die Gleichungen des § 456 gegeben.

Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so werden die Funktionen $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ die *vollständigen Integrale* erster und zweiter Gattung nach Legendre; wir bezeichnen sie mit F_1 und E_1. Es ist (§ 488):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2};$$

$$10)\begin{cases} F_1 = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 3k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 5k^6 + \cdots\right], \\ E_1 = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5k^6 - \cdots\right]. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung giebt die Länge des Quadranten einer Ellipse, deren Excentricität k, und deren halbe grosse Axe zur Längeneinheit gewählt ist.

Die Transformation des Moduls der elliptischen Integrale. Das Theorem von Landen.

557. Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der elliptischen Integrale erster Gattung ist die, dass sich jede dieser Funktionen auf unendlich viele verschiedene Weisen in eine andere Funktion derselben Gattung transformieren lässt, deren Modul nach Belieben entweder kleiner oder grösser ist als der Modul des ursprünglichen Integrales. Hieraus folgt, dass man verschiedene Reihen von Moduln bilden kann, unendlich nach beiden Seiten, deren Glieder sich bezüglich der Null und der Einheit nähern, und welche zu elliptischen Integralen erster Gattung gehören, die unter sich gleich sind. Wir beabsichtigen nicht, hier eine Entwickelung der wichtigen *Transformationstheorie* der elliptischen Integrale zu geben; doch halten wir es für nützlich, die erste Stufenreihe der Moduln aufzustellen, welche von Legendre entdeckt wurde; denn daraus können wir den merkwürdigen Landenschen Satz über Hyperbelbogen ableiten.

Es sei k eine gegebene Grösse zwischen 0 und 1, φ ein variabeler Winkel, $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$, wobei die Wurzel mit dem positiven Zeichen genommen wird. Man kann einen Winkel φ_1 bestimmen, welcher den beiden Gleichungen genügt:

$$1) \qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi, \quad \cos(2\varphi_1 - \varphi) = \Delta\varphi,$$

und welcher sich ausserdem stetig mit φ ändert und gleichzeitig mit φ null wird. Da $\Delta\varphi$ positiv ist, so bleibt $2\varphi_1 - \varphi$ immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man also mit Φ den Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, dessen Sinus gleich $k \sin\varphi$ ist, so wird

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \Phi}{2},$$

so dass φ_1 unzweideutig bestimmt ist, sobald φ gegeben ist; umgekehrt ist auch der Wert von φ vollkommen bestimmt, sobald φ_1 gegeben ist. Diese beiden Winkel variieren gleichzeitig von 0 bis $+\infty$, oder von 0 bis $-\infty$. Ist $\varphi = \pi$, so ist $\Phi = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Addiert man die beiden Gleichungen, nachdem man sie mit $-\sin\varphi$ und $+\cos\varphi$, ferner mit $+\cos\varphi$ und $+\sin\varphi$ multipliziert hat, so folgt:

$$\cos 2\varphi_1 = \cos\varphi\,\Delta\varphi - k\sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi_1 = \sin\varphi\,(k\cos\varphi + \Delta\varphi);$$

also:

$$2)\qquad \begin{cases} 2\cos^2\varphi_1 = 1 - k\sin^2\varphi + \cos\varphi\,\Delta\varphi, \\ 2\sin^2\varphi_1 = 1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\,\Delta\varphi, \\ 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sin\varphi\,(k\cos\varphi + \Delta\varphi). \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen 1) ergiebt auch:

$$3)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{k + \cos 2\varphi_1},$$

$$4)\qquad \operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tang}\varphi_1,$$

und setzt man

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \Delta_1\varphi_1 = \sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi_1},$$

so erhält man noch:

$$5)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{2}{1+k}\,\dfrac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \\[2ex] \cos\varphi = \dfrac{1 - \dfrac{2}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \\[2ex] \Delta\varphi = \dfrac{1 - \dfrac{2k}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus der ersten der Gleichungen 1) durch Differentiation, wenn man dabei die zweite berücksichtigt:

$$\frac{2\,d\varphi_1}{k\cos\varphi+\Delta\varphi}=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

oder auf Grund der dritten Gleichung 2) und der ersten Gleichung 5):

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}=\frac{1+k}{2}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Weil nun φ und φ_1 gleichzeitig null werden, so erhält man:

6) $$\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}=\frac{1+k}{2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Dies ist die wichtige von Legendre entdeckte Gleichung. Setzt man nun

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\quad F(k_1,\varphi_1)=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1},$$

so ergiebt die Gleichung 6):

7) $$F(k_1,\varphi_1)=\frac{1+k}{2}\,F(k,\varphi).$$

Bezeichnen wir noch mit $F_1(k)$ und $F_1(k_1)$ die vollständigen Funktionen der Moduln k und k_1, so wird, da für $\varphi=\pi$ der Winkel $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ ist und da $F(k,\pi)=2F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=2F_1(k)$ ist:

8) $$F_1(k_1)=(1+k)F_1(k).$$

558. Die Moduln k und k_1 können, wie wir sahen, auf einander zurückgeführt werden, sie sind durch die Relation

9) $$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

verbunden. Bezeichnet man mit k', k'_1 die komplementären Moduln von k und k_1, d. h. $\sqrt{1-k^2}$ und $\sqrt{1-k_1{}^2}$, so erhält man

10) $$k'_1=\frac{1-k}{1+k}$$

und

11) $$k=\frac{1-k'_1}{1+k'_1}.$$

Die Gleichung 10) ergiebt auch

$$12)\qquad k'_1 = \frac{k'^2}{(1+k)^2}, \quad \text{also} \quad k'_1 < k'^2.$$

Hieraus folgt, dass in der nach beiden Seiten unendlichen Reihe:

$$13)\qquad \ldots k_{-2},\ k_{-1},\ k_0,\ k_1,\ k_2, \ldots,$$

in welcher das Glied $k_0 = k$ kleiner als 1 ist, und jedes Glied aus dem vorhergehenden mittelst der Gleichung

$$14)\qquad k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1+k_i}$$

zu berechnen ist, das Glied k_m nach der Einheit konvergiert, wenn m positiv unendlich wird, und nach null, wenn m negativ unendlich wird. Man kann also ein elliptisches Integral erster Gattung $F(k, \varphi)$ auf ein anderes $F(k_i, \varphi_i)$ bringen, bei welchem der Modul k_i der Null oder der Einheit beliebig nahe kommt. Die Amplitude φ_i dieser neuen Funktion ist nach den oben aufgestellten Formeln zu berechnen.

Wir betrachten z. B. das vollständige Integral $F_1(k)$; nach Gleichung 8) erhält man:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (1+k_{-1})\,F(k_{-1}) \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2})\,F(k_{-2}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2})\ldots(1+k_{-i})\,F(k_{-i}). \end{aligned}$$

Wenn nun i nach $+\infty$ konvergiert, so wird k_{-i} null und $F(k_{-i})$ konvergiert nach der Grenze $\frac{\pi}{2}$; man bekommt also die folgende bemerkenswerte Entwickelung für die vollständige Funktion $F_1(k)$:

$$15)\qquad F_1(k) = \frac{\pi}{2}(1+k_{-1})(1+k_{-2})(1+k_{-3})\ldots$$

559. Die behandelte Transformation führt auch zu wichtigen Resultaten für die Integrale zweiter Gattung. Multipliziert man die Gleichung

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1+k}{2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

mit $\sin^2\varphi_1$, so erhält man vermittelst der Gleichungen 2):

$$\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{k(1+k)}{4}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1+k}{4}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1+k}{4}\cos\varphi\, d\varphi,$$

und durch Integration:

$$16)\left\{\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{k(1+k)}{4}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1+k}{4}F(k,\varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi.\right.$$

An Stelle der Integrale zweiter Gattung führen wir die Ellipsenbogen $E(k,\varphi)$ und $E(k_1,\varphi_1)$ ein; es ist (§ 555):

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}[F(k,\varphi) - E(k,\varphi)],$$

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1}{k_1^{\,2}}[F(k_1,\varphi_1) - E(k_1,\varphi_1)].$$

Die Gleichung 16) wird demnach, indem man noch die Gleichung 7) benutzt:

$$17)\quad (1+k)E(k_1,\varphi_1) = E(k,\varphi) - \frac{1}{2}k'^2F(k,\varphi) + k\sin\varphi.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das elliptische Integral erster Gattung sich durch zwei Kurvenbogen ausdrücken lässt, die zu zwei verschiedenen Ellipsen gehören.

Der Hyperbelbogen ist, wie wir sahen, durch die Gleichung

$$\Upsilon(k,\varphi) = k'^2F(k,\varphi) - E(k,\varphi) + \operatorname{tang}\varphi\,\Delta\varphi$$

gegeben. Eliminiert man hier die Funktion F vermittelst der Gleichung 17), so folgt:

$$18)\quad \Upsilon(k,\varphi) = E(k,\varphi) - 2(1+k)E(k_1,\varphi_1) + 2k\sin\varphi + \operatorname{tang}\varphi\,\Delta\varphi.$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung diejenige, welche man erhält, indem man φ und φ_1 in Φ und Φ_1 verwandelt, so drückt die resultierende Gleichung den Satz aus, welcher vor mehr als einem Jahrhundert von dem englischen Mathematiker Landen entdeckt wurde, *dass nämlich jeder Bogen einer Hyperbel* *durch zwei Ellipsenbogen dargestellt werden kann. Umgekehrt kann auch jeder Bogen einer Ellipse durch zwei Hyperbelbogen dargestellt werden.* Dieser Satz lässt sich leicht aus den oben entwickelten Gleichungen ableiten.

560. Nimmt man in der Gleichung 17) $\varphi = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ an, so erhält man die folgende Relation zwischen den vollständigen Integralen:

$$(1 + k) E_1(k_1) = 2 E_1(k) - k'^2 F_1(k).$$

Ersetzt man k, k' und k_1 zuerst durch k_i, k'_i und k_{i+1}, sodann durch k_{i-1}, k'_{i-1}, k_i, so wird:

$$(1 + k_i) E_1(k_{i+1}) = 2 E_1(k_i) - k'^2_i F_1(k_i),$$
$$(1 + k_{i-1}) E_1(k_i) = 2 E_1(k_{i-1}) - k'^2_{i-1} F_1(k_{i-1}).$$

Die Moduln k_{i-1}, k_i, k_{i+1} sind als Funktionen des ursprünglichen Modul k_0 oder k bestimmt, wie in § 558 gezeigt ist. Nun ist auch (§ 557)

$$F_1(k_i) = (1 + k_{i-1}) F_1(k_{i-1}).$$

Eliminiert man also die Funktion F_1 zwischen den beiden obigen Gleichungen und ersetzt man k_{i-1}, k'_{i-1} durch die ihnen gleichen Grössen $\frac{1 - k'_i}{1 + k'_i}$, $\frac{2\sqrt{k'_i}}{1 + k'_i}$, so folgt:

$$19)\quad k'_i(1 + k'_i) E_1(k_{i-1}) - (2 + k'_i) E_1(k_i) + (1 + k_i) E_1(k_{i+1}) = 0,$$

eine bemerkenswerte Relation zwischen den Umfängen dreier Ellipsen mit den Excentricitäten k_{i-1}, k_i, k_{i+1}.

Über die algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch Kreisbogen darstellen lassen.

561. Die Untersuchung der algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch Kreisbogen ausdrücken lassen, bietet ein gewisses Interesse vom geometrischen Standpunkte aus dar, denn bei diesen Kurven kann man, wie beim Kreise, alle Konstruktionen ausführen, die sich auf die Addition oder Subtraktion der Bogen, auf ihre Multiplikation und ihre

Divison beziehen. Euler hat sich viel mit dieser Untersuchung beschäftigt, und in einer Abhandlung, die aber erst nach seinem Tode publiziert wurde, giebt er eine Familie von Kurven an, welche die fragliche Eigenschaft besitzt; er hat dieselbe, wie er sagt, erst nach langer Arbeit über diesen Gegenstand gefunden.

Die von Euler entdeckten Kurven bilden nur einen sehr speziellen Fall derjenigen, bei welchen sich der beliebig begrenzte Bogen durch einen Kreisbogen ausdrücken lässt, und bei denen die geradlinigen Koordinaten rationale Funktionen der trigonometrischen Tangente dieses Bogens sind. Alle diese Kurven habe ich in einer Abhandlung im 25. Bande des Journal de l'École Polytechnique bekannt gemacht, und bewiesen, dass sie eine unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener Klassen bilden, von denen jede wiederum unendlich viele Kurven enthält. Hier will ich mich nur darauf beschränken, die Lösung des einfachsten Falles auszuführen, welcher die Kurven der ersten Klasse umfasst.

Bezeichnet man mit i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, mit g eine positive Grösse, mit ω einen reellen Winkel, mit e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes, und setzt man ferner

$$t = (z-a)^{n+1}(z-b)^{p+1}(z-c)^{q+1}\ldots,$$
$$\tau = (z-\alpha)^{n+1}(z-\beta)^{p+1}(z-\gamma)^{q+1}\ldots,$$

wobei a und α, b und β, c und $\gamma\ldots$ konjugiert komplexe Konstanten und m, n, $p\ldots$ positive ganze Zahlen sind, so ist die allgemeine Lösung des vorgelegten Problemes durch die Gleichung:

$$1)\qquad x + iy = ge^{i\omega}\int \frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}\,dz$$

gegeben, wofern die Konstanten $a, b, c\ldots \alpha, \beta, \gamma\ldots$ so gewählt sind, dass dieses Integral eine algebraische Funktion wird. Denn es wird:

$$dx + i dy = ge^{i\omega}\frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

und wenn man i in $-i$ verwandelt:

$$dx - i dy = ge^{-i\omega}\frac{\tau}{t}\,\frac{(z+i)^m}{(z-i)^{m+2}}\,dz.$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{g^2\,dz^2}{(z^2+1)^2}, \quad \text{also} \quad \sqrt{dx^2+dy^2} = g\,\frac{dz}{1+z^2}$$

und

$$\int_0^z \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}\,dz = g \operatorname{arctang} z.$$

Da die Ordnung des Zählers in dem Quotienten

$$\frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}$$

um zwei Einheiten kleiner ist als die des Nenners, so genügt es, wenn μ die Anzahl der Konstanten $a, b, c \dots$ oder $\alpha, \beta, \gamma \dots$ bezeichnet, μ Bedingungen zu erfüllen (§ 419), damit der Ausdruck von $x + iy$ algebraisch wird.

Wenn t und τ sich auf die Einheit reduzieren, so giebt unsere Gleichung keine andere Kurve als den Kreis. Der einfachste Fall ist dann der, dass

$$t = (z-a)^{n+1}, \qquad \tau = (z-\alpha)^{n+1}$$

gesetzt wird. Die Gleichung 1) wird alsdann:

$$2) \qquad x + iy = g e^{i\omega} \int \frac{(z-a)^{n+1}(z-i)^m}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

und es ist nur eine einzige Bedingung zu erfüllen, damit das Integral eine algebraische Funktion wird. Um dieselbe auf die einfachste Weise zu erhalten, bezeichnen wir mit u eine neue Variabele, und setzen

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{a-i}{a+i}\,u,$$

und sodann zur Abkürzung:

$$3) \qquad \eta = \frac{(a+i)(\alpha-i)}{(a-i)(\alpha+i)}.$$

Es wird:

$$\frac{dz}{(z+i)^2} = \frac{1}{2i}\,\frac{a-i}{a+i}\,du,$$

$$\frac{(z-i)^m\,dz}{(z+i)^{m+2}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{a-i}{a+i}\right)^{m+1} u^m\,du \quad \text{und} \quad \frac{z-a}{z-\alpha} = \frac{a+i}{\alpha+i}\,\frac{u-1}{u-\eta}.$$

Also wird die Gleichung 2):

$$x + iy = A\int \frac{u^m (u-1)^{n+1}\, du}{(u-\eta)^{n+1}},$$

wobei

$$A = \frac{g}{2i} e^{i\omega} \left(\frac{a+i}{\alpha+i}\right)^{n+1} \left(\frac{a-i}{a+i}\right)^{m+1}.$$

Damit $x + iy$ eine algebraische Funktion von u oder z wird, muss die Bedingung erfüllt sein:

$$4) \qquad \frac{d^n \eta^m (\eta-1)^{n+1}}{d\eta^n} = 0.$$

Diese Gleichung ist in η vom Grade $m+1$; eine ihrer Wurzeln ist gleich 1, und wenn n kleiner ist als m, so sind $m-n$ Wurzeln gleich null. Die Anzahl der von 0 und 1 verschiedenen Wurzeln ist also gleich der kleineren unter den Zahlen m und n. Man erkennt, dass alle diese Wurzeln reell, ungleich und zwischen 0 und 1 enthalten sind, indem man n mal nach einander den Satz von Rolle auf die Gleichung

$$\eta^m (\eta-1)^{n+1} = 0$$

anwendet, welche m gleiche Wurzeln null und $n+1$ gleiche Wurzeln 1 hat. Die Wurzeln null der Gleichung 4) geben keine Lösung der Aufgabe, denn für $\eta = 0$ wird nach Gleichung 3) $a = -i$ oder $\alpha = +i$; aber die eine dieser Gleichungen enthält auch die andere, weil a und α konjugiert sind. Die Faktoren $z-a$, $z-\alpha$ werden $z+i$, $z-i$; folglich kommt man auf den Fall zurück, dass die Polynome t und τ sich auf die Einheit reduzieren. Für $\eta = 1$ wird $a = \alpha$, und die Gleichung 2) reduziert sich wiederum auf eine solche, in welcher $t = \tau = 1$ ist.

Jede der Wurzeln η aber, welche zwischen 0 und 1 enthalten ist, führt zu komplexen und konjugierten Werten von a und α. Wir bemerken zunächst, dass man

$$5) \qquad a\alpha = 1$$

annehmen kann, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beschränken. Denn man kann jeden andern Fall durch eine Änderung der Variabelen auf diesen bringen. Setzt man nämlich $\frac{z+\varepsilon}{1-\varepsilon z}$ an Stelle von z, indem man für ε eine Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^2 + 2\,\frac{a+\alpha}{a\alpha - 1}\,\varepsilon - 1 = 0$$

wählt, so erhält die Gleichung 2) durch diese Transformation die Form:

$$x + iy = ge^{i\omega}\int \frac{(z-a_1)^{n+1}(z-i)^m}{(z-\alpha_1)^{n+1}(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

wobei a_1 und α_1 die folgenden Werte bekommen:

$$a_1 = \frac{a-\varepsilon}{1+a\varepsilon}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha-\varepsilon}{1+\alpha\varepsilon},$$

so dass $a_1\alpha_1 = 1$ wird. Man kann demnach die Gleichung 5) einführen, und aus derselben folgt in Verbindung mit der Gleichung 3):

$$6)\quad \begin{cases} a = \dfrac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} - \dfrac{1-\eta}{1+\eta}\,i, \\[2ex] \alpha = \dfrac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} + \dfrac{1-\eta}{1+\eta}\,i. \end{cases}$$

Giebt man a und α diese Werte in der Gleichung 2), so wird der Ausdruck $x + iy$ algebraisch.

562. Wir betrachten nun den Fall $m = 1$, welcher auf die Eulerschen Kurven führt. Die Gleichung 2) wird hier:

$$7)\quad x + iy = ge^{\omega i}\int \frac{(z-a)^{n+1}(z-i)}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^3}\,dz,$$

und die Bedingungsgleichung ist:

$$\frac{d^n\,\eta^1(\eta-1)^{n+1}}{d\eta^n} = 0;$$

aus derselben folgt, abgesehen von der Wurzel $\eta = 1$:

$$\eta = \frac{n}{n+2}.$$

Die Gleichungen 6) geben sodann die folgenden Werte für a und α:

$$8)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} - \dfrac{i}{n+1}, \\[2ex] \alpha = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \dfrac{i}{n+1}. \end{cases}$$

Da nun das Integral in der Gleichung 7) eine algebraische Funktion sein muss, so erkennt man weiter, dass der Nenner derselben $(z-\alpha)^n(z+i)^2$ sein muss. Bestimmt man ferner das Integral so, dass es für $z = a$ null wird, so wird der Zähler teilbar durch $(z-a)^{n+2}$, und da derselbe nur vom Grade $n+2$ sein kann, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$x + iy = ge^{\omega i}\frac{(z-a)^{n+2}}{(z-\alpha)^n(z+i)^2} + \text{const.}$$

Da die Konstante nur auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems Einfluss hat, so können wir dieselbe gleich null annehmen und also setzen:

$$9)\qquad x + iy = ge^{\omega i}\frac{(z-a)^{n+2}}{(z-\alpha)^n(z+i)^2},$$

wobei g und ω nicht die nämlichen Werte wie früher (Gleichung 7) bedeuten. Die Gleichung der Kurven erhält man nun zwischen den geradlinigen Koordinaten, wenn man z aus der Gleichung 9) und aus derjenigen, welche durch Vertauschung von i in $-i$ hervorgeht, eliminiert; es ist indessen einfacher, Polarkoordinaten einzuführen und an Stelle der Elimination eine Integration zu setzen.

Differentiiert man die Gleichung 9), indem man die Formeln 8) benutzt, so folgt:

$$10)\qquad dx + i\,dy = \frac{2\sqrt{n(n+2)}}{n+1}ge^{i\omega}\frac{(z-a)^{n+1}(z-i)}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^3}dz.$$

Die Gleichung 9) enthält die Gleichung 10), was auch der Wert von n sein mag; wir können demnach diese Zahl auch als eine gebrochene annehmen, denn die Kurve, welche durch die Gleichung 9) dargestellt wird, bleibt auch dann noch eine algebraische. Es erlangen mithin die folgenden Resultate eine Allgemeinheit, wie sie in unserer anfänglichen Aussage nicht enthalten war.

Multipliziert man jede der Gleichungen 9) und 10) mit ihrer konjugierten, so folgt:

$$x^2 + y^2 = g^2 \frac{(z-a)^2 (z-\alpha)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4n(n+2)}{(n+1)^2} g^2 \frac{dz^2}{(z-i)^2 (z+i)^2}.$$

Wir bezeichnen mit ϱ den Radiusvektor $\sqrt{x^2+y^2}$, mit ds das Differential des Bogens $\sqrt{dx^2+dy^2}$, und nehmen ds mit dem entgegengesetzten Zeichen wie dz, so wird:

$$\varrho = g \frac{z^2 - 2z \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + 1}{(z^2+1)},$$

$$ds = -2g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \frac{dz}{z^2+1},$$

und setzt man:

$$z = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right), \quad \text{also} \quad dz = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right)},$$

so ergeben diese Formeln:

11) $$\varrho = g\left(1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos\lambda\right),$$

12) $$ds = g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} d\lambda.$$

Differentiiert man die erste Gleichung, so findet man:

$$d\varrho = -g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \sin\lambda \, d\lambda,$$

also:

13) $$\frac{d\varrho}{ds} = -\sin\lambda.$$

Bezeichnet ω die andere Polarkoordinate, so kann man

14) $$\varrho \frac{d\omega}{ds} = +\cos\lambda$$

setzen, weil $d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2 = ds^2$ ist. Also wird:

$$d\omega = \frac{ds\cos\lambda}{\varrho} = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda\, d\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda},$$

oder:

15) $$d\omega = d\lambda - \frac{d\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda}.$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, benutzen wir eine neue Variabele λ', bestimmt durch die beiden Gleichungen:

16) $$\cos\lambda' = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}+\cos\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda}, \qquad \sin\lambda' = \frac{\frac{1}{n+1}\sin\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n+1}\cos\lambda}.$$

Diese Gleichungen sind verträglich, denn es folgt aus ihnen $\cos^2\lambda' + \sin^2\lambda' = 1$. Indem man die zweite differentiiert, erhält man:

$$\cos\lambda'\, d\lambda' = \frac{1}{n+1}\, \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}+\cos\lambda}{\left(1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda\right)^2}\, d\lambda,$$

also gemäss der ersteren:

$$(n+1)\, d\lambda' = \frac{d\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda};$$

folglich wird die Gleichung 15):

$$d\omega = d\lambda - (n+1)\, d\lambda'.$$

Integriert man dieselbe so, dass ω zugleich mit λ und λ' verschwindet, so folgt:

17) $$\omega = \lambda - (n+1)\,\lambda',$$

also:

18) $$\cos\omega + i\sin\omega = (\cos\lambda + i\sin\lambda)\,(\cos\lambda' - i\sin\lambda')^{n+1}.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung:

19) $$R = \sqrt{-\varrho^2 + 2g\varrho - \frac{g^2}{(n+1)^2}},$$

so wird nach der Gleichung 11):

$$20)\quad \cos\lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{\varrho - g}{g}, \qquad \sin\lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{R}{g},$$

und also ergeben die Gleichungen 16):

$$21)\quad \cos\lambda' = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1}}{\varrho}, \qquad \sin\lambda' = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{R}{\varrho}.$$

Man hat demnach:

$$\cos\lambda + i\sin\lambda = \frac{1}{g}\,\frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,(\varrho - g + iR),$$

$$\cos\lambda' - i\sin\lambda' = \frac{1}{\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\left[(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1} - iR\right],$$

und die Gleichung 18) wird schliesslich:

$$22)\quad \cos\omega + i\sin\omega = \frac{n+1}{g\,[\sqrt{n(n+2)}]^{n+2}}\,\frac{1}{\varrho^{n+1}}\left[(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1} - iR\right]^{n+1}(\varrho - g + iR).$$

Diese Gleichung lässt sich in zwei zerlegen, durch welche $\cos\omega$ und $\sin\omega$ als Funktionen von ϱ gegeben werden. Jede derselben ist als Gleichung unserer Kurven in Polarkoordinaten zu betrachten. Multipliziert man die Gleichung mit ϱ, so erhält man:

$$23)\quad x + iy = \frac{n+1}{g\,[\sqrt{n(n+2)}]^{n+2}}\,\frac{1}{\varrho^{n}}\left[(n+1)\varrho - \frac{g}{n+1} - iR\right]^{n+1}(\varrho - g + iR).$$

Für den besonderen Fall, dass n eine ganze Zahl ist, erhalten die Werte von x und y die Form:

$$x = \frac{F(\varrho)}{\varrho^n}, \qquad y = \frac{f(\varrho)}{\varrho^n}\,R;$$

F und f bezeichnen dabei ganze rationale Funktionen von ϱ.

563. Im allgemeinen Falle ist die Gleichung 22) zu kompliziert, um zu einem weiteren Studium der dargestellten Kurven zu dienen; es ist dann vorteilhafter, das System der Gleichungen 11), 16) und 17) anzuwenden, wie dies Euler gethan hat.

Wählt man die Grösse $\dfrac{g\sqrt{n(n+2)}}{n+1}$ zur Einheit, so reduzieren sich die Gleichungen 11) und 12) auf

$$\varrho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos\lambda, \quad ds = d\lambda,$$

und hieraus folgt, indem man die Bogen von $\lambda = 0$ an rechnet:

$$s = \lambda,$$

$$\varrho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos s,$$

als allgemeine Gleichung unserer Kurven zwischen der Bogenlänge und dem Radiusvektor. Diese Resultate stimmen mit den von Euler erhaltenen überein.

564. Für den Fall $n = 1$ wird die Gleichung 22), wenn man $\frac{g}{2}$ zur Einheit wählt:

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\varrho - 2 + iR)(2\varrho - 1 - iR)^2}{3\varrho^2\sqrt{3}},$$

und es ist:

$$R = \sqrt{-\varrho^2 + 4\varrho - 1}.$$

Hieraus folgt, dass die zum Werte $n = 1$ gehörige Kurve durch jede der beiden Gleichungen dargestellt ist:

$$\cos\omega = \frac{\varrho^3 + 6\varrho - 2}{3\varrho^2\sqrt{3}},$$

$$\sin\omega = \frac{(\varrho^2 + 2\varrho - 2)\sqrt{-\varrho^2 + 4\varrho - 1}}{3\varrho^2\sqrt{3}}.$$

Für den Fall $n = 2$ wird die Gleichung 22), indem man $\frac{g}{3}$ zur Einheit wählt:

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\varrho - 3 + iR)(3\varrho - 1 - iR)^3}{64\varrho^3},$$

und es ist:

$$R = \sqrt{-\varrho^2 + 6\varrho - 1}.$$

Hieraus folgt, dass die zum Werte $n = 2$ gehörige Kurve durch jede der beiden Gleichungen dargestellt ist:

$$\cos\omega = \frac{\varrho^4 + 14\varrho^2 - 8\varrho + 1}{8\varrho^3},$$

$$\sin\omega = \frac{(\varrho - 1)(\varrho^2 + 4\varrho - 1)\sqrt{-\varrho^2 + 6\varrho - 1}}{8\varrho^3}.$$

Die Rektifikation der Lemniskate und des Ovales von Cassini.

565. Die Lemniskate hat in Polarkoordinaten die Gleichung (§ 552):

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

Daraus folgt:

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\omega} = -2a^2 \sin 2\omega, \quad \varrho^4 + \varrho^2 \frac{d\varrho^2}{d\omega^2} = 4a^4,$$

und wenn man mit s den Bogen der Kurve gerechnet von einem willkürlichen Anfangspunkte an bezeichnet:

$$ds = 2a^2 \frac{d\varrho}{\sqrt{4a^4 - \varrho^4}} \quad \text{oder} \quad ds = a\sqrt{2}\, \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Setzt man $\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi$, $\cos\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}$, so wird:

$$ds = a\, \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Wird also die Strecke a zur Einheit gewählt, und lässt man den Bogen s im Punkte $\omega = 0$ beginnen, so wird:

$$s = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Der Bogen der Lemniskate ist demnach gleich einem elliptischen Integrale erster Gattung, dessen Amplitude gleich φ *und dessen Modul gleich* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *ist.*

Wir werden später sehen, dass die elliptischen Integrale erster Gattung unter einander addiert oder subtrahiert, multipliziert oder dividiert werden können, in algebraischer Weise, ähnlich wie die Bogen des Kreises. Hieraus folgt dann, dass man bei der Lemniskate analoge Konstruktionen ausführen kann wie in der Theorie der Kreisteilung.

566. Die Lemniskate ist nur ein besonderer Fall der unter dem Namen des *Ovales von Cassini* bekannten Kurve. Dieselbe ist definiert durch die Eigenschaft, dass das Produkt der Entfernungen jedes Kurvenpunktes von zwei festen Punkten konstant ist. Die Gleichung der Kurve wird in Polarkoordinaten

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\omega + a^4 = b^4;$$

$2a$ ist die Entfernung der beiden festen Punkte, b^2 das konstante Produkt. Die Cassinische Kurve bekommt drei sehr verschiedene Formen, je nachdem das Verhältnis $\frac{b}{a}$ kleiner, gleich oder grösser als die Einheit ist; für $\frac{b}{a} = 1$ wird sie die Lemniskate.

Wir nehmen zuerst $\frac{b}{a} < 1$ an und setzen $b^2 = a^2 \sin 2\alpha$. Dann besteht die Kurve aus zwei gleichen, geschlossenen Ovalen, und der Winkel 2α ist zugleich derjenige, welchen die vom Mittelpunkte aus an ein Oval gelegten Tangenten mit einander bilden. Die Radienvektoren, welche zu den Werten ω_0 und ω_1 gehören, bestimmen auf der Kurve zwei Bogen, die mit $s(\omega_0, \omega_1)$ und $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ bezeichnet werden sollen, oder einfach mit $s(\omega_1)$ und $\sigma(\omega_1)$, wenn $\omega_0 = 0$ ist. Darnach findet man leicht:

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega - \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

und hieraus folgt:

$$1)\quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\alpha}},$$

$$2)\quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\alpha}}.$$

Setzt man in der Gleichung 1)

$$3)\qquad \sin\omega = \sin\alpha \sin\varphi$$

und in der Gleichung 2)

4) $$\sin\omega = \cos\alpha \sin\psi,$$

so erhält man:

5) $$s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}},$$

6) $$s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int\limits_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}}.$$

Die Winkel $\varphi_0, \psi_0, \omega_0$ und $\varphi_1, \psi_1, \omega_1$ müssen den Gleichungen 3) und 4) genügen.

Setzt man $\omega_0 = 0$, so wird auch $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, und indem man φ, ψ, ω an Stelle von $\varphi_1, \psi_1, \omega_1$ schreibt, ergeben die Gleichungen 5) und 6):

7) $$\frac{a}{b^2}[s(\omega) + \sigma(\omega)] = F(\sin\alpha, \varphi),$$

8) $$\frac{a}{b^2}[s(\omega) - \sigma(\omega)] = F(\cos\alpha, \psi).$$

Hieraus folgt, dass jedes elliptische Integral erster Gattung, was auch der Modul sein mag, durch die Summe oder durch die Differenz zweier Bogen des Cassinischen Ovales von der betrachteten Art ausdrückbar ist. Umgekehrt ist jeder Bogen dieser Kurve durch die Summe zweier elliptischer Integrale erster Gattung mit komplementären Moduln dargestellt worden. Diese Moduln haben die Werte:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Setzt man in der Gleichung 7) $\omega = \alpha$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und bezeichnet man mit S die gesamte Länge beider Ovale, so erhält man

$$\frac{a}{4b^2} S = F_1(\sin\alpha).$$

Das vollständige Integral mit dem Modul $\sin\alpha$ ist also vermittelst des vollen Umfanges der Kurve darstellbar.

Für den Fall $\frac{b}{a} = 1$ ist der Winkel α gleich $\frac{\pi}{4}$ und die Bogen $\sigma(\omega)$ sind null; man erhält dann das bereits bekannte Resultat für die Lemniskate.

567. Wir nehmen nun $\frac{b}{a} > 1$ an und setzen $a^2 = b^2 \sin 2\alpha$. Die Kurve besteht nun aus einem Ovale. Ich bezeichne jetzt mit $s(\omega_0, \omega_1)$ den Bogen, welcher durch die beiden zu ω_0 und ω_1 gehörigen Radien bestimmt wird, und mit $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ den Bogen, welchen die zu diesen senkrechten Radien begrenzen. Alsdann wird:

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}\, d\omega;$$

folglich wird, indem man ω_0 und ω_1 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ annimmt:

$$9)\quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\operatorname{cotg} 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$10)\quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\operatorname{cotg} 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha}}\, d\omega.$$

Wir setzen nun in der Gleichung 9)

$$11)\qquad \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\varphi}{\sin 2\alpha}$$

und in der Gleichung 10)

$$12)\qquad \sqrt{\cos^2 2\omega + \operatorname{cotg}^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos^2\alpha \sin^2\psi}{\sin 2\alpha},$$

so wird:

$$13)\quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = b \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}},$$

$$14)\quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = b \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}}.$$

Die Winkel φ_0, ψ_0, ω_0 und φ_1, ψ_1, ω_1 müssen den Gleichungen 11) und 12) genügen, und wenn man den Winkel ω' durch die Gleichung $\sin 2\omega' = \sin 2\alpha \sin 2\omega$ definiert, so reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$\sin\varphi = \frac{\sin\omega'}{\sin\alpha}, \quad \sin\psi = \frac{\sin\omega'}{\cos\alpha}.$$

Ist $\omega_0 = 0$, so ist auch $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ und die Gleichungen 13) und 14) geben:

$$15)\qquad \frac{1}{b}\left[s(\omega) + \sigma(\omega)\right] = F(\sin\alpha, \varphi),$$

$$16)\qquad \frac{1}{b}\left[s(\omega) - \sigma(\omega)\right] = F(\cos\alpha, \psi).$$

Die Moduln dieser elliptischen Integrale sind komplementär und haben die Werte:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}.$$

Setzt man $\omega = \frac{\pi}{4}$, so wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und aus der Gleichung 15) folgt, wenn man mit S den gesamten Umfang der Kurve bezeichnet:

$$\frac{S}{4b} = F_1(\sin\alpha).$$

Man gelangt sonach zu den nämlichen Sätzen wie im ersten Falle.

Über die algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch elliptische Integrale erster Gattung darstellen lassen.

568. Die Bestimmung aller algebraischen Kurven, deren Bogen sich durch elliptische Integrale erster Gattung darstellen lassen, bietet sehr grosse Schwierigkeiten dar, und Legendre, welcher sich vielfach mit dieser Frage beschäftigt hat, konnte keine Kurve finden, welche die Eigenschaft der

Lemniskate besitzt. Vor mehreren Jahren habe ich die vollständige Lösung des Problemes gegeben (drei Abhandlungen in Liouvilles Journal, erste Serie Bd. 10), indem ich mich dabei immer auf solche Kurven beschränkte, bei welchen sich die geradlinigen Koordinaten als rationale Funktionen einer Variabelen darstellen lassen. Ich gelangte so zu einer unendlichen Mannigfaltigkeit verschiedener Klassen, von denen jede unendlich viele individuelle Kurven umfasst, bei denen die Bogenlängen elliptische Integrale mit verschiedenen Moduln werden. Die weitere Untersuchung ergab sodann zwei bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, welche allen Kurven der ersten Klasse gemein sind und auch zu ihrer Definition dienen können. Die Theorie dieser Kurven wird dadurch unabhängig von den analytischen Untersuchungen, welche mir zu ihrer Entdeckung verhalfen.

569. Erster Satz. *Es sei* n *eine ganze oder gebrochene, ja auch irrationale Zahl; wir konstruieren das Dreieck* OMP *so, dass*

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\mathrm{n}} \quad \textit{und} \quad \mathrm{MP} = \sqrt{\mathrm{n}+1}$$

wird; ferner denken wir uns, dass, während die Ecke O *fest bleibt, das Dreieck derart verändert wird, dass der Kosinus des Winkels* ω, *zwischen der veränderlichen Seite* OM *und einer festen Geraden, beständig gleich ist dem Kosinus des Winkels*

$$\mathrm{n\,MOP} - (\mathrm{n}+1)\,\mathrm{OMP};$$

alsdann beschreibt der Punkt M *eine Kurve (die algebraisch wird, wenn* n *rational ist), deren Bogen als Funktion des Radiusvektor durch ein elliptisches Integral ausdrückbar ist, dessen Modul auf den Wert* $\sqrt{\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}}$ *zurückgeführt werden kann.*

Denn ist $MOP = \alpha$, $OMP = \beta$, so ergiebt sich die Gleichung der Kurve aus der Elimination von α und β zwischen den Gleichungen:

$$\cos\omega = \cos[n\alpha - (n+1)\beta],$$

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2 - 1}{2\varrho\sqrt{n}}, \quad \cos\beta = \frac{\varrho^2 + 1}{2\varrho\sqrt{n+1}};$$

aus diesen letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\sin\alpha = \frac{R}{2\varrho\sqrt{n}}, \quad \sin\beta = \frac{R}{2\varrho\sqrt{n+1}},$$

wenn $R = \sqrt{-\varrho^4 + 2\varrho^2(2n+1) - 1}$ gesetzt wird. Durch Differentiation findet man

$$\pm\, d\omega = n\, d\alpha - (n+1)\, d\beta,$$

$$d\alpha = -\frac{\varrho^2+1}{R}\frac{d\varrho}{\varrho}, \quad d\beta = -\frac{\varrho^2-1}{R}\frac{d\varrho}{\varrho},$$

also:

$$\pm\, d\omega = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{R}\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und folglich erhält man für das Differential des Bogens

$$\pm\, ds = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{d\varrho}{R}.$$

Aus den vorigen Gleichungen folgen auch die weiteren, welche zu beachten sind:

$$\mp\, ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\cos\beta}, \quad \mp\, ds = \sqrt{n+1}\,\frac{d\beta}{\cos\alpha}.$$

Ferner erhält man, wenn man $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ setzt:

$$\sin\beta = k\sin\alpha, \quad \cos\beta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha};$$

also, wenn man annimmt, dass $d\varrho$ das Vorzeichen von $d\alpha$ hat:

$$ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

und sonach ist der Bogen, gerechnet vom Punkte der Polaraxe, für welchen $\alpha = 0$ oder $\varrho = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ ist, ausgedrückt durch das elliptische Integral mit dem Modul k und der Amplitude α:

$$\sqrt{n}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

was bewiesen werden sollte. Man sieht leicht, dass für den Fall $n = 1$ die Kurve mit der Lemniskate identisch wird.

Die Fläche des erzeugenden Dreieckes OMP ist $\frac{R}{4}$, und andererseits findet man leicht

$$\frac{1}{2}\int \varrho^2 d\omega = \frac{R}{4} + \text{const.}$$

Hieraus folgt, dass die Fläche eines Sektors der Kurve, von der Polaraxe an gerechnet, immer gleich ist der Fläche des erzeugenden Dreieckes.

570. Ich gehe nun zur Untersuchung der zweiten Eigenschaft dieser bemerkenswerten Kurven über. Es ist in dem Dreieck OMP

$$\varrho^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos(\alpha + \beta),$$

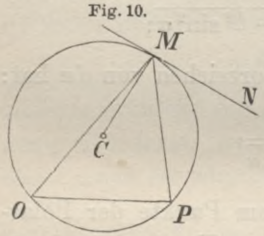
also:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm\,\varrho\,\frac{d\omega}{ds},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm\,\frac{d\varrho}{ds}.$$

Hieraus folgt, dass der Neigungswinkel zwischen der Normalen und dem Radiusvektor gleich $\alpha + \beta$ oder gleich dem Supplemente davon ist. Konstruiert man also im Punkte M einen Winkel $PMN = MOP$, indem man zunächst den ersten Fall betrachtet, so wird MN die Normale der Kurve im Punkte M, welcher zur Lage OMP des erzeugenden Dreieckes gehört. Andererseits liegt der Punkt O auf dem Segmente, welches den Winkel PMN umfasst, wenn man denselben über MP errichtet, also ist MN die Tangente des dem erzeugenden Dreiecke umgeschriebenen Kreises, und wenn C der Mittelpunkt dieses Kreises ist, so wird der Radius MC die Tangente der Kurve. Ferner erkennt man leicht, dass, wenn die Ecke M des Dreieckes bei stetiger Bewegung die Kurve beschreibt, diese Eigenschaft für alle Lagen des Dreieckes gilt.

Fig. 10.



Man kann aber auch annehmen, dass der Neigungswinkel der Normalen und des Radiusvektor gleich dem Supplemente von $\alpha + \beta$ ist. Wenn man dann das Dreieck OMP um die

Gerade OM dreht, so erhält man ein zweites Dreieck an Stelle des ersten zur Erzeugung der Kurve, und die vorige Eigenschaft gilt dann für dieses neue Dreieck.

Hieraus ergiebt sich die folgende Erzeugungsweise:

Zweiter Satz. *Wenn das Dreieck* OMP *so variiert wird, dass der Eckpunkt* O *fest bleibt und dass die beweglichen Seiten* OP *und* MP *beständig gleich* $\sqrt{n}$ *und* $\sqrt{n+1}$ *sind, wenn ferner die unendlich kleine Verschiebung* MM' *des Punktes* M *in jedem Momente auf der Geraden erfolgt, welche diesen Punkt mit dem Mittelpunkte des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises verbindet, so erzeugt der Punkt* M *die elliptische Kurve, welche zur Zahl* n *gehört.*

Fünftes Kapitel.

Die Kubatur der Körper und die Quadratur krummer Flächen. Vielfache Integrale.

Volumen des Cylinders mit beliebiger Basis.

571. Die Basis eines Cylinders, welche von einer Kurve begrenzt ist und die Grösse B hat, kann in Elemente zerlegt werden, welche zuletzt unendlich klein werden, sowohl durch Parallele von bestimmter Richtung, als auch durch Radien, welche von einem innerhalb der Fläche gelegenen Punkte ausgehen. Wir betrachten die erste Zerlegung. Jedes Element ist zwischen zwei Parallelogrammen enthalten, die man leicht konstruieren kann, auch zwischen zwei Rechtecken, wenn man will, und das Verhältnis dieser beiden hat die Einheit zur Grenze.

Die Basis B des Cylinders ist die Grenze, sowohl für die Summe aller Rechtecke, welche die untere Grenze der Flächenelemente bilden, als auch für die Summe aller Rechtecke, welche die obere Grenze bilden. Nun ist das Volumen V des Cylinders, dessen Höhe wir mit H bezeichnen, enthalten zwischen der Summe aller Prismen mit der Höhe H, deren Basis die ersteren Rechtecke bilden, und der Summe aller Prismen, deren Basis die anderen Rechtecke sind. Diese beiden Summen konvergieren nach derselben Grenze, nämlich nach dem Produkte BH; also ist auch $V = BH$.

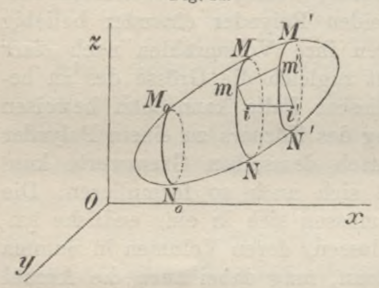
Das Volumen des Segmentes eines beliebigen Körpers, welches zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten ist.

Ein allseitig begrenzter Teil des Raumes, dessen Begrenzung aus krummen oder ebenen Flächen zusammengesetzt ist, die sich selbst nicht durchschneiden, ist ein geschlossener Körper und besitzt eine bestimmte Volumgrösse, falls er sich in eine bestimmte Anzahl von Teilen zerlegen lässt, von denen jeder gleich der Volumeinheit oder einem bestimmten Teile derselben ist, und falls diese Summe von Teilgrössen von der Art der Zerlegung ganz unabhängig ist. Hat man als Volumeinheit einen Würfel gewählt, dessen Kanten gleich der Längeneinheit sind, so wird zunächst in der Stereometrie bewiesen, dass jeder von einer endlichen Anzahl von Ebenen begrenzte Körper ein bestimmtes Volumen besitzt. An Stelle der direkten Zerlegung tritt bei Körpern, welche von Flächen begrenzt sind, das Verfahren der Grenzeinschliessung. Kann man ein Polyeder konstruieren, welches den gegebenen Körper einschliesst, und ein anderes, welches in demselben enthalten ist, und können diese beiden Polyeder einander beliebig genähert werden, so konvergieren ihre Volumzahlen nach *einer* bestimmten Grenze, und diese ist zugleich die Grösse des zu bestimmenden Körpers; denn in diesem Falle kann man beweisen (siehe § 581), dass jede Zerlegung des Körpers zu einem Polyeder führt, dessen Grösse ebenfalls nach demselben Grenzwerte konvergiert. Diese Bedingung lässt sich auch so formulieren: Die Punkte der begrenzenden Fläche müssen sich in eine endliche Anzahl von Polyedern einschliessen lassen, deren Volumen in Summa beliebig klein gemacht werden kann, mag dabei auch die Anzahl der Polyeder schliesslich über jede Grenze hinaus wachsen. Das heisst, die Punkte der Begrenzung bilden ein *Flächensystem*, oder ein System von zwei Dimensionen, im Gegensatz zu einem *räumlichen*, bei welchem die Summe der einschliessenden Polyeder endlich bleibt.

Auf diese Weise ist das Volumen eines Cylinders vorhin berechnet worden, sobald die Basis desselben eine bestimmte Flächengrösse besitzt. Demnach kann man nun auch, um das Volumen eines beliebigen Körpers zu erhalten, an Stelle des einschliessenden und des eingeschlossenen Polyeders, die einander beliebig genähert werden sollen, einen Körper setzen, der aus mehreren Cylindern besteht, von denen jeder eine bestimmte Volumzahl besitzt. Konvergieren der einschliessende und der eingeschlossene, aus Cylindern zusammengesetzte Körper nach derselben bestimmten Grenze, so wird dieser Grenzwert das Volumen des gegebenen Körpers. Diese Methode führen wir zunächst aus.

572. Es seien Ox, Oy, Oz die drei Axen eines geradlinigen Koordinatensystemes. Wir bezeichnen mit V das gesuchte Volumen eines Segmentes eines beliebigen Körpers, welches von den beiden Ebenen M_0N_0 und MN begrenzt ist, die parallel zu der yz-Ebene sind und zu den Abscissen x_0 und x gehören. Dass eine bestimmte Volumzahl V existiert und wie gross dieselbe wird, ist zu beweisen. Nimmt man x_0 als konstant und x als variabel an, so wird das Volumen V von x abhängig sein. Wir betrachten nun zwei Querschnitte des Körpers, gebildet durch die Ebenen MN und $M'N'$, welche parallel zur yz-Ebene sind und zu den Abscissen x und $x+\Delta x$ gehören. Diese beiden Ebenen bestimmen ein Segment, dessen gesuchtes Volumen ΔV heisse. Die Grösse der Fläche, welche durch die Ebene MN bestimmt ist, bezeichnen wir mit u und setzen voraus, dass u eine bestimmte gegebene Funktion von x ist. Im Innern der Fläche u nehmen wir einen Punkt i an, ziehen ii' parallel der Axe OX, und legen durch ii' irgend eine Halbebene $mii'm'$, welche die Ebenen MN und $M'N'$ in im und $i'm'$, und die Begrenzungsfläche des Körpers in der Kurve mm' schneidet.

Fig. 11.



Durch alle Punkte des Bogens mm' legen wir Parallele zu mi, welche durch die Gerade ii' begrenzt werden. Alsdann sei l_1 die kleinste und l_2 die grösste unter diesen Geraden. Die Längen tragen wir auf der Geraden im vom Punkte i aus ab, so dass $ip_1 = l_1$, $ip_2 = l_2$ wird. Lässt man nun die Halbebene $mii'm'$ um die feste Gerade ii' sich drehen, wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, dass die Querschnitte des Körpers so gestaltet sind, dass jeder Strahl im die Begrenzungskurve immer nur in *einem* Punkte trifft (Körper, bei denen die Querschnitte solche Einbuchtungen haben, dass der Radiusvektor im die Begrenzungskurve mehrmals durchschneidet, lassen sich in Teile von einfacherer Form zerlegen), so beschreiben die beiden Punkte p_1 und p_2 in der Ebene MN zwei geschlossene Kurven, deren Fläche wir mit u_1 und u_2 bezeichnen.

Wir nehmen an, dass die Oberfläche des Körpers stetig ist, d. h. dass die Längen der Strahlen $im = l$ stetige Funktionen der Abscisse x des Punktes i, und des Winkels ω sind, welchen der Strahl mit der y-Axe bildet. Ist nun α der

Winkel, welchen die Axe Ox mit der yz-Ebene bildet, so ist die Entfernung der Ebenen MN, $M'N'$ gleich $\Delta x \sin\alpha$. Konstruiert man nun den Cylinder, dessen Basis die Kontour der Fläche u_1 ist und dessen Erzeugenden parallel zu OX sind, ferner einen zweiten Cylinder mit der Kontour von u_2, so ist das Volumen ΔV zwischen diesen beiden Cylindern enthalten, also:

$$u_1 \sin\alpha \Delta x < \Delta V < u_2 \sin\alpha \Delta x,$$

oder

$$u_1 \sin\alpha < \frac{\Delta V}{\Delta x} < u_2 \sin\alpha.$$

Lässt man Δx nach null konvergieren, so konvergieren u_1 und u_2 nach dem Werte u. Denn es ist:

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l_1^2\, d\omega, \quad u_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l_2^2\, d\omega, \quad u = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l^2\, d\omega,$$

und da die Längen l stetige Funktionen von x und ω sind, so kann man Δx so klein wählen, dass bei allen Werten von ω die Differenzen von $l - l_1$ und $l_2 - l$ kleiner werden, als eine beliebig kleine Grösse. Mithin wird:

$$\frac{dV}{dx} = u \sin\alpha \quad \text{oder} \quad dV = u \sin\alpha\, dx,$$

d. h. die zu bestimmende Grösse V ist solch eine Funktion von x, dass ihr Differentialquotient den bestimmten Wert $u \sin\alpha$ hat. Daraus folgt, dass V selbst für jeden Wert von x eine bestimmte Grösse ist, die sich stetig mit x ändert und durch die Gleichung zu berechnen ist:

$$V = \sin\alpha \int_{x_0}^{X} u\, dx;$$

u ist dabei die Grösse des Querschnittes, welcher in dem Körper durch eine zur yz-Ebene parallele Ebene bestimmt wird, dessen Abscisse x ist. Bei rechtwinkligen Axen ist

$$V = \int_{x_0}^{X} u\, dx.$$

Dies Resultat setzt also voraus, dass die Fläche u als Funktion von x bekannt ist. Die Bestimmung derselben erfordert also im allgemeinen selbst wieder eine Integration; aber es giebt Fälle, wo diese unmittelbar ausgeführt werden kann, wie wir an einigen Beispielen sehen wollen.

Die Voraussetzungen, unter denen hier der Satz bewiesen ist, dass das Volumen V eines Körpers, dessen Querschnitte senkrecht zur x Axe bestimmte von x abhängige Grössen u haben, eine bestimmte Grösse ist, welche durch das Integral

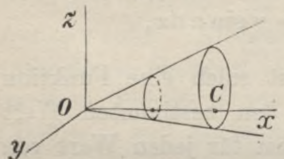
$$V = \int_{x_0}^{X} u\,dx$$

zu berechnen ist, sind hierbei noch spezieller als notwendig, insofern nicht nur die Grösse u als eine stetige Funktion von x gedacht ist, sondern auch angenommen wurde, dass die Begrenzungsfläche eine stetig zusammenhängende ist. Später wird gezeigt werden, dass die blosse Integrierbarkeit der Funktion u die hinreichende Bedingung für die Giltigkeit der obigen Formel ist.

Anwendung auf einige Beispiele.

573. Erstes Beispiel. *Berechnung des Volumens eines Kegels mit beliebiger Basis.* Wir wählen den Scheitel O des Kegels zum Anfangspunkt dreier geradliniger Axen, und das Lot von diesem Scheitel auf die Basis zur x-Axe. Wenn man mit B die Grösse der Basisfläche, mit H die Höhe des Kegels bezeichnet, so ist bekanntlich

Fig. 12.



$$\frac{u}{B} = \frac{x^2}{H^2}, \qquad u = \frac{B}{H^2}\,x^2,$$

und also wird das Volumen:

$$V = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{1}{3}\,BH.$$

574. Zweites Beispiel. *Volumbestimmung des Segmentes eines Ellipsoides, welches zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten ist.*

Wir beziehen das Ellipsoid auf drei konjugierte Durchmesser Ox, Oy, Oz, von denen die beiden letzten parallel zu den Basisebenen des Segmentes sind. Die Gleichung der Begrenzungsfläche des Körpers wird:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1 \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b'^2\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)}+\frac{z^2}{c'^2\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)}=1,$$

a', b', c' sind die halben Längen der konjugierten Durchmesser. Die Fläche u ist hier die einer Ellipse, in welcher zwei konjugierte Durchmesser die Längen haben, welche gleich sind dem Doppelten der Werte

$$b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}, \quad c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}.$$

Ferner ist der Winkel zwischen diesen Durchmessern gleich dem Winkel θ, den die halben Durchmesser b', c' des Ellipsoides bilden. Also ist

$$u=\pi b'c'\sin\theta\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right).$$

Wenn also x_0 und X die Werte von x bezeichnen, welche zu den Basisebenen des Segmentes gehören, und α den Winkel, welchen die x-Axe mit der yz-Ebene bildet, so wird

$$V=\pi b'c'\sin\theta\sin\alpha\int_{x_0}^{X}\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)dx$$

oder

$$V=\pi b'c'\sin\theta\sin\alpha\left[(X-x_0)-\frac{X^3-x_0{}^3}{3a'^2}\right].$$

Um das ganze Volumen des Ellipsoides zu erhalten, muss man $x_0=-a'$, $X=+a'$ setzen, alsdann folgt

$$V=\frac{4}{3}\pi a'b'c'\sin\theta\sin\alpha.$$

Wählt man für a', b', c' die Halbaxen a, b, c, so ist $\alpha=90^0$, $\theta=90^0$ und

$$V=\frac{4}{3}\pi abc;$$

der Vergleich dieser beiden Formeln ergiebt

$$abc = a'b'c' \sin\theta \sin\alpha,$$

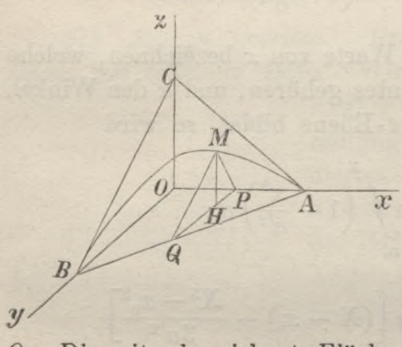
wodurch der bekannte Satz ausgedrückt ist, dass das Parallelepiped, welches über drei konjugierten Durchmessern konstruiert ist, ein konstantes Volumen hat.

Man erkennt, dass man durch eine ähnliche Rechnung das Volumen des Segmentes eines ein- oder zweischaligen Hyperboloides, sowie eines elliptischen Paraboloides erhält.

575. Drittes Beispiel. *Es seien drei rechtwinklige Koordinatenaxen gegeben; es soll das Volumen bestimmt werden, welches innerhalb des Oktanten mit positiven Koordinaten von dem hyperbolischen Paraboloide begrenzt wird, dessen Gleichung* $xy = az$ *ist, wobei* a *eine Konstante bedeutet, ferner von der Ebene* ABC, *welche die Gleichung* $x + y + z = a$ *hat, und von der* xy-*Ebene.*

Das Paraboloid wird von der Ebene ABC in einer Hyperbel AMB geschnitten und enthält sowohl die x-Axe wie die y-Axe Die Ebene PMQ, parallel zur yz-Ebene, welche zur Abscisse x gehört, schneidet die Fläche längs einer Geraden MP, und die Ebene ABC in der Geraden MQ, welche parallel ist zu BC, dem Schnitt derselben Ebene ABC mit der yz-Ebene; die Ebene xy schneidet sie längs der Geraden PQ parallel zu Oy. Die mit u bezeichnete Fläche ist also hier ein Dreieck PMQ, durch welches das zu bestimmende Volumen erzeugt wird.

Fig. 13.



Die Basis PQ dieses Dreieckes ist die Ordinate y, welche der Geraden AB bei dem Abscissenwerte x angehört. Also ist

$$PQ = a - x.$$

Die Höhe MH des Dreieckes PMQ ist die Ordinate z, welche bei dem Abscissenwerte x dem Schnitt des Paraboloides und der Ebene ABC zukommt. Die Elimination von y zwischen den Gleichungen dieser beiden Flächen ergiebt:

$$x(a - z - x) = az,$$

also ist

$$MH = z = \frac{x(a-x)}{a+x},$$

folglich wird der Wert von u gleich

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{x(a-x)^2}{a+x}.$$

Das gesuchte Volumen V ist durch die Ebenen begrenzt, welche zu $x = 0$ und $x = a$ gehören; mithin wird

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}\,dx = \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3ax}{2} + 2a^2 - \frac{2a^3}{x+a}\right)dx,$$

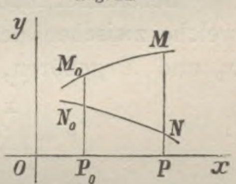
und man erhält:

$$V = \left[\frac{17}{12} - l(4)\right] a^3.$$

Volumbestimmung der Rotationskörper.

576. Die mit u bezeichnete Querschnittsfläche lässt sich unmittelbar angeben bei allen Rotationskörpern; denn wählt man die Rotationsaxe zur x-Axe, so wird diese Fläche ein Kreis, oder die Fläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen.

Fig. 14.



Es sei M_0M eine gegebene Kurve, gelegen in der xy-Ebene. Wir betrachten den Körper, welcher entsteht, wenn die Fläche M_0P_0PM zwischen der Kurve M_0M, der x-Axe und den Ordinaten M_0P_0 und MP um die x-Axe gedreht wird. Die Fläche u wird eine Kreisfläche mit dem Radius y; also ist

$$u = \pi y^2, \quad V = \pi \int_{x_0}^{X} y^2\,dx,$$

wenn x_0 und X die Abscissen sind, die zu den Ordinaten M_0P_0 und MP gehören.

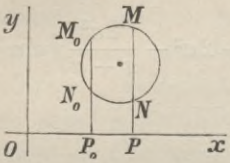
Ist das Volumen zu bestimmen, welches von einer Fläche M_0N_0NM erzeugt wird, die zwischen zwei gegebenen Kurven M_0M, N_0N und den Ordinaten M_0P_0, MP liegt, so hat man die Ordinaten y und y' dieser beiden Kurven zu betrachten.

Die Fläche u ist von den zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien y und y' eingeschlossen; also ist

$$u = \pi(y^2 - y'^2), \quad V = \pi \int_{x_0}^{X} (y^2 - y'^2)\, dx.$$

577. Erstes Beispiel. *Das Volumen des Kreisringes.* Wir beziehen den erzeugenden Kreis auf zwei rechtwinklige Axen, von denen die x-Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt. a sei der Radius des Kreises, β die Ordinate des Mittelpunktes, y, y' die Ordinaten der Punkte M, N, welche zu derselben Abscisse x gehören; es ist

Fig. 15.



$$y + y' = 2\beta, \quad y - y' = 2\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y^2 - y'^2 = 4\beta\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wir nehmen an, dass die Rotationsaxe ausserhalb des Kreises liegt, so ist

$$u = 4\pi\beta\sqrt{a^2 - x^2}, \quad V = 4\pi\beta \int_{x_0}^{X} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Bezeichnet man nun mit v die Fläche des Kreissegmentes, welche zwischen den Ordinaten M_0P_0 und MP liegt, die zu x_0 und X gehören, so ist

$$v = \int_{x_0}^{X} (y - y')\, dx = 2\int_{x_0}^{X} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Also ist das entsprechende Segment des Kreisringes

$$V = 2\pi\beta v.$$

Für das ganze Volumen des Ringes hat man $v = \pi a^2$ zu setzen, und es wird

$$V = 2\pi^2 a^2 \beta.$$

578. Zweites Beispiel. *Das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der Cykloidenfläche um ihre Basis entsteht.*

Wenn man die Basis der Cykloide zur x-Axe und die Senkrechte in einem Endpunkte der Basis zur y-Axe wählt, so ist die Kurve definiert durch die Gleichungen (§ 230):

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi),$$

und hieraus folgt:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi.$$

Ist das Volumen erzeugt durch die Fläche, welche zwischen der Kurve, der Basislinie und der Ordinate y, die zur Abscisse x oder dem Winkel φ gehört, liegt, so wird:

$$V = \pi \int_0^x y^2\, dx = \pi a^3 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3\, d\varphi.$$

Nun ist

$$(1 - \cos\varphi)^3 = \frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi,$$

also

$$V = \pi a^3 \left(\frac{5}{2}\varphi - \frac{15}{4}\sin\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi\right).$$

Will man den Körper, welcher von der Cykloide erzeugt wird, berechnen, so ist $\varphi = 2\pi$ zu setzen und es wird

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

579. Drittes Beispiel. *Das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der Cykloidenfläche um die Tangente im Scheitelpunkt entsteht.*

Die Kurve sei auf die nämlichen Axen wie vorhin bezogen, und es sei V das Volumen, welches durch die Fläche erzeugt ist, die zwischen der Kurve, der Tangente im Scheitelpunkt und der Geraden $2a - y$ liegt, die senkrecht zu dieser zum Winkel φ gehört. Man erhält

$$V = \pi \int_x^{\pi a} (2a - y)^2\, dx = \pi a^3 \int_\varphi^\pi (1 + \cos\varphi) \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Nun ist

$$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \text{const},$$

$$\int \cos\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi + \text{const};$$

also

$$V = \pi a^3 \left(\frac{\pi - \varphi}{2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right).$$

Setzt man $\varphi = 0$, so erhält man das Volumen, welches von der Fläche zwischen der halben Cykloide und der Tangente im Scheitel erzeugt ist; verdoppelt man dasselbe, so erhält man das ganze Volumen, nämlich

$$V = \pi^2 a^3.$$

Es ist also der fünfte Teil des in dem vorigen Beispiel betrachteten Volumens.

Allgemeine Betrachtungen zur Bestimmung des Volumens eines von beliebigen Flächen begrenzten Körpers. Das Doppelintegral.

580. Wir kehren zu der Gleichung

$$1) \qquad V = \int_{x_0}^{X} u\,dx$$

zurück, die wir im § 572 für rechtwinklige Koordinaten aufgestellt haben und in welcher V das Volumen eines Körpersegmentes bedeutet, das zwischen den zwei zur yz-Ebene parallelen Ebenen enthalten ist, welche zu den Abscissen x_0 und X gehören. Wir nehmen dabei immer an, dass die Fläche, deren Grösse u ist, von einer Kurve begrenzt ist, welche von den zur z-Axe parallelen Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird; wenn nämlich diese Kurven an mehreren Stellen, jedoch in endlicher Anzahl, von diesen Geraden geschnitten

Fig. 16.

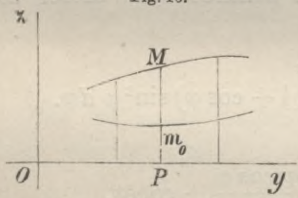
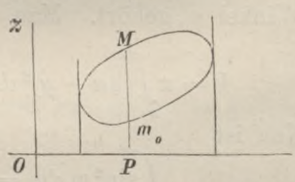


Fig. 17.



werden, so kann man das Volumen V in mehrere Teile zerlegen, von denen jeder dieser Bedingung genügt. Wenn nun Z und z_0 die Ordinaten MP und m_0P bezeichnen, welche zu einem bestimmten Werte $OP = y$ gehören, und man nennt y_0 und Y die Werte von y, welche zu den Grenzen der Kontour von u gehören, so hat diese Fläche den Ausdruck

2) $$u = \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy,$$

und die Gleichung 1) lässt sich demnach folgendermassen schreiben:

3) $$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy.$$

In dieser Gleichung sind Z und z_0 gegebene Funktionen von x und y; sie sind die Ordinaten z der beiden Punkte der Oberfläche des Körpers, welche zu den Koordinaten x, y gehören; y_0 und Y sind Funktionen der Variabelen x, sie bedeuten die Ordinaten parallel zur y-Axe und gehören zur Abscisse x für die Kurve, welche die Projektion des Volumen V auf die xy-Ebene begrenzt; endlich sind x_0 und X gegebene Konstante. Die Gleichung 2) drückt bekanntlich aus, dass

$$u = \lim \Sigma (Z - z_0) \Delta y$$

ist, wenn man x als konstant ansieht, und y von y_0 bis Y in Intervallen Δy variieren lässt, welche zuletzt unendlich klein werden. Ebenso ist nach der Gleichung 1)

$$V = \lim \Sigma u \Delta x,$$

indem x hierbei von x_0 bis X in Intervallen variiert, welche gleich Δx sind. Also kann man schreiben:

$$V = \lim \Sigma \Delta x \lim \Sigma (Z - z_0) \Delta y$$

oder

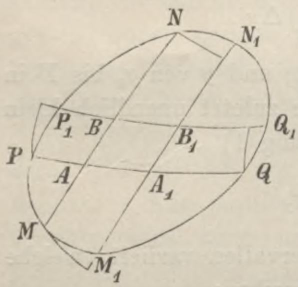
4) $$V = \lim_{\Delta x = 0} \lim_{\Delta y = 0} \Sigma \Sigma (Z - z_0) \Delta x \Delta y,$$

wobei zunächst die Reihenfolge der Grenzprozesse zu beachten ist. Der Ausdruck 3) heisst ein *zweifaches Integral*, insofern zwei Integrationen nach einander und in bestimmter Reihenfolge auszuführen sind. Der Ausdruck 4), welcher aus jenem hervorgeht, zeigt, dass V die Grenze ist, nach welcher die Summe der Prismen $(Z - z_0) \Delta x \Delta y$ konvergiert, deren Basis $\Delta x \Delta y$ eine Summe bildet, deren Grenze die Fläche ist, in welche sich das Volumen V auf der xy-Ebene projiziert.

581. Man kann zu den vorstehenden Resultaten auch noch durch eine andere Betrachtung gelangen, welche zugleich eine Verallgemeinerung der bisher eingeführten Voraussetzungen zulässt. Zu diesem Zwecke müssen wir aber auch zugleich auf die Theorie der *Flächen- oder Doppelintegrale* eingehen.

Die Aufgabe, für einen beliebig begrenzten Körper die Existenz einer bestimmten Volumzahl V nachzuweisen und die Grösse derselben zu berechnen, kann, wenn die Begrenzungsfläche auf drei rechtwinklige Koordinatenaxen bezogen ist und wenn die zur z-Axe parallelen Geraden diese Fläche überall nur in einer endlichen Anzahl von Punkten durchschneiden, durch Zerlegung des Körpers auf die folgende einfachere zurückgeführt werden (§ 583): In der xy-Ebene ist eine bestimmte von einer Kurve umschlossene ebene Fläche von der Grösse P gegeben. Zu jedem Punkte x, y im Innern oder an der Grenze dieser Fläche gehöre eine Ordinate $z = f(x, y)$, so dass die Endpunkte dieser Ordinaten eine bestimmte Fläche im Raume bilden, deren normale Projektion auf die xy-Ebene die Fläche P ist. Es soll das Volumen des cylindrischen Körpers bestimmt werden, dessen Basis die Fläche P und dessen Seitenfläche der Cylindermantel mit den Erzeugenden z längs der Randkurve* dieser Basis ist, und der endlich von der Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt ist. Wir zerlegen die ebene Fläche P nach irgend welchem Gesetze in Elemente, welche zuletzt nach jeder Längsrichtung unendlich klein werden. Diese Zerlegung kann vermittelst zweier Kurvensysteme ausgeführt werden, von denen jedes von einem variabelen Parameter abhängt. Zwei benachbarte Kurven MN und M_1N_1 des einen Systemes bestimmen mit zwei benachbarten Kurven PQ und P_1Q_1 des andern ein krummliniges Viereck $ABB_1A_1 = \Delta P$, welches solch ein Element bildet. Die verschiedenen Elemente ΔP sind im allgemeinen auch der Grösse nach verschieden. In der Nähe der Randkurve der Fläche P werden diese Elemente ΔP durch Bögen der Randkurve teilweise begrenzt.

Fig. 18.



Zu jedem Punkte im Innern oder an der Begrenzung des Flächenelementes ΔP gehören Ordinatenwerte z. Das Maximum derselben sei jedesmal mit G, das Minimum mit g bezeichnet.

* Indem von einer Randkurve die Rede ist, setzt man voraus, dass die Begrenzungspunkte der ebenen Fläche so geartet sind, dass sie sich in ein ebenes Gebiet einschliessen lassen, dessen Grösse beliebig klein ist. Dasselbe gilt auch von den Kurven, mittelst deren die Fläche P zerlegt wird.

Bildet man den Cylinder mit der Basis ΔP und der Höhe G, und betrachtet man die Summe aller dieser Cylindervolumina, die zu den verschiedenen Elementen ΔP gehören, so erhält man einen aus Cylindern zusammengesetzten Körper, welcher den gegebenen in sich enthält und dessen Volumen also grösser ist als das gesuchte. Bildet man dagegen die Summe der Cylinder mit der Basis ΔP und der Höhe g, so erhält man einen Körper, der ganz in dem gegebenen enthalten ist und dessen Volumen also kleiner ist als das gesuchte. Es besteht sonach die Ungleichung

$$\Sigma G \Delta P > V > \Sigma g \Delta P.$$

Das Volumen V ist demnach eine durch diesen Grenzprozess bestimmbare Grösse (§ 572, Zusatz), wenn die Grössen $\Sigma G \Delta P$ und $\Sigma g \Delta P$ nach dem nämlichen Grenzwerte konvergieren, falls man die Flächenelemente ΔP durch neue Kurven in immer kleinere Teile zerlegt, von denen jeder zuletzt beliebig klein wird; denn jede dieser Summe konvergiert bei diesem Prozesse sicherlich nach einer bestimmten Grenze. [Vergleiche hierzu, wie überhaupt für das folgende, die ganz analogen, für Funktionen einer Variabelen geltenden Sätze, die zur Definition des einfachen bestimmten Integrales führen (§ 458).]

Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass

$$\lim \Sigma (G - g) \Delta P = 0$$

wird. Ist dieselbe erfüllt, so konvergiert auch

$$\lim \Sigma z \Delta P$$

nach derselben Grenze, wenn man unter z irgend einen der Werte versteht, der zwischen dem grössten und dem kleinsten Werte gelegen ist, welcher den Ordinaten z im Innern oder an der Begrenzung des Flächenelementes zukommt. Mithin lautet der Satz:

Ist für die Punkte im Innern und am Rande einer in der xy*-Ebene gelegenen, von einer beliebigen Kurve begrenzten Fläche* P *eine Funktion* $z = f(x, y)$ *gegeben, und zerlegt man die ebene Fläche in Elemente* ΔP, *so konvergiert die Summe*

$$\Sigma z \Delta P,$$

in welcher z *jedesmal irgend einen der Werte bezeichnet, die innerhalb der Werte gelegen sind, welche* $f(x, y)$ *im Innern oder am Rande von* ΔP *erhält, bei fortgesetzter Teilung der Elemente dann und nur dann nach einer bestimmten Grenze, falls die Schwankungen* D *der Funktion, d. h. der Unterschied ihres grössten und kleinsten Wertes im Elemente* ΔP, *so geartet sind, dass*

$$\lim \Sigma D \Delta P$$

bei diesem Prozesse nach null konvergiert. Der von der Fläche $z = f(x, y)$ *begrenzte, cylindrische Körper besitzt in diesem Falle ein Volumen, dessen Grösse gleich dem Grenzwerte von* $\Sigma z \Delta P$ *ist.*

Bevor wir auf den Inhalt und die Folgerungen dieses Satzes eingehen, müssen wir uns die Frage vorlegen, ob, falls $\Sigma D \Delta P$ schliesslich null wird, irgend eine andere Teilung des Gebietes P in Flächenelemente $\Delta' P$, die ihrerseits wiederum beliebig zerteilt werden, ebenfalls zu einer bestimmten Grenze für $\Sigma z \Delta' P$ führt, und ob dieser Grenzwert dann auch der nämliche wie vorhin ist.

Es sei die Teilung in die Elemente ΔP so weit getrieben, dass die Grössen $\Sigma G \Delta P$ und $\Sigma g \Delta P$ nur noch um eine beliebig klein fixierte Grösse ε differieren; die dazu erforderliche Anzahl der Elemente sei n. Eine zweite Zerlegung der Fläche P in Elemente $\Delta' P$ sei vollzogen, so dass jedes der Elemente $\Delta' P$ kleiner ist als das kleinste unter den Elementen ΔP. G' und g' seien die Maximal- und Minimalwerte, welche zu einem Elemente $\Delta' P$ gehören. Es soll gezeigt werden, dass die Summen $\Sigma G' \Delta' P$ und $\Sigma g' \Delta' P$ einerlei Grenzen haben. Die Flächenelemente der zweiten Teilung werden zum Teil ganz innerhalb der Elemente ΔP liegen, zum Teil werden sie die Begrenzungen derselben überschneiden. Jedes Element der zweiten Teilung, welches ganz innerhalb eines Elementes ΔP gelegen ist, soll mit $\Delta'_1 P$ bezeichnet werden, jedes Element dagegen, welches die Begrenzungen überschneidet, mit $\Delta'_2 P$. Es ist alsdann

$$\Sigma G' \Delta' P = \Sigma G' \Delta'_1 P + \Sigma G' \Delta'_2 P, \quad \Sigma g' \Delta' P = \Sigma g' \Delta'_1 P + \Sigma g' \Delta'_2 P.$$

Um den Einfluss der Flächenelemente $\Delta'_2 P$ in diesen Summen zu fixieren, verfahren wir nun folgendermassen. Wir denken uns in jedem Flächenelemente ΔP ein kleineres ausgeschnitten, indem wir etwa im Innern des Elementes Kurven zeichnen, welche zu den Randkurven des Elementes parallel sind und die beliebig klein fixierte Entfernung δ haben. Es entstehen alsdann zu beiden Seiten einer Randkurve Flächenstreifen von der Breite 2δ, und die Summe aller dieser Flächenstreifen ist eine Grösse F, welche mit δ beliebig klein wird, weil in jedem der n-Elemente ΔP der Unterschied zwischen ΔP und dem inneren kleineren Elemente mit δ beliebig klein wird. Wir können nun weiter annehmen, dass die Elemente $\Delta' P$ bereits so klein gewählt sind, dass ihre Ausdehnung nach jeder Richtung hin kleiner ist als δ. Alsdann folgt, dass die Summe der Grössen $\Delta'_2 P$ jedenfalls nicht grösser sein kann als F; denn wenn solch ein Element eine der Randkurven von ΔP überschreitet, so muss es ganz innerhalb des Flächenstreifens F gelegen sein. Demnach folgt aus der Gleichung

$$\Sigma (G' - g') \Delta' P = \Sigma (G' - g') \Delta'_1 P + \Sigma (G' - g') \Delta'_2 P,$$

wenn man mit $G_0 - g_0$ die grösste Schwankung in allen Elementen $\Delta'_2 P$ bezeichnet:

$$\Sigma (G' - g') \Delta' P = \Sigma (G' - g') \Delta'_1 P + [\leqq (G_0 - g_0) F].$$

Die Summe $\Sigma(G'-g')\,\Delta'_1 P$ ist aber jedenfalls nicht grösser als $\Sigma(G-g)\,\Delta P$, denn die grösste Schwankung der Elemente $\Delta'_1 P$, welche ganz in einem Elemente ΔP eingeschlossen liegen, ist nie grösser als $G-g$. Mithin ist:

$$\Sigma(G'-g')\,\Delta' P \leqq \Sigma(G-g)\,\Delta P + (G_0-g_0)\,F.$$

Da das erste Glied der rechten Seite kleiner als eine beliebig kleine Grösse ε gemacht werden kann, und da ferner F durch Wahl von δ beliebig klein wird, während G_0-g_0 endlich bleibt, so erkennt man, dass $\lim \Sigma(G'-g')\,\Delta' P$ gleich null wird, dass also auch die zweite Flächenteilung zu einem bestimmten Grenzwert führen muss.

Es ist nun noch zu zeigen, dass dieser Grenzwert derselbe ist, wie bei der ersten Teilung, und dies gelingt, indem man die Teilungen ΔP und $\Delta' P$ gleichzeitig betrachtet. Jede derselben sei soweit getrieben, dass sie von ihrem Grenzwerte S resp. S' um weniger als die beliebig kleine Grösse ε abweicht. Indem man nun gleichzeitig die Teilungen ΔP und $\Delta' P$ ins Auge fasst, entsteht durch ihre Vereinigung eine neue Zerlegung der ebenen Fläche in Elemente $\Delta'' P$, und diese neue Zerlegung kann sowohl als eine Fortsetzung der ersten betrachtet werden, indem die Elemente ΔP in kleinere zerlegt sind, als auch der zweiten. Mithin wird

$$\Sigma z \Delta'' P = S \pm (<\varepsilon) = S' \pm (<\varepsilon),$$

also können S und S' höchstens um die beliebig kleine Grösse 2ε differieren, d. h. sie sind einander gleich.

Der von der Art der Teilung der Fläche P *in Elemente* $\Delta \mathrm{P}$ *unter der Bedingung* $\lim \Sigma \mathrm{D} \Delta \mathrm{P} = 0$ *ganz unabhängige Grenzwert der Summe* $\Sigma \mathrm{z} \Delta \mathrm{P} = \Sigma \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Delta \mathrm{P}$ *heisst das über die Fläche* P *ausgedehnte Flächen- oder Doppelintegral der Funktion* $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, *und wird, da es sich hierbei um eine Summation nach zwei Dimensionen hin handelt, mit*

$$\iint \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dP} \quad \text{oder} \quad \int_2 \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dP}$$

bezeichnet. Es ist also:

$$\iint \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dP} = \int_2 \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dP} = \lim \Sigma \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\Delta \mathrm{P}.$$

Die oben aufgestellte, notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten Wertes für das Flächenintegral ist erfüllt:

Erstens, wenn $f(x, y)$ eine im ganzen Gebiete P, einschliesslich seiner Begrenzung, stetige Funktion ist; denn solch eine

Funktion ist immer auch zugleich gleichmässig stetig; man kann daher eine Grösse δ fixieren, sodass für alle Flächenelemente ΔP, wenn sie kleiner sind als δ, die Schwankungen $G - g$ kleiner bleiben als eine beliebig kleine Grösse ε. Es wird also

$$\Sigma(G - g)\Delta P < \varepsilon P$$

und konvergiert mit ε nach null.

Zweitens, wenn $f(x, y)$ zwar für das ganze Gebiet P endlich ist, aber in einzelnen Punkten oder in einzelnen Linien unstetig oder unbestimmt (zwischen endlichen Grenzen) wird, oder auch unendlich viele Maxima und Minima mit endlichen Schwankungen erleidet; denn man kann alsdann diese besonderen Stellen in Flächenelemente einschliessen, deren Grösse in Summa beliebig klein wird.

Drittens, wie ich nur der Vollständigkeit halber anführen will, wenn $f(x, y)$ in unendlich vielen Linien unstetig oder unbestimmt wird oder unendlich oft oscilliert, wenn aber die Summe der Flächenelemente, in denen die Schwankungen $G - g$ grösser als eine beliebig kleine Zahl σ sind, beliebig klein gemacht werden kann.

Für das geometrische Problem der Volumbestimmung beliebig begrenzter Körper ist der erste Fall der gewöhnliche und darum der wichtigste. Er sagt aus:

Jeder cylindrische Körper, dessen Basis eine bestimmte ebene Fläche von der Grösse P *bildet, und der oberhalb dieser Basis, durch eine stetige Fläche* $z = f(x, y)$ *begrenzt ist, welche durch die Ordinaten* z *eindeutig auf die Fläche* P *bezogen ist, besitzt ein bestimmtes Volumen. Die Grösse desselben ist:*

$$V = \int\!\!\int f(x, y)\, dP,$$

wenn die Erzeugenden z *normal zur* xy-*Ebene stehen, und gleich*

$$V = \sin\alpha \int\!\!\int f(x, y)\, dP,$$

wenn sie den Neigungswinkel α *mit dieser Ebene bilden.*

582. Ein *Flächen-* oder *Doppelintegral* wird berechnet, indem man dasselbe auf ein *zweifaches* Integral zurückführt, das heisst auf zwei successive einfache Integrationen. Wir nehmen an, dass die Elemente ΔP durch das System von Geraden bestimmt sind, welche der x-Axe parallel sind, und ferner durch das Geradensystem parallel zur y-Axe. Es wird dann

$$\Delta P = \Delta x \Delta y,$$

mit Ausnahme derjenigen Flächenelemente, welche an der Randkurve von P liegen. Indem wir nur diejenigen Rechtecke ins

Auge fassen, welche vollständig innerhalb der ebenen Fläche P liegen und mit diesen die Summe

$$S = \Sigma f(x, y) \Delta x \Delta y$$

bilden, muss der Grenzwert derselben gleich dem Grenzwerte

$$V = \lim \Sigma f(x, y) \Delta P$$

werden, weil der Unterschied der Fläche P und der ihr eingeschriebenen Rechtecke $\Delta x \Delta y$ beliebig klein gemacht werden kann.

Die Summe S kann nun auf zweierlei Weisen summiert werden: Entweder, indem man zunächst alle die Rechtecke addiert, die zu demselben Werte von x gehören, d. h. also alle die prismatischen Körper, deren Grundflächen in Summa einen zur y-Axe parallelen rechtwinkligen Streifen bilden, und nachdem dieses geschehen, alle diese Prismen addiert; wir drücken dies aus durch die Gleichung:

$$S = \Sigma \Delta x \Sigma f(x, y) \Delta y;$$

oder, indem man erst alle prismatischen Körper vereinigt, welche zu demselben Werte von y gehören, deren Basis also zusammen einen zur x-Axe parallelen Streifen bildet, und alsdann diese summiert; also:

$$S = \Sigma \Delta y \Sigma f(x, y) \Delta x.$$

In beiden Fällen ist dann schliesslich der Grenzwert für verschwindende Werte von Δx und Δy zu bilden. Wir betrachten zuvörderst den ersten Prozess. Nennen wir wie früher G und g jedesmal den Maximal- und Minimalwert der Funktion $f(x, y)$ im Innern oder am Rande eines Elementes $\Delta x \Delta y$, so ist:

$$\Sigma g \Delta y \leqq \Sigma f(x, y) \Delta y \leqq \Sigma G \Delta y.$$

Diese Relation bleibt bestehen, wenn wir im mittleren Gliede die Grösse Δy beliebig verkleinern, dagegen in den beiden äusseren den Wert Δy und dementsprechend die Werte g und G beibehalten. Der Grenzwert, welchem sich $\Sigma f(x, y) \Delta y$ bei beliebiger Verkleinerung von Δy nähert, mag derselbe ein bestimmter sein oder nicht, werde mit

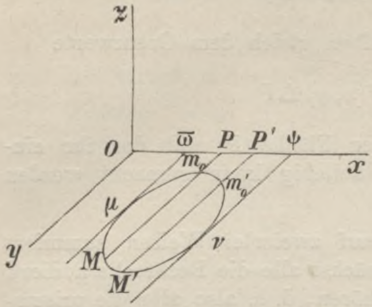
$$\int f(x, y)\, dy$$

bezeichnet; er liegt jedenfalls zwischen den einmal fixierten Grenzen. Es ist also:

$$\Sigma g \Delta y \leqq \int f(x, y)\, dy \leqq \Sigma G \Delta y.$$

Wenn wir annehmen, dass die Begrenzung der Fläche P durch die Parallelen zur y-Axe immer nur in zwei Punkten m_0 und M geschnitten wird, und man bezeichnet mit y'_0 und Y' die grösste unter den Ordinaten Pm_0 und die kleinste unter den Ordinaten PM im Intervalle von x bis $x + \Delta x$, so ist dieses Integral bei einem bestimmten Werte von $x = OP$ zwischen den Grenzen y'_0 und Y' zu bilden; diese Grenzen sind Funktionen von x. Es ist also:

Fig. 19.



$$\Sigma g \Delta y \leqq \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy \leqq \Sigma G \Delta y.$$

Daraus folgt, dass der absolute Wert der Differenz

$\Sigma f(x, y) \Delta y - \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy$ nicht grösser ist als $\Sigma (G - g) \Delta y$.

Mithin ist auch

$$\Sigma \Delta x \Sigma f(x, y) \Delta y - \Sigma \Delta x \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy$$

nicht grösser als

$$\Sigma \Delta x \Sigma (G - g) \Delta y = \Sigma \Sigma (G - g) \Delta x \Delta y.$$

Diese Grenze aber, die Produktsumme der Schwankungen, kann der Voraussetzung nach kleiner gemacht werden als eine beliebig kleine Grösse ε; also ist

$$\Sigma \Delta x \Sigma f(x, y) \Delta y - \Sigma \Delta x \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy < \varepsilon$$

oder

$$S - \Sigma \Delta x \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy < \varepsilon,$$

wenn Δx und Δy hinreichend klein fixiert sind. Lässt man nun Δx und Δy nach null konvergieren, sodass S seinem Grenzwerte zustrebt, so konvergiert auch ε nach null, und folglich muss auch

$$\Sigma \Delta x \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy$$

einen bestimmten Grenzwert und zwar denselben haben. Dieser Grenzwert lässt sich aber folgendermassen fixieren. Wir bezeichnen mit y_0 und Y die Werte der Ordinate y, welche zu der Randkurve der ebenen Fläche P bei dem Abscissenwerte x gehören, ferner mit δ_1 die grösste Schwankung der Ordinaten y_0 im Intervalle von x bis $x + \Delta x$, ebenso mit δ_2 die grösste Schwankung der Ordinaten Y in demselben Intervalle, endlich mit F den grössten Wert der Funktion $f(x, y)$ innerhalb des ebenen von der Kurve der Fläche P begrenzten Streifens von x bis $x + \Delta x$, so ist der Unterschied zwischen

$$\int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

jedenfalls nicht grösser als der Wert $F(\delta_1 + \delta_2)$; also der Unterschied zwischen

$$\Sigma \Delta x \int_{y'_0}^{Y'} f(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad \Sigma \Delta x \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

jedenfalls nicht grösser als $\Sigma \Delta x\, F(\delta_1 + \delta_2)$. Nennt man nun F_0 den grössten Wert, welchen die Funktion $f(x, y)$ im Innern oder an den Grenzen des Gebietes P überhaupt annimmt, so ist diese Summe kleiner als $F_0\, \Sigma \Delta x\, (\delta_1 + \delta_2)$. Nun muss aber $\Sigma \Delta x\, (\delta_1 + \delta_2)$ bei beliebig abnehmenden Werten von Δx nach 0 konvergieren, weil die Rechtecke, welche die Begrenzungskurve einschliessen, nach dem Summenwerte null konvergieren; also ist

$$\lim S = \lim \Sigma \Delta x \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy = \int dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy.$$

Das Integral nach x bezieht sich auf alle Werte, welche die Abscisse x für die Punkte des ebenen Gebietes annehmen kann; wenn also x_0 und X die Abscissen sind, welche zu den Ordinaten $\mu\omega$, $\nu\psi$ gehören, durch welche die Randkurve der Fläche P begrenzt wird, so ist

$$V = \lim S = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy.$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass die analogen Gleichungen gelten, wenn man die Summation der Elemente von S in der anderen Reihenfolge vollzieht, also

$$S = \Sigma \Delta y\, \Sigma f(x, y)\, \Delta x$$

setzt, und nun zuerst Δx, sodann Δy nach 0 konvergieren lässt. Man erhält auf diese Weise, falls wiederum eine einfache Kontour vorliegt, die von den Parallelen zur x-Axe höchstens in zwei Punkten geschnitten wird:

$$V = \lim S = \int_{y'_0}^{Y'} dy \int_{x'_0}^{X'} f(x, y)\, dx;$$

die Bedeutung der Grenzen ist aber hier eine durchaus andere wie vorhin; x'_0 und X' sind Funktionen von y und bedeuten die beiden Abscissenwerte der Punkte, in denen die im Abstande y zur x-Axe parallele Gerade die Randkurve von P schneidet, während y'_0 und Y' konstante Werte sind, und die beiden äussersten Werte von y bezeichnen, welche die Punkte des Gebietes P besitzen.

Sonach ist bewiesen:

Der Wert des Doppelintegrales $\lim \Sigma \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \Delta \mathrm{P} = \int\int \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dP}$ *kann durch zwei successive Integrationen*

$$\int\int \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dP} = \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{dx} \int_{\mathrm{y}_0}^{\mathrm{Y}} \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dy} = \int_{\mathrm{y}'_0}^{\mathrm{Y}'} \mathrm{dy} \int_{\mathrm{x}'_0}^{\mathrm{X}'} \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{dx}$$

berechnet werden, wenn die Randkurve des ebenen Gebietes P *so beschaffen ist, dass sie von den Parallelen zur* x-*Axe und von denen zur* y-*Axe immer nur in zwei Punkten geschnitten wird. Die Grenzen in diesen beiden zweifachen Integralen sind verschieden und durch die Koordinaten der Begrenzungskurve von* P *bestimmt.*

Wenn die Fläche P ein Rechteck ist, dessen Seiten der x- und der y-Axe parallel laufen, und es erstreckt sich die eine Seite von x_0 bis X, die andere von y_0 bis Y, so wird:

$$y'_0 = y_0, \quad Y' = Y, \quad x'_0 = x_0, \quad X' = X,$$

folglich:

$$\int\int f(x, y)\, dP = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich der im § 481 unter einer engeren Bedingung bewiesene Satz:

Wenn die Funktion $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *innerhalb der konstanten Grenzen* x_0 *und* X, y_0 *und* Y *die Bedingung der doppelten Integrierbarkeit erfüllt (§ 581), so ist der Wert dieses Doppelintegrales gleich dem Werte, welcher sich durch successive Integration nach* x *und nach* y *ergiebt; die Reihenfolge, in welcher diese beiden Integrationen ausgeführt werden, ist ohne Einfluss auf das Resultat.*

583. Bestimmung des gesamten Volumens eines Körpers. Es sei der Körper von allen Seiten von einer krummen Fläche eingeschlossen, und das Koordinatensystem sei so gelegt, dass die xy-Ebene den Körper nicht durchschneidet. Wir nehmen ferner an, dass die zur z-Axe parallelen Geraden die Oberfläche des Körpers in nicht mehr als zwei Punkten durchschneiden; denn die Fälle, in denen die Oberfläche auch in mehr als zwei Punkten, jedoch immer noch in einer endlichen Anzahl, von diesen Geraden durchschnitten wird, lassen sich durch Zerlegung des Körpers in mehrere Teile auf diesen einfacheren zurückführen. Bestimmt man alsdann den Cylinder, dessen Erzeugenden der z-Axe parallel sind und welcher die Oberfläche des gegebenen Körpers berührt, so ist die Basis desselben auf der xy-Ebene die Fläche P. Zu jedem Punkte im Innern von P gehören zwei Ordinatenwerte z_0 und Z, bestimmt durch die Punkte, in denen diese Geraden in den Körper ein- und austreten. Das Volumen des Körpers wird alsdann:

$$\int\int Z\,dx\,dy - \int\int z_0\,dx\,dy = \int\int (Z - z_0)\,dx\,dy,$$

oder nach der eben bewiesenen Formel gleich

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy = \int_{y'_0}^{Y'} dy \int_{x'_0}^{X'} (Z - z_0)\,dx.$$

Die Ordinaten z_0 und Z sind durch die Gleichung der Oberfläche des Körpers

$$F(x, y, z) = 0$$

bestimmt. Die Punkte dieser Fläche, in denen die Tangentenebene parallel zur z-Axe ist, genügen der Gleichung:

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0,$$

und die Elimination von z zwischen diesen beiden Gleichungen giebt die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

der Randkurve von P. Aus dieser Gleichung hat man bei jedem Werte von x die Werte y_0 und Y zu bestimmen. Die Grenzen x_0 und X der schliesslichen Integration nach x sind diejenigen Werte, welche zu den beiden Flächenpunkten gehören, in denen die Tangentenebene parallel zur yz-Ebene ist; für diese Punkte erhält man also die drei Gleichungen:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

584. Die Flächenelemente ΔP seien bestimmt durch ein System von konzentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist, und durch die Radien, welche von diesem Punkte ausgehen. Sind ϱ und $\varrho + \Delta\varrho$ zunächst die Radien zweier auf einander folgender Kreise, ω und $\omega + \Delta\omega$ die Winkel, welche zu zwei auf einander folgenden Radien gehören, so ist:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\left[(\varrho + \Delta\varrho)^2 - \varrho^2\right]\Delta\omega = \varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\varrho^2\,\Delta\omega$$

und

$$V = \lim \Sigma (Z - z_0)\left[\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\varrho^2\,\Delta\omega\right].$$

Genau dieselben Überlegungen wie bei der Flächenteilung in Rechtecke führen auch hier zu der Erkenntnis, dass es gestattet ist, den Grenzprozess so auszuführen, dass man zuerst eine der Grössen $\Delta\varrho$ oder $\Delta\omega$ nach null konvergieren lässt, und sodann die andere, wofern nur die Funktion $Z - z_0$ die Bedingung der doppelten Integrierbarkeit erfüllt, also etwa eine stetige Funktion der Variabelen ϱ und ω ist. Wir beginnen nun damit, die Grenze der Elemente zu bilden, indem zunächst ω und $\Delta\omega$ als konstant angesehen werden. Liegt

Fig. 20.

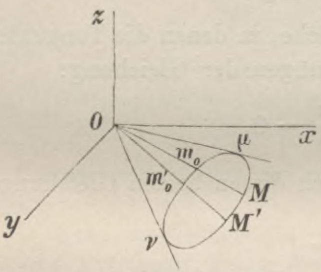
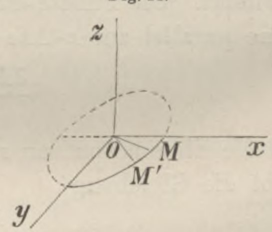


Fig. 21.



der Anfangspunkt des Koordinatensystemes ausserhalb der Fläche P, und schneiden die Radien, welche von ihm ausgehen, die Begrenzungskurve nur in zwei Punkten, so wird

$$\lim \Sigma (Z - z_0)\,\varrho_i\,\Delta\varrho = \int_{\varrho_0}^{R} (Z - z_0)\,\varrho\,d\varrho,$$

wenn man mit ϱ_0 und R die beiden Radien bezeichnet, welche zum Winkel ω gehören. Nennt man ferner M den grössten

Wert, welchen die Funktion $Z - z_0$ im Innern oder am Rande des Gebietes P erhält, so ist:

$$\Sigma(Z-z_0)\Delta\varrho^2 < M\Sigma\Delta\varrho^2, \quad \text{also} \quad \lim\Sigma(Z-z_0)\Delta\varrho^2 < M\lim\Delta\varrho\lim\Sigma\Delta\varrho,$$

d. h. kleiner als $M(R-\varrho_0)\lim\Delta\varrho$. Da dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\Delta\varrho$ beliebig klein wird, so liefert dieses zweite Glied der obigen Summe für den Grenzwert keinen Beitrag. Est ist also:

$$V = \lim\Sigma\Delta\omega\int_{\varrho_0}^{R}(Z-z_0)\,\varrho\,d\varrho.$$

Schliesslich ist noch die Grenze zu bestimmen, nach welcher dieser Ausdruck konvergiert, wenn ω von ω_0 bis Ω variiert, die zu den beiden Radien $O\mu$ und $O\nu$ gehören, welche die Fläche P einschliessen. Man erhält so:

$$V = \int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega \int_{\varrho_0}^{R}(Z-z_0)\,\varrho\,d\varrho.$$

Liegt der Koordinatenanfangspunkt im Innern der Fläche P, so ist die erste Integration von 0 bis zu dem Werte R auszuführen, welcher bei jedem einzelnen Werte von ω der Randkurve von P angehört, und die zweite Integration von 0 bis 2π; also ist:

$$V = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R}(Z-z_0)\,\varrho\,d\varrho.$$

585. Erstes Beispiel. Als erstes Beispiel dieser allgemeinen Theorie betrachten wir die Aufgabe, welche schon im § 575 gelöst wurde. Es handelt sich hierbei um das Volumen V, welches zwischen den Flächen liegt, deren Gleichungen

$$az = xy, \quad x+y+z=a, \quad z=0$$

sind. Die Fläche P ist hier das rechtwinklige Dreieck, welches von der x-Axe, der y-Axe und der Geraden $x+y=a$ begrenzt wird. Man erhält sonach, wenn man die Integration nach y zuerst ausführt:

$$y_0 = 0, \quad Y = a - x, \quad x_0 = 0, \quad X = a.$$

Die Ordinate z_0 ist null, das ist der Wert, der durch die dritte der obigen Flächengleichungen geliefert wird. Die beiden anderen geben

$$z = \frac{xy}{a}, \quad z = a - x - y,$$

und der kleinere dieser beiden Werte muss jedesmal für Z gewählt werden in der Gleichung:

$$V = \int_0^a dx \int_0^{a-x} Z\,dy.$$

Also hat man $Z = \frac{xy}{a}$, solange

$$\frac{xy}{a} < a - x - y \quad \text{oder} \quad y < \frac{a\,(a-x)}{a+x},$$

dagegen $Z = a - x - y$, solange

$$\frac{xy}{a} > a - x - y \quad \text{oder} \quad y > \frac{a\,(a-x)}{a+x}.$$

Folglich ist:

$$\int_0^{a-x} Z\,dy = \int_0^{\frac{a(a-x)}{a+x}} \frac{xy}{a}\,dy + \int_{\frac{a(a-x)}{a+x}}^{a-x} (a-x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{a\,x\,(a-x)^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2\,(a-x)^2}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x\,(a-x)^2}{a+x},$$

und $$V = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x\,(a-x)^2}{a+x}\,dx = \left(\frac{17}{12} - l\,(4)\right)a^2.$$

Man sieht, dass das Volumen V aus zwei Teilen besteht, von denen der eine durch das gegebene Paraboloid, der andere von der gegebenen Ebene begrenzt ist.

586. Zweites Beispiel. *Gegeben ist in rechtwinkligen Koordinaten der Cylinder, dessen Gleichung* $\mathrm{y}^2 + \left(\mathrm{x} - \frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{4}$ *ist; es soll das Volumen bestimmt werden desjenigen Teiles vom Cylinder, welcher zwischen der* xy-*Ebene und der Kugel:* $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = \mathrm{R}^2$ *enthalten ist.*

Führt man Polarkoordinaten ϱ und ω an Stelle von x und y ein, so erhält die Kugel die Gleichung: $z^2 = R^2 - \varrho^2$, und die Basis des Cylinders die Gleichung: $\varrho = R\cos\omega$. Der

Ausdruck für das gesuchte Volumen wird also, indem man zunächst die Hälfte betrachtet und diese verdoppelt:

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \sqrt{R^2-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho;$$

das Integral $\int\sqrt{R^2-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho$ ist gleich $-\frac{1}{3}(R^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}+\text{const}$, also ist:

$$V = \frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\omega)\,d\omega = \frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\omega+\sin\omega\cos^2\omega)\,d\omega.$$

Dieses Integral ist gleich $\left(\omega+\cos\omega-\frac{1}{3}\cos^3\omega+\text{const}\right)$, also ist:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{4}{9}R^3.$$

Der Überschuss der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi R^3$ über das Volumen $2V$ des in derselben enthaltenen Cylinderteiles ist also gleich $\frac{8}{9}R^3$.

Anwendung der Theorie des Doppelintegrales auf verschiedene Probleme.

587. Die Betrachtung der Volumina, welche durch Doppelintegrale gemessen werden, lässt sich mit Vorteil bei der Lösung verschiedener Fragen anwenden; ein Beispiel dieser Art haben wir im § 582 erkannt, wo wir zu einem neuen und sehr einfachen Beweise für die Regel der Integration unter dem Integralzeichen gelangten, und zwar unter weit allgemeineren Voraussetzungen als früher. Wir wollen hier noch zwei andere Beispiele betrachten.

Als erstes wählen wir das Verfahren, welches Poisson (und ebenso Gauss) zur Bestimmung des Integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

benutzte, das wir im § 497 behandelt haben, und das nichts anderes ist als das Eulersche Integral $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Die Fläche $z = e^{-(x^2+y^2)}$ überdeckt die gesamte xy-Ebene, und das Volumen, welches sie zusammen mit dieser unendlichen Ebene einschliesst, ist durch das Doppelintegral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

zu bestimmen.

Wir bemerken hierbei, dass ein über die unendliche xy-Ebene auszudehnendes Doppelintegral zu definieren ist als der Grenzwert, welchen das Integral

$$\iint f(x, y)\, dP$$

annimmt, wenn man dasselbe zunächst für eine beliebig grosse Fläche P bildet, und alsdann die Begrenzung dieser Fläche beliebig erweitert, so dass die Fläche P nach der allseitig unbegrenzten Ebene konvergiert. Ein bestimmter, von der Art der Begrenzung der Fläche P und ihrer Erweiterung völlig unabhängiger Grenzwert ergiebt sich dann und nur dann, wenn erstlich die Funktion $f(x, y)$ in jedem noch so grossen endlichen Gebiete der Bedingung der doppelten Integrierbarkeit genügt, und wenn zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Begrenzung von P fixiert werden kann, dass für jede weitere beliebig geartete Vergrösserung des Gebietes P die Wertänderung des Doppelintegrales kleiner bleibt als δ.

Eine hinreichende Bedingung dafür ist die folgende:

Sind die absoluten Werte der integrierbaren Funktion bei beliebig wachsenden Werten von x und y stets kleiner als das Produkt $\frac{C}{\varrho^\alpha}$, wobei $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und α grösser als 2 ist, so ist das Doppelintegral endlich und von der Art des Überganges zum unendlichen Bereich ganz unabhängig. Denn für jeden Kreisring, dessen innerer Radius gleich oder grösser ist als ϱ_1, sowie für jedes in demselben enthaltene ebene Gebiet, wird der Wert des Doppelintegrales kleiner als:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\omega \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho'_1} \frac{C}{\varrho^{\alpha-1}}\, d\varrho = \frac{2\pi C}{\alpha - 2}\left[\frac{1}{\varrho_1{}^{\alpha-2}} - \frac{1}{\varrho'_1{}^{\alpha-2}}\right],$$

und dieser Ausdruck, in welchem $\varrho'_1 > \varrho_1$ ist, wird durch Wahl von ϱ_1 beliebig klein, wenn $\alpha > 2$ ist. Die Funktion $z = e^{-(x^2+y^2)}$ erfüllt diese Bedingung.

Sobald das Doppelintegral, ausgedehnt über einen unendlichen Bereich, einen bestimmten, von der Art der Begrenzung unabhängigen Grenzwert hat, kann derselbe auch durch successive Integration nach x und y ermittelt werden. Denn wählt man als Begrenzung ein Rechteck von $-x_0$ bis $+x_0$ und von $-y_0$ bis $+y_0$, so ist für dieses

$$\int\int f(x, y)\, dP = \int_{-x_0}^{+x_0} dx \int_{-y_0}^{+y_0} f(x, y)\, dy.$$

Lässt man nun zunächst $-x_0$ nach $-\infty$ und $+x_0$ nach $+\infty$ konvergieren, so wird für dieses unendliche Gebiet das Doppelintegral gleich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-y_0}^{+y_0} f(x, y)\, dy.$$

Geht nun auch y_0 in den Wert ∞ über, so muss der Voraussetzung nach auch dieser Ausdruck einem bestimmten Grenzwerte zustreben, und zwar wird derselbe gleich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy,$$

weil bei beliebig wachsenden Werten von y_0 das Doppelintegral in allen unendlichen parallelen Streifen beliebig klein wird, weil also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_0}^{y'_0} f(x, y)\, dy$$

lediglich durch Wahl von y_0 beliebig klein gemacht werden kann, wenn $y'_0 > y_0$ ist.

Das gesuchte Volumen V wird demnach gleich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Substituiert man aber an Stelle der Koordinaten x, y die Polarkoordinaten ϱ, ω, so wird die Gleichung der Fläche $z = e^{-\varrho^2}$, und das Volumen bekommt den Ausdruck

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int\int e^{-\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho\, d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho.$$

Das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-\varrho^2}\varrho\,d\varrho = \left[-\frac{1}{2}e^{-\varrho^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$; also wird

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{2\pi} d\omega\,\frac{1}{2} = \pi,$$

folglich

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

wie früher gefunden wurde.

588. Als zweites Beispiel wollen wir noch eine merkwürdige Formel beweisen, welche Dirichlet in seinen Abhandlungen benutzt, nämlich die folgende:

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x, y)\,dy;$$

$f(x, y)$ bezeichnet hier eine beliebige überall endliche Funktion, welche der Bedingung der Integrierbarbeit genügt. Es handelt sich hier also um eine doppelte Integration, bei welcher die Grenzen für das Integral nach y nicht beide unabhängig sind von der anderen Variabelen. Zum Beweise dieser Gleichung betrachte man x, y und $f(x, y)$ als die drei rechtwinkligen Koordinaten einer Fläche. Alsdann sieht man gleich, dass jedes der beiden zweifachen Integrale das Volumen darstellt zwischen der genannten Fläche, der xy-Ebene und den drei dazu rechtwinkligen Ebenen: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$.

Die Quadratur krummer Flächen.

589. Mit einer geraden Linie kann man nur eine andere gerade Linie oder eine Summe von solchen unmittelbar vergleichen. Wir mussten daher auch die gebrochene gerade Linie genau definieren, deren Grenze die *Länge eines Kurvenbogens* bestimmt. Analoge Betrachtungen müssen wir hier anwenden, um festzustellen, was wir unter der *Grösse* eines bestimmten Teiles einer krummen Fläche zu verstehen haben.

Wir können immer annehmen, dass der Teil der krummen Fläche, um welchen es sich handelt, durch eine Kurve begrenzt ist; denn wenn eine geschlossene Oberfläche zu bestimmen ist, so könnte man eine beliebig kleine Kontour auf derselben sich denken, oder man zerlegt die Fläche in zwei oder mehrere Teile; dann gilt, was wir von jedem Teile sagen, natürlich auch für die gesamte Fläche, welche die Summe dieser Teile bildet.

Es sei nun ein Teil der krummen Fläche begrenzt durch eine Kontour C. Wir schreiben der Fläche eine beliebige Polyederfläche ein, welche aus lauter Dreiecken besteht und durch ein Polygon Γ begrenzt ist, das schliesslich in die Kontour C übergeht. *Als Grösse der krummen Fläche definieren wir nun die Grenze* S, *nach welcher die Oberfläche des Polyeders konvergiert, wenn wir die Seitenflächen desselben insgesamt in ihren linearen Dimensionen beliebig klein werden lassen, so jedoch, dass die Winkel in jedem Dreiecke bestimmte, von* 0 *und* π *verschiedene Werte erlangen.**

Es ist zu zeigen, unter welchen Bedingungen die Grenze S existiert und unabhängig ist von dem Gesetze, nach welchem die Seiten des eingeschriebenen Polyeders beliebig verkleinert werden.

Wir beziehen die Fläche auf drei rechtwinklige Axen und wählen die xy-Ebene so, dass jeder Punkt der gegebenen Fläche durch normale Projektion, d. h. durch die Ordinaten z eindeutig bezogen ist auf die Punkte der Ebene. Desgleichen soll auch die Kontour C sich eindeutig auf die Ebene vermittelst der Ordinaten z projizieren und daselbst eine Kurve C' erzeugen, welche einen bestimmten ebenen Bereich von der Grösse P begrenzt. Die Ordinaten z sollen die Fläche weder in den Punkten der Kontour C, noch im Innern derselben berühren. Nur für Flächen, für welche diese eindeutige Beziehung auf eine Ebene möglich ist, oder welche sich in Teile zerlegen lassen, die in dieser Weise eindeutig auf Ebenen bezogen werden können, gelten die nachfolgenden Betrachtungen. Diesen ebenen Bereich zerlegen wir in Dreiecke von der Grösse ΔP; in der Umgebung der Randkurve werden diese Dreiecke von der Kurve durchschnitten. Wir können die Betrachtung auf die Gesamtheit aller Dreiecke beschränken, welche ganz in das Innere von P fallen. Den Eckpunkten eines Dreieckes entsprechen drei Punkte auf der Fläche, durch welche ein Dreieck $\Delta' P$ bestimmt ist, welches eine Seitenfläche des eingeschriebenen Polyeders bildet. Die Grösse dieses Dreieckes ist gleich

---

* Auf die Notwendigkeit, den Grenzprozess für die Polyederflächen so einzuschränken, dass, kurz gesagt, jedes unendlich kleine Dreieck zuletzt in die Tangentenebene fällt, hat Herr Schwarz neuerdings besonders aufmerksam gemacht. Vergl. die Mitteilung in dem *Cours de M. Hermite, pendant le 2. Sem. 1881—1882, second tirage pag. 35.* Daselbst ist an einem instruktiven Beispiele gezeigt, wie das einem Cylinder eingeschriebene Polyeder ohne solche Festsetzung einen beliebigen Grenzwert annimmt.

$$\Delta P = \frac{\Delta P}{\cos\alpha},$$

wenn man mit α den Winkel bezeichnet, welchen die Polyederfläche mit der xy-Ebene bildet. Es ist sonach die Oberfläche des Polyeders gleich:

$$\Sigma\,\Delta' P = \Sigma\,\frac{\Delta P}{\cos\alpha},$$

und es ist der Grenzwert zu bestimmen, welchen diese Summe bei beliebig kleinen Werten von ΔP erhält, weil, wenn die Grösse $\cos\alpha$ von null verschieden bleibt, der Betrag der zu den Elementen am Rande gehörigen Grössen von vornherein beliebig klein gemacht werden kann. Man erkennt, dass hierbei ein Flächenintegral zu bilden ist, und es handelt sich vor allem um den Wert der mit ΔP veränderlichen Grösse $\cos\alpha$. Nennt man die Koordinaten der drei Eckpunkte von $\Delta' P$ bezüglich:

$$x, y, z;\quad x+\Delta_1 x,\ y+\Delta_1 y,\ z+\Delta_1 z;\quad x+\Delta_2 x,\ y+\Delta_2 y,\ z+\Delta_2 z,$$

so wird die Gleichung der Ebene $\Delta' P$, wenn ξ, η, ζ die variabelen Koordinaten bedeuten (§ 253):

$$\zeta - z = A(\xi - x) + B(\eta - y),$$

wobei

$$A = \frac{\Delta_1 z\,\Delta_2 y - \Delta_2 z\,\Delta_1 y}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_2 x\,\Delta_. y} = \frac{\dfrac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}\,\dfrac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \dfrac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x}\,\dfrac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}}{\dfrac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \dfrac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}},$$

$$B = \frac{\Delta_2 z\,\Delta_1 x - \Delta_1 z\,\Delta_2 x}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_2 x\,\Delta_1 y} = \frac{\dfrac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x} - \dfrac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}}{\dfrac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \dfrac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}}.$$

Der Kosinus des Winkels, den diese Ebene mit der xy-Ebene bildet, ist gleich:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}},$$

und sonach wird

$$\Sigma\,\Delta' P = \Sigma\sqrt{1 + A^2 + B^2}\,\Delta P.$$

Die Quadratwurzel ist dabei immer mit dem positiven Zeichen zu nehmen. Die Grössen A und B aber lassen sich, wenn die Gleichung der Fläche

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist, folgendermassen darstellen. Es ist

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}=\frac{f(x+\Delta_1 x, y+\Delta_1 y)-f(x, y+\Delta_1 y)}{\Delta_1 x}+\frac{f(x, y+\Delta_1 y)-f(x,y)}{\Delta_1 y}\,\frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x},$$

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x}=\frac{f(x+\Delta_2 x, y+\Delta_2 y)-f(x, y+\Delta_2 y)}{\Delta_2 x}+\frac{f(x, y+\Delta_2 y)-f(x,y)}{\Delta_2 y}\,\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x},$$

was der Abkürzung halber mit

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}=\varphi_1+\psi_1\frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x},\quad \frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x}=\varphi_2+\psi_2\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x}$$

bezeichnet werden soll. Für das folgende ist es zweckmässig, eine wesentliche Vereinfachung bei der Zerlegung der Fläche P in Dreiecke einzuführen, indem man dieselbe durch das Netz der Parallelen zu den Koordinatenaxen in Rechtecke teilt und diese Rechtecke durch ein System von parallelen Diagonalen halbiert. Bedeuten dann x, y die Koordinaten einer Dreiecksecke, so werden die der anderen $x+\Delta_1 x, y$ und $x, y+\Delta_2 y$. Es ist sonach:

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}=\varphi_1=\frac{f(x+\Delta_1 x, y)-f(x,y)}{\Delta_1 x},$$

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x}=\psi_2\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x}=\frac{f(x, y+\Delta_2 y)-f(x,y)}{\Delta_2 y}\cdot\frac{\Delta_2 y}{\Delta x_2}.$$

Also wird

$$A=\varphi_1,\quad B=\psi_2.$$

Wir bezeichnen nun den grössten Wert, welchen die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ in dem Dreiecke ΔP oder an den Grenzen desselben erhält, mit G_x, den kleinsten mit g_x, ebenso den grössten und kleinsten Wert von $\frac{\partial f}{\partial y}$ mit G_y und g_y, so ist φ_1 zwischen den Grenzen G_x und g_x, und ψ_2 zwischen den Grenzen G_y und g_y enthalten; denn der Differenzenquotient, gebildet bei konstanten Werten von y:

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

ist immer zwischen den Werten enthalten, welche der Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x}$ im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ besitzt. Dieser Hilfssatz soll am Schlusse des Paragraphen bewiesen werden. Demnach ist

$$A=\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x}+\varepsilon,\quad B=\frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y}+\eta,$$

wobei ε dem Betrage nach kleiner ist als G_x-g_x und η kleiner ist als G_y-g_y. Es ist also

$$\Sigma\Delta' P=\Sigma\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\varepsilon\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\eta\right)^2}\,\Delta P.$$

Entwickelt man die Quadratwurzel, so kann man setzen

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\varepsilon\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\eta\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}+\varepsilon h+\eta k,$$

wobei die Grössen h und k, von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ abhängig, durchaus endlich bleiben, falls diese Grössen, sowie ε und η nicht unendlich werden. Demnach ist

$$\Sigma \Delta' P=\Sigma\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\Delta P+\Sigma(\varepsilon h+\eta k)\,\Delta P.$$

Wir führen jetzt die Bedingung ein, dass die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Gebiete P durchaus endlich sind und die Bedingung der doppelten Integrierbarkeit erfüllen; ersteres besagt, was wir schon annahmen, dass die Tangentenebene in keinem Punkte der betrachteten Fläche parallel zur z-Axe wird; die zweite Bedingung erfordert, dass

$$\lim \Sigma (G_x - g_x)\,\Delta P = 0 \quad \text{und} \quad \lim \Sigma (G_y - g_y)\,\Delta P = 0$$

wird. Mithin erkennt man, dass auch

$$\lim \Sigma \varepsilon\,\Delta P \quad \text{und} \quad \lim \Sigma \eta\,\Delta P$$

null werden, und ferner, da h und k endlich bleiben, auch

$$\lim \Sigma h \varepsilon\,\Delta P \quad \text{und} \quad \lim \Sigma k \eta\,\Delta P.$$

Folglich wird

$$\lim \Sigma \Delta' P=\int\!\!\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dP,$$

und es ist der Satz bewiesen:

Ist eine begrenzte Fläche gegeben, deren Gleichung $z=f(x,y)$ *ist, und ist dieselbe durch die zur* xy*-Ebene rechtwinkligen Koordinaten* z *eindeutig bezogen auf ein ebenes Gebiet von der Grösse* P, *so besitzt diese krumme Fläche eine bestimmte Grösse, welche, durch das Flächenintegral*

$$\int\!\!\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dP$$

erstreckt, über das Gebiet P *zu berechnen ist, wenn die partiellen Ableitungen der Funktion überall endlich sind und den Bedingungen der doppelten Integrierbarkeit genügen.*

Auf Grund der allgemeinen Sätze über das Doppelintegral kann man nun einsehen, dass der Wert des Integrales ganz unabhängig ist von der Art der Zerlegung der Fläche P, dass also insbesonders jedes aus Dreiecken zusammengesetzte Polyeder nach demselben Grenzwerte konvergiert, falls nur die Dreiecksebenen bei diesem Grenzprozesse schliesslich in die Tangentenebenen fallen. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten, wenn man zuerst wiederum eine Teilung des Gebietes P vermittelst der Parallelen zu den Koordinatenaxen vollzieht, und nun jedes Rechteck dieses Netzes in beliebiger Weise in irgend welche Anzahl von Dreiecken zerlegt. Im übrigen dienen die zuerst entwickelten allgemeinen Formeln für A und B dazu, diese Rechnung durchzuführen.

Da die Bedingung der doppelten Integrierbarkeit insbesonders dann erfüllt ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetige Funktionen der Variabelen x, y sind, so ist also der für die Geometrie wichtige Satz bewiesen, dass jede Fläche, welche in jedem Punkte eine bestimmte Tangentenebene hat und bei welcher sich die Tangentenebene kontinuierlich in ihrer Lage ändert, auch eine bestimmte Grösse besitzt, sobald sie sich eindeutig durch Parallelprojektion auf Ebenen beziehen lässt.

Hilfssätze aus der Differentialrechnung. Der Satz, dass für eine stetige Funktion $f(x)$ der Differenzenquotient

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

gebildet für einen bestimmten Wert von x und $x+\Delta x$ immer zwischen den Werten gelegen ist, welche der Differentialquotient

$$f'(x)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ besitzt, ist für den Fall, dass $f'(x)$ eine bestimmte stetige Funktion ist, als Fundamentalsatz gleich im § 14 und im Zusatz zu § 16 bewiesen worden. Auf diesen Satz braucht man sich also bloss zu beziehen, wenn man den obigen Beweis unter der speziellen Annahme, dass $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetige Funktionen sind, erledigen will. Will man aber den Beweis führen, ohne irgend welche Voraussetzung darüber, ob $f'(x)$ im Intervalle von x bis $x+\Delta x$ an jeder Stelle einen bestimmten Wert hat und ob diese Werte sich stetig ändern, so hat man zunächst den folgenden Satz zu betrachten:

Wird bei einer stetigen Funktion der erste vorwärts gebildete Differenzenquotient in einem Intervalle überall schliesslich auch positiv, d. h. lässt sich an jeder Stelle eine Grenze für Δx *angeben, sodass*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

bei abnehmenden Werten von Δx *stets auch positiv ist, so ist die Funktion in diesem Intervalle eine durchaus wachsende, der Differenzenquotient wird also überall nur positiv.*

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen und $x_2 > x_1$, so muss gezeigt werden, dass $f(x_2) > f(x_1)$ ist. Betrachtet man nun den Verlauf der stetigen Funktion von x_1 bis x_2, so giebt es, da die Funktion nicht durchaus konstant ist — denn sonst wäre die Differenz $f(x+\Delta x)-f(x)$ in allen Punkten dieses Intervalles konstant gleich 0 — einen grössten Wert, der an den Grenzen oder im Innern des Intervalles an einer oder an mehreren Stellen erreicht wird. An der Stelle x_1 kann dieses Maximum nicht liegen, denn alsdann wäre $f(x_1+\Delta x)-f(x)$ schliesslich durchaus negativ (allenfalls 0), nicht aber positiv, ebensowenig im Innern des Intervalles, mithin gehört der Maximalwert zu der Stelle x_2, und es ist $f(x_2) > f(x_1)$. Aus der Umkehr dieses Satzes folgt nun:

Ist für eine stetige Funktion der mit den Endwerten eines Intervalles gebildete Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *positiv, so muss es im Intervalle von* a *bis* b *Stellen geben, an denen der Differenzenquotient schliesslich nicht negativ wird, und ist der obige Quotient negativ, so muss es Stellen geben, an denen der Differenzenquotient schliesslich nicht positiv wird.*

Hat nun der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ den Wert K so bilde man die Funktion:

$$\varphi(x) = f(x) - Kx.$$

Alsdann ist $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = 0$, also $\varphi(b) = \varphi(a)$. Die stetige Funktion ist nun im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ entweder durchweg konstant, dann ist $\varphi'(x) = f'(x) - K = 0$, also $f'(x)$ durchweg gleich K, oder sie nimmt im Innern des Intervalles mindestens einmal einen Maximalwert oder mindestens einmal einen Minimalwert an. Ist x_1 diese Maximalstelle, so liegen im Intervalle von a bis x_1 Punkte, an denen $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ schliesslich nicht negativ, also $\lim\frac{\Delta f}{\Delta x} - K \geqq 0$ wird, und im Intervalle von x_1 bis b Punkte, an denen $\lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ nicht positiv, also $\lim \frac{\Delta f}{\Delta x} - K \leqq 0$ wird. Ist dagegen x_1 eine Minimalstelle, so liegen im ersten Intervalle Punkte, an denen der Differentialquotient der Funktion $f(x)$ gleich oder kleiner wird als K, und im zweiten, an denen er gleich oder grösser wird als K. Mithin ist bewiesen:

Hat der für die Endpunkte eines Intervalles gebildete Quotient der stetigen Funktion $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *den Wert* $\frac{\mathrm{f}(\mathrm{b}) - \mathrm{f}(\mathrm{a})}{\mathrm{b} - \mathrm{a}} = \mathrm{K}$, *so muss es im Intervalle von* a *bis* b *Stellen geben, an denen der Differenzenquotient schliesslich gleich oder grösser als* K *wird, und Stellen, an denen er gleich oder kleiner als* K *wird.*

Dieser Satz lässt sich aber noch genauer so formulieren: der Wert des Differenzenquotienten muss *innerhalb* der Gesamtheit der Werte liegen, welche der Differentialquotient im Intervalle besitzt. Denn ist x_1 die Maximalstelle, so ist $\frac{\varphi(x_1) - \varphi(a)}{x_1 - a}$ um eine bestimmte positive Grösse von 0 verschieden, und $\frac{\varphi(b) - \varphi(x_1)}{b - x_1}$ um eine bestimmte negative Grösse. Also giebt es Stellen, an denen $\varphi'(x)$ um eine bestimmte positive Grösse, und Stellen, an denen es um eine bestimmte negative Grösse von 0 verschieden ist; d. h. Stellen, an denen $f'(x)$ grösser ist als K, und Stellen, an denen es kleiner ist als K. Ist x_1 eine Minimalstelle, so folgt das nämliche.

590. Aus der Gleichung für die Oberfläche $z = f(x, y)$, nämlich

$$1) \quad S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP = \iint \frac{dP}{\cos \zeta},$$

in welcher ζ den Winkel bedeutet, den die Tangentialebene eines Flächenpunktes mit der xy-Ebene bildet, lassen sich noch einige Folgerungen ziehen. Es seien ζ_0 und ζ_1 der grösste und der kleinste unter den Werten ζ, die selbst zwischen 0 und 90^0 liegen, innerhalb oder an den Grenzen der Kontour C, so giebt die obige Formel:

$$S = \frac{1}{\cos \zeta'} \iint dP = \frac{P}{\cos \zeta'},$$

wenn man mit ζ' einen Winkel zwischen ζ_0 und ζ_1 bezeichnet und mit P die ebene Fläche, welche durch die normale Projektion von C, also durch die Kurve C' begrenzt ist. Diese Gleichung gilt, wie klein auch die Fläche P genommen wird; es ist:

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{\cos\zeta'};$$

nehmen wir also an, dass P sich auf ein unendlich kleines Element dP zusammenzieht, in welchem die Tangentenebene sich stetig ändert, so wird auch das entsprechende Flächenelement unendlich klein, und es ist:

$$2)\qquad \frac{dS}{dP} = \frac{1}{\cos\zeta'}, \quad \text{oder} \quad dS = \frac{dP}{\cos\zeta'}.$$

Es ist also jeder beliebig kleine Teil der Fläche gleich seiner normalen Projektion auf die xy-*Ebene, dividiert durch den Kosinus des Winkels, den die Tangentenebene des Flächenelementes mit der* xy-*Ebene einschliesst.*

Die Gleichung 1) gilt auch dann noch, wenn in einigen oder in allen Punkten der Kontour C die Tangentenebene senkrecht zur xy-Ebene steht, also die Grössen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ einzeln oder beide unendlich werden, falls man zuerst durch Wahl einer andern Ebene, bei welcher diese besondere Lagenbeziehung nicht eintritt, einsehen kann, dass ein bestimmter Flächenwert vorhanden sein muss. Man hat alsdann ein Doppelintegral zu bilden, in welchem die zu integrierende Funktion an den Grenzen unendlich wird. Setzt man nun an Stelle der Kontour C eine andere innerhalb C gelegene Kurve, so wird für diese das ebene Gebiet P' erhalten, und es ist die zugehörige Flächengrösse:

$$S' = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP'.$$

Lässt man nun P' immer mehr in die Fläche P übergehen, so konvergiert S' nach einem bestimmten Grenzwerte S, der ganz unabhängig ist von der Art dieses Prozesses; also wird:

$$S = \lim \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dP' \quad (\text{für } P' = P).$$

Damit haben wir zugleich die Definition gewonnen für ein Doppelintegral, bei welchem die Funktion an den Grenzen unendlich wird und bei welchem der schliessliche Wert des Integrales ganz unabhängig ist von der Art, wie man zu diesen Grenzen übergeht.

591. Der Wert des Doppelintegrales

$$\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dP=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dP,$$

wobei $dz=p\,dx+q\,dy$ gesetzt ist, kann nun bestimmt werden, indem man an Stelle der Elemente dP, welche wir uns bisher als Dreiecke dachten, irgend welche andere ebene Flächenelemente setzt. Nehmen wir also wiederum an, dass die Kontour C' des ebenen Gebietes P von den Parallelen zur x- und zur y-Axe immer nur in zwei Punkten geschnitten wird, und zerlegen wir das Gebiet P durch diese Parallelen in Rechtecke, so wird $dP=dx\,dy$ und

$$3)\quad \iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\int\limits_{x_0}^{X}dx\int\limits_{y_0}^{Y}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy=\int\limits_{y'_0}^{Y'}dy\int\limits_{x'_0}^{X'}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx$$

y_0 und Y bezeichnen dann die beiden Ordinaten der Randkurve, welche zu einem Abscissenwert x gehören, sie sind im allgemeinen Funktionen von x, während x_0 und X konstante Werte bedeuten, nämlich die extremen Abscissen der Kurve. Dagegen sind x'_0 und X' die zu einer Ordinate y gehörigen Abscissen, y'_0 und Y' die extremen Ordinaten der Randkurve.

592. Substituiert man an Stelle von x, y die Polarkoordinaten ϱ, ω, indem $x=\varrho\cos\omega$, $y=\varrho\sin\omega$ gesetzt wird, so kann man $\varrho\,d\varrho\,d\omega$ als Element dP wählen (§ 584). Liegt also der Anfangspunkt der Koordinaten ausserhalb der Kurve C, und schneidet jeder Radius ϱ dieselbe höchstens in zwei Punkten, so erhält man:

$$4)\qquad S=\int\limits_{\omega_0}^{\Omega}d\omega\int\limits_{\varrho_0}^{R}\frac{\varrho\,d\varrho}{\cos\xi};$$

ϱ_0 und R sind die Radien der Kurvenpunkte auf C', welche zu demselben Werte ω gehören, ω_0 und Ω bezeichnen diejenigen Werte von ω, welche zu den diese Kurve begrenzenden Radien gehören. Diese Formel ist auch anwendbar auf den

Fall, dass die Kontour C' aus zwei geschlossenen Kurven besteht, von denen die eine innerhalb der andern liegt. Befindet sich der Koordinatenanfangspunkt im Innern der kleineren Kurve, so wird, da die Projektion der Fläche S das ringförmige Gebiet zwischen den beiden geschlossenen Kurven ist:

$$5)\qquad S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\varrho_0}^{R} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\zeta}.$$

Zieht sich die innere Kurve auf den Koordinatenanfangspunkt zusammen, so wird $\varrho_0 = 0$ und

$$6)\qquad S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\zeta}.$$

Der Kosinus des Winkels ζ lässt sich leicht durch die partiellen Ableitungen von z nach ϱ und ω ausdrücken; denn es ist:

$$dx = d\varrho \cos\omega - \varrho \sin\omega\, d\omega, \quad dy = d\varrho \sin\omega + \varrho\cos\omega\, d\omega,$$

also:

$$dz = (p\cos\omega + q\sin\omega)\, d\varrho + (-p\sin\omega + q\cos\omega)\,\varrho\, d\omega,$$

folglich:

$$\frac{\partial z}{\partial\varrho} = p\cos\omega + q\sin\omega, \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial\omega} = -p\sin\omega + q\cos\omega,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2 = p^2 + q^2,$$

und

$$\frac{\varrho}{\cos\zeta} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2}.$$

Demnach ist:

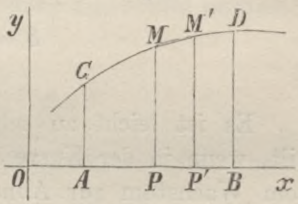
$$7)\qquad S = \int\!\!\int \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2}\, d\varrho\, d\omega,$$

wobei die Grenzen unbestimmt bleiben, um alle Fälle zu umfassen.

Die Rotationsflächen.

593. Bei den Rotationsflächen lässt sich das Doppelintegral, welches die Grösse einer Zone zwischen zwei zur Rotationsaxe rechtwinkligen Ebenen bestimmt, unmittelbar auf ein einfaches Integral zurückführen. Es sei CMD eine Kurve, die auf zwei rechtwinklige Axen Ox und Oy bezogen ist; es soll die Fläche S der Zone bestimmt werden, die von dem Bogen CD bei der Rotation um die x-Axe erzeugt wird. Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Ordinate y der Kurve beständig wächst oder beständig abnimmt, wenn man von dem einen Endpunkte des Bogens CD zum andern übergeht. Die gesuchte Fläche S hat alsdann zur Projektion auf die zur Rotationsaxe senkrechte Ebene den konzentrischen Kreisring, welcher im Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt mit den beiden extremen Ordinaten des Bogens $CA = y_0$, $DB = Y$ beschrieben wird. Man kann hier also die Formel 5) des vorigen Paragraphen anwenden, indem man y an Stelle von ϱ schreibt, und für ζ den Winkel einsetzt, den die Tangentenebene der Fläche mit der zur Rotationsaxe senkrechten Ebene bildet. Es ist also:

Fig. 22.



$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta}.$$

Nach der Beschaffenheit der Fläche aber hängt ζ nicht von ω ab; es ist also das innere Integral von ω ganz unabhängig und folglich:

$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot \int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta} = 2\pi \int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta}.$$

Da die Tangentialebene der Rotationsfläche senkrecht zur Ebene der Meridiankurve steht, so ist ζ der Winkel, welchen die Tangente der Meridiankurve mit der y-Axe bildet; folglich ist $\cos\zeta = \pm \frac{dy}{ds}$, wenn ds das Differential des Bogens dieser Kurve bedeutet. Also wird:

$$S = \pm 2\pi \int_{y_0}^{Y} y \frac{ds}{dy} dy.$$

Das Zeichen $\pm$ muss durch das Zeichen von $Y - y_0$ ersetzt werden. Nennt man x_0 und $X > x_0$ die Abscissen, welche zu den Ordinaten y_0 und Y gehören, so kann man auch schreiben:

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{X} y \frac{ds}{dx} dx.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese letzte Formel auch gilt, wenn in der Kurve CD eine Änderung der Ordinaten y vom Wachstum zur Abnahme und umgekehrt an einer beliebigen endlichen Anzahl von Stellen stattfindet. Denn alsdann kann man die Kurve in Teile zerlegen, so dass in jedem Teile die Ordinaten sich in demselben Sinne nur ändern, und da die Gleichung für jeden dieser Teile gilt, so gilt sie auch für die Summe derselben.

594. Die erhaltene Formel lässt sich auch direkt ableiten. Dem Bogen CD werde ein Polygon eingeschrieben, dessen Seiten zuletzt unendlich klein werden. Jede dieser Seiten MM' erzeugt bei der Rotation einen Kegelstumpf. Wir schreiben nun jedem Kegelstumpf ein Polyeder ein, gebildet aus viereckigen Flächen, von denen zwei Seiten Sehnen der beiden den Kegelstumpf begrenzenden Kreise, die beiden anderen Erzeugende des Kegels sind. Wird jede dieser Flächen durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, so erhalten wir eine aus Dreiecken zusammengesetzte Polyederfläche, welche sowohl der gegebenen Rotationsfläche, als auch der aus den Kegelstumpfen bestehenden Fläche eingeschrieben ist. Die Seitenflächen dieses Polyeders haben stets einen endlichen Winkel, und sonach folgt, dass die gesuchte Fläche S auch gleich der Grenze ist, nach welcher die Summe der Kegelstumpfe konvergiert. Bezeichnen nun xy die Koordinaten des Punktes M, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die des Punktes M', so wird die von MM' erzeugte Fläche gleich:

$$2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x + \pi\Delta y\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

also ist die Summe S' der Kegelstumpfe:

$$S' = \Sigma 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x + \Sigma\pi\,\Delta y\,\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Wenn nun die Funktion $\frac{dy}{dx}$ überall endlich und integrierbar ist, so ist leicht einzusehen, dass die zweite Summe, welcher man auch die Form

$$\Sigma\pi\frac{\Delta y}{\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot(\Delta x)^2$$

geben kann, wenn Δx nach 0 konvergiert, ebenfalls null wird, denn sie ist kleiner als:

$$m\pi\sqrt{1+m^2}\,\Sigma(\Delta x)^2 = m\pi\sqrt{1+m^2}\,\Delta x\,(X - x_0),$$

wenn man mit m den Maximalwert der Funktion $\frac{dy}{dx}$ im Intervalle von x_0 bis X bezeichnet; dass dagegen der Grenzwert der ersten Summe gleich:

$$2\pi\int_{x_0}^{X} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{x_0}^{X} y\,\frac{ds}{dx}\,dx$$

wird. Sonach ist dieselbe Formel wie oben bewiesen, und zwar ganz unabhängig davon, wie oft die Ordinaten y einen Wechsel der Zu- und Abnahme im Intervalle von x_0 bis X erleiden, sofern nur die erzeugende Kurve eindeutig auf die gerade Strecke $X - x_0$ bezogen ist und einen integrierbaren Differentialquotienten, also auch eine bestimmte Länge besitzt.

595. Die Fläche des Rotationsellipsoides. Es sei eine Zone des Rotationsellipsoides zu bestimmen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sei die Gleichung der Ellipse, welche die Fläche bei der Rotation um die x-Axe erzeugt. Es wird:

$$y\frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2};$$

die Fläche, welche von dem Ellipsenbogen erzeugt wird, dessen einer Endpunkt der Scheitelpunkt auf der Halbaxe b ist und dessen anderer Endpunkt die Abscisse x hat, wird also gleich:

$$S = 2\pi\frac{b}{a^2}\int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx.$$

Die Fälle $a > b$ und $a < b$ sind dabei zu unterscheiden. Ist $a > b$, so entsteht das Rotationsellipsoid durch Rotation um die grosse Axe. Es ist:

$$2\int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2},$$

also:

$$S = \frac{\pi b x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}.$$

Will man die gesamte Fläche bestimmen, so ist $x = a$ zu setzen und das Resultat zu verdoppeln, also wird:

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arccos\frac{b}{a}$$

oder, wenn man $b = a\cos\frac{\gamma}{2}$ setzt:

$$S = 2\pi b^2\left(1 + \frac{\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

Ist $b = a$, also $\gamma = 0$, so wird das Ellipsoid eine Kugel und man erhält die bekannte Formel $S = 4\pi a^2$.

Ist $a < b$, so entsteht das Ellipsoid durch Rotation um die kleinere Axe, es ist ein abgeplattetes; der Wert von S ist:

$$S = \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}\,dx$$

oder:

$$S = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2) x^2}}{a^2} + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\, \frac{x\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2) x^2}}{a^2};$$

setzt man $x = a$ und multipliziert alsdann mit 2, so erhält man die ganze Fläche des Ellipsoides, nämlich:

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\, \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

Für

$$b = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right),$$

wird diese Formel:

$$S = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{\gamma}{\frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma})}\right].$$

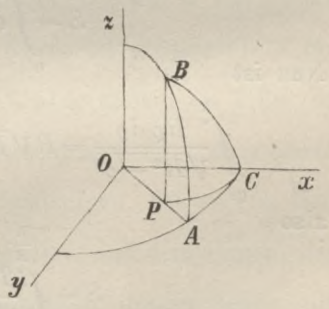
Für $b = a$, also $\gamma = o$, reduziert sie sich auf $4\pi a^2$, die Oberfläche der Kugel.

Beispiele der Quadratur krummer Flächen.

596. Erste Aufgabe: Bestimmung der Fläche eines sphärischen Dreieckes. Da ein sphärisches Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, indem man von der einen Ecke aus den grössten Kreis konstruiert, welcher senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite steht, so brauchen wir bloss den Fall des rechtwinkligen Dreieckes zu untersuchen.

Es sei ABC das sphärische Dreieck, rechtwinklig bei A, welches wir auf drei rechtwinklige Axen beziehen, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Zur xy-Ebene wählen wir die Ebene der Seite AC und lassen die x-Axe durch den Scheitelpunkt C gehen. Die Linie OA ist die Projektion der Seite AB auf die xy-Ebene, und wenn man vom Scheitel B die Senkrechte BP auf OA fällt, so projiziert sich der Kreisbogen BC in den Ellipsenbogen CP. Es ist also die Fläche auf der Kugel zu bestimmen, deren ebene Projektion das krummlinige Dreieck ACP ist.

Fig. 23.



Die Gleichung der Kugel ist $x^2+y^2+z^2=R^2$ und die der Seite BC $z=y\operatorname{tang} C$; dabei bedeutet C den Winkel des sphärischen Dreieckes an der gleichnamigen Ecke. Eliminiert man z zwischen diesen Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Ellipse, nämlich

$$x^2+\frac{y^2}{\cos^2 C}=R^2,$$

und hieraus folgt, wenn man x und y durch die Werte $\varrho_0\cos\omega$ und $\varrho_0\sin\omega$ ersetzt:

$$\varrho_0=\frac{R\cos C}{\sqrt{1-\sin^2 C\cos^2\omega}}.$$

Der Kosinus des Winkels, den die Tangentenebene der Kugel mit der xy-Ebene bildet, ist $\frac{z}{R}$ oder $\frac{\sqrt{R^2-\varrho^2}}{R}$, und das Element der sphärischen Fläche wird also

$$\frac{R\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}.$$

Die Integration nach ϱ muss von dem Werte ϱ_0, welcher zur Ellipse gehört, bis zu dem Werte $\varrho=R$ ausgeführt werden; die Integration nach ω erstreckt sich von $\omega=0$ bis $\omega=\frac{b}{R}$, wenn b die Länge der Seite AC ist; also ist der Ausdruck für die gesuchte Fläche:

$$S=\int_0^{\frac{b}{R}} d\omega\int_{\varrho_0}^{R}\frac{R\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}.$$

Nun ist

$$\int_{\varrho_0}^{R}\frac{R\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}=R\sqrt{R^2-\varrho_0^{\,2}}=\frac{R^2\sin C\sin\omega}{\sqrt{1-\sin^2 C\cos^2\omega}},$$

also

$$S=\int_0^{\frac{b}{R}}\frac{R^2\sin C\sin\omega\, d\omega}{\sqrt{1-\sin^2 C\cos^2\omega}}.$$

Das unbestimmte Integral dieses Differentiales ist

$$-R^2 \arcsin(\sin C \cos \omega) + \text{const};$$

man erhält demnach:

$$S = R^2 \left[C - \arcsin\left(\sin C \cos \frac{b}{R}\right)\right].$$

Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist aber $\sin C \cos \frac{b}{R}$ gleich $\cos B$ oder auch gleich $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$, und folglich wird

$$S = R^2 \left(B + C - \frac{\pi}{2}\right).$$

597. Zweite Aufgabe. Gegeben ist die Kugel in rechtwinkligen Koordinaten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Es soll der Teil der Kugelfläche bestimmt werden, dessen Projektion auf die xy-Ebene das Innere der Kurve wird, die in Polarkoordinaten die Gleichung hat:

$$\varrho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tang}^2 \omega)}.$$

Das Element der Kugelfläche wird, da $R = 1$ ist:

$$\frac{\varrho \, d\varrho \, d\omega}{\sqrt{1 - \varrho^2}}.$$

Die gegebene Kurve ist symmetrisch in Bezug auf die x- und die y-Axe. Man braucht also bloss die sphärische Fläche zu bestimmen, welche sich auf einen dieser Quadranten projiziert, denjenigen, welcher zu den Werten ω von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ gehört. Der Radiusvektor der Kurve ist grösser als 1 für alle Werte von ω zwischen 0 und $\frac{\pi}{6}$, aber kleiner als 1 für die Werte von $\frac{\pi}{6}$ bis $\frac{\pi}{4}$. Mithin besteht die zu bestimmende Fläche aus zwei Teilen, nämlich demjenigen, der sich in den Kreissektor mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ projiziert, und demjenigen, der sich in das Segment der Kurve projiziert, dessen Sehne mit der x-Axe den Winkel $\frac{\pi}{6}$ bildet. Für den ersten Teil müssen die Integrationen von $\varrho = 0$ bis $\varrho = 1$ und von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\pi}{6}$ ausgeführt werden; für den zweiten muss die eine Integration von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tang}^2 \omega)}$ und die andere von $\omega = \frac{\pi}{6}$ bis $\omega = \frac{\pi}{4}$ genommen werden. Also ist:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\omega \int_0^1 \frac{\varrho \, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}(1-\operatorname{tang}^2\omega)}} \frac{\varrho \, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tang}^2 \omega - \frac{1}{2}}\, d\omega.$$

Nun ist

$$\int \sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tang}^2\omega - \frac{1}{2}}\, d\omega = \int \frac{\frac{3}{2}\,\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tang}^2\omega - \frac{1}{2}}} - \int \frac{2\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{2\sin^2\omega - \frac{1}{2}}}.$$

Das erste Integral hat den Wert

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, l\left(\operatorname{tang}\omega + \sqrt{\operatorname{tang}^2\omega - \frac{1}{3}}\right) + \text{const},$$

das zweite den Wert

$$\sqrt{2}\, l\left(\sin\omega + \sqrt{\sin^2\omega - \frac{1}{4}}\right) + \text{const},$$

und hieraus folgt:

$$S = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\, l(\sqrt{2}+1) - \sqrt{\frac{3}{2}}\, l(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

Die allgemeine Formel für die Quadratur krummer Flächen.

598. Wir betrachten zunächst den Fall einer ebenen Fläche, welche von einer Kontour C umschlossen ist, und nehmen an, dass die Gleichungen

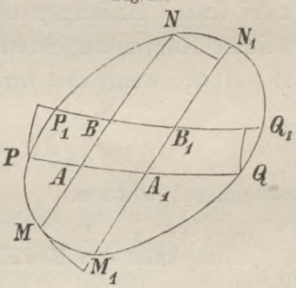
1) $$u = \alpha, \quad v = \beta,$$

in welchen u und v zwei Funktionen der Koordinaten x und y, α und β zwei variabele Parameter bedeuten, zwei Kurvensysteme darstellen, so dass durch jeden Punkt im Innern der Kontour C *eine* Kurve jedes Systems hindurchgeht, welche sich in diesem Punkte jedesmal unter einem bestimmten, von null verschiedenen Winkel schneiden. Jede dieser Kurven soll die Kontour C immer nur in zwei Punkten schneiden. Löst man die Gleichungen 1) nach x und y auf, so wird

2) $$x = f(\alpha, \beta), \quad y = f_1(\alpha, \beta).$$

Man erhält dann eine Linie des ersten Systemes, wenn man in diesen Gleichungen dem Parameter α einen festen Wert beilegt und nur β variieren lässt; und ebenso eine Kurve des zweiten Systemes, wenn β einen festen Wert hat, während α variiert. Wir teilen nun wie im § 581 die Fläche S vermittelst der Kurven α und β in Elemente, welche zuletzt nach jeder Richtung unendlich klein werden. Die Fläche S wird alsdann die Grenze der Summe aller krummlinigen Vierecke ABA_1B_1, welche durch die Kurven bestimmt sind, die zu den Werten α, $\alpha + \Delta\alpha$, β, $\beta + \Delta\beta$ der beiden Parameter gehören.

Fig. 24.



Um die Fläche des Viereckes ABA_1B_1 zu ermitteln, nehmen wir zuerst an, dass die Änderungen $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ nicht unabhängig von einander sind, sondern dass ihr Verhältnis nach einer bestimmten Zahl konvergiert, z. B. der Einheit; $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ sollen also von derselben Ordnung unendlich klein werden. Im Punkte A konstruieren wir nun die Tangente der Kurve AA_1, welche man durch Variation des Parameters α erhält. Die Entfernung jedes Punktes dieser Kurve von der Tangente in A ist eine Grösse, die von der zweiten Ordnung unendlich klein wird. Der Bogen AA_1 ist also zwischen zwei Parallelen zur Tangente enthalten, deren Entfernung von zweiter Ordnung unendlich klein wird. Desgleichen ist auch der Bogen BB_1 zwischen zwei Parallelen zur Tangente in B einschliessbar, deren Entfernung auch von zweiter Ordnung unendlich klein wird. Ferner bemerken wir, dass der Winkel zwischen den Tangenten in A und B, indem er von der ersten Ordnung im Vergleich mit $\Delta\beta$ unendlich klein wird, auch noch von erster Ordnung in Bezug auf $\Delta\alpha$ ist. Indem man ebenso mit den Bogen AB, A_1B_1 verfährt, erhält man zwei Parallelogramme, zwischen denen die Fläche ΔP des Viereckes ABA_1B_1 enthalten ist. Die Eckpunkte der beiden Parallelogramme sind von den Punkten A, B, A_1, B_1 nur um Grössen zweiter Ordnung entfernt: ihre Seiten differieren deshalb von den Sehnen AA_1, AB oder den Bogen AA_1, AB nur um Grössen zweiter Ordnung. Bezeichnen wir also mit s_1 und s_2 die Bogen der Kurve, gerechnet von zwei festen Anfangspunkten, mit i den Winkel zwischen den beiden Kurventangenten im Punkte A, so kann die Fläche ABA_1B_1, wenn $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ unendlich klein wird, durch

3) $$dP = \frac{ds_1}{d\alpha}\,\frac{ds_2}{d\beta}\sin i\, d\alpha\, d\beta$$

bezeichnet werden.

Man kann den Beweis analytisch noch schärfer durch folgende Betrachtung führen, welche auf Grund der allgemeinen Sätze über das Doppelintegral zugleich lehrt, dass die Formel für das Element der doppelten Integration unabhängig ist von dem Verhältnis, in welchem die Grössen $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ zu einander stehen, wenn sie unendlich klein werden.

Wir ersetzen das krummlinige Viereck durch das geradlinige, welches entsteht, wenn man die Eckpunkte durch gerade Linien, die Sehnen der Kurvenbogen, verbindet. Diese vier Punkte haben die Koordinaten:

$$x_1 = f(\alpha,\beta);\quad x_2 = f(\alpha+\Delta\alpha,\beta);\quad x_3 = f(\alpha,\beta+\Delta\beta);\quad x_4 = f(\alpha+\Delta\alpha,\beta+\Delta\beta);$$

$$y_1 = f_1(\alpha,\beta);\quad y_2 = f_1(\alpha+\Delta\alpha,\beta);\quad y_3 = f_1(\alpha,\beta+\Delta\beta);\quad y_4 = f_1(\alpha+\Delta\alpha,\beta+\Delta\beta);$$

und die Grösse des geradlinigen Viereckes wird also

$$\Delta P' = \frac{1}{2}\operatorname{abs}\left[(x_4-x_1)(y_3-y_2)+(x_2-x_3)(y_4-y_1)\right];$$

nun ist:

$$x_4 - x_1 = f(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - f(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\Delta\beta,$$

$$x_2 - x_3 = f(\alpha + \Delta\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta + \Delta\beta) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_1\Delta\alpha - \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\Delta\beta,$$

$$y_4 - y_1 = f_1(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - f_1(\alpha, \beta) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)\Delta\beta,$$

$$y_2 - y_3 = f_1(\alpha + \Delta\alpha, \beta) - f_1(\alpha, \beta + \Delta\beta) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)_1\Delta\alpha - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)\Delta\beta.$$

Dabei bedeuten die eingeklammerten Grössen $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_1$ u. s. w. Werte, welche die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ u. s. w. an bestimmten Stellen auf der Begrenzung des krummlinigen Elementes AA_1B_1B annehmen; also wird:

$$dP' = \frac{1}{2}\,\mathrm{abs}\left[\Delta\alpha^2\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)_1\right\}\right.$$
$$\left. + \Delta\alpha\,\Delta\beta\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)_1\right\}\right].$$

Ist nun der Grenzwert dieser Summe zu bilden bei allen Werten, die α und β im Innern der Kontour annehmen, und setzt man voraus, dass die Kurven $u = \alpha$, $v = \beta$ so geartet sind, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial f}{\partial \beta},\quad \frac{\partial f_1}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial f_1}{\partial \beta}$$

stetige Funktionen von α und β sind, d. h. dass sich die Tangentenrichtungen dieser Kurven im Innern der Kontour C stetig ändern, so wird bei dem Grenzprozesse

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_1 = \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta}, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial f_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta},$$

und folglich

$$\lim \Sigma\,\Delta' P = \int\!\!\int \pm\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right) d\alpha\, d\beta.$$

In der That ist diese Formel für das Element

$$dP = \pm \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \right) d\alpha\, d\beta$$

mit der Gleichung 3) identisch; denn es wird:

$$ds_1 = d\alpha \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)^2} = d\alpha \sqrt{E}, \quad ds_2 = d\beta \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)^2} = d\beta \sqrt{G}.$$

Konstruiert man ferner die Diagonale BA_1 im Viereck, so ist die Länge derselben gleich:

$$l = \sqrt{[f(\alpha + \Delta\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta + \Delta\beta)]^2 + [f_1(\alpha + \Delta\alpha, \beta) - f_1(\alpha, \beta + \Delta\beta)]^2},$$

also, wenn $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ unendlich klein werden, gleich:

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta\right)^2} = \sqrt{E\, d\alpha^2 - 2F\, d\alpha\, d\beta + G\, d\beta^2}.$$

Es ist aber

$$d\sigma^2 = ds_1{}^2 + ds_2{}^2 - 2\, ds_1\, ds_2 \cos i,$$

folglich:

$$F\, d\alpha\, d\beta = ds_1\, ds_2 \cos i \quad \text{oder} \quad \cos i = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin i = \pm \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Mithin ist

$$ds_1\, ds_2 \sin i = \pm \sqrt{EG - F^2}\, d\alpha\, d\beta = \pm \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right) d\alpha\, d\beta.$$

Will man in dem Doppelintegrale

$$S = \iint \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i\, d\alpha\, d\beta = \iint \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right) d\alpha\, d\beta,$$

in welchem das Element immer positiv zu nehmen ist, die Integration zuerst nach β ausführen, so hat man als Grenzen derselben die Werte β_0 und B zu nehmen, welche den Punkten entsprechen, in denen die Kurve $u = \alpha$ die Kontour schneidet; alsdann ist nach α zu integrieren zwischen den Grenzen α_0 und A, die zu den beiden Kurven $\alpha = \text{const}$ gehören, welche die Kontour begrenzen. Sonach wird

$$S = \int_{\alpha_0}^{A} d\alpha \int_{\beta_0}^{B} \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i\, d\alpha\, d\beta = \int_{\alpha_0}^{A} d\alpha \int_{\beta_0}^{B} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right) d\beta.$$

Bilden die beiden Kurvensysteme ein orthogonales System, so ist $\sin i = 1$ oder $F = 0$.

599. Wir betrachten jetzt den Teil S' einer krummen Fläche, der durch eine Kontour C' begrenzt ist. Die Fläche S' teilen wir in Elemente, welche zuletzt nach jeder Richtung unendlich klein werden vermittelst Kurven, die durch die Gleichungen

$$u = \alpha, \quad v = \beta$$

definiert sind, in denen u und v Funktionen der Koordinaten x, y, z und α, β zwei variabele Parameter sind. In Verbindung mit der Gleichung der Fläche lassen sich hieraus x, y, z als Funktionen von α, β darstellen, und es sei:

$$x = f(\alpha, \beta), \quad y = f_1(\alpha, \beta), \quad z = f_2(\alpha, \beta).$$

Die Kontour C' und die Kurven, welche die Fläche S' zerlegen, projizieren wir auf die xy-Ebene. Wir wollen annehmen, dass die vorige Figur, deren wir uns bei der Bestimmung einer ebenen Fläche bedienten, diese Projektion darstellt; mit $A', A'_1, M', M'_1, \ldots$ bezeichnen wir alsdann die Punkte auf der krummen Fläche, welche in $A, A_1, M, M_1, \ldots$ projiziert werden.

Das krummlinige Viereck $ABA_1B_1 = \Delta S$ ist demnach die Projektion eines Elementes $\Delta S'$ der Fläche, und wenn man mit ζ den Winkel zwischen der Tangentenebene, dem Punkte A' und der xy-Ebene bezeichnet, so wird (§ 590)

$$\lim \frac{\Delta S'}{\Delta S} = \frac{dS'}{dS} = \frac{1}{\cos\zeta},$$

also

$$dS' = \frac{1}{\cos\zeta} \sin i \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \, d\alpha \, d\beta.$$

Wir bezeichnen nun mit s'_1, s'_2 die Längen der Bogen, welche sich in s_1 und s_2 projizieren, tragen auf den beiden Tangenten dieser Kurve im Punkte A' Längen ab, die gleich $\frac{ds'_1}{d\alpha}, \frac{ds'_2}{d\beta}$ sind, und vervollständigen das Parallelogramm, dessen anliegende Seiten diese beide Strecken sind. Dieses Parallelogramm projiziert sich auf die xy-Ebene in ein Parallelogramm, dessen anliegende Seiten die Tangenten der Kurven s_1 und s_2 in A sind; ferner werden die Projektionen der Längen $\frac{ds'_1}{d\alpha}, \frac{ds'_2}{d\beta}$

gleich $\frac{ds_1}{d\alpha}$, $\frac{ds_2}{d\beta}$. Die Projektion des Parallelogrammes, welches in der Tangentenebene liegt, hat also die Grösse $\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i$, und folglich ist die Grösse dieses Parallelogrammes selber $\frac{1}{\cos\zeta}\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i$. Dieses letztere hat aber auch die Grösse $\frac{ds'_1}{d\alpha}\frac{ds'_2}{d\beta}\sin i'$, wenn man mit i' den Winkel zwischen den Kurven auf der Fläche im Punkte A' bezeichnet, und sonach wird:

$$dS' = \frac{1}{\cos\zeta}\sin i\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\,d\alpha\,d\beta = \frac{ds'_1}{d\alpha}\frac{ds'_2}{d\beta}\sin i'\,d\alpha\,d\beta.$$

Bezeichnet man also auch auf der krummen Fläche die Grössen ohne gestrichene Buchstaben, so erhält man dieselbe Formel wie bei der ebenen Fläche:

$$S = \int\!\!\int \frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i\,d\alpha\,d\beta;$$

S bedeutet die Grösse der krummen Fläche, s_1 und s_2 die Bogen der Kurve $\beta = \text{const}$, und $\alpha = \text{const}$ auf derselben, und i den Winkel zwischen diesen Kurven.

Aus den Gleichungen

$$x = f(\alpha, \beta), \qquad y = f_1(\alpha, \beta), \qquad z = f_2(\alpha, \beta),$$

welche eine Parameterdarstellung der gegebenen Fläche repräsentieren, lassen sich diese Grössen folgendermassen berechnen.

Es wird für eine Kurve $\beta = \text{const}$:

$$ds_1{}^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}\right)^2\right] d\alpha^2 = E\,d\alpha^2, \quad ds_1 = d\alpha\sqrt{E}.$$

Für eine Kurve $\alpha = \text{const}$:

$$ds_2{}^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial\beta}\right)^2\right] d\beta^2 = G\,d\beta^2, \quad ds_2 = d\beta\sqrt{G}.$$

Ferner wird für die Diagonale A_1B die Länge:

$$\begin{aligned} l^2 = [f(\alpha+\Delta\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta+\Delta\beta)]^2 + [f_1(\alpha+\Delta\alpha, \beta) - f_1(\alpha, \beta+\Delta\beta)]^2 \\ + [f_2(\alpha+\Delta\alpha, \beta) - f_2(\alpha, \beta+\Delta\beta)]^2, \end{aligned}$$

also das Differential dieser Länge, wenn $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ unendlich klein werden:

$$d\sigma^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial f_1}{\partial \beta} d\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial f_2}{\partial \beta} d\beta\right)^2$$
$$= E\,d\alpha^2 - 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2.$$

Nun ist:

$$d\sigma^2 = ds_1{}^2 + ds_2{}^2 - 2\,ds_1\,ds_2 \cos i, \quad \text{also} \quad F = \sqrt{EG}\cos i,$$

oder

$$\cos i = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin i = \pm \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

und sonach:

$$\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i = \pm\sqrt{EG - F^2}, \quad \text{also} \quad S = \int\!\!\int \pm\sqrt{EG - F^2}\,d\alpha\,d\beta.$$

Die Grösse $EG - F^2$ hat den Wert:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\frac{\partial f_2}{\partial \beta} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2,$$

und die Quadratwurzel unter dem Doppelintegrale ist stets so zu nehmen, dass das Element positiv wird.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung des Volumens.

600. Die Formel, durch welche wir das Volumen eines Körpers im § 583 bestimmt haben, war unter Annahme rechtwinkliger Koordinaten:

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy;$$

da $Z - z_0$ das Integral des Differentiales dz zwischen den Grenzen z_0 und Z ist, so kann man auch schreiben:

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} dz,$$

oder einfach:

$$V = \int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz,$$

wenn die Grenzen der Integration nicht besonders zum Ausdruck gebracht werden. Dieser Ausdruck für V ist ein *räumliches* oder auch *dreifaches Integral;* es ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck:

$$V = \lim \Sigma \Delta x \,\Delta y \,\Delta z,$$

welches ausdrückt, dass das Volumen V die Grenze ist, nach welcher die Summe der rechtwinkligen Parallelepipede $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$

bei unendlicher Abnahme derselben konvergiert, welche im Innern des Körpers enthalten und durch die drei Ebenensysteme parallel zu den Koordinatenebenen bestimmt sind.

Eine bestimmte Grenze für V ergiebt sich, wie wir sahen, jedenfalls dann, wenn die Begrenzungsfläche des Körpers ein Punktsystem ist, welches in eine endliche Anzahl Parallelepipeden eingeschlossen werden kann, deren Summe sich beliebig verkleinern lässt (§ 572).

Will man an Stelle rechtwinkliger Koordinaten schiefe anwenden, und sind a, b, c die Winkel zwischen den Axen Oy und Oz, Oz und Ox, Ox und Oy, so bekommt das schiefe Parallelepiped, dessen Kanten Δx, Δy, Δz sind, das Volumen $k \Delta x \Delta y \Delta z$, wobei

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c},$$

und an Stelle der obigen Formeln erhält man:

$$V = k \lim \Sigma \Delta x \Delta y \Delta z = k \int\int\int dx\, dy\, dz.$$

601. Wir betrachten nun allgemein ein System von drei Flächenfamilien mit den Gleichungen:

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \gamma;$$

u, v, w bedeuten gegebene Funktionen der drei rechtwinkligen Koordinaten, α, β, γ variabele Parameter.

Nimmt man aus jedem Systeme zwei bestimmte Flächen heraus, welche zu den Parametern α und $\alpha + \Delta\alpha$, β und $\beta + \Delta\beta$, γ und $\gamma + \Delta\gamma$ gehören, so erhält man einen Körper, den man ein unendlich kleines *Parallelepiped* nennen kann, denn zwei Tangentenebenen an derselben Seite oder an zwei gegenüberliegenden Seiten bilden einen unendlich kleinen Winkel.

Wir bezeichnen nun mit s_1, s_2, s_3 die krummlinigen Kanten, welche durch den Punkt gehen, in welchem sich die Flächen α, β, γ schneiden, der Bogen s_1 soll dabei auf der Schnittkurve der Flächen β und γ, der Bogen s_2 auf der Schnittkurve von γ und α, der Bogen s_3 auf der Schnittkurve von α und β gemessen werden. Endlich seien a, b, c die Winkel, welche von je zwei Tangenten dieser Kurven gebildet werden. Betrachtet man dann die Entfernungen der Punkte einer Seitenfläche des Parallelepipedes von der Tangentenebene in einem ihrer Punkte, so kann man leicht, durch eine ähnliche Überlegung wie bei der Bestimmung der Fläche eines unendlich kleinen krummlinigen Viereckes, feststellen, dass die Grösse des unendlich kleinen Parallelepipedes

$$k \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \frac{ds_3}{d\gamma} (1 + \varepsilon)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

wird, wobei ε mit den drei Grössen $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ nach null konvergiert.

Es sei nun V ein irgendwie begrenztes, bestimmtes Volumen. Man erkennt, dass dasselbe gleich wird der Grenze, nach welcher die Summe aller unendlich kleinen krummlinigen Parallelepipede konvergiert, welche in dem gegebenen Körper enthalten sind, und durch die drei Flächensysteme ausgeschnitten werden. Also wird:

$$V = \lim \Sigma k \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \frac{ds_3}{d\gamma} d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \int\!\!\int\!\!\int k \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \frac{ds_3}{d\gamma} d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Die Grenzen der Integrationen lassen sich ohne Schwierigkeit bestimmen, wie in den früher behandelten Fällen, wenn die Oberfläche des Körpers durch die Schnittkurven der Flächensysteme immer nur in zwei Punkten getroffen wird. Andernfalls muss man den Körper in mehrere Teile zerlegen, die getrennt zu berechnen sind.

Die vorige Formel vereinfacht sich, sobald die drei Flächensysteme orthogonal sind; denn alsdann wird die Grösse k, welche im allgemeinen eine Funktion der Variabelen α, β, γ ist, gleich eins.

Die Formeln für Polarkoordinaten im Raume.

602. Im Polarkoordinatensysteme sind die Punkte des Raumes durch drei orthogonale Flächensysteme bestimmt. Wir konstruieren vorläufig drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz. Das erste Flächensystem besteht dann aus den Kugeln, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt O ist und deren Radien wir mit r bezeichnen werden. Das zweite System wird von den Rotationskegeln um die Axe z gebildet, und der erzeugende Winkel derselben soll durch θ dargestellt werden. Das dritte

System endlich besteht aus den Ebenen, welche durch die z-Axe gehen und mit der zx-Ebene den Winkel ψ bilden.

Der Radius r variiert von 0 bis $+\infty$; der Winkel θ, welcher von der Richtung eines Radius r mit dem positiven Teil der z-Axe gebildet wird, variiert von 0 bis 180°; der Winkel ψ endlich ist gleich demjenigen, den die Projektion des Radius r auf die xy-Ebene mit der x-Axe bildet; er wird in der Richtung von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe gerechnet und variiert von 0 bis 360°.

Jede Kugel wird von den Flächen der beiden anderen Systeme in zwei orthogonalen Kurvensystemen geschnitten, nämlich in einem Systeme von Parallelkreisen und einem Systeme von Meridiankreisen; sie ist also zerlegt in unendlich kleine rechtwinklige Flächen, deren Seiten Kreisbogen sind mit den Centriwinkeln $d\theta$ und $d\psi$; die Radien dieser Bogen sind bezüglich gleich r und $r\sin\theta$, also sind die Seiten eines Rechteckes $r\,d\theta$, $r\sin\theta\,d\psi$. Dieses Rechteck wird die Basis eines krummlinigen Parallelepipedes, das durch die drei betrachteten Flächen bestimmt ist. Die dritte Dimension dieses Elementes ist gleich dr. Demnach wird das Volumen des Körpers aus der Gleichung

$$V=\int\!\!\int\!\!\int r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi$$

erhalten. Nehmen wir an, dass der Anfangspunkt ausserhalb des Körpers liegt, und bezeichnen wir mit r_0 und R die Werte von r beim Eintritt in den Körper und beim Austritt — dieselben sind Funktionen von θ und ψ —, so muss die Integration nach r zwischen den Grenzen r_0 und R ausgeführt werden; also wird:

$$V=\frac{1}{3}\int\!\!\int(R^3-r_0^{\,3})\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Die Integration nach θ muss dann zwischen den Grenzen θ_0 und θ gebildet werden, welche zu den Grenzen des Körpers gehören und Funktionen von ψ sind, und endlich ist die Integration nach ψ zwischen den Werten ψ_0 und Ψ zu nehmen, welche den beiden durch die z-Axe gehenden Ebenen zugehören, welche den Körper begrenzen. Also ist zu schreiben:

$$V = \frac{1}{3}\int_{\psi_0}^{\Psi} d\psi \int_{\theta_0}^{\theta} (R^3 - r_0^{\,3}) \sin\theta \, d\theta;$$

liegt der Anfangspunkt im Innern des Körpers, so beginnt das Integral nach r mit dem Werte 0, und die Integrale nach θ und ψ müssen bezüglich von 0 bis π und von 0 bis 2π gebildet werden. Also ist:

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} R^3 \sin\theta \, d\theta.$$

603. Wir haben gesehen, dass jede Kugel vom Radius r in unendlich kleine Rechtecke dS zerlegt wird, deren Seiten $r\,d\theta$ und $r \sin\theta\, d\psi$ sind; also ist:

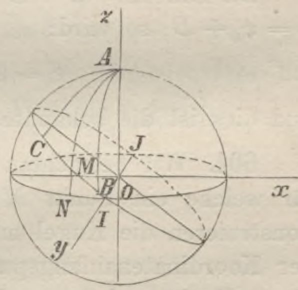
$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

und die Fläche der Kugel oder eines Teiles derselben wird bestimmt durch die Formel:

$$S = r^2 \iint \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Will man z. B. mit derselben ein sphärisches Dreieck berechnen, und sind A, B, C die Winkel des Dreieckes, dessen Ecken mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, so kann man den Radius OA der Kugel zur z-Axe wählen. Konstruiert man dann ferner den grössten Kreis senkrecht zu OA, welcher den grössten Kreis, der die Seite BC bildet, in den Gegenpunkten I und J schneidet, so kann man OI zur positiven y-Axe wählen, und endlich die x-Axe senkrecht zu OA und OI legen; die positive Richtung derselben wählen wir so,

Fig. 25.



dass der zu C gehörige Wert von ψ grösser wird, als der zu B gehörige, wenn man ψ in der Richtung von Ox nach Oy wachsen lässt. Wir lassen nun einen Punkt M sich auf der Seite BC von B nach C bewegen, und konstruieren den

Kreis AM, welcher, nötigenfalls verlängert, den Hauptkreis in der xy-Ebene im Punkte N schneidet. Bezeichnet man mit ψ_0 den Wert von ψ, der zu B gehört, und setzt man den Radius der Kugel gleich 1, so ist die Fläche S des Dreieckes zu berechnen aus:

$$S = \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} d\psi \int_0^{AM} \sin\theta \, d\theta = \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} (1 - \cos AM) \, d\psi,$$

oder da $\cos AM = \sin MN$:

$$S = \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} d\psi - \int_{\psi_0}^{\psi_0+AM} \sin MN \, d\psi.$$

Es ist aber im rechtwinkligen sphärischen Dreieck MNS:

$$\sin MN = \frac{\sin I \cos\psi}{\sin M}, \quad \cos M = \sin I \sin\psi,$$

und die letzte Formel ergiebt durch Differentiation:

$$d\psi = -\frac{\sin M}{\sin I \cos\psi} dM, \quad \text{also} \quad \sin MN \, d\psi = -dM,$$

folglich wird:

$$S = A + \int_{\psi_0}^{\psi_0+AM} \frac{dM}{d\psi} d\psi.$$

Da nun $M = \pi - B$ ist für $\psi = \psi_0$, und $M = C$ ist für $\psi = \psi_0 + B$, so wird:

$$S = A + B + C - \pi,$$

und dies ist die bekannte Formel.

604. Wir betrachten nun eine beliebige krumme Fläche, für welche ein Punkt M die Koordinaten r, θ, ψ hat, und konstruieren die Kugel mit dem Radius r, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist. Der Kegel, dessen Spitze dieser Punkt und dessen Basis das Element $d\sigma$ der Kugel ist, bestimmt auf der Fläche ein Element dS, dessen centrale Projektion auf der Kugel r das Element $d\sigma$ ist. Es seien nun $d\sigma'$ und dS' die orthogonalen Projektionen von $d\sigma$ und dS auf die Tangentenebene der Kugel im Punkte M; lässt man eine Ebene um OM sich drehen, so erhält man in der Tangentenebene die beiden Radienvektoren, welche vom Punkte M an die Kontouren der Elemente $d\sigma'$ und dS' gehen. Man sieht, dass das Verhältnis dieser Radienvektoren eins wird, wenn das Element dS nach jeder Richtung unendlich klein wird. Hieraus folgt, dass die Projektion von dS auf die Tangentenebene in M sich von $d\sigma$ nur um eine Grösse unterscheidet, die im Verhältnis zu dieser Projektion unendlich klein wird, so dass also:

$$dS = \frac{d\sigma}{\cos\zeta} = \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi}{\cos\zeta}$$

wird, wenn ζ den Winkel bedeutet zwischen dem Radius r und der Normalen der Fläche.

Die Tangenten der Seiten $r\,d\theta$ und $r\sin\theta\, d\psi$ des Elementes $d\sigma$ bilden mit dem Radius r ein System von drei rechtwinkligen Axen, auf welche man die betrachtete Fläche beziehen kann. Für den Punkt M sind diese drei Koordinaten null; wenn aber die beiden ersten Koordinaten um $r\,d\theta$ und $r\sin\theta\, d\psi$ successive wachsen, so erhält die dritte Koordinate die Zuwüchse $\frac{\partial r}{\partial \theta}\, d\theta$ und $\frac{\partial r}{\partial \psi}\, d\psi$. Bezeichnet man mit p und q die Verhältnisse dieser Zuwüchse zu denen der Koordinaten, aus welchen sie hervorgehen, so ist:

$$p = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad q = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial \psi}.$$

Nach den allgemeinen Formeln für rechtwinklige Koordinaten ist aber der Kosinus des Winkels ζ gleich:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

also ist:

$$\cos\zeta = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right]\sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}},$$

und die Fläche S ist aus der Formel zu bestimmen:

$$S = \int\!\!\int \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right]\sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}\, r\, d\theta\, d\psi.$$

Die Transformation der Variabelen in vielfachen Integralen.

605. Die Berechnung der Volumina von Körpern, die durch krumme Flächen begrenzt sind, und ebenso die der Grösse solcher Flächen, führt, wie wir sahen, auf die Bestimmung von Doppelintegralen, die bei rechtwinkligen Koordinaten die allgemeine Form haben:

$$\iint z\, dx\, dy, \quad \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Andere Fragen führen auch auf Integrale *höherer Dimension*, die auf *dreifache*, *vierfache* u. s. w. zurückgeführt werden, und in allen diesen Fällen muss die Integration auf alle Werte der Variabelen ausgedehnt werden, die gewissen Bedingungen, ausdrückbar durch eine Ungleichung oder auch mehrere, genügen. Kann man die Integration in Bezug auf eine Variabele ausführen, so reduziert sich das vielfache Integral auf ein anderes, dessen Ordnung um eine Einheit kleiner ist; ist dies aber nicht ohne weiteres der Fall, so kann man diese Reduktion bisweilen durch eine Vertauschung der Variabelen bewerkstelligen.

Wir behandeln das Doppelintegral:

$$1) \qquad U = \iint V\, dx\, dy,$$

in welchem V eine gegebene Funktion von x und y bezeichnet, und wollen an Stelle der Variabelen x und y zwei neue Variabele u und v einführen, die mit den ersten durch zwei gegebene Gleichungen verbunden sind. Wie auch das ebene Gebiet begrenzt sein mag, über welches die Integration zu erstrecken ist, das Integral U besteht aus einem oder aus mehreren Gliedern von der Form:

$$2) \qquad Z = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} V\, dy,$$

wobei y_0 und y_1 zwei gegebene Funktionen von x, und x_0 und x_1 zwei Konstante bedeuten. Auch kann man immer annehmen, dass y sowohl wie x beständig wachsende Grössen sind, oder, was das nämliche besagt, dass dx und dy positiv sind.

In der That gelten die nachstehenden Transformationen des Doppelintegrales auch für solche Gebiete, die von Kurven umschlossen sind, welche unendlich viele Oscillationen in Bezug auf die x- und die y-Axe besitzen. Denn da wir bei der Existenz des Doppelintegrales zugleich voraussetzen, dass das ebene Gebiet von einer Grenzkurve mit dem Inhalt null umschlossen ist, so können wir dasselbe auch mit beliebiger Annäherung durch ein Polygon ersetzen. Dann lässt sich die folgende Untersuchung zuerst für dieses Polygon ausführen, und alsdann ist der Grenzwert des transformierten Doppelintegrales für das ursprünglich gegebene Gebiet zu bilden.

Aus den gegebenen beiden Gleichungen zwischen x, y, u, v kann man den Wert von y als Funktion von x und v bestimmen. Es sei

$$y = f(x, v)$$

und es ist das Integral $\int\limits_{y_0}^{y_1} V dy$ zu behandeln, indem x als ein konstanter Parameter zu betrachten ist. Ersetzt man y durch $f(x, v)$, dy durch $\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} dv$, so folgt:

$$\int\limits_{v_0}^{v_1} V \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} dv,$$

und es sind v_0 und v_1 die Werte von v, welche zu $y = y_0$ und $y = y_1$ gehören. Wir nehmen hierbei an, dass v stets in gleichem Sinne sich ändert, während y von y_0 bis y_1 variiert; andernfalles müsste man das Integral nach y in mehrere Teile zerlegen. Da dy positiv ist, so erhält dv das Zeichen von $\frac{\partial f(x, v)}{\partial v}$; ist diese Ableitung negativ, so kann man dv positiv annehmen, indem man die Grenzen der Integration vertauscht; also ist:

$$Z = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int V \left[\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \right] dv,$$

wobei $\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v}$ den absoluten Wert von $\frac{\partial f(x, v)}{\partial v}$ bezeichnet, und das Integral nach v entweder zwischen den Grenzen v_0 und v_1, oder v_1 und v_0 zu bilden ist.

Demnach wird der Wert von Z

$$Z = \int\int V \left[\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v}\right] dx\, dv.$$

Auf Grund dieser Gleichung können wir die beabsichtigte Transformation vollenden. Denn ist nun $x = F(u, v)$ der Wert von x als Funktion von u und v, so haben wir dx durch $\pm \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} du$ zu ersetzen, und sonach wird

$$Z = \int\int V \left[\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v}\right] \left[\pm \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}\right] du\, dv.$$

Die Integration erstreckt sich hierbei über das nämliche Gebiet wie in der Gleichung 2). Differentiiert man aber die Gleichung $y = f(x, v)$, indem man x und y als Funktionen von u und v betrachtet, so folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) + \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} dv,$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x, v)}{\partial v},$$

und da $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$ ist, so wird

$$\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Also wird der Wert von Z:

$$Z = \int\int \pm \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right] V\, du\, dv.$$

Die Funktion V ist als Funktion von u und v auszudrücken.

606. Dasselbe Resultat lässt sich auf geometrischem Wege ableiten, wie im Zusatz zu § 598 geschehen ist. Denn das Integral Z kann als Darstellung eines Volumens betrachtet werden, das aus den Elementen $V dx\, dy$ besteht und dessen Basis das ebene Gebiet ist, über welches das Doppelintegral zu erstrecken ist. Die beiden Gleichungen

$$f_1(x, y) = u, \quad f_2(x, y) = v,$$

in denen u und v zwei variabele Parameter bedeuten, stellen zwei Kurvensysteme dar, durch welche die ebene Fläche in die Elemente von der Grösse $ds_1\, ds_2 \sin i$ zerlegt werden, wenn ds_1 und ds_2 die Bogenelemente der Kurven u und v, und i den Winkel derselben bezeichnen. Das Volumen Z wird dann die Summe aus den Elementen $V ds_1\, ds_2 \sin i$; also

$$Z = \int\int V ds_1\, ds_2 \sin i.$$

Es ist aber, wie bewiesen wurde:

$$ds_1\, ds_2 \sin i = \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

also

$$Z = \int\int \pm \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right] V du\, dv.$$

So führt z. B. der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten x und y zu den Polarkoordinaten ϱ und ω, welche mit x und y durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega$$

verknüpft sind, zu der Formel:

$$\int\int V dx\, dy = \int\int V \varrho\, d\varrho\, d\omega.$$

Die Elemente $\varrho\, d\varrho\, d\omega$ sind hier die Rechtecke mit den Seiten $d\varrho$ und $\varrho d\omega$, gebildet von den Geraden, die von dem Koordinatenanfangspunkte ausgehen, und von den Kreisen, deren Mittelpunkt dieser Punkt ist.

607. Hat man allgemein ein vielfaches Integral von der Ordnung n, also

$$\int\int \dots \int V dx\, dy \dots dz,$$

und man substituiert an Stelle der n Variabelen $x, y, \dots z$ andere n Variabele: $u, v, \dots w$, welche mit den ersten durch gegebene Gleichungen verbunden sind, so erhält man:

$$\int\int \dots \int V dx\, dy \dots dz = \int\int \dots \int (\pm D)\, V dx\, dy \dots dz,$$

wobei D die Determinante bezeichnet:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Dieser Satz ist vorhin für den Fall zweier Variabelen x und y bewiesen; es genügt also, ihn für $n+1$ Variabele nachzuweisen, indem man seine Giltigkeit für n Variabele voraussetzt.

Es sei also das Integral von der Ordnung $n+1$ gegeben:

$$U = \int\int \cdots \int\int V dx\, dy \ldots dz\, ds,$$

und es sollen an Stelle der Variabelen $x, y, z \ldots s$ die $n+1$ Variabelen $u, v, \ldots w, t$ eingeführt werden. Man kann nun damit beginnen, die n Variabelen $x, y, \ldots z$ als Funktion von s und den n neuen Variabelen $u, v, \ldots w$ darzustellen. Die Integration nach s muss dann zuletzt ausgeführt werden. Durch diese Transformation von n Variabelen erhalten wir unserer Annahme nach

$$U = \int\int \cdots \int\int (\pm \Delta) V ds\, du\, dv \ldots dw;$$

Δ bezeichnet die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} & \cdots & \frac{\delta x}{\delta w} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} & \cdots & \frac{\delta y}{\delta w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} & \cdots & \frac{\delta z}{\delta w} \end{vmatrix}.$$

Wir gebrauchen hier das Zeichen δ, um die partiellen Ableitungen auszudrücken, die unter der Annahme gebildet sind, dass die unabhängigen Variabelen s und $u, v, \ldots w$ sind, während wir das Zeichen ∂ für den Fall beibehalten, dass $u, v, \ldots w, t$ die unabhängigen Variabelen sind. Differentiiert man eine der Variabelen $x, y, \dots z$ bei dieser letzteren Annahme zuerst nach einer der Variabelen $u, v, \dots w$, sodann nach t, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta x}{\delta s}\frac{\partial s}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\delta x}{\delta s}\frac{\partial s}{\partial t},$$

also

$$\frac{\delta x}{\delta u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}}\frac{\partial s}{\partial u},$$

und ähnliche Ausdrücke gewinnt man für jede Ableitung in der Determinante Δ.

Bei der Ermittelung von U kann nunmehr aber nach dieser Substitution die Integration in Bezug auf s zuerst vollzogen werden, wenn man s als Funktion von t und von $u, v, \dots w$ ausdrückt und ds durch $\frac{\partial s}{\partial t}dt$ ersetzt. Man erhält so:

$$U = \int\int\dots\int\int\left(\pm\Delta\frac{\partial s}{\partial t}\right)V\,du\,dv\dots dw\,dt,$$

und der Ausdruck von Δ lässt sich aus dem folgenden ableiten:

$$D_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \dots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \dots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

indem man hier $\frac{\partial x}{\partial u}, \cdots$ durch $\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}}\frac{\partial s}{\partial u}, \cdots$ ersetzt.

Wir bezeichnen mit $D_x, D_y, \dots D_z$ die Werte, welche man erhält, indem man in D_s ein-, zwei-, dreimal ... die cyklische Substitution ausführt, welche darin besteht, $x, y, \dots z, s$ respektive durch $y, \dots z, s, x$ zu ersetzen. Da eine Determinante nur ihr Zeichen ändert, wenn zwei parallele Reihen vertauscht werden, so sieht man leicht, dass die Substitution von s für x, für y, für $z \ldots D_s$ in $-D_x, -D_y, -D_z, \ldots$ verwandeln wird, wenn die Zahl n der Variabelen $x, y, \ldots z$ eine gerade ist, dagegen in $+D_x, -D_y, \ldots D_z$, wenn die Zahl n ungerade ist; in diesem Falle wechseln die Zeichen $+$ und $-$.

Wir ersetzen also zuerst in D_s die Ableitungen von x, nämlich $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \cdots$ durch die Werte

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial x}} \frac{\partial s}{\partial u}, \cdots$$

und erhalten das Resultat:

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x.$$

Ersetzt man in diesem Ausdrucke die Ableitungen von y, nämlich $\frac{\partial y}{\partial u} \cdots$ durch die Werte $\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} \frac{\partial s}{\partial u} \cdots$, so ändert sich D_x nicht, denn diese Determinante wird null, wenn s an Stelle von y tritt. Man erhält also:

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x + \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_y$$

und erkennt nun leicht, dass, wenn man die übrigen Ableitungen sämtlich ebenso ersetzt bis einschliesslich derer von z, der Ausdruck von D_s schliesslich gleich wird:

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x + \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_y + \cdots + (-1)^n \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_z,$$

so dass also

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = D_s \frac{\partial s}{\partial t} \pm D_x \frac{\partial x}{\partial t} + D_y \frac{\partial y}{\partial x} \pm \cdots \pm D_z \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Diese rechte Seite ist aber nichts anderes als die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial s}{\partial w} & \frac{\partial s}{\partial t} \end{vmatrix},$$

also ist $\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = D$ und folglich

$$U = \int\int \ldots \int\int (\pm D)\, V du\, dv \ldots dw\, dt.$$

608. Wir betrachten schliesslich noch besonders die vielfachen Integrale, welche sich auf die Berechnung der Körper und krummen Flächen beziehen. Der Ausdruck des Volumens ist in rechtwinkligen Koordinaten:

$$U = \int\int\int dx\, dy\, dz,$$

und wenn man für x, y, z drei neue Variabele substituiert, so folgt:

$$U = \int\int\int \Delta\, du\, dv\, dw,$$

wobei

$$\Delta = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial w} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

ist. Wählt man für u, v, w die Polarkoordinaten r, θ, ψ, welche mit x, y, z durch die Gleichungen verbunden sind:

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r\sin\theta \sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

so wird:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\psi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\psi, \quad \frac{\partial x}{\partial\psi} = -r\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial y}{\partial\psi} = r\sin\theta\cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial\psi} = 0,$$

und dies giebt:

$$\Delta = r^2 \sin\theta,$$

also wird, wie früher bereits gefunden wurde, in Polarkoordinaten

$$U = \int\int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

609. Die Berechnung einer krummen Fläche hängt bei rechtwinkligen Axen x und y von dem Doppelintegrale

$$U = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$$

ab, wo p und q die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ bedeuten. Führt man nun die neuen Variabelen u und v für x und y ein, so wird

$$U = \int\int \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, du \, dv.$$

Nun ist

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v},$$

daher:

$$p\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$q\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

und substituiert man diese Werte von p und q, so folgt wie im § 599:

$$U = \int\int V \, du \, dv,$$

wobei

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}.$$

Werden für u und v die Polarkoordinaten θ, ψ gewählt, so müssen die Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi}$$

hier gebildet werden, indem man den Radius r als Funktion von θ und ψ betrachtet; also wird:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\psi + r \cos\theta \cos\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\psi + r \cos\theta \sin\psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\theta \cos\psi - r \sin\theta \sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\theta \sin\psi + r \sin\theta \cos\psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos\theta;$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \sin\theta \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta + r\cos\theta\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin\theta \cos\psi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r\sin\theta\right) + r\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin\theta \sin\psi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r\sin\theta\right) - r\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi.$$

Die Summe der Quadrate der Glieder auf der rechten Seite ist gleich:

$$\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right] r^2 \sin^2\theta + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2,$$

und sonach erhält man die im § 604 aufgestellte Formel.

Die Verallgemeinerung einer Formel in der Theorie der Eulerschen Integrale.

610. Wir wollen hier noch ein wichtiges Beispiel für die Reduktion eines vielfachen Integrales geben. Dieses Integral ist folgendes:

1) $V_n^{(p)} = \int\int \ldots \int x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{p-1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$

Die Exponenten $p, p_1, p_2, \ldots p_n$ sind positiv, und das Integral soll über alle positiven Werte der n Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ erstreckt werden, welche der Ungleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$$

genügen. Wir beginnen mit der Integration des Differentiales $x_n^{p_n - 1}(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)^{p-1} dx_n$ nach x_n, in welchem

$x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ als Konstanten anzusehen sind. Die Grenzen dieser Integration sind 0 und $1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$; wir setzen

$$x_n = (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})\, t,$$

wobei t eine neue Variabele ist. Die Grenzen der Integration nach t werden 0 und 1, und man erhält

$$(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{p+p_n-1} \int_0^1 t^{p_n-1}(1-t)^{p-1}\, dt.$$

Dies Integral nach t ist nichts anderes als das Eulersche Integral erster Gattung $B(p_n, p)$; folglich reduziert sich die Gleichung 1) auf

$$2)\quad \begin{cases} V_n^{(p)} = B(p_n, p) \\ \quad \times \int \ldots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_{n-1}-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{p+p_n-1}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \end{cases}$$

Die Integration muss jetzt auf die positiven Werte der $n-1$ Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ erstreckt werden, welche der Ungleichung genügen:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} < 1.$$

Demnach lässt sich die Gleichung 2) in der Form darstellen:

$$3)\qquad V_n^{(p)} = B(p_n, p)\, V_{n-1}^{(p+p_n)}.$$

Ist $n = 1$, so reduziert sich die Gleichung 1) auf das einfache Integral $\int_0^1 x_1^{p-1}(1-x)^{p-1}\, dx$ und ist also gleich $B(p_1, p)$. Daraus erkennt man, dass die Gleichung 3) auch für $n = 1$ gilt, wenn man für das Symbol V den Wert eins nimmt, sobald der untere Index null wird. Ersetzen wir also in der Gleichung 3) n successive durch $1, 2, 3, \ldots n$ und multiplizieren sodann alle Gleichungen, so folgt:

$$V_n^{(p)} = B(p_n, p)\, B(p_{n-1}, p + p_n) \ldots B(p_1, p + p_n + p_{n-1} + \cdots + p_2),$$

oder, wenn man die Funktionen B durch ihre Werte in Γ ausdrückt:

$$4)\qquad V_n^{(p)} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p + p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}.$$

Für den Fall $p = 1$ reduziert sich das Integral 1) auf

5) $V_n^{(1)} = \int\int\ldots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$

und ist immer noch für alle positiven Werte der Variabelen zu bilden, welche der Ungleichung $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$ genügen. Die Gleichung 4) ergiebt, weil $\Gamma(1) = 1$ ist:

$$6) \qquad V_n^{(1)} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(1 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}.$$

611. Auf diesen Fall lässt sich auch das Integral

$$7) \quad T = \int\int\ldots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

zurückführen, wenn dasselbe für alle positiven Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bilden ist, welche der Ungleichung

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\alpha_2} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} < 1$$

genügen, wobei $a_1, a_2, \ldots a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gegebene positive Grössen sind. Denn wenn man $\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} = z_i$ setzt, also:

$$x_i = a_i\, z_i^{\frac{1}{\alpha_i}}, \quad dx_i = \frac{a_i}{\alpha_i}\, z_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1}\, dz_i,$$

so wird die Gleichung 7):

$$T = \frac{a_1^{p_1}\, a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n} \int\int\ldots\int z_1^{\frac{p_1}{\alpha_1}-1}\, z_2^{\frac{p_2}{\alpha_2}-1} \ldots z_n^{\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n,$$

und also nach Gleichung 6):

$$8) \quad T = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\; \frac{a_1^{p_1}\, a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Betrachtet man insbesondere das dreifache Integral

$$T = \int\int\int x^{p-1}\, y^{q-1}\, z^{r-1}\, dx\, dy\, dz,$$

ausgedehnt über alle Elemente, welche in dem von den positiven Richtungen der drei rechtwinkligen Axen gebildeten Oktanten liegen und in dem Ellipsoid enthalten sind, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, so giebt die Gleichung 8) für diesen Fall:

$$9)\qquad T = \frac{1}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p+q+r}{2}\right)}\,a^p\,b^q\,c^r;$$

setzt man $p = q = r = 1$, so liefert diese Gleichung das Volumen des achten Teiles des Ellipsoides. Setzt man dagegen zwei der Exponenten p, q, r gleich 1 und den dritten gleich 2, so erhält man die *Koordinaten des Schwerpunktes* für den Oktanten eines homogenen Ellipsoides; endlich lassen sich auch aus dieser Formel die *Trägheitsmomente* des homogenen Ellipsoides berechnen.

Die Fläche des Ellipsoides.

612. Die Gleichung des Ellipsoides bei rechtwinkligen Koordinaten:

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

führt zur Berechnung der Oberfläche auf das Doppelintegral:

$$S = \int\!\!\int \frac{\sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 - b^2}{b^2}\,\frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy.$$

Die Integration sowohl nach x wie nach y hängt von elliptischen Integralen ab. Die Anwendung von Polarkoordinaten würde auf dieselbe Schwierigkeit führen. Dagegen lässt sich eine Reduktion des Integrales erzielen, wenn man als Variabele die Winkel θ, ψ einführt, so dass

$$x = a \sin\theta \cos\psi, \quad y = b \sin\theta \sin\psi, \quad z = c \cos\theta$$

wird, wodurch in der That die Gleichung des Ellipsoides erfüllt wird. Gemäss der Formeln in § 609 findet man:

$$S = \int\!\!\int \sqrt{a^2 b^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta\,(a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)}\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Die Integrationen sind von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, und von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ zu bilden. Die Integration nach θ lässt sich nun in geschlossener Form ausführen, und der Ausdruck

S wird so auf ein einfaches elliptisches Integral gebracht. Indessen werden durch diese erste Integration cyklometrische Funktionen eingeführt, und das Resultat, welches man auf diesem Wege erhält, hat noch nicht die einfache Form, welche man dem Ausdruck geben kann. Wir wollen daher diese Rechnung nicht ausführen, sondern eine andere Methode zur Lösung der Aufgabe einschlagen. Dieselbe ist besonders bemerkenswert und lässt sich auch mit Erfolg für eine ausgedehnte Gruppe von Problemen verwenden.

613. Wir bezeichnen mit u den Kosinus des Winkels, den die Tangentenebene der Fläche im Punkte (x, y, z) mit der xy-Ebene bildet, so ist:

$$u = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}{\frac{z}{c^2}},$$

oder:

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) \frac{z^2}{c^4} = 0.$$

Betrachtet man u als konstant, so stellt diese Gleichung einen Kegel zweiter Ordnung dar, und die Gleichungen 1) und 2) bestimmen zusammen eine Kurve, den Ort der Punkte auf dem Ellipsoide, für welche die Tangentenebene mit der xy-Ebene denselben Winkel, dessen Kosinus u ist, bildet. Man erhält die normale Projektion dieser Kurve auf die xy-Ebene, wenn man z aus den beiden Gleichungen eliminiert, und findet so:

$$3) \qquad \frac{a^2 - (a^2 - c^2)\, u^2}{a^4 (1 - u^2)}\, x^2 + \frac{b^2 - (b^2 - c^2)\, u^2}{b^4 (1 - u^2)}\, y^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Halbaxen die Werte haben:

$$\frac{a^2 \sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2)\, u^2}}, \qquad \frac{b^2 \sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{b^2 - (b^2 - c^2)\, u^2}},$$

und deren Fläche demnach gleich ist:

$$4) \qquad E = \frac{\pi a^2 b^2 (1 - u^2)}{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2)\, u^2}\, \sqrt{b^2 - (b^2 - c^2)\, u^2}}.$$

Es sei nun dE das Differential von E, wenn u um du wächst; der Teil des Ellipsoides, welcher auf irgend einer der beiden Seiten der xy-Ebene liegt und sich in die ringförmige Fläche dE projiziert, hat den Wert $\frac{dE}{u}$; um also die ganze Fläche S des Ellipsoides zu erhalten, hat man den Ausdruck $\frac{dE}{u}$ oder $\frac{dE}{du} \cdot \frac{du}{u}$ von $u = 1$ bis $u = 0$ zu integrieren und den erhaltenen Wert zu verdoppeln. So wird, indem man die Grenzen vertauscht und das Vorzeichen des Integrales ändert:

$$5) \qquad S = -2 \int_0^1 \frac{dE}{du} \cdot \frac{du}{u}.$$

In diese Gleichung hat man also den Wert von $\frac{dE}{du}$, welcher aus der Gleichung 4) folgt, zu substituieren, und sonach ist die Fläche des Ellipsoides durch ein einfaches Integral ausgedrückt. Indessen ist es zweckmässig, diesen Ausdruck noch vorher zu transformieren. Wir nehmen $a > b > c$ an, die Ungleichung soll jedoch nicht die Gleichheit ausschliessen, und setzen zur Abkürzung:

$$\frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} = k^2, \quad c = a \cos \mu,$$

also:

$$\sqrt{a^2 - c^2} = a \sin \mu, \quad c = b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu};$$

μ ist ein Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. An Stelle von u führen wir als Variabele den Winkel φ ein, der durch die Gleichung bestimmt ist:

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sin \mu},$$

und wenn u zwischen den Grenzen 0 und 1 variiert, so variiert φ von 0 bis μ. Also werden die Gleichungen 4) und 5):

$$6) \qquad E = \frac{\pi ab \left(1 - \frac{a^2}{a^2 - c^2} \sin^2 \varphi\right)}{\cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$7) \qquad S = \frac{-2 \sqrt{a^2 - c^2}}{a} \int_0^\mu \frac{dE}{d\varphi} \, \frac{1}{\sin \varphi} \, d\varphi.$$

Vermittelst der Gleichung 6) findet man:

$$\frac{dE}{\sin\varphi} = d\frac{E}{\sin\varphi} + \frac{E\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi = d\frac{E}{\sin\varphi} + \pi ab\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\pi ab\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

andererseits erhält man durch Differentiation des Ausdruckes:

$$\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

$$d\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = -\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

und wenn man aus dieser Gleichung den Wert von:

$$\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

berechnet, um ihn in die vorhergehende Formel zu substituieren, so folgt, wenn man noch den Wert von E berücksichtigt:

$$\frac{-2\sqrt{a^2-c^2}}{a}\frac{dE}{d\varphi}\frac{1}{\sin\varphi}d\varphi$$
$$= 2\pi c^2 d\left\{\frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}}{\operatorname{tang}\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\left[1+\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^4}(\sin^2\varphi-\sin^2\mu)\right]\right\}$$
$$+\frac{2\pi b}{\sqrt{b^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + c^2\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Integriert man zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \mu$, so erhält man:

8) $$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + c^2\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

Wird also gemäss der Legendre'schen Bezeichnung:

9) $$\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\mu,k), \qquad \int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\mu,k)$$

gesetzt, so folgt die Formel von Legendre:

10) $$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)E(\mu,k) + c^2F(\mu,k)].$$

Will man das elliptische Integral zweiter Gattung einführen:

$$\int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

so wird auf Grund der Identität:

$$\int_0^\mu \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2 \int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$11)\qquad S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-c^2}} \left[\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{b^2-c^2}{b^2} \int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \right].$$

Ist $c = b$, so hat man das verlängerte Rotationsellipsoid; es ist $k = 0$, $\mu = \arccos \frac{b}{a}$; und diese Formel ergiebt (§ 595):

$$12)\qquad S = 2\pi b^2 + 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arccos \frac{b}{a}.$$

Ist $a = b$, so hat man das abgeplattete Rotationsellipsoid; es ist $k = 1$ und die Formel 8) giebt (§ 595):

$$13)\qquad S = 2\pi b^2 + \frac{\pi b c^2}{\sqrt{b^2-c^2}}\, l\, \frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{b-\sqrt{b^2-c^2}}.$$

Anhang.

Grundriss der Theorie der Fourierschen Reihe und des Fourierschen Integrales.

1. Für die analytische Darstellung von Funktionen, welche möglichst wenigen Voraussetzungen genügen oder, wie man auch kurz sagt, für ein bestimmtes Intervall der reellen Variabelen x willkürlich definiert sind, ist, zumal in der Theorie und Anwendung partieller Differentialgleichungen, die Beantwortung der Frage wichtig: *Lässt sich jede Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellen, und wie sind dann die Koeffizienten dieser Reihe zu bestimmen?* Fourier, welcher zuerst in seiner Theorie der Wärmeleitung die systematische Untersuchung dieser Frage begonnen hat, die früher schon Gegenstand der Kontroverse zwischen Euler und D'Alembert bildete, gab zur Lösung derselben im allgemeinen nur das Verfahren an, welches in den Paragraphen 502 flg. angeführt worden ist, von dem wir aber sahen, dass es den ersten Teil des Problemes gar nicht, den anderen nur mit Hilfe einer besonderen Voraussetzung beantwortet.

Unter einer in einem reellen Intervalle von $z = a$ bis $z = b$ willkürlich gegebenen Funktion $f(z)$ verstehen wir, dass für jeden einzelnen Wert von z ein Funktionswert irgendwie definiert ist. Ein sehr wesentlicher Unterschied solch einer Funktion von allen rationalen algebraischen, sowie überhaupt von allen Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen nach der Taylorschen Formel darstellbar sind, besteht darin, dass bei diesen die Definition der Funktion innerhalb eines noch so kleinen endlichen Intervalles zugleich über den ganzen weiteren Verlauf derselben entscheidet. Denn kennt man von einer konvergenten Potenzreihe die Werte der Funktion in der Umgebung einer Stelle, so dass man daselbst die Werte sämtlicher Ableitungen zu bilden im stande ist, so folgt aus diesen Werten auch die gesamte Potenzreihe. Bei einer willkürlichen Funktion dagegen entscheidet die Beschaffenheit der Funktion innerhalb eines bestimmten Teiles der Strecke a bis b noch gar nichts über den Verlauf der Funktion ausserhalb dieses Teiles. Eine in diesem Sinne willkürliche Funktion kann also sicherlich nicht für das gesamte Intervall von a bis b durch *eine* Potenzreihe ausgedrückt werden.

Wir wollen aber den Begriff der willkürlichen Funktion für das folgende noch etwas einschränken. Die Funktion $f(z)$ sei für das Intervall von a bis b so definiert, dass sie mit Ausnahme einzelner in endlicher Anzahl vorhandener Punkte bei jedem Werte von z einen bestimmten Wert hat, und dass sie auch mit Ausnahme derselben Punkte überall stetig verläuft. An den Ausnahmepunkten aber möge die Funktion so beschaffen sein, dass zwar $\lim f(z+h)$ und $\lim f(z-h)$ für $h = 0$ daselbst bestimmte Werte besitzen, dass aber diese Grenzwerte von einander verschieden sind. An solch einer Stelle z selbst werde der Wert der Funktion ganz unbestimmt gelassen; wesentlich für die Beschaffenheit der Funktion in der beiderseitigen Umgebung solch einer Stelle ist dann nur der Umstand, dass sie daselbst eine sprungweise Wertänderung erleidet. Die Funktion $f(z)$ ist dann auch im Intervall von a bis b integrierbar, und diese Eigenschaft, welche wir der willkürlichen Funktion auferlegen, bildet auch eigentlich nur die notwendige Einschränkung für die Theorie, welche wir zu entwickeln haben. Indessen würde es hier zu weit führen, die ganze Theorie für die integrierbaren Funktionen überhaupt auszuführen; wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst also immer nur auf diejenigen integrierbaren Funktionen, welche zugleich mit Ausnahme einzelner Punkte stetig sind und in der Umgebung dieser Punkte weder unendlich, noch unbestimmt werden, sondern bestimmte sprungweise Wertänderungen haben.

2. Eine Funktion, die für das Intervall von a bis b definiert ist, kann stets so transformiert werden, dass ihr Argument das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ durchläuft. Denn setzt man:

$$x = \pi \frac{2z - (a+b)}{b-a} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x(b-a) + \pi(a+b)}{2\pi},$$

so entspricht jedem Werte von z ein Wert von x, und wenn z das Intervall von a bis b durchläuft, erhält x alle Werte von $-\pi$ bis $+\pi$. Demnach können wir die Aufgabe auf die Form reduzieren: *Es sei im Intervalle von* $x = -\pi$ *bis* $x = +\pi$ *eine Funktion* $f(x)$ *willkürlich definiert, doch so, dass sie mit Ausnahme einzelner Punkte, an denen sie bestimmte sprungweise Wertänderungen erleidet, stetig ist; kann diese Funktion durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden, und wie sind dann die Koeffizienten derselben zu bestimmen?*

Die richtige Methode, diese Frage, wenn auch nicht vollständig zu lösen, so doch für die wichtigsten Fälle zu erledigen, eröffnete Dirichlet (Crelles Journal, Bd. 4); er lehrte, dass dieselbe nicht in der aufgestellten Form zu untersuchen ist, sondern in der umgekehrten Reihenfolge. Bildet man für die Funktion $f(x)$ die trigonometrische Reihe, bei welcher die Koeffizienten die von Fourier angegebene Integralform haben, nämlich:

$$1)\quad A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx,\quad A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

so ist vor allem zu untersuchen, ob diese Reihe

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{k=\infty} A_k\cos kx+B_k\sin kx$$

bei jedem Werte von x konvergiert und den Wert $f(x)$ liefert. Alsdann lässt sich weiter fragen, ob dieselbe Funktion etwa noch durch andere trigonometrische Reihen darstellbar ist oder nicht.

3. Wir wenden uns zur Beantwortung des ersten Teiles und schicken den folgenden Satz voraus:

Ist $\mathrm{f(x)}$ *eine im Intervall von* $-\pi$ *bis* $+\pi$ *endliche und integrierbare Funktion, so haben die Integrale*

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{f(x)}\cos \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}\quad \textit{und}\quad \int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{f(x)}\sin \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}$$

für $\mathrm{n}=\infty$ *den Grenzwert null.*

Dabei ist selbstverständlich der Grenzprozess so zu vollziehen, dass zuerst bei endlichem Werte von n die Integrale ermittelt werden, und alsdann in den gewonnenen Ausdrücken n über jeden Betrag hinaus wächst. Bildet man das Integral:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)-\frac{1}{2}A_0-\sum_{k=1}^{k=n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]^2 dx,$$

in welchem die Koeffizienten A und B die oben [Gleich. 1] definierten Werte haben, und n eine bestimmte beliebig grosse ganze Zahl bedeutet, so wird dasselbe gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx+\frac{\pi}{2}A_0{}^2+\pi\sum_{k=1}^{k=n}(A_k{}^2+B_k{}^2)-A_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$
$$-2\sum_{k=1}^{k=n}\left[A_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx+B_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx\right],$$

also gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{\pi}{2} A_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2);$$

es besteht demnach die Gleichung:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - \frac{1}{2} A_0 - \sum_{k=1}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right]^2 dx = \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{\pi}{2} A_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2),$$

welche für jeden endlichen noch so grossen Wert von n giltig ist. Die linke Seite dieser Gleichung ist nun bei jedem Werte von n eine positive Grösse, weil die Funktion unter dem Integrale ein Quadrat ist, mithin muss auch die rechte Seite stets positiv bleiben. Würden nun die Beträge der Grössen A_k und B_k bei noch so grossen Werten von k nicht nach null konvergieren, sondern immer wieder Werte erlangen, die um eine bestimmte endliche Grösse von null verschieden sind, so müsste die rechte Seite bei beliebig wachsenden Werten von n negativ werden. Man erkennt also, dass sich ein n finden lässt, von dem ab

$$\sum_{k=n}^{k=n+m} A_k^2 + B_k^2$$

kleiner bleibt als eine beliebig kleine Zahl δ, wie gross auch m werden mag, und dass folglich auch

$$\text{abs}\,[A_n] \quad \text{und} \quad \text{abs}\,[B_n]$$

schliesslich kleiner werden und bleiben als δ, d. h. dass

$$\lim A_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim B_n = 0$$

ist. Da die Funktion $f(x)$ willkürlich ist, so kann man sie insbesonders so wählen, dass sie in einem Teilintervalle a bis b der Strecke $-\pi$ bis $+\pi$ von null verschieden ist, ausserhalb derselben aber null ist. Man erkennt dann, dass auch

$$\lim \int_a^b f(x) \cos nx\, dx \quad \text{und} \quad \lim \int_a^b f(x) \sin nx\, dx$$

$(-\pi \leqq a < b \leqq +\pi)$ für $n = \infty$ den Wert null haben. Desgleichen sieht man leicht ein: falls das Intervall von a bis b das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ umfasst, so kann man dasselbe in Teile zerlegen, die innerhalb der Strecken von $-\pi$ bis $+\pi$, von $+\pi$ bis $+3\pi$, von $-\pi$ bis -3π u. s. w. liegen, und da dann für jede dieser Strecken die Grenzwerte der Integrale null werden, so gilt der Satz noch allgemeiner als unsere anfängliche Behauptung: *Für jede überall endliche und integrierbare Funktion werden in einem beliebigen endlichen Integrationsintervalle von* a *bis* b *die Grenzwerte der Integrale*

$$\int_a^b f(x)\, \mathit{cos}\, nx\, dx \quad \textit{und} \quad \int_a^b f(x)\, \mathit{sin}\, nx\, dx$$

gleich null, wenn n *die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend über jeden Betrag hinaus wächst.*

Bemerkung. Der Beweis bleibt giltig, falls $f(x)$ eine integrierbare Funktion ist, die derart unendlich wird, dass auch ihr Quadrat integrierbar ist; und der Satz selbst bleibt bestehen, wenn die Funktion absolut integrierbar ist. Es giebt aber auch integrierbare Funktionen, welche derart unendlich werden, dass die Grössen A_n und B_n nicht nach null konvergieren; für diese ist die Anwendbarkeit der Fourierschen Reihe ausgeschlossen. Das Verschwinden der Grenzwerte der Integrale A_n und B_n ist in anderer gleichfalls sehr einfacher Weise von Riemann bewiesen worden (Ges. Werke, pag. 240) und zwar direkt aus den Eigenschaften einer integrierbaren Funktion $f(x)$ und dem Umstande, dass die Funktionen $\sin nx$ und $\cos nx$ in Intervallen von der Grösse $\frac{2\pi}{n}$ ihr Zeichen wechseln.

4. Soll die Fouriersche Reihe bei jedem Werte von x den Wert der Funktion $f(x)$ ausdrücken, so muss die Summe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\left[\cos kx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos k\alpha\, d\alpha + \sin kx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos k(\alpha - x)\, d\alpha$$

bei beliebig wachsendem Werte von n sich unbegrenzt dem Werte $f(x)$ nähern. Wir bezeichnen die Summe dieser Terme bis einschliesslich derer mit dem Index n durch $S_n(x)$. Die Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cos 3(\alpha - x) + \cdots + \cos n(\alpha - x)$$

lässt sich durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen; nennt man der Kürze halber s die Summe:

$$s = \cos z + \cos 2z + \cos 3z + \cdots + \cos nz,$$

so folgt, wenn man beide Seiten mit $2\cos z$ multipliziert und die Produkte der Kosinus in Summen verwandelt:

$$2s\cos z = (1+\cos 2z) + (\cos 3z + \cos z) + (\cos 4z + \cos 2z) + \cdots + [\cos(n+1)z + \cos(n-1)z]$$
$$= 1 + \cos z + 2\cos 2z + 2\cos 3z + \cdots + 2\cos(n-1)z + \cos nz + \cos(n+1)z.$$

Demnach wird:

$$2s(1-\cos z) = -1 + \cos z + \cos nz - \cos(n+1)z$$

oder

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1-\cos z)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}};$$

also ist:

$$\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cdots + \cos n(\alpha - x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{\alpha - x}{2}}$$

und

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha.$$

Es ist zu untersuchen, ob der Wert dieses Integrales bei beliebig wachsendem Werte von n nach $f(x)$ konvergiert. Dasselbe zerlegt sich in zwei Teile; es ist:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha.$$

Das zweite Integral konvergiert mit beliebig wachsendem Werte von n nach null. Denn wie im § 3 bewiesen wurde, konvergieren die einzelnen Teile:

$$\cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \quad \text{und} \quad \sin nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$$

nach null. In dem ersten Integrale ist die zu integrierende Funktion an der Stelle $\alpha = x$ irregulär, weil der Nenner für diese Stelle null wird. Bestimmt man aber ein beliebig kleines Intervall von $\alpha = x - \delta$ bis $\alpha = x + \delta$ (wir betrachten dabei zunächst den Fall, dass x innerhalb des Integrationsintervalles und nicht an den Grenzen desselben gelegen ist), so ist die Funktion:

$$f(\alpha)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}$$

ausserhalb desselben durchaus endlich, und mithin konvergiert auch:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{x-\delta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{x+\delta}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

bei beliebig wachsendem Werte von n nach null. Also ist nur noch der Grenzwert des Integrales

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

zu betrachten, und damit ist zugleich der Satz bewiesen:

Der Wert der Fourierschen Reihe hängt an jeder Stelle nur ab von dem Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Umgebung dieser Stelle.

Bemerkung. Der Satz gilt überhaupt, sobald die Funktion $f(x)$, auch wenn sie im Intervalle unendlich wird, die Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$$

null werden, d. h. sobald diese zur Bildung der Fourierschen Reihe unerlässlichen Bedingungen erfüllt sind.

5. Wir setzen nun in dem Integrale $\alpha - x = \beta$, $d\alpha = d\beta$, so dass es die Form erhält:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{+\delta} f(x+\beta)\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta.$$

Der Grenzwert dieses Integrales, in welchem δ eine beliebig klein fixierte Grösse bezeichnet, für $n = \infty$ entscheidet über den Wert der Reihe an der Stelle x.

Auch dieses Integral kann man noch vereinfachen. Bildet man das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{\beta}\right)\sin n\beta\,d\beta,$$

so hat dasselbe zufolge des früheren Satzes den Grenzwert null; denn die mit $\sin n\beta$ multiplizierte Funktion bleibt auch für $\beta = 0$ endlich. Mithin folgt, wenn

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\sin n\beta\,d\beta$$

für $n=\infty$ einen bestimmten Grenzwert hat, so hat auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

für $n=\infty$ denselben Grenzwert, und umgekehrt. Demnach lautet das Ergebnis:

Die Fouriersche Reihe hat an der Stelle x *einen bestimmten Grenzwert, falls das Integral*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\mathrm{f}(\mathrm{x}+\beta)+\mathrm{f}(\mathrm{x}-\beta)]\,\frac{\sin \mathrm{n}\beta}{\beta}\,\mathrm{d}\beta$$

für $\mathrm{n}=\infty$ *einen bestimmten Wert besitzt, und zwar ist der Grenzwert dieses Integrales zugleich der Wert der Reihe an der Stelle* x.

Handelt es sich um den Wert $x=+\pi$ oder $x=-\pi$, so lehrt dieselbe Betrachtungsweise, dass man aus der Summe $S_n(x)$ in beiden Fällen nur die Grenzwerte der Terme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}\,d\alpha$$

zu betrachten hat; also den Grenzwert des Integrales

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(+\pi-\beta)+f(-\pi+\beta)]\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(+\pi-\beta)+f(-\pi+\beta)]\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

6. Die Funktion $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ konvergiert für $\beta=0$ nach dem Werte $f(x+0)+f(x-0)$, da wir angenommen haben, dass unsere Funktion $f(x)$ allenthalben bestimmte Werte $f(x+0)$ und $f(x-0)$ besitzt. An einer Stelle, an welcher die Funktion stetig ist, sind diese Werte einander gleich, an den Unstetigkeitsstellen sind sie verschieden. Setzt man die Differenz:

$$[f(x+\beta)+f(x-\beta)]-[f(x+0)+f(x-0)]=\lambda(\beta),$$

so ist $\lambda(\beta)$ eine stetige Funktion, welche für $\beta=0$ den Wert 0 hat, und es wird:

$$\lim S_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\lim\int_0^\delta\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta+\frac{1}{\pi}\lim\int_0^\delta\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Es ist nun:

$$\int_0^\delta\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta=\int_0^{n\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz,$$

also (§ 494):

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\delta\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta=\lim_{n=\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz=\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}\,dz=\frac{\pi}{2}.$$

Mithin wird:

$$\lim S_n(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]+\frac{1}{\pi}\lim\int_0^\delta\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Der Wert der Fourierschen Reihe wird also an einer Stelle, wo die Funktion stetig ist, gleich $f(x)$, und an einer Stelle, wo die Funktion eine sprungweise Wertänderung erleidet, gleich dem Mittel aus diesen Werten, wenn

$$\lim\int_0^\delta\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

bei noch so grossen Werten von n durch Wahl von δ beliebig klein bleibt.

Es ist bisher nur gelungen, Bedingungen für das Verhalten der Funktion $\lambda(\beta)$ anzugeben, welche hinreichend sind, damit diese Forderung erfüllt ist, und es ist durch Beispiele bewiesen worden, dass die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ oder allgemeiner der Funktion $\lambda(\beta)$ für sich allein nicht genügt. Ich führe im folgenden nur die für die Anwendung der Fourierschen Reihe wichtigsten Fälle an.

Erstens: Besitzt die stetige Funktion $\lambda(\beta)$, welche für $\beta=0$ verschwindet, in der Umgebung der Stelle $\beta=0$ nicht unendlich viele Maxima und Minima, so kann man nach dem zweiten Mittelwertsatze (§ 463) schliessen:

$$\int_0^\delta\lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta=\lambda(\delta)\int_{\theta\delta}^{\delta}\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta=\lambda(\delta)\int_{n\theta\delta}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Denn man kann das Intervall δ so klein machen, dass die Beträge der Funktion $\lambda(\beta)$ nur wachsen, während β das Intervall von 0 bis δ durchläuft. Nun lässt sich aber δ von vornherein so klein wählen, dass $\lambda(\delta)$ beliebig klein ist; ferner ist das Integral rechts, wie gross auch n werden und welchen Wert auch θ haben mag, stets endlich. Also ist der Wert des Integrales

$$\int_0^\delta \lambda(\beta) \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta$$

unabhängig von n, lediglich durch Wahl von δ beliebig klein, d. h. es wird

$$\lim S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Insbesondere gilt das Resultat auch dann, wenn die Funktion $f(x)$ zu beiden Seiten der betrachteten Stelle nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, denn dann lässt sich die Funktion $\lambda(\beta)$ in die beiden Teile $f(x+\beta)-f(x+0)$ und $f(x-\beta)-f(x-0)$ zerlegen, und auf jeden derselben kann der nämliche Schluss angewandt werden. (Bedingung von Dirichlet.)

Zweitens: Sind die Beträge (absoluten Werte) der Funktion $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ integrabel in der Umgebung der Stelle $\beta = 0$, so ist:

$$\int_0^\delta \frac{\lambda(\beta)}{\beta} \sin n\beta\, d\beta \text{ dem Betrage nach kleiner als} \int_0^\delta \operatorname{abs}\left[\frac{\lambda(\beta)}{\beta}\right] d\beta.$$

Dieses Integral kann der Voraussetzung nach durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden, wodurch wiederum die Konvergenz der Reihe nach dem gewünschten Werte bewiesen ist.

Ist insbesondere $\lambda(\beta)$ dem Betrage nach stets kleiner als das Produkt $C\beta^\alpha$, wobei C eine Konstante, α irgend eine positive Zahl ist, so ist die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit erfüllt. (Bedingung von Lipschitz.)

Hieraus folgt, wenn die Funktion

$$\frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \frac{f(x+\beta)-f(x+0)}{\beta} + \frac{f(x-\beta)-f(x-0)}{\beta}$$

endlich bleibt auch für $\beta = 0$, was besonders dann der Fall ist, wenn die Funktion $f(x)$ an der betrachteten Stelle einen bestimmten endlichen Wert des vorwärts gebildeten und ebenso des rückwärts gebildeten Differentialquotienten besitzt, so konvergiert die Fouriersche Reihe an dieser Stelle nach dem Werte

$$\frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)].$$

Drittens: Das letzte Resultat, dass die Reihe allenthalben konvergent ist, wenn für die Funktion $f(x)$ der vorwärts- und der rückwärtsgebildete Differentialquotient allenthalben endlich sind, lässt sich noch verallgemeinern. Es genügt, dass der Differentialquotient der Funktion $f(x)$, auch wenn er unendlich wird, doch absolut integrierbar sei. Denn es besitzt alsdann die Funktion $\lambda(\beta)$ eine absolut integrierbare Ableitung: $\lambda'(\beta)=f'(x+\beta)-f'(x-\beta)$, und es wird nach dem Satze der teilweisen Integration:

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta=\int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha\int_\alpha^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta=\int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Wenn nun die absoluten Werte der Funktion $\lambda'(\alpha)$ integrierbar sind, so ist:

$$\operatorname{abs}\int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz<\int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz\cdot\int_0^\delta \operatorname{abs}[\lambda'(\alpha)]\,d\alpha,$$

denn der Wert des Integrales $\int_{n\alpha}^{n\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz$ ist bei jedem Werte von α und n nie grösser (§ 466, Beispiel 2) als:

$$\int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Die rechte Seite kann nun durch Wahl von δ von vornherein beliebig klein gemacht werden, ganz unabhängig von n, daher ist auch

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

durch Wahl von δ bei allen Werten von n beliebig klein, womit wiederum die Konvergenz bewiesen ist. (Bedingung von du Bois-Reymond.)

Als das für die Anwendung der Fourierschen Reihe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtigste Resultat heben wir hervor, dass jede im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$

irgendwie definierte Funktion, deren Ableitung entweder endlich und integrierbar, oder absolut integrierbar ist (an den Sprungstellen der Funktion sind immer die vor- und rückwärts gebildeten Ableitungen gesondert zu betrachten), durch eine allenthalben konvergente Fouriersche Reihe darstellbar ist, derart, dass an den Sprungstellen der Funktion die Reihe den mittleren Wert annimmt. Dadurch allein schon erhält diese Reihenentwickelung eine besonders wichtige Bedeutung im Vergleich mit den gewöhnlichen Potenzreihen; denn diese setzen die Stetigkeit nicht nur der ersten, sondern überhaupt aller Ableitungen voraus.

Endlich bemerken wir noch, dass an den Stellen $x = +$ oder $- \pi$ die Reihe nach dem Werte $\frac{1}{2}[f(+\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$ konvergiert, sobald die Funktion an den Stellen $x = \pm \pi$ eine der drei Bedingungen erfüllt. Ist also die willkürliche Funktion so beschaffen, dass ihre Werte an den beiden Grenzen des Intervalles verschieden sind, so kann durch die Fouriersche Reihe immer nur der mittlere Wert dieser beiden ausgedrückt werden.

Bemerkung. Wird die Funktion $f(x)$ an einzelnen Stellen unendlich, so jedoch, dass die notwendigen Bedingungen (§ 3) erfüllt sind, so konvergiert die Fouriersche Reihe sicherlich an jeder anderen Stelle, welche eine der drei entwickelten Bedingungen erfüllt. Wie sie sich an der Unendlichkeitsstelle verhält, ist eine minder wichtige Frage, sie kann dort möglicherweise sogar konvergieren, doch stellt sie dann mit diesem Werte nicht die Funktion dar. Ferner erkennt man, dass punktuell hebbare Unstetigkeiten der Funktion $f(x)$ gar keinen Einfluss haben auf die Reihe und daher auch niemals durch dieselbe dargestellt werden.

7. Der Beweis, welchen wir geführt haben, giebt uns Bedingungen an, unter denen die Fouriersche Reihe nach dem Werte $\frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$ konvergiert. Es ist daher die Frage nicht ohne Bedeutung, ob die Reihe an einer bestimmten Stelle x nicht auch konvergieren kann, ohne dass sie gerade diesen Wert annimmt. Die Antwort aber lautet: *Wenn die Fouriersche Reihe an einer Stelle konvergiert, an welcher* $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ *einen bestimmten Wert hat, so konvergiert sie auch immer nach diesem Werte.* Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich, wenn man zuvor auf zwei allgemeine Eigenschaften der *trigonometrischen Reihen überhaupt* eingeht, von denen die eine im wesentlichen von Herrn G. Cantor, die andere von Riemann aufgestellt wurde. Dieselben sind zugleich wichtig für die Beantwortung der Frage: Ist jede trigonometrische Reihe, welche eine Funktion $f(x)$

definiert, eine Fouriersche? Man erkennt von vornherein die Beschränkung des Satzes: Die Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe definiert ist, muss, falls die Koeffizienten der Reihe die Fouriersche Integralform haben sollen, jedenfalls eine integrierbare sein. Sonach kommen wir auf das in den § 502 flg. nur unter einer bestimmten Annahme gelöste Problem:

Haben in jeder trigonometrischen Reihe:

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

wenn sie im Intervalle von $-\pi$ *bis* $+\pi$ *eine Funktion* $f(x)$ *definiert, welche integrierbar ist, die Koeffizienten* A_n *und* B_n *die Werte:*

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx?$$

Diese Frage ist im wesentlichen zu bejahen. Der Weg zu ihrer Beantwortung ist von Herrn du Bois-Reymond zuerst angegeben worden. Im folgenden soll der Beweis geführt werden unter der Einschränkung, dass $f(x)$ zugleich eine im allgemeinen stetige Funktion ist, d. h. eine solche, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Wertänderung erleidet.

8. Wenn eine trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

überhaupt in einem noch so kleinen Intervalle konvergieren soll, so muss sie notwendig die Eigenschaft haben, dass $\lim A_n$ und $\lim B_n$ für $n = \infty$ verschwinden. Diesem von Hrn. Cantor aufgestellten Satze (Math. Annal. Bd. 4 u. 5) können wir eine erweiterte Fassung geben, indem wir folgende allgemeine Erkenntnis über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen voranstellen. Die Stellen, an denen eine unendliche Reihe divergiert, können von zweierlei Art sein. Entweder wächst die Summe der Reihenglieder über jede Grenze, die Reihe wird alsdann an dieser Stelle in bestimmter oder unbestimmter Weise unendlich, oder es oscillieren die Werte dieser Summe zwischen endlichen Grenzen. Im ersten Falle kann das Mass der Divergenz ein unendliches genannt werden, im zweiten lässt sich ein endliches Mass fixieren. Denn bezeichnet man mit S_{n-1} die Summe der Glieder, welche den Index $0, 1, \ldots$ bis $n-1$ besitzen, und bildet man die Folge S_{n-1}, S_n, $S_{n+1} \ldots$, so existiert eine obere Grenze G_n und eine untere g_n, welche von den Gliedern in dieser Folge nicht überschritten wird. Lässt man den Index n beliebig wachsen, so erhält G_n, indem es entweder konstant bleibt oder nur abnimmt, einen Grenzwert G', und ebenso bekommt g_n, indem es entweder konstant bleibt oder nur zunimmt, einen Grenzwert g'. Diese Werte G' und g' sind alsdann die äussersten Grenzen für die schliessliche Oscillation der Reihensumme und ihre Divergenz soll das Mass der Divergenz an der betrachteten Stelle heissen. Ist dieses Divergenzmass null, so konvergiert die Reihe daselbst. Bezeichnet man die Differenz $S_{n+k} - S_n$ mit $R_{n,k}$, so hat die Folge der Reste $R_{n,1}, R_{n,2} \ldots$ die Eigenschaft, dass ihr Betrag niemals grösser sein kann als $G_n - g_n$. Wird also das Divergenzmass schliesslich kleiner als eine Zahl d, so kann man eine Stelle n ausfindig machen, von der ab die Beträge sämtlicher Reste $R_{n,k}$ unabhängig von k stets kleiner bleiben als d. Eine Reihe soll in einem Intervalle *im allgemeinen konvergent* heissen, wenn alle die Stellen, an denen das Divergenzmass grösser ist als eine bestimmte, beliebig zu fixierende Zahl δ in keinem noch so kleinen Teilintervalle überall dicht sind. Dies besagt, dass man in unmittelbarer Nähe einer jeden Stelle ein Intervall bestimmen kann, so dass für sämtliche Stellen in diesem Intervalle das Divergenzmass gleich oder kleiner ist als δ. Der Satz, welchen wir beweisen wollen, lautet nun: *Eine trigonometrische Reihe, welche in einem beliebigen Intervalle im allgemeinen konvergent ist, muss schliesslich verschwindende Koeffizienten haben, d. h. es muss* $\lim A_n = 0$ *und* $\lim B_n = 0$ *werden.*

Eine trigonometrische Reihe, für welche die Koeffizienten A_n und B_n nicht verschwindende Grenzwerte haben, kann zwar auch bei unendlich vielen Werten von x konvergieren, es giebt aber in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen, an denen sie divergiert, und zwar mit einem Divergenzmasse, das grösser ist als eine bestimmte endliche Zahl.

An jeder Stelle, wo das Divergenzmass kleiner wird als δ, kann man eine untere Grenze für den Index n bestimmen, so dass sämtliche Reihenglieder, deren Index gleich oder grösser als n ist, dem Betrage nach kleiner werden als δ. Da nun die Punkte, an denen das Divergenzmass grösser ist als δ, in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sein sollen, so kann man in unmittelbarer Nähe einer jeden Stelle ein Teilintervall bestimmen, in welchem kein Punkt liegt, an dem das Divergenzmass grösser ist als δ. Solch ein Intervall habe die Länge 2ε und erstrecke sich von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$.

Man kann dann also einen Wert für n bestimmen, so dass für diesen sowie für alle grösseren Werte die Glieder:

$$A_n \cos n(x + \varepsilon) + B_n \sin n(x + \varepsilon)$$
$$= (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon - (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon,$$
$$A_n \cos n(x - \varepsilon) + B_n \sin n(x - \varepsilon)$$
$$= (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon + (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon$$

beide dem Betrage nach um eine bestimmte Grösse kleiner werden als δ. Es bedeutet dabei x einen Wert in beliebiger Nähe einer jeden Stelle, ε irgend einen Wert innerhalb des konstruierten Intervalles. Zu jedem Werte von ε kann eine andere Grenze für n gehören; es ist noch nicht gesagt, dass bei jedem Werte von ε derselbe Wert von n ausreicht.

Durch Addition und Subtraktion der beiden vorstehenden Grössen erkennt man, dass auch jede der Grössen

$$(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \cos n\varepsilon \quad \text{und} \quad (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \sin n\varepsilon$$

jedenfalls kleiner sein muss als 2δ. Multipliziert man die erste Gleichung mit $\sin nx \sin n\varepsilon$, die zweite mit $\cos nx \cos n\varepsilon$, so findet man durch Subtraktion, dass $B_n \sin 2n\varepsilon$ und analog, dass $A_n \cos 2n\varepsilon$ kleiner werden als $4\delta = \delta'$, also kurz gesagt kleiner gemacht werden können als eine beliebig vorgegebene Zahl δ'. Setzt man $2\varepsilon = \alpha$, so wird also für alle Werte von α in einem bestimmten Intervalle, dessen Grenzen wir mit a und b bezeichnen wollen, $\lim B_n \sin n\alpha$ und $\lim A_n \cos n\alpha$ kleiner als δ'. Für jeden Wert von α innerhalb des angegebenen Intervalles muss also die Reihe:

$$[B_n \sin n\alpha], \ldots [B_{n+k} \sin (n+k)\alpha], \ldots$$

schliesslich nur Glieder enthalten, deren Betrag kleiner ist als δ', und dies kann, wie nun bewiesen werden soll, nicht anders erfüllt sein, als wenn für einen bestimmten Wert von n an sämtliche Koeffizienten

$$[B_n], \quad [B_{n+1}], \ldots [B_{n+k}], \ldots$$

dem Betrage nach kleiner sind als δ'.

Denn nehmen wir an, dass dieses nicht der Fall ist, so kann man aus dieser Reihe eine andere herausheben:

$$B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots B_{n_k}, \ldots,$$

deren Glieder sämtlich gleich oder grösser sind als δ'. Dann liesse sich aber auch in dem angegebenen Intervall ein Wert α fixieren, für welchen $\lim [B_n \sin n\alpha]$ nicht kleiner wird als δ'. Aus der Reihe der wachsenden, ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$ hebe man eine neue Reihe heraus: $n'_1, n'_2, \ldots n'_k, \ldots$ so dass die Produkte $n'_1\alpha, n'_2\alpha, \ldots n'_k\alpha \ldots$ insgesamt von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ um weniger als eine beliebig kleine Grösse η abweichen. Wenn dieses möglich ist, so differiert auch $\sin n'\alpha$

beliebig wenig von dem Werte ± 1, und also der Betrag von $B_{n'} \sin n'\alpha$ beliebig wenig von einem Werte, der gleich oder grösser ist als δ'.

Man setze:

$$n_1 \alpha > y_1 \frac{\pi}{2} - \eta \quad \text{und} \quad n_1 \alpha < y_1 \frac{\pi}{2} + \eta$$

oder:

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1} < \alpha < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1};$$

y_1 bezeichnet eine ganze ungerade, zunächst noch unbestimmte Zahl. Der Wert von α fällt in das gegebene Intervall von a bis b, wenn:

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n_1}, \quad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n_1}$$

ist, oder

$$(n_1 a + \eta) \frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1 b - \eta) \frac{2}{\pi}.$$

Dieses Intervall enthält sicherlich eine ungerade Zahl y_1, wenn

$$[n_1(b - a) - 2\eta] \frac{2}{\pi} \geqq 2, \quad \text{also} \quad n_1 \geqq \frac{\pi + 2\eta}{b - a}$$

gewählt ist. Durch diese Forderung ist nur eine untere Grenze für die zu bildende Reihe n' fixiert, und in diesem Umstande liegt der Kern des ganzen Beweises. Hat man also aus der Reihe $n_1, n_2, \ldots$ die Zahl n'_1 und demgemäss y_1 diesen Ungleichungen entsprechend fixiert, so ist α auf das Intervall beschränkt, das kurz mit

$$a' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \eta}{n'_1}, \quad b' = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \eta}{n'_1}$$

bezeichnet sei und die Länge $\frac{2\eta}{n'_1}$ hat. In diesem Intervalle können wir nun wiederum α so aussuchen, dass für einen Wert n'_2, welcher grösser ist als n'_1 und in der Reihe $n_1, n_2, \ldots n_k \ldots$ vorkommt, die Ungleichung besteht:

$$\frac{y_2 \frac{\pi}{2} - \eta}{n'_2} < \alpha < \frac{y_2 \frac{\pi}{2} + \eta}{n'_2}.$$

Die ungerade Zahl y_2 muss der Bedingung genügen:

$$(n'_2 a' + \eta) \frac{2}{\pi} < y_2 < (n'_2 b' - \eta) \frac{2}{\pi},$$

und dieses Intervall enthält sicherlich eine ungerade Zahl, sobald:

$$[n'_2(b'-a')-2\eta]\,\frac{2}{\pi} \geqq 2 \quad \text{oder} \quad n'_2 \geqq \left(\frac{\pi+2\eta}{b'-a'} = \frac{\pi+2\eta}{2\eta}\,n'_1\right)$$

gewählt ist. Auf diese Weise erhalten wir nun eine untere Grenze, nach welcher n'_2 aus der ursprünglichen Reihe $n_1, n_2, \ldots$ zu wählen ist, und nachdem y_2 der obigen Ungleichung gemäss fixiert ist, bleibt der Wert von α noch innerhalb eines Intervalles von der Länge $\frac{2\eta}{n'_2}$ willkürlich. In diesem Intervalle kann man ein neues bestimmen, so dass für eine Zahl $n'_3 > n'_2$ das Produkt $n'_3\alpha$ von einem ungeraden Vielfachen y_3 von $\frac{\pi}{2}$ um weniger als ε differiert, und indem man diesen Prozess fortsetzt, gewinnt man als Grenze eine Stelle α, für welche:

$$n'_1\alpha,\ n'_2\alpha,\ n'_3\alpha,\ \ldots$$

der aufgestellten Forderung stets genügt, so dass auch die Beträge von

$$B_{n'_1}\sin n'_1\alpha,\ B_{n'_2}\sin n'_2\alpha,\ B_{n'_3}\sin n'_3\alpha,\ \ldots$$

um eine beliebig kleine Grösse von δ' unterschieden sind. Es wird also $\lim B_n \sin n\alpha$ nicht um eine bestimmte Grösse kleiner als δ', d. h. die Reihe müsste in jedem noch so kleinen Intervalle ein Divergenzmass besitzen, das gleich oder grösser ist als δ'; sie wäre dann nicht unserer Definition entsprechend im allgemeinen konvergent. In derselben Weise ist der Beweis für die Koeffizienten A_n zu führen.

Soll eine Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe definiert ist, zugleich auch integrierbar sein, so muss diese Reihe auch im allgemeinen konvergieren. Denn anderen Falles würde die Funktion $f(x)$ in jedem kleinsten Intervalle unbestimmt werden, und die Schwankungen der Funktion, d. h. die Differenz der verschiedenen Werte, welche man an solch einer Stelle durch fortgesetzte Summation der Reihenglieder erhält, bliebe dabei grösser als eine endliche Zahl δ'. Bei einer integrierbaren Funktion aber müssen alle die Stellen, an denen die Schwankungen grösser sind als eine endliche Zahl δ', sich in Intervalle einschliessen lassen, deren Summe beliebig klein wird, sie können also nicht überall dicht über ein noch so kleines endliches Intervall verteilt sein. Sonach hat man den Satz: *In jeder trigonometrischen Reihe werden, wenn sie eine integrierbare Funktion definiert, die Koeffizienten zuletzt unendlich klein, d. h. es ist* $\lim A_n = 0$ *und* $\lim B_n = 0$ *für* $n = \infty$.

9. Die zweite von Riemann (Ges. Werke, pag. 231 flg.) erkannte Eigenschaft einer jeden trigonometrischen Reihe, deren Koeffizienten zuletzt unendlich klein werden, ist die folgende:

Bildet man aus der Reihe:

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

deren Wert an jeder Stelle, wo sie konvergiert, mit $f(x)$ bezeichnet sei, durch zweimalige gliedweise Integration die Reihe:

$$\frac{1}{4} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

so konvergiert diese Reihe bei allen Werten von x und stellt im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ eine stetige Funktion $F(x)$ dar. Diese stetige Funktion hat erstlich die Eigenschaft, dass:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x)$$

wird bei allen Werten von x, an denen $f(x)$ einen bestimmten Wert hat, und dass dieser Grenzwert jedenfalls innerhalb der Schwankungen des Reihenwertes liegt an einer Stelle, an welcher die Reihe divergiert; ferner die Eigenschaft, dass:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha} = 0$$

wird bei allen Werten von x.

Die Konvergenz der neuen Reihe und ihre Stetigkeit erkennt man, wenn man die Summe aller Glieder bis einschliesslich derer mit dem Index n durch N, den Rest der Reihe, d. h.

$$-\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

mit R, und den grössten Wert von $A_k \cos kx + B_k \sin kx$ für $k > n$ mit ε bezeichnet. Alsdann bleibt der Betrag des Restes offenbar kleiner als:

$$\varepsilon \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots\right] < \frac{\varepsilon}{n},$$

und kann also in beliebig kleine Grenzen eingeschlossen werden, wenn man nur n hinreichend gross nimmt. Die trigonometrische Reihe ist demnach bei allen Werten von x eine gleichmässig konvergente, und daraus folgt dann auch, dass $F(x)$ stetig ist. Denn man kann die Differenz $F(x \pm \Delta x) - F(x)$ beliebig klein machen, wenn man zuerst n so gross wählt, dass R, welche Werte auch x und $x \pm \Delta x$ haben mögen, beliebig klein ist, und alsdann Δx so fixieren, dass auch die Differenz der Werte von N für x und $x \pm \Delta x$ beliebig klein ist.

Man bilde den Quotienten:

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Wenn nun:

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx=f(x)$$

ist, wobei $f(x)$ entweder einen bestimmten Wert bezeichnet oder einen unbestimmten Wert, der innerhalb des Wertevorrates der Reihensumme an der Stelle x liegt, so muss sich, wenn man die Reihe:

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{k=n-1}A_k\cos kx+B_k\sin kx=f(x)+\varepsilon_n$$

setzt, für eine beliebig gegebene Grösse δ ein Wert m von n angeben lassen, so dass, wenn $n>m$ wird, $\varepsilon_n<\delta$ wird. Wir nehmen nun α so klein an, dass $m\alpha<\pi$ wird, und bringen ferner mittelst der Substitution

$$A_n\cos nx+B_n\sin nx=\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n$$

die obige Reihe auf die Form:

$$f(x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right].$$

Diese Reihe teilen wir in drei Teile, indem wir

1. die Glieder vom Index 1 bis m einschliesslich,
2. die Glieder vom Index $m+1$ bis zur grössten unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegenden ganzen Zahl, welche s heisse,
3. die Glieder vom Index $s+1$ bis ∞

zusammenfassen. Der erste Teil besteht aus einer endlichen Anzahl stetig sich ändernder Glieder und kann daher seinem Grenzwerte null beliebig genähert werden, indem man α hinreichend klein werden lässt; der zweite Teil ist, da der Faktor von ε_n beständig positiv ist, indem $\frac{\sin x}{x}$ in den ersten beiden Quadranten eine durchaus abnehmende Funktion ist, offenbar dem Betrage nach kleiner als:

$$\delta\left[\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right].$$

Im dritten Teile endlich zerlege man das allgemeine Glied in

$$\varepsilon_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

und

$$\varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right] = -\varepsilon_n \frac{\sin (2n-1)\alpha \sin \alpha}{(n\alpha)^2},$$

so leuchtet ein, dass dieses Glied kleiner ist als

$$\delta \left[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} - \frac{1}{n^2\alpha^2}\right] + \delta \frac{1}{n^2\alpha},$$

und folglich die Summe von $n = s + 1$ bis $n = \infty$ kleiner ist als

$$\delta \left[\frac{1}{s^2\alpha^2} + \frac{1}{s\alpha}\right].$$

Dieser Wert geht, da s die grösste unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegende ganze Zahl bedeutet, für ein unendlich kleines α über in

$$\delta \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right].$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

nähert sich daher mit abnehmendem α einem Grenzwert, der nicht grösser als

$$\delta \left[1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right]$$

sein kann, also da δ beliebig klein gemacht werden kann, null werden muss, und folglich konvergiert

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2},$$

welches gleich

$$f(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \left[\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right]$$

ist, wenn α nach null konvergiert gegen $f(x)$, womit die aufgestellte Eigenschaft bewiesen ist; $f(x)$ bedeutet dabei einen Wert innerhalb des Wertevorrates der ursprünglichen Reihe an der Stelle x, also wenn die Reihe an dieser Stelle konvergiert, diesen bestimmten Wert.

Es soll nun noch gezeigt werden, dass

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{2\alpha}$$

null wird und zwar gleichmässig nach null konvergiert, d. h. bei allen Werten von x durch Wahl eines hinreichend kleinen Wertes von α kleiner gemacht werden kann als eine beliebig vorgegebene Zahl. Um dieses zu beweisen, teile man die Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

in drei Gruppen, von denen die erste alle Glieder bis zu einem festen Index m enthält, von dem an die Koeffizienten A_n und B_n immer kleiner als ε bleiben; die zweite alle folgenden Glieder, für welche $n\alpha$ gleich oder kleiner ist als eine feste Grösse c, die dritte den Rest der Reihe umfasst. Die Summe der ersten endlichen Gruppe bleibt endlich, d. h. sie ist bei allen Werten von x kleiner als eine endliche Zahl Q. Die Summe der zweiten Gruppe ist kleiner als

$$2\varepsilon \sum_{m+1}^{s} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Die Anzahl der Glieder in dieser Summe ist kleiner als s, und daher ist diese Summe kleiner als $2\varepsilon \dfrac{c}{\alpha}\cdot$ Die dritte Summe endlich ist kleiner als

$$2\varepsilon \sum_{s+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 < 2\varepsilon \sum_{s+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\alpha^2} < \frac{2\varepsilon}{\alpha c}\cdot$$

Folglich bleibt

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{2\alpha} < 2\left[Q\alpha + 2\varepsilon\left(c + \frac{1}{c}\right)\right]$$

bei allen Werten von x, woraus der behauptete Satz folgt.

10. Auf Grund des Ergebnisses in dem letzten Paragraphen hat man nun das Problem zu behandeln (du Bois-Reymond, Abhandlungen der k. bayerisch. Akad. der W., II. Kl., Bd. 12): Wenn man von einer in einem bestimmten Intervalle stetigen Funktion $F(x)$ weiss, dass ihr zweiter mittlerer Differentialquotient, nämlich:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$$

an jeder Stelle gleich ist einer integrierbaren Funktion $f(x)$, d. h. an allen Stellen, wo die Funktion $f(x)$ einen bestimmten Wert hat, ebenfalls diesen Wert besitzt, an denjenigen dagegen, wo $f(x)$ unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen ist, einen bestimmten oder unbestimmten Wert besitzt, der innerhalb der nämlichen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, kann man dann umgekehrt von der Funktion $F(x)$ behaupten, dass sie sich durch zweimalige Integration aus $f(x)$ ableiten lässt, dass also die Gleichung besteht:

$$F(x) = F_1(x) + Cx + C',$$

wobei

$$F_1(x) = \int_a^x f(y)(x-y)\,dy$$

C und C' bestimmte Konstanten sind, und α eine willkürlich fixierte Grösse bezeichnet.

Die aufgeworfene Frage ist leicht zu entscheiden, wenn wir annehmen, dass die Funktion $f(x)$ eine im allgemeinen stetige Funktion ist, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Unstetigkeit erleidet; für den allgemeinsten Fall, in dem von $f(x)$ nur bekannt ist, dass es eine integrierbare Funktion ist, die also auch unendlich werden kann, ist die Beantwortung schwieriger.

11. Wir stellen folgenden Hilfssatz voraus:

Weiss man von einer stetigen Funktion $\varphi(\mathrm{x})$, dass innerhalb eines gegebenen Intervalles der zweite mittlere Differentialquotient an allen Stellen den Wert null hat, so ist $\varphi(\mathrm{x})$ eine lineare Funktion von x mit konstanten Koeffizienten.

Das gegebene Intervall erstrecke sich von $x = a$ bis $x = b$; man bilde:

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

und

$$\chi(x) = \pm\,\psi(x) - \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x),$$

wobei δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Es ist nun

$$\frac{\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \pm\frac{\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + \delta$$

ein Wert, der an jeder Stelle des für $\varphi(x)$ gegebenen Intervalles schliesslich positiv wird für $\Delta x = 0$, denn der Differenzenquotient der Funktion $\varphi(x)$ wird durch Wahl von Δx beliebig klein. Hieraus folgt, dass die stetige Funktion $\chi(x)$, welche an den beiden Endpunkten des Intervalles a und b den Wert null hat, im Innern des Intervalles kein Maximum besitzen kann. Denn wenn x_1 eine Stelle bezeichnet, an welcher dieses Maximum liegt, so ist

$$\chi(x_1 + \Delta x) - \chi(x_1) \leqq 0, \quad \chi(x_1 - \Delta x) - \chi(x_1) \leqq 0;$$

es wird dann

$$\chi(x_1 + \Delta x) - 2\chi(x_1) + \chi(x_1 - \Delta x) \leqq 0,$$

nicht aber positiv; daraus folgt, dass die stetige Funktion $\chi(x)$ im ganzen Intervalle von a bis b nicht positiv werden kann; also ist:

$$\pm \psi(x) - \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < 0$$

oder:

$$\pm \psi(x) < \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < \frac{\delta}{2}(b-a)^2.$$

Da δ beliebig klein ist, so folgt hieraus, dass auch der Betrag von $\psi(x)$ beliebig klein wird, d. h. dass

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{b-a}[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

ist.

12. Bezeichnet man nun die Differenz zwischen den im § 10 definierten Funktionen $F(x) - F_1(x)$ mit $\varphi(x)$, so ist:

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} - \lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2},$$

und es wird:

$$\frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\int_0^{\Delta x}[f(x+\alpha) + f(x-\alpha)](\Delta x - \alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{f(x+\theta\,\Delta x) + f(x-\theta\,\Delta x)}{2},$$

wenn man mit $f(x+\theta\,\Delta x)$ und $f(x-\theta\,\Delta x)$ mittlere Werte bezeichnet, welche innerhalb der Werte der Funktion $f(x)$ in den Intervallen von x bis $x+\Delta x$ und x bis $x-\Delta x$ gelegen sind. Betrachtet man zunächst solche Intervalle, in denen die Funktion $f(x)$ keine sprungweisen Wertänderungen erleidet, vielmehr durchaus stetig ist, so wird für jede Stelle in denselben:

$$\lim \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2} - \lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2} = f(x) - \lim \frac{f(x+\theta\,\Delta x) + f(x-\theta\,\Delta x)}{2},$$

also gleich null; mithin ist in jedem dieser Intervalle die Differenz

$$F(x) - F_1(x)$$

eine lineare Funktion: $Cx + C'$.

Betrachtet man aber ein Intervall, in welchem die Funktion $f(x)$ eine sprungweise Wertänderung erleidet, während sie zu beiden Seiten dieser Stelle stetig ist, so wird auch hier überall $\lim \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x^2}$ gleich null; denn an der Sprungstelle $x = c$ ist $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ gleich $\frac{1}{2}[f(c+0) + f(c-0)]$, und denselben Wert erhält auch $\lim \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\Delta x^2}$.

13. Diese Ergebnisse führen zu dem Satze: Ist durch die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

eine im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ im allgemeinen stetige Funktion $f(x)$ definiert, welche nur an vereinzelten Stellen sprungweise Unstetigkeiten erleidet, so besteht bei allen Werten von x die Gleichung:

$$\frac{1}{4} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \int_{-\pi}^{x} f(y)(x-y)\,dy + Cx + C'.$$

Bezeichnet man das Integral auf der rechten Seite kurz mit $F_1(x)$, so folgt, weil die auf der linken Seite stehende Summe eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist:

$$F_1(x+2\pi) + C(x+2\pi) + C' - \frac{1}{4} A_0 (x+2\pi)^2 = F_1(x) + Cx + C' - \frac{1}{4} A_0 x^2$$

oder

$$F_1(x+2\pi) = F_1(x) - 2C\pi + A_0(x\pi + \pi^2),$$

und weil für $x = -\pi$ die Funktion $F_1(x)$ verschwindet, so ist

$$F_1(\pi) = -2C\pi.$$

Aus derselben Gleichung folgt, wenn man sie nach x differentiiert:

$$F'_1(x+2\pi) = F'_1(x) + A_0\pi,$$

also für $x = -\pi$:

$$F'_1(\pi) = F'_1(-\pi) + A_0\pi = A_0\pi.$$

Da die neu gebildete Reihe eine gleichmässig konvergente ist, so kann sie gliedweis integriert werden. Man findet sonach die Relationen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + Cx + C'] \sin nx\,dx = -\frac{1}{n^2} B_n \pi,$$

denn es ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \sin nx\,dx = \left[\frac{-x^2 \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x \cos nx\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2 \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\,dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[F_1(x)+Cx+C']\cos nx\,dx = -\frac{1}{n^2}A_n\pi + (-1)^n\frac{A_0}{n^2}\pi,$$

denn es ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x^2\cos nx\,dx = \left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{n}\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n.$$

Die Funktion $F_1(x)$ besitzt eine stetige Ableitung und sonach wird vermittelst teilweiser Integration das erste Integral gleich:

$$\left[-\frac{\cos nx}{n}[F_1(x)+Cx+C']\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}[F'_1(x)+C]\cos nx\,dx.$$

Aber auch dieses Integral lässt die teilweise Integration zu, weil $F'_1(x)$ stetig ist, und die integrierbare Ableitung $f(x)$ besitzt; demnach folgt:

$$-\frac{1}{n^2}B_n\pi$$

$$= \left[-\frac{\cos nx}{n}[F_1(x)+Cx+C']\right]_{-\pi}^{+\pi} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}[F'_1(x)+C]\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Die Werte in den Klammern verschwinden, und man erhält:

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Sonach ist der Satz bewiesen: *Ist durch eine trigonometrische Reihe eine im allgemeinen stetige Funktion* f(x) *definiert, welche nur an vereinzelten Stellen eine sprungweise Wertänderung besitzt, so ist die Reihe eine Fouriersche.*

Bemerkung. Um den Satz in seiner allgemeinsten Fassung zu beweisen, d. h. nur unter der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$, welche durch die trigonometrische Reihe definiert ist, integrierbar ist, woraus nach § 8 hervorgeht, dass die Koeffizienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, muss man wiederum den Nachweis führen, dass die durch zweimalige gliedweise Integration aus der gegebenen abgeleiteten Reihe gleich

$$\int_{-\pi}^{x} f(y)\,(x-y)\,dy + Cx + C'$$

wird. Alsdann bleiben die weiteren Schlüsse des letzten Paragraphen bestehen. Zu dem Zwecke hat man den Satz zu beweisen: Wenn eine stetige Funktion die Eigenschaft hat, dass ihr zweiter mittlerer Differentialquotient $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x^2}$ gleich wird einer integrierbaren Funktion $f(x)$, die zugleich auch Stellen besitzen kann, an denen sie unendlich wird, so ist $F(x)$ durch zweimalige Integration aus $f(x)$ bis auf eine lineare Funktion darstellbar. Dieser Satz lässt sich in der That beweisen, wenn, was hier der Fall ist, die Bedingung hinzukommt, dass $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\Delta x}$ allenthalben gleich null wird, und wenn noch die Voraussetzung gemacht wird, dass die Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$ isoliert sind, oder nur eine „abzählbare" Menge bilden. (Math. Annal. Bd. 23, pag. 266, Bd. 24, pag. 246.)

Ebenso kann man den im § 7 erwähnten Satz beweisen: Wenn eine Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten mit den Integralen einer Funktion $f(x)$ gebildet sind, schliesslich verschwindende Koeffizienten erhält, so stimmt der Wert der Reihe überall, wo sie konvergiert, mit dem Werte $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ überein, vorausgesetzt, dass dies überhaupt ein bestimmter Wert ist, und an jeder Stelle, wo die ursprüngliche Reihe divergiert, jedoch mit endlichem Divergenzmasse, liegt der Wert von $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ innerhalb der Schwankungen der Reihe an dieser Stelle, oder die Unbestimmtheitsgrenzen dieses Ausdruckes fallen nicht ausserhalb der Schwankungen der Reihe.

Endlich kann man auch das allgemeine Theorem beweisen: Eine Funktion $f(x)$, welche durch eine trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten zuletzt unendlich klein werden, definiert ist, kann nicht durch eine andere von dieser verschiedene, trigonometrische Reihe dargestellt werden, wenn man von diesen beiden

Reihen entweder verlangt, dass sie bei allen Werten von x übereinstimmen sollen, oder auch nur, dass ihre Differenz im allgemeinen null ist, und erstlich nur an Stellen, welche eine *diskrete* Menge bilden, endlich und dem Betrage nach grösser ist als eine beliebig kleine endliche Zahl δ (resp. zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, deren Beträge grösser sind als δ), zweitens nur an Stellen, welche eine *reduktible* Menge bilden, unendlich wird (resp. zwischen Unbestimmtheitsgrenzen liegt, deren Betrag unendlich gross wird).

14. Im § 6 haben wir gewisse Bedingungen erkannt, unter denen eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ irgendwie definierte, integrierbare Funktion $f(x)$ durch eine Fouriersche Reihe von der Form:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha + \sin kx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha\right]$$

dargestellt werden kann, so dass bei jedem Werte von x innerhalb dieses Intervalles die Reihe entweder den Wert $f(x)$ oder den Wert $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ erhält. Kehren wir nun zu der im § 2 genannten allgemeineren Voraussetzung zurück, dass eine Funktion $f(z)$ im Intervalle von $-l$ bis $+l$ gegeben ist, so erhalten wir für diese Funktion unter denselben Bedingungen eine trigonometrische Darstellung, indem wir

$$z = \frac{xl}{\pi}, \quad f(z) = f\left(\frac{xl}{\pi}\right) = \varphi(x)$$

substituieren. Alsdann wird

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k\cos kx + B_k\sin kx$$

und

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(z)\,dz,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\cos kx\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\sin kx\,dx = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{+\pi} f(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

folglich:

$$1)\left\{\begin{aligned}&f(z)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\alpha)\,d\alpha\\&+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos\frac{k\pi z}{l}\int_{-l}^{+l}f(\alpha)\cos\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha+\sin\frac{k\pi z}{l}\int_{-l}^{+l}f(\alpha)\sin\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha\right].\end{aligned}\right.$$

Ist die Funktion $f(z)$ so beschaffen, dass sie im Intervalle von $-l$ bis 0 dieselben Werte wie im Intervalle von $+l$ bis 0 hat, so werden die Integrale $B_k=0$, und die Gleichung reduziert sich auf die Form:

$$2)\quad f(z)=\frac{1}{l}\int_0^l f(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos\frac{k\pi z}{l}\int_0^l f(\alpha)\cos\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Ist aber $f(-z)=-f(z)$, so werden die Integrale $A_k=0$, und man erhält:

$$3)\qquad f(z)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\frac{k\pi z}{l}\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{k\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Diese Darstellungen einer sogenannten willkürlichen Funktion beziehen sich immer auf ein *endliches*, wenn auch beliebig grosses Intervall. Es entsteht daher schliesslich noch die Frage, ob man auch für eine Funktion, die für das ganze Intervall von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ irgendwie definiert ist, eine einheitliche analytische Darstellung dieser Art gewinnen kann. In der That lässt sich dieselbe zunächst durch eine naheliegende Schlussfolgerung vermuten und sodann streng beweisen.* Man setze:

$$\int_{-l}^{+l}f(\alpha)\cos q\alpha\,d\alpha=\varphi(q),\qquad\int_{-l}^{+l}f(\alpha)\sin q\alpha\,d\alpha=\psi(q),$$

ferner:

$$\frac{\pi}{l}=\delta,\quad\text{also}\quad\frac{1}{l}=\frac{\delta}{\pi},$$

so erhält die Reihe 1), in welcher x statt z geschrieben wird, die Form:

$$f(x)=\frac{\delta}{2\pi}\varphi(0)+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\delta}{\pi}\left[\cos(kx\delta)\varphi(k\delta)+\sin(kx\delta)\,\psi(k\delta)\right].$$

Lässt man nun l unbegrenzt wachsen, wobei δ nach null konvergiert, so steht zu erwarten, dass die Summe rechts übergeht in das bestimmte Integral

* Ich befolge dabei im wesentlichen die Methode, welche Herr C. Neumann in seiner Schrift: Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen (Leipzig 1881) pag. 54—70, ausgebildet hat.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[\cos(qx)\,\varphi(q)+\sin(qx)\,\psi(q)]\,dq,$$

oder weil für $l=\infty$:

$$\varphi(q)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha,\quad \psi(q)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\sin(q\alpha)\,d\alpha$$

wird, dass die Gleichung besteht:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dq\left(\cos(qx)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos(q\alpha)\,d\alpha+\sin qx\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\sin(q\alpha)\,d\alpha\right),$$

das heisst:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dq\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos q(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Diese Gleichung, die *Fouriersche Integralformel,* ist zu beweisen.

15. Der im § 3 bewiesene Satz, welcher das Fundament für alle diese Untersuchungen bildet, lässt sich in allgemeinster Weise so aussprechen:

Ist f(x) *eine in einem beliebigen aber endlichen Intervalle von* a *bis* b *überall endliche und integrierbare Funktion, so wird:*

$$\lim\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad \textit{und} \quad \lim\int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

für $n=\infty$ *gleich null, wenn die Zahl* n *in beliebiger Weise über jeden Betrag hinaus wächst.*

Denn da früher dieser Satz bewiesen wurde, falls n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so erkennt man leicht, wenn n von der Form $m+\beta$ ist, wobei m eine ganze Zahl, β eine Zahl kleiner als 1 bedeutet, so wird:

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=\int_a^b f(x)\sin mx\cos\beta x\,dx+\int_a^b f(x)\cos mx\sin\beta x\,dx$$

und

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=\int_a^b f(x)\cos mx\cos\beta x\,dx-\int_a^b f(x)\sin mx\sin\beta x\,dx$$

und die rechten Seiten konvergieren mit wachsenden Werten von m nach null.

Daraus folgt nun wie früher: *Der Grenzwert des Integrales*

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

für $q=\infty$ *hängt nur ab von dem Verhalten der Funktion* $f(x)$ *in unmittelbarer Umgebung der Stelle* x_1.

Liegt x_1 ausserhalb des Intervalles von a bis b, so wird dieser Grenzwert gleich null; liegt dagegen x_1 innerhalb des Intervalles, so wird der Grenzwert gleich:

$$\frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

vorausgesetzt, dass eine der im § 6 als hinreichend erkannten Bedingungen erfüllt ist. Fällt endlich x_1 mit einer der Grenzen a oder b des Integrationsintervalles zusammen, so ist unter denselben Bedingungen der Grenzwert des Integrales gleich $\frac{1}{2}\,f(a+0)$ oder $\frac{1}{2}\,f(b-0)$.

16. Der vorstehende Satz besteht aber auch unter gewissen Bedingungen, wenn die Grenzen des Integrales unendlich werden. Lässt man zuerst b unendlich werden, betrachtet also das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_a^w f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

so muss, damit der obige Satz seine Geltung behält, erstlich dieses Integral bei jedem endlichen Werte von q einen bestimmten Wert haben, zweitens muss, nachdem $u > x_1$ angenommen ist,

$$\frac{1}{\pi}\int_u^w f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

entweder bei festem Werte von u durch Wahl von q, oder durch Wahl von u unabhängig von q kleiner als eine beliebig kleine Grösse δ gemacht werden können, wie gross auch $w > u$ gewählt werden mag.

Für diese Forderungen lassen sich hinreichende Bedingungen angeben, die in einfacheren Aussagen über die Funktion $f(x)$ bestehen.

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schliesslich keine Oscillationen mehr macht, sondern von einem bestimmten Werte für x an entweder beständig wachsend, oder beständig abnehmend einer bestimmten endlichen Grenze für $x = \infty$ zustrebt, so ist nach dem zweiten Mittelwertsatze (§ 463):

$$\int_u^w f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} = f(u) \int_u^{u+\theta(w-u)} \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx,$$

falls die Beträge der Funktion $f(x)$ im Intervalle von u bis ∞ nicht zunehmen, und

$$\int_u^w f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = f(w) \int_{u+\theta(w-u)}^w \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx,$$

falls die Beträge der Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von u bis ∞ nicht abnehmen. Die beiden Integrale rechts aber werden, wenn u fixiert ist, durch Wahl von q beliebig klein, wie gross auch w gewählt ist.

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, aber $\dfrac{f(x)}{x - x_1}$ absolut integrierbar ist. Denn es ist alsdann:

$$\int_u^\infty f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx < \int_u^\infty \operatorname{abs}[f(x)] \frac{dx}{x - x_1},$$

und dieser Ausdruck wird durch Wahl von u bei jedem Werte von q beliebig klein.

Drittens: Wenn $f(x)$ für $x = \infty$ endlich bleibt und eine Ableitung besitzt, die im Intervalle bis $x = \infty$ absolut integrierbar ist. Denn es ist:

$$\int_u^w f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = \left[f(x) \int_u^x \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx \right]_u^w - \int_u^w f'(x)\, dx \int_u^x \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx,$$

also:

$$\int_u^\infty f(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = f(\infty) \int_u^\infty \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx - \int_u^\infty f'(x)\, dx \int_u^x \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx,$$

oder gleich:

$$f(\infty) \int_u^\infty \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx - \int_u^\infty f'(x)\, dx \int_{q(u-x_1)}^{q(x-x_1)} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Das Integral $\int\limits_{q(u-x_1)}^{q(x-x_1)} \frac{\sin z}{z}\,dz$ ist jedenfalls nicht grösser als der Wert $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz$ (§ 466, Nr. 2). Bezeichnet man diesen Wert mit a, so ist der Betrag des zweiten Integrales kleiner als

$$a\int\limits_u^{\infty} \operatorname{abs}[f'(x)]\,dx,$$

es wird also ebenso wie das erste Integral der rechten Seite durch Wahl von u beliebig klein, wie gross auch q werden mag.

Unter gleichartigen Bedingungen für die untere Grenze $-\infty$ besteht dann der Satz:

$$\lim \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$$

für jeden endlichen Wert von x_1.

17. Von dem behandelten einfachen Integrale kann man nun leicht zu einem zweifachen Integrale übergehen. Es ist:

$$\int\limits_0^q \cos q(x-x_1)\,dq = \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1},$$

also ist:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\int\limits_0^q \cos q(x-x_1)\,dq = \int\limits_a^b f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx.$$

Auf der linken Seite kann man, da $f(x)$ integrierbar ist, die Folge der Integrationen vertauschen, und demnach wird:

$$\int\limits_0^q dq\int\limits_a^b f(x)\cos q(x-x_1)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

und folglich besteht der Satz:

$$\lim_{q=\infty}\int\limits_0^q dq\int\limits_a^b f(x)\cos q(x-x_1)\,dx$$

ist gleich null, wenn x_1 ausserhalb des Intervalles von a bis b liegt, dagegen gleich $\frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$, wenn x_1 innerhalb dieses Intervalles liegt. Ist $x_1 = a$ oder b, so ist der Grenzwert bezüglich gleich $\frac{1}{2} f(a+0)$ oder $\frac{1}{2} f(b-0)$.

Diese Formel gilt auch, wenn a und b unendlich werden, vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ im unendlichen die im § 17 als hinreichend erkannten Eigenschaften besitzt; es ist alsdann:

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)] = \lim_{q=\infty} \lim_{\substack{b=+\infty \\ a=-\infty}} \frac{1}{\pi}\int_0^q dq \int_a^b f(x) \cos q(x-x_1)\, dx.$$

Hierbei ist die Reihenfolge der Grenzprozesse zu beachten. Es ist zuerst das zweifache Integral zwischen endlichen Grenzen zu bilden, sodann sind a und b unendlich, und schliesslich q unendlich zu setzen. Man kann auch zuerst q unendlich werden lassen, wenn man a und b so bestimmt hat, dass der Punkt x_1 eingeschlossen wird; wesentlich nach dem bisherigen Beweisgang aber ist, dass zuerst das Doppelintegral mit endlichen Grenzen gebildet wird.

18. Schliesslich bleibt nur noch die Frage: Unter welchen Bedingungen gilt nun auch die Gleichung:

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos q\,(x-x_1)\, dx,$$

welche wir oben als die **Fouriersche** Integralformel bezeichnet haben? Setzt man:

$$\int_0^q dq \int_a^b f(x) \cos q\,(x-x_1)\, dx = U, \qquad \int_a^b f(x) \frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\, dx = V,$$

so ist bei jedem endlichen Werte von b:

$$U = V.$$

Setzt man ferner:

$$\int_0^q dq \int_a^\infty f(x) \cos q\,(x-x_1)\, dx = U', \qquad \int_a^\infty f(x) \frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\, dx = V',$$

so ist

$$V' = \lim V \quad \text{für} \quad b = \infty.$$

Damit nun auch die Gleichung $U' = V'$ bestehen bleibe, muss

$$U' = \lim U \quad \text{für} \quad b = \infty$$

sein, d. h. es muss

$$\int_0^q dq \int_a^\infty f(x) \cos q(x - x_1)\, dx = \lim_{b=\infty} \int_0^q dq \int_a^b f(x) \cos q(x - x_1)\, dx.$$

Diese Gleichung erfordert einerseits, dass die rechte Seite überhaupt eine bestimmte Grenze hat, was der Fall ist, sobald sich eine untere Grenze u ausfindig machen lässt, so dass für jeden Wert $w > u$:

$$\int_0^q dq \int_u^w f(x) \cos q(x - x_1)\, dx$$

kleiner wird als eine beliebig vorgegebene Grösse δ; andererseits dass

$$\int_u^\infty f(x) \cos q(x - x_1)\, dx$$

ein bestimmter Wert ist, dessen Integral nach q beliebig klein ist, wenn u hinreichend gross gewählt wird. Unter q ist dabei eine endliche bestimmte Grösse zu verstehen.

Auch hierfür lassen sich wiederum hinreichende Bedingungen angeben, durch welche die zuletzt gefundenen drei eingeschränkt werden.

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schliesslich keine Oscillationen mehr macht, sondern von einem bestimmten Werte für x an entweder beständig wachsend oder beständig abnehmend für $x = \infty$ *nach null* konvergiert und dabei integrierbar ist. Denn alsdann ist

$$\int_u^w f(x) \cos q(x - x_1)\, dx = f(u) \int_u^{u+\theta(w-u)} \cos q(x - x_1)\, dx$$

$$= f(u) \left[\frac{\sin q(x - x_1)}{q} \right]_u^{u+\theta(w-u)},$$

also

$$\int_0^q dq \int_n^w f(x) \cos q(x - x_1)\, dx = f(u) \int_0^q \left[\frac{\sin q\,[u+\theta(w-u)-x_1]}{q} - \frac{\sin q(u - x_1)}{q} \right] dq$$

$$= f(u) \int_{q(u-x_1)}^{q[u+\theta(w-u)-x_1]} \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Dieser Wert ist, wie gross auch w werden mag, jedenfalls kleiner als

$$f(u) \int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\, dz$$

und wird also mit $f(u)$ kleiner als jede vorgegebene Grösse. Desgleichen ist auch nach dem ersten Mittelwertsatze:

$$\int_u^\infty f(x) \cos q\,(x - x_1)\, dx = M\,[\cos q\,(x - x_1)] \int_u^\infty f(x)\, dx,$$

also dem Betrage nach nicht grösser als

$$\operatorname{abs} \int_u^\infty f(x)\, dx.$$

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, aber dabei absolut integrierbar ist. Denn alsdann ist:

$$\int_u^w f(x) \cos q\,(x - x_1)\, dx < \int_u^\infty \operatorname{abs}\,[f(x)]\, dx.$$

Drittens: Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, die für $x = \infty$ nach null konvergiert und deren Ableitung $f'(x)$ absolut integrierbar ist. Denn es ist:

$$\int_u^w f(x) \cos q\,(x - x_1)\, dx = \left[f(x) \frac{\sin q\,(x - x_1)}{q}\right]_u^w - \frac{1}{q} \int_u^w f'(x) \sin q\,(x - x_1)\, dx,$$

also:

$$\int_0^q dq \int_u^w f(x) \cos q\,(x - x_1)\, dx = f(w) \int_0^q \frac{\sin q\,(w - x_1)}{q}\, dq - f(u) \int_0^q \frac{\sin q\,(u - x_1)}{q}\, dq$$

$$- \int_0^q \frac{dq}{q} \int_u^w f'(x) \sin q\,(x - x_1)\, dx.$$

Die beiden ersten Terme rechts werden mit $f(u)$ und $f(w)$ beliebig klein, der dritte ist gleich:

$$\int_u^w f'(x)\, dx \int_0^q \frac{\sin q\,(x - x_1)}{q}\, dq,$$

also kleiner als das Produkt von

$$\int_u^w \operatorname{abs}\,[f'(x)]\, dx \quad \text{mit} \quad \int_0^\pi \frac{\sin z}{z}\, dz,$$

welches durch Wahl von u beliebig klein wird.

Desgleichen ist:

$$\int_u^\infty f(x)\cos q\,(x-x_1)\,dx = \left[f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{q}\right]_u^\infty - \frac{1}{q}\int_u^\infty f'(x)\sin q\,(x-x_1)\,dx.$$

Der absolute Wert von $\dfrac{\sin q\,(x-x_1)}{q\cdot}$ ist bei allen Werten von q nicht grösser als eins, also wird die rechte Seite dem Betrage nach nicht grösser als

$$f(u) + \int^w \operatorname{abs}\,[f'(x)]\,dx.$$

Ist solch eine Bedingung auch für $x = -\infty$ erfüllt, so besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^q dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos q\,(x-x_1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{\sin q\,(x-x_1)}{x-x_1}\,dx.$$

Konvergiert nun q nach unendlich, so geht die rechte Seite in den Wert $\frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)]$ über, weil mit den Bedingungen dieses Paragraphen zugleich die Bedingungen im § 17 erfüllt sind. Sonach wird auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos q\,(x-x_1)\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)].$$

Unter den als ausreichend erkannten Bedingungen für die Giltigkeit dieser Gleichung wollen wir die beiden nochmals hervorheben, die für die Anwendung am wichtigsten sind. Die Fouriersche Integralformel gilt bei jedem Werte von x:

1. für jede stetige Funktion, die im Intervalle von $-\infty$ bis $+\infty$ an keiner Stelle, auch nicht im Unendlichen, unendlich viele Maxima und Minima hat und im ganzen unendlichen Intervalle integrierbar ist (solch eine Funktion verschwindet für $x = \pm\infty$);
2. für jede stetige Funktion, die für $x = \pm\infty$ den Wert null hat und deren Ableitung absolut integrierbar ist.

19. Die allgemeine Formel erhält eine speziellere Form, sobald $f(x)$ entweder eine paare oder eine unpaare Funktion ist; denn schreibt man dieselbe in der Form:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\cos qx \cos qx_1 + \sin qx \sin qx_1)\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

so folgt: ist $f(x) = f(-x)$, so wird für $x_1 > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dq \cos q\,x_1 \int\limits_0^\infty f(x) \cos qx\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)],$$

und ist $f(x) = -f(-x)$, so wird für $x_1 > 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dq \sin qx_1 \int\limits_0^\infty f(x) \sin qx\,dx = \frac{1}{2}\,[f(x_1+0)+f(x_1-0)].$$

Berichtigungen zum ersten Bande.

Seite 83, Zeile 11 v. o. statt f l. m.: $f^{(n)}$.

Seite 176, Zeile 1 v. u. statt $\frac{1}{2}\sin x_0$ l. m.: $-\frac{1}{2}\sin x_0$.

Seite 177. In dem Beweise des Lehrsatzes I und analog des Lehrsatzes II ist vorausgesetzt, dass für den Quotienten $f(x):F(x)$ in der Umgebung der Stelle $x=x_0$ der Mittelwertsatz gilt, und dass der Quotient $f'(x):F'(x)$ für $x=x_0$ einen bestimmten Grenzwert hat. Will man den Satz von diesen Voraussetzungen befreien, dagegen annehmen, dass an der Stelle x_0 bestimmte Werte der Ableitungen existieren, so kann man direkt

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}:\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

setzen, woraus unmittelbar folgt:

$$\lim_{x=x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Seite 193. § 134. Der Satz, dass das Verhältnis des Restes R_n zum vorangehenden Gliede $\frac{1}{n-1!}d^{n-1}u$ bei beliebiger Verkleinerung der Grössen $h, k, l, \ldots$ nach null konvergiert, gilt nur dann allgemein, wenn $d^{n-1}u$ eine *definite* Form ist, d. h. nur für das Wertsystem $h=0$, $k=0$, $l=0, \ldots$ verschwindet. Daraus folgt:

Seite 215. Das Kriterium des Minimum oder Maximum für den besonderen Fall, dass d^2f bei gewissen Werten von $h, k, \ldots$ verschwindet, im übrigen aber dasselbe Zeichen behält, ist nicht ausreichend. (Die vorstehenden Bemerkungen verdanke ich dem Werke von Genocchi: *Calcolo Differenziale, publicato dal Peano, Torino 1884.*) Vielmehr muss in diesem Falle *der absolute Wert des Verhältnisses von* $\frac{1}{3!}\mathrm{d}^3\mathrm{f}$ *zu* $\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\mathrm{f}$ *bei beliebig kleinen reellen Werten von* h, k, l, ... *beliebig klein bleiben,* und weiter muss d^4f für diejenigen Werte von $h, k, l, \ldots$, bei welchen d^2f verschwindet, dasselbe Vorzeichen haben, welches d^2f im übrigen besitzt. So hat z. B. die Funktion $x^2-x^3+y^3(y-x)$ im Nullpunkt ein Minimum, während die Funktion $(y^2-2px)(y^2-2qx)$, wobei $p>0$, $q>0$ ist, daselbst weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt.

Seite 321, Zeile 9 v. o. in der Formel für $\frac{d^2y_1}{dx_1^{\,2}}$ statt $x_1^{\frac{1}{3}}$ l. m.: $x_1^{\frac{4}{3}}$.

Seite 351, Zeile 8 v. u. statt $-\frac{\partial f}{\partial z}$ l. m.: $+\frac{\partial f}{\partial z}$.

Seite 545, Zeile 12 v. o. statt § 378 l. m.: § 387.

60,00