ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . .	H. BURKHARDT † (1896—1914), R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG UND W. WIRTINGER (1905—1912) IN WIEN.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN CLAUSTHAL I. H.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT (1899—1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE	K. SCHWARZSCHILD IN POTSDAM.
— VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK	H. E. TIMERDING IN BRAUNSCHWEIG.

BAND VI 2. HEFT 6.

AUSGEGEBEN AM 10. JUNI 1915.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1915.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **O. Hölder**-Leipzig, **F. Klein**-Göttingen, **V. v. Lang**-Wien, **W. Wirtinger**-Wien, **H. v. Seeliger**-München, **P. Stäckel**-Heidelberg

steht der Redaktion, die aus den Herren

R. Fricke-Braunschweig, **Ph. Furtwängler**-Wien, **F. Klein**-Göttingen, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **H. Mohrmann**-Clausthal i. H., **C. H. Müller**-Hannover, **K. Schwarzschild**-Potsdam, **A. Sommerfeld**-München und **H. E. Timerding**-Braunschweig

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens-Rostock
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Straßburg [i. E.
G. Bohlmann-Berlin
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber-Wien
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Netto-Gießen
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
C. Runge-Göttingen [a. M.
A. Schoenflies-Frankfurt
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff-St. Petersburg
E. Study-Bonn
K. Th. Vahlen-Greifswald
H. Weber (†)
A. Wiman-Upsala

II. Band:

P. Appell-Paris
M. Bocher-Cambridge, Mass.
E. Borel-Paris
P. Boutroux-Poitiers
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
A. Denjoy-Paris
G. Faber-Straßburg i. E.
M. Fréchet-Poitiers
R. Fricke-Braunschweig
J. Hadamard-Paris
H. Hahn-Czernowitz
J. Harkness-Montreal
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
K. Hensel-Marburg
E. Hilb-Würzburg
A. Kneser-Breslau
A. Krazer-Karlsruhe
L. Maurer-Tübingen
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
P. Montel-Paris [Mass.
W. F. Osgood-Cambridge,
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
A. Rosenthal-München
C. Runge-Göttingen
A. Sommerfeld-München
O. Toeplitz-Kiel
E. Vessiot-Lyon
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-Würzburg
Fr. A. Willers-Charlottenburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Zürich
L. Zoretti-Grenoble

III. Band:

G. Berkhan (†)
L. Berzolari-Pavia
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Breslau
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Bologna
G. Fano-Turin
C. Guichard-Paris
P. Heegaard-Kopenhagen
G. Kohn-Wien
H. Liebmann-München
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
H. v. Mangoldt-Danzig
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Müller-Wien
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn-Leipzig
H. Rothe-Wien
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies-Frankfurt
C. Segre-Turin [a. M.
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel-Heidelberg
O. Staude-Rostock
E. Steinitz-Breslau
A. Voss-München
M. Zacharias-Berlin
H. G. Zeuthen-Kopenhagen
K. Zindler-Innsbruck

IV. Band:

M. Abraham-Mailand
C. Cranz-Berlin
P. u. T. Ehrenfest-Leiden
S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
L. Föppl-Würzburg
Ph. Forchheimer-Graz
Ph. Furtwängler-Wien
M. Grübler-Dresden
M. Grüning-Köln
E. Hellinger-Frankfurt a. M.
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun-Karlsruhe
G. Jung-Mailand
Th. v. Kármán-Aachen
F. Klein-Göttingen
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Straßburg i. E.
C. H. Müller-Hannover
L. Prandtl-Göttingen
H. Reißner-Charlottenburg
A. Schoenflies-Frankfurt
P. Stäckel-Heidelberg [a. M.
O. Tedone-Genua
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Timpe-Münster i. W.
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
K. Wieghardt-Wien
G. Zemplén-Budapest

V. Band:

M. Abraham-Mailand
L. Boltzmann (†)
G. Bredig-Karlsruhe
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-Göttingen
H. Diesselhorst-Braunschwg.
Fr. Emde-Stuttgart
P. S. Epstein-München
R. Gans-La Plata [burg
F. W. Hinrichsen-Charlotten-
E. W. Hobson-Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
W. H. Keesom-Leiden
M. v. Laue-Frankfurt a. M.
Th. Liebisch-Berlin
H. A. Lorentz-Haarlem
L. Mamlock-Berlin
G. Mie-Greifswald
H. Minkowski (†)
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
F. Pockels (†)
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge-Göttingen [a. M.
A. Schoenflies-Frankfurt
M. Schröter-München
A. Sommerfeld-München
E. Study-Bonn
K. W. Wagner-Berlin
A. Wangerin-Halle
W. Wien-Würzburg
J. Zenneck-München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
G. H. Darwin (†)
F. Exner-Innsbruck
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Wien
F. R. Helmert-Potsdam
S. Hough-Kapstadt
E. v. Schweidler-Innsbruck
H. Meldau-Bremen
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
Schweydar-Potsdam
W. Trabert-Wien
E. Wiechert-Göttingen

VI, 2. Band

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger-Straßbg. i. E.
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-New-Haven
C. Ed. Caspari-Paris
F. Cohn-Berlin
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Leipzig
H. Kobold-Kiel
K. Laves-Chicago
F. R. Moulton-Chicago
G. v. Niessl-Wien
S. Oppenheim-Prag
K. Schwarzschild-Potsdam
E. Strömgren-Kopenhagen
K. Sundman-Helsingfors
E. T. Whittaker-Edinburgh
A. Wilkens-Kiel
C. W. Wirtz-Straßburg i. E.
H. v. Zeipel-Upsala

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a/S., Wettinerstraße 17 zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

VI 2, 14. THEORIE DES ERDMONDES.

Von

ERNEST W. BROWN

IN NEW HAVEN.

(Übersetzt und mit einigen Zusätzen versehen von **A. v. Brunn** in Danzig.)

Inhaltsübersicht.

22. Die indirekte Wirkung der Planeten.
23. Die säkularen Beschleunigungen.
24. Störungen zweiter Ordnung.
25. Andere mögliche störende Ursachen.
26. Der gegenwärtige Stand der Mondtheorie. Vergleich mit der Beobachtung.
27. Tafeln der Mondbewegung.

Bemerkung. Dieser Artikel behandelt ausdrücklich nur das Problem des Erdmondes. Er nimmt daher nur gelegentlich nebenbei Notiz von Entwicklungen, die zwar aus diesem Problem herstammen, aber entweder auf ähnliche himmlische Systeme oder überhaupt auf andere Probleme anwendbar sind; diese Dinge sind in IV 1, 12 und VI 2, 12, 13 u. 18 behandelt. Andrerseits sind auch Resultate, welche in jenen Artikeln entwickelt sind und auf die Mondtheorie angewandt werden können, im allgemeinen hier nicht wiederholt. Die Litteratur und die Methoden, die sich auf die Bestimmung der Konstanten aus Beobachtungen beziehen, gehören in den Artikel VI 2, 19.

Literatur.

Lehrbücher.

G. B. Airy, Mathematical tracts on physical Astronomy, Cambridge, 1. Aufl. 1826, 2. Aufl. 1831.

H. Godfray, Elementary treatise on the Lunar theory, London, 1. Aufl. 1853, 3. Aufl. 1871.

F. Tisserand, Traité de mécanique céleste 3, Paris 1894.

E. W. Brown, An introductory treatise on the Lunar theory, Cambridge 1896.

J. C. Adams, Lectures on the Lunar theory, Cambridge 1900.

H. Andoyer, Théorie de la Lune. Scientia, Paris 1902.

H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste 2, Paris 1909.

G. Boccardi, Elementi di Astronomia, Torifno, 1912.

Monographieen.

I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London, 1687.

A. C. Clairaut, Théorie de la Lune, 1. Aufl. St. Petersburg 1752, 2. Aufl. Paris 1765.

L. uler, Theoria motus Lunae exhibens omnes ejus inaequalitates (mit einem Additamentum), St. Petersburg 1753.

J. d'Alembert, Recherches sur différents points importants du système du Monde 1, Paris 1754.

L. Euler, Réflexions sur la variation de la Lune, Berl. Acad. Mem. 1766, p. 334—353.

— Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata etc., St. Petersburg 1772.

P. S. Laplace, Traité de mécanique céleste liv. 7, Paris 1802.

M. C. T. Damoiseau, Mémoire sur la théorie de la Lune, Paris mém. prés. 3 sér. 1 (1827), p. 313—598.

G. A. A. Plana, Théorie du mouvement de la Lune (3 Bde.), Turin 1832.

J. W. Lubbock, On the theory of the Moon and on the perturbations of the Planets. Lond. Phil. Trans. 1831, p. 217—66, 1832, p. 1—49, 229—236, 361—381, 601—607, 1834, p. 123—141 = Tracts on the theory of the Moon and on the perturbations of the Planets, London 1834, 1836, 1837, 1840 und, eine Diskussion vieler Fragen enthaltend, 1861.

S. D. Poisson, Mémoire sur le mouvement de la Lune autour de la Terre. Par. mém. prés. 3 sér. 13 (1835), p. 209—335.

P. A. Hansen, Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam Luna perlustrat, Gotha 1838.

P. G. D. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du Monde 4, Paris 1846.

J. C. Adams, On the secular variation of the Moons mean motion, Lond. Phil. Trans. 143 (1853), p. 397—406 = Collected works 1, p. 140—157.

C. Delaunay, Théorie du mouvement de la Lune, Paris mém. prés. 28 (1860) u. 29 (1867).

P. A. Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, Leipzig. Ges. Wiss. Abhdl. 6 (1862), p. 91—498, 7 (1864), p. 1—399.

V. Puiseux, Sur les principales inégalités de la Lune, Ann. éc. norm. sup. Paris, sér. 1 1 (1864), p. 39—80.

G. W. Hill, Researches in the Lunar theory, Amer. Journ. of Math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260 = Works 1, p. 284—335.

— On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and Moon, Cambridge U. S. A. 1877 = Acta math. 8 (1886), p. 1—36. = Works 1, p. 243—270.

J. C. Adams, On the motion of the Moons node etc., Lond. Astr. soc. Monthly Not. 38 (1877), p. 43—49. = Collected works 1, p. 181—188.

H. Gyldén, Die intermediäre Bahn des Mondes, Acta math. 7 (1885), p. 125—172.

G. B. Airy, Numerical Lunar theory, London 1886.

H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 Bde., Paris 1892, 1893, 1899.

Th. v. Oppolzer, Entwurf einer Mondtheorie etc., Wien Denkschr. 51 (1886), p. 69—105, 54 (1888), p. 49—244.

R. Radau, Recherches concernant les inégalités planétaires du mouvement de la Lune, Obs. de Paris ann., mém. 21 (1893), p. 1—114.

S. Newcomb, Action of the planets on the moon, Wash. Astron. Papers 5 (1894), p. 97—295.

E. W. Brown, Investigations in the lunar theory, Amer. Journ. of Math. 17 (1895), p. 318—358.

— Theory of the motion of the moon etc., Lond. Astr. soc. mem. 53 (1897), p. 39—116, (1899), p. 163—202, 54 (1900), p. 1—63, 57 (1905), p. 52—145, 59 (1908), p. 1—103.

H. Poincaré, Sur les équations de la lune, Paris bull. astr. 17 (1900), p. 167—204.

M. Brendel, Theorie des Mondes, Astron. Mitt. d. kgl. Stw. Göttingen 1905. = Gött. Math. Abh. N. F. Bd. 3, Nr. 4.

S. Newcomb, Investigation of Inequalities produced by the action of the planets, Carn. Inst. Publ. 72 (1907).

E. W. Brown, Inequalities produced by the direct action of the planets, Cambridge University Press XII u. 93 p. 1908.

---

1. Kurzer historischer Überblick.[1]) *I. Newton* (1687) selbst war der erste, der die Bewegungen des Mondes seinem Gesetz vom reci-

1) Nachweisungen siehe unten. Die Hauptquellen, aus denen man sich über die Geschichte der allgemeinen Astronomie unterrichten kann, sind *A. Gautier,*

proken Quadrat der Entfernung unterordnete, indem er aus ihm angenäherte Werte für die hauptsächlichsten Ungleichheiten und Bewegungen ableitete. Eine analytische Methode wandte zuerst *Clairaut* (1747) an, der den Kunstgriff gebrauchte, eine Ellipse mit beweglicher Apsidenlinie in die Gleichungen einzuführen; er erhielt eine zweite Annäherung für die Apsidenbewegung, welche zeigte, daß das *Newton*sche Gesetz allen Tatsachen genüge. Diese Theorie war numerisch. Eine ähnliche rein analytische Theorie arbeitete *d'Alembert* (1751) aus. 1753 publizierte *Euler* den ersten seiner zahlreichen Versuche, brauchbare analytische Darstellungen und Lösungen des Problems zu finden; er benutzte zum ersten Male bewegliche rechtwinklige Koordinatenachsen, die Variation der Konstanten, eine der *Hansens* analoge Methode, den Ausdruck der Koordinaten durch trigonometrische Funktionen der Zeit, Annäherungen zunächst nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen und erst dann nach Potenzen der störenden Kraft und unendlich unbestimmte Koeffizienten zur Aufstellung und Lösung von Bedingungsgleichungen, um so numerische Werte der willkürlichen Konstanten zu erhalten. *T. Mayer* gab, indem er *Euler*s Methode von 1753 benutzte und Theorie und Beobachtung vereinigte, in den Jahren 1753 und 1770 Tafeln heraus.

Laplace nahm den Gegenstand 1770 auf; seine Untersuchungen sind zum größten Teile im 3. Bande seiner Mécanique céleste (1802) enthalten. Er stellte die allgemeinen Bewegungsgleichungen auf, gab eine generelle Lösungsmethode, die er in beträchtlichem Umfange durchführte, und welche die von der Figur der Erde und der Anziehung der Planeten herrührenden Störungen berücksichtigte, wies auf die Bedeutung der langperiodischen und säkularen Terme hin und klärte die Ursache der Säkularbeschleunigung auf. *Damoiseau* (1827) und *Plana* (1832) entwickelten *Laplace*s Methode bis zu einem viel höheren Grade der Annäherung, jener numerisch, dieser analytisch.

„Essai historique sur le problème des trois corps", (Paris 1817) und die Einleitungen der hauptsächlichsten Monographieen sowie der Lehrbücher von *Tisserand* und *Brown*.

Die nach Gegenständen geordnete „Bibliographie générale de l'Astronomie" von *Houzeau* und *Lancaster* und das „Vademecum de l'Astronomie" von *Houzeau*, Brüssel 1882 und 1887 bzw. 1882, enthalten Titel und Verlagsort der meisten Bücher und Abhandlungen bis 1880. Zur Vervollständigung der mathematischen Kataloge enthält das Paris bull. astr. (seit 1884) ein Verzeichnis der meisten der im betreffenden Jahre erschienenen Werke. Endlich gibt (seit 1900) der „Astronomische Jahresbericht" von *Walther F. Wislicenus* ein nach Gegenständen geordnetes Verzeichnis nebst kurzer Besprechung der Publikationen.

De Pontécoulant und *Lubbock* begannen um 1830 ihre Untersuchungen unter Verwendung der Zeit als unabhängiger Veränderlicher; des ersteren vollständige Resultate wurden 1846 veröffentlicht. In ungefähr dieselbe Zeit fallen *Hansens* erste Publikationen seiner Methoden: Die „Fundamente usw.", die seine Theorie enthalten, erschienen 1838, die „Darlegung usw." mit seinen numerischen Resultaten 1862 und 1864 und die „Tafeln" 1857. *Poissons* Mémoire, welches die Variation der Konstanten anwendete, kam 1835 heraus. *Adams*' Abhandlung von 1853 zeigte, daß *Laplaces* theoretischer Wert der Säkularbeschleunigung trotz der scheinbaren Übereinstimmung mit der Beobachtung um die Hälfte seines Betrages falsch war. *Delaunay* kündigte seine Methode, die Variation des Konstanten anzuwenden, 1846 an und führte sie so weit durch, daß er (1867) eine analytische Entwicklung für die Sonnenstörungen bis einschließlich der Größen 7. Ordnung in der störenden Kraft erhielt, die Sonnenbahn als elliptisch vorausgesetzt. Die Anwendung seiner Methode auf planetarische und andere Ungleichheiten ist durch *Hill*, *Newcomb*, *Radau*, *Brown* und andre gemacht. *Airys* Versuch (1886), numerisch *Delaunays* Resultate zu verifizieren, schlug fehl. *Weiler* (1872), *Neison-Nevill* (1877) und *v. Oppolzer* (1887) haben ebenfalls allgemeine Methoden gegeben.

In *Hills* Schriften von 1877 trat die Idee hervor, eine periodische Bahn anstatt der Ellipse mit beweglicher Apsidenlinie als erste Annäherung zu benutzen. Indem er *Eulers* Gedanken einer Annäherung nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen aufnahm, erhielt er mit hoher Genauigkeit den Teil der Störungen, die von jenen unabhängig sind. Den gleichen Gedanken hatte *Adams* gehabt, dessen Abhandlung über die Bewegung des Knotens unmittelbar folgte. Die angedeutete Methode ist vollständig entwickelt durch *Brown*, der alle Terme einschließt, die Koeffizienten bis zum Betrage von 0″,01 liefern können, und diese auf 0″,001 genau rechnet. Die Anwendung periodischer Bahnen ist von *Poincaré* von der mathematischen Seite aus auf alle Gebiete der Himmelsmechanik ausgedehnt, und ähnliche Probleme sind von *Darwin*, *Schwarzschild* und anderen behandelt. *Gyldéns* Abhandlung aus dem Jahre 1886 zeigt die Anwendung seiner eigenen Methoden auf die Mondtheorie; *Brendel* (1905) und andere Autoren haben seine Methoden modifiziert und sein Werk fortgeführt, aber es ist nicht zu einer vollständigen Entwicklung gekommen. Im Jahre 1900 hat *Poincaré* eine allgemeine Methode gegeben, die auf der von *Hill* und *Brown* basiert. *Cowell* (1903—5) hat zahlreiche theoretische Koeffizienten durch eine direkte Analyse der Mondbeobachtungen verifiziert.

2. Verhältnis der Mondtheorie zum n-Körperproblem und zur Planetentheorie. Jeder Körper im Sonnensystem kreist scheinbar innerhalb einer ringförmigen Fläche um einen andern, der das Zentrum dieser Fläche einnimmt; letzterer (b) bestimmt den Hauptteil der Bewegung des ersteren (a), und die übrigen Körper (c) „stören" diese Bewegung in höheren oder geringerem Grade. In der Planetentheorie sind diese Körper: a ein Planet, b die Sonne, c die übrigen Planeten; in der Mondtheorie dagegen sind es: a der Mond, b die Erde, c die Sonne und die Planeten. Die Unterscheidung dieser beiden Probleme ist nur vorgenommen, um ihre analytischen Verschiedenheiten hervorzuheben. Es seien nämlich a und n mittlere Entfernung und mittlere Bewegung des gestörten Körpers um den Zentralkörper der Masse E; ebenso m', a', n' Masse, mittlere Entfernung und mittlere Bewegung des störenden Körpers. Dann erfordert die Lösung des Bewegungsproblems eine Entwicklung nach positiven oder negativen Potenzen von $\frac{a}{a'}, \frac{n}{n'}, \frac{m'}{E}$. In der Planetentheorie ist $\frac{m'}{E} < \frac{1}{1000}$, während $\frac{a}{a'}$ und $\frac{n}{n'}$ $\left(\text{oder } \frac{a'}{a}, \frac{n'}{n}\right)$ die Einheit erreichen können. In der Mondtheorie dagegen, wenn die Sonne der störende Körper ist, hat man:

$$\frac{m'}{E} = 330000; \quad \frac{a}{a'} = \frac{1}{400}, \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{13}$$

ungefähr. In jenem Fall ist die Schwierigkeit die, die merkbaren Glieder 1., selten 2. Ordnung in $\frac{m'}{E}$ zu erhalten, in diesem müssen viele Potenzen davon mitgenommen werden; und daß man im Mondproblem von einer solchen Entwicklung nach der störenden Masse, die ja die Einheit um mehr als das Dreihunderttausendfache übertrifft, überhaupt sprechen kann, hat nur dadurch einen Sinn, daß sich infolge der Eigentümlichkeit des Problems die Gesamtheit der Entwicklungen nach $\frac{m'}{E}$ und $\frac{a}{a'}$ tatsächlich auf eine solche nach $\left(\frac{n'}{n}\right)$ und $\frac{a}{a'}$, reduziert. Und weiter: Während die Apsiden- und Knotenbewegungen der Planeten so langsam vor sich gehen, daß Ausdrücke der Form

$$\sum (A + Bt + \cdots) \sin (\alpha t + \beta), \quad \text{wo} \quad \alpha = in + jn',$$

zur Darstellung der Elemente für sehr lange Zeit genügen, würden solche für den Mond schon nach Ablauf einiger Monate unbrauchbar werden: Man muß daher so verfahren, daß die Zeit nur in trigonometrischen Funktionen vorkommt, welche von 4 (der Zeit proportionalen) Argumenten abhängen, z. B. den beiden mittleren Längen in der Bahn, der mittlere Perihellänge und der mittleren Knotenlänge des Mondes. Die zu berücksichtigenden Vielfachen dieser Argumente sind beim Monde nicht hoch, während in der Planetentheorie vielfach ziemlich hohe Werte von i und j noch mitzunehmen sind.

Wegen der im Verhältnis zur Sonne kleinen Massen der Planeten und überhaupt der ganzen Konfiguration des Systems ist es möglich, das gesamte Mondproblem in Unterprobleme zu teilen, die nacheinander getrennt behandelt werden können; und zwar folgendermaßen:

1. Das Hauptproblem: in ihm werden Erde, Mond und Sonne auf ihre Schwerpunkte mit den Massen E, M, m' reduziert (beziehungsweise die Körper als Kugeln mit konzentrischen Kugelschichten gleicher Dichte aufgefaßt). Die Bewegung des Schwerpunktes G von E und M um m' kann als in einer bekannten festen Ellipse vor sich gehend gedacht werden (Nr. **3**—**18**).

2. Die Wirkungen, die durch den Unterschied zwischen angenommener und wirklicher Figur von Erde und Mond hervorgerufen werden (Nr. **20**).

3. Die direkte Anziehung von M durch die als Massenpunkte gedachten Planeten (Nr. **21**).

4. Die Wirkungen der Abweichungen der Bewegung von G von einer festen Ellipse; diese werden durch die Planeten hervorgerufen und sind als deren indirekte Wirkung bekannt (Nr. **22** und **23**).

5. Störungen, die von den Quadraten und Produkten der in 2, 3, 4 genannten Kräfte abhängen (Nr. **24**).

6. Andere Ursachen, deren Wirkungen entweder zu klein sind, um beobachtet werden zu können, oder deren Charakter und Beträge noch größtenteils hypothetisch sind; das sind: Die Gezeiten auf der Erde die Abweichungen vom *Newton*schen Gesetz, Massengewinn oder -verlust, Einfluß eines widerstehenden Mittels usw. (Nr. **25**).

I. Das Hauptproblem.

3. Die Kräftefunktion. Es seien x, y, z, r und x', y', z', r' Koordinaten und Abstand von Mond bzw. Sonne in einem festen Koordinatensystem, dessen Anfang in E liegt; Δ sei der Abstand Mond—Sonne; E, M, m' die Massen von Erde, Mond und Sonne, gerechnet in astronomischen Einheiten. Dann lauten die Bewegungsgleichungen des Mondes[2]):

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial z},$$

2) *Laplace,* Mécanique céleste, liv. 2, Nr. 14.

wo

$$F = \frac{E+M}{r} + m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right)$$

ist.

Die Sonnenkoordinaten sind auf G, den Schwerpunkt von E und M bezogen, und von der Sonne wird vorausgesetzt, daß sie eine feste Ellipse um G als Brennpunkt in der xy-Ebene (Ekliptik) beschreibe; es ist also $z' = 0$. Man setzt nun $xx' + yy' = rr' \cos \vartheta$, wo also $\vartheta = \sphericalangle MEm'$, und entwickelt nach Potenzen von $\frac{r}{r'}$, das ungefähr $\frac{1}{400}$ ist. Es werde außerdem bezeichnet:[3])

$$\varkappa_j = \left(\frac{E}{E+M}\right)^{j-1} - \left(\frac{-M}{E+M}\right)^{j-1}, \quad \lambda = \frac{E+M}{E+M+m'} \text{ ungefähr} = \frac{1}{330\,000}$$

dann ist

$$m' = n'^2 a'^3 (1 - \lambda),$$

wo n' und a' mittlere Bewegung und große Halbachse der Sonnenbahn sind. Es sei nun P_j die Kugelfunktion j^{ter} Ordnung von ϑ. Dann kann man schreiben

$$F = \frac{E+M}{r} + \frac{n'^2 a'^3}{r'}(1-\lambda)\sum_{j=2}^{j=\infty} \varkappa_j P_j \left(\frac{r}{r'}\right)^j = \frac{E+M}{r} + R.$$

In den meisten Theorien wird $\lambda = 0$ und $\varkappa_j = 1$ gesetzt. In der Tat bringt auch λ nur eine kaum merkliche Veränderung in der Apsiden- und Knotenbewegung hervor, und den Größen $\varkappa_j$ wird annähernd Rechnung getragen, wenn man in den Schlußresultaten $\frac{(E-M)a}{(E+M)a'}$ statt $\frac{a}{a'}$ setzt.[4]) Die Störungsfunktion ist R; ist sie null, so geht die Mondbewegung in einer Ellipse mit E als Brennpunkt vor sich. Die Zeit tritt in R explizit nur in der Form $n't + \varepsilon'$ und $n't + \varepsilon' - \varpi' = l'$ auf, wo ε' und ϖ' die mittlere Länge und die Perigäumslänge der Sonne für $t = 0$ sind; und zwar kommt $n't + \varepsilon'$ in ϑ nur so vor, daß, wenn man die Bewegung auf ein bewegliches Koordinatensystem bezieht, dessen Anfang in E liegt, und dessen x-Richtung nach dem mittleren Sonnenort zeigt, in F die Zeit t explizit nur durch l' eingeht. Wir können dann R mit Formeln, wie sie für die elliptische Bewegung gelten, nach Kosinus der Vielfachen von l' und Potenzen von e', der Exzentrizität der Sonnenbahn, entwickeln; dabei tritt e'^k in dem Koeffizienten von $\cos kl'$ als Faktor auf.

---

3) *P. Harzer,* Astr. Nachr. 123 (1889), col. 193—200.

4) Für die Begründung dieser Vereinfachung siehe *E. W. Brown,* Treatise on the Lunar theory, Chap. 1, Cambridge 1896.

4. Die Bewegungsgleichungen. Den Bewegungsgleichungen sind vielerlei verschiedene Formen gegeben worden. Einige der wichtigsten sind:

a) Für Polarkoordinaten mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher:[5])

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = r\frac{\partial R}{\partial r} + 2R - 2n'\int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon'}dt,$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{h(1+s^2)}{r^2} = \frac{1+s^2}{r^2}\int \frac{\partial R}{\partial v}dt,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \frac{\mu}{r^3}\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial R}{\partial s} + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial R}{\partial r},$$

wo a und h Integrationskonstanten sind und s die trig. Tangente der Breite über der xy-Ebene, v die sphärische Länge der Projektion von r auf die xy-Ebene von der x-Achse aus gerechnet, ε' die mittlere Länge der Sonne für $t = 0$, und $\mu = E + M$ ist. Wenn $R = 0$ ist, so ist $2a$ die große Achse und $\frac{1}{2}h$ die Flächengeschwindigkeit in der xy-Ebene.

b) Polarkordinaten mit v als unabhängiger Veränderlicher:[6])

$$\frac{d^2u_1}{dv^2} + u_1 = \frac{1}{h^2}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{s}{h^2u_1}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{h^2u_1{}^2}\frac{du_1}{dv}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2}{h^2}\left(\frac{d^2u_1}{dv^2} + u_1\right)\int \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{u_1{}^2},$$

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s = \frac{s}{h^2u_1}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{1+s^2}{h^2u_1{}^2}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{h^2u_1{}^2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2}{h^2}\left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right)\int \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{u_1{}^2},$$

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{h\,u_1{}^2}\left(1 + \frac{2}{h^2}\int \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{u_1{}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hier hat h eine ähnliche Bedeutung wie in a); $\frac{1}{u_1} = r_1$, ist die Projektion des Radiusvektors auf die xy-Ebene.

c) Rechtwinklige Koordinaten, auf ein bewegliches Achsensystem bezogen.[7]) Es sei die x-Achse stets nach dem mittleren Sonnenort gerichtet und außerdem bezeichnet:

$$F' = F + \tfrac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2).$$

Dann ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n'x = \frac{\partial F'}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F'}{\partial z}.$$

---

5) *Laplace,* Mécanique céleste, liv. 2, Nr. 46 und *de Pontécoulant,* Système du monde 4, Nr. 1.

6) *Laplace,* Mécanique céleste, liv. 2, Nr. 15; 7, Nr. 1.

7) *G. W. Hill,* Researches in the Lunar theory, Amer. Journ. of Math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260. = Works 1, p. 284—335.

Man setze nun:

$$\frac{u}{s} = x \pm iy, \quad \zeta = e^{i(nt+\varepsilon-n't-\varepsilon')}, \quad i = \sqrt{-1}$$

und führe das Operationszeichen D ein für

$$\zeta\frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{i(n-n')}\frac{d}{dt};$$

ferner sei

$$m = \frac{n'}{n-n'}, \quad \varkappa = \frac{\mu}{(n-n')^2},$$

$$\frac{2}{(n-n')^2}F' = \frac{2\varkappa}{r} + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 - m^2z^2 + \sum_{p=2}^{p=\infty}\Omega_p.$$

Dann ist Ω_p eine homogene Funktion p^{ten} Grades von u, s, z, welche $\left(\frac{1}{a'}\right)^{p-2}$ als Faktor enthält; Ω_2 enthält außerdem e' als Factor. Dann kann man die Differentialgleichungen folgendermaßen umformen:[8])

$$D^2(us+z^2) - DuDs - (Dz)^2 - 2m(uDs - sDu) + \tfrac{9}{4}m^2(u+s)^2 - 3m^2z^2$$
$$= C - \sum_{p=2}^{p=\infty}[(p+1)\Omega_p + D^{-1}(D_{\varepsilon'}\Omega_p)],$$

$$D(uDs - sDu - 2mus) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = \sum_{p=2}^{p=\infty}\left(s\frac{\partial\Omega_p}{\partial s} - u\frac{\partial\Omega_p}{\partial u}\right),$$

$$D(uDz - zDu) - 2mzDu - m^2uz - \frac{3}{2}m^2z(u+s) - \sum_{p=2}^{p=\infty}\left(\frac{1}{2}z\frac{\partial\Omega_p}{\partial s} - u\frac{\partial\Omega_p}{\partial z}\right).$$

Hier bedeutet $D_{\varepsilon'}$ die Operation D angewandt auf die Teile von Ω, welche die Zeit explizite enthalten; D^2, die Wiederholung der Operation D, und D^{-1}, die inverse Operation zu D_1, sind so zu verstehen:

$$D^2f = \zeta\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{df}{d\zeta}\right), \quad D^{-1}f = \frac{1}{\zeta}\int + d\zeta,$$

n ist die mittlere Bewegung des Mondes und C eine willkürliche Konstante. Wenn $e' = 0$, so besitzen die Differentialgleichungen das *Jacobi*sche Integral[9]), und C ist die relative Energiekonstante. Wenn $\frac{1}{a'} = 0$ ist, dann sind die Gleichungen in ihrer ersten Form, abgesehen von den Termen $\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}$, linear in bezug auf x, y, z und bilden die

8) *E. W. Brown,* Investigations in the Lunar theory, Amer. Journ. of Math. 17 (1895), p. 318—358. Die Gleichungen sind zuerst aufgestellt und behandelt unter der Beschränkung $\frac{a}{a'} = e' = z = 0$ durch *G. W. Hill.*

9) *C. G. J. Jacobi,* Paris C. R. 3 (1836) p. 59—61. = Gesammelte Werke 4, p. 37—38.

Grundlage von *Adams* Untersuchungen über die Bewegungen der Apsiden- und der Knotenlinie (Nr. **11**). In der zweiten Form sind sie homogen und vom 2. Grade, abgesehen von der Konstanten C.

d) Kanonische Formen. Setzt man

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2\text{[10]}, \quad \Phi = T - F$$

und behandelt x, y, z, x', y', z' als gleichberechtigte abhängige Veränderliche, so nehmen die ursprünglichen Bewegungsgleichungen die kanonische Form an:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \ldots .$$

Poincaré[11]) hat eine Transformation gegeben, die ein System kanonischer Gleichungen liefert, bei dem Φ nicht explizite von der Zeit abhängt. Wenn man sich nach c) eines beweglichen Achsensystems bedient und

$$X = x' - n'y; \quad Y = y' + n'x, \quad Z = z',$$
$$\Phi = \tfrac{1}{2}\{(X + n'y)^2 + (Y - n'x)^2 + Z^2\} - F - \tfrac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2) - n'L$$

setzt, dann sind (x, y, z, L), (X, Y, Z, l') kanonische Variable, und Φ ist die charakteristische Funktion des Problems; es besteht also das Integral $\Phi = \text{const.}$ L ist definiert durch $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial l'}\cdot$ Ein ähnliches kanonisches System kann bei festen Achsen[12]) benutzt werden, wenn man setzt $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'}$, und $\Phi = T - F - n'L$, wo $T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

5. Spezielle Differentialgleichungen. Ein Typus von Differentialgleichungen, auf den man immer wieder stößt, ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \sum a_i \cos \alpha_i t.$$

Wenn $\alpha_i \neq n$, so enthält die Lösung nur trigonometrische Funktionen der Zeit; wenn jedoch $\alpha_i = n$, so tritt t als Faktor dieser Funktionen auf. Da Terme dieser Form möglichst vermieden werden müssen, so ist es nötig, daß man auf die Gleichung zurückgeht, aus der der obige Typus hervorgegangen ist. In der Mondtheorie sind das Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = f(x, t),$$

wo f nach Potenzen von x entwickelbar ist und t nur in periodischen Gliedern enthält. Die wichtigsten speziellen Typen, auf die man dabei

10) Die gestrichenen Größen sind Ableitungen nach der Zeit, nicht Sonnenkoordinaten.

11) Paris Bull. astr. Nr. 17 (1900), p. 167 ff.

12) *E. W. Brown,* Amer. Math. Trans. 4 (1903), p. 333—350.

geführt wird, sind die folgenden:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(n^2 + \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i \cos 2it\right) = 0$ (*Gyldén-Lindstedt*sche Gleichung).

Clairaut[13]) hat zuerst, und zwar auf indirektem Wege, versucht, dieser Gleichung durch rein trigonometrische Funktionen von t zu genügen, wobei Argumente t, $qt + \beta$ auftreten; *D'Alembert*[14]) erreichte das in seinen Untersuchungen direkt. Unsere Gleichung a) ist ein spezieller Fall der linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten (II 2, 7), und ihre Lösung in der Himmelsmechanik hängt eng zusammen mit der von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = a_0 + a_1x + \cdots.$$ [15])

Die Lösung kann im allgemeinen in der Form ausgedrückt werden

$$x = b\sum_{i=0}^{i=\infty} \alpha_i \cos(qt + \beta + 2it),$$

wo die α_i und q allein von n und den a_i abhängen, und b und β Integrationskonstanten sind. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, eine rasch konvergierende Reihe für q zu finden. Das letztere Problem ist zuerst von *G. W. Hill*[16]) und *J. C. Adams*[17]) gelöst, welche die obige Lösung formell in die Differentialgleichung einsetzen und (q ist stets verschieden von einer ganzen Zahl vorausgesetzt), indem sie die Koeffizienten der einzelnen periodischen Terme gleich null setzen, ein System unendlich vieler linearer Gleichungen[18]) mit ebenso unendlich vielen Unbekannten erhalten; damit diese linearen Gleichungen ohne konstantes Glied miteinander verträglich seien, muß die Determinante der Koeffizienten der α_i verschwinden, welche also ebenfalls unendlich viele Zeilen und Kolonnen enthält; dadurch wird eine Bedingung für die Unbekannte q geliefert. Durch Ausnutzung der

---

13) *Clairaut*, Théorie de la Lune, St. Petersburg 1765.

14) Opuscules, Paris 1768, Bd. 5, p. 328—390.

15) Die Gleichung ist von *Lagrange* auf drei verschiedenen Wegen durch Annäherungsmethoden integriert. Oeuvres 1, p. 476, 554—66. Siehe ferner *Cauchy*, Oeuvres ser. 5, p. 264 und *R. Radau*, Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 481—487.

16) Motion of the Perigee, Cambridge U. S. A. 1877 = Acta math. 8 (1886), p. 1—36. = Works 1, p. 243—270.

17) Motion of the node, Lond. Astr. Soc. Monthly not., Nr. 38 (1877), p. 43—49. = Coll. works 1, p. 181—188, 2, p. 85—103. Andere Methoden gibt er in Coll. works 2, p. 64—67, 132—135.

18) *Poincaré* bemerkt, daß man sie besser als Ungleichungen wie als Gleichungen ansehen sollte, Bull. soc. math. 14 (1886), p. 77—90.

Eigenschaften dieser Determinante gelingt es, q zu isolieren und

$$\frac{\sin^2 q \frac{\pi}{2}}{\sin^2 n \frac{\pi}{2}}$$

durch eine andere unendliche Determinante auszudrücken, die schließlich in eine Reihe entwickelt wird; die Konvergenz derselben hat *Poincare* bewiesen.[19]) *Gyldén*[20]) führt, indem er unter der Voraussetzung, daß die a_i sehr klein sind, gewisse Termen wegläßt, unsere Gleichung a) auf die *Lamé*sche Differentialgleichung zurück (II 1, 10) und integriert durch elliptische Funktionen. Er hat in ähnlicher Weise auch die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(1 + \psi_1) = \psi_0,$$

wo ψ_1 und ψ_0 periodische Funktionen von t mit verschiedener Periode sind, behandelt[21]) und ebenso auch

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \beta_0 x + \beta_1 x^3.$$ [22])

Lindstedt[23]) findet q, im Falle, daß $a_i = 0$ für $i > 1$, durch Kettenbrüche, die auf eine Reihe ähnlich der *Hill*s zurückgeführt werden können; damit sind dann auch die Koeffizienten der periodischen Terme gefunden. Auch die allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \psi_0 + \psi_1 x + \cdots,$$

wo die ψ periodische Funktionen sind, gelingt es *Lindstedt* zu integrieren. *Poincaré*[24]) hat die *Lindstedt*schen Methoden in der *Jacobi*schen Form dargestellt und außerdem noch auf eine andere Weise, wodurch er sie von einer Einschränkung befreit.[25]) Eine Diskussion zwischen *Lindstedt*[26]), *Gyldén*[27]) und *Backlund*[28]) klärte gewisse Schwierigkeiten, die sich in *Gyldén*s Abhandlung finden, auf.

19) Paris Bull astr. 17 (1900), p. 134. Mécanique céleste, chap. 17. Über allgemeine Eigenschaften unendlicher Determinanten siehe I A 2 u. 3.

20) Stockholm Acad. Bih. 6 (1881), Astr. Ges. Vjs. 16 (1881), p. 296—304.

21) Paris C. R. 93 (1881), p. 127—131.

22) Ib. p. 537—538; 122 (1896), 160—165, 585—588. Siehe auch 92 (1881), p. 1033—1038.

23) St. Pét. mém., sér. 7, 1 (1883) Nr. 4, p. 1—20; *Tisserand*, Mécanique céleste 3, chap. 1.

24) Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 57—61.

25) Paris C. R. 108 (1889), p. 21—24.

26) Astr. Nachr. 103 (1882), p. 211—220, 257—268; 104 (1883), p. 145—150.

27) Ib. 103 (1882), p. 321—324.

28) Ib. 103 (1882), p. 323—326.

Beweise für die Existenz der Lösungen unserer Differentialgleichungen hat *Lindstedt*[29]) unter Benutzung der gewöhnlichen Methoden fortgesetzter Annäherungen geliefert. Einige Lücken in der Strenge seiner Beweisführung hat *Bruns*[30]) ausgefüllt und zugleich Reihenentwicklungen der Lösung gegeben. *O. Callandreau*[31]) macht sich die Resultate der Theorie der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten zunutze und gelangt dadurch zu einem kurzen und strengen Existenzbeweis, der außerdem auf eine elegante Form des Ausdrucks zur Bestimmung von q führt.[32]) Eine sehr allgemeine Behandlung von Gleichungen dieses Typus geben *Moulton* und *MacMillan*[33])

b) $$\frac{d^2x}{dt^2}-2n'\frac{dy}{dt}+Lx+L'y=R,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2n'\frac{dx}{dt}+L'x+L''y=R',$$

wo

$$\begin{matrix}L, L''\\ L'\end{matrix}=\sum_i \begin{matrix}q_i, q_i''\\ q_i'\end{matrix}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2i\tau, \quad \begin{matrix}R\\ R'\end{matrix}=\sum \begin{matrix}r_\varkappa\\ r_\varkappa'\end{matrix}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\varkappa\tau, \quad \tau=(n-n')(t-t_0).$$

Im Falle $R = R' = 0$ führt *Hill*[16]) diese Differentialgleichung auf den Typus a) zurück, indem er ein bekanntes partikuläres Integral benutzt, und findet:

$$\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}=\sum \begin{matrix}p_i\\ {}_ip_i\end{matrix}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{(2i+q)\tau+t_1\}.$$

Die Lösung für R und $R' \neq 0$ hat *E. W. Brown* in einer Form, in der nur Quadraturen vorkommen, gegeben.[34]) Mit den Bezeichnungen von Nr. **4**c) gehen nämlich die obigen Gleichungen über in:

$$(D+m)^2u+Mu+Ns=A; \quad (D-m)^2s+Ms+\bar{N}u=\bar{A},$$

wo A die Form $\sum_k R_k\zeta^k$ hat, M und N von der Form $\sum_i Q_i\zeta^{2i}$ und $\bar{N}$ und $\bar{A}$ zu N und A konjugiert sind; $(D\pm m)^2\begin{matrix}u\\ s\end{matrix}$ sind Symbole

29) Ib. 105 (1883), p. 97—112.

30) Ib. 106 (1883), p. 193—204; 107 (1883), p. 129—132.

31) Ib. 107 (1884), p. 33—38; *Tisserand,* Mécanique céleste 3, chap. 1.

32) Andere Arbeiten stammen von *P. Harzer,* Astr. Nachr. 118 (1888), p. 273—280; 119 (1888), p. 273—294, welcher *Bruns* Methode auf *Gyldéns* Rechnungen zum Zwecke uumerischer Resultate ausdehnte und eine analytische Entwicklung in schnell konvergierende Reihen für jede Zahl von Perioden gab; *Andoyer,* Fac. Toul. Ann. 1 (1887), M p. 1—72. Siehe auch *Poincaré,* Mécanique céleste chap. 17.

33) Amer. Journ. Math. 33 (1911), p. 63—96.

34) Cambridge Phil. mem. 18 (1900), p. 94—106. Das Resultat ist schon mitgeteilt London Astr. Soc. Mem. 53 (1899), p. 167.

für $D^2 \frac{u}{s} \pm 2mD \frac{u}{s} + m^2 \frac{u}{s}$. Es seien nun

$$u = u_i, \quad s = s_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

vier linear unabhängige Integrale der obigen Gleichungen im homogenen Fall, $f = C$ ein gewisses erstes Integral derselben; alsdann zeigt *Brown*, daß die allgemeine Lösung der nichthomogenen Gleichung die Form annimmt:

$$Cu = \sum_i \{u_i D^{-1}(s_{i+1}A + u_{i+1}\bar{A}) - u_{i+1}D^{-1}(s_i A + u_i \bar{A})\} \quad i = 1, 3.$$

Poincaré[35]) hat die Methode auf $2n$ Variable ausgedehnt; die Form der Lösung bleibt dabei die gleiche, nur geht i von 1 bis $2n - 1$

c) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(1 + a_2x^2 + \cdots)\sin y; \\ x\dfrac{dy}{dt} = x(b_0 + b_2x^2 + \cdots) + a(1 + c_2x^2 + \cdots)\cos y. \end{cases}$$

Dabei sei x eine kleine Größe.[36]) Um Entwicklungen nach negativen Potenzen von x zu vermeiden, setzt man

$$\xi = x\cos y, \quad \eta = x\sin y$$

und findet damit

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta b_0 + \varphi(\xi, \eta); \quad \frac{d\eta}{dt} = a + \xi b_0 + \psi(\xi, \eta),$$

wo φ und ψ Potenzreihen nach ξ und η sind, die mit den zweiten Potenzen beginnen. Die Lösung erfolgt durch fortgesetzte Annäherungen.

6. Die Formen der Ausdrücke für die Koordinaten. Die Kräftefunktion F ist entwickelbar nach Potenzen von e' und $\frac{1}{a'}$ und enthält, wenn bewegliche Koordinatenachsen benutzt werden, t explizit nur in der Form $\cos kl'$; die Koeffizienten von $\left(\frac{1}{a'}\right)^p$ sind homogene Funktionen von x, y, z vom Grade $p - 2$, und der Koeffizient von $\cos kl'$ hat außerdem $e'^{|k|}$ (Nr. 3) als Faktor. Wenn $e' = \frac{1}{a'} = 0$, so reduzieren sich die Differentialgleichungen auf die *Hills* (Nr. 4c) mit $\Omega_p = z = 0$), der gezeigt hat[37]), daß sie das folgende partikuläre Integral besitzen:

α) $$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = a\sum a_i \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2i+1)D, \quad D = nt + \varepsilon - n't - \varepsilon'; \quad i = 0, \pm 1 \ldots,$$

35) Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 96—104.

36) *C. Delaunay,* Paris Inst. (math.) mém. 28 (1860), p. 106—110. Conn. des temps pour 1861, Add. p. 3—44. *F. Tisserand,* Paris Bull. astr. 7 (1890), p. 265—271.

37) Amer. Journ. Math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260.

wo n und ε willkürliche Konstanten sind, $a^3n^2 = E + M = \mu$ ist, und die a_i nach Potenzen von $m = \frac{n'}{n - n'}$ entwickelt sind. Er hat ferner gezeigt[38]), daß eine erste Annäherung der allgemeinen Lösung durch einen Ausdruck der folgenden Gestalt gegeben ist:

$$\alpha) + a \sum A_i e \, {}^{\cos}_{\sin} \{l + (2i + 1)D\},$$

wo $l = cnt + \varepsilon - \varpi$ ist, e und ϖ willkürliche Konstanten und c und A_i Potenzreihen nach m sind. Es folgt hieraus, daß die allgemeine Lösung der *Hill*schen Gleichungen von folgender Form ist:

$$a \sum_{i,j} A_{i,j} e^{|j|} \, {}^{\cos}_{\sin} \{jl + (2i + 1)D\} \qquad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

wo $A_{i,j}$ und c nach Potenzen von m und e^2 entwickelt sind. Nimmt man jetzt die Terme hinzu, die auftreten, wenn $e' \neq 0$ und $\frac{1}{a'} \neq 0$, so zeigt die Methode der fortgesetzten Annäherungen, daß die Argumente den Typus $jl + (i + 1)D + kl'$ und die Koeffizienten den Typus $aA_{i,j,k} e^{|j|} e'^{|k|} \left(\frac{a}{a'}\right)^{|i'|}$ bekommen, wo die A und c nach Potenzen von m, e^2, e'^2, $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$ entwickelt sind, und $i - i' \equiv 0$, mod 2 ist. Gehen wir weiter zu z, so nimmt die Differentialgleichung für diese Koordinate für $e' = \frac{1}{a'} = 0$, falls man nur die erste Potenz von z berücksichtigt, die Form Nr. 5a) an, und man findet $z = a\gamma \sum_i A_i \sin (F + 2iD)$, wo $F = gnt + \varepsilon - \vartheta$; dabei sind γ und ϑ Integrationskonstanten — die erstere im Falle des Mondes klein von der Ordnung der Bahnneigung — und A_i und g wiederum Potenzreihen von m. Fährt man so fort, so findet man als allgemeine Ausdrücke für die Koordinaten, bezogen auf ein System, dessen x-Achse nach dem mittleren Sonnenort gerichtet ist, die folgenden:

$$\begin{aligned}
{}^{x}_{y} &= a \sum_{i,j,k,p} A_{i,j,k,2p} e^{|j|} e'^{|k|} \left(\frac{a}{a'}\right)^{|i'|} \gamma^{|2p|} \, {}^{\cos}_{\sin} \{(i+1)D + jl + kl' + 2pF\}, \\
z &= a \sum_{i,j,k,p} A_{i,j,k,2p+1} e^{|j|} e'^{|k|} \left(\frac{a}{a'}\right)^{|i'|} \gamma^{|2p+1|} \\
&\qquad \sin \{iD + jl + kl' + (2p + 1)F\},
\end{aligned}$$

$$l = cnt + \varepsilon - \varpi, \quad F = gnt + \varepsilon - \vartheta, \quad D = nt + c - n't - \varepsilon'$$

$$i, j, k, i', p = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots; \quad i - i' \equiv 0 \bmod 2;$$

$$c, g, A \text{ Potenzreihen von } m, e^2, e'^2, \left(\frac{a}{a'}\right)^2, \gamma^2.$$

Wenn $m = e' = \frac{1}{a'} = 0$ ist, so reduzieren sich die Differentialgleichungen auf die der elliptischen Bewegung, und c und g werden

38) Acta math. 8 (1886), p. 1—36.

$= 1$; e und γ sind Exzentrizität und Sinus der Bahnneigung. Da n' in R als Faktor auftritt (Nr. **3**), so müßte der Wert $m = 0$ die Resultate auf die der elliptischen Bewegung reduzieren; daß dies scheinbar nicht der Fall ist[39]), rührt von einer etwas anderen Auffassung der Integrationskonstanten her.[40]) Es muß nun noch die Annahme, daß nur positive Potenzen der Parameter auftreten, als richtig erwiesen werden. Negative Potenzen können nur durch die Integrationsdivisoren auftreten. Alle diese Divisoren haben die Form $i + i'm + i''\pi_1 + i'''\vartheta_1$, wo $\pi_1 = 1 - \frac{c}{1+m}$ und $\vartheta_1 = 1 - \frac{g}{1+m}$ die mittleren Bewegungen der Apsiden- bzw. Knotenlinie sind. Nun sind aber die Terme niedrigster Ordnung in π_1 und ϑ_1:

$$\pi_1 = m^2\left(\frac{3}{4} + \frac{225}{32}m + \cdots\right); \quad \vartheta_1 = m^2\left(-\frac{3}{4} + \frac{9}{32}m + \cdots\right).$$

Es können also Divisoren von der Ordnung m^3 nur auftreten im Falle $i = i' = 0$, $i'' = i'''$. Daß die Divisoren der Ordnung m^2 keine negativen Potenzen von m in die Koeffizienten einführen, geht daraus hervor, daß R bei der Methode der Variation der Konstanten (Nr. **10**) m^2 als Faktor enthält. Der Fall der Divisoren von der Ordnung m^3 ist nicht vollständig untersucht, indes enthält die elliptische Entwicklung der Störungsfunktion (Nr. **9**) keine derartigen Glieder, so daß die zweite Annäherung jedenfalls nicht zu negativen Potenzen von m Anlaß gibt.

Die Charakteristik[41]) der niedrigsten Ordnung, in der dieser Divisor auftreten kann, ist $e\gamma^2 e'^4$.[42])

Eine Methode, den Genauigkeitsverlust durch kleine Divisoren zu

---

39) Siehe z. B. die Schlußausdrücke von *Delaunay*, Theorie du Mouvement de la Lune, chap. 11.

40) *Gogou*, Obs. d. Paris ann. mém. 18 (1885) E; *P. H. Cowell*, Lond. Astr. Soc. Monthly not. 56 (1895), p. 3—11.

41) Diese Bezeichnung ist von *E. W. Brown* eingeführt, Lond. Astr. Soc. Mem. 53 (1897), p. 61 und bedeutet den nur von e, e', γ, $\frac{a}{a'}$ abhängigen Faktor eines Koeffizienten. Die Ordnung der Charakteristik des oben gegebenen allgemeinen Koeffizienten von x ist $|j| + |k| + |i| + |2p|$.

42) Über diese Frage und die langperiodischen Sonnenglieder siehe *Laplace*, Méc. cél. 7, Nr. 5. *J. W. Lubbock*, Lond. Phil. Trans. 1834, p. 123—126, Philos. Mag. 17 (1840), p. 338—346; *S. D. Poisson*, Par. Mém. prés. 13 (1835), p. 209—335, Paris C. R. 4 (1837), p. 475—486; *de Pontécoulant*, Paris C. R. 4 (1837), p. 280—291; *V. Puiseux*, Paris école normale sup., série 1, 1 (1864), p. 39—80; *Poincaré*, Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 289—310; *E. W. Brown*, Amer. Journ. math. 17 (1895), p. 356—358, Amer. math. Trans. 3 (1902), p. 159—185.

vermeiden, hat *Brown* gegeben.[43]) *Poincaré*[44]) zeigt, daß bei hinreichender Fortsetzung der Näherungen negative Potenzen von m auftreten. Er unterscheidet diesen Fall von demjenigen, in welchem sehr kleine numerische Divisoren für bestimmte Werte der Konstanten auftreten können.

Alle andern Darstellungen als Summen von harmonischen Gliedern lassen sich leicht aus den obigen ableiten. Für Polarkoordinaten wird die wahre Länge $= nt + \varepsilon +$ Glieder wie die in y, nur daß in den Winkeln iD statt $(i+1)D$ steht; der Radiusvektor oder die Parallaxe wird wie x mit derselben Änderung in den Winkeln; die Breite wird wie z. *Hansens* Ausdrücke (Nr. **17**) enthalten Terme der Form sin oder cos ($l +$ harmonische Glieder), welche, da die harmonischen Glieder kleine Koeffizienten haben, in Ausdrücke der obigen Art entwickelt werden können.

7. Konvergenz und Divergenz. Die nach Potenzen von m angeordneten Entwickelungen sind wahrscheinlich divergent.[45]) Das hindert aber nicht, daß sie zur Berechnung benutzt werden können, da *Poincaré* gezeigt hat[46]), daß divergente Reihen dazu benutzt werden können, Funktionen bis zu einem beschränkten Grade der Genauigkeit zu berechnen — die übrigens im Falle des Mondproblems jedenfalls größer ist, als es für die Vergleichung mit der Beobachtung erforderlich ist.

Wenn man mit rein numerischen Werten der Parameter operiert und die Reihen nach Vielfachen der Argumente anordnet, liegt die Schranke für die erreichbare Genauigkeit noch höher. Für praktische Zwecke handelt es sich wesentlich um die Frage einer langsamen oder schnellen „numerischen" Konvergenz der ersten Glieder der Reihen. Eine schlechte Konvergenz tritt hauptsächlich bei der grundsätzlichen Entwicklung nach Potenzen von m ein; denn, obgleich $m = 0{,}07$ ist, bewirken große numerische Faktoren, daß die Reihen (nach m) in einigen Koeffizienten nur etwa in demselben Verhältnis konvergieren wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 0,5. Die Methode von *Hill-Brown* (Nr. **16**) und *Brendel* (Nr. **18**) läßt diese Schwierigkeit so ziemlich verschwinden, indem hier Annäherungen nur nach den andern Parametern (e, γ, usw.), nicht nach m gemacht werden, für welches vielmehr von vornherein sein numerischer Wert benutzt wird.

---

43) Amer. Math. Trans. 3 (1902), p. 159—185.

44) Paris Bull. astr. 25 (1908) p. 321—360.

45) *Poincaré,* Méc. cél. 2, chap. 14.

46) Ib. chap. 8. Siehe auch *E. Borel,* Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901.

Gewisse Gruppen von Gliedern für sich genommen sind konvergent. So bekanntlich die von der Elliptizität der Bahn herrührenden für $e < 0{,}6627432$.[47] Ferner *Hills* periodische Bahn (Nr. **16**) in dem Falle, den unser Mond tatsächlich darbietet[48]; dann die Terme, die nur von m und den ersten Potenzen von e oder γ abhängen[49]; endlich auch für eine aus Gliedern einer bestimmten Charakteristik gebildeten Reihe, wenn man den numerischen Wert von m benutzt und nach Vielfachen des Argumentes $2D$ anordnet.[50] Eng verknüpft mit der Frage der Konvergenz ist die nach der Stabilität des Systems, die hauptsächlich von der oberen und unteren Grenze für den Radiusvektor des Mondes abhängt (*Hill*sche Grenzkurve.[51])

8. Intermediäre Bahnen. Wenn man die analytische Form der Koordinaten kennt, so könnte man die A, c, g (Seite 682) mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten finden; aber die Kompliziertheit der Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten macht diesen Weg praktisch ungangbar, man muß vielmehr die Arbeit in verschiedene Schritte teilen.

Der erste Schritt führt zur sogenannten intermediären Bahn.[52] Die meisten älteren Untersuchungen benutzen als solche die ungestörte Ellipse; durch Einsetzen der aus ihre folgenden Koordinatenwerte in die Störungsfunktion erhalten sie eine zweite Annäherung, damit eine dritte usf. Die Ellipse wurde dann dadurch modifiziert, daß man $cnt + \varepsilon - \varpi$ statt $nt + \varepsilon - \varpi$ und $gnt + \varepsilon - \vartheta$ statt $nt + \varepsilon - \vartheta$ einführte, wo c und g durch die Bedingung bestimmt werden, daß für jede Annäherung die der Zeit proportionalen Terme verschwinden. Die Annäherungen schreiten so nach Potenzen der störenden Kräfte fort. Von den moderneren Theorien benutzt *Hansen* (Nr. **19**) eine in der momentanen, *Oppolzer* eine in der mittleren Bahn-

47) *Laplace*, Par. Mém. prés., ser. 2, 6 (1823), p. 61—80.

48) *Liapunoff*, Mosk. Phys. Soc. 8 (1896); *H. Happel*, Diss. Göttingen 1901.

49) *Poincaré*, Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 87—96.

50) *E. W. Brown*, Cambr. Phil. Trans. 18 (1900), p. 94.

51) Siehe *Hill*, Researches in the Lunar theory, Amer. Journ. Math. 1 (1877); *Happel*, a. a. O.

52) Die Bezeichnung stammt von *Gyldén*; ihre Bedeutung ist nicht streng definiert, hat aber den Sinn, daß die intermediäre Bahn in gewissem Sinne in der Mitte zwischen der Ellipse und der wahren Bahnkurve liegt: Stock. Acad. Bib. 6 (1881), Nr. 8; Paris C. R. 92 (1881), p. 1262—1265; Astr. Nachr. 100 (1881), p. 97—102; Astr. Ges. Vjs. 16 (1881), p. 296—304. Die Bezeichnungen im Text, die nicht ganz mit denen *Gyldéns* übereinstimmen, werden jetzt vielfach gebraucht. Betreffs einer Erweiterung der Bezeichnung siehe *Thiele*, Astr. Nachr. 102 (1882), p. 65—70.

ebene bewegliche Ellipse; *Delaunay* (Nr. **15**) eine feste unter dem mittleren Winkel gegen eine feste Ekliptik geneigte Ellipse; *Hill* (Nr. **16**) eine periodische Kurve, die nur von dem Parameter m abhängt. *Gyldén* (Nr. **18**) schließt in F eine Anzahl von Termen ein, die dazu dienen, den Hauptgliedern in den Koeffizienten der größten Störungen von vornherein Rechnung zu tragen. *Hill*[53]) hat vorgeschlagen, F auf die Terme $\frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}k(x^2+y^2) + \frac{1}{2}k'z^2$ zu beschränken, wo k und k' Konstanten sind, die so bestimmt werden müssen, daß die mittleren Bewegungen der Apsiden- und der Knotenlinie ihre beobachteten Werte haben. Die Bewegungsgleichungen reduzieren sich damit auf die folgenden:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + \alpha u^{-3} - k(1+s^2)^{-\frac{3}{2}} = 0; \quad \frac{d^2s}{dv^2} + s + \beta s u^{-4} = 0,$$

wo $u = \frac{1}{r}$, $v =$ der wahren Länge, $s =$ tang der Breite; α und β sind gewisse kleine Konstanten, die von k, k' und gegebenen Parametern abhängen.

Die Lösung bewirkt er, indem er zunächst s vernachlässigt, für die erste Gleichung durch elliptische Integrale[54]) oder fortgesetzte Näherungen; dann folgen Annäherungen nach Potenzen von s. Man findet dann u und s als Reihen, die nach Vielfachen der Argumente $c'v + \tau_0$ und $g'v + g_0$ fortschreiten, und t aus einer Gleichung ähnlich der dritten von b) in Nr. **4**. *Perchot*[55]) schlägt vor, von *Delaunays* Gleichungen (Nr. **15**) auszugehen, und wendet, unter der Annahme, daß die mittleren Bewegungen von Perigäum und Knoten kommensurable Werte haben, die sehr nahe mit ihren tatsächlichen Werten übereinstimmen, *Poincarés*[56]) Theorie der periodischen Lösungen an. Die so erhaltene intermediäre periodische Bahn ist frei von dem Mangel, daß Apsiden- und Knotenlinie festliegen. Die Lösung wird durch die Methode von *Poincaré* gefunden (Nr. **15**), die in einer Modifizierung der *Delaunay*schen besteht.

Diese speziellen Methoden geben im allgemeinen gute Annäherungen für die großen Glieder und sind in theoretischer Beziehung nützlich, ihr Wert für die Entwicklung einer vollständigen Mondtheorie ist aber bisher noch nicht erwiesen. Weitere Methoden, inter-

---

53) Astron. Journ. 18 (1897), p. 81—87. = Works 4, p. 136—149.

54) Eine Ableitung dieser Formeln nach *Jacobis* Methode ist von *A. W. Krassnow*, Astr. Nachr. 146 (1898), p. 7—10 337—340, gegeben.

55) Par. Ec. norm. sup., ser. 3 10 (1893) S, p. 3—94.

56) Méc. cél., chap. 3.

mediäre Bahnen abzuleiten, sind von *R. Radau* studiert worden.[57]) *Brendel* (Nr. 18) schließt die Terme, die von m, $\frac{a}{a'}$, $\frac{M}{E}$ abhängen, in seine intermediäre periodische Bahn ein.

9. Die Entwicklung der Störungsfunktion. Mit den Bezeichnungen von Nr. 3 und 4 hat man $\cos\vartheta = (1+s^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(v-v')$, wo v' die wahre Länge der Sonne ist. Entwickelt man danach die P_j nach Potenzen von s, dann ist R eine Funktion von

$$r,\ r',\ r\cos v,\ r\sin v,\ r'\cos v',\ r'\sin v',\ s.$$

Führt man, wie es in einigen Theorien geschieht, die elliptischen Werte für die Koordinaten ein[58]), so finden wir:

$$R = n'^2 a^2 \sum (1-\lambda)\,\varkappa_j B e^{i_1} e'^{i_2} \gamma^{2i_3} \alpha^{i_4} \cos N;$$

hier ist

$$\alpha = \frac{a}{a'},$$

$$N = j_1(nt+\varepsilon-\varpi) + j_2(n't+\varepsilon'-\varpi') + 2j_3(nt+\varepsilon-\vartheta) + j_4\xi,$$

B ein Quotient von 2 ganzen Zahlen;

und weiterhin gilt:

$$\xi = nt+\varepsilon-n't-\varepsilon',$$

$$j_1, j_2, j_3, j_4 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

$$i_1,\ i_2,\ 2i_3,\ i_4 - j_4 \equiv \text{und} > |j_1|,\ |j_2|,\ |2j_3|,\ 0 \bmod 2.$$

Die Derivierten von R erhält man so:

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = \alpha\frac{\partial R}{\partial \alpha} + 2R;\quad \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial \xi}.$$

Dagegen muß $\frac{\partial R}{\partial s}$ aus der Entwicklung in der Form, die sie vor Einsetzen der elliptischen Werte hat, gewonnen werden. Wird v als unabhängige Veränderliche benutzt, so müssen für r und s deren elliptische Ausdrücke durch v eingeführt werden, ferner muß in r' und v' die Zeit durch ihren elliptischen Ausdruck als Funktion der wahren Länge v ersetzt werden. Die Entwicklungen, die für spezielle Methoden gelten, werden im einzelnen bei der Darlegung jener Methoden angegeben. Die höheren Annäherungen in R können durch das *Taylor*sche Theorem erhalten werden, wenn man die entsprechende Annäherung für die Koordinaten gefunden hat.

---

57) Paris Bull. astr. 9 (1892), p. 321—340.

58) Tafeln zu diesem Zweck hat *A. Cayley*, aufgestellt, Lond. Astr. Soc. Mem. 29 (1861), p. 191—306. = Coll. Works 3, p. 360—474.

10. Die Variation der Konstanten.[59]) Die Lösung der Bewegungsgleichungen für die elliptische Bewegung ist die gleiche wie in der Planetentheorie (VI 2, 14), und *Lagranges* Gleichungen für die Variation der Elemente $a, e, \gamma, \varepsilon, \varpi, \vartheta$ behalten also dieselbe Gestalt.

Die *Jacobi*sche kanonische Grundform des Problems ist

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \beta_i}; \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \qquad i = 1, 2, 3,$$

wo sich die kanonischen Elemente durch die elliptischen folgendermaßen ausdrücken:

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon - \varpi}{n}, \quad \alpha_2 = \varpi - \vartheta, \quad \alpha_3 = \vartheta,$$

$$\beta_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \beta_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad \beta_3 = \beta_2 \cos \gamma.$$

Für $R = 0$, also $\alpha_i = \text{const.}$, $\beta_i = \text{const.}$ ergibt sich natürlich die elliptische Bewegung. Man hat noch andere Formen der kanonischen Differentialgleichungen vorgeschlagen, deren jede ihre besonderen Vorzüge hat. Jede Berührungstransformation der 6 Variabeln (Enzyklop. IV 2), verbunden mit einer entsprechenden Änderung der charakteristischen Funktion, erhält ja die kanonische Form der Differentialgleichungen. Die meistbenutzten anderen Formen sind:

a) *Delaunays*[60]) Form, die das Auftreten der Zeit außerhalb des Arguments auf der rechten Seite der Gleichungen vermeidet. Man setze dazu:

$$L = \sqrt{\mu a};\ G = \beta_2;\ H = \beta_3;\ l = n(t + \alpha_1);\ g = \alpha_2;\ h = \alpha_3;\ R = \frac{\mu^2}{2L^2} + R_1,$$

dann ist

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = \left(\frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial}{\partial g}, \frac{\partial}{\partial h}\right) R_1; \quad \frac{d}{dt}(l, g, h) = -\left(\frac{\partial}{\partial L}, \frac{\partial}{\partial G}, \frac{\partial}{\partial H}\right) R_1.$$

Hier ist jetzt R_1 periodisch mit der Periode 2π in bezug auf l, g, h, l', und die Koeffizienten der periodischen Terme sind Funktionen von L, G, H und den festen Konstanten.

b) Die modifizierte *Delaunay*sche Form erhält man, indem man setzt:

$$p_1 = L,\ p_2 = G - L,\ p_3 = H - G;\ q_1 = l + g + h,\ q_2 = g + h,\ q_3 = h.$$

Dabei sind p_2 und p_3 von den Ordnungen e^2 und γ^2, und q_1 ist die mittlere Länge, q_2 die Länge des Perihels, q_3 die des Knotens.

59) Die Literatur hierüber ist sehr umfangreich. Der Gegenstand ist unter eingehender Literaturangabe behandelt von: *Tisserand,* Méc. cél. 1 und 3; *Dziobek,* Theorie der Planetenbewegungen, Leipzig 1888; *Brown,* Treatise; *Charlier,* Mech. des Himmels 1 (1902), Abschn. 5. Siehe auch die reports von *A. Cayley,* Brit. Ass. 1857, 1862 u. *E. T. Whittaker,* ib. 1899. ferner Encycl. IV 2.

60) Théorie du mouvement de la Lune, chap. 1.

c) *Poincaré*s[61]) Transformation. Man setze

$$p_1' = p_1,\ q_1' = q_1,\ -\frac{p_2'}{q_2'} = \sqrt{2(L-G)}\,{}^{\cos}_{\sin}\,\varpi,\ -\frac{p_3'}{q_3'} = \sqrt{2(G-H)}\,{}^{\cos}_{\sin}\,\vartheta,$$

dann ist R entwickelbar nach Potenzen von p_2', q_2', p_3', q_3', e', $\frac{1}{a'}$ und ist mit 2π periodisch in q_1' und l'. Wenn man nun mit dieser Transformation noch den Gedanken (Nr. 4d) kombiniert, zwei neue Variable p_4', q_4' mit der entsprechenden Änderung in R_1 einzuführen, so erreicht man, daß R_1 allein in q_1' periodisch und nach den übrigen kanonischen Koordinaten p_i', q_i' ($i = 2, 3, 4$) entwickelbar wird; es ergibt sich aber dann natürlich ein System von vier Paaren kanonischer Differentialgleichungen.

d) *Hansens*[62]) Transformation auf „Pseudoelemente" λ derart, daß

$$d\lambda = \sum{}^i (A_i dp_i + B_i dq_i)$$

kein vollständiges Differential ist. Diese kann in gewissen Fällen, wo R die λ nicht explizit enthält, nützlich sein (Nr. 17).

e) *Browns*[63]) Transformation auf das nicht kanonische System n, p_2, p_3, q, q_2, q_3 wird ausgiebig bei der Bestimmung planetarischer und anderer Störungen gebraucht (Nr. 19—24).

11. Verschiedene Eigenschaften der Lösung. Das erste kanonische System von Nr. 4 d) führt auf 6 willkürliche Konstanten α_i, $\beta_i^{(i=1,2,3)}$; hier kommen die β_i nur in Argumenten $\omega_i = b_i t + \beta_i$ vor, in denen die b_i Funktionen der α_i und fester Konstanten sind. Bezeichne jetzt f, g irgend zwei dieser Größen[64]), entweder aus dem Satze α_i, β_i oder α_i, ω_i, so haben wir:

$$(f,g) = \left(\frac{dx'}{df}\frac{dx}{dg} - \frac{dx'}{dg}\frac{dx}{df}\right) + \left(\frac{dy'}{df}\frac{dy}{dg} - \frac{dy'}{dg}\frac{dy}{df}\right) + \left(\frac{dz'}{df}\frac{dz}{dg} - \frac{dz'}{dg}\frac{dz}{df}\right) = \text{const.}$$

$$[f,g] = \text{const.}$$

Hier sind x, y, z, x', y', z' als durch die willkürlichen Konstanten und t ausgedrückt zu denken. Die Symbole in runder und eckiger Klammer unterscheiden sich nur dadurch, daß entweder die α_i, β_i oder die α_i, ω_i

---

61) Méc. cél. 1, chap. 1.

62) J. f. Math. 42 (1850), p. 1—31; ferner *A. Cayley,* Lond. Astr. Soc. Mem. 27 (1859), p. 1—29 = Collected works 3, p. 270—292.

63) Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 241—242; ib. 5 (1904), p. 279—284; Lond. Astr. Soc. Mem. 59 (1908), p. 5—9.

64) Dies sind eigentlich neue Variable. Die f, g sind Konstante, wenn man sie aus dem Satz α_i, β_i wählt; die g hängen von der Zeit ab, wenn man den Satz α_i, ω_i wählt.

eingesetzt zu denken sind. Weiter ist nach Nr. **6**:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = [\alpha_i, \alpha_j] = [\omega_i, \omega_j] = 0$$
$$(\alpha_i, \beta_j) = [\alpha_i, \omega_j] = \frac{dc_j}{d\alpha_i}; \quad b_i = -\frac{dB}{dc_i} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

wo c_j in B von den β_i unabhängige Konstanten sind. Die Systeme c_i, β_i und c_i, ω_i sind kanonisch; wir haben also:

$$(c_i, \beta_j) = [c_i, \omega_j] = {1 \atop 0},$$

je nachdem

$$i = j \atop i \neq j$$

ist.[65])

Bezeichne ferner $[Q]$ den zeitlichen Mittelwert irgendeines Ausdruckes Q, also den konstanten Teil in der Entwicklung von Q in trigonometrische Reihen nach den von der Zeit abhängigen Argumenten. Dann lassen sich (Nr. **6**) $\frac{\pi_1}{n}$, $\frac{\vartheta_1}{n}$, $\left[\frac{a}{r}\right]$ in Potenzreihen nach e^2 und γ^2 entwickeln, deren Koeffizienten ihrerseits Potenzreihen nach m, e'^2, $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$ sind. Wenn man $\frac{a}{a'}\left(\approx \frac{1}{400}\right)$ vernachlässigt, so sind, wie *J. C. Adams*[66]) gezeigt hat, die Koeffizienten von e^2 und γ^2 in $\left[\frac{a}{r}\right]$ gleich null; und ferner ist:

$$\frac{\text{Koeff. von } e^2}{\text{Koeff. von } \gamma^2} \text{ in } \frac{\pi_1}{n} = \frac{\text{Koeff. von } e^4}{\text{Koeff. von } 2e^2\gamma^2} \text{ in } \left[\frac{a}{r}\right];$$
$$\frac{\text{Koeff. von } e^2}{\text{Koeff. von } \gamma^2} \text{ in } \frac{\vartheta_1}{n} = \frac{\text{Koeff. von } 2e^2\gamma^2}{\text{Koeff. von } \gamma^4} \text{ in } \left[\frac{a}{r}\right].$$

E. W. Brown[67]) hat, indem er eine Formel zur Berechnung der Terme $2q^{\text{ter}}$ Ordnung in bezug auf e und γ in der Entwicklung von $\left[\frac{a}{r}\right]$ erhielt, diese Beziehungen erweitert und auf alle Potenzen von e^2 und γ^2 ausgedehnt. Er hat ferner bewiesen[68]), daß

$$\left[\frac{\mu}{r}\right] = B + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$$

ist, und daß diese Beziehung die Theoreme von *Adams* und deren Erweiterungen einschließt. Wir wählen in diesem Falle $\beta_1 = \varepsilon$, $\beta_2 = \varpi$, $\beta_3 = \vartheta$ so daß $b_1 = n$, $b_2 = \pi_1$, $b_3 = \vartheta_1$ werden. Mit den Resultaten von

65) Siehe hierfür *Poincaré,* Sur les équations du mouvement de la Lune, Paris Bull. astr. 17 (1900) p. 167 u. ff.

66) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1878). = Collected works 1, p. 189—204.

67) Investigations, Amer. Journ. Math. 17 (1895), p. 345—356.

68) London Math. Proc. 28 (1897), p. 143—155.

Adams hat sich auch *L. Picard*[69]) beschäftigt, der zu ihrem Beweise die Theorie der Integralinvarianten heranzieht. Eine weitere Reihe von Beziehungen, die gelten, wenn $\frac{a}{a'}$ nicht vernachlässigt wird, hat wiederum *E. W. Brown*[70]) erhalten:

$$(\alpha) \qquad c_i = \left[x' \frac{dx}{d\omega_i} + y' \frac{dy}{d\omega_i} + z' \frac{dz}{d\omega_i}\right],$$

$$(\beta) \qquad [T] + [F] = B + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{dB}{d\alpha} = \left[\frac{d'F}{d\alpha}\right]^{71)},$$

wobei α eine gegebene Konstante ist, die in F, aber nicht in dem Winkel $n't + \varepsilon'$ vorkommt und von n' unabhängig ist, und wo $\frac{d'F}{d\alpha}$ bedeuten soll, daß die Ableitung nach α nur soweit dasselbe in dem ursprünglichen Ausdruck für F explizit vorkommt, genommen werden soll. Ferner

$$T - F - n'C_4 = -B, \quad \text{wo} \quad \frac{dC_4}{dt} = -\frac{d'F}{d\varepsilon'}.^{72)}$$

$$(\delta) \qquad \frac{dB}{dn'} - \left[\frac{\partial' F}{\partial n'}\right] = [C_4] = \left[x' \frac{dx}{d\varepsilon'} + y' \frac{dy}{d\varepsilon'} + z' \frac{dz}{d\varepsilon'}\right],$$

wo $\frac{\partial' F}{\partial n'}$ bedeutet, daß die Ableitung des ursprünglichen Ausdruckes von F nach dem explizit auftretenden n' ohne Rücksicht auf sein Vorkommen in $n't + \varepsilon'$ genommen werden soll.

Diese Relationen werden auf beliebige Funktionen der gegebenen Konstanten und von t in einer weiteren Arbeit[73]) ausgedehnt.

Brown[74]) gibt noch eine andere Schar von Beziehungen zwischen den Derivierten von Funktionen der Koordinaten nach den willkürlichen Größen. Insbesondere wird gezeigt, wie Derivierte nach n aus einer Theorie gefunden werden können, in der n numerisch benutzt ist, wenn nur die andern willkürlichen Größen unbestimmt gelassen sind. Es wird zunächst gezeigt für die Systeme b) und c) von Nr. **10** und dann[75]) für Rechnungszwecke erweitert auf die Konstanten e, k seiner Theorie (Nr. **16**).

69) Paris C. R. 131 (1900), p. 663—665.

70) Amer. Math. Trans. 4 (1903), p. 333—350.

71) Resultate, welche den (α) u. (β) entsprechen, hat *Newcomb* für das allgemeine 3-Körperproblem erhalten; Smiths. Contr. 21 (1876), Nr. 3.

72) Vgl. auch Nr. 4d.

73) *E. W. Brown,* Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 332—343.

74) Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1903), p. 234—248.

75) Lond. Astr. Soc. Mem. 59 (1908), p. 10—13.

II. Die Lösungsmethoden.

12. Die geometrischen Methoden. Der erste, der die hauptsächlichsten Ungleichheiten der Mondbewegung aus dem Gravitationsgesetze herleitete, war *I. Newton* selbt[76]), der alle seine Ableitungen in eine geometrische Form goß; er erhielt die Koeffizienten der Ungleichheiten — abgesehen von der Evektion — ziemlich genau. Auch die mittleren Bewegungen der Apsiden- und Knotenlinie hat er bestimmt; jedoch ergab sich für erstere nur ungefähr die Hälfte des beobachteten Wertes; aus den Manuskripten[77]) scheint jedoch hervorzugehen, daß es ihm später gelungen ist, ihren Wert innerhalb $8\,\%$ genau zu finden. Seine Methode ist im wesentlichen die Variation der Konstanten (Nr. **15**); sie ist von einigen späteren Autoren in analytische Form umgegossen worden.[78])

Die Hauptungleichheiten haben die folgenden Bezeichnungen erhalten:

die *elliptischen Ungleichheiten* sind die mit den Argumenten $l, 2l, 3l$ usw.;

die *jährliche Gleichung* ist die mit dem Argument l';

die *Variation* die mit dem Argument $2D$;

die *Evektion* die mit dem Argument $2D - l$;

die *parallaktische Ungleichung* ist der mit $\frac{a}{a'}$, multiplizierte Hauptteil des zum Argument D gehörigen Termes.

Die mittlere Bewegung der Apsidenlinie ist die auf die Zeiteinheit bezogene Veränderung des Argumentes $nt + \varepsilon - l$; die mittlere Bewegung der Knotenlinie jene des Argumentes $nt + \varepsilon - F$ (Nr. 6). Ursprünglich haben sich diese Namen auf den Gesamtbetrag gewisser beobachteter Ungleichförmigkeiten in der Mondbewegung bezogen; heute bezieht man sie lediglich auf die angeführten bestimmten Argumente; sie werden mit Vorteil vor allem bei geometrischen Ableitungen der Mondbewegung benutzt.[79])

13. Die wahre Länge als unabhängige Veränderliche. *Laplace*[80]) benutzt die modifizierte Ellipse (Nr. 8) als intermediäre Bahn und

---

76) Principia, 3. Buch.

77) Portsmouth Collect., Cambridge 1888.

78) *Laplace,* Méc. cél., liv. 16; *J. C. Adams,* Coll. Works 2, p. 227—232; *Tisserand,* Méc. cél. 3, chap. 3.

79) *J. Herschel,* Outlines of Astronomy, London 1883; *Airy,* Gravitation, London 1834; *Möbius,* Elemente der Mechanik des Himmels sect. 3, Leipzig 1843. = Gesammelte Werke 4.

80) Méc. cél. 3, liv. 7. In bezug auf *Laplaces* Methode siehe auch: *Airy,*

setzt die aus ihre folgenden Koordinatenausdrücke in R (Nr. 3), und dann dessen Ausdruck in die zwei ersten Gleichungen Nr. 4 b) ein. Seien u_0, s_0 die der modifizierten Ellipse entsprechenden und $u = u_0 + \delta u$; $s = s_0 + \delta s$ die gesuchten genauen Werte, so kennen wir (Nr. 6 mit v statt $nt + \varepsilon$) für δu und δs den formalen Ansatz als trigonometrische Reihe mit unbestimmten Koeffizienten; die durch das Einsetzen in die Differentialgleichungen sich ergebenden Bedingungsgleichungen bestimmen diese letzteren.

In δu treten zwei neue Integrationskonstanten in der Form $A \cos (cv + \alpha)$ auf; *Laplace* setzt $\alpha = -\varpi$, und für A einen Wert, so daß der formelle Ausdruck der hauptsächlichsten elliptischen Ungleichung in Länge ungeändert bleibt; c wird aus den Bedingungsgleichungen der anderen Terme dieses Arguments durch die Forderung bestimmt, daß v nicht außerhalb trigonometrischer Funktionen vorkommen soll. Der Hauptterm von δs ist von der gleichen Form; die Integrationskonstanten und g werden auf analoge Weise bestimmt. Wenn δu und δs als Funktionen von v erhalten sind, dann gibt die dritte Gleichung Nr. 4 b) t als Funktion von v; die neu auftretenden Integrationskonstanten werden so gewählt, daß stets $nt + \varepsilon$ gleich dem unperiodischen Teil von v wird; nunmehr findet man durch Reihenumkehrung v, und damit endlich u und s als Funktionen von t. Sobald die Bedingungsgleichungen aufgestellt sind, setzt *Laplace*, abgesehen vom Koeffizienten des Hauptgliedes jeder Periode, die numerischen Werte ein (Nr. 6). Die so er haltenen Näherungswerte schließen die zweiten Potenzen der störenden Kraft, also die Quadrate und Produkte der δu und δs und, für gewisse Terme, bei denen kleine Divisoren auftreten, die dritten Potenzen ein.

Clairaut[81]) ist zunächst davon ausgegangen, in Nr. 4 b) die Breite zu vernachlässigen, und hat dann die Lösung durch fortgesetzte Näherungen gesucht. Er führte zuerst die modifizierte elliptische Bahn in die Differentialgleichungen ein und veröffentlichte einen mit den Beobachtungen genügend nahe übereinstimmenden Wert für c; er hat seine Resultate auf numerischem Wege erlangt. *D'Alembert*[82]) befolgte eine ähnliche Methode, jedoch unter Benutzung analytischer Entwicklungen; er gab auch allgemeine Entwicklungen für die Koordinaten, welche allein periodische Glieder enthalten, und endlich erkannte er

---

Math. Tracts, Cambridge 1831; *Godfray,* Treatise, London 1871; *Résal,* Méc. cél., chap. 12, Paris 1884; *Tisserand,* Méc. cél. 3, chap. 7.

81) Théorie de la Lune, St. Petersburg 1752, 1765.

82) Recherches, tome 1.

es auch als wichtig, sich mit der Konvergenz dieser Reihen zu beschäftigen.

Damoiseau[83]) und *Plana*[84]) sind der Methode *Laplace*s gefolgt, ersterer numerisch, letzterer analytisch, und zwar bis zu einem viel höheren Grade der Annäherung. *Plana* gelangte zu Entwicklungen, die bis zu den 5. Ordnungen in den Parametern gehen, aber es schlichen sich viele Irrtümer[85]) in seine Arbeit ein, die ihren Wert vermindern; sie wurde durch *Delaunay*s Theorie vollständig in den Schatten gestellt (Nr. **15**). *Laplace*s Methode ist auch vielfach für spezielle Gruppen von Störungsgliedern angewandt, aber die Reihenumkehrung und die Darstellung von $\cos l'$, $\sin l'$ als Funktionen von v, welche bei ihr erforderlich sind, haben ein ernstes Hindernis für ihre Entwicklung bis zu einer modernen Anforderungen genügenden Genauigkeit gebildet.

14. Polarkoordinaten mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher. *De Pontécoulant*[86]) benutzt die Gleichungen Nr. **4**a und löst sie, indem er zunächst s vernachlässigt, vollständig bis zur 5. Ordnung in den kleinen Größen, für gewisse Koeffizienten sogar bis auf höhere Ordnungen; die Methode ist die der unbestimmten Koeffizienten. Für die Breite geht er auf die Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z}$ zurück, welche einfacher als die Gleichung für s ist; in diese werden die früher erhaltenen Werte für r und v eingesetzt, und man findet dann alle Terme, die von der ersten Potenz von γ oder z abhängen. Die Gleichungen für r und v geben die von γ^2, jene für z die von γ^3 abhängigen usf. Die willkürlichen Konstanten sind so definiert, daß sie ihrer Bedeutung nach mit denen von *Laplace* übereinstimmen, und sie weichen auf diese Weise von ihrer für diese Theorie naturgemäßen Definition ab[87]). *J. W. Lubbock*[88]) befolgte unabhängig fast die gleiche Methode, trieb sie aber nicht bis zu derselben Genauigkeit; jedoch deckte er, indem er häufig seine Resultate mit denen von *Plana* und *de Pontécoulant* verglich, mehrere Fehler auf. Die Arbeit von *Stockwell*[89]) ist

83) Théorie de la Lune, Paris mém. prés. sér. 3 1 (1827), p. 313—598.

84) Théorie du mouvement de la Lune, 3 Bde., Turin 1832

85) *Lubbock*, Lond. Astr. Soc. mem. 30 (1862), p. 1—37; *Adams*, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 13 (1853), p. 262 = works 1, p. 110; *Cayley*, ib. 23 (1863), p. 211—215; 25 (1865), p. 182—189 = works 7, p. 357—360, 361—366.

86) Système du monde, 4, Paris 1846. Die Methode ist im einzelnen auseinandergesetzt in den Lehrbüchern von *Tisserand, Brown, Andoyer.*

87) Siehe *Brown*, Treatise, Art. 152, 159.

88) Siehe das Verzeichnis zu Anfang dieses Artikels.

89) Gesammelt in „Theory of the Moon's motion", Philadelphia 1881.

infolge von Fehlern in der Theorie nicht sehr zuverlässig. Über die Arbeiten von *Airy* und *Cayley* siehe Nr. **15**. *E. Neison* (= *Nevill*)[90]) hat eine Methode skizziert, die Mondtheorie innerhalb der Richtlinien *Pontécoulants* so zu behandeln, daß für jeden Koeffizienten und jedes Argument, welche in der Entwicklung der Glieder der Differentialgleichung vorkommen, ein besonderes Symbol eingeführt wird, welches die Herkunft des Gliedes andeutet. Man kann dann die Gleichungen entwickeln, integrieren und den Wert jedes Koeffizienten nach der Integration einsetzen; so trifft jeder etwa begangene Fehler nur den Term, in dem er begangen ist. Dies ist die Methode der unbestimmten Koeffizienten in ihrer allgemeinsten Form, aber die Kompliziertheit des Verfahrens läßt seinen praktischen Wert zweifelhaft erscheinen. *H. Andoyer*[91]) hat sie jedoch mit Erfolg zu sehr genauen allgemeinen Entwicklungen spezieller Terme (Nr. **6**) verwandt und durch Vergleich mit *Delaunay* (Nr. **15**) viele kleine Fehler bei letzterem berichtigt.

15. Die Variation der willkürlichen Konstanten. Die erste Anwendung dieser Methode auf die Mondtheorie stammt von *Euler*[92]), der sich aber im wesentlichen damit begnügte, die Gleichungen anzugeben. *Poisson*[93]) schlug vor, die Differentialgleichungen für die sechs Elemente $a, e, i, \varepsilon, \varpi, \vartheta$ (VI 2, 15, Nr. **6**) zu einer allgemeinen Entwicklung nach fortgesetzten Näherungen zu verwenden. Er erkannte indessen schon, daß sie am nützlichsten bei der Behandlung der langperiodischen und säkularen Terme sein müßte, und seine Beispiele betreffen zum größten Teil Berechnungen einzelner von diesen; es steht jedoch allgemein fest, daß die Methode für eine vollständige Entwicklung nicht brauchbar ist. *V. Puiseux*[94]) hat sie modifiziert, indem er in der Störungsfunktion nur die für den besonderen Zweck erforderlichen Terme beibehielt. Er kommt so zu einer schnelleren Berechnungsweise für gewisse säkulare und langperiodische Ungleichheiten, besonders die, welche von der Wirkung der Planeten herrühren.

90) Lond. Astr. Soc. mem. 44 (1879), p. 1—49.

91) Fac. Toul. Ann. 6 (1892), J; 7 (1893), E = Toul. Obs. Ann. 3 (1899), B, C; Paris Bull. Astr. 18 (1901), p. 177—208; 19 (1902), p. 401—418; 24 (1907), p. 395—412. In der letzten Arbeit ist die Methode modifiziert. Siehe auch das Buch des Verfassers im Literaturverzeichnis. Die modifizierte Methode wendet *P. Coubet*, Fac. Toul. Ann. Ser. (3) 1 (1909), p. 381—471 auf von der Neigung abhängige Ungleichungen an.

92) Theoria motus Lunae, St. Petersburg 1753, Appendix; Berl. Acad. mém. 1763 (publ. 1770), p. 141—193.

93) Mémoire sur le mouvement usw., Paris mém. prés. (3) 13 (1835), p. 209—335.

94) Paris Éc. norm. sup. Ann. sér. 1 (1864), p. 39—80.

Delaunays Theorie[95]) geht von den Gleichungen Nr. **10**a aus, wo der Wert von R unter der Voraussetzung der elliptischen Bahn entwickelt (Nr. **9**) und damit implizit durch die Variabeln l, g, h, L, G, H ausgedrückt ist. Man setzt $R_1 = -B - A \cos\vartheta + R_2'$, wo $-B$ der Teil von R_1 ist, der unabhängig von l, g, h, l' und $-A\cos\vartheta$ einer der periodischen Terme in R_1 ist. Man löst diese Gleichungen, indem man zunächst $R_2' = 0$ setzt. Dann erscheinen statt der elliptischen Werte l, g, h, L, G, H neue willkürliche Konstanten $l_1, g_1, h_1, L_1, G_1, H_1$. Will man nun R_2' berücksichtigen, so sind diese Größen nicht mehr konstant. Es zeigt sich aber, daß sich die Differentialgleichungen, aus welchen sie zu bestimmen sind, wiederum auf die kanonische Form bringen lassen; also

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{\partial R_2}{\partial l_1}, \ldots; \quad \frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial R_2}{\partial L_1}, \ldots,$$

wo R_2 sich von R_1 dadurch unterscheidet, daß einmal die alten Größen $l \ldots H$ durch die neuen $l_1 \ldots H_1$ ausgedrückt sind, und daß ferner eine gewisse Funktion von L_1, G_1, H_1 hinzugefügt werden muß. Der Effekt dieses Verfahrens ist, daß in der neuen Funktion R_2 das Glied $A\cos\vartheta$ *nicht* mehr vorkommt. Dasselbe Verfahren wird nunmehr unter Heraushebung irgendeines periodischen Gliedes in R_2 usf. so lange wiederholt, bis alle merklichen periodischen Glieder eliminiert sind. Die Differentialgleichungen reduzieren sich dann auf:

$$\frac{dL_n}{dt} = 0, \ldots; \quad \frac{dl_n}{dt} = -\frac{\partial R_{n+1}}{\partial L_n}, \ldots,$$

welche unmittelbar gelöst werden können. Allerdings treten in diesem Verfahren bei jedem Schritt neue periodische Terme in R_p auf, aber dieselben sind jeweils von höherer Ordnung als die bereits eliminierten; auf die Weise braucht der Prozeß nur so lange fortgeführt zu werden, als die Koeffizienten noch merklich sind. Die Modifikationen und Einzelheiten findet man bei *Delaunay*[95]) in Kap. 3 und in späteren Auseinandersetzungen der Methode durch verschiedene Autoren[96]).

Nachdem diese Operationen erledigt sind, müssen die verschiedenen Transformationen, welche die Integrationskonstanten hintereinander erlitten haben, in die elliptischen Reihenentwicklungen für Breite, Länge und Parallaxe $\left(\text{oder } \frac{1}{r}\right)$ eingesetzt werden, die damit Funktionen von t und den endgültigen willkürlichen Konstanten werden. Endlich

95) Théorie de la Lune, Paris mém. prés. 28 (1860), 29 (1867); er gibt seine Methode auch in Conn. des Temps, Add. (1861), p. 3—44.

96) *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 11, 12; *Brown*, Treatise, chap. 9. Siehe auch die späteren Noten dieser Nr.

müssen diese letzteren aus praktischen Gründen noch einmal durch neue ergänzt werden, welche folgenden Anforderungen entsprechen: 1) $nt + \varepsilon$ ist der nichtperiodische Teil der Länge; 2) der hauptsächlichste Term sowohl in Länge als in Breite (Argumente: $cnt + \varepsilon - \varpi$, $gnt + \varepsilon - \vartheta$) müssen für ihre Koeffizienten denselben Ausdruck haben wie in der elliptischen Bewegung; 3) $\varepsilon - \varpi$ bzw. $\varepsilon - \vartheta$ sind die konstanten Teile dieser Argumente; 4) $n^2a^3 = \mu = E + M$. Alle Entwicklungen sind bei *Delaunay* bis zum 7. Grade einschließlich in den kleinen Größen ($m = \frac{1}{13}$ als kleine Größe erster Ordnung betrachtet) geführt, abgesehen von einigen Koeffizienten, die weiter geführt sind, wegen auftretender großer numerischer Multiplikatoren, welche ihre Konvergenz verlangsamen[97]). *Airy*[98]) und *Cayley*[99]) schlugen vor, *Delaunay*s Endresultate durch Einsetzen in die Gleichungen Nr. 4a) zu kontrollieren und nachzusehen, welcher Korrektionen sie bedürfen; ersterer führte diese Arbeit auch in ziemlichem Umfange durch, verfiel aber in Irrtümer[100]). Die Methode ist auch unvollständig[101]), weil *Delaunay* $\frac{1}{r}$ nur bis zur 5. Ordnung gibt, während man für Gleichung Nr. 4a) diesen Ausdruck bis zu demselben Genauigkeitsgrade braucht wie Länge und Breite. Tafeln, die auf *Delaunay*s Theorie gegründet sind, sind von *Radau* veröffentlicht worden.[102])

Der wesentliche Punkt von *Delaunay*s Theorie ist der Übergang von einem Satze kanonischer Differentialgleichungen zum andern; er selbst erreicht dies durch direkte Transformation, *Brown*[103]) durch die Methode der willkürlichen Variationen, *Tisserand*[104]) und, kürzer,

97) Die numerischen Ausdrücke der Koordinaten sind von *Delaunay* gegeben: Conn. des Temps pour 1869, Add. p. 3—42; die vollständigen analytischen Ausdrücke von Knoten- und Apsidenlinie in Paris C. R. 74 (1872), p. 17—21; die analytischen Ausdrücke der Koordinaten in Conn. des Temps 1865, Add. p. 3—87 sind ohne die Zusätze gegeben, die er durch ergänzende Untersuchungen — Paris mém. prés. 29 (1867), chap. 10 — fand, welche unternommen waren, um langsam konvergierende Koeffizienten bis zu höheren Ordnungen genau zu erhalten.

98) London Astr. Soc. Monthly Not. 34 (1874), p. 89—98; Greenw. obs. 1875, App. p. 1—68; Numerical Lunar Theory, London 1886.

99) London Astr. Soc. Monthly Not. 52 (1892), p. 2—5 = works 13, p. 206—209.

100) Ibid. 49 (1889), p. 2.

101) *R. Radau*, Paris Bull. astr. 4 (1887), p. 274—286 = Lond. Observatory 10 (1887), p. 339—345, 377—383; *J. C. Adams*, London Astr. Soc. Monthly Not. 48 (1888), p. 319—322 = Coll. Works 1, p. 264—267; *E. J. Stone*, London Astr. Soc. Monthly Not. 52 (1892), p. 68—69.

102) Paris 1911.

103) Treatise, chap. 9.

104) J. de Math. (2) 13 (1868), p. 255—303; Méc. cél. 3, chap. 11.

Brown[105]) durch die Benutzung der *Jacobi*schen Methode. Die Lösung jedes Satzes kommt auf die folgender Gleichungen hinaus:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dA}{d\Theta}\cos\vartheta + \frac{dB}{d\Theta} + in'; \quad \frac{d\Theta}{dt} = A\sin\vartheta.$$

Diese Gleichungen ergeben als Lösung:

$$A\cos\vartheta + B + in'\Theta = C = \text{const.}$$

und

$$t + c = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 - (C - B - in'\Theta)^2}};$$

A und B sind Funktionen von Θ, und i ist der Koeffizient von l' in ϑ. In der Mondtheorie ergeben diese Gleichungen Θ als periodische Funktionen von $\vartheta_0(t + c)$, wo ϑ_0 eine bestimmte Konstante ist. Das Integral ist vollständig für alle Fälle von *Poincaré*[106]) studiert worden. Die Gleichungen sind im allgemeinen vom Typus Nr. 5c), und es müssen also in speziellen Fällen die dort gegebenen Modifikationen eintreten.

Poincaré[107]) hat darauf hingewiesen, daß die kanonischen Gleichungen Nr. **10**b) mit Vorteil vor den *Delaunay*schen benutzt werden können, indem es dann unnötig ist, sowohl G und H als ε und γ in den Formeln hervorzuheben, und *Brown*[108]) zeigte weiter, daß, wenn man Nr. **10**b) verwendet, man die Lösung in einer Form vornehmen kann, die jede Anzahl von periodischen Gliedern einzuschließen gestattet. Endlich haben *Bohlin*[109]) und *Poincaré*[110]) eine Methode gefunden, welche die Transformationen von einem Satz kanonischer Gleichungen zum nächsten zu vermeiden gestattet; in *Poincaré*s Auseinandersetzung stellt sich die Methode als eine Entwicklung dar, welche dadurch erreicht wird, daß die „Hauptfunktion" ihrerseits in der Form:

$$S = S_0 + mS_1 + m^2S_2 + \cdots$$

entwickelt auftritt, wo die S_0, S_1 usw. durch Rekurrenzen bestimmt werden.

Für *Perchot*s Modifikation von *Delaunay*s Methode vgl. Nr. 8.

16. Rechtwinklige Koordinaten mit beweglichen Achsen. In seiner späteren Theorie benutzt *Euler*[111]) rechtwinklige xy-Achsen,

105) London math. proc. 27 (1896), p. 385—390.

106) Méc. cél., chap. 19.

107) Méc. cél., chap. 1, p. 30; *O. Callandreau* [Paris Bull. Astr. 12 (1895), p. 369—372] zeigt, wie die Rechnung in diesem Fall vor sich geht.

108) London Math. Proc. 28 (1897), p. 146.

109) Bih. Stockholm Akad. 14 (1889), Nr. 5.

110) Méc. cél., chap. 19.

111) Theoria motuum Lunae etc., St. Petersburg 1772.

die sich in der Ebene der Ekliptik mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Mondes bewegen, während die z-Achse konstant senkrecht zur Ekliptik steht. Die Lösung des Problems wird als in der folgenden Form entwickelbar vorausgesetzt:

$$A + B_1 e + B_2 e^2 + \cdots + C_1 e' + C_{11} e' e + \cdots i^2 D_2 + \cdots,$$

wo die A, B, C, usw. aus periodischen Gliedern bestehen. Das ist nun möglich bis zur zweiten Ordnung, jedoch nicht für die höheren Ordnungen, indem auch die Bewegungen der Apsiden- und Knotenlinie die Potenzen von e^2, e'^2 usw. enthalten. Indessen vermeidet *Euler* diese Schwierigkeit, indem er die aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte dieser mittleren Bewegungen anwendet und deren theoretische Werte nur zur Verifikation benutzt. Er erhält dann eine Reihe von Systemen von Differentialgleichungen für die sukzessive Bestimmung der A, B usw., und jedes System kann dann nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten integriert werden, da ja die Ausdrücke der Form noch bekannt sind. Er gibt die Lösung von 31 solchen Systemen von Differentialgleichungen und berechnet danach Tafeln für die Bewegung. Seine Methode ist von *J. T. Schubert*[112]) weitergeführt, der die von e^2 und e'^2 abhängigen Terme mit ziemlicher Vollständigkeit erhält. Er benutzt diese letzteren, um *Laplaces* Wert für die Säkularbeschleunigung (Nr. **23**) wiederzufinden, muß aber zu dem Zweck zu festen Achsen übergehen.

G. W. Hill[113]) schlug vor, die Bewegung auf Achsen zu beziehen, die sich mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit der Sonne in der Ekliptik bewegen, und die Störungen in Gruppen nach Maßgabe ihrer Charakteristiken abzuteilen. Er behandelt zunächst die Glieder mit der Charakteristik 1 (d. h. diejenigen, welche von e, e', γ, $\frac{a}{a'}$ unabhängig sind). Das Resultat ist *Hills* erste intermediäre Bahn, auf die in Nr. 8 Bezug genommen wurde; es ist die partikuläre Lösung (α) in Nr. **6** der Gleichung Nr. **4** (c), falls gesetzt wird $\Omega_p = z = 0$; und zwar enthält sie nur zwei von den erforderlichen vier willkürlichen Konstanten und ist periodisch in bezug auf die beweglichen Achsen[114]). *Hill* setzt diese Lösung, $x = x_0$, $y = y_0$, formal in die

112) Petersb. Nova Acta 13 (1802), p. 418—462.

113) Amer. Journ. math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260 = Works 1, p. 284—335.

114) Diese Bahn kann man auch als „Variationsbahn" bezeichnen, da ihr hauptsächlichster periodischer Term eben das Hauptglied der „Variation" (vgl. Nr. **12**) ist. Schon *Euler* hat ihre Wichtigkeit erkannt (Hist. Mem. Berl. Acad. 1766 (publ. 1768), p. 334—353) und gemeint, daß ihre vollständige Bestimmung viele Schwierigkeiten der Mondtheorien lösen würde.

Differentialgleichungen ein und löst die Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten numerisch bis auf 15 Dezimalstellen und analytisch bis m^9; er untersucht dann diese Bahn auch für andere Werte von m (siehe Nr. 1). In einer anderen Abhandlung[115]) beginnt er die vollständige Lösung der reduzierten Gleichungen, indem er setzt

$$x = x_0 + \delta x; \quad y = y_0 + \delta y$$

und alle Produkte von δx und δy wegläßt; die dadurch neu hinzutretenden Glieder sind die mit der Charakteristik e. Für δx und δy ergeben sich auf diese Weise zwei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich mit Hilfe bekannter Integrale auf eine einzige zweiter Ordnung reduzieren lassen[116]); ihre Form und Lösung ist in Nr. 5 (a) gegeben. Bei der numerischen Auswertung beschränkt er sich auf die Berechnung des Teiles der Bewegung des Perigäums (d. i. q in Nr. 5 a)), welcher von m allein abhängt, und zwar bis auf 15 Stellen. In einer späteren Schrift[117]) wendet er die Methode an, um auch analytisch die Perihelbewegung bis m^{11} zu finden. Bezüglich der Konvergenz dieser Entwicklungen sei auf Nr. 7 verwiesen.

J. C. Adams[118]) hat eine ähnliche Untersuchung über die Knotenbewegung veröffentlicht, nachdem er vorher dieselbe intermediäre Bahn auf eine ganz andere Art wie *Hill* bestimmt, aber nichts darüber veröffentlicht hatte. Wenn r_0 den aus der intermediären Bahn folgenden Radiusvektor darstellt, so bestimmt *Adams* den Hauptteil von z durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{\mu}{r_0^{\,3}} + n'^2\right) z = 0,$$

welche also bereits die Form Nr. 5 (a) besitzt. Der hieraus sich ergebende Teil der Knotenbewegung wird auf 15 Stellen berechnet. Die

115) Motion of the Lunar perigee, Cambridge, U. S. A., 1877 = Acta math. 8 (1886), p. 1—36 = works 1, p. 243—270.

116) *G. H. Darwin* [Acta math. 21 (1897), p. 133—139 = Math. Ann. 51, p. 538—543 = Works 4, p. 27—32, zuerst publiziert bei *Brown,* Treatise, p. 211) und *J. C. Adams* [Lectures, p. 85—88 = Coll. Works 2, p. 81—84] haben gezeigt, daß diese Gleichung die einer senkrechten Verrückung von der Variationsbahn aus ist. *E. A. Hermann* [London Astr. Soc. Monthly 63 (1903), p. 541—543] hat eine kurze Ableitung dieses Resultats gegeben.

117) *G. W. Hill,* Amer. Ann. Math. 9 (1895), p. 31—41 = Works 4. p. 41—50. *Hills* Variationsbahn und Perihelbewegung hat *A. W. Krassnow* nach *Jacobis* Methode abgeleitet, Astr. Nachr. 170 (1906), p. 309—318; 173 (1907), p. 49—56; 174 (1907), p. 129—134.

118) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1878), p. 43—49 = Coll. Works 1, p. 181—188.

Störungsglieder mit den Charakteristiken $\left(\frac{a}{a'}\right)^i$ $[i=1, 2, 3]$ hat *E. W. Brown*[119]) durch eine Vervollständigung der *Hill*schen Gleichungen bis zu eben diesen Gliedern erhalten. Er hat auch *Hill*s Arbeit über die Apsidenbewegung fortgeführt[120]), indem er die periodischen Terme der Charakteristiken e, e^2, e^3 und den Teil der Perigäumsbewegung mit der Charakteristik e^2 fand. Die periodische Lösung, welche streng alles berücksichtigt, was von m und $\frac{a}{a'}$ allein abhängt, einschließlich der Teile der Störungsfunktion, die $\frac{M}{E}$, λ enthalten (Nr. 3), hat wiederum *G. W. Hill*[121]) gegeben[122]). Die Methode, die er hier verwendet, um die Korrektionen zu ermitteln, die seine eignen und *Brown*s Resultate erfordern, ist eine Modifikation der Gleichungen von *Laplace* (Nr. 4 (b)) Die Glieder mit den Charakteristiken γ, γ^2, γ^3 und den Teil der Knotenbewegung, der γ^2 als Faktor enthält, verdankt man *P. H. Cowell*[124]). Endlich hat noch *Hill* die Glieder mit den Charakteristiken $e'\left(\frac{a}{a'}\right)^i$ berechnet, indem er sich einer früher angegebenen Methode bedient[125]), und hat *Andoyer*[126]) nach einer modifizierten Methode von *Hill* die Koeffizienten, die von m, e' und der ersten Potenz von e abhängen, analytisch abgeleitet.

Alle diese Arbeiten haben die Auffindung von Gliedern ganz bestimmter Charakteristiken zum Ziel; eine generelle Methode zur strengen Behandlung des ganzen Problems ist von *E. W. Brown*[127]) skizziert. Er erhält zunächst die allgemeinen Gleichungen Nr. 4 (c) und entwickelt, indem er setzt:

$$u = u_0 + \delta u; \quad s = s_0 + \delta s,$$

nach Potenzen von δu, δs, z, so daß die Ordnung der Charakteristik von $(\delta u)^i (\delta s)^j z^k$ $i + j + k$ ist. Indem nun die Bestimmung der

---

119) Amer. Journ. Math. 14 (1892), p. 141—160; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 52 (1892), p. 71—80.

120) Amer. Journ. Math. 15 (1893), p. 244—263; 321—338.

121) Astron. Journ. 15 (1895), col. 136—143 = Works 4, p. 78—93. *Moulton* [Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 537—571], der Polarkoordinaten gebraucht, erhält sie analytisch mit großer Genauigkeit. Vgl. auch *Brendel* (Nr. 18).

122) Ein kleiner Fehler *Hill*s in der Reduktion von *Brown*s Resultaten bewirkte, daß die Korrektionen groß zu sein schienen; *Hill*s endgültige Resultate sind aber trotzdem korrekt.

124) Amer. Journ. Math. 18 (1896), p. 99—127.

125) Astr. Journ. 20 (1899), p. 115—124 = Works 4, p. 153—168.

126) Fac. Toul. Ann. 6 (1892) J; 7 (1893) E.

127) Investigations, Amer. Journ. Math. 17 (1895), p. 318—358.

Störungsglieder einer bestimmten Charakteristik auf die Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen der Form Nr. **5** (b) zurückgeführt wird, werden sukzessive die Störungen einer bestimmten Charakteristik erhalten. Die Integrationskonstanten a, ε, ϖ, ϑ werden in der gewöhnlichen Weise definiert; die Konstante a als Hauptterm der „Variationsbahn" so, daß $\mathrm{a} = af(m)$, wo $a^3 n^2 = \mu$; die Konstante ae als Koeffizient der hauptsächlichen elliptischen Glieder in x; endlich ak als die des Hauptgliedes in z. Alsdann werden zusammen mit denen gewisser Charakteristiken dritter Ordnung die Koeffizienten der Charakteristiken zweiter Ordnung in der Apsiden- und Knotenbewegung bestimmt, indem für sie lineare Gleichungen erhalten werden, die frei sind von allen unbestimmten Koeffizienten. Dieser eben skizzierte Plan ist in einer Reihe von Abhandlungen im Detail ausgearbeitet[128]. Zuerst werden die rechtwinkligen Koordinaten des Mondes abgeleitet, wobei von Anfang an der numerische Wert von m eingesetzt wird, während die andern Konstanten unbestimmt bleiben. Alle früheren Resultate mit Ausnahme von *Hills* Variationsbahn[129]) werden neu gerechnet oder kontrolliert. Die Hauptarbeit reduziert sich auf Multiplikation aufsteigender und absteigender Potenzreihen mit numerischen Koeffizienten, wobei jedes Reihenprodukt leicht kontrolliert werden kann. Auch werden verschiedene Wege zur Kontrolle der Gesamtresultate benutzt. Am durchgreifendsten sind dabei die aus *Adams'* Theorem (Nr. **11**) folgenden Relationen. Meistens wird mit den komplexen Variabeln in ihrer ursprünglichen Form gerechnet, nur für Terme und Charakteristiken der Ordnung 5, 6 werden die homogenen Formen (Nr. **4** (c)) gebraucht. Die Resultate werden auf Polarkoordinaten transformiert, die Konstanten a, e, k in diejenigen von *Delaunay* (Nr. **15**) übergeführt und ihre numerischen Werte eingesetzt, so daß alle Koeffizienten schließlich in Bogensekunden ausgedrückt sind. Fast alle Koeffizienten in Länge und Breite über $0''.001$ und in Parallaxe über $0''.0001$ werden erhalten, ohne Ausnahme die über $0''.01$ bzw. $0''.001$. Die jährlichen mittleren Bewegungen von Perigäum und Knoten werden auf $0''.01$ genau bestimmt. In der letzten Arbeit werden andere bekannte Schwerewirkungen (Nr. **20**—**25**) ebenso genau berechnet[130]). Tafeln, die alle diese Störungen einschließen, sind gegenwärtig in Ausführung[131]).

---

128) Theory of the Motion of the Moon, siehe das eingangs gegebene Verzeichnis von Monographieen. Eine andere Darstellung gibt *Poincaré*, Leçons de Méc. cél. 2, chap. 24—28.

129) Amer. Journ. Math. 1 (1877), p. 248 = Works 1, p. 324.

130) Die Endergebnisse finden sich in Lond. Astr. Soc. Mem. 57 (1905),

Poincaré[132]) hat eine Modifikation dieser Methode angegeben, die, falls man auf eine rein analytische Entwicklung ausgeht, eine Abkürzung der Arbeit darstellt. Er geht dabei von den Eigenschaften des Klammerausdruckes $[f, g]$ (Nr. **11**) aus. Wenn nämlich Q irgendeine Koordinate oder Geschwindigkeitskomponente bezeichnet, so hat $\frac{\partial Q}{\partial l}$ den Faktor e, $\frac{\partial Q}{\partial F}$ den Faktor γ (entsprechend den Bezeichnungen von Nr. **6**), so daß, wenn man für f: $nt + \varepsilon$, n, für g der Reihe nach: e, l oder γ, F usw. setzt und außerdem voraussetzt, daß die Koeffizienten von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ nach Potenzen von e, e', γ, $\frac{a}{a'}$ entwickelt sind, die Ableitungen der Koordinaten und Geschwindigkeiten nach f in ihren Charakteristiken um eine Ordnung niedriger sind als die nach g. Infolge dieser Tatsache hängt die Berechnung der Störungsterme einer bestimmten Charakteristik von je einem Paar linearer Differentialgleichungen ab, die etwas einfacher sind als die von *Brown* (Nr. **5** (b)). Es werden die Gleichungen von Nr. **4** (d) benutzt und nach *Poincarés* Modifikation von *Delaunays* Methode (Nr. **15**) behandelt; dabei wird eine spezielle Untersuchung über die Apsiden- und Knotenbewegung und für einige andere Terme erforderlich, deren Koeffizienten nicht durch die Gleichungen $[f, g] = \text{const.}$ geliefert werden.

17. Mittlere Anomalie und Verhältnis der Entfernung zu einem elliptischen Radiusvektor[133]) **als abhängige Variable.** *P. A. Hansen*[134]) geht aus von einer Ellipse fester Größe und Form in der instantanen Bahnebene. Die Längen werden von einem „Anfangs-

---

p. 130—145; 59 (1908), p. 94—103 mit Verbesserungen in Lond. Monthly Not. 70 (1910), p. 3, 148; 74 (1914), p. 424. Verschiedene Nebenresultate und Diskussionen in Artikeln in den Lond. Monthly Not. 1891—1910.

131) *E. W. Brown*, Lond. Monthly Not. 70 (1909), p. 148—175; 71 (1911), p. 639—650, 651—660.

132) Paris Bull. Astr. 17 (1900), p. 167—204; Leçons de Méc. cél., chap. 29.

133) Dieses Verhältnis ist zuërst von *Euler* (siehe Nr. **18**) als abhängige Veränderliche benutzt.

134) *Hansen* hat seine Methoden in einer Reihe von Veröffentlichungen dargelegt mit dem Titel: Disquisitiones circa theoriam perturbationum, quae motus corporum coelestium afficiunt, Astr. Nachr. 7 (1829), col. 417—448, 465—484; 11 (1834), p. 49—104, 309—368; 12 (1835), p. 321—364; 13 (1836), p. 97—142. Die auf die Mondtheorie bezüglichen Teile sind gesammelt und vervollständigt in den Fundamenta nova usw., Gotha 1838; die „Darlegung usw.", Sächs. Ges. Abh. 6 (1862), p. 91—498; 7 (1864), p. 1—399, ist hauptsächlich zur Verifikation früher ausgeführter Rechnungen geschrieben, aber sie enthält zugleich die leichteste Darstellung im allgemeinen. Es empfiehlt sich, die der Planetentheorie gewidmeten Schriften ebenfalls zu Rate zu ziehen: Encycl. VI 2, 15.

punkt"[135]) aus gerechnet, der dadurch definiert ist, daß sich bei einer infinitesimalen Drehung der Bahnebene die Längen nicht ändern. Die Apsidenlinie hat in der Bahnebene von diesem Anfang gerechnet, die gleichförmige Bewegung $n_0 y$. Bezeichnet $n_0 z$ die mittlere Anomalie in dieser Ellipse, so hat man $z = t +$ const. für eine rein elliptische, $z = t +$ const. $+ \delta z$ in der tatsächlichen Bewegung. Sind nun $\bar{v}$ und $\bar{r}$ Länge und Radiusvektor in der Ellipse, v und r in der tatsächlichen Bahn, so setzt *Hansen*:

$$v = \bar{v}; \quad r = \bar{r}(1 + \nu),$$

so daß also die Bewegung in der wahren Bahn auf die Bestimmung von δz und ν reduziert ist. Es seien weiter: $2a_0$, e_0, $\bar{f}$ große Achse, Exzentrizität und wahre Anomalie in der Hilfsellipse, ferner

$$n_0^2 a_0^3 = \mu = h_0 n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2};$$

bedeuten endlich $\bar{\varrho}$, $\bar{\varphi}$ dieselben Funktionen einer Variabeln ζ, wie $\bar{r}$, $\bar{f}$ von z sind, und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$ die Komponenten der störenden Kraft in Richtung des Radiusvektors und senkrecht dazu in der instantanen Bahnebene, dann ergeben sich für z und ν folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \overline{W} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{\bar{r}}{a_0}\right)^2,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{y(1+\nu)}{\sqrt{1-e_0^2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\bar{r}}{a_0}\right)^2.$$

Dabei ist

$$\frac{h_0}{h} = \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2 \frac{dz}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2,$$

und $\overline{W}$ wird erhalten, indem man z statt ζ nach Integration der folgenden Differentialgleichung setzt:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} = h_0 \mathfrak{T} r\Big[2\frac{\bar{\varrho}}{r}\cos(\bar{f}-\varphi) - 1 + 2\frac{h^2}{h_0^2}\frac{\bar{\varrho}}{a_0(1-e_0^2)}\{\cos(\bar{f}-\bar{\varphi}) - 1\}\Big] \\ + 2h_0\frac{\bar{\varrho}}{r}\mathfrak{P} r\sin(\bar{f}-\bar{\varphi}) + \frac{n_0 y}{\sqrt{1-e_0^2}}\Big[\left(\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\right)^2\frac{\partial W}{n_0\partial\zeta} \\ - \frac{1}{2}\left(W + \frac{h_0}{h} + 1\right)\frac{d}{n_0 d\zeta}\left(\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\right)^2\Big]\end{aligned}$$

unter der Annahme, daß $\zeta =$ const. ist[136]). y wird so bestimmt, daß

135) Der englische Ausdruck „Departure point" ist als Terminus von *A. Cayley*, Quart. Journ. Math. 1 (1857), p. 112—125 = Coll. Works 3, p. 19 eingeführt.

136) Methoden, zu diesen Differentialgleichungen zu gelangen, sind gegeben von *Zech*, Astr. Nachr. 41 (1855), col. 129—142, 205—208; *Hansen*, ibid. 42 (1856), col. 273—280; *Brünnow*, ibid. 64 (1865), col. 259—266; *A. Cayley*, Quart. Journ.

nur periodische Glieder in der Lösung vorkommen. Indem man zunächst die elliptischen Werte:

$$z = t + \text{const.}, \quad v = 0, \quad h = h_0, \quad W = 0$$

in die rechte Seite der Differentialgleichung für $\overline{W}$ einsetzt, erhält man eine zweite Annäherung für diese Funktion und damit dann aus den Gleichungen v und z solche für diese Funktionen usf.

Um die Bewegung der Bahnebene zu finden, ersetzt *Hansen* die Gleichungen für die Veränderungen von Knoten und Neigung (Encycl. VI 2, 15 Nr. 22) wie folgt: Seien

$$N_0 + K_0 - N - K, \quad - n_0(\alpha - \eta)t;$$
$$N_0 - K_0 - N + K, \quad - n_0(\alpha + \eta)t$$

bezgl. die periodischen und Säkularteile der Mondknotenbewegung in der momentanen Bahnebene bzw. der momentanen Ekliptik; J der Winkel zwischen diesen Ebenen; $-\mu'$ die mittlere Länge des Mondknotens in der momentanen Ekliptik; i' und σ' Neigung und Knotenlänge der momentanen in einer festen Ekliptik gegebenen Epoche — die Länge gerechnet von einem „Anfangspunkt" in der ersteren Ebene. Bezeichnet man ferner:

$$P = 2\sin\frac{J}{2}\sin(N - N_0), \quad p' = \sin i' \sin\sigma',$$

$$Q = 2\sin\frac{J}{2}\cos(N - N_0), \quad q' = \sin i' \cos\sigma',$$

dann sind die Gleichungen, denen P, Q, K Genüge leisten müssen:

$$\frac{dP}{dt} = - n_0\alpha Q - h\left(\frac{\partial R}{\partial P}\cos^2\frac{J}{2} + \frac{1}{4}P\frac{\partial R}{\partial K}\right)$$
$$+ \frac{\cos\frac{J}{2}}{\cos i'}\left(\frac{dp'}{dt}\cos\mu' + \frac{dq'}{dt}\sin\mu'\right),$$

$$\frac{dQ}{dt} = n_0\alpha P + h\left(\frac{\partial R}{\partial Q}\cos^2\frac{J}{2} - \frac{1}{4}Q\frac{\partial R}{\partial K}\right)$$
$$+ \frac{\cos\frac{J}{2}}{\cos i'}\left(\frac{dp'}{dt}\sin\mu' - \frac{dq'}{dt}\cos\mu'\right),$$

$$\frac{dK}{dt} = n_0\eta + \frac{1}{4}h\left(P\frac{\partial Q}{\partial P} + Q\frac{\partial R}{\partial Q}\right)$$
$$+ \frac{1}{4\cos i'\cos\frac{J}{2}}\left\{\left(Q\frac{dp'}{dt} + P\frac{dq'}{dt}\right)\cos\mu' + \left(Q\frac{dq'}{dt} - P\frac{dp'}{dt}\right)\sin\mu'\right\}.$$

Math. 1 (1857) = Works 3, p. 13—24; *G. W. Hill,* Amer. Journ. Math. 4 (1881), p. 256—259 = Works 1, p. 348—350; *W. Scheibner,* Sächs. Ges. Abh. 25 (1899), p. 131—156. Eine Schwierigkeit bei der Integration der Differentialgleichungen ist von *E. W. Brown,* London Astr. Soc. Monthly Not. 56 (1896), p. 52—53, aufgeklärt worden.

Wenn die störende Kraft vernachlässigt wird, so ist

$$P = 0, \quad Q = 2 \sin \frac{J_0}{2}, \quad K = K_0.$$

In den höheren Näherungen sind α und η stets so zu bestimmen, daß P, Q, K nur periodische Glieder enthalten.

Zu bemerken ist, daß hier μR statt R die Störungsfunktion ist. In den Entwicklungen von R[137]) führt *Hansen* den numerischen Wert von $\frac{m'}{\mu}$ ein und setzt ferner

$$r = \bar{r}(1 + \nu),$$

$$\cos \vartheta = \cos(\bar{f} + \omega)\cos(\bar{f}' + \omega') + \sin(\bar{f} + \omega)\sin(\bar{f}' + \omega')\cos J,$$

wo ω und ω', die Abstände der Apsidenlinien der beweglichen Hilfsellipsen für Mond und Sonne vom gemeinsamen Knoten sind; ferner sollen $\bar{f}'$, n_0', ν', y' dieselbe Bedeutung für die Erdbahn haben wie $\bar{f}$, n_0, ν, y für die Mondbahn; dann läßt sich R entwickeln nach Potenzen von ν, ν', e_0, e_0', $\frac{a_0}{a_0'}$, $\sin^2 \frac{J}{2}$ und nach Kosinus der Aggregate von Vielfachen von $n_0 z$, $n_0' z$, $\omega \pm \omega'$. Die Kraftkomponenten $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{P}$ sind zunächst durch die partiellen Derivierten von R nach e_0 und ω ausgedrückt. Endlich aber gestatten die Definitionsgleichungen für P und Q zusammen mit

$$\omega + \omega' = n_0 t(y + y' + 2\alpha) + 2N; \quad \omega - \omega' = n_0 t(y - y' - 2\eta) + 2K$$

R durch P, Q, K auszudrücken.

In den Endresultaten bezeichnen dann ω und ω' nur die nichtperiodischen Bestandteile der vorher durch diese Buchstaben bezeichneten Funktionen, während g und g' die nichtperiodischen Anteile von $n_0 z$ und $n_0 z'$ sind, so daß also zu *Delaunays* endgültigen Bezeichnungen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$g = l; \quad g' = l'; \quad g + \omega = F; \quad g + \omega - g' - \omega' = D.$$

Schließlich wird der Übergang von der instantanen Bahnebene auf die instantane Ekliptik vollzogen. *Hansens* Resultate sind, da sie die indirekten Planetenstörungen durch Berücksichtigung von ν', $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$ usw. einschließen, allgemeiner als die anderen Theorien, die sich mit dem Hauptproblem beschäftigen. Aber seine Theorie ist keineswegs frei von empirischem Einschlage, da sie für die Perigäums- und Knoten-

137) *Hansen,* Fundamenta, Sect. IV, Sächs. Ges. Abh. 2 (1855), p. 181—281; 283—376. Siehe auch *Cayley,* Lond. Astr. Soc. Mem. 27 (1859), p. 69—95; 28 (1860), p. 187—215; 29 (1861), p. 191—306 = Works 3, p. 293—318, 319—343, 360—474.

bewegung die beobachteten Werte einführt, mit denen die berechneten nicht ganz übereinstimmen (Nr. 25). Bei der Bildung seiner Tafeln (Nr. 27) bringt er außerdem noch andere empirische Korrektionen an, und später haben noch weitere hinzugefügt werden müssen, um die Tafeln mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu bringen. *Hansens* Resultate sind auch verschiedentlich umgeformt werden, um sie mit anderen Theorien, besonders der von *Delaunay* vergleichbar zu machen, so von *Wilding*[138]) und von *Newcomb* und *Maier*[139]). Man hat vielfach versucht, die Darlegung der Theorie zu vereinfachen[140]).

Th. v. Oppolzer[141]) folgt *Hansen,* insofern er die Störungen in der Bahnebene zur mittleren Anomalie hinzufügt. Die Länge und Parallaxe werden in gleicher Weise wie bei *Hansen* ausgedrückt, aber die dritte Koordinate ebenso wie die Parallaxe behandelt. Die Bewegung wird auf die mittlere instantane Bahnebene bezogen, d. h. diejenige, welche statthaben würde, wenn man alle periodischen Störungen der instantanen Bahnebene beiseite läßt und nur die säkularen beibehält. Die drei Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten ergeben sich dann in folgender Form:

$$(\alpha)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+(\mu+\mu')\frac{x}{r^3}=X;\quad \frac{d^2y}{dt^2}+(\mu+\mu')\frac{y}{r^3}=Y;\quad \frac{d^2z}{dt^2}+(\mu+\mu')\frac{z}{r^3}=Z,$$

wo μ und μ' Konstante sind, und X, Y, Z sowohl die Komponenten der eigentlichen störenden Kraft als auch die von den Bewegungen der Achsen herrührenden Reaktionskräfte enthalten. *Oppolzer* setzt dann

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=\frac{r}{(r)}=\frac{1}{1+\gamma},\qquad \zeta=f(t),$$

---

138) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 40 (1880), p. 8—10.

139) Wash. Astr. Pap. 1 (1880), p. 57—107. Hierher gehört auch eine Arbeit von *Cowell* (Lond. Monthly Not. 64 (1904), p. 159—168) der die *Hansen*schen Tafelformeln, welche von den theoretischen Formeln verschieden sind, umgeformt hat.

140) Eine Übersicht über die „Fundamenta" und „Darlegung" hat *E. W. Brown,* Treatise chap. 10, gegeben. *Tisserand,* Méc. cél. 3, chap. 17, gibt ebensolche für die „Darlegung". Weitere Auseinandersetzungen von *Hansens* Methode findet man bei *Hansen,* Astr. Nachr. 15 (1838), p. 201—216; 18 (1841), p. 237—288; 19 (1842), p. 33—92; *Delaunay,* Journ. des Sav. 1858, p. 16—17. Eine Vergleichung der Theorien von *Clairaut, Hansen, Oppolzer, Gyldén* gibt *R. Radau,* Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 433—449; 475—487. Siehe auch *R. Radau,* Bull. des Sc. math., sér. II, 5 (1881), p. 270—295; *Scheibner,* Sächs. Ges. Abh. 25 (1899), p. 131—156; Encycl. VI 2.

141) Wien. Denkschr. 51 (1886), p. 69—105; 54 (1888), p. 59—244; letzteres von *R. Schramm* herausgegeben. Eine frühere Abhandlung bezieht sich hauptsächlich auf die Planetentheorie.

so daß wir jetzt also die 6 Variabeln x_0, y_0, z_0, γ, ζ, t statt der alten x, y, z, t haben. Die zwei willkürlichen Bedingungen, denen diese Größen demnach noch unterworfen werden können, definiert er durch:

$$\frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} + (\mu + \mu')\frac{x_0}{r_0^3} = 0; \quad \frac{d^2 y_0}{d\zeta^2} + (\mu + \mu')\frac{y_0}{r_0^3} = 0$$

zusammen mit $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, so daß also der Punkt $x_0 y_0$ eine Ellipse mit der mittleren Anomalie ζ beschreibt. Die Gleichungen (α), die zweiter Ordnung sind, werden so ersetzt durch 6 Gleichungen erster Ordnung. Von diesen sind 3 die Differentialgleichungen für die Projektionen der Flächengeschwindigkeiten auf die drei Koordinatenebenen, von denen die auf die xy-Ebene bezogene die Gestalt annimmt:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{x_0}{a}\frac{lY}{1+\gamma} - \frac{y_0}{a}\frac{lX}{1+\gamma},$$

wo a, l Konstanten sind. Zwei weitere Gleichungen geben den Betrag der Geschwindigkeitsänderung in der xy-Ebene, und die letzte, die ζ gibt, lautet:

$$\frac{d\zeta}{dt} = (1 + I)(1 + \gamma)^2.$$

Wenn diese Gleichungen durch fortgesetzte Näherung nach Potenzen der störenden Kraft gelöst sind, so findet man die Koordinaten durch Einsetzen von ζ in ihre elliptischen Ausdrücke; der Wert von γ (welcher als Funktion der sechs benutzten Variabeln erhalten wird), gibt die Parallaxe, und z_0 wird in ähnlicher Weise ausgedrückt. Nach des Autors Tode sind seine Resultate insoweit vervollständigt, als es sich um eine vollständige analytische Entwickelung der Ausdrücke auf der rechten Seite der Differentialgleichungen, abgesehen von der für $\frac{d\zeta}{dt}$, handelt, herausgegeben worden; sie sind also fertig für die Durchführung der ersten Näherung in bezug auf die störende Kraft; das erstrebte Endziel an Genauigkeit war dasjenige von *Delaunay*, jedoch so, daß numerische Werte für die Konstanten benutzt werden sollten.

A. Weiler[142]) schlägt als intermediäre Bahn eine bewegliche Ellipse von veränderlicher Größe, aber konstanter Gestalt in der instantanen Bahnebene vor. Sowohl für die gestörte als die ungestörte Bewegung gelten die Gleichungen

$$\frac{k}{r} = \frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos f; \quad \frac{df}{dt} = n\left(\frac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2},$$

142) Astr. Ges. Publ. 12 (1872). Diese Abhandlung gründet sich auf eine frühere Arbeit, ibid. 3 (1866), die sich hauptsächlich mit dem allgemeinen Dreikörperproblem beschäftigt. Seine späteren Entwickelungen sind im wesentlichen in verschiedenen Nrn. der Astr. Nachr. enthalten, von denen sich aber viele nicht speziell auf die Mondtheorie beziehen.

wo n, e konstant sind und f die wahre Anomalie ist. Diese Gleichungen geben r und f als Funktionen von a und t. Die Länge v und die Länge des Perigäums ϖ, gerechnet zunächst längs der Bahn bis zum Knoten und von da in der Grundebene bis zu einem festen Anfangspunkt, hängen durch $v = f + \varpi$ zusammen; so erhält man v und r, wenn a und ϖ bekannt sind; die Beziehung $n^2a^3 = \mu$ gilt hier in der gestörten Bewegung nicht mehr in aller Strenge. Die Störungen von i, ϑ bestimmen die Bewegung der Bahnebene. Die Gleichungen, die man für ϖ, ϑ, i erhält, sind erster, die für a (oder p) ist dritter Ordnung; diese letztere wird durch 3 Gleichungen erster Ordnung für die abhängigen Veränderlichen h, k, q ersetzt, die so definiert sind:

$$\frac{1}{2}\frac{r}{p}(p^2 - p_0^2) = k\cos v + h\sin v; \quad \frac{dk}{dt}\cos v + \frac{dh}{dt}\sin v = 0,$$

wo p_0 der ungestörte Wert von p ist; für q gilt eine Gleichung, die der Energiegleichung einigermaßen analog ist. Alsdann werden die störenden Kräfte eingeführt und die 6 Gleichungen mannigfach umgeformt; schließlich wieder die Lösung in Näherungen nach Potenzen der störenden Kräfte durchgeführt. Die gleichzeitige Gültigkeit der obigen Gleichungen gestattet die Integration von $\left(\frac{r}{p}\right)^n \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} mv$ (wo n, m ganze Zahlen sind) durch endliche Ausdrücke. Die Konvergenz der der für p erhaltenen Reihen, die *Weiler* behauptet, scheint nicht streng bewiesen zu sein[143]).

18. Die wahre Anomalie als unabhängige Veränderliche. *Euler* geht in seiner ersten Theorie[144]) von den auf Zylinderkoordinaten bezogenen Gleichungen:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} - r_1\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \mathfrak{P}_1; \quad \frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}\left(r_1^{\,2}\frac{dv}{dt}\right) = \mathfrak{T}_1; \quad \frac{d^2}{dt^2}(r_1 s) = \mathfrak{Z}_1$$

aus, wo r_1 und v die Projektion des Radiusvektors und die Länge sind. Er transformiert dann die Gleichungen auf die wahre Anomalie f als unabhängige Variable. Dann setzt er

$$r = \frac{a(1-e^2)(1+\nu)}{1+e\cos f}$$

und gelangt zu einer Differentialgleichung erster Ordnung für v und einer zweiter Ordnung für ν, die diese Größen als Funktionen von f

143) Zusammenfassungen und Auseinandersetzungen der Theorie sind gegeben worden durch *R. Radau,* Bull. des Sc. math., sér. II, 5 (1881) p. 270—295 und *A. Weiler,* Astr. Nachr. 106 (1883), p. 65—76 und Astr. Ges. Vjs. 35 (1900), p. 319—322.

144) Theoria motus Lunae, St. Petersburg 1753.

zu bestimmen gestatten. Die Lösung der ersteren Gleichung ist $v = \text{const.} + \frac{f}{c} +$ periodische Glieder; dabei ist offenbar $1 - c$ die mittlere Apsidenbewegung. *Euler* setzt nun für c seinen beobachteten Wert ein und zeigt, daß in dem Kraftgesetz, welches er in der Form $\frac{\mu}{r^2} - \delta$ voraussetzt, δ sehr klein sein muß. Statt der dritten der obigen Gleichungen führt er die Variationen von Knoten und Neigung ein. Um die willkürlichen Konstanten zu bestimmen, rechnet er mit seinen Resultaten 13 Finsternisse und bestimmt dann durch Vergleich mit den Beobachtungen die Konstanten.

H. Gyldén[145]) verwendet eine modifizierte wahre Anomalie v_0 als unabhängige und zwei Größen u und χ als abhängige Veränderliche, die folgendermaßen definiert sind:

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2} u^2 \sqrt{c}; \quad v = v_0 + \chi, \quad \text{wo } c = \text{constans}.$$

Er erhält seine intermediäre Bahn, indem er F (Nr. 3) auf die Teile beschränkt, die für $\lambda = 0$, $k_j = 1$, $j = 2$, $s = 0$ übrig bleiben; die Gleichungen für die intermediäre Bahn ergeben sich dann so:

$$\frac{d^2u}{dv_0^2} + u\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 = \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial u}; \quad \frac{d^2\chi}{dv_0^2} = \frac{1}{cu^2}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Die Absicht bei dieser Formulierung ist, in der intermediären Bahn die Hauptteile der größten Glieder zu berücksichtigen; dafür genügt es, in der ersten Näherung in R zu setzen:

$$v - v' = mv_0 + \text{const.},$$

wodurch von Gliedern, die kleine Divisoren erhalten, erst die 4. Ordnung vernachlässigt wird.

Gyldén setzt nun

$$u = a(1 + \varrho_0) = a + aE\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)},$$

wo a, η_1, λ, A Konstanten sind; für E ergibt sich dann eine Gleichung von der Form Nr. 5(a). *Gyldén* selbst löst dieselbe durch elliptische

145) Acta math. 7 (1885), p. 125—172. Vgl. auch *Andoyer,* Toul. Fac. Ann. 1 (1887) M, und *Tisserand,* Toul. Fac. Ann. 2 (1888) D; Méc. cél. III, chap. 8. Die Methode ist analog zu *Gyldéns* allgemeiner Behandlung der Störungstheorie, VI 2, 15 Nr. 31. Für die nähere Auseinandersetzung der Theorie sei auch verwiesen auf: *Gyldén,* Astr. Nachr. 100 (1881) p. 97—102; *O. Callandreau,* Paris C. R. 93 (1881), p. 779—81, Paris Bull. Astr. 3 (1886), p. 353—57, 7 (1890), p. 471—497; *O. Backlund,* Astr. Nachr. 101 (1882), p. 19—22; *M. Brendel,* Astr. Nachr. 116 (1886), p. 161—166; *R. Radau,* Paris Bull. Astr. 3 (1886), p. 433—449; *Shdanow,* Dissertation Stockholm 1885.

Integrale. *Tisserand*[146]) weist aber darauf hin, daß die Einführung solcher nicht erforderlich ist, und führt die Lösung durch trigonometrische Reihen durch. Für die Weiterbehandlung werden nun drei neue Variable S, ξ, ψ und zwei Funktionen Q_1 und P_1 folgendermaßen eingeführt:

$$\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{r_0}{r}=1+\psi;\quad dt=(1+S)\frac{r^2 dv_0}{\sqrt{c}}=\frac{1+S}{\sqrt{c}}\frac{r_0^2\,dv_0}{\left(1+\frac{r_0\xi}{a}\right)^2};$$

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial F}{\partial r}=P_0+P_1;\quad (1+S)\frac{r^2}{c}\frac{\partial F}{\partial v}=(1+S)\,Q_0+Q_1,$$

wo P_0 und Q_0 diejenigen Anteile sind, welche der intermediären Bahn entsprechen. Die Gleichungen für die Abweichungen der wahren von der intermediären Bahn werden dann:

$$\frac{dS}{dv_0}\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)+(2S+S^2)(Q_0+Q_1)=-Q_1$$

$$\frac{d^2\xi}{dv_0^2}+\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\xi-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}-\frac{a\mu}{c}(2S+S^2)-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d}{dv_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)$$
$$=-P_1-(2S+S^2)(P_0+P_1).$$

Gyldén selbst hat diese Gleichungen nicht weiter behandelt, da es ihm nur auf die intermediäre Bahn selbst ankam, hat auch die von der Neigung abhängigen Störungen nicht berücksichtigt. *Tisserand*[147]) hat die Behandlung der letzteren aufgenommen, indem er die zweite Gleichung von Nr. **4** (b) benutzt, dieselbe in *Gyldéns* Sinne umformt und sie dadurch auf die Form Nr. **5** (a) bringt. Die Methode ist weiter durchgeführt von *Shdanow*[148]), der bis zur 2. Näherung einschließlich geht und damit die Apsiden- und Knotenbewegung auf $\frac{1}{650}$ bzw. $\frac{1}{1000}$ ihres wahren Wertes erhält.

M. Brendel[149]) hat die Modifikation der *Gyldén*schen Methoden, die er in seiner Theorie der kleinen Planeten[150]) benutzt hat, auch auf den Mond angewandt, so daß Entwicklungen nach den Charakteristiken leicht zu erhalten sind. Mit v als mittlerer Anomalie in der oskulierenden Ellipse setzt er:

$$r=\frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho},\quad r^2\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{M'a(1-\eta^2)}}{1+S},$$

wo

$$M'=\frac{E^3}{(E+m')^2}$$

ist.

146) Toul. Fac. Ann. 2 (1888) D; Méc. cél. 3, chap. 8.

147) Toul. Fac. Ann. 2 (1888) D.

148) Dissertation Stockholm 1885.

149) Gött. Ges. Abh. N. F. (3) 4 (1905), p. 1—97.

150) Ib. I, 2 (1898), p. 171 usw.

Dabei ist der Ursprung der Schwerpunkt des Systems Erde-Mond. Er setzt ferner:

$$\varrho = (\varrho) + R = \eta \cos(v - \pi) + R,$$

$$\eta \,{}^{\cos}_{\sin}\, \pi = k \,{}^{\cos}_{\sin}\, (\xi v + \Gamma) + k' e' \,{}^{\cos}_{\sin}\, \varpi'.$$

Hier sind k und Γ Konstanten, die der Exzentrizität und Perihellänge entsprechen, ξ ist die mittlere Bewegung der Apsidenlinie; k', das $\frac{a}{a'} = \alpha$ als Faktor enthält, verschwindet, wenn die Sonne sich in einer festen Ellipse bewegt. Ist die Mondbewegung ungestört, so verschwinden R und S.

Die Gleichungen für S und ϱ werden:

$$-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d}{dv}\eta^2,$$

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d}{dv}\eta^2 + (1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2 P$$
$$-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2}{dv^2}\eta^2 + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d}{dv}\eta^2\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} Q \frac{d}{dv}\eta^2\right\}(1+\varrho),$$

wo

$$P = r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \quad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v},$$

ist und Ω die Störungsfunktion bedeutet. Der Ausdruck von t als Funktion von v wird in der Form angesetzt:

$$nt + \text{const.} = v + \sum B_i \sin i(v - \pi) + W,$$

wobei $n^2 a^3 = M'$ ist. Das zweite Glied rechts ist dabei die Mittelpunktsgleichung, mit η und π als Exzentrizität und Perihellänge gerechnet. Für W ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1+\eta\cos(v-\pi)\}^2}\left\{\frac{1+S}{\left[1+\frac{R}{\{1+\eta\cos(v-\pi)\}}\right]^2} - 1\right\}$$
$$-\frac{d'}{dv}\left\{\sum B_i \sin i(v-\pi)\right\},$$

wobei $\frac{d'}{dv}$ die Ableitung nach v, nur soweit es in η und π auftritt, bedeutet. Die Kräfte P, Q werden nach Potenzen von η, e', R, W entwickelt. *Brendel* erhält zuerst eine intermediäre Bahn, indem er η und e' vernachlässigt. Diese fällt zusammen mit der zuerst von *G. W. Hill*[114]) numerisch berechneten. *Brendel* läßt die Entwicklungen zunächst allgemeiner, löst aber dann auch ein System von Gleichungen mit in Strenge unendlich vielen Unbekannten rein numerisch auf. Weiter werden dann die von η und e' abhängigen Terme bestimmt, wobei die beobachtete Apsidenbewegung eingesetzt und nachträglich an der Theorie geprüft wird.

III. Planetarische und andere störende Einflüsse.

19. Behandlungsmethoden. Jeder kleinen störenden Ursache kann man Rechnung tragen, indem man der Kräftefunktion ein Glied $\alpha\Omega$ hinzufügt, wo α eine kleine Konstante ist, deren Quadrat selten merklich ist. Ω bedeutet eine Funktion der Zeit, der Koordinaten, und eventuell der Geschwindigkeiten des Mondes.

Meist wird die Methode der Variation der Konstanten verwandt, wobei aber als neue Variabele nicht die Konstanten der elliptischen Bewegung, sondern die des Hauptproblems gewählt werden müssen, da jeder überhaupt in Betracht kommende Term durch die Wirkung der Sonne wesentlich beeinflußt wird.[151])

Wenn man von den kanonischen Gleichungen für die Variationen ausgeht, so braucht man nur auf Grund der *Delaunay*schen Theorie (Nr. **15**) den entsprechenden Schritt weiter zu gehen, indem man, falls α^2 vernachlässigt werden darf, in $\alpha\Omega$ die aus dem Hauptproblem sich ergebenden Werte der Konstanten einsetzt. *G. W. Hill*[152]) hat die Integration der Gleichungen für diese störenden Einflüsse auf eine Form gebracht, die unmittelbarer Anwendung fähig ist. Er findet nämlich, daß einem Gliede in $\alpha\Omega$ von der Form:

$$f(a, e, \gamma)\ \alpha k \cos(i_1 l + i_2 g + i_3 h + pt + p') = A \cos(\mu t + \mu'),$$

wo α, k, p, p' unabhängig von den Mondelementen sind, eine zugehörige Änderung der Elemente von folgender Form entspricht:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta a}{a},\ \delta e,\ \delta\gamma = (\Sigma i_q a_q)\frac{A}{\mu n' a^2}\cos(\mu t + \mu'),\\ &\delta\varepsilon,\ \delta\varpi,\ \delta\vartheta = \left(\Sigma i_q b_q + \frac{1}{\mu}\Sigma j_q c_q\right)\frac{A}{\mu n' a^2}\sin(\mu t + \mu'),\end{aligned}\right\}\quad q = 1, 2, 3$$

wo

$$j_1 = a\frac{df}{da},\quad j_2 = e\frac{df}{de},\quad j_3 = \gamma\frac{df}{d\gamma}$$

und a_q, b_q, c_q numerische Größen sind, die für jedes Element verschiedene Werte haben und nur von den Derivierten der endgültigen *Delaunay*schen Elemente L, G, H nach a, e, γ abhängen, in denen die numerischen Werte von $m, e, e'\ \gamma, \frac{a}{a'}$, eingesetzt sind. *Radau*[153]) und *Newcomb*[154]) haben ähnliche Gleichungen, aber mit etwas anderen Werten

151) Fast alle früheren Behandlungen kranken daran, daß diese Überlegung nicht berücksichtigt worden ist.

152) Wash. Astr. Pap. 3 (1891), p. 390 = works 2, p. 336. Eine Skizze davon gibt *R. Radau,* Paris Bull. astr. 9 (1892), p. 361–63.

153) Paris Obs. Mém. 21 (1895) B, p. 35—36.

154) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 211—212; Carnegie Inst. Publ 72, chap. 2.

für a_p, b_p, c_p erhalten. Die Schwierigkeit, diese Werte genau zu berechnen, rührt von der langsamen Konvergenz der Potenzreihen nach m her, besonders bei den Koeffizienten, die Ableitungen nach n enthalten. *E. W. Brown*[155]) hat Gleichungen ähnlicher Form direkt aus seiner Theorie abgeleitet, wobei der numerische Wert von m auf Grund des letzten Resultates in Nr. **11** substituiert ist. Statt der obigen Form für A benutzt er die Derivierten von A nach n, e, k, den Konstanten seiner Theorie vor dem Übergang von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten, was in seinem Falle das bequemste ist. So werden die Variationen der Variabeln n, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 (Nr. **10**e) gefunden. In einzelnen Fällen werden von *Brown* die *Delaunay*schen Entwicklungen benutzt, diese aber kontrolliert und die aus der langsamen Konvergenz entspringenden Fehler als unmerklich nachgewiesen.

20. Der Einfluß der nichtsphärischen Figur der Erde und des Mondes. *Erde:* Sind A, B, C, J die Trägheitsmomente um die drei Hauptträgheitsachsen und um die Verbindungslinie der Mittelpunkte von Erde und Mond, so ist in hinreichender Näherung gemäß der Entwicklung des Erdpotentials in Kugelfunktionen

$$\alpha\Omega = \frac{A + B + C - 3J}{r^3}$$

oder, da man die beiden äquatorialen Trägheitsmomente der Erde als gleich annehmen kann, also $A = B$,

$$\alpha\Omega = \frac{3(C-A)}{2r^3}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\delta\right),$$

wo δ die Deklination des Mondes ist.

Die Differenz $C - A$ von polarem und äquatorealem Trägheitsmoment kann durch Pendelbeobachtungen oder durch die Gleichung

$$\tfrac{3}{2}(C - A) = ER^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta)$$

bestimmt werden, wo E, R, α Masse, Äquatorealradius und Abplattung der Erde sind und β das Verhältnis von Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnet. Sind ferner λ_m, β_m, $\bar{\varepsilon}$ ekliptische Länge und Breite des Mondes und Schiefe der Ekliptik, so ist nach den gewöhnlichen Formeln der sphärischen Astronomie

$$\sin\delta = \sin\beta_m \cos\bar{\varepsilon} + \cos\beta_m \sin\lambda_m \sin\bar{\varepsilon}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man $\alpha\Omega$ als Funktion der Zeit und der Mondelemente ausdrücken. Bestimmungen der sich so ergebenden

155) Adams Prize Essay, Cambridge 1908, p. 10. Die verbesserte endgültige Form findet sich in Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 14, wo die Transformation von p_2, p_3 auf e, Y, gegeben ist.

Ungleichheiten in der Mondbewegung sind durchgeführt von *Laplace*[156]), *de Pontécoulant*[157]), *Hansen*[158]) — ziemlich vollständig auf Grund seiner Methode —, *Hill*[159]) — sehr vollständig nach der Methode von *Delaunay* —, *Brown*[160]) – vollständig bis auf 0″,01 in Länge und Breite. *Hill* drückt die Ungleichungen als Zusätze zu den Koordinaten, *Brown* als solche zu den Integrationskonstanten aus, was eine kürzere Darstellung gibt.

Mond: Laplace[160a]) betrachtete den Einfluß und bezeichnete ihn als unmerklich. *Hansen* (Nr. **25** a) schob eine (jetzt als nicht bestehend erkannte) Abweichung von Theorie und Beobachtung auf diese Ursache. *E. W. Brown*[160b]) findet mit den neuesten Bestimmungen der Abplattungen des Mondes kleine Zusätze zur Bewegung des Perihels und Knotens, die in letzterem Falle gerade an das Beobachtbare heranreichen.

21. Die direkten Planetenstörungen. Die Formeln für R in Nr. **3** sind für die direkten Planetenstörungen ohne weiteres benutzbar, wenn man statt x', y', z', m', r' die geozentrischen Koordinaten, Masse und geozentrischen Entfernung des Planeten: ξ, η, ζ, m'', D einsetzt. Für die Koordinaten des Mondes in der Störungsfunktion $\alpha\Omega$, welche sich so ergibt, sind die Werte einzusetzen, die das Hauptproblem ergibt, für die Planetenkoordinaten ihre als bekannt vorausgesetzten Funktionen der Zeit. Hat man alsdann die Störungsfunktion entwickelt, so ist die Methode von Nr. **19** anwendbar. *Hill*[161]) hat die Störungsfunktion in eine Summe von Produkten zerlegt, von denen je das eine nur von den geozentrischen Mondkoordinaten, das andere nur von den heliozentrischen Erd- und Planetenkoordinaten abhängt, von der Form:

$$\alpha\Omega = m''\left[\frac{r^2 - 3z^2}{4}\left(\frac{1}{D_0^{\,3}} - \frac{3\zeta^2}{D_0^{\,5}}\right) + \cdots\right].$$

156) Méc. cél. Livre 7, chap. 2; Livre 16, chap. 3; Paris Inst. (math.) mém. 3 (1801), p. 198—206; Conn. des Temps pour 1823, p. 219—225; 332—35 (eine Neuberechnung der Resultate in der Méc. cél.); ibid. 232—239 = Oeuvres 13, p. 189—197, 205—212, 221—228 (der Anteil, der von der eventuellen Verschiedenheit der Hemisphären herrührt).

157) Système du monde 4, chap. 4.

158) Darlegung usw., Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 6 (1864), p. 459—474; ibid. 7 (1865), p. 273—322.

159) Wash. Astron. Papers 3 (1884), p. 201—344 = works 2, p. 179—320.

160) Lond. Monthly Not. 68 (1908), p. 454—455; Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 78—80. Eine Verbesserung in Lond. Monthly Not. 70 (1910), p. 3.

160a) Méc. Cél. Liv. 7, Nr. 21.

160b) Lond. Astron. Mém. 59 (1908), p. 80—81.

161) Amer. Journ. Math. 6 (1883), p. 115—130 = Works 2, p. 47—63.

Ist γ'' der Sinus der halben Neigung zwischen Planetenbahn und Ekliptik, h'' die Knotenlänge der Planetbahn, V'', r'' heliozentrische Länge und Radiusvektor des Planeten V' die Länge der Erde, so findet man:

$$\frac{1}{D^q} = \frac{1}{D_0^q} + \frac{q\gamma''^2 r' r''}{D_0^{q+2}} \{\cos(V' + V'' - 2h'') - \cos(V' - V'')\} + \cdots$$

wo

$$D_0^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(V' - V'').$$

Die verschiedenen Entwicklungen von D_0^{-q} werden in der Theorie der Hauptplaneten (VI 2, 13 Nr. 2) mitgeteilt.[162]) Im allgemeinen würden diese Störungen wegen der Kleinheit der Massen m'' und des Verhältnisses $\frac{a}{a''}$ unmerklich sein, wenn nicht bei den langperiodischen Störungen infolge des Auftretens kleiner Divisoren, d. h. der Kleinheit von μ (Nr. 19) eine enorme Vergrößerung einträte, und einzelne Glieder sehr wohl merklich machte. Bei dem Fehlen einer allgemeinen Methode, um zu entscheiden, ob ein bestimmter Term langer Periode einen merklichen Koeffizienten gibt, und bei der großen Zahl solcher Terme ist die Untersuchung mühselig.

Nur zwei Terme mit Koeffizienten über 1″ in Länge sind bekannt.[162a]) Der eine stammt von Venus und hat bei einer Periode von 273 Jahren einen Koeffizienten über 14″.[162b]) Der andere ist bekannt als die „Jupiterevektion", die Periode ist nahe die der Evektion (Nr. 12), und der Koeffizient ist 1″,14.[163])

162) In diesem Zusammenhange sei, als speziell auf die Mondtheorie bezüglich, für die Berechnung von Ungleichheiten hoher Ordnung verwiesen auf: *Flamme,* Diss. Paris 1887; *O. Callandreau,* Paris C. R. 115 (1892), p. 386—89; École pol. Journ., sér. II, 7 (1902), p. 29—99; *M. Hamy,* Paris Bull. astr. 10 (1893), p. 41—56, 84—92.

162a) *Gogou,* Obs. de Paris ann. mém. 17 (1883) A 1—101, zeigt, daß der Koeffizient von 7″,55, den *E. Neison* (Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1878) p. 49—53) einer von Mars herrührenden Ungleichheit zuschreibt, in Wirklichkeit unmerkbar ist; er erklärt den Irrtum in Lond. Astr. Soc. Mem. 48 (1885), p. 419—437.

162b) Diese Störung wurde von *Hansen* entdeckt, Astr. Nachr. 25 (1847), p. 325—332, Paris C. R. 24 (1847), p. 795—99; Lond. Astr. Soc. Mem. 16 (1847), p. 465—476, der für den Koeffizienten zu verschiedenen Zeiten die Werte 16″, 27″, 23″ fand. Dieser ist genau berechnet worden von *Delaunay,* Conn. des Temps, pour 1862, Addition, p. 3—58, und von *Tisserand,* Paris C R. 113 (1891), p. 5—9. Für eine andere Ungleichheit von 239jähriger Periode gab *Hansen* den Koeffizienten 23″ an, *Delaunay* hat jedoch gezeigt, daß derselbe in Wirklichkeit $<$ 0″,3 ist: Paris C. R. 49 (1859), p. 923—27, Conn. des Temps pour 1863, Add., p. 1—56; siehe auch *Hamy, Radau, Newcomb, Brown,* Fußn. 162, 153, 154, 155, 160.

163) Entdeckt durch eine Analyse der Beobachtungen von *Newcomb,* Trans. Venus Pap. 3 (1876) und erklärt von *Neison* (= Nevill), Lond. Monthly Not. 37

Außer den erwähnten sind Berechnungen spezieller Ungleichheiten von *E. Neison* (Nevill)[164]), *E. v. Haerdtl*[165]) und anderen Mondtheoretikern[166]) ausgeführt worden.

Der erste Versuch, eine vollständige Liste der Planetenstörungen aufzustellen, stammt von *Radau*[167]), der *Hills* Teilung der Störungsfunktion und dessen Variationsgleichungen mit wenig veränderten numerischen Werten (Nr. **19**) benutzt. Er entwickelt jeden Planetenfaktor nach Potenzen der Planetenelemente und benutzt für die Mondfaktoren *Delaunays* Theorie. Es werden über 120 Terme in Länge erhalten. *Newcomb*[168]) gab 1894 eine allgemeine Methode zur Behandlung des Problems, die er später durchführte.[169]) Jeder Planetenfaktor wird numerisch aus speziellen Werten entwickelt, während die Mondfaktoren und ihre Ableitungen teils aus *Delaunays*, teils aus *Browns* Theorie entnommen werden. Er benutzt seine eigene Gleichungsform (vgl. Nr. **19**). Seine Liste ist etwas umfangreicher als die *Radaus* bei etwa gleicher mittlerer Genauigkeit. Beide Autoren schließen die indirekte Wirkung (vgl. Nr. **22**) ein.

Brown[170]) nimmt sich vor, alle Planetenstörungen über $0'',01$ zu ermitteln. Er teilt mittels einer allgemeinen Formel die Störungsfunktion in *Hills* Art und zeigt, daß die Planetenfaktoren als Ableitungen von $\frac{1}{D}$ nach a', ε', γ'', h'' dargestellt werden können. *Leverriers* Buchstabenentwicklung von $\frac{1}{D}$ kann daher zur Ableitung aller dieser Faktoren benützt werden, statt jeden einzelnen entwickeln zu müssen. Kurze Verfahren[171]) zur Berechnung der auftretenden Funktionen von $\frac{a'}{a''}$ werden eingeführt und die numerischen Werte in Tafeln gegeben. Die Mondfaktoren und ihre Derivierten entnimmt *Brown*

(1877), p. 248, der auch (ib. p. 359) den richtigen Koeffizienten berechnete, wie verschiedene spätere Untersuchungen bestätigten. Der Koeffizient schließt die indirekte Wirkung ein.

164) Lond. Astr. Soc. Monthly Not., vols. 37, 38, 42, 45, 46, 47; jedoch ist zu bemerken, daß einzelne seiner Resultate angezweifelt worden sind.

165) Wien Denkschr. 59 (1892), p. 385—408; Paris Bull. Astr. 10 (1893), p. 124—130; 12 (1895), p. 145—48.

166) Siehe *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 18.

167) Par. Obs. Ann. 21 (1895), B p. 1—114.

168) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 97 295.

169) Carnegie Inst. Publ. 72 (1907), p. 1—160.

170) Adams Prize Essay, Cambr. 1908, p. 1—93. Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 24—77.

171) Weiter verbessert von *R. T. A. Innes*, Lond. Monthly Not. 69 (1909), p. 633—638; 70, p. 194—196.

seiner eigenen Theorie unter Beachtung des letzten Satzes aus Nr. **11**. Mittels einer Näherungsformel, die unmittelbar eine obere Grenze für den Betrag jeder Störung liefert, vermag er etwa hundert Terme aussondern, die allein Koeffizienten über 0″,01 geben können. Diese nebst den kurzperiodischen Termen werden genau berechnet. *Browns* schließliche Liste[172]) enthält, die indirekten Störungen eingeschlossen, über 400 Terme.

22. Die indirekten Planetenstörungen. Diese rühren von den Störungen der Erdbahn durch die Planeten her. Sie werden gleich von vornherein formal berücksichtigt in den Theorien von *Hansen* und *Brendel* (Nr. **17**, **18**), bleiben dagegen in den anderen Theorien einer besonderen nachträglichen Bestimmung überlassen. Die ursprünglichen elliptischen Werte x', y', z' erhalten dadurch kleine Zuwächse $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, so daß die Zusatzstörungsfunktion lautet:

$$\alpha\Omega = \delta R = \frac{\partial R}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial R}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial R}{\partial z'}\delta z'.$$

Vielfach ist es bequemer, diese Störungen so zu berücksichtigen, daß man die Zuwüchse $\delta a'$, $\delta e' \ldots$ benutzt, welche die Sonnenelemente erhalten. Da nun in dem Hauptproblem eine feste Ekliptik als Bezugsebene benutzt wird, so sind die Sonnenelemente, welche die Lage dieser Ebene bestimmen, nicht die instantanen; es ist also noch eine besondere Untersuchung erforderlich, um den Einfluß der Bewegung der Ekliptik auf die Mondbahn zu bestimmen. Die Säkularbeschleunigungen, obwohl aus indirekten Planetenstörungen herrührend, sollen in Nr. **23** besonders behandelt werden.

Umfassende Untersuchungen über die entsprechenden periodischen Ungleichheiten sind zusammen mit den direkten Störungen angestellt von *Adams*, *Newcomb*, *Brown* (siehe Nr. **21** und die dort angegebenen Zitate). *Newcomb*[173]) hat das Problem als nochmals gestörtes Dreikörperproblem aufgefaßt. Er bestimmt die Variationsgleichungen der Elemente des Systems, wenn eine äußere störende Kraft wirkt. Er zeigt, wie sich diese in zwei Gruppen teilen lassen, von denen sich die eine hauptsächlich auf die Störungen der Erdbewegung, die andere auf die der Mondbewegung bezieht. Im Verlaufe der Arbeit entdeckt

172) Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 94—103. In Lond. Montly Not. 68 (1908), p. 148—170 wird mit den von *Radau* und *Newcomb* berechneten Formen verglichen, und es werden die meisten Unstimmigkeiten aufgeklärt.

173) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 105—203. Die Methode dieser Abhandlung ist kurz dargestellt und vervollständigt von *E. W. Brown*, Lond. Math. Proc. 28 (1897), p. 130—142. Es ist dabei in § X ein kleiner Irrtum untergelaufen; siehe *E. T. Whittacker*, Brit. Ass. Rep. 1899, p. 156.

er ein bemerkenswertes Theorem über die Wirkung säkularer Änderungen der Erdbahn auf die Mondbewegung (vgl. Nr. **23**).

Brown hat bei zwei Gelegenheiten[174]) den Fall behandelt, daß die Parameter in einem dynamischen Gleichungssystem zeitlich variabel werden; hierunter gehören indirekte Störungen jeder Art. Ist u eine Funktion von t und den Parametern und erzeugen kleine variable Zusätze in diesen Parametern die Zusätze δu und $\delta \frac{du}{dt}$ in u und $\frac{du}{dt}$, so erhält man die Wirkung der Veränderlichkeit der Parameter, indem man zur Störungsfunktion einen Betrag $U\left(\frac{d}{dt}\,\delta u - \delta \frac{du}{dt}\right)$ hinzufügt, wo U eine gewisse Funktion der Zeit und der Parameter ist, die aus dem ursprünglichen Problem gewonnen wird. Man hat dann die Variationsgleichungen für die Integrationskonstanten des ursprünglichen Problems zu bilden und aufzulösen und die gefundenen vari abeln Werte der Integrationskonstanten wie der Parameter in die ursprüngliche Lösung zu substituieren. *Newcomb*s erwähntes Theorem wird als ein Spezialfall wiedergefunden. Bei der Anwendung auf die Mondtheorie ergibt sich für langperiodische Terme, wo δ^2 vernachlässigt werden kann, daß der kleine Divisor in der Mondbewegung höchstens im Quadrat auftritt, selbst wenn die entsprechende Ungleichung in der Erdbewegung sein Quadrat enthält.

Eine besondere Untersuchung, die hierunter fällt, ist die Bestimmung des Einflusses, den die Veränderlichkeit der Ebene der Erdbahn auf die Mondbewegung ausübt.

Das Hauptglied, das von der Bewegung der Ekliptik hervorgerufen wird, hat in Breite einen Koeffizienten von 1″,4, in Länge von 0″,3. *Laplace*[175]) hatte dieses Glied für unmerklich gehalten, und erst *Hansen*[176]) konnte zeigen, daß, wenn auch kleine, so doch merkliche periodische Glieder entstehen. Später sind nach verschiedenen Methoden die indirekten Planetenstörungen untersucht von *Adams*[177]), *Lespiault*[178]), *A. Cayley*[179]), *G. B. Airy*[180]), *G. W. Hill*[181]), *Radau*[182]),

174) Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 333—350; 6 (1905), p. 332—343. Der Beweis in Art. 17 des ersten Aufsatzes ist falsch; oben ist auf den zweiten Bezug genommen.

175) Méc. cél. Livre 7, Nr. 3.

176) Astr. Nachr. 29 (1849), p. 193—196; Darlegung (1860), p. 118—120, 480—91.

177) In Artikel 113 von *Godfray,* Lunar theory (1. Ed. 1853); Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 41 (1881), p. 385—403 = Works I, p. 231—52.

178) Bordeaux phys. mém. 2 (1861), p 7—58.

179) Lond. Astr. Soc. Mem. 31 (1863), p. 43—56 = Works 3, p. 505—15.

180) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 41 (1881), p. 264—71, 375.

Newcomb[183]) und *Brown*[184]), der auch die Wirkungen kleiner periodischer Schwankungen der Ekliptik berücksichtigt.

23. Die säkularen Beschleunigungen. 1693 fand *Halley*[185]) bei einer Berechnung alter Finsternisse, daß die mittlere Umlaufszeit des Mondes nicht ganz konstant sein könne. Seither haben verschiedene Autoren (vgl. Nr. **26**) dieses Element aus den Beobachtungen hergeleitet mit dem Resultat einer Zunahme der mittleren Länge von $6'' t_s^2$ bis $13'' t_s^2$, wo t_s die Anzahl der Jahrhunderte ist: der Koeffizient von t_s^2 wird säkulare Beschleunigung genannt. Die letzten sind *Newcomb*[186]), der $8''$ erhält, und *Cowell*[187]), der Beschleunigungen von $7''$ bzw. $2'',4$ in den Winkelabständen der Sonne vom Mond bzw. vom Mondknoten findet. Die Werte hängen wesentlich von der Bewertung der alten Finsternisberichte ab.[188])

Als analytisch-dynamische Ursache der Erscheinung entdeckte *Laplace*[189]) 1786 die Veränderlichkeit von e'; die erste Näherung ergab etwa $10''$ für diese Störung in guter Übereinstimmung mit der damaligen Berechnung aus den Beobachtungen. Seine unmittelbaren Nachfolger *Plana* und *Pontécoulant* verfuhren, um die höheren Näherungen zu erlangen, fälschlicherweise so, daß sie die Differentialgleichungen integrierten, als ob e' konstant wäre, und erst nach erfolgter Integration die zeitliche Veränderlichkeit dieses Elementes berücksichtigten; sie erhielten auf diesem Wege nur unwesentliche Änderungen von Laplaces Wert. Erst *Adams*[190]) führte, als er eine strenge Berechnung der Säkularbeschleunigung vornahm, richtigermaßen die Veränderlichkeit von e' bereits in die Differentialgleichungen ein und fand auf die Weise andere Terme höherer Ordnung, welche den Laplaceschen (richtigen) ersten Näherungswert auf fast die Hälfte reduzierten. Seine Resultate und Methoden wurden bestritten[191]) von *Hansen*[192]), *Plana*

181) Amer. Ann. math. 1 (1884), p. 5—10, 25—31, 52—58 = Works 2, p. 64—79.

182) Paris Bull. Astr. 9 (1892), p. 363—373.

183) Carnegie Inst. Publ. 72 (1907), p. 127—132.

184) Lond. Monthly Not. 68 (1908), p. 450—454; Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 46—48.

185) Lond. Phil. Trans. 17 (1693), p. 913—921.

186) Lond. Monthly Not. 69 (1909), p. 167.

187) Lond. Monthly Not. 66 (1906), p. 352.

188) Wichtig hierfür sind Arbeiten von *J. K. Fotheringham*, in den Lond. Monthly Not. 69 (1909).

189) Paris Inst. Mém. 2 (1788), p. 126—182 = Works 11 (Ed. 1895), p. 243—271.

190) Lond. Phil. Trans. 143 (1853), p 397—406 = Works 1, p. 140—157; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 40 (1880), p. 472—482 = Works 1, p. 211—223; Works 2, p. 120—29, 237—38.

und *de Pontecoulant*[193]), jedoch späterhin bestätigt durch *Delaunay*[194]), der[195])die vollständigste analytische Entwicklung des Koeffizienten der Säkularbeschleunigung gegeben hat, *Plana*[196]), *Cayley*[197]), *Lubbock*[198]) und *P. Puiseux*[199]). Weitere numerische Bestimmungen sind dann noch von *Newcomb*[200]), *Brown*[201]), *Andoyer*[202]) und *v. Brunn*[203]) durchgeführt worden. *Laplace*[204]) konnte nun zeigen, daß, ebenfalls wegen der säkularen Veränderlichkeit der Erdexzentrizität, auch die mittleren Bewegungen von Apsiden und Knotenlinie Beschleunigungen erfahren, und gab das Verhältnis der Werte dieser beiden Beschleunigungen an. Er hat für beide die ersten (gleichen) Näherungswerte gegeben. Weiterhin haben dann auch die meisten der vorerwähnten Autoren Werte dafür erhalten.

Die älteren Methoden zur Berechnung der Säkularakzelerationen sind bei größeren Genauigkeitsansprüchen sehr mühsam. Die meisten der erwähnten Autoren, die überhaupt korrekt rechneten, haben sich mit den ersten zwei oder drei Gliedern nach m begnügt. *Delaunay* hat indessen nach seiner Methode eine allgemeine Entwicklung gegeben, die nach einer Korrektur durch *Andoyer*[202]) noch die genaueste in dieser Form ist. Die Rechenarbeit ist durch die Theoreme von Newcomb und Brown einfach geworden. *Newcomb*[205]) zeigte, daß, wenn die Werte der Koordinaten im Hauptproblem durch Delaunays Endwerte von L, G, H (vgl. Nr. **15**) ausgedrückt werden, der variable

---

191) Die Diskussion wurde hauptsächlich geführt in Paris C. R. und Lond. Astr. Soc. Monthly Not. von 1859—66. Ihre Geschichte ist zusammengefaßt worden von *Delaunay,* Conn. des Temps 1864, Add. p. 21—68; *Glaisher,* Adams Works 1, p. XXXV—XXXIX, *Tisserand,* Méc. cél. 3, chap. 13, 19.

192) *Hansen* gibt schließlich die Richtigkeit von Adams Theorie zu, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 26 (1866), p. 173.

193) Paris C. R. 48 (1859), p. 137—8, 817—827; 49 (1859), p. 309—14; Conn. des Temps 1862 App., p. 59—68; 1864 Add., p. 21—68.

194) Paris C. R. 72 (1871), p. 495—96. Teile davon sind geprüft von *Andoyer.*

195) Ib. 74 (1872), p. 152—3.

197) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 22 (1862), p. 173--228 = Works 3, p. 522—561.

198) Lond. Astr. Soc. Mem. 30 (1862), p. 38—52.

199) Paris Éc. norm. ann. 8 (1879), p. 361—444.

200) Carnegie Inst. Publ. 72, p. 119.

201) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 57 (1897), p. 342—349.

202) Paris C. R. 135 (1902), p. 432.

203) Die Säkularbeschleunigung des Mondes, Diss., Göttingen 1905.

204) Paris Inst. (math.) mém. 2 (1799), p. 126—182 = Oeuvres 12, p. 191—234; Conn. des Temps 1800, p. 362—378 = Oeuvres 13 (Ed. 1895), p. 3—4.

205) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 191.

Wert von e' für den konstanten Wert eingesetzt werden darf, wo immer er in diesen Ausdrücken auftritt. Wenn dann L, G, H durch n, e, Y, e' ausgedrückt werden, so können die Änderungen von n, e, Y aus denen von e' gefunden werden mittels der Bedingung:

$$O = \delta L = \frac{\partial L}{\partial n}\delta n + \frac{\partial L}{\partial e}\delta e + \frac{\partial L}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial L}{\partial e'}\delta e'$$

und zweier ähnlicher für δG und δH. Die Säkularänderungen der mittleren Bewegung, des Perigäums und des Knoten werden dann gegeben durch

$$\int \delta n dt, \quad \int \delta \pi dt, \quad \int \delta \theta dt,$$

wo π und θ die mittleren Bewegungen von Perigäum und Knoten sind. *Brown*[206]) zeigte ferner: Wenn aP das konstante Glied in der schließlichen trignometrischen Entwicklung von a/r im Hauptproblem ist, und wenn p_2, p_3 die kanonischen Konstanten aus Nr. **10**b sind, dann können bei Vernachlässigung von $(a/a')^2$ — das nur unmerkliche Glieder gibt — die Veränderungen von n, e, Y aus den drei Gleichungen erhalten werden:

$$p_2 \delta \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} + p_3 \delta \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{3}{2} n^2 a^3 \delta \frac{\partial P}{\partial \alpha} \qquad (\alpha = n, e, y)$$

wo:

$$\delta = \delta n \frac{\partial}{\partial n} + \delta e \frac{\partial}{\partial e} + \delta Y \frac{\partial}{\partial Y} + \delta e' \frac{\partial}{\partial e'},$$

p_2, p_3 läßt sich direkt finden (vgl. Nr. **11**). Da P die ersten Potenzen von e^2, Y^2 nicht enthält und p_2, p_2 bzw. diese Faktoren enthalten, so wird speziell der Teil von δn, der nur von m und $\delta e'$ abhängt, gleich:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\delta n = - \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial e'}\delta e'.$$

Durch Kombination der allgemeinen Entwicklungen mit seiner halbnumerischen Theorie findet er[208]), mit $\delta e' = -[6{,}5968 - 10]$ im Jahrhundert und unter Berücksichtigung eines Terms zweiter Ordnung[209]) (vgl. Nr. **24**), für die totalen Säkularbeschleunigungen

mittl. Bewegung $6'',02 \pm 0'',02$; Perigäum $-38'',2 \pm 0'',1$;
Knoten $6'',36 \pm 0'',02$,

wobei die Fehler die größtmöglichen aus allen bekannten Unvollkommenheiten der Mondtheorie hervorgehenden sind. Die Werte stimmen innerhalb $0'',2$ mit den erwähnten von *Delaunay-Andoyer*,

206) Lond. Math. Proc. 28 (1896), p. 154.

208) Lond. Month. Not. 57 (1897), p. 342—349; Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 56. Andoyer erhält denselben Wert, siehe Fußnote 202.

209) Lond. Month. Not. 70 (1909), p. 148.

Newcomb und *v. Brunn* überein, wenn der angeführte *Newcomb*sche Wert[210]) von $\delta e'$ benutzt wird.

Es bleibt demnach, wenn man die mittlere Länge durch

$$nt + \varepsilon + 6'',0 \frac{t^2}{100}$$

darstellt (t in Jahren gerechnet), eine Differenz von $2''$ in dem mit t^2 multiplizierten Gliede zwischen Theorie und Beobachtung bestehen. Versuche, diese Differenz aus der Gravitationstheorie allein zu erklären, hat *V. Puiseux*[211]) gemacht, indem er die höheren Glieder, die von t^3, t^4 abhängen, und den Einfluß der Säkularänderung der Ekliptik[210]) prüfte; er fand diese Einflüsse unmerklich innerhalb historischer Zeiträume. Zum gleichen Resultat gelangt *v. Brunn*[211a]), der für Erdexzentrizität und -perihellänge statt der säkularen die langperiodische Form einführt. *A. Weiler*[212]) glaubte, daß die Figur der Erde die Differenz erklären könnte, aber *Seeliger*[213]) und *Hill*[214]) zeigten, daß dadurch keine Glieder der erforderten Art hervorgebracht werden können; diese Berichtigung wurde dann von *Weiler* selbst vollkommen bestätigt.[215])

Die Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung werden jetzt meist auf die Wirkung der Flutreibung geschoben, die die Umdrehungsdauer der Erde (unser Zeitmaß) und die mittlere Bewegung des Mondes ändert. *P. H. Cowell*[216]) glaubt auch an eine Beschleunigung der mittleren Länge der Erde; aber die von ihm gefundenen Abweichungen können ebenso gut unbekannten Änderungen der mittleren Länge des Mondes und seines Knotens zur Last fallen.

24. Störungen zweiter Ordnung. In den Nummern **20—23** sind allein Glieder von erster Ordnung in den störenden Kräften betrachtet; die aus den Quadraten und Produkten der störenden Kräfte entspringenden Glieder studiert *Brown*[217]). Es zeigt sich, daß die kleinen Divisoren in dieser zweiten Näherung im allgemeinen nicht in höherer Ordnung auftreten als in der ersten. Es ergeben sich einige langperiodische Terme mit kleinen Koeffizienten.

---

210) Wash. Astr. Pap. 6 (1895), p. 9.

211) Paris Mém. div. Sav. 21 (1875), p. 263—391.

211a) Diss. Göttingen 1905.

212) Astr. Nachr. 90 (1877), col. 369—82; 91 (1878), col. 1—12, 17—30, 33—48.

213) Ibid. 91 (1878), col. 193—206.

214) Ibid., col. 251—54 = Works 1, p. 282—283.

215) Ibid. 92 (1878), col. 289—300, 305—318, 321—328.

216) Lond. Month. Not. 66 (1906), p. 3—5.

217) Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 82—93.

Eine von *Stockwell*[218]) zuerst bemerkte säkulare Änderung ergibt sich aus der Kombination der Bewegung der Ekliptik mit Termen, die der Abplattung der Erde entspringen. *Brown*[219]) findet als Zusätze zu den Säkularbewegungen der mittleren Länge, des Perigäums und des Knotens bzw. $+0'',20$, $+0'',11$, $-0'',10$.

25. Andere mögliche störende Ursachen[216]). Es sind zu erwähnen:

a) Die Annahme, daß der Exponent des Attraktionsgesetzes nicht streng $= -2$, sondern $= -2 - \delta$ ist (*Halls*[216a]) Hypothese). Der Wert $\delta = 0{,}00000015$ würde die bekannte Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur erklären, ohne die Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung bei den übrigen Planeten zu stören[217a]). Die gleiche Annahme würde in der Mondtheorie eine Vermehrung der jährlichen mittleren Apsidenbewegung um $1'',5$ hervorbringen, ohne die Knotenbewegung merklich zu beeinflussen. *Hansens* Theorie zeigt in der Apsidenbewegung gerade diese Differenz[218a]), welche *Hansen* selbst einem Unterschied zwischen Schwerpunkt und Figurmittelpunkt zuschrieb[219a]), aber er findet gleichzeitig auch eine Differenz in der Knotenbewegung von $-2'',86$. *Browns*[220]) Rechnungen haben endlich gezeigt, daß die theoretischen mittleren Bewegungen mit dem Beobachteten innerhalb $0'',3$ übereinstimmen, so daß δ keinesfalls größer sein kann als $0{,}00000004$. Vgl. Fußn. 233a).

b) Eine Änderung der Periode der Erdrotation infolge der Ge-

---

218) Theory of the moons motion, Philadelphia 1881, p. 363. Er setzt die veränderliche Neigung statt der konstanten in die fertige Lösung. Der theoretische Fehler macht in diesem Falle praktisch fast nichts aus.

219) Lond. Month. Not. 70 (1909), p. 143—148.

216a) Vgl. auch den Artikel VI 2 (*Oppenheim*).

217a) *Newcomb,* Astronomical Constants, Washington 1895, p. 119.

218a) *Hansen* [Astr. Nachr. 19 (1842), col. 191—198] sagt, daß ein Fehler von $0'',1$ in der Evection einen solchen von $1'',47$ in der jährlichen Apsidenbewegung hervorbringt und *Wand* [Astr. Nachr. 126 (1891), col. 129—138] stellt fest, daß die Koeffizienten der periodischen Terme bei *Hansen* nicht zuverlässig genug sind, um die Apsidenbewegung auf mehr als $2''$ genau garantieren zu können.

219a) Lond. Astr. Soc. Mem. 24 (1856), p. 29—89; Darlegung, p. 175, 474—479; *Newcomb* [Phil. Mag. (4) 37 (1869), p. 32—35] ist der Meinung, daß die Korrektion unberechtigt ist. Aber seine Argumente wurden von *Hansen* nicht anerkannt, Leipz. Ber. 23 (1871), p. 1—12.

220) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903), p. 396—397. Eine frühere Diskussion des Gegenstandes durch den gleichen Autor findet sich ibid. 57 (1897), p. 332—341. Siehe auch *P. H. Cowell,* ibid. 65 (1905), p. 275.

zeitenreibung[221]), säkulare Kontraktion des Erdkörpers oder Massenzuwachs durch herabfallende Meteore[222]). Es ist möglich, daß die beiden erstgenannten Ursachen merkbare Änderungen hervorbringen[223]), dagegen ist es unwahrscheinlich, daß die letztere eine beobachtbare Wirkung haben kann.

c) Der Einfluß eines widerstehenden Mittels ist höchstwahrscheinlich zu klein, um sich in den Beobachtungen bemerkbar zu machen.

d) Eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwerkraft nach irgendeinem wahrscheinlichen Gesetz wird schwerlich imstande sein, die Mondbewegung merklich zu beeinflussen, ohne zugleich auf die Planetenbewegung mehr, als es die Erfahrung zuläßt, einzuwirken[225]).

e) Elektrodynamische Theorien der Gravitation und das Relativitätsprinzip. Diese würden sich wahrscheinlich nur in den Bewegungen des Knotens und der Apsidenlinie äußern.

Die einzigen annehmbaren Erklärungen für die Unstimmigkeiten bei der Säkularbeschleunigung dürften die beiden ersten unter b) genannten Ursachen sein.

Brown[226]) hat sich auch bemüht, *Newcombs* langperiodische empirische Terme (vgl. Nr. 26) zu erklären. Magnetische Kräfte hält er trotz anderer Andeutungen magnetischer Wirkungen für unwahrscheinlich. Eine mögliche Wirkung der Mondlibration bleibt aus Mangel an Beobachtungsmaterial noch offen. Eine nahe Koinzidenz zwischen der Sonnenrotation und dem drakonitischen Monat würde genügen, wenn die Sonne eine Abplattung von $^1/_{2200}$ hätte. *D. St. Blancat*[227]) prüft die Wirkung eines etwaigen intramerkuriellen Planeten, dessen Masse aber dann der des Merkur vergleichbar angenommen werden müßte.

---

221) *Delaunay,* Paris C. R. 61 (1865), p. 1023—1032 = Journ. de Math. (2) 10 (1865), p. 401—411; *W. Ferrel,* Astron. Journ. 3 (1854), p. 138—141; *Airy,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 26 (1866), p. 221—235.

222) *Dufour,* Bull. Soc. Vaud. Laus. 9 (1868), p. 252—254.

223) *Thomson and Tait,* Natural Philosophy 2, App. G.

225) *R. Lehmann-Filhés* [Münch. Ber. 25 (1895), p. 371—422] zeigt einmal, daß eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft keine Beschleunigung, sondern eine Verzögerung hervorbringt, und zweitens, daß diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Ordnung 1000000 $\times$ Lichtgeschwindigkeit sein müßte, wenn nicht unmöglich große Störungen sich ergeben sollen.

226) Amer. Journ. Sc. ser. 4, 29 (1910), p. 529—539.

227) Fac. Toulouse Ann. (2) 9 (1907), p. 1—103.

26. Der gegenwärtige Stand der Mondtheorie. Eine zusammenfassende Darstellung vom gegenwärtigen Stande der Mondtheorie geben *Tisserand*[228]) und *Newcomb*[229]). Die vollständigste theoretische Bestimmung der Mondbahn, die zum Vergleich mit der Beobachtung zur Verfügung steht, ist noch immer die von *Hansen* (Nr. **17**), wenn man folgende Korrektionen daran anbringt: (1) eine Ungleichheit von 239 Jahre Periode und von 21″,47 Amplitude in Abzug bringt (Nr. **21**), deren Koeffizient in Wahrheit nur 0″,3 beträgt; (2) statt des empirischen Wertes von 12″,2 für die Säkularbeschleunigung, den *Hansen* verwendet, den theoretischen von 6″,0 einsetzt; (3) kleine Änderungen der Konstanten vornimmt, die teils von den Änderungen (1) und (2) und von eingeführten empirischen Termen herrühren, teils von den modernen Beobachtungen gefordert werden; und (4) einen oder zwei kleine zufällige Fehler berichtigt. Indeß ist es nicht vollkommen sicher, in welchem Umfange empirische Daten in die Theorie eingeführt sind (vgl. Nr. **17**). Immerhin bleiben, wenn man *Hansens* Resultate nach Anbringung der oben erwähnten Korrektionen als den gegenwärtigen Stand der eigentlichen Theorie des Mondes gelten läßt, eine Reihe nicht unerheblicher Differenzen zwischen Theorie und Beobachtungen, die *Newcomb*[230]), *Tisserand*[231]), *Neison*[232]) und *Cowell*[233]) zu eingehenden Untersuchen veranlaßt haben. Folgende empirischen Korrektionen nach *Newcomb* scheinen die Beobachtungen seit 1620 am besten darzustellen: 1. Eine Ungleichung mit einem Koeffizienten von ungefähr 13″ und einer Periode von 270 Jahren, die aber gegen das langperiodische Venusglied eine Phasenverschiebung von etwa 60° zeigt. 2. Eine Ungleichheit von 2—3″ Amplitude und der Periode von 60—70 Jahren. 3. Einige Terme kurzer Periode mit Koeffizienten bis an 1″. Ein Grund für diese Abweichungen ist nicht bekannt (vgl. Nr. **25**).

Eine ausführliche Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung hat *Cowell*[234]) unternommen, der die verbleibenden Differenzen auf Glieder von der Periode vorgegebener theoretischer Terme geprüft und so deren Koeffizienten empirisch bestimmt hat. Die Veri-

---

228) Méc. cél. 3, chap. 19 = Paris Bull. Astr. 8 (1891), p. 481—503.

229) Rome Math. Congress 1 (1908), p. 135—143.

230) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903), p. 316—324.

231) Méc. Cél. 3, p. 414.

232) Lond. Astr. Soc. Mem. 48 (1884), p. 283—418.

233) Lond. Month. Not. 65 (1905), p. 34—53. Vgl. auch die Diskussion in den Lond. Month. Not. 1903—1909.

234) Zahlreiche Arbeiten in der Lond. Month. Not. 1903—1907.

fikation von etwa 300 Koeffizienten bestätigt die allgemeine Verläßlichkeit der theoretischen Werte.[233a])

Vollständige Vergleichungen der Resultate verschiedener moderner Theorien sind ausgeführt von *Newcomb* und *Maier*[235]), die *Hansens* Theorie in *Delaunays* Form überführten und mit letzterer verglichen; von *Cowell*[236]), der die Terme in *Hansens* Tafeln in ähnlicher Weise transformierte; und von *Brown*[237]), der die Koeffizienten seiner Theorie im Hauptproblem mit denen von *Hansen* und[238]) in den planetaren Gliedern mit denen von *Radau* und *Newcomb* verglich. Eine teilweise Vergleichung der Resultate seiner noch unpublizierten Theorie mit *Hansen* und *Brown* führte *E. Nevill*[239]) aus.

27. Tafeln der Mondbewegung. *Clairaut*[240]) war der erste, der Tafeln zur Berechnung des Mondortes zu jeder beliebigen Zeit angab, die allein auf die Gravitationstheorie gegründet waren; sie wurden in verbesserter Gestalt 1765[241]) neu herausgegeben. Auch *Euler*[242]) brachte seine Ergebnisse in Tabellenform. Eine eigenartige Stellung nehmen die Tafeln von *Tobias Mayer*[243]) ein, indem für ihre Herstellung die Argumente aus der Theorie hergenommen, die Koeffizienten jedoch aus einer größeren Reihe von Beobachtungen bestimmt wurden; sie sind späterhin unter Benutzung der inzwischen zahlreich ange-

---

233a) *Newcombs* letzte Arbeit (Wash. Astr. Pap. 9 (1913) Part. 1) enthält eine Vergleichung von Sternbedeckungen seit 1620 mit der nach *Browns* Theorie korrigierten *Hansen*schen Theorie. *Brown* hat in Fortsetzung von *Cowells* Untersuchungen ähnlich eine Vergleichung der *Greenwich*er Meridianbeobachtungen seit 1750 ausgeführt (Lond. Monthly Not. 73 (1913), p. 692—714; 74 (1914), p. 156—167, 396—424, 552—568). Die allgemeinen Schlüsse haben sich hierdurch nicht geändert, und es ist jetzt sicher, daß die empirischen Terme nicht auf Beobachtungsfehlern beruhen. *Brown* zeigte, daß innerhalb der Genauigkeit von Theorie und Beobachtung die theoretischen Werte der mittleren Bewegung von Perigäum und Knoten mit den beobachteten übereinstimmen, wenn man der Erdabplattung den Betrag 1/293.5 gibt. Die Unterschiede in den jährlichen Bewegungen sind dann kleiner als 0″.03 (vgl. Nr. **25** a). Diese Arbeiten enthalten auch die letzten Werte der Integrationskonstanten. Die letzte Zusammenfassung siehe *Brown*, Lond. Observatory 37 (1914), p. 206—211.

235) Wash. Astr. Pap. 1 (1880), p. 57—107.

236) Lond. Mouth. Not. 64 (1904), p. 159—168.

237) Ibid. 65 (1905), p. 276—296.

238) Ibid. 68 (1908), p. 148—170.

239) Ibid. 65 (1905), p. 658—662.

240) Théorie de la Lune, 1. Aufl., St. Petersburg 1752.

241) Théorie de la Lune, 2. Aufl., St. Petersburg 1765.

242) Theoria motuum Lunae (2. Theorie), St. Petersburg 1772

243) London 1755; verbessert 1770.

häuften Beobachtungen verbessert worden von *C. Mason*[244]), *J. T. Burg*[245]), *J. K. Burckhardt*[246]). *Damoiseau*[247]) hat auf Grund seiner Theorie Mondtafeln veröffentlicht, dic, neben denen *Burckhardts*, bis zum Erscheinen der *Hansen*schen am meisten im Gebrauch waren. Die Tafeln *Hansens* endlich[248]) mit den von *Newcomb* für dieselben angegebenen Korrektionen[249]) liegen allen Mondephemeriden bis auf den heutigen Tag zugrunde.

Auch nach *Planas* Theorie sind nach Anbringung einiger Korrektionen von *B. Peirce*[250]) Tafeln gerechnet worden.

Tafeln, die unter *R. Radaus* Leitung aus *Delaunays* Theorie mit Verbesserungen und Zusätzen aus verschiedenen Quellen konstruiert sind[251]), werden zukünftig für die Mondephemeride der Connaissance des Temps gebracht werden. *E. W. Brown* hat Tafeln auf Grund seiner Theorie in Arbeit (Nr. **16**).

---

244) London 1787.

245) Paris 1806.

246) Paris 1812.

247) Tables de la Lune, Paris 1828.

248) Tables de la Lune, London 1857.

249) Corrections to *Hansen*'s Tables etc., Papers publ. by Venus Commission Pt. III, p. 1—51.

250) Washington 1853/4.

251) Paris 1911.

(Abgeschlossen Juli 1914.)

VI 2, 15. THEORIE DER PLANETEN.

Von

KARL F. SUNDMAN

IN HELSINGFORS

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

I. Die Methode der Variation der Konstanten.

II. Die Hansensche Methode.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.

P. S. Laplace, Traité de mécanique céleste I—V. Paris 1799—1827. (Cit.: méc. cél.)

P. G. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde I, III. Paris 1829—1834.

P. A. Hansen, Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1831.

U. J. J. Leverrier, Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris, 1855—1877.

P. A. Hansen, Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Abh. I—II—III. — Abh. d. K. S. Ges. d. Wiss. III—IV—V. Leipzig 1857—1861.

J. F. Encke, Über die allgemeinen Störungen der Planeten. Berliner Astr. Jahrbuch für 1857, Berlin 1854.

H. Resal, Traité élémentaire de mécanique céleste, 2[e] édition. Paris 1884.

O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888.

F. Tisserand, Traité de mécanique céleste I, IV. Paris 1889, 1896.

H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I—III. Paris 1892—1899.

O. Backlund, Über die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, VII[e] Ser., 38 Nr. 4. St. Petersburg 1892.

H. Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales I. Stockholm 1893, II. 1909.
K. Bohlin, Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ser. III. Upsala 1896.
N. Herz, Artikel „Mechanik des Himmels" in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie. Breslau 1898.
M. Brendel, Theorie der kleinen Planeten I—IV. Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Neue Folge I, VI, VIII. Berlin 1898—1911.
F. R. Moulton, An Introduction to Celestial Mechanics. New York 1902.
C. V. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels I, II. Leipzig 1902, 1907.
H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste I. Paris 1905.

---

1. Numerische Verhältnisse. Da eine strenge und allgemeine Lösung des Problems der Planetenbewegung nicht gelungen ist, mußte man für praktische Zwecke geeignete Annäherungsmethoden suchen. Dabei sind gewisse rein numerische Verhältnisse im Sonnensystem von wesentlicher Bedeutung. Es seien daher einige solche angeführt.

Nach ihrer Größe teilt man die unsere Sonne umkreisenden Planeten in zwei Gruppen: große oder Hauptplaneten und kleine Planeten (Asteroiden oder Planetoiden). Zurzeit sind 8 Hauptplaneten bekannt, und zwar Merkur (☿), Venus (♀), Erde (♁), Mars (♂), Jupiter (♃), Saturn (♄), Uranus (♅) und Neptun (♆). Die Anzahl der Entdeckungen von Asteroiden in dem letzten Jahrhundert geht aus folgender Tafel hervor:

Jahre	Anzahl	Jahre	Anzahl
1801—1807	4	1871—1875	45
1808—1844	0	1876—1880	62
1845—1850	9	1881—1885	34
1851—1855	24	1886—1890	49
1856—1860	25	1891—1895	107
1861—1865	23	1896—1900	54.
1866—1870	27		

Bis zum Jahre 1912 sind zusammen etwa 750 Asteroiden gefunden worden. Um in einfacher Weise diese zu unterscheiden, wird jedem nach Vorschlag von *Encke* außer einem Namen eine in einen Kreis oder durch eine Parenthese eingeschlossene Nummer beigelegt, z. B. (108) Hekuba, (153) Hilda.

Nach *J. Bauschinger*[1]) seien hier die Logarithmen der großen Halbachsen (a), mittlere tägliche Bewegung (n), Exzentrizitätswinkel

1) *J. Bauschinger,* Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig 1901. — Veröffentl. d. Kgl. Astr. Recheninstituts Nr. 16, Berlin 1901.

($e = \sin\varphi$), Neigung gegen die Ekliptik (i) und die Masse (m) für die Hauptplaneten und einige typische Asteroiden angeführt.[2])

	Epoche	$\log a$	n	φ	i	$\frac{1}{m}$
Merkur	1900.0	9.5878	14732″.4	11°52′	7° 0′	6 000 000
Venus	1900.0	9.8593	5767″.7	0°23′	3°24′	408 000
Erde	1900.0	0.0000	3548″.2	0°58′	0° 0′	329 390
Mars	1900.0	0.1829	1886″.5	5°21′	1°51′	3 093 500
(46) Hestia	1865.0	0.4025	883″.7	9°28′	2°18′	
(108) Hekuba	1878.9	0.5063	617″.4	5°54′	4°24′	
(153) Hilda	1884.0	0.5965	452″.2	9°44′	7°53′	
(279) Thule	1891.1	0.6297	403″.2	4°43′	2°23′	
Jupiter	1850.0	0.7162	299″.1	2°46′	1°19′	1047.355
Saturn	1850.0	0.9795	120″.5	3°13′	2°30′	3501.6
Uranus	1900.0	1.2831	42″.23	2°42′	0°46′	22869
Neptun	1900.0	1.4781	21″.53	0°29′	1°47′	19700

Die Bahnen der Asteroiden liegen zwischen Mars und Jupiter. Ausnahmen sind (433) Eros, dessen Bahn teilweise innerhalb der Marsbahn liegt, und die vier Asteroiden der sog. Jupitergruppe, deren Bahnen nahe dieselbe große Achse haben wie die Jupiterbahn. Die Bahnen der großen Planeten haben, Merkur ausgenommen, kleine Exzentrizitäten und Neigungen. Dagegen kommen bei den Asteroiden Exzentrizitäten bis 0.4 und Neigungen bis 35° vor.

Die Massen der Asteroiden sind sehr klein. Nach *Bauschinger*[1]) dürfte die Summe der Massen aller Asteroiden nicht mehr als $\frac{1}{296\,000\,000}$ der Sonnenmasse betragen, und von dieser Gesamtsumme kommt die Hälfte auf Vesta und Ceres allein. Die Einwirkung eines Asteroiden auf die übrigen Planeten ist daher unmerklich. Nur wenn zwei Asteroiden einander sehr nahe kommen, ist eine merkbare Einwirkung möglich. Unter den vielen Untersuchungen über die kleinsten Abstände (Proximitäten) zwischen den Asteroiden sei nur diejenige von *A. Galle*[3]) angeführt, welcher Abstände bis zu $\frac{1}{5000}$ der großen Halbachse der Erdbahn herab findet.

2) Vollständige Elementenverzeichnisse werden im Berliner Astronomischen Jahrbuch publiziert. Die Elemente der Planeten in Bezug auf die unveränderliche Ebene finden sich bei *A. A. Psilander,* Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förhandl. 1900, Nr. 8, Stockholm 1901 = Meddelanden från Lunds astr. observatorium Nr. 16, abgedruckt in *C. V. L. Charlier,* Die Mechanik des Himmels, Tafel I und III, Leipzig 1902.

3) *A. Galle,* Zur Berechnung der Proximitäten von Asteroidenbahnen. Diss. Breslau 1883.

2. Die Differentialgleichungen der Bewegung. Um die Bestimmung der Bewegung eines von Satelliten umkreisten Planeten zu vereinfachen, zerlegt man sie in die folgenden drei:

a) die Bewegung des Schwerpunkts G des von dem Planeten und seinen Satelliten gebildeten Systems P;

b) die Bewegung des Schwerpunkts des Planeten um G, und

c) die Bewegung des Planeten um seinen Schwerpunkt.

Diese Bewegungen sind im allgemeinen nicht ganz unabhängig. Wie die Verhältnisse im Sonnensystem sind, hat jedoch die letztgenannte Bewegung keine merkbare und die unter b) genannte nur ausnahmsweise eine zu berücksichtigende Einwirkung auf die erstgenannte Bewegung. Sobald die Bewegungen der Satelliten um ihren Hauptplaneten durch die Mondtheorien bekannt sind, folgt die unter b) genannte Bewegung aus der bekannten linearen Gleichung zwischen den Koordinaten des Planeten, der Satelliten und des Schwerpunktes G. (Vgl. *Jung* IV 2, 2.) Die eigentliche Aufgabe der Planetentheorien ist die unter a) genannte Bewegung zu bestimmen.

Seien x, y, z die rechtwinkligen auf im Raume feste Achsen bezogenen Koordinaten des Schwerpunkts G eines Planeten. Nach dem sogenannten Schwerpunktssatz[4]) sind dann die Bewegungsgleichungen

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

wo t die Zeit, X, Y, Z die Summe der x-, bzw. y- und z-Komponenten aller auf den Planeten und seine Satelliten wirkenden äußeren Kräfte und m die Summe der Massen des Planeten und seiner Satelliten bezeichnen. Die Gleichungen (1) gelten auch für die Bewegung des Schwerpunkts der Sonne.

Unter den äußeren Kräften sind zunächst die nach dem Newtonschen Gesetz wirkenden Anziehungen der bekannten Himmelskörper unseres Sonnensystems zu berücksichtigen. Würden die Himmelskörper aus homogenen konzentrischen sphärischen Schalen gebildet sein, so dürfte man vollkommen streng bei der Berechnung der Kraftkomponenten annehmen, daß ihre Massen in ihre resp. Schwerpunkte konzentriert seien.[5]) Da die Massenverteilung in den Körpern unseres Sonnensystems nicht viel hiervon abweicht und dazu die Entfernungen zwischen den Planeten im Verhältnis zu ihren Dimensionen groß sind,

4) Vgl. *Stäckel,* IV 6, **29**; *P. Appell,* Traité de mécanique rationnelle II, p. 18 und 224, Paris 1904 und übrigens alle Lehrbücher der Mechanik.

5) Wie *Laplace,* Méc. cél. I, p. 143 = Oeuvres I p. 160 zeigt, hat nur ein Anziehungsgesetz von der Form $Ar + \frac{B}{r^2}$ diese Eigenschaft (A und B Konstanten).

kann man in den Planetentheorien ohne merklichen Fehler diese Annahme machen. Bis auf Größen höherer Ordnung ist nämlich der Fehler, den man bei dieser Annahme in der Berechnung der Komponenten der zwischen zwei einander anziehenden Himmelskörpern wirkenden Kraft begeht, im Verhältnis zu dieser Kraft absolut genommen kleiner als

$$9\,\frac{\varrho^2+\varrho'^2}{r^2},$$

wo r die Entfernung der Schwerpunkte der Körper, ϱ und ϱ' die größten von ihren resp. Schwerpunkten aus gerechneten Erstreckungen der Körper bezeichnen.

Man betrachte zwei Systeme von Körpern P und P', jedes bestehend aus einem Planeten und den ihn umkreisenden Satelliten. Seien m_i, $x+x_i$, $y+y_i$, $z+z_i$ die Masse und die Cartesischen Koordinaten der verschiedenen zum System P gehörigen Körper P_i $(i=1,2,3,\ldots)$, wobei x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes G des Systems bezeichnen sollen. Die entsprechenden Größen bei dem System P' seien G', P_j', m_j', x', y', z', $x'+x_j'$, $y'+y_j'$, $z'+z_j'$.

Die Summe der Komponenten der Kräfte, welche die Körper des Systems P' auf die Körper des Systems P ausüben, sind dann gleich den partiellen Ableitungen nach x, y und z der Funktion

$$\overline{U}=k^2\sum_i\sum_j\frac{m_i m_j'}{\Delta_{i,j}},$$

wobei

$$\Delta_{i,j}=\sqrt{(x+x_i-x'-x_j')^2+(y+y_i-y'-y_j')^2+(z+z_i-z'-z_j')^2}$$

die Entfernung der Körper P_i und P_j' bezeichnet und k die Gaußsche Attraktionskonstante[6]) ist. Unter der Voraussetzung, daß die Entfernungen zwischen den Körpern P_i untereinander und zwischen den Körpern P_j' untereinander klein sind im Verhältnis zur Entfernung

6) Die Konstante k hat nach *C. Fr. Gauß* (Theoria motus, p. 2 = Werke VII, p. 14) den Wert $k=0.017\,202\,099$ [$\log k = 8.2\,355\,814\,414$], wobei er als Zeiteinheit den mittleren Sonnentag, als Masseneinheit die Sonnenmasse und als Längeneinheit die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne wählte. Später, als die Erdbewegung genauer bekannt war, hätte man wohl einen genaueren Wert von k berechnen können. Um die mit dem Gaußschen Wert von k berechneten Tafeln nicht verändern zu müssen, behält man nach *U. J. J. Leverrier* (Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 189) für die Gaußsche Konstante den obigen Wert bei, verändert aber die Einheit der Länge um ein Unbedeutendes. In theoretischen Untersuchungen pflegt man die Zeiteinheit so $\left(=\frac{1}{k}=58.13\,244\,087\right.$ mittlere Sonnentage) zu wählen, daß die Gaußsche Konstante gleich 1 ist.

der Schwerpunkte G und G':

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \tag{2}$$

läßt sich $\overline{U}$ durch Reihenentwicklung in zwei Teile

$$U_0 = k^2 \frac{mm'}{\Delta} \tag{3}$$

und

$$U_1 = -k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j' [(x_i - x_j')^2 + (y_i - y_j')^2 + (z_i - z_j')^2]}{2\Delta^3}$$

$$+ 3k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j [(x-x')(x_i - x_j') + (y-y')(y_i - y_j') + (z-z')(z_i - z_j')]^2}{2\Delta^5}$$

$$+ \text{Glieder höherer Grade in } x_i - x_j',\ y_i - y_j',\ z_i - z_j'$$

zerlegen, wo

$$m = \sum_i m_i, \quad m' = \sum_j m_j'$$

die Massen der Systeme P und P' bezeichnen.

Im allgemeinen kann man U_1 vernachlässigen und $\overline{U} = U_0$ setzen, was bedeutet, daß man die Massen der Systeme in ihre resp. Schwerpunkte konzentriert. Nach *P. S. Laplace*[7]) ist die aus U_1 stammende Störung merkbar nur bei dem System Erde-Mond. In den Planetentheorien versteht man auch überall (wie auch stets im folgenden), wo kein Mißverständnis zu fürchten ist, unter einem Planeten eben den materiellen Punkt, der erhalten wird, wenn die Masse des Planeten und diejenigen seiner eventuellen Satelliten in ihrem gemeinsamen Schwerpunkt konzentriert gedacht werden. Die Differentialgleichungen der Bewegung des Planeten P schreiben sich dann einfach

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo

$$U = k^2 \sum \frac{m'}{\Delta}$$

ist und das Summenzeichen angibt, daß jeder Planet (außer P selbst) und die Sonne ein zu $k^2 \frac{m'}{\Delta}$ analoges Glied in die Funktion U einführen.

Weil die Sonne als Zentralkörper eine besondere Stellung einnimmt, pflegen die Astronomen öfters die Koordinaten der Planeten in bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt in den Schwerpunkt der Sonne fällt, anzugeben. Seien jetzt m, x, y, z die Masse

7) *P. S. Laplace,* Méc. cél. livre 6, chap. 4 (1802) = Oeuvres 2 p. 63.

und die Koordinaten des Planeten P in bezug auf die Sonne, deren Masse gleich 1 angenommen wird. Die Differentialgleichungen der relativen Bewegung sind dann

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k^2(1+m)x}{r^3}=k^2(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{k^2(1+m)y}{r^3}=k^2(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{k^2(1+m)z}{r^3}=k^2(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

wobei

$$(5)\quad \begin{aligned} \Omega &= \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) \\ &= \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos H}{r'^2}\right) \end{aligned}$$

die sog. Störungsfunktion (eingeführt von *J. L. de Lagrange*[8]); Name von *Laplace*) ist. Es bezeichnen hierbei m', x', y', z' die Masse und die Koordinaten des Planeten P' in bezug auf die Sonne. Ferner sind

$$(6)\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$(7)\quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$(8)\quad \Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}$$

die Abstände der Planeten P und P' von der Sonne und voneinander. H ist der von r und r' eingeschlossene Winkel. In dem angegebenen Wert von Ω ist nur die Einwirkung eines Planeten berücksichtigt. Jeder weitere einwirkende Planet fügt zu dem in Gleichung (5) gegebenen Ω ein der rechten Seite von (5) analoges Glied hinzu. Weil aber zunächst am besten jedes Glied von Ω besonders behandelt wird, pflegt man meist wie oben nur ein Glied von Ω anzuschreiben.

Die Differentialgleichungen der Bewegung von P' werden erhalten, wenn man in den Gleichungen (4) und (5) die gestrichenen und ungestrichenen Größen vertauscht. Dadurch geht Ω in

$$\Omega'=\frac{m}{1+m'}\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r'\cos H}{r^2}\right)$$

über. Bei der Entwicklung der Störungsfunktion pflegt man anzunehmen, daß der Planet P' weiter von der Sonne entfernt ist als der Planet P. Öfters läßt man auch die konstanten Faktoren $\frac{m'}{1+m}$ und $\frac{m}{1+m'}$ weg.

3. Die erste Annäherung. Das Zweikörperproblem. Wie schon hervorgehoben, kann man die Bewegungsgleichungen (4) nicht streng integrieren. Man muß bei ihrer Integration zu Annäherungen und

8) *J. L. de Lagrange,* Nouv. Mém. de Berlin 1777 = Oeuvres 4, p. 401.

Reihenentwicklungen greifen. Um die Lösungen zu vereinfachen, hat man sich an die tatsächlich vorhandenen Bewegungsverhältnisse im Planetensystem zu halten. Je genauer man die Bewegungen übersehen kann, um so vorteilhafter wird man im allgemeinen das Integrationsverfahren anlegen und die jedesmaligen erleichternden Bedingungen ausnützen können. Für die Astronomen ist es ja vor allen Dingen nötig, leicht und sicher berechenbare Ausdrücke zu erhalten.

Unter den Umständen, welche im Planetensystem die Lösung erleichtern, ist zunächst der zu nennen, daß die Anziehungskraft der Sonne auf einen Planeten groß ist im Verhältnis zu der der anderen Planeten, was von der Kleinheit der Massen und den großen Entfernungen zwischen den Planeten herrührt.

Die Massen der Asteroiden sind so klein, daß ihre Einwirkung auf die übrigen Planeten bis jetzt unmerkbar ist. Man kann daher erst die Bewegungen der Hauptplaneten unter alleiniger Berücksichtigung der Anziehung der Sonne und ihrer gegenseitigen Anziehungen bestimmen. Es zeigt sich, daß nur die einander nächsten Planeten größere Einwirkungen aufeinander ausüben. Bei der Bestimmung der Bewegung eines Asteroiden braucht man nur die Einwirkung der Hauptplaneten zu berücksichtigen.

Die Methoden der Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung sind für große und kleine Planeten wesentlich dieselben. Die Verschiedenheiten hängen nur von dem größeren oder kleineren Umfang der einzelnen Teile der Formeln ab.

In der ersten Annäherung vernachlässigt man die gegenseitigen Anziehungen der Planeten. Dies wird erreicht, wenn man rechts in den Differentialgleichungen die Massen und also Ω gleich Null setzt, wodurch die Bewegungsgleichungen eines Planeten in dem solcherweise entstehenden Zweikörperproblem die folgenden werden:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen x, y und z als Funktionen von t und sechs Integrationskonstanten, wobei es sich zeigt, daß die Bewegung des Planeten nach den Keplerschen Gesetzen vor sich geht. Wählt man als Integrationskonstanten die Keplerschen Elemente: a die große Halbachse, e die Exzentrizität, i die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik, Ω die Knotenlänge, π den Abstand zwischen Perihel und

Knoten (oder anstatt π die Perihellänge $\varpi = \pi + \Omega$), ε die mittlere Länge zur Epoche ($t = 0$), so sind die Koordinaten durch die Formeln

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}, \tag{10}$$

$$M = nt + \varepsilon - \varpi = l - \varpi, \tag{11}$$

$$M = E - e \sin E, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E, \tag{13}$$

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos v}, \tag{14}$$

$$u = v + \pi = v + \varpi - \Omega, \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= r[\cos(u + \Omega) + \sin u \sin \Omega (1 - \cos i)], \\ y &= r[\sin(u + \Omega) - \sin u \sin \Omega (1 - \cos i)], \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned}\right. \tag{16}$$

zu berechnen. Vgl. den Artikel VI 2, 9, Nr. **1**—**3** (*Herglotz*).

4. Die Störungen. Die bei der ersten Annäherung erhaltene Keplersche Bewegung stellt nur für kurze Zeiten die Beobachtungen dar. Der Einfluß der vernachlässigten rechten Seiten der Gleichungen (4) macht sich im Laufe der Zeit geltend durch Abweichungen (*Störungen* genannt) von der sonst stattfindenden Keplerschen Bewegung, welche daher ungestörte Bewegung genannt wird. Die tatsächlich stattfindende Bewegung heißt *gestörte Bewegung.* Der Planet, dessen Bewegung man untersucht, heißt *gestört,* während die übrigen Planeten als *störende* bezeichnet werden. Diese Bezeichnungen sind in den klassischen Planetentheorien, wie sie z. B. von *Laplace, Leverrier, Hansen* entwickelt sind, durchgängig. Je nachdem man die Abweichungen in den Elementen oder in den Koordinaten betrachtet, spricht man von Elementenstörungen oder Koordinatenstörungen. In bezug auf die Prinzipien, auf welche die Lösungsmethoden der Bewegungsgleichungen gegründet sind, sei auf den Artikel von *Whittaker* (VI 2, 12, Nr. **9**—**11**) verwiesen.

I. Die Methode der Variation der Konstanten.

5. Anwendungsweise der Methode in der Störungstheorie. Es seien für einen Planeten die Gleichungen (4) und für die übrigen $n - 1$ Planeten ganz analoge Gleichungen zu integrieren. Alle diese Gleichungen können durch das System der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dx_i'}{dt} + P_i = Q_i, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 3n), \tag{17}$$

ersetzt werden, wo jedes Glied von Q_i eine der Massen der störenden Körper als Faktor hat und die Funktionen P_i im allgemeinen so gewählt werden, daß die Lösungen der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dx_i'}{dt} + P_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 3n),$$

welche die erste Annäherung geben, leicht und einfach erhalten werden können. Seien c_ν Integrationskonstanten und

$$(18) \qquad x_i = f_i(t, c_\nu), \quad x_i' = f'(t, c_\nu), \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, 3n \\ \nu = 1, 2, \ldots, 3n \end{pmatrix}$$

diese Lösungen. Nach den Prinzipien der genannten Methode fordert man, daß die Lösung der Gleichungen (17) durch die Formeln (18) gegeben ist, muß dann aber die Größen c_ν nicht mehr als Konstanten, sondern als mit t veränderliche Größen ansehen. Die Bedingungsgleichungen, welche die c_ν zu erfüllen haben, sind dann

$$\sum_\nu \frac{\partial f_i}{\partial c_\nu}\frac{dc_\nu}{dt} = 0, \qquad \sum_\nu \frac{\partial f_i'}{\partial c_\nu}\frac{dc_\nu}{dt} = Q_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n),$$

aus welchen man ein Gleichungssystem der Form

$$\frac{dc_\nu}{dt} = F_\nu(t, c_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3n)$$

ableitet (vgl. *Vessiot*, II A, 4b, Nr. 22). Je nach der Wahl der veränderlichen Konstanten erhält man spezielle Fälle dieser Methode.

6. Die Methode der Variation der elliptischen Elemente. Differentialgleichungen. Untersuchungen über die Veränderungen der Elemente durch Störungen findet man schon bei *L. Euler*[9]), aber die wirkliche Grundlegung dieser Methode verdankt man *J. L. de Lagrange*[10]). Unter den vielfachen Anwendungen dieser Methode seien als Stellen, die vor allem die Anlage der praktischen Rechnung unter verschiedenen Umständen wiedergeben, genannt: die Theorien der großen Planeten von *U. J. J. Leverrier*[11]), die Neptunstheorie von *S. Newcomb*[12]), die Pallastheorie von *C. Fr. Gauß*[13]), die Vestatheorie von *J. Perrotin*[14]).

9) *L. Euler*, Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Acad. des Sciences (Paris) VI, Nr. 6 (1749), VII, Nr. 2 (1752) und VIII (1756 gedruckt 1771), Berl. hist. Mém. (1749), Petersb. Commentarii (1747/8). Die Formeln von Euler sind indessen nicht alle richtig.

10) *J. L. de Lagrange*, Turin mél. III (1766) = Oeuvres I (1867), p. 471. Paris mém. prés. 10 (1785) = Oeuvres 6, p. 403 und vor allem in Paris Inst. (math.) mém. (9) 1 (1808) = Oeuvres 6, p. 713.

11) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann., mém. 1, 2, 4, 5, 6, 10—12, 13, 14 (1855—1877).

12) *S. Newcomb*, Smiths. contr. 15 (1867).

Die Gleichungen (10)—(16) geben in der ungestörten Bewegung x, y und z als Funktionen der Zeit und der elliptischen Elemente a, e, ε, ϖ, Ω und i. Nach den in voriger Nummer dargestellten Prinzipien der Lagrangeschen Methode sind die Ableitungen der Elemente nach der Zeit aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x}{\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial x}{\partial i}\frac{di}{dt}=0,\\
\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y}{\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial y}{\partial i}\frac{di}{dt}=0,\\
\frac{\partial z}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial z}{\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial i}\frac{di}{dt}=0,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial i}\frac{di}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial i}\frac{di}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial t}\frac{di}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial z}.
\end{gathered}$$

Um zu vermeiden, daß t explizite als Faktor von gewissen Gliedern in den Ableitungen auftritt, ersetzt man nt in der Gleichung (11) durch

$$\varrho=\int n\,dt, \tag{19}$$

so daß M und l durch die Gleichungen

$$M=\int n\,dt+\varepsilon-\varpi,\quad l=\varrho+\varepsilon \tag{20}$$

zu berechnen sind und M oder l nicht bei Bildung der Ableitungen nach a als veränderlich betrachtet werden.

Unter Anwendung der Gleichungen (10)—(16) gewinnt man aus den obigen Gleichungen durch eine ziemlich verwickelte Elimination[15]) die Formeln

$$\tag{21} \left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\quad 2na^2\frac{\partial\Omega}{\partial l},\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-2na^2\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\frac{d\Omega}{dt}+\frac{nae\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial e},
\end{aligned}\right.$$

13) *C. Fr. Gauß,* Werke 7, Nachlaß p. 489—577 (1906). Bei *G. Struve,* Die Darstellung der Pallasbahn durch die Gaußsche Theorie für den Zeitraum 1803 bis 1903. Diss. Berlin (1911) findet man interessante Tafeln über die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung.

14) *J. Perrotin,* Obs. de Toulouse 1 (1880).

15) Bezüglich der geeignetsten Methoden, diese oder entsprechende Differentialgleichungen abzuleiten, sei auf die Lehrbücher der Himmelsmechanik verwiesen.

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{na\sqrt{1-e^2}}{e}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi} - \dfrac{nae\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}, \\ \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{na\sqrt{1-e^2}}{e}\dfrac{\partial\Omega}{\partial e} + \operatorname{tg}\dfrac{i}{2}\sin i\,\dfrac{d\Omega}{dt}, \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial\Omega}{\partial i}, \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\Omega} - \dfrac{na\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi}\right), \end{cases}$$

in welchen $\frac{\partial\Omega}{\partial l} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$, und die $\frac{d\Omega}{dt}$ enthaltenden Glieder mittels der ersten Gleichung (23) eliminiert werden könnten, so daß die rechten Seiten dieser Gleichungen nur von den Elementen und den partiellen Ableitungen der Störungsfunktion nach den Elementen abhängig werden. Diese Möglichkeit wurde gleichzeitig von *Lagrange*[16]) und *P. S. Laplace*[17]) gefunden. Die veränderlichen Elemente nennt man auch *oskulierende,* weil die durch sie bestimmte Bahn und Bewegung sich für jeden Augenblick der wirklichen Bahn und Bewegung möglichst anschmiegen und für dieselbe sowohl den Ort als die Geschwindigkeit des Planeten richtig angeben.

Man könnte auch Elemente durch andere Bedingungen zu definieren suchen, um anderen Verhältnissen als den wesentlich formalistischen der Lagrangeschen Methode Rechnung zu tragen. Solch ein Vorschlag ist auch von *M. Brendel*[18]) gemacht worden.

Wenn i klein ist, wird das erste Glied der rechten Seite von (23) groß und diese Gleichungen selbst unzweckmäßig zur Bestimmung von i und Ω. *Lagrange*[19]) vermeidet diesen Übelstand, indem er statt i und Ω die Elemente

$$(24)\qquad p = \operatorname{tg} i \sin\Omega,\quad q = \operatorname{tg} i\cos\Omega$$

einführt.

Bei den Gleichungen (22) tritt derselbe Übelstand ein, wenn e klein wird. Man vermeidet ihn gleicherweise durch Einführung der Elemente

$$(25)\qquad g = e\cos\varpi,\quad h = e\sin\varpi.$$

Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von g, h, p und q sind:

16) *J. L. de Lagrange,* Paris Inst. (math.) mém. 9, Nr. 1 (1808) = Oeuvres 6, p. 713.

17) *P. S. Laplace,* Suppl. au Méc. cél. = Oeuvres 3 p. 325—348.

18) *M. Brendel,* Astr. Nachr. 187 (1911) p. 97; Göttingen, Ges. Wiss. Neue Folge (8) 1 (1911) p. 89—98.

19) *J. L. de Lagrange,* Paris hist. (2) mém. (1774) = Oeuvres 6, p. 635.

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = -na\left[\sqrt{1-g^2-h^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial h} + \dfrac{g\sqrt{1-g^2-h^2}}{1+\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \dfrac{h\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial i}\right], \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} = na\left[\sqrt{1-g^2-h^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial g} - \dfrac{h\sqrt{1-g^2-h^2}}{1+\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \dfrac{g\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial i}\right], \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}\cos^3 i}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial q} - \dfrac{nap}{2\sqrt{1-e^2}\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\right), \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}\cos^3 i}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial p} - \dfrac{naq}{2\sqrt{1-e^2}\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\right). \end{cases}$$

7. Fortsetzung. Die rechten Seiten der Gleichungen (4) sind den x-, y- und z-Komponenten der störenden Kraft gleich. Wenn diese sich nicht als partielle Ableitungen einer Funktion ausdrücken lassen, wie das z. B. bei verschiedenen Widerstandskräften eintritt, ist es nötig, die Ableitungen der Elemente unmittelbar durch die Komponenten der störenden Kraft auszudrücken. Zwei verschiedene Komponentensysteme kommen in praxi vor: Die Komponenten R, S, W parallel zur Verlängerung des Radiusvektors, zur Senkrechten auf dem Radiusvektor in der Bahnebene (positiv nach der Seite wachsender Längen gezählt) und zur Normalen auf der Bahnebene (positiv nach Norden). Andrerseits die Komponenten T, N und W; T parallel zur Tangente an die Bahn (positiv in Richtung der Bewegung), N parallel zur Normale auf die Tangente in der Bahnebene (positiv nach der Seite der Sonne), W wie oben.

Die Differentialgleichungen der Elemente werden:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(Re\sin v + S(1+e\cos v)\right), \\[2ex] \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{2r}{na^2}R + \dfrac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\dfrac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\dfrac{i}{2}\,\dfrac{d\Omega}{dt}, \\[2ex] \dfrac{de}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[R\sin v + S(\cos v + \cos E)\right], \\[2ex] \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{ena}\left[-R\cos v + S\dfrac{2+e\cos v}{1+e\cos v}\sin v\right] + \sin^2\dfrac{i}{2}\,\dfrac{d\Omega}{dt}, \\[2ex] \dfrac{di}{dt} = \dfrac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,W\cos(v+\varpi-\Omega), \\[2ex] \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,W\sin(v+\varpi-\Omega), \end{cases}$$

$$
(29) \quad \begin{cases}
\dfrac{da}{dt} = \dfrac{2a(2a-r)}{cr} T, \\
\dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{2\sqrt{1-e^2}}{c}\left(\dfrac{e \sin v}{1+e\cos v} T - N\right) + \dfrac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \dfrac{d\varpi}{dt} \\
\qquad + 2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \dfrac{i}{2} \dfrac{d\Omega}{dt}, \\
\dfrac{de}{dt} = \dfrac{2(\cos v + e)}{c} T - \dfrac{r \sin v}{ac} N, \\
\dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{2 \sin v}{ec} T + \dfrac{1}{e}\left(2 + \dfrac{r\cos v}{ae}\right) N + \sin^2 \dfrac{i}{2} \dfrac{d\Omega}{dt},
\end{cases}
$$

wo abkürzend

$$c = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}},$$

gesetzt worden ist. Sie sind sogar einfacher direkt abzuleiten, als die Gleichungen (21), (22) und (23), und werden besonders wichtig, wenn man sich über die Einwirkung irgendeiner Kraft auf die Elemente orientieren will.

8. Integration. Um die Gleichungen (21)—(23) zu integrieren, entwickelt man im allgemeinen die Elemente nach Potenzen der störenden Massen und bestimmt durch aufeinanderfolgende Annäherungen die Glieder erster, zweiter, . . . Ordnung. Die *Ordnung* eines Gliedes ist gleich der Anzahl der in ihm enthaltenen Massenfaktoren. Dagegen nennt man *Grad* eines Gliedes die Anzahl der eingehenden Faktoren von Exzentrizitäten und Neigungen, wenn nach Potenzen dieser Größen entwickelt wird.

Es bezeichne η_0 ein Element oder eine Funktion nur von Elementen und absoluten Konstanten. Nach Potenzen der störenden Massen entwickelt sei

$$(30) \qquad \eta_0 = \eta + \delta_1\eta + \delta_2\eta + \cdots = \eta + \delta\eta,$$

wo η von nullter und $\delta_\nu\eta$ von ν^{ter} Ordnung ist. Um die Integration analytisch ausführen zu können, muß man Ω zweckmäßig entwickeln. Der Störungsfunktion kann man die Form (vgl. *v. Zeipel*, VI 2, 13)

$$(31) \qquad \Omega = \sum N \cos D$$

geben, wo

$$(32) \qquad D = jM + j'M' + C = jl + j'l' + C'$$

ist und die Größen N, C und C' nur von den Elementen der Planeten abhängig sind (j und j' ganze Zahlen). Entwickelt man nach Potenzen der $\delta\eta$, so wird

$$(33) \qquad \Omega = \Omega_0 + \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \cdots,$$

wo Ω_0 erster, $\delta_\nu\Omega$ $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist.

Weil Ω erster Ordnung ist, folgt aus den Gleichungen (21)—(23), daß die Teile nullter Ordnung der Elemente Konstante sind, welche auch als Integrationskonstante betrachtet werden können. Ω_0 wird aus Ω erhalten, wenn man allen Elementen diese konstanten Werte gibt. Dann folgt, daß

$$\left\{\begin{aligned} M &= nt + c, \\ M' &= n't + c', \end{aligned}\right. \tag{34}$$

wird, und Ω_0 nimmt die Form an

$$\Omega_0 = \sum N_{j,j'} \cos D_0, \qquad (D_0 = jnt + j'n't + \bar{c}), \tag{35}$$

wo c, c', $\bar{c}$, $N_{j,j'}$ Konstanten sind.

Die rechten Seiten der Gleichungen (21)—(23) haben dieselbe Form wie Ω_0, wenn nur Glieder erster Ordnung berücksichtigt werden. Durch Integration jedes Gliedes unter Anwendung der Formel

$$\int \cos D_0 \, dt = \frac{\sin D_0}{jn + j'n'} \tag{36}$$

werden die Störungen erster Ordnung der Elemente in der Form

$$\delta_1 \eta = \bar{N}_{0,0} t + \sum \frac{N_{j,j'}}{jn + j'n'} \sin D_0 \tag{37}$$

erhalten. Um M zu erhalten, hat man noch die Integration der Gleichung (19) oder nach (10) der Gleichung

$$\frac{d^2 \varrho}{dt^2} = -3n^2 a \frac{\partial \Omega}{\partial l} \tag{38}$$

auszuführen. Die rechte Seite dieser Gleichung und diejenige der ersten Gleichung (21) enthalten selbstverständlich nur in l und also in t periodische Glieder. Daraus folgt das Theorem von Laplace, daß $\delta_1 a$ kein mit t und ϱ kein mit t^2 proportionales Glied enthalten kann. ϱ hat daher die Form

$$\varrho_0 + \delta_1 \varrho = nt + \sum \frac{\bar{N}_{j,j'}}{(jn + j'n')^2} \sin D_0. \tag{39}$$

Hierbei ist vorausgesetzt daß keiner der *Integrationsdivisoren* $jn + j'n'$ gleich Null ist.

Werden in den Differentialgleichungen der Elemente die eben erhaltenen in erster Ordnung genauen Werte der Elemente eingeführt und nach Potenzen der $\delta_1 \eta$ entwickelt, so erhält man zur Bestimmung der Glieder zweiter Ordnung Gleichungen der Form

$$\frac{d \delta_2 \eta}{dt} = N_0 + \sum N_1 \cos D_0 + t \sum N_2 \sin D_0,$$

woraus unter Anwendung der Formel (36) und

$$\int t \cos D_0 \, dt = \frac{t \sin D_0}{jn + j'n'} + \frac{\cos D_0}{(jn + j'n')^2} \tag{40}$$

für die $\delta_2\eta$ die Form folgt

$$\delta_2\eta = N_0 t + \sum \frac{N_1}{jn + j'n'} \sin D_0 + \sum \frac{N_2}{(jn + j'n')^2} \cos D_0 + t \sum \frac{N_3}{jn + j'n'} \sin D_0.$$

Mittels der Glieder zweiter Ordnung erhält man in analoger Weise die Glieder dritter Ordnung der Elemente. Bei den aufeinanderfolgenden Annäherungen hat man nur Integrale der Form

$$\int t^m \cos(\nu t + c)\, dt$$

auszuführen, was mittels der Formel

$$(41) \quad \int t^m \cos(\nu t + h)\, dt = \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{(m-p)!} \frac{\sin\left(\nu t + h + p\frac{\pi}{2}\right)}{\nu^{p+1}} t^{m-p}$$

oder, falls $\nu = 0$, mittels der Formel

$$(42) \qquad \int t^m\, dt = \frac{t^{m+1}}{m+1}$$

geschieht.

Man bestimmt so nach und nach die Glieder der aufeinanderfolgenden Ordnungen, was also einfach und schematisch vor sich geht[20]). Die Anzahl der Glieder von gegebenem Grade wächst jedoch ungeheuer schnell und würde die ganze Methode praktisch unbrauchbar machen, wenn man höhere Ordnungen als die zweite ganz mitnehmen müßte. Zufolge der Kleinheit der Massen ist die Konvergenz jedoch oft hinreichend, um die Methode anwenden zu können.

9. Verschiedene Arten von Gliedern und deren Klassifikation. Nach dem Obigen überblickt man leicht, daß die Darstellung der Elemente bei fortgesetzter Annäherung von der Form

$$\sum N t^p \cos D$$

wird, wo die Argumente D von der Form

$$jM + j'M' + j''M'' + \cdots + \bar{c} = \nu t + (c)$$

sind (die j ganze Zahlen; die M mittlere Anomalien der verschiedenen Planeten).

Die Glieder, bei denen $p = 0$, sind *periodisch* und werden nach der Größe von ν in *langperiodische* und *kurzperiodische* Glieder geteilt.

20) Eingehende ausführliche Formeln zur Berechnung der Glieder zweiter Ordnung sind von *U. J. J. Leverrier* [Obs. de Paris mém. 2 (1856), p. 43—57 und 10 (1874), p. 192 ff.] gegeben. Die Glieder dritter Ordnung behandelt *M. A. Gaillot* [Paris Bull. Astr. 5 (1888), p. 329—344, 377—384].

Langperiodisch ist ein Glied, wenn ν klein ist im Verhältnis zur mittleren Bewegung des gestörten Planeten. Ein langperiodisches Glied in der Störungsfunktion (eigentlich in den Ableitungen der Elemente nach der Zeit) wird durch die Integration vergrößert in die Elemente übergehen. Infolgedessen sind die langperiodischen Glieder sehr wichtig, vor allem, wenn ν sehr klein ist.

Ein Glied, für welches $p \geqq 1$, nennt man *säkular.* Ist speziell $\nu = 0$, so wird es nach *Poincaré rein säkular* genannt, sonst aber *gemischt säkular* (séculaire mixte). Das einzelne rein säkulare Glied wird mit der Zeit unendlich groß. Das gemischt säkulare Glied schwankt, wenn t wächst, zwischen immer größeren Grenzen. Die säkularen Glieder sind daher besonders für große Werte von t zu berücksichtigen.

Die Größe eines Gliedes in den Störungsausdrücken ist wesentlich abhängig von seinem Grad, seiner Ordnung (s), dem Exponenten (p) von t und der Anzahl (q) seiner kleinen Integrationsdivisoren. *H. Poincaré*[21]) bezeichnet als „Rang" eines Gliedes die Zahl

$$s - p$$

und als „Klasse" eines Gliedes die Zahl

$$s - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}.$$

Über die Bedeutung eines Gliedes geben sein Grad, seine Ordnung, sein Rang und seine Klasse einen gewissen genäherten Aufschluß. Je größer der Grad, die Ordnung oder die Klasse eines Gliedes ist, um so kleiner ist es.

Die relative Bedeutung der Ordnung, der Klasse und des Ranges hängt von der Länge der Zeit ab, für welche man die Bewegung darstellen will. Wenn man die Bewegung für kürzere Zeiten betrachtet, sind die Glieder der niedrigsten (1^{ter}) Ordnung die wichtigsten. Wünscht man eine Darstellung für ziemlich lange (mit den Perioden der langperiodischen Glieder vergleichbare) Zeiten, so sind die Glieder niedrigster Klasse die wichtigsten, Für sehr lange Zeiten schließlich treten die Glieder niedrigsten Ranges in den Vordergrund.

Aus den von *H. Poincaré*[22]) für kanonische Elemente bewiesenen Sätzen über das Vorkommen von Gliedern eines gewissen Ranges und gewisser Klassen folgert man die Sätze:

1. Es gibt keine Glieder, deren Klasse negativ wäre; die konstanten Teile ausgenommen ist die Klasse aller Glieder in den Ent-

---

21) *H. Poincaré,* Leçons de méc. cél. I, p. 129, Paris 1905.

22) *H. Poincaré,* ibid. p. 131, 341.

wicklungen der Elemente a, g, h, p, q (in den Gleichungen (26) und (27)) immer $\geqq \frac{1}{2}$.

2. In den Entwicklungen der Elemente g, h, p, q, ε und ϱ (das Glied nt ausgenommen) ist der Rang aller Glieder $\geqq 0$.

3. Der Rang der periodischen und derjenige der gemischt säkularen Glieder ist $\geqq 1$.

4. Das konstante Glied ausgenommen ist in der Entwicklung von a der Rang aller Glieder $\geqq 1$.

Der letztgenannte Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von *Lagrange* über die Invariabilität der großen Halbachsen (siehe *Whittaker* VI 2, 12, Nr. **13**). Der folgende von *H. Poincaré*[23]) bewiesene Satz gibt unmittelbar eine Verallgemeinerung des Poissonschen Satzes:

In der Entwicklung von a gibt es keine rein säkularen Glieder vom Range 1.

Zu bemerken ist auch, daß ϱ keine rein säkularen Glieder des Ranges Null hat.

10. Säkulare Störungen. Die säkularen Störungen, deren Rang $\geqq 1$ ist, sind unbedeutend im Verhältnis zu denen des Ranges Null. Da in a keine Störungen des Ranges Null vorkommen und alle Glieder des Ranges Null rein säkular sind, werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Glieder des Ranges Null erhalten, wenn man in den Formeln (21), (26) und (27) in der Störungsfunktion Ω alle in ε und ε' periodischen Glieder wegläßt. Sei $\overline{\Omega}$ der solcherweise erhaltene sogenannte säkulare Teil der Störungsfunktion, d. h. die Summe aller nichtperiodischen Glieder von Ω. Da $\overline{\Omega}$ von ε und ε' unabhängig ist, können die säkularen Glieder vom Rang Null in den Elementen e, ϖ, i und Ω oder g, h, p und q getrennt von solchen Gliedern in ε und ε' bestimmt werden. Nachdem man die genannten Glieder in den g, h, p, q, g', h', p' und q' bestimmt hat, werden die Glieder in ε durch eine einfache Quadratur erhalten.

Auch die rein säkularen Störungen können nur durch Annäherungen erhalten werden, und zwar wird dabei öfters die in 8 dargestellte Methode, die Glieder der sukzessiven Ordnungen zu bestimmen, angewandt.

Wir wollen für die rein säkularen Teile der Elemente dieselben Bezeichnungen anwenden, wie für die Elemente selbst. Zur Bestimmung der säkularen Glieder erster Ordnung erhält man die Differentialgleichungen aus den Gleichungen (21), (26) und (27), wenn man in diesen überall Ω durch $\overline{\Omega}$ ersetzt und in den rechten Seiten

23) *H. Poincaré,* ibid. p. 307.

allen Elementen konstante Werte gibt. Wenn die Elemente g, h, p, q, g', ... klein sind, kann Ω und also $\overline{\Omega}$, welches übrigens nur Glieder geraden Grades enthält, nach Potenzen dieser Größen entwickelt werden, und man kann die rechten Seiten der genannten säkularen Gleichungen ohne andere Schwierigkeit als die Länge der Rechnung numerisch finden. Aus den so erhaltenen Gleichungen der Form

$$\frac{d\eta}{dt} = H,$$

gewinnt man unmittelbar das Glied erster Ordnung

$$\eta = Ht.$$

In dieser Weise hat *U. J. J. Leverrier*[24]) die säkularen Änderungen der Elemente der Hauptplaneten berechnet. Wenn die Konvergenz der Entwicklung von $\overline{\Omega}$ schwach ist, oder wenn man die säkularen Störungen erster Ordnung genauer berechnen will, wendet man die von *C. F. Gauß*[25]) gegebene Methode zur Berechnung der rechten Seiten der Differentialgleichungen der Störungen an. Geht man von den Gleichungen (28) oder (29) aus anstatt von den Gleichungen (21), (22) und (23), so findet man, daß die Ableitungen nach t der säkularen Störungen erster Ordnung in der Form

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(U\frac{\partial\frac{1}{\varDelta}}{\partial A} + V\frac{\partial\frac{1}{\varDelta}}{\partial B} + W\frac{\partial\frac{1}{\varDelta}}{\partial C}\right)dM\,dM'$$

erhalten werden, wo A, B, C die rechtwinkligen Koordinaten des gestörten Körpers und U, V, W unabhängig von der mittleren Anomalie M' ist. Bezüglich der Berechnung sei auf den Artikel von *v. Zeipel* (VI 2, 13, Nr. 54) verwiesen.

11. Angenäherte Berechnung der säkularen Werte der Elemente. In dem Falle, daß die Exzentrizitäten und Neigungen klein sind, kann man sich auf die Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung und ersten Grades in den Differentialgleichungen der säkularen Störungen beschränken. Indem die g, h, p und q für die n verschiedenen Planeten durch untere Indizes kenntlich gemacht werden, erhält man zur Bestimmung der genannten Größen die folgenden linearen Gleichungen

---

24) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann., mém. 2 (1856), p. 87—105 und II 1 (1876). Unter Berücksichtigung nur der Glieder ersten Grades berechnete *P. S. Laplace* (Méc. cél. III, Ch. VII) die säkularen Änderungen der Elemente der sieben innersten Planeten.

25) *C. F. Gauß,* Gott. comm. rec. 4 (1818) = Werke 3, p. 331—355.

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{dh_\nu}{dt} = \quad g_\nu \sum\limits_{\nu'}{}' (\nu, \nu') - \sum\limits_{\nu'}{}' [\nu, \nu'] g_{\nu'}, \\ \dfrac{dg_\nu}{dt} = - h_\nu \sum\limits_{\nu'}{}' (\nu, \nu') + \sum\limits_{\nu'}{}' [\nu, \nu'] h_{\nu'}, \end{cases} \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\nu}{dt} = - q_\nu \sum\limits_{\nu'}{}' (\nu, \nu') + \sum\limits_{\nu'}{}' (\nu, \nu') q_{\nu'}, \\ \dfrac{dq_\nu}{dt} = \quad p_\nu \sum\limits_{\nu'}{}' (\nu, \nu') - \sum\limits_{\nu'}{}' (\nu, \nu') p_{\nu'}, \end{cases} \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Größen (ν, ν') und $[\nu, \nu']$ nur von den Massen und den großen Halbachsen der Planeten P_ν und $P_{\nu'}$ abhängen und also als Konstanten betrachtet werden können. Der Strich bei dem Σ-Zeichen gibt an, daß bei der Summation ν' nicht gleich ν werden darf. Die Bestimmung der Größen g_ν und h_ν ist also bei dieser Annäherung von der der Größen p_ν und q_ν unabhängig.

Die linearen Gleichungen (43) können streng integriert werden. Ihre Lösungen sind bekanntlich von der Form (siehe *Vessiot*, II A, 4b, Nr. 28):

$$(45)\quad \begin{cases} g_\nu = \sum\limits_\alpha N_\nu^{(\alpha)} \cos(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha), \\ h_\nu = \sum\limits_\alpha N_\nu^{(\alpha)} \sin(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha), \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Verhältnisse der Konstanten $N_\nu^{(\alpha)}$ durch die n Gleichungen

$$(46)\quad \begin{cases} (A_{1,1} - \sigma_\alpha) N_1^{(\alpha)} + A_{1,2} N_2^{(\alpha)} + A_{1,3} N_3^{(\alpha)} + \cdots + A_{1,n} N_n^{(\alpha)} = 0, \\ A_{2,1} N_1^{(\alpha)} + (A_{2,2} - \sigma_\alpha) N_2^{(\alpha)} + A_{2,3} N_3^{(\alpha)} + \cdots + A_{2,n} N_n^{(\alpha)} = 0, \\ A_{3,1} N_1^{(\alpha)} + A_{3,2} N_2^{(\alpha)} + (A_{3,3} - \sigma_\alpha) N_3^{(\alpha)} + \cdots + A_{3,n} N_n^{(\alpha)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,1} N_1^{(\alpha)} + A_{n,2} N_2^{(\alpha)} + \cdots\cdots + (A_{n,n} - \sigma_\alpha) N_n^{(\alpha)} = 0, \end{cases}$$

$$\left(A_{\nu,\nu} = \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu'), \quad A_{\nu,\nu'} = -[\nu, \nu']\right)$$

bestimmt werden, sobald die Größen σ_α erhalten sind, welche die Wurzeln der „Saeculardeterminante"

$$(47)\quad \begin{vmatrix} A_{1,1} - \sigma, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots, & A_{1,n} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} - \sigma, & A_{2,3}, & \ldots, & A_{2,n} \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3} - \sigma, & \ldots, & A_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, & A_{n,3}, & \ldots, & A_{n,n} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

bilden. Die Koeffizienten $A_{\nu,\nu'}$ haben solche Werte, daß die Determinante in eine symmetrische Determinante derselben Form übergeht, wenn man die ν^{te} Zeile mit $a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}$ und die ν'^{te} Kolonne mit $\frac{1}{a_{\nu'}\sqrt{m_{\nu'} n_{\nu'}}}$ multipliziert. Man kann daher, ohne die Wurzeln σ zu verändern, die $A_{\nu,\nu'}$ in (46) und (47) durch die Gleichungen

$$A_{\nu,\nu'} = -\frac{a_\nu}{a_{\nu'}}\sqrt{\frac{m_\nu n_\nu}{m_{\nu'} n_{\nu'}}}[\nu, \nu']$$

definieren und hat dann

$$A_{\nu,\nu'} = A_{\nu',\nu}.$$

Die $A_{\nu,\nu'}$ sind reelle Größen, weil in unserem Planetensystem alle Planeten in demselben Sinne sich um die Sonne bewegen ($n_\nu > 0$). Die n Wurzeln der Gleichung (47) sind alle reell, was *P. S. Laplace*[26]) unter Anwendung des aus den Gleichungen (43) abzuleitenden Integrales

$$\text{(48)} \qquad \sum_\nu m_\nu\sqrt{1+m_\nu}\sqrt{a_\nu}(g_\nu^2+h_\nu^2)$$
$$= \sum_\nu m_\nu\sqrt{1+m_\nu}\sqrt{a_\nu}\, e_\nu^2 = \text{Konstans}$$

zuerst allgemein bewies. Dagegen ist der von *Laplace* (a. a. O.) gegebene Beweis, daß nicht mehrere Wurzeln σ_α gleich sein können, unrichtig. Daß gleiche Wurzeln nicht möglich sind, findet man im Falle $n = 2$ unmittelbar. Im Falle $n = 3$ ist dies von *H. v. Seeliger*[27]) bewiesen. *C. V. L. Charlier*[27a]) untersucht, wie die säkularen Störungen sich ausdrücken lassen, wenn zwei Wurzeln gleich sind. Aus der Gleichung (48) folgert *Laplace* auch, daß die Exzentrizitäten immer klein bleiben. Wie *Lagrange* bemerkte, ist das indessen nicht stichhaltig, wenn eine Masse m_i klein ist, weil dann das zugehörige e_i groß werden kann. Übrigens ist ja die Gleichung (48) nur bis auf Glieder vierten Grades richtig.

Die Auflösung der Gleichung (47) und die Berechnung der Verhältnisse der $N_\nu^{(\alpha)}$ aus den Gleichungen (46) für das System der Hauptplaneten ist sehr weitläufig. *J. L. de Lagrange*[28]) gab die Lösung

---

26) *P. S. Laplace,* Paris hist. (2) mém. (1784) = Oeuvres 11, p. 88—92. Siehe weiter *A. Cauchy,* Exercices de Math. IV (1829), p. 140; *C. Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834); *J. A. Grunert,* Arch. d. Math. 29 (1857), p. 442; *Sourander,* J. de Math. 3, Ser. 5 (1879), p. 195—209.

27) *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 93 (1878), p. 353—364.

27a) *C. V. L. Charlier,* Öfversigt of K. Vet. Soc. Förh. Nr. 97, Stockholm 1900 = Meddelanden fr. Lunds Obs. Nr. 15.

28) *J. L. de Lagrange,* Berl. Mém. de l'Akad. 1782 = Oeuvres 5, p. 211—344.

für die damals bekannten Hauptplaneten. *M. G. Pontécoulant*[29]) und *U. J. J. Leverrier*[30]) führten die Rechnung für die sieben innersten Planeten durch. Nach der Entdeckung des Neptun haben *U. J. J. Leverrier*[31]), *J. M. Stockwell*[32]) und *P. Harzer*[33]) die Rechnungen für alle acht Hauptplaneten ausgeführt.

Bei den Hauptplaneten wird die Auflösung der Gleichung (47) dadurch vereinfacht, daß das System der vier inneren und das System der vier äußeren Planeten aufeinander nur eine geringe Einwirkung haben und die Gleichungen (46) dementsprechend in zwei fast unabhängige Systeme von je vier Gleichungen zerfallen. Ebenso zerfällt die Gleichung (47) in zwei fast unabhängige Gleichungen. Wie man die numerische Berechnung der Wurzeln von (47) durch allmähliche Vereinfachung dieser Gleichung bewerkstelligt in der Weise, daß in der Determinante der linken Seite die Elemente außerhalb der Diagonale nach und nach verkleinert werden, hat *C. G. J. Jacobi*[34]) gezeigt.

Um die Größe der Wurzeln beurteilen zu können, seien hier die Werte, welche *J. M. Stockwell*[32]) bei den Hauptplaneten gefunden hat, angeführt. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 5''.463802, & \sigma_5 &= 0''.6166849,\\
\sigma_2 &= 7''.2484279, & \sigma_6 &= 2''.7276592,\\
\sigma_3 &= 17''.0143734, & \sigma_7 &= 3''.7166075,\\
\sigma_4 &= 17''.7844562, & \sigma_8 &= 22''.4608479,
\end{aligned}$$

wobei als Zeiteinheit das Julianische Jahr genommen ist. *Stockwell* gibt auch Formeln, um Änderungen in den angenommenen Massenwerten berücksichtigen zu können.

12. Fortsetzung. Die Werte von g_ν und h_ν werden für eine bestimmte Zeit aus den Beobachtungen entnommen. Nachdem die Verhältnisse zwischen den Größen $N_\nu^{(\alpha)}$ und $N_1^{(\alpha)}$ aus den Gleichungen (46) berechnet sind, erhält man die Konstanten γ_α und die $N_1^{(\alpha)}$ aus den Formeln

29) *M. G. Pontécoulant*, Théor. Anal. du Syst. du Mond, Bd. 3 (1834). Seine Werte sind jedoch mit zu wenig Dezimalen gerechnet.

30) *U. J. J. Leverrier*, J. de Math. 5, p. 220 ff. = Conn. des temps pour 1843.

31) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann., mém. 2. p. 105—170.

32) *J. N. Stockwell*, Smiths. contr. 18, Washington 1870.

33) *P. Harzer*, Preisschriften der Fürstl. Jablonowsk. Ges., Leipzig 1895. In dieser Arbeit bedient er sich der sog. kanonischen Elemente anstatt elliptischer.

34) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 30 (1846), p. 51—94 = Werke 7, p. 97.

$$N_1^{(\alpha)} \sin(\mathfrak{S}_\alpha t + \gamma_\alpha) = \frac{\sum\limits_\nu \frac{m_\nu h_\nu}{n_\nu a_\nu} \frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}}{\sum\limits_\nu \frac{m_\nu}{n_\nu a_\nu}\left(\frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}\right)^2},$$

$$N_1^{(\alpha)} \cos(\mathfrak{S}_\alpha t + \gamma_\alpha) = \frac{\sum\limits_\nu \frac{m_\nu g_\nu}{n_\nu a_\nu} \frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}}{\sum\limits_\nu \frac{m_\nu}{n_\nu a_\nu}\left(\frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}\right)^2}.$$

Um zu sehen, wie sich die Perihellänge ϖ_ν des Planeten P_ν verändert, bildet man aus den Gleichungen (25) und (45) die Relation

$$\operatorname{tg}(\varpi_\nu - \mathfrak{S}_\alpha t - \gamma_\alpha) = \frac{\sum\limits_{\alpha'} N_\nu^{(\alpha')} \sin((\mathfrak{S}_{\alpha'} - \mathfrak{S}_\alpha)t + \gamma_{\alpha'} - \gamma_\alpha)}{\sum\limits_{\alpha'} N_\nu^{(\alpha')} \cos((\mathfrak{S}_{\alpha'} - \mathfrak{S}_\alpha)t + \gamma_{\alpha'} - \gamma_\alpha)}.$$

Wenn der Nenner der rechten Seite nicht Null werden kann, folgt, daß $\varpi_\nu - \mathfrak{S}_\alpha t - \gamma_\alpha$ von seinem Mittelwert nicht mehr als 90^0 abweichen kann, und daß also ϖ_ν eine mittlere Bewegung gleich $\mathfrak{S}_\alpha$ hat, was für die Beurteilung der Bahnlage und der Veränderungen der störenden Kräfte von Nutzen sein kann. Die Kriterien für das Bestehen einer mittleren Bewegung sind noch nicht vollständig entwickelt. Betrachtet man nur zwei Planeten ($n = 2$), so hat ϖ_ν immer eine mittlere Bewegung. Ist für einen gewissen Wert von α

$$2\,|N_\nu^{(\alpha)}| > \sum_{\alpha'} |N_\nu^{(\alpha')}|,$$

so hat ϖ_ν die mittlere Bewegung $\mathfrak{S}_\alpha$.[35]) Im Falle $n = 3$ hat *P. Bohl*[36]) gefunden, daß in gewissen Fällen eine Entscheidung der Frage bezüglich der Existenz einer mittleren Bewegung unmöglich ist, weil eine noch so kleine Veränderung in den aus den Beobachtungen entnommenen Konstanten bewirken kann, daß eine vorhandene mittlere Bewegung zu existieren aufhört oder umgekehrt.

Nach den Rechnungen von *Stockwell* (a. a. O.) haben die Perihellängen der Planeten Merkur ($\mathfrak{S}_1$), Mars ($\mathfrak{S}_4$), Jupiter ($\mathfrak{S}_7$), Saturn ($\mathfrak{S}_8$), Uranus ($\mathfrak{S}_7$) und Neptun ($\mathfrak{S}_5$) mittlere Bewegungen.

Die Integration der Neigungsgleichungen (44) wird ganz wie die der Gleichungen (43) ausgeführt. Zu bemerken ist dabei nur, daß

35) *J. L. de Lagrange,* Mém. de l'Akad. de Berlin (1782) = Oeuvres 5, p. 285.

36) *P. Bohl,* J. f. Math. 135 (1906), p. 189—283. Daselbst findet man über die Versuche, diese Frage zu lösen, referiert.

eine der entsprechenden Wurzeln σ_α gleich Null ist, was mit dem Bestehen des Flächensatzes zusammenhängt.

13. Die säkularen Störungen der kleinen Planeten. Bei den Asteroiden hat man die Vereinfachung in den Gleichungen (43) und (44), daß die zu den Hauptplaneten gehörenden $g_\nu, h_\nu, p_\nu, q_\nu$ als bekannt angesehen werden können. Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von g und h sind dann von der Form[37])

$$\frac{dh}{dt} = g\sum_\nu (0, \nu) - \sum_\nu [0, \nu] g_\nu,$$

$$\frac{dg}{dt} = -h\sum_\nu (0, \nu) + \sum_\nu [0, \nu] h_\nu,$$

oder

$$\frac{dh}{dt} = g\sum_\nu (0, \nu) - \sum_\alpha M_\alpha \cos(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha),$$

$$\frac{dg}{dt} = -h\sum_\nu (0, \nu) + \sum_\alpha M_\alpha \sin(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha).$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$h = M \sin\left(t\sum_\nu (0, \nu) + \gamma\right) + \sum_\alpha \frac{M_\alpha}{\sum_\nu (0, \nu) - \sigma_\alpha} \sin(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha),$$

$$g = M \cos\left(t\sum_\nu (0, \nu) + \gamma\right) + \sum_\alpha \frac{M_\alpha}{\sum_\nu (0, \nu) - \sigma_\alpha} \cos(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha),$$

wo M und γ Integrationskonstanten bedeuten. Wenn σ_α gleich $\sum_\nu (0, \nu)$ wäre, würden g und h unendlich große Werte erhalten können. Dies würde indessen nur anzeigen, daß die Integrationsmethode nicht anwendbar ist, weil wir ein Resultat erhalten, das gegen die vorausgesetzte Kleinheit von g und h verstößt. *C. V. L. Charlier*[38]) hat indessen gefunden, daß für die Asteroiden zwischen Mars und Jupiter σ_α nicht gleich $\sum_\nu (0, \nu)$ wird.

Für die Größen p und q erhält man analoge Differentialgleichungen und Lösungen. Dabei zeigt sich jedoch, daß für einen Asteroiden, dessen Abstand von der Sonne $= 1.98$ ist, der $\sum_\nu (0, \nu) - \sigma_\alpha$ entprechende Integrationsdivisor Null ist. *U. J. J. Leverrier*[39]) schließt

37) Die numerischen Werte der Koeffizienten (0, 0) und [0, 0] findet man bei *G. Noreń* und *S. Raab*, Lunds Univ. Årsskrift 36, Afd. 2, Nr. 8 = K. Fysiogr. Sällsk. Handl. 11, Nr. 8 = Meddel. fr. Lunds obs. Ser. II, Nr. 2, (1901).

38) *C. V. L. Charlier*, Mech. d. Himmels I, p. 424, Leipzig 1902.

39) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann., mém. 2, p. 165 und Add. p. 35.

daraus, daß ein kleiner Planet, welcher sich in diesem Abstand von der Sonne bewegt, sich von seiner ursprünglichen Bahn entfernen muß und eine große Neigung gegen die Ebene der Jupiterbahn erhalten würde. Dies sei also ein Fall, wo man bei der Berechnung der säkularen Glieder der Neigung nicht mit den Gliedern ersten Grades auskomme, obwohl die Neigung ursprünglich klein wäre. Über die Maximalwerte der Neigung kann man indessen nichts sagen, ohne daß man die Glieder höheren Grades mitnimmt. Bei Berücksichtigung dieser finden *M. F. Tisserand*[40]) und *C. V. L. Charlier*[41]), daß die singuläre Stelle bei $a = 2.05$ liegt, und daß die Schwankungen in der Neigung innerhalb ziemlich enger Grenzen liegen.

14. Säkulare Glieder höheren Grades. *Lagrange* und *Laplace* hatten angenommen, daß die Glieder höheren Grades eine so kleine Einwirkung hätten, daß man sie unberücksichtigt lassen könnte. *U. J. J. Leverrier*[42]) versuchte die Glieder dritten Grades zu berücksichtigen. Er wendet die Methode der sukzessiven Annäherungen an und berechnet in den Differentialgleichungen die Glieder dritten Grades mittels der bei bloßer Berücksichtigung der Glieder ersten Grades erhaltenen Werte. Durch eine kleine Veränderung der in den letztgenannten Gliedern enthaltenen Konstanten kann er die Lösung noch in periodischer Form erhalten, wobei in den Argumenten auch lineare Verbindungen der ursprünglichen Argumente mit ganzen Koeffizienten auftreten. Indessen finden sich in der Lösung sehr kleine Integrationsdivisoren, welche bewirken, daß die Konvergenz der Annäherungen sehr fraglich ist. Bei dem jetzigen Stande der Himmelsmechanik scheint es in der Praxis am besten zu sein, wenigstens die Glieder höheren Grades nicht in periodische Form zu bringen, sondern sie als Entwicklungen nach Potenzen der Zeit zu geben, deren Konvergenzverhältnisse man freilich untersuchen müßte. Selbstverständlich sind auch die Glieder des Ranges eins, zwei, . . . zu berücksichtigen, da besonders aus langperiodischen Gliedern entstandene säkulare Glieder höheren Ranges sehr merkbar sein können.

15. Berücksichtigung der säkularen und langperiodischen Störungen in den periodischen Gliedern. Um in einfacher Weise die Genauigkeit der Berechnung der periodischen Glieder zu steigern, pflegen die Astronomen oft diese Glieder nicht mit den konstanten Werten der Elemente, sondern mit der Summe der konstanten Werte

40) *M. F. Tisserand,* Obs. de Paris ann., mém. 16 (1882), p. 56—57.

41) *C. V. L. Charlier,* Mech. d. Himmels I, p. 432.

42) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann., mém. 2, Add. p. 38—51.

der Elemente und ihrer säkularen Störungen zu berechnen. Nennen wir der Kürze wegen diese Summe säkulares Element. Nachdem man die säkularen Elemente bestimmt hat, berechnet man in der ersten Annäherung die rechten Seiten der Differentialgleichungen der Elemente mit den säkularen Elementen. Jedes Element $\eta = (\eta) + \delta\eta$ ist dann aus einer Gleichung der Form

$$\frac{d(\eta)}{dt} + \frac{d\delta\eta}{dt} = A + \sum B_{i,i'} \sin(in + i'n')t + \sum C_{i,i'} \cos(in + i'n')t$$

zu bestimmen, wo A, $B_{i,i'}$ und $C_{i,i'}$ Funktionen der säkularen Elemente sind (i und i' ganze Zahlen). Die Gleichung

$$\frac{d(\eta)}{dt} = A$$

definiert die säkularen Elemente selbst. Der periodische Teil $\delta\eta$ des Elementes η wird erhalten durch partielle Integration nach der Formel

$$\delta\eta = -\sum \frac{\cos(in + i'n')t}{in + i'n'} \left\{ B_{i,i'} - \frac{\frac{dC_{i,i'}}{dt}}{(in + i'n')} - \frac{\frac{d^2B_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}$$

$$+ \sum \frac{\sin(in + i'n')t}{in + i'n'} \left\{ C_{i,i'} + \frac{\frac{dB_{i,i'}}{dt}}{(in + i'n')} - \frac{\frac{d^2C_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}.$$

Die Gleichung (38) gibt zur Bestimmung des periodischen Teils von ϱ eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2\delta\varrho}{dt^2} = \sum B_{i,i'} \sin(in + i'n')t + \sum C_{i,i'} \cos(in + i'n')t,$$

woraus durch partielle Integration wieder folgt

$$\delta\varrho = -\sum \frac{\sin(in + i'n')t}{(in + i'n')^2} \left\{ B_{i,i'} - \frac{2\frac{dC_{i,i'}}{dt}}{in + i'n'} - \frac{3\frac{d^2B_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}$$

$$- \sum \frac{\cos(in + i'n')t}{(in + i'n')^2} \left\{ C_{i,i'} + \frac{2\frac{dB_{i,i'}}{dt}}{in + i'n'} - \frac{3\frac{d^2C_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}.$$

Man wendet also eine allgemeinere und genauere Bahn als die Keplersche Ellipse schon in der ersten Annäherung an.

Die Glieder, deren Periode sehr lang ist, haben die Eigenschaft der säkularen Glieder, sich langsam zu verändern, und man kann die Genauigkeit der Rechnung noch erhöhen, wenn man sie bei der Berechnung der periodischen Störungen mit den säkularen Elementen vereinigt. Die größten langperiodischen Glieder finden sich in ϱ. Man beschränkt sich oft darauf, die langperiodischen Glieder von ϱ in Verbindung mit nt zu halten. In der Theorie von Pallas verwendet z. B. *C. F. Gauß*[13]) in den Argumenten die mit der Hauptstörung der Pallaslänge behaftete Pallaslänge und die mit der sog. großen Ungleichheit der Jupiterlänge behaftete Jupiterlänge. In den Theorien der kleinen Planeten berücksichtigt man immer in dieser Weise die große Ungleichheit von Jupiter.

16. Langperiodische Glieder. In Nr. 8 ist gezeigt worden, daß in den Elementen bei der Integration jedes Gliedes ein Divisor

$$v = jn + j'n'$$

eingeführt wird. Bei der Integration der Gleichung (38) dagegen erhält man in ϱ den Integrationsdivisor v^2. Je länger die Periode des Argumentes eines Gliedes ist, desto kleiner ist v und desto mehr wird das Glied bei der Integration vergrößert, wodurch große Ungleichheiten in den Elementen und besonders in ϱ entstehen. Um eine möglichst richtige Bestimmung der Ungleichheiten zu erhalten, muß man in den weiteren Annäherungen v gleich dem Koeffizienten von t in dem Argumente des betreffenden Gliedes setzen, so daß man etwa hat

$$v = jn + j'n' + \sigma,$$

wo σ jedenfalls eine sehr kleine Größe von der Ordnung der störenden Massen ist. Ein kleiner Integrationsdivisor entsteht, wenn die mittleren Bewegungen kommensurabel oder nahe kommensurabel sind. Je kleiner die ganzen Zahlen i' und i sind, durch welche man das Verhältnis $n : n'$ ausdrücken kann, desto größer sind im allgemeinen die Koeffizienten des Gliedes mit dem Argument $il - i'l' + c$ in der Störungsfunktion, und desto größer werden die entstehenden Ungleichheiten. Bei den kleinen Planeten z. B. sind die langperiodischen Glieder sehr bedeutend, wenn das Verhältnis ihrer mittleren Bewegungen zu derjenigen des Jupiter nahe gleich 2 (Hekubatypus oder Typus $\frac{1}{2}$), $\frac{3}{2}$ (Hildatypus oder Typus $\frac{2}{3}$), 3 (Hestiatypus oder Typus $\frac{1}{3}$), . . . ist.

Bei den kleinen Planeten kommen mehrere Fälle vor, wo die Kommensurabilität der mittleren Bewegungen mit derjenigen des Jupiter *sehr* scharf und die langperiodischen Glieder die bedeutendsten sind. In dem System der großen Planeten sind besonders bekannt die sog. *große Ungleichheit* in den Bewegungen von Jupiter und Saturn und die sog. *lange Ungleichheit* in der Bewegung der Erde. Die erstgenannte entsteht, weil die 5malige mittlere Bewegung Saturns nahe gleich der mittleren 2maligen Bewegung Jupiters ist. Die letztgenannte, weil die 13fache mittlere Bewegung der Erde nahe gleich der 8 fachen mittleren Bewegung der Venus ist. Die Berechnung von Ungleichheiten, welche größeren Werten von i und i' entsprechen, ist deswegen schwer, weil man die Koeffizienten entfernter Glieder in der Störungsfunktion zu bestimmen hat. Für solche Fälle sind vor allem die asymptotischen Ausdrücke der Koeffizienten benutzt worden (vgl. VI 2, 13 Nr. 59, 60 *v. Zeipel*).

Bei den Gliedern höherer Ordnung treten in den Argumenten lineare Verbindungen der verschiedenen Planetenlängen auf, und dementsprechend erhält man Integrationsdivisoren der Form

$$jn + j'n' + j''n'' + \cdots + j^{(\mu)}n^{(\mu)},$$

wo die $j^{(\nu)}$ ganze Zahlen sind. Wenn die mittleren Bewegungen $n^{(\nu)}$ gegeben sind, kann man leicht Zahlen $j^{(\nu)}$ erhalten, welche den betreffenden Divisor sehr klein machen. Es zeigt sich jedoch im Planetensystem, daß nur wenige solche Glieder merkbare Ungleichheiten geben. Ausgeschlossen ist jedoch nicht, daß die Summe aller derartigen Glieder merkbar würde. Je weiter man die Annäherungen treibt, desto mehr solcher Glieder entstehen, und die Konvergenz wird immer fraglicher. Wie man strenge der Schwierigkeit der kleinen Divisoren entgehen soll, ist noch eine ungelöste Frage. Für kürzere Zeiten entgeht man der Schwierigkeit dadurch, daß man die fraglichen Glieder als säkulare Glieder behandelt. Bei sehr langen Zeiten aber hängt diese Frage mit der Frage der Existenz von mittleren Bewegungen überhaupt zusammen.

P. S. Laplace[43]) hat gefunden, daß zwischen den langperiodischen Teilen $\delta\varrho$ und $\delta\varrho'$ der Größen ϱ und ϱ' zweier einander störender Planeten die angenäherte Gleichung

$$m\sqrt{a}\,\delta\varrho = -m'\sqrt{a'}\,\delta\varrho'$$

stattfindet.

17. Die Lücken in den mittleren Bewegungen der kleinen Planeten. Libration. Da die langperiodischen Ungleichheiten bei sehr naher Kommensurabilität der mittleren Bewegungen sehr groß sind, wollte man daraus schließen, daß die Störungen hier so groß würden, daß eine mittlere Bewegung nicht möglich wäre, und suchte darin die Erklärung der von *Kirkwood*[44]) entdeckten Lücken im System der kleinen Planeten für bestimmte mittlere Bewegungen. Die ausgeprägtesten Lücken findet man da, wo die mittleren Bewegungen sich zu derjenigen des Jupiter wie $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{1}$ verhalten. Die in dieser Hinsicht von

---

43) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 1, p. 334 = Oeuvres I p. 360.

44) *Kirkwood,* Proc. of the Amer. Philos. Soc., Philadelphia 1871.

O. Callandreau[45]), *H. Gyldén*[46]), *F. Tisserand*[47]) und andern angestellten Untersuchungen haben kein entscheidendes Resultat gegeben, weil man über diese Verhältnisse aus den ersten Gliedern der Störungen kein solches erhalten kann. Sie zeigen jedoch wenigstens an, daß in Zeiten von erheblicher Länge nichts passiert, was die Lücken als Folge der Gravitation der gegenwärtig vorhandenen Massen verständlich machte.

In nahem Zusammenhang mit diesen Untersuchungen steht die Frage der *Libration*. Wenn die Störungen bewirken, daß ein Argument in der Störungsfunktion nur zwischen endlichen Grenzen schwankt, sagt man, daß eine *Libration* vorhanden ist. Solche können entstehen, wenn die mittleren Bewegungen der Argumente nahe kommensurabel sind. Da die säkularen Bewegungen der Perihelien und diejenigen der Knoten sehr klein sind im Verhältnis zu den mittleren Bewegungen der Planeten, hat man im allgemeinen nur Librationen einzeln für sich zwischen Perihelbewegungen, Knotenbewegungen und mittleren Bewegungen zu betrachten. Ein besonderes Interesse beanspruchen die Librationen unter den mittleren Bewegungen. Sei

$$D = i\varrho - i'\varrho' + c$$

das betrachtete Argument, wo c eine konstante oder wenigstens sehr langsam veränderliche Größe ist. Mittels der Gleichung (38) und der analogen Gleichung für den störenden Planeten findet man, daß D eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2D}{dt^2} = -\sum_{\nu} h_\nu \sin D_\nu$$

zu erfüllen hat. Auf der rechten Seite dieser Gleichung betrachtet man nur Glieder der Form

$$h_\mu \sin(\mu D + c_\mu), \qquad (c_\mu = \text{Konst.})$$

oder man vereinfacht noch weiter und bestimmt D aus einer Gleichung

$$\frac{d^2D}{dt^2} = -h \sin(D + c_0),$$

welche die Bewegungsgleichung eines schwingenden Pendels ist. Es ist bekannt, daß das durch diese Gleichung bestimmte D je nach den Werten der Integrationskonstanten entweder um einen gewissen Wert schwingt, was eine Libration geben würde, oder mit der Zeit unendlich wächst oder schließlich mit der Zeit sich einer endlichen Grenze asymptotisch nähert. Indessen scheint es unmöglich, etwas

45) *O. Callandreau,* Obs. de Paris ann., mém. 22 (1896).
46) *H. Gyldén,* Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. 52. p. 603, Stockholm 1895.
47) *F. Tisserand,* Méc. cél. 4, p. 417—444.

Bestimmtes daraus für den Verlauf der Planetenbewegungen in äußerst langen Zeiten zu schließen, da der Einfluß der vernachlässigten Glieder nicht hinreichend untersucht ist. Schon *C. F. Gauß*[48]) vermutete, daß zwischen den mittleren Bewegungen von Pallas und Jupiter eine Libration stattfände. Die Untersuchungen von *O. Callandreau*[45]), *F. Tisserand*[47]) und anderen zeigen, wenngleich sie nur angenähert sind, daß wahrscheinlich keine solche Librationsfälle im System der kleinen Planeten sich finden. Die Librationsbewegungen zwischen anderen in den Argumenten vorkommenden mittleren Bewegungen hat *C. V. L. Charlier*[49]) behandelt.

18. Die Methode von Poincaré. Auf die Resultate der allgemeinen theoretischen Untersuchungen und Andeutungen von *H. Poincaré*[50]) versuchten *M. Simonin*[51]) und *M. K. Popoff*[52]) eine Theorie des Planeten Hekuba zu gründen. Der Grundgedanke der Poincaréschen Methode ist, eine periodische Lösung aufzusuchen, welche sich so nahe als möglich der Bewegung des untersuchten Planeten anschließt, und durch Zufügung kleiner Variationen die noch übrigbleibenden Abweichungen zu berücksichtigen. Da in der periodischen Lösung die Bewegung für alle Zeiten bekannt ist, so sollte man erwarten können, dadurch eine wenigstens für sehr lange Zeiten gültige Lösung des Problems zu erhalten. Es scheint jedoch bei der praktischen Ausführung mit Schwierigkeiten verbunden zu sein, periodische Lösungen zu finden, welche sich hinreichend nahe den wahren Bewegungen anschließen. Man müßte, um das Ziel zu erreichen, periodische Lösungen anwenden, deren Periode sehr groß im Verhältnis zu den Umlaufszeiten der Planeten ist. Bezüglich der bis jetzt angewandten periodischen Lösungen sei hier auf den Artikel von *Whittaker* (VI 2, 12, Nr. 5, 6) verwiesen. Die praktische Verwendung der Poincaréschen periodischen Bahnen behandelt *A. Wilkens*[52a]).

Bei diesen Untersuchungen bedient man sich öfters, dem Vorgange von *Poincaré* folgend, der kanonischen Elemente. Man hat dann den Vorteil, daß die Differentialgleichungen der Bewegung die

---

48) *C. F. Gauß*, Werke VII, Nachlaß p. 421, 557—559.

49) *C. V. L. Charlier*, Öfversigt af K. Vet. Soc. Förh. Nr. 2 = Meddel. fr. Lunds Obs. Nr. 12, Stockholm 1900.

50) *H. Poincaré*, Les méth. nouv. de méc. cél. 1, 2, 3, Paris 1892, 1893, 1899; Leç. de méc. cél. 1, Paris 1905; Bull. Astr. 19 (1902), p. 177—198 und 289—310.

51) *M. Simonin*, Obs. de Nice ann. 6, Paris 1897.

52) *M. K. Popoff*, Sur le mouv. de (108) Hécube, Diss. Paris 1912.

52a) *A. Wilkens*, Astr. Nachr. 195 (1913) p. 385—412.

sehr einfache Form

$$(49)\qquad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

haben, wo p_r und q_r die kanonischen Elemente bezeichnen (siehe den Artikel von *Whittaker* VI 2, 12, Nr. 1). Ein Nachteil ist dagegen, daß die Entwicklung der Störungsfunktion komplizierter wird, und daß ein Übergang zu elliptischen Elementen für die praktischen Zwecke der Theorien öfters von den Astronomen gewünscht wird. Außer den im vorgehenden genannten Integrationsmethoden ist bei Anwendung kanonischer Elemente die von *Delaunay* in seiner Mondtheorie angewandte Methode, bei welcher nach und nach jedes Glied streng aus der Funktion H wegintegriert wird, besonders vorteilhaft.[53]) *H. Poincaré*[54]) hat gezeigt, daß die langperiodischen Glieder der niedrigsten Klasse, welche die wichtigsten sind, erhalten werden, wenn man in den Gleichungen (49) alle kurzperiodischen Glieder wegläßt.

II. Die Hansensche Methode.

19. Vorbemerkung. Obgleich die Methode der Variation der Konstanten in analytischer Hinsicht viele Vorteile gewährt und ohne Zweifel das Störungsproblem an seinen innersten Wurzeln faßt, hat sie in praktischer Hinsicht doch mehrere Nachteile. Als solche nennt *P. A. Hansen*[55]) z. B.

1. Man muß für jeden Planeten die Störungen in sechs Elementen berechnen, während man, um seine Lage im Raume zu bestimmen, nur drei Koordinaten nötig hat.

---

53) *G. W. Hill,* Trans. of the Amer. Math. Soc. I, Washington (1900) p. 205—242 = Werke 4 p. 169—206.

54) *H. Poincaré,* Leç. de méc. cél. 1, Ch. 13, Paris 1905.

55) *P. A. Hansen* hat selbst seine Methode in mehreren Abhandlungen dargestellt. Von diesen seien hier nur die folgenden angeführt: Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831; Astr. Nachr. 15 (1838), p. 201 ff., wo *Hansen* die Prinzipien seiner Methode darstellt; Astr. Nachr. 18 (1841), p. 237 f.; Astr. Nachr. 42 (1856), p. 273 f., und schließlich mit aller Vollständigkeit in „Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten", Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 3 (1857) [Erste Abhandlung], 4 (1857) [Zweite Abhandlung], 5 (1861) [Dritte Abhandlung], welche allgemein als „Auseinandersetzung" 1., 2. oder 3. Abh. zitiert werden. Weiter ist diese Methode beinahe unverändert in seiner Mondtheorie angewandt (vgl. VI, Nr. 15). Die Hansenschen Differentialgleichungen findet man weiter abgeleitet bei: *Brünnow,* Astr. Nachr. 64 (1865), p. 259—266; *O. Lesser,* Untersuchung über die allgemeinen Störungen der Metis, Diss. Marburg 1861; *H. v. Zeipel,* St. Pét. mém. 12 (1902). Ein Beispiel, wie die Hansensche Theorie für einen kleinen Planeten mit den Beobachtungen übereinstimmt, gibt *H. Samter,* Astr. Nachr., Ergänzungshefte Nr. 17. (1910).

2. Die Störungen der Elemente sind im allgemeinen weit größer als die Störungen zweckmäßig gewählter Koordinaten, und um die beabsichtigte Genauigkeit in den Koordinaten zu erhalten, muß man in den Ausdrücken der Elementenstörungen eine größere Anzahl von Gliedern berechnen, die sich nachher bei dem Übergang zu Koordinaten fast ganz aufheben. Dies kommt daher, daß die Veränderungen der Geschwindigkeiten des Planeten in den Elementenstörungen auch einbegriffen sind.

3. Die Störungsfunktion hängt von doppelt so viel Elementen als Koordinaten ab. Bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung hat man daher eine weit größere Anzahl Ableitungen derselben nach den Elementen als nach den Koordinaten zu bilden.

Die genannten Nachteile sucht *Hansen* durch eine Abänderung der Methode zu vermeiden. Er hebt hervor, wie wichtig es ist, sowohl die zu bestimmenden Größen als die Funktionen der Zeit, durch welche man die Störungen ausdrücken will, zweckmäßig zu wählen. Am geeignetsten findet *Hansen* die Störungen der mittleren Länge oder diejenigen der mittleren Anomalie und diejenigen des mit der für die Störungen korrigierten mittleren Anomalie berechneten Radiusvektors[56]) und die Breite über der Bahnebene oder die senkrecht auf ihr stehende Koordinate. In seinen ersten Arbeiten wählte er die mittlere Länge oder die mittlere Anomalie zur unabhängigen Veränderlichen. Später erkannte er, daß es weit vorteilhafter ist, die exzentrische Anomalie des gestörten Körpers als unabhängige Variable zu wählen, indem dann mehrere in den Entwicklungen vorkommende Faktoren aus einer kleinen Anzahl endlicher Glieder bestehen, wodurch an vielen Stellen schwach konvergierende Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität vermieden werden.

Endlich ist hervorzuheben, daß *Hansen*, auf explizite analytische Ausdrücke der Koeffizienten verzichtend, im weitesten Masse numerische Rechnungen anwendet, um langsam konvergierende Reihen zu vermeiden.

20. Die Hansenschen beweglichen Koordinaten. Ideale Koordinaten. In der ungestörten Bewegung vereinfacht sich die Integration der Bewegungsgleichungen dadurch, daß die Bewegung in einer festen Ebene vor sich geht. Die Gleichungen und Konstanten, welche die Bahnebene bestimmen, trennen sich dann unmittelbar von den Gleichungen und Konstanten, welche die Bewegung in der Bahnebene bestimmen. *Hansen* erreicht eine entsprechende Trennung in der ge-

---

56) Anstatt des Radiusvektor wird bisweilen dessen natürlicher Logarithmus angewandt.

störten Bewegung, indem er anstatt eines festen Koordinatensystems X, Y, Z ein anderes bewegliches Koordinatensystem x, y, z, das seinen Ursprung im Schwerpunkt der Sonne hat, einführt.

Bei der Methode der Variation der Konstanten werden die Veränderungen der Elemente durch die Bedingung bestimmt, daß die auf feste Achsen bezogenen Koordinaten X, Y, Z und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit die gleiche analytische Form in der gestörten wie in der ungestörten Bewegung haben sollen und daß man also die Elemente als Konstanten ansehen kann, wenn man $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}$ und $\frac{dZ}{dt}$ durch Differentiation der Ausdrücke von X, Y und Z bildet. Von dem Ort des Planeten abhängige Größen, welche diese Eigenschaft haben, nennt *Hansen* „*ideale*" Koordinaten. Eine jede Funktion von nur idealen Koordinaten und Konstanten ist wieder eine ideale Koordinate.

Es sei

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \\ y &= \beta X + \beta_1 Y + \beta_2 Z, \\ z &= \gamma X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

wo $\alpha, \alpha_1, \ldots, \gamma_2$ die neun Richtungskosinus der beweglichen Achsen darstellen. *Hansen* will, daß x, y und z ideale Koordinaten werden sollen. Die Richtungskosinus müssen dann die Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha_1}{dt} + Z\frac{d\alpha_2}{dt} &= 0, \\ X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta_1}{dt} + Z\frac{d\beta_2}{dt} &= 0, \\ X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma_1}{dt} + Z\frac{d\gamma_2}{dt} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{51}$$

erfüllen. Setzt man abkürzend

$$A = \beta\frac{d\alpha}{dt} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt},$$

$$B = \alpha\frac{d\gamma}{dt} + \alpha_1\frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\gamma_2}{dt},$$

$$C = \gamma\frac{d\beta}{dt} + \gamma_1\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt},$$

so können diese Gleichungen wie folgt geschrieben werden:

$$Ay - Bz = 0, \quad Ax - Cz = 0, \quad Bx - Cy = 0. \tag{52}$$

Die Gleichungen (51) stellen also nur zwei unabhängige Bedingungen zwischen den Richtungskosinus dar und besagen geometrisch, daß das bewegliche ideale Koordinatensystem sich jederzeit um den augenblicklichen Radiusvektor des gestörten Planeten dreht. Daher bestimmen die sechs bekannten Bedingungen

$$\alpha^2 + \alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} = 1, \quad \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0,$$
$$\beta^2 + \beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2} = 1, \quad \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = 0,$$
$$\gamma^2 + \gamma_1^{\,2} + \gamma_2^{\,2} = 1, \quad \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0$$

in Verbindung mit den Gleichungen (51) nicht vollständig die Richtungskosinus des idealen Koordinatensystems. Um dies zu erreichen, wählt *Hansen* als neunte Bedingung

$$z = 0, \tag{53}$$

woraus folgt, daß der Radiusvektor stets in der xy-Ebene sich befindet, oder daß die xy-Ebene, welche also die *instantane* Bahnebene ist, sich um den in dieser Ebene sich befindenden augenblicklichen Radiusvektor dreht. Durch diese Bestimmungen wird die x- und somit auch die y- und z-Achse vollkommen bestimmt für jeden beliebigen Zeitpunkt, wenn die Lage der x-Achse in der Bahnebene für eine gegebene Ausgangsepoche gewählt ist.

Um die Lage des Planeten zu erhalten, hat man folglich die Lage der Bahnebene, die Lage der x-Achse in der Bahnebene und die Bewegung des Planeten in dieser Ebene zu bestimmen.

21. Die Differentialgleichungen der Bewegung in der instantanen Bahnebene. Unter Anwendung der Gleichungen (50) und der Differentialgleichungen der Bewegung für die auf feste Achsen bezogenen Koordinaten X, Y, Z leitet man die Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)x}{r^3} = (1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)y}{r^3} = (1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} \end{cases} \tag{54}$$

ab, wo die Störungsfunktion Ω den vorher (Nr. 2) angegebenen Ausdruck hat und, weil $z = 0$, der Radiusvektor durch die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{55}$$

gegeben ist. Dabei ist $k = 1$ gesetzt[6]).

Führt man statt x und y die Polarkoordinaten r und w durch die Gleichungen

$$x = r\cos w, \quad y = r\sin w \tag{56}$$

ein, so geben die Gleichungen (54)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 + \dfrac{1+m}{r^2} = (1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\[2ex] r^2\dfrac{d^2w}{dt^2} + 2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{dw}{dt}\right) = (1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial w}. \end{cases} \tag{57}$$

Die Gleichungen (54) und (57) sind von den Astronomen oft angewandt worden.[57]) Wie man sieht, kann die Bewegung der Bahnebene, nur soweit Ω davon abhängt, auf die Bewegung in der Bahnebene einen Einfluß ausüben.

22. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der Bahnebene und die Lage der x-Achse. Die Lage der xy-Ebene bestimmt sich am einfachsten durch Angabe ihrer Knotenlänge Ω und ihrer Neigung i in bezug auf eine feste Grundebene XY (z. B. die Ekliptik für eine beliebige Zeit). Die Lage der x-Achse wird gegeben durch den in der Bewegungsrichtung des Planeten gezählten Abstand $\bar{\sigma}$ von der x-Achse bis zum aufsteigenden Knoten der xy-Ebene auf der festen XY-Ebene. Den Wert $\bar{\sigma}_0$, welchen $\bar{\sigma}$ für die Epoche $t = 0$ annimmt, bestimmt *Hansen* durch die Gleichung

$$\bar{\sigma}_0 = \Omega_0, \tag{58}$$

wo Ω_0 die oskulierende Knotenlänge für $t = 0$ bezeichnet. Für die Größe $\bar{\sigma}$ findet man die auch durch geometrische Betrachtungen leicht abzuleitende Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \tag{59}$$

wo $\frac{d\Omega}{dt}$ und i z. B. durch die Gleichungen (23) erhalten werden können.

Sei B der Winkel, den der Radiusvektor mit der XY-Ebene macht und L der Winkel zwischen der X-Achse und der Projektion des Radiusvektors auf die XY-Ebene. Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} X &= r\cos B\cos L,\\ Y &= r\cos B\sin L,\\ Z &= r\sin B,\end{aligned}\right. \tag{60}$$

und

$$\begin{aligned} \cos B\sin(L-\Omega) &= \cos i\sin(w-\bar{\sigma}),\\ \cos B\cos(L-\Omega) &= \cos(w-\bar{\sigma}),\\ \sin B &= \sin i\sin(w-\bar{\sigma}).\end{aligned} \tag{61}$$

Diese Gleichungen sind indessen nicht die geeignetsten zur Ermittlung von L und B, weil die konstanten Teile der Elemente nicht von den variablen Teilen derselben getrennt sind. *Hansen* erreicht eine solche Trennung durch Transformation der Gleichungen (61) in die folgenden

---

57) Sie sind zuerst von *Hansen* gegeben. Nach *Y. Villarceau* (Paris Bur. Long. annales 2 (1882)) hat *Wronski* 1842 dieselben Gleichungen gefunden.

$$(62)\quad \begin{cases} \cos B \sin (L - \Omega_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin (w - \Omega_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{Q}{\varkappa \cos i_0}\right), \\ \cos B \cos (L - \Omega_0 - \Gamma) = \cos (w - \Omega_0) + \frac{sP}{\varkappa}, \\ \sin B = \sin i_0 \sin (w - \Omega_0) + s, \end{cases}$$

wo

$$(63)\quad \begin{cases} P = \sin i \sin (\bar{\sigma} - \Omega_0), \\ Q = \sin i \cos (\bar{\sigma} - \Omega_0) - \sin i_0, \\ \varkappa = \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - Q \sin i_0, \end{cases}$$

$$(64)\quad s = Q \sin (w - \Omega_0) - P \cos (w - \Omega_0)$$

ist, und die Größe Γ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} (\Omega - \Omega_0 - \Gamma) = \frac{(\cos i + \cos i_0) \sin (\bar{\sigma} - \Omega_0)}{(1 + \cos i \cos i_0) \cos (\bar{\sigma} - \Omega_0) - \sin i \sin i_0}$$

gegeben ist. Am einfachsten ist jedoch Γ aus der Differentialgleichung

$$(65)\quad \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{hrs}{\varkappa} \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

zu erhalten, wobei

$$(66)\quad h = \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{a(1-e^2)}}$$

gesetzt worden ist.

Die Größen P und Q können auch durch die Gleichungen

$$(67)\quad \begin{cases} \frac{dP}{dt} = hr \sin (w - \Omega_0) \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos i, \\ \frac{dQ}{dt} = hr \cos (w - \Omega_0) \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos i \end{cases}$$

bestimmt werden, wobei die Integrationskonstanten so gewählt werden müssen, daß P und Q Null werden, wenn $t = 0$ ist.

Die Größen P, Q und s sind von der ersten Ordnung, wogegen Γ zweiter Ordnung ist. In den Gleichungen (62) sind Γ, $\frac{sP}{\varkappa}$ und $\frac{sQ}{\varkappa \cos i_0}$ in den meisten Fällen ganz unmerklich und können unberücksichtigt bleiben.

Ersichtlich sind r, w und nach den letzten Gleichungen (60) und (62) auch s ideale Koordinaten. Aus der Gleichung (64) folgt daher

$$\frac{ds}{dt} = (Q \cos (w - \Omega_0) + P \sin (w - \Omega_0)) \frac{dw}{dt},$$

welche Gleichung in Verbindung mit (64) unmittelbar P und Q gibt, wenn die analytischen Ausdrücke von w und s bekannt sind. Da man immer mit hinreichender Genauigkeit $\varkappa = 2\cos^2 i_0$ setzen kann, ist die Bestimmung der Lage des Radiusvektors in der Hauptsache auf die Ermittlung von w und s zurückgeführt.

23. Differentialgleichungen zur Bestimmung des Radiusvektors und derjenigen der mittleren Anomalie. Anstatt der Veränderlichen r und w führt *Hansen* zwei neue Größen ν und ζ oder $n\delta\zeta$ durch die Gleichungen

$$(68)\quad \begin{cases} v = w - \varpi, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v, \\ r_0 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = a(1-e\cos E), \\ r = r_0(1+\nu), \quad n^2a^3 = 1+m, \\ n\zeta = nt + c + n\delta\zeta = E - e\sin E \end{cases}$$

ein, wo ϖ, a, e und c Konstante sind, welche am zweckmäßigsten gleich Mittelwerten der elliptischen Elemente ϖ, a, e und ε für die Zeit, welche die Theorie umfassen soll, gewählt werden. Bevor solche bekannt sind, kann man sie gleich den oskulierenden Elementen zur Zeit der Epoche ($t=0$) setzen. Durch diese Wahl wird erreicht, daß ν und $\delta\zeta$ Größen erster Ordnung werden.

Aus den Gleichungen (57) und (68) leitet man die Gleichungen

$$(69)\quad \begin{cases} \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{\nu(1+m)}{r_0^3(1+\nu)^3} = \frac{1+m}{r_0(1+\nu)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r_0} - \frac{e\sin v}{a(1-e^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1+m}{r_0^3(1+\nu)^3}(2S+S^2), \\ \frac{d\delta\zeta}{dt} = \frac{S-2\nu-\nu^2}{(1+\nu)^2}, \end{cases}$$

$$(70)\quad \frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{1+m}{a(1-e^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

ab, welche nach *Hansen* indessen nicht zur Berechnung allgemeiner Störungen geeignet sind, weil sie auf schwach konvergierende Reihen führen.

Um seine zur Berechnung allgemeiner Störungen anzuwendenden Gleichungen abzuleiten, geht *Hansen* von den für die elliptische Bewegung geltenden Formeln

$$(71)\quad \begin{cases} w = v_1 + \varpi_1, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1, \\ r = \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos v_1} = a_1(1-e_1\cos E_1), \quad n_1^2a_1^3 = 1+m, \\ n_1t + \varepsilon_1 - \varpi_1 = E_1 - e_1\sin E_1 \end{cases}$$

aus, wobei a_1, e_1, ε_1 und ϖ_1 die oskulierenden Elemente sind. Die aus (68) und (71) folgenden Gleichungen

$$r_0^2\frac{dw}{d\zeta} = \sqrt{(1+m)a(1-e^2)}, \quad r^2\frac{dw}{dt} = \sqrt{(1+m)a_1(1-e_1^2)}$$

geben

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{h}{h_1(1+\nu)^2}, \tag{72}$$

wo

$$h_1 = \frac{a_1 n_1}{\sqrt{1-e_1^2}} = \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_1}} \tag{73}$$

ist, und h die früher (Gl. (66)) eingeführte Konstante ist. Weil

$$\frac{1}{1+\nu} = \frac{r_0}{r}$$

ist, bekommt man nach den Gleichungen (68) und (71)

$$\frac{1}{1+\nu} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2\left(1 + \xi\frac{r_0}{a}\cos v + \psi\frac{r_0}{a}\sin v\right), \tag{74}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} \xi\cos^2\varphi &= e_1\cos(\varpi_1 - \varpi) - e,\\ \psi\cos^2\varphi &= e_1\sin(\varpi_1 - \varpi),\\ e &= \sin\varphi \end{aligned}\right. \tag{75}$$

ist. Unter Anwendung der Gleichung (74) erhält man aus (72)

$$\frac{d\zeta}{dt} = 1 + \overline{W} + \frac{h}{h_1}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \tag{76a}$$

oder nach *G. W. Hill*[58]) besser

$$\frac{d\zeta}{dt} = 1 + \frac{\overline{W} + \nu^2}{1-\nu^2}, \tag{76b}$$

wo

$$\overline{W} = \Xi + \Upsilon\frac{r_0}{a}\cos v + \Psi\frac{r_0}{a}\sin v \tag{77}$$

ist und die sogenannten Hansenschen Elemente durch die Formeln

$$\left\{\begin{aligned} \Xi &= 2\frac{h_1}{h} - \frac{h}{h_1} - 1,\\ \Upsilon &= \frac{2h_1}{h}\xi,\\ \Psi &= \frac{2h_1}{h}\psi \end{aligned}\right. \tag{78}$$

gegeben sind.

Eliminiert man $r\cos v$ und $\frac{h_1}{h}$ aus den Gleichungen (74), (77) und (78), so findet man bis auf Glieder höheren als zweiten Grades in $\overline{W}$ und Ξ die Entwicklung

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\overline{W} - \tfrac{1}{6}\Xi + \tfrac{1}{4}\overline{W}^2 + \tfrac{1}{108}\Xi^2 + \cdots. \tag{79}$$

Oft wendet man indessen diese Gleichung nur zur Kontrolle an und berechnet ν aus der Gleichung

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{n}{2\cos\varphi}(\Upsilon\sin v - \Psi(\cos v + e)), \tag{80}$$

58) *G. W. Hill*, Amer. Journ. of Math. 4 p. 246 (1881) = Works 1 p. 348.

welche man durch Differentiation der Gleichung (75) und Substitution des Wertes (72) für $\frac{d\xi}{dt}$ erhält, wobei die Elemente als Konstanten betrachtet werden können, weil ν eine ideale Koordinate ist.

G. W. Hill[59]) hat noch gezeigt, wie man ν aus den ersten Gliedern von $\overline{W}$ berechnen kann, wenn ξ bekannt ist.

24. Bestimmung der Funktion $\overline{W}$. Da Ξ, Υ, Ψ bekannte Funktionen der oskulierenden Elemente sind, so könnte man, um $\overline{W}$ zu erhalten, unter Anwendung der Gleichungen (21) und (22) jede einzelne dieser Größen durch eine Differentialgleichung bestimmen. Um $\overline{W}$ nicht in dieser Weise zerlegen zu müssen, wodurch seine Entwicklung weitläufig gemacht wird, leitet *Hansen* durch Differentiation einen Ausdruck für $\frac{d\overline{W}}{dt}$ ab, wobei indessen nur die Größen Ξ, Υ, Ψ, nicht aber r_0 und v als von t abhängig betrachtet werden. Um die festgesetzte Unabhängigkeit dieser explizite in $\overline{W}$ eingehenden Größen r_0 und v von den in den störenden Kräften eingehenden und von t abhängigen Variablen r_0 und v unzweideutig zu kennzeichnen, führt *Hansen* für sie und die von ihnen abhängigen variablen Größen neue Bezeichnungen ein. Seien in diesem Sinne

(G) $$t,\ v,\ r_0,\ E,\ \xi \text{ und } \delta\xi$$

durch

(Γ) $$\tau,\ \omega_0,\ \varrho_0,\ \eta_0,\ \chi_0 \text{ und } \delta\chi_0$$

bezeichnet, wonach man die Gleichungen

(81) $$\begin{cases} n\chi_0 = n\tau + c + n\delta\chi_0 = \eta_0 - e\sin\eta_0, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta_0 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega_0, \\ \varrho_0 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega_0} = a(1-e\cos\eta_0) \end{cases}$$

hat. Die Funktion

(82) $$W = \Xi + \Upsilon\frac{\varrho_0}{a}\cos\omega_0 + \Psi\frac{\varrho_0}{a}\sin\omega_0$$

geht also in $\overline{W}$ über, wenn überall die Größen (Γ) durch die entsprechenden Größen (G) ersetzt werden, wenn also die Unabhängigkeit der Größen (Γ) von t wieder aufgehoben wird, was von *Hansen* (wie hier) durch einen Strich über der betreffenden Funktion angezeigt wird.

Weil

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{n}{\cos\varphi}(\Upsilon\sin\omega_0 - \Psi(\cos\omega_0 + e))$$

---

59) *G. W. Hill,* Amer. Journ. of Math. 4 p. 258 = Works 1 p. 350.

ist, kann die Gleichung (80)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)} \tag{83}$$

geschrieben werden, wodurch die Bestimmung von v von der Funktion W abhängig gemacht wird.

Differentiiert man die Funktionen W und $\frac{h}{h_1}$ nach t und führt für die Derivierten der Elemente die Ausdrücke (21) und (22) ein, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{dW}{dt} = h\left\{\frac{2\varrho_0}{r}\cos(v-\omega_0) - 1 + 2\left(\frac{h_1}{h}\right)\frac{\varrho_0}{a\cos^2\varphi}\left[\cos(v-\omega_0) - 1\right\}\frac{\partial \Omega}{\partial v} + 2h\frac{\varrho_0}{r}\sin(v-\omega_0)\, r\frac{\partial \Omega}{\partial r} \tag{84}$$

und

$$\frac{d\left(\frac{h}{h_1}\right)}{dt} = h\frac{\partial \Omega}{\partial v} = S, \tag{85}$$

durch welche W und h_1 zu bestimmen sind.

25. Bestimmung der Breite. Zur Bestimmung der durch die störenden Kräfte bewirkten Abweichung der Bahn von der durch Ω und i bestimmten Bahnebene benutzt *Hansen* anstatt s (vgl. Nr. 22) das Produkt

$$u = \frac{r_0}{a}s = \frac{r_0}{a}Q\sin(v + \varpi - \Omega) - \frac{r_0}{a}P\cos(v + \varpi - \Omega). \tag{86}$$

Weil u eine ideale Koordinate ist, kann man wieder bei der Bildung von $\frac{du}{dt}$ die Größen P und Q als Konstanten betrachten. Wird

$$R = \frac{\varrho_0}{a}Q\sin(\omega_0 + \varpi - \Omega) - \frac{\varrho_0}{a}P\cos(\omega_0 + \varpi - \Omega), \tag{87}$$

gesetzt, so findet man, daß

$$u = \overline{R} \tag{88}$$

und

$$\frac{du}{dt} = \overline{\left(\frac{dR}{d\tau}\right)}, \tag{89}$$

wo der Strich die vorher angegebene Bedeutung hat. Aus diesen beiden Gleichungen muß derselbe Ausdruck für u folgen, was zur Kontrolle dient.

Um R zu bestimmen, wendet man den Ausdruck

$$\frac{dR}{dt} = h_1 r\frac{\varrho_0}{a}\sin(\omega_0 - v)\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial z} \tag{90}$$

an, welcher aus den Gleichungen (23) und (87) leicht abzuleiten ist.

26. Weitere Ausführung der Methode. Um $\delta\zeta$, ν und u zu erhalten, hat man zunächst W, $\frac{h}{h_1}$ und R aus den Gleichungen (84), (85) und (90) zu bestimmen. Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten jedoch die zu bestimmenden Größen, und man muß Annäherungsmethoden anwenden. Da $\delta\zeta$, ν und u kleine Größen erster Ordnung sind, entwickelt *Hansen* nach Potenzen derselben. Schreibt man

$$W = W_0 + \delta_1 W + \delta_2 W + \cdots,$$
$$R = R_0 + \delta_1 R + \delta_2 R + \cdots,$$
$$\frac{h}{h_1} = 1 + \delta_0 \frac{h}{h_1} + \delta_1 \frac{h}{h_1} + \delta_2 \frac{h}{h_1} + \cdots,$$

wo W_0, R_0, $\delta_0 \frac{h}{h_1}$ die Glieder erster Ordnung, $\delta_1 W_0$, $\delta_1 R_0$, $\delta_1 \frac{h}{h_1}$ die Glieder zweiter Ordnung sind usw., so erhält man durch Gleichsetzung der Glieder erster Ordnung in den Gleichungen (84), (85) und (90)

$$(91)\quad \begin{cases} \dfrac{dW_0}{dt} = h\Big\{2\dfrac{\varrho}{r_0}\cos(v-\omega) - 1 + 2\dfrac{\varrho}{a\cos^2\varphi}[\cos(v-\omega)-1]\Big\}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} \\ \qquad\qquad + 2h_0\dfrac{\varrho}{r_0}\sin(v-\omega)\,r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ \dfrac{1}{\cos i}\dfrac{dR_0}{dt} = hr_0\dfrac{\varrho}{a}\sin(v-\omega)\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \\ \dfrac{d\delta_0\frac{h}{h_1}}{dt} = h\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}, \end{cases}$$

wo

$$(92)\quad \begin{cases} n\tau + c = \eta - e\sin\eta, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta, \\ \varrho = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega} = a(1-e\cos\eta) \end{cases}$$

ist. Um die Glieder zweiter Ordnung zu bestimmen, erhält man weiter

$$(93)\quad \frac{d\delta_1 W}{dt} = A\delta_0\zeta + B\nu_0 + C\delta_0\frac{h}{h_1} + Du_0 + E\frac{du_0}{dt} + F\delta_0\zeta' + G\nu_0' + Hu_0'$$

und analoge Ausdrücke für $\frac{d\delta_1 R}{dt}$ und $\frac{d\delta_1\frac{h}{h_1}}{dt}$, wo $A, B, \ldots, H$ Funktionen von r, ω und den partiellen Ableitungen der Störungsfunktion, $\delta_0\zeta$, ν_0, u_0, $\frac{du_0}{dt}$ die in der ersten Annäherung erhaltenen Werte erster Ordnung von $\delta\zeta$, ν, u, $\frac{du}{dt}$ und $\delta_0\zeta'$, ν_0', u_0' die analogen Größen für den störenden Planeten sind. Das Glied $E\frac{du}{dt}$ erklärt sich dadurch, daß die Störungsfunktion von den Größen P und Q und diese wieder von s und $\frac{ds}{dt}$ oder u und $\frac{du}{dt}$ abhängen.

27. Integration mit der Zeit als unabhängiger Veränderlichen. Wenn die Exzentrizitäten klein sind, kann man die Zeit als unabhängige Veränderliche anwenden und dabei doch eine genügende Konvergenz erhalten. *Hansen*[60]) selbst und nach ihm *G. W. Hill*[61]) haben in dieser Weise die Theorien verschiedener von den großen und *A. W. Leuschner*[62]) von den kleinen Planeten behandelt.

Die Störungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen entwickelt man in Reihen der Form (siehe den Artikel VI_2, 13, *v. Zeipel*)

$$\sum K \frac{\sin}{\cos}\{iM + i'M' + C\},$$

wo $M = nt + c$ und $M' = n't + c'$ die mittleren Anomalien des gestörten und des störenden Körpers, C und K Konstanten, i und i' ganze Zahlen bezeichnen. Die in den Differentialgleichungen enthaltenen Funktionen von ϱ und ϖ sind in der Form Fourierscher Reihen von $(M) = n\tau + c$ zu entwickeln, so daß schließlich die rechten Seiten der Gleichungen (91) in der Form

$$\sum K \frac{\sin}{\cos}\{\iota(M) + iM + i'M' + C\} \tag{94}$$

erhalten werden (ι eine ganze Zahl). *Hansen*[63]) zeigt, wie man die Koeffizienten K für alle verschiedenen Werte von ι einfach berechnen kann, sobald man K für die speziellen Werte -1, 0 und $+1$ bestimmt hat. Bei der Integration sind nur M und M' von der Zeit abhängig, und man erhält durch lineare Integration gemäß der Formel

$$\int \frac{\sin}{\cos}\{\iota(M) + iM + i'M' + C\}\,dt$$
$$= \frac{1}{in + i'n'} \cdot \frac{-\cos}{+\sin}\{\iota(M) + iM + i'M' + C\}$$

für W_0, R_0 und $\delta_0 \frac{h}{h_1}$ Ausdrücke der Form (94). Um die Störungen erster Ordnung $\delta_0\zeta$, v_0 und u_0 zu berechnen, hat man in W_0, R_0,

60) *P. A. Hansen*, Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831; Leipzig. Ges. Wiss. Abhdl. 1876.

61) *G. W. Hill*, Wash. Astron. Papers 4 (1890) = Works 3.

62) *A. W. Leuschner*, Mem. of Nat. Acad. of Science 10 (1910).

63) *P. A. Hansen*, Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831, p. 26—28.

$\frac{\partial W_0}{\partial \tau}$, $\frac{\partial R_0}{\partial \tau}$ die Zeit t anstatt τ und also M anstatt (M) zu setzen, wodurch die rechten Seiten der aus (76a), (83), (88) und (89) folgenden Gleichungen

$$\frac{d\delta_0 \zeta}{dt} = \overline{W}_0, \qquad \frac{d v_0}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial W_0}{\partial \tau}\right)},$$

$$u_0 = \overline{R}_0, \qquad \frac{d u_0}{dt} = \overline{\left(\frac{\partial R_0}{\partial \tau}\right)}$$

erhalten werden. Um die Störungen zweiter Ordnung zu erhalten, berechnet man die rechte Seite der Gleichung (93) und die analogen Ausdrücke in den Gleichungen für $\frac{d\delta_1 R}{dt}$ und $\frac{d\delta_1 \frac{h}{h_1}}{dt}$, wonach erst $\delta_1 W$, $\delta_1 R$, $\delta_1 \frac{h}{h_1}$ und weiter $\delta_1 \zeta$, v_1 und u_1 ähnlich wie die Störungen erster Ordnung erhalten werden. Ähnlich berechnet man nach und nach Störungen höherer Ordnung, wenn dieses nötig ist. Natürlich ist es wichtig, ein zweckmäßiges Rechenschema anzuwenden, um keine merklichen Glieder in den im allgemeinen eine große Anzahl von Gliedern enthaltenden Reihen zu übergehen. Es sei hervorgehoben, daß *Hansen* alle Koeffizienten in numerischer Form hält, wodurch bei der Rechnung die Größe der Glieder gleich hervortritt und die mitzunehmenden Glieder leicht zu finden sind.

28. **Die exzentrische Anomalie als unabhängige Veränderliche.** Wenn die Exzentrizität des gestörten Körpers, wie es bei den kleinen Planeten öfters statthat, nicht klein ist, vermeidet *Hansen* durch Anwendung der ungestörten exzentrischen Anomalie als unabhängiger Veränderlichen mehrfach schwach konvergierende Reihenentwicklungen. Dementsprechend werden ϱ und ω als Funktionen von η dargestellt, womit erreicht wird, daß η, aber nicht Vielfache von η in den Argumenten eingehen. Mit dieser unabhängigen Veränderlichen ist die Methode von *Hansen* in seinen „Auseinandersetzungen" eingehend dargestellt und ist in der daselbst gegebenen Form vielfach von den Astronomen ganz oder fast ganz unverändert angewandt worden.

Die exzentrische Anomalie, welche hier von *Hansen* benutzt wird, ist die, welche aus der Zeit und den den Störungsrechnungen zugrundegelegten konstanten Elementen folgt. Sie sei der Deutlichkeit wegen mit ε bezeichnet. Man hat dann

$$nt + c = \varepsilon - e \sin \varepsilon$$

und erhält weiter einen dazugehörenden Radiusvektor (r)

$$(r) = a(1 - e \cos \varepsilon).$$

Unter Anwendung der Gleichung

$$(95)\qquad n\frac{dt}{d\varepsilon}=\frac{(r)}{a}$$

folgt aus (91)

$$(96)\qquad \begin{cases} \dfrac{dW_0}{d\varepsilon}=Ma\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}+Na(r)\dfrac{\partial\Omega}{\partial(r)}=T_0,\\ \dfrac{dR_0}{d\varepsilon}=Qa^2\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\cos i=U_0,\end{cases}$$

wo die Größen M, N und Q durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi\, M&=-3(1-\tfrac{1}{2}e^2)+2e\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon+e^2\cos(\eta+\varepsilon)\\ &\quad -3e\cos\eta+(4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)-e\cos(\eta-2\varepsilon),\\ \cos^2\varphi\, N&=e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon+e^2\sin(\eta+\varepsilon)-e\sin\eta\\ &\quad-(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)+e\sin(\eta-2\varepsilon),\\ Q&=e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon+\tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon)-\tfrac{3}{2}e\sin\eta\\ &\quad+(1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon)-\tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon)\end{aligned}$$

gegeben sind. Die Glieder zweiter und höherer Ordnung in W und R werden nach und nach ähnlich wie in Nr. **26** und **27** erhalten. Die Größen $\delta\zeta$, ν und u sind vermittels der aus (76a), (83), (88) und (89) abzuleitenden Gleichungen

$$(97)\qquad \begin{cases} \dfrac{dn\,\delta\zeta}{d\varepsilon}=\dfrac{(r)}{a}\left\{\overline{W}_0+\overline{\delta_1 W+\nu_0{}^2}]+\overline{\left(\dfrac{\partial W_0}{\partial\eta}\right)}n\delta_0\zeta+\cdots\right\},\\ \dfrac{d\nu}{d\varepsilon}=-\dfrac{1}{2}\left\{\overline{\left(\dfrac{\partial W_0}{\partial\eta}\right)}+\overline{\left(\dfrac{d\,\delta_1 W}{\partial\eta}\right)}\right.\\ \qquad\left.+\left[\overline{\left(\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial\eta^2}\right)}-\overline{\left(\dfrac{\partial W_0}{\partial\eta}\right)}\dfrac{ae\sin\varepsilon}{(r)}\right]\dfrac{an\delta_0\zeta}{(r)}\right\}+\cdots,\\ u=\overline{R}_0+\overline{\delta_1 R}+\overline{\left(\dfrac{\partial R_0}{\partial\eta}\right)}\dfrac{an\delta\zeta}{(r)}+\cdots,\\ \dfrac{du}{d\varepsilon}=\overline{\left(\dfrac{\partial R_0}{\partial\eta}\right)}+\overline{\left(\dfrac{\partial\,\delta_1 R}{\partial\eta}\right)}\dfrac{d\,\delta\zeta}{ds}\\ \qquad+\left[\overline{\left(\dfrac{\partial^2 R_0}{\partial\eta^2}\right)}-\overline{\left(\dfrac{\partial R_0}{\partial\eta}\right)}\dfrac{ae\sin\varepsilon}{(r)}\right]\dfrac{an\delta\zeta}{(r)}+\cdots,\end{cases}$$

zu bestimmen, wobei jedoch auf den rechten Seiten nur Glieder erster und zweiter Ordnung ausgeschrieben sind.

Aus der Gleichung (72) findet man, daß

$$(98)\qquad \frac{h}{h_1}=(1+2\nu+\nu^2)\left(1+\frac{a}{(r)}\frac{dn\,\delta\zeta}{d\varepsilon}\right)$$

ist, kann aber $\frac{h}{h_1}$ bis auf Glieder zweiten Grades durch die aus (85) abzuleitende Gleichung

$$(99) \qquad \frac{d\frac{h}{h_1}}{d\varepsilon} = \overline{\left(\frac{dW_0}{d\varepsilon}\right)} = \overline{T}_0$$

erhalten.

Die Störungsfunktion und die zur Berechnung der Störungen erster und höherer Ordnung nötigen Ableitungen derselben entwickelt *Hansen* vermittels einer gemischten, numerisch-analytischen Methode (vgl. *v. Zeipel*, VI 2, 13, Nr. **51, 52**) in Reihen der Form

$$\sum K_{i,i'} \frac{\sin}{\cos}\left\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\},$$

wo

$$\mu = \frac{n'}{n}$$

und c', n' die c und n entsprechenden Größen des störenden Planeten sind. Bei diesen Entwicklungen befolgt *Hansen* den Grundsatz, alle Glieder, welche eine vorgeschriebene Größe erreichen, mitzunehmen, was bei der eingeschlagenen numerischen Entwicklung unmittelbar durchgeführt werden kann.

Die oben angeführten Werte von M, N und Q geben in Verbindung mit den Ableitungen der Störungsfunktion für T_0 und U_0 Reihen der Form

$$\sum K_{\lambda,i,i'} \cdot \frac{\sin}{\cos}\{\lambda\eta + (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c'\mu)\},$$

wo λ nur die Werte -1, 0 und $+1$ annimmt. Nach den Gleichungen (96) finden sich dann für W_0 und R_0 Reihen der Form

$$\sum \frac{K_{\lambda,i,i'}}{i - i'\mu} \cdot \frac{-\cos}{+\sin}\{\lambda\eta + (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\}$$
$$+ \sum \varepsilon K_{\lambda,0,0} \cdot \frac{\sin}{\cos}\{(\lambda\eta) + k_0 + k_1 \cos\eta + k_2 \sin\eta\},$$

wo k_0, k_1 und k_2 von η unabhängige Integrationskonstanten sind. Wenn n und n' kommensurabel oder nahe kommensurabel wären, könnte der Divisor $i - i'\mu$ gleich oder nahe gleich Null sein, ohne daß $i = i' = 0$ sind. In diesen Fällen müßte die Integration anders ausgeführt werden, weil die Konvergenz nach Potenzen der störenden Kräfte nicht mehr stattfindet. *Hansen* nimmt an, daß die mittleren Bewegungen nicht solche Werte annehmen, daß die Divisoren zu klein werden. Um bei kleinen Divisoren die Hansensche Methode anwenden zu können, schlägt *K. G. Olsson*[64]) vor, ähnlich wie in den Gyldénschen Theorien, das in den Argumenten vorkommende $\delta\zeta$ in zwei

64) *K. G. Olsson,* Stockholm, Bih. K. Vet. Akad. (22) 2 (1896).

Teile, wovon der eine, $\delta\zeta_l$, nur Glieder von langen Perioden, der andere, $\delta\zeta_k$, nur solche von kurzen Perioden enthält, zu zerlegen und nur $\delta\zeta_\lambda$ aus den Argumenten durch Reihenentwicklung wegzuschaffen, wogegen $\delta\zeta_l$ in den Argumenten stehen bleibt und die einzelnen Glieder durch partielle Integration integriert werden.

Mit den oben angegebenen Werten von W_0 und R_0 findet man nach den Gleichungen (97) und (99) für $\delta_0\zeta$, ν_0, u_0 und $\delta_0\frac{h}{h_1}$ Ausdrücke der Form

$$K_0 + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon\cos\varepsilon + K_3\varepsilon\cos\varepsilon + K_4\varepsilon\cos 2\varepsilon + K_5\varepsilon\sin 2\varepsilon$$
$$+ \sum K_{i,i'} \frac{\sin}{\cos}\left\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\},$$

wo die Integrationskonstanten $K_0, K_1, \ldots, K_5$ zweckmäßig zu bestimmen sind. Die Störungen zweiter Ordnung kann man aus den Gleichungen (97) und (99) gewinnen, sobald die Störungen erster Ordnung erhalten sind. Im allgemeinen sind nur die Glieder zweiter und höherer Ordnung merkbar, welche kleine Divisoren enthalten, was ihre Aufsuchung bedeutend erleichtert.

III. Koordinatenstörungen.

29. Störungen der rechtwinkeligen Koordinaten. Seien x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der ungestörten Bewegung, welche also die Geichungen (4) für $\Omega = 0$ erfüllen, und $\delta_\mu x$, $\delta_\mu y$, $\delta_\mu z$ die Störungen μ^{ter} Ordnung des gestörten Körpers. Setzt man in den Gleichungen (4) $k = 1$ und

$$x_0 + \delta_1 x + \delta_2 x + \cdots,$$
$$y_0 + \delta_1 y + \delta_2 y + \cdots,$$
$$z_0 + \delta_1 z + \delta_2 z + \cdots,$$

statt x, y, z, so erhält man durch Gleichsetzung der Glieder derselben Ordnung zur Bestimmung der Störungen μ^{ter} Ordnung Differentialgleichungen der Form

$$(100)\begin{cases} \dfrac{d^2\delta_\mu x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)\delta_\mu x}{r_0^{\,3}} - \dfrac{3(1+m)(x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z)}{r_0^{\,5}} = X_\mu, \\ \dfrac{d^2\delta_\mu y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)\delta_\mu y}{r_0^{\,3}} - \dfrac{3(1+m)(x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z)}{r_0^{\,5}} = Y_\mu, \\ \dfrac{d^2\delta_\mu z}{dt^2} + \dfrac{(1+m)\delta_\mu z}{r_0^{\,3}} - \dfrac{3(1+m)(x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z)}{r_0^{\,5}} = Z_\mu, \end{cases}$$

wo

$$r_0^{\,2} = x_0^{\,2} + y_0^{\,2} + z_0^{\,2}$$

ist und X_μ, Y_μ, Z_μ nur von bekannten Größen und von den Störungen bis zur $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängen. Wenn die Bahnen der störenden

Körper nicht bekannt sind, hat man gleichzeitig durch ähnliche Gleichungen deren Störungen zu bestimmen. Man gewinnt nun vermittels der Gleichungen (100) nacheinander

$$\delta_\mu x,\ \delta_\mu y,\ \delta_\mu z \quad \text{für } \mu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 und ihre Ableitungen

$$\xi_0 = \frac{dx_0}{dt},\quad \eta_0 = \frac{dy_0}{dt},\quad \zeta_0 = \frac{dz_0}{dt}$$

sind bekannte Funktionen der Zeit und von sechs Integrationskonstanten (z. B. den elliptischen Elementen) $C_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$, und umgekehrt sind die Konstanten C_ν Funktionen von $x_0, y_0, z_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ und t. Nach *O. Dziobek*[65]) sind die Lösungen der linearen Gleichungen (100) durch die Formeln

$$\delta_\mu x = \sum_{\nu=1}^{6} A_\nu \frac{\partial x_0}{\partial C_\nu},\quad \delta_\mu y = \sum_{\nu=1}^{6} A_\nu \frac{\partial y_0}{\partial C_\nu},\quad \delta_\mu z = \sum_{\nu=1}^{6} A_\nu \frac{\partial z_0}{\partial C_\nu}$$

zu erhalten, wo die A_ν durch die Gleichungen

$$\frac{dA_\nu}{dt} = X_\mu \frac{\partial C_\nu}{\partial \xi_0} + Y_\mu \frac{\partial C_\nu}{\partial \eta_0} + Z_\mu \frac{\partial C_\nu}{\partial \zeta_0}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

bestimmt werden. Eine andere Form der Lösung ist[65])

$$\delta_\mu x = \sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial \xi_0},\quad \delta_\mu y = \sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial \eta_0},\quad \delta_\mu z = \sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial \zeta_0},$$

wo die B_ν aus den Gleichungen

$$\frac{dB_\nu}{dt} = X_\mu \frac{\partial x_0}{\partial C_\nu} + Y_\mu \frac{\partial y_0}{\partial C_\nu} + Z_\mu \frac{\partial z_0}{\partial C_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

erhalten werden. Daneben sind noch die Formeln

$$\delta_\mu \xi = \frac{d\delta_\mu x}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial x_0},\qquad \delta_\mu \eta = \frac{d\delta_\mu y}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial y_0},$$

$$\delta_\mu \zeta = \frac{d\delta_\mu z}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial z_0}$$

zu bemerken.

Führt man in die Störungsfunktion anstatt der Koordinaten x, y, z die Werte von x_0, y_0, z_0 als Funktionen der Zeit und der elliptischen Elemente ein, bildet das Integral

$$U = \int_{t_0}^{t} \Omega\, dt$$

65) *O. Dziobek,* Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen, Leipzig 1888, p. 161—165.

und ersetzt in U wieder die Elemente des gestörten Planeten durch ihre Ausdrücke in $x_0, y_0, z_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, so kann man die Störungen erster Ordnung durch die einfachen Formeln[65])

$$\delta_1 x = \frac{\partial U}{\partial \xi_0}, \quad \delta_1 y = \frac{\partial U}{\partial \eta_0}, \quad \delta_1 z = \frac{\partial U}{\partial \zeta_0},$$
$$\delta_1 \xi = -\frac{\partial U}{\partial x_0}, \quad \delta_1 \eta = -\frac{\partial U}{\partial y_0}, \quad \delta_1 \zeta = -\frac{\partial U}{\partial z_0},$$

erhalten, welche eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit den kanonischen Differentialgleichungen zeigen.

J. F. Encke[66]), welcher zuerst die Methode der Berechnung der allgemeinen Störungen in rechtwinkligen Koordinaten entwickelt hat, führt indessen die Integration in anderer Weise aus, indem er das dritte Glied der drei Gleichungen (100) zunächst für sich ermittelt und dadurch das weitere Problem vereinfacht.

Multipliziert man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit

$$2\frac{dx}{dt}, \quad 2\frac{dy}{dt}, \quad 2\frac{dz}{dt},$$

addiert und integriert, so folgt:

$$(101) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \frac{2(1+m)}{r} = 2(1+m)\int d'\Omega + K,$$

wo K eine Konstante und

$$(102) \qquad d'\Omega = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$

ist. $d'\Omega$ ist also das Differential von Ω, wofern nur die von dem gestörten Körper abhängigen Größen variiert werden. Aus den Gleichungen (4) und (101) findet man

$$(103) \qquad \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \frac{2(1+m)}{r} = 2K + 2(1+m)\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\int d'\Omega\right)$$

und dadurch für $\delta_\mu r$ (die Störung μ^{ter} Ordnung von r) die Gleichung

$$(104) \qquad \frac{d^2(r_0\delta_\mu r)}{dt^2} + \frac{r_0\delta_\mu r}{r_0^3} = R_\mu,$$

wo R_μ nur von bekannten Größen und von den Störungen bis zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängt. Da

$$x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z = r_0\delta_\mu r + (\delta r)_\mu$$

ist, wo $(\delta r)_\mu$ auch nur von bekannten Größen und den Störungen bis zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängt, kann man nach der Integration der

66) *J. F. Encke*, Berl. astr. Jahrb. f. 1857. *Schubert* hat Tafeln einiger kleiner Planeten nach der Methode von Encke gerechnet. Z. B. Tafeln der Eunomia, Washington 1866.

Gleichung (104) das dritte Glied der Gleichungen (100) als bekannt ansehen. Die Gleichungen (104) und (100) sind dann alle von der Form

$$\frac{d^2\omega}{dt} + \frac{(1+m)\omega}{r_0^3} = Q, \tag{105}$$

wo Q bekannt ist und wo ω nacheinander den Wert $r_0\delta_\mu r$, $\delta_\mu x$, $\delta_\mu y$, $\delta_\mu z$ bekommt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\omega = \frac{y_1\int x_1 Q dt - x_1\int y_1 Q dt}{\sqrt{1+m}\sqrt{a_0}(1-e_0)^2}, \tag{106}$$

wo

$$x_1 = r_0 \cos v_0, \quad y_1 = r_0 \sin v_0, \tag{107}$$

ist und v_0, a_0, e_0, die wahre Anomalie, die halbe große Achse und die Exzentrizität der ungestörten Bewegung bezeichnen. Um die Integration auszuführen, werden die Störungsfunktion und ihre Ableitungen in Reihen der Form

$$\sum \alpha \cos(iM_0 + i'M') + \sum \beta \sin(iM_0 + i'M')$$

entwickelt, wo $M_0 = n_0 t + \varepsilon_0 - \varpi_0$ und $M' = n't + \varepsilon' - \varpi'$ die mittleren Anomalien des gestörten resp. des störenden Körpers bezeichnen. Encke[66]) entwickelt x_1 und y_1 in Fouriersche Reihen von M_0 und leitet Formeln ab, wodurch man unmittelbar aus einem Gliede in Q von den Formen

$$\alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{iM_0 + i'M'\right\}, \quad \alpha t \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{iM_0\right\}$$

das entsprechende Glied in ω erhält, was für die Bestimmung von $\delta_1 r$, $\delta_1 x$, $\delta_1 y$ und $\delta_1 z$ hinreichend ist.

G. W. Hill[67]) hat die Formeln noch kürzer schreiben können, indem er anstatt t die wahre Länge als unabhängige Veränderliche einführt.

Die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten wachsen verhältnismäßig schnell an. Dadurch wird es früher als bei anderen Methoden nötig, die Störungen höherer Ordnung zu berücksichtigen.

30. Störungen der polaren Koordinaten. Die polaren Koordinaten, Radiusvektor r, Länge w in der beweglichen Bahnebene (im Sinne von Hansen; siehe Nr. **20**), von einer in dieser Ebene festen Linie gerechnet und der Abstand z des gestörten Körpers von einer festen Ebene, wozu öfters die Bahnebene des gestörten Körpers zur Ausgangsepoche gewählt wird, können durch die Gleichungen (57) und die letzte der Gleichungen (4) bestimmt werden. Eine der Glei-

---

67) *G. W. Hill*, Astr. Nachr. 83 (1874) p. 209—224 = Works 1 p. 151—166.

chungen (57) ersetzt man indessen oft durch die Gleichung (103). Anstatt z sucht man auch $\mathfrak{z} = \frac{z}{r}$ d. h. den Sinus der Breite über der Ausgangsebene.

Seien

$$r = r_0 + \delta_1 r + \delta_2 r + \cdots,$$
$$w = w_0 + \delta_1 w + \delta_2 w + \cdots,$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \delta_1 \mathfrak{z} + \delta_2 \mathfrak{z} + \cdots,$$

wo r_0, w_0, $\mathfrak{z}_0$ $(= 0)$ den Radiusvektor, die Länge und den Sinus der Breite in der ungestörten Bewegung und $\delta_1 r$, $\delta_2 r, \ldots$ die Störungen erster, zweiter, ... Ordnung bezeichnen. Führt man diese Werte in der Gleichung (103) und in der durch r dividierten ersten Gleichung (57) ein, so erhält man die Gleichungen

$$(108)\begin{cases} \dfrac{d^2 r_0 \delta_1 r}{dt^2} + \dfrac{(1+m) r_0 \delta_1 r}{r_0^3} = (1+m)\left(r_0 \dfrac{\partial \Omega}{\partial r_0} + 2\int d'\Omega_0\right) + G_2, \\ 2 r_0^2 \dfrac{dw_0}{dt}\dfrac{d\delta_1 w}{dt} + \delta_1 r \dfrac{d^2 r_0}{dt^2} - r\dfrac{d^2 \delta_1 r}{dt^2} + \dfrac{3(1+m) r_0 \delta_1 r}{r_0^3} = -r_0 \dfrac{\partial \Omega}{\partial r_0} + H_2, \end{cases}$$

wo G_2 und H_2 die Glieder bezeichnen, welche höherer als erster Ordnung sind. Wird $\frac{r_0 \delta_1 r}{r_0^3}$ aus diesen Gleichungen eliminiert, so bekommt man die Gleichung

$$(109)\quad a\sqrt{1-e^2}\frac{d\delta_1 w}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 r_0 \frac{d\delta_1 r}{dt} + \delta_1 r \frac{dr_0}{dt}\right) - 3\int d'\Omega_0 - 2 r_0 \frac{\partial \Omega}{\partial r_0} + H_2,$$

wo H_2 wieder die Glieder zweiter Ordnung bezeichnet. Sie wird von *P. S. Laplace*[68]) in Verbindung mit der ersten Gleichung (108) angewandt, um $\delta_1 r$ und $\delta_1 w$ zu bestimmen.

S. Newcomb[69]) verwendet in seiner Uranustheorie, um die Berechnung der Glieder höherer Ordnung zu erleichtern, etwas modifizierte Gleichungen. Er setzt

$$\varrho = \ln r,\quad \varrho_0 = \ln r_0,\quad \varrho = \varrho_0 + \delta\varrho;\quad w - w_0 = \delta w$$

und erhält aus (103) und (57)

$$(110)\quad \frac{d^2(r_0^2 \delta\varrho)}{dt^2} + \frac{(1+m) r_0^2 \delta\varrho}{r_0^3} = 2\int d'\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} + \frac{(\delta\varrho)^2}{2 r_0} - \frac{d^2(r_0^2(\delta\varrho)^2)}{dt^2} + G_3.$$

$$(111)\quad \frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r_0^2}(1 - 2\delta\varrho)\int \frac{\partial \Omega}{\partial v}\,dt$$
$$- 2\sqrt{1+m}\sqrt{a(1-e^2)}\,(\delta\varrho - (\delta\varrho)^2) + H_3,$$

wo G_3 und H_3 die Glieder höherer als zweiter Ordnung bezeichnen.

68) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 1 p. 256 = Oeuvres 1 p. 281.

69) *S. Newcomb,* Smiths. contrib. XIX, Washington 1874.

Die letzte der Gleichungen (4) gibt bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$(112)\qquad \frac{d^2(r_0\delta_1\mathfrak{z})}{dt^2} + \frac{(1+m)r_0\delta_1\mathfrak{z}}{r_0^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

aus welcher man die Störungen erster Ordnung $r_0\delta_1\mathfrak{z}$ in der dritten Koordinate bestimmt.

Die Gleichungen (108), (110) und (112) sind von der Form (105) und können nach der Formel (106) integriert werden, und man berücksichtigt dabei die Glieder aller Grade in den verschiedenen Ordnungen. Ist indessen die Exzentrizität klein, so daß man nur die Glieder, welche von niedrigen Graden sind, zu berücksichtigen braucht, so ordnet man besser die Integration nach Potenzen der Exzentrizität.

Entwickelt man mit *P. S. Laplace*[70]) $\frac{1}{r_0^3}$ nach Potenzen der Exzentrizität (Mittlere Anomalie $= M$), so wird z. B. die Gleichung (108)

$$(113)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2(r_0\delta_1 r)}{dt^2} + n_0^2 r_0\delta_1 r &= 2\int d'\Omega_0 + r_0\frac{\partial\Omega}{\partial r_0} \\ &\quad - 3n_0^2 a_0 r_0\delta_1 r(e\cos M + e^2\cos 2M + \cdots) + \cdots, \end{aligned}$$

aus welcher man durch sukzessive Annäherungen $r_0\delta_1 r$ bestimmt.

Ein Glied der rechten Seite dieser Gleichung von der Form

$$\alpha\cos(\nu t + N)$$

gibt in $r_0\delta_1 r$ das Glied

$$\frac{\alpha}{n_0^2 - \nu^2}\cos(\nu t + N),$$

wenn α, $\nu (n \gtrless \nu)$ und N als Konstanten betrachtet werden. Daraus folgt, daß die Glieder der rechten Seite, deren Periode nahe mit der Umlaufszeit des gestörten Planeten übereinstimmt, für welche ν also nahe gleich n ist, bei der Integration sehr vergrößert in $r_0\delta_1 r$ übergehen. Wenn $\nu = n$ ist, erhält man in $r_0\delta_1 r$ das säkulare Glied

$$\frac{\alpha t}{2n_0}\sin(nt + N),$$

welches dadurch berücksichtigt wird, daß man die Elemente mit ihren säkularen Teilen vereinigt.

Weil die Gleichung (112) dieselbe Form hat wie die Gleichung (110), gilt das eben Gesagte auch von den in $r_0\delta_1\mathfrak{z}$ entstehenden Gliedern.

Um die Gleichung (109) oder (111) zu integrieren, hat man sich ersichtlich der Formeln

$$(114)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\alpha\cos(\nu t + N)dt = \frac{\alpha}{\nu}\sin(\nu t + N), \\ &\int dt\int\alpha\sin(\nu t + N)dt = -\frac{\alpha}{\nu^2}\sin(\nu t + N) \end{aligned}\right.$$

70) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 3, p. 5 = Oeuvres 3 p. 5.

zu bedienen, wenn α, ν und N Konstanten sind. In δw werden also diejenigen Glieder bei der Integration am stärksten vergrößert, welche langsam veränderlich sind, und besonders ist das der Fall mit den aus $d'\Omega_0$ oder $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ entstehenden Gliedern, welche durch doppelte Quadratur erhalten werden.

Die Astronomen pflegen indessen von vorneweg die säkularen Störungen der Elemente zu berücksichtigen, so daß α, ν und N langsam veränderliche Größen werden, statt der Formeln (114) hat man dann die folgenden[71])

$$
(115)\quad \begin{cases}
\int \alpha \cos(\nu t + N)\,dt = \frac{\alpha}{\nu}\sin(\nu t + N) \\
\qquad + \sin \nu t\left\{-\frac{1}{\nu^2}\frac{d(\alpha \sin N)}{dt} - \frac{1}{\nu^3}\frac{d^2(\alpha\cos N)}{dt^2} + \cdots\right\}, \\
\qquad + \cos \nu t\left\{\frac{1}{\nu^2}\frac{d(\alpha \cos N)}{dt} - \frac{1}{\nu^3}\frac{d^2(\alpha\sin N)}{dt^2} + \cdots\right\} \\
\int dt \int \alpha \sin(\nu t + N)\,dt = -\frac{\alpha}{\nu^2}\sin(\nu t + N) \\
\qquad + \sin \nu t\left\{\frac{2}{\nu^3}\frac{d(\alpha \sin N)}{dt} + \frac{3}{\nu^4}\frac{d^2(\alpha\cos N)}{dt^2} - \cdots\right\} \\
\qquad + \cos \nu t\left\{-\frac{2}{\nu^3}\frac{d(\alpha \cos N)}{dt} + \frac{3}{\nu^4}\frac{d^2(\alpha\sin N)}{dt^2} + \cdots\right\},
\end{cases}
$$

und ein Glied der Form

$$\alpha \cos(\nu t + N)$$

auf der rechten Seite der Gleichung (113) würde zu $r_0 \delta_1 r$ den Beitrag

$$
\frac{\alpha}{n_0^2 - \nu^2}\cos(\nu t + N) + \cos \nu t\left\{\frac{2\nu}{(n_0^2 - \nu^2)^2}\frac{d(\alpha \sin N)}{dt} + \cdots\right\}
- \sin \nu t\left\{\frac{2\nu}{(n_0^2 - \nu^2)^2}\frac{d(\alpha \cos N)}{dt} + \cdots\right\}
$$

liefern.

Bezüglich der langperiodischen Glieder in δr und δw, welche aus $\int d'\Omega$ entstehen und infolge der doppelten Integration durch das Quadrat eines kleinen Divisors dividiert sind und daher zu den bedeutendsten gehören, hat *P. S. Laplace*[72]) gezeigt, daß man sie am einfachsten berücksichtigt, wenn man überall in den elliptischen Werten für r_0 und w_0 die mittlere Bewegung n_0 in dem Ausdruck

$$M = \int n_0\,dt + \varepsilon_0 - \varpi_0$$

71) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 1, p. 335; 3, p. 7 = Oeuvres 1 p. 361 u. 3 p. 7.

72) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 1, p. 292—293 = Oeuvres 1 p. 315—316.

um die langperiodischen Glieder von

$$\frac{3}{\sqrt{a}\sqrt{1+m}}\int d'\Omega$$

vermehrt.

Die in (115) und anderen ähnlichen Formeln enthaltenen Ableitungen der mit den säkularen Werten der Elemente berechneten Koeffizienten werden gewöhnlich nicht direkt gebildet, sondern man berechnet nach dem Vorgange von *P. S. Laplace*[73]) den Wert der betreffenden Koeffizienten K für zweckmäßig gewählte Zeiten innerhalb des Intervalles, für welches die Theorie gültig sein soll, und bestimmt danach auf interpolatorischem Wege die Koeffizienten

$$K_0, \frac{dK_0}{dt}, \ldots$$

in der Taylorschen Entwickelung

$$K = K_0 + \frac{dK_0}{dt}(t - t_0) + \cdots$$

IV. Theorie von Gyldén.

31. Vorbemerkung. Bei den bisher besprochenen Methoden wurden die Annäherungen nach Potenzen der störenden Massen (oder der schon annähernd ermittelten Störungsbeträge) geordnet, und Potenzen der unabhängigen Veränderlichen traten multipliziert mit Konstanten sowie mit periodischen Gliedern auf, wodurch man auf eine Entwickelung geführt war, welche teilweise nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschritt. Die erhaltenen Ausdrücke der Störungen könnten daher, auch wenn sie konvergent wären, was indessen höchst unwahrscheinlich ist, in praxi nur für eine begrenzte Zeit angewandt werden. Das Hauptprinzip der Gyldénschen Methode ist, konsequent alle Entwickelungen nach Potenzen der unabhängigen Variabeln zu vermeiden, wodurch wenigstens die Möglichkeit offen bleibt, für beliebig lange Zeiten brauchbare Ausdrücke zu erhalten.

Um den Integrationsprozeß einzuleiten und die Annäherungen stärker konvergent zu machen, versuchte *H. Gyldén*[74]) schon in seinen älteren Arbeiten eine Ausgangsbewegung als erste Näherung zugrunde zu legen, die allgemeiner war und sich näher an die wirkliche Bewegung anschließen sollte als die sonst verwandte elliptische Bewegung. Schon in der ersten Annäherung setzte er nicht die störenden Massen gleich Null, sondern nahm aus der störenden Kraft einige vom Radiusvektor r

73) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 3, p. 25 = Oeuvres 3 p. 26.

74) *H. Gyldén,* Stockholm Bih. K. Vet. Akad. Handl. (6) 8 u. 16 (1881).

abhängige Glieder mit, welche so gewählt wurden, daß gewisse nachträglich schwer zu integrierende Teile der Störungsfunktion dadurch berücksichtigt wurden, und daß die erhaltene Differentialgleichung doch noch leicht und durch einfache Ausdrücke integriert werden konnte. Die so erhaltene Bahn, in welcher die Perihellänge veränderlich war, nannte *Gyldén intermediäre* Bahn. Nach Gyldén sind auch von anderer Seite bei Störungsproblemen verschieden definierte intermediäre Bahnen vorgeschlagen worden.[75]) Indessen zeigte sich bald, daß auch die intermediäre Bahn zu speziell war, um den genügenden Ausgangspunkt zu bilden. In demselben Gedankengang fortschreitend, gelangte *Gyldén*[76]) zur Einführung der sogenannten *absoluten* Bahn, welche für jeden Planeten von sechs absoluten Konstanten (Elementen) abhängt und so bestimmt sein soll, daß sie sich von der wirklichen Bewegung des Planeten immer nur um Größen von der Ordnung der Planetenmassen unterscheidet.

Die Ausdrücke der Koordinaten in der absoluten Bahn lassen sich nur durch Annäherungen ermitteln. Um die wirkliche Bahn zu erhalten, muß man zu den Koordinaten der absoluten Bahn Glieder zufügen, welche von der Ordnung der störenden Massen sind und deren größter Teil von den augenblicklichen Konfigurationen der Planeten abhängt. Die Glieder in der Störungsfunktion, welche bei der Integration so vergrößert werden, daß sie nullter Ordnung sind, müssen folglich in der absoluten Bahn schon berücksichtigt sein.

Es sei bemerkt, daß bisher kein Beweis geliefert ist, daß die Gyldénschen absoluten Bahnen die obigen Forderungen betreffend ihre Abweichung von der wirklichen Bahn tatsächlich erfüllen.

32. Differentialgleichungen der Gyldénschen Koordinaten. Ebenso wie *Hansen* zerlegt *Gyldén* die Aufgabe in zwei, nämlich die Bestimmung der Bewegung in der Bahnebene und die Bestimmung der Lage der Bahnebene. Als xy-Ebene wählt *Gyldén* wie *Hansen* die augenblickliche Bahnebene, bestimmt aber die Lage der x-Achse in anderer Weise. Bezeichnet, wie oben, w den Winkel zwischen dem Radiusvektor des gestörten Planeten und der Hansenschen in der Bahnebene unbeweglichen x-Achse, so führt *Gyldén* als unabhängige Variable

75) Z. B. *T. N. Thiele*, Astr. Nachr. 102 (1882), p. 65; *C. V. L. Charlier*, Lunds Meddelanden 21 (1904); *M. H. Andoyer*, Contribution à la théorie des orbites intermediaires, Paris thèse 1886.

76) *H. Gyldén*, Stockholm Bih. K. Vet. Akad. Handl. (7) 2 (1882); Orbites absolues des planètes principales 1 u. 2, Stockholm 1893 resp. 1908 [zitiert: Orbites abs.].

den durch die Gleichung

(116) $$v = \frac{w}{1+\bar{g}}$$

definierten Winkel v ein, wo $\bar{g}$ eine Konstante ist, die so bestimmt werden soll, daß die durch die Gleichung

(117) $$\bar{g}v + \bar{G} = \bar{\sigma} - \Omega$$

eingeführte Funktion $\bar{G}$ keine mit v proportionalen Glieder enthält, wobei $\bar{\sigma}$ wie in Nr. 22 der Winkel zwischen der Hansenschen x-Achse und dem aufsteigenden Knoten auf der Grundebene ist. Die Gyldénsche x-Achse, die zur Unterscheidung als ξ-Achse bezeichnet werde, ist beweglich in der Bahnebene und bildet mit der Hansenschen x-Achse einen Winkel gleich $\bar{g}v = \frac{\bar{g}}{1+\bar{g}}w$ in der Bewegungsrichtung des Planeten, woraus folgt, daß v der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der ξ-Achse ist. Der Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten auf der Grundebene und der ξ-Achse in der Bewegungsrichtung des Planeten ist $= \Omega + \bar{G}$ und unterscheidet sich also nur durch die periodische Funktion $\bar{G}$ von der Knotenlänge.

Aus den Gleichungen (59) und (117) folgt:

(118) $$\bar{g} + \frac{d\bar{g}}{dv} = -2\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dv},$$

woraus hervorgeht, daß $\bar{G}$ keine anderen Argumente hat als die in i und Ω enthaltenen. Da die Koordinaten des Planeten in bezug auf im Raume feste Achsen durch r, v und trigonometrische Funktionen von i, Ω und $\bar{G}$ ausgedrückt werden können, so folgt daraus, daß $\bar{G}$ keine neuen Argumente in die Formeln einführt. Würde man die Hansensche Achse anstatt der Gyldénschen ξ-Achse und demgemäß w als unabhängige Veränderliche anstatt v anwenden, so scheint es, als würde man bei den auf feste Achsen bezogenen Koordinaten ein Argument mehr erhalten, indem das Argument $\frac{\bar{g}}{1+\bar{g}}w$ dann in den Richtungskosinussen der beweglichen Achsen vorkommt. Auf Grund der Relation (116) schließt man jedoch, daß man ebensogut w anstatt v als unabhängige Variable anwenden kann, ohne fremde Argumente einzuführen. Man würde nur für die Konstanten etwas veränderte Werte erhalten. So benutzt z. B. *M. Brendel* bei seiner Verwendung der Gyldénschen Methode w anstatt v.

In Analogie mit den Formeln der elliptischen Bewegung setzt Gyldén

(119) $$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho},$$

(120) $$r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{(1+m)\,a\,(1-\eta^2)}}{1+S}$$

wo a eine Konstante (Protometer genannt) und η eine langperiodische positive Funktion ist, die etwa der Summe des konstanten und des säkularen Teils der Exzentrizität entspricht und welche später genauer bestimmt werden wird. Vermittels der Gleichungen (57) findet sich leicht, daß ϱ und S durch die Differentialgleichungen

$$(121)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varrho}{dv^2}+\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}-\dfrac{\frac{dS}{dv}}{1+S}\right]\dfrac{d\varrho}{dv} \\ \quad +\left[(1+\bar{g})^2+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\right)^2+\dfrac{\frac{d^2\eta^2}{dv^2}}{1-\eta^2}-\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\dfrac{\frac{dS}{dv}}{1+S}\right]\varrho \\ =-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\right)^2-\dfrac{\frac{d^2\eta^2}{dv^2}}{1-\eta^2}+\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\dfrac{\frac{dS}{dv}}{1+S}+2S+S^2-2\bar{g}-\bar{g}^2 \\ \quad +(1+S)^2P, \end{cases}$$

$$(122)\qquad \frac{\frac{dS}{dv}}{1+S}=-\frac{1}{2}\frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}+\frac{(1+S)^2}{1+\bar{g}}Q,$$

erhalten werden, wobei gilt:

$$(123)\qquad P=+a(1-\eta^2)\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho},$$

$$(124)\qquad Q=-\frac{a(1-\eta^2)}{(1+\varrho)^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Bei der Bildung von $\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}$ sind dabei alle von v abhängigen Glieder, welche sich auf die Lage der Planetenbahn beziehen, als konstant anzusehen.

Die Länge L in der festen Grundebene berechnet sich nach der Formel

$$\operatorname{tg}(L-v)=-\frac{\sin\bar{G}+2\sin^2\frac{1}{2}i\sin(v-\Omega-\bar{G})\cos(v-\Omega)}{\cos\bar{G}-2\sin^2\frac{1}{2}i\sin(v-\Omega-\bar{G})\sin(v-\Omega)}$$

oder durch die Gleichungen

$$(125)\quad \begin{cases}\cos B\cos L=\cos(v-\bar{G})+(1-\cos i)\sin\Omega\sin(v-\bar{G}-\Omega),\\ \cos B\sin L=\sin(v-\bar{G})-(1-\cos i)\cos\Omega\cos(v-\bar{G}-\Omega).\end{cases}$$

Auf Grund der Gleichungen

$$(126)\quad \begin{cases}\mathfrak{z}=\sin i\sin(v-\Omega-\bar{G})\\ \dfrac{d\mathfrak{z}}{dv}=(1+\bar{g})\sin i\cos(v-\Omega-\bar{G})\end{cases}$$

wird die Bewegung der Bahnebene durch den mit $\mathfrak{z}$ bezeichneten Sinus der Breite B über der festen Grundebene erhalten. Weil

$$(127)\qquad z=r\mathfrak{z}$$

ist, leitet man aus der dritten Gleichung (4) nach einigen Transformationen die Differentialgleichung

$$(128)\qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv}+(1+\bar{g})^2\mathfrak{z}=(1+S)^2\left[(\mathfrak{z}'-\mathfrak{z}\cos H)R+\frac{Q}{1+\bar{g}}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right]$$

ab, wo $\mathfrak{z}'$ den Sinus der Breite des störenden Planeten über der Grundebene bedeutet und

$$(129)\qquad R=\frac{a(1-\eta^2)}{(1+\varrho)^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}$$

ist. Zu bemerken ist noch die Gleichung

$$(130)\qquad Q=-R\frac{\partial\cos H}{\partial v}.$$

Aus den Gleichungen (118) und (126) findet man

$$(131)\qquad \begin{cases} \bar{g}+\dfrac{d\bar{G}}{dv}=-\dfrac{\mathfrak{z}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+(1+\bar{g})^2\mathfrak{z}\right)}{2(1+\bar{g})\cos i\cos^2\dfrac{i}{2}} \\ =-\dfrac{1}{2}\mathfrak{z}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+(1+\bar{g})^2\mathfrak{z}\right)\left(1-\bar{g}+\dfrac{3}{4}\sin^2 i+\dfrac{5}{8}\sin^4 i+\cdots\right), \end{cases}$$

welche Gleichung $\bar{g}$ und $\bar{G}$ bestimmt, indem $\sin^2 i$ aus (126) folgt und $\bar{g}$ gleich den konstanten Gliedern der rechten Seite zu setzen ist.

Zur Bestimmung der Zeit als Funktion von v dient die Gleichung (120), die in der Form

$$(132)\qquad n\frac{dt}{dv}=\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho)^2}(1+S)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$(133)\qquad n=\frac{\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

die absolute mittlere Bewegung bezeichnet.

33. Zerlegung der Variablen. Die Grundgleichungen (121), (122), (128) und (132) müssen für die beabsichtigte Form der Lösung zur Integration noch weiter transformiert werden. Es handelt sich hierbei in erster Linie darum, in den zu bestimmenden Größen die Glieder, welche mit den störenden Massen nicht verschwinden, von den Gliedern zu trennen, welche mit den störenden Massen verschwinden. Wenn die Massen verschwinden, muß die Summe der erstgenannten Glieder in die entsprechenden Größen bei der ungestörten Bewegung übergehen und die Elemente derselben bestimmen. Diese Glieder werden daher *elementare* genannt. *Gyldén* setzt

$$(134)\qquad \varrho=(\varrho)+\delta\varrho$$

und bezeichnet mit $\delta\varrho$ die Summe aller nichtelementaren Glieder.

Die Summe (ϱ) aller elementaren Glieder von ϱ kann in der Form

(135) $$(\varrho) = \varkappa \cos(v - \omega) + \sum_i \varkappa_i \cos(v - \omega_i)$$

geschrieben werden. Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine positive Integrationskonstante, den sog. diastematischen Modul, und $\varkappa_i$ Konstanten, die sog. diastematischen Koeffizienten, welche von den störenden Massen abhängen, aber mit denselben nicht verschwinden. Indem $\varLambda$, $\varGamma$, $\varGamma_i$ konstante Winkel bezeichnen, von welchen $\varLambda$ und $\varGamma$ Integrationskonstanten sind, gilt weiter für die Winkel

(136) $$\begin{cases} \omega = \varsigma(v - \varLambda) + \varGamma, \\ \omega_i = \varsigma_i(v - \varLambda) + \varGamma_i, \end{cases}$$

wobei ς und ς_i kleine mit den störenden Massen verschwindende Konstanten sind.

Die früher eingeführte Funktion η und der Winkel $\varPi$ werden nun durch die Gleichungen

(137) $$\begin{cases} \eta \cos(\varPi - \varGamma) = \varkappa + \sum_i \varkappa_i \cos(\omega - \omega_i), \\ \eta \sin(\varPi - \varGamma) = \quad - \sum_i \varkappa_i \sin(\omega - \omega_i), \end{cases}$$

definiert. Nach (135) wird somit

(138) $$(\varrho) = \eta \cos F$$

erhalten, wo der Winkel

(139) $$F = v - \omega - (\varPi - \varGamma) = v - \varsigma(v - \varLambda) - \varPi = v - (\omega)$$

das sog. diastematische Argument ist. Wenn $|\varkappa| > \sum |\varkappa_i|$ ist, so liegt $\varPi - \varGamma$ immer zwischen -90^0, und $+90^0$ und der säkulare Teil des Winkels F ist in $v - \omega$ abgesondert, welcher also die mittlere Bewegung $1 - \varsigma$ hat. Wäre dagegen ein Koeffizient $\varkappa_j$ größer als die Summe von $\varkappa$ und der übrigen $|\varkappa_i|$, so würde man analog

$$F = v - \omega_i - (\varPi_i - \varGamma_i)$$

finden, wobei $-90 < \varPi_i - \varGamma_i < +90^0$, und der Winkel F hätte die mittlere Bewegung $1 - \varsigma_i$.

Gyldén[77]) hat versucht nachzuweisen, daß das Argument F eine mittlere Bewegung hat, auch in anderen als diesen beiden Fällen, jedoch ohne überall durchzudringen. Die Bedeutung der Existenz einer mittleren Bewegung liegt darin, daß dann das Argument $\varPi - \varGamma$ resp. $\varPi_i - \varGamma_i$ für alle Zeiten innerhalb konstanter Grenzen liegt. Hier werden wir mit Gyldén die Form (139) voraussetzen.

Ganz ebenso wie die Funktion ϱ zerlegt wurde, wird dies auch

77) *H. Gyldén*, Stockholm Obs. Astr. Iakttagelser etc. (5) 4 (1896).

mit $\mathfrak{z}$ gemacht, indem

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \delta\mathfrak{z} \tag{140}$$

gesetzt wird. Indem Θ, Θ_i konstante Winkel und τ, τ_i kleine mit den störenden Massen verschwindende Konstanten bezeichnen, setzt man

$$\begin{cases} \vartheta = -\tau(v - \Lambda) + \Theta, \\ \vartheta_i = -\tau_i(v - \Lambda) + \Theta_i, \end{cases} \tag{141}$$

$$\begin{cases} J\cos(\Omega - \Theta) = \iota + \sum \iota_i \cos(\vartheta - \vartheta_i), \\ J\sin(\Omega - \Theta) = \quad -\sum \iota_i \sin(\vartheta - \vartheta_i), \end{cases} \tag{142}$$

wo ι, ι_i Konstanten sind, von welchen ι anastematischer Modul und die ι_i anastematische Koeffizienten genannt werden, und erhält

$$(\mathfrak{z}) = J \sin U, \tag{143}$$

wobei das sogenannte anastematische Argument folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$U = v - \vartheta - (\Omega - \Theta) = v + \tau(v - \Lambda) - \Omega = v - (\vartheta). \tag{144}$$

Die Zeit t zerfällt in zwei Teile

$$t = (t) + \delta t, \tag{145}$$

wobei (t), das reduzierte Zeit genannt wird, durch die Gleichung

$$n\frac{d(t)}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+(\varrho))^2} \tag{146}$$

definiert wird. δt wird Zeitreduktion genannt.

In Analogie mit den Formeln der elliptischen Bewegung setzt *Gyldén* weiter

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}F, \tag{147}$$

$$G = E - \eta \sin E, \tag{148}$$

wodurch

$$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)} = a(1 - \eta\cos E) \tag{149}$$

erhalten wird. Vermittels der Gleichung (146) findet man für das sogenannte mittlere Argument G den Ausdruck

$$G = (1 - \varsigma)n(t) + \Lambda - \Pi + (1 - \varsigma)X, \tag{150}$$

wobei X aus der Gleichung

$$\begin{cases} (1-\varsigma)\dfrac{dX}{dv} \\ = -\dfrac{\sqrt{1-\eta^2}(2+\eta\cos F)\sin F\left(\cos(\Pi-\Gamma)\dfrac{d(\eta\cos(\Pi-\Gamma))}{dv} + \sin(\Pi-\Gamma)\dfrac{d(\eta\sin(\Pi-\Gamma))}{dv}\right)}{(1+\eta\cos F)^2} \\ -\dfrac{1}{\eta}\left(\dfrac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos F)^2} - 1\right)\left(\cos(\Pi-\Gamma)\dfrac{d(\eta\sin(\Pi-\Gamma))}{dv} - \sin(\Pi-\Gamma)\dfrac{d(\eta\cos(\Pi-\Gamma))}{dv}\right) \end{cases} \tag{151}$$

erhalten wird. Im allgemeinen ist X sehr klein und kann oft gleich Null gesetzt werden.

Um noch mehr Freiheit zu haben, hat *Gyldén*[78]) versucht, die unabhängige Variabele v auch in zwei Teile zu zerteilen. Es sei hier nicht auf diese weitere Komplikation eingegangen.

34. Entwicklung der Größen P, Q und R. Fundamentale Entwicklung. Um die Integration der Gleichungen (121), (122), (128) und (132) ausführen zu können, müssen die Größen P, Q und R zweckmäßig entwickelt werden.

Wenn von der Betrachtung des zweiten Teiles der Störungsfunktion, welcher leicht zu berücksichtigen ist (siehe den Artikel von *v. Zeipel* VII 2, 13 Nr. 27), und konstanten Faktoren abgesehen wird, hat man

$$\frac{a}{\Delta}$$

zu entwickeln. *Gyldén* setzt

$$(152)\qquad \mathrm{w} = v - v' - (\bar{G} - \bar{G}')$$

$$(153)\qquad \cos H = \cos \mathrm{w} + h,$$

und erhält nach Potenzen von h entwickelt

$$(154)\qquad \frac{a}{\Delta} = \sum_{m=0}^{+\infty} W^{(m)} h^m,$$

wo

$$(155)\qquad W^{(m)} = \frac{(\frac{1}{2}, m)}{(1, m)} \left(\frac{2}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'}\right)^m \left(\frac{a}{D}\right)^{2m+1}$$

ist. (Die akzentuierten Größen beziehen sich auf den störenden Planeten.) Dabei wurde

$$(156)\qquad \alpha = \frac{a}{a'}, \quad D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \mathrm{w}$$

$$(\gamma, i) = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+i-1), \quad (\gamma, 0) = 1$$

gesetzt. In Fouriersche Reihen entwickelt gelte

$$(157)\qquad W^{(m)} = W_0^{(m)} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} W_n^{(m)} \cos n\mathrm{w},$$

und

$$(158)\qquad \left(\frac{a}{D}\right)^{2m+1} = U_0^{(m)} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} U_n^{(m)} \cos n\mathrm{w}.$$

Nach (155) hat man dann

$$(159)\qquad W_n^{(m)} = \frac{(\frac{1}{2}, m)}{(1, m)} \left(\frac{2}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'}\right)^m U_n^{(m)}.$$

78) *H. Gyldén*, Orbites abs. I, p. 515.

Die Größe

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{2m+1} U_n^{(m)}$$

ist Funktion nur der Größe α und von

(160) $$\chi = 1 - \left(\frac{r}{a}\frac{a'}{r'}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2 \left(\frac{1+\varrho'}{1+\varrho}\right)^2.$$

Nach Potenzen von χ entwickelt hat man dann

(161) $$\left(\frac{r'}{a}\right)^{2m+1} U_n^{(m)} = \vartheta_0^{m,n} - \vartheta_1^{m,n}\chi + \vartheta_2^{m,n}\chi^2 - \cdots$$

(162) $$\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(\frac{r'}{a'}\right)^{n+2m+1} U_n^{(m)} = \gamma_0^{2m+1,n} - \gamma_1^{2m+1,n}\chi + \gamma_2^{2m+1,n}\chi^2 - \cdots,$$

welche Gleichungen die Gyldénschen ϑ- und γ-Transzendenten definieren, und aus welchen noch die Relation

$$\vartheta_i^{m,n} = \gamma_i^{2m+1,n} + \frac{n}{2}\gamma_{i-1}^{2m+1,n} + \frac{n}{2}\frac{n-2}{4}\gamma_{i-2}^{2m+1,n} + \cdots + \frac{n}{2}\frac{n-2}{4}\frac{n-4}{6}\cdots\frac{n-2i}{2i}\gamma_0^{2m+1,n}$$

zwischen den beiden Transzendenten folgt. Betreffs derselben sei auf den Artikel von *v. Zeipel* verwiesen (VI 2, **13**, Nr. 8 und 24). Entwickelt man $\frac{r}{a}$, $\frac{r'}{a'}$, und χ nach Potenzen von η^2, η'^2, ϱ', so erhält man aus den Gleichungen (159), (161) und (162) Entwicklungen der Form

(162a) $$W_n^{(m)} = \sum y^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'},$$

wo $y^{(m)}$ Polynome in den $\gamma_i^{2m+1,n}$ oder $\vartheta_i^{m,n}$ Transzendenten sind. Die Koeffizienten dieser zuerst von *P. Harzer*[79]) gegebenen Polynome von γ-Transzendenten hängen von m und n ab und sind für größere Werte vom n mühsam zu berechnen. Die Logarithmen einiger dieser Koeffizienten gab *H. Masal*[80]).

Eine bedeutende Vereinfachung erreichte Gyldén durch Einführung der ϑ-Transzendenten, weil die Koeffizienten der Polynome dann nur von m abhängen. In den Anwendungen werden nur die niedrigsten Werte von m gebraucht.

Es bezeichne N eine beliebige der Funktionen $a\Omega$, P, Q oder R. Da

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \frac{\partial \Omega}{\partial h}$$

ist, schließt man aus den Gleichungen (123), (129) und (130), daß bis auf das zu Q hinzuzufügende Glied $-P\frac{\partial h}{\partial v}$, N in der Form

(163) $$N = \sum N^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'} h^m \varrho^s, \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n w$$

79) *P. Harzer*, St. Pét. mém. 7. Reihe (34) 12 (1886).

80) *H. Masal*, Stockholm K. Vet. Akad. Handl. (23) 7 (1889).

geschrieben werden kann, wo bei der Summation m, n, s, s', ν und ν' alle ganzzahligen Werte zwischen 0 und $+\infty$ annehmen und die Koeffizienten $N^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ als Polynome der Koeffizienten $y^{(m)}$ oder der γ oder der ϑ-Transzendenten ausgedrückt werden können.

Aus den Gleichungen (125) und (126) findet man, daß h nach Potenzen von $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}$ entwickelt werden kann, und daß

$$(164)\quad h = -\frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos \mathrm{w} + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\sin \mathrm{w} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \cdots$$

ist, wobei die Glieder höheren als dritten Grades weggelassen sind. Wird hier $(\mathfrak{z}) + \delta\mathfrak{z}$, $(\mathfrak{z}') + \delta\mathfrak{z}'$ für $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ eingeführt, so kann man wieder

$$(165)\qquad h = (h) + \delta h$$

schreiben, wobei jedes Glied von δh wenigstens eine der sogenannten anastematischen Ungleichheiten $\delta\mathfrak{z}$, $\delta\mathfrak{z}'$ oder ihrer Ableitungen $\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv}$, $\frac{d\delta\mathfrak{z}'}{dv'}$ als Faktor hat.

Es ist hiernach ersichtlich, daß N in der Form

$$(166)\qquad N = \sum N_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta h)^\alpha(\delta\varrho)^\beta(\delta\varrho')^\gamma$$

entwickelt werden kann, und daß die $N_{\alpha,\beta,\gamma}$ ihrerseits von der Form

$$(167)\quad N_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum N^{(m)}_{\alpha,\beta,\gamma}(n,s,s')_{\nu,\nu'}(h)^m(\varrho)^s(\varrho')^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n\mathrm{w}$$

sind. Die hier auftretenden Koeffizienten folgen nach der Formel

$$N^{(m)}_{\alpha,\beta,\gamma}(n, s, s')_{\nu,\nu'} = \frac{(m+1,\alpha)}{(1,\alpha)}\frac{(s+1,\beta)}{(1,\beta)}\frac{(s'+1,\gamma)}{(1,\gamma)}N^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$$

sofort aus den Koeffizienten der für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ gültigen Entwicklung (163).

Die Entwicklung von N nach Vielfachen von w und nach Potenzen von

$$(h),\ (\varrho),\ (\varrho'),\ \eta,\ \eta',\ \delta h,\ \delta\varrho,\ \delta\varrho'$$

nennt Gyldén die fundamentale Entwicklung.

35. Diastematische Entwicklung. Um die Integration der Differentialgleichungen (121), (122) und (128) möglichst einfach ausführen zu können, muß man, soweit als möglich, ihre rechten Seiten als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken, was indessen nur durch sukzessive Annäherungen und Integrationen zu erreichen ist, indem die Größen $\delta\varrho$, $\delta\varrho'$, $\delta\mathfrak{z}$, δh und δt nur solcherweise zu erhalten sind.

Aus der Gleichung (143) und der analogen Gleichung

$$(168)\qquad (\mathfrak{z}') = J'\sin U'$$

folgt, daß

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = J\cos U + (\zeta),\quad \frac{d(\mathfrak{z}')}{dv'} = J'\cos U' + (\zeta'),$$

wo (ζ) und (ζ') kleine und leicht zu erhaltende Größen von der Ordnung der Masse bezeichnen, welche auch oft vernachlässigt werden können, und das Argument

$$(169)\quad U' = v' - \vartheta' - (\Omega' - \Theta') = v' + \tau'(v' - \Lambda') - \Omega' = v' - (\vartheta')$$

ist. Vereinigt man der Kürze wegen die aus (ζ) und (ζ') entstehenden Glieder mit δh, so ergibt sich aus (164) daß (h), welches wenigstens vom zweiten Grade ist, nach Potenzen von J und J' und nach Kosinussen der Vielfachen von w, U und U' entwickelt werden kann.

Die in § 34 mit N oder $N_{\alpha,\beta,\gamma}$ bezeichneten Funktionen, ebenso wie die auf den rechten Seiten der Gleichung (128) sich befindenden, von denselben abhängigen Ausdrücke können daher zunächst in der Form

$$(170)\quad N = \sum (N) J^{\lambda} J'^{\lambda'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} (\varrho)^{s} (\varrho')^{s'} \frac{\cos}{\sin}\left\{nw + qU + q'U'\right\}$$

geschrieben werden.

Für den störenden Planeten hat man nun die Gleichungen

$$(171)\quad F' = v' - \omega' - (\Pi' - \Gamma') = v' - \varsigma'(v' - \Lambda') - \Pi' = v' - (\omega'),$$

$$(172)\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E' = \sqrt{\frac{1-\eta'}{1+\eta'}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}F', \quad G' = E' - \eta' \sin E',$$

$$(173)\quad G' = (1 - \varsigma')n'(t') + \Lambda' - \Pi' + (1 - \varsigma')X',$$

$$(174)\quad t = (t') + \delta t',$$

$$(175)\quad (\varrho') = \eta' \cos F'.$$

Durch diese Gleichungen und die entsprechenden der gestörten Planeten ist auch die Abhängigkeit der Länge v' von v gegeben.

Die zur Einführung von v anstatt v' und umgekehrt nötigen Formeln sind von *H. Gyldén*[81]) vollständig gegeben. Der von ihm beschrittene Weg ist etwa der folgende. Durch Elimination von t, (t) und (t') aus den Gleichungen (145), (150), (173) und (174) findet er

$$G' + \Pi' - \Gamma' = \varphi(G - F) + \overline{V} + \overline{U},$$

wo

$$(176)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1-\varsigma'}{1-\varsigma}\mu, \quad \mu = \dfrac{n'}{n}, \\ \overline{V} = \varphi(v - \omega) + \varphi(\Gamma - \Lambda) - (\Gamma' - \Lambda'), \\ \overline{U} = (1 - \varsigma')[\mu(n\delta t - X) - (n'\delta t' - X')]. \end{cases}$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$(177)\quad \overline{H} = F' - G' - \varphi(F - G)$$

81) *H. Gyldén,* Orbites abs. 1, p. 133—151.

hat man dann

$$
(178)\qquad \begin{cases} \omega' = \Gamma' + \mu \frac{\varsigma'}{\varsigma}(\omega - \Gamma) + \varsigma' \frac{\overline{H} + \overline{U}}{1 - \varsigma'}, \\ \vartheta' - \Theta' = \mu \frac{\tau'}{\tau}(\vartheta - \Theta) - \tau' \frac{\overline{H} + \overline{U}}{1 - \varsigma'}, \end{cases}
$$

wo noch $\overline{H}$ als Funktion von v darzustellen ist, was indessen selten nötig ist, da $\overline{H}$ immer klein und ς' von der Ordnung der Masse ist. In „Orbites absolues“, p. 143—147, gibt Gyldén Formeln, um $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} \alpha \overline{H}$ in trigonometrische Reihen von v oder v' zu entwickeln (α eine Konstante).

Vermittelst der Entwicklung

$$
(179)\quad G - F = \sum_{\nu=1}^{+\infty} B_\nu \sin \nu F, \quad B_\nu = (-1)^\nu 2\left(\frac{1}{\nu} + \sqrt{1-\eta^2}\right)\left(\frac{\eta}{1+\sqrt{1-\eta^2}}\right)^\nu
$$

leitet Gyldén die nach Potenzen von η und der Konstante λ entwickelbaren Koeffizienten $Y_\nu(\lambda, \eta)$ der Entwickelung

$$
e^{-i\lambda(G-F)} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} Y_\nu(\lambda, \eta) e^{-i\nu F}
$$

ab ($i = \sqrt{-1}$ und e die Nepersche Basis). Andererseits hat man die Entwickelung (ν und ν' ganze Zahlen)

$$
e^{-im(F-G)} = \sum_{\nu'=-\infty}^{+\infty} X_{\nu'}(m, \eta) e^{-i\nu' G}.
$$

Zwischen den Koeffizienten der beiden Entwickelungen existiert die Beziehung

$$
(\lambda + \nu) Y_\nu(\lambda, \eta) = \lambda X_\nu(-\lambda - \nu, \eta).
$$

Unter Anwendung der vorstehenden Gleichungen erhält man nacheinander

$$
\begin{aligned}
e^{-im(v'-\omega')} &= e^{-im(F'-G') - im(G'+\Pi'-\Gamma')}, \\
&= \sum_{\nu'} X_{\nu'}(m, \eta') e^{-i[(m+\nu')(G'+\Pi'-\Gamma') - \nu'(\Pi'-\Gamma')]}, \\
&= \sum_{\nu'} X_{\nu'}(m, \eta') e^{-i[(m+\nu')\varphi(G-F) + (m+\nu')(\overline{V}+\overline{U}) - \nu'(\Pi'-\Gamma')]}, \\
&= \sum_{\nu, \nu'} X_{\nu'}(m, \eta') Y_\nu(\varphi(m+\nu'), \eta) e^{-i[\nu F + (m+\nu')(\overline{V}+\overline{U}) - \nu'(\Pi'-\Gamma')]}
\end{aligned}
$$

und daher schließlich nach einigen Reduktionen

$$
\begin{aligned}
(180)\quad & e^{im(v-v')} \\
&= \sum_{\nu, \nu'} X_{\nu'}(m, \eta') Y_\nu(\varphi(m+\nu'), \eta) e^{i[(m-\nu)v - (m+\nu')(\mu v + B) + \nu(\omega) + \nu'(\omega')]}
\end{aligned}
$$

wobei

$$(181)\qquad B = \Lambda' - \mu\Lambda + \mu(n\delta t - X) - (n'\delta t' - X') + \frac{\varsigma' H}{1-\varsigma'}$$

ist und durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile für sich die Entwickelung von $\frac{\sin}{\cos}\left\{m(v - v')\right\}$ erhalten wird.

Die Formeln (178) und (180) gestatten alle in den Argumenten vorkommenden von v' abhängigen Größen in einfacher Weise durch v auszudrücken. In „Orbites absolues", p. 198—320, gibt Gyldén die Ausdrücke in v von

$$(\varrho)^s(\varrho')^{s'} \cos mw, \quad (s + s' \leqq 5),$$

bis auf Glieder sechsten Grades in η und η', und von verschiedenen $(\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{z}')$, $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)$, $\left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)$ enthaltenden Gliedern.

Nach der Gleichung (167) übersieht man nun, daß die Funktionen N, nachdem v' durch die vorstehenden Formeln eliminiert ist, in der folgenden Form erhalten werden:

$$(182)\qquad N = \sum \bar{A}_{s,s'}(p,p',q,q') \frac{\sin}{\cos}\{sv - s'(\mu v + B) + p(\omega) + p'(\omega') \\ + q(\vartheta) + q'(\vartheta') - (s+p+q)(\bar{G} - \bar{G}')\},$$

wo die ganzen positiven oder negativen Zahlen s, s', p, p', q, q' die Gleichung

$$s + p + q = s' - p' - q'$$

erfüllen. Die Koeffizienten $\bar{A}$ haben die Form

$$\bar{A}_{s,s'}(p,p',q,q') = \sum A_{s,s'}(p,p',q,q')_{\lambda,\lambda',\nu,\nu'}\, \eta^{|p|+2\lambda} \eta'^{|p'|+2\lambda'} J^{|q|+2\nu} J'^{|q'|+2\nu'}$$
$$(\lambda, \lambda', \nu, \nu' = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

wo die A-Koeffizienten Polynome von $\varphi = \mu\,\frac{1-\varsigma'}{1-\varsigma}$ sind, deren Koeffizienten sich aus den Koeffizienten der Fundamentalentwicklung zusammensetzen. Die Entwickelung (182) nennt Gyldén die diastematische Entwickelung. Streng genommen wäre noch die in B enthaltene Größe $\frac{\varsigma'}{1-\varsigma'}\bar{H}$, welche oft vernachlässigt werden kann, sowie (ω') und (ϑ') durch v auszudrücken.

Die expliziten Ausdrücke der Koeffizienten der diastematischen Entwickelung von P, Q und R gibt Gyldén in Orbites abs. 1 p. 448—453 und 2 p. 242—270 für alle Glieder von niedrigerem als viertem Grad in η und η', sowie für die wichtigsten Glieder vom vierten, fünften und sechsten Grad.

H. Masal[80]) drückt diese Koeffizienten bis auf Glieder einschließlich dritten Grades in η und η' durch γ-Transzendenten aus und gibt Formeln und Tafeln zu ihrer Berechnung.

In seinen „Hilfstafeln"[82]) hat Gyldén Formeln für die zur Berechnung der Hauptungleichheiten der kleinen Planeten nötigen Koeffizienten gegeben und ihre Berechnung durch ausgedehnte numerische Tafeln erleichtert.

36. Einteilung der Glieder. Unter den auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen der Bewegung vorkommenden Gliedern treten vier Formen auf, welche besondere Schwierigkeiten bei der Integration darbieten. Erstens hat man die beiden Formen

$$(A)\quad a \frac{\sin}{\cos}\{\sigma v + A\}, \qquad (B)\quad b \frac{\sin}{\cos}\{(1-\sigma)v - B\},$$

wo a, b, A, B Konstanten sind und die σ mit den störenden Massen verschwinden. Diese immer auftretenden Glieder sind nach der Gyldénschen Terminologie elementare Glieder. Diesen zur Seite treten im Falle angenäherter Kommensurabilität der mittleren Bewegungen Glieder der beiden Formen

$$(C)\quad c \frac{\cos}{\sin}\{\Delta v + C\}, \qquad (D)\quad d \frac{\cos}{\sin}\{(1+\Delta)v + D\},$$

wo $c \frac{\cos}{\sin}\{C$ und $d \frac{\cos}{\sin}\{D$ aus Gliedern der Form (A) zusammengesetzt sind und, indem das Verhältnis μ der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahe gleich dem ganzzahligen Bruche $\frac{p}{q}$ angenommen wird,

$$\Delta = p - q\mu$$

ist. Die Glieder der Formen (C) und (D) nennt Gyldén „charakteristische". Die Formen (A) und (C) sind langperiodische, (B) und (D) dagegen kurzperiodische. Bei dem Integrationsprozeß können die Glieder der Form (C) Divisoren von der Ordnung Δ^2, diejenigen von der Form (D) aber Divisoren von der Ordnung Δ erhalten. Die elementaren Glieder, welche den säkularen Gliedern der anderen Theorien entsprechen, erhalten Integrationsdivisoren von der Ordnung der Masse und geben also Veranlassung zu Gliedern, die formell von der nullten Ordnung sind.

Die Glieder (A), (B), (C) und (D) sind mindestens vom Grade resp.

$$2,\ 1,\ |q-p|,\ |(|q-p|-1)|.$$

Die nicht zu den genannten vier Formen gehörenden Glieder werden „gewöhnliche" genannt.

---

82) *H. Gyldén,* Astr. Ges. Publ. XXI, Leipzig 1896.

37. Integration. Die Bestimmung der Größen ϱ, S, $\mathfrak{z}$ und δt nach den Gleichungen (121), (122), (128) und

$$(183)\quad \begin{cases} n\dfrac{d\delta t}{dt} = \dfrac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+(\varrho))^2}\left\{S - \dfrac{(1+S)(2+2(\varrho)+\delta\varrho)\delta\varrho}{(1+(\varrho)+\delta\varrho)^2}\right\} \\ \qquad = (1-2\eta\cos F+\cdots)S-(2+3\eta^2+\cdots)(1+S)\delta\varrho+\cdots, \end{cases}$$

welch letztere aus (132), (145) und (146) folgt, vereinfacht Gyldén dadurch, daß er diese Größen in mehrere Teile spaltet und ebenso die Differentialgleichungen in solche für diese Teile zerlegt. Das hierbei befolgte Prinzip besteht darin, alle die Glieder, welche von derselben Form sind und etwa dieselben Schwierigkeiten bieten, in eine Gleichung zu vereinigen.

Seien gewöhnliche Glieder und Glieder der Formen (A), (B), (C), (D) einer Größe durch die bezüglichen Indizes g, a, b, c, d gekennzeichnet. Aus den genannten Gleichungen ergeben sich dann für (ϱ), $\delta\varrho_a, \ldots, \delta\varrho_g$, $S_a, \ldots, S_g$, $\delta t_a, \ldots, \delta t_g$, $(\mathfrak{z})$, $\delta\mathfrak{z}_a, \ldots, \delta\mathfrak{z}_g$, $(\delta\mathfrak{z}_b = \delta\mathfrak{z}_b = 0)$ resp. Gleichungen der Formen

$$(184)\quad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1+b)\varrho = R, \qquad (\varrho = (\varrho), \delta\varrho_a, \delta\varrho_c, \delta\varrho_d, \delta\varrho_g),$$

$$(185)\quad \frac{dS}{dv} = (S), \qquad (S = S_a, S_b, S_c, S_d, S_g),$$

$$(186)\quad \frac{d\delta t}{dt} = T, \qquad (\delta t = \delta t_a, \delta t_b, \delta t_c, \delta t_d, \delta t_g),$$

$$(187)\quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + (1+a)\mathfrak{z} = Z, \qquad (\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}), \delta\mathfrak{z}_a, \delta\mathfrak{z}_c, \delta\mathfrak{z}_d, \delta\mathfrak{z}_g),$$

wo a und b kleine Konstanten erster Ordnung sind und R, (S), T, und Z die resp. Glieder der Differentialgleichungen von ϱ, S, δt und δz bezeichnen, welche von der Form der zu bestimmenden Teile sind.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich nur durch fortgesetzte Annäherungen bestimmen, denn sie enthalten die gesuchten Größen selbst, wenn auch mit kleinen Faktoren multipliziert. Eine Ausnahme bilden δt und $\delta t'$, welche in die Argumente mit Faktoren nullter Ordnung multipliziert eingehen.

Handelt es sich darum, die Theorien der Hauptplaneten auszuarbeiten, so erhält man für jeden ein System von Gleichungen wie (184), (185), (186), (187), und alle diese Systeme sind dann gleichzeitig zu integrieren. Solch eine Integration, die mit ganz bedeutenden Schwierigkeiten verbunden sein muß, ist niemals ausgeführt worden.

Die diesbezügliche Arbeit von Gyldén (Orbites absolues) ist leider unabgeschlossen geblieben. Aber auch wenn es sich um die Bahnen der kleinen Planeten handelt, wo die Bewegungen der Hauptplaneten als bekannt angenommen werden, ist die Integration der genannten Gleichungen mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden, wenn man streng an dem Gyldénschen Prinzip festhält, alle gesuchten Größen als Summen von periodischen Gliedern ausdrücken und keine Entwickelung nach Potenzen der unabhängigen Variablen zuzulassen.

Es sei im folgenden vorausgesetzt, daß die von den störenden Planeten abhängigen Größen bekannt seien.

Aus der Form der Gleichung (184) folgt, daß in ϱ nur diejenigen Glieder der Formen (B) und (D) Schwierigkeiten verursachen, in denen sehr kleine Divisoren auftreten. Die übrigen Glieder können nach der in § 30 gegebenen Formel, ein Glied $\alpha \cos(\nu t + N)$ der Gleichung (113) zu integrieren (α und N langsam veränderlich), erhalten werden. Dabei kann und muß man, ebenso wie öfters auch in den übrigen Gleichungen, die in den Argumenten vorkommenden δt_b, δt_d und δt_g vermittelst Reihenentwickelung wegschaffen.

In den Gleichungen (185) und (186) aber bieten nur Glieder der Formen (A) und (C) Schwierigkeiten. Die übrigen Glieder können nach der ersten Formel (115) integriert werden. Weil S in R (Gleichung (184)) eingeht, ohne die Masse als Faktor zu haben, muß man jedoch auch kleine Glieder in S von der Form (B) oder (D) berücksichtigen. Überhaupt kann man von den Gleichungen (184), (185) (186) sagen, daß sie die verschiedenen Gruppen von Gliedern nur formal trennen, und daß man in Wirklichkeit die Trennung erst durch mühsames Aussuchen bewerkstelligen muß.

38. Integration der elementaren und charakteristischen Glieder. Nach der Gleichung (184) erhält man zur Bestimmung von (ϱ) eine Gleichung der Form

$$(188) \qquad \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (1 + b_1)(\varrho) = b_0 + b_2(\varrho)^2 + b_3(\varrho)^3 + \cdots$$

wo die Koeffizienten b periodische Reihen in v von der Ordnung der Masse sind. *A. Lindstedt*[83]) zeigte, wie diese Gleichung in periodischer Form formell integriert werden kann (vgl. VI 2, 12, Nr. **11** Whittacker). Die Lindstedtschen Reihen sind jedoch im allgemeinen divergent. Um eine konvergente Entwickelung zu erhalten, suchte Gyldén schon in der ersten Annäherung gewisse Glieder höheren und besonders dritten Grades zu berücksichtigen. Unter Anwendung der angenäherten Werte

$$\eta \cos F = (\varrho), \qquad \eta \sin F = -\frac{d(\varrho)}{dv},$$

$$\eta^2 = (\varrho)^2 + \left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2, \qquad \eta^2 \cos 2F = (\varrho)^2 - \left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2, \ldots$$

83) *A. Lindstedt,* Pét. mém. 7. Reihe (31) 4 (1883).

schaffte er aus der diastematischen Form der Entwickelungen die elementar werdenden Glieder weg. Er erhält in dieser Weise die sogenannte verallgemeinerte Fundamentalform, welche in die Differentialgleichung von ϱ eingeführt, zur Bestimmung von (ϱ) eine Gleichung gibt, welche, wenn nur die wichtigsten Glieder explizite ausgeschrieben werden, die Gestalt hat

$$(189)\quad \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + \left(1 + a_0 + a_1\eta'^2 + a_2\left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2 + a_3(\varrho)^2\right)(\varrho) = (R),$$

wo die Koeffizienten a Konstanten erster Ordnung und nullten Grades sind, deren Werte in den Annäherungen nur unbedeutend verändert werden. (R) bezeichnet eine Summe von elementaren Gliedern. Es ist zu zeigen, daß (ϱ) von der antizipierten Form (135) ist, und daß die darin enthaltenen Koeffizienten $\varkappa_i$ so bestimmt werden können, daß die Reihe für (ϱ) konvergiert. Indem die konstanten Teile von η^2 und η'^2 mit $[\eta^2]_0$ und $[\eta'^2]_0$ bezeichnet werden, nimmt die Gleichung (189) unter den aufeinanderfolgenden Annäherungen die Form

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (1 + \beta_0 + \Delta\beta + \beta'[\eta'^2]_0 + \beta_1[\eta^2]_0)(\varrho) = (\bar{R})$$

an, wobei β_0, $\Delta\beta$, β' und β_1 Konstanten sind und $\Delta\beta$ so zu bestimmen ist, daß kein Glied der Form $\eta\cos F$ mal einer Konstante in $(\bar{R})$ auftritt. Man kann $(\bar{R})$ die Form

$$(\bar{R}) = \sum \gamma_i \cos(v - \varsigma_i(v - \Lambda) - \Gamma_i)$$

geben und erhält für (ϱ) die antizipierte Form (135), wenn σ und $\varkappa_i$ durch die Gleichungen

$$(190)\qquad (1-\varsigma)^2 = 1 + \beta_0 + \Delta\beta + \beta'[\eta'^2]_0 + \beta_1[\eta^2]_0,$$

$$(191)\qquad \varkappa_i = \frac{\gamma_i}{2\varsigma_i - \varsigma_i^2 + \beta_0 + \Delta\beta + \beta'[\eta'^2]_0 + [\eta^2]_0}$$

bestimmt werden. Da nach (137)

$$[\eta^2]_0 = \tfrac{1}{2}\sum \varkappa_i^2$$

und analog

$$[\eta'^2]_0 = \tfrac{1}{2}\sum \varkappa_i'^2$$

ist, so werden die $\varkappa_i$ durch Lösung einer algebraischen Gleichung höheren Grades erhalten. Ist nur ein $\varkappa_i$ zu bestimmen, so ist die Gleichung (191) dritten Grades, und *Gyldén*[84]) zeigt, daß $\varkappa_i$ höchstens von der Größenordnung $\sqrt[3]{\gamma_i}$ ist. Das Vorkommen von $\sum\varkappa_i^2$ in dem Nenner würde also die Größe von $|\varkappa_i|$ begrenzen. Gyldén nennt daher $\sum\varkappa_i^2$ eine horistische Funktion. Vermittels der horistischen Funktion

84) *H. Gyldén*, Acta math. 15 (1891), p. 75—79.

glaubte *Gyldén*[85]) nachweisen zu können, daß man bei Anwendung derselben für (ϱ) eine konvergente Reihe erhalten würde. *H. Poincaré*[86]) hat gezeigt, daß dies unrichtig ist, und daß Gyldén Glieder auf der rechten Seite von (189) vernachlässigt, welche ebenso wichtig sind wie die Glieder der Form Konstante mal (ϱ). Berücksichtigt man aber auch jene Glieder, so dürfte indessen der Gyldénsche Vorgang mit Vorteil angewandt werden können, wenn es sich darum handelt, Ausdrücke zu erhalten, welche für sehr lange, wenn auch nicht beliebig lange Zeiten gültig sein sollen.

Die wichtigsten elementaren Glieder von ϱ hat *Max Wolf*[87]) gegeben.

Die Glieder von ϱ von der Form (D) sind aus einer Differentialgleichung zu bestimmen, welche von derselben Form ist wie die Gleichung für die elementaren Glieder, und können auch in derselben Weise erhalten werden. Oft dürfte es sogar am zweckmäßigsten sein, die Glieder der Formen (B) und (D) gleichzeitig zu behandeln. Die in den Argumenten der Glieder von der Form (D) eingehende Zeitreduktion, berücksichtigt man durch teilweise Integration der langperiodischen Glieder und Reihenentwickelung der übrigen.

Die Glieder der Formen (A) und (C) in den Gleichungen (185) und (186) werden kritisch, wenn die linearen Integrationsdivisoren sehr klein sind, und eine lineare Integration kann dann ganz illusorische Resultate liefern. Eine bessere Integrationsmethode suchte Gyldén zu erhalten, indem er von vornherein das Eingehen der zu bestimmenden Größen in die Argumente berücksichtigte. Wie aus der Gleichung (183) hervorgeht, entsteht der wichtigste Teil von T in der Gleichung für δt_a und δt_c aus S_a resp. S_c, und die wichtigsten Teile von δt_a und δt_c sind daher aus einer Gleichung der Form

$$(192) \qquad \frac{d^2 \delta t}{d v^2} = \sum A \sin (2\lambda v + s\delta t + 2C)$$

zu bestimmen, wo 2λ eine kleine Konstante, $A \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} C$ aber Konstanten oder Summen von elementaren langperiodischen Gliedern von der ersten Ordnung sind. Hieraus ist ersichtlich, daß δt_a und δt_c bei linearer Integration den kleinen Integrationsdivisor 2λ im Quadrat erhalten und daher sehr vergrößert werden.

Bei den Gliedern der Form (A), wo die Integrationsdivisoren von der ersten Ordnung sind, würde man das Entstehen von Gliedern der

85) *H. Gyldén,* Acta math. 15 (1891) u. 17 (1893).

86) *H. Poincaré,* Acta math. 29 (1905), p. 235—271.

87) *Max Wolf,* Stockholm Obs. Iakttagelser etc. (4) 4 (1891).

Ordnung — 1 oder sogenannten hyperelementaren Gliedern erwarten können. *Gyldén*[88]) hat indessen schon früh gezeigt, daß die Koeffizienten erster Ordnung der elementaren Glieder in (192) sich gegenseitig heben, und daß also hyperelementare Glieder in δt_a sich nicht finden, was nichts anders ist als das Poissonsche Theorem auf die Gyldénsche Theorie übertragen.

Die vielen Versuche Gyldéns[85]), die Gleichung (192) zu integrieren, haben nicht zu definitiven Resultaten geführt. Gewöhnlich zerlegt er δt in mehrere Teile $\delta_1 t$, $\delta_2 t, \ldots$, welche nacheinander bestimmt werden können. Indem nur ein, aber das wichtigte, Glied der rechten Seite von (192) berücksichtigt wird, bestimmt er $\delta_1 t = \frac{2\Theta}{s}$ aus der bekannten Gleichung eines schwingenden Pendels

$$\frac{d^2\Theta}{dv^2} = B \sin 2(\lambda v + \Theta + C),$$

welche, da B und C nach seiner Bestimmung Konstanten sind, vermittelst elliptischer Funktionen integriert werden kann. Der Unterschied $\delta t - \delta_1 t$ wird durch eine Hilfsgröße V vermittelt, die durch eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - [n(n+1)k^2 sn^2 x + h] = X$$

zu bestimmen ist, wo k, h und die in $x = \gamma v + \varphi$ eingehenden zweckmäßig zu bestimmenden Größen γ und φ Konstanten sind und X teils bekannte, teils durch Annäherungen zu erhaltende auch von V abhängige langperiodische Glieder enthält. Die Integration dieser Gleichung sucht Gyldén unter Anwendung der von *Ch. Hermite*[89]) gegebenen Lösung der Laméschen Differentialgleichung zu bewerkstelligen.

Eine andere von Gyldén stammende Methode, die Gleichung (192) zu integrieren, ist von *P. Harzer*[79]) ausgearbeitet worden. Indem wieder nur das bedeutendste periodische Glied explizite ausgeschrieben wird, kann man nämlich der genannten Gleichung die Form

$$\frac{d^2\Theta}{dv^2} + \beta \sin 2(\Theta + \vartheta) = X$$

geben. In erster Annäherung nimmt er β und ϑ als Konstanten und $X = 0$ an und erhält dann für Θ eine zwei Integrationskonstanten enthaltende, durch einfache elliptische Funktionen ausdrückbare Lösung. Die Funktion X und die Variabilität von β und ϑ werden in den

88) *H. Gyldén*, Stockholm K. Vet. Akad. Handl. (7) 2 (1882), p. 137—144; Orbites absolues 1, p. 536—541.

89) *Ch. Hermite*, Paris C. R. 85 (1877), 2[te] sem. Mehrere Aufsätze.

folgenden Annäherungen durch Variation der Integrationskonstanten berücksichtigt.

Die Einführung der elliptischen Funktionen in die Lösung kompliziert indessen die weiteren Annäherungen ungeheuer, es wird unmöglich zu überblicken, was in den Differentialgleichungen berücksichtigt ist und was nicht. Natürlich muß zugegeben werden, daß in einigen Fällen durch ihre Einführung schwach konvergierende Reihen kürzer geschrieben und berechnet werden können. Viele bei Störungsproblemen vorkommende Entwickelungen der elliptischen Funktionen hat *Gyldén* an den in Fußnote[90]) verzeichneten Stellen gegeben.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß *Gyldén*[91]) auch die Zeitreduktion auf die Ermittelung einer Größe V zurückzuführen versucht hat, die ihrerseits aus einer Gleichung der Form

$$\frac{d^2 V}{dv^2} - \nu^2 V = X$$

zu bestimmen wäre. Das Vorkommen der horistischen Funktion ν^2 würde das Entstehen beliebig kleiner Divisoren verhindern. Gemäß den Untersuchungen von *H. Poincaré*[86]) ist auch dieser Integrationsversuch unwirksam.

39. Spezielle Ausarbeitungen und Anwendungen der Gyldénschen Methode. Methode von Brendel. *Gyldén* selbst hat keine vollständigen Anwendungen seiner Theorie gegeben. Dagegen sind verschiedene Teile seiner Methode und die bei den verschiedenen Planetentypen am besten geeigneten Formeln von anderen Astronomen weiterentwickelt und ausgearbeitet worden.

P. Harzer[79]) behandelte den Hecubatypus und untersuchte dabei besonders die charakteristischen Glieder.

Die Planeten des $\frac{1}{3}$-Typus untersuchte *M. Brendel*[92]). Die Gyldénschen Differentialgleichungen integrierte er dabei in der Weise, daß die Koeffizienten der angesetzten Reihen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt wurden. In ähnlicher Weise behandelte *K. G. Olsson*[93]) einen kleinen Planeten desselben Typus, wobei er noch verschiedene Koeffizienten nach Potenzen der Größe $n - 3n'$ entwickelte.

---

90) *H. Gyldén,* St. Pét. mém. 7. Reihe (16) 10 (1871); Stockholm K. Vet. Handl. (11) 9 (1874).

91) *H. Gyldén,* Acta math. 17 (1893); Astr. Ges. Publ. 21, Leipzig 1896, p. XLIV—L.

92) *M. Brendel,* Stockholm Obs. Iakttagelser etc. (4) 3 (1891).

93) *K. G. Olsson,* Stockholm K. Vet. Akad. Handl. (25) 8 (1893).

In seiner später erschienenen Theorie der kleinen Planeten teilt *M. Brendel*[94]) die Planeten nach ihren Kommensurabilitätsverhältnissen in bezug auf Jupiter in drei Klassen:

1. *gewöhnliche*, deren mittlere Bewegung nicht nahe kommensurabel mit derjenigen Jupiters ist;

2. *charakteristische*, deren mittlere Bewegung nahe, aber nicht sehr nahe kommensurabel mit derjenigen Jupiters ist;

3. *kritische*, deren mittlere Bewegung *sehr* nahe kommensurabel mit derjenigen Jupiters ist, so daß strenge Kommensurabilität (Libration) befürchtet werden kann.

Die charakteristischen und kritischen Planeten sind von der ν-ten Klasse, wenn das Verhältnis der mittleren Bewegungen $\frac{n'}{n}$ nahe gleich $\frac{p-\nu}{p}$ ist (p und ν ganze teilerfremde Zahlen).

Bei der Integration wendet *Brendel*[95]) hier öfters die partielle Integration an, indem erst $T, \eta, J, \omega, \ldots$ als Konstanten betrachtet werden. Die aus der Veränderlichkeit des in den Argumenten enthaltenen T in den Lösungen entstehenden Glieder werden „exargumentale", die aus der Veränderlichkeit der elementaren Größen $\eta, J, \omega, \ldots$ entstehenden Glieder werden „Zusatzglieder" genannt. Brendel behandelt speziell die gewöhnlichen und die Planeten der Typen $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ und gibt explizite die Hauptglieder der Störungen, sowohl in analytischer Form als auch numerisch tabuliert, wobei indessen für die kritischen Planeten die Behandlung noch nicht ganz durchgeführt ist.

Um die Berechnung einer Ephemeride zu vereinfachen, führt er auch in die erhaltenen Störungsformeln die Zeit als unabhängige Veränderliche ein. Weiter leitet er aus den Störungen der Gyldénschen Koordinaten auch die Störungen in den Elementen ab. Bisweilen findet er es vorteilhaft, statt oskulierender Elemente sogenannte instantane Elemente[18]) anzuwenden, welche so gewählt werden, daß sie zu jeder Zeit die Koordinaten des Planeten, nicht aber auch gleichzeitig deren Ableitungen darstellen.

Nach der Brendelschen Methode haben *H. Ludendorff*[96]) und *J. Kramer*[97]) die Theorien der kleinen Planeten des Typus $\frac{1}{2}$ und *H. Buchholz*[98]) diejenigen des Typus $\frac{2}{3}$ ziemlich ausführlich entwickelt. *Kramer* entwickelt dabei die elementaren Glieder in säkularer Form.

94) *M. Brendel,* Göttingen Ges. Wiss. Abhdl. Neue Folge (1) 2 (1898), (6) 4 (1909), (6) 5 (1910), (8) 1 (1911).

95) *M. Brendel,* Math. Ann. 55 (1901), p. 248—256.

96) *H. Ludendorff,* Die Jupiterstörungen der kl. Pl. vom Hecuba-Typus, Berlin 1897.

V. Verschiedene Methoden.

40. Methode von Backlund. Um die bei Anwendung der wahren Anomalie als unabhängiger Veränderlichen erforderliche komplizierte Entwickelung der Störungsfunktion zu vermeiden und die Störungen durch eine wenig von der Zeit verschiedene Veränderliche auszudrücken, hat *O. Backlund*[99]) auf Grund der Laplaceschen Theorie der Jupitersatelliten[100]) eine neue Methode entwickelt, in welcher übrigens die Gyldénschen Hauptprinzipien bezüglich der Form der Störungsausdrücke zur Anwendung gekommen sind.

Backlund setzt die wie bei Gyldén definierte Länge in der Bahn an:

$$w = nt + \psi + y + \varDelta,$$

wo $\varDelta$ eine Konstante, ψ eine langperiodische Funktion und y eine kleine Größe ist, nach deren Potenzen die Störungsfunktion entwickelt werden kann. Als unabhängige Veränderliche wählt er

$$\tau = nt + \psi$$

und indem er als zu bestimmende Größen w, den Sinus der Breite $\mathfrak{z}$ und die durch die Gleichung

$$r^2 = a^2(1 + \Theta + \varrho), \qquad n^2 a^3 = k^2(1 + m)$$

(Θ eine überzählige Konstante von der Ordnung der Masse, welche so zu bestimmen ist, daß ϱ nur periodische Glieder enthält) definierte Größe ϱ nimmt, folgen aus den Gleichungen (101), (103) und (128) zu ihrer Bestimmung Gleichungen der Form

$$\frac{d^2\varrho}{d\tau^2} + \varrho = R_0 + R_1,$$

$$\frac{dw}{d\tau} = 1 + W_0 + W_1,$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\tau^2} + \mathfrak{z} = Z_0 + Z_1,$$

wo $R_0, W_0, Z_0, R_1, W_1, Z_1$ nach Potenzen von Θ, ϱ, y, $\frac{d\varrho}{d\tau}$, $\frac{d\psi}{d\tau}$, $\mathfrak{z}$ und den entsprechenden Größen des störenden Planeten entwickelt sind. R_1, W_1, Z_1 haben die störende Masse als Faktor, R_0, W_0, Z_0 hingegen

97) *J. Kramer,* Die genäherte absolute Bewegung des Planet. (108) Hecuba. Inaug.-Diss. Berlin, Göttingen 1902, Göttingen Ges. Wiss. Neue Folge (2) 2 (1901) und (5) 3 (1907).

98) *H. Buchholz,* Wien. Denkschr. 72 (1902) und 77 (1905).

99) *O. Backlund,* St. Pét., mém. 7. Reihe (38) 11 (1892) und 8. Reihe (6) 10 (1898).

100) *P. S. Laplace,* Traité de méc. cél. 4 (1805), p. 5—82 = Oeuvres 4, p. 1—94; Paris hist. (2) mém. (1788/9) = Oeuvres 11 p. 309—473.

nicht. Die Integration, welche Backlund mit einigen Vereinfachungen nach Gyldéns Muster bewerkstelligt, wird durch das Vorkommen der Größen R_0, W_0, Z_0 ein wenig kompliziert, indem die Annäherungen teilweise nur nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen fortschreiten.

Die Methode ist von Backlund für die kleinen Planeten des $\frac{1}{2}$-Typus spezieller entwickelt und bezweckt zunächst nur eine angenäherte Lösung. Hilfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten hat *A. Iwanow*[101]) gegeben.

41. Die Jupitergruppe. Eine allgemeine Theorie dieser erst nach 1906 entdeckten Planetengruppe ist noch nicht gegeben. Da ihre mittleren Abstände von der Sonne nahe gleich demjenigen Jupiters sind, kann die gewöhnliche Entwicklung der Störungsfunktion nicht angewandt werden. Da aber diese Planeten seit ihrer Entdeckung in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckspunkte verblieben, konnte man die Untersuchungen über die Bewegungen kleiner Massen in der Nähe dieser Punkte anwenden (siehe VI2, 12, Nr. 6, *Whittaker*). Die Störungsfunktion entwickelt man nach den Potenzen des Abstands der Planeten vom Dreieckspunkt. *F. J. Linders*[102]) bestimmte in erster Annäherung die Variationen der Delaunayschen kanonischen Elemente, wobei die Jupiterbahn kreisförmig vorausgesetzt wird. *W. W. Heinrich*[103]) berücksichtigt noch die Jupiterexzentrizität.

42. Angenäherte Störungen. Um die kleinen Planeten wieder zu erkennen oder ihre Örter für die Beobachtungen bis auf einige Bogenminuten genau zu berechnen, braucht man nur angenäherte Lösungen. Eine solche wird z. B. erhalten, wenn man in einer genauen Theorie mit genau bestimmten Konstanten nur die größten Glieder beibehält. In dieser Weise würde man eine für lange Zeiten geltende genäherte Lösung erhalten. Gewöhnlich entwickelt man indessen nur die Hauptglieder der Lösung und fordert nur eine ziemlich kurze Darstellungszeit (höchstens etwa 100 Jahre). Um die Konstanten aus den beobachteten Örtern einigermaßen genau zu erhalten muß man den Einfluß der Vernachlässigungen in der Lösung durch Vermehrung und gleichmäßige Ausdehnung der Beobachtungen über möglichst lange Zeiten abzuschwächen suchen, was indessen nicht immer gelingt, da die Fehler oft systematisch wirken.

---

101) *A. Iwanow,* St. Pét. bull. (10) 1 (1899); (13) 3 (1900).

102) *F. J. Linders,* Stockholm K. Vet. Akad. Arkiv (4) 20 (1908) = Meddelanden från Lunds astr. Obs. 35.

103) *W. W. Heinrich,* Prag. Ges. Wiss. Ber. (Febr. 1913).

Die in Nr. **39** und **40** genannten Methoden sind auch speziell für solche angenäherte Lösungen ausgearbeitet worden. Denselben Zweck hat auch die von *K. Bohlin*[104]) ausgebildete Methode der gruppenweisen Berechnung der Störungen. Er wendet die Hansensche Methode bis auf die Entwicklung der Störungsfunktion (vgl. VI 2, 13, Nr. **26**, *v. Zeipel*) und die Integration an und gibt speziell die für den Typus $\frac{1}{3}$ nötigen Formeln und numerischen Tafeln. In der Entwicklung der Störungsfunktion und derjenigen ihrer Ableitungen führt er anstatt der mittleren Anomalie des störenden Körpers, welche wie bei *Hansen* in der Form

$$M' = n't + c' + n'\delta\zeta'$$

geschrieben sei, die verhältnismäßig langsam veränderliche Größe

$$\theta = \mu_0(E - e\sin E) - M'$$

ein, wobei μ_0 eine einfache Zahl, wie $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist, die nahe dem Verhältnis $\mu = \frac{n'}{n}$ der beiden mittleren Bewegungen liegt, so daß

$$w = 1 - \frac{\mu}{\mu_0}$$

für die betreffende Planetengruppe eine kleine Größe ist. Diese Entwicklungen sind von der Form

$$\sum K \frac{\sin}{\cos}\left\{iE - i'\mu_0 E + i'\theta + L\right\},$$

wo L und K Konstanten bezeichnen, von denen die letzteren nach Potenzen von w entwickelt sind. Indem als unabhängige Veränderliche die gestörte exzentrische Anomalie E anstatt der in Nr. **28** eingeführten ungestörten Anomalie ε angewandt wird, werden die Differentialgleichungen die den Formeln (96) ganz analogen Formen

$$\frac{dW}{dE} = T, \quad \frac{dR}{dE} = U$$

annehmen. T und U sind in *Fourier*sche Reihen von der Form

$$\sum K \frac{\sin}{\cos}\left\{iE - i'\mu_0 E + i'\theta + \lambda\eta_0 + L\right\}_E$$

entwickelt, wo η_0 die in den Gleichungen (81) vorkommende Größe ist und λ nur die Werte -1, 0 und $+1$ annimmt. Die Größe W wird daher in der Form

$$W = x + y\cos\eta_0 + z\sin\eta_0$$

erhalten, wo x, y, z von η_0 unabhängig sind.

Nach (81) und (82) findet man dann, daß

$$\Xi = x + ey$$

---

104) *K. Bohlin*, Nova Acta Reg. soc. sc. Upsaliensis (3) 17 (1896); Stockholm Obs. Jakttagelser etc. 7 (1902).

ist, und da

$$\overline{W} = \Big|_{\eta_0 = E} W = x + y \cos E + z \sin E$$

ist, kann ν nach der Gleichung (79) unmittelbar berechnet werden. u folgt am einfachsten aus der Größe R nach der der Gleichung (88) analogen Formel

$$\bar{u} = \overline{R} = \Big|_{\eta_0 = E} R.$$

Die Störung der mittleren Anomalie $n\delta\zeta$ folgert *Bohlin* aus der Gleichung

$$\theta = \mu_0(w n\zeta + (1 - w)n\delta\zeta) - n'\delta\zeta' + \mu c - c',$$

nachdem θ selbst aus der durch Anwendung der Gleichungen (68) und (76b) abgeleiteten Gleichung

$$\frac{d\theta}{dE} = \mu_0\left\{w + (1 - w)\frac{\overline{W} + \nu^2}{1 + \overline{W}}\right\}(1 - e\cos E) - \frac{dn'\delta\zeta'}{dE} = H$$

bestimmt ist.

Bohlin spaltet nun θ in zwei Teile

$$\theta = \theta_0 + \theta_1$$

und entwickelt alle θ enthaltenden Glieder nach Potenzen von θ_1. Bei den Annäherungen wird H ebenso nach und nach in zwei Teile

$$H = H_\theta + H_E$$

zerlegt, wobei in H_θ alle Glieder von H aufgenommen werden, die θ_0 aber nicht E enthalten. θ_0 und θ_1 bestimmen sich dann aus den Gleichungen

$$\frac{d\theta_0}{dE} = H_\theta, \quad \frac{d\theta_1}{dE} = H_E.$$

Charakteristisch für die Methode von *Bohlin* ist, daß W und R als Funktionen der beiden Veränderlichen θ_0 und E vermittels der partiellen Differentialgleichungen

$$(193)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial E} + H_\theta \frac{\partial W}{\partial \theta_0} &= T = T_0 + T_1 w + T_2 w^2 + \cdots, \\ \frac{\partial R}{\partial E} + H_\theta \frac{\partial W}{\partial \theta_0} &= U = U_0 + U_1 w + U_2 w^2 + \cdots \end{aligned}$$

bestimmt werden, ohne daß man θ_0 als Funktion von E zu kennen braucht. Um die Integration auszuführen, spaltet er W und R in derselben Weise wie H in zwei Teile

$$W = W_\theta + W_E, \quad R = R_\theta + R_E$$

und setzt die Glieder der beiden Seiten der Gleichungen (193), welche nur θ_0 enthalten, für sich gleich und ebenso die übrigen Glieder für sich. Wird weiter in den solcherweise erhaltenen Gleichungen für jede Größe eine vorausgesetzte Entwicklung nach Potenzen von w, z. B.

$$W_\theta = W_{\theta,0} + W_{\theta,1} w + W_{\theta,2} w^2 + \cdots,$$

eingeführt und die Glieder gleichgesetzt, welche dieselbe Potenz von w enthalten, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus welchen die einzelnen Teile von W und R und damit diese Größen selbst leicht zu erhalten sind.

Da μ_0 eine rationale Zahl ist, so werden die Integrationsdivisoren der periodischen Glieder $i - i'\mu_0$ nicht unendlich klein, wohl aber Null, woraus folgt, daß E in den Störungsausdrücken außerhalb der Zeichen sinus und cosinus vorkommt. *H. Poincaré*[105]), der beinahe gleichzeitig mit *Bohlin* dieselbe Integrationsmethode fand, zeigt, daß die erhaltenen Reihen nicht konvergieren. Wie die von *Bohlin*[104]) und anderen gemachten Vergleichungen mit anderweitig abgeleiteten Störungsausdrücken zeigen, liefert die *Bohlin*sche Methode indessen recht gute Darstellungen der Störungen, wenigstens wenn man die ersten Potenzen von w berücksichtigt.

Die speziellen Formeln und Tafeln für den $\frac{1}{2}$-Typus sind von *H. v. Zeipel*[106]), für den $\frac{2}{5}$-Typus von *D. T. Wilson*[107]) gegeben. *v. Zeipel* macht dabei einige Abänderungen. Er spaltet θ nicht, sondern behält es als Argument bei. Indem W und R in der Weise gespalten werden, daß $\frac{\partial W_E}{\partial E}$ und $\frac{\partial R_E}{\partial E}$ keine von E unabhängigen Glieder enthalten, erzielt er, daß E aus den Argumenten nicht heraustritt. Er vermeidet eine konsequente Entwicklung nach Potenzen der Masse m', setzt vielmehr xw für w, $x^2 m'$ für m' und entwickelt die verschiedenen Größen durchgehend nach Potenzen der (zum Schluß wieder gleich 1 zu setzenden) Größe x. Ein Glied, welches x^q als Faktor hat, betrachtet er als vom Range q.

Um die von den langsam veränderlichen Gliedern herrührenden Schwierigkeiten zu vermindern, sollte man bei der Ausarbeitung der Methoden auf die Länge der Zeit, innerhalb deren die Lösung gelten soll, mehr Rücksicht nehmen, als bisher geschehen ist. Die auf die Beherrschung langer Zeiten abzielenden Methoden sind sicherlich nicht die besten für kurze Zeiten.

105) *H. Poincaré,* Les méth. nouv. de la méc. cél. II, p. 315—476, Paris 1893.
106) *H. v. Zeipel,* St. Pét., mém. 8 Série (12) 11 (1902).
107) *D. T. Wilson,* Stockholm Obs. Jakttagelser etc. (10) 1 (1912).

(Abgeschlossen im Februar 1915.)

jede Größe eine vorausgesetzte Entwicklung nach Potenzen von x, z. B.

$$W_1 = W_{1,0} + W_{1,1}x + W_{1,2}x^2 + \cdots$$

eingeführt und die Glieder gleichgesetzt, welche dieselbe Potenz von x enthalten, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus welchen die einzelnen Teile von W und R und damit diese Größen selbst leicht zu erhalten sind.

Da μ eine rationale Zahl ist, so werden die Integrationsdivisoren der periodischen Glieder $i - i'\mu$ nicht unendlich klein, wohl aber Null, woraus folgt, daß E in den Störungsausdrücken außerhalb der Zeichen sinus und cosinus vorkommt. *H. Poincaré*[190], der beinahe gleichzeitig mit *Bohlin* dieselbe Integrationsmethode fand, zeigt, daß die erhaltenen Reihen nicht konvergieren. Wie die von *Bohlin*[illegible] und anderen gemachten Vergleichungen mit anderweitig abgeleiteten Störungsausdrücken zeigen, liefert die *Bohlin*sche Methode indessen recht gute Darstellungen der Störungen, wenigstens wenn man die ersten Potenzen von x berücksichtigt.

Die speziellen Formeln und Tafeln für den $\frac{1}{2}$-Typus sind von *H. v. Zeipel*[191], für den $\frac{1}{3}$-Typus von *E. T. Wilson*[192] gegeben. *v. Zeipel* macht dabei einige Abänderungen. Er eliminiert ϑ nicht, sondern behält es als Argument bei. Indem W und R in der Weise gespalten werden, daß $\frac{\partial W_1}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial R_1}{\partial \vartheta}$ keine von E unabhängigen Glieder enthalten, erzielt er, daß E aus den Argumenten nicht heraustritt. Er vermeidet eine konsequente Entwicklung nach Potenzen der Masse m', setzt vielmehr wie für w, x^2 für m' und entwickelt die verschiedenen Größen durchgehend nach Potenzen der (zum Schluß wieder gleich 1 zu setzenden) Größe x. Jedes Glied, welches x^q als Faktor hat, betrachtet er als vom Range q.

Um die von den langsam veränderlichen Gliedern herrührenden Schwierigkeiten zu vermindern, sollte man bei der Ausarbeitung der Methoden auf die Länge der Zeit, innerhalb deren die Lösung gelten soll, mehr Rücksicht nehmen, als bisher geschehen ist. Die auf die Beherrschung langer Zeiten abzielenden Methoden sind sicherlich nicht die besten für kurze Zeiten.

190) *H. Poincaré*, Les méth. nouv. de la méc. cél. II, p. 316—471, Paris 1893.
191) *H. v. Zeipel*, St. Pét. mém. 8 Série (8) 12 (1902).
192) *E. T. Wilson*, Stockholms Obs. Iakttagelser och (10) 1 (1912).

(Abgeschlossen im Februar 1913.)

Erschienene Bände bzw. Hefte:

Band I. **Arithmetik und Algebra**, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. **Analysis**, in 3 Teilen. Teil I, in 8 Heften, davon 7 erschienen. Teil II, in 6—7 Heften, davon 4 erschienen. Teil III, in 7—8 Heften, davon 1 erschienen.
- III. **Geometrie**, in 3 Teilen. Teil I, in 7 Heften, davon 5 erschienen. Teil II, in 8—9 Heften, davon 5 erschienen. Teil III, in 6—7 Heften, davon 4 erschienen.
- IV. **Mechanik**, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig. II. Teilband in 4—5 Heften, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft.
- V. **Physik**, in 3 Teilen. Teil I, in 6 Heften, davon 5 erschienen. Teil II, in 5 Heften, davon 3 erschienen. Teil III, in 6—7 Heften, davon 2 erschienen.
- VI, 1. **Geodäsie und Geophysik**, in 1 Teilband. I. Hälfte, in 3 Heften, davon 3 erschienen. II. Hälfte in 6 Heften, davon 3 erschienen.
- VI, 2. **Astronomie**, in 1 Teilband, in 10—11 Heften, davon 6 erschienen.
- VII. **Geschichte, Philosophie, Didaktik**, in Vorbereitung.

Unter der Presse:

Band II. Teil 1. Trigonometrische Reihen und Integrale bis 1850. (Schluß.) Von **H. Burkhardt** (†).
- II. - 3. Graphische und numerische Quadratur und graphische und numerische Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Von **C. Runge** in Göttingen und **Fr. A. Willers** in Charlottenburg. — Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlicher. Redigiert unter Leitung von **E. Borel** in Paris, bearbeitet von **A. Rosenthal** in München.
- III. - 1. Elementar-Geometrie und elementare nichteuklidische Geometrie. (Schluß.) Von **M. Zacharias** in Berlin. — Dreiecksgeometrie. Von **G. Berkhan** (†).
- III. - 2. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. Von **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Bologna. — Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus. Von **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Bologna.
- V. - 3. Wellenoptik. Von **M. v. Laue** in Frankfurt a. M. Anhang: Spezielle Beugungsprobleme. Von **Paul S. Epstein** in München.
- VI. - 1 B. Erdmagnetismus. Von **Ad. Schmidt** in Potsdam.

Band VI, 2. Teil: Astronomie. Red. von K. Schwarzschild in Potsdam.

* erschienen

Vorwort zu Band VI, Teil 2 von **K. Schwarzschild** in Potsdam.
Inhaltsverzeichnis von Band VI, Teil 2.

A. Sphärische Astronomie.

I. Theorie der Koordinaten.

*1. Über Koordinaten und Zeit: **E. Anding** in Gotha.
*2. Reduktion der astronomischen Beobachtungen (sphärische Astronomie im engeren Sinne): **F. Cohn** in Berlin.
*3. Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie: **C. W. Wirtz** in Straßburg i. E.

II. Theorie der Instrumente.

*4. Theorie der Uhren: **C. Ed. Caspari** in Paris.
*5. Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler: **F. Cohn** in Berlin.

III. Spezielle Ausführungen u. Anwendungen.

*6. Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion): **A. Bemporad** in Catania.
*7. Theorie der Finsternisse: **F. K. Ginzel** in Berlin u. **A. Wilkens** in Kiel.
*8. Chronologie: **F. K. Ginzel** in Berlin.

B. Mechanik des Himmels.

I. Bahnbestimmung.

*9. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen: **G. Herglotz** in Leipzig.
*10. Die Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem: **G. v. Niessl** in Wien.
*11. Doppelsterne und Trabanten. Visuelle und spektrographische Doppelsterne: **J. v. Hepperger** in Wien.

II. Störungen der Umlaufsbewegungen.

IIa. Analytische Entwickelung d. Störungen.

*12. Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen: **E. T. Whittaker** in Edinburgh.
*13. Entwickelung der Störungsfunktion: **H. v. Zeipel** in Upsala.
*14. Erdmond: **E. W. Brown** in New-Haven.
*15. Theorie der Planeten: **K. Sundman** in Helsingfors.
16. Kometen: **E. Strömgren** in Kopenhagen.
17. Die übrigen Satelliten: **K. Laves** in Chicago.
18. Die Bestimmung astronomischer Konstanten: **J. Bauschinger** in Straßburg i. E.

IIb. Numerische Berechnung aller Störungen.

19. Spezielle Störungen der Planeten und Kometen. Numerische Behandlung besonderer Fälle der Dreikörperproblems. Mehrfache Fixsternsysteme: **E. Strömgren** in Kopenhagen.

III. Gestalt und Rotation der Himmelskörper.

20. Figur der Planeten, des Mondes, des Saturnringes, der Kometen: **S. Oppenheim** in Prag.
21. Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation für starre Erde. Libration des Mondes: **K. Schwarzschild** in Potsdam.

IV. Allgemeine Fragen.

22. Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes: **S. Oppenheim** in Prag.

C. Stellarastronomie.

23. Stellarastronomie: **H. Kobold** in Kiel.

D. Astrophysik.

24. Photometrie und ihre Anwendungen: **E. Anding** in Gotha.
25. Thermodynamik der Himmelskörper (Sonnentheorie, neue Sterne): **R. Emden** in München.
26. Kosmogonie. (Kant, Laplace, G. Darwin). Widerstehendes Mittel. Spekulative Ausblicke: **F. R. Moulton** in Chicago.

Bisher erschien:

Heft 1 (1—4).	[193 S.]	1905.	n. ℳ 5.80.
— 2 (5—6).	[140 S.]	1908.	n. ℳ 4.—
— 3 (7—10).	[128 S.]	1910.	n. ℳ 3.60.
Heft 4 (11—12).	[94 S.]	1912.	n. ℳ 3.—
— 5 (13).	[109 S.]	1913.	n. ℳ 3.40