Band VI 2. **Heft 4.**

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . . RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . . . . . H. BURKHARDT IN MÜNCHEN UND W. WIRTINGER IN WIEN.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN . . . . A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . PH. FURTWÄNGLER IN BONN UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . K. SCHWARZSCHILD IN POTSDAM.
— VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK (IN VORBEREITUNG).

BAND VI 2. HEFT 4.

AUSGEGEBEN AM 4. JUNI 1912.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1912.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **O. Hölder**-Leipzig, **F. Klein**-Göttingen, **V. v. Lang**-Wien, **W. Wirtinger**-Wien, **H. v. Seeliger**-München, **H. Weber**-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-München, **Ph. Furtwängler**-Bonn, **F. Klein**-Göttingen, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **C. H. Müller**-Hannover **K. Schwarzschild**-Potsdam, **A. Sommerfeld**-München, **E. Wiechert**-Göttingen und **W. Wirtinger**-Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens-Berlin
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Straßburg
G. Bohlmann-Berlin [i. E.
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt-München
E. Czuber-Wien
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg-Kiel
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Netto-Gießen
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
C. Runge-Göttingen [a. M.
A. Schoenflies-Frankfurt
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff-St. Petersburg
E. Study-Bonn
K. Th. Vahlen-Greifswald
H. Weber-Straßburg i. E.
A. Wiman-Upsala

II. Band:

M. Bôcher-Cambridge, Mass.
E. Borel-Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt-München
G. Faber-Königsberg
R. Fricke-Braunschweig
H. Hahn-Czernowitz
J. Harkness-Montreal
K. Hensel-Marburg
G. Herglotz-Leipzig
A. Kneser-Breslau
A. Krazer-Karlsruhe
L. Maurer-Tübingen
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
W. F. Osgood-Cambridge, Mass.
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
C. Runge-Göttingen
A. Sommerfeld-München
E. Vessiot-Lyon
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-Würzburg
Fr. A. Willers-Charlottenburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Zürich

III. Band:

L. Berzolari-Pavia
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Kiel
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Bologna
G. Fano-Turin [rand
C. Guichard-Clermont-Fer-
P. Heegaard-Kopenhagen
K. Heun-Karlsruhe
G. Kohn-Wien
H. Liebmann-München
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
H. v. Mangoldt-Danzig
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Müller-Wien
J. Neuberg-Lüttich
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn-Leipzig
H. Rothe-Wien
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies-Frankfurt
C. Segre-Turin [a. M.
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel-Karlsruhe
O. Staude-Rostock
E. Steinitz-Breslau
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Voss-München
M. Zacharias-Berlin
H. G. Zeuthen-Kopenhagen
K. Zindler-Innsbruck.

IV. Band:

M. Abraham-Mailand
C. Cranz-Berlin
P. u. T. Ehrenfest-Petersburg
S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
Ph. Forchheimer-Graz
Ph. Furtwängler-Bonn
M. Grübler-Dresden
M. Grüning-Düsseldorf
E. Hellinger-Marburg a. L.
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun-Karlsruhe
G. Jung-Mailand
Th. v. Kármán-Göttingen
F. Klein-Göttingen
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Straßburg i. E.
C. H. Müller-Hannover
L. Prandtl-Göttingen
H. Reißner-Aachen
A. Schoenflies-Frankfurt
P. Stäckel-Karlsruhe [a. M.
O. Tedone-Genua
H. E. Timerding-Braunschwg.
A. Timpe-Münster i. W.
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
K. Wieghardt-Wien
G. Zemplén-Budapest.

V. Band:

M. Abraham-Mailand
L. Boltzmann (†)
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-Zürich
H. Diesselhorst-Braun-
H. Dubois-Berlin [schweig
Fr. Emde-Clausthal
S. Finsterwalder-München
R. Gans-Straßburg [burg
F. W. Hinrichsen-Charlotten-
E. W. Hobson-Cambridge
J. H. van 'tHoff-Berlin
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
M. Laue-München
Th. Liebisch-Berlin
H. A. Lorentz-Leiden
L. Mamlock-Berlin
G. Mie-Greifswald
H. Minkowski (†)
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
F. Pockels-Heidelberg
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff-Stuttgart
C. Runge-Göttingen [a. M.
A. Schoenflies-Frankfurt
M. Schröter-München
A. Sommerfeld-München
E. Study-Bonn
A. Wangerin-Halle
W. Wien-Würzburg
J. Zenneck-Ludwigshafen

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
G. H. Darwin-Cambridge
F. Exner-Innsbruck
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Bonn
F. R. Helmert-Potsdam
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
P Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
W. Trabert-Wien
E. Wiechert-Göttingen.

VI, 2. Band

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger-Straßbg. i. E
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-Haverford
C. Ed. Caspari-Paris
F. Cohn-Berlin
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Leipzig
H. Kobold-Kiel
K. Laves-Chicago
F. R. Moulton-Chicago
G. v. Niessl-Wien
S. Oppenheim-Prag
L. Schulhof-Paris
K. Schwarzschild-Potsdam
E. Strömgren-Kopenhagen
K. Sundman-Helsingfors
E. T. Whittaker-Dublin
A. Wilkens-Kiel
C. W. Wirtz-Straßburg i. E.
H. v. Zeipel-Upsala.

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Professor Dr. A. Gutzmer in Halle a/S.), Wettinerstraße 17 zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

VI 2, 11. BAHNBESTIMMUNG DER DOPPELSTERNE UND SATELLITEN.

Von

J. v. HEPPERGER.

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

I. Bahnbestimmung visueller Doppelsterne.

F. Savary, Sur la Détermination des orbites, que décrivent autour de leur centre de gravité deux étoiles très rapprochées l'une de l'autre. Conn. des Temps pour 1830.

J. F. Encke, Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne, Berl. astr. Jahrb. für 1832.

J. Herschel, On the Investigation of the Orbits of revolving Double Stars, Lond. Astr. Soc. Mem. V, 1833.

— On the Determination of the most probable Orbit of a Binary Star, Lond. Astr. Soc. Mem. XVIII, 1850.

A. J. F. Yvon-Villarceau, Mémoires et Notes sur les étoiles doubles, Conn. des Temps pour 1852.

— Méthode pour calculer les orbites des étoiles doubles, déduite de considerations géométriques, Conn. des Temps pour 1877.

W. Klinkerfues, Über eine neue Methode die Bahnen der Doppelsterne zu berechnen, Diss. Göttingen 1855.

— Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne. Astr. Nachr. 42 (1856).

— Allgemeine Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen Astr. Nachr. 47 (1858).

H. Seeliger, Zur Theorie der Doppelsternbewegungen, Diss. Leipzig 1872. Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri, Wien. Denkschr. 44 (1881). Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri Münch. Abh. 17 (1892). Über den vierfachen Stern ζ Cancri, München Ber. 24 (1894). Über optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne, München Ber. 19 (1889). Artikel Doppelsterne in Valentiner, Handwörterbuch I, Breslau 1897.

Th. Thiele, Neue Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. 104 (1883).

S. v. Glasenapp, On a graphical Method for determining the Orbit of a Binary Star, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889).

K. Schwarzschild, Methode zur Bahnbestimmung der Doppelsterne. Astr. Nachr. 124 (1890).

T. J. See, On a practical Method of determining double star orbits by a graphical Process, and on the Elements Ω and λ. Astron. and Astroph. J. 12 (1893).

H. Zwiers, Über eine neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. 139 (1896).

H. C. Plummer, An Application of Projective Geometry to Binary Star Orbits, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 60 (1900).

G. Comstock, The Determination of Double Star Orbits, Science 15 (1902).

P. Salet, Détermination des orbites des étoiles doubles. Paris, Bull. Astr. 19 (1902).

R. Jonckheere, Méthode graphique pour déterminer les éléments des orbites des étoiles doubles, Bull. de la Soc. astr. de France 22 (1908).

II. Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne und veränderlicher Sterne.

A. Rambaut, On the Determination of Double Star Orbits from Spectroscopic Observations of the Velocity in the Line of Sight. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 51 (1891).

J. Wilsing, Über die Bestimmung von Bahnelementen enger Doppelsterne aus spektroskopischen Messungen der Geschwindigkeitskomponente. Astr. Nachr. 134 (1894).

R. Lehmann-Filhés, Über die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spektroskopischen Messungen der im Visionsradius liegenden Geschwindigkeitskomponente. Astr. Nachr. 136 (1894).

K. Schwarzschild, Ein Verfahren der Bahnbestimmung bei spektroskopischen Doppelsternen. Astr. Nachr. 152 (1900).

H. N. Russell, An Improved Method of Calculating the Orbit of a Spectroscopic Binary. Astroph. Journ. 15 (1902).

A. Nijland, Zur Bahnbestimmung von spektroskopischen Doppelsternen. Astr. Nachr. 161 (1903).

W. Zurhellen, Bemerkungen zur Bahnbestimmung spektrosk. Doppelsterne. Astr. Nachr. 175 (1907).

K. Laves, A Graphic Determination of the Elements of the Orbits of Spectroscopic Binaries. Astroph. Journ. 26 (1907).
W. F. King, Determination of the Orbits of Spectroscopic Binaries. Astroph. Journ. 27 (1908).
H. C. Plummer, Notes on the Determination of the Orbits of the Spectroscopic Binaries. Astroph. Journ. 28 (1908).
H. D. Curtis, Methods of Determining the Orbits of Spectroscopic Binaries. Publ. of the Astr. Soc. of the Pacific 20 (1908).
F. Schlesinger, The Determination of the Orbit of a Spectroscopic Binary by the Method of Least-Squares, Allegheny Publ. 1 (1908).
M. Mériau, Densité des étoiles variables du type d'Algol, Paris, C. R. 122 (1896).
G. W. Myers, The System of β Lyrae. Astroph. Journ. 7 (1898).
A. Roberts, Density of close Double Stars. Astroph. Journ. 10 (1899).
— On the Relation existing between the Light Changes and the Orbital Elements of a close Binary System. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903); 65 (1905).
J. v. Hepperger, Über den Zusammenhang zwischen der Lichtänderung und den Elementen des Systems β Lyrae. Wien. Ber. 1909.

III. Bahnbestimmung der Satelliten.

F. W. Bessel, Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnsatelliten. Astr. Nachr. 9 (1831).
A. Marth, Researches on Satellites, Astr. Nachr. 44 (1856).
W. Meyer, Bahnbestimmung der Satelliten des Saturn Enceladus, Tethys, Dione und Rhea nach einer neuen Methode. Astr. Nachr. 99 (1881).
— Le Système de Saturne, Mem. Soc. de Phys. et d'Hist. nat. de Genève 1884.
H. Struve, Bestimmung der Elemente von Japetus und Titan aus der Verbindung dieser Satelliten untereinander. Astr. Nachr. 111 (1885).
— Verbindung der Saturntrabanten Titan und Rhea. Astr. Nachr. 111 (1885).
— Vorläufige Resultate aus den Beobachtungen der Saturntrabanten am 30zölligen Refraktor. Astr. Nachr. 123 (1890), 125 (1890).
— Beobachtungen der Saturntrabanten, Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. (2) XI (1898).
W. Klinkerfues, Theoretische Astronomie, Braunschweig I. Aufl. 1871, II. Aufl. (Buchholz) 1899.
J. Bauschinger, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906.
A. O. Leuschner, Versuch der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen. Astr. Ges. Vjs. 43 (1908).

1. Beobachtung von Doppelsternen. Schon frühzeitig wurde die Wahrnehmung gemacht, daß einige Sterne, welche das freie Auge einfach sieht, durch das Fernrohr betrachtet doppelt erscheinen, so namentlich α Centauri (*Feuillee* 1709) γ Virginis, Castor, 61 Cygni (*J. Bradley* 1753). Die paarweise Anordnung von Sternen blieb als vermeintliche Wirkung der Perspektive wenig beachtet, bis *Christian Mayer* sie zur Bestimmung der Eigenbewegungen auszunützen gedachte und zu diesem Zwecke emsig nach neuen Paaren suchte. Das Resultat seiner Bemühungen war ein Katalog[1]) (1779) von 72 Doppelsternen, unter denen viele weite Paare vorkommen. Ungefähr um diese Zeit hatte *William Herschel* seine erfolgreichen Nachforschungen begonnen, die binnen kurzem zur Entdeckung von 269 Doppelsternen führten. Die Publikation dieser Entdeckungen veranlaßte *J. Michell* der Frage näher zu treten, ob das Vorkommen so vieler Paare mit einiger Wahrscheinlichkeit dem Walten des Zufalls bei der Verteilung der Sterne zugeschrieben werden könne. *Michell*[2]) fand, daß diese Wahrscheinlichkeit äußerst gering ist, und entschied sich für die Annahme, daß in den meisten Fällen die paarweise Anordnung auf Rechnung der Gravitationswirkung zu setzen sei. Schon *W. Herschel* vermochte durch die Beobachtung relativer Bewegung ein wertvolles Argument für die Richtigkeit der Anschauung *Michells* beizubringen. Die Bedeutung der Tätigkeit *W. Herschels* auf dem Gebiete der Doppelsternkunde liegt vor allem in der großen Zahl[3]) (703) der von ihm gefundenen Paare und den vielen, trotz erheblicher Unsicherheit ihres Alters wegen schätzbaren Messungen derselben. Man verdankt ihm auch die Einführung der noch jetzt üblichen Messungsmethode, wonach der Ort des einen Sternes durch Bestimmung des Positionswinkels und der Distanz auf den Ort des andern Sternes bezogen wird. Der Anhaltstern wird Hauptstern, der andere Nebenstern oder Begleiter genannt. Als Hauptstern hat die hellere Komponente zu gelten; ist der Helligkeitsunterschied nicht deutlich markiert, so ist die als Hauptstern gewählte Komponente auf andere Weise kenntlich zu machen. Die Zählung des Positionswinkels ist von *Herschel* nicht immer in derselben Weise vorgenommen worden. *Wilhelm Struve* hat eine einheitliche Zählweise inauguriert durch die Festsetzung, daß der Positionswinkel (θ) der Winkel am Hauptstern ist, um welchen der von diesem zum Nordpol führende Kreisbogen nach der Seite hin, auf welcher die Sterne mit größeren Rektaszensionen liegen, gedreht werden muß, um den Nebenstern in sich aufzunehmen. Distanz (ϱ) ist der in Bogensekunden ausgedrückte scheinbare Abstand des Nebensternes vom Hauptsterne. Hat der Hauptstern die Koordinaten α, δ, der Nebenstern α', δ', so wird

$$(\alpha' - \alpha)\cos\delta = \varrho \sin\theta$$
$$\delta' - \delta = \varrho\cos\theta.$$

1) De novis in coelo sidereo phaenomenis; Mannheim 1779; Berl. astr. Jahrb. für 1784.

2) On the means of discerning the distance ... of fixed stars; Lond. Phil. Trans. 1783.

3) Synopsis of all Sir *W. Herschel's* Microm. Measurements by Sir *J. Herschel*; Lond. Astr. Soc. Mem. 35 (1867).

Die Verdienste, welche *W. Struve* durch die Fülle der Entdeckungen, die Vollständigkeit der Beobachtungen und die Gediegenheit der Messungen sich um die Wissenschaft erworben hat, können kaum überschätzt werden. Seine Mensurae Micrometricae[4]), die Messungen von 2712 doppelt- und mehrfachen Sternen nebst Angaben ihrer Größe und bei helleren auch ihrer Farbe enthalten, sind noch jetzt von hervorragender Bedeutung für die Doppelsternastronomie. In das Beobachtungsprogramm sind nur Paare aufgenommen worden, für welche $\varrho \leqq 32''$; die Astronomen haben sich daran gewöhnt, nur Paare von dieser Beschaffenheit als Doppelsterne (im engeren Sinne) zu betrachten. Auch für die weitesten Paare dürfte das Verhältnis der Zahl der optischen Doppelsterne (konstante Eigenbewegung) zur Zahl der physischen (veränderliche Eigenbewegung) noch durch einen sehr kleinen Bruch dargestellt sein.

Die Arbeiten *W. Herschels* sind durch dessen Sohn *John Herschel* mit großem Erfolge fortgesetzt und durch Ausdehnung des Arbeitsfeldes bis zum Südpol in glücklicher Weise ergänzt worden. *J. Herschel* hatte den Plan gefaßt, eine synoptische Geschichte der Doppelsterne zu schreiben und zu diesem Behufe eine Liste der Positionen aller von ihm selbst und von anderen Astronomen gefundenen Doppelsterne anzulegen unternommen, deren Publikation aber erst nach *Herschels* Tode unter dem Titel „A Catalogue of 10300 Multiple and Double Stars“[5]) erfolgt ist. Durch Festhalten an dieser Ziffer würde man jedoch die Zahl der bis zum Jahre 1874 bekannt gewordenen Doppelsterne sehr überschätzen. *Otto Struve*, Sohn *W. Struves* und ebenfalls durch die Pflege der Doppelsternastronomie zur Berühmtheit gelangt, sagt in einer Besprechung[6]) des Katalogs, den er für einen temporären Arbeitskatalog hält, *J. Herschel* dürfte die geplante synoptische Geschichte nur auf solche Sternpaare ausgedehnt haben, welche innerhalb der von *W. Struve* aufgestellten Grenzen als Doppelsterne zu bezeichnen sind, und dann auch den Katalog revidiert und diesen Grenzen angepaßt haben, womit die Zahl der Sterne auf nicht viel über die Hälfte herabgesunken wäre. Einen großen Fortschritt verdankt die Doppelsternkunde zunächst der unermüdlichen Tätigkeit des Barons *E. Dembowski*, der in den Jahren 1852—1878 etwa 20000 vorzügliche Messungen ausgeführt hat, dann aber auch den Bemühungen vieler Astronomen, unter denen *Dawes*, *Dunèr*, *Schiaparelli*,

4) Stellarum duplicium et multipl. Mensurae Micrometricae; St. Petersburg 1837.

5) Lond. Astr. Soc. Mem. 40 (1874).

6) Astr. Ges. Vjs. XI (1876).

A. Hall, *H. Struve*, *Doberck* als Beobachter, *Burnham*, *Aitken* und *Hussey* als Entdecker hervorragen. Die Zahl der neueren Funde übertrifft sicherlich die Zahl der selbst bei strenger Revision aus *Herschels* Kataloge zu streichenden Positionen, so daß von Doppelsternen im engeren Sinne wahrscheinlich mehr als 11000 bekannt sind. *Burnhams* Kataloge[7]) verzeichnen 1336 Doppelsterne, darunter viele sehr enge Paare. Die laufenden Nummern der Kataloge von *G. Aitken*[8]) und *J. Hussey*[9]) reichen bis 2300 bzw. 1337. *Burnhams* Generalkatalog[7]) (1906) verzeichnet 13655 Doppelsterne, wovon, da eine Beschränkung auf die *Struve*sche Grenze nicht stattfand, sehr viele (nach des Autors eigener Schätzung mehrere Tausende) optische Doppelsterne sein dürften. Von älteren Werken möge hier noch erwähnt werden: A Handbook of Double Stars by *E. Crossley*, *G. Gledhill* and *J. Wilson* (London 1829), das von den Methoden der Beobachtung sowie der Bahnbestimmung handelt und eine chronologische Zusammenstellung der Messungen von 1200 Paaren gibt.

Nicht selten scheinen die Komponenten von Doppelsternen Licht von verschiedener Farbe auszustrahlen; das Erkennen der Farbe ist um so schwieriger je höher die Größenklasse der Sterne ist. Die auf 596 Paare ausgedehnten Untersuchungen *W. Struves* ergaben gleiche Farbe der Komponenten bei 476 und verschiedene Farbe bei 120 Paaren[4]). Der beobachtete Farbenunterschied besteht häufig im Vorherrschen von Gelb oder Rot gegen Weiß oder Gelb, aber auch nicht selten in komplementärer Färbung der Komponenten, wovon eine, und zwar gewöhnlich der Hauptstern, rot oder gelb, die andere grün oder blau erscheint. Nach *Struve* nimmt die Zahl der blauen Begleiter rasch mit der Distanz zu, während sehr enge Doppelsterne dieselbe Farbe haben. Im allgemeinen erweist sich auch die Helligkeit um so verschiedener, je verschiedener die Farben sind[10]); der Unterschied in Helligkeit wächst ebenfalls mit der Distanz. Die Farbenschätzungen verschiedener Beobachter stimmen häufig nicht überein. Manchmal, wie es für *W. Herschel* und *W. Struve* einigermaßen zutrifft, genügt eine konstante Verschiebung der Farbenskala zu einer in der Hauptsache befriedigenden Ausgleichung der Differenzen.[4]) Das Vorkommen einer verschiedenen Färbung der Kom-

---

7) A General Catalogue of Double Stars within 121° of the North Pole; Washington 1906.

8) Lick. Obs. Bull. 188 (1910).

9) Lick. Obs. Bull. 117 (1907).

10) *W. Doberck*, On the colour of revolving Double Stars; Astr. Nachr. 95 (1879).

ponenten in der Farbenfolge weiß-gelb-rot wird wohl von allen Beobachtern zugestanden; daß es aber auch Paare geben soll, in welchen die Komponenten komplementär gefärbt sind, wurde von mehreren erfahrenen Beobachtern lebhaft bestritten und die Empfindung dieser Farben auf Sinnestäuschung durch Kontrastwirkung zurückgeführt. Bei einigen Paaren, deren Spektra untersucht werden konnten, wird diese Wirkung jedenfalls wesentlich unterstützt durch die verschiedenartige Lichtemission, indem der gelbliche Stern ein Spektrum II. Klasse, der bläuliche ein Spektrum I. Klasse besitzt.[11])

Zu den Messungen von Position und Distanz dient ein in Grade geteilter Positionskreis in Verbindung mit dem Fadenmikrometer oder das Heliometer. Auch Interferenzmethoden scheinen mit gutem Erfolge verwendet werden zu können[12]), sowie verschiedene andere Arten von Doppelbildmikrometern.[13])

Die Messungen der Positionswinkel sind im allgemeinen viel genauer und zuverlässiger als die der Distanzen, so daß Änderungen der relativen Lage der Komponenten eines Doppelsternes viel sicherer aus den Positionswinkeln als aus den Distanzen erkannt werden. Unter den Fehlern der Messung sind die von der Eigenart des Beobachters abhängigen persönlichen Fehler[14]) wegen ihres systematischen Charakters von besonderer Bedeutung; sie treten bei Vergleichung der Messungsreihen je zweier Beobachter als persönliche Gleichung mitunter sehr deutlich hervor. Wegen der veränderlichen Natur dieser Fehler empfiehlt es sich, sie stets aus den auf dasselbe Objekt sich beziehenden Messungen abzuleiten und dabei auch die Möglichkeit zu beachten, daß durch große Zeitintervalle getrennte Messungen desselben Beobachters einer verschiedenen Korrektur bedürfen. (Vgl. Artikel VI 2, 6 *Cohn* Seite 263.)

Zur Reduktion der beobachteten relativen Koordinaten des Begleiters auf ein fixes Äquinox t_0 bedarf es, bei der Kleinheit von ϱ, nur der Berücksichtigung der durch Präzession veranlaßten Änderung

11) *E. C. Pickering*, The Discovery of Double Stars by means of their Spectra; Astr. Nachr. 127 (1891).

12) *A. A. Michelson*, Memoirs of the National Acad. of Sciences; Washington 5 (1891); *K. Schwarzschild*, Über Messung von Doppelsternen durch Interferenzen; Astr. Nachr. 139 (1896).

13) *M. Brendel*, Über die Brechung des Lichtes in Prismen aus einachsigen Kristallen und über deren Anwendung zu mikrometrischen Messungen. 1891.

14) *O. Stone*, on personal equation in double star observations; Astr. Nachr. 92 (1878), 94 (1879); *E. Großmann*, Untersuchungen über systematische Fehler bei Doppelst.-Beob. Diss. Göttingen 1892.

des Positionswinkels im Betrage von

$$\theta - \theta_0 = 0^0 \cdot 0056 \sin\alpha \sec\delta (t - t_0),$$

wenn die Zwischenzeit $t - t_0$ in Jahren ausgedrückt ist.

2. Einleitung zur Bahnbestimmung. Nachdem die an Doppelsternen ausgeführten Messungen in vielen Fällen eine krummlinige Bewegung des Begleiters außer Zweifel gestellt und die allgemeine Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes noch wahrscheinlicher gemacht hatten, fing man an nach Methoden zu suchen, welche eine genäherte Bahn des Begleiters aus einigen Örtern desselben nach Analogie einer ersten Bahnbestimmung von Planeten zu berechnen gestatten. Da die Beziehung zwischen mittlerer Bewegung und Halbachse nur durch Einführung einer neuen, von der Masse und der Parallaxe des Doppelsternes abhängigen Unbekannten hergestellt werden kann, so war es klar, daß jede Bahnbestimmung sich auf mindestens 7 voneinander unabhängige Beobachtungsstücke gründen muß. Die ausschließliche Verwendung von Positionswinkeln oder Distanzen genügt zu einer vollständigen Bahnbestimmung nicht, da hierbei entweder die Dimension der Bahn oder die Bahnlage unbestimmt bleibt. Werden mehr als 7 Beobachtungsdata benützt, so wird man eine Ausgleichung vornehmen müssen.

Denken wir uns durch den Hauptstern, der sich in der Entfernung Z von der Erde befinden soll, ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, daß die z-Achse die Fortsetzung des Visionsradius Z bildet, so ist die xy-Ebene die Referenzebene für die durch die visuelle Beobachtung gelieferten Koordinaten des Begleiters. Auf diese oder eine zu ihr parallele Ebene werden auch die von der Bahnlage abhängigen Elemente der Bewegung des Begleiters um den Hauptstern oder den gemeinsamen Schwerpunkt in gleicher Weise bezogen, wie die Elemente eines Planeten auf die Ekliptik, nur mit dem Unterschiede, daß der Positionswinkel an die Stelle der Länge tritt. Dementsprechend hat man die Achsen so zu legen, daß die Koordinaten des bewegten Punktes werden $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$; die Koordinaten sind auch gegeben durch:

$$x = r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i)$$
$$y = r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i)$$
$$z = r \sin u \sin i.$$

Die Bezeichnungen sind hier und im folgenden in Übereinstimmung mit dem Artikel VI 2, 9 (*Herglotz*) Seite 381—384 gewählt.

Die Zeit t_0 des Periastrons und die Periode $P = \frac{2\pi}{n}$ werden bei visuellen Doppelsternen in Jahren ausgedrückt. Zur Bezeichnung der Bewegungsrichtung dienen die Ausdrücke direkt (Zunahme der Positionswinkel mit der Zeit) und retrograd (Abnahme der Positionswinkel). Bei Angabe dieser Bezeichnung kann für die Neigung stets der spitze Winkel genommen werden. Der aufsteigende Knoten läßt sich vom niedersteigenden aus Messungen von θ und ϱ allein nicht unterscheiden, da, wie auch aus obigen Gleichungen ersichtlich ist, eine Änderung des Vorzeichens der Neigung x und y, mithin auch θ und ϱ ungeändert läßt.

Ist die Neigung von Null verschieden, so beziehen sich infolge der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes die beobachteten Örter der Komponenten eines Doppelsterns im allgemeinen auf verschiedene Zeitpunkte. *F. Savary*[15]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Umstand zu Aberrationserscheinungen Anlaß geben müsse, aus denen, wie er meinte, die Parallaxe des Doppelsterns bestimmt werden könnte. Dies wäre jedoch nach den grundlegenden Untersuchungen *Villarceaus*[16]) nur dann möglich, wenn das Massenverhältnis der Komponenten bekannt ist. *L. Birkenmeyer*[17]) hat die Ableitung der *Villarceau*schen Formeln etwas vereinfacht und durch deren Anwendung auf die Bahn von ξ Ursae maj. einige interessante Resultate erhalten. *H. Seeliger*[18]) gibt eine sehr einfache und klare Darstellung der wichtigsten Resultate *Villarceaus* und außerdem eine Theorie der optischen Ungleichheiten, die durch die Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Lichtes von seiner Intensität veranlaßt würden. Eine solche Abhängigkeit könnte durch die Bahnbestimmung von Doppelsternen nur dann nachgewiesen werden, wenn die Eigenbewegung sehr groß, die Parallaxe sehr klein und die Helligkeit der Komponenten sehr verschieden ist. Die endliche Geschwindigkeit des Lichtes bewirkt eine konstante, in den Beobachtungen nicht zu erkennende Veränderung von Ω, i, ω und eine periodische, durch Beobachtungen bestimmbare Ungleichheit der Bewegung, die durch Korrektion der Beobachtungszeit um $-\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\tau$ voll-

15) Conn. des Temps pour 1830.

16) Théorie analytique des inégalités de lumière des étoiles doubles. Conn. des Temps additions pour 1878.

17) Über die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten. Wien. Ber. 1886.

18) Über optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. München Ber. 19, 1889.

ständig berücksichtigt wird, wo τ den in Lichtzeit ausgedrückten Unterschied der geozentrischen Entfernungen der Massen m_1 und m_2 bedeutet.

Die Bahn, welche eine Komponente um die andere oder um den gemeinsamen Schwerpunkt im Raume beschreibt, setzen wir als eine *Kepler*sche Ellipse voraus und nennen sie die wahre Bahn oder die wahre Ellipse. Die Projektion der wahren Ellipse oder die scheinbar in einer zur Gesichtslinie senkrechten Ebene beschriebene Bahn, die auch eine Ellipse ist, heißt die scheinbare Bahn (scheinbare Ellipse). Der Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse ist die Projektion des Mittelpunktes der wahren Ellipse. Die Projektionen der Brennpunkte der wahren Ellipse fallen aber (für $i > 0$) nicht mit den Brennpunkten der scheinbaren Ellipse zusammen. Wenn nämlich die durch den Brennpunkt getrennten Teile einer Fokalchorde mit r und r' bezeichnet werden, so ist

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2}{p}; \quad p = a(1 - e^2).$$

Ist ζ der Neigungswinkel der Sehne gegen die xy-Ebene, so sind die Projektionen der Sehnenabschnitte $\varrho = r\cos\zeta$, $\varrho' = r'\cos\zeta$; daraus folgt, daß die Summe $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{p\cos\zeta}$ (wegen der Veränderlichkeit von ζ) nicht konstant, der Punkt $\varrho = 0$ daher kein Brennpunkt ist. Für $r = r' = p$ wird $\varrho = \varrho' = p\cos\zeta$; setzt man $p\cos\zeta = s$, so läßt sich mit Hilfe der Gleichung $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{s}$ für jedes Paar ϱ, ϱ' je ein auf ϱ und ϱ' oder in der Verlängerung dieser Linien gelegener Punkt mit der Entfernung s vom Orte des ruhenden Sternes finden. Der geometrische Ort dieses Punktes ist eine Ellipse (*Thiele*sche Hilfsellipse[19]), welche die Projektion eines in der Ebene der wahren Bahn mit dem Radius p um den Hauptstern beschriebenen Kreises darstellt. s wird ein Maximum für $\zeta = 0$ (Knotenlinie). Die große Halbachse der Hilfsellipse ist daher $= p$ und liegt in der Knotenlinie. Der Minimalwert von s, die kleine Halbachse der Hilfsellipse, stellt den Wert $p\cos i$ dar; es ist daher i gleich dem Exzentrizitätswinkel der Hilfsellipse. In gleicher Weise benützt *H. Zwiers*[28]) eine andere, der Projektion eines mit dem Halbmesser a um den Mittelpunkt der wahren Ellipse beschriebenen Kreises entsprechende Hilfsellipse zur konstruktiven Darstellung der Elemente.

Die Halbachsen der scheinbaren Ellipse sind im folgenden mit

---

19) *Th. Thiele,* Über einen geometrischen Satz zur Berechnung von Doppelsternbahnen; Astr. Nachr. 52 (1860).

α_1, β_1, die Projektionen der Halbachsen a, b auf die Ebene der scheinbaren Bahn mit a_1, b_1 bezeichnet. Die Neigungswinkel der Achsen gegen diese Ebene seien durch die Gleichungen $a_1 = a \cos \zeta_0$, $b_1 = b \cos \zeta_1$ bestimmt. Den Übergang von der scheinbaren auf die wahre Ellipse vermitteln die Beziehungen, daß jene die Projektion dieser ist, woraus folgt $\alpha_1 \beta_1 = ab \cos i$, und daß die konjugierten Durchmesser, von denen einer durch den Ort des ruhenden Sternes geht, die Projektionen der Achsen der wahren Ellipse vorstellen, weshalb auch die Projektion der großen Halbachse durch den Ort des ruhenden Sternes im Verhältnis $e : 1$ geteilt wird. Die Bestimmung von e ist sonach graphisch leicht durchführbar. Die durch den Punkt $\varrho = 0$ gehende und in diesem Punkte halbierte Sehne der Projektionsellipse ist parallel zu b_1.

Die Dimensionen der Bahn und die Koordinaten des bewegten Massenpunktes werden auf die den Messungen zugrundeliegende Einheit des Weges bezogen. Ist diese Einheit die Bogensekunde, so können, wenn f die Anziehung zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung und das Dehnungszeichen — die Wertung der Koordinaten und Halbachsen in linearem Maße bedeuten, Gleichungen von der Form $\bar{x} = Z x \sin 1''$ verwendet werden, um aus jeder der Bewegungsgleichungen z. B. $\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \frac{f(m + m')}{\bar{r}^3} \bar{x} = 0$, die entsprechende $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} = 0$ abzuleiten. Die für jedes System charakteristische Konstante der Gravitation ist daher gegeben durch $k^2 = \frac{f(m + m')}{Z^3 \sin^3 1''}$.

Wird die Vertauschung des Doppelsternsystems mit dem System Sonne-Erde durch den Index 0 (m_0 = Sonnenmasse), der Ausdruck $\frac{n_0}{\sqrt{1 + \frac{m_0}{m_0'}}}$ durch k_0, die Parallaxe des Sternes durch π bezeichnet, so bestehen die Relationen

$$Z \sin 1'' = \frac{\bar{a}_0}{\pi} = \frac{\bar{a}}{a}; \quad f = \frac{\bar{a}^3 n^2}{m + m'} = \frac{a_0{}^3 n_0{}^2}{m_0 + m_0'}; \quad k^2 = a^3 n^2 = \frac{m + m'}{m_0} \pi^3 k_0{}^2;$$

$$a = \pi \sqrt[3]{\frac{m + m'}{m_0 + m_0'} \cdot \frac{n_0{}^2}{n^2}}.$$

k_0 geht in die *Gauß*sche Konstante über, wenn n_0 auf den Tag bezogen wird. Der Annahme $m + m' = m_0 + m_0'$ entspricht die „hypothetische Parallaxe“

$$a \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Bahnbestimmung eines Doppelsternes von bekannter Parallaxe

π vermittelt, indem $n^2 a^3 = \frac{m + m'}{m_0} \pi^3 k_0^2$, die Kenntnis der Masse des Systems. Da $\frac{m'}{m}$ gleich ist dem Verhältnis zwischen den Abständen der Komponenten vom gemeinsamen Schwerpunkte und aus den Achsen der Bahn einer Komponente bezüglich des Schwerpunktes und des Ortes der anderen Komponente berechnet werden kann, so wird das Massenverhältnis bekannt, sobald für eine beider Komponenten veränderliche Eigenbewegung konstatiert ist.

Hat man veränderliche Eigenbewegung eines Sterns, ohne daß der Begleiter sichtbar ist, so hat man zunächst aus möglichst entlegenen Beobachtungen die als gleichförmig anzusehende Bewegung des Systemschwerpunktes zu ermitteln und dann die Relativkoordinaten des Sterns gegen den Schwerpunkt wie diejenigen eines Doppelsterns zu behandeln.[20])

Zur Vorbereitung seien noch folgende Formeln angemerkt:

Die Gleichung des Flächensatzes $x dy - y dx = c dt$, in welcher

$$c = k\sqrt{p} \cos i = a^2 n \sqrt{1 - e^2} \cos i = abn \cos i = \alpha_1 \beta_1 n,$$

läßt sich auch schreiben

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{c\,dt}{x^2} \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-c\,dt}{y^2};$$

die Integration zwischen den durch die Indizes 1 und 2 bezeichneten Grenzen gibt

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = c \cdot x_1 x_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{x^2} = c \cdot y_1 y_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{y^2}.$$

Die doppelte Dreiecksfläche als Funktion der wahren oder der exzentrischen Anomalien (in der wahren Bahn) ist

$$\begin{aligned} x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \varrho_1 \varrho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) \cos i \\ &= \frac{c}{n}[\sin(\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) - e(\sin \mathrm{E}_2 - \sin \mathrm{E}_1)] \\ &= \alpha_1 \beta_1 [\sin(\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) - (\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) + n(t_2 - t_1)]. \end{aligned}$$

3. Bahnbestimmung visueller Doppelsterne.

a) *Benutzung einzelner Örter.* Die älteste, von *Savary*[21]) (1827) ersonnene Methode verwertet vier Positionswinkel mit den zugehörigen Distanzen und Zeiten; sie führt im Wege fortgesetzter Versuche, durch welche die in den Zwischenzeiten erfolgte Änderung der exzentrischen Anomalien bekannt werden soll, zur Bestimmung der schein-

20) *H. Seeliger,* Valentiners Handwörterbuch I; Breslau 1897.

21) *F. Savary,* Conn. des Temps pour 1830.

baren Bahn, aus der dann die wahre abgeleitet wird. Unter Benutzung von Relationen, welche zwischen zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse und den durch die vier Örter parallel zu den Durchmessern gezogenen Sehnen bestehen, erhält man zwei Gleichungen mit

$$E_2 - E_1 = \varphi,\quad E_3 - E_1 = \psi,\quad E_4 - E_1 = \psi'$$

als Unbekannten. Da in den Gleichungen

$$\alpha_1\beta_1 n(t_2 - t_1) - \varrho_1\varrho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \alpha_1\beta_1(\varphi - \sin\varphi)$$
$$\alpha_1\beta_1 n(t_3 - t_1) - \varrho_1\varrho_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) = \alpha_1\beta_1(\psi - \sin\psi)$$
$$\alpha_1\beta_1 n(t_4 - t_1) - \varrho_1\varrho_4 \sin(\theta_4 - \theta_1) = \alpha_1\beta_1(\psi' - \sin\psi')$$

das Produkt $\alpha_1\beta_1$ sich aus den Werten φ und ψ berechnen läßt, so bleiben nach Elimination von $\alpha_1\beta_1 n$ noch zwei von den Zwischenzeiten abhängige Gleichungen, im ganzen also vier Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Es wird daher im allgemeinen kein Wert von φ angenommen werden können, welcher ohne Änderung der Beobachtungsdaten allen Gleichungen genügt. *J. F. Encke*[22]) glaubt die Übereinstimmung am zweckmäßigsten durch Änderung einer Distanz erreichen zu können. Nach seiner Methode, deren Formeln den Rechner mehr befriedigen, werden die geometrischen Beziehungen zwischen φ, ψ, ψ' durch Gleichungen vermittelt, welche den Flächeninhalt (123) eines durch drei Punkte der scheinbaren Ellipse bestimmten Dreiecks einerseits durch die gegebenen Koordinaten dieser Punkte und andererseits durch die Unbekannten ausdrücken; letztere Gleichungen sind von der Form

$$(1\,2\,3) = 2\alpha_1\beta_1 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi)\sin\tfrac{1}{2}\psi$$

und gestatten eine bequeme Berechnung von φ, ψ, ψ' aus einem angenommenen Werte von $\psi' \pm \psi \pm \varphi$.

H. Seeliger hat in seiner Inauguraldissertation[23]) nach detaillierter Besprechung der Methoden von *Savary* und *Encke* eine neue Methode der Bahnbestimmung aus vier Positionswinkeln und drei Distanzen gegeben, welche die Rechnungsoperationen vereinfacht, indem sie die Dimension der scheinbaren Ellipse zunächst unbestimmt läßt und bis zu deren Ermittlung statt der drei Distanzen nur zwei Verhältnisse derselben benützt. Bezeichnet χ den Winkel zwischen der Richtung Hauptstern — erster Ort und der großen Achse, ξ und η die Koordinaten des Hauptsternes bezüglich der großen und kleinen Achse der scheinbaren Ellipse, so läßt sich der Gang der Rechnung folgender-

22) Berl. astr. Jahrb. für 1832.

23) Zur Theorie der Doppelsternbewegungen. Diss. Leipzig 1872.

maßen darstellen. Die (im Versuchswege zu bestimmenden) Werte von φ und ψ geben mit Hilfe von sechs (nur einmal zu berechnenden) Konstanten χ, woraus E_1, $\frac{\xi}{\alpha_1}$, $\frac{\eta}{\beta_1}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ und ψ' erhalten werden. Diese φ, ψ, ψ' müssen drei Zeitgleichungen, in denen die Produkte der Distanzen durch deren Verhältnisse ersetzt sind, genügen. α_1 kann dann der Gleichung $\varrho_1 \cos\chi = \alpha_1\left(\cos E_1 - \frac{\xi}{\alpha_1}\right)$ entnommen werden. *Seeliger* gibt noch eine elegante Bestimmung der scheinbaren Ellipse aus den Werten von φ, χ und $\alpha_1 \beta_1$, welche auch bei den Methoden von *Savary* und *Encke* anwendbar ist.

Unter den Methoden, welche eine direkte Bestimmung der wahren Bahn bezwecken, ist die Methode von *Yvon-Villarceau*[24]) (1849) die älteste. Sie beruht auf der Entwicklungsfähigkeit von θ, ϱ und der Differentialquotienten dieser Funktionen nach Potenzen der Zeit. Das Wesen der Methode besteht darin, daß durch wiederholte Differentiation von $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, $z = \varrho \operatorname{tg}\zeta$ und Ersetzung der zweiten Differentialquotienten durch ihre den Bewegungsgleichungen entnommenen, als Funktionen von k^2, θ, ϱ, ζ ausgedrückten Äquivalente eine lineare Gleichung zur Bestimmung von $\operatorname{tg}\zeta \cdot \frac{d\zeta}{dt}$ und durch deren Vermittlung nach Elimination von k^2 und $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ eine Gleichung 4^{ten} Grades erhalten wird, in welcher nur $\operatorname{tg}^2\zeta$ und $\operatorname{tg}^4\zeta$ als Unbekannte auftreten. Die Gleichung hat nur zwei reelle, gleich große und entgegengesetzt bezeichnete Wurzeln, wie es dem Mangel eines Kriteriums zur Unterscheidung zwischen auf- und niedersteigendem Knoten entspricht. Nach Auswahl eines ζ und des zugehörigen $\frac{d\zeta}{dt}$ gelangt man zur Kenntnis von k^2, x, y, z $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, welche Daten zur Bestimmung der wahren Bahn genügen. Eine zweite Abhandlung *Villarceaus*[24]) enthält eine Spezialisierung der Methode für den Fall, daß die Gesichtslinie gegen die Bahnebene nur sehr wenig geneigt ist.

K. Schwarzschild[25]) gelangt in einfacher Weise zur Bestimmung der Koordinaten und Geschwindigkeiten, indem er von den Potenzreihen für x und y ausgeht, welche, wenn die Zahl der Striche die Ordnung der Differentialquotienten bezeichnet, der Bedingung genügen müssen

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = -\frac{k^2}{r^3} = \frac{z''}{z}.$$

24) Conn. des temps pour 1852.

25) Methode zur Bahnbestimmung der Doppelsterne; Ast. Nachr. 124 (1890).

Es sei

$$\frac{r^3}{k^2} = w^3; \quad \text{dann ist} \quad \frac{r''}{w''} = \frac{r'}{w'} = \frac{r}{w}.$$

Mit Hilfe dieser Relation wird aus der Gleichung $r^2 = \varrho^2 + z^2$ und ihrer ersten und zweiten Ableitung nach der Zeit durch Elimination von r' und r'' die Formel erhalten

$$r^4\left[\frac{w''}{w} + \frac{1}{w^3}\right] - r^2\varrho^2\left[\left(\frac{w''}{w} + \frac{1}{w^3}\right) + \left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{w'}{w}\right)^2 + \left(\frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{1}{w^3}\right)\right]$$
$$+ \varrho^4\left[\frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{1}{w^3}\right] = 0.$$

Da ϱ, w und ihre Derivierten ohne weiteres aus x, y und deren Differentialquotienten gefunden werden können, ist dies eine quadratische Gleichung für r^2. Aus r (doppelte Lösung möglich) erhält man $\pm z$, $\pm z'$ und k^2, womit die Aufgabe gelöst erscheint.

Die Zuverlässigkeit der nach diesen Methoden erhaltenen Resultate wird dadurch wesentlich beinträchtigt, daß die Entwicklung der Funktionen nach Potenzen der Zeit nur so lange durchführbar ist, als die Zeit einen gewissen Bruchteil der Periode nicht überschreitet, und daß die Fehler der Beobachtung die Koeffizienten um so stärker beeinflussen, je höher die Potenz der Zeit ist.

Viel leistungsfähiger ist die Methode von *Klinkerfues*[26]), welche davon ausgeht, daß das Verhältnis der Flächen je zweier in der Bahnebene gelegenen Dreiecke gleich ist dem Verhältnisse ihrer Projektionen auf die Ebene der scheinbaren Bahn.

$$\frac{r_1 \sin(v_1 - v)}{r_3 \sin(v_3 - v)} = \frac{\varrho_1 \sin(\theta_1 - \theta)}{\varrho_3 \sin(\theta_3 - \theta)}.$$

Das Verhältnis zweier Gleichungen, welche aus dieser durch Beteilung von v und θ mit dem Index 2 bzw. 4 hervorgehen, ist

$$\frac{\sin(v_1 - v_2)\sin(v_3 - v_4)}{\sin(v_3 - v_2)\sin(v_1 - v_4)} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_3 - \theta_4)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_4)}.$$

Je nachdem ein ϱ und sechs θ, zwei vollständige Örter und drei θ oder drei vollständige Örter und ein θ gegeben sind, hat man unter Bevorzugung der äußersten Positionen drei, zwei oder eine der Gleichungen von der zweiten Form und keine, eine oder zwei Gleichungen von der ersten Form zu bilden. Die rechten Seiten der Gleichungen sind bekannt. Mittels der Formeln, welche v mit t verbinden, ist im Versuchswege auf Grund hypothetischer Werte von n und t_0 die Erfüllung der entsprechenden Gleichungssysteme anzu-

26) Diss. Göttingen 1855, Theoretische Astronomie, Braunschweig 1871 und 1899; Astr. Nachr. 42 (1856), 47 (1858).

streben. Ist dies erreicht, so kennt man e, n, t_0. Die von der Bahnlage abhängigen Elemente werden aus drei Gleichungen von der Form $\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v + \omega)$ abgeleitet. Zur Bestimmung der Halbachse muß eine Distanz herangezogen werden.

b) *Benutzung der vollständigen scheinbaren Ellipse.*

Da die Elemente der wahren Bahn aus Örtern, die in der Ebene der scheinbaren Bahn liegen, abgeleitet werden müssen, so hängt ihre Verläßlichkeit von der Genauigkeit ab, mit welcher die scheinbare Ellipse durch die Beobachtungen bestimmt wird. Die Fehler der Messung lassen den Charakter dieser Ellipse um so schwieriger erkennen, je kleiner die durch die äußersten Beobachtungen markierte Winkelbewegung des Begleiters ist. Ist sie kleiner als 180°, so darf man erfahrungsgemäß kaum hoffen, einigermaßen genäherte Bahnelemente zu erhalten. Aber auch bei größerer Bewegung werden die bisher besprochenen Methoden, soweit sie überhaupt noch anwendbar sind, je nach Auswahl der Beobachtungsstücke im allgemeinen sehr verschiedene Resultate geben, so daß es geboten erscheint, das vorhandene Beobachtungsmaterial schon zum Zwecke einer provisorischen Bahnbestimmung intensiver auszunützen. Hierzu eignen sich Methoden, nach welchen die scheinbare Ellipse durch Konstruktion oder auf analytischem Wege bestimmt wird und die Ermittlung von Dimension, Form und Lage der wahren Ellipse ohne Inanspruchnahme der Beobachtungszeiten erfolgt.

Die Konstruktion der scheinbaren Ellipse wird auch bei genügender Zahl und günstiger Verteilung der beobachteten Örter häufig Schwierigkeiten begegnen, welche durch Fehler in den Positionswinkeln und noch viel mehr durch Fehler in den beobachteten Distanzen veranlaßt sind. Um diese Schwierigkeiten zu beheben, sucht *J. Herschel*[27]) zunächst die Fehler der Positionswinkel durch graphische Darstellung von θ als Funktion der Zeit auszugleichen, und berechnet dann mit Hilfe der θ-Kurve die Distanzen nach der sich aus dem Flächensatz ergebenden Formel $\varrho = \dfrac{c}{\sqrt{\frac{d\theta}{dt}}}$, in welcher nur c aus den gemessenen Distanzen bestimmt wird. Da die so berechneten ϱ den elliptischen Charakter der aus zusammengehörigen Werten von θ und ϱ konstruierten scheinbaren Bahn nicht garantieren, muß noch untersucht werden, ob die Bahn sich einer Ellipse genügend nähert, und falls

27) On the Investigation of the Orbits of revolving Double Stars; Lond. Astr. Soc. Mem. V (1833).

dies nicht zutrifft, durch Nachbesserungen die Annäherung an die elliptische Form herbeigeführt werden.

Ist die scheinbare Ellipse mit dem Orte Σ des ruhendes Sternes und der Richtungslinie $\theta = 0$ gezeichnet, so lassen sich der Mittelpunkt O der Ellipse und ihre Achsen $2\alpha_1$, $2\beta_1$ durch Konstruktion finden. Der durch O und Σ gehende Halbmesser ist a_1, der konjugierte b_1. Bezeichnet ω' den Winkel zwischen Knotenlinie und a_1 (vom aufsteigenden Knoten gegen die Projektion des Periastrons hin gezählt), so ist $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\omega' \cdot \sec i$. Die Größen p, i und die Lage der Knotenlinie, mithin auch ein Wert von Ω kann durch Konstruktion der *Thiele*schen Hilfsellipse, deren Zentrum Σ ist, erhalten werden. Nach Messung von ω' gelangt man zur Kenntnis von ω, wodurch, da $e = \frac{\Sigma O}{a_1}$, die Bestimmung der Elemente bis auf die von t_0 und P durchgeführt ist. t_0 ist durch die Zeit gegeben, welche dem Positionswinkel der Projektion des Periastrons entspicht. P kann aus dem Verhältnis der Fläche eines Sektors zur Ellipsenfläche nach der Formel

$$\mathrm{P}\int_{t_1}^{t_2} \varrho^2 d\theta = 2\pi\alpha_1\beta_1(t_2 - t_1)$$

oder, wenn $\theta_2 - \theta_1 > 2\pi$, durch Interpolation der Zeiten berechnet werden, welche zu nahe um 2π differierenden Positionswinkeln gehören.

Die graphische Methode von *H. Zwiers*[28]) ermöglicht eine vorteilhaftere Bestimmung von a, Ω, i. Sie beruht auf der Konstruktion einer anderen Hilfsellipse, welche aus der scheinbaren Ellipse durch symmetrische Verlängerung von $2b_1$ und der zu diesem Durchmesser parallelen Sehnen im Verhältnisse $1 : \sqrt{1 - e^2}$ erhalten wird. Diese Hilfsellipse (mit dem Zentrum in O) ist daher die Projektion eines der wahren Ellipse umschriebenen Kreises. Durch die Projektion erleidet nur der parallel zur Knotenlinie liegende Durchmesser des Kreises keine Verkürzung, weshalb die große Achse der Hilfsellipse die Länge $2a$ besitzt und die Richtung der Knotenlinie markiert. Der zur Knotenlinie senkrechte Durchmesser des Kreises erfährt die stärkste, dem Neigungswinkel i entsprechende Verkürzung. Durch Messung der Halbachsen α', β' der Hilfsellipse wird also a und i bekannt, da $a = \alpha'$; $a \cos i = \beta'$. ω' ist der Winkel zwischen α' und a_1; $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\omega' \sec i = \frac{\alpha'}{\beta'} \operatorname{tg}\omega'$.

28) Über eine neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen; Astr. Nachr. 139 (1896).

Zur Berechnung von Ω, ω, i aus Bestimmungsstücken der scheinbaren Ellipse sind die Formeln von *Klinkerfues*[26]) sehr geeignet. Sind P_0, P_1 die Positionswinkel der Achsen der wahren Ellipse (entsprechend den Punkten $v = 0$ und $v = 90^0$), so wird

$$a_1 = a \cos \zeta_0; \quad \sin \omega \cos i = \cos \zeta_0 \sin (P_0 - \Omega); \quad \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \cos i = \cos \zeta_1 \sin (P_1 - \Omega)$$

$$b_1 = b \cos \zeta_1; \qquad \cos \omega = \cos \zeta_0 \cos (P_0 - \Omega); \quad \cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \zeta_0 \cos (P_1 - \Omega).$$

Es ist daher

$$2 \sin \omega \cos \omega \cos i = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 \sin 2 (P_0 - \Omega) = -\left(\frac{b_1}{b}\right)^2 \sin 2 (P_1 - \Omega)$$

oder

$$(1 - e^2)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 = -\frac{\sin 2 (P_1 - \Omega)}{\sin 2 (P_0 - \Omega)}.$$

Aus dieser Gleichung, deren linke Seite als bekannt zu gelten hat, folgt Ω durch Rechnung oder einfache Konstruktion.[26])

Der Bedingung, daß die scheinbare Bahn eine sich den Beobachtungen unter Berücksichtigung ihrer relativen Güte möglichst anschmiegende Ellipse sein soll, kann leichter auf analytischem als auf graphischem Wege entsprochen werden. Schon *J. Herschel*[29]) hat den Vorteil der analytischen Bestimmung der scheinbaren Bahn erkannt und eine Methode angegeben, welche die Elemente aus den Koeffizienten der Ellipsengleichung finden lehrt und in etwas vereinfachter Form hier auseinandergesetzt werden soll.

Fünf Örter bestimmen die Koeffizienten der Ellipsengleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y - 1 = 0$; liegen mehr Örter vor, so wird der günstigste Anschluß der Kurve durch die Berechnung der Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate gesichert.

Es sei

$$\theta - \Omega = \vartheta,$$

dann ist

$$x = \varrho \cos (\vartheta + \Omega)$$
$$y = \varrho \sin (\vartheta + \Omega)$$

oder

$$x \cos \Omega + y \sin \Omega = \varrho \cos \vartheta = r \cos u$$
$$-x \sin \Omega + y \cos \Omega = \varrho \sin \vartheta = r \sin u \cos i.$$

Unter Berücksichtigung dieser Relationen kann die Gleichung der

29) On the Determination of the most probable Orbit of a Binary Star; Lond. Astr. Soc. Mem. 1850.

wahren Ellipse nach Einführung der Substitution

$$e \cos \omega \cdot r \cos u + \frac{e \sin \omega}{\cos i} \cdot r \sin u \cos i = p - r,$$

$$e \cos \omega = g \cos G$$

$$\frac{e \sin \omega}{\cos i} = g \sin G$$

geschrieben werden

$$g \varrho \cos (\vartheta - G) = p - r$$

oder

$$r = p - g x \cos (\Omega + G) - g y \sin (\Omega + G).$$

r ist andererseits gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \varrho^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 i &= x^2(1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 \Omega) \\ &+ y^2(1 + \operatorname{tg}^2 i \cos^2 \Omega) - xy \operatorname{tg}^2 i \sin 2\Omega. \end{aligned}$$

Die durch Elimination von r^2 hervorgehende Gleichung ist die der scheinbaren Ellipse. Die Identifizierung der Koeffizienten der veränderlichen Größen gibt

$$\begin{aligned} \alpha p^2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 \Omega - g^2 \cos^2 (\Omega + G) \\ \beta p^2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 i \cos^2 \Omega - g^2 \sin^2 (\Omega + G) \\ \gamma p^2 &= - \operatorname{tg}^2 i \sin 2 \Omega - g^2 \sin 2 (\Omega + G) \\ \delta p &= 2 g \cos (\Omega + G) \\ \varepsilon p &= 2 g \sin (\Omega + G). \end{aligned}$$

Hieraus folgen die von *Kowalsky*[30]) aufgestellten Formeln

$$\frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} \sin 2 \Omega = - \gamma - \frac{\delta \varepsilon}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} \cos 2 \Omega = \beta - \alpha - \frac{\delta^2 - \varepsilon^2}{4}$$

$$\frac{2}{p^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} = \beta + \alpha + \frac{\delta^2 + \varepsilon^2}{4}$$

$$e \sin \omega = \frac{1}{2} p \cos i (- \delta \sin \Omega + \varepsilon \cos \Omega)$$

$$e \cos \omega = \frac{1}{2} p (\delta \cos \Omega + \varepsilon \sin \Omega).$$

n und t_0 werden am sichersten aus Wertepaaren von θ, t nach der Methode der kleinsten Quadrate erhalten.

Zur Bestimmung von $\alpha, \beta \ldots$ aus der Figur der scheinbaren Ellipse eignet sich die Methode von *S. v. Glasenapp*[31]) sehr gut.

30) Wissenschaftliche Schriften der Kasaner Universität für 1873; *D. Dubjago*, Astr. Nachr. 109 (1884).

31) On a Graphical Method for determining the orbit of a Binary Star; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889).

Sie beruht auf der Messung der Koordinaten von fünf Punkten der Ellipse, wovon vier in den Achsen des zur Konstruktion der Ellipse verwendeten Koordinatensystems liegen. Die zwei in der x-Achse gelegenen Punkte haben die Abszissen x_1, x_2; diese müssen der Bedingung genügen $\alpha x^2 + \delta x - 1 = 0$, woraus folgt $\alpha = -\frac{1}{x_1 x_2}$; $\delta = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$. In gleicher Weise erhält man aus den in der y-Achse gelegenen Punkten mit den Ordinaten y_1, y_2

$$\beta = -\frac{1}{y_1 y_2}; \quad \varepsilon = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2}.$$

γ wird durch die Koordinaten x_3, y_3 eines fünften Punktes bestimmt, der so gewählt werden soll, daß das Produkt $x_3 y_3$ möglichst groß sei.

Die Verwertung der Beobachtungszeiten zur Bestimmung aller Elemente gestattet die von *Th. Thiele*[32]) ausgearbeitete, auch bei sehr großen Neigungen anwendbare Methode, welche dadurch, daß sie sich auf ein Integrationsverfahren stützt, den Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Resultate wesentlich vermindert. Nach den in Nr. 2 gegebenen Entwicklungen ist:

$$t_2 - t_1 - x_1 x_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 - \sin(\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1)],$$

wo x durch y ersetzt werden kann. Indem man einmal an Stelle des ersten Orts, ein anderes Mal an Stelle des zweiten den dritten Ort verwendet, erhält man drei Gleichungen, welche, da die Integrale durch Quadratur erhältlich sein sollen, zur Ermittlung von

$$n,\ \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 = \varphi,\ \ \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1 = \psi$$

ausreichen. Infolge der Bestimmung der Bahn aus acht (in den drei Gleichungen enthaltenen) unabhängigen Größen ist eine scharfe Darstellung der drei Örter nur dann zu erwarten, wenn die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{1}{c}(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)$$

in ihrer Anwendung auf den dritten Ort durch denselben Wert von c befriedigt wird.

Die *Kepler*sche Gleichung bestimmt

$$e \cos\frac{\mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_1}{2} = C \quad \text{und} \quad e \cos\frac{\mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_1}{2} = D$$

32) Neue Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen; Astr. Nachr. 104 (1883).

aus den Werten von φ und ψ; e und E_1 werden aus den Gleichungen gefunden

$$C \cos \frac{\psi}{2} - D \cos \frac{\varphi}{2} = e \sin \mathrm{E}_1 \sin \frac{\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2}{2}$$

$$C \sin \frac{\psi}{2} - D \sin \frac{\varphi}{2} = e \cos \mathrm{E}_1 \sin \frac{\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2}{2}.$$

t_0 wird durch E bestimmt. *Thiele* führt an Stelle der übrigen Elemente der scheinbaren Bahn a_1, b_1, P_0, P_1 ein, welche mit x, y durch die Gleichungen zusammenhängen

$$x = \varrho \cos \theta = a_1 \cos P_0 (\cos \mathrm{E} - e) + b_1 \cos P_1 \sin \mathrm{E}$$

$$y = \varrho \sin \theta = a_1 \sin P_0 (\cos \mathrm{E} - e) + b_1 \sin P_1 \sin \mathrm{E}$$

und aus zwei Örtern berechnet werden können.

c) *Bahnverbesserung.* Zur Verbesserung der nach irgendeiner Methode erhaltenen Elemente einer Doppelsternbahn wird man aus diesen eine Ephemeride rechnen, die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten θ und ϱ bilden und in Normalörter zusammenfassen und dann mittels der Differentialquotienten der Koordinaten des Ortes nach den Elementen die Größen ableiten, welche zu den ursprünglichen Elementen summiert, alle Örter mit Rücksicht auf das jedem einzelnen zukommende Gewicht am besten darstellen. Die Differentialquotienten findet man bei *A. Marth*[33]). Die Bildung der Funktion, die ein Minimum werden soll, aus den Quadraten der Abweichungen in Richtung und Distanz muß dem Takt des Rechners überlassen bleiben.

d) *Bemerkungen über die bekannten Doppelsternbahnen.* Der Umstand, daß eine Bahnbestimmung sich auf Beobachtungen stützen muß, die sich über den größeren Teil eines Umlaufs des Begleiters erstrecken, macht es erklärlich, daß die Zahl der bekannten Doppelsternbahnen noch gering ist. *G. Aitkens*[34]) Katalog enthält die Elemente von 91 Bahnen, wovon 53 gut bestimmt, die übrigen aber unsicher sein sollen. Darf man behaupten, daß die Bewegung der Doppelsterne, deren Bahnen gut bestimmt sind, durch das *Newton*sche Gesetz beherrscht werden? Die Behandlung des *Bertrand*schen Problems[35]), die Form der mit den Bedingungen, daß die Flächengeschwindigkeit in der wahren Bahn konstant und daß die scheinbare Bahn eine Ellipse sei, verträglichen

33) *A. Marth,* On the formulae for correcting Approximate Elements of the Orbits of Binary Stars; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 47 (1887).

34) Lick Obs. Bull. 84 (1905).

35) *J. B. Bertrand, G. Darboux, G. H. Halphén,* Paris C. R. 84 1877; *F. Tisserand,* Paris Bull. astr. IV 1887.

Kraftgesetze zu bestimmen, läßt bei einigen an sich sehr wahrscheinlichen Annahmen das *Newton*sche Gesetz als die einzige Lösung erscheinen. Die Unvollkommenheit der Doppelsternmessungen erschwert jedoch die Prüfung des elliptischen Charakters der scheinbaren Bahn so sehr, daß das Urteil *Dunér*s[36]): „Es wäre kaum zu rechtfertigen, irgendeine der bisherigen Bahnbestimmungen als Bestätigung der Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes außerhalb des Sonnensystems anzuführen" auch jetzt noch als zutreffend anzusehen ist, wenn man eine Bestätigung von einiger numerischer Exaktheit fordert. Die kleinste Periode, wahrscheinlich 5, 7 Jahre, besitzt δ *Equulei.* Unter den Exzentrizitäten kommen fast alle Werte vor; doch sind wenige so klein, wie bei den Planeten, oder so groß, wie bei den Kometen. Die kleinste Exzentrizität (0,13) hat ξ Scorpii, die größte (0,90) γ Virginis. Der aus den Exzentrizitäten von 40 Bahnen abgeleitete mittlere Wert $e = 0{,}48$ dürfte, da die Häufigkeit der Bahnen, welche auf gleiche Änderungen von e entfallen, in der Nähe dieses Wertes ein klar ausgesprochenes Maximum besitzt, den Bahnen visueller Doppelsterne im allgemeinen ungefähr entsprechen.[37]) Je größer P ist, desto größer ist im Durchschnitt auch e. Durch Einteilung von 45 nach der Länge der Periode geordneten Bahnen in drei Gruppen: $P < 50$, $50 < P < 120$ und $P > 120$ fand *G. Doberck*[38]) für die mittleren Exzentrizitäten die Werte 0,37, 0,50 und 0,62. Die nahe liegende Schlußfolgerung, daß die Exzentrizitäten mit der Entfernung der Komponenten zunehmen, ist aber vielleicht doch zu weitgehend, da *Doberck*s[39]) Untersuchungen über die Werte von n^2a^3 andeuten, daß enge Doppelsterne entweder eine kleinere Parallaxe oder eine kleinere Masse besitzen als weite. Die Neigung der Bahnen zeigt keinen Zusammenhang mit irgendeinem größten Kreise der Sphäre, wohl aber die Verteilung der Doppelsterne. Nach *Doberck*[40]) findet eine Anhäufung der Paare gegen den Kreis hin statt, dessen nördlicher Pol die Koordinaten hat $\alpha = 11^h 40^m$; $\delta = +22^0$, und daher dem Pole des *Gould*schen Kreises[41]) sehr nahe liegt. Die Dichte der Paare in der Nähe des Kreises ergab sich ungefähr dreimal so groß als in der Nähe seiner Pole. Die in Betracht gezogenen Paare sind,

36) Einige Bemerkungen über verschiedene Berechnungen von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. 132 (1893).

37) *T. J. See,* Researches on the Evolution of the Stellar Systems Vol. I, 1896.

38) On Double Star Orbits. Astr. Nachr. 147 (1898).

39) On the Axes and Periods of Double Stars. Astr. Nachr. 138 (1895).

40) On the Distribution of Binary Stars. Astr. Nachr. 158 (1902).

41) *H. Kobold,* Der Bau des Fixsternhimmels (Seite 154) Braunschweig 1906.

um optische Doppelsterne nach Tunlichkeit fern zu halten, so ausgewählt worden, daß der Abstand der Komponenten und die Größenklasse der helleren Komponente die Grenzen 2″,0 bzw. 7,5 nicht überstiegen.

Daß ein Fixstern, dessen Eigenbewegung im Laufe eines Jahrhunderts sich als veränderlich erweist, mit einem oder mehreren anderen Sternen zu einem physischen Systeme verbunden sein muß, hat *Bessel* bewiesen. *Pond* glaubte in den Eigenbewegungen einiger Sterne Veränderungen zu bemerken, die aber durch spätere Beobachtungen nicht bestätigt worden sind. *H. W. Bessel*[42]) dagegen konnte aus den Rektaszensionen des Sirius und den Deklinationen des Procyon eine Veränderlichkeit der Eigenbewegung konstatieren. Die Bahn des Sirius ist von *Peters*[43]) und später von *A. Auwers*[44]) bestimmt worden, noch bevor *A. Clark* (1862) gelegentlich der Prüfung des Washingtoner 26-Zöllers den Begleiter (Stern 10ter Größe) entdeckt hat. Messungen der Distanz gaben die noch unbekannte Halbachse der Doppelsternbahn. Nach *Zwiers*[45]) ist $P = 48{,}8$, $a = 7'',59$, $e = 0{,}59$, $\frac{m + m'}{m_0} = 3{,}3$; $\frac{m'}{m} = \frac{1{,}04}{2{,}20}$ (*Auwers*). Procyon beschreibt nach *Auwers*[46]) eine Kreisbahn mit dem Radius 0″98 (nach *L. Struve*: 0″74) in nahe 40 Jahren. *Schäberle*[47]) hat (1896) einen Begleiter 13ter Größe entdeckt ($\theta = 319^0$, $\varrho = 4'',6$); der berechnete Wert von θ ist 284^0. *A. Auwers*[48]) hält die Identität des entdeckten Begleiters mit dem störenden Körper in dem System des Sirius für sicher, in dem des Procyon aber, besonders mit Rücksicht auf die beobachtete Änderung der Distanz, für sehr zweifelhaft. Mehrere Sterne scheinen dunkle Begleiter zu besitzen; die Bewegungen der Komponenten des dreifachen Sternes ζ Cancri[49]) und des Doppelsternes 70 Ophiuchi[50]) machen zu ihrer Erklärung die Annahme unsichtbarer Begleiter notwendig.

42) Über Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Fixsterne. Astr. Nachr. 22 (1845); Bessel Abhdl. I.

43) *C. A. F. Peters*, Astr. Nachr. 32 (1851).

44) Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen, I. Teil, Königsberg 1862, II. Teil, Leipzig 1868.

45) *W. W. Campbell,* Variable Radial Velocity of Sirius. Astrophys. Journal 21 (1905).

46) Berl. Ber. 1873.

47) Astr. Nachr. 142 (1897).

48) Astr. Nachr. 164 (1904).

49) *H. Seeliger,* Wien. Denkschr. 44 (1881); Münch. Abhdl. 17 (1892); Münch. Ber. 24 (1894); *P. Harzer*, Astr. Nachr. 116 (1887).

50) *A. Prey*, Wien. Denkschr. 72 (1901).

4. Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne. Die zuerst von *Huggins* im Jahre 1867 angewandte Methode der Bestimmung der Radialgeschwindigkeit von Fixsternen durch direkte Messung der Verschiebung von Linien des Sternspektrums gegen die Linien eines Vergleichsspektrums ist durch die von *H. C. Vogel* und *J. Scheiner* 1888 eingeführte und seither immer mehr vervollkommnete spektrographische Methode schon seit Jahren vollständig verdrängt worden, da es sich gezeigt hatte, daß die Linienverschiebung in den Spektrogrammen viel sicherer gemessen werden kann als in dem sich dem Auge darbietenden vibrierenden und fluktuierenden Spektralbande. Die Vergleichung der aus mehreren Beobachtungen eines einfachen Sternes abgeleiteten, auf die Sonne reduzierten Radialgeschwindigkeiten gibt ein Maß für die Sicherheit ihrer Bestimmung. Diese ist gegenwärtig so groß, daß unter besonders günstigen Umständen (starke Zerstreuung, scharfe Linien) die Abweichungen nur Bruchteile eines Kilometers betragen. Die hohe Leistungsfähigkeit der neuen Methode wurde schon im Jahre 1889 bewiesen, indem *Vogel*[51]) aus den beobachteten Radialgeschwindigkeiten *Algols* eine Veränderlichkeit derselben im Höchstausmaße von 80 Kilometern konstatieren und den Nachweis erbringen konnte, daß der Lichtwechsel dieses Sternes in dessen zeitweiliger Bedeckung durch einen relativ dunklen Begleiter begründet ist. Einige Jahre darnach hat die Lick-Sternwarte die systematische Beobachtung der Radialgeschwindigkeiten der Fixsterne und namentlich auch der Sterne mit veränderlicher Radialgeschwindigkeit (spektroskopische Doppelsterne) in ihr Arbeitsprogramm aufgenommen, welchem Beispiele dann auch die Yerkes-Sternwarte folgte. Das rasche Anwachsen der Zahl der Entdeckungen spektroskopischer Doppelsterne ist vornehmlich dem Beobachtungsdienste an diesen Instituten zu danken.

*W. W. Campbell*s Second Catalogue (Lick Obs. Bull. 181, 1910) verzeichnet bereits 306 spektroskopische Doppelsterne und darunter mehr als 70, wovon ziemlich verläßliche Bahnbestimmungen vorliegen. Die Duplizität von Sternen, deren Geschwindigkeitsänderung weniger als 6 Kilometer beträgt, oder deren Helligkeit geringer ist als die eines Sternes 7ter — 8ter Größe, ist zurzeit schwer nachweisbar. Sehr bemerkenswert ist die Häufigkeit einer veränderlichen Geschwindigkeit bei Sternen vom Oriontypus. Wie unter den visuellen Doppelsternen enge Paare viel häufiger vorkommen als weite, so entfallen auf die gleiche Anzahl von Sternen auch weit mehr spektroskopische Doppelsterne als visuelle.[52])

51) Spektrographische Beobachtung an Algol. Astr. Nachr. 123 (1890).

Die Bahn, welche eine Komponente des Doppelsternes um dessen Schwerpunkt beschreibt, wird durch die Radialgeschwindigkeiten dieser Komponente, die Bahn, in der sich eine Komponente um die andere bewegt, durch die Differenzen der Radialgeschwindigkeiten beider Komponenten bestimmt. Der Erfolg einer Bahnbestimmung ist in der Regel nur dann gesichert, wenn die beobachteten Geschwindigkeiten die Periode erkennen lassen und, eventuell durch Änderung der Beobachtungszeiten um ganzzahlige Vielfache von P, innerhalb des ganzen Zeitraumes einer Periode die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit zu bestimmen gestatten. Den Zusammenhang von Geschwindigkeit und Zeit kann man wohl am bequemsten dadurch finden, daß man die auf eine und dieselbe Periode reduzierten Beobachtungszeiten als Abszissen, die zugehörigen Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt und eine regelmäßig verlaufende Kurve zu ziehen versucht, welche sich den Endpunkten der Ordinaten bestmöglich anschließt. Je schärfer die Geschwindigkeitskurve durch die Beobachtungen bestimmt erscheint, desto größer wird auch die Sicherheit der Bahnbestimmung sein.

Die Einheiten der Zeit und des Weges seien mittlerer Tag und Kilometer. Da sich die Radialgeschwindigkeiten der Sterne stets auf die Sekunde beziehen, so wird ihre Reduktion auf die gewählte Zeiteinheit durch den Faktor $\gamma = 86400$ bewerkstelligt.

Der Stern Σ habe die Masse m, Σ' die Masse m'. Der Schwerpunkt des Systems befinde sich in S, die Sonne in O. Es sei

$$\Sigma O = Z \qquad Z - Z_0 = \zeta \qquad \frac{dZ_0}{dt} = \gamma \mathrm{V}_0$$

$$\Sigma' O = Z' \qquad Z - Z' = z \qquad \frac{dZ}{dt} = \gamma \mathrm{V}$$

$$SO = Z_0 \qquad S\Sigma = \varrho \qquad \frac{dz}{dt} = \gamma V$$

$$\Sigma\Sigma' = r.$$

α = Halbachse der Bahn von Σ mit Bezug auf S

a = „ „ „ „ Σ „ „ „ Σ'.

Dann findet sich nach den Gesetzen der *Kepler*schen Bewegung:

$$(m + m')\zeta = m'z; \qquad \zeta = \frac{\alpha}{a} z; \qquad z = r \sin u \sin i$$

$$(m + m')\alpha = m'a; \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\alpha}{a}\frac{dz}{dt}; \qquad r^2 \frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1 - e^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1 - e^2}}(\cos u + e \cos \omega).$$

52) Lick Obs. Bull. 79 (1903).

Je nachdem die auf die Sonne reduzierten Radialgeschwindigkeiten V des Sternes Σ oder die Differenzen V der Radialgeschwindigkeiten von Σ und Σ' gegeben sind, wird man von den Gleichungen ausgehen

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 + \frac{1}{\gamma}\frac{d\zeta}{dt} \quad \text{oder} \quad V = \frac{1}{\gamma}\frac{dz}{dt}.$$

Durch Integration der ersten Gleichung zwischen den Grenzen t und $t + \mathrm{P}$, für welche ζ denselben Wert besitzt und daher $\int d\zeta = 0$ ist, erhält man die Radialgeschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$\mathsf{V}_0 = \frac{1}{\mathrm{P}}\int \mathsf{V}\,dt.$$

Diese Gleichung kann man auch schreiben $\int(\mathsf{V} - \mathsf{V}_0)dt = 0$ und demnach V_0 aus der Bedingung ableiten, daß eine zur Abszissenachse parallele Gerade, welche die auf entgegengesetzten Seiten liegenden, von ihr und der Geschwindigkeitskurve begrenzten Flächenstücke gleich groß macht, die Ordinate V_0 besitzen muß.

Ist V' die Ordinate eines Kurvenpunktes mit Bezug auf diese Gerade, so wird

$$\mathsf{V}' = \Gamma(\cos u + e\cos\omega); \quad \Gamma = \frac{n\,\alpha\sin i}{\gamma\sqrt{1-e^2}}.$$

V' erreicht den größten positiven Wert (A) für $u = 0$, den größten negativen $(-B)$ für $u = \pi$; es ist also:

$$\Gamma = \frac{A+B}{2}; \quad e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B}.$$

Um e zu finden, bestimmte *A. A. Rambaut*[53]), welcher von diesen Gleichungen zuerst Gebrauch gemacht hat, zunächst die Projektion der wahren Ellipse auf eine die Gesichts- und Knotenlinie enthaltende Ebene (ξ, ζ). Für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $\xi = 0$, $\mathsf{V}' = \frac{A-B}{2}$.

Ist T einer dieser Zeitpunkte, so folgt aus dem Flächensatz:

$$\xi = c'\cdot\zeta\int_T^t \frac{dt}{\zeta^2}.$$

Entsprechen ferner den Momenten, in welchen der Reihe nach $\mathsf{V}' = A,\ 0,\ -B,\ 0$ wird, die Zeiten τ_1, t_1, τ_2, t_2, so ist

$$\zeta = \gamma\int_{\tau_1}^t \mathsf{V}'\,dt.$$

53) On the Determination of Double Star Orbits; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 51 (1891).

Damit ist die Projektionsellipse gegeben, aus der sich e leicht ablesen läßt. Da die Projektionsellipse nur zur Ermittlung von e dienen soll, kann c' nach Belieben angenommen werden.

R. Lehmann-Filhés[54]) gibt eine bequemere Lösung durch Aufstellung einer Gleichung für $e \sin \omega$. Besitzt u für t_1, t_2 die Werte u_1, u_2, so ist, da

$$0 < u_1 < \pi \quad \text{und} \quad \pi < u_2 < 2\pi, \quad \cos u_1 = \cos u_2 = -e \cos \omega = -\frac{A-B}{A+B};$$

$$u_2 = 2\pi - u_1; \quad \sin u_1 = +\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}.$$

Aus

$$\zeta = \varrho \sin u \sin i$$

$$\varrho = \frac{\alpha(1-e^2)}{1 + e \cos(u - \omega)}$$

folgt für die Zeiten t_1 und t_2 . . .

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -\frac{\sin u_1 - e \sin \omega}{\sin u_1 + e \sin \omega}$$

und daraus

$$e \sin \omega = \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \sin u_1.$$

ζ_1, ζ_2 werden durch Quadratur erhalten aus

$$\zeta_1 = \gamma \int_{\tau_1}^{t_1} V' dt; \quad \zeta_2 = \gamma \int_{\tau_2}^{t_2} V' dt.$$

Nach Bestimmung von e und ω ergibt sich t_0 aus den Formeln

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{u-\omega}{2}; \quad E - e \sin E = n(t - t_0),$$

welche am zweckmäßigsten für t_1 und t_2 zu verwenden sind. Bei großen Exzentrizitäten leistet die Formel $\sqrt{1-e^2} = \pi \operatorname{tg} u_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t_2 - t_1}{P}\right)$ gute Dienste. Die Γ definierenden Gleichungen geben

$$\alpha \sin i = \frac{\gamma}{n} \frac{A+B}{2} \sqrt{1-e^2}.$$

Ω, α, i bleiben unbestimmt, da die Radialgeschwindigkeit von Ω unabhängig ist und die Elemente α und i nur in der Kombination $\alpha \sin i$ enthält.

Sind die relativen Geschwindigkeiten V gegeben, so bleibt V_0 unbestimmt. Die zur Berechnung der Bahnelemente dienenden Formeln bleiben in Gültigkeit, wenn V, r, a an Stelle von V', ϱ, α ge-

54) Über Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spektr. Mess. Astr. Nach. 136 (1894).

setzt werden. Da

$$\frac{m+m'}{m_0} = \frac{n^2}{k_0^2} \cdot \frac{a^3}{a_0^3}, \text{ wird } \frac{m+m'}{m_0} \sin^3 i = \frac{1}{k_0^2 \cdot n} \left[\frac{\gamma(A+B)\sqrt{1-e^2}}{2a_0} \right]^3,$$

wodurch eine untere Grenze für die Masse des Doppelsternes festgelegt ist. Die Erdbahnhalbachse a_0 ist in Kilometern auszudrücken; $\lg k_0 = 8{,}23558$.

Vorzüge der Methode von *Lehmann-Filhés* sind ihre allgemeine Anwendbarkeit und die Sicherheit der Bestimmung der Elemente durch Quadraturen; die Umständlichkeit der Ausführung von Quadraturen bildet aber einen Nachteil, den *K. Schwarzschild*[55]) durch Verwertung der Koordinaten gewisser Punkte der Geschwindigkeitskurve vermeidet.

Bedeutet M das Maximum, N das Minimum der Radialgeschwindigkeit $\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 + \Gamma(\cos u + e \cos \omega)$ und ist W definiert durch

$$\mathsf{W} = \mathsf{V} - \frac{M+N}{2}, \quad \text{so wird } \mathsf{W} = \Gamma \cos u; \quad \Gamma = \frac{M-N}{2}.$$

Wenn $\mathsf{W}' = -\mathsf{W}$ ist, wird $\cos u' = -\cos u$ und demnach entweder

(1) $$u' + u = \begin{cases} \pi \\ 3\pi \end{cases}$$

oder für $u' > u$

(2) $$u' - u = \pi.$$

Nennt man ein von der größten und kleinsten Ordinate begrenztes Stück der Geschwindigkeitskurve einen Zweig derselben, so ist für einen Zweig $0 < u < \pi$ für den andern $\pi < u < 2\pi$; die Relation (1) drückt daher aus, daß die Punkte W, t und $-\mathsf{W}, t'$ auf gleichen, die Relation (2), daß sie auf verschiedenen Zweigen der Kurve liegen. Für $u' - u = \pi$ wird

$$v' - v = \pi, \quad \operatorname{tg}\frac{v'}{2} \operatorname{tg}\frac{v}{2} = -1 = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}\frac{\mathrm{E}'}{2} \operatorname{tg}\frac{\mathrm{E}}{2},$$

$$-\operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\mathrm{E}'}{2} \operatorname{tg}\frac{\mathrm{E}}{2} = -\frac{1-\cos v}{1+\cos v},$$

woraus folgt

$$e \cos\frac{\mathrm{E}'+\mathrm{E}}{2} = \cos\frac{\mathrm{E}'-\mathrm{E}}{2}, \quad \sin\frac{\mathrm{E}'+\mathrm{E}}{2} = \cos v \sin\frac{\mathrm{E}'-\mathrm{E}}{2}$$

und unter Bezugnahme auf die *Kepler*sche Gleichung

$$\mathrm{E}' - \mathrm{E} - \sin(\mathrm{E}' - \mathrm{E}) = n(t' - t).$$

Der spezielle Fall, wo die Zeitdifferenz $\frac{1}{2}$P beträgt, soll hier durch die

55) Ein Verfahren der Bahnbestimmung bei spektr. Doppelsternen. Astr. Nachr. 152 (1900).

Indizes 1 und 2 gekennzeichnet sein. Das Punktepaar, für welches $W_2 = -W_1$, $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}P$, $u_2 - u_1 = \pi$, entspricht, da auch $E_2 - E_1 = \pi$ ist, dem Periastron und Apastron. Die Zeit des Periastrons ist demnach eine der Abszissen t_1, t_2 des auf verschiedenen Zweigen der Kurve gelegenen durch $W_2 = -W_1$ und $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}P$ bestimmten Punktepaares. Das Periastron hat ein positives bzw. negatives W, je nachdem die Kurve der positiven bzw. negativen W rascher durchlaufen wird und in der Nähe des in Frage kommenden Punktes stärker gegen die Abszissenachse geneigt ist.

ω wird bestimmt durch $\Gamma \cos\omega =$ Ordinate W des Periastrons. Die Anwendbarkeit dieser Methode erfährt eine Beschränkung durch die für große Werte von $\cos\omega$ auftretende Unsicherheit der Bestimmung von ω aus $\cos\omega$. Um e zu finden, wähle man einen Kurvenpunkt (W, t) ungefähr in der Mitte zwischen Periastron und Apastron, suche auf dem anderen Zweige der Kurve einen zweiten Punkt (W', t'), so daß $W' = -W$, und bediene sich der oben angesetzten Gleichungen unter Berücksichtigung, daß $v = u - \omega$; $\cos u = \frac{W}{\Gamma}\cdot$ Die Auflösung der transformierten *Kepler*schen Gleichung wird durch eine Tafel mit dem Argument $t' - t$ wesentlich erleichert. Die übrigen Unbekannten erhält man aus $V_0 = \frac{M+N}{2} - e\Gamma\cos\omega$; $a \sin i = \frac{\gamma}{n}\Gamma\sqrt{1-e^2}$.

Sind die Werte von V gegeben, wird, nachdem ω bekannt geworden ist, e aus der Gleichung $\frac{M+N}{M-N} = e\cos\omega$ gefunden.

H. Nijland[56]) empfiehlt zur Bestimmung von e die Wahl der durch ihre symmetrische Lage zum Periastron im allgemeinen leicht bemerklichen Punkte $v = \pm\frac{\pi}{2}$, deren Ordinaten $W = \mp\Gamma\sin\omega$ sind. Die Auffindung dieser Punkte wird bei sehr kleinen Werten von $\sin\omega$ unsicher. Ist Δt ihre Abszissendifferenz, so wird

$$2E - \sin 2E = \Delta t; \quad e = \cos E.$$

Zwei Wertepaare von V, V genügen zur Bestimmung von V_0 und $\frac{m'}{m}$, da $V = V_0 + \frac{\alpha}{a}V$ und $\frac{\alpha}{a} = \frac{m'}{m+m'}$; werden die Radialgeschwindigkeiten von Σ und Σ' mit g und g' bezeichnet, so ist

$$g = V, \quad g' = V - V \quad \text{und} \quad g' + g = 2V_0 + \frac{m-m'}{m+m'}(g' - g).$$

W. Zurhellen[57]) empfiehlt, zunächst aus diesen Gleichungen V_0 und $\frac{m'}{m}$ zu bestimmen.

56) Zur Bahnbestimmung von spektr. Doppelsternen. Astr. Nachr. 161 (1903).

57) Bemerkungen zur Bahnbestimmung spektr. Doppelsterne. Astr. Nachr. 175 (1907).

Wenn die anfangs gezeichnete Geschwindigkeitskurve beträchtliche Fehler aufweist, wie dies bei Sternen, deren Spektra schwierig zu messen sind, gewöhnlich vorkommt, werden die wahrscheinlichsten Bahnelemente nur im Wege fortgesetzter Näherungen zu erhalten sein. In solchen Fällen kann man den angestrebten Zweck durch sukzessive Verbesserungen der Geschwindigkeitskurve erreichen, wozu sich die graphische Methode von *W. F. King*[58]) besonders eignet.

Die Bahnelemente eines spektroskopischen Doppelsternes können auch auf *analytischem* Wege erhalten werden, indem man V durch Reihenentwicklung als Funktion der Zeit darstellt und die Koeffizienten aus den Beobachtungsdaten bestimmt. *J. Wilsing*[59]) hat sich auf die Bestimmung von Bahnen mit kleiner Exzentrizität beschränkt; bei größeren Exzentrizitäten kann man sich der Methode von *N. H. Russel*[60]) bedienen, welche die Reihenentwicklung voraussetzt:

$$V = C_0 + C_1 \cos N + C_2 \cos 2N + \cdots + S_1 \sin N + S_2 \sin 2N + \cdots,$$

wo $N = n(t - \tau)$, $\tau =$ Epoche; die zu τ gehörige mittlere Anomalie (M) sei mit M_0 bezeichnet. Durch die Substitution $C = G \cos g$; $S = - G \sin g$ erhält man

$$V = G_0 + G_1 \cos (N + g_1) + G_2 \cos (2N + g_2) + \cdots.$$

In eine Reihe von derselben Form läßt sich die Gleichung

$$V = V_0 + \frac{1}{\gamma} \frac{d\zeta}{dt}$$

überführen; es ist nämlich

$$\frac{\varrho}{\alpha} \cos v = \frac{3}{2} e + X_1 \cos M + \frac{1}{2} e X_2 \cos 2M + \cdots$$

$$\frac{\varrho}{\alpha} \sin v = \qquad Y_1 \sin M + \frac{1}{2} e Y_2 \sin 2M + \cdots.$$

Die Koeffizienten sind Funktionen der Exzentrizität, die von der Einheit nur um Größen von der Ordnung e^2 verschieden sind.

Setzt man

$$X \sin \omega = b \sin \beta$$

$$Y \cos \omega = b \cos \beta,$$

so ist, da $\zeta = \varrho \sin i \sin (v + \omega)$ und $M = N + M_0$

$$V = V_0 + \frac{\alpha n \sin i}{\gamma} [b_1 \cos(N + M_0 + \beta_1) + e b_2 \cos(2N + 2M_0 + \beta_2) + \cdots].$$

58) Determination of the Orbits of Spektroscopic Binaries. Astroph. Journ. 27 (1908).

59) Über die Bestimmung von Bahnelementen enger Doppelsterne aus spektr. Mess. Astr. Nach. 134 (1894).

60) An improved Method of calculating the Orbit of a Spectr. Binary. Astrophys. Journal 15 (1902).

Die Elemente werden auf dem Wege fortgesetzter Näherungen erhalten. Die erste Näherung, bei welcher schon e^2 unberücksichtigt bleibt, ist die *Wilsing*sche Lösung: $X = Y = b = 1$; $\beta = \omega$:

$$V_0 = G_0; \quad a \sin i = \frac{\gamma}{n} G_1; \quad e = \frac{G_2}{G_1}; \quad M_0 = g_2 - g_1; \quad \omega = 2g_1 - g_2.$$

5. Einige Ergebnisse der Beobachtung und der Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne.[61]) Die Änderung der Radialgeschwindigkeit nimmt zugleich mit der Geschwindigkeit der Revolutionsbewegung bei wachsender Entfernung der Komponenten eines Doppelsternes ab und wird demnach, wenn die Entfernung eine gewisse Grenze überschreitet, aufhören, meßbar zu sein. Diese Grenze dürfte, bei ausreichender Lichtstärke der Komponenten, öfters zur Auflösung des Doppelsternes durch das Fernrohr mehr als genügen. Bis jetzt sind aber nur sehr wenige Sterne bekannt, deren Duplizität durch das Fernrohr mit und ohne Spektroskop zu erkennen ist. Hierzu gehören ε Hydrae und δ Equulei, deren Perioden 15,7 bzw 5,7 Jahre betragen. Da man in solchen Fällen die Neigung i der Bahn aus den direkten Messungen der Komponenten, $a \sin i$ dagegen aus den spektrographischen Beobachtungen bestimmen kann, so können die Dimensionen der Bahn in linearem Maße sowie die Parallaxe gefunden werden.

Im allgemeinen entfernen sich aber die Komponenten der spektroskopischen Doppelsterne zu wenig voneinander, als daß es möglich wäre, sie im Fernrohre getrennt wahrzunehmen, und man ist daher bei der Untersuchung dieser Systeme lediglich auf die Messung der Radialgeschwindigkeiten angewiesen. Zurzeit (Ende 1910) sind, wie erwähnt, ungefähr 70 Bahnen spektroskopischer Doppelsterne bekannt, und es ist bereits möglich gewesen, einige allgemeinere Schlüsse über ihre Eigentümlichkeiten zu ziehen. Zusammenfassende Diskussionen des vorhandenen Materials sind gleichzeitig von *F. Schlesinger* und *R. H. Baker*[62]), *H. Ludendorff*[63]) und *W. W. Campbell*[64]) geliefert worden. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeiten sollen hier kurz dargelegt werden.

---

61) Verfaßt von *H. Ludendorff* in Potsdam.

62) *F. Schlesinger* and *R. H. Baker,* A Comparative Study of Spectroscopic Binaries. Publications of the Allegheny Observatory of the University of Pittsburgh. Volume I, No. 21 (1910).

63) *H. Ludendorff,* Zur Statistik der spektr. Doppelsterne. Astr. Nachr. 184 (1910).

64) *W. W. Campbell*, Second Catalogue of Spectroscopic Binary Stars. Lick Obs. Bull. No. 181 (1910).

Was zunächst die Exzentrizitäten angeht, so zeigt es sich, daß die Bahnen der spektroskopischen Doppelsterne durchschnittlich bedeutend weniger exzentrisch sind als die der visuellen Doppelsterne. Sowohl bei den letzteren wie bei den spektroskopischen Doppelsternen verrät sich im Durchschnitt eine deutliche Zunahme der Exzentrizität mit der Periode. Dies erkennt man an der folgenden, von *Schlesinger* und *Baker* gegebenen Tabelle:

	Mittlere Periode	Mittlere Exzentrizität
Spektroskopische Doppelsterne v. kurzer Periode	4 Tage	0,07
„ „ „ langer „	129 „	0,35
Visuelle „ „ kurzer „	36 Jahre	0,45
„ „ „ langer „	136 „	0,54

Für die visuellen Systeme hat übrigens, wie bereits in Nr. 3d erwähnt, *W. Doberck* schon früher auf dieses Verhalten aufmerksam gemacht. Die auffallende Gesetzmäßigkeit ist für die Entwicklungsgeschichte der Sterne von Interesse. Dasselbe gilt von folgender Tatsache: Diejenigen spektroskopischen Doppelsterne, welche Spektra besitzen, wie sie nach den heutigen Anschauungen einer verhältnismäßig frühen Entwicklungsstufe entsprechen (Spektra der *Vogel*schen Spektralklasse Ib und Ia_2) haben im Durchschnitt kürzere Umlaufszeiten und engere Bahnen als diejenigen, deren Spektra weiter entwickelt sind (Spektra der Spektralklassen Ia_3 und IIa). Es ist nämlich für die erste Gruppe im Mittel $P = 30$ Tage, $a \sin i = 16\,500\,000$ km, für die zweite Gruppe $P = 167^{\mathrm{d}}$, $a \sin i = 29\,500\,000$ km. Es ist hierbei allerdings zu beachten, daß man unter den spektroskopischen Doppelsternen der ersten Gruppe bisher hauptsächlich solche mit großen Änderungen der Radialgeschwindigkeit zur Bahnbestimmung ausgewählt hat, so daß das obige Resultat dem Sinne nach reell, numerisch aber etwas übertrieben sein dürfte.

Über die Massen der spektroskopischen Doppelsterne kann man nur dann einigen Aufschluß erhalten, wenn die Radialgeschwindigkeiten beider Komponenten gemessen worden sind. Man kann alsdann die Größen $m \sin^3 i$ und $m' \sin^3 i$ angeben. i ist zwar im allgemeinen unbekannt, immerhin liefern jene beiden Größen aber Minimalwerte für die beiden Massen. Es hat sich nun gezeigt, daß die lichtschwächere Komponente in allen diesen Systemen auch stets die kleinere Masse besitzt. Die numerischen Werte von $m \sin^3 i$ und

$m' \sin^3 i$ variieren innerhalb ziemlich weiter Grenzen. Die bisher beobachteten Extreme sind (in Sonnenmassen ausgedrückt) 0,52 und 0,38 bei ϑ Aquilae, 11,2 und 10,6 bei η Orionis. Im Mittel aus 15 von *Schlesinger* und *Baker* aufgeführten Fällen ist $(m + m') \sin^3 i = 6$ Sonnenmassen, so daß also diese Systeme durchschnittlich weit größere Massen haben als die Sonne. Man wird sich aber vor dem Schlusse hüten müssen, daß große Masse eine allgemeine Eigenschaft der spektroskopischen Doppelsternsysteme ist. Denn es ist zu beachten, daß es sich in jenen 15 Fällen um helle Sterne handelt, für die schon ihrer Helligkeit wegen größere Massen wahrscheinlich sind.

Ist bei einem spektroskopischen Doppelstern nur das Spektrum einer Komponente sichtbar, so kann man nur die Größe $\frac{m'^3 \sin^3 i}{(m + m')^2}$ berechnen, welche proportional $\frac{(a \sin i)^3}{P^2}$ ist. Da sowohl i wie $\frac{m'}{m}$ unbekannt sind, so kann man keinerlei Angaben über die Einzelmassen machen. Immerhin ermöglicht das Verhalten der $a \sin i$ und P bei den verschiedenen Systemen den Schluß, daß die Größe und die Verteilung der Massen in den einzelnen Systemen durchschnittlich recht gleichmäßig ist. Ordnet man nämlich die Bahnen der spektroskopischen Doppelsterne nach der Periode P und bildet aus benachbarten Werten von P und den zugehörigen Werten von $a \sin i$ die Mittel P_0 und $(a \sin i)_0$, so zeigt sich nach *H. Ludendorff*, daß die $(a \sin i)_0^3$ und P_0^2 in einem einigermaßen konstanten Verhältnis stehen, so daß sich also für kurzperiodische Systeme ungefähr derselbe Wert von $\frac{m'^3 \sin^3 i}{(m + m')^2}$ ergibt wie für langperiodische.

Der Fall, daß nur das Spektrum der helleren Komponente sichtbar ist, ist der weitaus häufigere. Immerhin hat man bisher bei ungefähr 60 Systemen mehr oder weniger deutliche Spuren des Spektrums des Begleiters nachweisen oder vermuten können. In mehreren Fällen sind die beiden Komponenten gleich hell und besitzen gleiche Spektra, so daß alsdann infolge der relativen Radialbewegung beider Komponenten periodische Linienverdoppelungen eintreten. Klassische Beispiele für diesen Fall sind die Sterne β Aurigae und ζ_1 Ursae majoris. Für letzteren sind die Elemente der relativen Bahn nach *H. C. Vogel*[65]): $P = 20^d{,}5$, $A = 128$ km, $B = 149$ km, $e = 0{,}52$, $a \sin i = 33\,000000$ km. Auch der etwa 14″ von ζ_1 Ursae majoris entfernt stehende visuelle Begleiter ζ_2 Ursae majoris ist ein spektroskopischer Doppelstern und ebenso der

65) *H. C. Vogel*, Weitere Untersuchungen über das spektr. Doppelsternsystem Mizar. — Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Série II, Tome VI. 1901, p. 661.

etwa 11′ entfernte Alkor. Da, wie aus der Gleichheit der Eigenbewegungen hervorgeht, Alkor und das visuelle Doppelsternsystem ζ Ursae majoris physisch zusammengehören, so haben wir hier ein aus drei spektroskopischen Doppelsternen bestehendes System vor uns.

Ein visueller Doppelstern, dessen beide Komponenten spektroskopische Doppelsterne sind, ist auch α Geminorum (Castor), dessen durch eine Distanz von 6″ getrennte Komponenten eine Umlaufszeit von mehreren hundert Jahren haben, so daß ihre relative Bahn noch nicht mit Sicherheit hat bestimmt werden können. Beide Komponenten sind nun, wie schon erwähnt, spektroskopische Doppelsterne. Nach *H. D. Curtis*[66]) sind für die hellere Komponente (α_2 Geminorum) die Elemente: $P = 9^d{,}22$, $A = 13{,}0$ km, $B = 14{,}1$ km, $e = 0{,}50$, $a \sin i = 1\,485\,000$ km, $V_0 = +\,6$ km, für die schwächere (α_1 Geminorum): $P = 2^d{,}93$, $A = 31{,}7$ km, $B = 31{,}8$ km, $e = 0{,}01$, $a \sin i = 1\,279\,000$ km, $V_0 = -\,1$ km. Die relative Radialgeschwindigkeit von 7 km der beiden Komponenten gegeneinander deutet auf eine ziemlich große Masse des ganzen Systems hin.

Von anderen interessanten spektroskopischen Doppelsternsystemen seien hier noch kurz erwähnt die zwei mit den kürzesten bisher festgestellten Perioden, nämlich β Cephei ($P = 0^d{,}19$) und β Canis majoris ($P = 0^d{,}25$), ferner das System β Arietis mit außerordentlich großer Exzentrizität ($e = 0{,}88$) und einige Systeme, in denen die Amplituden der Radialgeschwindigkeit sehr groß sind, nämlich u Herculis (hellere Komponente $A + B = 199$ km, schwächere Komponente $A + B = 506$ km), η Orionis ($A + B = 290$ km), ψ Orionis ($A + B = 288$ km).

Besonders bemerkenswert sind einige wenige Fälle, in denen die Werte der Radialgeschwindigkeit so verlaufen, daß man zu der Annahme eines dritten Körpers in den betreffenden Systemen gezwungen ist. Das bekannteste Beispiel dieser Art ist der Polarstern, dessen Natur als spektroskopischer Doppelstern von *W. W. Campbell*[67]) entdeckt wurde. Seine Bahnelemente sind $P = 3^d{,}97$, $A + B = 6{,}1$ km, $e = 0{,}13$, $a \sin i = 164\,500$ km. Der Schwerpunkt dieses Systems hat aber, wie *Campbell* bemerkte, keine konstante Radialgeschwindigkeit; vielmehr bewegt er sich in einer Bahn mit den Elementen $P = 11{,}9$ Jahre, $A + B = 6{,}0$ km, $e = 0{,}35$, $a \sin i = 166\,800\,000$ km. Wir haben uns das System also wie folgt vorzustellen: Ein sehr enges Doppelsternsystem mit viertägiger Umlaufszeit bewegt sich in

---

66) *H. D. Curtis,* The System of Castor. Astroph. Journ. 23 (1906), p. 351.

67) *W. W. Campbell,* The Variable Velocity of α Ursae Minoris in the Line of Sight. Astroph. Journ. 10 (1899), p. 180.

zwölfjähriger Periode um den Schwerpunkt des aus ihm und einem dritten Körper gebildeten Systems in einer Bahn, deren auf den Visionsradius projizierte große Halbachse etwas größer ist als die große Halbachse der Erdbahn. Auch bei einigen andern spektroskopischen Doppelsternen hat man Abweichungen von der einfachen elliptischen Bahnbewegung bemerkt, die aber zumeist noch nicht näher untersucht sind.[68]) Zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen wird man wohl meist die Existenz eines dritten, störenden Körpers annehmen müssen. Auch ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß in gewissen Fällen die Linienverschiebungen nicht durch Radialbewegung, sondern auf andere Weise, z. B. durch Druckänderungen, zustande kommen.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist eine Klasse von Sternen ganz außer acht gelassen worden, die in gewisser Weise den andern gegenüber eine Sonderstellung einnimmt. Es sind dies diejenigen spektroskopischen Doppelsterne, die zugleich veränderliche Sterne vom δ Cephei- und ζ Geminorum-Typus sind. Die Helligkeitsänderungen dieser Sterne verlaufen mit großer Regelmäßigkeit in Perioden von meist nur wenigen Tagen. Die Radialgeschwindigkeiten erleiden Änderungen von derselben Periode wie die Helligkeit, und das Maximum der Helligkeit fällt sehr nahe mit der größten Annäherungsgeschwindigkeit, das Minimum mit der größten von der Erde fortgerichteten Geschwindigkeit zusammen.[69]) Charakteristisch für die Bahnen ist ziemlich starke Exzentrizität (0,31 im Mittel aus elf bekannten Bahnen) und kleine Werte von $a \sin i$ (856 000 km bis 2 000000 km). Durchweg ist die Größe $\frac{m'^3 \sin^3 i}{(m+m')^2}$ sehr klein, nämlich gleich durchschnittlich 0,0034 Sonnenmassen. Dies deutet darauf hin, daß m' im Verhältnis zu m ziemlich klein ist, da man sonst sehr geringe Gesamtmassen annehmen müßte. Eine befriedigende Erklärung für den Zusammenhang zwischen den Änderungen der Helligkeit und denen der Radialgeschwindigkeit ist bisher noch nicht gefunden worden. (Vgl. unten Nr. 6 b).) Die Spektra dieser Sterne sind durchweg, von gewissen Eigentümlichkeiten abgesehen, dem Sonnenspektrum ähnlich, und Andeutungen des Spektrums des Begleiters sind nicht wahrzunehmen.

---

68) Vgl. z. B. *J. S. Plaskett*, The Spectroscopic Binary β Orionis. Astroph. Journ. 30 (1909), p. 26.

69) *J. C. Duncan*, The Orbits of the Cepheid Variables Y Sagittarii and *R T Aurigae*; with a Discussion of the Possible Causes of this Type of Stellar Variation. Lick Obs. Bull. Nr. 151 (1909).

6. Bestimmung der Bahn, Figur und Dichte veränderlicher Sterne. Wenn man den Lichtwechsel eines veränderlichen Sterns auf Verfinsterungserscheinungen zweier umeinander kreisender Körper zurückführen will, so ergibt sich das Problem, aus der Lichtkurve die Bahn und die relativen Dimensionen der beiden Körper zu berechnen. Es zeigt sich, daß sich dabei auch noch interessante Schlüsse auf die Dichte der Körper machen lassen.

a) *Algolsterne.* Besonders klar und zweifellos mit Verfinsterungen hat man es zu tun bei den Algolsternen — so genannt nach dem hellsten dieses Typus Algol (β Persei) —, bei denen in regelmäßigen Intervallen für eine kurze Zeit eine beträchtliche Verminderung der sonst konstanten Normalhelligkeit eintritt. Unter der Voraussetzung, daß beide Körper als Kugeln angenommen werden können, seien R, d, R', d' die Radien und Dichten der Massen m und m'. Die durch die Gleichung $D = \frac{R^3 d + R'^3 d'}{R^3 + R'^3}$ definierte mittlere Dichte des Systems ist (bei Vernachlässigung der Masse Erde + Mond) in Einheiten der mittleren Dichte D_0 der Sonne gegeben durch

$$\frac{D}{D_0} = P_0^2 \left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3 \frac{a^3}{P^2(R^3 + R'^3)}.\text{[70]}$$

Ist t die Dauer des Lichtwechsels (die Zeit zwischen den beiden äußeren Berührungen der Körper von der Erde aus gesehen), so wird für eine Kreisbahn, wie geometrisch leicht ersichtlich:

$$R + R' = a\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi t}{P} \sin^2 i} = a\sigma.$$

Setzt man

$$v = 4P_0^2 \left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3,$$

so kann geschrieben werden

$$\frac{D}{D_0} = v \frac{(R + R')^3}{4(R^3 + R'^3)} \cdot \frac{1}{P^2 \sigma^3}.$$

Da

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{(R + R')^3}{4(R^3 + R'^3)} \leqq 1 \quad \text{und} \quad \sigma \geqq \sin \frac{\pi t}{P},$$

ist auch

$$\frac{D}{D_0} \leqq \frac{v}{P^2 \sin^3 \frac{\pi t}{P}}.$$

Das Gleichheitszeichen bezieht sich auf den Fall

$$R = R', \quad i = \frac{\pi}{2};$$

70) *M. Mériau,* Densité des étoiles variables du type d'Algol, Paris C. R. 122, 1896.

wird P in Stunden ausgedrückt, so ist $\log \nu = 1{,}4905$. Für elliptische Bahnen wird σ durch eine sehr komplizierte Formel dargestellt.[70])

Die meisten Algolsterne zeigen nur *ein* Minimum. Nur die Bedeckung des Hauptsterns durch den Begleiter, nicht aber die des Begleiters durch den Hauptstern gibt eine merkliche Lichtabnahme. In diesem Falle muß, wenn von großen Bahnexzentrizitäten abgesehen wird, bei welchen die zweite Bedeckung überhaupt ausfallen kann, die Helligkeit des Begleiters um mindestens 2—3 Größenklassen geringer sein als die des Hauptsternes, so daß der Begleiter als dunkel aufgefaßt werden kann. Sofern sich der Begleiter zur Zeit des Minimums vollständig auf den Hauptstern projiziert und dessen Oberfläche in allen ihren Teilen Licht von gleicher Intensität uns zusendet, läßt sich die Maximaländerung Δm der Sterngröße ausdrücken durch

$$\Delta m = 2{,}5 \log \frac{1}{1-\left(\frac{R'}{R}\right)^2}; \quad R' < R.$$

Aus dieser Gleichung kann $\frac{R'}{R}$ bestimmt werden. Dann tritt in dem Ausdruck für D nur noch $\sin i$ als Unbekannte auf, welche Größe wohl nie sehr weit von der Einheit abweichen dürfte. Da

$$\frac{d}{D_0} = \frac{\left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3}{\left(\frac{R}{a}\right)^3 \left(\frac{P}{P_0}\right)^2} \frac{m}{m+m'} \;{}^{71)}$$

und die Vertauschung von R, m mit R', m' die Gleichung für $\frac{d'}{D_0}$ gibt, so bedarf man nur der Kenntnis von P, t und $\frac{R'}{R}$, um zu Grenzwerten der Dichten zu gelangen gemäß der Relation

$$\frac{d}{D_0} < \frac{\left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3 \left(1+\frac{R'}{R}\right)^3}{\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \sin^3 \frac{\pi t}{P}}.$$

Hat das Minimum selbst, die Zeit zwischen den beiden inneren Berührungen, eine Dauer t_1, so besteht auch die Gleichung

$$R - R' = a\sqrt{1-\cos^2 \frac{\pi t_1}{P} \sin^2 i},$$

welche die Bestimmung von D, $\frac{R}{a}$, $\frac{R'}{a}$ und i ermöglicht. Die weitere, aus spektroskopischer Beobachtung gewonnene Kenntnis von $a \sin i$, mithin auch von a, kann, wie *Barnard*[72]) gezeigt hat, zur Bestimmung

71) *A. Roberts*, Density of close Double Stars. Astroph. Journ. 10 (1899).

72) *R. J. A. Barnard*, Note on the Algol System. Astroph. Journ. 23 (1906).

der Minimalwerte von R, R' und der Maximalwerte von d, d' verwendet werden, indem, wenn $\frac{R'}{R} = \lambda$ und $\frac{d'}{d} = x$ gesetzt wird,

$$R = \alpha \frac{1 + \lambda^3 x}{\lambda^3 x (1 + \lambda)} \cdot \sigma \quad \text{und} \quad d = D \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda^3 x + 1}$$

ist. Der kleinste Wert von R ist $\frac{\alpha \sigma}{1 + \lambda}$, die größten Werte von d und d' sind $D(\lambda^3 + 1)$ bzw. $D\left(1 + \frac{1}{\lambda^3}\right)$. Für das System Algol ($D = 0{,}13$) fand *Barnard*

x	d	d'	$\frac{m}{m_0}$	$\frac{m'}{m_0}$
4,00	0,07	0,27	0,03	0,05
1,00	0,13	0,13	0,51	0,23
0,25	0,17	0,04	19,20	2,14.

Die Massenwerte werden, wie man sieht, außerordentlich stark von der Annahme über $\frac{d'}{d}$ beeinflußt.

Der Lichtwechsel Algols ist von *A. Pannekoek*[73]) zum Gegenstande eingehender Untersuchung gemacht worden, die zum Ergebnisse führte, daß die Lichtkurve symmetrisch ist und eine periodische Schwankung in der Helligkeit des Minimums oder in der Dauer der Verfinsterungen nicht nachgewiesen werden kann. Es muß deshalb dahingestellt bleiben, ob nicht doch gewisse Ungleichheiten vorkommen, die *S. C. Chandler*[74]) durch eine Bewegung des Doppelsterns um einen dritten Körper, *F. Tisserand*[75]) durch eine Drehung der Apsidenlinie der Doppelsternbahn zu erklären versuchten. *J. Stebbins*[76]) hat durch Verwendung von Selenzellen die Helligkeit Algols und anderer heller Sterne mit einer Genauigkeit zu bestimmen vermocht, die durch visuelle oder photographische Methoden bisher nicht erreicht worden ist. Nach seinen Beobachtungen besitzt die Lichtkurve Algols ein sekundäres Minimum, in dem die Helligkeit des Sterns eine Abnahme um $0^m{,}06$ erfährt. Die aus der Lichtkurve unter der Annahme einer größeren Flächenhelligkeit (J_1') der vom Hauptsterne beschienenen

73) Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. Dissertation Leiden (1902).

74) Contributions to the Knowledge of the variable stars, Astronomical Journal XI (1892).

75) Sur l'étoile variable β de Persée (Algol), Paris C. R. 120 (1895).

76) The Measurement of the Light of Stars with a Selenium Photometer, with an Application to the Variations of Algol, Astrophys. Journ. 32 (1910).

Seite des Begleiters erhaltenen Bestimmungsstücke des Systems sind:

$$\begin{array}{lllll} i = 82^0{,}3 & R = 1{,}00 & J = 1{,}00 & P = 68{,}82 & D = 0{,}07\, D_0 \\ e = 0{,}00 & R' = 1{,}14 & J_1' = 0{,}09 & t = 9{,}80 & d < 0.18\, D_0 \\ & a = 4{,}77 & J_2' = 0{,}05 & & d' < 0{,}12\, D_0 \end{array}$$

Die Dichte der Algolsterne ist viel geringer als die der Sonne (1,4). Der Durchschnittswert der oberen Grenze für D dürfte etwa 0,2 sein.

Einige Algolsterne, wie Z Herculis[77]), UZ Cygni[78]) zeigen schon bei roherer Beobachtung *zwei Minima von ungleicher Helligkeit.* Photometrische Beobachtungen des Lichtwechsels dieser Sterne geben der Bahnbestimmung eine sicherere Grundlage als Beobachtungen von Sternen, die nur ein Minimum haben. Unter der Annahme $i = \frac{\pi}{2}$ können die Zeiten des beginnenden und endenden Lichtwechsels in sehr einfacher Weise zur Bestimmung von Bahnelementen verwertet werden. Je nachdem sich die Zeiten auf das Ende und den Wiedereintritt der Maxima oder auf Beginn und Ende der Minima beziehen, sei

$$\frac{R+R'}{a} = d \quad \text{oder} \quad \frac{R-R'}{a} = d.$$

Wenn diese Zeiten, vom Beginne des durch die Verdeckung des Begleiters entstehenden Lichtwechsels an gezählt, der Reihe nach mit t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnet werden, sind die ihnen entsprechenden r und v an die Gleichungen gebunden

$$\frac{r_1}{a}\cos(v_1+\omega) = -\frac{r_2}{a}\cos(v_2+\omega) = -\frac{r_3}{a}\cos(v_3+\omega)$$
$$= \frac{r_4}{a}\cos(v_4+\omega) = d.$$

Ersetzt man r, v durch a, E, so ergibt sich hieraus unter Benutzung der Substitutionen

$$E = G - g \text{ und } g_1 = \frac{E_2 - E_1}{2},\ g_2 = \frac{E_3 - E_2}{2}, \text{ usw.}$$

$$\operatorname{tg} G_4 = \operatorname{tg} G_2 = -\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\omega$$
$$\cos g_2 + \cos g_4 = 2e\cos G_2$$
$$\cos g_2 - \cos g_4 = -\frac{2d\cos G_2}{\cos\omega}$$
$$G_2 = G_4;\ g_1 = g_3 = -\frac{g_2+g_4}{2}$$
$$G_1 + G_3 = 2G_2;\ G_1 - G_3 = -g_2 + g_4.$$

77) *E. Hartwig*, Der veränderliche Stern vom Algoltypus *Z Herculis*, Astr. Nachr. 152 (1900).

78) *E. Hartwig,* Ein Zwischenminimum des langperiodischen Algolsterns *U Z Cygni.* Astr. Nachr. 165 (1904).

Aus den vier *Kepler*schen Gleichungen folgt

$$2g_2 - \sin g_2 (\cos g_2 + \cos g_4) = n(t_3 - t_2)$$
$$2g_4 - \sin g_4 (\cos g_2 + \cos g_4) = n(t_1 - t_4)$$
$$2e \sin G_2 (\cos g_2 - \cos g_4) = n(t_4 - t_3 - t_2 + t_1).$$[79]

Die zwei ersten Gleichungen bestimmen g_2, g_4, woraus e, G und dann ω, d erhalten werden. t_0 wird durch $E_1 = g_4 + G_2$ bestimmt. Je größer der Helligkeitsunterschied der beiden Minima ist, desto unsicherer wird die Beziehung der Zeiten auf gleiche d und daher auch die Bestimmung der Elemente.

Die kleine Distanz und geringe Dichte der Komponenten der Algolsterne bedingen eine elliptische, von der jeweiligen Größe der zerrenden Kräfte abhängige Gestalt dieser Körper. Die Flutbewegung, deren Lebhaftigkeit mit der Bahnexzentrizität wächst, hat gewiß auch Verschiebungen der an und nahe der Oberfläche gelegenen, stark absorbierenden Dämpfe zur Folge, wodurch die Intensität der Lichtemission geändert wird. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn die Annahme einer der scheinbaren Größe der leuchtenden Fläche proportionierten Lichtintensität auch nicht imstande ist, die Lichtänderung der Algolsterne in ganz befriedigender Weise darzustellen. Die Beobachtung zweier Minima läßt die Unverträglichkeit der Annahmen, daß die Körper kugelförmig seien und Licht von konstanter Intensität aussenden, mitunter sofort erkennen. Die analytische Formulierung dieser Annahme führt nämlich, wenn L_1, L_2 die Intensitäten des Vollichtes jedes der Körper, L_0 die Intensität des Maximums, L, L' die des Haupt- und Zwischenminimums bedeuten, und μ_1, μ_2 positive zwischen den Grenzen 0 und 1 liegende Größen ausdrücken, zu den Relationen

$$\mu_1 \mathsf{L}_1 + \mathsf{L}_2 = \mathsf{L}$$
$$\mathsf{L}_1 + \mu_2 \mathsf{L}_2 = \mathsf{L}'$$
$$\mathsf{L}_1 + \mathsf{L}_2 = \mathsf{L}_0,$$

woraus folgt $\frac{\mathsf{L} + \mathsf{L}'}{\mathsf{L}_0} > 1$; die Schwächung des Lichtes von *UZ* Cygni beträgt im Hauptminimum 2,7, im Zwischenminimum 0,4 Größenklassen. Es wird daher $\frac{\mathsf{L} + \mathsf{L}'}{\mathsf{L}_0} = 0{,}78$. Ob dieses Resultat mehr auf Rechnung der Deformation oder der Veränderlichkeit der Lichtemission der Komponenten zu setzen ist, läßt sich vorläufig nicht entscheiden.

---

79) *J. v. Hepperger,* Über den Zusammenhang zwischen der Lichtänderung und den Elementen des Systems β Lyrae. Wien. Ber. 1909.

b) *Veränderliche von kontinuierlicher Lichtschwankung.* Während das Licht der Algolsterne nur zeitweilig veränderlich ist, weist eine andere Klasse von veränderlichen Sternen einen ununterbrochenen Wechsel des Lichtes auf. Wahrscheinlich bestehen alle diese Sterne, von denen mehrere spektroskopische Doppelsterne sind, aus zwei oder mehreren Körpern, deren Konstellation für die zur Erde gelangende Lichtmenge bestimmend ist. Daß der Lichtwechsel auch ohne Verfinsterung einer Komponente durch eine andere erfolgen kann, lehren die spektroskopischen und photometrischen Beobachtungen von δ Cephei[80]), welche wohl dieselbe Periode ($5^d 4$) ergeben, aber mit der Annahme einer Verfinsterung von bemerkenswerter Phase kaum verträglich sind. Die große, diesem Systeme eigene Bahnexzentrizität (0,5) läßt eine von der Flutbewegung abhängige, veränderliche Lichtemission vermuten, doch liegt, wie in Nr. **5** erwähnt, für diese Art des Lichtwechsels noch keine ganz befriedigende Erklärung vor.

Verfinsterungen werden wieder wahrscheinlich, wenn sich die Komponenten eines Doppelsternes in nahe kreisförmigen Bahnen bewegen; dann wird ihre Figur und Lichtemission nur kleine Änderungen erfahren. Eine leicht erkennbare Veränderlichkeit des Lichtes kann in diesem Falle ohne partielle Bedeckung der Körper wohl kaum zustande kommen.

Die Bestimmung der Bahn und der Dimensionen der Komponenten aus der Lichtkurve eines solchen kontinuierlich veränderlichen Sternes, wofür β Lyrae als Typus gelten kann, ist nun, auch wenn man eine nahe kreisförmige Bahn und Bedeckungen voraussetzt, ohne weitere willkürliche Annahmen bezüglich der Form der leuchtenden Flächen und der Helligkeit ihrer Elemente nicht möglich. Da die Lichtschwankungen wegen ihrer, im Verhältnis zur Beobachtungsgenauigkeit geringen Amplitude zur Bestimmung vieler Unbekannten nicht ausreichen und die zu bildenden Annahmen die Lösung der Aufgabe nicht zu schwer machen sollen, werden die vorausgesetzten Eigenschaften des Systems von den wahren in mehrfacher Beziehung und oft beträchtlich abweichen, so daß die gewonnenen Resultate auch bei guter Darstellung der Lichtkurve mit großen Fehlern behaftet sein können. Der Deformation kann einigermaßen durch die Annahme Rechnung getragen werden, daß die Oberflächen der Komponenten unveränderliche gestreckte Rotationsellipsoide seien, deren große Achsen in einer und derselben Geraden liegen und zu

80) *B. Meyermann,* Resultate aus den Beobachtungen von δ Cephei. Astr. Nachr. 167 (1905).

den kleinen Achsen in demselben Verhältnisse stehen. Mit Bezug auf die Lichtemission empfiehlt sich die Annahme, daß die von jeder Komponente herrührende Lichtmenge der scheinbaren Größe ihrer unverfinsterten Oberfläche proportioniert sei.[81])

Das Ellipsoid Σ, dessen Zentrum sich in O befinde, habe die Halbachsen A, B; die größte Intensität des von Σ herrührenden Lichtes sei L_0; für das Ellipsoid Σ' seien die entsprechenden Bestimmungsstücke mit O', λA, λB und $1 - L_0$ bezeichnet. Die Maximalintensität des Systems ist daher der Einheit gleichgesetzt. Bedeutet $\frac{\pi}{2} - \delta$ den Winkel zwischen der Linie OO' und der Gesichtslinie, so sind die Halbachsen α, β der durch Projektion von Σ auf eine zur Gesichtslinie senkrechte Ebene entstehenden Ellipse:

$$\alpha = A \cdot \varkappa, \quad \beta = B, \quad \varkappa = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \delta}, \quad \varepsilon^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2};$$

die Halbachsen der Projektion von Σ' sind $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$. Das Dreieck $OO'C$, in welchem $OO' = r \cos \delta$ ist, und $OC = \alpha$, $O'C = \lambda\alpha$ sein soll, habe bei O bzw. O' den Winkel ψ bzw. χ, so daß

$$\sin \psi = \lambda \sin \chi$$

$$\cos \psi + \lambda \cos \chi = \frac{r \cos \delta}{\alpha} = \nu$$

$$\cos \psi = \frac{1 + \nu^2 - \lambda^2}{2\nu}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$2\psi - \sin 2\psi + \lambda^2(2\chi - \sin 2\chi) = 2(\psi + \lambda^2\chi - \nu \sin \psi) = 2\pi q,$$

so ist der Inhalt F der beiden Ellipsen gemeinschaftlichen Fläche $F = \alpha\beta\pi q$.

Die Intensität L des Systems ist, wenn Σ' vor Σ liegt:

$$L = L_0 \frac{\alpha\beta\pi - F}{AB\pi} + (1 - L_0) \frac{\lambda^2 \alpha\beta\pi}{\lambda^2 AB\pi} = \varkappa(1 - qL_0),$$

im entgegengesetzten Falle aber

$$L = \varkappa\left(1 - q\,\frac{1 - L_0}{\lambda^2}\right).$$ [82])

Die typischen Eigenschaften der Lichtkurven der Gruppe von veränderlichen Sternen, um die es sich hier handelt, nämlich beständiger Wechsel des Lichtes, Gleichheit oder nur geringe Verschiedenheit der Intervalle zwischen den Epochen der Maxima und Minima deuten darauf hin, daß r nur wenig von $A + \lambda A$ verschieden ist und als nahezu konstant gelten kann. Man wird sich daher vorerst mit

81) *G. Myers*, The System of β Lyrae, Astroph. Journ. 7 (1898).

der Näherung $r = A(1+\lambda)$ begnügen und $r = 1$ setzen, wodurch A in Teilen des Radius der Kreisbahn ausgedrückt erscheint. Da in der Kreisbahn die Änderung von u der Zeit proportioniert ist, und die Minima für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ eintreten, so ist durch die Lichtkurve auch der Zusammenhang von u und L gegeben. Aus $\sin\delta = \sin u \sin i$ folgt für

$$u = \pm\frac{\pi}{2} \cdots \varkappa = \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 i}; \quad \nu = \frac{(1+\lambda)\cos i}{\varkappa},$$

für

$$u = \pm\frac{\pi}{4} \text{ und } \pm\frac{3\pi}{4} \cdots \varkappa = \sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 i};$$

$$\nu = \frac{1+\lambda}{\varkappa}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 i}\cdot$$

A. Roberts[82]) geht von den Annahmen $\mathsf{L}_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ aus und bestimmt ε und i aus den zwei mittleren Werten der vom Helligkeitsmaximum an gezählten Größenänderung Δm des Systems für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ und die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{4}\cdot$ Die Erzielung eines engeren Anschlusses an die Lichtkurve bleibt der Ausgleichsrechnung vorbehalten. Die Berechnung zweier Tafeln, welche mit den doppelten Argumenten ε^2, i auf Grund der Relationen

$$\lambda = 1, \quad \cos\psi = \frac{1}{2}\nu, \quad \pi q = 2\psi - \sin 2\psi, \quad \mathsf{L} = \varkappa\left(1-\frac{1}{2}q\right),$$

$$\Delta m = 2{,}5 \log\frac{1}{\mathsf{L}}$$

die Werte der Funktion Δm für $u = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$ geben, ermöglicht eine rasche Bestimmung von ε und i.

Die dem *Roberts*schen Verfahren zugrunde liegenden Annahmen $\mathsf{L}_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ sind nur bei gleicher Intensität der Minima vereinbar und widersprechen sich um so mehr, je größer der Intensitätsunterschied ist. Wenn dieser mehr als ungefähr 2 bis 3 Zehntel einer Größenklasse beträgt, erscheint es vorteilhafter, die Unbekannten ohne Zuhilfenahme neuer Hypothesen zu bestimmen, was am einfachsten durch Auflösung eines Systems von vier Gleichungen geschehen kann, in denen die Intensitäten der Minima und noch zweier Punkte der

82) *A. Roberts,* On the Relation existing between the Light Changes and the Orbital Elements of a close Binary System. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903); On a Method of Determining the Absolute Dimensions of an Algol Variable Star. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 66 (1906).

Lichtkurve vorkommen, für welche die Summe der δ gleich Null ist. Bei Auswahl der Punkte $u = \pm \frac{\pi}{4}$ können, wenn $\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 i} = \operatorname{tg} w$ gesetzt wird, die Gleichungen geschrieben werden

$$u = -\frac{\pi}{2} \cdots \operatorname{tg} w\,(1 - q\mathsf{L}_0) = \mathsf{L};$$

$$u = -\frac{\pi}{4} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}\cos w}(1 - q'\mathsf{L}_0) = \mathsf{L}';$$

$$u = +\frac{\pi}{2} \cdots \operatorname{tg} w\left(1 - q\,\frac{1-\mathsf{L}_0}{\lambda^2}\right) = L;$$

$$u = +\frac{\pi}{4} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}\cos w}\left(1 - q'\,\frac{1-\mathsf{L}_0}{\lambda^2}\right) = L',$$

wo q eine Funktion von λ und $\nu = (1+\lambda)\cos i \operatorname{cotg} w$, q' dieselbe Funktion von λ und $\nu' = \sqrt{(1+\lambda)^2 + \nu^2 \sin^2 w}$ ist. Durch Berechnung einer einzigen Tafel, welche mit den Argumenten λ, ν die Größen q gibt, ist man daher in den Stand gesetzt, den einem beliebigen Wertepaare q, λ bzw. q', λ zugehörigen Wert von ν bzw. ν' auf dem Wege der Interpolation zu finden. Zur Bestimmung von w dienen die Gleichungen

$$\sigma \cos s = \frac{L' - \mathsf{L}'}{L - \mathsf{L}}\sqrt{2}; \quad \sigma \sin s = \frac{\mathsf{L}'L - \mathsf{L}L'}{L - \mathsf{L}}\sqrt{2}; \quad \sigma \sin(w + s) = 1.$$

Es ist ferner

$$\lambda^2 = \frac{1 - \mathsf{L}_0}{\mathsf{L}_0}\,\frac{\operatorname{tg} w - \mathsf{L}}{\operatorname{tg} w - L}; \quad q = \frac{1 - \mathsf{L}\operatorname{cotg} w}{\mathsf{L}_0}; \quad q' = \frac{1 - \mathsf{L}'\sqrt{2}\cos w}{\mathsf{L}_0};$$

L_0 ist versuchsweise so zu bestimmen, daß die zu λ, q, q' gehörigen Argumente ν, ν' die Gleichung erfüllen $\nu'^2 = (1+\lambda)^2 + \nu^2 \sin^2 w$; die übrigen Elemente werden durch die Gleichungen

$$\cos i = \frac{\nu}{1+\lambda}\operatorname{tg} w, \quad \varepsilon \sin i = \frac{\sqrt{\cos 2w}}{\cos w}, \quad A = \frac{1}{1+\lambda}, \quad B = A\sqrt{1-\varepsilon^3}$$

bekannt.[79])

Wenn auch die Zeiten der Maxima und Minima die Annahme einer Kreisbahn rechtfertigen, so kann doch r von $A(1+\lambda)$ um eine Größe η verschieden sein. Sollte es sich zeigen, daß für $\eta = 0$ eine befriedigende Darstellung der beobachteten Intensitäten nicht zu erreichen ist, so wäre η so zu bestimmen, daß die Fehler der Darstellung möglichst klein werden.

Ungleichheit der Intervalle in der Reihenfolge der Maxima und Minima weist auf eine elliptische Bewegung der Komponenten hin, bei welcher im allgemeinen die Lage der Minima nicht mehr genau durch $u = \pm \frac{\pi}{2}$ oder durch die Richtung einer Fokalchorde markiert ist. Bezeichnen Δt, Δv, $2g$ die Änderungen der Zeit, der wahren und exzentrischen Anomalie vom Hauptminimum zum Nebenminimum, $\Delta' t$, $\Delta' v$, $2g'$ die Änderungen von dem auf das Hauptminimum folgenden Maximum zum nächsten Maximum, so ist

$$\Delta' v = \pi$$
$$2g' - \sin 2g' = n\Delta' t$$
$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \omega = \cot g'.$$

Aus $\Delta v \gtrless \pi$ folgt, daß die Relationen $2g - \sin 2g = n\Delta t$ und $\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega = \operatorname{cotg} g$ nur als näherungsweise richtig angenommen werden dürfen. Die zur Berechnung von e, ω aus den Zwischenzeiten gemachte Annahme $\Delta v = \pi$ bedarf daher noch einer Kontrolle durch die nach Bestimmung der übrigen Elemente sich ergebende Lage der Minima.

Der Lichtwechsel des spektroskopischen Doppelsternes β Lyrae ($P = 12^d{,}91$, Max. $3^m{,}4$, Min. $3^m{,}9$, $4^m{,}5$) wird nach den Untersuchungen von *Myers* durch die Annahme erklärt:

$$a = 1,\ e = 0{,}02,\quad A = 0{,}52,\quad B = 0{,}43,\quad \lambda = 0{,}75,$$
$$i = \frac{\pi}{2},\quad \varepsilon = 0{,}56,\quad \mathsf{L}_0 = 0{,}71,$$

er läßt sich aber auch ebensogut durch ein wesentlich anderes Elementensystem darstellen, nach welchem das Hauptminimum durch Abblendung des Lichtes des kleineren Körpers zustande kommt.[79])

Den spektroskopischen Beobachtungen zufolge ist für

$$i = \frac{\pi}{2} : a = 50{,}2 \text{ Mill. Kilometer},\quad \frac{m}{m_0} = 20{,}9,\quad \frac{m'}{m_0} = 9{,}6;$$

hieraus folgt, daß die Komponenten ungefähr dieselbe mittlere Dichte 0,0006 haben und daher weniger dicht sind als die Luft an der Erdoberfläche.

Die Untersuchungen *Roberts* über die veränderlichen Sterne *U* Pegasi ($P = 9^h{,}0$) und *RR* Centauri ($P = 14^h{,}5$)[82]) scheinen die Annahmen zu rechtfertigen, daß die Komponenten von gleicher Größe sind und sich bei gegenseitiger Berührung in Kreisbahnen bewegen. Die durch die elliptische Gestalt der zu engen Systemen verbundenen Körper bedingte Zunahme des Radiusvektors und der Bahnexzentrizität und die damit zusammenhängende Drehung der Apsidenlinie bewirken eine Änderung der Form der Lichtkurve, welche jedoch nur aus Beobachtungen, die sich über sehr viele Jahre erstrecken, zu konstatieren sein wird.

7. Bahnbestimmung der Satelliten. Die Methoden der Bahnbestimmung visueller Doppelsterne haben die Unveränderlichkeit der Lage des den Messungen zugrundeliegenden Koordinatensystems zur Voraussetzung und sind daher auf ein System Planet—Satellit nur dann ohne weiteres anwendbar, wenn die Bewegung des Satelliten so rasch erfolgt, daß während eines Umlaufs die Änderung des geozentrischen Ortes des Planeten vernachlässigt werden darf. Wird durch die Beobachtungen die Projektionsellipse hinreichend bestimmt, so empfiehlt sich die Anwendung graphischer Methoden zur Ermittlung genäherter Bahnelemente, die dann auf ein vom scheinbaren Orte des Planeten unabhängiges Koordinatensystem übertragen werden können. Lage und Dimension der Ringe des Saturn[83]) ergeben sich aus Messungen der Richtung und scheinbaren Größe der Achsen der sichtbaren Projektionsellipsen, die für $e = 0$ *Zwiers*sche Hilfsellipsen sind.

Bei verhältnismäßig rascher Bewegung des Planeten kann man versuchen, die Beobachtungen des Satelliten durch eine Kreisbahn darzustellen, welche, wenn die mittlere planetozentrische Bewegung des Satelliten bekannt ist, durch zwei Positionsmessungen bestimmt wird.[84])

Zur Zeit t seien die geozentrischen äquatorialen Koordinaten des Planeten Δ, A, D, die planetozentrischen, äquatorialen Koordinaten des Satelliten r, α, δ, Positionswinkel und Distanz θ, ϱ; die Beziehung auf eine andere Zeit soll durch Beifügung eines Striches angedeutet sein. Bezeichnet $180^0 - \sigma$ den Winkel am Planeten im Dreieck Erde — Planet—Satellit, so ist zur Zeit

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} t \ldots \sin(\sigma - \varrho) = \frac{\Delta}{r} \sin \varrho \\ t' \ldots \sin(\sigma' - \varrho') = \frac{\Delta'}{r} \sin \varrho' \end{array} \right. .$$

Der Winkel zwischen den Richtungen r, r' ist die planetozentrische Bewegung des Satelliten und auch gleich dem Winkel, welchen die vom Erdzentrum parallel zu r und r' gezogenen Geraden einschließen. Denkt man sich die Erde im Zentrum einer Sphäre vom Radius 1 und nennt die Punkte der Sphäre, gegen welche diese Linien gerichtet sind, Σ, Σ', die sphärischen Örter des Planeten und Satelliten M, M', S, S', so liegen die Punkte M, S, Σ in einem, M', S', Σ' in einem anderen Bogen größten Kreises. Der nächste Schnittpunkt der

83) *F. W. Bessel,* Abhdgl. I.

84) *A. Marth,* Researches on Satellites. Astr. Nachr. 44 (1856). — *J. Bauschinger,* Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig, 1906.

Bögen MS und $M'S'$ sei C; der Nordpol befinde sich in P. Die Auflösung des sphärischen Dreiecks MCM', in welchem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel $A' - A$ bekannt sind, gibt die Seite MM' und die anliegenden Winkel, woraus mit Hilfe der Positionswinkel θ, θ' von MS und $M'S'$ die Seiten $MC = \zeta$, $M'C = \zeta'$ und der von ihnen gebildete Winkel ε berechnet werden können. Da $M\Sigma = \sigma$, $M'\Sigma' = \sigma'$, wird

$$\cos \Sigma\Sigma' = \cos(\zeta - \sigma)\cos(\zeta' - \sigma') + \sin(\zeta - \sigma)\sin(\zeta' - \sigma')\cos\varepsilon.$$

Durch diese Gleichung und die Gleichungen (1) werden für eine Kreisbahn ($\Sigma\Sigma' = n(t' - t)$; $r = r' = a$) die drei Unbekannten σ, σ', a bestimmt, allerdings nicht in eindeutiger Weise, da nach (1) $\sigma - \varrho$, $\sigma' - \varrho'$ im I. oder II. Quadranten liegen können, was bei der weiteren Rechnung zu beachten ist.

Zur Bestimmung der Länge N des aufsteigenden Knotens und der Neigung J der Satellitenbahn mit Bezug auf den Himmelsäquator bedarf man der α und δ; die Koordinaten des Punktes (E), in dem die Verlängerung der von der Erde zum Planeten gezogenen Geraden die um den Planeten beschriebene Sphäre trifft, sind A, D; die Lage des Punktes (S) mit den Koordinaten α, δ ist dadurch gegeben, daß im sphärischen Dreieck $(E)P(S)$ die Seite $(E)(S) = \sigma$ und der Winkel bei (E) als Neigungswinkel der Ebene EMS und EMP gleich θ ist. Der Winkel bei P ist $\alpha - A$; α', δ' werden durch dieselben Formeln erhalten wie α, δ. N und J ergeben sich aus $\operatorname{tg} J \sin(\alpha - N) = \operatorname{tg}\delta$; $\operatorname{tg} J \sin(\alpha' - N) = \operatorname{tg}\delta'$; das der Zeit t entsprechende Argument der Breite U folgt aus der Formel $\operatorname{tg} U = \operatorname{tg}(\alpha - N)\sec J$. Die analoge Berechnung von U' muß hierfür einen Wert ergeben, welcher die Gleichung erfüllt $U' - U = n(t' - t)$.

Sind N, J und U, a oder allgemeiner U, r gegeben, so werden θ, ϱ mit Hilfe der sich auf denselben Zeitpunkt beziehenden Größen Δ, A, D durch einfache Koordinatentransformation gefunden.

Wie Positionswinkel und Distanz, können auch Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen durch die Elemente ausgedrückt werden.[85]) Genauere Elemente werden mittels der Differentialformeln der Bahnverbesserung erhalten (vgl. Artikel VI 2, 9 *Herglotz* Seite 422).

Sofern Näherungswerte von N und J vorliegen, kann man nach der Methode von *W. Klinkerfues*[86]) aus drei Beobachtungen eines Satelliten

85) *F. W. Bessel*, Abhdlg. I, Astr. Nachr. 9 (1831). — *W. Meyer*, Le Système de Saturne (Mem. de la Soc. de Phys. et d'Histoire nat. de Genève) 1884. — *H. Struve*, Astr. Nachr. 111 (1885), 123, 125 (1890).

86) Theoretische Astronomie (1885), (1890). Braunschweig, I. Aufl. 1871,

genäherte Bahnelemente bestimmen. Für das Datum jeder Beobachtung werden zunächst die Werte i, Ω und $u_0 = u - U$ und dann mittels der Formeln:

$$\operatorname{cotg} \sigma = \sin(\theta - \Omega) \operatorname{tg} i, \quad r \sin(\sigma - \varrho) = \Delta \sin \varrho,$$

$$\operatorname{tg}(u_0 + U) = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \Omega)}{\cos i}$$

die von r, U bekannt.

Aus drei Gleichungen von der Form $a(1 - e^2) = r(1 + e \cos v)$ folgt, da die Differenzen der U denen der wahren Anomalie v gleich sind,

$$a(1 - e^2) = \frac{4 r r' r'' \sin\frac{U' - U}{2} \sin\frac{U'' - U}{2} \sin\frac{U'' - U'}{2}}{r r' \sin(U' - U) - r r'' \sin(U'' - U) + r' r'' \sin(U'' - U')}$$

$$2e \sin\frac{v'' + v}{2} \sin\frac{U'' - U}{2} = a(1 - e^2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}\right)$$

$$2e \cos\frac{v'' + v}{2} \cos\frac{U'' - U}{2} = a(1 - e^2)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r''}\right) - 2,$$

wodurch a, e, $U - v$ und v, v'' daher auch n, t_0 bestimmt werden. Sind die angenommenen Werte von N, J nahe richtig, so wird auch der Unterschied zwischen $n(t' - t_0)$ und der aus v' berechneten mittleren Anomalie klein sein. Zur Bahnverbesserung muß mindestens noch eine Beobachtung verwendet werden. Die Kenntnis von N, J genügt überdies zur Reduktion aller Beobachtungen auf einen und denselben geozentrischen Planetenort, wodurch die für Doppelsterne gegebenen Methoden der Bahnbestimmung auch für Satelliten Geltung erlangen.

A. O. Leuschner[87]) hat auf der Versammlung der Astr. Gesellschaft in Wien (1908) die Grundzüge einer Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen angegeben. Diese Methode, deren vollständige Darlegung im Vol. VII of the Publications of the Lick Observatory erfolgen soll, eignet sich, wie aus der Berechnung der Bahnen des 7ten und 8ten Jupitertrabanten hervorzugehen scheint, sehr gut zur Bahnbestimmung von Satelliten, deren Bewegung durch die Sonne bedeutend gestört wird. Aus den Beobachtungen sind zunächst für eine bestimmte Zeit Rektaszension und Deklination des Satelliten sowie der erste und der zweite Differentialquotient dieser Koordinaten nach der Zeit zu bilden. Hierdurch werden mit Hilfe von drei, durch

---

II. Aufl. 1899 (Die Ableitung der „reduzierten" Positionswinkel P, P', deren Differenz gleich $v - v'$ sein soll, ist unrichtig gegeben).

87) *A. Leuschner*, Versuch der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen. Astr. Ges. Vjs. 43 (1908); Lick Obs. Bull. 137 (1908).

Transformation der Grundgleichungen für die spezielle Störungsrechnung zu erhaltenden Gleichungen die geozentrische Distanz ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$ als Funktionen der Entfernung des Satelliten vom Planeten und von der Sonne bestimmt, worauf mit Rücksicht auf die für die Dreiecke Erde, Satellit, Planet und Erde, Satellit, Sonne geltenden Beziehungen die Distanzen des Satelliten vom Planeten und von der Sonne, daher auch die Anziehungskräfte bekannt werden. Die Berechnung der Elemente bedarf keiner neuen Entwicklungen.

(Abgeschlossen im Dezember 1910.)

VI 2, 12. PRINZIPIEN DER STÖRUNGSTHEORIE UND ALLGEMEINE THEORIE DER BAHNKURVEN IN DYNAMISCHEN PROBLEMEN.

Von

E. T. WHITTAKER

IN DUBLIN.

(Aus dem Englischen übersetzt von **A. Haar** in Zürich.)

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.

P. S. de Laplace, Traité de mécanique céleste I—V. Paris 1799—1827.

A. Gautier, Essai historique sur le problème des trois corps. Paris 1817.

P. G. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde I—IV. Paris 1834—56.

U. J. J. le Verrier, Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris, 1855—77.

C. E. Delaunay, Théorie du mouvement de la lune I—II. Paris 1860—67.

A. Cayley, Report on the progress of the solution of certain problems in dynamics. British Association Report., London 1862.
P. A. Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen I—II. Leipzig 1862—64.
O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888.
F. Tisserand, Traité de mécanique céleste I—IV. Paris 1889—96.
H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I—III. Paris 1892—99. *(Poincaré Méth. Nouv.)*
H. Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales I. Stockholm 1893, II. 1909.
E. W. Brown, An introductory treatise on the lunar theory. Cambridge 1896.
N. Herz, Artikel „Mechanik des Himmels" in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie. Breslau 1898.
E. T. Whittaker, Report on the progress of the solution of the Problems of Three Bodies. British Association Report. London 1899.
H. Andoyer, Théorie de la lune. Paris 1901.
F. S. Moulton, An introduction to Celestial Mechanics. New York 1902.
C. V. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels I—II. Leipzig 1902—07.
E. T. Whittaker, A treatise on Dynamics, including the Problem of Three Bodies. Cambridge 1904. (*Whittaker Dynamics.*)
H. Poincaré, Leçons de Mécanique Céleste. Paris 1905—10.
G. W. Hill, Collected Mathematical Works I—IV. Washington 1905—07.

Vorbemerkung.

Das fundamentale Problem der Himmelsmechanik besteht darin, die Bewegungen der Himmelskörper unter dem Einfluß der gegenseitigen Anziehung zu bestimmen, die sie nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz aufeinander ausüben. Dieses Problem kann in geschlossener Form nicht durch bekannte Funktionen gelöst werden, und daher sind für praktische Zwecke eine Anzahl von Methoden unter dem Namen von „Planetentheorien" oder „Mondtheorien" erdacht worden, welche Annäherungen für die Bewegung der verschiedenen Körper geben, die im Sonnensystem wirklich vorkommen, und zwar in einer zur numerischen Berechnung geeigneten Form. Neben diesen Untersuchungen ist die Dynamik eines Systems von Punkten, die sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, vielfach vom rein theoretischen Standpunkt aus betrachtet worden. Was sich hier ergab und was aus der allgemeinen Theorie der Bahnen in dynamischen Systemen bekannt war, wurde verwandt, um über gewisse wichtige Grundfragen der Astronomie Aufklärung zu gewinnen, z. B. über die der Stabilität der Bahn des Mondes und der Planeten.

In gegenwärtigem Artikel wird versucht, den wesentlichen Inhalt aller dieser Untersuchungen von den Anwendungen loszulösen, mit denen ursprünglich viele von ihnen verknüpft waren, und so unsere Kenntnisse über das Hauptproblem der Himmelsmechanik von allgemeinen theoretischen Gesichtspunkten aus darzustellen.

1. Reduktion der Differentialgleichungen des allgemeinen Dreikörperproblems. Unter *Dreikörperproblem* versteht man die Aufgabe, die Bewegung im Raume von drei Punkten gegebener Masse zu bestimmen, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen.

Seien die Massen der Punkte m_1, m_2, m_3, seien ihre Koordinaten bezogen auf feste rechtwinklige Achsen resp.: (q_1, q_2, q_3), (q_4, q_5, q_6), (q_7, q_8, q_9). Ferner bezeichne man $m_k \dfrac{dq_r}{dt}$ durch p_r, wo t die Zeit bezeichnet und k die größte in $\frac{1}{3}(r+2)$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Dann wird das Problem analytisch durch die Differentialgleichungen ausgedrückt:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9)$$

wobei

$$\begin{aligned} H = \sum_{r=1}^{9} \frac{p_r^2}{2m_k} &- m_2 m_3 \{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &- m_3 m_1 \{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &- m_1 m_2 \{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ist.

Diese Gleichungen bilden ein kanonisches System der 18. Ordnung.

Lagrange[1]) zeigte zuerst, daß die Ordnung des Systems der Bewegungsgleichungen reduziert werden kann, indem man die bekannten Integrale des Systems benutzt. Sechs Integrale werden durch den Umstand geliefert, daß die Bewegung der Teilchen relativ zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt unabhängig von der absoluten Bewegung dieses Schwerpunktes ist. Drei weitere Integrale bedeuten, daß die Komponenten der Flächengeschwindigkeit um die drei Achsen konstant sind. Nimmt man noch den Energiesatz hinzu, so hat man im ganzen zehn bekannte Integrale. Ferner geht die Zeit t in die Differentialgleichungen nur mittels ihres Differentiales dt ein, daher kann die Ordnung der Gleichungen auch noch durch Elimination von dt reduziert werden. Nach der Integration des so reduzierten Systems kann dann die Zeit durch eine einfache Quadratur gefunden werden.

Man denke sich ferner die Anordnung des Systems in irgend einem Augenblick mit Hilfe von Koordinaten ausgedrückt, von denen eine die Orientation des ganzen Systems in bezug auf eine im Raume feste Linie ausdrückt, so daß eine Vergrößerung dieser Koordinate Ω

1) Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'Acad. de Paris 9 (1772).

um einen Betrag α unter Festhaltung der übrigen Koordinaten eine Rotation des ganzen Systems um den Winkel α um jene feste Linie, wie bei einem starren Körper, zur Folge hat. Solch eine Wahl der Koordination läßt sich offenbar für die drei Körper leicht treffen. Dann ist Ω eine sog. verborgene Koordinate, und das entsprechende Integral (welches in diesem Falle eines der Flächensätze ist) setzt uns in den Stand, die Ordnung der Bewegungsgleichungen um zwei Einheiten statt um eine herabzusetzen. Letzteres Faktum ist implizite in Lagranges Arbeit[2]) enthalten, wurde aber erst von *Jacobi*[3]) deutlich ausgesprochen, der es *Elimination der Knoten* nannte.

Mit Hilfe der zehn bekannten Integrale, der Elimination der Zeit und der Elimination der Knoten kann die Ordnung des Systems der Bewegungsgleichungen um zwölf Einheiten reduziert werden, so daß das reduzierte System von der 6. Ordnung wird. *Lagrange*[4]) gelang tatsächlich die Ausführung dieser Reduktion, doch kann seine Reduktionsart jetzt als überholt gelten durch die symmetrischeren Verfahren, die die kanonische Form der Gleichungen erhalten und die nunmehr zu schildern sind.

Wir haben zunächst von den Schwerpunktsätzen Gebrauch zu machen, um das System von der 18. auf die 12. Ordnung zu reduzieren. Dies kann nach einer von *Jacobi*[5]), *Bertrand*[6]), *Radau*[7]) ausgebildeten Methode in folgender Weise geschehen.

Sei $\mathfrak{H}$ der Schwerpunkt von m_1 und m_2. Seien q_1', q_2', q_3' die Projektionen der Strecke $m_1 m_2$ auf feste rechtwinklige Achsen und q_4', q_5', q_6' die Projektionen der Strecke $\mathfrak{H} m_3$ auf dieselben Achsen. Sei ferner:

$$\mu \frac{dq_r'}{dt} = p_r' \quad (r = 1, 2, 3), \qquad \mu' \frac{dq_r'}{dt} = p_r' \quad (r = 4, 5, 6),$$

wobei:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu' = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ist.

Die Variabeln $q_1', q_2', \ldots, q_6', p_1', p_2', \ldots, p_6'$ zusammen mit sechs anderen Variabeln, welche nur von der Bewegung des Schwerpunkts

2) loc. cit.

3) J. f. Math. 26 (1843), p. 115.

4) loc. cit. *Serret* gab in dem Bull. des Sc. Math. 6 (1873), p. 46 eine Darstellung der Lagrangeschen Arbeit, wo auch die Reduktion von *Hesse*, J. f. Math. 74 (1872), p. 97 besprochen wird.

5) J. f. Math. 26 (1843), p. 115.

6) J. de math. 17 (1852), p. 393.

7) Paris C. R. 66, p. 1262; 67, p. 171, 316, 841; Annales de l'École Normale (1808), p. 311.

des Systems abhängen, können aus den Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_9$, $p_1, p_2, \ldots, p_9$ durch eine Berührungstransformation abgeleitet werden, und daher kann das System der Bewegungsgleichungen als ein System 12. Ordnung in der Form geschrieben werden (unter Weglassung der Akzente von den neuen Variabeln):

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Wie *Bertrand* bemerkte, kommt diese Reduktion auf die Ersetzung dreier Massen durch zwei fiktive Massen μ und μ' hinaus.

Eine entsprechende Reduktion gibt *Poincaré* an.[8]) Seien q_1', q_2', q_3' die Koordinaten von m_1 bezogen auf m_3, q_4', q_5', q_6' die Koordinaten von m_2 relativ zu m_3, q_7', q_8', q_9' die Koordinaten von m_3 selbst. Seien p_1', p_2', p_3' die Impulskomponenten von m_1, p_4', p_5', p_6' diejenigen von m_2 und p_7', p_8', p_9' die Impulskomponenten des ganzen Systems. Der Übergang von den Variabeln $(q_1, q_2, \ldots, q_9, p_1, p_2, \ldots, p_9)$ zu den Variabeln $(q_1', q_2', \ldots, q_9', p_1', p_2', \ldots, p_9')$ wird durch eine Berührungstransformation vermittelt, und infolgedessen behalten die Bewegungsgleichungen in den neuen Variabeln die kanonische Form. Es zeigt sich, daß die Gleichungen für die Variabeln $q_7', q_8', q_9', p_7', p_8', p_9'$ von dem übrigen System abgetrennt werden können, und so erhalten wir wieder ein System der Form von der 12. Ordnung.

Es ist nun weiter das System von der 12. auf die 8. Ordnung zu reduzieren mit Hilfe der Flächensätze und der Elimination der Knoten. *Bour* und *Radau*[9]) gehen zu diesem Zweck aus von dem oben angegebenen System 12. Ordnung von *Jacobi* und *Bertrand*. Seien q_1', q_2' die vom Nullpunkt an gerechneten Radienvektoren der beiden fiktiven Massen μ und μ'. Sei q_3' der Winkel zwischen q_1'

8) Paris C. R. 123 (1886), p. 1031; Acta math. 21 (1897), p. 83.

9) *Bour*, Journ. de l'École Polytechnique Paris 21 (1856), p. 35; *Radau*, Annales de l'École Normale 5 (1868), p. 311. Ein Versehen von *Bour* wurde von *Mathieu* bemerkt, J. de math. (3) 2 (1876). Die Variablen von *Bour* sind von denjenigen von *Radau* verschieden. *Bour* mißt die Winkel q_3' und q_4' in der Ebene der Radienvektoren von der Schnittgeraden dieser Ebene mit der veränderlichen Ebene an.

Verschiedene Mathematiker untersuchten die Reduktion des Problems auf ein Problem 8. Ordnung in mehr oder weniger ähnlicher Weise wie *Bour* und *Radau*. *Brioschi*, Paris C. R. 66 (1868), p. 710, leitet *Bours* Gleichungen ab und gibt eine interessante Form der Flächensätze. *Siacci*, Atti di Torino 6 (1871), p. 440; Paris C. R. 78 (1874), p. 110, zeigte, wie man eine Anzahl von Gleichungssystemen konstruieren kann, die den Bourschen analog sind.

Eine Arbeit von *Vernier*, Paris C. R. 119 (1894), p. 451, ist im wesentlichen nur eine Wiedergabe der Arbeit von *Siacci* von 1874.

und der Schnittlinie (Knotenlinie) der unveränderlichen Ebene mit einer Ebene durch zwei aufeinanderfolgende Lagen von q_1'. Die Variable q_4' hat die entsprechende Bedeutung für μ'. Man setze ferner:

$$p_1' = \mu \frac{dq_1'}{dt}, \quad p_2' = \mu' \frac{dq_2'}{dt}.$$

Schließlich mögen p_3' und p_4' die Flächengeschwindigkeiten der beiden Massen μ und μ' in ihren augenblicklichen Bahnebenen bedeuten. Dann lassen sich analog, wie in den obigen Fällen, vier weitere Variable hinzufügen, so daß eine Berührungstransformation zwischen neuen und alten Variablen besteht und die Gleichungen für diese vier weiteren Variablen — eben infolge der Gültigkeit der Flächensätze — von dem übrigen System abgetrennt werden können. Die Bewegungsgleichungen bilden dann (unter Weglassung des Indices der neuen Variablen) das folgende kanonische System 8. Ordnung:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

wobei:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2\mu}\left(p_1^2 + \frac{p_3^2}{q_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu'}\left(p_2^2 + \frac{p_4^2}{q_2^2}\right) - \frac{m_1 m_2}{q_1} \\ - m_1 m_3 \left\{ q_2^2 - \frac{2 m_2 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cdot \cos q_4 - \frac{\varkappa^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4} \sin q_3 \cdot \sin q_4\right) \right. \\ \left. + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} q_1^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ - m_2 m_3 \left\{ q_2^2 + \frac{2 m_1 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cdot \cos q_4 - \frac{\varkappa^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4} \sin q_3 \cdot \sin q_4\right) \right. \\ \left. + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} q_1^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ist und noch $\varkappa$ die Gesamtflächengeschwindigkeit des Systems bedeutet.

Entsprechende Reduktionen auf die 8. Ordnung sind von *Scheibner*[10]), *Bruns*[11]) und *Whittaker*[12]) gegeben worden. In den beiden ersteren Fällen figurieren die drei wechselseitigen Abstände der drei Körper unter den Endvariablen, während im letzteren Fall q_1, q_2, q_3, q_4 die rechtwinkligen Koordinaten von m_1 und m_2 sind, bezogen auf bewegliche Achsen durch m_3 in der Ebene der drei Körper.

Die Reduktion der Bewegungsgleichungen des Dreikörperproblems von der 12. Ordnung auf die 8. Ordnung mit Hilfe der Flächensätze und der Elimination des Knotens kann auch durch *Lie's* Methode zur

10) J. f. Math. 68 (1868), p. 390.
11) Acta Math. 11 (1887), p. 25.
12) Dynamics Kap. XIII.

Auflösung partieller Differentialgleichungen vollzogen werden.[13]) Die Lösung des kanonischen Systems 12. Ordnung

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

hängt mit der zugehörigen Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, p_2, \ldots, p_6) = h$$

zusammen, wo

$$p_\nu = \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

ist.

Bezeichnen wir mit

$$F_1 = \text{konst.}, \quad F_2 = \text{konst.}, \quad F_3 = \text{konst.}$$

die drei Flächensätze, so daß die Funktionen F_1, F_2, F_3 die Relation $(H, F) = 0$ befriedigen, so sind auch die Gleichungen

$$(F_1, F_2) = F_3, \quad (F_2, F_3) = F_1, \quad (F_3, F_1) = F_2$$

erfüllt (wo das Symbol (μ, ν) den Poissonschen Klammerausdruck bedeutet), und es bilden daher die Funktionen F_1, F_2, F_3 eine Funktionsgruppe. Daraus können wir nach der Lieschen Methode das zugehörige Involutionssystem ableiten, das aus Funktionen besteht, die miteinander und mit H in Involution sind. Im vorliegenden Falle besteht das System aus den Funktionen F_1 und $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$. Mit Hilfe dieser zwei Funktionen kann die partielle Differentialgleichung

$$H(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) = h$$

auf eine partielle Differentialgleichung, mit $6 - 2 = 4$ unabhängigen Variablen zurückgeführt werden; das ist aber die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung eines Hamiltonschen Systems 8. Ordnung, womit die fragliche Reduktion erfolgt ist.

Mit Hilfe des Energiesatzes und der Elimination der Zeit kann man die erhaltenen Systeme auf die 6. Ordnung reduzieren bei Beibehaltung der kanonischen Form. In der Tat, bezeichnen wir das Energieintegral des Systems 8. Ordnung

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

mit

$$H(q_1, \ldots, q_4, p_1, \ldots, p_4) + h = 0$$

und lösen diese Gleichung in bezug auf p_1 auf

$$K(p_2, p_3, p_4, q_1, \ldots, q_4) + p_1 = 0,$$

13) Math. Ann. 8 (1875), p. 215.

so können wir den Zusammenhang zwischen den Veränderlichen $p_2 p_3 p_4, q_1, \ldots, q_4$ durch die Gleichungen 6. Ordnung:

$$\frac{dq_\nu}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, 4)$$

darstellen.

2. Die Differentialgleichungen in Spezialfällen des Dreikörperproblems. In gewissen Spezialfällen des Dreikörperproblems vereinfachen sich die Differentialgleichungen. Der wichtigste Fall dieser Art entspringt dem Umstand, daß die drei Körper immer in einer Ebene bleiben, wenn sie selbst und zugleich ihre Bewegungsrichtungen in einem bestimmten Moment in einer Ebene lagen, es ist der Fall des *„ebenen“ Dreikörperproblems.*

Das unreduzierte kanonische Gleichungssystem wird hier von der 12. Ordnung. Es existieren vier Integrale für die Bewegung des Schwerpunkts, ein Flächensatz und das Integral der lebendigen Kraft. Die Elimination der Knoten und der Zeit kann, wie früher, ausgeführt werden. Auf diese Weise läßt sich das Problem schließlich auf ein kanonisches System der 4. Ordnung reduzieren.

Viele der im vorigen Paragraphen erwähnten Arbeiten enthalten auch den Übergang vom allgemeinen auf das ebene Dreikörperproblem. Das Gleichungssystem von *Bour* und *Radau* wird:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

wo q_1, q_2, p_1, p_2 die frühere Bedeutung haben, während q_3 jetzt der Winkel zwischen q_1 und q_2 ist und p_3 die Differenz der Flächengeschwindigkeiten von μ und μ' ist.

Scheibner[14]) reduziert das System auf dieselbe Form, wo q_1, q_2, q_3 die wechselseitigen Distanzen der drei Körper bedeuten. *Whittaker*[15]) erhält diese Form, indem er q_1 den Abstand $m_1 m_3$, q_2 und q_3 die Projektionen von $m_2 m_3$ auf $m_1 m_3$ und auf eine dazu Senkrechte bedeuten läßt.

Die fernere Reduktion des Systems auf die 4. Ordnung kann wie in Nr. 1 erfolgen.

Ein andrer Spezialfall des Dreikörperproblems, der in neueren Untersuchungen eine besondere Rolle spielt, ist das *restringierte Dreikörperproblem.* Dasselbe lautet folgendermaßen: Zwei Körper S und J bewegen sich unter ihrer gegenseitigen Anziehung in kreisförmigen

---

14) J. f. Math. 68 (1868), p. 390; vgl. auch *Perchot* und *Ebert,* Bull. Astr. 16 (1899), p. 110.

15) Dynamics. Kap. XIII.

Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt O. Ein dritter Körper P von verschwindender Masse (oft der *Planetoid* genannt), der also die Bewegung von S und J nicht stört, bewegt sich unter der Anziehung dieser beiden Körper. Seine Bewegung ist zu bestimmen.

Dieses Problem wurde zuerst von *Jacobi*[16]) behandelt, der zeigte, daß es von einem Differentialgleichungssystem der 4. Ordnung abhängt, von welchem ein Integral — jetzt allgemein das Jacobische Integral genannt — sofort hingeschrieben werden kann. Seien nämlich x und y die Koordinaten des Planetoiden in einem rotierenden rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Schwerpunkt O und dessen x-Achse stets mit der Linie JS zusammenfällt, dann lautet das System 4. Ordnung:[17])

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

wobei:

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + n(uy - vx) - \frac{m_1}{SP} - \frac{m_2}{JP}$$

ist und m_1, m_2, n resp. die Massen von S und J und die mittlere Bewegung von S und J in ihrer Bahn, SP und JP ihre Abstände von P bedeuten. Das Jacobische Integral lautet:

$$H = \text{konst.}$$

Tisserand[18]) gibt kanonische Variable an, die von den Elementen der oskulierenden Ellipse abhängen, die der Planetoid um einen der beiden anderen Körper beschreibt. *Poincaré*[19]) bringt ähnlich die Bewegungsgleichungen auf die Form:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

wobei die Ellipse zugrunde gelegt wird, die der Planetoid, von seiner augenblicklichen Lage und Geschwindigkeit ausgehend, unter der Anziehung eines Körpers der Masse 1 im Schwerpunkt O beschreiben würde; q_1 bedeutet die mittlere Anomalie des Planeten in dieser Ellipse, q_2 die Perihellänge, p_1 ist gleich $\sqrt{a}$, p_2 gleich $\sqrt{a(1-e^2)}$, wenn a und e die halbe große Achse und die Exzentrizität der Ellipse bedeuten. Setzt man die Massen von S und J gleich $1 - \mu$ resp. μ, so kann man H bei kleinem μ in der Form entwickeln:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \cdots$$

---

16) Paris C. R. 3 (1836), p. 59.

17) *Scheibner,* J. f. Math. 65 (1866), p. 291.

18) Bull. Astr. 4 (1887), S. 183.

19) Acta Math. 13, p. 1.

wobei:

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - np_2$$

und $H_1, H_2, \ldots$ periodisch in q_1 und q_2 von der Periode 2π sind.

Durch Elimination der Zeit unter Benutzung des Jacobischen Integrales kann das restringierte Dreikörperproblem auf ein kanonisches System der 2. Ordnung reduziert werden.

3. Die Differentialgleichungen des n-Körperproblems. Ist die Zahl der anziehenden Körper größer als drei, so wird die Behandlung verwickelter, ohne sich im Wesen zu ändern. Lagranges Reduktionsart für das Dreikörperproblem wurde von *Seydler*[20]) auf vier Körper übertragen. Das Gleichungssystem wird von der 12. Ordnung.

Das allgemeine n-Körperproblem kann mit Hilfe der zehn bekannten Integrale, der Elimination der Knoten und der Zeit von der $6n^{\text{ten}}$ auf die $6n - 12$. Ordnung reduziert werden. Der Nachweis hierfür stammt von *Radau*[21]), welcher schon früher[22]) eine Reihe von Möglichkeiten angegeben hatte, wie man die Schwerpunktssätze bei der Reduktion benutzen kann. Die tatsächliche Reduktion des n-Körperproblems auf ein kanonisches System der $6n - 10$. Ordnung, welches *Bours* Gleichungssystem 8. Ordnung für das Dreikörperproblem völlig analog ist, wurde von *Mathieu* ausgeführt.[23])

4. Die Nichtexistenz bestimmter Klassen von Integralen. Es wurden viele Versuche unternommen, in dem Dreikörperproblem neue Integrale aufzustellen, die den zehn bekannten analog sind, also nur bekannte Funktionen in geschlossener Form enthalten. Das Mißlingen dieser Versuche legte den Gedanken nahe, daß es keine weiteren Integrale von dieser einfachen Art gibt; diese Vermutung wurde durch ein wichtiges Theorem von *Bruns* bestätigt[24]), das aussagt, daß in dem

---

20) Abhandlungen der k. böhm. Ges. d. Wiss. (7) 1 (1885), Nr. 5.

21) J. de math. (2) 14 (1869), p. 167; die Möglichkeit dieser Reduktion wurde auch von *Allégret* untersucht, J. de math. (3) 1 (1875), p. 277. (Über die Lücken in *Allégrets* Arbeit vgl. *Mathieu*, J. de math. (3) 3, p. 216; 4 (1877), p. 69, und (anknüpfend an *Lagranges* Arbeiten) von *Betti*, Annali di mat. (2) 8 (1877), p. 301.

22) Annales de l'Éc. Norm. 5 (1868), p. 311; *Allégret* gab, Paris C. R. 79 (1874), p. 656, ein von dem Radauschen Theorem nicht wesentlich verschiedenes Resultat. Vgl. auch *Andrade*, Paris C. R. 108 (1889), p. 226, 280, und ein allgemeines Theorem von Sir *R. S. Ball*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 37 (1877), p. 265.

23) J. de math. (3) 3 (1877), p. 5. Vgl. *Bennett*, Mess. of Math. (2) 34 (1904), p. 113.

24) Berichte der kgl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig (1887), S. 1, 55; Acta

vorgelegten Problem außer den bekannten Integralen kein anderes algebraisches Integral existiert.

Dem Beweis von *Bruns* werden die Differentialgleichungen des n-Körperproblems in der nichtreduzierten Form als ein Gleichungssystem $6n^{\text{ter}}$ Ordnung zugrunde gelegt, das man also in der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = y_\nu, \quad \frac{dy_\nu}{dt} = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, s) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3n)$$

schreiben kann, wobei s die Summe aller wechselseitigen Entfernungen der Körper bedeutet; der Grund der Einführung von s ist der, daß die Funktionen f_ν rationale Ausdrücke von $(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, s)$ werden, obwohl sie irrationale Ausdrücke von $(x_1, x_2, \ldots, x_{3n})$ allein sind.

Angenommen, dieses Gleichungssystem besäße ein Integral von der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, y_1, y_2, \ldots, y_{3n}) = \text{konst.},$$

wobei φ eine algebraische Funktion ihrer Argumente ist und also die Wurzel einer algebraischen Gleichung darstellt, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x, y sind. Es wird gezeigt, daß dann entweder alle Koeffizienten dieser Gleichung in φ selbst Integrale sind oder aber φ einer Gleichung von geringerem Grade genügt, deren Koeffizienten rationale Funktionen in x, y, s sind. Auf diese Weise wird bewiesen, daß alle Integrale, die algebraische Funktionen von x, y sind, algebraische Kombinationen von anderen Integralen sind, die selbst rationale Ausdrücke in x, y, s sind. Wir betrachten also nur diese letztere Klasse von Integralen.

Es wird sodann gezeigt, daß die Integrale von der zuletzt betrachteten Gattung aus einer anderen Gattung von Integralen aufgebaut werden können, die *Bruns homogene Integrale* nennt. Wenn ein homogenes Integral in Faktoren zerlegt ist, die Polynome in bezug auf die Größen y sind, so ist jeder Faktor entweder selbst schon ein Integral oder wird durch Hinzufügung bestimmter Faktoren ein Integral. Jedes Integral des n-Körperproblems, das algebraisch in den Variablen x, y und unabhängig von t ist, kann also schließlich auf algebraische Weise aus Integralen einer bestimmten Gattung aufgebaut werden, die Polynome von y, rationale Funktionen von x und s und außerdem homogen sind. Es wird ferner gezeigt, daß, wenn φ ein solches Integral bedeutet und man mit φ_0 diejenigen Glieder bezeichnet, die in bezug auf die Größen y von möglichst hoher

---

math. 11, p. 25. Ein Versehen in *Bruns'* Beweis wurde von *Poincaré*, Paris C. R. 123 (1896), p. 1224 rektifiziert.

Ordnung sind, die Funktion φ_0 die Größen x nur ganz und rational und nur in der Verbindung $(y_1 x_\nu - y_\nu x_1)$ enthält; φ_0 ist von s unabhängig. Wir bezeichnen mit A, B, C die drei Komponenten der Flächengeschwindigkeit des Systems, mit L', M', N' die Komponenten der Geschwindigkeit und mit L, M, N die Koordinaten des Schwerpunktes und setzen

$$A' = MN' - NM', \quad B' = LN' - L'N, \quad C' = LM' - L'M.$$

Wir nehmen an, daß diese Größen durch x, y ausgedrückt sind, so daß jede von ihnen gleich konst. gesetzt ein bekanntes Integral des Problems ist. Es wird bewiesen, daß φ_0 die Variablen x nur in der Verbindung A, B, C, A', B', C' enthält und ein Polynom in A, B, C, A', B', C' und in den y ist. Sodann wird bewiesen, daß φ_0 ein Polynom in $A, B, C, A', B', C', L', M', N', T$ ist (wo T die kinetische Energie bedeutet). Setzen wir

$$\varphi_0 = f(A, B, C; A', B', C'; L', M', N'; T).$$

Bezeichnen wir mit V die potentielle Energie des Systems, so daß $T + V$ ein Integral ist. Der Ausdruck

$$J = f(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T + V)$$

ist ein Integral, da er aus Integralen allein aufgebaut ist. Die Differenz

$$\varphi' = \varphi - J$$

ist daher ein Integral von derselben Gattung wie φ, nur ist ihr Grad in den Veränderlichen y mindestens um 1 geringer als der Grad von φ in diesen Variablen. Folglich kann jedes Integral φ in einer Form dargestellt werden, die außer den bekannten Integralen nur noch von einem Integral abhängt, deren Grad in y kleiner ist als der Grad von φ in diesen Veränderlichen; es kann also — durch Fortsetzung dieses Verfahrens — φ dargestellt werden in einer Form, die außer den bekannten Integralen nur von einem Integral von der nullten Ordnung in y abhängt; ein solches Integral ist aber eine Konstante. *Bruns* gelangt also zu dem Theorem: *Alle von der Zeit freien Integrale des n-Körperproblems, die die Koordinaten und Geschwindigkeiten algebraisch enthalten, lassen sich aus dem Schwerpunktsatze, Flächensatze und Energiesatze algebraisch aufbauen.* Eine leichte Erweiterung dieser Überlegung zeigt auch, daß mit Ausnahme der bekannten Integrale keine weiteren Integrale existieren, die die Zeit und die Variablen x, y algebraisch enthalten.

Bruns untersuchte auch noch die Frage, ob Integrale des reduzierten Systems existieren, die die Form von Integralen von totalen algebraischen Differentialen haben, sich also aus verallgemeinerten Abelschen Integralen zusammensetzen, wie sie von *Picard* untersucht worden sind. Dies ist gleichfalls unmöglich. Das Resultat kann auf das n-Körperproblem ausgedehnt werden, da man aus einem solchen Integral des n-Körperproblems ein entsprechendes Integral des Dreikörperproblems dadurch erhalten kann, daß man alle Massen mit Ausnahme dreier gleich Null setzt.

Painlevé[25]) hat das Brunssche Theorem verallgemeinert, indem er bewies, daß jedes Integral des n-Körperproblems, das die Geschwindigkeiten algebraisch, die Koordinaten aber beliebig (algebraisch oder nicht) enthält, eine algebraische Kombination der bekannten Integrale ist.

Ein dem Brunsschen Theorem ähnliches, in mancher Hinsicht noch allgemeineres Theorem wurde später von *Poincaré* publiziert.[26]) Wir schreiben die Bewegungsgleichungen des *restringierten* Dreikörperproblems in der Form:

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H_\nu}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2),$$

wobei H nach den Potenzen der Konstanten μ entwickelbar ist:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \cdots;$$

H_0 ist eine Funktion von p_1, p_2 allein, und wir können durch eine einfache Transformation erreichen, daß die Funktionaldeterminante von H_0 in bezug auf p_1, p_2 nicht gleich Null ist. $H_1, H_2, \ldots$ sind periodische Funktionen in bezug auf q_1, q_2 von der Periode 2π.

Sei nun φ eine Funktion von $(q_1, q_2, p_1, p_2, \mu)$, die in bezug auf q_1, q_2 periodisch ist mit der Periode 2π; wir nehmen ferner an, daß diese Funktion eine eindeutige analytische Funktion ist für jedes reelle Wertsystem q_1, q_2, für hinreichend kleine Werte von μ und für solche reelle Wertepaare p_1, p_2, die ein bestimmtes beliebig kleines Gebiet D ausfüllen. Unter diesen Annahmen kann man die Funktion φ in einer Reihe

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \cdots$$

entwickeln. Poincarés Theorem sagt nun aus, *daß das restringierte Dreikörperproblem außer dem Jacobischen Integral kein anderes Integral von der Form*

$$\varphi = \text{konst.}$$

besitzt, wenn φ eine Funktion dieser Art bedeutet.

25) Paris C. R. 124 (1897), p. 173; Bull. Astr. 15 (1898), p. 81.
26) Acta Math. 13 (1890), p. 259; Méth. Nouv. I, chap. 5 (1892).

Angenommen es gebe ein Integral dieser Art; die Bedingung, daß φ ein Integral ist, kann mit Hilfe der Poissonschen Klammern, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$(H_0, \varphi_0) = 0, \quad (H_1, \varphi_0) + (H_0, \varphi_1) = 0, \ldots$$

Man kann leicht zeigen, daß man, wenn φ und H wesentlich verschiedene Integrale sind, und φ_0 eine Funktion von H_0 allein ist, aus φ ein anderes Integral derselben Art ableiten kann, das so beschaffen ist, daß es keine Funktion von H_0 allein wird, wenn man $\mu = 0$ setzt. Wir können daher annehmen, daß φ_0 keine Funktion von H_0 allein ist. Die Annahme, daß φ_0 die Variablen q_1, q_2 wirklich enthält, ist aber unverträglich mit der Gleichung $(H_0, \varphi_0) = 0$; wir können daher φ_0 als eine Funktion von p_1, p_2 allein annehmen.

Da H_1 und φ_1 periodische Funktionen von q_1, q_2 sind, gestatten sie eine Entwicklung

$$H_1 = \sum_{m_1 m_2} B_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)}, \quad \varphi_1 = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)},$$

wobei $m_1 m_2$ ganze Zahlen bedeuten und die Koeffizienten B und C nur von p_1, p_2 abhängen. Die Gleichung

$$(H_1, \varphi_0) + (H_0, \varphi_1) = 0$$

ergibt

$$B_{m_1 m_2}\left(m_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_2}\right) = C_{m_1 m_2}\left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2}\right).$$

Im allgemeinen enthält jedes noch so kleine Gebiet D unendlich viele Brüche $m_1 : m_2$, für die nicht jeder der zugehörigen Koeffizienten $B_{m_1 m_2}$ verschwindet, wenn man p_1, p_2 solche Werte erteilt, daß

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$$

ist. Im allgemeinen Falle (zu dem das restringierte Problem gehört) ist daher die Gleichung

$$m_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_2} = 0$$

eine Folge der Gleichung

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0,$$

woraus wir schließen, daß die Jacobische Determinante $\frac{\partial(H_0, \varphi_0)}{\partial(p_1, p_2)}$ verschwindet. Dieses Resultat hat zur Folge, daß φ_0 eine Funktion von H_0 sein müßte, was, wie wir gesehen haben, nicht der Fall ist; die zugrunde gelegte Annahme über die Existenz von φ muß fallen gelassen werden, womit Poincarés Theorem für das restringierte Dreikörperproblem bewiesen ist. Man kann zeigen, daß das Theorem auch für das allgemeine Dreikörperproblem richtig bleibt. *Painlevé*[27]) verallgemeinerte dieses Resultat in derselben Weise wie das Brunssche, indem er zeigte, daß außer den bekannten Integralen kein anderes Integral existiert, das eindeutig und analytisch in den Geschwindigkeiten ist, wobei das Auftreten der Koordinaten durch keine Bedingung eingeschränkt ist.

5. Periodische Lösungen; die allgemeine Theorie. Das Dreikörperproblem besitzt Partikularlösungen, bei denen die wechselseitigen Entfernungen periodische Funktionen der Zeit sind. Solche Lösungen bezeichnet man als *periodische Lösungen* oder als *periodische Bahnkurven* des vorgelegten Problems. Man wendet allgemein diese Bezeichnung für Lösungen eines dynamischen Problems an, bei denen die Bahnkurven geschlossen sind. *Stäckel* zeigte[28]), daß in sehr ausgedehnten Fällen der lösbaren dynamischen Probleme in jedem Punkte diejenigen Anfangsrichtungen, die zu periodischen Lösungen führen, in jedem Winkel überall dicht liegen.

Die Theorie der periodischen Lösungen entstand aus der Theorie gewisser spezieller periodischer Lösungen (vgl. die nächste Nummer); die allgemeine Existenztheorie — die später entwickelt wurde — rührt von *Poincaré* her.[29])

Betrachten wir das restringierte Dreikörperproblem, wenn der kleine Parameter μ, der von dem Verhältnis der Massen von J und S abhängt, gleich Null ist, so existieren offenbar periodische Lösungen, denn in diesem Fall wird der Planetoid von J nicht gestört und beschreibt daher um S eine Keplersche Ellipse; die Lösung ist periodisch, wenn die beiden Umlaufszeiten, die von P und die von J um S, kommensurabel sind. Betrachten wir nun ein System von Differentialgleichungen, das noch einen Parameter μ enthält und für $\mu = 0$ periodische Lösungen besitzt; es kann gezeigt werden, daß, wenn eine bestimmte Jacobische Determinante nicht verschwindet, das vorgelegte System auch für von Null verschiedenes μ periodische Lösungen besitzt, die von den vorgelegten nur wenig verschieden sind.[30]) Unglücklicherweise ist in den Problemen der Himmelsmechanik jene Determinante das Produkt zweier anderen Determinanten, von denen die eine — die die Hessesche Determinante der von μ freien Glieder

27) Paris C. R. 130 (1900), p. 1699.

28) Math. Ann. 54 (1901), p. 86.

29) Bull. Astr. 1 (1884), p. 65; Acta Math. 13 (1890), p. 1; Méth. Nouv. I (1892).

30) Die Jacobische Determinante verschwindet, wenn einer der charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung (vgl. No. 7) gleich Null ist.

der Störungsfunktion ist — verschwindet. In dem restringierten Dreikörperproblem kann man diese Schwierigkeit durch einen einfachen Kunstgriff leicht beseitigen[31]), bei dem allgemeinen Dreikörperproblem jedoch ist dies nicht so leicht zu erreichen.[32])

Zu jeder periodischen Lösung gehört ein bestimmtes System von Veränderlichen, von der Beschaffenheit, daß die Gleichung dieser Lösung in bezug auf diese Variable eine besonders einfache Form annimmt.[33]) Betrachten wir z. B. eine periodische Lösung des Systems

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2),$$

wobei H eine Funktion von q_1, q_2, p_1, p_2 ist, die durch die folgenden Gleichungen definiert ist:

$$q_1 = \varphi_1(t), \quad q_2 = \varphi_2(t), \quad p_1 = \psi_1(t), \quad p_2 = \psi_2(t).$$

Durch Elimination von t aus diesen Gleichungen erhalten wir ein Gleichungssystem, das wir in die Form

$$q_1 = \theta_1(p_2), \quad q_2 = \theta_2(p_2), \quad p_1 = \theta_3(p_2)$$

setzen; wenn wir statt der Variablen (q_1, p_1, q_2, p_2) durch die Berührungstransformation

$$\begin{aligned}
Q_1 &= q_1 - \theta_1(p_2),\\
Q_2 &= q_2 - \theta_2(p_2) + (q_1 - \theta_1(p_1))\theta_3'(p_2) - (p_1 - \theta_3(p_2))\theta_1'(p_2),\\
P_1 &= p_1 - \theta_3(p_2),\\
P_2 &= p_2
\end{aligned}$$

die neuen Variablen Q_1, Q_2, P_1, P_2 einführen, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dQ_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_2}, \quad \frac{dP_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu},$$

während die periodische Lösung jetzt durch die Gleichungen

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = \psi_2(t)$$

definiert ist.

Ein von *Whittaker*[34]) herrührendes Kriterium zur Auffindung von periodischen Lösungen in dem restringierten Dreikörperproblem lautet wie folgt:

---

31) *Poincaré*, Acta Math. 13, p. 122; Méth. Nouv. I, p. 117.

32) *Poincaré*, Méth. Nouv. I, p. 133; *Kobb*, Öfversigt of K. Sv. Vet-Ak. Förh. 52 (1895), p. 215.

33) *Poincaré*, Méth. Nouv. II, p. 369.

34) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 62 (1902), p. 346. Vgl. auch *Signorini*, Palermo Circ. Rend. 33 (1912).

Wir bilden in den Bezeichnungen von No. 2 die Funktion

$$G(x, y) = \left\{h + \frac{m_1}{SP} + \frac{m_2}{JP} + \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo h die Energiekonstante im Jacobischen Integral bezeichnet; wenn in der Bewegungsebene eine geschlossene Kurve existiert, die ganz innerhalb einer anderen geschlossenen Kurve verläuft, von der Beschaffenheit, daß der Ausdruck

$$\frac{G}{\varrho} + \frac{\partial G}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial G}{\partial y} \sin \varphi + \sqrt{2}\, n$$

(wo ϱ den Krümmungsradius bezeichnet) in jedem Punkte der inneren Kurve negativ, in jedem Punkte der äußeren Kurve positiv ist, *so existiert in dem von beiden Kurven umschlossenen ringförmigen Gebiet eine periodische Bahnkurve des Planetoiden, die die beliebig vorgeschriebene Größe h als Energiekonstante besitzt.*

Poincaré gab nach dem folgenden Prinzip eine Einteilung der verschiedenen periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems: die Lösung wird als eine Lösung der *ersten Klasse* (premier genre) bezeichnet, wenn die relative Bahnkurve des Planetoiden sich schließt, bevor der Planetoid einen einzigen Umlauf um S beendet hat; wenn der Planetoid mehr als einen Umlauf macht, bevor seine Bahnkurve sich schließt, so wird die Lösung als Lösung von der zweiten Klasse (deuxième genre) bezeichnet. Eine Methode, periodische Lösungen von der zweiten Klasse zu erhalten, ist die folgende[35]): man betrachte die Bewegung des Planetoiden in der Nähe einer stabilen periodischen Bahn der ersten Klasse; wenn die Periode kleiner Schwankungen um diese Bahn nahezu kommensurabel ist mit der Periode T der periodischen Bahn selbst, so existiert im allgemeinen unter den Nachbarbewegungen eine periodische Bahn der zweiten Klasse. *Poincaré* teilt ferner die periodischen Bahnen der ersten Klasse, die in der Ebene von S und J verlaufen, in zwei Sorten, je nachdem ihre Exzentrizität gleich Null ist oder nicht, d. h. je nachdem die Bahnen sich einer Kreisbahn nähern oder nicht, wenn die Masse von J unbegrenzt abnimmt.[35a])

Periodische Lösungen jeder Art können leicht bestimmt werden durch geeignete Spezialisierung der unten zu besprechenden Entwick-

---

35) Acta Math. 13 (1890), p. 228; Méth. Nouv. III (1899), p. 201.

35a) In bezug auf die Einteilung der periodischen Lösungen vgl. ferner *Charlier,* Mechanik des Himmels Bd. 2 und *H. von Zeipel,* Upsala Nova Acta (2) 20 (1904).

lungen, die die allgemeinen Lösungen des Dreikörperproblems darstellen[36]), da diese im allgemeinen divergenten Entwicklungen gerade im Fall periodischer Lösungen konvergent werden.

6. Spezielle periodische Lösungen. Die einfachsten periodischen Lösungen des Dreikörperproblems wurden von *Lagrange*[37]) gefunden; er zeigte, daß man die Bewegungsgleichungen durch eine Klasse von Lösungen befriedigen kann, wobei die drei Körper in den Eckpunkten eines bewegten gleichseitigen Dreiecks liegen; bei einer anderen Klasse von Lösungen liegen die drei Körper stets auf einer geraden Linie; wir bezeichnen diese Bewegungen als die *Lagrangesche Bewegung der drei äquidistanten bzw. gradlinig angeordneten Massenpunkte.* Betrachten wir jetzt speziell das restringierte Dreikörperproblem; hier erhält man das Resultat, daß der kleine Planet bei geeigneter Anfangsgeschwindigkeit ständig in einer unveränderten Lage in bezug auf S und J bleibt, wenn er an einer der beiden Stellen steht, wo er mit S und J ein gleichseitiges Dreieck bildet, oder wenn er sich an einer von drei bestimmten Stellen der geraden Linie SJ befindet. Diese fünf Stellen werden *Librationszentra* genannt. Keine dieser Gleichgewichtslagen ist vollständig stabil, es sei denn, daß die Massen von S und J die Ungleichung[38])

$$(m_1 + m_2)^2 > 27 m_1 m_2$$

erfüllen; in diesem Falle ist die Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks stabil; von den zwei normalen Schwingungen um die geradlinige Konfiguration ist die eine stabil, die andere instabil.

Man erhält eine neue Klasse von periodischen Lösungen, wenn man entsprechend der Methode der kleinen Schwingungen die Bewegungen des Planetoiden in der Nähe der Librationszentra betrachtet. Die schwingenden Bewegungen dieser Art in der Nähe der Librationszentra wurden von verschiedenen Autoren untersucht, unter anderen

36) *Poincaré,* Bull. Astr. 15 (1898), p. 289.

37) Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'Acad. de Paris 9 (1772). Auf den Fall mehrerer anziehender Körper wurden die Lagrangeschen Resultate von verschiedenen Autoren erweitert; vgl. *Hoppe,* Arch. Math. Phys. 64 (1879), p. 218; *Lehmann-Filhes,* Astr. Nachr. 127 (1891), p. 137; *Sloudsky,* Bull. de la soc. Imp. Natur. Moscow. 1892, p. 437; *Moulton,* Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 17; *Dziobek,* Astr. Nachr. 152 (1900), p. 33; *Pizzetti,* Roma Lincei Rend. 5ª 13 (1904), p. 17; *Lovett,* Quart. Jour. Math. 35 (1904), p. 116.

Eine imaginäre Lösung, die aus der Lagrangeschen Arbeit entsteht, ist von *Whittemore,* Math. Ann. 64 (1907), S. 150 betrachtet worden.

38) *Routh,* London Math. Soc. Proc. 6 (1875), p. 86.

von *Gýlden*[39]), von *Burrau*[40]) (der gefunden hat, daß die Reihe der Bahnen durch eine sog. *Ejektionsbahn* abgeschlossen wird, in der der Planetoid von einem Zusammenstoß mit S oder J ausgeht), von *Thiele*[41]), *Perchot* und *Mascart*[42]), (der die Poincarésche Theorie auf die Lösungen anwandte), von *Darwin*[43]), *Charlier*[44]) (der auch Bahnen in der Umgebung der Librationszentra des gleichseitigen Dreiecks betrachtet) und von *Plummer.*[45])

Die Bewegungen der drei äquidistanten Massenpunkte haben dadurch praktisches Interesse gewonnen, daß seit 1906 mehrere Asteroiden (588 Achilles, 617 Patroclus, 624 Hector, 659 Nestor) entdeckt worden sind, deren Bewegung in Schwingungen in der Nähe dieser Konfiguration besteht[45a]).

Für die neuere Entwicklung der Theorie der periodischen Bahnen bilden den Ausgangspunkt die Arbeiten von *Hill.*[46]) *Hill* betrachtet das restringierte Dreikörperproblem (mit einer für uns unwesentlichen Vernachlässigung) und sucht periodische Lösungen, bei denen der Planetoid in einer periodischen Bahn S umkreist. Seine Methode besteht darin, daß er in die Differentialgleichung eine Entwicklung von der gesuchten Form mit unbestimmten Koeffizienten einsetzt; er bestimmt diese Koeffizienten als Funktionen eines Parameters m, der von dem Verhältnis der Periode der Lösung und der Umlaufszeit der Linie SJ abhängt. Bei Änderung von m erhält man verschiedene periodische Lösungen; für kleines m ergibt sich die sehr nahe mit einer Ellipse übereinstimmende „Variationskurve", für wachsendes m erhält *Hill* als letzte Lösung (die Bahn von größter *Lunation*) eine Kurve mit Spitzen in den Quadraturen, an den Stellen, wo der Winkel

39) Öfversigts of K. Sv. Vet.-Ak. Förh. 4 (1884), p. 3; Bull. Astr. 1 (1884), p. 361.

40) Astr. Nachr. 136 (1884), p. 161.

41) Astr. Nachr. 138 (1895), p. 1.

42) Bull. Astr. 12 (1895), p. 329.

43) Acta Math. 21 (1897), p. 99.

44) Meddelanden fran Lunds Obs. No. 18 (1901).

45) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 62 (1901), p. 6; 63 (1903), p. 436; 64 (1904), p. 98.

45a) Vgl. *Linders*, Stockholm Arkiv för Math. 4 (1908), Nr. 20.

46) *Hill* benutzte zuerst periodische Lösungen in einer Arbeit, die in Cambridge. Mass. U. S. A. bei J. Wilson & Sohn 1877 veröffentlicht und in den Acta Math. 8 (1886), p. 1 abgedruckt wurde. In ausführlicher Form ist der Teil über die periodischen Lösungen in Am. Journ. Math. 1 (1878), p. 5, 129, 245 erschienen. Die Konvergenz der Hillschen Reihen im Falle der Mondbewegung wurde von *Liapounoff*, Trans. Imp. Soc. Nat. Mosc. 13 (1896) und *Happel*, Inaug.-Diss. Göttingen 1900 bewiesen.

von SJP ein rechter Winkel ist. *Hill* hielt diese Bahn für den Abschluß seiner Reihe; *Poincaré*[47]) aber wies darauf hin, daß die Fortsetzung durch eine Reihe von Kurven mit Schlingen gegeben wird, und *Kelvin*[48]) zeichnete mittels graphischer Methoden eine solche Lösung.

Darwin[49]) berechnete numerisch eine große Anzahl von periodischen Lösungen in dem restringierten Dreikörperproblem und teilte sie in sechs Klassen; in einer Klasse (Planet A) beschreibt der Planet eine geschlossene Kurve um S, wie bei den Hillschen Bahnen; in zwei anderen Klassen (oszillierende Satelliten a und b) oszilliert der Planetoid um eine der geradlinigen Librationszentra (der Satellit b beschreibt Burraus Bahnen); in den anderen drei Klassen (Satellit A, B, C) beschreibt der Satellit geschlossene Bahnen um J.

Darwin fand, daß in der Klasse des Satelliten A die Bahnen wesentlich von der Wahl der Energiekonstante im Jacobischen Integral abhängen. Für bestimmte Werte der Konstanten sind die Bahnen einfache Ovale und sind stabil; bei anderen Werten dieser Konstante haben die Bahnen die Form einer 8 und sind instabil. *Poincaré*[50]) vermutete, daß die instabilen Lösungen nicht die analytischen Fortsetzungen der stabilen Lösungen sind, und *Hough* bewies[51]) dies durch Betrachtung solcher Bahnen, wo die anfängliche Geschwindigkeit retrograd ist.

Schwarzschild[52]) untersuchte die periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die in die zweite *Sorte* von *Poincaré* gehören. Nimmt man an, daß der Planetoid so in Bewegung gesetzt wird, daß er — bei verschwindender Masse des Planeten J — um S eine Ellipse beschreiben würde, deren Periode kommensurabel mit der Umlaufszeit von S um J ist, so läßt sich mit Hilfe der Poincaréschen Methoden zeigen, daß man auch, wenn die Masse von J klein, aber nicht verschwindend ist, durch Variation der Elemente des Planetoiden eine periodische Bahn erhalten kann.

Besondere Aufmerksamkeit haben in den letzten Jahren diejenigen periodischen Bahnen des Planetoiden gefunden, die in einer einfachen

47) Méth. Nouv. I (1892), p. 106.

48) British Association Report (1892), p. 648; Phil. mag. 34 (1892), p. 447.

49) British Association Report (1896), p. 708; Acta Math. 21 (1897), p. 99; Math. Ann. 51 (1899), p. 523.

50) Méth. Nouv. III (1899), p. 352.

51) Acta Math. 24 (1900), p. 257—288. In bezug auf die Darwinschen Bahnen vgl. ferner: *Schlitt*, Diss. Kiel 1903; *Moulton*, Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 537; *Strömgren*, Astr. Nachr. 174 (1907), p. 33.

52) Astr. Nachr. 147 (1898), S. 17, 289.

Kurve S umkreisen und deren Periode annähernd gleich der Hälfte der Umlaufszeit von SJ ist. Diese Lösungen werden allgemein als *Lösungen vom Hekubatypus* bezeichnet, da die mittlere Bewegung des kleinen Planeten Hekuba annähernd zweimal so groß ist, wie die von Jupiter. Wegen der annähernden Kommensurabilität der Perioden sind die Störungen, die der Planetoid von J erfährt, ungewöhnlich groß. Betrachten wir zunächst die periodischen Lösungen der ersten Sorte von *Poincaré* für eine mittlere Entfernung von S unterhalb derjenigen, die der doppelten mittleren Bewegung von J entspricht[53]), so finden wir, daß die Bahn des Planetoiden relativ zu der bewegten Geraden SJ in der Richtung der Senkrechten auf SJ verlängert ist. Diese Erscheinung wird um so ausgeprägter, je mehr die Entfernung an jenen kritischen Wert heranrückt, je genauer die Kommensurabilität wird, und schließlich geht die Lösung in eine Poincarésche Lösung zweiter Sorte über, die auch bei verschwindender Masse J eine endliche Exzentrizität hat. Wenn nun die mittlere Entfernung die Stelle überschreitet, die der Kommensurabilität entspricht, so werden die Bahnkurven in der Richtung von SJ verlängert; wächst die mittlere Entfernung weiter, so gehen die Lösungen zweiter Sorte wieder in Lösungen erster Sorte über, und die Bahnform wird wieder nahezu kreisförmig.[53a])

7. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der benachbarten Lösungen. Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß gegebener Kräfte; wir setzen eine Partikularlösung der Bewegungsgleichung als bekannt voraus und untersuchen die Bewegung eines Massenpunktes, der von einer der gegebenen Bahnkurve benachbarten Stelle ausgeht und daselbst eine Geschwindigkeit besitzt, die der Größe und Richtung nach nur wenig von der Geschwindigkeit in dem betreffenden Punkte der Bahn verschieden ist. Wir wollen untersuchen, ob dieser Massenpunkt während seiner Bewegung nur um die gegebene Bahnkurve oszilliert und in ihrer Nähe bleibt, oder ob sich die Bahn des Massenpunktes von der bekannten Bahn mehr und mehr entfernt, so daß schließlich eine Bewegung von

---

53) *Brendel* (Abhandl. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1 (1898)) wendet *Gyldens* Methode an; *Poincaré,* Bull. Astr. 19 (1902), p. 177, 289; *Hill,* Astron. Journ. 22 (1902), p. 93, 117; *Schwarzschild,* Astr. Nachr. 160 (1903), p. 385, untersucht die Stabilität dieser Bahnen. Vgl. auch *Simonin*, Nice Obs. Ann. 6 (1897) A, Bull. Astr. 19 (1902), p. 129; *Andoyer*, Bull. Astr. 20 (1903), p. 321; *Wilkens,* Astron. Abh. als Ergänzungshefte zu den Astr. Nachr. Nr. 8 (1905).

53a) In bezug auf andre Kategorien periodischer Lösungen vgl. *Pavanini*, Annali di Mat. (3) XIII, p. 179 und *Griffin,* Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 1.

ganz anderem Charakter resultiert. Diese beiden Möglichkeiten werden häufig als *Stabilität* bzw. *Instabilität* bezeichnet.

Sei ω (das wir als kleine Größe annehmen) die normale Entfernung des Massenpunktes von der bekannten Bahn zu einer Zeit t, bezeichnen wir ferner mit s die Länge des Bogens auf der gegebenen Bahn von einem bestimmten Punkte gerechnet bis zu dem Fußpunkte der Normalen ω, mit v die Geschwindigkeit und mit ϱ den Krümmungsradius in der bekannten Bahn an dieser Stelle; schließlich sei V die potentielle Energie des Massenpunktes. Schreiben wir die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes in den Koordinaten ω und s und eliminieren die Größe $(ds/dt - v)$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{3v^2}{\varrho}\right\}\omega = 0,$$

die die normale Verrückuug der gegebenen Bahn von der Nachbarbahn angibt.

Wenn man in dem kinetischen Potential die Glieder 2. Grades in den Geschwindigkeiten (d. h. die kinetische Energie) nicht trennen kann von den Gliedern nullter Ordnung in den Geschwindigkeiten (d. h. von der potentiellen Energie), so ist eine kleine Modifikation nötig, dieser Umstand tritt z. B. in dem restringierten Dreikörperproblem auf, da die Energiefunktion in diesem Falle ein Glied von der Form $n(uy - vx)$ enthält (Nr. 2).

In dieser Weise untersuchte *Hill*[54]) die kleinen Oszillationen des Planetoiden um eine der von ihm gefundenen periodischen Bahnen. Berechnen wir den Koeffizienten von ω in der Differentialgleichung, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_1 \cos 2t + \theta_2 \cos 4t + \cdots)\,\omega = 0,$$

wo $\theta_0, \theta_1, \ldots$ Konstante bedeuten. Diese Gleichung wird die Hillsche Gleichung genannt.[55]) In der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten wird gezeigt, daß

54) Acta Math. 8 (1886), p. 1, Abdruck einer 1877 in Cambridge (Mass.) veröffentlichten Arbeit. *Adams* bemerkt Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1877), p. 43, daß er schon einige Jahre vorher die Bewegung des Mondknotens nach einer Methode untersucht hat, die der Hillschen für das Mondperigäum ähnlich ist, und daß er dabei zu einer ähnlichen unendlichen Determinante gelangte.

55) Es ist dies eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_1 \cos 2t) = 0,$$

die die Funktionen des elliptischen Zylinders definiert, vgl. *Heine*, Kugelfunktionen p. 404.

die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung die Form

$$\omega = Ae^{ict}f(t) + Be^{-ict}f_1(t)$$

hat, wo c eine bestimmte Konstante bedeutet, die reell ist, wenn θ_0 eine positive Zahl ist, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist; A und B sind willkürliche Konstanten, und $f(t)$ und $f_1(t)$ sind periodische Funktionen von der Periode π. Zur Bestimmung von c entwickelte *Hill* die folgende Methode:

Setzen wir $e^{it} = \zeta$, so lautet der Koeffizient von ω in der Differentialgleichung:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \zeta^{2n},$$

wo die Größen θ_n reell sind. *Hill* setzt für ω die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{c+2n}$ an und führt diesen Ausdruck von ω in die Differentialgleichung ein. Da jede Potenz von ζ einen verschwindenden Koeffizienten haben muß, so erhalten wir unendlich viele Gleichungen, die die Größen b linear enthalten. Durch Elimination dieser Größen erhält man eine Determinante mit unendlichvielen Zeilen und Kolonnen, in der nur c und die bekannten Größen θ_n vorkommen. Diese Determinante gleich Null gesetzt gibt den Wert von c.[56])

Dieses Ergebnis kann auf die Mondtheorie übertragen werden; die kleinen Oszillationen um die periodische Bahn können als Folge der Exzentrizität der Mondbewegung betrachtet werden, und die Konstante c gibt die Bewegung des Mondperigäums an. Die Stabilität der Bewegung — in dem Sinne, wie sie oben definiert wurde — hängt offenbar von der Realität der Größe c ab; die Größen ic und $-ic$ werden die „*charakteristischen Exponenten*“ der betrachteten periodischen Lösung genannt, und die Bedingung der Stabilität ist die, daß die *charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung rein imaginär ausfallen.* Die allgemeine Theorie der Stabilität der Lösungen und insbesondere der periodischen Lösungen rührt von *Routh*[57]), *Korteweg*[58]) und *Poincaré*[59]) her; der Name „charakteristischer Exponent“ wurde vom letzteren eingeführt. Das Resultat all dieser Untersuchungen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden.

56) *Hill* untersucht nicht die Konvergenz dieser unendlichen Determinante; diese Lücke wurde von *Poincaré* ausgefüllt, Bull. de la Soc. math. de France. 14 (1886), p. 77.

57) Stability of motion, Cambridge 1876.

58) Wien. Ber. 93 (1886).

59) Acta Math. 13 (1890), p. 1; Méth. Nouv. I (1892).

Betrachten wir das Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten. Nehmen wir an, ein System von periodischen Lösungen

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

von der Periode T sei bekannt, so daß $\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t)$ ist (wenn x_i eine Winkelvariable bedeutet, so soll diese Beziehung folgendermaßen lauten:

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_2(t) + 2n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl ist). Betrachten wir eine Nachbarbewegung, die analytisch durch die Gleichungen:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, wo die Größen ξ_i so klein sein mögen, daß man ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen kann. Die Größen ξ_i werden aus den Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \xi_k \frac{\partial X_i}{\partial k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt. Da dies ein System von linearen Differentialgleichungen ist mit periodischen Koeffizienten, so ergeben sich die Funktionen ξ als Summe von Ausdrücken von der Form $e^{\alpha_k t} S_{ik}$, wo die Funktionen S_{ik} periodische Funktionen der Zeit von derselben Periode wie die $\varphi_i(t)$ sind, und die Konstanten $e^{2i\pi\alpha_k}$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades sind. Die Konstanten α_k werden die *charakteristischen Exponenten* der periodischen Lösung genannt; wenn sie rein imaginär ausfallen, so bleiben die Funktionen ξ klein, und die periodische Lösung ist stabil; im entgegengesetzten Falle ist die Lösung instabil.

Wenn zwei charakteristische Exponenten gleich sind, so tritt in der allgemeinen Lösung ein Glied von der Form $te^{\alpha t}$ auf. Es ist übrigens klar, daß die charakteristischen Exponenten nicht eindeutig definiert sind, sondern bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ unbestimmt bleiben.

Wenn die Funktionen X_i von t unabhängig sind, so ist stets einer der charakteristischen Exponenten gleich Null;[60]) gibt es ein Integral von der Form $F =$ konst., wo F eine eindeutige analytische Funktion ihrer Veränderlichen ist, so verschwindet noch ein charakteristischer Exponent.[61])

60) Méth. Nouv. I, p. 180.

61) ibid. p. 187.

Wenn das ursprüngliche Differentialgleichungssystem die kanonische Form hat, so sind stets zwei charakteristische Exponenten entgegengesetzt gleich; die verschiedenen Werte von α^2 werden die *Stabilitätskoeffizienten* der zugrundegelegten periodischen Lösung genannt; wenn sie alle verschieden sind und einen negativen reellen Wert haben, dann ist die Lösung stabil. Wenn die Hamiltonsche Funktion die Zeit nicht enthält, so ist einer der Stabilitätskoeffizienten gleich Null. Bewegt sich ein Massenpunkt in einer periodischen Bahn unter dem Einfluß konservativer Kräfte mit zwei Freiheitsgraden, z. B. in einer periodischen Bahn des restringierten Dreikörperproblems, so verschwinden zwei charakteristische Exponenten, die anderen beiden sind entgegengesetzt gleich. Dieses Resultat wurde zuerst von *Poincaré* ausgesprochen; es ist im wesentlichen schon in einem Theorem enthalten, das früher von *Korteweg*[62]) aufgestellt wurde: wenn u_n, u_{n+1}, u_{n+2} die normalen Verrückungen bedeuten von einem gegebenen Punkte der periodischen Bahn dieses Charakters zu dem entsprechenden Punkt der Nachbarlösung bei drei aufeinanderfolgenden Umläufen, so hat das Verhältnis

$$\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}$$

einen konstanten Wert, der unabhängig von der Lage des Punktes auf der Bahn und unabhängig von der Wahl der Nachbarlösung ist; das Verhältnis hat den Wert $2\cosh \alpha T$, wo α einer der charakteristischen Exponenten der periodischen Bahn ist.

Im Dreikörperproblem sind die charakteristischen Exponenten einer periodischen Lösung in eine nach den Potenzen der Quadratwurzel des kleinen Parameters μ fortschreitende Reihe entwickelbar.

Darwin[63]) untersuchte die Stabilität der von ihm gefundenen periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems.

Eng verknüpft mit der Theorie der charakteristischen Exponenten ist die Theorie der *asymptotischen Lösungen.*[64]) Im allgemeinen gibt es charakteristische Exponenten mit negativem Realteil. Diejenigen Glieder in der Darstellung der Funktionen ξ, die einen charakteristischen Exponenten mit nicht negativem Realteil enthalten, können durch eine passende Wahl der Integrationskonstanten beseitigt werden; wir erhalten auf diese Weise Partikularlösungen der Differential-

62) loc. cit. Fußnote (58).

63) Acta Math. 21 (1897), p. 144.

64) *Korteweg,* loc. cit.; *Poincaré,* Acta Math. 13 (1890), p. 136; Méth. Nouv. I (1892), III (1899).

gleichungen für die ξ, in denen die Funktionen ξ durch eine Summe von Gliedern dargestellt sind von der Form $e^{\alpha t} S_{ik}$, wo der Realteil von α negativ ist.

Wenn t über alle Grenzen wächst, konvergiert ξ_i gegen Null; mit anderen Worten, die erhaltene Lösung nähert sich mit wachsender Zeit mehr und mehr der ursprünglichen periodischen Lösung; diese *Lösungen* werden als *asymptotische Lösungen* bezeichnet. In ähnlicher Weise kann eine andere Klasse von Lösungen gebildet werden, die für $t = +\infty$ von der periodischen Lösung wesentlich abweichen, aber für $t = -\infty$ sich der periodischen Lösung asymptotisch annähern; diese Lösungen bilden eine zweite Klasse von asymptotischen Lösungen.

Poincaré[65]) hat ferner die Existenz von Lösungen bewiesen, die beiden Klassen von asymptotischen Lösungen angehören, d. h. die sowohl für $t = -\infty$, wie auch für $t = +\infty$ sich der periodischen Bahn asymptotisch annähern und keine periodischen Lösungen sind. Dies sind die sog. *doppeltasymptotischen Lösungen*. *Poincaré*[66]) zeigt noch, daß man die Reihen, die die asymptotischen Lösungen darstellen, aus den allgemeinen Lösungen des Dreikörperproblems erhalten kann; er wendet ferner[67]) das Prinzip der kleinsten Wirkung auf die Theorie der periodischen Lösungen an und gibt eine Klassifikation der instabilen periodischen Lösungen, indem er zeigt, daß man durch kontinuierliche Variation der Konstanten der Bewegung eine periodische Lösung in eine andere nicht überführen kann, wenn die Instabilität der beiden Lösungen verschiedenartig ist.

Die Frage, ob die Methode der kleinen Schwingungen und der charakteristischen Exponenten auch hinreichende Bedingungen für die Stabilität liefert, wurde von *Levi-Civita* untersucht[68]):

Betrachten wir bei einem dynamischen System von zwei Freiheitsgraden eine periodische Lösung, für die der charakteristische Exponent α rein imaginär und $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}$ kommensurabel mit der mittleren Bewegung $\frac{2\pi}{T}$ ist. Wir bezeichnen mit (p_1, p_2, q_1, q_2) die dieser Lösung entsprechenden Poincaréschen Normalvariablen (vgl. Nr. 5). Die Methode der kleinen Schwingungen gibt für die Nachbarbewegungen

65) Acta Math. 13, p. 25; Méth. Nouv, III, Ch. XXXIII.

66) Bull. Astr. 15 (1898), p. 289.

67) Paris C. R. 123 (1896), p. 915; Paris C. R. 124 (1897), p. 713; Méth. Nouv. III (1899), p. 249.

68) Paris C. R. 131 (1900), p. 170, 236; Annali di Math. 5 (1901), p. 221. Vgl. ferner *Cigala*, Annali di Mat. (3) 11, p. 67.

die Gleichungen

$$p_2 = c_{11}x + c_{21}y, \quad q_2 = c_{21}x + c_{22}y,$$

wo x und y Konstante, $c_{11}c_{21}c_{12}c_{22}$ periodische Funktionen der Zeit bedeuten. Wenn wir nun die Glieder 3. Ordnung in der Hamiltonschen Funktion nicht mehr vernachlässigen, so werden die Größen x, y Variable, welche bestimmten nach der Methode der Variation der Konstanten zu erhaltenden Differentialgleichungen genügen. Wenden wir die Transformation, der x und y bei einer vollständigen Umkreisung der periodischen Bahn unterworfen sind, hinreichend oft auf einen Punkt, dessen Koordinaten x, y sind, an, so wird der Punkt schließlich von dem Inneren in das Äußere eines gegebenen Kreises gelangen. Wir erhalten also das Resultat, daß die periodische Lösung, die zufolge der durch die Theorie der kleinen Schwingungen gelieferten Kriterien stabil zu sein schien, instabil wird, wenn man die Glieder höherer Ordnung berücksichtigt.[69])

8. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der Bewegung für große Werte der Zeit. Der Begriff der Stabilität wird oft in anderem Sinne gebraucht als in voriger Nummer. Eine Lösung des Dreikörperproblems wird häufig als *stabil* bezeichnet, wenn die gegenseitigen Entfernungen der Körper für alle Zeiten zwischen bestimmten Grenzen bleiben, so daß die Körper weder einander sehr nahe kommen, noch sich sehr weit voneinander entfernen. *Hill*[70]), *Bohlin*[71]) und *Darwin*[72]) haben gezeigt, daß bestimmte Bewegungstypen im restringierten Problem in diesem Sinne stabil sind (durch Abgrenzung der Gebiete, wo die Geschwindigkeit des Planetoiden imaginär werden müßte, um das Energieintegral zu befriedigen). Man benutzt ferner auch das Wort „Stabilität" bei Bewegungen von der Art, daß das betrachtete System unendlich oft eine Konfiguration annimmt, die der anfänglichen Konfiguration beliebig nahe kommt, wobei die dazwischen vorkommenden Oszillationen keiner Einschränkung unterworfen sind. *Poincaré* benutzt den Ausdruck *Stabilité à la Poisson*, um eine Bewegung letzterer Art zu charakterisieren. Ein von *Hadamard*[73]) herrührendes Theorem ist in der Hinsicht sehr interessant. Betrachten wir die Bewegung eines Punktes der Einheitsmasse unter dem Einfluß einer Kraft, die aus einem Potential V abgeleitet ist

---

69) Vgl. auch *Korteweg*, loc. cit.
70) Am. J. Math. 1 (1878), p. 5.
71) Acta Math. 10 (1887), p. 109.
72) Acta Math. 21 (1897), p. 99.
73) J. de Math. (5) 3 (1897), p. 331.

auf einer überall regulären Fläche, deren Flächenelement durch die Gleichung:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

gegeben ist. Bezeichnen wir mit J die Funktion

$$\Delta_1(V)\Delta_2(V) - \tfrac{1}{2}\nabla(V, \Delta_1(V)),$$

wo Δ_1, Δ_2 den ersten und zweiten Differentialparameter und ∇ den Differentialparameter der zwei Funktionen V, $\Delta_1(V)$ bedeutet.[74]) V sei auf der ganzen Fläche regulär und besitze nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima. Derjenige Teil der Fläche, wo J positiv ist, werde mit *Hadamard* als *anziehendes Gebiet* bezeichnet. Dann ist entweder derjenige Teil der Bahn, der im anziehenden Gebiet verläuft, der Länge nach größer als jede endliche Zahl, oder aber die Bahnkurve strebt asymptotisch einer instabilen Gleichgewichtslage zu. Im allgemeinen durchsetzen die Bahnkurven unendlich oft das anziehende Gebiet und haben dabei Stabilität à la Poisson.

Poincarés Untersuchungen[74a]) über die Kurven, die durch Differentialgleichungen definiert sind, haben gezeigt, daß in dem allgemeinen n-Körperproblem die Stabilität à la Poisson wesentlich von der Stabilität im Sinne von *Hill* abhängt. Die ganze Frage der Stabilität hat derselbe Autor wesentlich gefördert durch Einführung und Anwendung der *Integralinvarianten:*[75]) Die Existenz der asymptotischen Lösungen zeigt, daß es in dem restringierten Dreikörperproblem unendlich viele Partikularlösungen gibt, die instabil sind in Poissons Sinne. *Poincaré* beweist aber[76]), daß es auch unendlich viele in diesem Sinne stabile Lösungen gibt, und daß die instabilen die Ausnahme bilden und die stabilen die Regel sind in demselben Sinne, wie die rationalen Zahlen die Ausnahme bilden und die irrationalen die Regel sind. Mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anfangsbedingung zu einer instabilen Bewegung führt, ist gleich Null. Der Beweis dieser Sätze gelingt auf Grund des folgenden Theorems: Wenn sich der Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ so bewegt, daß die Koordinaten dieses Punktes stets endlich bleiben, und das Integral

$$\int dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n$$

invariant ist — eben eine *Integralinvariante* bildet, dann gibt es zu jedem noch so kleinen Raumteile v_0 Bahnkurven, die unendlich oft durch diesen Raumteil (v_0) hindurchgehen; in der Tat haben die-

74) Vgl. Bd. III 3, p. 123 dieser Enzyklopädie.

74a) J. de Math. (3) 7, p. 375; (3) 8, p. 251; (4) 1, p. 167; (4) 2, p. 151; (1881—86).

75) Vgl. Bd. II, p. 253 dieser Enzyklopädie (Artikel II A 4 b, *Vessiot*).

76) Acta Math. 13 (1890), p. 67; Méth. Nouv. III (1899), p. 162.

jenigen Punkte von ν_0, von denen eine Bahnkurve ausgeht, die diese Eigenschaft nicht besitzt, einen verschwindend kleinen Inhalt im Vergleich zu ν_0.

Ähnlich wird gezeigt, daß, wenn die Energiekonstante im restringierten Dreikörperproblem zwischen bestimmten Grenzen bleibt, die Bewegung stabil ist, nicht nur im Sinne von *Hill* und *Bohlin*, sondern auch im Sinne von *Poisson*; wenigstens ist die Anzahl der Ausnahmefälle verschwindend gering gegenüber der Anzahl der stimmigen Fälle.

9. Die Lösung des Dreikörperproblems durch unendliche Reihen; die älteren Untersuchungen. Die Beobachtungen der Himmelskörper legen unmittelbar eine bestimmte Form der analytischen Ausdrücke nahe, durch welche ihre Bewegung darzustellen ist. Man fand, daß diese Darstellung jedenfalls so weit, wie unsere Nachrichten in die Vergangenheit zurückreichen, durch die Annahme ermöglicht wird, daß die Planeten in Ellipsen die Sonne umkreisen. Diese Ellipsen sind freilich nicht unveränderlich, sondern ihre Elemente (Exzentrizität usw.) variieren von Jahr zu Jahr. Manche dieser Ungleichungen oder Störungen sind periodisch, d. h. können durch Glieder von der Form $a \sin(bt + c)$ dargestellt werden, wo a, b, c Konstanten bedeuten; solche Störungen verursachen keine wesentlichen Änderungen in den Verhältnissen des Sonnensystems; andere Störungen, die durch Glieder von der Form $at + bt^2 + \cdots$ dargestellt werden, werden *säkulär* genannt; ihr Einfluß besteht in einer fortwährenden Änderung der Bahnen, die schließlich zu einer total verschiedenen Konfiguration führen könnte.

Die Methoden der klassischen Planetentheorie schließen sich diesen den Beobachtungen entnommenen Tatsachen an. In dem Sonnensystem überwiegt die Masse der Sonne alle Planeten; dementsprechend dient in der Planetentheorie als Prinzip der Annäherung die Voraussetzung, daß die Masse des einen Körpers groß gegen die Gesamtmasse der anderen Körper ist. Auf Grund dieses Prinzipes fand man, daß sich mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten[77]) analytische Ausdrücke finden lassen, die mit einer bestimmten Annäherung die Differentialgleichungen des Problems erfüllen und deren physikalische Deutung auf die oben erwähnten veränderlichen Ellipsen führt.

Frühzeitig zeigte sich aber, daß diese Art von Lösung einen bestimmten Nachteil hat. Die säkulären Störungen der Elemente führen nämlich zu Gliedern von der Form ct und $ct \sin bt$ in den Ausdrücken der Koordinaten. Diese Glieder wachsen nun mit t über alle Grenzen,

77) Vgl. den Artikel VI 2, 14 über die Planetentheorie.

und das macht es von vornherein unwahrscheinlich, daß die so erhaltenen Reihen für eine beliebig lange Zeit approximative Darstellungen der Bewegungen sind. Es entsteht naturgemäß die Frage nach dem wahren Charakter der säkulären Störungen, wenn die Differentialgleichungen nicht näherungsweise, sondern streng gelöst werden. Die erste Annäherung mag durch Glieder von der Form ct gegeben werden, wo c eine Konstante ist; doch besteht die Möglichkeit, daß dies nur das erste Glied der Entwicklung z. B. von $\frac{c}{m} \sin mt$ ist, wo m eine kleine Zahl bedeutet. Wenn dies der Fall ist, so sind die säkulären Glieder tatsächlich periodisch, nur von sehr langer Periode. Die Beantwortung dieser Frage hat eine fundamentale Wichtigkeit bei den Untersuchungen über die Stabilität des Sonnensystems und bei der Darstellung der Koordinaten für sehr lange Zeiten.

Die Sache wurde noch verwirrter durch den Umstand, daß man in der Mondtheorie Reihen von etwas verschiedener Bauart erhielt. Die Mondtheorie versucht — gleich der Planetentheorie — die Lösung des Dreikörperproblems durch unendliche Reihen; doch die Annäherungen gründen sich in diesem Fall auf die Annahme, daß zwei der Körper einander umkreisen, während sie gemeinsam um einen dritten Körper von überwiegender Masse rotieren; die Mondtheorie liefert also ebenfalls eine Lösung des Dreikörperproblems, deren Geltungsbereich aber von dem der Planetentheorie verschieden ist.

Diese theoretischen Schwierigkeiten, die der klassischen Planeten- und Mondtheorie wenigstens teilweise im Wege standen, werden durch die Auffindung von Lösungen des Dreikörperproblems in rein trigonometrischer Form bewältigt; wir gehen jetzt zu der Theorie dieser Reihen über.

10. Die Lösung des Problems mit Hilfe der Berührungstransformationen. Die von den verschiedenen Autoren zur Lösung des Dreikörperproblems angewandten Methoden zerfallen in zwei Klassen; die erste Klasse der Methoden beruht auf dem Prinzip der Variation der Konstanten; die zweite Klasse von Methoden beruht auf dem Ansatz von Reihen bestimmter Bauart und der der sukzessiven Bestimmung ihrer Glieder wachsender Ordnung. Wir wollen zuerst zeigen[78]), wie

78) Diese Methode ist nicht wesentlich von der Delaunayschen Methode verschieden (Théorie de la lune, Paris 1860—67); *Delaunay* selbst wandte seine Methode nur auf die Mondbewegung an, die Anwendung auf das allgemeine Dreikörperproblem rührt von *Tisserand* her (Obs. de Paris ann., mém. 18 (1885)); vgl. auch *Hill*, Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 205—242. Die hier gegebene Darstellung rührt von *Whittaker* her (Proc. Lond. Math. Soc. 1901). Die Methode von *Newcomb* (Smithsonian Contributions 1874, p. 1), der zuerst das Theorem

man zu einer Methode der ersten Klasse kommt, welche Reihen liefert, in denen die Zeit nur als Argument von trigonometrischen Funktionen auftritt.

Zum Ausgangspunkte wählen wir die Bewegungsgleichungen in der folgenden Form (Nr. **1**):

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_1^2 + \frac{p_3^2}{q_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu}\left(p_2^2 + \frac{p_4^2}{q_2^2}\right) - \frac{m_1 m_2}{q_2}$$
$$- m_1 m_3 \left\{ q_2^2 - \frac{2 m_2 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4} \sin q_3 \sin q_4\right) + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} q_1^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$- m_2 m_3 \left\{ q_2^2 + \frac{2 m_1 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4} \sin q_3 \sin q_4\right) + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} q_1^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt ist. Wir wenden auf dieses Gleichungssystem eine Berührungstransformation an, die durch die Gleichungen:

$$p_\nu = \frac{\partial \overline{w}}{\partial q_\nu}, \quad p_\nu' = -\frac{\partial \overline{w}}{\partial q_\nu'} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

definiert ist, wobei

$$\overline{w} = q_1' q_3 + q_2' q_4 + \int^{q_1} \left\{ -\frac{\mu^2 m_1^2 m_2^2}{q_3'^2} + \frac{2\mu m_1 m_2}{q_1} - \frac{q_1'^2}{q_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} dq_1,$$
$$+ \int^{q_2} \left\{ -\frac{\mu'^2 m_1^2 m_3^2}{q_4'^2} + \frac{2\mu' m_1 m_3}{q_2} - \frac{q_2'^2}{q_2^2} \right\}^{\frac{1}{2}} dq_2$$

ist. Man sieht leicht ein, daß die Funktion H in eine periodische Funktion der neuen Variablen p_1', p_2', p_3', p_4' übergeht; die neuen Bewegungsgleichungen können auf die Form

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

gebracht werden, wobei wir die Akzente bei den neuen Veränderlichen weggelassen haben und H durch eine unendliche Reihe von der Form:

$$H = a_{0000} + \sum a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4)$$

dargestellt ist; die Größen a hängen nur von q_1, q_2, q_3, q_4 ab, und

über die Lösbarkeit des Dreikörperproblems mit Hilfe rein trigonometrischer Reihen aussprach, hängt mit der Methode der Variation der Konstanten eng zusammen und ist eine Erweiterung der klassischen Planetentheorie.

die Summation ist über alle positive und negative ganzzahlige Werte von n_1, n_2, n_3, n_4 zu erstrecken, wobei nur die Kombination

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$$

anzuschließen ist. Wenn m_2 und m_3 kleine Größen sind im Vergleich mit m_1, so überwiegt das konstante Glied in der Entwicklung von H die periodischen Glieder; eine approximative Integration zeigt, daß sich in diesem Falle die Größen $q_1', q_2', q_3', q_4', p_1', p_2'$ nur sehr wenig ändern, und die Größen p_3', p_4' beinahe proportional mit der Zeit sind.

Betrachten wir nun ein periodisches Glied von H, das die anderen periodischen Glieder überwiegt, etwa

$$a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_2 + n_4 p_4);$$

wir setzen

$$H = a_{0000} + a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos\theta + R,$$

wobei θ zur Abkürzung für $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4$ steht und R die Summe der anderen periodischen Glieder bedeutet. Wenden wir auf das Gleichungssystem die durch die Gleichungen

$$p_\nu' = \frac{\partial w}{\partial q_\nu'}, \quad q_\nu = \frac{\partial w}{\partial p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

definierte Berührungstransformation an, wobei

$$w = q_1' p_1 + q_2' p_2 + q_3' p_3 + q_4' p_4 + f(q_1', q_2', q_3', q_4', \theta)$$

ist, und die Funktion f so gewählt ist, daß θ in dem Ausdrucke

$$a_{0000}\left(q_1' + n_1 \frac{\partial f}{\partial \theta},\ q_2' + n_2 \frac{\partial f}{\partial \theta},\ q_3' + n_3 \frac{\partial f}{\partial \theta},\ q_4' + n_4 \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$
$$+ a_{n_1 n_2 n_3 n_4}\left(q_1' + n_1 \frac{\partial f}{\partial \theta},\ q_2' + n_2 \frac{\partial f}{\partial \theta},\ q_3' + n_3 \frac{\partial f}{\partial \theta},\ q_4' + n_4 \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \cos\theta$$

gar nicht mehr vorkommt, daß also dieser Ausdruck nur von q_1', q_2', q_3', q_4' abhängt; diese Funktion von q_1', q_2', q_3', q_4' — wir bezeichnen sie mit $a_{0000}'(q_1', q_2', q_3', q_4')$ — ist durch die Bedingung bestimmt, daß, wenn man aus der Gleichung

$$a_{0000} + a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos\theta = a_{0000}'$$

die Funktion $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ berechnet und in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = c_0(q_1', q_2', q_3', q_4', a_{0000}') + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(q_1', q_2', q_3', q_4', a_{0000}') \cos k\theta$$

darstellt, das Glied c_0 identisch verschwindet.

Die soeben definierte Berührungstransformation kann also explizite durch Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} p_\nu &= p_\nu' + \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sin k\theta', \\ q_\nu &= q_\nu' + p_\nu \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\theta' \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

dargestellt werden, wobei $\theta' = n_1 p_1' + n_2 p_2' + n_3 p_3' + n_4 p_4'$ gesetzt ist. Durch Anwendung dieser Berührungstransformation gehen die Bewegungsgleichungen in das neue Gleichungssystem

$$\frac{dq_\nu'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu'}, \quad \frac{dp_\nu'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu'} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

über, und H läßt sich in eine unendliche Reihe von der Form

$$H = a_{0000}' + \sum a'_{m_1 m_2 m_3 m_4} \cos(m_1 p_1' + m_2 p_2' + m_3 p_3' + m_4 p_4')$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten a' nur von q_1', q_2', q_3', q_4' abhängen. Das neue Gleichungssystem hat dieselbe Form wie das alte; der einzige Unterschied besteht darin, daß das neue konstante Glied a_{0000}' zwei alte Glieder repräsentiert, nämlich das ursprüngliche konstante Glied a_{0000} und gleichzeitig das alte periodische Glied

$$a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4).$$

Der Effekt der Transformation ist also der, daß das konstante Glied von H noch überwiegender wird wie früher, und daß den periodischen Gliedern in H eine noch unwesentlichere Rolle zukommt. Wir wählen jetzt wiederum eines der wesentlichsten periodischen Glieder in der neuen Entwicklung von H heraus und vereinigen es wieder mit dem konstanten Glied durch Anwendung einer Berührungstransformation von der soeben beschriebenen Art. Auf diese Weise können wir sukzessive alle wesentlichen periodischen Glieder von H mit dem konstanten Glied vereinigen, und das Überwiegen des konstanten Gliedes über die periodischen Glieder wird bei jedem Schritt bedeutender; schließlich werden die periodischen Glieder in H so unwesentlich werden, daß man sie vernachlässigen kann. Wir bezeichnen mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ die Variablen, zu denen wir nach diesen Transformationen gelangen; die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{d\alpha_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_\nu}, \quad \frac{d\beta_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

wobei H nur von α_1, α_2, α_3, α_4 abhängt; es sind daher α_1, α_2, α_3, α_4 konstante und β_1, β_2, β_3, β_4 lineare Funktionen der Zeit:

$$\beta_\nu = \lambda_\nu t + \varepsilon_3 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4);$$

die Integrationskonstanten sind α_1, α_2, α_3, α_4, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Durch die sukzessiven Transformationen, die die ursprünglichen Variablen des Dreikörperproblems in die Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ überführen, sind folglich auch diese ursprünglichen Koordinaten als Funktionen der Zeit bestimmt; die Form der Transformationen zeigt, daß die Variablen in dem ursprünglichen kanonischen System 8. Ordnung durch Ausdrücke von der Form

$$\left.\begin{aligned} q_\nu &= c_\nu + \sum a_{m_1 m_2 m_3 m_4} \cos(m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 + m_4\beta_4) \\ p_\nu &= \beta_\nu + \sum b_{m_1 m_2 m_3 m_4} \sin(m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 + m_4\beta_4) \end{aligned}\right\} (\nu = 1,2,3,4)$$

dargestellt sind, wobei die Größen a, b, c Funktionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sind und die Summation über alle ganzzahligen Werte von m_1, m_2, m_3, m_4 zu erstrecken ist, mit Ausnahme der Kombination

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Transformation in Nr. 1 sehen wir, daß in dem Dreikörperproblem die Koordinaten der Massenpunkte durch Ausdrücke von der Form

$$\sum a_{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + n_3\beta_3 + n_4\beta_4 + n_5\beta_5)$$

dargestellt werden können, wobei $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ lineare Funktionen der Zeit sind und die a Konstanten bedeuten; die Summation ist über alle ganzzahlige Werte von n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 zu erstrecken. Bei Bewegungen vom Typus der Planetenbewegungen, wo die Massen m_2 und m_3 verglichen mit der Sonnenmasse m_1 kleine Größen sind, werden demzufolge auch drei von den Winkeln β — etwa $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ — sehr langsam variabel (entsprechend den langen Umläufen der Perihele und Knoten im Planetensystem) und die anderen beiden Winkel, β_1 und β_2, repräsentieren angenähert die mittleren Anomalien der Planeten m_2 und m_3 bei ihrer Bewegung um m_1.

Im Lichte dieser Ergebnisse klären sich die Begriffe „säkulare Glieder“ und „periodische Glieder“ der alten Theorie folgendermaßen: In den soeben abgeleiteten Reihen kommen Glieder vor, deren Argumente nur von den langsam variierenden Winkeln $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ abhängen; diese Glieder entsprechen den säkularen Gliedern. Die Glieder, die eine oder beide der rasch veränderlichen Winkel β_1, β_2 enthalten, stellen die sog. periodischen Störungen dar.[79])

Gyldén faßte die säkularen Glieder etwas anders auf.[80]) Denken wir an irgendein Glied der Störungsfunktion; dieses Glied gibt Anlaß

79) Vgl. *Hill*, Astron. Journ. 22 (1902), p. 183.

80) Traité des orbites absolues I (1893). Vgl. *Hill*, Astron. Journ. 25 (1905), p. 1; *Poincaré*, Acta Math. 29 (1905), p. 235.

zu einem entsprechenden Glied in der Entwicklung der Koordinaten. Wenn bei der Integration der Koeffizient dieses Gliedes durch eine kleine Größe von der Größenordnung der störenden Massen μ dividiert wird, so daß der Einfluß dieses Gliedes in der endgültigen Entwicklung der Koordinaten viel wesentlicher ist als in der Störungsfunktion, so wird das Glied ein *elementares Glied* genannt. Diese elementaren Glieder geben tatsächlich die säkularen Glieder; denn wenn das Argument eines Gliedes nur die langsam variierenden Winkel β_3, β_4, β_5 enthält, so ist der Koeffizient von t in diesem Argument eine kleine Größe von der Ordnung μ; bei der Integration wird aber dieses Glied durch diesen kleinen Koeffizienten dividiert, und daher fällt dieses Glied in die Klasse der Glieder, die soeben als elementare Glieder definiert wurden.

11. Die Lösung des Problems durch sukzessive Bildung der Glieder wachsender Ordnung der Reihe. Wir wollen jetzt ein Beispiel für die zweite Art von Verfahren geben, die Lösung des Problems in der Form einer trigonometrischen Reihe zu erhalten. Die Methode, die wir hier entwickeln, ist die von *Lindstedt*[81]) und *Poincaré*.[82])

Betrachten wir das restringierte Dreikörperproblem; wir können das Gleichungssystem auf die Form

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2)$$

bringen (Nr. 2). Diejenigen Glieder von H, die von der kleinen Größe μ unabhängig sind, bezeichnen wir mit H_0; es ist

$$H_0 = \frac{1}{2q_1^2} + nq_2.$$

Die Funktion $H - H_0$, die den Faktor μ besitzt, ist eine periodische Funktion von p_1 und p_2; wir bezeichnen sie mit μH_1. Für $\mu = 0$ sind q_1 und q_2 konstant. Wenn die kleine Größe μ von Null ver-

81) Paris C. R. 47 (1883), p. 1276, 1353; Astr. Nachr. 107 (1883), p. 197; Annales de l'École Normale (3) 1 (1884), p. 85. Eine Lücke in *Lindstedts* Arbeit wurde von *Poincaré* ausgefüllt, Bull. Astr. 3 (1886), p. 57, der durch eine Anwendung des Greenschen Theorems bewies, daß in jeder Lindstedtschen Annäherung nur ein säkulares Glied auftritt, und daß man dieses stets wegschaffen kann.

82) Acta Math. 13, p. 1; Méth. Nouv. II. *H. v. Zeipel*, Bihang till K. Sv. Vet.-Ak. Handl. 24 (1898), Nr. 8, leitet auf eine neue Weise die Lindstedtschen Reihen ab und erhält die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Existenz; er zeigt ferner (ibid. 26 (1901), Nr. 8) daß die Lindstedtschen Reihen für die Bewegung eines kleinen Planeten nicht existieren, wenn die Neigung der Bahnebene des kleinen Planeten eine bestimmte Grenze übersteigt.

schieden ist, und wenn ξ_1 und ξ_2 die Anfangswerte von q_1 und q_2 bezeichnen, so sind die Größen $q_1 - \xi_1$ und $q_2 - \xi_2$ von derselben Größenordnung wie μ. Setzen wir

$$n_1 = -\frac{\partial H_0(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}, \quad n_2 = -\frac{\partial H_0(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2},$$

so sind die Größen

$$-\frac{\partial H_0(q_1, q_2)}{\partial q_1} - n_1 \quad \text{und} \quad -\frac{\partial H_0(q_1, q_2)}{\partial q_2} - n_2$$

von derselben Größenordnung wie μ; wir können also schreiben

$$-\frac{\partial H_0}{\partial q_1} - n_1 = \mu\varphi_1(q_1, q_2), \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q_2} - n_2 = \mu\varphi_2(q_1, q_2).$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich auf die folgende Form bringen:

$$\frac{dq_1}{dt} = \mu\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = \mu\frac{\partial H_1}{\partial p_2},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{\partial H_1}{\partial q_1}\right), \quad \frac{dp_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right).$$

Fassen wir jetzt die Variablen q_1, q_2, p_1, p_2, die wir bisher als Funktionen von t aufgefaßt haben, als Funktionen der zwei Veränderlichen $\omega_1 = \lambda_1 t + \varepsilon_1$, $\omega_2 = \lambda_2 t + \varepsilon_2$ auf, wo λ_1, λ_2 zwei Konstanten bedeuten, die wir später bestimmen werden, und ε_1, ε_2 Integrationskonstanten sind. Unser Gleichungssystem bekommt die Form:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1\frac{\partial q_1}{\partial \omega_1} + \lambda_2\frac{\partial q_1}{\partial \omega_2} - \mu\frac{\partial H_1}{\partial p_1} = 0,\\
&\lambda_1\frac{\partial q_2}{\partial \omega_1} + \lambda_2\frac{\partial q_2}{\partial \omega_2} - \mu\frac{\partial H_1}{\partial p_2} = 0,\\
&\lambda_1\frac{\partial p_1}{\partial \omega_1} + \lambda_2\frac{\partial p_1}{\partial \omega_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \frac{\partial H_1}{\partial q_1}\right) = 0,\\
&\lambda_1\frac{\partial p_2}{\partial \omega_1} + \lambda_2\frac{\partial p_2}{\partial \omega_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Größen können in Potenzreihen nach μ entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
q_1 &= {}_0q_1 + \mu\,{}_1q_1 + \mu^2\,{}_2q_1 + \mu^3\,{}_3q_1 + \cdots,\\
p_1 - \omega_1 &= \mu\,{}_1p_1 + \mu^2\,{}_2p_1 + \cdots,\\
\lambda_1 &= {}_0\lambda_1 + \mu\,{}_1\lambda_1 + \mu^2\,{}_2\lambda_1 + \cdots,\\
q_2 &= {}_0q_2 + \mu\,{}_1q_2 + \mu^2\,{}_2q_2 + \cdots,\\
p_2 - \omega_2 &= \mu\,{}_1p_2 + \mu^2\,{}_2p_2 + \cdots,\\
\lambda_2 &= {}_0\lambda_2 + \mu\,{}_1\lambda_1 + \mu^2\,{}_2\lambda_2 + \cdots,
\end{aligned}$$

wo die Koeffizienten ${}_k\lambda_i$ Konstante und die Ausdrücke ${}_kp_i$, ${}_kq_i$ nach den Vielfachen von ω_1 und ω_2 geordnete trigonometrische Reihen bedeuten. Setzen wir diese Entwicklungen von λ_1, λ_2, p_1, p_2, q_1, q_2 in die linken Seiten der Gleichungen (1) ein, so erhalten wir vier Potenzreihen von μ, deren Koeffizienten trigonometrische Reihen von ω_1 und ω_2 sind; wir bezeichnen diese Funktionen mit Φ_1, Φ_2, Φ_1', Φ_2'. —

Das Theorem von *Lindstedt* lautet folgendermaßen: *Wie groß auch die ganze Zahl k gewählt ist, es ist stets möglich, die Konstanten*

$$ {}_0\lambda_1,\ {}_1\lambda_1,\ \dots,\ {}_k\lambda_1,\ {}_0\lambda_2,\ {}_1\lambda_2,\ \dots,\ {}_k\lambda_2 $$

und die trigonometrischen Reihen

$$ {}_0q_1,\ \dots,\ {}_kq_1,\ {}_0q_2,\ \dots,\ {}_kq_2,\ {}_1p_1,\ \dots,\ {}_kp_1,\ {}_1p_2,\ \dots,\ {}_kp_2 $$

derart zu bestimmen, daß in der Entwicklung von Φ_1, Φ_2, Φ_1', Φ_2' das von μ freie Glied und die Koeffizienten derjenigen Glieder, deren Ordnung in bezug auf μ nicht größer als k ist, verschwinden; mit anderen Worten, daß die Bewegungsgleichungen bis auf Glieder $(k+1)^{ter}$ Ordnung in μ befriedigt werden.

Wir finden zuerst

$$ {}_0\lambda_1 = n_1,\quad {}_0\lambda_2 = n_0,\quad {}_0q_1 = \xi_1 + y_1,\quad {}_0q_2 = \xi_1 + y_2, $$

wobei y_1 und y_2 Integrationskonstanten bedeuten, von denen wir annehmen, daß sie von der Größenordnung von μ sind.

Nehmen wir an, wir hätten die Werte

$$ {}_0\lambda_i,\ {}_1\lambda_i,\ \dots,\ {}_{k-1}\lambda_i,\quad {}_0q_i,\ \dots,\ {}_{k-1}q_i,\quad {}_1p_i,\ \dots,\ {}_{k-1}p_i \qquad (i = 1, 2) $$

gefunden, und suchen ${}_k\lambda_1$, ${}_k\lambda_2$, ${}_kq_1$, ${}_kq_2$, ${}_kp_1$, ${}_kp_2$ zu bestimmen. Diese Größen sind aus der Bedingung zu bestimmen, daß in Φ_1, Φ_2, Φ_1', Φ_2' der Koeffizient von μ^k verschwinden soll; wir erhalten also ein Gleichungssystem, das wir in der folgenden Form schreiben können:

$$ n_1 \frac{\partial_k q_1}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k q_1}{\partial \omega_2} = X_1, \quad n_1 \frac{\partial_k q_2}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k q_2}{\partial \omega_2} = X_2, $$

$$ n_1 \frac{\partial_k p_1}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k p_1}{\partial \omega_2} + {}_k\lambda_1 = Y_1, \quad n_1 \frac{\partial_k p_2}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k p_2}{\partial \omega_2} + {}_k\lambda_2 = Y_2, $$

wobei X_1, X_2, Y_1, Y_2 bekannte trigonometrische Reihen bedeuten. Die Auflösung dieser Gleichungen ist möglich, wenn

1. das Verhältnis n_1/n_2 inkommensurabel ist, was wir annehmen wollen,

2. die von ω_1 und ω_2 unabhängigen Glieder in den trigonometrischen Reihen X_1, X_2 verschwinden; diese Tatsache kann mit Hilfe der Integralinvarianten bewiesen werden,

3. die von ω_1 und ω_2 unabhängigen Glieder in den trigonometrischen Reihen Y_1, Y_2 mit ${}_k\lambda_1$ bzw. ${}_k\lambda_2$ identisch sind; wir können diese Bedingung erfüllen, indem wir ${}_k\lambda_1$ und ${}_k\lambda_2$ passend wählen. Die Auf-

lösung dieser Gleichungen ist also stets möglich, womit das Theorem von *Lindstedt* bewiesen ist.

Das allgemeine Dreikörperproblem kann in ähnlicher Weise behandelt werden; wir gelangen zu demselben Resultat wie in Nr. 10 mit dem Vorteil, daß die Entwickelbarkeit nach Potenzen von μ anschaulicher in Evidenz gesetzt ist. Wir können also sagen, daß die Differentialgleichungen für die Koordinaten im Dreikörperproblem formal befriedigt werden durch unendliche Reihen, die nach Potenzen des kleinen Parameters μ fortschreiten, der von der Ordnung der kleinen Massen ist; die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind unendliche Reihen, deren Glieder Sinus und Kosinus von linearen Funktionen der fünf Argumente

$$\beta_1 = \lambda_1 t + \varepsilon_1,\ \beta_2 = \lambda_2 t + \varepsilon_2,\ \beta_3 = \lambda_3 t + \varepsilon_3,\ \beta_4 = \lambda_4 t + \varepsilon_4,\ \beta_5 = \lambda_5 t + \varepsilon_5$$

sind ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ sind willkürliche Konstanten) multipliziert mit von den anderen Integrationskonstanten abhängigen Konstanten. Zwei der Größen β, etwa β_1 und β_2, sind wieder näherungsweise gleich den mittleren Anomalien der beiden kleinen Massen in ihren instantanen Bahnen um die große Masse, während die anderen drei Argumente $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ nur langsam veränderlich[83]) sind.

12. Die Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik. Wir haben gesehen, daß man die Differentialgleichungen für die Koordinaten im Dreikörperproblem formal erfüllen kann durch Reihen von der Form

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots,$$

wobei $f_0, f_1, f_2, \ldots$ selbst unendliche Reihen von der Form

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} c_{n_1, \ldots, n_k} \frac{\cos}{\sin} (n_1\beta_1 + \cdots + n_k\beta_k)$$

sind und

$$\beta_\nu = \lambda_\nu t + \varepsilon_\nu$$

ist; wir untersuchen jetzt die Konvergenz dieser Reihen. Diese Untersuchung zerfällt natürlich in zwei Teile: 1. Die Konvergenztheorie der Reihen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ und 2. die Konvergenztheorie der vollständigen Reihe $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots$.

Wir behandeln zuerst die Reihen

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} c_{n_1, \ldots, n_k} \frac{\cos}{\sin} (n_1\beta_1 + \cdots + n_k\beta_k).$$

83) *Poincaré* gab eine andere Ableitung dieser Reihen, Bull. Astr. 14 (1897), p. 241.

Aus den Gleichungen, mit deren Hilfe wir sukzessive die Funktionen f_ν nach der Lindstedtschen Methode berechnet haben, sehen wir, daß diese Reihen aus anderen bekannten Reihen (die sich schließlich aus der Störungsfunktion ergeben) durch Integration nach der Zeit abgeleitet wurden. Dabei erhält der Koeffizient $c_{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots, n_k}$ den Divisor $n_1\lambda_1 + \cdots + n_k\lambda_k$. Da die Konvergenz der Entwicklung der Störungsfunktion denselben Charakter hat, wie die einer Potenzreihe von mehreren Variablen, in der der Koeffizient des Gliedes mit dem Argument $(n_1\beta_1 + \cdots + n_k\beta_k)$ in bezug auf die Variabeln von den Ordnungen $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_k|$ ist, so hat die Konvergenz der betrachteten Reihen denselben Charakter wie die der Reihe

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} \frac{p^{|n_1|} q^{|n_2|} \ldots s^{|n_k|}}{n_1\lambda_1 + \cdots + n_k\lambda_k}.$$

Nehmen wir der Einfachheit halber $k = 2$, so können wir die Frage auf die Untersuchung der Konvergenz der Reihen von dem Typus

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^m q^n}{m - nA}$$

einschränken, wo A die positive Zahl $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$ ist.

Der Wert der Konstante A hängt von den willkürlichen Integrationskonstanten ab; wenn A eine rationale Zahl ist, so ist die Reihe offenbar divergent, da die Glieder, für die $\frac{m}{n} = A$ ist, unendlich werden. Wenn A eine ganze algebraische Irrationalität ist[84]), d. h. die Wurzel einer irreduziblen algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten

$$A^s + G_1 A^{s-1} + \cdots + G_s = 0,$$

so ist die Reihe konvergent, wie wir sofort zeigen werden. Zu diesem Zweck multiplizieren wir Zähler und Nenner jedes Gliedes der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^m q^n}{m - nA}$$

mit dem Produkt

$$(m - nA')(m - nA'') \ldots,$$

wobei $A', A'', \ldots$ die anderen Wurzeln der Gleichung sind. Der Nenner wird ein Polynom in m und n mit ganzzahligen Koeffizienten; und da er nicht verschwinden kann, muß er mindestens gleich 1

84) Diese Bemerkung rührt von *Bruns* her, Astr. Nachr. 109 (1884), p. 215.

sein. Der Zähler ist ein Polynom $(s-1)^{\text{ten}}$ Grades in m und n; man sieht unmittelbar, daß in diesem Falle die Reihe konvergiert.

Es ist übrigens leicht zu zeigen[85]), daß es unendlich viele irrationale Werte von A gibt, für die die Reihe divergiert; man sieht auch, daß in jedem noch so kleinen Intervall unendlich viele Werte von A existieren, wo die Reihe konvergiert, und unendlich viele, wo die Reihe divergiert. *Es liegen also in jedem noch so kleinen Gebiete der reellen Variablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ unendlich viele Wertsysteme dieser Konstanten, für die die Teilreihen von f konvergieren, und unendlich viele Wertsysteme, für die sie divergieren.*

Die Folgen der Divergenz dieser Reihen kann man indessen umgehen durch Anwendung eines Kunstgriffes, der auf der Willkürlichkeit in der Wahl der Konstanten μ beruht und vermöge dessen man erreichen kann, daß jede der Teilsummen nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält. Man kann dies z. B. für ein Glied von f_l, das $p^m q^n$ als Faktor besitzt (p, q sind kleine Größen von der Größenordnung der Exzentrizitäten oder Neigungen der Bahn), dadurch erreichen, daß wir seinen Koeffizienten als von der Größenordnung ν^{l+m+n} ansehen in bezug auf einen neuen Parameter ν.

Trotzdem wird natürlich die Schnelligkeit der Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik immer leiden unter dem Auftreten der kleinen Divisoren bei den Integrationen, die von der näherungsweisen Kommensurabilität der Größen λ herrühren. Die Glieder, in denen diese kleinen Divisoren auftreten, werden von *Gyldén charakteristische Glieder* genannt; sie werden in vielen Fällen im Planetensystem sehr bedeutend. So hat in der Theorie von Jupiter und Saturn eine Ungleichung, deren Periode 900 Jahre ist, einen beträchtlichen Koeffizienten, der von dem kleinen Divisor $5n - 2n'$ herrührt, wo n und n' die mittleren Bewegungen von Jupiter und Saturn bedeuten. Noch bedeutender werden die charakteristischen Glieder bei den kleinen Planeten vom Hekubatypus. Methoden zur Beseitigung der Schwierigkeiten, die von dem Auftreten der charakteristischen Glieder herrühren, sind von vielen Seiten entwickelt worden.[86])

85) *Bruns* loc. cit.

86) Vgl. den Artikel über kleine Planeten. Wir erwähnen an dieser Stelle die Methode von *Bohlin,* Bihang till K. Sv. Vet.-Ak. Handlingar 14 (1888), Nr. 5; Astr. Nachr. 121 (1889), p. 17, der durch Anwendung der Jacobi-Hamiltonschen Theorie Reihen erhielt, bei denen die Divisoren ganze Zahlen sind; *Bohlins* Arbeiten wurden von *Poincaré*, Méth. Nouv. II, Ch. 19—21 weitergeführt. Vgl. auch *Charlier*, Archiv för Math. 1 (1904), p. 449, der auch die Jacobi-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung benutzt und zeigt, daß bei jeder Wahl der Inte-

Nachdem wir nun die Konvergenz der Partialsummen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ untersucht haben, wenden wir uns zur Diskussion der Reihe vom Typus

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots,$$

die die Koordinaten im Dreikörperproblem darstellt. Es wurde von *Poincaré* gezeigt[87]), daß diese Reihe nicht gleichmäßig konvergent sein kann für alle Werte der Zeit und für alle Werte der Integrationskonstanten, die in einem endlichen Gebiet liegen. Nehmen wir nämlich an, die Reihe wäre gleichmäßig konvergent; wir könnten dann aus ihr periodische Lösungen ableiten, wenn wir den Integrationskonstanten solche Werte erteilen, daß die Größen λ kommensurabel ausfallen. Die charakteristischen Exponenten dieser periodischen Lösung werden gefunden durch Differentiation der Reihe nach den willkürlichen Konstanten; bezeichnen wir mit x eine der Koordinaten, mit ω eine der willkürlichen Konstanten, so müßten wir erhalten:

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \sum_\nu e^{\alpha_\nu t} \theta_\nu(t),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung bedeuten, und $\theta_\nu(t)$ periodische Funktionen der Zeit sind, deren Periode mit der der Lösung übereinstimmt. Nun können aber aus der Differentiation unsrer trigonometrischen Entwicklungen niemals Exponentialgrößen $e^{\alpha_\nu t}$ entstehen, deren Periode von der Periode der Ausgangslösung verschieden wäre. Daraus würde aber folgen, daß alle charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung verschwinden; da dies unmöglich ist[88]), erhalten wir das Theorem, daß die Reihe nicht gleichmäßig konvergent sein kann für alle Werte der Zeit und für alle Werte der Integrationskonstanten in einem endlichen Gebiet. *Charlier*[89]) hat die Konvergenz der Reihe

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots$$

direkt untersucht mit Hilfe eines Theorems von *Cauchy* und *Poincare*, das folgendermaßen lautet:[90])

Betrachten wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

grationskonstanten die Größe λ so bestimmt werden kann, daß die Reihe konvergiert.

87) Acta Math. 13 (1890), p. 249; Méth. Nouv. II, Ch. 13, vgl. auch *Schwarzschild*, Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 765.

88) *Poincaré*, loc. cit.

89) Bull. Astr. 19 (1902), p. 380.

90) Méc. Cél. I, p. 58.

und sei

$$x_i = \theta_i(t, \mu)$$

eine Lösung dieser Gleichungen, bei der die Anfangswerte von $x_1, \ldots, x_n$ verschwinden für $t = 0$. Nehmen wir an, daß für alle Werte von t zwischen 0 und t_0 die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in Potenzreihen nach μ und $x_i - \theta_i(t, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ entwickelbar sind, deren Koeffizienten noch von t abhängen. Es lassen sich dann die Funktionen

$$\theta_1(t, \mu), \ldots, \theta_n(t, \mu)$$

für alle Werte von t zwischen 0 und t_0 in eine nach den Potenzen von μ fortschreitende Reihe entwickeln für hinreichend kleine Werte von $|\mu|$.

Charlier zeigt nun, daß der Radius dieser Potenzreihe in μ gegen Null konvergiert, wenn t_0 über alle Grenzen wächst; wenden wir dieses Theorem auf die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems an, so erhalten wir das Resultat, daß die Entwicklungen der Lösungen des Dreikörperproblems nach Potenzen der störenden Massen zwar konvergent sind, doch die Konvergenz ist keine gleichmäßige, da der Konvergenzradius (in den Massen) eine Funktion der Zeit ist.

Ein Fall, wo die Reihen, die die Lösung des Dreikörperproblems darstellen, nach einer bestimmten Zeit sicherlich aufhören müssen zu konvergieren, ist der Fall des Zusammenstoßes zwischen zweien der drei Körper. *Painlevé*[91]) deutete an, daß die Anfangsbedingungen, die einem Zusammenstoß entsprechen, zwei verschiedene analytische Bedingungen erfüllen müssen, die im Falle des ebenen Dreikörperproblems in eine einzige Bedingung übergehen; *Painlevé* zeigte auch[92]), daß diese Bedingungen nicht algebraisch sein können. *Levi-Civita*[93]) hat den Charakter dieser Bedingungen im Falle des restringierten Problems näher untersucht und gezeigt, wie man sie finden kann. *Bisconcini*[94]) erweiterte Levi-Civitas Resultate auf das allgemeine Dreikörperproblem und verifizierte die Andeutungen von *Painlevé*.

13. Eigenschaften der Koeffizienten besonderer Glieder in den Reihen der Himmelsmechanik. Der Unterschied zwischen den säku-

---

91) Paris C. R. 123 (1896), p. 871; Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles. Paris 1897, p. 586.

92) Paris C. R. 125 (1897), p. 1078.

93) Annali di Mat. 9 (1903), p. 1; Paris C. R. 136 (1903), p. 82, 221. Acta Math. 30 (1906), p. 305.

94) Rend. della R. acc. d. lincei (5) 12 (1903), p. 552; Acta Math. 30 (1906), p. 49. Vgl. ferner *Sundman*, Acta Soc. Scient. Fenn. 34 (1907), Nr. 6; *Block*, Stockholm Arkiv för Mat. 5 (1908), Nr. 9: Medd. från Lunds Obs. 2, Nr. 6.

laren und periodischen Störungen der elliptischen Elemente der Planetenbahn wurde schon erläutert. *Laplace*[95]) zeigte, daß eins dieser Elemente — *die mittlere Entfernung* oder *die halbe große Achse der Bahn* — keine säkularen Störungen erfährt, wenn man diejenigen Glieder vernachlässigt, die von höherer als 1. Ordnung in den Massen oder von höherer als 2. Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen sind; *Lagrange*[96]) wies nach, daß das Resultat richtig bleibt, wenn alle Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen mitgenommen werden; *Poisson*[97]) bewies schließlich die Richtigkeit des Theorems auch für den Fall, daß die Quadrate der Massen mitgenommen werden. — *Mathieu*[98]) erweiterte diese Untersuchungen in der Weise, daß er auch Glieder 3. Ordnung in den Massen berücksichtigte. Mit Hilfe der Jacobischen Transformation ersetzte er die Sonne und die Planeten durch drei fiktive Planeten, die sich um ein festes Zentrum in Bahnen bewegen, die homothetisch mit den wirklichen Bahnen sind. Er zeigte durch Entwicklung der Störungsfunktion bis zu den Gliedern 3. Ordnung in den Massen, daß die reziproken mittleren Entfernungen keine säkularen Störungen dieser Ordnung erfahren. *Poisson*[99]) glaubte bereits ein Resultat bezüglich der Nichtexistenz säkularer Störungen 3. Ordnung in den mittleren Entfernungen erhalten zu haben. *Haretu*[100]) zeigte jedoch, daß *Poisson* bestimmte Glieder dieser Klasse weggelassen hat, und bewies, daß diese Glieder tatsächlich eine säkulare Störung zur Folge haben; daher haftet das Theorem über die Invariabilität der großen Achsen an den Gliedern 2. Ordnung in den störenden Massen.

Eginitis zeigte[101]), daß die säkularen Störungen 3. Ordnung der mittleren Entfernungen nur von dem Glied

$$\frac{1}{n^2 a^3}\left(\int \frac{\partial R''}{\partial t}\, dt\right)^2$$

herrühren, wobei $\frac{\partial R''}{\partial t}$ das Aggregat der Glieder 1. und 2. Ordnung

95) Paris. Mém. des Savans Étrangers 7 (1773).

96) Mém. de l'Acad. de Berlin (1776).

97) Journal de l'École Polyt., cah. 15 (1808), p. 1. *Poissons* Beweis wurde von *Tisserand* vereinfacht, Mém. de l'Acad. de Toulouse (7) 7, p. 374, Annales de l'École Normale Sup. (2) 7. p. 261 (1875—76). *Tisserand* wendet die Jacobi-Radausche Transformation an und reduziert das Dreikörperproblem auf ein Problem 12. Ordnung, bei dem nur eine einzige Störungsfunktion auftritt.

98) Paris C. R. 79 (1875), p. 1045; J. f. Math. 80 (1875), p. 97.

99) Mémoires de l'Acad. des Sciences I (1810), p. 55.

100) Paris C. R. 85 (1877), p. 504; Obs. de Paris ann., mém. 18 (1883).

101) Paris C. R. 108, p. 1156; Obs. de Paris ann., mém. 19 (1889).

bedeutet. Er zeigte zugleich, daß solche Störungen in der Tat auftreten, und daß sie periodisch sind, wenn auch von sehr großer Periode.

Der Übergang von der alten Planetentheorie mit ihren säkularen und periodischen Störungen zu der modernen Himmelsmechanik, bei der alle Glieder periodisch sind, berührte natürlich auch die Theoreme dieser Art. *Tisserand*[102]) gab die neue Fassung des Theorems der Invariabilität der großen Achsen, wenn die Lösung des Dreikörperproblems durch Reihen ausgedrückt ist, wie die der Delaunayschen Mondtheorie. Er zeigte, daß das Theorem nicht richtig ist, wenn man auch diejenigen Glieder berücksichtigt, die 4. Ordnung sind in bezug auf das Verhältnis der mittleren Bewegungen.

Rein vom modernen Gesichtspunkte aus wurde die Frage behandelt von *Andoyer*[103]), *Hill*[104]) und *Poincaré*[105]), welcher bewies, daß in dem restringierten Dreikörperproblem der Ausdruck der mittleren Entfernungen eine bestimmte Klasse von Gliedern, die den säkularen Gliedern der alten Theorie entspricht, nicht enthält, wie weit man auch die Annäherung führt.

Einige merkwürdige Resultate verwandter Richtung fand *Adams*[106]) in der Mondtheorie. Bezeichnen wir mit e die Exzentrizität der Mondbahn und mit γ den Sinus der halben Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik (diese Größen sollen wie in der Delaunayschen Theorie definiert sein): sei n die mittlere Bewegung des Mondes, $(1-c)n$ die mittlere Bewegung des Mondperigäums, $(1-g)n$ die mittlere Bewegung des Mondknotens, α die mittlere Entfernung und v der Radius vector. Der nichtperiodische Teil von $\frac{\alpha}{v}$ gestattet eine Entwicklung der Form:

$$A + Be^2 + C\gamma^2 + Ee^4 + 2Fe^2\gamma^2 + G\gamma^4 + \cdots$$

wobei $A, B, C, \ldots$ Funktionen der Exzentrizität der Erdbahn und des Verhältnisses der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond sind. In ähnlicher Weise bezeichnen wir mit $He^2 + K\gamma^2$ die Glieder von c, die e^2 und γ^2 enthalten, und mit $Me^2 + N\gamma^2$ die entsprechenden Glieder von g. Adams' Theorem lautet

$$B = 0, \quad C = 0, \quad EK - FH = 0, \quad FN - GM = 0.$$

Alle diese Resultate werden durch denselben Prozeß gewonnen, der

102) Paris C. R. 106 (1888), p. 788.

103) Annales de la Fac. de Toulouse 4 (1898); Obs. de Paris ann., mém. 23 A (1902).

104) Astron. Journ. 24 (1904), p. 27.

105) Méth. Nouv. II (1893), p. 109; Bull. Astr. 14 (1897), p. 261.

106) Lond. Astr. Soc. Monthly not. 38 (1878), p. 460.

für das erste folgendermaßen geschildert werden kann: es werden zwei Monde betrachtet, von denen die Bahn des einen weder eine Exzentrizität noch eine Neigung, die des anderen keine Neigung besitzt. Es wird gezeigt, daß eine bestimmte Funktion der Koordinaten der beiden Monde eine periodische Funktion ist, und dies hat das Verschwinden der Größe B zur Folge.

Diese Resultate wurden von *E. W. Brown*[107]) und *Picart*[108]) erweitert. Andere Eigenschaften der Koeffizienten bei der Lösung des allgemeinen Dreikörperproblems durch trigonometrische Reihen wurden von *Newcomb*[109]), *Siacci*[110]) und *E. W. Brown*[111]) gefunden.

---

107) Amer. Journ. Math. 17 (1895), p. 318; Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 234; Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1897), p. 143.

108) Paris C. R. 131 (1900), p. 63—65.

109) Paris C. R. 75 (1872), p. 1750.

110) Paris C. R. 77 (1873), p. 1288.

111) Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1897), p. 130. In dem Resultat (X) dieser Arbeit findet sich ein Versehen, das aber den weiteren Teil nicht beeinflußt.

(Abgeschlossen im März 1912.)

Verlag von B. G. Teubner in

HOFFMANN, B., mathematische Himme
an den höheren Schulen. Mit 9 Figur

KEFERSTEIN, Direktor Professor Dr. H.,
Bilder aus der Geschichte der Astronomie u.

BUSCH, F., Oberlehrer in Dillenburg, Him
Auge. Mit 30 Figuren und 1 Sternkarte

Demnächst erscheint:

HÖFLER, A., Himmelskunde und astronomische Geographie. (Didakt. Handb. für d. realist. Unterr. an. höh. Schulen. Band II.)

DARWIN, G. H., Professor an der Universität Cambridge, **Ebbe und Flut,** sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Deutsche Ausgabe nach der 3. englischen Auflage von A. Pockels. 2. Auflage. Mit Einführungswort von G. v. Neumayer und 52 Abbildungen. 1911. In Leinw. geb. ℳ 8.—

EMDEN, Dr. R., Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München. **Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme.** Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln. 1907. In Leinw. geb. . . . . ℳ 13.—

HAMMER, Dr. F., Professor an der Techn. Hochschule Stuttgart, **Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde).** 2 Bde.
Band I. Feldmessen und Nivellieren, besonders für Bauingenieure. Mit 500 Figuren. gr. 8. 1911. Geh. ℳ 22.—, in Leinw. geb. ℳ 24.— Band II [In Vorb.]

HOHENNER, Dr. ing. H., Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. **Geodäsie.** Eine Anleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der Hydrometrie und direkten (astronomischen) Zeit- und Ortsbestimmung. Mit 216 Figuren. 1910. In Leinw. geb. . . . ℳ 12.—

KLEIN, Geh. Reg.-Rat Dr. F., Professor an der Universität Göttingen, und Dr. **A. SOMMERFELD,** Professor an der Universität München. **Über die Theorie des Kreisels.** 4 Hefte.
III. Heft: Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. 1903. Geh. ℳ 9.—, in Leinw. geb. ℳ 10.—

KRÖHNKE, G. H. A., Taschenbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. 15. Auflage. Bearbeitet von R. Seifert. Mit 15 Abbildungen. 1911. Geb. . . . . ℳ 2.—

PRINGSHEIM, E., Professor an der Universität Breslau, **Physik der Sonne.** Mit 235 Abbildungen und 7 Tafeln. 1910. Geh. ℳ 16.—, in Leinw. geb. ℳ 18.—

SCHEINER, Dr. J., Professor an der Universität Berlin, **populäre Astrophysik.** 2. Aufl. Mit 30 Tafeln u. 210 Figuren. 1912. In Leinw. geb. ℳ 14.—

SCHOY, K., Oberlehrer am Städt. Gymnasium zu Essen, **Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben.** Mit 3 Figuren und 8 Tafeln. 1910. Geb. ℳ 1.60.

SCHWAHN, Prof. Dr. P., Direktor der Urania Berlin. **Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse.** Mit 20 Textfiguren. 1910. Geh. ℳ 3.20, in Leinw. geb. . . . . ℳ 3.60.

SCHWARZSCHILD, Prof. Dr. KARL, Direktor des astrophys. Instituts bei Potsdam. **Über das System der Fixsterne.** Mit 13 Fig. 1909. Geh. ℳ 1.—

TRABERT, Dr. W., Prof. an der Universität Wien, **Lehrbuch der kosmischen Physik.** Mit 149 Figuren u. 1 Tafel. 1911. Geh. ℳ 20.—, in Leinw. geb. ℳ 22.—

ZONDERVAN, Dr. H., in Groningen, **allgemeine Kartenkunde.** Mit 32 Figuren und 5 Tafeln. 1901. Geh. ℳ 4.60, in Leinw. geb. . . . ℳ 5.20.

ZÖPPRITZ, Dr. K., weil. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., **Leitfaden der Kartenentwurfslehre.** Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. 2. Auflage von Dr. A. Bludau, Professor am Gymnasium zu Coesfeld. In 2 Teilen. gr. 8.
I. Teil. Die Kartenprojektionslehre. Mit 100 Figuren und zahlreichen Tabellen. Geh. ℳ 4.80, in Leinw. geb. ℳ 5.80.
II. — Kartographie und Kartometrie. Mit 12 Figuren und 2 Tabellen sowie 2 Tafeln. 1908. Geh. ℳ 3.60, in Leinw. geb. ℳ 4.40.

AUS: „ZUFRIEDENHEIT“.

Hat dich das Schicksal aus deiner Heimat weg in ein andres Land geführt, so miß die Menschen dort nicht an denen, die du in deiner Jugend kanntest. Sie werden anders sein, aber sie sind darum nicht schlechter. Rühme nicht immer die Vorzüge der alten Heimat und setze die neue nicht herab! Vielleicht würdest du selbst dich vergebens nach diesen Vorzügen umsehen, wenn du in das Land deiner Kinderjahre zurückkehrtest — auch damit geht es wie mit der guten alten Zeit. Aber auch wenn sie noch zu finden wären, glaub's nur: auch in deiner neuen Heimat gibt es Schönes und Gutes; du mußt nur ohne Vorurteil danach suchen. Wenn du den Leuten, unter denen du lebst, immer von neuem versicherst, daß du dich nicht wohl fühlst unter ihnen, so werden sie dich auch ihrerseits als einen Fremdling behandeln, vor dem man das Herz verschließt. Du forderst dadurch auch sie zu einem Vergleiche heraus, und wer weiß, ob du nicht dabei verlieren würdest.

Hast du einmal das Leben einer Großstadt kennen gelernt und mußt jetzt in einem kleineren Orte wohnen, so denke nicht, du seiest von der Höhe des Lebens hinabgestiegen! Schilt den Ort, in dem du dein Brot erwirbst, nicht ein elendes Nest! Du würdest dadurch nur gestehen, daß du nicht imstande bist, dir dein Leben nach deinen Wünschen zu gestalten. Und glaube nur nicht, die Menschen seien dort anders als hier! Klatsch und Neid gibt es überall, aber auch Herzensgüte und edeln Sinn. Oder glaubst du, die Menschen würden dadurch größer, daß sie mit der elektrischen Straßenbahn fahren und zu Hunderten in einem Hause wohnen?

AUS: „BERUF UND PFLICHT“.

Tu gewissenhaft deine Pflicht, aber bilde dir nicht ein, an deinem Tun hange das Heil der Welt! Dann wirst du auch nicht verlangen, daß andre dich für den Retter der Menschheit halten, und brauchst dich nicht über Mißachtung zu beklagen. Erkenne jede ehrliche Arbeit an, so wird auch dein Verdienst anerkannt werden! Sieh selbst auf niemand hochmütig herab, so wird auch dir dein Wert gelassen werden!

Dein Beruf soll eine Quelle deines Glückes sein. Sieh ihn an als das Haus, in dem du daheim, als die Burg, in der du sicher bist! Freue dich, daß du deinen Mitmenschen dienen kannst, und suche es so vollendet wie möglich zu tun! Freue dich auch jeder achtenswerten Leistung, die dir gelingt! Nur denke nicht, daß du der einzige seiest, der etwas kann, und daß kein Tun so wichtig sei wie das deine!

Und auch das bedenke, daß im engen Kreise sich leicht der Sinn verengert! Willst du nicht wirklich zum Banausen werden, dann wahre dir den Zusammenhang mit dem großen Ganzen!

Bestellzettel. Bei ....

Buchhandlung in ....

bestelle ich hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig:

R. JAHNKE: Aus der Mappe eines Glücklichen.

Geschmackvoll gebunden Mark 1.60

Ort, Wohnung: Unterschrift:

....

VERLAG VON B. G. TEUBNER, LEIPZIG UND BERLIN

AUS DER MAPPE EINES GLÜCKLICHEN

VON

RICHARD JAHNKE

[84 S.] 8. 1908. Geschmackvoll gebunden Mark 1.60

Einer, der fröhlich ins Leben schaut, möchte recht vielen seiner Mitmenschen zeigen, wo und wie das Glück zu finden ist. Darum streut er Blätter aus seiner Mappe aus. Sie handeln kurz und knapp von allerhand Fragen des Menschenlebens: von dem Wert der Erfahrung, von den Rätseln des Lebens und des Todes, von Optimismus und Pessimismus, von Glück und Freude, von der Ruhe des Gemüts, von Bildung und Arbeit, von Eigenliebe, Stolz und Unabhängigkeit. Bestimmt sind sie für alle nachdenklichen Menschen, die lernen möchten, „die Welt zu kennen und sie nicht verachten“; geschrieben sind sie so, daß alt und jung sie verstehen kann.

AUS: „DAS RÄTSEL DES LEBENS".

Wozu? Warum? So fragen wir immer, bei allem, was wir sehen und erleben. Wir können nicht anders; denn es gehört zum Wesen des Menschen, die Ereignisse anzusehen als fortlaufende, sich kreuzende Ketten von Ursachen und Wirkungen. Wir können uns nichts ohne Ursache und nichts ohne Wirkung denken. Muß es darum so sein?

Wie der Wurm, der auf der Erde kriecht, den Menschen nicht begreift, nichts weiß von seinem Ringen und Schaffen, wie die Nachtigall, deren Gesang uns doch seelenvoll klingt, nichts weiß von Goethes „Faust" und der Philosophie Kants, wie der Arbeiter, der am Wegrande die Steine zerklopft, nichts ahnt von der Tragik eines Dichter- und Künstlerlebens, so und noch viel weniger vermag die Menschheit als Ganzes und vermag auch der geistig am höchsten stehende Mensch die Fesseln zu zersprengen, die seinen Geist umschließen. Wir vermögen uns nicht hineinzudenken in das Leben eines Wurms, der doch körperlich ist wie wir; wie viel weniger können wir ein Wesen begreifen, das ganz anders sein müßte als wir, auf das keiner unserer menschlichen Begriffe, keines unserer Worte zuträfe. Wie unser Schatten mit uns springt, wenn wir über ihn hinausspringen wollen, so verläßt uns niemals unsere menschliche Eigenart und macht uns unfähig, anders als menschlich zu denken.

In unserm Leben gibt es Zwecke, in der Welt setzen wir Zwecke, weil wir nicht anders können. Aber in dem Weltganzen, das wir nicht auszudenken vermögen, da können ganz andre Zusammenhänge herrschen.

AUS: GLÜCK UND FREUDE".

Wie viel Glück könnten wir erleben, wenn wir nur recht wüßten, was Glück ist. Die Heller und Pfennige des Glücks, die einkommen, rechnen wir nicht und hoffen immer auf den großen Reichtum, der nicht kommen wird. Und wenn er käme, so würden wir ihn auch nicht ansehen. Oder ist es kein großes Glück, für das wir dankbar Hand und Herz erheben müßten, wenn wir aus einer ehrenwerten Familie stammen, wenn uns Gesundheit des Leibes und des Geistes beschert wurde, wenn wir einen Beruf gefunden haben, der uns Nahrung und Befriedigung gibt? Solches Glückes wollen wir uns zunächst freuen, dann gibt es schon genug Glück in der Welt. Dazu kommen die zahllosen Freuden, die wir tagtäglich erleben; auch sie sind Glück, aber wir Menschen sind so verwöhnt, daß wir diese Freuden gar nicht rechnen; und das ist der beste Beweis dafür, wie glücklich wir sind. Wie viele Freuden hast du erfahren dein Leben lang! Als du zum erstenmal allein zu gehen vermochtest, als du im fröhlichen Spiel deiner Kraft bewußt wurdest, als du dir eine Stelle in der Welt errangst und einen Menschen fandest, der mit dir durchs Leben gehen wollte, als deine Tätigkeit innerhalb und außerhalb deines Berufes Anerkennung fand, war das nicht Glück, so schön und reich, wie kein Dichtermund es besingen, wie nur dein eignes Herz es empfinden kann? Sollen alle die Stunden des Glücks ausgelöscht sein durch die Viertelstunden des Leides, die doch notwendig sind, wenn wir unseres Glückes überhaupt inne werden wollen? Wie glücklich könnten wir Menschen sein, wenn wir dankbarer wären! Wie viele Freuden könnten wir erleben, wenn wir Herz und Sinne der Freude öffnen wollten!

AUS: „EIGENLIEBE".

Die Eigenliebe ist der Mutterboden, aus dem unser Tun erwächst, ist die Nahrung, die ihr immer neue Kraft gibt.

Wenn du eine Tat siehst, die dir nicht gefällt, so frage nach den Beweggründen, ob nicht vielleicht der Grund gut und nur das Ergebnis übel war; ist aber die Tat selbst gut, so freue dich ihrer und forsche nicht nach Beweggründen, die ihren Wert herabsetzen könnten! Handelst du anders, so beraubst du nur dich selbst: eines Grundes zur Freude und eines Beispiels zur Nacheiferung.

Schilt nicht die Eigenliebe der andern; bei dir selbst aber bekämpfe sie wie eine Neigung zum Schlechten! Denke, du seiest nur darum in der Welt, um den andern zu dienen! Du brauchst nicht bange zu sein, daß du Schaden davon hättest. So viel Eigenliebe, als gut und nützlich für dich ist, behältst du schon trotz deiner Bemühungen. Aber du kannst dir manchen Ärger dadurch sparen, daß du bei den andern die Eigenliebe als etwas Selbstverständliches ansiehst und sie bei dir bekämpfst. Wenn du keine Dankbarkeit erwartest, brauchst du dich nicht über Undank zu erzürnen. Wenn du dich auf Schwierigkeiten gefaßt machst, die dir aus der Selbstsucht der andern erwachsen, so kann dich der Widerstand nicht verstimmen, den du findest. Du dienst dir selbst am besten, je mehr du bei einer Aufgabe, vor die du gestellt wirst, nur an diese und nicht an dich denkst. Das Leben ist ein Kampf; auch in ihm kämpft am tapfersten und erfolgreichsten der, der jederzeit bereit ist, sich selbst zu opfern.