

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301657

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

- BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, } RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
 IN 2 TEILEN }
 — II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN { H. BURKHARDT IN ZÜRICH UND
 { W. WIRTINGER IN WIEN.
 — III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN { W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
 — IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN { F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND
 { C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
 — V: PHYSIK, IN 2 TEILEN A. SOMMERFELD IN AACHEN.
 — VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . { PH. FURTWÄNGLER IN BONN UND
 { E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
 — VI, 2: ASTRONOMIE K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
 — VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND
 DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND. REDAKTION NOCH NICHT BESTIMMT.

BAND VI. HEFT 1.

C. REINHERTZ IN HANNOVER: NIEDERE GEODÄSIE.
S. FINSTERWALDER IN MÜNCHEN: PHOTOGRAMMETRIE.

AUSGEGEBEN AM 27. MÄRZ 1906



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1906.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II, Heft 1—5; Bd. II, Heft 1; Bd. III, Heft 1—2; Bd. III, Heft 1—3; Bd. IV, Heft 1—3; Bd. IV, Heft 1; Bd. IV, Heft 1—2; Bd. V, Heft 1—2; Bd. V, Heft 1; Bd. VI, Heft 1; Bd. VI, Heft 1.

Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.



76. 1.
58

408

Unter der Presse:

- Band II. Teil 1. Funktional-Operationen und -Gleichungen. Von S. Pincherle in Bologna.
- III. - 1. Prinzipien der Geometrie. Von F. Enriques in Bologna. — Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“, Von H. v. Mangoldt in Danzig. — Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung. Von G. Fano in Turin.
- III. - 2. Abzählende Methoden. Von H. G. Zeuthen in Kopenhagen. — Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven. Von Luigi Berzolari in Pavia.
- IV. - 1. Elementare Mechanik der Punktsysteme und starren Körper. Von P. Stückel in Hannover und J. Petersen in Kopenhagen.
- IV. - 2. Besondere Ausführungen über unetatische Bewegungen in Flüssigkeiten. Von G. Zemplén in Budapest. — Hydraulik. Von Ph. Forchheimer in Graz. — Theorie der hydraulischen Motoren und Pumpen. Von M. Grübler in Dresden. — Allgemeine Theorie der Elastizität. Von O. Tedone in Genua.
- V. - 1. Chemische Atomistik. Von F. W. Hinrichsen in Aachen und L. Mamlock in Berlin. — Kristallographie. Von Th. Liebisch in Göttingen, A. Schoenflies und O. Mügge in Königsberg. — Kinetische Theorie der Materie. Von L. Boltzmann und J. Nabl in Wien.
- V. - 2. Elektrostatik und Magnetostatik. Von R. Gans in Tübingen.

Aufgabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, G. v. Escherich-Wien, O. Hölder-Leipzig, F. Klein-Göttingen, V. v. Lang-Wien,
ferner L. Boltzmann-Wien, H. v. Seeliger-München, H. Weber-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-Zürich, Ph. Furtwängler-Bonn, F. Klein-Göttingen, W. Fr. Meyer-Königsberg, C. H. Müller-Göttingen,
K. Schwarzschild-Göttingen, A. Sommerfeld-Aachen, E. Wiechert-Göttingen und W. Wirtinger-Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie beteiligen sich ferner die Herren

- | | | | | |
|--|---|--|--|---|
| <p>I. Band:
W. Ahrens-Magdeburg
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Berlin
G. Bohlmann-Berlin
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt-Zürich
E. Czuber-Wien
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg-Breslau
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg
E. Netto-Gießen
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
K. Runge-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg
H. Schubert-Hamburg
D. Seliwanoff-St. Petersburg
E. Study-Bonn
K. Th. Vahlen-Greifswald
H. Weber-Straßburg
A. Wiman-Lund.</p> | <p>A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-München
J. Wellstein-Straßburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Göttingen.</p> | <p>III. Band:
R. Berzolari-Pavia
H. Burkhardt-Zürich
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Münster
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Bologna
G. Fano-Turin
C. Guichard-Clermont-Ferrand
P. Heegard-Kopenhagen
K. Heun-Karlsruhe
G. Kohn-Wien
H. Liebmann-Leipzig
R. v. Lillenthal-Münster
H. v. Mangoldt-Danzig
W. Fr. Meyer-Königsberg
E. Müller-Wien
J. Neuberger-Lüttich
E. Papperitz-Freiburg i. S.
K. Rohn-Leipzig
G. Scheffers-Darmstadt
A. Schoenflies-Königsberg
C. Segre-Turin
M. Simon-Straßburg
J. Sommer-Danzig
P. Stückel-Hannover
O. Staude-Rostock
H. Steinitz-Charlottenburg
A. Voss-München
E. Wätsch-Brünn
H. G. Zeuthen-Kopenhagen
K. Zindler-Innsbruck.</p> | <p>S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
Ph. Forchheimer-Graz
Ph. Furtwängler-Bonn
M. Grübler-Dresden
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun-Karlsruhe
G. Jung-Mailand
F. Klein-Göttingen
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
J. Petersen-Kopenhagen
L. Prandtl-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg
A. Sommerfeld-Aachen
P. Stückel-Hannover
O. Tedone-Genua
E. Timerding-Straßburg i. E.
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
G. Zemplén-Budapest.</p> | <p>A. Schoenflies-Königsberg
M. Schröter-München
A. Sommerfeld-Aachen
E. Study-Bonn
A. Wangerin-Halle
W. Wien-Würzburg
J. Zeuneck-Danzig.</p> <p style="text-align: center;">VI, 1. Band:</p> <p>R. Bourgeois-Paris
G. H. Darwin-Cambridge
S. Finsterwalder-München
H. Hergesell-Straßburg
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
J. M. Ferrier-Wien
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinherz-Hannover
A. Schmidt-Potsdam
W. Trabert-Wien
E. Wiechert-Göttingen.</p> <p style="text-align: center;">VI, 2. Band:</p> <p>E. Anding-München
J. Bauschinger-Berlin
E. W. Brown-Haverford
C. Burrau-Kopenhagen
C. Ed. Caspari-Paris
C. v. L. Charlier-Lund
F. Cohn-Königsberg
R. Emden-München
F. K. Ginzler-Berlin
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Göttingen
H. Kobold-Kiel
F. R. Moulton-Chicago
G. v. Niessl-Brünn
S. Oppenheim-Prag
E. v. Oppolzer-Innsbruck
F. Ristenpart-Berlin
L. Schulhof-Paris
K. Schwarzschild-Göttingen
K. Sundmann-Helsingfors
E. T. Whittaker-Cambridge
C. W. Wirtz-Straßburg
H. v. Zeipel-Pulkowa.</p> |
| <p>II. Band:
M. Böcher-Cambridge, Mass.
G. Brunel †
H. Burkhardt-Zürich
G. Faber-Karlsruhe
R. Fricke-Braunschweig
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Bryn Mawr
K. Hensel-Marburg [Coll. Pa.
A. Kneser-Breslau
A. Krazer-Karlsruhe
L. Maurer-Tübingen
W. Fr. Meyer-Königsberg
W. F. Osgood-Cambridge
P. Painlevé-Paris [Mass.
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
A. Sommerfeld-Aachen
E. Vessiot-Lyon</p> | <p>IV. Band:
M. Abraham-Göttingen
L. Boltzmann-Wien
C. Cranz-Berlin</p> | <p>V. Band:
M. Abraham-Göttingen
L. Boltzmann-Wien
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
Th. Desocoudres-Leipzig
H. Dieselhorst-Berlin
S. Finsterwalder-München
R. Gans-Tübingen
F. W. Hinrichsen-Aachen
E. W. Hobson-Cambridge
J. H. van 't Hoff-Berlin
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
Th. Liebisch-Göttingen
H. A. Lorentz-Leiden
L. Mamicok-Berlin
G. Mie-Greifswald
H. Minkowski-Göttingen
O. Mügge-Königsberg
J. Nabl-Wien
F. Pockels-Heidelberg
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff-Stuttgart
K. Runge-Göttingen</p> | | |

[Fortsetzung auf letzter Umschlagseite.]

A. GEODÄSIE.

XXX
408/5



11-348769

~~III 16694~~



VI 1, 1. NIEDERE GEODÄSIE.

VON

C. REINHERTZ

IN HANNOVER.

Inhaltsübersicht.

A. Allgemeines.

1. Aufgabe und Einteilung der Geodäsie.
2. Die Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche und die Einteilung der Messungen.
3. Übersicht der Methoden.
4. Allgemeines über die Anwendung der Ausgleichsrechnung.
5. Instrumentelle Hilfsmittel.

B. Die fundamentalen Messungen.

6. Die Längenmessung.
7. Die Winkelmessung.
 - a) Der Theodolit.
 - b) Horizontalwinkelmessung.
 - c) Vertikalwinkelmessung.

C. Die Lagemessungen.

8. Die Koordinatensysteme der Lagemessungen.
 - a) Allgemeines über die geodätischen Koordinatensysteme.
 - b) Rechtwinklige ebene Koordinaten.
 - c) Rechtwinklige sphärische Koordinaten.
 - d) Konforme rechtwinklige *Gauß'sche* Koordinaten.
 - e) Koordinatentransformation.
9. Die Punktbestimmung durch Triangulierung.
 - a) Allgemeines über Triangulierung.
 - b) Zentrierung.
 - c) Die Winkelmessungen und ihre Anordnung.
10. Die Grundaufgaben des trigonometrischen Einschneidens.
 - a) Vorwärts- und Seitwärtseinschneiden.
 - b) Rückwärtseinschneiden.
 - c) Einige andere Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung.

1*

Akc. Nr.

~~2820~~ / 50
BPK-3-107/2017

11. **Ausgleichung von Kleintriangulierungen.**
 - a) Die Anwendung der Methode der vermittelnden Beobachtungen.
 - b) Graphische Punktausgleichung.
 - c) Die Anwendung der Methode der bedingten Beobachtungen.
 - d) Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen.
12. **Polygonzugmessung.**
 - a) Der Theodolitpolygonzug.
 - b) Der Bussolen-(Kompaß-)Zug.
13. **Einzelaufnahme.**
14. **Berechnung und Teilung der Flächen.**
 - a) Flächenberechnung.
 - b) Flächenteilung.
15. **Das Abstecken von geraden Linien und Kreisbogen.**

D. Die Höhenmessungen.

16. **Das Nivellieren.**
 - a) Definition des Höhenunterschiedes. Historisches.
 - b) Der Nivellierapparat.
 - c) Das Nivellierverfahren.
 - d) Die Genauigkeit der Nivellierung.
 - e) Erdmassenberechnung.
 - f) Kotierte Projektion.
17. **Trigonometrische Höhenmessung.**
18. **Barometrische Höhenmessung.**

E. Tachymetrische Methoden.

19. **Indirekte Längenmessung (Distanzmessung).**
 - a) Distanzmesser mit Distanzlatte.
 - b) Distanzmesser mit Basisschiene.
20. **Tachymetrische Instrumente und Aufnahmen.**
21. **Meßtischaufnahmen.**
22. **Flüchtige Aufnahmen.**

Literatur.

A) Zeitschriften und Übersichten.

- O. Börsch*, Geodätische Literatur, auf Wunsch der Permanenten Kommission im Zentralbureau zusammengestellt, Berlin 1889.
- J. H. Gore*, A bibliography of geodesy. 2. ed. Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey 1901/1902, Washington 1903, p. 429.
- Bulletin de la société belge de géomètres, Anvers.
- Journal des géomètres-experts, Paris.
- Revue suisse de topographie et d'arpentage, Genf.
- Rivista di topografia e catastro, Firenze.
- The surveyor, London.
- Tidsskrift for Opmaalings-og-Matrikulsvaesen, Kopenhagen.
- Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Utrecht.

La topografia moderna y el catastro, Barcelona.

Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart. Gibt jährliche Literaturübersichten.
(Zeitschr. f. Vermess.)

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien.

Die vorstehenden Zeitschriften bilden nur eine Auswahl unter den zahlreichen Fachzeitschriften, die zum Teil als Organe von Landmesservereinen dienen. Insbesondere ist noch auf die verschiedenen ingenieurwissenschaftlichen Zeitschriften hinzuweisen, die viele geodätische Abhandlungen enthalten.

B) Lehrbücher und Monographien.

- VIII. Anweisung vom 25. Okt. 1881 für das Verfahren bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, 2. Ausgabe, Berlin 1897 (Anweisung VIII).
- IX. Anweisung vom 25. Okt. 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, 3. Ausgabe, Berlin 1904 (Anweisung IX).
- C. M. v. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde, 2 Bände, 7. Aufl., Stuttgart 1890 (*Bauernfeind*, Vermessungskunde 1, 2).
- A. Baule, Lehrbuch der Vermessungskunde, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1901.
- A. Börsch und P. Simon, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von C. F. Gauß, Berlin 1887.
- C. Bohn, Die Landmessung, Berlin 1886.
- O. Brathuhn, Lehrbuch der praktischen Markscheidekunst, 3. Aufl., Leipzig 1902.
- F. Brönnimann, Die Katastervermessung, Bern 1888.
- Ch. L. Durand-Claye, A. Pelletan et Ch. Lallemand, Lever des plans et nivellement, Paris 1889 (*Lallemand*, Nivellement).
- G. Eredi, Elementi di topografia, Firenze 1894.
- L. B. Francoeur, Géodésie, 8. éd., Paris 1903.
- F. G. Gauß, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst, 2. Aufl., Halle 1893 (*F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst).
- Ch. L. Gerling, Die Ausgleichsrechnung der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben, Hamburg 1843 (*Gerling*, Ausgleichsrechnungen d. prakt. Geom.).
- W. M. Gillespie, A treatise on surveying. Part I. Land surveying and direct levelling; Part II. Higher surveying (revised and enlarged by C. Staley), London 1901.
- C. M. Goulier, Etudes théoriques et pratiques sur les levers topométriques et en particulier sur la tachéométrie, Paris 1892 (*Goulier*, Tachéométrie).
- G. H. L. Hagen, Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. Aufl., Berlin 1837.
- E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 2. Aufl., Stuttgart 1897 (*Hammer*, Trigonometrie).
- F. Hartner-E. Doležal, Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, 2 Bände, 9. Aufl., Wien 1904/5 (*Hartner-Doležal* 1, 2).
- F. R. Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Meßinstrumente, Leipzig 1872 (*Helmert*, Ausgleichsrechnung).

- G. Chr. K. Hunäus*, Die geometrischen Instrumente der gesamten praktischen Geometrie, deren Theorie, Beschreibung und Gebrauch, Hannover 1864.
- N. Jadanza*, Elementi di Geodesia, Torino 1895.
- Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen behufs Herstellung neuer Pläne für die Zwecke des Grundsteuerkatasters, 5. Aufl., Wien 1904.
- J. B. Johnson*, The theory and practice of surveying, 15. ed., New York, London 1901.
- W. Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart. Bd. 1, Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 5. Aufl., 1904; Bd. 2, Feld- und Landmessung, 6. Aufl., 1904; Bd. 3, Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung, 4. Aufl., 1896 (das Werk enthält zahlreiche Literaturangaben) (*Jordan*, Handbuch 1, 2, 3).
- W. Jordan* und *K. Steppes*, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.
- O. Koll*, Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen, 2. Aufl., Berlin 1901.
- C. Koppe*, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie, Nordhausen 1885.
- A. Laussedat*, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques, Paris 1898, 1901.
- Manual of surveying instructions for the survey of the public lands of the U. S. and private land claims, issued by the commissioner of the general land office, Washington 1890.
- Moinot*, Lever de plans à la stadia, Périgueux 1865.
- M. d'Ocagne*, Application générale de la nomographie au calcul des profils de remblai et déblai avec une instruction pratique pour la construction et le mode d'emploi des abaques à points isoplèthes, Paris 1896.
- M. d'Ocagne*, Leçons sur la topométrie et la cubature des terrasses, Paris 1904.
- G. Orlandi*, Tacheometria, Torino 1896.
- A. Pelletan*, Opérations souterraines, Paris 1889.
- J. Porro*, Traité de tachéométrie, Paris 1847.
- L. Puissant*, Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement, 2. éd., Paris 1820.
- A. Salmoiraghi*, Istrumenti e metodi moderni di geometria applicata, Milano 1884.
- S. Stampfer*, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren, 1. Aufl., Wien 1845; 9. Aufl. von *F. Lorber*, Wien 1894; 10. Aufl., umgearbeitet von *E. Doležal*, Wien 1902.
- W. F. Stanley*, Surveying and levelling instruments, 3. ed., London 1901.
- P. Uhlich*, Lehrbuch der Markscheidkunde, Freiberg i. S. 1901.
- Chr. A. Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, Braunschweig. Bd. 1, Vorstudien und Feldmessen, 1885; Bd. 2, Höhemessungen, 1894 (*Vogler*, Prakt. Geom. 1, 2).
- Abbildungen geodätischer Instrumente, Berlin 1892.
- Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877.
- M. de Vos*, Leerboek der Lagere Geodesie, Groningen 1902/04.

A. Allgemeines.

1. Aufgabe und Einteilung der Geodäsie. Die Geodäsie oder Vermessungslehre lehrt diejenigen Methoden der Messung, Rechnung und Abbildung, welche zur Bestimmung der räumlichen Verhältnisse sowohl der gesamten Erdoberfläche als auch beliebig begrenzter Teile derselben dienen. Die Aufgabe der Geodäsie lautet daher in allgemeiner Fassung: *Die Lage von Punkten der Erdoberfläche zu bestimmen und diese Bestimmung in irgend einer Weise auszudrücken, numerisch in Koordinaten und Messungsausweisen oder graphisch in Karten, Plänen, Rissen.*

Als Grundlage dient allen diesen Bestimmungen die jedem Erdort eigentümliche Richtung der Schwerkraft (Lotrichtung oder Vertikale), die instrumentell durch das Fadenlot oder die Libelle angegeben wird. Eine alle Lotrichtungen rechtwinklig durchschneidende Fläche heißt eine Niveaufläche; ihr einfachstes Beispiel ist die ruhende Meeresfläche, die man auch als „*Geoid*“ (mathematische Erdfigur) bezeichnet, indem man sie sich durch die Kontinente in geeigneter Weise fortgesetzt denkt. Die Erfahrung lehrt, daß, wie alle Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche, speziell das Geoid mit großer Annäherung als *schwach abgeplattetes Rotationsellipsoid* aufgefaßt werden kann, dessen kleine Achse in die Rotationsachse der Erde fällt¹⁾.

Infolge der geringen Abplattung des Erdellipsoids kann man für Vermessungen, die sich nur auf kleine Gebiete beziehen, annehmen, daß alle Lotrichtungen des Messungsgebietes auf einer Kugeloberfläche senkrecht stehen, deren Mittelpunkt in der Erdachse liegt. Den Kugelradius wählt man am zweckmäßigsten so, daß die Kugel dasselbe Krümmungsmaß besitzt wie das Ellipsoid in dem betreffenden Gebiete, weil dann eine kleine Schale der Kugel ohne merkliche Änderung der Längen in die ellipsoidische Schale verbogen werden kann. Macht man die im vorstehenden angegebene Annahme, daß die betrachtete Niveaufläche eine Kugel sei, so tritt gegenüber dem Ellipsoid die Vereinfachung ein, daß die Vertikalebene in einem Punkte *A* der Kugel (d. h. eine durch das Lot in *A* gehende Ebene), die durch den Punkt *B* geht, identisch ist mit der Vertikalebene in *B*, die durch *A* geht, weil beide Ebenen den Kugelmittelpunkt enthalten. Zwei beliebige Punkte der Kugelfläche haben also eine gemeinsame Vertikalebene.

1) Näheres hierüber und die genaueren Definitionen der im vorstehenden skizzierten Begriffe findet man in dem Artikel über „Höhere Geodäsie“ VI 1, 3 (P. Pizzetti).

Ist das Vermessungsgebiet sehr klein, so kann man auch von der Konvergenz der Lotlinien absehen und diese als ein System von Parallelen betrachten; die Niveauflächen werden dann zu parallelen Ebenen.

Die Verschiedenartigkeit der in der Geodäsie zu behandelnden Aufgaben führt, ohne eine strenge Trennung, zu einer Teilung in verschiedene Zweige oder Arbeitsgebiete je nach dem Umfange des Vermessungsgebietes und der erstrebten Genauigkeit. Die *Erdmessung* (früher *Gradmessung*), welche die Bestimmung der mathematischen Erdgestalt zur Aufgabe hat, umfaßt als Messungsgebiet die ganze Erde. Die *Landesvermessung* legt ein bestimmtes Ellipsoid ihren Messungen zugrunde und hat die Aufgabe, auf dieser Grundlage für das gesamte Gebiet eines Staates eine einheitliche Ausmessung und Abbildung herzustellen, wobei *Grundsteuerkatastervermessung* und *topographische Geländeaufnahme* unterschieden wird. Die in Einzelfällen für die verschiedenartigsten Zwecke unternommenen Ausmessungen und Abbildungen, welche auf engbegrenzte Teile der Erdoberfläche beschränkt bleiben, rechnet man entsprechend zur *Feld-* (*Land-*) *Messung*, *Forst-* *Vermessung*, *Gruben-* *Messung* (*Markscheiden*). Daneben sind noch zu nennen die *nautischen* Messungen (*Küstenvermessungen*) sowie die *Reiseweg-* *Aufnahmen* (*Routen*, *Itinerare*), welche auch als *geographische Landmessung* bezeichnet werden.

Zur *höheren Geodäsie* rechnet man nun alle diejenigen Aufgaben, bei denen die Niveauflächen als Ellipsoide betrachtet werden müssen, zur *niederen Geodäsie* diejenigen, bei denen man mit der Annahme von kugelförmigen oder ebenen Niveauflächen auskommt.

Über die Bedeutung des Wortes „Geodäsie“ sei angeführt, daß es ursprünglich *Feld-* (*Acker-*) *einteilung* bezeichnet; erst im Laufe des verflossenen Jahrhunderts hat der Begriff allmählich die heutige Erweiterung bis zur gesamten Vermessungswissenschaft erfahren. Die Geodäsie als *Feldmessung* war die rechnende, angewandte Geometrie (*geometria practica*) im Gegensatz zur reinen Geometrie, d. h. der reinen Raumlehre²⁾. Die heute angewendeten Methoden fußen im wesentlichen auf den bei den ersten exakten *Gradmessungen* des 17. und 18. Jahrhunderts entwickelten; ihre im letzten Jahrhundert erfolgte fehlertheoretische Durchbildung verdanken sie, im Verein mit dem allgemeinen Fortschritt der exakten Wissenschaften, der Präzisionsmechanik und den gesteigerten Anforderungen an die Zuverlässigkeit

2) Als historischer Hinweis auf die erste Entwicklungsstufe genügt: *M. Cantor*, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880, 1892.

geodätischer Arbeiten, vornehmlich der Einführung der Methode der kleinsten Quadrate, also dem Einflusse von *C. F. Gauß*. Obwohl die in Betracht kommenden einfachen trigonometrischen Lösungen der wesentlichsten Feldmeßaufgaben längst bekannt waren, war bis vor rund 100 Jahren das Verfahren der Feldmessung hauptsächlich ein rein graphisches, d. h. man ging unter Benutzung von Winkelkreuz (groma), Astrolabium, Bussole und Meßkette, sowie besonders auch des Meßtisches, auf unmittelbare graphische Darstellung aus und konnte sich mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln begnügen. Erst mit Anfang des 19. Jahrhunderts, der Zeit des Beginnes der ersten allgemeinen Landesvermessungen, ging man unter Anwendung des Theodolits nach und nach zu zahlenmäßigen Methoden und Punktbestimmung durch Koordinaten über, welche heute den Grundton der exakt rechnenden Feldmessung bildet.

Die *Literatur* ist entsprechend den zahlreichen und verschiedenartigen Methoden, der allmählichen Ausbildung und Anwendung derselben für mannigfache Zwecke (Grundsteuerkataster, Topographie, Ingenieurbauwesen, Bergbau) eine ebenso umfangreiche wie verschiedenartige, wobei auch besonders die Verschiedenartigkeit der Entwicklung des staatlichen Vermessungswesens der verschiedenen Länder in Betracht kommt.

In der Literaturübersicht sind eine Anzahl der gebräuchlichen Lehr- und Handbücher genannt, unter denen das von *W. Jordan* die ausführlichsten Literaturangaben enthält. Eine historisch-kritische Darstellung des deutschen Vermessungswesens geben *W. Jordan* und *K. Steppes*³⁾. Von älteren Lehrbüchern möge das von *J. T. Mayer*⁴⁾ zitiert werden, das früher sehr verbreitet war und jetzt einen interessanten Vergleich des heutigen Standes der Vermessungswissenschaft mit dem zu Beginn des verflossenen Jahrhunderts, unmittelbar vor Einführung der Methode der kleinsten Quadrate, bietet.

2. Die Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche und die Einteilung der Messungen. Bei den Vermessungen an der Erdoberfläche wählt man eine bestimmte Niveaufläche aus, die als Berechnungs- und Abbildungsfläche (Referenzfläche, Vermessungsfläche oder Vermessungshorizont, Landeshorizont) zugrunde gelegt wird; gewöhnlich ist es diejenige Fläche, die in ihrer Fortsetzung mit der

3) Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.

4) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, 5 Bd., 4. Aufl., Göttingen 1814—1820; ferner sei genannt *L. Puissant*, *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*, 2. éd., Paris 1820 und *F. Proß*, *Lehrbuch der praktischen Geometrie*, Stuttgart 1838.

Meeresfläche zusammenfällt. Um diese Fläche gegen den Erdkörper festzulegen, orientiert man einen Punkt (Indifferenzpunkt) durch Bestimmung der astronomischen Breite und Länge; bestimmt man dann noch das astronomische Azimut einer Richtung auf der Fläche, so kann man die Lage aller anderen Flächenpunkte zum Erdkörper lediglich durch Messungen auf der Fläche selbst bestimmen.

Um nun einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche festzulegen, projiziert man ihn vermittels der durch ihn gehenden Lotlinie auf die Vermessungsfläche. Kennt man dann den in der Lotlinie gemessenen Abstand des Punktes von der Bezugsfläche und außerdem die Koordinaten seiner Projektion in einem beliebigen Koordinatensystem auf dieser Fläche, so ist der Punkt eindeutig festgelegt. Die Veranlassung zu der angegebenen Bevorzugung der vertikalen Richtung ist die leichte Zugänglichkeit der Schwerkraftsrichtung. Überdies sind die Vermessungen meist in vertikaler Richtung viel weniger ausgedehnt als in horizontaler, und man pflegt deshalb die gesamten Messungen in *Lagemessungen* (Bestimmung der Lage der Projektion in der Bezugsfläche) und *Höhenmessungen* (Bestimmung des Abstandes von der Bezugsfläche) einzuteilen.

Hiernach ist die Definition der wesentlichsten Bestimmungsstücke ohne weiteres gegeben. Der in der Lotlinie gemessene Abstand eines Punktes von der Normalfläche ist die „Höhe“ (H) des Punktes; fällt die Normalfläche in die Meeresniveaufläche, so erhält man die „Meereshöhe“. Die Beziehung der Normalfläche auf die Meeresniveaufläche ist gegeben, sobald an einem oder mehreren Punkten durch Pegelbeobachtungen (Mareographen) gewonnene „Mittelwasserstände“ zur Definition der Niveaufläche des Meeresspiegels eingeführt und in das geodätische Netz einbezogen sind⁵⁾.

Zu einer kugelförmigen Normalfläche konzentrische Kugeloberflächen, welche durch die Messungspunkte an der Erdoberfläche hindurchgehen, entsprechen den „Horizontflächen“ der betreffenden Punkte; der Abstand (in den Lotlinien gemessen) dieser „Horizonte“ entspricht dem „Höhenunterschied Δh “ der betreffenden Punkte. Die *horizontale Entfernung* (s) zweier Punkte („Länge, Linie, Strecke“) ist der kür-

5) In Preußen (Deutschland) z. B. ist hierzu an einem Pfeiler der Sternwarte in Berlin ein kleiner lotrechter Maßstab angebracht, dessen mittlerer Teilstrich (Nullpunkt) nach Ableitung aus dem Landes-Präzisionsnivellement die „Höhe“ 37 m über N.N. (Normal-Null) erhalten hat, und als „Normalhöhenpunkt für das Königreich Preußen“ gilt. Andere Länder haben entsprechende Bestimmungen getroffen. Vgl. VI 1, 3, *Höhere Geodäsie*, ferner z. B. auch Jordan, Handbuch 2, § 114.

zeste Abstand ihrer Lotlinien, gemessen auf der angenommenen mathematischen Erdoberfläche. Die unmittelbare Verbindungslinie zweier Punkte der Erdoberfläche, welche nicht dem gleichen Horizont angehören, ist die „geneigte“ oder „schiefe“ Entfernung s_n . Der Winkel, den diese geneigte Verbindungslinie s_n zweier Punkte mit dem positiven Zweige der Lotlinie in einem Punkte bildet, ist der „Zenitwinkel“ („Zenitdistanz“) (z), der ihn zum rechten Winkel ergänzende, von der Wagerechten aus genommene, der „Höhenwinkel“ (α). Zenitwinkel werden von 0° bis 180° , Höhenwinkel von 0° bis 90° mit Vorzeichen \pm (Höhen-, Tiefenwinkel) gezählt.

Ist ein ganzes System von im Gelände bezeichneten Punkten $P_1 \dots P_n$ in Bezug auf einen Ausgangspunkt P_a zu bestimmen, so denkt man sich die Lotebenen sämtlicher Punkte in Bezug auf P_a hergestellt, was durch Drehung einer durch die Lotlinie von P_a gehenden Lotebene erreicht wird, indem das Maß der Drehung im Horizont von P_a verzeichnet oder an einem zentrisch und rechtwinklig auf die Lotlinie von P_a gesetzten Kreis („Horizontalkreis“) gemessen wird. Es ergibt sich das „Horizontal-Richtungssystem“, die „Richtungen“ $r_1 \dots r_n$. Das einfachste Horizontal-Richtungssystem ist der *Horizontalwinkel* z. B. $w_{12} = r_2 - r_1$; das Richtungssystem $r_1 \dots r_n$ kann auch durch beliebige Winkelangaben, z. B. w_{12} , $w_{13} \dots w_{1n}$ oder w_{12} , w_{23} usw. ausgedrückt werden.

„Geneigte (schiefe) Winkel“, d. h. in der Ebene des Ausgangspunktes P_a und zweier Zielpunkte P_1 und P_2 gemessene Winkel, kommen seit Einführung des Theodolits, welcher selbsttätig projiziert, kaum noch in Betracht⁶⁾.

3. Übersicht der Methoden. Einen Überblick über die wesentlichsten geodätischen Verfahren und die dazu erforderlichen Hilfsmittel gibt die nachfolgende Zusammenstellung.

Grundlegend ist:

a) Die *Absteckung gerader Linien* zwischen Punkten der Erdoberfläche und *Messung ihrer Entfernung* auf Grund einer bestimmt definierten Maßeinheit (V 1 (C. Runge)). Die Längenmessung erfolgt entweder mit einfachen Feldmeßinstrumenten oder, wenn größere Genauigkeit erreicht werden soll, mit Hilfe besonderer Apparate (Basisapparate).

b) Die *Messung von Winkeln* und zwar meistens von Horizontal-

6) Für event. „schiefe“ gemessene Winkel ist „Reduktion auf den Horizont“ erforderlich; hierzu müssen noch die Höhenwinkel von P_1 und P_2 gemessen sein.

oder Vertikalwinkeln. Als Meßinstrument dient der Theodolit oder auch untergeordnete Instrumente wie Winkelscheibe (Astrolabium) und Bussole (Kompaß) für Horizontalwinkel, Höhen- oder Neigungsmesser mit Senkel, Pendelkreis oder Libelle für Vertikalwinkel, und Sextant (Prismenkreis) für beliebige Winkel.

Aus diesen grundlegenden Messungsverfahren ergeben sich die verschiedenen zusammengesetzten Bestimmungsmethoden und zwar für die *Lagemessung*:

a) *Triangulierung* (Dreiecksmessung) auf Grund von Basismessung und Theodolit-Horizontalwinkelmessung in stufenweise aufeinander gegründeten Dreieckssystemen.

b) *Polygonisierung* (polygonale Zugmessung) mit Messung von Längen und Horizontalwinkeln (Theodolit, ev. Sextant) oder von magnetischen Azimuten (Bussole) in gebrochenen Linienzügen, in der Regel auf Grund einer Triangulierung.

c) *Kleinaufnahme* durch Anwendung von Längen- und Winkelmessung bezw. Absteckung auf Grundlage von Triangulierung und Polygonisierung oder auch unabhängig davon. Hierzu gehört auch die Absteckung gerader und krummer Linien (Linien-, Tunnel-, Kurvenabsteckung).

d) *Meßtischaufnahme*, d. h. unmittelbare Übertragung der Punktlage auf die Zeichnungsfläche des Meßtisches im Anschluß an eine Triangulierung oder Polygonisierung sowie auch unabhängig davon.

Für die *Höhenmessung*:

a) *Nivellierung* bei Verwendung des Nivellierinstrumentes mit horizontalen oder nahe horizontalen kurzen Ziellinien und lotrechten Skalen. Hierhin gehören auch dem geometrischen Prinzip nach die hydrographischen bezw. nautischen Tiefenmessungen, wobei die Wasseroberfläche den Nivellierhorizont bildet.

b) *Trigonometrische Höhenmessung* bei Verwendung geneigter Ziellinien und Messung von Vertikalwinkeln mit dem Theodolit in der Regel auf der Grundlage einer Horizontaltriangulierung, oder auch kurzer schiefer Linien (Meßbänder, Schnur, z. B. bei Grubenmessungen) mit Höhenbogen, Hängebogen usw.

c) *Barometrische Höhenmessung* in der Regel mit dem Federbarometer (Aneroid) für Geländeaufnahme bei bekannter Punktlage.

Neuerdings sind auch die sogenannten „*tachymetrischen Methoden*“ weiter ausgebildet worden. Charakteristisch für diese ist die Ersetzung der direkten Längenmessung durch die *indirekte Distanzmessung* und die Vereinigung der trigonometrischen Höhenmessung und der Lagemessung. Zur Verwendung kommen dabei die verschiedenartigsten

tachymetrischen Instrumente. Über die ebenfalls in diesen Abschnitt gehörige *Photogrammetrie* vergleiche man den nächsten Artikel dieses Bandes (*S. Finsterwalder*).

Auf die Ergebnisse der angeführten Messungsmethoden und deren rechnerische Auswertung durch Koordinaten und Abrisse gründet sich dann die *Abbildung der Erdoberfläche* (vgl. VI 1, 4 (*R. Bourgeois*)), bei der die mannigfachsten Zeichenhilfsmittel zur Verwendung kommen. Die Abbildung erfolgt bei ausgedehnten Gebieten mit Berücksichtigung der Erdkrümmung (Kartenprojektionen). Wird die Geländedarstellung durch Höhenschichtlinien und Bergstriche besonders berücksichtigt, so liegt eine topographische Abbildung vor; wird dagegen die exakte Darstellung aller Einzelheiten im Grundriß, vornehmlich der Eigentums- und Kulturgrenzen, angestrebt, so handelt es sich um geometrische Kartierung.

Eine weitere Verwendung finden die Messungen zur *Berechnung von Flächeninhalten* unmittelbar aus den gemessenen Zahlenwerten, aus Koordinaten oder auf Grund einer Karte mit Benutzung verschiedenartiger Hilfsmittel (Planimeter). Hierhin gehört auch die *Teilung von Grundflächen (Felderteilung)*.

4. Allgemeines über die Anwendung der Ausgleichsrechnung. Die Anordnung der Messungen ist gegründet auf die Sätze der Fehlertheorie nach der Methode der kleinsten Quadrate, die, nachdem sie von *C. F. Gauß* aufgestellt waren, sofort Eingang in die Vermessungskunde fanden. Dafür wirkten zuerst besonders *Ch. L. Gerling* und *G. H. L. Hagen*⁷⁾. Die *Gauß'sche* Originalanordnung der Ausgleichung von Kleintriangulierungspunkten ist erst neuerdings bekannt geworden⁸⁾.

Als allgemeines Fehlermaß gilt der „*mittlere Fehler*“; der „*wahrscheinliche*“ Fehler sowie der „*durchschnittliche*“ werden seltener gebraucht. Die Genauigkeit amtlicher Messungen bis herab zu den Kleinmessungen wird durch die auf dem „*mittleren Fehler*“ beruhenden „*Fehlergrenzen*“, deren Innehaltung vorgeschrieben ist, reguliert. Die Fehlergrenzen werden in den Vermessungsanweisungen in der Regel etwa gleich dem dreifachen Betrag des „*mittleren Fehlers*“ festgesetzt. Diese Annahme beruht einerseits auf der Fehlerwahrscheinlichkeit nach dem *Gauß'schen* Fehlergesetz, andererseits auf praktischen Erwägungen⁹⁾. Die mittleren Fehler werden aus besonderen Unter-

7) Vgl. *C. Reinhertz*, Zeitschr. f. Vermess. 30 (1901), p. 1.

8) *Carl Friedrich Gauß' Werke*, 9. Bd., Göttingen 1903.

9) *Jordan*, Handbuch 1, Kap. V. Vgl. auch *A. Blümcke*, Zeitschr. f. Vermess. 26 (1897), p. 51, 276, 561; 27 (1898), p. 313; 30 (1901), p. 229.

suchungen und bei praktischen Vermessungen aus den gegen die Ausgleichungsergebnisse übrigbleibenden Abweichungen gewonnen. Bei den unter den verschiedenartigsten Verhältnissen auszuführenden und aus mannigfachen Elementen sich zusammensetzenden Messungen der niederen Geodäsie ist eine strenge Fehlertrennung und das Ausschneiden systematischer Fehler nicht möglich; die Reste der systematischen Fehler gehen mit zum Teil erheblichen Beträgen in die zufälligen über. Gegebenen Falls werden vorliegende Fehlerreihen nach dem *Gauß'schen* Fehlergesetz geprüft. Die Grundlage für die Berechnung der Einwirkung der unmittelbaren Beobachtungsfehler auf die daraus abgeleiteten Ergebnisse (Funktionen der Beobachtungen) bildet das allgemeine „*Fehlerfortpflanzungsgesetz*“ für die Funktion $X = f(x, y, z, \dots)$:

$$M_X = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} m_z\right)^2 \dots}$$

worin x, y, z, \dots Beobachtungsgrößen, $M_X, m_x, m_y, m_z, \dots$ die entsprechenden mittleren Fehler von X, x, y, z, \dots bedeuten. Für die einfachen linearen Beziehungen, z. B. den Fehler der Summe von unabhängigen Einzelbeobachtungen (ohne Rücksicht auf systematische Fehler) $X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ hat man

$$M_X = \pm m_x \sqrt{n},$$

sog. „*Quadratwurzelgesetz*“. Für Messungen ungleicher Genauigkeit wird der Begriff des „*Gewichtes*“ p verwendet, wobei die Beobachtung, der man das Gewicht 1 beilegt (*Gewichtseinheit*), passend gewählt wird. Z. B. kann bei Richtungsmessungen mit dem Theodolit genommen werden eine aus Beobachtung in zwei Fernrohrlagen gemittelte (somit von den Instrumentachsenfehlern befreite) Richtung; bei Längenmessungen kann genommen werden die Messung einer bestimmten Strecke, z. B. 100 m oder 1000 m; für Nivellierung wird z. B. angenommen die einmalige Bestimmung des Höhenunterschiedes zwischen zwei Punkten, deren horizontale Entfernung 1 km ist. Die mittleren Fehler ergeben sich aus den bei der Ausgleichung übrig bleibenden plausibelsten Fehlern; sie können unter Umständen auch aus wahren Fehlern berechnet werden, z. B. bei Längenmessungen oder bei Nivellierungen aus der Vergleichung der Hin- und Rückmessungen¹⁰⁾.

Es ist wünschenswert, daß für eine gemessene Größe immer der mittlere Fehler bestimmt wird; jedoch ist bei Genauigkeitsschätzungen

10) Z. B. *Jordan, Handbuch* 1, § 11.

zu beachten, daß in den berechneten mittleren Fehlern vielfach nur der Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler, nicht aber der der systematischen Fehler erscheint.

„Grobe Fehler“ sind bei dem umfangreichen, bei Vermessungen zu behandelnden Zahlenmaterial, bei den mit der Ausdehnung der Einzelaufnahmen zahllos werdenden, häufig unter schwierigen Verhältnissen und äußeren Störungen zu nehmenden Ablesungen, unvermeidlich. Daher ist es Grundsatz, daß jede weiter zu gebrauchende Messungszahl einwandfrei kontrolliert wird; eine einfache unkontrollierte einmalige Ablesung oder Messung z. B. eines Winkels, einer Länge usw. ist geodätisch unbrauchbar. Die somit für jede Messung erforderliche Probe kann eine unabhängige Nachmessung sein oder eine indirekte Probe, wie Abschluß auf gegebene Werte, oder Verknüpfung durch eine bekannte Beziehung, z. B. Hypotenuse für zwei Katheten, Summe der Dreieckswinkel usw. Die Lehre von der Anordnung der Messungsproben ist eine wichtige Aufgabe der Vermessungskunde.

Um das Anwachsen der Messungsfehler innerhalb möglichst enger Grenzen zu halten, wird eine systematische Gliederung der Messungen angewendet derart, daß untergeordnete Systeme („Netze“) in übergeordnete eingefügt werden, d. h. man „arbeitet vom Großen ins Kleine“. Dies gilt in erster Linie für die Anordnung exakter Landesvermessungen, in gleichem Sinne aber auch ebenso für räumlich eng begrenzte Aufnahmen. Bei den Landesvermessungen z. B. wird die Grundlage durch ein System von Dreiecken (Ketten und Netze) gebildet, in welche der Reihe nach untergeordnete Punktsysteme eingeschaltet werden, so daß das zu bearbeitende Gebiet zunächst mit möglichst einfach gegliederten Systemen, also mit weitmaschigen Netzen, überzogen wird, in die sich die der Natur der Sache nach immer verwickelter gestaltenden Kleinsysteme einfügen lassen. Die Hauptsysteme werden dementsprechend durch möglichst wenige, aber möglichst scharf gemessene Elemente bestimmt. Jedes nach solchen Gesichtspunkten gemessene übergeordnete System gilt für das untergeordnete als fehlerfrei. Die richtige Bemessung des Genauigkeitsverhältnisses der einander unter- bzw. übergeordneten Systeme ist eine wichtige Frage der Vermessungstechnik. Diese Systeme werden je für sich nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, sodaß das übergeordnete System das „Soll“ für die weiteren Systeme angibt. Es handelt sich also um eine fortgesetzte Einschaltung untergeordneter Systeme in übergeordnete.

Die Ausgleichung der Hauptsysteme für umfangreiche Ver-

messungen geschieht stets nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar nach „vermittelnden“ oder „bedingten“ Beobachtungen¹¹⁾; ob das eine oder andere Verfahren anzuwenden ist, wird von Fall zu Fall nach der Anordnung der gerade vorliegenden Systeme entschieden¹²⁾. Für die untergeordneten Systeme werden mit Rücksicht auf die sich mehr und mehr komplizierenden Beziehungen (Zusammenfassung von Winkel- und Längenmessungen) vielfach Näherungsausgleichungen („Fehlerverteilungsverfahren“ und „graphische“ Ausgleichungen) verwendet. Diese werden als berechtigt und zweckmäßig angesehen, wenn sie eine praktisch in Betracht kommende Erleichterung der Arbeit herbeizuführen imstande sind und die Einbuße an Strenge zulässig erscheint. Im übrigen läßt sich bei zweckmäßiger Anordnung der Rechnungen und Beiseitelassung überflüssigen Zahlenballastes die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate so einfach gestalten, daß sie für den größten Teil der in der niederen Geodäsie vorkommenden Ausgleichungen als das bequemste und zuverlässigste Interpolationsverfahren betrachtet wird, welches, wenn auch in den Gewichtsansätzen oder deren Vernachlässigung, sowie in der Anordnung der Ausgleichungssysteme eine gewisse Willkür bestehen bleibt, doch die Ausgleichung an eine streng kontrollierbare, einwandfreie Methode bindet und auf jeden Fall eine willkürfreie Fehlerberechnung für die Ausgleichungsergebnisse zuläßt. Die Fehlerberechnungen sind von wesentlichster Bedeutung für die Kritik und Ausbildung der Messungsmethoden.

Über die Literatur, die sich speziell auf die Anwendung der Ausgleichungsrechnung in der Geodäsie bezieht, sehe man die Literaturübersicht nach. Im übrigen sei auf die Angaben in dem Artikel „Ausgleichungsrechnung“, I D 2 (*J. Bauschinger*) verwiesen.

Die umfangreiche Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, besonders für die zahlreichen Punktbestimmungen der Kleintriangulierung, hat ebenso wie für die übrigen Rechnungen der niederen Geodäsie zum Gebrauch von Rechen-„Formularen“ geführt, welche für die amtlichen Arbeiten in den „Vermessungsanweisungen“ vorgeschrieben sind¹³⁾. Für die Rechen-schärfe gilt im allgemeinen, daß die Rechenunsicherheiten von niederer Ordnung als die Messungsfehler sein müssen und keine neuen Unsicherheiten in die Bestimmungen hineinbringen dürfen, daß aber

11) Vgl. I D 2 (*J. Bauschinger*), p. 768 ff.

12) Vgl. die Bemerkungen zu den einzelnen Meßmethoden.

13) Vgl. z. B. Anweisung IX der preußischen Katasterverwaltung, die vielfach als Vorbild gedient hat.

überflüssiger Zahlenballast zu vermeiden ist. Darauf gründet sich z. B. die sehr empfehlenswerte Verwendung des einfachen Rechenschiebers bei den Ausgleichsrechnungen der niederen Geodäsie¹⁴).

Ebenso wie die Anordnung der Messungen und die Rechnungen gründen sich auch die für den rationellen Gebrauch der geodätischen Instrumente maßgebenden Gesichtspunkte auf die Fehlertheorie. Der durch diese ermöglichten einwandfreien Kritik der Instrumentleistungen ist im Verein mit der Ausbildung der Präzisionsmechanik der Fortschritt in der Entwicklung der geodätischen Instrumente im letzten halben Jahrhundert in erster Linie zu verdanken. Die einzelnen Glieder (Organe), aus denen sich die Instrumente zusammensetzen, müssen in Bezug auf Leistung und Anordnung einander und dem Prinzip des Instrumentes entsprechen. Für diese Anordnung bleibt ein gewisser Spielraum, sodaß sich mannigfaltige Instrumenttypen ergeben, wobei die für ein Messungsverfahren jeweils zu erreichende und vorher bestimmte Genauigkeit sowie weitere Gesichtspunkte, z. B. schnelle und sichere Aufstellung, maßgebend sind. *Im Vermessungswesen handelt es sich nicht darum, in jedem Fall mit allen möglichen Mitteln die weitgehendste Genauigkeit zu erreichen, sondern vielmehr darum, innerhalb vorgesehener Genauigkeitsgrenzen die gesuchten Resultate mit dem geringsten Aufwand an Arbeit und Kosten zu gewinnen.* Dazu führt die Anwendung der Fehlertheorie in der geodätischen Beobachtungstechnik und die Fehlerdiskussion a priori.

5. Instrumentelle Hilfsmittel. Über die instrumentellen Hilfsmittel mögen, da ihre Darstellung nicht im Plane der Encyclopädie liegt, nur wenige Worte hier Platz finden. Die den beiden hauptsächlichsten Feldmeßinstrumenten, Theodolit und Nivellierinstrument, gemeinschaftlichen Teile sind „*Libelle*“ und „*Meßfernrohr*“.

Die Libelle. Verwendet werden „*Röhrenlibellen*“¹⁵), deren „*Empfindlichkeiten*“ oder „*Angaben*“ (d. i. zu einem Strich Ausschlag gehöriger Winkelwert) zwischen den Grenzen von rund 5" und 50" liegen, wobei 1 Strich der Libellenteilung gleich 1 Pariser Linie oder neuerdings auch gleich 2 mm genommen wird, so daß die Krümmungsradien der tonnenförmigen Schlifffläche¹⁶) etwa zwischen 80 m und 8 m betragen, bei untergeordneten und besonders Freihand-Instrumenten kommen noch

14) *Jordan*, Handbuch 1, Kap. II u. III.

15) In historischer Hinsicht (*Thévenot* 1660) sei verwiesen auf *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892.

16) Zur Theorie der Libellenschlifffläche vgl. *F. R. Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 7 (1878), p. 185.

stärkere Krümmungen vor. „*Dosenlibellen*“ werden an größeren Instrumenten sowie zur allgemeinen Einstellung feinerer Instrumente gebraucht; die Radien der Kugelhauben liegen rund zwischen $\frac{1}{2}$ m und 2 m. Zur Bestimmung der Angaben von Röhrenlibellen und zur Prüfung des Schliffes dient der Libellenprüfer mit Mikrometerschraube (Legebrett). Die innere Fläche der Röhrenlibelle, an der die Blase spielt, ist nach allen Richtungen gekrümmt: derjenige in der Mitte der Fläche verlaufende Hauptschnitt, in dem die Krümmung am geringsten ist, enthält die *Libellenachse*, die als Tangente an den genannten Hauptschnitt im Hauptstrich der Libellenteilung definiert ist. Ist die Libellenachse der Verbindungslinie der Aufsatzpunkte der Libelle parallel, so ist diese kreuzungsfehlerfrei, was man daran erkennt, daß die Blase ihre Lage bei Drehung der Libelle um die durch die Aufsatzpunkte gehende Gerade nicht ändert. Die Libelle dient dazu, Achsen vertikal und horizontal zu stellen¹⁷⁾. Eine Achse ist vertikal, wenn eine fest mit ihr verbundene Libelle bei der Drehung um die Achse ihre Einstellung nicht ändert. Um die Horizontalität einer Achse zu prüfen, wird die Libelle auf ihr umgesetzt (d. h. um 180° gedreht); ändert sie dabei ihre Einstellung nicht, so ist unter der Voraussetzung, daß kein Kreuzungsfehler vorhanden, die Achse horizontal. Spielt bei vertikaler oder horizontaler Achse die Libelle auf den Hauptstrich ein, was für die Benutzung der Libelle nicht notwendig, aber bequem ist, so heißt sie „*berichtigt*“; in der niederen Geodäsie arbeitet man meistens mit berichtigter Libelle. Die Genauigkeit der Libelle als Lot- und Horizontierinstrument ist, abgesehen von Nebenumständen, abhängig von der Steigkraft der Blase, welche im allgemeinen mit der Größe der Blase und der Stärke der Krümmung der Schliffkurve zunimmt. Die Genauigkeit der Libellen ist von C. Reinhertz¹⁸⁾ untersucht.

Das Meßfernrohr. Die an den geodätischen Instrumenten in Betracht kommenden Fernrohre sind stets *Kepler'sche* (astronomische) mit Okularen nach *Ramsden*, *Huygens* oder auch orthoskopischen Okularen. Die Vergrößerung liegt etwa zwischen den Grenzen 10—45 fach, und dementsprechend gehen die Objektivöffnungen bis zu rund 45 mm, die Brennweiten bis zu 50 cm. Das Fadenkreuz¹⁹⁾ wird meistens durch ein einfaches, sich rechtwinklig schneidendes Fadenpaar gebildet (Vertikal-, Horizontalfaden); anstatt des einfachen Vertikal-

17) *M. d'Ocagne*, Bull. astr. 1903, p. 51.

18) Zeitschr. f. Instr. 11 (1890), p. 309.

19) Als historische Notiz sei verwiesen auf *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892.

zielfadens wird auch ein mit rund $1-1\frac{1}{2}$ mm scheinbarem Abstand angeordneter Zieldoppelfaden benutzt, dessen Mittellinie die Einstellenebene angibt. Bei Arbeiten im Dunkeln (im Tunnel, in der Grube beim Markscheiden) wird Beleuchtung des Fadekreuzes durch Lichtwerfer vom Objektiv aus, durch die hohle Horizontalachse oder auch vom Okular aus angewendet. Bei den Fadendistanzmessern (vgl. Nr. 19) treten die zum Mittelfaden parallelen Distanzfäden hinzu, wobei dann auch die Fernrohranordnung nach *Porro* (vgl. p. 86) zur Anwendung kommt. Von Wichtigkeit für die Verwendung des Meßfernrohrs ist die damit zu erzielende Ablesegenauigkeit an Skalen (Nivellier- und Distanzskalen). Darüber ist eine Untersuchung von *Reinhertz*²⁰⁾ angestellt.

Der Zielfehler der Meßfernrohre beim Einstellen auf scharf bezeichnete Ziele kann bis auf einige Zehntel Sekunden herabgebracht werden; bei Einstellung auf die bei Vermessungen verwendeten Ziele (Signale, Kirchtürme, Stäbe usw.) liegt der Fehler im allgemeinen etwa zwischen $\frac{1}{2}''$ und $3''$, wobei Durchsichtigkeit der Luft, Flimmern, Beleuchtung, Hintergrund, Form des Signales usw. neben der Leistung des Fernrohrs an sich eine erhebliche Rolle spielen, und noch zu unterscheiden ist, ob es sich um Einstellungen des Vertikal- oder Horizontalfadens (Horizontal- oder Vertikalwinkelmessung) handelt²¹⁾.

Bezüglich der weiteren Untersuchungen der verschiedenen geodätischen Instrumente, ihre „Berichtigung“ (Justierung), Bestimmung der Konstanten usw. ist zu verweisen auf die genannten geodätischen Lehr- und Handbücher²²⁾.

B. Die fundamentalen Messungen.

6. Die Längenmessung. Grundlegend für alle Lagemessungen ist die „Längenmessung“. Zur unmittelbaren Längenmessung dienen hölzerne Maßstäbe (*Meßplatten*, 3, 4, 5 m lang) mit stählernen Endflächen oder Endschnitten, oder „*Stahlmeßbänder*“ oder „*Meßdrähte*“ (10, 20, 25 bis 100 m lang). Die Maßbezeichnung ist für die Latten stets die

20) Leop. N. A. 62 (1894), p. 91; Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 593, 641; 26 (1897), p. 111, 399; *G. Kummer*, ibid. 23 (1894), p. 129; 26 (1897), p. 225, 257; *C. Wagner*, ibid. 25 (1896), p. 449.

21) *S. Stampfer*, Jahrbücher des k. k. polytechn. Inst. Wien 18 (1834), p. 211.

22) Als älteres Werk ist hinzuzufügen: *G. Chr. K. Hunäus*, Die geometrischen Instrumente, Hannover 1864. Ferner sei hingewiesen auf *Chr. A. Vogler*, Abbildungen geodätischer Instrumente, Berlin 1892; *W. F. Stanley*, Surveying and levelling instruments, London 1895; *M. d'Ocagne*, Les instruments de précision en France, Paris 1904, p. 21—31.

der Endmaße, sodaß die Mittellinie zwischen den Endflächen oder Endschneiden den Maßwert angibt; Meßbänder sind entweder als Endmaße (Meßbandstabmittellinie) oder als Strichmaße (Anlegemarken) aufzufassen. Die Unterteilung erfolgt in m, dm, cm. Die früher sehr gebräuchliche „*Meßkette*“ (Gliederkette aus Draht) findet wegen der Veränderlichkeit der Glieder bei exakten Arbeiten keine Verwendung mehr; der „*Feldzirkel*“, ein Stab mit rechtwinklig zu seiner Längsachse angebrachten Endspitzen, sowie das „*Meßrad*“ mit Zählwerk (Hodometer) kommen nur für vereinzelte Fälle in Betracht. Der Maßwert²³⁾ der Stäbe und Bänder wird durch „*Maßvergleichung*“ mit Normalmaßen (Kontrollnormalen) bestimmt; es ist leicht, die Vergleichung auf 0,1 mm genau auszuführen. Nach vielseitigen Erfahrungen und Untersuchungen²⁴⁾ ist die Längenänderung von Holzmaßstäben abhängig von Luftfeuchtigkeit und Temperatur derart, daß für einen Stab von 1 m Länge die Längenänderungen 0,3 mm betragen können. Da bei langen Stahlbändern und Meßdrähten die Länge von der Spannung stark abhängig ist, werden für feinere Meßbandmessungen bei Vergleichung und Messung Spannungsmesser (Ferdynamometer) eingeschaltet, um eine konstante Spannung zu erzielen.

Die Ausführung der Längenmessung erfordert: 1) Ausrichten der lotrechten Richtungsebene („*Linie*“) zwischen den Punkten, deren „*Entfernung*“ zu bestimmen ist; zur Bezeichnung dienen Absteckstäbe, Pfähle usw., in besonderen Fällen auch ausgespannte Schnüre. Die Aussteckung geschieht mit freiem Auge, oder mit einem Handfernrohr oder mit dem Theodolit (Abloter, Alignementsfernrohr). 2) Einrichten der einzelnen Meßlage (Meßstab, Meßband) in die ausgesteckte Richtungsebene. 3) Einrichten der einzelnen Meßlage innerhalb der Richtungsebene in vertikalem Sinne, entweder a) horizontal, oder b) geneigt, mit Ableitung der Reduktion auf horizontale Lage; die Einrichtung in die horizontale Lage geschieht entweder durch einfache Schätzung (nach Lotschnur oder Lotstab) oder mit Hilfe der Setzlibelle (Setzwage); zur Reduktion der geneigten Lage auf die horizontale wird entweder die Neigung mit der Libelle (Lattenreduktor) gemessen, oder der Vertikalwinkel parallel zur Meßlage (gleich lange Zielstäbe) mit einem Freihandhöheninstrument (Pendel- oder Libellenhöhenkreis) genommen, oder auch der Höhenunterschied h zwischen Anfangs- und

23) Vgl. V 1 (C. Runge), p. 12.

24) R. Hildebrand, Ann. Phys. Chem. 34 (1888), p. 361; H. Stadthagen, ibid. 61 (1897) p. 208; Ch. Lallemand, Verhandlgn. der 12. Konf. d. Intern. Erdmessung, Berlin 1899, Beilage C. I, p. 525 (Bericht über die Untersuchungen von C. M. Goulier).

Endpunkt der Meßlage benutzt (vgl. Abschnitt Höhenmessung). Die horizontale Lage ist danach $s_0 = s_n \cos \alpha$, oder bei Verwendung des Höhenunterschiedes

$$s_0 = \sqrt{s_n^2 - h^2} = s_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{s_n} \dots$$

Zur Ableitung der Reduktion dienen Tabellen und anderweitige Hilfsmittel. 4) Aneinanderreihung der einzelnen Meßlagen; bei unebenem Gelände und horizontaler Meßlage, der sog. „Staffelmessung“, geschieht die Aneinanderreihung durch Ablotung mit Fadenlot oder Lotstab und Libellenstab. Die „Entfernung“ zweier Punkte ergibt sich demnach durch dies Meßverfahren als die Summe der Projektionen der einzelnen Meßlagen im Messungshorizont. Um die Entfernung s aus dem Messungshorizont auf die Vermessungsfläche (Landeshorizont) zu projizieren, ist die Reduktion

$$s \left(\frac{H}{R} - \frac{H^2}{R^2} \dots \right)$$

anzubringen, wo H die Höhe des Messungshorizonts und R den Erdradius bedeutet. In der niederen Geodäsie ist diese Reduktion meistens zu vernachlässigen.

Die bei der Längenmessung entstehenden Fehler sind ihrer Natur nach teils regelmäßige, welche proportional der durchmessenen Länge fortschreiten, teils unregelmäßige, welche mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Meßlagen wachsen. Zu den ersteren gehört die Ausweichung der Meßstangen in horizontalem und vertikalem Sinne, die Durchbiegung und bei absoluten Messungen der Fehler des Maßstabs. Man hat die Abhängigkeit des Fehlers von der Länge in verschiedener Form zum Ausdruck gebracht²⁵⁾. Wenn f der regelmäßige, u der unregelmäßige Fehler ist, so hat man 1) $\sqrt{f^2 s^2 + u^2 s}$, oder je nach dem Vorherrschen der einen oder anderen Fehlerart 2) fs (prozentualer Fehler), 3) $u\sqrt{s}$ (sog. Quadratwurzelgesetz); unter Hinzunahme des Ablesefehlers a (Abrundung, Punktbezeichnung) wird die Beziehung 1) zu 1a) $\sqrt{a^2 + f^2 s^2 + u^2 s}$; man hat auch angewendet $a + fs + u\sqrt{s}$ und $a + fs$. Als Ausdruck der praktisch als erreichbar angenommenen Genauigkeit seien einige in verschiedener Form ausgesprochene „Fehlergrenzen“ der amtlichen Vermessungsanweisungen (Maximalabweichung zwischen Messungen, deren Betrag etwa dem 3- bis 4fachen mittleren Fehler entspricht) für Feldmessungen in günstigem Gelände angeführt: Preußen $0,01\sqrt{4s} + 0,005 \cdot s^2$, Württemberg $0,01\sqrt{s} + 0,0005 \cdot s$, Elsaß-Lothringen

25) W. Jordan, Handbuch 2, § 19.

$0,006\sqrt{s} + 0,00040 \cdot s + 0,05$, Österreich $0,005\sqrt{s} + 0,00015s + 0,015$, wobei s in Metern zu rechnen ist. Als zulässige relative Abweichung wird etwa $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2000}$ genommen. Eine neuere Untersuchung über die Fehler der Längenmessung gibt *Reinhertz*²⁶). Bei Messung auf besonders hergerichteten Unterlagen (Eisenbahnschienen usw.) ist eine erheblich höhere Genauigkeit zu erzielen; während z. B. bei Messung kurzer Linien (einige 100 m) auf ebenen Straßen die zwischen verschiedenen Messungen derselben Linie auftretenden Abweichungen leicht innerhalb weniger cm zu halten sind, ist das bei Messung auf Schienen oder längs gespannter Schnüre für Strecken von 1000 m möglich ($\frac{1}{50000}$ bis $\frac{1}{100000}$ ist unter besonderen Umständen erreichbar). Genauigkeit ($\frac{1}{200000}$ und mehr) und Schnelligkeit vereinigt das Messungsverfahren von *Jüderin* mit Metalldrähten, dem neuerdings durch Benutzung eines gegen Temperaturänderungen fast unempfindlichen Nickelstahls (Invar) als Drahtmaterial eine besonders praktische Form gegeben ist. Die exaktesten Bestimmungen geben die zur Beschaffung der fundamentalen Längen der Triangulation dienenden Basisapparate (vgl. VI 1, 3).

7. Die Winkelmessung.

7 a. **Der Theodolit.** Das Hauptwinkelmeßinstrument der Geodäsie ist der *Theodolit*. Über Geschichte und Etymologie vgl. *R. Wolf*²⁷) sowie die Handbücher von *Chr. Vogler* und *Jordan*²⁸) mit weiteren Literaturangaben. Der Grundgedanke des Instrumentes, welches meistens Horizontal- und Vertikalwinkel gleichzeitig, aber unabhängig voneinander zu bestimmen gestattet, läßt sich zurückverfolgen bis zur Blütezeit der Araber im 8. Jahrhundert; aber das im 15. bis 17. Jahrhundert oft in großen Dimensionen hergestellte Instrument ist erst in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts zuerst durch englische Mechaniker zum transportablen und exakten geodätischen Instrument ausgebildet worden und seit Beginn des 19. Jahrhunderts zur allgemeinen Anwendung gelangt, indem die Kreisscheibeninstrumente (Astrolabien) sowie die Positionswinkelinstrumente (vgl. p. 11) einschließlich der Reflexionsinstrumente (Sextant usw.) aus der Feldmessung verdrängt wurden.

Das Konstruktionsprinzip des Instrumentes ist unmittelbar in dem p. 11 angegebenen Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche

26) Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 7; 32 (1903), p. 176.

27) Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892, p. 48.

28) *Vogler*, Prakt. Geom. 1, p. 126 u. 361 (zur Etymologie); *Jordan*, Handbuch 2, p. 203.

enthalten, wonach die Richtungswinkel bestimmt werden durch Drehung um die Vertikale des Messungspunktes, sodaß der Theodolit als Polarkoordinateninstrument bezeichnet werden kann. Hauptachse ist die auf dem „Dreifuß“ aufgestellte „Vertikalachse“ (stehende Achse), welche mittels der Fußschrauben nach einer Libelle (p. 17) lotrecht gerichtet wird. Die vom Oberbau getragene „Horizontalachse“ („Kippachse“, liegende Achse) liefert mit der rechtwinklig mit ihr verbundenen Ziellinie des „Meßfernrohrs“ (p. 18) die in den lotrechten Richtungsebenen wirkende Projektionsvorrichtung. Diese mit Hinzunahme der Ablesezeiger wird als „Alhidade“ bezeichnet. Zur Nivelierung der „Horizontalachse“ dient die Horizontalachsenlibelle oder auch die Vertikalachsenlibelle, wobei dann Prüfung auf richtige Ablotung in den Richtungsebenen erforderlich wird (Prüfung durch Projektion in zwei um 180° abstehenden Lagen der Kippachse, Durchschlagen, mit künstlichem Horizont usw.). Für das Achsensystem des Instrumentes ergibt sich demnach als Bedingung: Hauptachse vertikal, Kippachse horizontal, Zielachse des Meßfernrohrs rechtwinklig zur Kippachse (sog. Kollimation). Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so entstehen Projektionsfehler; die Abweichungen der Kippachse und der Zielachse erscheinen in doppeltem Betrage bei Einstellung eines Punktes in „zwei Lagen des Fernrohrs“, welche durch „Durchschlagen“ bezw. „Umlegen“ des Fernrohrs um die Kippachse und Drehung um die Vertikalachse um 180° hergestellt werden. Auf diese Weise können die Fehler erkannt, „berichtigt“ oder durch Messung in zwei Fernrohrlagen und Mittelbildung im Resultate beseitigt werden. Wegen der Ausführung der Prüfung und Berichtigung ist auf die in der Literaturübersicht genannten Handbücher zu verweisen. Wird der Zielachsenfehler (Kollimationsfehler) mit c , der Horizontalachsenfehler mit i , der Vertikalachsenfehler mit v bezeichnet, so sind für eine Ziellinie mit dem Höhenwinkel h die einzelnen Reduktionen $\frac{c}{\cos h}$; $i \operatorname{tg} h$; $i_v \operatorname{tg} h$, worin i_v die durch v erzeugte Horizontalachsenabweichung bedeutet. In der niederen Geodäsie wird von der Reduktion nach diesen Formeln kein Gebrauch gemacht, sondern das Instrument „berichtigt“ oder die Fehler durch „Durchschlagen“ des Fernrohrs eliminiert, nur in Ausnahmefällen kommt eine Bestimmung in Betracht, wobei dann für sehr steile Zielungen i durch eine Horizontalachsenlibelle für jede einzelne Richtung besonders zu bestimmen ist.

Der Durchmesser der Horizontalkreise (Limbus) beträgt je nach dem Zweck des Instrumentes etwa 10—26 cm (4—10 Zoll). Die Kreisteilung ist entweder die 360° -Teilung (sog. alte Teilung) oder 400° -

Teilung (sog. neue Teilung). Die für die trigonometrischen Rechnungen bequemere 400^e-Teilung hat neben der alten Teilung nach und nach an Boden gewonnen. Der Umstand, daß bei den die Grundlagen liefernden Messungen der höheren Geodäsie die „alte Teilung“ beibehalten wird, steht der Verallgemeinerung der „neuen Teilung“ entgegen. Da in der niederen Geodäsie die Winkelmessung lediglich zur Vermittlung der Kenntnis linearer Größen dient, und die gemessenen Winkel oder Richtungen nicht als ein selbständiges Ergebnis wie die Winkelkoordinaten (Polhöhe, Länge) der höheren Geodäsie und Astronomie (Nautik) zu betrachten sind, und weiterhin die Anwendung der einen oder andern Teilung nichts an Prinzip und Genauigkeit der Messungen ändert, so kann die Festsetzung der Teilungsart als eine besondere Frage der Rechentechnik behandelt werden. Bei den preußischen Katastervermessungen²⁹⁾ z. B. sind (bei Vorherrschen der alten Teilung) beide Teilungsarten nebeneinander zulässig. (Bei den Zahlenangaben dieses Referates ist nur 360^o-Teilung angewendet.) Der Kreis wird je nach dem Durchmesser in $\frac{1}{1}^0$, $\frac{1}{2}^0$, $\frac{1}{3}^0$, $\frac{1}{6}^0$ ³⁰⁾ geteilt und entsprechend der allgemeinen Richtungszählung (vgl. p. 11) rechtsläufig (Uhrzeigerbewegung) beziffert. Zur Ablesung dient: Nonius³¹⁾, Skalen- und Schraubenmikroskop, welche von der *Alhidade* getragen werden. Als *Nonius* kommt zur Erlangung gleichlaufender Bezifferung für Kreisteilung und Nonien lediglich der sog. „nachtragende“ in Betracht. Ist T ein Kreisteil, N ein Nonienteil, so ist die Angabe A des Nonius: $A = T - N = \frac{T}{n}$, wo n die Anzahl der Nonienteile (bei den angegebenen Kreisteilungen meistens 20, 30 oder 60) bedeutet. Gebräuchliche Anordnungen sind z. B. $T = \frac{1}{2}^0$, $n = 30$ oder 60, also $A = 1'$ oder $\frac{1}{2}'$; $T = \frac{1}{3}^0$, $n = 60$, $A = \frac{1}{3}'$. Das *Skalenmikroskop* gibt durch eine in der Bildebene den Bildern der Kreisteile genau entsprechende auf Glas geätzte Feinteilung unmittelbar eine weitere Einteilung in z. B. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$. Bei Kreisteilung in $\frac{1}{6}^0$ wird neuerdings meistens das *Schraubenmikroskop* angewendet. Zur Elimination der „Alhidadenexzentrizität“ werden stets zwei diametrale Ablesezeiger verwendet. Weiteres über die Anordnung, Prüfung und Berichtigung der Ablesehilfsmittel, Bestimmung der Exzentrizitäts- und Kreisteilungsfehler geben die genannten Handbücher³²⁾.

29) Anweisung IX.

30) Für 400^e-Teilung kommt in Betracht $\frac{1}{1}^e$, $\frac{1}{2}^e$, $\frac{1}{5}^e$.

31) Als historische Notiz sei angeführt: R. Wolf, Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892, p. 33.

32) Jordan, Handbuch 2, §§ 54—62; 3, p. 43.

7 b. Horizontalwinkelmessung. Die Horizontalwinkel werden am Horizontalkreis abgelesen. Die in rechtläufigem (Uhrzeiger-) Sinne nacheinander erfolgende Einstellung von Objekten $P_1 P_2$ bzw. $P_1 P_2 \dots P_n$ bei Winkel- bzw. Richtungsmessung (vgl. p. 11) ergibt in einer Fernrohrlage (I) die Richtungswerte $r_1' r_2'$ bzw. $r_1' r_2' \dots r_n'$ je als Mittel aus beiden Zeigerablesungen, bei den (in der Regel in umgekehrter Reihenfolge vorgenommenen) Einstellungen in Fernrohrlage (II) $r_1'' r_2''$ bzw. $r_1'' r_2'' \dots r_n''$, und als Mittel hieraus die von den erwähnten Achsen- und Exzentrizitätsfehlern befreiten Ergebnisse $r_1 r_2$ bzw. $r_1 r_2 \dots r_n$. Eine solche Richtungsreihe bezeichnet man als „Satz“ (Gyrus). Bei Wiederholung der Messung wird zur Herabminderung des Einflusses der Kreisteilungsfehler bei Ablesung an zwei diametralen Zeigern in mehreren um $\frac{360^\circ}{2s}$ voneinander abstehenden Kreisstellungen gemessen ($s =$ Anzahl der Sätze). Um die Richtungswerte verschiedener Kreislagen in einfacher Weise, zunächst für die Mittelbildung, vergleichbar zu machen, werden dieselben auf irgend eine Richtung (Anfangs-, Nullrichtung) bezogen, z. B. $r_1 - r_1 = 0 = \varrho_1$; $r_2 - r_1 = \varrho_2$; \dots $r_n - r_1 = \varrho_n$. Da nun bei den Theodolitmessungen der niederen Geodäsie grundsätzlich mit (in Bezug auf Achsen-, ev. Mikroskopfehler) „berichtigtem“ Instrument gearbeitet wird, und die übrigen Fehler oder Fehlerreste durch Beobachtung in zwei Fernrohrlagen, mit Ablesung an zwei diametralen Zeigern und in symmetrisch über den Kreis verteilten Lagen, möglichst eliminiert werden, so findet eine Korrektur der einzelnen Ablesungen nach Teilungs-, Mikroskopfehlern usw. in der Regel nicht statt. Bei den Genauigkeitsvergleichen wird als Beobachtung vom Gewicht 1 (*Gewichtseinheit* p. 14) in der Regel eine in „beiden Fernrohrlagen“ in der angegebenen Weise gemessene „Richtung“ genommen. Der mittlere Fehler derselben ist bei den für die verschiedensten Zwecke konstruierten kleinen oder größeren Instrumenten verschieden; für Nonientheodolite kleinster Konstruktion kann etwa angenommen werden $\pm 15''$, für größere Mikroskoptheodolite kann er bis unter $\pm 1''$ herabgebracht werden, für Instrumente mittlerer Größe (13—15 cm Durchmesser) beträgt er, je nachdem Mikroskop- oder Nonienablesung angebracht ist, etwa $\pm 2''$ bis $\pm 6''$. Die einfachste Ableitung des mittleren Messungsfehlers für Richtungsmessungen ergibt sich aus einer Anzahl gleichartiger Satzbeobachtungen auf Grund des arithmetischen Mittels nach $m_r = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(r-1)(s-1)}}$, wenn v die „zufällige“ Abweichung gegen das arithmetische Mittel, r die Anzahl der Richtungen und s die Anzahl der Sätze bezeichnet. Die Beziehung zwischen Richtungs- und Winkelfehler ist $m_w = \pm m_r \sqrt{2}$.

Wird der Theodolit mit einem doppelten Achsensystem versehen derart, daß z. B. die Alhidadenachse in der Kreisachse und diese wieder im Unterbau drehbar und feinstellbar ist, so kann durch abwechselnde Drehung um diese Achsen eine mechanische Addition eines Winkels vorgenommen werden. Ist die Ablesung in der Anfangslage beim Zielpunkt links r_a , in der Endlage nach n Additionen r_e , so ist $w = \frac{1}{n}(r_e - r_a)$.

Zur Elimination der Achsenfehler wird die Hälfte der Repetitionen in der zweiten Fernrohrlage ausgeführt. Näheres über die Anordnung des Achsensystems und die Ausführung der Messungen geben die geodätischen Handbücher. Diese Methode (zuerst Multiplikation, später *Repetition der Winkel* genannt) wurde von *Tobias Mayer* 1752 begründet und galt wegen der Herabminderung der Teilungs- und Ablesefehler lange Zeit als maßgebende Winkelmessungsmethode (z. B. wurde sie auch von *Gauß* bei seiner Gradmessung angewendet), bis sie zu gunsten der zuerst von *F. G. W. Struve* und *F. W. Bessel* ausgebildeten satzweisen Richtungsmessungsmethode mehr und mehr verlassen wurde³³). Zurzeit ist das Doppelachsensystem nur noch für kleinere und mittlere Instrumente in Benutzung und teilweise unentbehrlich. Für Präzisionsinstrumente wird (bei durchweg guter Kreisteilung) das Repetitionsachsensystem nicht mehr verwandt, weil bei der Repetition systematische, im Achsengang begründete, mechanische Einwirkungen auftreten, welche schon *Gauß'* Bedenken erregten. Wird von diesen letzteren abgesehen, so ist die Fehlerbeziehung für einen n -fach repetierten Winkel $\pm \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n})}$, gegenüber der n -maligen Satz-messung $\pm \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \beta^2)}$, wenn α bzw. β die unabhängigen Ziel- bzw. Ablesefehler bedeuten³³).

7c. Vertikalwinkelmessung. Der Vertikalkreis ist zentrisch auf der Kippachse des Fernrohrs angebracht, entweder fest oder auch zur Elimination von Teilungsfehlern drehbar. Erforderlich ist eine Vertikalkreislibelle parallel zur Kreisebene, entweder in fester Verbindung mit der Hauptvertikalachse oder auf der Vertikalkreisalhidade, durch welche für jede Höhenrichtung dem Zeiger eine konstante Stellung erteilt werden kann; die Messung der einzelnen Höhenrichtungen ist also voneinander unabhängig und gegründet auf die Nivellierung des

³³) *Jordan*, Handbuch 2, § 63; 3, p. 41; *G. Friebe*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 333; *Nippa*, ibid. 25 (1896), p. 675. Das Mitschleppen des Kreises wird durch Messen von links nach rechts und dann von rechts nach links zum Teil eliminiert.

Zeigers. Die Bezifferung des Kreises ist verschieden, entweder durchlaufend oder mit beliebiger Nullpunktlage, oder nach Zenitwinkeln oder Höhen- bzw. Tiefenwinkeln, sodaß bei wagerechter Zielung die Ablesung 90° bzw. 0° sich ergeben soll. Bei der Messung ist demnach bei scharf einspielender Vertikalkreislibelle der Horizontalfaden auf den Zielpunkt einzustellen, oder bei eingestelltem Zielpunkt die Vertikalkreislibelle abzulesen und danach die Höhenrichtung zu reduzieren.

An einem Instrument mit festem Kreis soll bei einspielender Libelle bei genau horizontaler bzw. vertikaler Ziellinie die Ablesung 0° bzw. 90° (je nach der Bezifferung) sein; die Abweichung davon ist der „*Indexfehler*“, welcher bei Messung einer Höhenrichtung in „beiden Fernrohrlagen“ (Kreis links und rechts) in doppeltem Betrage sich in den Ablesungen zu erkennen gibt, im Mittel beider Fernrohrlagen eliminiert ist, oder auch an Fadenkreuz, Libelle (ev. auch an jedem Zeiger je für sich) korrigiert werden kann. Der Betrag des Indexfehlers ist abhängig von der gegenseitigen Stellung von Kreisnullinie, Ziellinie, Zeiger und Libellenachse und muß für zwei zusammengehörige Messungen in beiden Fernrohrlagen konstant sein. Bei der Anwendung auf trigonometrische Höhenmessungen kommt wohl zur Herabminderung der Kreisteilungsfehler Beobachtung in mehreren Kreisstellungen in Betracht, was bei Feinmessung stets der Fall ist; in den meisten Fällen wird aber in der niederen Geodäsie mit festem Höhenkreis in einer Kreisstellung gemessen. Bei im übrigen gut berichtigtem Instrument wird der Einfluß eines etwa noch vorhandenen Kippachsenfehlers für die Vertikalwinkelmessung ebenso wie der der Fernrohrbiegung außer acht gelassen, bzw. durch Beobachtung in beiden Fernrohrlagen als eliminiert angesehen. Der mittlere Fehler einer Vertikalwinkelmessung entspricht im allgemeinen in rein instrumenteller Hinsicht der einer Horizontalwinkelmessung mit gleicher Ablesungsgenauigkeit unter Hinzunahme des Libelleneinstellungs- bzw. Ablesungsfehlers; bei der Anwendung tritt aber hinzu der Einfluß der Refraktionsunsicherheit (vgl. p. 79).

C. Die Lagemessungen.

8. Die Koordinatensysteme der Lagemessungen.

8a. Allgemeines über die geodätischen Koordinatensysteme. Die rechnerisch erlangten Ergebnisse geodätischer Punktbestimmungen werden zahlenmäßig ausgedrückt durch die auf die mathematische Erdoberfläche (Normalnullfläche) bezogenen Koordinaten. Als Ausdruck für

die gegenseitige Lage von Punkten der Erdoberfläche bieten sich zunächst Polarkoordinaten dar, d. i. die „Entfernung“ s zweier Punkte und der „Richtungswinkel“ r , den diese Linie (Vertikalebene) mit einer bestimmten der Zählung als Ausgang dienenden Richtung (z. B. der Nullstrichrichtung eines Kreises) einschließt. Die Polarkoordinaten s und r , welche das unmittelbare Ergebnis der Längen- und Richtungsmessungen darstellen, werden dementsprechend allgemein nur als Ausdruck für die gegenseitige Lage benachbarter Punkte verwendet, nicht aber zur Lagebestimmung beliebig gelegener, zahlreicher Punkte gegen einen einzigen Ausgangspunkt (Pol). Wenn zahlreiche Punktbestimmungen auf große Stücke der Erdoberfläche (ganze Länder, Landesvermessung) ausgedehnt werden, so werden die Punktorte in „geographischen Koordinaten“ (Breite oder Polhöhe φ und Länge λ) ausgedrückt, ebenso wie bei den auf astronomischem Wege ausgeführten „Ortsbestimmungen“. Diese „geodätischen Koordinaten“ φ , λ werden aus der Triangulierung durch Vermittlung der Polarkoordinaten s , r , bezogen auf einen astronomisch orientierten Ausgangspunkt, unter Zugrundelegung der ellipsoidischen Erdfigur berechnet. (Vgl. VI 1, 3.)

Während nun für die einheitliche Darstellung der Ergebnisse einer sich über ein großes Stück des Erdellipsoides erstreckenden Triangulierung („Landestriangulierung“) und die als Gradabteilungskarten behandelten topographischen Kartenwerke jene „ellipsoidischen Winkelkoordinaten“ φ , λ unmittelbar gebraucht werden, sind dieselben nicht geeignet für die Spezialvermessungen, die Linien- und Winkelmessungen rechnerisch verbinden, z. B. die staatlichen Katastervermessungen. Für die übersichtliche Darstellung der Ergebnisse dieser Spezialvermessungen (Kleintriangulierung, Polygonisierung und Einzelaufnahme, vgl. die Nrn. 9—13) muß die Beziehung zwischen den unmittelbaren Messungen und dem Ausdruck für die Punktorte (Koordinaten), d. h. also das anzuwendende Rechnungsverfahren einfacher sein, als es das die Punktorte in Bezug auf die Erdachse angehende System der sog. geographischen Koordinaten gestattet. Dies wird erreicht durch „Linearkoordinatensysteme“, welche gewonnen werden durch zwei auf der „mathematischen Erdoberfläche“ sich rechtwinklig schneidende Richtungslinien, „geodätische rechtwinklige Koordinaten“. Bei Voraussetzung einer ebenen Vermessungsfläche entsprechen dieselben unmittelbar den ebenen rechtwinkligen Koordinaten y , x der analytischen Geometrie, bei Rücksichtnahme auf die Krümmung der mathematischen Erdoberfläche ergeben sich daraus die rechtwinkligen „sphärischen“, bzw. „ellipsoidischen“ Linearkoordinaten. Die

Theorie der „ellipsoidischen Linearkoordinaten“ gehört zur „höheren Geodäsie“, VI 1, 3.

8b. Rechtwinklige ebene Koordinaten. Im Vermessungswesen muß, um bei den umfangreichen Zahlenrechnungen ein eindeutiges Formelsystem zu erhalten, wenigstens für ein zusammenhängendes Vermessungswerk (Landesvermessung) eine bestimmte Richtungszählung ein für allemal festgestellt und innegehalten werden. Vollständige Übereinstimmung besteht nicht; auf Grund der wichtigsten Vermessungsanweisungen und Lehrbücher (p. 5, 6) kann jedoch als maßgebend angenommen werden, daß in der niederen Geodäsie die Zählung von $+x$ über $+y$ im Sinne

der Uhrzeigerbewegung durchlaufend in Übereinstimmung mit der Bezifferung des Horizontalkreises des Theodolits erfolgt (Fig. 1), womit also die Quadranten-zählung (I. Quadrant zwischen $+x$ und $+y$ usw.) gegeben und bestimmt ist, daß von $+x$ aus die „Richtungen“ von 0° bis 360° durchgezählt werden. Die an sich willkürliche Auswahl

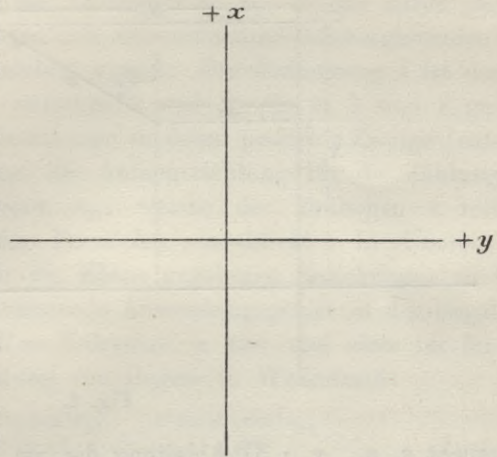


Fig. 1.

der „Haupttrichtachse“ X wird bei vereinzelt, unabhängigen Kleinaufnahmen in passender Weise, z. B. zusammenfallend mit einer Hauptmessungslinie, einer Dreiecks- oder Polygonseite, angeordnet, etwa so, daß alle Punkte des begrenzten Vermessungskomplexes in den I. Quadranten fallen. Zuweilen werden auch die Koordinaten dadurch orientiert, daß der „magnetische Meridian“ des Aufnahmegebietes die X -Achse bestimmt (mit oder ohne Berücksichtigung der magnetischen Deklination), oder daß grobe astronomische Orientierung (korrespondierende Sonnenhöhen usw.) vorgenommen wird. Erhält eine solche für sich selbständig ausgeführte Vermessung nachträglich Anschluß an ein bestehendes oder neugewonnenes Vermessungssystem, oder wird sie von vornherein auf Grund von bereits in einem gegebenen Koordinatensystem vorliegenden Punktbestimmungen ausgeführt, so ergeben diese übergeordneten Systeme die Orientierung für die Neuaufnahmen. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten y, x und den zugehörigen (gemessenen oder zu messenden) Polarkoordinaten Entfernung s , System-

oder Netzrichtungswinkel (Direktionswinkel)³⁴⁾ n sind die folgenden (Fig. 2):

$$y_2 - y_1 = \Delta y_{12} = s \sin n_{12}, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_{12} = s \cos n_{12};$$

$$s = \sqrt{\Delta y_{12}^2 + \Delta x_{12}^2}; \quad n_{12} = \arctg \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x_{12}}; \quad n_{21} = n_{12} \pm 180^\circ.$$

Die in Betracht kommenden Aufgaben sind also: 1) Gegeben y_1, x_1 ; gemessen s_1, n_{12} ; gesucht y_2, x_2 ; 2) Umkehrung: gegeben y_1, x_1, y_2, x_2 ;

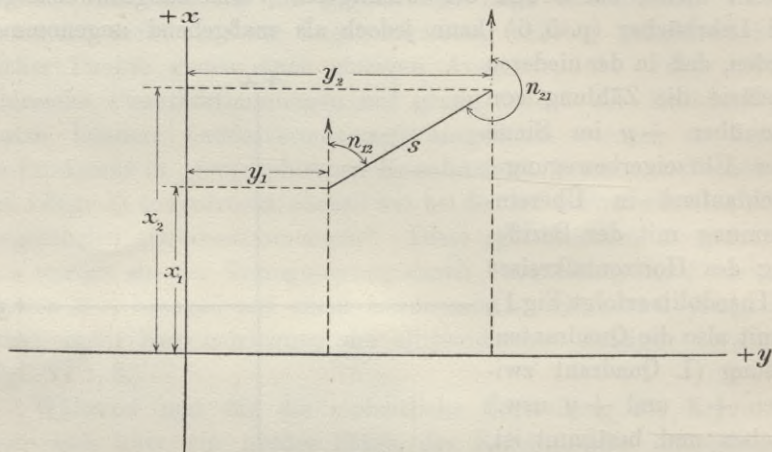


Fig. 2.

gesucht s, n_{12}, n_{21} ; 3) Ableitung der im Koordinatensystem „orientierten Richtungen“ (Netzrichtungen) n_{1n} aus den unmittelbar beobachteten Kreisablesungen am Theodoliten, den gemessenen Richtungen r oder Winkeln w . Es ist $r_{1n} + o = n_{1n}$, wozu die „Orientierung“ o zu ermitteln ist, und mindestens eine Richtung bereits orientiert sein muß, z. B. $n_{12} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $o = n_{12} - r_{12}$. Liegen mehrere Richtungen zur Orientierung vor,³⁵⁾so entsteht eine Ausgleichungsaufgabe (vgl. p. 48). Liegt nur ein Winkel w vor, so ist z. B. $w = r_{13} - r_{12} = n_{13} - n_{12}$, womit der Winkel aus beiden Netzrichtungen, oder die eine Richtung aus der andern durch den Winkel bestimmt ist.

8c. Rechtwinklige sphärische Linearkoordinaten. Wenn Vermessungen größere Ausdehnung annehmen, so tritt (wie früher angegeben) zunächst an Stelle der „ebenen“ die „kugelförmige“ Vermessungsfläche; das „ebene Koordinatensystem“ erweitert sich zum „sphärischen“. Als

34) Für den Richtungswinkel ist bei dem preußischen Kataster die Bezeichnung *Neigung* üblich. Der auch zuweilen gebrauchte Ausdruck *Azimut* bleibt besser dem *astronomischen Azimut* vorbehalten. Andere Namen sind Bestimmungswinkel und Südwinkel. Vgl. *Hammer*, Trigonometrie, Anmerk. 67, p. 559.

Haupttrichtachse (X -Achse) dient der Meridian des passend gewählten „Koordinatennullpunktes“, womit die Orientierung des Punktsystemes gewonnen ist. Diese Orientierung erfolgt wieder aus etwa vorhandenen Bestimmungen (Koordinaten y_n, x_n) oder kann direkt nach irgend einer Methode der astronomischen Azimutbestimmung vorgenommen werden (z. B. Winkelmessung zwischen Polarstern und einer geodätischen Richtung). Entsprechend den Bezeichnungen für das ebene System sind nun die „Abszissen“ der Punkte 1 und 2 die Meridianbögen x_1 und x_2 des Nullpunktmeridians, gerechnet vom eingeführten Nullpunkt bis zum „Fußpunkt“ der Ordinaten y_1, y_2 , welche durch die rechtwinklig zu ihm stehenden (im Querschnittspol konvergierenden) „Querschnittbögen“ y_1, y_2 gebildet werden. Die Entfernung s ist der Erdbogen (Großkreisbogen) zwischen 1 und 2; die in 1 und 2 gelegten „Meridianparallelen“ bestimmen in ihrem positiven Zweige (entsprechend der $+X$ -Richtung) die Anfangsrichtung für die Zählung der „Richtungswinkel“ n_{12} bzw. n_{21} , welche der Erdbogen s mit diesen positiven Zweigen der Parallelen einschließt. In Übereinstimmung mit den oben für die Ebene gegebenen Beziehungen sind nun die für das in Frage kommende Anwendungsgebiet in der Regel hinreichenden Formeln³⁵⁾ (R = Erdradius, ϱ hier und stets im folgenden Faktor zur Verwandlung von Bogen- in Winkelmaß)

$$y_2 - y_1 = s \sin n_{12} - \frac{s^2 y_1 \cos^2 n_{12}}{2 R^2} - \frac{s^3 \sin n_{12} \cos^3 n_{12}}{6 R^2} \dots$$

$$x_2 - x_1 = s \cos n_{12} + \frac{s y_2^2 \cos n_{12}}{2 R^2} - \frac{s^3 \sin^2 n_{12} \cos n_{12}}{6 R^2} \dots$$

$$s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 R^2} \cos^2 n_{12} \right) \dots$$

$$n_{12} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{\varrho}{6 R^2} (2 y_1 + y_2) (x_2 - x_1)$$

$$+ \frac{\varrho}{6 R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \sin n_{12} \cos n_{12} \dots$$

$$n_{21} = n_{12} \pm 180^\circ - \frac{y_1 s \cos n_{12}}{R^2} \varrho - \frac{s^2 \sin n_{12} \cos n_{12}}{2 R^2} \varrho \dots$$

Die Vergleichung mit den Formeln des ebenen Systems läßt die sphärischen Zusatzglieder erkennen, welche die Berücksichtigung der Erdkugelkrümmung im Vergleich zur ebenen Rechnung erforderlich macht. Die Entscheidung über die Vernachlässigung der sphärischen Glieder hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Punktabstände und Richtungswinkel durch die Rechnung wiedergegeben werden sollen.

35) Jordan, Handbuch 3, § 46.

Trägt man die Koordinaten (y, x) als ebene rechtwinklige Koordinaten auf, so erhält man eine Kartenprojektion (*Soldner'sche Projektion*³⁶⁾). Die Verzerrungen derselben wachsen hauptsächlich mit wachsendem y im Verhältnis $\frac{y^2}{2R^2}$, so daß ihr zu beiden Seiten des Nullmeridians bei den heutigen Anforderungen nur eine Ausdehnung von 30 bis 50 km gegeben werden kann. In der Meridianrichtung kann sie sich über mehrere Breitengrade erstrecken, wie die Rektifikation der Erdmeridianellipse zeigt.

Nehmen zusammenhängende Vermessungen so große Ausdehnungen an, wie die über das gesamte Gebiet eines Staates einheitlich sich erstreckenden „Katastervermessungen“, so tritt die Notwendigkeit hervor, einerseits möglichst einfache und bequeme Rechenmethoden beizubehalten, andererseits dafür zu sorgen, daß der Zusammenhang zwischen den der Natur der Sache nach getrennt und unabhängig voneinander vorzunehmenden Spezialvermessungen streng gewahrt bleibt, sodaß jeder Messungspunkt auf der zu Grunde gelegten mathematischen Erdoberfläche die ihm im Vergleich zu allen andern Punkten zukommende Lage erhält. Dazu ist als Grundlage erforderlich eine einheitliche Haupttriangulierung und im Anschluß an diese für große Staaten (z. B. Preußen) die Anordnung einer *Reihe von Einzelkoordinatensystemen*, die durch diese Triangulierung orientiert sind. Die durch die grundlegende Landes-*triangulierung* gelieferten ellipsoidischen Winkelkoordinaten φ, λ werden innerhalb der Einzelsysteme in ellipsoidische Linearkoordinaten y, x verwandelt, sodaß innerhalb der begrenzten Einzelsysteme je nach den Punktabständen sphärisch (mittlerer Krümmungsradius) oder eben gerechnet werden kann. Die Beziehung der Ellipsoidkoordinaten φ, λ und y, x zu einander gehört in das Gebiet der „höheren Geodäsie“. Die Anordnung der Einzelsysteme erfolgt in verschiedener Weise, entweder nach runden Werten der geographischen Koordinaten oder Verwaltungsbezirksgrenzen, wie z. B. in Preußen, wo 40 Spezialsysteme mit y bis 60 km bestehen. Anstatt einen Meridian als Hauptachse anzunehmen, kann dazu auch der Querschnittbogen des Normalpunktes genommen werden, wodurch die Bedeutung von x und y sich umkehrt. Die Methode der Punktortangabe durch rechtwinklige Koordinaten auf der gekrümmten Erdoberfläche ist aus den französischen

36) Die *Soldner'schen* Entwicklungen sind publiziert in: Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873; vgl. ferner *J. Bohnenberger*, De computandis dimensionibus trigonometricis etc., Tübingen 1826, § 15—16; *Jordan*, Handbuch 2, Kap. VII; 3, Kap. V und VII.

Messungen gegen Ende des 18. Jahrhunderts übertragen worden und dann zuerst im heutigen Sinne rationell entwickelt und zur Anwendung gekommen bei der zu Beginn des 19. Jahrhunderts in Angriff genommenen bayerischen Landesvermessung durch *Soldner*³⁶⁾. Nach dem Vorgange Bayerns sind rechtwinklige sphärische *Soldner*'sche Koordinaten fast allgemein bei den Katastervermessungen eingeführt worden. Die Formeln sind zunächst von *J. Bohmenberger* weiter entwickelt worden und in neuerer Zeit besonders durch *Jordan*³⁶⁾.

8d. Konforme rechtwinklige Gauß'sche Koordinaten. Bei der hannoverschen Landesvermessung hat *C. F. Gauß* (vgl. Werke, Bd. 9) das Prinzip der konformen Abbildung (für die Kartenprojektion schon früher verwendet) zum erstenmal auf geodätische Punktbestimmungen übertragen. Durch Einführung der Bedingung der Ähnlichkeit der von der gekrümmten Erdoberfläche (Kugel) auf eine ebene Berechnungsfläche abgebildeten unendlich kleinen Figuren ergeben sich, wenn wieder der Meridian des Nullpunktes als ebene Abszissenachse (Kartennittellinie des umhüllenden Zylindermantels) angenommen wird, die Abszissen x ebenso wie bei dem *Soldner*'schen System, die ebenen Ordinaten y dagegen erscheinen im Vergleich zu den sphärischen (natürlichen) um einen von der Größe der Ordinate und der Erdkrümmung abhängenden Betrag geändert. Die Erdbogen s bilden sich zwischen den projizierten Punkten als schwach gekrümmte Linien ab; die Richtungswinkel T der Tangenten in den Anfangspunkten der Bogen weichen nur um einen geringen Betrag von den Richtungswinkeln π der geraden Verbindungslinien ab. Bezeichnet \bar{s} die geradlinige Entfernung in der xy -Ebene und s , wie oben angegeben, die sphärische Entfernung, so gelten die Formeln³⁷⁾:

$$x = x; y = y + \frac{y^2}{6R^2}; s = \bar{s} \left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6R^2} \right) \dots$$

$$T = \pi + \frac{\rho}{4R^2} (y_1 + y_2) (x_2 - x_1) - \frac{\rho}{12R^2} (y_2 - y_1) (x_2 - x_1) \dots$$

Die Vergleichung der Zusatzglieder für die Strecken und Richtungswinkel mit denjenigen der *Soldner*'schen Rechnung zeigt, daß bei den *Gauß*'schen Koordinaten für die Strecken der Faktor $\cos^2 n$ wegfällt, d. h. entsprechend dem Prinzip der konformen Abbildung die Streckenverzerrung nach allen Richtungen dieselbe ist und gleich dem Maximalbetrag derselben bei den *Soldner*'schen Koordinaten für $n = 0$. Wird dies Zusatzglied nicht berücksichtigt, so ist die mittlere Streckenverzerrung bei den *Gauß*'schen Koordinaten größer; soll das Glied aber

37) *Jordan*, Handbuch 3, § 50.

berücksichtigt werden, so ist das wegen der Unabhängigkeit von der Richtung bei diesen einfacher als bei den *Soldner*'schen, da, sobald die Strecken oder $(y_2 - y_1)$ klein sind, das Glied örtlich konstant ist. Die Vergleichung der Zusatzglieder für die Richtungsreduktion zeigt, daß das erste Glied bei beiden Arten von Koordinaten klein ist, daß das zweite bei den *Soldner*'schen Koordinaten von y^2 abhängige Glied bei den *Gauß*'schen nicht vorkommt, während bei diesen das zweite Glied überhaupt nur sehr gering ist, d. h. bei der konformen Projektion ist die Vernachlässigung der Richtungsreduktion verhältnismäßig belanglos. Die Theorie der *Gauß*'schen Koordinaten für das Ellipsoid ist zuerst von *O. Schreiber*³⁸⁾ dargestellt, und später in die Berechnungsarbeiten der preußischen Landesaufnahme eingeführt worden. In letzter Zeit hat *Jordan*³⁹⁾ die Vorzüge der konformen Koordinaten besonders hervorgehoben und dieselben auch für die Einführung bei den Spezialvermessungen empfohlen. Das alte klassische *Gauß*'sche Koordinatensystem mit dem Nullpunkt Göttingen ist bei den preußischen Katastervermessungen aufgegeben worden. Ein konformes Koordinatensystem (Kegelprojektion) hat Mecklenburg⁴⁰⁾. Weiteres über Kartenprojektionen findet man in VI 1, 4 (*R. Bourgeois*).

8e. Koordinatentransformation. Sowohl bei Kleinmessungen, bei welchen als Richtachsen irgend welche Messungslinien gewählt wurden, als auch bei geodätischen Koordinatensystemen (hier besonders an den Systemgrenzen) tritt häufig die Aufgabe der Umwandlung von rechtwinklig ebenen Koordinaten von einem System in das andere auf. Hierbei wird statt der allgemeinen Transformationsformeln

$$\begin{aligned}y &= y_0 + \eta \cos \varepsilon + \xi \sin \varepsilon \\x &= x_0 + \xi \cos \varepsilon - \eta \sin \varepsilon\end{aligned}$$

häufig besser nach Koordinatenunterschieden von Punkt zu Punkt

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Delta \eta \cos \varepsilon + \Delta \xi \sin \varepsilon \\ \Delta x &= \Delta \xi \cos \varepsilon - \Delta \eta \sin \varepsilon\end{aligned}$$

gerechnet, wobei sich in den Abschlußkoordinaten eine Rechenprobe ergibt. Die Differenz der Systemrichtungen ε ist in der Regel aus in beiden Systemen gegebenen Koordinaten abzuleiten, sodaß auch diese Ableitungen in die Rechenformeln für die Transformation un-

38) Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866.

39) Zahlreiche Artikel in Zeitschr. für Vermessungswesen von 1894 bis 1899.

40) Großherzoglich Mecklenburgische Landesvermessung, V. Teil, Schwerin 1895; *Jordan*, Handbuch 3, p. 335.

mittelbar eingeführt werden. Sehr häufig (z. B. an den auf der mathematischen Erdoberfläche gleichartig orientierten Systemgrenzen, p. 32) sind die Richtungsabweichungen ε der Systeme sehr klein, sodaß die Koordinatenänderungen als Differentiale aufgefaßt und dementsprechend die Rechnungen vereinfacht werden können⁴¹⁾.

9. Die Punktbestimmung durch Triangulierung.

9 a. Allgemeines über Triangulierung. Die Aufgabe der Triangulierung ist, für ein im Gelände dauerhaft bezeichnetes System von Festpunkten („Dreieckspunkt“, „trigonometrischer Punkt“ oder „Station“) durch Winkelmessung mit dem Theodolit die Lage ihrer Projektionen auf die Vermessungsfläche in geodätischen Koordinaten zu bestimmen. Die Methode ist von *W. Snellius*⁴²⁾ in der Absicht ersonnen, die zeitraubende und praktisch oft nicht durchführbare direkte Messung langer Strecken zu ersetzen und ist von ihm 1610 bei der Messung eines Meridianbogens zur Ausführung gebracht. Im Gelände werden Punkte derart ausgewählt, daß ihre Verbindungslinien ein System von Dreiecken bilden. Wenn nun in diesen Dreiecken die Winkel (oder die Richtungssysteme auf den Stationspunkten) sowie für irgend eine Linie des Systemes die Länge unmittelbar gemessen werden, und weiterhin noch das Azimut irgend einer Linie oder ihr Richtungswinkel in einem zu Grunde gelegten Koordinatensystem bekannt ist, so können für sämtliche Dreieckspunkte die Koordinaten und hieraus alle etwa erforderlichen weiteren Punktabstände, Richtungen und Winkel berechnet werden. Im Rahmen der „niedereren Geodäsie“ handelt es sich hierbei stets um Punktbestimmung im rechtwinkligen Koordinatensystem mit „ebener“ oder „sphärischer“ Rechnung (vgl. p. 29), und zwar in der Regel um „Einschaltungs-Triangulierungen“ in die als gegeben betrachteten übergeordneten Punktsysteme einer Landstriangulierung. Es kommen jedoch für kleinere Gebiete auch selbständige in sich geschlossene Kleintriangulierungsnetze vor, bei denen dann entweder für eine Linie durch besondere „Basismessung“ mit Meßplatten oder Meßband (vgl. Anordnung und Genauigkeit p. 19) mit eventueller Einfügung eines „Basisnetzes“ (vgl. VI 1, 3) das Längenmaß eingeführt, oder auch

41) Weiteres hierüber sowie über die Transformation zusammenhängender trigonometrischer Netze findet man bei *Jordan*, Handbuch 2, § 68 und *F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst, Kap. V; für antike Rechnungen mit Formularen vgl. Anweisung IX.

42) *Eratosthenes Batavus*, de terrae ambitus vera quantitate, Lugduni Batavorum 1617. Historisches bei *J. D. van der Plaats*, Tijdschr. v. Kadaster en Landmeetkunde 5 (1889), p. 1 und *G. B. H. de Balbian*, *ibid.*; ferner *Jordan*, Handbuch 1, p. 453.

aus einer vorhandenen Triangulierung entnommen wird, und nur das Richtungsnetz der Neuarbeit an sich als selbständiges System aufgefaßt wird, wie das z. B. vorkommt bei Stadtvermessungen, Tunneltriangulierungen und anderen Aufgaben⁴³⁾.

Die grundlegenden Triangulierungen für die Erd- und Landesvermessung, welche sich über weite Gebiete hinziehen und Rechnung auf der ellipsoidischen Fläche erforderlich machen, rechnet man zur „höheren Geodäsie“. Man unterscheidet dementsprechend „Haupt“- „Zwischen“- und „Klein“-Triangulierung, oder Triangulierung I, II, III. und IV. (auch V.) „Ordnung“. Durch diese bei Landesvermessungen stufenweise einander untergeordneten Systeme werden die Punktabstände (Dreiecksseiten) nach und nach von etwa 50 km und mehr bis zu einigen km, und für die Spezialvermessungen bis zu 1 km, ja $\frac{1}{2}$ km herabgeführt, wobei gleichzeitig stufenweise die Messungs- und Rechnungsmethoden eine entsprechende Modifikation erfahren, und der Übergang von der ellipsoidischen Rechnung zur ebenen Rechnung der Kleinmessungssysteme vollzogen wird.

Die zunächst bei einer Triangulierung vorzunehmenden Arbeiten sind: A) „Erkundung des Netzes“, Auswahl und sachgemäße Verteilung der Punkte im Gelände; B) dauernde Bezeichnung („Vermarkung“) der Punkte, z. B. durch einen Stein mit eingemeißeltem Kreuzschnitt mit unterirdischer Versicherung durch eine ähnliche Marke; C) Sichtbarmachung („Signalisierung“) der so bezeichneten Punkte für die Winkelmessung durch lotrecht gerichtete Stangen, Signaltafeln, Signalpyramiden. Für größere Entfernungen und besondere Verhältnisse wird auch vom Heliotrop (vgl. VI 1, 3) Gebrauch gemacht. Große Bedeutung haben als Signale die Kirchtürme, deren Helmstangen-Mittellinien als Zielpunkte in ausgiebiger Weise verwendet werden.

9 b. Zentrierung. Kann der Theodolit nicht genau über einem solchen Vermarkungsstein aufgestellt werden, oder ist, wie z. B. bei Kirchtürmen, das „Zentrum der Station“ als Instrumentstandpunkt nicht zugänglich und muß auf einem „Nebenstandpunkt“ (Galerie usw.) beobachtet werden, oder ist umgekehrt ein „Nebenzielpunkt“ erforderlich, so handelt es sich um das „Zentrieren“ der Beobachtungen, d. h. Umrechnung auf zentrale Sicht. Wird das auf dem „exzentrischen Standpunkt“ S gemessene Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n auf die Zentrallinie nach dem Zentrum C als Anfangsrichtung reduziert und mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ bezeichnet, und das entsprechende auf die gleiche Anfangsrichtung bezogene gesuchte „zentrierte System“ mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, so ist

43) Beispiele und Literatur in den Handbüchern.

$\alpha_i = \varepsilon_i + \delta_i$ (Fig. 3), worin der parallaktische Winkel δ_i über der Exzentricität $e = CS$ bei bekannter bzw. vorher zu bestimmender Entfernung s_i aus dem parallaktischen Dreieck sich ergibt. Die Zentrierung für einen Winkel ergibt sich ohne weiteres aus den Richtungsreduktionen. Die durch besondere Messungen („Zentrierungsmessungen“) zu bestimmenden Werte e und ε , sowie die Entfernung s bezeichnet man als „Zentrierungselemente“. Dieselben müssen so genau ermittelt werden, daß ihre Fehler keine in Betracht kommende Erhöhung des Beobachtungsfehlers für die Richtungen herbeiführen können. Die Messung der „Zentrierungselemente“ e und ε muß häufig „indirekt“ mit besonderen Hilfskonstruktionen geschehen, wenn z. B. der Standpunkt S des Instrumentes auf der Galerie eines Kirchturmes und das Zentrum C die Helmstangenmittellinie ist. Man kann dann eine Grundlinie messen und an deren Enden die Richtungen nach C und S in bezug auf die Grundlinie (Aufgabe der unzugänglichen Entfernung, vgl. p. 43). Die Aufgabe kam schon bei *Snellius'* Triangulierung vor. Wenn irgend möglich, werden überschüssige Bestimmungen verwendet, sodaß die Zentrierung zu einer kleinen Triangulierung mit Ausgleichung wird⁴⁴).

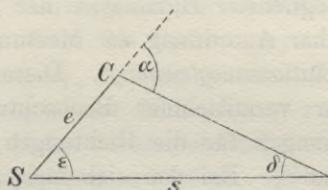


Fig. 3.

9c. Die Winkelmessungen und ihre Anordnung. Als Genauigkeitsausdruck für die Messung mit dem bei den Triangulierungen der niederen Geodäsie verwendeten Theodolit mittlerer Größe kann nach p. 25 angenommen werden (bei Anwendung der dort erwähnten fehlertilgenden Beobachtungsmethode), daß der „mittlere Richtungsfehler im Satz“ etwa zwischen den Grenzen $\pm 2''$ bis $\pm 6''$ liegt, so daß bei der Ausführung von 3 bis 6 Sätzen der Fehler des Gesamtmittels stets innerhalb weniger Sekunden zu halten ist, wobei zu berücksichtigen ist, daß äußere Fehlerquellen (Signalstellung usw.) Fehler von gleichem, ja größerem Betrage in die Bestimmungen hineinbringen. Ist z. B. ein Zielpunkt um ± 1 cm unrichtig bezeichnet oder eingestellt worden, so ist bei einer Zielweite von 1000 m die entsprechende Richtungsunsicherheit $\pm 2''$, und wenn das Instrument gleichfalls um ± 1 cm unrichtig aufgestellt (zentriert) ist, so wird daraus $\pm 2'' \sqrt{2}$. Während früher die Dreieckswinkel unabhängig je für sich gemessen wurden, wird jetzt in der Regel das für eine Punktbestimmung auf einer Station sich ergebende „Richtungssystem“ $r_1 \dots r_n$ als das ge-

44) Jordan, Handbuch 2, § 74, 75.

suchte betrachtet, auch wenn für die eigentliche Messung der „Winkel“ als das günstigste zu messende Richtungssystem verwendet wird. Der einfachste Fall liegt vor, wenn (vgl. p. 25) die satzweise Richtungsmessung in „vollständigen“ Sätzen ausführbar ist und das arithmetische Mittel sofort das Beobachtungsergebnis liefert. Nicht zu vermeidende Störungen und Hindernisse führen aber sehr häufig zur Anwendung „unvollständiger“ Sätze. Dies führt dann unter Beachtung möglicher Elimination der Teilungsfehler und möglichst systematischer Anordnung der Messungen zu einer Ausgleichungsaufgabe, sog. „Stationsausgleichung“. Diese erfolgt in der Regel nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen, wobei satzweise die Fehlergleichungen für die Richtungen und die „Orientierungen“ aufzustellen sind⁴⁵⁾. Bei den sich meist sehr verwickelt gestaltenden Richtungsnetzen der Einschaltungstriangulierungen wird dann auch mit Vorteil von einer bei der englischen Landesvermessung⁴⁶⁾ zuerst gebrauchten Näherungsausgleichung Anwendung gemacht.

Sind etwa die folgenden Sätze beobachtet:

Satz	Station				
	0	A	B	C	.
1	0	α_1	—	γ_1	⋮
2	0	α_2	β_2	γ_2	⋮
3	0	—	β_3	γ_3	⋮
4	0	α_4	—	γ_4	⋮
...	⋮
Mittel	0	α	β	γ	:

wobei angenommen ist, daß eine Station (0), auf die die übrigen bezogen werden, in allen Sätzen vorkommt, so bildet man zunächst die Mittel der Messungen für die einzelnen Stationen α , β , γ ... Dann rechnet man für jeden Satz die mittlere Abweichung gegen die Stationsmittel aus, also z. B. für Satz 1 die Abweichung $\frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1 + \gamma - \gamma_1)$ oder für Satz 2: $\frac{1}{3} (\alpha - \alpha_2 + \beta - \beta_2 + \gamma - \gamma_2)$ usw., und fügt diese Abweichung allen Ablesungen des betreffenden Satzes hinzu. Mit den

45) Vgl. die genannten Handbücher der Vermessungskunde bzw. der Ausgleichungsrechnung, z. B. Jordan, Handbuch 1, Kap. II.

46) Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858, p. 62.

verbesserten Werten wiederholt man das ganze Verfahren, bis die Verbesserungen innerhalb der Beobachtungsfehler liegen⁴⁷⁾.

Anstatt ein Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n als Ganzes zu behandeln oder in einige mehrzahlige Reihen zu zerlegen, kann bei der Beobachtung auch das kleinste Richtungssystem, d. h. der Winkel, zur Anwendung kommen, wie das bei den älteren Triangulierungen zunächst geschah und bei Anwendung des Sextanten (nautische Triangulierungen) notwendig wird. Die Zerlegung eines mehrzahligen Richtungssystems in Winkel kann in verschiedener Weise geschehen. Wird das Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n in die Winkel $w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n}$ zerlegt, so wird der Zusammenhang lediglich durch die Anfangs- oder Nullrichtung vermittelt, welche dem trigonometrischen Netze nicht notwendig anzugehören braucht. Die einzelnen Winkel können mehrfach (wie bei Richtungsmessung in verschiedenen Kreisstellungen) oder auch nach der Repetitionsmethode gemessen werden. Wird das Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n in die aufeinanderfolgenden Winkel $w_{12}, w_{23}, \dots, w_{n1}$ zerlegt, sodaß die Bedingung auftritt $\Sigma w = 360^\circ$, so hat man für die das Richtungssystem ergebende Stationsausgleichung den einfachen Fall der Verteilung eines Abschlußfehlers („Horizontsumme“). Werden die Winkel so angeordnet, daß beliebige Kombinationen gebildet und überschüssige Bestimmungen erhalten werden, so wird das Richtungssystem nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet, wobei sowohl die Rechnung nach „vermittelnden“ als nach „bedingten“ Beobachtungen erfolgen kann. Als maßgebend für die Wahl des Rechnungsverfahrens wird meistens die Zahl der aufzulösenden Normalgleichungen angesehen; hat man n Richtungen zu bestimmen und w Winkel gemessen, so sind bei „vermittelnden Beobachtungen“ w Fehlergleichungen anzusetzen und $n - 1$ unabhängige Unbekannte zu bestimmen bzw. Normalgleichungen aufzulösen, und bei „bedingten“ Beobachtungen $w - n + 1$ Bedingungsbedingungen aufzustellen bzw. Normalgleichungen aufzulösen.

Das günstigste Verfahren der Richtungsbestimmung aus Winkelmessung ist „Winkelmessung in allen Kombinationen“, welches *O. Schreiber*⁴⁸⁾ entwickelt hat. Dies zunächst für Haupttriangulierung ausgebildete Verfahren findet neuerdings auch bei Kleintriangulierungen Anwendung. Für das Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n werden durch Bildung der Kombinationen ohne Wiederholung für je zwei Richtungen

47) *Helmert*, Ausgleichungsrechnung, p. 154; *Jordan*, Handbuch 1, p. 176; z. B. amtlich angewendet in Anweisung IX.

48) *Zeitschr. f. Vermess.* 7 (1878), p. 209; 8 (1879), p. 97.

die $\frac{1}{2} n (n - 1)$ Winkel gebildet. Diese Winkel w werden, wenn das Gewicht der ausgeglichenen Richtungen gleich s (entsprechend s Richtungssätzen) sein soll, $p = \frac{2s}{n}$ mal in beiden Fernrohrlagen in $\frac{180^\circ}{p}$ von einander abstehenden Kreislagen gemessen, wobei für die einzelnen Winkel die Kreisstellungen innerhalb des Intervalles $\frac{180^\circ}{p}$ so zu bestimmen sind, daß die Richtungsablesungen symmetrisch über den Kreis verteilt werden. Dazu sind um $\frac{180^\circ}{pn}$ bzw. $\frac{180^\circ}{p(n-1)}$ von einander abstehende Kreisstellungen erforderlich, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Infolge der symmetrischen Anordnung dieses Beobachtungsverfahrens gestaltet sich die Ansetzung der Fehler- und der Normalgleichungen sowie ihre Auflösung äußerst einfach. Dieses Messungsverfahren ist ein ausgezeichnetes Beispiel für rationelle Anordnung von Messungen, um mit einem Minimum an Arbeitsaufwand bei Beobachtung und Rechnung ein Maximum an Genauigkeit zu erreichen⁴⁹⁾.

10. Die Grundaufgaben des trigonometrischen Einschneidens im rechtwinkligen Koordinatensystem.

10a. Vorwärtseinschneiden und Seitwärtseinschneiden. Der einfachste Fall liegt vor, wenn zwei Punkte A und B durch Koordinaten gegeben sind und auf A und B je eine im System „orientierte Richtung“ φ und ψ besteht, durch deren Schnitt die Koordinaten des Punktes P bestimmt werden („Vorwärtseinschneiden“). Sind im Drei-

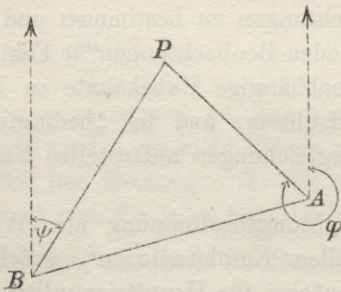


Fig. 4.

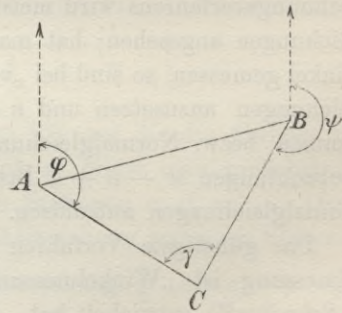


Fig. 5.

eck ABP (Fig. 4) die an der „Basis“ AB gelegenen Winkel A , B gemessen, so hat man damit sofort φ und ψ , da die Richtung AB aus den gegebenen Koordinaten von A und B zu ermitteln ist. Andern-

49) Jordan, Handbuch 1, Kap. II, IV; 3, Kap. I mit erweiterten Literaturangaben; vgl. ferner VI 1, 3.

falls ist φ und ψ aus Richtungsmessungen nach irgend welchen anderen in Koordinaten gegebenen Punkten abzuleiten, wozu die „Richtung“ (AB) nicht direkt erforderlich ist. Damit ist die Lösung gegeben, für welche, da diese Rechnungen bei Vermessungen stets wiederkehren, schematische Rechenformulare verwendet werden. Erwähnt sei noch, daß für logarithmische Rechnung die unmittelbar aus dem Dreieck durch Einführung der Basis AB sich ergebende Form geeignet ist, für die Verwendung der Rechenmaschine die analytische Ableitung aus dem Richtungsschnitt. Die Rechenmaschine kommt bei derartigen trigonometrischen Rechnungen neuerdings mehr und mehr in Anwendung⁵⁰).

In trigonometrischer Hinsicht die gleiche Aufgabe ergibt sich beim sog. „Seitwärtseinschneiden“ (Fig. 5); dabei ist A und B in Koordinaten und die orientierte Richtung φ auf A gegeben, und der Winkel γ auf C gemessen ($\psi = \varphi + \gamma$).

10b. Rückwärtseinschneiden. Gegeben sind drei Punkte, welche an einem vierten Punkte P , dessen Lage zu den drei Punkten zu bestimmen ist, in der rechtsläufigen Reihenfolge AMB erscheinen; gemessen sind auf P die Richtungen nach A, M, B z. B. durch die nebeneinander liegenden Winkel α, β (Fig. 6). Diese Vierecksaufgabe (Dreipunktproblem) ist schon von *Snellius* (1610) bei seiner ersten Triangulierung benutzt. In der Vermessungskunde wird sie nach der graphischen Lösung auf dem Meßtisch (vgl. p. 94) als „Rückwärtseinschneiden“ bezeichnet; nach einer von *Pothenot* gegebenen Lösung auch wohl unkorrekter Weise das „*Pothenot'sche* Problem“ genannt. Die Aufgabe ist oft behandelt und läßt verschiedene Lösungen zu⁵¹). Da beim Rückwärtseinschneiden lediglich durch Richtungsmessung nach drei gegebenen Punkten die Koordinaten des Standpunktes sich ergeben, so hat die Aufgabe für die Praxis der Kleintriangulierung große Bedeutung und findet weitgehende Anwendung. Eine der bei Anwendung im rechtwinkligen Koordinatensystem gebräuchlichsten Lösungen (vgl. die Lehrbücher) ist die folgende, mit Einführung eines Hilfswinkels⁵²) (Fig. 6): 1) Ableitung der Richtungswinkel (AM) und (BM),

50) *Jordan*, Handbuch 2, § 78; *O. Koll*, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine, Halle 1903.

51) Historisches bei *G. D. E. Weyer*, Ann. d. Hydr. 10 (1882), p. 534; *J. D. van der Plaats*, Tijdschr. v. Kadaster en Landmeetkunde 5 (1889), p. 1; *Jordan*, Handbuch 2, Kap. VIII, §§ 79—84.

52) *J. C. Burckhardt*, Monatl. Korr. (v. *Zach'sche*) zur Beförd. d. Erd- und Himmelsk. 4 (1801), p. 360; *F. W. Bessel*, ibid. 27 (1813), p. 222, 566; *Delambre* in *Cagnoli-Chombré*, Trigonométrie, Paris 1808, p. 211 und Vorrede p. VIII. Historisches bei *Hammer*, Trigonometrie, p. 558 Anmerk. 58; Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 598.

sowie der Längen der Linien $AM = a$, $BM = b$ aus den Koordinaten.

2) In den Dreiecken AMP und BMP Ableitung der unbekanntenen Winkel φ und ψ bei den Punkten A bzw. B aus

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi), \quad \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi),$$

worin $\varphi + \psi$ bekannt ist und $\varphi - \psi$ aus

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \cotg(45^\circ + \mu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi),$$

berechnet wird; μ ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}.$$

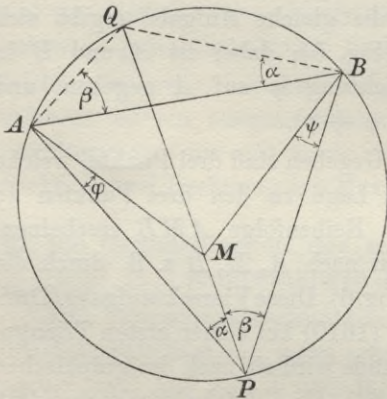


Fig. 6.

3) Danach lassen sich die übrigen Seiten und Winkel und damit die Richtungswinkel aller Linien nach P und die zugehörigen Koordinatenunterschiede (mit Probe) ableiten.

Eine andere Methode, welche zur Zeit z. B. bei der preußischen Katastervermessung (vgl. Anweisung IX) praktisch verwendet wird, gründet sich auf die von Collins⁵³) gegebene Lösung. Der durch einen um ABP (Fig. 6) beschriebenen Kreis auf der Richtung MP abgeschnittene Punkt Q

(Collins' Hilfspunkt) ist seiner Lage nach im Dreieck ABQ bestimmt durch die Winkel α und β (als Peripheriewinkel über AQ bzw. BQ den gemessenen gleich), durch die er in Bezug auf die Punkte A und B „vorwärtseingeschnitten“ wird⁵⁴). Damit ist der Richtungswinkel der Geraden PMQ bekannt und durch α und β die Richtungswinkel (AP) bzw. (BP) sowie die entsprechenden Entfernungen; zur numerischen Lösung dieser Ansätze kann, je nachdem Logarithmen- oder Maschinenrechnung stattfinden soll, das eine oder andere der bei „Vorwärtseinschneiden“ angegebenen Rechenverfahren verwendet werden.

Weitere Lösungen (Fig. 7) gehen von den durch AMP und BMP beschriebenen Bestimmungskreisen mit den Peripheriewinkeln α und β aus (wobei auch, wie schon von Snellius geschehen, die Kreismittelpunkte eingeführt werden können). In diesen Kreisen werden in den rechtwinkligen Dreiecken über MA bzw. MB und den beiden von

53) Lond. Phil. Trans. 6 (1671), p. 2093; 15 (1685), p. 1231.

54) Über die Verwandtschaft zwischen Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden vgl. auch C. Runge, Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 313.

M ausgehenden Kreisdurchmessern mit α und β (als Peripheriewinkel den gemessenen gleich) zwei Punkte A' bzw. B' „vorwärtseingeschnitten“, die eine beiden Kreisen gemeinschaftliche Sekante bestimmen, auf welcher P die Projektion von M darstellt. Auch hierbei können wieder die für logarithmische sowie die für Maschinenrechnung geeigneten Ansätze Verwendung finden⁵⁵).

Die Lösungen versagen, sobald der Punkt P auf dem Kreise durch

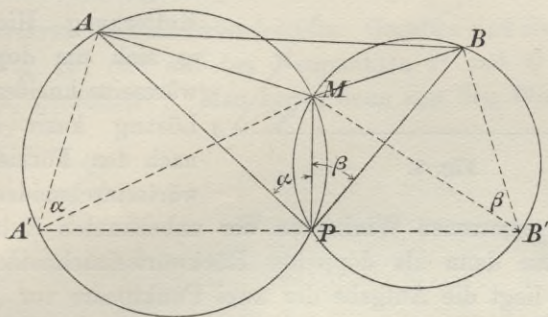


Fig. 7.

AMB liegt, sie geben unsichere Bestimmungen, wenn P diesem Kreise („gefährlicher Kreis“) nahe liegt; im Falle der ersten Lösung (p. 42) wird $\varphi + \psi \approx 180^\circ$, $\text{tg } \mu \approx 1$, im Falle der zweiten Lösung (*Collins*) bleibt die Richtung MQ unbestimmt, im Falle der dritten Lösung die Sekante $A'B'$. Wegen des weiteren über die Möglichkeit und Unmöglichkeit der Lösung, die Günstigkeit der Lage von P in Bezug auf AMB und besondere Fälle der Lösung, Praxis der Zahlenrechnung, Rechenformulare usw. muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

10c. Einige andere Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung.

α) Aufgabe der unzugänglichen Entfernung, Aufgabe der zwei Punktepaare (*Hansen'sche Aufgabe*)⁵⁶). Sind von einem Viereck $ABCD$

55) *W. G. Höckner*, Über die Einschaltung von Punkten in ein durch Koordinaten gegebenes Netz mit ausgiebiger Verwendung der Rechenmaschine, Leipzig 1891; *C. Runge*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 204; *H. Sossna*, ebenda 25 (1896), p. 269, 471.

56) Historisches und Literatur bei *Hammer*, Trigonometrie, p. 332 Anmerk., p. 559 Anmerk. 61 und p. 562 Anmerk. 76; *Jordan*, Handbuch 2, p. 356. Über die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten vgl. man: *J. Bohnenberger-Pfleiderer*, Ebene Trigonometrie, Tübingen 1802, p. 217; *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 13 (1841), p. 165; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 603; *E. Doležal*, Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch (Leoben und Pribram) 1902, p. 183. Für

(Fig. 8) zwei Ecken A und B bekannt und sind außerdem vier unabhängige Winkel zwischen den vier Eckpunkten gemessen, so kann man die Lage der beiden unbekanntenen Ecken C und D bestimmen. Liegen die vier gemessenen Winkel $\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4$ an der bekannten

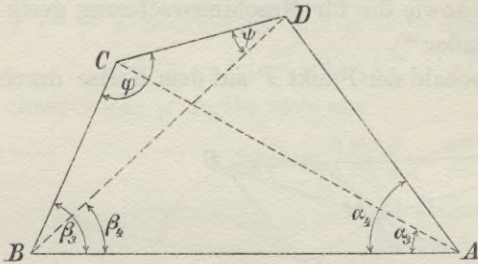


Fig. 8.

Entfernung AB und ist die Entfernung CD die Hauptunbekannte, so hat man die Aufgabe der unzugänglichen Entfernung. Hierbei handelt es sich um doppeltes Vorwärtseinschneiden und die Lösung kann daher auch nach den Formeln für Vorwärtseinschneiden erfolgen.

Liegen die gemessenen Winkel an der unbekanntenen Entfernung (die Aufgabe kann dann als doppeltes Rückwärtseinschneiden aufgefaßt werden), so liegt die Aufgabe der zwei Punktpaare vor (*Hansen'sche Aufgabe*). Es gibt eine Anzahl Auflösungen, die für beide Fälle gemeinsam gelten, z. B. die folgende, bei der wie beim Rückwärtseinschneiden ein Hilfswinkel eingeführt wird. Es gilt nach Fig. 8

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\sin(\beta_3 - \beta_4) \sin \alpha_4}{\sin \varphi \sin(\beta_4 + \alpha_4)} = \frac{\sin(\beta_3 - \beta_4) \sin \alpha_3}{\sin \psi \sin(\beta_3 + \alpha_3)}, \quad \varphi + \psi = 180^\circ - (\beta_3 - \beta_4).$$

Von den unbekanntenen Winkeln φ und ψ ist also die Summe und das Verhältnis der Sinus bekannt. Setzt man daher:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \alpha_3 \sin(\beta_4 + \alpha_4)}{\sin \alpha_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3)},$$

so wird

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{cotg}(45^\circ + \mu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi).$$

Damit sind die Winkel φ und ψ und folglich auch alle Winkel zwischen den vier Punkten bekannt. Ist nun irgend eine Entfernung zwischen den vier Punkten gegeben, so kann man offenbar jede andere mit Hilfe des Sinussatzes ausrechnen.

β) *Der Gegenschnitt*⁵⁷⁾. Die von *Jordan* als Gegenschnitt bezeichnete Methode der Punkteinschaltung ist eine Verbindung von Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden. Gegeben sind drei Punkte

Lösung mit der Rechenmaschine vgl. *H. Sossna*, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 361; 26 (1897), p. 649.

57) Vgl. *Jordan*, Handbuch 2, § 84, p. 363; *Hartner-Doležal* 1, p. 612; für Rechnung mit der Maschine *H. Sossna*, Zeitschr. f. Vermess. 31 (1902), p. 364, 429.

A, B, C (Fig. 9); ein vierter Punkt P soll bestimmt werden durch Messung eines Winkels δ auf P und β_1 auf B . Zur Berechnung der Koordinaten von P kann man zuerst die Koordinaten des Punktes M , des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises von ACP ausrechnen. Dann sind in dem Dreieck BPM zwei Seiten und ein Winkel bekannt, und man kann daher die beiden Seiten MP und BP und ihre Richtungswinkel finden und hat damit zwei Wege, die Koordinaten von P zu berechnen.

γ) *Erweitertes Rückwärtseinschneiden.* Gegeben sind die drei Punkte A, M, B (Fig. 10) und auf den Neupunkten P und Q die Winkel $\alpha_2, \alpha_1, \beta_2, \beta_1$ gemessen⁵⁸⁾. Man kennt dann von den Winkeln φ und

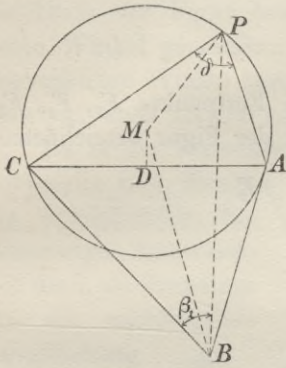


Fig. 9.

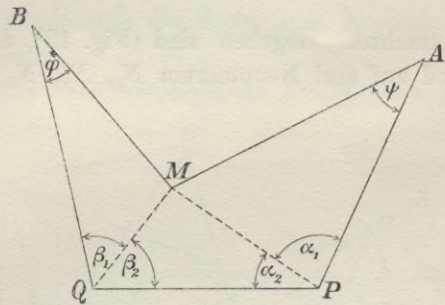


Fig. 10.

ψ die Summe und das Verhältniß ihrer Sinus und kann sie daher unter Benutzung eines Hilfswinkels wie bei dem einfachen Rückwärtseinschneiden (p. 42) finden Sind φ und ψ ermittelt, so berechnet man die Strecken BQ und AP und ihre Richtungswinkel und daraus die Koordinaten von P und Q . Statt zweier Punkte P und Q kann man auch noch mehr Punkte gleichzeitig über drei Punkte rückwärts einschneiden.

Bei dem *zweifach gegenseitigen Rückwärtseinschneiden* (Marek's Aufgabe)⁵⁹⁾ sind vier Punkte A, B, A', B' gegeben und auf den Punkten P und Q die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemessen (Fig. 11). Zur Berechnung der Koordinaten von P und Q kann man die dem *Collins'schen* Hilfs-

58) *F. Pross*, Trigonometrie, Stuttgart 1840, p. 201; *W. Jordan*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 449.

59) *J. Marek*, Techn. Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest 1875, p. 269; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 610.

punkte beim einfachen Rückwärtseinschneiden entsprechenden Punkte P' , Q' heranziehen, deren Konstruktion aus der Figur ersichtlich ist.

Eine Abart des Rückwärtseinschneidens, bei der eine Längenmessung zwischen den Neupunkten erforderlich ist, ist von *W. Láska* ⁶⁰⁾

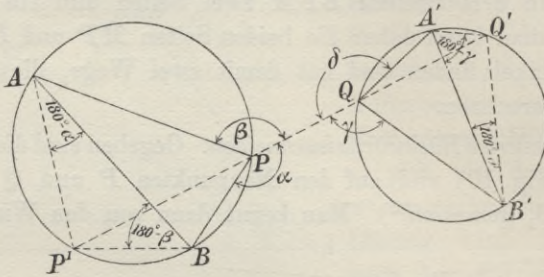


Fig. 11.

betrachtet. Gegeben sind (Fig. 12) die drei Festpunkte F_1, F_2, F_3 und auf drei Neupunkten N_1, N_2, N_3 die in der Figur bezeichneten

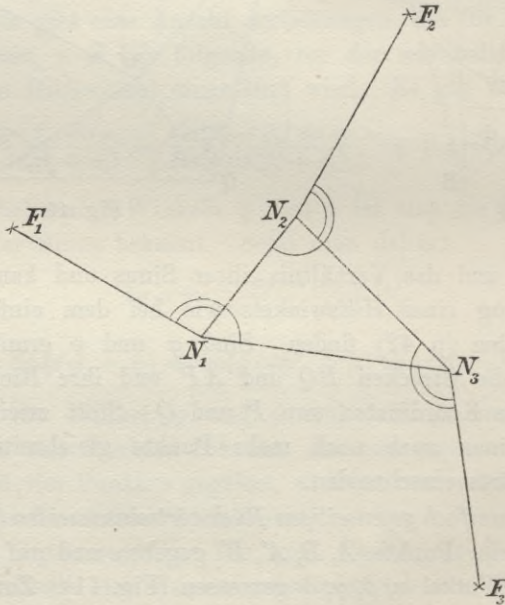


Fig. 12.

Winkel gemessen, von denen einer überschüssig ist; außerdem ist eine Seite des Dreiecks $N_1N_2N_3$ gemessen.

δ) *Lambert's Sechseck- und Achteckaufgabe.* Wir erwähnen noch

60) Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 565.

zwei Aufgaben von *J. H. Lambert*⁶¹⁾, obwohl sie, wenigstens für die Feld- und Landmessung, nur von geringer praktischer Bedeutung sind. Bei der Sechseckaufgabe (Fig. 13) sind entweder auf den Punkten *D, E, F* die Azimute von *A, B, C* bestimmt oder es sind die in Fig. 13 bezeichneten Winkel gemessen. Bei der Achteckaufgabe (Fig. 14) sind zwischen den acht Punkten *A, B, C, D, E, F, G, H* von den vier letzten Punkten aus die 12 in der Figur bezeichneten Winkel gemessen. Die beobachteten Winkel bestimmen die Gestalt des Sechs- resp. Achtecks. Man vgl. auch III 1, 3 (*M. Simon*).

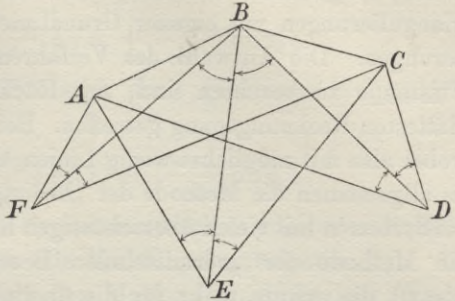


Fig. 13.

Da in der Vermessungstechnik stets überschüssige Bestimmungen notwendig sind, dienen die vorstehenden Bestimmungen hauptsächlich dazu, als Grundlage für die nachfolgende Ausgleichung „genäherte Koordinaten“

der zu berechnenden Punkte zu liefern. Die Genauigkeit der Punktbestimmung in den beim „Vorwärts“- „Seitwärts“- und „Rückwärts“-Einschneiden sich ergebenden Figuren ist von *Helmert* und *Jordan* untersucht⁶²⁾.

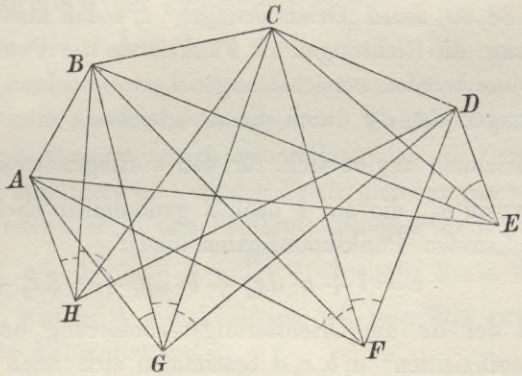


Fig. 14.

11. Ausgleichung von Kleintriangulierungen.

Die Ausgleichung der stets mit einer Anzahl überschüssiger Richtungen oder Winkel oder gegebener Punkte erfolgenden trigonome-

61) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung 1, Berlin 1765, p. 72, 77, 81, 186.

62) *Helmert*, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 73; *Jordan*, ibid. 16 (1871), p. 397; vgl. auch *Helmert*, Ausgleichungsrechnung, p. 231; *Jordan*, Handbuch 1, 2. Aufl. 1877, Kap. III; 3. Aufl., Kap. V.

trischen Punktbestimmungen kann nach der Methode der „bedingten“ oder der „vermittelnden“ Beobachtungen (vgl. I D 2 (*J. Bauschinger*), p. 768) vorgenommen werden, und zwar sowohl für unabhängige Kleintriangulierungen mit eigener Grundlinie als für Einschaltungstriangulierungen. Die Auswahl des Verfahrens wird, wenn nicht besondere Umstände zu beachten sind, mit Rücksicht auf den schnellsten und glattesten Rechnungsgang getroffen. Bei einfach gegliederten Systemen, wobei also mit möglichst wenig Linien viele Punkte verbunden sind, ist im allgemeinen die Methode der „bedingten Beobachtungen“ günstiger, bei Systemen mit vielen überschüssigen Richtungen und wenigen Punkten die Methode der „vermittelnden Beobachtungen“; dementsprechend kommt die erstere mehr für die übergeordneten Systeme, die letztere mehr für die untergeordneten Einschaltungen in Betracht, wobei auch der übersichtlichere „Schematismus“ von Wert ist.

11a. Methode der vermittelnden Beobachtungen. (Vgl. I D 2, p. 786.) Als Unbekannte werden betrachtet die Koordinaten y, x der zu bestimmenden Punkte und bei Stationsrichtungssystemen (vgl. p. 38, 39) deren „Orientierungen“ z , sodaß also die unabhängigen Winkel bzw. die Richtungen als Funktionen der Punktkoordinaten erscheinen. Diese werden zunächst angenähert berechnet und dann ihre Verbesserungen dx, dy durch die Ausgleichung ermittelt. Als lineare Fehlergleichung ergibt sich für den vorliegenden Fall mit $\operatorname{tg} \varphi_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (worin φ_{12} die auf 1 nach 2 genommene Richtung, $y_1 x_1, y_2 x_2$ die unbekanntenen Punktkoordinaten sind):

$$v = l + a \cdot dx_1 + b \cdot dy_1 + c \cdot dx_2 + d \cdot dy_2 + dz,$$

in der dz die Orientierungsverbesserung bedeutet. Die „Richtungskoeffizienten“ a, b, c, d bestimmen sich nach der Beziehung zwischen den „Richtungsänderungen“ und den „Koordinatenänderungen“; es ist

$$d\varphi_{12} = + \frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_1 - \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_1 - \frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_2 + \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_2.$$

Diese Koeffizienten werden auch in der Form

$$\frac{y_2 - y_1}{s^2} \rho dx \text{ bzw. } \frac{x_2 - x_1}{s^2} \rho dy$$

gebraucht; zu ihrer Berechnung dienen verschiedene Hilfsmittel, Rechenschieber, numerische und graphische Tafeln, oder auch logarithmische Differenzen der trigonometrischen Funktionen⁶³⁾. Ist einer der beiden

63) *Jordan*, Handbuch 1, Anhang p. [8]—[17]; *O. Seiffert*, Logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungskoeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate, Halle 1892; *J. H. Franke*, Koordinatenausgleichung

Punkte 1—2 gegeben, so fallen die entsprechenden Glieder aus; für eine Richtung am „gegebenen Standpunkt“ 1 zum „Neupunkt“ 2 (sog. „äußere Richtung“) ist

$$d\varphi_{12} = -\frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_2 + \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_2;$$

für eine auf einem „Neupunkt“ 1 nach dem „gegebenen Zielpunkt“ 2 (sog. „innere Richtung“) ist

$$d\varphi_{12} = +\frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_1 - \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_1;$$

für die zur „Orientierung“ von Systemen zwischen gegebenen Punkten beobachteten Richtungen fallen alle Richtungskoeffizienten fort. Die Fehlergleichungen für den Fall der Messung unabhängiger Winkel (z. B. bei Anwendung des Repetitionstheodolits) ergeben sich mit den Differenzen der zugehörigen Richtungskoeffizienten. Für jede beobachtete Richtung (bezw. Winkel) wird ihre Fehlergleichung angesetzt. Z. B. bei der Bestimmung eines Punktes durch ein System auf ihm nach gegebenen Punkten beobachteter Richtungen (Rückwärtseinschneiden) ist die Form der Fehlergleichungen

$$v = ax + by + dz + l;$$

hierin bedeuten die l die Abweichungen der beobachteten Richtungen gegen die mit „genäherten“ Koordinaten berechneten. Vielfach werden die zugehörigen Normalgleichungen gleich so gebildet, daß die Orientierungsverbesserung dz eliminiert ist. Sind n Fehlergleichungen vorhanden, so ersetzt man entweder in den Fehlergleichungen die Koeffizienten a und b durch $a - \frac{[a]}{n}$ und $b - \frac{[b]}{n}$ (reduzierte Form der Fehlergleichungen) oder, was noch zweckmäßiger ist, man fügt (nach *O. Schreiber*) die fingierte Fehlergleichung:

$$v_{n+1} = [a] dx + [b] dy$$

mit dem Gewicht $-\frac{1}{n}$ hinzu. Man braucht sich dann um dz nicht mehr zu kümmern.

Ist ein Punkt durch Richtungssysteme bestimmt, die auf mehreren gegebenen Punkten nach gegebenen und dem Neupunkte beobachtet sind (Vorwärtseinschneiden), so ist für jeden Standpunkt das System der Fehlergleichungen aufzustellen, welches dann, falls nur ein Neupunkt vorhanden ist, ebenfalls auf eine einzige Gleichung von der Form

nach Näherungsmethoden, München 1884, p. 133; *O. Eggert*, Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten, entworfen von *Fr. Kreisel*, Berlin 1903; *E. Engel*, Österr. Zeitschr. f. Vermess. 1 (1903), p. 101; Rechenschieber von *W. Voigt*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 183

$$v = a dx + b dy + l$$

mit dem Gewicht $\frac{m}{m+1}$ reduziert werden kann, wo m die Anzahl der auf dem betreffenden Standpunkt nach gegebenen Festpunkten beobachteten Richtungen ist. Bei der Punktbestimmung durch äußere und innere Richtungen („vereintes Einschneiden“) ergeben sich demnach Fehlergleichungen beider Art. In der Praxis der Kleintriangulierung handelt es sich in der Regel nur um die Einschaltung eines einzelnen Punktes, also um zwei bzw. drei Unbekannte, y , x , bzw. z . Bei gleichzeitiger Ausgleichung mehrerer Punkte in einem geschlossenen Netz oder Netzteilen (Punktgruppen aus zwei, drei und mehr Punkten bestehend) ergeben sich dazu noch die Fehlergleichungen in der oben angeführten Form zwischen je zwei Neupunkten. Die aus den Fehlergleichungen gebildeten Normalgleichungen werden nach dem Gaußschen Verfahren (vielfach mit Benutzung der Probe nach der Summengleichung I D 2, p. 790) aufgelöst. Zur Bildung der Faktoren der Normalgleichungen und deren Auflösung ist für die meisten Aufgaben der Kleintriangulierung der Rechenschieber als ausreichend zu erachten⁶⁴). Die Ableitung des „mittleren Fehlers der Gewichtseinheit“ (Richtung oder Winkel) aus der Fehlerquadratsumme $[p v v]$ bzw. $[v v]$ nach der allgemeinen Gleichung $\sqrt{\frac{[p v v]}{n-u}}$ (worin n die Anzahl aller eingeführten Beobachtungen, u die Anzahl der unabhängigen Unbekannten bedeutet) sowie die Ableitung der „Gewichtskoeffizienten“ (I D 2, p. 788) zur Berechnung des mittleren Fehlers der Unbekannten bildet den Schluß der Ausgleichung⁶⁴).

11 b. Graphische Punktausgleichung. Statt Ausgleichung nach „vermittelnden Beobachtungen“ wird auch wohl graphische Koordinatenausgleichung in einer „fehlerzeigenden Figur“, „Schnittfigur“, angewendet. Die allgemeine Bedeutung derartiger Näherungsmethoden ist bereits p. 16 erwähnt worden. Die Aufgabe besteht darin, A) die fehlerzeigende Figur darzustellen, B) in derselben die endgültige Punktlage so zu bestimmen, daß möglichst die Quadratsumme der Richtungsverbesserungen, wie bei der Methode der kleinsten Quadrate, ein Minimum wird. Für die „Konstruktion der fehlerzeigenden Figur“ liegt der einfachste Fall vor bei der Punktbestimmung durch Vorwärtseinschneiden mittels unabhängiger „äußerer“ (p. 49) Richtungen. Wird (auf Grund genäherter Koordinaten) in der Nähe des gesuchten Punkt-

64) Über die Anordnung der Rechnungen, die Rechenschemata, besondere Hilfsmittel, die Rechenproben usw. vgl. die Lehrbücher, speziell Jordan, Handbuch 1, Kap. III.

ortes ein Wert y_0x_0 angenommen, so liefert eine von einem gegebenen Punkt ausgehende Richtung φ zwei Schnitte mit den Geraden $x = x_0$, $y = y_0$ oder ihnen naheliegenden ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0 - y_n}{x_0 - x_n}$), deren Verzeichnung (in großem Maßstab 1:1, 1:10) die Richtung darstellt. Wird die Richtung φ selbst im Punkt y_0x_0 mit dem Auftragkreis (Transporteur) eingetragen, so genügt ein Achsenschnitt. Es können auch die Abweichungen zwischen den „genäherten“ Richtungen und den beobachteten, $\delta = n - \varphi$ (l der Fehlergleichungen p. 48) zur Auftragung benutzt werden, indem die den δ entsprechenden Querverschiebungen $q = \frac{\delta''}{\rho} s$ vom genäherten Punktort aus rechtwinklig zu den von hier aus gezeichneten Richtungslinien aufgetragen, oder ihre auf die Achsen y_0, x_0 bezogenen Projektionen zur Konstruktion verwendet werden. Beim „vereinten“ Einschneiden orientiert man kurzerhand die „inneren“ Richtungen durch die „äußeren“ und führt die Aufzeichnung dadurch auf das Frühere zurück. Für Rückwärtseinschnitte ist diese Konstruktion nach Orientieren der Richtungen mit Hilfe der genäherten Koordinaten nicht korrekt, jedoch praktisch anwendbar. Man kann auch die Schnittlinien als Tangenten der mit den gemessenen Winkeln sich ergebenden Kreise (Peripheriewinkel zu den gegebenen Seiten als Sehnen) darstellen⁶⁵). Eine andere Methode auf Grund von „Transformationen nach reziproken Radien“ ist von *C. Runge* mitgeteilt⁶⁶). Ein älteres Verfahren ist das von *Tulla* angegebene (sogen. badisches Ausgleichungsverfahren)⁶⁷). Die Ableitung der endgültigen Punktlage in der Schnittfigur geschieht entweder durch einfache Schätzung oder auf analytischem Wege. Die erstere, welche mit einer plausiblen mittleren Punktlage sich begnügt, ist für die praktische Anwendung als bequemes Näherungsverfahren ausreichend (p. 16). Die Aufgabe lautet: Gegeben sind in einer Ebene n Linien R ; es ist der Punkt P so zu bestimmen, daß unter Berücksichtigung der Gewichte p für die Abstände h die Bedingung $[phk] = \text{Min.}$ erfüllt wird. Eine erste sehr elegante Lösung rührt von *H. Bertot*⁶⁸) her⁶⁹).

65) *Jordan*, Handbuch 2, § 85; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 611.

66) Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 581.

67) Vgl. *F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst, p. 53 und speziell p. 60, erste Anmerk.

68) Paris C. R. 82 (1876), p. 682.

69) Man vgl. auch *C. F. Gauß*, Werke 9, p. 221. Weiteres über Bedeutung und Behandlung der Aufgabe in der niederen Geodäsie siehe bei *Jordan*, Handbuch 2, Kap. VIII, § 85, 86; *Vogler*, Prakt. Geom. 1, § 164; *F. G. Gauß*,

Einen neuen Vorschlag mit Anwendung eines dynamischen Ausgleichsprinzips macht *Fischer*⁷⁰⁾ dadurch, daß elastische, das Richtungssystem darstellende Stäbchen zur Bestimmung des die Gleichgewichtslage im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate ausdrückenden Punktes verwendet werden.

11c. Methode der bedingten Beobachtungen. Die Anwendung dieser Methode mit Korrelatengleichungen (ID 2, p. 794) auf die Triangulierungsausgleichung, von *C. F. Gauß*⁷¹⁾ begründet, erfordert zunächst die Aufstellung der unabhängigen Bedingungen, welche das Netz bietet. Hierzu sind von *C. F. Gauß* die Regeln gegeben und von *Ch. L. Gerling*⁷²⁾ mitgeteilt worden. Es kommen Bedingungen verschiedener Art in Betracht; „*Stationsbedingungen*“ (Bedingungen I. Klasse nach *Gerling*), welche sich für jede Station nach der Art der Beobachtung ergeben und bei vorher erfolgter „*Stationsausgleichung*“ (vgl. p. 38) in Wegfall kommen; „*Winkelsummenbedingungen*“ (Bedingungen II. Klasse, Polygonbedingungen), welche aus den Figuren, die das Netz darbietet, folgen, also in einfachster Form Dreiecks-, ev. Viereckssummen usw.; „*Seitenbedingungen*“ (Bedingungen III. Klasse), welche aus dem Zusammenschluß der Linienverhältnisse sich ergeben. Z. B. für ein Viereck mit einem Zentralpunkt, wobei über den Vierecksseiten mit dem Zentralpunkt als Spitze 4 Dreiecke und 6 unabhängige Bedingungen entstehen, hat für unabhängige Winkelmessung die Stationsbedingungsgleichung des Zentralpunktes die Form $a + b + c + d = 360^\circ$, die Winkelsummenbedingung für die 4 Dreieckssummen die Form $a + b + c = 180^\circ$, die Seitenbedingung die Form (Fig. 15)

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4} = 1.$$

Nach der allgemeinen Form der Bedingungsgleichungen

Rechnungen der Feldmeßkunst, Abschn. V; *F. R. Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 6 (1877), p. 53; *Genge*, Vierteljahrschrift Zürich 1886, p. 268; *M. d'Ocagne*, Paris C. R. 114 (1892), p. 1415; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 618; *Klingatsch*, Die graphische Ausgleichung, Wien 1894; *E. Puller*, Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 553; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 611; *Weizler*, Mitteil. d. militär-geograph. Inst. Wien 16 (1896), p. 143; *C. Runge*, Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 581; *Komel*, Österr. Zeitschr. f. Vermess. 1 (1903), p. 173; *Polzer*, *ibid.*, p. 205. In Österreich wird das *Horsky'sche* Diagramm benutzt, vgl. dazu *Hartner-Doležal* 1, p. 795.

70) *Fischer*, Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 553, 655.

71) Supplementum theoriae combinationis etc., Comm. recent. Gotting. 6 (1828) = Werke 4, p. 55.

72) Ausgleichungsrechnungen d. prakt. Geom., 4. Abschnitt (sowie Beiträge zur Geographie Kurhessens, Kassel 1831/39).

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n + w_1 = 0$$

ergeben sich dementsprechend die „Koeffizienten“. Diese sind bei der logarithmisch angesetzten Seitengleichung entweder unmittelbar den Tafeln zu entnehmende logarithmische Differenzen oder nach der Formel $\frac{M}{\rho} \cotg \alpha$ zu berechnen, da

$$\frac{d \log \sin \alpha}{\rho d \alpha} = \frac{M}{\rho} \cotg \alpha$$

ist, unter M den Modul der gewöhnlichen Logarithmen verstanden. Aus den aufgestellten Korrelatengleichungen

$$v = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \cdots$$

und den Normalgleichungen (I D 2, p. 795) ergeben sich die Korrelaten und damit die den Beobachtungen beizulegenden Verbesserungen⁷³⁾. Das Ergebnis der Ausgleichung sind demnach widerspruchlos sich zu einem einheitlichen System zusammensetzende Winkel bzw. Richtungen, aus denen die Koordinaten der Neupunkte auf verschiedenen Wegen in Übereinstimmung sich ergeben müssen. (Probe.) Die Fehlerberechnung gründet sich auf den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, der bei r Bedingungen den Wert:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{r}}$$

hat. In besonderen Fällen des Netzanschlusses kommt auch die Methode der „vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen“ (I D 2, p. 792) in Betracht. Bei untergeordneten Messungen werden wohl Näherungsausgleichungen angewendet, wobei zunächst die Winkelbedingungen für sich behandelt werden und erste Winkelverbesserungen ergeben, und danach die Seitenbedingungen, welche dann zur endgültigen Verbesserung dienen⁷³⁾.

11d. Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen wird beurteilt nach dem mittleren „Richtungs“- bzw. „Winkelfehler“, wobei zu unterscheiden ist der sich unmittelbar aus den Stationsbeobachtungen ergebende Messungsfehler und der aus der Netzausgleichung folgende (Rücksicht auf die Länge der Richtungslinien). Der letztere Fehler ist stets größer als der erstere (Anschlußzwang und Zentrierfehler usw.).

73) Über die von *C. F. Gauß* angewendete Methode gibt Bd. 9 der Werke Aufschluß. Ferner vgl. *L. Krüger*, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen, Potsdam 1905. Weiteres über Aufstellung der Bedingungsgleichungen, Rechenschemata usw. geben die Lehrbücher, bes. *Jordan*, Handbuch 1, Kap. II.

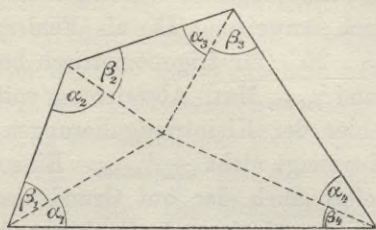


Fig. 15.

Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen wird amtlich reguliert durch „Fehlergrenzen“ (Max.-Fehler rund der dreifache Betrag des „mittleren Fehlers“) für den nach der Netzausgleichung sich ergebenden Richtungsfehler; z. B. gilt für die preußischen Kleintriangulierungen nach Anweisung IX als Fehlergrenze für die verschiedenen Stufen 15'', 25'' (für trigonometrisch bestimmte Polygonnetzpunkte 35''), was rund $\frac{1}{10000}$ Max.-Abweichung entspricht. Der mittlere relative Längenfehler der Kleintriangulierungen der preußischen Landesaufnahme⁷⁴⁾ übersteigt nicht $\pm \frac{1}{35000}$. Einen übersichtlichen Genauigkeitsausdruck liefert auch der auf Grund des aus der Ausgleichung gefundenen Richtungsfehlers als Funktion desselben berechnete „mittlere Koordinatenfehler“, und der hiernach bzw. direkt als Funktion der ausgeglichenen Elemente gewonnene „Entfernungsfehler“⁷⁵⁾. Die Fehlerellipse (I D 2, p. 796), welche den Punktfehler in allgemeiner Fassung gibt, wird als Fehlerausdruck nur in besonderen Fällen verwendet⁷⁶⁾, dagegen der nach $m_p = \sqrt{m_y^2 + m_x^2}$ gebildete „mittlere Punktortfehler“ oft angegeben. Auch die Dreiecksschlußfehler w , welche ein Dreiecksnetz liefert, werden als Genauigkeitsmaß verwendet, welches besonderen Wert dadurch hat, daß es vom Anschlußzwang frei ist; der „mittlere Winkelfehler“ ist bei n Dreiecksabschlüssen näherungsweise

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}.$$

Als Genauigkeitsangabe sei angeführt, daß für mehrere neuere Stadttriangulierungen mit zusammen 1745 Punkten und der mittleren Strahlenlänge 2,4 km der mittlere Richtungsfehler im Netz gleich $\pm 3''$, der mittlere Punktfehler gleich ± 17 mm gefunden ist. Als ein Beispiel für die mit einfachen Hilfsmitteln unter größeren Verhältnissen zu erreichende Genauigkeit kann auch eine von der preußischen Katasterverwaltung ausgeführte größere Verbindungstriangulation genannt werden⁷⁷⁾.

12. Polygonzugmessung.

Polygonisierung ist die geometrische Punktbestimmung in gebrochenen Linienzügen durch Messung der Horizontalwinkel auf den „Brechungspunkten“ („Brechungswinkel“, „Polygonwinkel“) mit dem

74) v. Schmidt, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 387.

75) Jordan, Handbuch 1, Kap. II, III.

76) Helmert, Ausgleichsrechnung, p. 231; Jordan, Handbuch 1, 2. Aufl., Kap. III; 3. Aufl. Kap. V.

77) C. Reinherz, Die Verbindungstriangulation zwischen der Triangulation im Kohlenrevier und dem Rhein. Dreiecksnetz, Stuttgart 1888.

Theodolit und der Entfernungen (Strecken, Polygonseiten) von Punkt zu Punkt mit Längenmeßwerkzeugen oder durch indirekte Entfernungsmessung (vgl. p. 85). Die große Bedeutung des Polygonzuges erklärt sich daraus, daß er äußerst schmiegsam ist und sich allen Verhältnissen anpassen läßt; er folgt den Straßen, Eisenbahnen, Bächen, Waldwegen, Schluchten, den Stollen im Gruben- und Tunnelbau usw. Die Polygonisierung liefert insbesondere bei den Spezialvermessungen das auf Kleintriangulierung gegründete, in rechtwinkligen Koordinaten auszudrückende Liniensystem, welches als Unterlage für die Kleinmessungen verschiedener Art erforderlich ist. Die Punktabstände können je nach der vorliegenden Aufgabe mehrere hundert Meter betragen oder aber auf ganz kurze Entfernungen herabgehen. Ein System mehrerer Züge ergibt das „Polygonnetz“, wobei die Züge die gegebenen trigonometrischen Punkte unmittelbar verbinden („Hauptzüge“) oder bereits bestimmte Polygonpunkte („Nebenzüge“ in verschiedenen Stufen). Die Vermessung einer Stadt z. B. macht in den Straßen zahlreiche Züge in verschiedenen Stufen erforderlich. Polygonzüge ohne Koordinaten- bzw. Richtungsanschluß kommen nur in ganz besonderen Fällen oder für kleine Nebenmessungen zur Anwendung; bei geschlossenen Polygonen werden stets sämtliche Bestimmungsstücke (Winkel und Seiten) ev. indirekt gemessen⁷⁸). Werden nicht die Brechungswinkel mit dem Theodoliten, sondern für jede einzelne Strecke die magnetischen Azimute mit der Bussole (Kompaß) bestimmt, so entsteht der „Bussolen-(Kompaß-)zug“. Wird der Zug mit dem Tachymeter und dabei die Entfernungen durch Distanzmessung (vgl. p. 85) gewonnen, so entsteht der „tachymetrische Polygonzug“.

12a. Der Theodolitpolygonzug. Gegeben sind die Koordinaten der Abschlußpunkte P_a und P_e und auf jedem derselben mindestens ein gegebener Richtungswinkel zu einem Zielpunkt N_a bzw. N_e ; gemessen sind sämtliche Strecken s und sämtliche Brechungswinkel β (im Sinne rechtsläufiger Zählung) einschließlich der Anschlußwinkel auf P_a und P_e zwischen der anliegenden Polygonseite und N_a bzw. N_e . Für irgend eine Strecke des Zuges ergibt sich dann durch „Übertragung“ mittels der gemessenen Winkel von der je vorhergehenden Richtung aus der Richtungswinkel z. B. $n_{45} = n_{34} + \beta_4 \pm 180^\circ$ und die zugehörigen Koordinatenunterschiede sind entsprechend $\Delta y = s \sin n$, $\Delta x = s \cos n$,

78) Über die Bedeutung und Behandlung der Vielecksaufgaben vgl. *Nell*, Zeitschr. f. Vermess. 22 (1893), p. 489; *E. Puller*, *ibid.* 23 (1894), p. 257; vgl. auch *Hammer*, Trigonometrie § 40–43.

womit die beim Abschluß auftretenden Bedingungen sind $N_e = N_a \pm \approx 180^\circ + [\beta]$; $Y_e = Y_a + [\Delta y]$, $X_e = X_a + [\Delta x]$, für die bestimmte „Fehlergrenzen“ innezuhalten sind. Die Berechnung geschieht in einem geeigneten Schema mit Logarithmen, „Koordinatentafeln“ für $s \cdot \sin n$, $s \cdot \cos n$ oder der Rechenmaschine⁷⁹⁾.

Die Genauigkeit der Längenmessung ist p. 21 erwähnt, dem noch die Bemerkung zuzufügen ist, daß im System von Kleinmessungen die Genauigkeit im Polygonnetz derjenigen der nachfolgenden Linienaufnahme übergeordnet sein muß. Zur Winkelmessung dienen kleine oder mittlere Theodolite (vgl. p. 23). Von besonderer Bedeutung sind die mechanischen Fehler des Verfahrens, die Zentrierung von Theodolit und Signal (Fluchtstab, Signalscheibe, beim Markscheiden und im Tunnel Lichtsignale), weshalb bei scharfen Messungen besondere Hilfsmittel (optische Abloter, festes Lot, bei Grubenmessungen⁸⁰⁾ Steckhülsen usw.) verwendet werden. Ist e die Exzentrizität der Aufstellung des Instrumentes, e' und e'' die der Signale für einen gestreckten Winkel mit den Seiten a und b , so ist der bei quer zur Zugrichtung angesetzten Exzentrizitäten hieraus entstehende Fehler des Winkels⁸¹⁾

$$\pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{ab} e \rho\right)^2 + \left(\frac{e'}{a} \rho\right)^2 + \left(\frac{e''}{b} \rho\right)^2},$$

der sich mit dem reinen Messungsfehler verbindet. Die Gleichung des mittleren Richtungsfehlers für die r te Richtung in einem abgeschlossenen Zuge von n Winkeln $M = m \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}}$ zeigt, wie der Richtungsfehler zur Zugmitte wächst. Für den auf den unmittelbaren Winkel Fehlern m beruhenden linearen Querverschiebungsfehler am Ende eines geradlinigen Zuges mit n gleichlangen Seiten s gilt

$$q = \sqrt{(nsm)^2 + ((n-1)sm)^2 + \dots + (2sm)^2 + (1 \cdot sm)^2}$$

oder $= m \sqrt{\frac{L^3}{3s}}$, welcher sich beim Richtungsabschluß entsprechend reduziert⁸¹⁾. Die erwähnten für die Theorie des Polygonzuges

79) Über Rechenhilfsmittel vgl. die Lehrbücher, z. B. *Hartner-Doležal* 1, p. 619; *Jordan*, Handbuch 2, p. 268. Daraus u. a. *C. F. Defert*, Tafeln zur Berechnung rechtwinkliger Koordinaten, Berlin 1874; *E. Lüling*, Math. Tafeln für Markscheider und Bergingenieure, 4. Aufl., Berlin 1898; *Gurden*, Traverse Tables, London 1888. Man hat ferner besondere Rechenschieber und Apparate für die Koordinatenrechnung konstruiert; vgl. z. B. *Ch. Lallemand*, Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 233 und *Hartner-Doležal* 1, p. 625, wo ein Koordinatometer nach *Friedrich* beschrieben wird.

80) Vgl. die Lehrbücher der Markscheidekunde.

81) *Jordan*, Handbuch 2, § 97 und § 100—103.

wesentlichen Formeln zeigen, daß die Polygonseiten möglichst lang, oder z. B. bei gegebenem trigonometrischen Punktabstand möglichst wenig Zwischenpunkte genommen werden sollen, wobei aber andererseits zu bedenken ist, daß der Polygonzug so angelegt werden muß, daß die untergeordneten Liniennetze bequem angeschlossen werden können.

Die strenge Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate hat in praktischer Hinsicht wegen der Unsicherheit der Gewichtsverhältnisse für die Längen- und Winkelmessung Schwierigkeiten (vgl. die Lehrbücher), es finden daher in der Regel numerische oder auch graphische⁸²⁾ Näherungsverfahren Anwendung (ein einfaches, meist angewendetes Verbesserungsverfahren ist gleichmäßige Verteilung des Richtungsabschlußfehlers auf die Winkel und danach Verteilung des linearen Koordinatenabschlußfehlers je proportional den Seitenlängen). Die Aufgabe kann auch als Koordinatenumwandlung mit kleiner Achsenabweichung und Maßstabreduktion aufgefaßt werden (vgl. p. 34). Die *Genauigkeit* der Polygonzugmessung wird ausgedrückt durch den aus dem Richtungsabschlußfehler β sich ergebenden mittleren Winkelfehler $\frac{f_{\beta}}{\sqrt{n}}$, welcher unabhängig ist von der Einführung des Längenmaßes, sowie durch die Koordinatenabschlußfehler f_y, f_x , oder deren Projektion auf die Zugrichtung als „Längenfehler“ $\frac{[\Delta y]f_y + [\Delta x]f_x}{S}$ und „Querfehler“ $\frac{[\Delta x]f_y - [\Delta y]f_x}{S}$ ($S = \text{Zuglänge}$). Hierfür sind in den Vermessungsanweisungen amtliche Fehlergrenzen festgesetzt. Zahlreiche Genauigkeitsbestimmungen⁸³⁾ haben mittlere Winkelfehler zwischen 15" bis 5" ergeben; in den meisten Fällen begnügt man sich mit 15" bis 30".

Besonders zu erwähnen bleibt noch der Anschluß von Zügen an unzugängliche Dreieckspunkte, besonders Kirchtürme, sowie die Überwindung von Gelände Hindernissen (Flüsse usw.). Hierzu sind trigonometrische Hilfsmessungen erforderlich, sodaß z. B. für einen Turmanschluß die fehlenden Abschlußstücke (Linien und Winkel) sich indirekt ergeben. (Vgl. die Lehrbücher.) Werden mehrere Züge zu einem an gegebene Punkte anschließenden Netz zusammengefaßt („Knotennetz“), so entsteht eine Ausgleichungsaufgabe, welche nach „vermittelnden“ oder „bedingten“ Beobachtungen behandelt werden kann, und im Fall nur ein Knotenpunkt vorliegt (der weitaus häufigste

82) Ein neueres graphisches Verfahren gibt *Klingatsch*, Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 540 (vgl. auch 30 (1901), p. 335).

83) Zeitschr. f. Vermess., Literaturübersichten und *Jordan*, Handbuch 2, Kap. IX.

Fall), auf die Ausgleichung „direkter“ Beobachtungen (I D 2, p. 782) nach dem Prinzip des „allgemeinen arithmetischen Mittels“ führt.

12 b. Der Bussolen-(Kompaß-)zug findet vielfache Anwendung bei tachymetrischen und topographischen Aufnahmen (p. 90), bei Waldvermessungen, und besonders Grubenaufnahmen (hierbei auch mit sehr kurzen Strecken, Schnüren), Routenaufnahmen und nautischen Vermessungen (mit sehr langen Strecken). Bei engbegrenzten Aufnahmen werden oft die magnetischen Meridianrichtungen unmittelbar als Abscissenachsen genommen, bei Anschluß an trigonometrische Netze die Abweichungen der magnetischen Richtungen von den trigonometrischen Abscissenrichtungen durch Beobachtung bekannter trigonometrischer Linien gefunden, bei ausgedehnten Aufnahmen ohne trigonometrischen Anschluß die absoluten magnetischen Deklinationen durch Vergleichen der magnetischen Richtungen mit bekannten oder besonders (vielfach zu dem Zweck nur genähert) bestimmten absoluten Azimuten ermittelt, oder aber auch aus den allgemeinen Deklinationsbestimmungen entnommen (z. B. *Neumayer's* Karten). Von der Berücksichtigung der täglichen Variation wird bei der Feldmessung in der Regel abgesehen, bei Grubenaufnahmen, Orientierungsmessung, beim Markscheiden je nach den Umständen darauf Rücksicht genommen, wobei dann im gegebenen Fall korrespondierende Variationsbeobachtungen in Betracht kommen. Bei Kleinaufnahmen im Felde wird der Einfluß der Variation ohnehin durch die wiederholten trigonometrischen Anschlüsse genügend eliminiert.

Die Genauigkeit der unmittelbaren magnetischen Richtungsangaben durch das Instrument schwankt bei Bussoleninstrumenten etwa zwischen einigen Minuten bis zu einigen Zehntel Grad, je nach der Einrichtung und Größe des Instrumentes, beim Freihandgebrauch ist der Fehler entsprechend größer (einige Grad)⁸⁴). Da im Kompaßzug jede Richtung unabhängig bestimmt wird, ist das Fehlergesetz ein anderes als im Theodolitzug, und zwar ist der Querfehler für einen Zug mit n gleichlangen Strecken $q = \pm m_a s \sqrt{n}$. Der Vergleich mit der entsprechenden Fehlerformel des Theodolitzuges p. 56 zeigt, daß die Fehlerfortpflanzung im Kompaßzug erheblich günstiger ist als im Theodolitzug, und im Gegensatz zu diesem möglichst kurze Strecken, d. h. häufige Messungen verlangt; sie erklärt, daß grob erscheinende Messungen mit kleinen Bussolen, wie z. B. tachymetrische

84) Wegen der verschiedenen Einrichtung, der Einteilung (gewöhnlich in Grad, bei Grubenkompassen auch Stunden), der Prüfung der zur Anwendung kommenden Instrumente, Feldbussolen, Markscheiderbussolen vgl. die geodätischen Lehrbücher, sowie die speziellen Lehrbücher der Markscheidekunde.

Kleinzüge, Markscheidezüge mit dem „Hängezeug“ (Kreisbussole im doppelten Hängerring schwebend), Itinerarzüge auf Forschungsreisen verhältnismäßig gute Resultate zu geben vermögen. Wegen Berechnung und Fehlerverteilung sowie Auftragung der Züge sehe man die Lehrbücher nach.

13. Einzelaufnahme. Bei den exakten Kleinvermessungen („Grundstückaufnahme“ sog. „Stückvermessung“) erfolgt die Aufnahme der Einzelheiten (Grenzsteine, Gebäude, Wege usw.) durch unmittelbare Längenmessung auf Grund eines Systems von stufenweise sich aufeinander stützenden und bei umfangreichen Aufnahmen („Katastervermessungen“) auf Triangulierung und Polygonisierung gegründeten Linien, dem sog. „Liniennetz“. Für die Punkte, in welchen eine untergeordnete Linie in eine übergeordnete mündet („Liniennetz“, „Binde“, „Klein“-Punkt) werden auf Grund der Längenmessung (p. 19) Koordinaten berechnet. Verbindet eine gerade Linie die gegebenen Punkte P_a und P_e (Fig. 16) und sind die Streckenunterschiede s_n , so rechnet man nach

$$y_n - y_{n-1} = \Delta y_n = s_n \frac{y_e - y_a}{[s]}, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n = s_n \frac{x_e - x_a}{[s]},$$

sodaß durch Ansatz der gemessenen Streckensumme $[s]$ die Fehler der Längenmessung proportional den gemessenen Strecken s_n auf die Koordinatenunterschiede verteilt werden (vgl. auch Koordinatenumformung p. 34⁸⁵). Der Abschlußfehler muß innerhalb der für die Längenmessung festgesetzten „Fehlergrenzen“ (p. 21) bleiben. Bei dieser Anordnung der Messungen erfolgt somit eine fortgesetzte Verteilung bzw. Ausgleichung der Messungsfehler und Beurteilung der Genauigkeit von der Triangulierung ausgehend, über die Polygonisierung bis herab zur Kleinaufnahme. Da die Messungen der Landestriangulierungen auf die Normalnullfläche (Meeresspiegel) (p. 9) projiziert werden, ergibt demnach dies Interpolationsverfahren auch die Projektion sämtlicher Linien und der durch sie gebildeten Figuren. Zur Sicherung der Lage jeder Linie dienen besondere Messungsproben, Querlinien, Anschnitte, Verlängerungen usw., welche rechnerisch oder graphisch ausgewertet werden (z. B. Probe auf Geradlinigkeit aus den Richtungstangenten oder der Fläche des gestreckten Fehlerdreiecks). Die Methode der kleinsten Quadrate wird

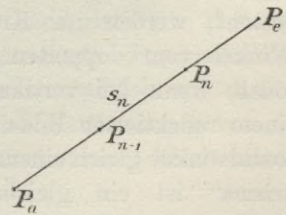


Fig. 16.

85) Anweisung IX, p. 28 und Trigonometrie, Formular 23, p. 335.

zur Ausgleichung von Linienmessungen nur selten benutzt; sie ist in Anweisung IX bei der Bestimmung wichtiger Punkte durch mehrfachen Bogenschnitt angewandt⁸⁵). Bei der Aufmessung kleiner Komplexe, bei welchen weder Anschluß an übergeordnete Systeme noch Winkelmessung stattfinden soll, wird oft ein Viereck, dessen Diagonalen gemessen sind (Diagonalenviereck), verwendet, wobei durch den Schnittpunkt sich eine Probe ergibt. Die Anordnung und Berechnung solcher Messungen ist besonders von *F. G. Gauß*⁸⁶) behandelt.

Auf ein derartiges in sich gesichertes Liniennetz gründet sich die „*Einzelaufnahme*“ entweder dadurch, daß die aufzunehmenden Punkte oder Linien (Grundstücksgrenzen, Gebäudefluchten usw.) als untergeordnete Linien in das bestehende Netz eingefügt werden, oder daß die Punkte durch Absteckung rechter Winkel auf die nahe an sie herangelegten Netzlinien projiziert werden, sog. „*Koordinataufnahme*“. In jedem Falle können für alle Punkte Koordinaten berechnet werden, im letzteren Falle durch Transformation der einzelnen Messungslinien mit den rechtwinklig zu ihnen aufgemessenen Abständen in das allgemeine System. (Die Koordinatenberechnung bleibt meistens auf einen Teil der wesentlichsten Punkte, Grenzen von „*Fluren*“, „*Gewannen*“ und sonstige wichtige Messungspunkte beschränkt.)

Die Instrumente zum Abstecken rechter Winkel sind das uralte „*Winkelkreuz*“ (groma, in neuerer Form als „*Winkelkopf*“, „*Winkeltrommel*“) und die Reflexionsinstrumente „*Winkelspiegel*“ und „*Winkelprisma*“. Beim „*Winkelspiegel*“, welcher aus zwei kleinen Spiegeln besteht, werden im Kreuzungspunkt doppelt reflektierter Strahlen Winkel vom doppelten Betrage des Spiegelwinkels (45^0) gebildet, sodaß, wenn bei vertikalen Spiegelflächen eine direkte Zielung mit einem reflektierten Bilde in Deckung erscheint, der gewünschte Horizontalwinkel gleich einem rechten Winkel abgesteckt ist. Ein „*Winkelprisma*“ ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Glasprisma, in welchem, wie *Bauernfeind* 1851 gefunden hat, doppelt reflektierte Strahlen (an der Kathete infolge von Totalreflexion) im Kreuzungspunkt mit einer direkten Zielung einen rechten Winkel bilden⁸⁷). Diese doppelt reflektierten Strahlen sind unabhängig vom Einfallswinkel und dadurch von den einfach reflektierten zu unterscheiden⁸⁸).

86) Wegen der Ausführung der Rechnung (Logarithmen, Rechenmaschine usw.), Rechenschemata usw. vgl. die Lehrbücher, speziell *F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst.

87) Vgl. die verschiedenen Lehrbücher der Geodäsie, besonders *Bauernfeind*, Vermessungskunde.

88) Es sind eine Reihe weiterer Prismen konstruiert, unter denen ein

Werden zwei „Winkelspiegel“ oder zwei sich unter 90° kreuzende Spiegel zusammengesetzt, so erhält man das „Spiegelkreuz“, ebenso das „Prismenkreuz“ (in verschiedener Form), womit gestreckte Winkel, d. h. gerade Linien abgesteckt werden können. Die Richtigkeit der Instrumente wird durch Absteckung von zwei Seiten aus geprüft, wonach Spiegelinstrumente und Prismenkreuze gegebenenfalls zu berichtigen sind. Die Genauigkeit der Absteckung beträgt rund 1' bis 2'.⁸⁹⁾ Weiteres über die Instrumente und ihren Gebrauch bei Aufnahmen und zu verschiedenen Absteckungsaufgaben geben alle Lehrbücher der Geodäsie.

Die „geometrische Karte“, der „Lageplan“, ist eine entsprechend verkleinerte Darstellung des auf den Vermessungshorizont (N. N.) projizierten Punkt- bzw. Liniensystems, hergestellt auf Grund des der Berechnung zu Grunde liegenden rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Grundlage bildet das Koordinatennetz (sog. „Quadratnetz“), in welches die Koordinaten der berechneten Punkte (Dreiecks-, Polygon- und Liniennetzpunkte) eingetragen werden, womit das „Liniennetz“ konstruiert ist, welches als Unterlage für die Eintragung der weiteren (im sog. „Handriß“ oder „Feldriß“ aufgeschriebenen) Aufmessungen dient. Zum Auftragen der Koordinaten sowie der nach der „Koordinatenmethode“ aufgemessenen Punkte dient ein Auftragapparat (Koordinatograph), bestehend aus Abscissenlineal und Ordinatenschieber. Der „Maßstab“ von Spezialkarten liegt im allgemeinen zwischen 1 : 500 bis 1 : 5000, sehr häufig gebraucht wird 1 : 1000 und 1 : 2000. (Zurzeit werden die hundertteiligen Maßstabverhältnisse bevorzugt.) Der nicht zu vermeidende „Papiereingang“ wird durch Kontrollierung der Quadratnetzlinien ermittelt und danach reduziert⁹⁰⁾. Weiteres über die geometrische Kartierung geben die geodätischen Lehrbücher, für die „Grubenaufnahme“ (Grubenrisse) die Lehrbücher der Markscheidekunde.

14. Berechnung und Teilung der Flächen.

14a. Die Flächenberechnung. Die Berechnung des „Flächeninhaltes“ vermessener Flächen kann erfolgen aus den Messungszahlen, aus

fünfeitiges Prisma von *L. Prandtl* erwähnt sei, *Zeitschr. f. Vermess.* 19 (1890), p. 462.

89) *F. Lorber*, *Zeitschr. f. Instr.* 8 (1888), p. 381; eine Fehlertheorie des Winkelprismas findet man bei *Jordan*, *Handbuch* 2, p. 36.

90) Über die bei ausgedehnten Gebieten in Frage kommenden Projektionsverzerrungen sei auf *Jordan*, *Handbuch* 3, § 59 und auf VI 1, 4 (*R. Bourgeois*) verwiesen.

den Koordinaten der Eckpunkte, graphisch auf Grundlage der Karte, oder auch durch eine Verbindung von Messungszahlen und Kartenmaßen. Die Berechnung der geradlinig begrenzten Figuren geometrischer Aufnahmen gründet sich auf die einfachsten Sätze der Planimetrie, wobei auch graphische Verwandlung⁹¹⁾ von Figuren (Vielecke in Vier- bzw. Dreiecke) in Betracht kommt. Für in Koordinaten gegebene oder auch direkt nach der Koordinatenmethode aufgemessene Figuren wird z. B. (bei rechtläufiger Zählung) gebraucht

$$2F = \sum y_n(x_{n-1} - x_{n+1}) = \sum x_n(-y_{n-1} + y_{n+1});$$

zur Ausrechnung dienen in der Regel Multiplikationstafeln oder Rechenmaschinen (IF (R. Mehmke), p. 944); wegen Anordnung, Rechen-schemata usw. siehe die Lehrbücher. Die Ableitung der Flächen von Vielecken aus Seiten und Winkeln überhaupt (vgl. III 1, 3 (M. Simon)) wird selten verwendet, da, wie oben auseinander gesetzt, die Winkelmessung in der Regel nur zur Netzlegung, nicht aber zur Kleinaufnahme dient, falls das geschieht, aber ohnehin Koordinatenberechnung eintritt. Bei der Flächenermittlung nach Plänen wird für regelmäßige Figuren entweder Dreiecks- bzw. Viereckszerlegung verwendet, wobei verschiedene Hilfsmittel gebraucht werden, z. B. eine mit feinen Quadratnetzlinien versehene Glastafel, sowie eine transparente Hyperbeltafel von Kloth⁹²⁾. Haben die im Flächenprodukt F zu vereinigenden Faktoren a und b die mittleren Fehler m_a bzw. m_b , so ist $M_F = \pm \sqrt{(am_b)^2 + (bm_a)^2}$, woraus sich mit Rücksicht auf Messungs-, Kartenfehler usw. verschiedene Folgerungen ergeben⁹²⁾. Ein bequemes Näherungsverfahren zur Berechnung namentlich langgestreckter unregelmäßig begrenzter Figuren liefert das „Parallelnetz“ („Harfe“, „Fadenplanimeter“), womit sich die Fläche als Summe schmaler Trapezstreifen ergibt zu $F = k[p]$, (p = Trapezmittellinien mit Zirkeladdition erhalten, oder mit der oben erwähnten Glastafel abgelesen). Dies kann für gekrümmte Umfangslinien auch zur Anwendung der Simpson'schen Flächenformel führen. Im übrigen ist auf die Lehrbücher zu verweisen. In ausgedehntem Maße finden die „Planimeter“ (Polar-, Präzisions-, Scheiben-, Kugelrollplanimeter vgl. II A 2 (A. Voß), p. 128) Anwendung, deren Genauigkeit in mittlerem relativen Flächenfehler etwa zu $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{1000}$ angenommen und bei den Präzisionsinstrumenten bis zu $\frac{1}{2000}$ und sogar $\frac{1}{5000}$ gesteigert werden kann. Die Flächenberechnung bei der Vermessung

91) E. Collignon, Ann. des ponts et chauss. 1887, p. 9.

92) Jordan, Handbuch 2, Kap. III und Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 628 (22 (1893), p. 60, 338); 32 (1903), p. 686; J. Schnöckel, ibid. p. 129 und 369.

zusammenhängender größerer Gebiete (ganze Gemarkungen, Fluren usw.) stellt zunächst den „Sollinhalt“ für ein Kartenblatt (Flur, Block usw.) aus den Koordinaten des das Blatt umrahmenden Liniennetzes fest, worauf die Berechnung der Einzelflächen folgt, welche auf den ermittelten „Sollbetrag“ ausgeglichen werden. Für alle diese Berechnungen sind entsprechende „Fehlergrenzen“ innezuhalten, welche gemäß der Genauigkeit der Flächenberechnung unter Berücksichtigung der Messungs- und Kartierungsfehler, des Kartenmaßstabes usw. aufgestellt sind; für die preußischen Kleinmessungen gilt z. B. nach Anweisung VIII als amtliche Fehlergrenze $0,01 \sqrt{60 F} + 0,02 F^2$ für F in qm.

14b. Die Flächenteilung. Bei der Teilung (Veränderung, Umlegung) vermessener Flächen handelt es sich darum, rechnerisch oder graphisch auf Grund eines Planes die den gerade vorliegenden praktischen Bedingungen entsprechenden Einteilungs- oder Begrenzungslinien zu bestimmen und im Anschluß an die Messungsergebnisse oder den Plan diese Linien im Gelände abzustecken, und schließlich die Richtigkeit und Genauigkeit der Absteckung zu prüfen. Das Verfahren gründet sich auf die Teilung geradlinig begrenzter einfacher Figuren, welche entweder im Plan, oder durch Koordinaten der Eckpunkte, oder durch Messungszahlen im Handriß, auch Seiten und Winkel, gegeben sein können. Die planimetrische Theorie dieser Teilungen behandeln die Lehrbücher der Elementarmathematik, die hauptsächlich technisch in Betracht kommenden Anwendungen die Lehrbücher der Geodäsie; die rechnerische Lösung auf Grund von Koordinaten ist besonders von *F. G. Gauß* entwickelt⁹³.

Die Aufgaben lassen sich im allgemeinen zurückführen auf die, von einem durch zwei sich schneidende Linien gegebenen Winkelraum (Dreiecksraum) oder einem durch drei Linien umgrenzten an einer Seite offenen Doppelwinkelraum (Vierecksraum) bestimmte Flächenstücke unter bestimmten Bedingungen abzuschneiden. Diese Bedingungen werden in der Vermessungstechnik durch verschiedenartige Umstände vorgeschrieben; die wesentlichsten mathematisch in Betracht kommenden sind: 1) Die abzusteckende Trennungslinie soll durch einen gegebenen Punkt gehen, der in den meisten Fällen auf einer der gegebenen Umgrenzungslinien liegt; 2) die Trennungslinie soll eine bestimmte Richtung haben, z. B. parallel oder

93) *F. G. Gauß*, Die Teilung der Grundstücke, 4. Aufl., Berlin 1904. Die Literatur zu zahlreichen besonderen Fällen ist in den jährlichen Literaturübersichten der Zeitschr. f. Vermess. angegeben.

rechtwinklig zu einer gegebenen Linie, in manchen Fällen zu einer der Umgrenzungslinien; 3) die durch die Trennungslinie abgetrennten Liniestücke der Urfigur sollen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen (sog. „Proportionalteilung“). Für die einfache Dreiecksteilung ergibt sich danach z. B. folgende Übersicht. Vom Dreieck U (Fig. 17) mit den Seiten A, B, C soll von der gegenüber A liegenden Ecke aus ein Flächenstück f durch Liniestücke b, c abgetrennt werden, sodaß wird $\frac{b}{B} = m, \frac{c}{C} = n$, und demnach $k = \frac{f}{U} = \frac{b}{B} \cdot \frac{c}{C} = m \cdot n$. Das gibt für den Fall 1), wenn Punkt P auf C durch c gegeben ist, das gesuchte $m = \frac{k}{n}, b = mB$; für Fall 2), wenn z. B. die Trennungslinie parallel A sein soll, $m = n = \sqrt{k}$, usw. Entsprechend gestaltet sich die Vierecksteilung, wobei noch besonders hinzuweisen ist auf die auf

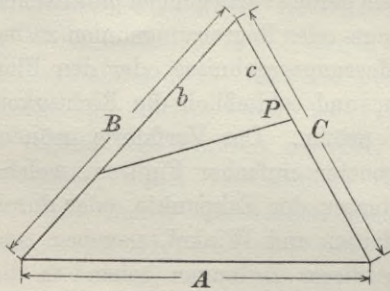


Fig. 17.

quadratische Gleichungen führende Parallel- und Proportionalteilungen, welche verschiedene Lösungen zulassen⁹⁴). Die richtige Absteckung wird schließlich durch Aufmessung und Flächenberechnung der abgesteckten Figuren innerhalb der erwähnten Fehlergrenzen sichergestellt. Im übrigen ist zu bemerken, daß in den verwickelten Fällen der Praxis sehr viel Annäherungsverfahren zur Anwendung kommen derart, daß die Bedingung für die Lage der Teilungslinie (z. B. parallel oder rechtwinklig zu einer bestimmten Linie) vorweg genau erfüllt wird und die Flächenbedingung zunächst nur genähert, sodaß dann nach erfolgter Flächenberechnung noch kleine Verschiebungen der Linie unter Berücksichtigung der Lagebedingung auszuführen bleiben, die dann auf die Absteckung eines schmalen Dreiecks, Paralleltrapezes usw. herauskommen. Derartige Annäherungsverfahren können auf Grund eines „Handrisses“ oder auch direkt im Felde vollständig rechnerisch durchgeführt werden. Die gleiche Aufgabe liegt vor bei der sog. „Grenzbegradigung“, wobei es sich darum handelt, einen gebrochenen Grenzzug bei unveränderter Flächengröße der Figuren durch eine gerade Linie zu ersetzen. Muß

94) Über einige besondere Behandlungen vgl. Zeitschr. f. Vermess. 13 (1884), p. 277; 14 (1885), p. 289; 15 (1886), p. 465; 23 (1894), p. 321; 24 (1895), p. 80, 383; 27 (1898), p. 490; 30 (1901), p. 159; 31 (1902), p. 317, 477; 32 (1903), p. 378; 33 (1904), p. 97, 121, 124; ferner die „Allgemeinen Vermessungsnachrichten“, Liebenwerda, und andere Fachzeitschriften.

bei den Teilungen der verschiedenartige Wert der Flächen (Bonität) in Rücksicht gezogen werden, so gehen die danach bestimmten Flächenwerte in die Rechnung ein⁹⁵).

15. Das Abstecken von geraden Linien und Kreisbogen. Das Abstecken (Ausrichten) von geraden Linien im Gelände (Vertikalebene) erfolgt auf kurze Entfernungen, falls nicht besondere Genauigkeit erforderlich ist, mit Fluchtstäben (Baken) nach freiem Auge oder mit Anwendung eines Handfernrohrs (Feldstecher) durch „Einweisen“ oder auch mit Winkel- oder Prismenkreuz (vgl. p. 61). Bei genauen Absteckungen, langen Linien usw. wird der Theodolit oder ein besonders in der Vertikalebene richtig kippendes Fernrohr (Alignementsfernrohr) verwendet, mit festem Stand auf einem Endpunkt oder fortschreitender Standänderung von Linienpunkt zu Linienpunkt. Für sehr lange Linien werden auch indirekt Zwischenpunkte abgesteckt, indem in der Nähe der Linie ein Hilfspunkt angenommen wird, der kleine Abweichungswinkel von der Geraden mit dem Theodolit gemessen und mit Hilfe der ebenfalls bestimmten Entfernung die Verschiebung des Hilfspunktes berechnet wird. Ist eine direkte Zielung zwischen den Linienendpunkten nicht möglich, wie z. B. bei der Achsenbestimmung für große Tunnel, so wird der Absteckung eine Triangulierung zu Grunde gelegt, die den Winkel zwischen Achsenrichtung und gegebenen trigonometrischen Linien (Miren) ergibt, wonach im Tunnel mit dem Alignementsfernrohr mit fortschreitender Standänderung die Linienpunkte gewonnen werden. Die Fehlertheorie dieser Absteckungen entspricht der des gestreckten Polygonzuges (vgl. p. 56)⁹⁵). Über kleine Absteckungen mit Winkelspiegel, Rechtecke, Quadratnetze, Parallelenabsteckung usw. s. die geodätischen Lehrbücher.

Das Abstecken von Kreisbogen wird beim Bau von Straßen, Kanälen, insbesondere Eisenbahnen erforderlich. Durch das Projekt ist in der Regel gegeben die Richtung zweier sich schneidender Geraden (Tangenten), welche durch einen Kreisbogen mit ebenfalls durch die Bedingungen des Projekts vorgeschriebenem Radius zu verbinden sind; seltener ist eine Tangente an einen oder mehrere Bogen zu legen. Verlangt wird, daß in kurzen Abständen Bogenpunkte im Gelände abgesteckt werden. Die Bestimmungsstücke sind demnach: die beiden

95) Beispiele für Linien- und Tunnelabsteckungen gibt *Jordan*, Handbuch 2, § 195, 205 mit weiterer Literatur, ferner *Hartner-Doležal* 2, p. 447 u. 448. Für den Gotthardtunnel z. B. *C. Koppe*, Zeitschr. f. Vermess. 2 (1873), p. 369; 5 (1876), p. 86; für den Simplontunnel *M. Rosenmund*, *ibid.* 32 (1903), p. 74.

„Tangentenrichtungen“, der von ihnen eingeschlossene Winkel, der Radius, in besonderen Fällen ein bestimmter Kurvenpunkt, oder auch zwei Punkte (Sehne). Erforderlich ist daher in der Regel zuerst Messung des Tangentenschnittwinkels mit dem Theodolit. Danach ergibt sich dann zunächst als Gerippe der weiteren Absteckungen (sog. Hauptpunkte, Hauptlinien) die durch Abmessung auf den Tangenten zu findenden Berührungspunkte (ev. deren Verbindungslinie) und durch die rechtwinkligen Abstände bzw. durch Halbierung des Schnittwinkels die Bogenmitte (Proben). Neben diesem einfachen Fall wird häufig die Absteckung weiterer Hauptlinien erforderlich, d. h. ein den Bogen einschließendes Tangentenpolygon („Zwischentangenten“ als Fortführung des einfachen Falls) oder ein eingeschriebenes „Sehnenpolygon“. Die zugehörigen Teilzentriwinkel ergeben sich entweder durch aliquote Einteilung des ganzen Zentriwinkels (bestimmt durch die Hauptberührungspunkte) oder durch Berechnung der zu bestimmten (runden) Bogen-, Tangenten-, oder Sehnenlängen gehörenden Winkel. Die Methode des Sehnenpolygons, d. h. also die Herstellung eines der Kurve eingeschriebenen Polygonzuges mit bestimmten (ev. konstanten) Brechungswinkeln und Seiten, ist die in der Regel bei der Absteckung von Kurventunneln verwendete Methode. Kann im „Tangentenschnittpunkt“ der Theodolit nicht aufgestellt werden, ist dieser Punkt überhaupt nicht herstellbar, sowie auch Längenmessung in den Tangentenrichtungen nicht ausführbar, so müssen die Bestimmungselemente auf indirektem Wege beschafft werden (z. B. sehr oft bei Kehrtunneln). Die wesentlichsten Fälle sind: Verbindung der Tangenten durch eine meßbare gerade Linie und Messung der anliegenden Winkel, wodurch das abgeschnittene Dreieck bestimmt ist, oder Einführung eines Polygonzuges (möglichst wenig Zwischenpunkte) oder endlich Triangulierung mit Ausgleichung; in solchen Fällen wird auch Berechnung der Absteckungselemente nach rechtwinkligen Koordinaten verwendet.

Auf die Absteckung des Gerippes der Hauptlinien gründet sich diejenige der „*Einzelbogenpunkte*“, welche in der einfachsten Weise durch rechtwinklige Koordinaten (sog. „*Koordinatenmethode*“) von der Tangente oder Sehne aus mit „Winkelspiegel“ usw. sich ergeben, und zwar entweder mit gleichen runden Abständen (5, 10, ... m) auf Tangente bzw. Sehne, oder mit gleichen Bogenlängen (5, 10, ... m).

Neben dieser unmittelbar auf die Hauptlinien gegründeten „*Koordinatenmethode*“ kommen noch einige andere Verfahren in Betracht. Eine Methode (Fig. 18) ist die der „*Peripheriewinkelstrahlen*“ aus „*festem Stand*“, wobei mit fortgesetzter Abtragung einer kon-

stanten Sehne (z. B. 20 m) die zugehörigen Zentriwinkelvielfachen von der Tangentenrichtung aus mit dem Theodolit hergestellt

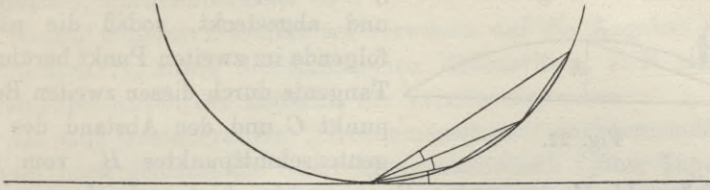


Fig. 18.

werden oder runde Winkel angetragen werden. Eine andere Methode ist (Fig. 19): Aufsuchen der Bogenpunkte mittelst der zu einer bestimmten Sehne gehörigen Peripheriewinkel bei „wanderndem

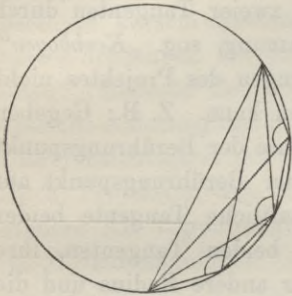


Fig. 19.

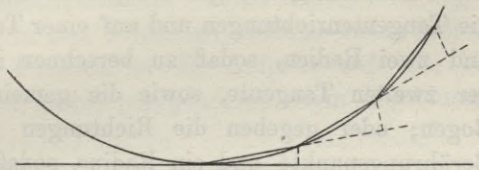


Fig. 20.

Stand“ eines diesen Winkel fassenden „Freihandreflexionsinstrumentes“, welches wie ein einstellbarer Winkelspiegel oder ein Doppelpisma nach Art des Sextanten usw. auf diesen berechneten Winkel einstellbar ist (Arkograph).

Weitere „Einrückungsverfahren“ sind die sog. Absteckung von der „verlängerten Sehne“ und von der „verlängerten Tangente“ aus, wobei ein Meßband (20 m) bequem

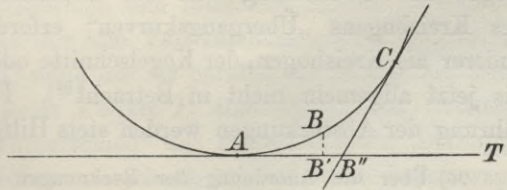


Fig. 21.

verwendbar ist. Bei ersterem (Fig. 20) wird die erste Sehne von der Tangente aus mit den hierfür (meistens für runde Bogenlängen) berechneten rechtwinkligen Koordinaten abgesteckt, diese Sehne verlängert und von ihr aus die nächste Sehne durch die auf erstere bezogenen rechtwinkligen Koordinaten abgesetzt, wonach die Arbeit

in gleicher Weise fortschreiten kann. Beim zweiten Verfahren (Fig. 21) werden in ähnlicher Weise von der Tangente AT aus in rechtwinkligen Koordinaten zwei gleichabständige Kurvenpunkte B und C berechnet und abgesteckt, sodaß die nächstfolgende im zweiten Punkt berührende Tangente durch diesen zweiten Bogenpunkt C und den Abstand des Tangentenschnittpunktes B' vom Ord-

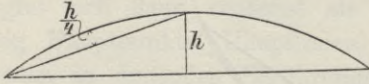


Fig. 22.

natenußpunkt B' des ersten Bogenpunktes bestimmt ist, womit die fortgesetzte Absteckung der Tangenten mittels rechtwinkliger Bogenpunktkoordinaten ermöglicht ist. Auch die Einschaltung von Zwischenpunkten über gegebenen Sehnen durch fortgesetzte Einlegung von Zwischensehnen mittels des Pfeilhöhenviertels (sog. „Viertelsmethode“, Fig. 22) wird als Näherungsmethode für flache Bogen angewendet⁹⁶).

Ein besonderer Fall ist die Verbindung zweier Tangenten durch mehrere Kreiskurven vorgeschriebener Krümmung, sog. „Korbbogen“, welche notwendig werden, wenn den Bedingungen des Projektes nicht mit einem einzigen Bogen entsprochen werden kann. Z. B.: Gegeben die Tangentenrichtungen und auf einer Tangente der Berührungspunkt und zwei Radien, sodaß zu berechnen ist der Berührungspunkt auf der zweiten Tangente, sowie die gemeinschaftliche Tangente beider Bogen; oder gegeben die Richtungen der beiden Tangenten, ihre Berührungspunkte und ein Radius, sodaß der andere Radius und die gemeinschaftliche Tangente zu bestimmen sind. In manchen Fällen werden auch mehr als zwei Radien erforderlich, z. B. gegeben die beiden Tangentenrichtungen, die Berührungspunkte und drei Radien. Die Bogen sind bestimmt, sobald ihre Zentriwinkel berechnet sind⁹⁷). Bei der Absteckung der Eisenbahnlinien sind zwischen Geraden und Bogen zur Überleitung von der Krümmung Null zur Krümmung des Kreisbogens „Übergangskurven“ erforderlich. Die Absteckung anderer als Kreisbogen, der Kegelschnitte oder anderer Kurven, kommt bis jetzt allgemein nicht in Betracht⁹⁸). Für die praktische Durchführung der Absteckungen werden stets Hilfstabellen verwendet⁹⁹) (oft

96) Über die Anordnung der Rechnungen und Messungen sowie über weitere Aufgaben vgl. die Lehrbücher, z. B. *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XVII und *Hartner-Doležal* 2, § 28—31.

97) *E. Puller*, Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 519; 23 (1894), p. 257; *E. Hammer*, ibid. 29 (1900), p. 236 (vgl. Literaturübersichten).

98) *Hecht*, Hand- und Hilfsbuch zum Abstecken von Eisenbahn- und Straßenkurven mit besonderer Rücksicht auf die Verwertung der Kegelschnitte, Dresden 1893.

99) *Sarrazin* und *Oberbeck*, Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen

auch in Taschenkalendern enthalten), worin z. B. enthalten sind zum Radius 1 (bezw. 100) als Funktionen der Zentriwinkel: Tangentenlängen, Bogenlängen, Sehnenlängen, Pfeilhöhen, Scheitelabstände; ferner Kreiskoordinaten, Peripheriewinkel usw.

Wegen weiterer Literatur sei verwiesen auf die Angaben in den Lehrbüchern¹⁰⁰), sowie die technischen Zeitschriften, z. B. auch die Literaturübersichten der Zeitschr. für Vermessungswesen.

Als eine besondere bei „Grubenmessungen“ vorkommende Aufgabe sei noch genannt die Übertragung oberirdisch („über Tage“) gegebener Punkte bezw. Richtungen in die Grubenräume („unter Tage“) und umgekehrt, die sogenannte „Orientierungsmessung“ mit „Schachtlotung“. Da Richtungsübertragung mit dem Kompaß (Deklinatorium, Magnetometer) nur in unmagnetischem Gebirge möglich und nicht in allen Fällen genügend genau ist, handelt es sich dann darum, zwei oder auch mehrere Punkte zu projizieren, entweder beide in kurzem Abstand in einem Schacht oder je einer in benachbarten Schächten. Hierzu dient entweder direkte Ablotung mit „Schachtloten“ (Methode der schwingenden oder der fixierten Lote) oder optische Ablotung mit Lotfernrohr; letzteres Verfahren ist jedoch wegen Undurchsichtigkeit der Luft in den Schächten vielfach unanwendbar. Nach Projektion von zwei Punkten ist die Aufgabe auf eine besondere Art trigonometrischen bezw. polygonometrischen Anschlusses (p. 57) zurückgeführt¹⁰¹).

D. Höhenmessung.

16. Das Nivellieren.

16a. Definition des Höhenunterschiedes, Historisches. Die Methode der Höhenbestimmung beim sogenannten „Nivellieren“ mit Verwendung wagerechter Ziellinien und lotrechter Skalen (vgl. p. 12) folgt unmittelbar aus der für die Vertikalebene zweier Punkte gegebenen Definition. Der Abstand der als parallel zur Normalnullfläche betrachteten Horizonte zweier Punkte P_1 und P_2 (in den Lotlinien gemessen) ist der „Höhenunterschied“ der Punkte mit der Definition $\Delta h_{12} = h_2 - h_1$. Diese Höhenunterschiede werden durch kurze wage-

usw., Berlin; *Knoll*, Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Straßen- und Eisenbahnen, 2. Aufl. von *Weitbrecht*, Stuttgart 1902 und andere.

100) *Jordan*, Handbuch 2, p. 842; *Hartner-Doležal* 2, p. 447.

101) Weiteres über die Schachtlotungen und Anschlußmessungen geben die Lehrbücher der Markscheidkunde; man vgl. auch „Mitteilungen aus dem Markscheidewesen“, Freiberg i. S.

rechte Ziellinien zwischen den Lotlinien einander naheliegender Punkte unmittelbar hergestellt. Schneiden diese Ziellinien an den Lotlinien in P_1 und P_2 die Stücke l_1 und l_2 ab, so ist $\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = l_1 - l_2$, oder mit Einführung des Horizontes h_i der wagerechten Ziellinie („Instrumenthorizont“) $h_i = h_1 + l_1$; $h_2 = h_i - l_2$. Hierbei ist von der Konvergenz der Lotlinien abgesehen, oder aber die Abweichung durch Anwendung gleichlanger Ziellinien als eliminiert betrachtet („Nivellieren aus der Mitte“). Der Höhenunterschied entfernter Punkte ergibt sich als die Summe der zugehörigen Einzelunterschiede

$$h_{ae} = \Delta h_{a1} + \Delta h_{12} + \dots + \Delta h_{ne}.$$

Wird die wagerechte Linie durch ein mit einer Setzwage (Bleiwage oder Setzlibelle) wagerecht zu richtendes „Richtscheid“ gebildet und an einem lotrechten Stab der Höhenunterschied entnommen, so hat man die grobe Höhenbestimmung mit dem „Staffelzeug“, angewendet z. B. bei Erdbauten (vgl. Nr. 16e). Zur Herstellung wagerechter Ziellinien mit Einwinken einer Scheibe in die wagerechte Sicht an den lotrechten Stäben l_n in P_n diente schon im Altertum die an einem Stab aufgehängte „Bleiwage“ sowie die nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren zwei der Wagerechten angehörende Zielpunkte darbietende „Kanalwage“¹⁰²). Nach Erfindung des „Zielfernrohres“ wurden seit Ende des 17. Jahrhunderts mehrfach Versuche gemacht, dieses zum „Fernrohrniveau“ auszubilden; erst seit Beginn des 19. Jahrhunderts wurde die heutige Form als „Nivellierinstrument“ gefunden und besonders seit der Zeit der ersten Eisenbahnbauten das heutige Nivellierverfahren mit dem Nivellierinstrument zu der exaktesten aller Höhenmessungsmethoden ausgebildet.

16b. Der Nivellierapparat besteht aus dem „Nivellierinstrument“ und den „Nivellierlatten“. Das Nivellierinstrument ist eine Verbindung von Zielfernrohr und Libelle, so daß, wenn die Blase der mit dem Fernrohr in gleicher Richtungsebene befindlichen Libelle auf den Normalpunkt einspielt, die Absehlinie des Fernrohres horizontal gerichtet ist, oder auch kleine Abweichungen von der Horizontalen durch Ablesen der Blasenstellung in der Libellenteilung gemessen werden können. Die Art der Verbindung von Libelle und Fernrohr untereinander sowie mit dem als Träger derselben erforderlichen Unterbau (in der Regel ein „Dreifuß“ mit Stellschrauben) kann verschieden sein; das wesentlichste Unterscheidungsmerkmal ist die Art der Fernrohrlagerung und der Libellenanordnung, ob Fernrohr und

102) Über einige ältere Formen dieser Vorrichtung und weitere Literatur vgl. Vogler, Prakt. Geom. 2, § 228.

Libelle untereinander und mit dem Unterbau fest oder beweglich (umlegbar), sowie auch durch Vermittlung von Mikrometerschrauben verbunden sind, wobei für die „Fehlertilgung“ besondere Anordnungen in Betracht kommen. Hiervon ist auch die Erzielung der Bedingungen, welchen das Instrument in bezug auf seine Achsen (Libelle, Ziellinie, Ringachsen, Drehachsen) genügen muß, die sogenannte „Berichtigung“ abhängig, deren Endresultat sein muß: bei Einspielen der Libelle auf den Normalpunkt (vgl. p. 18) wagerechte Zielung. Die Anordnung der Instrumente und die entsprechenden Berichtigungsverfahren sind in den Lehrbüchern ausgiebig behandelt. Die Leistung eines Nivellierinstrumentes hängt (abgesehen von fester Aufstellung und sicherem Gang der mechanischen Teile) ab von Fernrohr und Libelle. Die Angabe der Libellen liegt bei 1 P.L. oder 2 mm-Teilung etwa zwischen 50" und 3", die Vergrößerung der Fernrohre ist 15 fach bis 45 fach; stärkere Fernrohre werden im Felde nicht verwendet. Bei sachgemäßer Zusammenstellung dieser Werte kann die Horizontierung der Absehlinie mit einem mittleren Fehler von einigen Zehntel Sekunden bis zu mehreren Sekunden erfolgen¹⁰³).

Die „Nivellierlatten“, welche die lotrechten Abschnitte l_n zu bilden haben, sind mit dem Fernrohr des Nivellierinstrumentes abzulesende Zielskalen, die je nach der erstrebten Genauigkeit (in Übereinstimmung mit der Instrumentleistung) in $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{1}$ cm oder auch $\frac{1}{2}$ dm und $\frac{1}{1}$ dm geteilt sind; es kommen auch andere Einteilungen (z. B. Doppellinien = 4 mm, auch 2 mm und 1 mm) vor. Früher wurden statt dieser Ableseskalen Latten mit einer in die Wagerechte einzuwinkenden Zielscheibe benutzt. Die Teilung ist eine „Feldeinteilung“ mit abwechselnd rot-weißen oder schwarz-weißen Intervallen oder auch eine „Strichteilung“. Die Skalen werden in der Regel aus Holz hergestellt, neuerdings beginnen für Präzisionsarbeiten auch Versuche mit Metallskalen verschiedener Anordnung, um die mühevollen, für Feinmessungen täglich erforderlichen Vergleichen der Holzskalen mit Normalmaßen (vgl. p. 20) und nachfolgenden Reduktionen zu ersparen bzw. diese letzteren zu verschärfen. Die Latten werden mit daran befestigten Dosenlibellen lotrecht gerichtet und auf besonderen Unterlegeplatten oder in den Boden getriebenen Bolzen oder Pfählen aufgestellt, beim Markscheiden auch als Hängelatten eingerichtet.

16c. Das Nivellierverfahren. Bei der Anwendung des Nivellierverfahrens kommen stets kurze Zielweiten in Betracht. Für die fortlaufenden

103) Genauigkeitsuntersuchungen findet man bei *Jordan*, Handbuch 2, Kap. X; vgl. auch die Fußnote 20.

Höhenbestimmungen in Nivellierzügen gilt als mittlere Zielweite rund 50 m (wodurch bei Straßen, Eisenbahnen, Wasserläufen gleichzeitig in bequemer Weise Anschluß an die vorhandene Längeneinteilung, „Stationierung“, dieser Bauten gewonnen wird), so daß die Nivellierskalen in Abständen von 100 m aufgestellt werden; bei Geländeaufnahmen sind die Zielweiten wechselnd, in anderen Fällen, z. B. bei Arbeiten in Gruben unter Tage, sehr kurz. Bei gleichen Zielweiten kann der Einfluß der Erdkrümmung als eliminiert betrachtet werden, bei den ungleichen Zielweiten der Geländeaufnahme wird die Abweichung ohne weiteres vernachlässigt. Während bei einfachen Nivellierungen die beiden Skalenablesungen l_1 und l_2 bei einspielender Libelle und wagerechten Ziellinien genommen werden, wird bei Feinnivellierung meistens mit nur genähert einspielender Libelle und Ablesung der Blasenstellung mit Reduktion auf die wagerechte Zielung gearbeitet, ferner auch zur Verminderung der Skalenablesefehler die Einstellung bestimmter Skalenstellen oder Marken mittelst der Mikrometerschraube mit Reduktion nach den zugehörigen Libellenablesungen verwendet, oder auch mehrfache Einstellung bzw. Ablesung, sei es an Parallelfäden, mit Drehen des Fernrohrs oder der Libelle in verschiedenen Lagen usw.¹⁰⁴). Zur Vermeidung der Subtraktionen $l_1 - l_2$ wird auch nach dem Vorgange der preußischen Landesaufnahme die Rechnung mit dekadischen Ergänzungen, z. B.

$$+ 1,012 - 1,258 = + 1,012 + \times 8,742 = \times 9,754 (= - 0,246),$$

wo \times eine negative Einheit in seiner Stelle ausdrückt, angewendet, wozu dann in dieser Art bezifferte Skalen benutzt werden. Zur Sicherung und Verfeinerung der Skalenablesungen werden auch „Wendelatten“ mit beiderseitiger Teilung in verschiedener Anordnung, sowie doppelte „Anbindepunkte“ usw. benutzt¹⁰⁴).

Die Anwendung des Nivellierverfahrens ist eine vielseitige und verschiedenartige; es kommen in Betracht die Aufgaben der Erdmessung, der Landesvermessung und technische Arbeiten mannigfaltiger Art;

104) Eine Übersicht über die bei den verschiedenen Landesnivellierungen gebrauchten Apparate hat *v. Kalmar* gegeben, Verhandln. der Permanenten Komm. d. Intern. Erdm. in Genf 1893, Berlin 1894, Beilage A II. Über die französischen Instrumente und Methoden findet man näheres bei *Lallemant*, Nivellement; vgl. ferner *C. M. Goulier*, Paris C. R. 105 (1887), p. 270, 306; *M. Lévy*, ibid. 110 (1890), p. 1233. Ein kathetometrisches Nivellierinstrument ist von *Chr. A. Vogler* beschrieben, Zeitschr. f. Vermess. 31 (1902), p. 55.

105) Weiteres über solche Aufgaben siehe in den Lehrbüchern sowie für die verschiedenen bautechnischen Zwecke in dem Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Leipzig.

dementsprechend ist allgemein zu unterscheiden: Anwendung des Nivellierens in der Technik (Kleinnivellierung), deren Genauigkeit der gerade vorliegenden Aufgabe entsprechen muß, und Nivellierung für die Zwecke der Erdmessung und die Hauptssysteme der Landesvermessung, deren Ergebnis das mit größtmöglicher Genauigkeit bestimmte Landeshöhennetz ist, welches gebildet wird durch ein System von Festpunkten, „Bolzen“, „Höhenmarken“ usw., die an festen Gebäuden oder in Steinpfeilern angebracht sind. Diese letzteren Arbeiten bezeichnet man als „Präzisionsnivellierung“ oder „Nivellierung I. Ordnung“. Eine Mittelstellung zwischen diesen beiden Aufgaben des Nivellierens nehmen diejenigen Arbeiten ein, welche als Fortführung oder auch als Ersatz der etwa fehlenden Landespräzisions-Nivellierung zur Grundlegung für umfangreiche und wichtige Kleinnivellierungen zu dienen haben („Netznivellierung“, „Nivellierung II. Ordnung“). Die Nivellierungen I. und II. Ordnung bestehen lediglich aus Zügen zwischen Festpunkten, die Kleinnivellierungen dagegen aus der Verbindung der Zuginivellierung mit Geländeaufnahmen.

Bei „Kleinnivellierungen“ handelt es sich um die verschiedenartigen Arbeiten zu technischen Zwecken: Geländenivellierungen auf Grund eines vorhandenen Lageplanes mit nachfolgender Auszeichnung von Linien gleicher Höhe (Höhenschichtlinien, Horizontalkurven), sodann die Aufnahme von Längen- und Querschnitten, wie sie Eisenbahn-, Straßen-, Wasser-, Bergbau usw. erforderlich machen. Bei der zeichnerischen Darstellung dieser Vertikalschnitte (Höhenpläne) wird in der Regel eine entsprechende Vergrößerung der Ordinaten (Höhen) angewendet. Für die Absteckung projektierter Höhenpunkte (vgl. die vorerwähnten Bauten), ist die dem Projektpunkte für eine bestimmte, aus einem Festpunkt abgeleitete, Instrumentaufstellung entsprechende Lattenablesung $l_n = h_i - h_n$ zu erzielen. Bei der Aufnahme der Sohlenpunkte bei Gewässern wird der Wasserspiegel als Nivellierhorizont verwendet, dessen Höhenlage bzw. Schwankungen dann zu bestimmen sind (Aufnahmepegel)¹⁰⁵.

Gelegentlich kommt auch die dem Prinzip der Kanalwage (p. 70) entsprechende Schlauchkanalwage zur Anwendung. Durch eine Schlauchleitung sind zwei vertikale Glaszylinder verbunden, in denen der Wasserstand (event. durch Schwimmer) direkt an Skalen abgelesen wird. Auf dem Telegraphenberge bei Potsdam ist seitens des Preußischen Geodätischen Instituts¹⁰⁶) eine 900 m lange Röhren-

106) Veröffentlichung des Königl. Geodät. Instituts, N. F. 14; R. Schumann, Ergebnisse einer Untersuchung über Veränderungen von Höhenunterschieden auf dem Telegraphenberge bei Potsdam, Berlin 1904.

leitung angelegt, um durch ein hydrostatisches Nivellement eventuelle Bewegungen der Erdscholle aufzudecken.

16 d. Die Genauigkeit der Nivellierung ist einerseits abhängig von den instrumentellen Werten des Nivellierapparates (Skala, Libelle, Fernrohr), sowie der Art der Ausnützung des Apparates (Libelleneinstellung oder Ablesung, Skaleneinstellung bezw. Ablesung), andererseits von den mechanischen Fehlern des Verfahrens (Instrument-, Stativ- und Lattenaufstellung, Einsinken), sowie den äußeren Umständen (störende Einwirkung von Temperatur und Feuchtigkeit auf Instrument, Stativ und Latte) und bei den dicht über den Erdboden hinstreichenden Ziellinien besonders auch der „topographischen Refraktion“, welche zur Innehaltung kurzer Ziellinien zwingt, und der Luftwallung, welche Feinarbeiten an bestimmte Tagesstunden (Nachmittag) bindet. Wind macht das Nivellieren überhaupt unmöglich. Die aus diesen verschiedenartigen Ursachen entstehenden Fehler sind teils zufällige, teils regelmäßige, zusammenwirkend nach der allgemeinen Form wie p. 21 $\sqrt{f^2 s^2 + u^2 s}$. Zur Herabminderung (bezw. Elimination) der Fehler ist das Nivellierverfahren in mannigfacher Weise ausgebildet und verfeinert worden¹⁰⁷⁾.

Zusammenhängende Nivellierungsnetze, in denen die Züge zwischen den Netzknotenpunkten stets aus Hin- und HERNIVELLIERUNG gebildet werden, werden nach der Methode der kleinsten Quadrate vielfach nach „bedingten“, jedoch auch nach „vermittelnden“ Beobachtungen (vgl. p. 16) ausgeglichen, wobei die Gewichtsbestimmung für die Züge besonderer Berücksichtigung bedarf. Die Bedingungsgleichungen (Polygon- und Anschlußbedingungen) bezw. die Fehler- und Normalgleichungen lassen sich bei derartigen Netzen unmittelbar nach den Netzskizzen anschreiben, die Rechenarbeiten gestalten sich in den meisten Fällen sehr einfach. Bei der Zusammensetzung des ein großes Staatsgebiet oder Teile eines Kontinentes, wie z. B. Westeuropa, überziehenden Netzes, wie es die Aufgaben der Erdmessung erforderlich machen, ist auf die Abplattung der Erdoberfläche und die Schwereanomalien Rücksicht zu nehmen und die dementsprechenden Korrekturen den einzelnen Zügen beizulegen (vgl. VI 1, 3). Die Genauigkeit der Nivellierung kann beurteilt werden entweder nach den Abweichungen, welche zwei Messungen für dieselben Teilstrecken ergeben, oder nach dem

107) S. Stampfer, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren, 1. Aufl., Wien 1845; 9. Aufl. F. Lorber, Wien 1894; 10. Aufl. E. Doležal, Wien 1902; ferner Jordan, Handbuch 2, Kap. X; Vogler, Prakt. Geom. 2.

Fehler, welcher bei der Zusammenstellung der Züge zum Netz (Polygonschlußfehler) oder der Netzausgleichung event. mit Anschlußbedingungen sich berechnet. Als Genauigkeitsmaß dient allgemein der mittlere Fehler der Nivellierung einer Strecke zwischen zwei Punkten, deren horizontaler Abstand 1 km beträgt, welcher also bei der Normalzielweite 50 m rund zehn Aufstellungen erforderlich macht. So spricht man vom „mittleren Kilometerfehler“ einer einmaligen oder einer doppelten Nivellierung oder der Schleifen (Polygone) des Netzes. Nach der älteren Bestimmung der europäischen Gradmessung (1867) galt eine Nivellierung als gut, wenn der „wahrscheinliche“ Kilometerfehler nicht ± 3 mm, als brauchbar, wenn er nicht ± 5 mm überschritt; diese Genauigkeit wird heute ohne besondere Schwierigkeit mit mittleren Instrumenten, bei sorgfältigem Verfahren auch für Nivellierungen II. Ordnung erzielt (und als „mittlerer“ Fehler ± 3 mm bis ± 5 mm hierfür wohl als Norm angewendet), während bei den modernen Präzisionsnivellierungen der Fehlerbetrag sich innerhalb ± 1 mm halten läßt, und selbst bei den einfachen Nivellierzügen technischer Arbeiten bei der Verwendung von in $\frac{1}{4}$ cm geteilten Latten der mittlere Fehler nicht ± 10 mm übersteigt¹⁰⁸).

16 e. Erdmassenberechnung. Im Anschluß an die vorbesprochenen technischen Messungen und Absteckungen (Nr. 15) kommt die Berechnung des Inhaltes von Erdkörpern, Dämmen, Einschnitten usw. in Betracht. Die Geländeoberfläche ist auf Grund der bei der Horizontal- und Vertikal Aufnahme aufgemessenen Punkte in Flächenstücke zerlegt, welche in geradlinigen Kanten die Begrenzungsflächen eines sich der natürlichen Oberfläche anschmiegenden Polyeders darstellen. Ein einfacher Fall der Erdmassenberechnung liegt nun z. B. vor, wenn ein Quadratnetz (etwa mit 20 m Maschenweite) abgesteckt ist, für alle Netzpunkte die Höhen gemessen sind, und die Erdmasse etwa bis zu einer bestimmten Horizontfläche, oder auch einer geneigten Fläche ermittelt werden soll (schief abgeschnittene Prismen mit quadratischem Grundschnitt). Treten dazu noch die Böschungen, welche die Geländeoberfläche mit der über oder unter ihr liegenden (projektierten) Fläche verbinden, ev. unter Hinzunahme von Gräben, Rampen usw., so lassen sich doch, sofern eine genügende Anzahl von Punkten gegeben ist, immer diese Erdkörper in bestimmte

108) Über die Ergebnisse von Genauigkeitsuntersuchungen vgl. Fußn. 20 und die jährlichen Literaturübersichten der Zeitschr. f. Vermess. Über die internationalen Arbeiten wird fortlaufend berichtet in den Verhandlg. der Konf der internationalen Erdmessung.

geometrische Körper, Prismatoide, Prismen, Pyramidenstutze usw. zerlegen und darnach im Einzelnen berechnen¹⁰⁹).

In den meisten Fällen wird jedoch besonders bei den ausgedehnten Massenbestimmungen der Damm- und Einschnittskörper beim Eisenbahn-, Straßen-, Kanalbau diese bei korrekter Einzeldurchführung sehr mühsame Zerlegung nicht ausgeführt (zumal neben anderen Umständen in praktischer Hinsicht die Auflockerung des Bodens beim Fördern und Wiederabsetzen in Betracht kommt). Eine sehr geläufige Berechnungsmethode der Erdmassen bei den erwähnten Bauwerken ist die folgende: Es werden rechtwinklig zur Längsachse, dem Längenprofil, in bestimmten Abständen s Querschnitte (Querprofile) aufgenommen (p. 73), und deren Flächeninhalte F aus den aufgezeichneten Querprofilen berechnet. Dann wird der Körperinhalt zwischen zwei aufeinanderfolgenden parallelen Querprofilen gefunden nach $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)s$; es ist also das arithmetische Mittel der Begrenzungsprofile an Stelle des Prismatoidmittelschnittes F_0 gesetzt ($\frac{1}{6}s[F_1 + F_2 + 4F_0]$). So wird auch verfahren, wenn ein Gelände durch Horizontalkurven (p. 73) dargestellt ist, indem die Erdmasse zwischen zwei benachbarten Horizontflächen aus deren Vertikalabstand und dem mittleren Flächeninhalt der von den Kurven umschlossenen Flächen gewonnen wird (bei ähnlichen Kurvenfiguren abgestutzte Kegel). Die Flächeninhaltsberechnung der Prismatoidgrundflächen, Dreiecke, Vielecke, Damm- und Einschnittprofile geschieht je nach den Umständen nach einer der p. 71 für die Flächenberechnung angegebenen Methoden, numerisch, graphisch oder mechanisch (Planimeter). Zur Vereinfachung dieser Rechnungen sind eine Reihe von Verfahren entwickelt und Tabellen berechnet; es kommen besonders graphische Methoden hierbei in Betracht¹¹⁰). Der Flächeninhalt eines Damm- oder Einschnittprofils führt auf die allgemeine Form $A + Bx + Cx^2$, worauf die graphischen Methoden, welche in I F (*R. Mehmcke*), p. 1006 ff. behandelt sind, Anwendung finden können. Im sogenannten „Profilmastab“ wird diese Form durch eine Gerade $y = A + Bx$ und eine Parabel $y = Cx^2$ auf gemeinschaftlicher Abszisse, die Fläche also linear dargestellt. Werden diese Linien als Ordinaten an den betreffenden Achsenpunkten des Längenprofils eingetragen (Abtrag oberhalb, Auftrag unterhalb der Projektlinie), so entsteht das „Flächenprofil“, dessen Fläche die Raummassen zwischen den Profilen darstellt. Auf solche

109) Als Beispiel einer besonderen Aufgabe möge hierzu zitiert sein: *Wüski*, Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 401; *Chr. A. Vogler*, ibid. 34 (1905), p. 169.

110) Handbuch der Ingenieurwissenschaften 1 (*G. Meyer* und *S. v. Willmann*), 1. Abt., 3. Aufl., Leipzig 1898, § 19, 4. Aufl. 1904, § 19.

Darstellungen gründet sich dann die Massenverteilung im sogenannten „Massennivellement“ mit dem „Massenprofil“, worin in jedem Profilpunkt die algebraische Summe aller vorhergehenden Massen aufgetragen erscheint¹¹⁰⁾ ¹¹¹⁾. Auch sei an dieser Stelle hingewiesen auf einige interessante Aufgaben, welche *W. Launhardt*¹¹²⁾ in der Theorie des kommerziellen Trassierens aufstellt.

16f. Kотиerte Projektion. Endlich sei auch hier noch hingewiesen auf die „kотиerte Projektion“, d. h. diejenige Methode der darstellenden Geometrie¹¹³⁾, welche sich auf die geometrische Karte als orthogonale Parallelprojektion in der Vermessungsgrundfläche mit jedem Geländepunkt zugeschriebener Höhenzahl (Kote) und Auszeichnung der Horizontalkurven gründet. Die Lage eines Punktes ist bestimmt durch seine Projektion und die zugefügte Kote, die Lage einer Geraden durch zwei derart gegebene Punkte, die einer Ebene durch drei Punkte oder durch Festlegung der Linie stärkster Neigung. Zur bequemen Ausführung der Konstruktionen werden die Linien nach ganzzahligen Koten eingeteilt („graduiert“). Der horizontale Abstand zweier benachbarter, der Höheneinheit entsprechender Einteilungs-(Graduierungs)-Punkte ist das „Intervall“. Zwischen dem Höhen-(Koten-)Unterschied h zweier Punkte, ihrem horizontalen Abstand s , der Neigung der Linien n und dem Intervall i bestehen demnach die Beziehungen $n : 1 = h : s = 1 : i$, womit alle bei der kотиerten Projektion vorkommenden Rechnungen ausgedrückt sind. Der „Böschungmaßstab“ einer Ebene ist eine in der Richtung des stärksten Gefalles verlaufende gradierte Gerade; die Horizontalen stehen rechtwinklig zu ihr. Bei der topographischen Fläche werden die Falllinien sowie die Horizontalen zu Kurven. Eine „Horizontalkurvenkarte“ gibt in jedem Punkt an: die Höhe des Punktes, die Richtung der Horizontalen, des stärksten Falles und den Betrag der Neigungen. Die kотиerte Projektion ermöglicht eine einfache Darstellung der Erdkörper und Böschungsschnitte bei der Anlage von Eisenbahnen, Kanälen, Wegen usw.; sie ist eingehend von *G. A. Peschka*¹¹⁴⁾ behandelt.

Bei der Darstellung der topographischen Fläche (vgl. p. 92)

111) *C. M. v. Bauernfeind*, Graphische Bestimmung der Erd- und Transportweiten, München 1856; *C. Culmann*, Graphische Statik, Zürich 1866, 2. Aufl. 1875, Kap. 2 u. 3; *F. Eickemeyer*, Massennivellement, Leipzig 1870; *J. Amsler-Laffon*, Anwendung des Integrators zur Massenberechnung, Zürich 1875; vgl. hierzu II A 2 (*A. Voß*), p. 131.

112) Theorie des Trassierens, Hannover, Heft 1, 1887; Heft 2, 1888.

113) Vgl. III 1, 11 (*E. Papperitz*).

114) Kотиerte Ebenen, Brünn 1877.

durch Bergstrichzeichnung entsprechen die „Bergstriche“ den Fallinien. Durch Auszeichnung dicht nebeneinanderliegender Fallinien wird die topographische Fläche in Elemente zerlegt, sodaß dadurch an jeder Stelle der Karte Betrag und Richtung der Neigung zum Ausdruck kommt. Zur Veranschaulichung der Flächenneigungen werden dann nach *J. G. Lehmann*¹¹⁵⁾ unter der Voraussetzung vertikal einfallenden Lichtes die einzelnen Flächenteilchen nach dem Grade ihrer Neigung durch passende Anordnung der Strichstärke mehr oder weniger weiß oder schwarz ausgezeichnet; nach „*Lehmann's Manier*“ vom Höhenwinkel $\alpha = 0^\circ$ bis zur Grenze $\alpha = 45^\circ$ in 9 Stufen nach der Beziehung Schwarz : Weiß = $\alpha : (45^\circ - \alpha)$. In Spezialkarten (vgl. auch Nr. 20, 21) werden in der Regel nur Horizontalkurven eingetragen; Bergstrichzeichnung kommt in der Regel nur in Betracht für topographische Karten in Maßstäben etwa von 1 : 25 000 ab (vgl. VI 1, 4).

17. Trigonometrische Höhenmessung. Ist bei Annahme paralleler Lotlinien in einem Punkte P_1 in der Vertikalebene nach P_2 der Zenitwinkel z_1 oder der Höhenwinkel α_1 gemessen und die horizontale Entfernung s bekannt, so ist $h_2 = h_1 + s \operatorname{tg} \alpha_1$. Die Messung der Vertikalwinkel geschieht mit dem Höhenkreis des Theodolits (vgl. p. 26). Unter h_1 ist demnach die Höhe der Kreisachse verstanden, die entweder durch Höhenwinkelmessung nach einem gegebenen Höhenpunkt in bekannter Entfernung aus $h_1 = h_p - s \operatorname{tg} \alpha$ abzuleiten ist, oder durch unmittelbare Messung des lotrechten Abstandes i über dem Aufstellungspunkte $h_i = h_p + i$. Ist nicht der zu bestimmende Höhenpunkt P_2 direkt angezielt, sondern ein Hilfszielpunkt, der um ein bestimmtes Maß l_2 über oder unter P_2 liegt, so wird demnach die vollständige Höhenformel $h_2 = h_1 + i \pm l_2 + s \operatorname{tg} \alpha$. Ist die Entfernung s nicht direkt meßbar, wie z. B. bei Türmen, so muß sie indirekt durch besondere Messungen, wie bei der Horizontaltriangulierung (Dreieck mit Grundlinie und anliegenden Winkeln), ermittelt werden. Wird hierbei die Grundlinie in die Vertikalebene der Aufstellungspunkte und des unzugänglichen Turmpunktes gelegt, so entfällt die Messung der Horizontalwinkel, es ergibt sich die unbekannte Entfernung aus dem Dreieck in der Vertikalebene.

Die Annahme der Parallelität der Lotlinien kann nur für sehr kurze Entfernungen beibehalten werden. Wird auf der kugelförmigen Erdoberfläche durch P_1 und P_2 eine Vertikalebene gelegt und der Abstand s der Lotlinien in der Normalnullfläche als bekannt (etwa

115) Darstellung einer neuen Theorie der Bezeichnung der schiefen Flächen im Grundriß oder der Situationszeichnung der Berge, Leipzig 1799.

aus der Horizontaltriangulierung) angesehen und wieder der Vertikalwinkel α_1 gemessen, so ist in dem durch den Schnitt der Lotlinien im Erdzentrum C gebildeten Dreieck CP_1P_2 bei bekanntem Erdradius alles zur Bestimmung des Höhenunterschiedes Δh_{12} gegeben. Die Beziehung wird wegen der Kleinheit des zugehörigen Erdzentriwinkels und der Höhen von P_1 und P_2 im Vergleich zum Erdradius R unter Einführung der Abweichung des wahren und scheinbaren Horizontes (Niveaufläche und Tangentialebene), der „Horizontdepression“ $\frac{s^2}{2R}$ (Fig. 23), unmittelbar zurückgeführt auf die einfache Rechenformel bei parallelen Lotlinien, sodaß ist

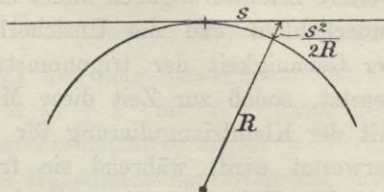


Fig. 23.

$$h_2 = h_1 + s \operatorname{tg} \alpha + \frac{s^2}{2R},$$

wozu nun noch die „terrestrische Refraktion“ tritt (vgl. VI 2, 3 (E. v. Oppolzer)). Der Betrag der terrestrischen Refraktion wird als Funktion der sphärischen Depression durch den „Refraktionskoeffizienten“ k zum Ausdruck gebracht in der Form $-k \cdot \frac{s^2}{2R}$, sodaß in dieser Zusammenfassung die Höhenformel lautet $h_2 = h_1 + s \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2R} s^2$ (zur Rechnung dienen Tabellen¹¹⁶). Es wird demnach die Lichtkurve kurzweg als flacher Kreisbogen ausgedrückt. Werden in beiden Punkten P_1 und P_2 sogenannte „gegenseitige Zenitdistanzen“ z_1 und z_2 gemessen, so gilt unter der Voraussetzung gleichmässiger Krümmung der Lichtbahn die vereinfachte Beziehung $h_2 - h_1 = s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$, worin der Refraktionskoeffizient nicht erscheint, und die zugehörige Gleichung $k = 1 - \frac{z_1 + z_2 - 180^\circ}{s \rho} \cdot R$, woraus (am zuverlässigsten bei gleichzeitiger gegenseitiger Beobachtung) Bestimmungen für den Refraktionskoeffizienten gewonnen werden können.

Die starke Veränderlichkeit der terrestrischen Refraktion und ihre Abhängigkeit von der Temperaturverteilung längs der Ziellinien (Besonnung usw.) ist die wesentlichste Fehlerquelle für trigonometrische Höhenmessungen. Der Fehler des als „mittlerer Refraktionskoeffizient“ benützten Wertes $k = 0,13$ (Bessel) ist rund auf $\frac{1}{4}$ seines Betrages zu schätzen, etwa mit dem Ausdruck $0,13 \pm 0,03$,

¹¹⁶) Jordan, Handbuch 2, Kap. XI mit ausführlichem Literaturverzeichnis, p. 592.

wodurch aber größere Abweichungen nicht berücksichtigt werden. Besondere Beobachtungen über die terrestrische Refraktion, ihre tägliche Periode usw. sind von C. M. v. Bauernfeind¹¹⁷⁾ angestellt; weitere Literaturangaben findet man bei Jordan¹¹⁶⁾. Durch diese Veränderlichkeit und die Unsicherheit der Refraktionsbestimmung ist der Genauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung eine Grenze gesetzt, sodaß zur Zeit diese Methode hauptsächlich in Verbindung mit der Kleintriangulierung für topographische Messungen praktisch verwertet wird, während sie früher als die ausgezeichnetste und schärfste Höhenmessungsmethode betrachtet wurde; als ein Beispiel derartiger Messungen sei verwiesen auf das trigonometrische Nivellement Swinemünde-Berlin¹¹⁸⁾; einer späteren Zeit gehören z. B. an die Beobachtungen zum Anschluß von Helgoland an das Festlandnetz¹¹⁹⁾. Über die Theorie der terrestrischen Refraktion lese man die Lehrbücher von F. R. Helmert¹²⁰⁾ und W. Jordan¹¹⁶⁾ nach, die weitere Literaturangaben enthalten. Für exaktere Messungen und besondere Untersuchungen kommen für die Höhenformel noch weitere Glieder in Betracht; soll z. B. die Höhenlage der Messungspunkte in Rücksicht gezogen werden, so wird

$$h_2 - h_1 = s \left(1 + \frac{h_1 + h_2}{2R_m} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2R_m} s^2 + \frac{1-k}{2R_m} s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots,$$

wobei R_m der mittlere Krümmungsradius, eventuell derjenige des Ellipsoidnormalschnittes in dem betreffenden Azimut ist. Über die strenge Reduktion der trigonometrischen Höhenmessung, ihre Bedeutung für die Bestimmung der Erdfigur und den theoretischen Unterschied ihrer Ergebnisse gegenüber denen der Nivellierung vgl. VI 1, 3 (P. Pizzetti).

Der Fehlertilgung (vgl. p. 27) wegen werden die Vertikalwinkel stets in beiden Fernrohrlagen, sowie auch in mehreren Kreislagen gemessen, bei Kleinmessungen wird meistens mit einspielender Libelle, bei schärferen Messungen mit Libellenreduktion gearbeitet. Aus der

117) Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Drei Mitteilungen mit Nachtrag, München 1880, 1883, 1888, 1890; H. Hartl, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien 3 (1883).

118) J. J. Baeyer, Trigon. Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840.

119) Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Institut. Zenitdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordseeinseln Helgoland, Neuwerk und Wangerooß, Berlin 1895.

120) Mathematische und physikalische Theorien der höheren Geodäsie, Bd. 2, Leipzig 1884.

Beziehung $\Delta h = s \operatorname{tg} \alpha$ ergibt sich aus den mittleren Messungsfehlern m_s und m_α der Höhenunterschiedfehler

$$m_{\Delta h} = \pm \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha m_s)^2 + \left(\frac{s}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2},$$

für nahe wagerechte Zielung $m_{\Delta h} = \pm \frac{m_\alpha}{\rho} s$. Aus der Winkelmessungsgenauigkeit, welche je nach dem Zweck und dem verwendeten Instrument etwa ausgedrückt wird durch $m_\alpha = \pm 1''$ bis $\pm 1'$ unter Berücksichtigung der vorerwähnten Refraktionsfehler, ergibt sich ein Überblick über die Genauigkeit dieses Höhenmessungsverfahrens. Im allgemeinen wird für die technische Verwendung als genügend erachtet, wenn der mittlere Höhenunterschiedfehler etwa zwischen den Grenzen $\pm \frac{1}{2}$ dm bis ± 2 dm bleibt und dementsprechend Verfahren und Instrumente gewählt. Die Ausgleichung zusammenhängender trigonometrischer Höhennetze geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate, oder in einfacheren Fällen nach einem passenden Näherungsverfahren¹¹⁶⁾.

Hier ist auch noch zu erwähnen die Höhenmessung mit Gradbogen, Pendelkreis, Libellenhöhenkreis, s. p. 20 (eventuell als Freihandinstrumente gebraucht), in Verbindung mit der geeigneten Länge des Meßbandes oder der Meßschnur (Schnurzug des Markscheiders) p. 12, wobei sich der Höhenunterschied ergibt nach $h = s_n \sin \alpha$ (s_n geneigte Länge). Die Genauigkeit dieser Höhenwinkelmessung läßt sich etwa durch den mittleren Fehler $\pm 0,1^0$ bis $\pm 0,3^0$ ausdrücken. Diese Höhenmesserzüge (auch wohl Schrägnivellement genannt) werden oft mit den p. 58 erwähnten Kompaßzügen verbunden.

18. Barometrische Höhenmessung. Zu topographischen Aufnahmen, besonders auch für Vorarbeiten zu Eisenbahnbauten und Erkundungsaufnahmen (Reiseaufnahmen), s. p. 96, wird in ausgiebiger Weise von der barometrischen Höhenmessung Gebrauch gemacht, wobei als Instrument lediglich das „Federbarometer“ in Betracht kommt, während Quecksilberbarometer und „Siedethermometer“ (Kochbarometer) zur Kontrolle des als „Feldinstrument“ betrachteten „Aneroides“ dienen; die zur Zeit stattfindende weitgehende Verwendung der Barometermessungen ist nur durch die Einführung dieses Instrumententypus möglich geworden¹²¹⁾. Das wesentlichste Element der für Höhenmessung in Betracht kommenden Instrumente ist eine nahezu luftleer gepumpte, luftdicht verschlossene Büchse, gebildet durch zwei federhart gewalzte dünne Wellblechplatten,

121) L. Vidie, Paris C. R. 24 (1847), p. 975.

welche auf einen kräftigen Ring aufgelötet sind. Die Büchse ruht auf einer Grundplatte und trägt einen Zapfen, an dem eine starke Feder angreift, welche den Luftdruck balanciert. Die bei Luftdruckschwankungen sich einstellenden elastischen Biegungen des Feder-systems, rund etwa $\frac{1}{200}$ mm für 1 mm Barometerstandänderung, werden in verschiedener Weise ablesbar gemacht, wodurch sich verschiedene Konstruktionen ergeben. Am gebräuchlichsten ist mechanische Vergrößerung (etwa 500 fach) durch ein Hebelwerk mit Ablesung an einem Zeiger auf einem Zifferblatt (z. B. *Naudet*, *Bohne*). Mikrometrische Messung durch ein Schraubenmikrometer mit Fühlfeder ist angewendet von *J. Goldschmid*; die im Prinzip einfachste Methode direkter optischer mikroskopischer Ablesung (*Reitz*) hat sich praktisch bisher nicht gut bewährt. Wegen der Konstruktionseinzelheiten sei auf die Lehrbücher verwiesen¹²²⁾. Die in der Konstruktion begründeten, den unmittelbaren Instrumentablesungen beizulegenden Verbesserungen sind: 1) die „Teilungsverbesserung“, d. h. also die Umwandlung der Einteilung des betreffenden Instrumentes in die Millimetereinteilung des Quecksilberbarometers, bezogen auf einen bestimmten Anfangspunkt; 2) die „Temperaturverbesserung“, d. h. die Reduktion der mit der Temperatur veränderlichen elastischen Kraft der zu dem Federsystem verwendeten Metalle, sowie die Reduktion der Spannkraft der in der Büchse enthaltenen Luft und der in Frage kommenden thermischen Ausdehnungen auf eine Normaltemperatur (die Instrumenttemperatur wird bestimmt durch ein „inneres“ Thermometer); 3) die „Standverbesserung“ zur Beseitigung des nach Beilegung der beiden ersten Größen noch bleibenden Unterschiedes gegen den Quecksilberbarometerstand. Die Bestimmung der Korrekturen geschieht durch Vergleichen mit einem Quecksilberbarometer bei verschiedenen Temperaturen und Luftdrücken, wozu besondere Einrichtungen getroffen werden können¹²²⁾.

Die mitunter stark von linearer Form abweichenden Interpolationsgleichungen werden graphisch oder nach der Methode der kleinsten Quadrate, ev. auch durch eine Näherungsrechnung abgeleitet. Eine allgemeine Form ist¹²²⁾:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F) + y't(760 - F) + z'(760 - F)^2 + y''t^2 + \dots,$$

in der t die Temperatur, F den beobachteten Barometerstand und

122) *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XII (mit weiterer Literatur). Über die verschiedenen Aneroidkonstruktionen vgl. *L. Löwenherz*, Bericht über die wiss. Instr. auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, Berlin 1880, p. 122; *C. Koppe*, Die Aneroidbarometer von *J. Goldschmid*, Zürich 1877; *F. H. Reitz*, Zeitschr. f. Vermess. (1873), p. 363; *E. Hammer*, ibid. 76 (1887), p. 20.

x, y, z, y', z', y'' zu bestimmende Koeffizienten bedeuten. Ohne Berücksichtigung dieser Verbesserungen, welche nicht nur jeder Konstruktionsart, sondern auch jedem Instrumente eigentümlich und innerhalb gewisser Grenzen veränderlich sind, sind die Federbarometer für Höhenmessungszwecke unbrauchbar (elastische Nachwirkung¹²³). Die „Standverbesserung“ wird entweder durch Anordnung der Messungsmethode (Anschluß an Höhenfestpunkte) eliminiert oder durch Vergleichen mit Quecksilberbarometern oder Siedethermometern (letztere besonders auf Reisen geeignet) bestimmt¹²²). Es sind demnach die Federbarometer ihrer Natur nach Interpolationsinstrumente von ziemlich hoher relativer Genauigkeit ihrer Angaben, und dementsprechend beim Messungsverfahren zu verwenden.

Die Grundlage der barometrischen Höhenmessung bildet die „barometrische Höhenformel“, die, zuerst von *Laplace* 1799 aufgestellt, später mit Berechnung zugehöriger Tabellen mehrfach bearbeitet wurde, (*Biot, Gauß, Bessel, Babinet* u. a.¹²³) und in verschiedener Form gebraucht wird. Als Beispiel sei angeführt die von *W. Jordan* mit Ausscheidung der zuweilen mit aufgenommenen Instrumentreduktion (Unterschied zwischen Quecksilber- und Federbarometer, besonders in bezug auf Schwere) gegebene Formel¹²⁴):

$$h = K \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) \left(1 + 0,377 \frac{e}{p}\right) (1 + \beta \cos 2 \varphi) \left(1 + \frac{2H}{r}\right),$$

worin die barometrische Konstante

$$K = \frac{0,76}{\mu} \cdot \frac{13,59593}{0,00129277} \cdot \frac{1}{1,00021} = 18400$$

und t die mittlere Temperatur, e den mittleren Dunstdruck der freien Luft, p den mittleren Luftdruck und H die mittlere Höhe bedeutet.

Für örtlich begrenzte Gebiete, wie sie bei einer ausgiebigen Verwendung der barometrischen Höhenaufnahme in Betracht kommen, werden die Glieder für die Schwere nach Breite und Höhe und für die Luftfeuchtigkeit mit mittleren Werten in der barometrischen Konstanten zusammengefaßt; so lautet z. B. die von *Jordan*¹²⁴) für Mitteleuropa gegebene Formel

$$h = 18464 (1 + 0,003665t)(\log B - \log b),$$

womit dann für den mittleren, im Meeresspiegel zutreffenden Luftdruck von 762 mm eine Tafel der Höhendifferenzen nach t von Grad zu Grad und B in $\frac{1}{10}$ mm berechnet ist¹²⁴). Eine andere für die

123) *C. Reinhardt*, Zeitschr. f. Instr. 7 (1887), p. 153, 189.

124) *W. Jordan*, Barometrische Höhentafeln, 2. Aufl., Stuttgart 1886; desgl. für Tiefland und grosse Höhen, Hannover 1896.

Höhenberechnung geeignete Form, wohl „Höhenstufe“ genannt, erhält man, wenn die Gleichung so umgewandelt wird, daß die Höhendifferenz als Funktion einer bestimmten Barometerstanddifferenz z. B. 1 mm erscheint (*Babinet* 1850); für die vereinfachte *Jordan'sche* Formel wird z. B.

$$\Delta = \frac{8019}{B} (1 + \alpha t) \quad \text{und} \quad h = \Delta (B_2 - B_1),$$

wozu Rechenschieber und anderweite Hilfsmittel (graphische Tafeln) in Betracht kommen. Diese „Höhenstufe“ kann auch direkt durch Beobachtung an gegebenen Höhenfestpunkten gefunden, $\Delta = \frac{H_2 - H_1}{B_1 - B_2}$, und danach die weiteren Höhen interpoliert werden. Weiteres über Genauigkeit der Formel (tägliche Periode), die einzelnen Glieder, Rechenmethode, verschiedene Hilfsmittel und Literatur findet man bei *Jordan*.

Zur Ausführung der barometrischen Höhenaufnahme sei nur noch erwähnt, daß den Barometerstandschwankungen Rechnung getragen wird durch fortlaufende korrespondierende Beobachtungen an „Standbarometern“, gegen welche die Ablesungen der „Feldbarometer“ reduziert werden, oder durch in möglichst kleinen Zeitabständen wiederholte Rückkehr an „Anbindepunkte“ (Schleifenaufnahme) mit Reduktion nach der Zeit, sowie durch Anschluß an gegebene „Höhenfestpunkte“. Diese letztere Methode ist die für topographische Aufnahmen geeignetste, wozu zahlreiche im Aufnahmegebiet passend verteilte nivellistisch, trigonometrisch oder tachymetrisch bestimmte Höhenfestpunkte verwendet werden. Bei sorgfältigem Verfahren lassen sich bei derartigen Aufnahmen bez. Einschaltungen auf beschränkten Gebieten (am besten mit graphischer Ausgleichung) die Geländepunkte mit einem mittleren Fehler von rund ± 1 bis 2 m anschließen.

E. Tachymetrische Methoden.

Unter „Tachymetrie“ (Schnellmessung) versteht man dasjenige Messungsverfahren, bei welchem „Lage“- und „Höhen“-Messung gleichzeitig erfolgt. Die Entfernung wird dabei indirekt durch sogenannte Distanzmessung ermittelt, da die direkten Längenmessungen verhältnismäßig viel Zeit erfordern. Verfahren und Instrumente sind mannigfacher Art und voneinander unterschieden, einerseits nach der Methode der Distanz- und Höhenmessung, andererseits nach der Bestimmung der Horizontalrichtungen mit Theodolit, Bussole oder Meßtisch; dem entsprechen die Bezeichnungen: Schnellmesser, Tachymeter (Tacheometer), Tachygraph, Tachygraphometer, Celerimeter, Omnimeter, Stadi-

meter, Euthymeter usw. Die Bezeichnung des Messungsverfahrens als Schnellmessung (Tachymetrie, Tachéometrie, Stadia surveying oder tacheometry, Celerimensura) erklärt sich aus der zweckmäßigen Vereinigung von Lage- und Höhenmessung, welche insbesondere für die technische Topographie von großer Bedeutung ist, wie denn auch die heutige Tachymetrie ihre Entwicklung wesentlich den Anforderungen, welche die geometrischen Vorarbeiten für den Eisenbahnbau stellten, verdankt.

19. Indirekte Längenmessung (Distanzmessung). Erforderlich ist ein Instrument („Distanzmesser“), welches die Länge der Ziellinie (oder deren Projektion) bis zu einem Zielpunkte durch unmittelbare Ablesung der gesuchten Entfernung selbst oder einer einfachen Funktion derselben angibt. Damit ist der Unterschied zwischen dem Prinzip der „Distanz“- (Entfernungs-)messer und den „Längenmeßwerkzeugen“ (Meßlatte, Meßband usw.) gekennzeichnet. Den speziell geodätisch in Betracht kommenden Distanzmessern liegt in der Regel eine irgendwie instrumentell hergestellte Parallaxe zu Grunde. Für die Anordnung der bestimmenden Elemente stehen verschiedene Wege offen, durch deren Kombination sich eine ganze Reihe von Konstruktionsmöglichkeiten (Erfindungen) von Distanzmessern darbieten. Für Konstruktion, Bedeutung und Verwendung der Instrumente ist in erster Linie entscheidend die Anordnung der Distanzbasis L . Wird die Distanzbasis im Zielpunkt als sog. „Distanzlatte“ (eine leicht transportable mit Teilung oder Zielmarken versehene Ziellatte) aufgestellt, so spricht man von Distanzmessern „mit Latte“; diese Anordnung wird in der Feldmessung (Tachymetrie, Topographie) für kürzere Entfernungen (d. h. bis zu einigen 100 m, stets aber innerhalb 1 km) angewendet. Zur allgemeinen Lösung des Problems für größere Entfernungen, besonders aber für militärische (artilleristische) Zwecke, wenn die Anbringung einer Distanzbasis im Ziel unmöglich ist, wird das Instrument selbst Träger der Basis (Basisschiene, Basislineal); für diese Zwecke kommen neben den parallaktischen Distanzmessern auch in Betracht die weniger brauchbaren Fernrohrbildweiten-Distanzmesser und neuerdings besonders der stereoskopische Entfernungsmesser von *Zeiß* in Jena¹²⁵).

19a. Distanzmesser mit Distanzlatte. Hierzu gehört in erster Linie der in der Feldmessung am meisten zur Anwendung kommende Fern-

125) *C. Pulfrich*, Phys. Zeitschr. 1899, p. 98. Vgl. auch Zeitschr. f. Instr. 21 (1901), p. 221 und 249; *O. Hecker*, Zeitschr. f. Vermess. 30 (1901), p. 85.

rohr-Okularfadendistanzmesser¹²⁶⁾ mit festem Fadenabstand p in der Bildebene, der beim einfachen astronomischen Fernrohr die auf den Objektivhauptpunkt bezogene Entfernung $D = F + F \frac{L}{p}$ liefert, wenn F die Objektivbrennweite, p den Fadenabstand in der Bildebene bedeutet und L an einer geteilten Skala, die parallel p ist, abgelesen wird. Soll die Entfernung auf die Instrumentdrehachse bezogen werden, so hat man $F + c + F \cdot \frac{L}{p}$ oder allgemeiner $D = a + kL$. Das zusammengesetzte Fernrohr (*Ramsden*, *Huygens*) liefert auf gleiche Form $a + kL$ ($a =$ Additions-, $k =$ Multiplikationskonstante, in der Regel 100 oder 200) zu bringende Beziehungen, worin beim Fernrohr von *Porro*¹²⁷⁾ durch Zwischensetzung einer Kollektivlinse bei passender Anordnung des optischen Systems a gleich Null in Bezug auf die Instrumentachse gemacht werden kann (anallaktisches Fernrohr). Ist die optische Achse des Fernrohrs geneigt und bleibt L parallel p , so gibt D die geneigte Entfernung an, welche durch Messung des Vertikalwinkels auf die horizontale reduziert werden muß; wird aber L lotrecht gestellt, was meistens geschieht, so wird die projizierte Entfernung $s = a \cos \alpha + Lk \cos^2 \alpha$, worin α der Höhenwinkel der Mittenzielung ist. Das Okular-Schraubenmikrometer, welches bei konstantem L das variable p in Schraubenwert liefert, findet seltener Verwendung (p. 92, Präzisionsmessung).

Einführung des parallaktischen Winkels ε durch Winkelbewegung eines Zielfernrohrs mit zwei aufeinander folgenden Einstellungen findet in verschiedener Form Verwendung. Zunächst kommt in Betracht bei wagerecht und rechtwinklig zur Mittenzielung eingerichtetem L die Messung von ε als Horizontalwinkel. Bei lotrechtem L wird ε als Differenz zweier Höhenwinkel gemessen; ist dann $\varepsilon = \beta - \alpha$, für die obere und untere Zielung nach L , so wird die wagerechte Entfernung $S = L \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. In der Regel wird die Winkelbewegung durch besondere „distanzmessende“ Schrauben eingeführt, und zwar der lotrecht oder wagerecht wirkenden Tangentialschrauben bei lot-

126) Geschichtliches zum Fadendistanzmesser und zur Tachymetrie findet man bei *Goulier*, Tachéométrie, p. 5; *A. Salmoiraghi*, Istrumenti e metodi moderni di geometria applicata, Milano 1884, 2, p. 278; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1891), p. 295 und Zeitschr. f. Inst. 12 (1892), p. 155; 17 (1897), p. 278.

127) *J. Porro*, La Tachéométrie, Paris 1858. Über die Vorteile und Nachteile des *Porroschen* Fernrohres vgl. *Vogler*, Prakt. Geom. 2, § 263, 264; *Tinter*, Zeitschr. f. Instr. 2 (1882), p. 117 u. 157; *Hensoldt*, ibid. 5 (1885), p. 413.

rechtem L .¹²⁸⁾ Bei wagrechtem L kann p unmittelbar durch das Horizontalmikrometer eines Winkelmessers ermittelt werden. Bei lotrechter Tangentialschraube und lotrechtem L ergibt sich die wagrechte Entfernung s , wenn p die Schraubenbewegung ausdrückt, und d den wagerechten Abstand des Drehpunktes von der Schraubenachse $s = L \frac{d}{p} = Lk$ (k z. B. = 100), oder bei konstantem L ist $s = \frac{k'}{p}$. Bei der von *S. Stampfer* verwendeten Schraube (Sehnenschraube) wird für die Parallaxe ε eine Interpolationsformel mit wenigen Gliedern $\varepsilon'' = a''(o - u) - b''(o^2 - u^2)$ verwendet, wobei o und u die beiden Schraubenangaben, und a und b empirisch zu bestimmende Konstanten sind. Durch Einsetzen dieser Winkelgleichung ergibt sich die Distanzgleichung

$$D = \frac{L}{a'(o-u)} + L \left[-\frac{b'}{a'^2} \cdot \frac{o+u}{o-u} - a' \frac{(h-u)^2}{o-u} + a'(k-u) \right],$$

worin a' und b' die Konstanten des Instrumentes, h die Nullstellung der Schraube (horizontale Visur) bedeuten. Für horizontal angeordnete Tangentialschraube und vertikales L gilt ebenfalls die vorerwähnte Beziehung $s = Lk$ bzw. $= \frac{k'}{p}$. Diese Anordnung kann bei der Kippbewegung des Theodolitfernrohrs angewendet werden, während die lotrechte Schraube sich besonders für Nivellierinstrumente eignet. Nach den hier angedeuteten Anordnungen sind eine ganze Reihe von Instrumenten konstruiert worden, auch mit automatischer Reduktion auf den Horizont, welche besonders für die Tachymetrie von Bedeutung ist¹²⁹⁾.

Die bisher aufgezählten, für kürzere Entfernungen bestimmten Distanzmesser: Okularfaden, Okularmikrometer, Meßschrauben und Tangentenmikrometer sind in Bezug auf die Genauigkeit der Entfernungsbestimmung im allgemeinen als einander gleichwertig zu bezeichnen. Nach der einfachen Beziehung $D = kL$ ist, abgesehen vom Fehler in k selbst, der Entfernungsfehler vom numerischen Wert von k (z. B. 100, 200) abhängig. Die Genauigkeit der Ermittlung von L hängt ab von der Genauigkeit der Skalenablesung bzw. Einstellung der Distanzlatte, welche wieder abhängig ist von der Einrichtung und Aufstellung der Skala, der Leistung (Vergrößerung) des Fernrohrs sowie der Schraubenmikrometer, der zu bestimmenden Ent-

128) Zuerst angegeben von *J. L. Hogrewe*, Praktische Anleitung zum Nivellieren oder Wasserwägen usw., Hannover 1800.

129) Vgl. die nächste Nummer. Eine kurze Übersicht gibt *O. Lueger*, Lexikon der gesamten Technik, Stuttgart, Art. Distanzmesser; ferner *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XIII u. XIV; *Hartner-Doležal*, 1, § 33—35.

fernung und der terrestrischen Refraktion. Die zahlreichen für die verschiedensten Instrumente angestellten Genauigkeitsermittlungen¹³⁹⁾ lassen sich etwa so ausdrücken:

D	100 m	200 m	500 m
$\pm m_D$	0,05—0,20 m	0,1—0,3 m	0,5—1,0 m

Eine allgemeine Beziehung für den Fehler und sein Wachsen mit der Entfernung läßt sich nicht ohne weiteres angeben. Für kleine Entfernungen, bei günstigen Verhältnissen (Refraktion, Wind), guten Instrumenten läßt sich die Genauigkeit der Distanzmessung bis zu der einer mäßig genauen¹³⁰⁾ unmittelbaren Messung mit Längenmeßwerkzeugen steigern, während sie die Genauigkeit einer verfeinerten Längenmessung allerdings nicht erreichen kann. Man unterscheidet auch hier zwischen Präzisionsdistanzmessung, welche die unmittelbare Längenmessung bei kurzen Strecken ersetzen soll, und tachymetrischer Distanzmessung (Schnellmessung). Bei dem Wettstreit zwischen der Distanz- und der Längenmessung behauptet im allgemeinen die erstere den Vorrang in Bezug auf die Schnelligkeit, die letztere in Bezug auf die Genauigkeit. Das eigentliche Gebiet dieser Art Distanzmessung ist daher die Tachymetrie und Topographie.

19 b. Distanzmesser mit Basisschiene (Basislineal)¹³¹⁾. Das Instrument selbst ist Träger der Basis (Basis-Schiene, -Lineal) und mißt oder gibt den parallaktischen Winkel ε . Die Anordnung ist dementsprechend verschieden. Ist L konstant, so wird ε durch die Abweichung zweier bei der Nullstellung (∞) parallel gerichteter Fernrohre gemessen und zwar entweder an einem geteilten Kreisbogen, oder mikrometrisch mit Okularmikrometer, oder nach dem Prinzip der Tangentenschraube oder auch in einem besonderen Falle¹³²⁾ durch ein Hebelwerk. Ist ε konstant, so sind auf der Schiene zwei Fernrohre angebracht, von denen das eine verschiebbar und mit konstantem ε zum anderen angeordnet ist; D wird an der Schiene ab-

130) Vgl. die Fehlergrenzen p. 21.

131) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von A. Schell, Wien. Ber. 75 (1877), p. 145. Die Distanzmesser mit Basisschiene sind besonders für militärische Zwecke wichtig; man vgl. in dieser Hinsicht: J. D. Marre, Des instruments pour la mesure des distances, Extr. du Mém. de l'artillerie de la marine 43, Paris 1880; V. Niesiolowski-Gawin von Niesiolówice, Mitt. über Gegenst. d. Artill. u. Geniewesens 1898, p. 827.

132) Distanzmesser von Cerebotani; vgl. dazu W. Jordan, Zeitschr. f. Vermess. 13 (1884), p. 389.

gelesen. Für beide Konstruktionen ist Bedingung feste Aufstellung und bei nicht festen Zielen gleichzeitige Visur durch zwei Beobachter. Dies wird günstiger durch *Reflexionsdistanzmesser* nach dem Prinzip des Spiegelsextanten, wodurch beide Zielungen zu einer einzigen vereinigt werden. An der Distanzbasis sind angebracht zwei Spiegel, ein fester und ein beweglicher; bei $D = \infty$ sind beide Spiegel parallel, bei Beobachtung (Fernrohr am festen Spiegel) eines endlich entfernten Gegenstandes gibt bei Deckung des reflektierten Bildes mit dem direkt gesehenen Zielpunkte der an einer Kreisteilung oder mikrometrisch zu messende Drehwinkel des beweglichen Spiegels $\frac{1}{2}\varepsilon$. Auch nach diesen Prinzipien sind eine große Zahl von Instrumenten mit Basislineal konstruiert worden, zu denen fast alljährlich einige hinzuzukommen pflegen.

Aus der einfachen Beziehung $D = L \frac{\rho}{\varepsilon}$ folgt, daß wenn L als fehlerfrei betrachtet werden kann, der mittlere zu fürchtende, allein vom Fehler m_ε des parallaktischen Winkels ε herrührende Distanzfehler ist $m_D = \frac{D^2 m_\varepsilon}{L \rho}$. Unter günstigen Verhältnissen (gute Beleuchtung, kein Flimmern) bei scharf bezeichneten Zielpunkten, absolut fest aufgestelltem (unveränderlichem, von Temperatur usw. nicht beeinflusstem) Instrument ist es möglich, die Messungsgenauigkeit für einen Winkel wie ε bei Verwendung guter Fernrohre und geeigneter Mikrometer innerhalb 1" zu halten. Diese Grenze ist aber bei der praktischen Verwendung (nicht scharf bezeichnete, schwankende oder sich bewegende Ziele) nicht zu erreichen. Bei dioptrischer Zielung ist das Maximum der erreichbaren Zielgenauigkeit etwa 10"—15", bei Freihandinstrumenten etwa 1'. Die theoretisch erreichbare Genauigkeit m_D wäre demnach für $L = 2m$ (die Länge der Basisschiene beträgt in der Regel etwa 1 bis 3 m) und $m_\varepsilon = \pm 1''$ die folgende:

D	50	1000	5000	10 000 m
m_D	0,6	2,4	60	240 m

Unter günstigen Verhältnissen, mit guten Instrumenten, bei scharfer Bezeichnung der Zielpunkte unternommene Genauigkeitsbestimmungen haben ergeben, daß bei der praktischen Verwendung mindestens 3 bis 5 mal größere Fehlerbeträge zu erwarten sind. Die Leistung untergeordneter Instrumente ist eine entsprechend geringere. (Hingewiesen sei noch auf den Ausdruck für den relativen Fehler

$$\frac{m_D}{D} = D \frac{m_\varepsilon}{L \rho}.$$

Erwähnt seien hier auch Distanzmeßvorrichtungen, welche eine kleine Basismessung (konstante Meßhandlänge usw.) beanspruchen. Hierzu gehört zunächst das „Distanzprisma von Bauernfeind“¹³³), welches gestattet einen Winkel abzustecken, der um einen kleinen Betrag vom rechten Winkel abweicht, also beim Abstecken dieses Winkels von beiden Enden einer Basis aus ein langgestrecktes gleichschenkliges Dreieck mit dem parallaktischen Winkel ε ergibt, der so bemessen ist, daß D ein Vielfaches (50, 100) von L ist. Hierhin gehört auch der Distanzmesser nach *Souchier*¹³⁴), ein vierseitiges Prisma (Wollastonsches Prisma), welcher Winkel von 90° und $(90^\circ + C)$ abzustecken gestattet, also über einer zu messenden Grundlinie ein langgestrecktes rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Winkeln bildet. Auch der gewöhnliche Winkelspiegel und das *Bauernfeind*'sche Winkelprisma zum Abstecken rechter Winkel können zur Distanzmessung verwendet werden, indem nach Absteckung einer Grundlinie rechtwinklig zum Zielstrahl vom Zielpunkt aus nun auch am anderen Ende der Grundlinie ein rechter Winkel gebildet wird, sodaß sich ein dem ersten Dreieck ähnliches kleines rechtwinkliges Dreieck an der Grundlinie ergibt. Der bei der Absteckung eines Winkels mit einem Prisma zu erwartende Fehler beträgt etwa $1'$, wonach sich der Entfernungsfehler a priori beurteilen läßt.

20. Tachymetrische Instrumente und Aufnahmen. Von den verschiedenartigen tachymetrischen Instrumenten, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden kann¹³⁵), hat die größte Bedeutung der mit Vertikalkreis und festen Distanzfäden im Fernrohr ausgerüstete Theodolit, vielfach vervollständigt durch einen Richtkompaß oder eine Kreisbussole. Nach p. 86 ist hierfür bei lotrecht stehender Distanzskala die projizierte wagerechte Entfernung für das astronomische Fernrohr $S = a \cos \alpha + kL \cos^2 \alpha$, für das *Porro*'sche anallaktische Fernrohr $S = kL \cos^2 \alpha$, und bei rechtwinklig zur Ziellinie aufgestellter Distanzskala $S = (Lk + a) \cos \alpha + l_s \sin \alpha$ (l_s = Abstand der Mittenzielung vom Skalenfußpunkt). Der Höhenunterschied Δh des Mittenzielpunktes an der Distanzskala gegen die Instrumentachse ist beim einfachen Fadendistanzmesser mit vertikaler Latte $\Delta h = Stg \alpha = a \sin \alpha + kL \sin \alpha \cos \alpha$, und beim *Porro*'schen Fernrohr $\Delta h = \frac{1}{2} kL \sin 2\alpha$; bei rechtwinklig zur Ziellinie gerichteter Skala

133) *Bauernfeind*, Vermessungskunde 1, p. 192 u. 395.

134) Archiv f. d. Artill. u. Ingen.-Offiz. d. deutsch. Reichsheeres, April 1893 und Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 177.

135) Vgl. *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XIV und *Hartner-Doležal* 2, § 21—27, mit weiterer Literatur; speziell sei verwiesen auf *Goulier*, Tachéométrie.

$\Delta h = kL \sin \alpha$. Wie bei der trigonometrischen Höhenmessung p. 78 kommt hierbei Instrument-, bez. Zielhöhe in Betracht, sodaß die Höhenformel z. B. lautet $h_n = h_p + i - l_z + \frac{1}{2}kL \sin 2\alpha$. Der Einfluß der Erdkrümmung und Refraktion wird bei der tachymetrischen Höhenmessung in der Regel außer acht gelassen.

Zur Ausrechnung der Entfernung und Höhenunterschiede dienen verschiedene Hilfsmittel. „*Tachymetertafeln*“, das sind Tabellen, aus denen mit den Argumenten L und α (bez. Zenitdistanz z) die gesuchten Werte S und Δh entnommen werden können¹³⁶). „*Tachymetrische Rechenschieber*“, das sind logarithmische Rechenschieber für die in Betracht kommenden Funktionen von verschiedener Konstruktion; desgleichen eine ganze Reihe von „*Tachymeterdiagrammen*“ und sonstigen Rechenhilfsmitteln¹³⁷). Erwähnt sei noch Teilung des Vertikalkreises nach Gefällprozenten, nach der Funktion $\sin \alpha \cos \alpha$ (Tachymeter von *Goulier*), sowie logarithmische Teilung (*Schell's* und *Tichy-Starke's* logarithmischer Tachymeter). Eine unmittelbare Reduktion der bei geneigter Ziellinie bestimmten schiefen Entfernung wird in verschiedener Weise erstrebt. Es sei auf die zahlreichen italienischen Anordnungen¹³⁸) verwiesen, sowie auf die neueste Konstruktion von *Hammer-Fennel*¹³⁹), welche mittelst eines im Gesichtsfeld des Fernrohrs erscheinenden Diagramms unmittelbar wagerechte Entfernung und Höhenunterschied gibt. Eine andere Art zur unmittelbaren Angabe dieser Werte ist bei den „*Schiebetachymetern*“ verwendet¹⁴⁰); es ist hierbei ein Fadendistanzmesser derart mit Schiebescalen verbunden, daß, nachdem am Fadendistanzmesser zunächst die schiefe Entfernung abgelesen und an einer Fernrohrskala in verjüngtem Maßstabe eingestellt ist, an je einem, den Naturlinien entsprechenden horizontalen und vertikalen Maßstab unmittelbar Entfernung und Höhe zur Ablesung gebracht wird.

136) *W. Jordan*, *Hilfstafeln für Tachymetrie*, 2. Aufl., Stuttgart 1899.

137) *Jordan*, *Handbuch* 2, § 176; eine kurze Übersicht gibt *O. Lueger*, *Lexikon der gesamten Technik*, Stuttgart, Art. Tachymetrie.

138) *J. Porro*, *Riv. di topogr. e cat.* 8 (1895/96), p. 139 (sthenallaktisches Fernrohr); *Baggi*, *ibid.* p. 151 u. 9 (1896/97), p. 17; *Roncagli-Urbani*, *ibid.* 8 (1895/96), p. 28, 146; *Reina*, *ibid.* 9 (1896/97), p. 65; *Roncagli*, *ibid.* p. 177 u. 10 (1897/98), p. 5; *M. Nasso*, *ibid.* 11 (1898/99), p. 145; 12 (1899/1900); p. 9; 15 (1902/03), p. 1, 18, 53, 75.

139) *E. Hammer*, *Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter-Theodolit*, Stuttgart 1901.

140) Zuerst 1865 von *Kiefer* in Cöln angewandt; vgl. dazu *E. Puller*, *Zeitschr. f. Vermess.* 25 (1896), p. 375; 30 (1901), p. 531; 32 (1903), p. 649. Ferner ist zu nennen: *F. Kreuter*, *Patentiertes Quotier-Instrument für generelle Aufnahmen in kouiptem Terrain*, Wien 1874; *O. Fennel*, *Zeitschr. f. Vermess.* 7 (1878), p. 57.

Neben der für die Tachymetrie besonders geeigneten Fadendistanzmessung haben die übrigen in Nr. 19 ihrem Prinzip nach erwähnten Distanzmessungsmethoden eine geringere Bedeutung. „Distanzmessende Schrauben“ werden auch in Verbindung mit dem Fadendistanzmesser angeordnet, andere Konstruktionen z. B. *Eckhold's* Omnimeter, *Sanguet's* Tachymeter mit Hebelwerk usw., haben keine allgemeine Bedeutung erlangt.

Die Durchführung einer topographischen Aufnahme gründet sich in der Regel auf eine Horizontal- und Vertikaltriangulierung mit nachfolgender Polygonisierung. Ist das Instrument auf einem nach Lage und Höhe gegebenen Punkt aufgestellt, so gibt dasselbe unmittelbar Lage und Höhe der angezielten Geländepunkte an, nämlich durch Horizontal- und Vertikalrichtungen und Entfernung bez. Höhenunterschied. Das Ergebnis der Aufnahme ist schließlich ein topographischer Plan mit Höhenzahlen und Horizontalkurven, vgl. p. 73. Über die Genauigkeit der Bestimmung von Entfernung und Höhe gilt das bei Distanzmessung p. 88 und trigonometrischer Höhenmessung p. 81 Gesagte. Im allgemeinen begnügt man sich, dem Zweck der topographischen Aufnahme entsprechend, mit einer mäßigen Genauigkeit, sodaß für Zielungen bis zu einigen 100 m die gegenseitige Lage und Höhe der Punkte innerhalb einiger dm genau bestimmt wird, wobei auf die letztere ein höherer Wert gelegt wird, als auf erstere, und richtet zur Erzielung dieser für Geländeaufnahmen hinreichenden Genauigkeit Instrumente (bequeme Ablesung) und Verfahren zu möglichst rascher und glatter Feldarbeit ein. Verschärfung der Distanzmessung, welche für die topographische Geländeaufnahme nicht in Betracht kommt, sondern nur dann, wenn die Tachymetrie die exakte Linearmessung ersetzen soll, ist durch entsprechende Einrichtung der Instrumente, „Präzisionstachymeter“ und „Präzisionslatten“ (z. B. *Schell's* und *Tichy-Starke's* logarithmischer Tachymeter) zu erzielen; vgl. p. 88. Die Präzisionstachymetrie ist ebenso wie die Präzisionsnivellierung an beschränkte Arbeitszeit (günstige Witterung) und kurze Zielweite (Refraktion) gebunden. Bei den tachymetrischen Messungen ist auch zu erwähnen die Höhenaufnahme auf Grund vorhandener, durch Linearmessung gewonnener Lagepläne, wobei in unebenem Gelände anstatt des Nivellierinstrumentes (p. 73) mit Vorteil der Höhenkreis des Theodolits verwendet wird, indem die Entfernungen aus der Karte genommen werden, sodaß zu rechnen ist nach $\Delta h = stg\alpha$, wozu Rechenschieber und Diagramme als Hilfsmittel dienen.

21. Die Meßtischaufnahme. Als eine besondere Methode der tachymetrischen Messungen ist zur Zeit die „topographische Meßtisch-

aufnahme“ zu betrachten, nachdem der „Meßtisch“ bei exakten Spezialaufnahmen durch die numerischen Methoden ersetzt ist. Der „Meßtisch“ ist ein auf einem Stativ mittels eines theodolitähnlichen Dreifußunterbaues aufgestellter kleiner Zeichentisch, dessen mit einer Libelle horizontierte Fläche die ebene Vermessungsfläche repräsentiert. Zur Aufzeichnung der Richtungslinien dient das eine lotrechte Absehebene liefernde „Diopterlineal“ (dioptrische Regel) oder die „Fernrohrkippregel“ (Perspektivlineal). In einfachster Form besteht diese Projektionsvorrichtung aus einem eine Säule tragenden Lineal, an der eine horizontale Kippachse gelagert ist. Diese trägt das die Vertikalebene liefernde Fernrohr, analog der Theodoliteinrichtung. Anordnung der Libellen, Bedingungen für die Achsen und Ziellinie, Prüfung und Berichtigung entspricht dem Theodolit (vgl. die Lehrbücher). Wird das Fernrohr der einfachen Kippregel mit Distanzfäden ausgerüstet, so erhält man die „distanzmessende Kippregel“, kommt ein Höhenkreis oder Höhenbogen mit Libelle hinzu, so erhält man die „tachymetrische Kippregel“ („Universalkippregel“). Ist der Meßtisch auf einem Messungspunkte („Station“) so aufgestellt, daß bei horizontaler Platte der zugehörige Punkt der Zeichnung genau lotrecht über dem Feldpunkte sich befindet und im Fernrohr diejenigen Zielpunkte eingestellt erscheinen, an deren Bilder die Linealkante angelegt wird, so ist er „zentriert“ und „orientiert“. Wird in dieser Weise bei genau orientiertem Tisch das Lineal scharf an den Stationspunkt angelegt und gleichzeitig der zu bestimmende Punkt mit dem Fernrohr eingestellt, so gibt die am Lineal ausgezogene Linie die Richtungslinie an; wird die Entfernung durch „Längen“- oder „Distanz“-Messung (p. 86) ermittelt und mit dem Maßstab in der entsprechenden Verjüngung eingetragen, so ist der neue Punkt bestimmt („stationiert“) und kann wieder als Meßtischstation dienen; wird das fortgesetzt, so erhält man einen graphisch bestimmten Polygonzug, vgl. p. 54.

Werden auf mindestens zwei bekannten Standpunkten A und B die Richtungslinien nach einem Neupunkt P gezogen, so hat man Punktbestimmung durch „Vorwärtseinschneiden“ (vgl. die trigonometr. Lösung p. 40); wird auf einem gegebenen Standpunkt A die Richtungslinie nach P gezogen, der Meßtisch danach nach P gebracht, hier nach $P-A$ orientiert, an B angelegt und gezielt, durch den Schnitt $A-P$ und $P-B$ der Neupunkt P bestimmt, so hat man Punktbestimmung durch „Seitwärtseinschneiden“ (vgl. p. 40). Soll ein Neupunkt dadurch bestimmt werden, daß auf ihm die Richtungslinien nach drei der Lage nach gegebenen Punkten bestimmt werden, so hat man das graphische „Rückwärtseinschneiden“ (p. 41). Die

Konstruktion kann in verschiedener Weise erfolgen. Zunächst durch Aufzeichnung des Strahlensystems (z. B. auf Pauspapier) und Orientierung desselben nach der Reihe der Bildpunkte durch Probieren; ein mechanisches Hilfsmittel hierzu ist der mit Gradscheibe und einstellbaren Armen versehene „Standfinder“. Die Bestimmung des Punktes

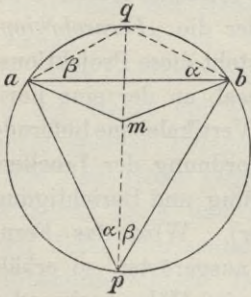


Fig. 24.

als Schnittpunkt der Bestimmungskreise durch Konstruktion derselben mittels Einstellung der Peripheriewinkel ist benutzt bei „*Bauernfeind's* Einschnaidezirkel“¹⁴¹). Zu einer direkten konstruktiven Lösung ist z. B. *Collins' Hilfs-* punkt (vgl. p. 42) geeignet. Ist amb (Fig. 24) das Bilddreieck des Naturdreiecks AMB , so wird auf dem Neupunkt P zunächst ab nach M orientiert und von a aus nach B gezielt, sodann wird ba nach M orientiert und von b aus nach A gezielt. Der Schnitt der beiden

gezogenen Richtungslinien liefert das Bild q des *Collin'schen* Hilfspunktes und die Verbindungslinie qm einen Ort für das Bild p des Neupunktes P . Die vollständige Bestimmung von p kann dann durch Seitwärtseinschneiden erfolgen.

Größere Bedeutung als diese direkte und die mechanischen Lösungen hat für die eigentliche Meßtischpraxis die „indirekte“ Lösung. Der Meßtisch wird nach Augenmaß oder mit Hilfe einer Orientierbussole genähert orientiert und die Richtungslinien mit der Kippregel gezogen. Infolge der nur genäherten Orientierung ergibt sich statt eines Schnittpunktes das „fehlerzeigende Dreieck“, dessen Form von der gegenseitigen Lage der Punkte und dem Fehler der Orientierung abhängt. Über die Lage von p zum Fehlerdreieck hat *J. G. Lehmann*¹⁴²) folgenden Satz aufgestellt:

Der Punkt p liegt innerhalb oder außerhalb des Fehlerdreiecks, jenachdem P innerhalb oder außerhalb von AMB liegt. Im letzten Falle liegen p und das Fehlerdreieck zu verschiedenen Seiten der mittleren Visur, wenn P innerhalb des durch A, M, B gehenden Kreises oder in einem Scheitelwinkel des Dreiecks sich befindet; dagegen liegen p und das Fehlerdreieck auf derselben Seite der mittleren Visur, wenn P außerhalb des durch A, M, B , gehenden Kreises

141) *C. M. v. Bauernfeind*, Münch. Abhandl. 11 (1871), p. 83; *Bauernfeind*, Vermessungskunde 2, p. 189.

142) Anleitung zum vorteilhaften und zweckmäßigen Gebrauche des Meßtisches, Dresden 1820. Vgl. ferner *F. Hartner*, Wien. Ber. 2 (1849), Novemberheft, p. 216; *Hartner-Doležal* 1, p. 891.

einer Dreiecksseite gegenüber liegt. Die Abstände des Punktes p von den durch a , b , m gezogenen Visierlinien verhalten sich wie die Entfernungen des Punktes p von den Punkten a , m , b oder des Punktes P von A , M , B .

Ein praktisch sehr brauchbares Orientierungsverfahren besteht darin, daß man zwei Fehlerdreiecke zu Hilfe nimmt. Man orientiert zunächst nach dem ersten Fehlerdreieck angenähert auf Grund des vorstehenden Satzes und überdreht dann den Tisch absichtlich, sodaß die Orientierung nach der entgegengesetzten Seite gefälscht wird. Man erhält dann ein zweites Fehlerdreieck, dessen homologe Ecken man mit denen des ersten verbindet, dadurch kommt man dem Punkt p sehr nahe. Über Möglichkeit und Günstigkeit der Lösung vgl. p. 43.

Aus der zusammenwirkenden Anwendung dieser Bestimmungsmethoden ergibt sich die Meßtischaufnahme; bei der Anwendung im großen wird eine Triangulierung zugrunde gelegt, welche auf dem Meßtisch graphisch weiter geführt wird. Über die tachymetrischen und die Höhenmessungen gilt das früher (p. 90) Gesagte; auf Grund der gewonnenen Höhenzahlen werden die Horizontalkurven entworfen. Bei einheitlich durchgeführten Landesaufnahmen wird der gewählten Projektionsart entsprechend (vgl. p. 13 und Nr. 8) eine passende Blatteinteilung angeordnet. Beispielsweise ist bei der preußischen Landesaufnahme das Staatsgebiet auf Grund der Gradeinteilung des *Bessel'schen* Ellipsoides in Abschnitte zerlegt. Der von je zwei aufeinanderfolgenden Breiten- und Längengraden umschlossene Flächenteil, eine „Gradabteilung“, wird nach der Breite in 10, nach der Länge in 6 Teile zerlegt, deren jedes ein „Meßtischblatt“ bildet, welches in seinen Eckpunkten in 1:25 000 aufgetragen (sog. „preußische Polyederprojektion“, vgl. VI 1, 4), auf dem Meßtisch nach Eintragung der nach Länge und Breite gegebenen Dreieckspunkte zur Feldaufnahme verwendet wird. Ein allgemeiner Ausdruck für die Genauigkeit der Meßtischaufnahme in Bezug auf die Lagemessung, welche naturgemäß wesentlich abhängig ist vom Verfahren, den gegebenen Grundlagen, dem Maßstab usw., läßt sich gewinnen durch die Angabe, daß sie derjenigen einer exakten Zeichnung entspricht, bei der der Fehler der Punktorte innerhalb $\pm 0,1$ mm bleibt, und die Richtungsgenauigkeit im günstigsten Fall etwa durch $\pm 1'$ ausgedrückt werden kann.

Der Meßtisch ist, seit er durch Prätorius in Altdorf (mensula praetoriana) mit Beginn des 17. Jahrhunderts allgemein bekannt wurde, bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts eines der wichtigsten geometrischen Instrumente gewesen. Für die Kartographie brachte die Ausbreitung der Meßtischaufnahme einen wesentlichen Fortschritt mit sich, indem

sie, gestützt auf die Triangulierung, den Schritt von den mit Bussole, Quadrant, Meßschnur und Schrittmaß gewonnenen Landeskrokis zu einer zusammenhängenden, systematischen Aufnahme erleichterte, welche besonders in den exakten graphischen Landesvermessungen Bayerns (1808—1837) in 1:5000 und Württembergs (1818—1840) in 1:2500 ihren Höhenpunkt erreichten¹⁴³). Nach der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ist die Meßtischaufnahme für die Spezialvermessungen, insbesondere die modernen Katastervermessungen, mehr und mehr in den Hintergrund getreten. Bei topographischen Aufnahmen (Horizontalkurvenbearbeitung p. 92) wird sie für solche Gebiete noch von Bedeutung bleiben, in denen nicht die kartographischen Ergebnisse der speziellen numerisch durchgeführten Landesvermessung, vervollständigt durch spezielle Höhenmessung, zur Herstellung der topographischen Spezialkarten zur Verfügung stehen. Der große Vorteil des Meßtisches besteht darin, daß unmittelbar nach der Natur gezeichnet wird, was die Herstellung leicht lesbarer Karten sehr fördert¹⁴⁴).

22. Flüchtige Aufnahmen. Exakte spezielle Landesvermessungen mit Anwendung der vorherbesprochenen Methoden, deren Ergebnisse geometrische und topographische Spezialkarten sind, liegen zur Zeit nur für kleine Gebiete der Erdoberfläche (Westeuropa, Teile der Vereinigten Staaten, einzelne Teile außereuropäischer Staaten und einige Küsten- und Kolonialgebiete) vor; für andere Gebiete (Osteuropa, den größten Teil der Vereinigten Staaten, kleine Teile Südamerikas, Kapland, Vorderindien, Ostaustralien, Japan) bestehen zur Zeit nur generelle Aufnahmen mit trigonometrischer Grundlage, wobei die Einzelaufnahmen bis jetzt weniger speziell und exakt und nicht im Zusammenhang zur Durchführung gekommen sind; für den Rest, d. h. also den weitaus größten Teil der Erdoberfläche, beruht das vorhandene Kartenmaterial auf „Routenaufnahme“, entweder planmäßig ein zusammenhängendes Kartenbild gebend oder als Einzelergebnisse von Erkundungsreisen. Hierbei ist für die „Grundrißaufnahme“ das geodätische System ein an astronomisch bestimmte Punkte angeschlossenes System von Bussolenzügen (p. 58), meistens aufgenommen mit Freihandbussole, wobei die Entfernung aus der Marschzeit hergeleitet wird, für die „Höhenaufnahme“ barometrische Höhenmessung mit Federbarometer, kontrol-

143) W. Jordan-K. Steppes, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.

144) Für militärtopographische Meßtischaufnahmen sei genannt: Vorschrift für die topographische Abteilung der Landesaufnahme. Heft I. Das topographische Aufnehmen, Berlin 1898; B. Schulze, Das militärische Aufnehmen unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der kgl. preuß. Landesaufnahme, Berlin und Leipzig 1903.

liert durch Quecksilberbarometer und Siedethermometer¹⁴⁵). Neuerdings sind automatische Methoden von *Th. Ferguson* ausgebildet worden¹⁴⁶).

In historischer Hinsicht sei hier erinnert an die Wegekarten der Römer, *Itineraria Antonini, Alexandri etc.*, vornehmlich an die sogenannte *Peutinger'sche* Tafel.

Als eine besondere Methode der topographischen Messungen kommt neuerdings für bestimmte Aufgaben in Betracht die Photogrammetrie (vgl. den folgenden Art., *S. Finsterwalder*), die man in ihrer besonderen geodätischen Anordnung unter Benutzung des „Phototeodolits“ als „Phototachymetrie“ oder „Phototopographie“ bezeichnet.

145) Weiteres mit Literatur findet man bei *Jordan*, Handbuch 2, § 183; *G. Neumayer*, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, 2. Aufl., Berlin 1888; 3. Aufl., Hannover 1905. Ein durchgearbeitetes Beispiel mit Fehlerberechnung enthält: *W. Jordan*, Physische Geographie und Meteorologie der lybischen Wüste, Cassel 1876. Spezialschriften sind: *Kaltbrunner*, Manuel du voyageur, Zürich 1879 (auch deutsch von *Kollbrunner*, Zürich 1881); *Hints to travellers* edited by the Royal geogr. society, London 1883 (8. ed. 1901); *E. de Larminat*, Topographie pratique de reconnaissance et d'exploration, Paris (1905). Man vgl. ferner: *E. Hammer*, Die methodischen Fortschritte der geographischen Landmessung, Geogr. Jahrb. 22 (1899), p. 37; 25 (1902), p. 343.

146) Automatic surveying instruments and their practical uses on land and water (Introduction by *E. Hammer*), London 1904.

(Abgeschlossen im Okt. 1905.)

VI 1, 2. PHOTOGRAMMETRIE.

VON

S. FINSTERWALDER

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

1. **Einleitung.** Historisches. Innere und äußere Orientierung. Eigentliche und abgeleitete Photographien.
2. **Apparate.** Das Objektiv. Vorrichtung zur inneren Orientierung. Bestimmung von Hauptpunkt und Bildweite. Photogrammeter und Phototheodolite.
3. **Ausmessung der Bilder.** Direkte Ausmessung nach *J. Porro*. Ermittlung von Winkeln aus den Koordinaten der Bildpunkte. Zusammenschließen mehrerer Bilder, die vom gleichen Standpunkt aus aufgenommen sind.
4. **Das Rückwärtseinschneiden.** Räumliches Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten. Das räumliche Problem der 6 Punkte und das ebene Problem der 5 Punkte.
5. **Das Vorwärtseinschneiden und die Rekonstruktion der Objekte bei bekannten Standpunkten.** Höhenkontrolle. Gegnerische Kernpunkte. Möglichkeit der Rekonstruktion aus einer Anzahl von Photographien. Zeichnung eines Risses aus zwei Photographien.
6. **Flüchtige Aufnahmen.** Stereophotogrammetrie. Mechanismen.

Literatur.

Bücher.

- E. Deville*, Photographic surveying, Ottawa 1895.
- E. Doležal*, Die Anwendung der Photographie in der praktischen Meßkunst, Halle 1896 (*Doležal*, Anwend. d. Phot.).
- C. Koppe*, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889 (*Koppe*, Photogrammetrie).
- Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896 (*Koppe*, Wolkenmessung).
- A. Laussedat*, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. T. II. Iconométrie et métrophotographie, Paris 1901—03 (*Laussedat*, Métrophotographie).
- G. Le Bon*, Les levers photographiques, 2 vol., Paris 1889.
- V. Legros*, Sommaire de photogrammetrie, Paris 1891.

P. Paganini, Fotogrammetria, Mailand 1901.

F. Schiffner, Die photographische Meßkunst, Halle 1892.

F. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs, Wien 1891 (*Steiner*, Phot.).

Monographien.

S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung 6 (1897), 2. Heft, p. 1, Leipzig 1899 (*Finsterwalder*, Grundlagen).

— Die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme. In: *G. Neumayer*, Anleitung zu wissenschaftl. Beobachtungen auf Reisen, 3. Aufl., Hannover 1905.

G. Hauck, Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie (Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme), J. f. Math. 95 (1883), p. 1; 97 (1884), p. 261; 98 (1885), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207; 128 (1905), p. 91.

C. Pulfrich, Neue stereoskopische Methoden und Apparate, 1. Lief., Berlin 1903.

F. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, Leipzig und Berlin 1904.

1. Einleitung. Die Photogrammetrie (Bildmeßkunst) hat die Aufgabe, aus photographischen Bildern das dargestellte Objekt oder einzelne Abmessungen desselben zu ermitteln. Die Lösung dieser Aufgabe war durch die *Rückwärtskonstruktionen der Perspektive*¹⁾ und Methoden der Küstenaufnahme aus perspektivischen Handskizzen²⁾ vorbereitet und wurde zuerst von *A. Laussedat* (1852—59)³⁾ versuchsweise auf topographische Vermessungen angewandt. Im Anschlusse hieran beschäftigte sich *J. Porro*⁴⁾ seit 1855 mit der instrumentellen Seite. *A. Meydenbauer*⁵⁾ pflegt seit 1867 vorzugsweise die Architekturphotogrammetrie, die er zu hoher Vollendung brachte. *W. Jordan*⁶⁾ (1876) und *C. Koppe*⁷⁾ (1889) förderten das Problem vom geodätischen Standpunkt aus, *G. Hauck*⁸⁾ (1883) nach der theoretischen Seite. In großem Maßstabe wurde die Photogrammetrie zuerst praktisch verwendet in Italien von *L. P. Paganini*⁹⁾ seit 1880 und in Canada von *E. Deville*¹⁰⁾

1) *J. H. Lambert*, Freye Perspektive, Zürich 1759, 8. Abschnitt, p. 203.

2) *Beautemps-Beaupré* 1791—93, beschrieben in: Méthode pour la levée et la construction des cartes et des plans hydrographiques, Paris 1808.

3) Paris C. R. 50 (1860), p. 1127.

4) *E. Doležal*, Photogr. Correspondenz, 1902, p. 82.

5) Zeitschr. f. Bauwesen 17 (1867), p. 61.

6) Zeitschr. f. Vermess. 5 (1876), p. 1.

7) Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889.

8) J. f. Math. 95 (1883), p. 1; 97 (1884), p. 261; 98 (1885), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207; 128 (1905), p. 91.

9) Fotogrammetria, Mailand 1901.

10) Photographic Surveying, Ottawa 1889, 2. Aufl. 1895.

seit 1889. Mit der Ballonphotogrammetrie beschäftigt sich S. Finsterwalder seit 1890. Durch C. Pulfrich wurde seit 1900 die Stereoskopie in den Dienst der Photogrammetrie gestellt. Reiches Material zur Geschichte der photogrammetrischen Methoden und Apparate hat A. Laussedat gesammelt.

Die photographischen Bilder sind in der Regel als *ebene Perspektiven* des Objektes aufzufassen. Die Entfernung des perspektivischen Zentrums (Linsenmittelpunkts) von der bildauffangenden Ebene (lichtempfindlichen Schicht) heißt *Bildweite* (Distanz), der Fußpunkt der Senkrechten von ersterem auf letztere *Hauptpunkt* (Augpunkt), die Senkrechte selbst *Achse der Perspektive* (bezw. der photographischen Kamera). Die Vertikalebene durch die Achse der Perspektive wird als *Hauptvertikalebene*, ihr Schnitt mit der Bildebene als *Hauptvertikale* bezeichnet. Die Horizontalebene durch das Zentrum schneidet die Bildebene nach dem *Horizont*.

Hauptpunkt und Bildweite bilden die *innere Orientierung* einer Photographie. Zur Rekonstruktion des Objektes sind außer den Elementen der innern Orientierung der verwendeten Photographien noch Abmessungen desselben, darunter wenigstens *eine* Länge, als bekannt anzusehen. Bei den wichtigsten Objekten (Terrainflächen, Architekturen) spielt die *Vertikale* eine ausgezeichnete Rolle, und man wird deshalb die Gesamtheit der Lote, bezw. deren gemeinsamen unendlich fernen Punkt als Bestandteil des Objektes ansehen. Ebenso sollen die Punkte, von welchen die Photographien aufgenommen wurden (Standpunkte), als Bestandteile des zu ermittelnden Objektes gelten. Alle Abmessungen, welche von dem so erweiterten Objekt zur Rekonstruktion herangezogen werden, bilden die *äußere Orientierung*, z. B. Länge der Standlinie, Neigung der Achsen der Photographien, Horizont usw.

An photographischen Bildern kommen in Betracht: 1. *wirkliche* oder *eigentliche Photographien* und zwar a) solche mit bekannter innerer Orientierung, wie sie von photogrammetrischen Apparaten geliefert werden, b) nicht orientierte Photographien, wie sie von gewöhnlichen photographischen Apparaten geliefert werden, 2. *uneigentliche* oder *abgeleitete Photographien*¹¹⁾, nämlich Perspektiven wirklicher Photographien, wie sie die Reproduktionstechnik im allgemeinen liefert. Für genaue Arbeiten sind nur die Originalnegative oder davon abgeklatschte Glasdiapositive als eigentliche Photographien aufzufassen; Papierpositive, wegen der Veränderung in den Bädern, die einer homo-

11) Finsterwalder, Grundlagen, p. 8.

genen Deformation entspricht, und Vergrößerungen, die in der Regel eine kleine perspektivische Verzerrung erfahren, dagegen nur als abgeleitete.

Abgeleitete Bilder können in der Regel nicht als Schnitte des Strahlenbündels, welches das ursprüngliche Bild erzeugte, aufgefaßt werden. Dazu sind zwei Bedingungen erforderlich, die man folgendermaßen formulieren kann: Das Strahlenbüschel in der Ebene des abgeleiteten Bildes, welches von einem beliebigen Punkte nach Punkten der unendlich fernen Geraden gezogen werden kann, muß dem Büschel, das im Strahlenbündel den unendlich fernen Punkten der Bildebene entspricht, kongruent sein. Oder: den imaginären Kreispunkten des abgeleiteten Bildes müssen im Bündel Strahlen nach dem imaginären Kugelkreis entsprechen.

2. Apparate. Der wichtigste Bestandteil derselben ist das *photographische Objektiv*¹²⁾, dessen optische Achse senkrecht zur Bildebene steht und jene im Hauptpunkt trifft. Von räumlichen Objekten kann man nur dann scharfe Bilder erzielen, wenn die Bildweite klein ist gegenüber der Entfernung der nächstgelegenen Objektpunkte. Die Bildweite ist dann von der Brennweite wenig verschieden und wird in der Regel unveränderlich gleich letzterer genommen; die daraus entspringende Unschärfe kann durch Einblenden aufgehoben werden. Das Objektiv soll perspektivisch zeichnen. Ist α der Winkel eines die Blendenmitte durchsetzenden Strahles mit der Achse vor Eintritt in die Linse und h die Entfernung des von ihm erzeugten Bildpunktes vom Hauptpunkt der Photographie, so zeichnet die Linse perspektivisch, falls $h : \operatorname{tg} \alpha$ einer Konstanten (der Bildweite) gleich ist. Als Standpunkt der Aufnahme dem Objekt gegenüber hat der Punkt zu gelten, in welchem die Verlängerungen derjenigen in die Linse eintretenden Strahlen, die nach der Brechung im Vorderteil derselben die Blendenmitte durchsetzen, die Achse schneiden. Der so definierte Standpunkt und das um die Bildweite vom *Hauptpunkt* entfernte Zentrum der Perspektive fallen bei den in der Praxis meist verwendeten Objektiven nahe zusammen, nur bei den Teleobjektiven liegt ersterer am Vorderende oder innerhalb des Linsensystems, letzteres objektseits um den größeren Teil der Brennweite außerhalb. Bis auf einige Minuten genau zeichnen perspektivisch: *Teleobjektive* innerhalb $2\alpha = 25^\circ$, *Aplanate* innerhalb $2\alpha = 50^\circ$, *Kollineare*, *Orthostigmaten*, *Protare*, *Doppelanastigmaten* innerhalb $2\alpha = 60\text{—}75^\circ$, *Weit-*

12) *M. v. Rohr*, Theorie und Geschichte des photogr. Objektivs, Berlin 1899; *A. Gleichen*, Photogr. Optik, Leipzig 1905.

winkel innerhalb $2\alpha = 80-100^\circ$, der *Hypergondoppelanastigmat* bis $2\alpha = 140^\circ$. Bei großen Winkeln α werden die durch *Unebenheit* der käuflichen *Glasplatten* verursachten Fehler erheblich. Die innere Orientierung der Bilder einer Kamera verlangt eine *stabile Verbindung von Linse und lichtempfindlicher Fläche*. Auf letzterer müssen sich mindestens *zwei Marken* (meist ein rechteckiger Rahmen, eventuell mit Fadenkreuz); die mit der Kamera fest verbunden sind, abbilden. In bezug auf diese Marken wird die Lage des Hauptpunktes festgelegt.

Bestimmung des Hauptpunktes. Man schraubt die Linse ab, ersetzt die lichtempfindliche Fläche durch einen Spiegel, richtet auf diesen ein Fernrohr derart, daß sich sein Fadenkreuz mit dem Bilde seines Spiegelbildes deckt, schraubt die Linse wieder an, ersetzt den Spiegel durch eine photographische Platte und photographiert das Fadenkreuz des Fernrohres, dessen Bild dann den Hauptpunkt ergibt. Oder einfacher: Man stellt den Apparat mit der lichtempfangenden Fläche horizontal und photographiert in dieser Stellung bei enger Blende einige von der Decke herabhängende Lote, deren Bilder sich im Hauptpunkt schneiden.

Bestimmung der Bildweite. Es sei das Strahlenbüschel von einem Standpunkt nach einer Anzahl (mindestens drei) in einer Ebene mit ihm befindlicher Objektpunkte bekannt. Photographiert man dieselben von dem Standpunkte aus und legt man das bekannte Strahlenbüschel perspektivisch zur Punktreihe der Bildpunkte¹³⁾, so ist die Entfernung des Büschelmittelpunktes von der Punktreihe gleich der Entfernung des perspektivischen Zentrums von der Punktreihe, wodurch letzteres bei bekanntem Hauptpunkt bereits bestimmt ist. Bei unbekanntem Hauptpunkt photographiert man dieselben Objekte vom gleichen Standpunkt aus in anderer Lage der Kamera und erhält dann die Elemente zur Konstruktion des Hauptpunktes und der Bildweite. Die Elemente der inneren Orientierung einer vorliegenden Aufnahme können immer dann wiedergefunden werden, wenn man aus ihr die im Endlichen gelegenen Fluchtpunkte dreier bekannter (meist zueinander senkrechter) Richtungen entnehmen kann. Ein Gleiches gilt unter Voraussetzung vertikaler Bildebene, sobald auf dem Bilde die Perspektive eines wagerechten Quadrates oder Rechteckes von bekanntem Seitenverhältnis vorliegt^{13a)}. Meist

13) Rechnerisch geschieht dies nach der Methode des Rückwärtseinschneidens nach drei oder mehreren Punkten der Punktreihe. Vgl. *W. Jordan, Zeitschr. f. Vermess. 5 (1876), p. 1; Koppe, Photogrammetrie, p. 39*, woselbst auch die Ausgleichungsmethode behandelt ist.

13a) Die zugehörigen Methoden sind im 8. Abschnitt von *J. H. Lambert*

begnügt man sich nicht mit der inneren Orientierung, sondern nimmt noch *Horizont* und *Hauptvertikale* dazu, was am einfachsten bei horizontaler Achse (vertikaler Bildebene) gelingt. Es muß dann die Kamera mit einer Drehachse verbunden werden, die durch eine Libelle vertikal zu stellen ist. Die Vertikalstellung der Kamera wird durch Photographie zweier Lote, die als parallele Linien erscheinen müssen, kontrolliert. Zur Bestimmung des Horizontes genügt dann das Bild eines mit dem Standpunkt gleich hohen Objektes. Horizont und Hauptvertikale werden durch Marken (Fadenkreuz) fixiert. Apparate mit dieser Einrichtung, welche meist noch mit einer Vorrichtung zur Orientierung der Hauptvertikalebene (Horizontalkreis, Busssole) versehen sind, heißen *Photogrammeter* ¹⁴⁾.

Als *photogrammetrische Theodolite* (Phototheodolite) bezeichnet man Kombinationen von Photogrammeter und Theodolit. Dieselben gestatten die Bestimmung beliebig vieler Winkel der äußeren Orientierung. Die Verbindung beider kann rein äußerlich sein, doch ist fast immer die vertikale Drehachse des Theodolits und der Kamera gemeinsam. Die Achse der Kamera ist meist dauernd horizontal gestellt ¹⁵⁾, gelegentlich auch zum Neigen eingerichtet ¹⁶⁾. In anderen Fällen ist die Achse der Kamera mit jener des Theodolitfernrohrs starr verbunden und beide parallel gestellt ¹⁷⁾. Dadurch, daß man das photographische Objektiv als Fernrohrobjektiv benützt, kann man auch beide Achsen zusammenfallen lassen ¹⁸⁾. Endlich hat man auch versucht, den für die photographische Aufnahme maßgebenden Standpunkt (vgl. Nr. 2, p. 101) in den Schnittpunkt der beiden Theodolit-

„Freie Perspektive“, Zürich 1759, auseinandergesetzt. Vgl. auch *F. Schilling*, Über die Anwend. der darst. Geom. insb. über die Photogrammetrie, p. 101—120.

14) Zu den besten Apparaten dieser Art gehören der Photogrammeter von *E. Deville*, *Photographic Surveying*, p. 136, jener von *Pollack*, *ibid.* p. 120 und die beiden Apparate von *Paganini*, *Fotogrammetria*, p. 189, 236, wovon letzterer mit automatischer Horizontalstellung und photogr. Registrierung des Kompasses, ähnlich dem Apparate von *Bridges Lee* [*Engineering* 2 (1897), p. 314] versehen ist. In diese Gruppe gehören auch die Apparate von *A. Meydenbauer*.

15) So bei den ersten Apparaten von *Laussedat*, *Métrophotographie*, p. 125, dem älteren Apparat von *Pollack* (vgl. *Steiner*, *Phot.*, p. 123), bei jenen des österr. militärgeogr. Institutes in Mitt. desselben 16 (1896), p. 67 und dem von *Breithaupt*, *Eders Jahrb. f. Phot.* 1900, p. 387.

16) Älterer Apparat von *Paganini*, *Fotogrammetria*, p. 28; jener von *Gustav Heyde*, *Eders Jahrb. f. Phot.* 1901, p. 357.

17) Phototheodolit von *Koppe*, *Fotogrammetrie*, p. 26; *Wolkenmessung*, p. 14.

18) Zuerst eingeführt von *Paganini* 1889, *Fotogrammetria*, p. 140, dann von *Pollack*, vgl. *Zeitschr. des Österr. Ingen.- u. Arch.-Vereins* 46 (1894), p. 489.

achsen zu bringen¹⁹⁾, um volle Übereinstimmung der Scheitel der gemessenen und photographierten Winkel zu erreichen. Eine eigentümliche Kombination von Theodolit und Kamera mit horizontaler Achse hat *Finsterwalder*²⁰⁾ angegeben. Bei ihr wird das Fernrohr aus dem parallel verschieblichen photographischen Objektiv und einem um eine Horizontalachse drehbaren, nach dem perspektivischen Zentrum zielenden Okulare gebildet.

Apparate, welche Bilder auf nicht ebene Flächen entwerfen, sind der *Zylindrograph* von *Moëssard*²¹⁾, bei welchem eine um eine vertikale Drehachse bewegliche Linse sukzessive einen nahezu 180° umfassenden Teil einer mit Film bespannten *Zylinderfläche* belichtet, und der *Phototheodolit* von *J. Porro*²²⁾, der als Bildfläche eine die Linse konzentrisch umgebende, mit lichtempfindlicher Schicht präparierte kugelförmige Glaskalotte besitzt. Letzterer, sowie der photographische *Messtisch* von *Chevalier*²³⁾ sind längst außer Gebrauch.

Das Bedürfnis, von einem Punkt aus Momentaufnahmen zu machen, welche den ganzen Aussichts-bereich des Standpunktes oder wenigstens einen sehr großen Teil desselben umfassen, hat zur Konstruktion einer Anzahl (3—7) unter festen Winkeln zusammengekoppelter photogrammetrischer Apparate geführt, die für Schiffs-, Luftballon- und Drachenaufnahmen Verwendung finden sollen²⁴⁾.

3. Ausmessung der Bilder. Die vollkommenste Methode der Bildausmessung, von *J. Porro*²²⁾ erdacht und von *C. Koppe*²⁵⁾ ausgebildet, besteht im wesentlichen darin, daß man das entwickelte Negativ wieder genau an jene Stelle des Apparates bringt, die es bei der Aufnahme eingenommen hat, dasselbe dann von rückwärts beleuchtet und die aus dem Apparat durch das Objektiv austretenden Strahlen mit einem beweglichen Fernrohr, dessen Drehungen wie bei einem Theodolit an geteilten Kreisen gemessen werden können, ab sucht. Auf diese Weise eliminiert man alle Fehler, die in der mangelhaften perspektivischen Zeichnung der Linse, in der Unebenheit der

19) Beim Apparat von *A. Schell*, vgl. *Doležal*, *Anwend. d. Photogr.*, p. 47.⁴

20) *Zeitschr. f. Instr.* 15 (1895), p. 370.

21) *Moëssard*, *Le Cylindrographe*, Paris 1889.

22) Vgl. *Doležal*, *Photogr. Correspondenz* 1902, p. 85—87.

23) Vgl. *Stein*, *Das Licht im Dienste wiss. Forschung* 2, 5. Heft; spezieller Teil VI u. VII, *Die Photogrammetrie*, bearb. von *F. Stolze*, p. 199; *Laussedat*, *Métrographie* 2¹, p. 27.

24) *R. Thiele*, *Eders Jahrb. f. Phot.* 17 (1903), p. 131; *Th. Scheimpflug*, *ibid.* 18 (1904), p. 193, sowie *Phot. Corresp.* 1903, p. 659 und *Illustr. aer. Mitt.* 8 (1904), p. 88.

25) *Photogrammetrie*, p. 15.

Glasplatten und in der Unkenntnis der inneren Orientierung begründet sind. In der Regel werden jedoch *Koordinaten der Bildpunkte* gemessen und aus ihnen die gewünschten Winkelgrößen berechnet. Ist r die Entfernung zweier Bildpunkte voneinander, r_1 und r_2 ihr Abstand vom Hauptpunkt und d die Bildweite, so ist der Winkel nach den Bildpunkten aus einem Dreieck mit den Seiten r , $\sqrt{r_1^2 + d^2}$, $\sqrt{r_2^2 + d^2}$ zu berechnen. Steht die *Achse der Kamera horizontal* und sind x und y die auf den Horizont und die Hauptvertikale bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Bildpunktes, so berechnen sich die Azimutdifferenz α gegen die Hauptvertikalebene und die Höhenwinkel β aus den Formeln:

$$\operatorname{tg} \alpha = x : d, \quad \operatorname{tg} \beta = y \cos \alpha : d.$$

Ist die *Achse der Kamera* unter dem Winkel ω gegen den Horizont nach aufwärts geneigt (Fig. 1) und bedeuten x und y die rechtwink-

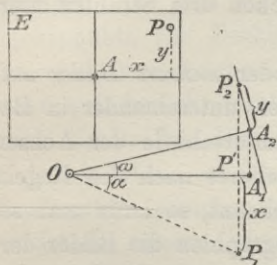


Fig. 1.

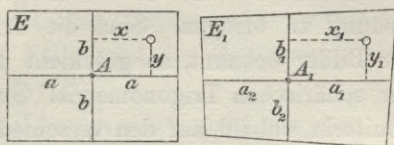


Fig. 2.

ligen Koordinaten eines Bildpunktes, bezogen auf die Hauptvertikale (y) und die Senkrechte dazu (x) durch den Hauptpunkt, so wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{d \cos \omega - y \sin \omega}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{d \sin \omega + y \cos \omega}{d \cos \omega - y \sin \omega} \cos \alpha$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen m und M :

$$d = m \cos M, \quad y = m \sin M, \quad \frac{y}{d} = \operatorname{tg} M,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{m \cos(\omega + M)}, \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\omega + M) \cos \alpha.$$

Statt der Berechnung von α kann man auch nebenstehende Konstruktion anwenden und β aus den Daten der Figur $\operatorname{tg} \beta = P_2 P' : O P_1$ ermitteln²⁶⁾.

Sind aus *abgeleiteten Bildern orientierter Photographien* Winkel zu entnehmen, so möge vorausgesetzt werden, daß der an der wirklichen Photographie rechtwinklige Rahmen samt Achsenkreuz mit abgebildet ist (Fig. 2). Aus den schiefwinkligen Koordinaten x_1 , y_1 eines Bild-

26) Beide Methoden von Koppe, Photogrammetrie, p. 8, 9.

punktes in bezug auf das deformierte Achsenkreuz lassen sich dann die rechtwinkligen Koordinaten x, y in bezug auf das ursprüngliche Achsenkreuz und daraus schließlich die Winkel nach folgenden, aus der kollinearen Verwandtschaft beider Ebenen sich ergebenden Formeln berechnen:

$$\frac{1}{x} = \alpha + \beta \frac{y_1}{x_1} + \gamma \frac{1}{x_1}, \quad \frac{x}{y} = \alpha \frac{x_1}{y_1} + \beta + \gamma \frac{1}{y_1},$$

wobei

$$\alpha = \frac{a_1 - a_2}{a(a_2 + a_1)}, \quad \beta = \frac{a_1 a_2}{a(a_1 + a_2)} \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2}, \quad \gamma = \frac{2 a_1 a_2}{a(a_1 + a_2)},$$

$$x = \frac{b}{a} \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$$

ist ²⁷⁾.

Auf ähnlichem, etwas allgemeinerem Wege kann man auch aus *nichtorientierten Photographien* Winkel entnehmen, wenn die gegenseitige Lage von vier Strahlen, deren Bilder bekannt sind, gegeben ist. Für wirkliche Photographien genügen schon drei Strahlen hierfür ²⁸⁾.

Sind von einem Standpunkt aus *zwei* oder *mehrere Bilder* aufgenommen, so entsteht die Aufgabe, dieselben untereinander in Beziehung zu bringen. Sind die Orientierungsunterschiede der Achsen der Bilder bekannt, so geschieht dies ohne weiteres nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie. Sind sie unbekannt, so kann man sie ermitteln, sobald auf den verschiedenen Photographien die Bilder derselben Objekte zu finden sind. Waren die *Achsen zweier Photographien horizontal* und die innere Orientierung bekannt, so genügt ein Paar Bildpunkte; ist nur letzteres der Fall, so sind *zwei Punktpaare* nötig. Hat man es mit unorientierten wirklichen Bildern zu tun, so kann man aus der kollinearen Beziehung beider aufeinander die Schnittlinie der Bildebenen als Achse der Perspektivität ermitteln, sobald *vier Punktpaare* zu finden sind ²⁹⁾. Der Winkel, den die Bildebenen einschließen, bleibt aber noch unbestimmt. Hat man indessen *drei* solcher *Aufnahmen* von einem Standpunkte aus, so lassen sich in ähnlicher Weise die drei Schnittlinien ihrer Bildebenen finden. Hierdurch wird das Dreikant der Bildebenen und das gemeinsame perspektivische Zentrum festgelegt. Drei eigentliche Photographien von einem Standpunkt genügen also zur Ermittlung der inneren Orientierung jeder

27) *Finsterwalder*, München Ber. 30 (1900), p. 152; vgl. hierzu *W. Jordan*, Zeitschr. f. Architektur und Ingenieurwesen 44 (1898), p. 346; ein graphisches Verfahren findet sich bei *Finsterwalder*, Photogrammetrie, p. 179.

28) Vgl. Nr. 4.

29) *Finsterwalder*, München Ber. 30 (1900), p. 153 u. 157.

derselben und der gegenseitigen Stellung ihrer Achsen, falls sich auf je zwei derselben die Bildpunkte von denselben vier Objektpunkten finden.

4. Das Rückwärtseinschneiden. Da sich aus Photographien Horizontal- und Vertikalwinkel entnehmen lassen, kann man dieselben in der in der Geodäsie üblichen Weise zur Bestimmung des Standpunktes nach drei oder mehreren gegebenen Fixpunkten verwenden (*Pothenot'sche Aufgabe*)³⁰). Dieselbe Aufgabe tritt aber in der Photogrammetrie noch in der Form auf, daß in einer Photographie mit innerer Orientierung die Bilder dreier in ihrer gegenseitigen Lage bekannter Objektpunkte, die mit dem Standpunkt nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind; man soll hieraus die Lage des Standpunktes ermitteln. Die Photographie liefert alle Elemente des Dreikantes der drei Visierstrahlen, und dieses Dreikant ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß sich die Schnittfigur mit dem Dreieck der bekannten Objektpunkte zur Deckung bringen läßt. Diese Aufgabe hat vier Lösungen, von welchen zwei zusammenfallen, falls sich der Standpunkt auf dem Kreiszyylinder befindet, der sich über dem umschriebenen Kreise des Dreiecks der bekannten Objektpunkte senkrecht zu dessen Ebene erhebt. In diesem Falle wird die Bestimmung des Standpunktes unsicher (*gefährlicher Ort*)³¹).

Ist die innere Orientierung der Photographie nicht gegeben, so sind zur Rückwärtsbestimmung des Standpunktes sechs Objektpunkte und deren Bilder nötig. Die Lösung dieser räumlichen Aufgabe wird auf das *ebene Problem der fünf Punkte*³²) zurückgeführt, welches lautet: Zu fünf Punkten einer Ebene einen sechsten so zu finden, daß die von ihm aus nach den fünf Punkten gehenden Strahlen vorgegebene Doppelverhältnisse haben. Das Problem kann als projektive Verallgemeinerung des *Pothenot'schen* Problems aufgefaßt werden. Letzteres geht aus ersterem hervor, wenn von den fünf gegebenen Punkten zwei in die imaginären Kreispunkte rücken. Das Problem der fünf Punkte wird gewöhnlich dazu verwendet, zu einer Photographie ohne innere Orientierung, welche aber bei horizontalliegender Achse aufgenommen wurde, den Standpunkt und die innere Orientie-

30) Vgl. VI 1, 1, Nr. 10 b (*C. Reinhertz*).

31) *S. Finsterwalder*, Grundlagen, p. 26; *S. Finsterwalder u. W. Scheufele*, München Ber. 33 (1903), p. 591, wo sich auch die Ausgleichung der Fehlerörtert findet.

32) Unter diesem Namen wurde von *F. Steiner*, Phot., p. 24 das von *R. Sturm*, Math. Ann. 1 (1869), p. 532 geometrisch gelöste Problem in die Photogrammetrie eingeführt.

rung gleichzeitig zu bestimmen. Man hat dabei in der Grundrißebene der fünf gegebenen Objektpunkte den gesuchten Standpunkt so zu bestimmen, daß sich das von ihm ausgehende Büschel der fünf Strahlen nach einer Punktreihe, die mit dem Grundriß der Bildpunkte kongruent ist, schneiden läßt. Eine lineare geometrische Lösung ist folgende: Es seien $A_0B_0C_0D_0E_0$ die Grundrisse der bekannten Punkte, O_0 jener des gesuchten Punktes, $A'B'C'D'E'$ die Punktreihe, zu der das Büschel $O_0(A_0B_0C_0D_0E_0)$ projektiv sein soll. Man betrachte nun in dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $A_0B_0C_0O_0$ jene Kegelschnitte, die durch D_0 und E_0 hindurchgehen. Von jedem kennt man außer den Grundpunkten das Doppelverhältnis ($= (A'B'C'D')$ bzw. $(A'B'C'E')$), welches $A_0B_0C_0D_0$ bzw. $A_0B_0C_0E_0$ auf dem Kegelschnitt einschließen. Hieraus kann man an jeden der beiden Kegelschnitte die Tangenten in $A_0B_0C_0$ konstruieren. Diese schneiden sich paarweise auf den Seiten des dem Kegelschnittbüschel gemeinsamen Polardreieckes, dessen Ecken außerdem auf den Verbindungslinien der bekannten drei Grundpunkte $A_0B_0C_0$ liegen. Das Polardreieck kann hieraus konstruiert und damit der unbekannte vierte Grundpunkt O_0 gefunden werden. Der durch $A_0B_0C_0D_0E_0$ gehende Kegelschnitt bildet insofern eine „gefährliche“ Kurve, als die Lösung illusorisch wird, falls O_0 auf demselben liegt³³⁾. *F. Steiner*³⁴⁾ und *Mandl*³⁵⁾ haben analytische Lösungen der Aufgabe gegeben.

Das oben erwähnte *räumliche Problem der sechs Punkte* wird folgendermaßen auf das ebene Problem der fünf Punkte zurückgeführt³⁶⁾. Der gesuchte Punkt O wird mit einem der gegebenen Punkte A verbunden und das Ebenenbüschel durch OA als Achse nach den fünf anderen gegebenen Punkten gelegt. Dieses Ebenenbüschel muß zu dem Strahlenbüschel, das vom Bildpunkt A' nach den fünf anderen Bildpunkten geht, projektiv sein. Ist P_0 der Schnitt der Achse des Ebenenbüschels mit der Grundrißebene, und projiziert man von A aus die fünf übrigen Punkte ebenfalls in die Grundrißebene, so ist das Strahlenbüschel von P_0 nach den genannten fünf Projektionen ebenfalls projektiv zum Strahlenbüschel durch A' der Bildebene, und P_0 kann somit nach dem Problem der fünf Punkte

33) Lösung von *Kinkel*, Wochenschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Vereins 16 (1891), p. 292.

34) Phot., p. 28.

35) Mitt. über Gegenst. d. Artill.- u. Geniewesens 1898, p. 165. Das zugehörige Ausgleichungsproblem giebt *E. Doležal*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 29.

36) Lösung von *E. Waelsch* in *F. Steiner*, Phot., p. 53.

gefunden [werden. Die Gerade AP_0 ist ein geometrischer Ort für den Standpunkt. Weitere Örter durch die übrigen Punkte lassen sich auf gleiche Weise finden. Der Standpunkt O darf nicht auf der Raumkurve 3. Ordnung, welche durch die sechs Punkte geht, liegen, sonst wird die Konstruktion illusorisch. Die Bestimmung des Standpunktes gründet sich nur auf Doppelverhältnisse, die dem Bilde entnommen werden; sie gilt also auch für abgeleitete Bilder. Bei Verwendung letzterer ist aber das Einpassen der sechs Bildpunkte in das von dem gefundenen Standpunkt ausgehende Strahlenbündel nicht immer möglich.

5. Das Vorwärtseinschneiden und die Rekonstruktion der Objekte bei bekannten Standpunkten. Wenn nach den Methoden von Nr. 3 die Horizontalprojektionen der zu den Photographien gehörigen Strahlenbündel konstruiert und durch die mit dem photographischen Theodolit gemessenen Winkel gehörig gegeneinander orientiert sind, ergibt sich *der Grundriß der Objektpunkte* ähnlich wie bei der Meßtischaufnahme durch Schnitt entsprechender Strahlen. Die *Höhenunterschiede h der Objektpunkte* gegenüber den Standpunkten werden unter Benützung der aus dem Grundriß abgenommenen Horizontalentfernung e und dem Höhenwinkel β nach der Formel $h = e \operatorname{tg} \beta = (ey \cos \alpha) : d$ gerechnet und so die Höhe jedes Objektpunktes aus mindestens zwei Standpunkten bestimmt³⁷⁾.

Allgemeingültige Formeln, mittels welcher man bei bekannten Standpunkten und bekannter innerer und äußerer Orientierung der Aufnahmen aus den ebenen Koordinaten entsprechender Bildpunkte die räumlichen Koordinaten des zugehörigen Objektpunktes ausrechnen kann, sind mehrfach, insbesondere für Zwecke der Wolkenmessung, aufgestellt worden³⁸⁾.

Den Sinn und die Tragweite der aus der Höhenbestimmung von zwei Standpunkten aus sich ergebenden „Höhenkontrolle“³⁹⁾ hat *G. Hauck* durch Einführung der *gegnerischen Kernpunkte*⁴⁰⁾ klar gemacht. Zwei

37) Zur Erleichterung der hierbei nötigen Zeichnungen und Rechnungen hat *P. Paganini* verschiedene Apparate konstruiert, *Fotogrammetria*, p. 108; vgl. auch *A. v. Hübl*, Mitt. d. militärgeogr. Inst. Wien 18 (1898), p. 93.

38) *K. Heun*, Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 18; *A. W. Sprung*, Met. Zeitschr. 20 (1903), p. 414.

39) Über die Höhenkontrolle und ihre Verwendung zur Abschätzung der Genauigkeit vgl. *Koppe*, Photogrammetrie, p. 69, sowie *Finsterwalder*, Ergänzungshefte zur Zeitschr. d. Deutsch. u. Oesterr. Alpen-Vereins 1 (1897), p. 38; Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 225.

40) *J. f. Math.* 95 (1883), p. 11.

beliebig aufeinander bezogene Punktfelder können nämlich im allgemeinen nicht als Perspektiven eines räumlichen Objektes aufgefaßt werden. Die hierfür notwendige Bedingung erhält man, wenn man das Bündel der Ebenen betrachtet, welche durch die Verbindungslinie der beiden Standpunkte O_1 und O_2 als Achse und beliebige Objektpunkte geht. Die Achse $O_1 O_2$ schneide die Ebenen der Photographien in O_1'' und O_2' , den Bildern je eines Standpunktes vom anderen aus. Diese sind die gegnerischen Kernpunkte und Zentren zweier projektiver Strahlenbüschel, nach welchen die Bildebenen das Ebenenbündel mit der Achse $O_1 O_2$ schneiden. Entsprechende Strahlen jener Büschel laufen nach den Bildpunkten ein und desselben Objektpunktes. Damit nun zwei Punktfelder (P', Q', R', \dots) (P'', Q'', R'', \dots) Perspektiven desselben Raumobjektes sind, müssen sich auf ihnen zwei Punkte O_2' und O_1'' so bestimmen lassen, daß die Strahlenbündel $O_2'(P', Q', R', \dots)$ und $O_1''(P'', Q'', R'', \dots)$ projektiv sind. Dazu ist die Kenntnis von 7 zusammengehörigen Punktepaaren nötig. Die Aufgabe hat drei Lösungen⁴¹⁾. Ist die Bedingung erfüllt, so existieren ∞^5 der Form nach verschiedene unter sich kollineare Objekte, von denen die vorgegebenen Photographien Bilder sind⁴²⁾. Um ein solches Objekt zu finden, schneide man in der ersten Bildebene das Kernstrahlenbüschel durch eine Transversale nach einer Punktreihe, suche im projektiven Kernstrahlenbüschel der zweiten Bildebene jene Transversale aus, welche nach einer kongruenten Punktreihe schneidet, stecke die beiden Bildebenen längs der beiden kongruenten Punktreihen unter beliebigem Winkel ineinander und wähle auf der Verbindungslinie beider Kernpunkte beliebig die perspektivischen Zentren O_1 und O_2 . Die Verbindungslinien $O_1 P'$ und $O_2 P''$ liegen nun in einer Ebene und schneiden sich in einem Objektpunkt.

Die Rekonstruktion des Objektes ist nach G. Hauck nur noch auf ∞^3 Weisen möglich, sobald eine dritte Photographie gegeben ist⁴³⁾. Nachdem die sechs gegnerischen Kernpunkte $O_1'' O_2'$, $O_2''' O_3''$, $O_1''' O_3'$ auf den drei Photographien gefunden sind, kann man die drei Bildebenen so legen, dass die drei Bilder $P' P'' P'''$ eines beliebigen Raumpunktes P mit dem Schnittpunkt der drei Bildebenen zusammenfallen. Die Linien, in welchen sich dabei zwei Bildebenen schneiden (Grundschnitte), sind außer durch die gewählten Bildpunkte noch durch die

41) Von dieser von M. Chasles gestellten Aufgabe hat R. Sturm, Math. Ann. 1 (1869), p. 543, eine geometrische, O. Hesse, J. f. Math. 62 (1862), p. 188 eine analytische Lösung gegeben.

42) Finsterwalder, Grundlagen, p. 11.

43) J. f. Math. 97 (1884), p. 263.

Bedingung bestimmt, daß sie je ein Paar gegnerische Kernstrahlenbündel nach kongruenten Punkten schneiden müssen. Die (nicht immer reellen) Lösungen der so gestellten Aufgabe durch zwei vorgegebene Punkte zwei Gerade so zu legen, dass zwei vorgegebene Strahlenbündel in kongruenten Punktreihen geschnitten werden, ermöglichen schließlich die Konstruktion des Dreikantes der drei Bildebenen aus seinen Seiten. Die sechs Kernpunkte liegen dann in einer Ebene, die auch die drei Standpunkte enthält. Die Strahlen von ihnen aus nach drei entsprechenden Bildpunkten schneiden sich in einem Raumpunkt. Vier wirkliche Photographien bestimmen das Objekt bis auf den Maßstab. *Finsterwalder*⁴⁴⁾ führte die Konstruktion desselben auf die Ermittlung eines Kegelschnittes zurück, der acht Raumgerade, die zu zweien durch einen Punkt gehen, trifft.

Wesentlich vereinfacht wird die *Rekonstruktion des Objektes*, sobald die *innere Orientierung* der benützten Photographien bekannt ist⁴⁵⁾. Es reichen dann bereits *zwei Bilder* aus, um das dargestellte Objekt bis auf den Maßstab zu bestimmen.

Man verschafft sich zunächst die gegnerischen Kernpunkte O_1'' und O_2' , wofür *S. Finsterwalder*⁴⁶⁾ passende Näherungsmethoden angegeben hat. Verbindet man diese Kernpunkte mit den zugehörigen Zentren O_2 und O_1 , so müssen die Verbindungslinien bei richtiger Lage der Bildebenen zur Deckung kommen.

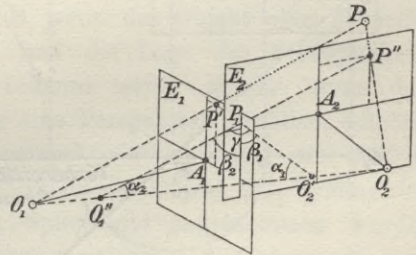


Fig. 3.

Die gegenseitige Stellung der Ebenen und Achsen der Photographien findet man durch folgende Überlegung (Fig. 3). Man ziehe in den Bildebenen die Kernstrahlen $O_2'P'$ und $O_1''P''$. Mit Hilfe der inneren Orientierung berechnet man die Winkel α_1 und α_2 , welche sie mit den Verbindungslinien $O_2'O_1$, $O_1''O_2$ einschließen, sowie die Neigungswinkel der Ebenen $P'O_2'O_1$ und $P''O_1''O_2$ gegenüber der ersten bzw. zweiten Bildebene. In dem Dreikant, das die beiden Bildebenen mit der Ebene O_1O_2P einschließen, ist nun die Seite

44) *Finsterwalder*, Grundlagen, p. 14.

45) *Ibid.* p. 15.

46) München Abhandlgn. 22 (1903), p. 229 u. München Ber. 33 (1903), p. 683. Ist der Kernpunkt des einen Bildes bekannt, so kann der des anderen durch eine dem Rückwärtseinschneiden entsprechende sphärische Konstruktion gefunden werden. Vgl. *S. Günther*, München Ber. 24 (1904), p. 115 und *Finsterwalder*, *ibid.* 25 (1905), p. 3.

$\gamma = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2$, sowie die anliegenden Winkel bekannt und es können die Winkel β_1 und β_2 , welche die Kernstrahlen mit der Schnittlinie der beiden Bildebenen einschließen, sowie der Winkel der letzteren gerechnet werden. Ist nun noch eine Länge, z. B. jene der Standlinie $O_1 O_2$ gegeben, so ist die gegenseitige Lage der Standpunkte und der

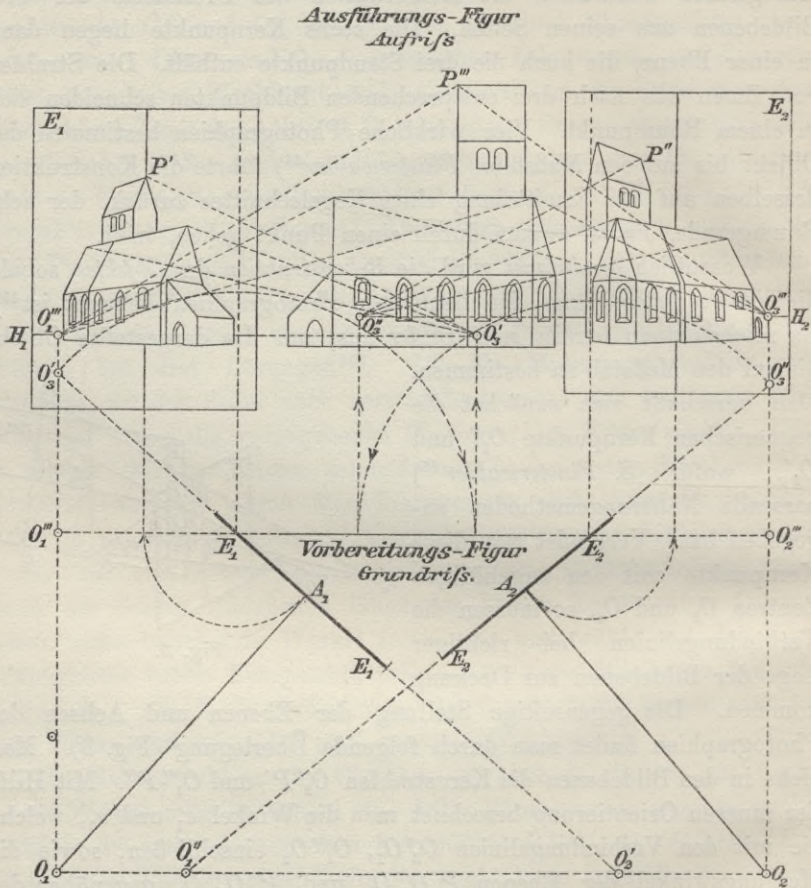


Fig. 4.

Bildebenen bestimmt und das Objekt kann punktwise konstruiert werden. Ein vollständig durchgeführtes Beispiel hat *Finsterwalder*⁴⁷⁾ gegeben. Dort sind auch die Fragen der Ausgleichsrechnung behandelt, welche sich ergeben, wenn ein photogrammetrisch der Form nach ermitteltes Objekt durch passende Wahl des Maßstabes und der

47) München Abhandlgn. 22 (1903), p. 248.

äußeren Orientierung mit einer überschüssigen Zahl von Abmessungen des wirklichen Objektes in möglichste Übereinstimmung gebracht werden soll⁴⁸).

Von *G. Hauck* stammt eine *Methode, beliebige Risse, auch Zentralprojektionen des Objektes, aus zwei photographischen Bildern zu zeichnen*, welche auf die trilineare Verwandtschaft dreier Projektionen desselben Objektes gegründet ist. Zwei Perspektiven eines Punktes bestimmen (im allgemeinen linear) die dritte Perspektive desselben und diese kann, sobald man die Beziehung der drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel kennt, unmittelbar als Schnitt zweier Kernstrahlen gefunden werden. Ist die genannte Beziehung aus der räumlichen Konfiguration von Bildebenen und Zentren in der sogenannten „Vorbereitungsfigur“ ermittelt, so kann die weitere Konstruktion in der „Ausführungsfigur“ ausschließlich in der Ebene durchgeführt werden⁴⁹). Man vergleiche das Beispiel auf S. 112 (Fig. 4), in welchem der Aufriß aus zwei Photographien mit lotrechter Bildebene bestimmt wird.

In manchen Fällen ist man schon aus *einer* Aufnahme imstande, das Objekt zu rekonstruieren; z. B. wenn das Objekt eben (Umrißlinie eines stehenden Gewässers) und die Lage des Standpunktes gegenüber der Ebene desselben bekannt ist⁵⁰). Ferner, wenn das Bild außer dem Objekt auch noch eine Perspektive desselben enthält, wie z. B. bei Architekturen einen perspektivischen Grund- oder Aufriß oder den Schatten auf eine Ebene. Wenn das Objekt eine Symmetrieebene besitzt, oder samt seinem Spiegelbild aufgenommen wurde, so gelingt ebenfalls die Rekonstruktion aus einer Aufnahme, da sich das Bild der Orthogonalprojektion auf die Symmetrieebene (Spiegelebene) durch perspektivische Halbierung der Verbindungslinien symmetrischer Punkte immer ermitteln läßt⁵¹).

6. Flüchtige Aufnahmen. Stereophotogrammetrie. Mechanismen. Als flüchtige Aufnahmen bezeichnet man jene, bei welchen die photogrammetrischen Standpunkte nicht, wie es im Interesse der Genauigkeit zumeist geschieht, durch Messungen höheren Genauigkeitsgrades von vornherein festgelegt werden. Die Rekonstruktion eines Objektes aus vier wirklichen unorientierten Photographien oder aus zwei Bildern mit innerer Orientierung fallen bereits unter diesen Begriff. Für die Anwendung ist aber der Sonderfall

48) *Ibid.* p. 240.

49) *G. Hauck*, *J. f. Math.* 95 (1883), p. 23.

50) *E. Deville*, *Photographic Surveying*, p. 45.

51) *S. Finsterwalder*, *Grundlagen*, p. 18.

von erheblicher Bedeutung, bei welchem die optischen Achsen der Aufnahmen im Raume orientiert sind, sei es vollständig gegen die Lotlinie und die Himmelsrichtungen (also mittels Libelle und Bussole) oder unvollständig gegen die Lotlinie allein. Bei vollständiger Orientierung führt eine einfache lineare Konstruktion auf Grund zweier Bilder zur Rekonstruktion des Objektes samt den Standpunkten; bei ausschließlicher Orientierung der Aufnahmen gegen die Lotlinie ist zur Erreichung des Zieles die Lösung einer Gleichung sechsten Grades nötig, welche den Orientierungsunterschied beider Aufnahmen liefert⁵²⁾. Die Lösung dieser Gleichung kann durch eine einfache Näherungskonstruktion ersetzt werden. Wenn es sich um die Verarbeitung einer größeren Zahl von Aufnahmen, die verschiedenen Standpunkten zugehören, handelt, so ist es von Vorteil, sämtliche in betracht kommenden Richtungen „gnomonisch“ abzubilden, indem man durch ein festes Zentrum Parallele zu den betreffenden Richtungen zieht und ihnen die Schnittpunkte mit einer Horizontalebene entsprechen läßt. Richtungen, die in einer Ebene liegen oder einer solchen parallel sind, entsprechen dann Punkte auf einer Geraden. Auf diesem Wege ergeben sich dann graphisch die Bedingungen, denen die Richtungen der verschiedenen Standlinien entsprechen müssen, damit sie sich einem räumlichen Netz von Standpunkten zuordnen lassen⁵³⁾. Diese Konstruktionen beruhen im wesentlichen auf der Verwendung der Höhenwinkel, bzw. Höhenkontrollen. Wenn die Höhenabmessungen des Objektes zu klein sind, um eine wirksame Höhenkontrolle zu gestatten, wenn man also auf die Horizontalwinkel allein angewiesen ist, hört die Möglichkeit der Rekonstruktion des Objektes aus zwei Bildern ohne Kenntnis der Standpunkte auf. Sind die Richtungen der Achsen der Bilder bekannt, so liefert die *Lambert'sche* Aufgabe der sechs Punkte⁵⁴⁾ (drei Standpunkte und drei Objektpunkte) die Mittel zur Rekonstruktion eines ebenen Objektes aus drei Bildern. Sind auch diese unbekannt, so kann man mittels der *Lambert'schen* Aufgabe der acht Punkte⁵⁵⁾ (vier Standpunkte und vier Objektpunkte) auf Grund von vier Bildern zum Ziele gelangen. Ein ähnliches

52) S. Finsterwalder, München Ber. 24 (1904), p. 103. Vgl. auch K. Fuchs, Zeitschr. f. Vermess. 34 (1905), p. 449.

53) S. Finsterwalder, Verhandlg. d. dritten Mathematikerkongresses in Heidelberg, Leipzig 1905, p. 476.

54) J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung 1, Berlin 1765, p. 72, 77, 81.

55) Ibid. p. 185. Vgl. J. A. Grunert, Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 89 und W. Láska, Monatshefte Math. Phys. 12 (1901), p. 172.

Problem der acht Punkte (drei Standpunkte und fünf Objektpunkte) hat bisher noch keine Lösung gefunden.

Eine besondere Bedeutung gewinnen die gegnerischen Kernpunkte und Strahlenbüschel, sowie die auf ihnen fußenden Konstruktionen dadurch, daß sie die Möglichkeit bieten, Kurven aus ihren Bildern zu rekonstruieren, ohne daß man imstande ist, auf diesen Bildern zusammengehörige Punkte zu erkennen⁵⁶⁾. Zieht man durch einen beliebigen Punkt des ersten Bildes der Kurve den Kernstrahl, so ist ihm der gegnerische Kernstrahl im zweiten Bilde zugeordnet. Dieser muß den zugehörigen Punkt enthalten und letzterer ist somit einer der Schnittpunkte des gegnerischen Kernstrahles mit dem zweiten Bild der Kurve. Auch in anderer Weise sind die Kernstrahlen zum Aufsuchen entsprechender Punkte nützlich⁵⁷⁾.

Eine wesentliche Vereinfachung des Aufsuchens und der Benützung der Kernpunkte tritt dann ein, wenn die Bildebenen unter sich parallel oder sogar noch zur Standlinie parallel gestellt werden⁵⁸⁾. In letzterem Falle kommen die Kernpunkte ins Unendliche zu liegen und die gegnerischen Kernstrahlenbüschel werden Parallelstrahlenbüschel. Die beiden Aufnahmen bilden dann ein Paar *Stereoskopbilder* mit einer Augendistanz gleich der Standlinie. Hierauf beruht das stereoskopische Ausmeßverfahren von *C. Pulfrich*⁵⁹⁾ oder die *Stereophotogrammetrie*. Setzen wir zur Vereinfachung den Fall lotrechter Bildebenen voraus und verschieben wir die beiden Bilder in ihrer gemeinsamen Ebene parallel derart, daß sich die Hauptpunkte decken, so liegen entsprechende Punkte beider Bilder in den Endpunkten paralleler Strecken (Parallaxen) von einer Länge p , die der Entfernung e des Objektpunktes von der Standlinie umgekehrt proportional ist ($e = (bD) : p$, wo b die Länge der Standlinie, D die gemeinsame Bildweite beider Aufnahmen ist). Bezeichnet p_x die Horizontalparallaxe, d. h. die Projektion der Strecke p auf den Horizont, so drücken sich die drei Koordinaten (X horizontal in Richtung der Basis, Y horizontal senkrecht dazu, Z lotrecht) auf den linken Standpunkt bezogen folgendermaßen aus: $Y = (bD) : p_x$,

56) *G. Hauck*, J. f. Math. 95 (1883), p. 11.

57) *A. v. Hübl*, Abhandlgn. d. geogr. Ges. in Wien 3 (1901), p. 20.

58) *Ibid.* p. 21 Anmerk. *C. Koppe* (Wolkenmessung, p. 10) hat schon das Parallelstellen der Achsen empfohlen und Formeln für die Punktbestimmung abgeleitet.

59) *Zeitschr. f. Instr.* 22 (1902), p. 229; 23 (1903), p. 43, 317; 24 (1904), p. 53, sowie gesammelt in: *Neue stereoskopische Methoden und Apparate*, 1. Lief., Berlin 1903.

$X = (xD) : p_x$, $Z = (yD) : p_x$, wobei x und y die Koordinaten des Bildpunktes auf dem linken Bild sind. Zusammengehörige Bildpunkte werden mittels des Zeiß'schen Stereokomparators nach dem Prinzip der wandernden Marke sehr leicht und genau gefunden. Die Schwierigkeit der Stereophotogrammetrie besteht in der genauen Herstellung des Parallelismus der optischen Achsen beider Aufnahmen⁶⁰). Die Versuche von E. Deville, an Stelle der Ausmessung stereoskopischer Bilder die direkte räumliche Konstruktion des Objektes auf optisch-mechanischem Wege zu setzen, haben in der Geodäsie keine Verwendung gefunden, dagegen scheint das Prinzip bei der Deutung chirurgischer Röntgenaufnahmen brauchbar zu sein⁶¹).

Schließlich sind noch die Versuche zu erwähnen, welche bezwecken, die photogrammetrischen Konstruktionen durch mechanische oder optische Apparate zu ersetzen. Einen theoretisch sehr vollkommenen Apparat zur mechanischen Herstellung einer dritten Perspektive aus zwei vorliegenden hat G. Hauck⁶²) angegeben. In die photogrammetrische Praxis ist er indessen ebensowenig übergegangen wie andere Perspektographen⁶³) einfacherer Art, welche nur eine ebene Figur perspektivisch umzeichnen. Letztere Aufgabe wird zur Zeit sicherer mittels perspektivischer Netze ausgeführt⁶⁴). Aussichtsreicher sind die neueren Versuche, optische Hilfsmittel zur Bewältigung heranzuziehen. So hat Th. Scheimpflug⁶⁵) ein Verfahren zur perspektivischen Umzeichnung einer ebenen Figur auf die Tatsache gegründet, daß eine vollkommene Weitwinkellinse eine beliebig gegen die optische Achse geneigte Objektebene Punkt für Punkt scharf und perspektivisch richtig in eine gewisse andere Ebene abbildet, welche man durch einen einfachen Mechanismus mit der Objektebene zwangsläufig in Verbindung setzen kann.

60) A. v. Hübl, Mitt. d. militärgeogr. Inst. Wien 23 (1904), p. 182; 24 (1905), p. 143. In diesen Arbeiten wird insbesondere auch den notwendigen Korrekturen bei unvollkommener Parallelstellung der Achsen Rechnung getragen.

61) E. Deville, Trans. of the R. S. of Canada (2) 8 (1902—03), p. 63.

62) Mein persp. Apparat, Festschr. der techn. Hochschule, Berlin 1884; verbessert von E. Brauer, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 25 (1891), p. 782.

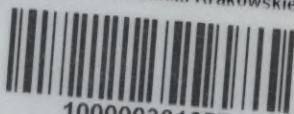
63) E. Deville, Photographic Surveying, p. 77.

64) Ibid. p. 88 und Finsterwalder, Grundlagen, p. 5.

65) Method of distorting plane images by means of lenses or mirrors, Amerikanische Patentschrift Nr. 751347 und Apparatus for the systematic alteration of plane pictures Nr. 752596 (1904).

(Abgeschlossen im Oktober 1905.)

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000301657



[Fortsetzung von S. 2 des Umschlags.]

Band VI. 1. Teil. Geodäsie

Redigiert von Ph. Furtwängler in Bonn

* Ist erschienen

Vorwort zu Band VI, Teil 1.

Inhaltsverzeichnis von Band VI, Teil 1.

A. Geodäsie.

1. Niedere Geodäsie: C. Reinherz in Hannover.
2. Besondere Ausführungen zur Photogrammetrie: S. Finsterwalder in München.
3. Höhere Geodäsie: P. Pizzetti in Pisa.
4. Kartographie: R. Bourgeois in Paris
5. Nautik: H. Meldau in Bremen.

6. Tr

Druk. U. J. Zam. 356, 10.000.

7. Massenverteilung und Bewegung des Erdkörpers: H. Hergesell in Straßburg.
8. Dynamische Geologie: E. Wiechert in Göttingen.
9. Die Optik der Atmosphäre: J. M. Pernter in Wien
10. Dynamische Meteorologie: W. Trabert in Wien.
11. Erdmagnetismus und verwandte Erscheinungen: A. Schmidt in Potsdam.

Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik (herausg. von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigezeichnet die Herren W. Ahrens, M. Böcher, A. v. Braunmühl, T. J. P. A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, L. Henneberg, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, E. Lampe, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, Otto Meißner, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, E. Study, Th. Vahlen, A. Wangerin, K. v. Wesendonck, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltrugheim 51.

B. G. Teubners Mathematische Zeitschriften.

Archiv der Mathematik und Physik. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. III. Reihe. Im Anhang: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke. 10. Band. 1906. Preis für den Band von 4 Heften n. M. 14.—. Generalregister zu Reihe II, Bd. 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit Bildnis von R. Hoppe. [XXXI u. 114 S.] gr. 8. geh. n. M. 6.—

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von Gustaf Eneström. III. Folge. 7. Band. 1906. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. M. 20.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. In Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer. 15. Band. 1906. gr. 8. Preis für den Band von 12 Heften n. M. 18.—. Generalregister zu Band 1—10, zusammengestellt von E. Wölffing. [In Vorbereitung.]

Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Hrsg. von F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert. 62. Band. 1906. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. M. 20.—. Generalregister zu den Bänden 1—50, zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit Porträt von A. Clebsch. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. M. 7.—

Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 3. Jahrg. 1906. Preis für den Jahrgang von 12 Nummern n. M. 3.—. Einzelnummer 40 S.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute (Groningen), D. J. Korteweg (Amsterdam), J. C. Kluyver (Leyden), W. Kapteyn (Utrecht), J. Cardinaal (Delft). gr. 8. geh. 14. Jahrgang. 1906. Jährlich 2 Hefte. Jeder Jahrgang n. M. 7.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Organ für angewandte Mathematik. Hrsg. von R. Mehmke und C. Runge. 53. Band. 1906. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. M. 20.—. Generalregister zu den Jahrgängen 1—25. [123 S.] gr. 8. geh. n. M. 3.60. Generalregister zu den Jahrgängen 1—50, zusammengestellt von E. Wölffing. [XII u. 308 S.] gr. 8. 1905. geh. n. M. 15.—, in Leinw. geb. n. M. 16.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an den höheren Schulen, Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen. Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann. Herausgegeben von H. Schotten. 37. Jahrg. 1906. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 8 Heften n. M. 12.—. Generalregister zu den Jahrgängen 1—32 in Vorbereitung.

H. WIENERs Sammlung Mathematischer Modelle

im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig.

Die Modelle der „Sammlung“ sind für den geometrischen Unterricht an höheren Schulen und Hochschulen bestimmt und sollen dem Lernenden Raumformen und geometrische Beziehungen durch einfache und übersichtliche Darstellung nahe bringen.



Ebene Gebilde. Drahtmodelle z. Projizieren.

M. 6.— bis *M.* 16.—

Ebenflächige Gebilde.

Regelmäßige Vielfache PLATONS, KEPLERS und POINSONS, Modelle zur Theorie der Gruppen von Drehungen *M.* 7.— bis *M.* 24.—

Flächen 2. Ordnung. Drahtmodelle, Hauptschnitte darstellend, Kugel mit Parallelschnitten *M.* 8.— bis *M.* 28.—. Bewegliche Modelle der Flächen 2. O. *M.* 25.— bis *M.* 48.—, und zwar Fadenmodelle (ohne Gewichte), Stabmodelle (mit „H. WIENERs geschränktem Verbindungsgelenk“), Kreisschnittmodelle aus Drahtkreisen (mit demselben Gelenk).

Dreh- und Schraubenflächen. Drehbare Drahtmodelle mit Meridian- und anderen ebenen Schnitten oder mit Haupttangentenkurven: Kreisring, Drehfläche eines zur Sinuslinie affinen Meridians, Wendelfläche, schiefe Regelschraubenfläche, Schraubenröhrenfläche. *M.* 50.— bis *M.* 175.—

Raumkurven und abwickelbare Flächen.

16 Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen von Raumkurven, zur Darstellung ihrer Stellen mit Fortschreiten oder Rückkehr von Punkt, Tangente und Schmiegungeebene, und zwar bei endlicher Lage des Punktes, unendlich ferner Lage der Schmiegungeebene, oder der Tangente, oder des Punktes. *M.* 40.— bis *M.* 45.—

Sämtliche Modelle können einzeln oder in Reihen bezogen werden. Das ausführliche Verzeichnis mit Abbildungen und genauen Preisangaben wird auf Verlangen von B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3, frei geliefert.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348769

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301657