ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . . RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . . . H. BURKHARDT IN MÜNCHEN UND W. WIRTINGER IN WIEN.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN . . . . A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK, IN 2 TEILBÄNDEN . . . . PH. FURTWÄNGLER IN AACHEN UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK (IN VORBEREITUNG).

BAND V3. HEFT 1.

AUSGEGEBEN AM 14. JANUAR 1909.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1909.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II 1, Heft 1—6; Bd. II 2, Heft 1; Bd. III 1, Heft 1 u. 2; Bd. III 2, Heft 1—3; Bd. III 3, Heft 1—3; Bd. IV 1 I, Heft 1–4 (vollständig); Bd. IV 1 II, Heft 1; Bd. IV 2 I, Heft 1–4 (vollständig); Bd. IV 2 II, Heft 1 u. 2; Bd. V 1, Heft 1–4; Bd. V 2, Heft 1 u. 2; Bd. V 3, Heft 1; Bd. VI 1 A, Heft 1 u. 2; Bd. VI 1 B, Heft 1; Bd. VI 2, Heft 1 u. 2.

Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

... Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literatur... liche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts ... beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ... wendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige ... andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fr... wendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche ... die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachli... angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **O. Hölder**-Leipzig, **F. Klein**-Göttingen, **V. v. Lang**-Wien, **W. Wirtinger**-Wien, **H. v. Seeliger**-Wien, **H. Weber**-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-München, **Ph. Furtwängler**-Aachen, **F. Klein**-Göttingen, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **C. H. Müller**-Göttingen, **K. Schwarzschild**-Göttingen, **A. Sommerfeld**-München, **E. Wiechert**-Göttingen und **W. Wirtinger**-Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens-Magdeburg
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Berlin
G. Bohlmann-Berlin
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt-München
E. Czuber-Wien
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg-Kiel
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Netto-Gießen
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
K. Runge-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg i. P.
H. Schubert-Hamburg
D. Seliwanoff-St. Petersburg
E. Study-Bonn
K. Th. Vahlen-Greifswald
H. Weber-Straßburg i. E.
A. Wiman-Lund.

II. Band:

M. Böcher-Cambridge, Mass.
. Brunel (†)
. Burkhardt-München
. Faber-Karlsruhe
. Fricke-Braunschweig
. Hahn-Wien
. Harkness-Montreal
. Hensel-Marburg
. Herglotz-Wien
. Kneser-Breslau
. Krazer-Karlsruhe
. Maurer-Tübingen
. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
. F. Osgood-Cambridge, Mass.
. Painlevé-Paris
. Pincherle-Bologna
. Pringsheim-München
. Sommerfeld-München
. Vessiot-Lyon
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-Würzburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Göttingen.

III. Band:

L. Berzolari-Pavia
H. Burkhardt-München
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Münster i. W.
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Bologna
G. Fano-Turin
C. Guichard-Clermont-Ferrand
P. Heegaard-Vedbaek bei Kopenhagen
K. Heun-Karlsruhe
G. Kohn-Wien
H. Liebmann-Leipzig
R. v. Lilienthal-Münster i. W.
G. Loria-Genua
H. v. Mangoldt-Danzig
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.
E. Müller-Wien
J. Neuberg-Lüttich
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn-Leipzig
G. Scheffers-Charlottenburg
A. Schoenflies-Königsberg i. P.
C. Segre-Turin
M. Simon-Straßburg i. E.
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel-Karlsruhe
O. Staude-Rostock
H. Steinitz-Charlottenburg
A. Voss-München
E. Wälsch-Brünn
H. G. Zeuthen-Kopenhagen
K. Zindler-Innsbruck.

IV. Band:

M. Abraham-Göttingen
C. Cranz-Berlin
P. u. T. Ehrenfest-Petersburg
S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
Ph. Forchheimer-Graz
Ph. Furtwängler-Aachen
M. Grübler-Dresden
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun-Karlsruhe
G. Jung-Mailand
F. Klein-Göttingen
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
R. v. Mises-Brünn
C. H. Müller-Göttingen
L. Prandtl-Göttingen
H. Reißner-Aachen
A. Schoenflies-Königsberg
P. Stäckel-Karlsruhe
O. Tedone-Genua
E. Timerding-Straßburg i. E.
A. Timpe-Danzig
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
G. Zemplén-Budapest.

V. Band:

M. Abraham-Illinois
L. Boltzmann (†)
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
P. Debye-München
H. Diesselhorst-Berlin
H. Dubois-Berlin
Fr. Emde-Berlin
S. Finsterwalder-München
R. Gans-Tübingen
F. W. Hinrichsen-Charlottenburg
E. W. Hobson-Cambridge
J. H. van t'Hoff-Berlin
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
M. Laue-Berlin
Th. Liebisch-Königsberg
H. A. Lorentz-Leiden
L. Mamlock-Berlin
G. Mie-Greifswald
H. Minkowski-Göttingen
O. Mügge-Göttingen
J. Nabl-Wien
F. Pockels-Heidelberg
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff-Stuttgart
K. Runge-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg
M. Schröter-München
A. Sommerfeld-München
E. Study-Bonn
A. Wangerin-Halle
W. Wien-Würzburg
J. Zenneck-Braunschweig

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
G. H. Darwin-Cambridge
F. Exner-Wien
S. Finsterwalder-München
Ph. Furtwängler-Aachen
F. R. Helmert-Potsdam
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
J. M. Pernter-Wien
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt-Potsdam
W. Trabert-Innsbruck
E. Wiechert-Göttingen.

VI, 2. Band

E. Anding-Gotha
J. Bauschinger-Berlin
A. Bemporad-Catania
E. W. Brown-Haverford
C. Ed. Caspari-Paris
C. V. L. Charlier-Lund
F. Cohn-Königsberg i. P.
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
J. v. Hepperger-Wien
G. Herglotz-Wien
H. Kobold-Kiel
F. R. Moulton-Chicago
G. v. Niessl-Brünn
S. Oppenheim-Prag
L. Schulhof-Paris
K. Schwarzschild-Göttingen
E. Strömgren-Kopenhagen
K. Sundmann-Helsingfors
E. T. Whittaker-Dublin
A. Wilkens-Hamburg
C. W. Wirtz-Straßburg i. E.
H. v. Zeipel-Pulkowa.

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a/S.) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, M. Böcher, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, . Eneström, H. Fehr, L. Henneberg, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, E. Lampe, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, Otto Meißner, W. Fr. Meyer, E. Müller, . Netto, M. Noether, W. Osgood, K. Petr, S. Pincherle, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, E. Study, Th. Vahlen, A. Wangerin, K. v. Wesendonck, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr.-Maraunenhof, Herzog Albrechtallee 27.

V 21. OPTIK. ÄLTERE THEORIE.

Von

A. WANGERIN

IN HALLE A. S.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

Ältere Werke und Lehrbücher der Optik.

Chr. Huygens, Traité de la lumière, Leiden 1690. Deutsch in den Klassikern der exakten Wiss. Nr. 20, herausgegeben von *E. Lommel* 1890, 2. Aufl. 1903 von *A. v. Oettingen.*

I. Newton, Optics, London 1704. Deutsch in den Klassikern der exakten Wiss. Nr. 96, 97, herausgegeben von *Abendroth* 1898.

J. Herschel, On the theory of light, London 1828. Deutsche Bearbeitung von *J. C. E. Schmidt,* Stuttgart und Tübingen 1831.

G. B. Airy, On the undulatory theory of optics in mathematical tracts, Cambridge 1831, 4. ed. 1858. — Undulat. theory of optics 1866, 2. ed. 1877.

J. C. E. Schmidt, Lehrbuch der analyt. Optik, Göttingen 1834.

F. G. W. Radicke, Handbuch der Optik, Berlin 1839.

K. W. Knochenhauer, Die Undulationstheorie des Lichtes, Berlin 1839.

B. Powell, A general and elementary view of the undulatory theory, London 1841.

H. Lloyd, Lectures on the wave theory of light, Dublin 1841; 2. Aufl. u. d. Titel Elementary treatise on the wave theory of light, London 1857, 3. Aufl. 1873.
M. Moigno, Répertoire d'optique moderne, Paris 1847—1850.
A. Beer, Einleitung in die höhere Optik, Braunschweig 1853; 2. Auflage, herausgegeben von *Victor von Lang,* Braunschweig 1882.
F. Billet, Traité d'optique physique, Paris 1858.
E. Verdet, Leçons d'optique physique éd. par *A. Levistal,* 2 Bde, 1869—1871. Deutsche Bearbeitung von *K. Exner,* Braunschweig 1881—1887. Diese Bearbeitung enthält äußerst ausführliche bibliographische Notizen.
F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von *E. Dorn,* Leipzig 1885.
M. E. Mascart, Traité d'optique, 3 Bde, Paris 1888—1893.
Th. Preston, The theory of light, London 1890; 3. ed. 1901.
G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Optik, Leipzig 1891.
P. Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes, Leipzig 1891.
H. Poincaré, Théorie mathématique de la lumière, Paris 1889. Deutsche Ausgabe von *E. Gumlich* und *W. Jaeger,* Berlin 1894.
A. B. Basset, A treatise on physical optics, Cambridge 1892.
P. Drude, Lehrbuch der Optik, Leipzig 1900; 2. Aufl. 1906, behandelt hauptsächlich die elektromagnetische Lichttheorie.
A. Schuster, Einführung in die theoretische Optik 1904. Übersetzt von *H. Konen* Leipzig 1907.

Werke, deren Inhalt teilweise der Optik angehört.

L. Euler, Opuscula varii argumenti, Teil I und II, Berolini 1744, 1750.
— Lettre à une princesse d'Allemagne, St. Pétersbourg 1768—1772.
A. Fresnel, Article Lumière, dans le Supplément à la traduction de la 5^me^ édition du Système de chimie de *Th. Thomson* par *Riffaut,* Paris 1822.
G. Th. Fechner, Repertorium der Experimentalphysik, Bd. 2, 1832. (Enthält eine Darstellung der *Fresnel*schen Optik.)
A. Cauchy, Exercices de math. Bd. 3, 4 u. 5, 1829, 1830.
— Exercices d'analyse et de phys. math. Bd. 1, 1840.
H. W. Dove, Repertorium der Physik Bd. 3, Berlin 1839 (enthält eine Darstellung der Theorien von *Cauchy* und *F. Neumann*).
G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852 (das letzte Drittel des Buches ist optischen Inhalts).
V. von Lang, Einleitung in die theoretische Physik, Braunschweig 1867. Zweite vermehrte Auflage, Braunschweig 1891.
H. Klein, Theorie der Elastizität, Akustik und Optik, Leipzig 1877.
F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers, herausgegeben von *O. E. Meyer,* Leipzig 1885 (optischen Inhalts sind die Abschnitte 13—17).
W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, 2 Bde, Leipzig 1895, 1896 (die Optik umfaßt die zweite Hälfte von Band 2).
R. Weinstein, Einleitung in die höhere mathematische Physik, Berlin 1901.
A. Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Auflage. Die Optik ist in Bd. 6 enthalten. Leipzig 1906 (1. Auflage 1893).
Lord Kelvin, Baltimore Lectures on molecular dynamics and the wave theory of light, London und Cambridge 1904.

Monographien.

A. Cauchy, Mémoire sur la dispersion de la lumière, Prag 1836.

F. X. Moth, Die Theorie des Lichtes nach einem lithographierten Mémoire von *Cauchy,* Wien 1842.

F. Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung, 1832. Klassiker der exakten Wiss. Nr. 76, herausgegeben von *A. Wangerin,* 1896.

C. Neumann, Die magnetische Drehung der Polarisationsebene, Halle 1863.

G. G. Stokes, Report on double refraction. Rep. Brit. Ass. 1862.

Ch. Briot, Essais sur la théorie mathématique de la lumière, Paris 1864. Deutsch von *Klinkerfues* 1867.

B. de Saint-Venant, Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses, Paris 1872.

R. T. Glazebrook, Theoretical optics since 1840 — a survey. Phil. Mag. (6) 5, 1903.

Gesammelte Werke.

A. Fresnel, Oeuvres complètes, 3 Bde, Paris 1866—1870.

A. Cauchy, Oeuvres complètes, Bd. 1, Paris 1882. Die auf 26 Bde berechnete Ausgabe ist noch nicht abgeschlossen.

F. Neumann, Gesammelte Werke. Bisher ist nur Bd. 2, Leipzig 1906, erschienen.

G. Green, Mathematical papers, London 1871.

H. Lloyd, Miscellaneous papers, London 1877.

J. Mac Cullagh, Collected works, Dublin, London 1880.

G. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1882; Nachtrag 1891.

G. G. Stokes, Mathematical and physical papers, 5 Bde, Cambridge 1880—1907.

Lord Rayleigh (J. W. Strutt), Scientific papers, 4 Bde, Cambridge.

I. Die Optik bis Fresnel.

1. Huygens und die Entwicklung der theoretischen Optik vor Fresnel. Der Begründer der Undulationstheorie des Lichtes ist Christian Huygens (1629—1695). *R. Descartes*, den *Euler* und, ihm folgend, andere Autoren als Vorgänger von *Huygens* bezeichnen, suchte den Grund der Lichterscheinungen nicht in einer Wellenbewegung, sondern in einem Druck, der sich momentan durch das zwischen Lichtquelle und Auge befindliche Medium fortpflanze[1]. *R. Hooke,* den Young und Arago neben *Huygens* nennen, sieht zwar in seiner Micrographia[2] als Ursache des Lichts sehr schnelle Vibrationsbewegungen von sehr kleiner Amplitude an, nimmt dabei aber an, daß sich diese Bewegungen momentan auf jede Entfernung hin fortpflanzen. Ähnliche

1) *Descartes*, Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la géométrie, qui sont des essais de cette méthode. A. Leyde 1638, sowie die späteren Schriften von Descartes.

2) London 1665.

unzureichende Anschauungen hatte der Jesuitenpater *J. G. Pardies* (1636 bis 1673) in einer verloren gegangenen Schrift entwickelt, die *Huygens* im Manuskript vorgelegen hat[4]). *F. M. Grimaldi*, der Entdecker der Diffraktion des Lichts, vergleicht die Beugungserscheinungen mit kreisförmigen Wasserwellen, ist aber weit entfernt davon, die Fortpflanzung des Lichts als eine Wellenbewegung anzusehen[3]). Diese Grundanschauung der Undulationstheorie als erster klar dargelegt zu haben, ist das Verdienst von *Huygens*, der in seinem 1678 verfaßten, aber erst 1690 veröffentlichten Traité de la lumière[4]) die allmähliche Ausbreitung des Lichts erklärte als durch kugelförmige Wellen erfolgend, die sich von den einzelnen Punkten eines leuchtenden Körpers als Mittelpunkten aus mit sehr großer, aber endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Als Träger dieser Wellenbewegungen nimmt er ein eignes Medium, den Lichtäther, an. Zur Erklärung der geradlinigen Fortpflanzung, der Reflexion und Brechung des Lichts zieht er das nach ihm benannte Prinzip herbei, nach dem man eine Lichtwelle nicht nur vom leuchtenden Punkte, sondern auch von jedem Zwischenstadium derselben Welle ableiten kann, indem man die einzelnen Punkte der letzteren als Erschütterungszentren betrachtet und die Enveloppe aller dieser Elementarwellen bestimmt. Bei der Erklärung der Reflexion und Brechung werden die Punkte der Fläche, an der die Reflexion, resp. Brechung erfolgt, als die Mittelpunkte der Elementarwellen angesehen, und zwar sind hier die Radien der Elementarwellen derart zu wählen, daß die Gesamtzeit, die das Licht gebraucht, um von der Lichtquelle zum Zentrum der Elementarwelle zu gelangen und dann den Radius dieser Welle zu durchlaufen, für alle Elementarwellen die gleiche ist. *Huygens* wandte sein Prinzip nur auf einzelne Erschütterungen an und setzte keinerlei Beziehungen zwischen den aufeinander folgenden Impulsen voraus. Erst *Fresnel* gab dem Prinzip die volle Tragweite und Fruchtbarkeit, indem er es mit dem Prinzip der Interferenz verband. Was man heute unter dem *Huygens*schen Prinzip versteht, ist diese *Fresnel*sche Erweiterung, nicht die von *Huygens* selbst benutzte Form seines Prinzips. *Huygens* hielt ferner die Schwingungen des Lichts für longitudinal.

---

3) *F. M. Grimaldi*, Physico mathesis de lumine, coloribus et iride, Bononiae 1665.

4) *Christian Huygens*, Traité de la lumière, Leiden 1690. In lateinischer Übersetzung unter dem Titel Tractatus de lumine 1728 in den von *s' Gravesande* herausgegebenen „Chr. Hugenii, Opera reliqua, Amstelodami", erschienen. Deutsch herausgegeben von *E. Lommel*, 1890; Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 20; zweite Auflage, von *A. v. Oettingen* berichtigt, 1903. — *Pardies* ist in Kap. I erwähnt.

Übrigens wandte *Huygens* sein Prinzip nicht nur auf isotrope Medien an, sondern auch auf die von dem Dänen *Erasmus Bartholinus* (1625—1698) entdeckte Doppelbrechung des Kalkspats. *Huygens* nahm dabei an, daß die ponderablen Moleküle des Kalkspats, die er als abgeplattete Rotationsellipsoide mit parallelen Achsen ansah, wegen ihrer Gestalt den Undulationen des im Kalkspat enthaltenen Äthers nach verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Widerstand entgegensetzen, und daß infolgedessen jene Undulationen sich in zwei Teile spalten, einen Teil, der in Kugelwellen durch den Kristall hindurchgeht, und einen zweiten, dessen Wellen die Gestalt von abgeplatteten Rotationsellipsoiden besitzen, deren Achsen dieselbe Richtung wie die Achsen der ponderablen Moleküle haben. Auch auf diese ellipsoidischen Wellen wandte *Huygens* sein Prinzip an. Er entdeckte ferner die Doppelbrechung des Bergkristalls und die Polarisation des durch ein Kalkspatrhomboeder gegangenen Lichts, ohne aber das Wesen der Polarisation zu erkennen.

Huygens Anschauungen über das Wesen des Lichts blieben lange Zeit unbeachtet und erfuhren infolgedessen keine Weiterbildung. Der Grund dafür lag vorzugsweise darin, daß sich fast alle Forscher des achtzehnten Jahrhunderts der von *I. Newton* aufgestellten Emissionstheorie des Lichts zuwandten[5]). *Newton* stand in seinen ersten optischen Arbeiten der Undulationstheorie keineswegs feindlich gegenüber. In einer Abhandlung, die im November 1672 in den Philosophical Transactions veröffentlicht ist, erörterte er sogar, wie die Dispersion in der Undulationstheorie zu erklären sei, wobei er allerdings die unvollkommene Theorie von *Hooke* im Auge hatte. Später verwarf er die Undulationstheorie ganz, und in dem Anhang zur ersten lateinischen Ausgabe der Optik (1706) entwickelte er seine Emissionstheorie. Die Grundvorstellungen derselben waren nicht neu, aber erst *Newton* baute auf diesen Vorstellungen eine Theorie auf. Und so groß war *Newtons* Autorität im achtzehnten Jahrhundert, daß durch ihn die Undulationstheorie fast völlig verdrängt wurde. Nur wenige, vereinzelte Anhänger fand letztere Theorie im achtzehnten Jahrhundert, unter ihnen ist vor allem *Leonhard Euler* zu nennen, der gerade durch *Newtons* experimentelle Entdeckungen dazu geführt wurde, die Lichtundulationen als periodische Bewegungen anzusehen, ähnlich den

5) Die erste Auflage der Optik ist 1704 erschienen. Ihr Titel lautet: Optics or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light. Eine lateinische Übersetzung ist 1706 erschienen. Eine deutsche Übersetzung der Optik ist in den Klassikern der exakten Wissenschaften Heft 96 und 97 veröffentlicht.

Schallwellen, und die Farbe des Lichtes von der Frequenz der Schwingungen abhängen zu lassen. Durch die Einführung des Begriffes der Periodizität des Lichtes wurde die *Huygens*sche Theorie wesentlich vervollkommnet und erweitert. Über die Abhängigkeit der Brechbarkeit von der Schwingungsdauer hatte er in seinen ersten Arbeiten die falsche Vorstellung, daß beide gleichzeitig zunehmen. Erst später erkannte er, daß die brechbarsten Strahlen die geringste Schwingungsdauer haben.

In das achtzehnte Jahrhundert fällt noch die Begründung der Photometrie durch *Bouguer* und *Lambert*[6]). Doch waren diese Arbeiten, so wichtig sie an sich sind, von keiner Bedeutung für die Entwicklung der theoretischen Optik. Es kann deshalb hier nicht näher darauf eingegangen werden, ebensowenig wie auf die die geometrische Optik betreffenden Arbeiten.

Der definitive Sieg der Undulationstheorie über die Emissionstheorie wurde erst durch die Entdeckungen zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts vorbereitet, teils durch die mehr theoretischen Arbeiten von *Thomas Young*, dem Erfinder des Interferenzprinzips, teils durch Auffindung neuer experimenteller Tatsachen. Durch Einführung des Interferenzprinzips gelang es *Young*, die Erscheinungen der Farben dünner Blättchen und der *Newton*schen Ringe in allen damals bekannten Einzelheiten zu erklären. Trotz dieser Erfolge vermochte er nicht, der Undulationstheorie allgemeine Anerkennung zu verschaffen, was wohl daran lag, daß seine Darstellung mehr qualitativ als quantitativ war. Von *Laplace* wurde ihm der Vorwurf mangelnder Strenge gemacht[7]). Auch auf die Beugungserscheinungen versuchte *Young* das Interferenzprinzip anzuwenden, ohne aber das Wesen der Sache voll zu erfassen.

Von neuen experimentellen Tatsachen sind zu nennen: die Entdeckung der Polarisation des Lichts bei der Reflexion unter einem bestimmten Winkel durch *É. L. Malus*[8]), sowie die Entdeckung der Farbenerscheinungen kristallinischer Medien im polarisierten Licht durch

6) *P. Bouguer*, Essai d'optique sur la gradation de la lumière, Paris 1729. Sein Traité d'optique ist erst nach seinem Tode durch *De la Caille* zu Paris 1760 herausgegeben. — In demselben Jahre erschien auch *J. H. Lamberts* Photometria sive de mensura et gradibus luminis et umbrae, Aug. Vindel. 1760. Eine deutsche Ausgabe des Werkes ist von *Anding* in den Klassikern der exakten Wissenschaften, Heft 31—33, veröffentlicht.

7) *Young*, Werke 1, p. 374. — *Youngs* hauptsächlichste Arbeiten stammen aus den Jahren 1802 und 1804.

8) Théorie de la lumière réfléchie, Paris Mém. 11, 1810. — Von *Malus* rührt auch der sachlich wenig zutreffende Name Polarisation her.

D. F. J. Arago (1811), Erscheinungen, die von *J. B. Biot* und *D. Brewster* weiter studiert und insbesondere dazu benutzt wurden, auch geringe Grade von Doppelbrechung zu konstatieren. So zeigte sich, daß die Doppelbrechung, die bis 1810 nur von Kalkspat und Quarz bekannt war, bei allen Kristallen außer denen des regulären Systems auftrat. Ferner wurde *Biot*[9]) durch die Erscheinungen der chromatischen Polarisation darauf geführt, daß neben der beim Kalkspat beobachteten Doppelbrechung noch eine andere, die der sogenannten zweiachsigen Kristalle, existiere. Auch die *Huygens*sche Konstruktion der beiden durch die Doppelbrechung im Kalkspat entstehenden Wellen wurde zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts durch *W. H. Wollaston* (1802) und *É. L. Malus* (1810) experimentell verifiziert, und dadurch erhielt die *Huygens*sche Auffassung vom Wesen des Lichts eine neue Stütze.

2. Augustin Fresnel (1788—1827). *Fresnel* ist der Begründer der neueren theoretischen Optik. Durch ihn wurde die Undulationstheorie in ganz neue Bahnen gelenkt, die Emissionstheorie definitiv beseitigt. *Fresnel*s Arbeiten zerfallen zeitlich sowohl, als sachlich in drei Teile[10]). In den ersten Untersuchungen wird nur die Annahme zugrunde gelegt, daß das Licht aus periodischen Schwingungen bestehe, die interferenzfähig seien. Über die Art der Schwingungen, über die Richtung der in ihnen stattfindenden Bewegung wird nichts vorausgesetzt; ja *Fresnel* war sogar ursprünglich der Ansicht, die Lichtschwingungen seien longitudinal. Indem er die grundlegenden Annahmen bis in ihre letzten Konsequenzen verfolgte und insbesondere das Interferenzprinzip mit dem Huygensschen Prinzip verband, gelang es ihm, die Beugungserscheinungen in allen Einzelheiten zu erklären. Zugleich wies er nach, daß die Emissionstheorie zur Erklärung jener Erscheinungen unfähig sei.

Weiter wurde *Fresnel* durch seine experimentellen Untersuchungen über die Interferenz des polarisierten Lichts, insbesondere die Beobachtung, daß zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen nicht interferenzfähig sind, zu der Erkenntnis geführt, daß das polarisierte Licht aus geradlinigen transversalen, d. h. in der Wellenebene liegenden, zum Strahl senkrechten Schwingungen bestehe. Mit dieser Entdeckung trat *Fresnel*, obwohl die darauf bezüglichen Beobachtungen schon 1816 angestellt waren, erst 1821 hervor.

Nachdem er aus dieser Anschauung die verschiedensten Folgerungen gezogen und gezeigt hatte, wieviel einfacher sich auf Grund

---

9) Paris Mém. 13, 1812.

10) Vgl. *É. Verdet*, Introduction aux Oeuvres d'Augustin Fresnel, p. XII.

derselben mannigfache Erscheinungen erklären ließen als nach der alten Theorie, ging er drittens dazu über, die Beschaffenheit der Medien zu studieren, in denen die Lichtbewegung stattfindet. Die Hauptfrucht dieser Studien sind seine Arbeiten über Doppelbrechung, in denen er durch Induktion die Hauptgesetze jener Erscheinungen feststellte. Für diese Gesetze gab er dann eine theoretische Ableitung, die zwar auf etwas willkürlichen und bestreitbaren Annahmen beruhte, aber zu Resultaten führte, die völlig mit der Erfahrung übereinstimmen. Daran schlossen sich dann die ebenfalls wichtigen Untersuchungen über die Modifikationen, die das polarisierte Licht durch Reflexion und Brechung erleidet, seine Theorie der Aberration u. a.

Da die ältere theoretische Optik sich auf *Fresnels* Forschungen aufbaut, erscheint es zweckmäßig, zunächst die Resultate dieser Forschungen im Zusammenhang darzustellen. Dabei soll nur auf das für die allgemeine Theorie Wichtige eingegangen werden. Vor allem sollen die Erscheinungen der Interferenz und Diffraktion, denen in dieser Enc. der besondere Artikel 25 gewidmet ist, hier übergangen werden.

II. Darstellung der Fresnelschen Optik.

3. Fresnels analytische Behandlung der Lichtstrahlen. Bei den Bewegungen, aus denen nach der Undulationstheorie das Licht besteht, ist die Verschiebung der Teilchen äußerst gering, kleiner als die Sphäre des stabilen Gleichgewichts; für derartige Bewegungen aber fällt der Unterschied zwischen festem, flüssigem und gasförmigem Zustande fort. Diese Überlegung hat *Fresnel*[11]) dazu geführt, den Lichtäther als ein elastisches Medium zu betrachten, freilich als ein Medium besonderer Art („quasi-elastisch“ würde man vorsichtiger sagen), derart, daß ein Teilchen desselben, das aus seiner Gleichgewichtslage verrückt ist, durch die Einwirkung der übrigen Teilchen in dieselbe zurückgezogen wird mit einer Kraft, die der Verschiebung proportional und nach der Gleichgewichtslage hin gerichtet ist. Für u, v, w, die Komponenten der Verrückung nach drei senkrechten Achsen, gelten demnach Gleichungen der Form:

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -M^2u,\quad \frac{d^2v}{dt^2} = -M^2v,\quad \frac{d^2w}{dt^2} = -M^2w,$$

und die Integration dieser Gleichungen ergibt als Lösungen:

$$(2)\quad u = a\sin(Mt+\alpha),\quad v = b\sin(Mt+\beta),\quad w = c\sin(Mt+\gamma),$$

11) Ann. chim. 17, 1821; Oeuvres 1, p. 629 ff. — Vgl. auch *F. Neumann*, Ann. Phys. Chem 25, 1832.

also einfach periodische Schwingungen. Die Konstante M hängt mit der Schwingungsdauer τ durch die Gleichung zusammen:

$$(3) \qquad M \cdot \tau = 2\pi.$$

Die Faktoren a, b, c nennt man die Amplituden der Komponenten, das Argument des Sinus die Phase.

Aus (2) folgt:

$$(4) \qquad bcu \sin(\gamma - \beta) + cav \sin(\alpha - \gamma) + abw \sin(\beta - \alpha) = 0$$

und

$$(5) \qquad c^2 v^2 + b^2 w^2 - 2bcvw \cos(\beta - \gamma) = b^2 c^2 \sin^2(\beta - \gamma),$$

d. h. das schwingende Teilchen beschreibt eine in der Ebene (4) liegende Ellipse; und für den Fall $\alpha = \beta = \gamma$ geht diese Ellipse in eine durch den Punkt $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, d. h. die Gleichgewichtslage des betrachteten Teilchens, gehende gerade Linie über.

Betreffs der *Fortpflanzung* der Bewegung in dem betrachteten elastischen Medium nimmt man an, daß jedem Teilchen durch das vorhergehende eine gleiche oder ähnliche Bewegung mitgeteilt wird, allein diese Mitteilung bedarf einiger Zeit, und die Bewegung eines Teilchens, welches von dem Ursprung der Schwingungen um die Strecke D entfernt ist, fängt erst an, wenn eine der Entfernung D proportionale Zeit $t_0 = D/V$ verflossen ist, falls V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist. Von den einzelnen Punkten des leuchtenden Körpers pflanzt sich die Lichtbewegung nach allen Seiten in kugelförmigen Wellen fort. In größerer Entfernung von der Lichtquelle kann man, wenn man die Fortpflanzung nur in einer bestimmten Richtung untersuchen will, die Kugelfläche durch ihre Tangentialebene ersetzen und zugleich von der etwaigen Änderung der Amplituden a, b, c mit der Entfernung von der Lichtquelle absehen. Es kommt das auf die Annahme hinaus, daß alle Punkte einer unendlichen Ebene völlig gleiche Schwingungen vollführen, und daß diese Bewegung nach der Zeit t_0 bis zu einer parallelen Ebene im Abstande $D = V \cdot t_0$ fortgeschritten ist. Übrigens besteht zwischen den ebenen Wellen und den von einem Zentrum aus sich fortpflanzenden Kugelwellen noch folgender Zusammenhang. Sieht man alle möglichen durch das Zentrum gelegten Ebenen als ebene Wellen an, die gleichzeitig von dem Zentrum ausgehen, und betrachtet die Lage der verschiedenen ebenen Wellen nach Verlauf einer bestimmten Zeit, so umhüllen dieselben eine Kugel; und gerade bis zu dieser Kugel würde sich eine von dem Zentrum ausgehende Erschütterung in der gleichen Zeit verbreitet haben. Der Radius dieser Kugel heißt Strahl.

Stellen hiernach die Gleichungen (2) die Bewegungen einer ebenen, durch den Anfangspunkt gehenden Welle dar, so werden die Bewegungen in einer parallelen Ebene im Abstande D dargestellt durch

$$(6)\quad \begin{cases} u' = a \sin\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{D}{V}\right) + \alpha\right], \\ v' = b \sin\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{D}{V}\right) + \beta\right], \\ w' = c \sin\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{D}{V}\right) + \gamma\right], \end{cases}$$

(denn die Bewegung in der zweiten Ebene ist zur Zeit $t - t_0$ dieselbe wie die der ersten zur Zeit t und es ist $t_0 = D/V$. Sind x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes der zweiten Ebene, und hat das Lot auf den parallelen Ebenen die Richtungskosinus α', β', γ', so ist

$$(6\text{a})\qquad D = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z.$$

Ferner ist

$$(6\text{b})\qquad V \cdot \tau = \lambda$$

die Wellenlänge, d. h. die Entfernung zweier solchen parallelen Ebenen, daß die Bewegung in der zweiten soeben beginnt, wenn die Bewegung in der ersten eine Periode hindurch gedauert hat. Somit hat man das Resultat: Stellen die Gleichungen (2) die Bewegungen einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene dar, deren Normale die Richtungskosinus α', β', γ' hat, so wird bei Fortpflanzung der Schwingungen in parallelen ebenen Wellen die Schwingung in einem beliebigen Punkte des Raumes dargestellt durch

$$(7)\quad \begin{cases} u' = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}{\lambda}\right) + \alpha\right], \\ v' = b \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}{\lambda}\right) + \beta\right], \\ w' = c \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}{\lambda}\right) + \gamma\right]. \end{cases}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihrerseits hängt von der Natur des Mediums ab; für sie gilt die Formel $V = \sqrt{\frac{E}{\delta}}$, wo δ die Dichtigkeit, E eine von den Elastizitätsverhältnissen des Mediums abhängige Konstante ist. (Betreffs der Ableitung der Formel s. Nr. 14.)

Als Maß für die *Intensität* des Lichts dient die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene hindurchgehende lebendige Kraft. Die Intensität ist demnach proportional dem Integral

$$\int\limits_0^1 \left\{\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw'}{dt}\right)^2\right\} dt,$$

und dieses ist wegen der Periodizität der Bewegung und der Kleinheit von τ gleich

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \left\{\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw'}{dt}\right)^2\right\} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 (a^2 + b^2 + c^2),$$

d. h. die Intensität ist der Summe der Quadrate der Amplituden der Verrückungskomponenten proportional.

4. Das Interferenzprinzip bei Fresnel. Interferenz. Wird ein Punkt von zwei Wellen derselben Schwingungszahl (also wegen (5) auch derselben Wellenlänge) getroffen, deren Komponenten[12])

$$(8)\quad u = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda}\right) + \alpha\right], \qquad v = b \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda}\right) + \beta\right],$$
$$w = c \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda}\right) + \gamma\right]$$

und

$$(9)\quad u_1 = a_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D_1}{\lambda}\right) + \alpha_1\right], \; v_1 = b_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D_1}{\lambda}\right) + \beta_1\right],$$
$$w_1 = c_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D_1}{\lambda}\right) + \gamma_1\right]$$

sind, so setzen sich dieselben nach dem Prinzip der Koexistenz kleiner Bewegungen zu einer Bewegung zusammen, deren Komponenten

$$u_0 = u + u_1, \quad v_0 = v + v_1, \quad w_0 = w + w_1$$

sind, und zwar erkennt man, daß, da u, v, w, u_1, v_1, w_1 sich auf die Form

$$M \cos\frac{2\pi t}{\tau} + N \sin\frac{2\pi t}{\tau}$$

bringen lassen, auch u_0, v_0, w_0 dieselbe Form annehmen, oder auch die Form:

$$(10)\quad \begin{cases} u_0 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda}\right) + \alpha_0\right], \\ v_0 = B \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda}\right) + \beta_0\right], \\ w_0 = C \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda}\right) + \gamma_0\right], \end{cases}$$

12) Man könnte die Formeln vereinfachen, indem man $\frac{2\pi D}{\lambda}$ mit α, β, γ zusammenfaßt, ebenso $\frac{2\pi D_1}{\lambda}$ mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Das ist nicht geschehen, um die Formeln in der von *Fresnel* benutzten Form zu erhalten.

wo A und α_0 durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(11)\quad \begin{cases} A^2 = a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos\left[\frac{2\pi(D-D_1)}{\lambda} - \alpha + \alpha_1\right], \\ \operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{a \sin\alpha + a_1 \sin\left[\frac{2\pi(D-D_1)}{\lambda} + \alpha_1\right]}{a\cos\alpha + a_1\cos\left[\frac{2\pi(D-D_1)}{\lambda} + \alpha_1\right]}, \end{cases}$$

und analog B, C, β_0, γ_0.

Die Intensität der resultierenden Schwingung (7) ist proportional

$$(12)\quad A^2 + B^2 + C^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$
$$+ 2aa_1\cos\left[\frac{2\pi(D-D_1)}{\lambda} - \alpha + \alpha_1\right] + 2bb_1\cos\left[\frac{2\pi(D-D_1)}{\lambda} - \beta + \beta_1\right]$$
$$+ 2cc_1\cos\left[\frac{2\pi(D-D_1)}{\lambda} - \gamma + \gamma_1\right].$$

Die Formeln (8) bis (12), die man leicht auf den Fall beliebig vieler denselben Punkt treffenden Wellen anwenden kann, bilden die Grundlage für die Lehre von der Interferenz und Beugung, wobei man nur daran festzuhalten hat, daß erfahrungsgemäß nur solche Wellen interferenzfähig sind, die von demselben Punkt der Lichtquelle herrühren und gleiche Schwingungsdauer, also gleiche Farbe besitzen.

5. Die Entdeckung der Polarisation durch É. L. Malus, D. F. J. Arago und A. Fresnel. Transversalität der Lichtschwingungen. Schon die Beobachtungen von *Huygens* haben gezeigt, daß das Licht beim Durchgang durch einen Kalkspat andere Eigenschaften erlangt als das natürliche Licht; die beiden aus einem Kalkspat ausgetretenen Strahlen zeigen ein ganz verschiedenes Verhalten, wenn sie durch eineu zweiten Kristall derselben Art hindurchgehen. Die Beobachtungen ergeben, daß die beiden aus dem ersten Kristall ausgetretenen Strahlen sich nicht rings um ihre Fortpflanzungsrichtung gleichmäßig verhalten, und daß die nach verschiedenen Richtungen stattfindenden Verschiedenheiten symmetrisch zu je einer Ebene liegen, daß ferner diese Symmetrieebenen der beiden Strahlen zueinander senkrecht stehen. *Malus* beobachtete dann 1810, daß das unter einem bestimmten Einfallswinkel (demjenigen, für welchen der reflektierte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht, für Glas etwa 55°) an einer Glasfläche reflektierte Licht dieselbe Eigenschaft erlangt, und daß die Symmetrieebene hier die Einfallsebene ist. *Malus* nannte das so modifizierte Licht *polarisiert* nach der Einfallsebene, letztere die Polarisationsebene. Wies diese Tatsache, daß das Licht für verschiedene durch den Strahl gelegte Ebenen sich verschieden verhält, schon darauf hin, daß die Lichtschwingungen des polarisierten Lichts nicht longitudinal seien, nicht in der Richtung des Strahls erfolgen können, so wurde doch eine klare Anschauung über das Wesen der Lichtschwingungen erst aus den Experimenten von *Fresnel* und *Arago* über die Interferenz des polarisierten Lichtes gewonnen. Diese Experimente zeigten, daß senkrecht gegeneinander polarisierte Strahlen gar nicht interferieren. Daraus folgt, daß das polarisierte Licht aus rein transversalen, zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Schwingungen besteht. Der Beweis dafür läßt sich nach *Verdet* folgendermaßen führen. Man lege das Koordinatensystem so, daß die Fortpflanzungsrichtung mit der x-Achse parallel ist, daß also die Schwingungskomponenten des polarisierten Lichts die Form (6) haben, darin $D = x$ gesetzt, also

$$(13)\quad u = a\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right],\quad v = b\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \beta\right],$$
$$w = c\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \gamma\right].$$

Um eine Lichtbewegung zu erhalten, die zu dieser senkrecht polarisiert, ihr im übrigen aber ganz gleich ist, muß man die ganze Bewegung um 90^0 um die Fortpflanzungsrichtung, d. h. um die x-Achse gedreht denken, da zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen das gleiche Verhalten gegenüber zwei durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten senkrechten Ebenen haben. Das gibt eine Bewegung mit den Komponenten

$$u' = u,\quad v' = w,\quad w' = -v,$$

und falls die zweite Schwingung gegen die erste einen Gangunterschied δ besitzt, so werden diese Komponenten

$$(14)\quad u_1 = a\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right) + \alpha\right],\quad v_1 = c\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right) + \gamma\right],$$
$$w_1 = -b\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right) + \beta\right].$$

Durch Zusammensetzung der Bewegung (13) und (14) ergibt sich eine resultierende Schwingung, deren Intensität nach (12) proportional ist dem Ausdruck

$$(15)\quad J = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2a^2\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda} + 2bc\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \beta - \gamma\right)$$
$$- 2bc\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \gamma - \beta\right) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2a^2\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}$$
$$+ 4bc\sin(\gamma - \beta)\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

Das Experiment lehrt nun, daß zwei senkrecht polarisierte Strahlen für jeden Wert von δ die gleiche Helligkeit ergeben. Soll aber J von δ unabhängig sein, so müssen die Faktoren von $\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ und $\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ für sich verschwinden, d. h. es muß sein[13]):

$$a = 0, \quad bc \sin(\gamma - \beta) = 0. \tag{16}$$

$a = 0$ heißt: Das polarisierte Luft besitzt keine Komponente parallel der Fortpflanzungsrichtung, die Schwingungen sind transversal.

Der zweiten Gleichung (16) wird genügt durch $b = 0$ oder $c = 0$ oder $\sin(\gamma - \beta) = 0$. Allen drei Lösungen entsprechen geradlinige Schwingungen, der ersten eine solche parallel der z-Achse, der zweiten eine parallel der y-Achse, während für die dritte $\frac{v}{b} + \frac{w}{c} = 0$ wird. Läßt man nun die xy-Ebene mit der Polarisationsebene des Strahles zusammenfallen, so würde aus der dritten Lösung folgen, daß die Schwingung gegen die Polarisationsebene beliebig geneigt sein kann, was der Tatsache widerspricht, daß der polarisierte Strahl bei allen Erscheinungen sich als vollständig symmetrisch zur Polarisationsebene erweist. Somit sind bei der angenommenen Lage der Polarisationsebene nur die beiden Lösungen $b = 0$ oder $c = 0$ zulässig, d. h. das polarisierte Licht besteht aus rein transversalen Schwingungen, die entweder in der Polarisationsebene erfolgen ($c = 0$), oder senkrecht dagegen ($b = 0$). Welche von diesen beiden Möglichkeiten für die Lichtschwingungen zutrifft, läßt sich a priori nicht entscheiden, beide haben dieselbe Berechtigung, wie auch *Fresnel* gelegentlich ausdrücklich anerkannt hat[14]). *Fresnel* selbst nahm als Schwingungsrichtung die Senkrechte zur Polarisationsebene an, andere Autoren dagegen, zuerst *F. Neumann*, gingen von der Anschauung aus, daß die Lichtbewegungen in der Polarisationsebene erfolgen. Eine Entscheidung darüber, welche von beiden Annahmen der Natur entspricht, hat sich trotz vielfacher Bemühungen auf experimentellem Wege nicht herbeiführen lassen, wenigstens nicht durch Beobachtung fortschreitender Wellen. Und so geht denn durch die ganze theoretische Optik des vorigen Jahrhunderts ein Dualismus, der erst in der elektromagnetischen Lichttheorie seinen Ausgleich findet, da in dieser die den

---

13) *Fresnel* ging bei seiner Argumentation von den allgemeinen Formeln (8), (9) (s. oben) aus, darin $D = x$, $D_1 = x'$ gesetzt, und schloß, damit der Ausdruck (12) von $x - x'$ unabhängig ist, müsse $aa_1 = 0$, $bb_1 = 0$, $cc_1 = 0$ sein, ein Schluß, der nicht richtig ist; vgl. Oeuvres *d'A. Fresnel* 2, p. 494 ff.

14) Oeuvres 2, p. 495, Anm.

beiden Annahmen entsprechenden Vektoren nebeneinander vorkommen. Übrigens wäre ein solcher Ausgleich auch auf dem Boden der elastischen Lichttheorie möglich gewesen (vgl. Nr. 38). Neuere Beobachtungen von *O. Wiener*[15]) an *stehenden* Wellen scheinen allerdings dafür zu sprechen, daß der photographische und somit wohl auch der physiologisch-chemische Teil der Lichtbewegung der *Fresnel*schen Annahme entspricht.

6. Zusammensetzung und Zerlegung polarisierter Strahlen bei Fresnel. Das natürliche Licht. Die Zusammensetzung zweier linearpolarisierter Lichtschwingungen von gleicher Fortpflanzungs- und Polarisationsrichtung ist in den obigen Formeln (8) bis (12) enthalten. Die beiden Schwingungen

$$(17) \qquad v = b \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad v_1 = b_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right)\right]$$

setzen sich danach zu der der linearen Schwingung

$$(18) \qquad v_0 = B \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0}{\lambda}\right)\right]$$

zusammen, wo

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} B^2 &= b^2 + b_1^2 + 2\,b\,b_1 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right), \\ \operatorname{tg} \frac{2\pi\delta_0}{\lambda} &= \frac{b_1 \sin\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)}{b + b_1 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)} \end{aligned}\right.$$

ist.

Das Resultat läßt folgende einfache Deutung zu. Konstruiert man ein Parallelogramm, dessen Seiten gleich den Amplituden b, b_1 sind, während der von diesen eingeschlossene Winkel gleich der Verzögerungsphase $2\pi\delta/\lambda$ ist, so stellt die Diagonale dieses Parallelogramms die Amplitude, der Winkel, den die Diagonale mit der Seite b bildet, die Verzögerungsphase $2\pi\delta_0/\lambda$ der resultierenden Schwingung dar.

Zwei zueinander senkrecht polarisierte Wellen setzen sich, wenn sie *gleiche* Phase haben, zu einer linearen Schwingung zusammen, die Schwingungen

$$v = b \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad w = c \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

z. B. zu einer Schwingung, die in der Ebene $\frac{v}{b} - \frac{w}{c} = 0$ liegt und die Amplitude $\sqrt{b^2 + c^2}$ hat, während ihre Phase die gleiche wie die der Komponenten ist.

---

15) Ann. Phys. Chem. 40 (1890), 203.

Umgekehrt kann man eine lineare Schwingung $s = D \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$, deren Schwingungsrichtung s mit der y-Achse den Winkel ϑ bildet, in die beiden Komponenten

$$v = D \cos\vartheta \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad w = D \sin\vartheta \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

zerlegen

Mittels dieser Zerlegung und durch Anwendung der Formeln (17) bis (19) ergibt sich die Zusammensetzung von Schwingungen gleicher Fortpflanzungs-, aber verschiedener Schwingungsrichtung, sowie verschiedener Phase. So setzen sich die beiden Schwingungen

$$(20) \quad s = D \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \quad s_1 = D_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right)\right],$$

die mit der y-Achse die Winkel ϑ, ϑ_1 bilden, zu der elliptischen Schwingung

$$(21) \quad v_0 = B \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta'}{\lambda}\right)\right], \quad w_0 = C \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta''}{\lambda}\right)\right]$$

zusammen, wo

$$(21\text{a})\begin{cases} B^2 = D^2\cos^2\vartheta + D_1{}^2\cos^2\vartheta_1 + 2\,DD_1\cos\vartheta\cos\vartheta_1\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right), \\ C^2 = D^2\sin^2\vartheta + D_1{}^2\sin^2\vartheta_1 + 2\,DD_1\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right), \\ \operatorname{tg}\frac{2\pi\delta'}{\lambda} = \dfrac{D_1\cos\vartheta_1\sin\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)}{D\cos\vartheta + D_1\cos\vartheta_1\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)}, \\ \operatorname{tg}\frac{2\pi\delta''}{\lambda} = \dfrac{D_1\sin\vartheta_1\sin\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)}{D\sin\vartheta + D_1\sin\vartheta_1\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)}. \end{cases}$$

Geradlinig ist die Schwingung nur, wenn entweder $\vartheta - \vartheta_1 = 0$ oder $= \pi$, oder wenn $\delta = 0$ oder ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist, *kreisförmig* dagegen, wenn

$$B = C, \quad \delta' - \delta'' = \pm\frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2},$$

d. h.

$$D = D_1, \quad \vartheta_1 = \vartheta + (2m+1)\pi \mp \frac{2\pi\delta}{\lambda},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl ist.

Eine Schwingung, wie sie im allgemeinen aus der Zusammensetzung von s und s_1 entsteht, heißt elliptisch polarisiert. Dreht man die Achsen y, z um die Fortpflanzungsrichtung x so, daß sie mit den Achsen der Ellipse zusammenfallen, so nehmen v_0, w_0 die einfache

Form an

$$(22)\quad v_0 = B\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right], \quad w_0 = \pm\, C\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right].$$

Je nach dem Vorzeichen von w_0 wird die Ellipse in dem einen oder dem anderen Sinne durchlaufen. Die beiden elliptischen Bewegungen

$$v_0 = B\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right], \quad w_0 = +\, C\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right]$$

und

$$v_0' = B\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right], \quad w_0' = -\, C\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right]$$

setzen sich zu einer geradlinigen Schwingung zusammen. Diese Formeln lehren auch, wie man eine geradlinige Schwingung

$$v_0 = 2\,B\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x+\delta_0'}{\lambda}\right)\right],$$

die parallel y erfolgt, in zwei elliptische zerlegt, wobei C noch beliebig gewählt werden kann. Besonders wichtig ist der Fall $C = B$; d. h. der der Zerlegung einer geradlinigen Schwingung in zwei *zirkuläre.*

Eine Anwendung findet diese Zerlegung eines linear polarisierten Lichtstrahls in zwei entgegengesetzt rotierende zirkulare Strahlen bei den Erscheinungen der Drehung der Polarisationsebene durch eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte, da nach *Fresnel*s Untersuchungen sich längs der Achse des Quarzes zwei entgegengesetzt rotierende zirkuläre Schwingungen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. *Airy* hat diese Untersuchungen auf Strahlen ausgedehnt, die sich längs einer gegen die Achse des Quarzes geneigten Richtung fortpflanzen[16]). In einer solchen Richtung pflanzen sich zwei elliptische Schwingungen von entgegengesetztem Umlaufssinn fort.

Die Erscheinungen des *natürlichen Lichtes* lassen sich weder durch die Annahme geradliniger, noch zirkulärer oder elliptischer Schwingungen erklären. Über die Natur des natürlichen Lichtes hat sich *Fresnel* deshalb die Vorstellung gebildet, daß seine Schwingungen zwar geradlinig und transversal sind, daß aber ihre Richtung in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene sehr schnell wechselt, ohne eine bestimmte Richtung zu bevorzugen. Dabei ist der Mittelwert der Intensitäten der in den verschiedenen Richtungen erfolgenden Oszillationen konstant, wenn die Intensität des Lichtes es ist. Die *Fresnel*sche Hypothese ist später namentlich von *Airy*[16]), *Stokes*[17])

---

16) *G. B. Airy,* Cambridge Phil. Trans. 4, 1831 und 1832. On the undulatory theory of optics, Cambridge 1831.

17) Cambridge Trans. 9; Phil. Mag. (4) 2, beide 1852.

und *Verdet*[18]) weiter ausgebildet. Danach kann man das natürliche Licht auf unendlich viele Arten aus geradlinig polarisierten Schwingungen zusammensetzen; jedoch erhält man durch eine gleichförmige Drehung der Polarisationsebene nie natürliches Licht. Man kann das natürliche Licht auch als aus elliptischen Schwingungen zusammengesetzt ansehen; es kann jedoch nicht aus elliptischen Schwingungen bestehen, bei denen alle Ellipsen in demselben Sinne durchlaufen werden. Man kann die Bedingungen für natürliches Licht schon durch zwei entgegengesetzte elliptische Schwingungen erfüllen, die so miteinander abwechseln, daß auf eine bestimmte Zahl von Schwingungen der einen Art stets eine gewisse Zahl der anderen folgt.

Über die neuere thermodynamische Entwicklung des Begriffes „natürliches Licht“ vgl. die Art. V 23 von *W. Wien* und V 25 von *M. Laue.*

7. Fortpflanzung des Lichts in Kristallen nach Fresnel. *Fresnel*[19]) geht von der Anschauung aus, daß betreffs der Kraft, mit der ein verrücktes Teilchen eines kristallinischen Mediums durch die Einwirkung der übrigen in seine Gleichgewichtslage zurückgeführt wird, nicht mehr die einfache Annahme gemacht werden kann, die für isotrope Medien gilt (vgl. Nr. 3), daß hier vielmehr jene Kraft im allgemeinen *nicht* mit der Verrückung s zusammenfällt. Er nimmt jedoch an, daß für drei zueinander senkrechte Richtungen, die Elastizitätsachsen, ein solches Zusammenfallen stattfindet.

Nimmt man die Elastizitätsachsen zu Koordinatenachsen, und sind m, n, p die Richtungskosinus der Verrückung s eines Teilchens, so wirken demnach auf die den Achsen parallelen Komponenten ms, ns, ps von s Kräfte, die jenen Verrückungskomponenten proportional sind und ihre Richtung haben, d. h. die Komponenten der auf das Teilchen wirkenden Kraft sind:

$$X = -a^2 ms, \quad Y = -b^2 ns, \quad Z = -c^2 ps.$$

Weiter nimmt *Fresnel* an, daß bei der Fortpflanzung ebener geradlinig polarisierter Wellen die auf jedes Teilchen wirkende Elastizitätskraft dieselbe Form hat, als befände sich das Teilchen allein in Bewegung; hierin liegt, daß jene Elastizitätskraft nur von der Schwingungsrichtung abhängt, nicht aber von der Fortpflanzungsrichtung der Welle. *Fresnel* sieht also die der Fortpflanzungsrichtung parallele

18) *É. Verdet,* Ann. de l'éc. norm. 2, 1865.

19) *Fresnels* Arbeiten über Doppelbrechung sind seit 1821 der Akademie vorgelegt, die erste im November 1821. Teilweise sind diese Arbeiten erst in den Oeuvres abgedruckt. Seine zweite Abhandlung ist in den Mém. de l'Acad. des sciences 7, 1827, erschienen; siehe auch Ann. Phys. Chem. 23 (1831).

Komponente der Elastizitätskraft *als unwirksam* an[20]). Soll nun das betrachtete Teilchen sich infolge der Einwirkung der Elastizitätskraft gerade in der Richtung s bewegen, so muß die der Wellenebene parallele Komponente jener Kraft die Richtung von s haben. Die Bedingung dafür ist folgende: Es seien m_1, n_1, p_1 die Richtungskosinus der Richtung s_1, die in der Wellenebene liegt und auf s senkrecht steht, so ist die Komponente der wirkenden Kraft parallel s:

$$(23)\qquad K_s = mX + nY + pZ = -(a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2)s,$$

die zu s_1 parallele Komponente

$$(24)\qquad K_{s_1} = m_1X + n_1Y + p_1Z = -(a^2mm_1 + b^2nn_1 + c^2pp_1)s.$$

Letztere soll verschwinden, d. h. es wird

$$(25)\qquad a^2mm_1 + b^2nn_1 + c^2pp_1 = 0,$$

wozu die Bedingungen für die Orthogonalität der Richtungen s, s_1 und der Richtung der Wellennormale N kommen, d. h. es bestehen, wenn α, β, γ die Richtungskosinus von N sind, die Gleichungen:

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha m + \beta n + \gamma p = 0, \\ \alpha m_1 + \beta n_1 + \gamma p_1 = 0, \\ mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0. \end{cases} \qquad (26a)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ m^2 + n^2 + p^2 = 1, \\ m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 1. \end{cases}$$

Aus (25) und (26) erkennt man, daß m, n, p nicht eine beliebige Richtung in der Wellenebene ist. Man erhält nämlich durch Elimination von m_1, n_1, p_1 die Bedingung

$$(27)\qquad a^2m(\gamma n - \beta p) + b^2n(\alpha p - \gamma m) + c^2p(\beta m - \alpha n) = 0,$$

durch welche Gleichung in Verbindung mit der ersten Gleichung (26) und der zweiten Gleichung (26a) m, n, p für eine Welle von gegebener Normalenrichtung α, β, γ bestimmt sind.

Was ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Welle betrifft, so nimmt *Fresnel* an, daß sie, analog wie bei isotropen Medien (s. Nr. **3**), der Quadratwurzel aus dem absoluten Werte der wirksamen elastischen Kraft, diese auf die Einheit der Verrückung bezogen, proportional ist, d. h. proportional der Quadratwurzel aus dem absoluten Wert von $K_s : s$. Das gibt, wenn der Proportionalitätsfaktor gleich 1 gesetzt wird, d. h. wenn die Maßeinheit für a, b, c entsprechend gewählt ist:

$$(28)\qquad V^2 = a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2.$$

---

20) Gerade diese Annahme *Fresnels* ist recht willkürlich und gibt zu Bedenken Anlaß.

Der Gleichung (27) wird nun genügt durch

$$(29)\qquad \begin{cases} a^2 m = \lambda\alpha + \mu m, \\ b^2 n = \lambda\beta + \mu n, \\ c^2 p = \lambda\gamma + \mu p, \end{cases}$$

wo zunächst λ und μ willkürlich sind. Aus (28) folgt, daß $\mu = V^2$, daher

$$(30)\qquad m = \frac{\lambda\alpha}{a^2 - V^2}, \quad n = \frac{\lambda\beta}{b^2 - V^2}, \quad p = \frac{\lambda\gamma}{c^2 - V^2}$$

ist, und mittels der ersten Gleichung (26) ergibt sich

$$(31)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2 - V^2} + \frac{\beta^2}{b^2 - V^2} + \frac{\gamma^2}{c^2 - V^2} = 0,$$

eine quadratische Gleichung für V^2, die stets zwei reelle, zwischen der größten und kleinsten der Größen a^2, b^2, c^2 liegende Wurzeln hat. Längs jeder Richtung α, β, γ pflanzen sich also im Kristall zwei ebene Wellen fort, deren Schwingungsrichtungen durch (30) in Verbindung mit der zweiten Gleichung (26a) völlig bestimmt sind.

Die Gleichungen (29) lassen eine einfache geometrische Deutung zu. Sucht man in dem Schnitt der Fläche

$$(32)\qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

mit der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

den größten und kleinsten Radius (d. h. die Achsen des Schnittes), so werden die Richtungen derselben genau durch die Gleichungen (29) bestimmt, während die Gleichung (31) für V die Längen jener Achsen ergibt. Parallel den Achsen jenes Schnittes erfolgen also die Schwingungen der beiden Wellen, die sich längs der Richtung α, β, γ im Kristall fortpflanzen. Die Länge jeder Achse ist zugleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ihr parallelen Schwingung proportional. Die Fläche (32) führt den Namen *Elastizitätsfläche* oder *Fresnelsches Ovaloid*. Sie ist die Reziproke des Ellipsoids

$$(33)\qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

und man erhält daher die Schwingungsrichtungen der beiden zur Richtung α, β, γ gehörigen Wellen auch, wenn man die Achsen des Schnittes von (33) mit der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ bestimmt. Die reziproken Werte dieser Achsen sind zugleich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V der entsprechenden Welle[21]).

---

21) Das Ellipsoid (33) wird von *J. Stefan* [Wien Ber. 50^2 (1865), p. 505] als Ellipsoid gleicher Arbeit bezeichnet. Es hat nämlich die Eigenschaft, daß die

Interessante Anwendungen ergeben sich, wenn eine oder zwei der Richtungskosinus α, β, γ verschwinden. Ferner folgen hieraus die Erscheinungen für einachsige Kristalle, wenn zwei der Größen a, b, c gleich sind.

Für $b = c$, $a > b$ (ein Fall, der beim Kalkspat eintritt) ergeben die Gleichungen (26), (27) und (28) die beiden Lösungen:

$$1)\quad V^2 = b^2, \qquad m = 0;$$

$$2)\quad V^2 = a^2(\beta^2 + \gamma^2) + b^2\alpha^2, \qquad \beta:\gamma = n:p.$$

Die erste Lösung entspricht einer ebenen Welle, deren Schwingungsrichtung auf der durch die Wellennormale und die Kristallachse (x) gelegten Ebene senkrecht steht, die also in dieser Ebene polarisiert ist; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist unabhängig von der Richtung α, β, γ der Wellennormale. Die zweite Lösung entspricht einer Welle, deren Polarisationsebene auf der der ersten senkrecht steht; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit V ist gleich der Länge des Lotes auf diejenige Tangentialebene des Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1, \tag{34}$$

für die α, β, γ die Richtungskosinus des Lotes sind, ein Resultat, das der *Huygens*schen Konstruktion der gebrochenen Wellen beim Kalkspat entspricht und überdies die Beobachtungen hinsichtlich der Polarisation jener Wellen wiedergibt.

Ähnlich sind die Resultate für $a = b$, $a > c$, sowie auch, wenn a, b, c ungleich sind, dagegen eine der Größen α, β, γ verschwindet.

Alle sich so ergebenden Folgerungen stimmen mit der Erfahrung überein, wenn man noch die Annahmen hinzufügt, daß die Schwingungen des Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen (vgl. Nr. 5).

8. Die Fresnelsche Wellenfläche. Unter Wellenfläche schlechtweg versteht man die von einem Erschütterungspunkt hervorgebrachte Wellenfläche, d. h. die Fläche, bis zu der die Bewegung in der Zeiteinheit sich fortpflanzt, wenn der Erschütterungspunkt alle möglichen Bewegungen vollführt. Diese Fläche, von der alle wesentlichen optischen Eigenschaften eines Mediums abhängen, ist für isotrope Körper eine Kugel; ihre Bestimmung für kristallinische Medien würde,

---

Verschiebung eines im Mittelpunkt befindlichen Äthermoleküls längs eines beliebigen Radiusvektors bis zu dessen Endpunkt stets einen gleichen Aufwand zur Überwindung des ihr entgegenstehenden Widerstandes erfordert.

Eine elegante, von diesem Ellipsoid ausgehende Darstellung der Doppelbrechung hat *V. v. Lang* gegeben [Wien Ber. 43² (1861), p. 627].

wenn man sie direkt aus der Definition ableiten wollte, die erheblichsten Schwierigkeiten darbieten, da sie von Differentialgleichungen mit vier unabhängigen Variabeln abhängt. Indessen hat *Fresnel* gezeigt, wie man diese Schwierigkeiten vermeiden kann. Nach ihm denke man durch einen Punkt alle möglichen ebenen Wellen gelegt und betrachte deren Lage nach Verlauf der Zeiteinheit. Die Wellenfläche ist dann die Enveloppe aller dieser ebenen Wellen in der zweiten Lage. Ist α, β, γ die Fortpflanzungsrichtung (Wellennormale) einer ebenen transversalen Welle, die zur Zeit $t = 0$ durch den Anfangspunkt geht, also die Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

hat, und ist V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = V \tag{35}$$

die Gleichung der Wellenebene zur Zeit $t = 1$, so ist die Wellenfläche eines zweiachsigen kristallinischen Mediums die Enveloppe der Ebenen (35), wobei V durch die Gleichung (31) bestimmt ist. Die Ermittelung dieser Enveloppe ist zwar eine ziemlich elementare Aufgabe, erfordert aber, wenn man sie nicht geschickt angreift, erhebliche Rechnungen, die *Fresnel* nicht durchzuführen vermochte. Er hat das Resultat im Grunde nur erraten[22]). Eine strenge Ableitung hat zuerst *A. M. Ampère*[23]) gegeben. Andere Ableitungen rühren her von *A. Smith*[24]), *C. E. Senff*[25]), *J. Mac Cullagh*[26]) und *H. H. de Sénarmont*[27]).

Nach *Senff* gestaltet sich die Rechnung so: Differentiiert man (35) nach α und β, bildet zugleich aus (31) $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial V}{\partial \beta}$, so erhält man mit Rücksicht auf $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$:

$$\left\{\begin{aligned} x - \frac{\alpha}{\gamma} z &= \alpha \left(\frac{1}{c^2 - V^2} - \frac{1}{a^2 - V^2}\right) \frac{\lambda^2}{V}, \\ y - \frac{\beta}{\gamma} z &= \beta \left(\frac{1}{c^2 - V^2} - \frac{1}{b^2 - V^2}\right) \frac{\lambda^2}{V}, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

wo λ dieselbe Größe ist, die in (30) auftrat, nämlich:

---

22) Oeuvres 2, p. 560.

23) Ann. chim. phys. (2) 39, Okt. 1828.

24) Cambridge Phil. Soc. Trans. (1) 6, 1836; Phil. Mag. 12, 1838.

25) Experim. und theor. Unters. über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung, Dorpat 1837. Vgl. *F. Neumann*, Vorlesungen über theoretische Optik, Vorlesung 11, sowie *F. Neumanns* Werke 2, p. 464.

26) Trans. Irish Academy 21, 1839.

27) *Fresnel*, Oeuvres 2, p. 606 ff. Vgl. auch die Arbeit von *J. Plücker*, Journ. f. Math. 19, 1839.

(37) $$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{\beta^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(c^2 - V^2)^2}.$$

Aus (36), (35) und (31) sind α, β, γ, V zu eliminieren. Setzt man die Ausdrücke (36) für x und y in (35) ein, so folgt

(38) $$z = \gamma \left\{ V - \frac{\lambda^2}{(c^2 - V^2) V} \right\}$$

und weiter

(38a) $$x = \alpha \left(V - \frac{\lambda^2}{(a^2 - V^2) V} \right), \quad y = \beta \left(V - \frac{\lambda^2}{(b^2 - V^2) V} \right).$$

Durch Quadrieren ergibt sich

(39) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = V^2 + \frac{\lambda^2}{V^2},$$

also

(40) $$x = \frac{\alpha V (a^2 - r^2)}{a^2 - V^2}$$

und entsprechend y und z. Multipliziert man die Ausdrücke (38a) und (40) für x, so folgt weiter

$$\frac{x^2}{a^2 - r^2} = \frac{\alpha^2 V}{a^2 - V^2} \left(V - \frac{\lambda^2}{(a^2 - V^2) V} \right).$$

Addiert man dazu die entsprechenden Ausdrücke für

$$\frac{y^2}{b^2 - r^2} \quad \text{und} \quad \frac{z^2}{c^2 - r^2},$$

so erhält man

(41) $$\frac{x^2}{a^2 - r^2} + \frac{y^2}{b^2 - r^2} + \frac{z^2}{c^2 - r^2} = -1,$$

eine Gleichung, die auch die Form annehmen kann

(41a) $$\frac{a^2 x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - r^2} = 0,$$

oder auch

(41b) $$r^2(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) \\ - [a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2] + a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Man erhält diese Fläche auch, wie schon *Fresnel* bemerkt hat, wenn man auf den Normalen aller Zentralschnitte des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Längen der Halbachsen des betreffenden Schnittes nach beiden Seiten hin aufträgt. Der geometrische Ort des so erhaltenen Punktes ist die Fläche (41). Diese Fläche umgibt den Anfangspunkt in zwei geschlossenen Mänteln, die in vier singulären Punkten zusammenhängen. Die Schnitte der Fläche mit den Koordinatenebenen zerfallen je in einen Kreis und eine Ellipse, und zwar ist der Schnitt mit der

xy-Ebene der Kreis

$$x^2 + y^2 = c^2$$

und die Ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

und entsprechend für die anderen Koordinatenebenen. Ist $a > b > c$, so liegt in der xy-Ebene der Kreis ganz innerhalb, in der yz-Ebene der Kreis ganz außerhalb der Ellipse, während in der xz-Ebene der Kreis, dessen Radius gleich b ist, und die Ellipse, deren Achsen c (längs x) und a (längs z) sind, sich in vier Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte sind die singulären Punkte der Wellenfläche, in denen die beiden Mäntel zusammenhängen.

Für die Fälle $a = b$ und $b = c$ (und nur für diese) läßt sich die linke Seite von (41b) in zwei Faktoren zweiten Grades zerlegen; die Fläche zerfällt, falls $a = b$ ist, in eine Kugel vom Radius a und in das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Je nachdem $a = b > c$ oder $a = b < c$ ist, heißt der Kristall positiv oder negativ.

Neben der Wellenfläche betrachtet man bisweilen noch die *Wellengeschwindigkeitsfläche.* Diese ist der geometrische Ort der Punkte, die man erhält, wenn man auf allen von einem Punkt aus gezogenen Linien die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, die sich im Kristall längs dieser Linien fortpflanzen, nach beiden Seiten hin abträgt. Ihre Gleichung ergibt sich sofort aus (31); sie ist

$$(42) \qquad \frac{\xi^2}{a^2 - \varrho^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - \varrho^2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - \varrho^2} = 0, \qquad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Übrigens entsteht die Wellengeschwindigkeitsfläche[28]) in derselben Art aus der Elastizitätsfläche

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2,$$

wie die Wellenfläche aus dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und ebenso wie die Elastizitätsfläche die Fußpunktenfläche des eben genannten Ellipsoids, ist die Wellengeschwindigkeitsfläche die Fußpunktenfläche der Wellenfläche. Für $a = b$ und $b = c$ zerfällt die

28) Der Name rührt von *W. R. Hamilton* her. Die Reziproke der Wellengeschwindigkeitsfläche wird von *Hamilton* als Wellenträgheitsfläche, von *Mac Cullagh* als Indexfläche bezeichnet.

Wellengeschwindigkeitsfläche in eine Kugel und eine Elastizitätsfläche, in der zwei der drei Achsen gleich sind.

Die Formeln (38), (38a) ergeben noch eine andere wichtige Folgerung. Zunächst wird durch sie die geometrische Aufgabe gelöst, zu einer gegebenen Tangentialebene (35) der Wellenfläche (41) den Berührungspunkt zu finden. Damit wird aber zugleich der zur ebenen Welle $\alpha x + \beta y + \gamma z = Vt$ gehörige *Lichtstrahl* bestimmt, der hier nicht mehr, wie bei isotropen Medien, mit der Wellennormale zusammenfällt. Als *Lichtstrahl*, der zu einer ebenen Welle gehört, wird nämlich die Linie definiert, in der sich der Schnittpunkt dieser Wellenebene mit anderen, in ihrer Richtung unendlich wenig verschiedenen Wellenebenen bewegt. Mit der Einhüllenden der Ebene (35) ist jener Schnittpunkt für $t = 1$ bestimmt. Man erhält also den Strahl, der zur Ebene (35) (bzw. zu den Parallelebenen gehört), wenn man den Mittelpunkt der Wellenfläche mit dem Berührungspunkt von (35) verbindet. Die Gleichungen (38), (38a) geben daher unmittelbar den zu der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = Vt$ gehörigen Strahl. Auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe, aus der Richtung eines Strahls die zugehörige Wellennormale zu bestimmen, ergibt sich aus diesen Formeln. Sind nämlich A, B, C die Richtungskosinus eines Strahls, so bestimmt man zunächst seinen Schnittpunkt mit der Wellenfläche, indem man $x = rA$, $y = rB$, $z = rC$ setzt. Für jede der beiden Wurzeln, die (41) für r^2 liefert, ergibt sich das zugehörige $\frac{\lambda^2}{V^2}$ mittels der aus (40) und (37) folgenden Gleichung

$$\text{(37a)} \qquad \frac{V^2}{\lambda^2} = \frac{x^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(r^2 - c^2)^2},$$

dann aus (39) V und aus (40) α, β, γ. Die Schwingungsrichtung endlich wird durch (30) bestimmt.

9. Singuläre Punkte und singuläre Tangentialebenen der Wellenfläche. Optische Achsen und Strahlenachsen. Konische Refraktion. Erwähnt sind bereits in Nr. 8 die singulären Punkte der Wellenfläche. Es sind, wenn b die mittlere der Größen a, b, c bezeichnet, die in der xz-Ebene gelegenen Schnittpunkte des Kreises $x^2 + z^2 = b^2$ mit der Ellipse $\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$. Die Singularität dieser Punkte besteht darin, daß in ihnen keine bestimmte Tangentialebene existiert, sondern ein berührender Kegel, wie daraus folgt, daß für diese Punkte $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ist, wenn f die linke Seite von (41b) bezeichnet. Hier gehört daher zu einem bestimmten Strahl nicht eine bestimmte Wellennormale, sondern unendlich viele.

(Auch die Berechnung von α, β, γ aus A, B, C ergibt für diesen Fall Unbestimmtes.) Die beiden Radienvektoren nach den vier singulären Punkten führen den Namen *Strahlenachsen*. Entsprechend den vier singulären Punkten besitzt die Wellenfläche ferner vier singuläre Tangentialebenen. Man erhält dieselben, indem man an den Kreis $x^2 + z^2 = b^2$ und die Ellipse $\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ die gemeinsamen Tangenten zieht und durch diese Ebenen senkrecht zur xz-Ebene legt. Die singulären Tangentialebenen berühren die Wellenfläche in unendlich vielen Punkten, die je auf einem Kreise liegen. Hier gehört also zu einer bestimmten Wellennormale nicht ein Strahl, sondern unendlich viele Strahlen, die einen schiefen Kreiskegel bilden. Die beiden Lote vom Mittelpunkt der Wellenfläche auf die vier singulären Tangentialebenen sind die optischen Achsen[29]. Jeder der vorerwähnten schiefen Kreiskegel geht durch je eine optische Achse.

Noch sei darauf hingewiesen, daß wenn man die Richtungskosinus α, β, γ der Wellennormale durch die beiden Winkel u, v ausdrückt, welche diese Normale mit den optischen Achsen bildet, die quadratische Gleichung (42) sich ohne Wurzelzeichen auflösen läßt; und zwar werden die Lösungen bzw.

$$V^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(v - u) \tag{43}$$

und

$$V^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(v + u). \tag{43a}$$

Aus der Existenz der singulären Punkte und der singulären Tangentialebenen ergeben sich für die Optik zwei wichtige Folgerungen, die allerdings *Fresnel* entgangen waren. Tritt eine ebene Welle derart in einen zweiachsigen Kristall ein, daß ihre Normale mit einer optischen Achse zusammenfällt, so erhält man stets statt zweier einzelnen gebrochenen Strahlen einen Strahlenkegel (innere konische Refraktion). Hat ferner ein Lichtstrahl im Innern des Kristalls die Richtung der Strahlenachse, so gehören zu ihm unendlich viele Wellennormalen, deren jede beim Austritt aus dem Kristall eine andere gebrochene Welle ergibt, so daß hier ein einzelner Strahl innerhalb des Kristalls bei seiner Brechung in ein umgebendes Medium einen Strahlenkegel gibt (äußere konische Refraktion).

Die Erscheinung der konischen Refraktion ist zuerst von *W. R.*

---

29) Weshalb man gerade diese Lote als optische Achsen ansehen muß, ist zuerst von *F. Neumann* festgestellt (Ann. Phys. Chem. 33, 1834; Werke 2, p. 317). In diesem Aufsatz sind auch die folgenden Gleichungen (43) und (43a) aufgestellt.

Hamilton theoretisch entdeckt[30]), später von *H. Lloyd* experimentell bestätigt[31]). Die Entdeckung *Hamiltons* bildet eine wichtige Bestätigung der *Fresnel*schen Theorie.

Von den weiteren Arbeiten *Fresnels* ist die Erklärung der Drehung der Polarisation beim Durchgang des Lichtes durch Quarz schon oben erwähnt (Nr. 6). Von ihm rührt auch die Erklärung der Erscheinung her, welche Kristallplatten zwischen zwei polarisierenden Vorrichtungen zeigen. Der einfallende polarisierte Strahl zerlegt sich beim Eintritt in den Kristall in zwei Strahlen, die nach den oben entwickelten Gesetzen die Platte in verschiedener Richtung und mit verschiedener Geschwindigkeit durchlaufen, durch den Analysator auf gleiche Polarisationsebene zurückgeführt werden und nun interferieren. Die hierauf bezüglichen Untersuchungen *Fresnels* sind von *Airy* erweitert.

10. Die Fresnelsche Reflexionstheorie. *Fresnel* war der erste, der das für die theoretische Optik so wichtige Problem der Reflexion und Refraktion für isotrope Medien löste, d. h. Formeln für die Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichtes aufstellte[32]). Auch hier überwand er die Schwierigkeiten, welche sich einer strengen Lösung des Problems entgegenstellen, durch Annahmen, die mehr oder minder plausibel sind, die ihn aber zu Resultaten führten, die mit den Beobachtungen völlig in Einklang stehen.

Jene Schwierigkeiten des Problems bestehen in folgendem: Zwei Medien I und II mögen in der Ebene $z = 0$ aneinanderstoßen. Trifft dann irgend eine in I stattfindende Bewegung diese Grenzfläche, so entsteht dadurch auch eine Bewegung in dem Medium II. Nach den Regeln der Elastizitätstheorie muß die Bewegung in beiden Medien von der Art sein, daß 1) die drei Komponenten der Verrückung für irgend einen Punkt der Grenze in beiden Medien die gleichen sind, und daß 2) die Komponenten des Drucks, der durch die Verschiebung der Teilchen erregt wird, für $z = 0$ in beiden Medien gleiche Werte haben. Das sind also sechs Bedingungen. Besteht nun die ursprüngliche Bewegung in I in ebenen transversalen Wellen, und nimmt man außerdem an, daß, wie es bei der Lichtbewegung der Fall ist, die

---

30) Trans. Irish Acad. 15, 16, 1834; 17, 1837 (gel. 1832).

31) Trans. Irish Acad. 17, 1833; Pogg. Ann. 28, 1833. Indessen beruht nach einer Bemerkung von *W. Voigt* (Physikal. Ztschr. 6. Jahrg. (1905), p. 672, Ann. Phys. 18 (1905), p. 676 und Ann. Phys. 19 (1906), p. 14) diese Bestätigung, was die *innere* konische Refraktion betrifft, auf einer Täuschung.

32) Der Pariser Akademie vorgelegt am 7. Jan. 1823; veröffentlicht in den Mém. de l'Acad. 11, 393 (erschienen 1832); Ann. chim. 46, 1831; vgl. Oeuvres 1, p. 767.

durch Reflexion an der Grenzfläche in I entstehende Bewegung, wie die Bewegung in II ebenfalls in rein transversalen Wellen besteht, so hängt die nun an der Grenze entstehende Bewegung nur von vier Größen ab. Diese Größen müßten also sechs Gleichungen genügen, und zwar sechs Gleichungen, die nicht miteinander vereinbar sind. Bei Annahme rein transversaler Bewegungen kann man daher den strengen Grenzbedingungen nicht genügen, während man andererseits bei einem Problem gewöhnlicher elastischer Körper in dem Hinzukommen einer longitudinalen reflektierten und gebrochenen Welle die nötigen Konstanten zur vollständigen Erfüllung der Grenzbedingungen zur Verfügung hat. Das ist der Grund, aus dem *Fresnel* jene strengen Bedingungen durch Annahmen ersetzt, von denen einige auf den ersten Blick als mehr oder minder willkürlich erscheinen.

Die Annahmen und Grundanschauungen, auf denen *Fresnel* seine Reflexionstheorie aufbaut, sind folgende:

1) Die Lichtschwingungen sind rein transversal;

2) sie erfolgen senkrecht zur Polarisationsebene.

3) In allen Medien hat der Äther gleiche Elastizität, aber verschiedene Dichtigkeit; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in beiden Medien ist also (vgl. Nr. **3**) der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit umgekehrt proportional. Auf die Schwierigkeit, die diese Annahme für die Kristalloptik mit sich bringt, hat *F. Neumann* hingewiesen (vgl. Nr. **20**).

4) Die der Grenzfläche parallelen Komponenten der Verrückung haben in der Grenzfläche selbst für beide Medien denselben Wert, während die normalen Komponenten nicht gleich zu sein brauchen.

5) Die lebendige Kraft in der einfallenden Welle ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte in der reflektierten und gebrochenen Welle.

F. Neumann, der bei seiner Reflexionstheorie die letztere Annahme, die sich eigentlich erst als Folge der strengen Grenzbedingungen ergeben müßte, ebenfalls macht (vgl. Nr. **20**a), rechtfertigt dieselbe dadurch, daß auf Grund der Erfahrung angenommen werden kann, daß es wirklich Körper gibt, bei denen die Intensität des einfallenden Lichtes gleich ist der Summe der Intensitäten, mit denen das Licht reflektiert und gebrochen wird. Daß bei *Fresnel* sowohl, wie später bei *Neumann* statt von der Gesamtenergie nur von der lebendigen Kraft die Rede ist, erscheint willkürlich, findet aber seine Rechtfertigung dadurch, daß die kinetische und potentielle Energie bei periodischen Vorgängen in einem festen Verhältnis zueinander stehen.

6) Die einfallende, die reflektierte und die gebrochene Welle haben in den ihnen gemeinsamen Punkten der Grenzfläche die gleiche Phase [33]).

7) Wenn die einfallende Welle entweder in der Einfallsebene polarisiert ist oder senkrecht dagegen, ist das Gleiche mit der reflektierten und gebrochenen Welle der Fall.

Die letzte Annahme ist durch die Symmetrie, die in bezug auf die Einfallsebene stattfindet, gerechtfertigt, während die Annahme 6) nur für die Reflexion an durchsichtigen Medien zu Resultaten führt, die mit der Erfahrung übereinstimmen.

Auf die ebene Grenze zweier durchsichtigen Medien mögen nun ebene parallele Lichtwellen fallen, die in der Einfallsebene polarisiert sind, deren Schwingungen also senkrecht zu dieser erfolgen. Wir machen die Grenzfläche zur xy-Ebene und nehmen z positiv nach dem zweiten, negativ nach dem ersten Medium hin. Zur x-Achse nehmen wir den Schnitt der Einfallsebene (d. i. der durch z und die Wellennormale gelegten Ebene) mit der Grenzfläche; y liegt also in der letzteren senkrecht zur Einfallsebene. Ist j der Einfallswinkel, so sind die Richtungskosinus der Wellennormale, in der Richtung der Fortpflanzung gerechnet, $\sin j$, 0, $\cos j$. Die Verrückungen, die ein Teilchen des ersten Mediums durch die einfallenden Wellen erfährt, sind parallel y und haben die Größe

$$v = P \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x \sin j + z \cos j}{\lambda}\right) + \varepsilon\right]. \tag{44}$$

Die reflektierten und gebrochenen Wellen bestehen nach 7) ebenfalls aus Schwingungen parallel y, und zwar haben diese wegen 6) die Form:

$$\begin{cases} v' = P' \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau'} - \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z}{\lambda'}\right) + \varepsilon\right], \\ v_1 = P_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau_1} - \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{\lambda_1}\right) + \varepsilon\right]. \end{cases} \tag{45}$$

Dabei bezieht sich v' auf die reflektierte, v_1 auf die gebrochene Welle. Nach der Annahme 4) muß dann für $z = 0$

$$v + v' = v_1 \tag{46}$$

sein. Damit diese Gleichung für beliebige Werte von t möglich ist, muß

$$\tau' = \tau_1 = \tau$$

sein, d. h. die Schwingungsdauer des reflektierten und gebrochenen Lichts ist dieselbe wie die des einfallenden. Bei der Reflexion und

33) Man braucht diese Annahme nur für die reflektierte Welle zu machen, so folgt sie für die gebrochene von selbst.

Brechung ändert sich also die Farbe nicht. Ferner folgt aus $\tau' = \tau$, daß auch $\lambda' = \lambda$, da für die Wellen v und v' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V die gleiche ist. Damit obige Bedingungsgleichung für beliebige Werte von x und y erfüllt werde, ist ferner erforderlich

$$\beta' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha' = \sin j, \quad \frac{\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin j}{\lambda},$$

d. h. auch die Normalen der reflektierten und der gebrochenen Wellen liegen in der Einfallsebene, der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel, während für den Brechungswinkel j_1, da

$$\gamma_1 = \cos j_1, \quad \alpha_1 = \sin j_1$$

ist, die Gleichung gilt:

$$\sin j = \frac{\lambda}{\lambda_1} \sin j_1 = \frac{V}{V_1} \sin j_1.$$

Aus der Annahme 3) folgt dann noch, wenn δ und δ_1 die Dichtigkeiten des Äthers der beiden Medien bezeichnen:

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{V_1^2}{V^2} = \frac{\sin^2 j_1}{\sin^2 j} = \frac{1}{n^2}, \tag{47}$$

wo n der Berechnungsexponent ist. Aus $\alpha' = \sin j$, $\beta' = 0$ folgt übrigens $\gamma' = \pm \cos j$ und zwar ist $\gamma' = -\cos j$ zu nehmen, da sonst die Normale der reflektierten mit der der einfallenden Welle zusammenfallen würde, während $\gamma_1 = +\cos j_1$ ist. Damit reduziert sich unsere Bedingung (46) auf

$$P + P' = P_1. \tag{48}$$

Eine zweite Gleichung für P' und P_1 ergibt sich aus dem Satz der lebendigen Kraft, und zwar ist dieser Satz anzuwenden auf ein gerades Prisma Π, dessen Grundflächen in zwei der einfallenden Welle parallelen Ebenen liegen, sowie auf die Prismen des reflektierten und gebrochenen Lichtes, auf die sich die in Π enthaltene Bewegung in der Zeit t fortgepflanzt hat. Ist q der der Wellenebene parallele Querschnitt von Π, so ist, da alle Punkte eines jeden q die gleiche Schwingung vollführen, die in Π enthaltene lebendige Kraft

$$\delta q \int_{\varrho_0}^{\varrho_0 + h} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 d\varrho,$$

wo h die Höhe des Prismas, $\varrho = x \sin j + z \cos j$ die Wellennormale, ϱ_0 beliebig ist, während δ, wie oben, die Dichtigkeit des Äthers bezeichnet. Wählt man h gleich einem Vielfachen von λ, $h = N\lambda$, wo N eine große Zahl, so ergibt sich für die zu berechnende lebendige

Kraft der Wert

$$\delta q \lambda N \frac{2\pi^2}{\tau^2} P^2.$$

Die lebendige Kraft in den Prismen, auf die sich die in Π enthaltene Bewegung nach der Zeit t fortgepflanzt hat, ist

$$\delta q \lambda N \frac{2\pi^2}{\tau^2} P'^2 \quad \text{für das reflektierte,}$$

$$\delta_1 q_1 \lambda_1 N \frac{2\pi^2}{\tau^2} P_1^2 \quad \text{für das gebrochene Licht,}$$

und zwar ist

$$q : q_1 = \cos j : \cos j_1,$$

da die Grundflächen q, q_1 der beiden Prismen dadurch erhalten werden, daß man ein und dasselbe Stück der Grenzfläche $z = 0$ einmal auf die einfallende, dann auf die gebrochene Wellenebene projiziert. Der Satz der lebendigen Kraft gibt also:

$$(49) \qquad P^2 = P'^2 + P_1^2 \frac{\delta_1 q_1 \lambda_1}{\delta q \lambda} = P'^2 + P_1^2 \frac{\sin j \cos j_1}{\sin j_1 \cos j},$$

wobei für das Verhältnis $\delta_1 : \delta$ der obige Wert (47) benutzt ist.

Aus (48) und (49) folgt

$$(50) \qquad P - P' = P_1 \frac{\sin j \cos j_1}{\sin j_1 \cos j},$$

daher

$$(51) \qquad P_1 = \frac{2 \sin j_1 \cos j}{\sin (j + j_1)} P, \quad P' = -\frac{\sin (j - j_1)}{\sin (j + j_1)} P.$$

Da die Intensität der lebendigen Kraft proportional ist, so ergibt sich, wenn J die Intensität des einfallenden, J' die des reflektierten, J_1 die des gebrochenen Lichtes ist,

$$(52) \quad J' = \frac{\sin^2 (j - j_1)}{\sin^2 (j + j_1)} J, \quad J_1 = \frac{4 \sin^2 j_1 \cos^2 j}{\sin^2 (j + j_1)} \frac{\delta_1 q_1 \lambda_1}{\delta q \lambda} J = \frac{\sin 2j \sin 2j_1}{\sin^2 (j + j_1)} J.$$

Ganz ähnlich läßt sich nun der Fall behandeln, in dem das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, seine Schwingungen also *in* dieser Ebene senkrecht zur Wellennormale ausführt. Man zerlege jene Bewegung in zwei der x- und z-Achse parallele Komponenten u, w, so erfordert die Transversalität der Schwingungen

$$u \sin j + w \cos j = 0,$$

mithin

$$(53) \qquad \begin{cases} u = \quad S \cos j \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x \sin j + z \cos j}{\lambda} \right) + \varepsilon' \right], \\ w = - S \sin j \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x \sin j + z \cos j}{\lambda} \right) + \varepsilon' \right]. \end{cases}$$

Für die Komponenten u', w' und u_1, w_1 der Schwingungen in der reflektierten und gebrochenen Welle könnte man zunächst in ähnlicher Weise wie vorher einen allgemeineren Ansatz machen, dann würde die Anwendung des Kontinuitätsprinzips dieselben Folgerungen, die aus (46) gezogen sind, ergeben. u', w', u_1, w_1 haben daher die Werte:

$$(54)\quad \begin{cases} u' = S' \cos j \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x \sin j - z \cos j}{\lambda}\right) + \varepsilon'\right], & u' \sin j - w' \cos j = 0; \\ u_1 = S_1 \cos j_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x \sin j_1 + z \cos j_1}{\lambda_1}\right) + \varepsilon'\right], & u_1 \sin j_1 + w_1 \cos j_1 = 0. \end{cases}$$

Das Prinzip 4), auf u, u', u_1 angewandt (während es für w, w', w_1 nicht zu gelten braucht), gibt dann: Für $z = 0$ ist

$$(55)\qquad u + u' = u_1,$$

daher

$$(56)\qquad (S + S') \cos j = S_1 \cos j_1,$$

während die Gleichung der lebendigen Kraft lautet:

$$(57)\qquad S^2 = S'^2 + S_1^2 \frac{\sin j \cos j_1}{\sin j_1 \cos j}.$$

Aus (56) und (57) folgt

$$(58)\qquad (S - S') \sin j_1 = S_1 \sin j$$

und weiter

$$(59)\qquad S' = -\frac{\operatorname{tg}(j - j_1)}{\operatorname{tg}(j + j_1)} S, \quad S_1 = \frac{2 \sin j_1 \cos j}{\sin(j + j_1) \cos(j - j_1)} S,$$

während zwischen den Intensitäten $\bar{J}$, $\bar{J}'$, $\bar{J}_1$ des einfallenden, reflektierten und gebrochenen Lichtes die Gleichungen bestehen:

$$(60)\qquad \bar{J}' = \frac{\operatorname{tg}^2(j - j_1)}{\operatorname{tg}^2(j + j_1)} \bar{J}, \quad \bar{J}_1 = \frac{\sin 2j \sin 2j_1}{\sin^2(j + j_1) \cos^2(j - j_1)} \bar{J}.$$

11. Folgerungen aus den Fresnelschen Reflexionsformeln.

1) Ersetzt man in den Gleichungen (49) und (57) den Quotienten $\frac{\sin j}{\sin j_1}$ durch n, wo n den Brechungsindex bezeichnet, so kann man die Gleichungen ohne weiteres auf den Fall $j = 0$ anwenden und erhält

$$P' = -\frac{n-1}{n+1} P, \quad S' = -\frac{n-1}{n+1} S; \quad P_1 = \frac{2}{n+1} P, \quad S_1 = \frac{2}{n+1} S,$$

$$J' = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 J, \quad \bar{J}' = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \bar{J}; \quad J_1 = \frac{4n}{(n+1)^2} J, \quad \bar{J}_1 = \frac{4n}{(n+1)^2} \bar{J}.$$

2) Ist $n > 1$, so wächst bei gegebenem P (also gegebenem J) der absolute Wert von P' und von J' mit wachsendem j, der absolute Wert von P_1 und ebenso der von J_1 nimmt beständig ab. Der absolute Wert von S' und damit der Wert von $\bar{J}'$ nimmt zunächst (bei gegebenem $\bar{J}$) mit wachsendem j ab bis $j + j_1 = 90^0$, wo $S' = 0$,

$\bar{J}' = 0$ wird, um von da ab wieder zuzunehmen. $\bar{J}_1$ nimmt mit j zu bis $j + j_1 = 90^0$, um dann abzunehmen, während S_1 bei gegebenem S mit wachsendem j beständig abnimmt. Für $j = 90^0$ wird

$$P' = -P, \quad S' = S, \quad P_1 = S_1 = 0, \quad J' = J, \quad \bar{J}' = \bar{J}, \quad J_1 = \bar{J}_1 = 0.$$

3) Die obigen Formeln stellen zunächst die Reflexion des in der Einfallsebene oder senkrecht zu derselben polarisierten Lichtes dar, da im ersten Falle $S = 0$, im zweiten $P = 0$ ist. Es ergeben sich aber unmittelbar auch die Formeln für die Reflexion von Licht in beliebigem Polarisationszustande. Ist das einfallende Licht zunächst *geradlinig* polarisiert, und ist α sein Polarisationsazimut (d. h. der Winkel zwischen Polarisationsebene und Einfallsebene), so zerlege man die Schwingungen desselben in zwei Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene, und wende auf sie die obigen Formeln an. Damit (44) und (53) die Komponenten eines linear polarisierten Lichtstrahls darstellen, muß $\varepsilon' = \varepsilon$ sein. Ferner ist die Gleichung der Polarisationsebene

$$S \cos i \cdot x + P \cdot y - S \sin i \cdot z = 0,$$

mithin

$$\cos \alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2 + S^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{P^2 + S^2}},$$

da $0 \leqq \alpha \leqq \pi$, also

(61) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|S|}{P},$$

wo $|S|$ den absoluten Wert von S bezeichnet. Da $\varepsilon = \varepsilon'$, so ist das reflektierte und das gebrochene Licht ebenfalls geradlinig polarisiert, und sind ihre Polarisationsazimute resp. α' und α_1, so ist:

(61a) $$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{|S'|}{P'}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{|S_1|}{P_1}.$$

Aus (51) und (59) folgt daher

(62) $$\operatorname{tg} \alpha' = \pm \frac{\cos(j + j_1)}{\cos(j - j_1)} \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\cos(j - j_1)} \operatorname{tg} \alpha.$$

In $\operatorname{tg} \alpha'$ ist das Zeichen $+$ zu nehmen, wenn S' und S gleiche Zeichen haben, d. h. so lange $j + j_1 < 90^0$; dagegen das Zeichen $-$, wenn S' und S entgegengesetzte Zeichen haben, d. h. wenn $j + j_1 > 90^0$ ist. Daraus erkennt man, daß α, α', α_1 stets in demselben Quadranten liegen, und daß, wenn α spitz ist, $\alpha' < \alpha$, $\alpha_1 > \alpha$, dagegen wenn α stumpf, $\alpha' > \alpha$, $\alpha_1 < \alpha$ ist, d. h. die Polarisationsebene des reflektierten Lichts ist nach der Einfallsebene hin gedreht, die des gebrochenen von der Einfallsebene fort. Für $j + j_1 = 90^0$ fällt die Polarisationsebene des reflektierten Lichts in die Einfallsebene, den dieser Bedingung entsprechenden Winkel j, für den $\operatorname{tg} j = \frac{1}{n}$ ist, während zugleich der reflektierte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht, nennt man *Polarisationswinkel*. Die Intensität des gesamten reflektierten Lichts ist, wenn I die des einfallenden:

$$(63)\qquad I' = I\left\{\frac{\sin^2(j-j_1)}{\sin^2(j+j_1)}\cos^2\alpha + \frac{\operatorname{tg}^2(j-j_1)}{\operatorname{tg}^2(j+j_1)}\sin^2\alpha\right\},$$

die Intensität des gebrochenen Lichtes:

$$(64)\qquad I_1 = I\,\frac{\sin 2j \sin 2j_1}{\sin^2(j+j_1)}\left\{\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2(j-j_1)}\right\}.$$

Ist das einfallende Licht *zirkular polarisiert*, so ist in (44) und (53) $S = P$ und $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{1}{2}\pi$ zu setzen; während die Formeln (44) und (53), falls $\varepsilon' - \varepsilon$ beliebig ist, die Schwingungskomponenten von elliptisch polarisiertem Licht darstellen. Man erkennt, daß in beiden Fällen das reflektierte sowohl, als das gebrochene Licht im allgemeinen elliptisch polarisiert ist. Die weiteren für diese Fälle sich ergebenden Folgerungen müssen hier übergangen werden.

4) Nach *Fresnel* besteht das natürliche Licht aus einer sehr schnellen Folge von Oszillationsbewegungen nach allen Richtungen (s. Nr. 6). Ist I die Intensität des einfallenden natürlichen Lichts, so kommt auf die Schwingung im Polarisationsazimut α der Betrag $I\frac{d\alpha}{2\pi}$. Die aus diesem Teilbetrag sich ergebende Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichts ist $I'\frac{d\alpha}{2\pi}$, resp. $I_1\frac{d\alpha}{2\pi}$, wo I' und I_1 durch (63) und (64) bestimmt sind. Die Gesamtintensität des reflektierten und gebrochenen Lichts erhält man durch Integration nach α zwischen den Grenzen 0 und 2π. Es ergibt sich dann

$$(65)\qquad \begin{cases} I' = \frac{1}{2}I\left\{\frac{\sin^2(j-j_1)}{\sin^2(j+j_1)} + \frac{\operatorname{tg}^2(j-j_1)}{\operatorname{tg}^2(j+j_1)}\right\}, \\ I_1 = \frac{1}{2}I\,\frac{\sin 2j \sin 2j_1}{\sin^2(j+j_1)}\left\{1 + \frac{1}{\cos^2(j-j_1)}\right\}, \end{cases}$$

und zwar stellt in beiden Summen der erste Summand den Gesamtbetrag der Intensität des in der Einfallsebene, der zweite Summand den Gesamtbetrag der Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichts dar. Für das reflektierte Licht ist der erste Summand der größere, für das gebrochene der zweite. Die Differenz der beiden Summanden hat für I' und I_1 den gleichen Wert, nämlich

$$(66)\qquad I_2 = \frac{1}{2}I\,\frac{\sin 2j \sin 2j_1 \sin^2(j-j_1)}{\sin^2(j+j_1)\cos^2(j-j_1)}.$$

Der Ausdruck (65) für I' ergibt sich nun auch, wenn man die Intensität von Licht berechnet, das teils aus natürlichem Licht von der Intensität $I \frac{\operatorname{tg}^2(j-j_1)}{\operatorname{tg}^2(j+j_1)}$ besteht, teils aus Licht von der Intensität I_2, das in der Einfallsebene polarisiert ist; d. h. das reflektierte Licht ist teilweise polarisiert und zwar in der Einfallsebene, und (66) gibt die Intensität dieses polarisierten Teilbetrages. Für den Polarisationswinkel ist $j + j_1 = 90^0$, daher der Teilbetrag natürlichen Lichts im reflektierten Licht $= 0$; das unter dem Polarisationswinkel reflektierte natürliche Licht ist vollständig polarisiert, und zwar in der Einfallsebene.

Auch das gebrochene Licht ist teilweise polarisiert, aber senkrecht zur Einfallsebene; die Intensität dieses polarisierten Teiles ist ebenfalls durch (66) dargestellt.

5) Weitere Folgerungen ergeben sich durch Anwendung der Grundformeln auf wiederholte Reflexionen und Brechungen, resp. für den Durchgang des Lichts durch eine oder mehrere planparallele Platten. Auf dieser Anwendung beruht das Polarimeter und Photometer von *H. Wild*[34]).

12. Die Totalreflexion in Fresnelscher Auffassung. Die Formeln für die Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichts gelten sowohl für $n > 1$, d. h. für den Übergang des Lichts von einem schwächer brechenden in ein stärker brechendes Medium, als für $n < 1$, d h. für den umgekehrten Übergang. Bezeichnet man, wie üblich, mit n stets den Brechungsexponenten beim Übergang in das stärker brechende Medium, so ist für die umgekehrte Brechung n durch $\frac{1}{n}$ zu ersetzen, d. h. es ist

$$\sin j_1 = n \sin j.$$

Der Fall der totalen Reflexion tritt nun ein, wenn $\sin j > \frac{1}{n}$; dann wird $\sin j > 1$ und $\cos j_1 = i\sqrt{n^2 \sin^2 j - 1}$ wird rein imaginär. Damit werden die Ausdrücke für P' und S' komplex, und die *Fresnel*schen Formeln geben den wirklichen Vorgang nicht wieder. Man könnte daraus schließen, daß die der Reflexionstheorie zugrunde gelegten Voraussetzungen für den Fall der totalen Reflexion nicht mehr zutreffend sind. Statt dessen nahm *Fresnel* an, daß seine Formeln auch noch für diesen Fall gelten, und daß man das Imaginäre nur zweckmäßig zu interpretieren habe. Seine Interpretation ist die folgende: In Nr. 6 (S. 16) ist gezeigt, wie man bei der Zusammensetzung zweier

34) Vgl. *F. Neumann*, Optik, Vorl. 9, p. 144 ff.

Schwingungen von gleicher Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung die Amplitude und die Verzögerungsphase der resultierenden Schwingung mittels eines Parallelogramms erhält. Für den Fall, daß die Verzögerungsphase der komponierenden Strahlen $2\pi\frac{\delta}{\lambda}=\frac{\pi}{2}$ ist, wird jenes Parallelogramm ein Rechteck mit den Seiten b, b_1; den Endpunkt der Diagonale dieses Rechtecks kann man durch die komplexe Zahl $b+ib_1$ darstellen. Umgekehrt kann man eine Schwingung, deren Amplitude den komplexen Wert $b+ib_1$ hat, ansehen als Repräsentanten der Schwingung, die durch Zusammensetzung zweier Schwingungen von gleicher Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung mit den Amplituden b und b_1 und der Verzögerungsphase $\pi/2$ entsteht; die Amplitude der resultierenden Schwingung ist $\sqrt{b^2+b_1^2}$, während die Verzögerungsphase derselben bestimmt wird durch

$$\operatorname{tg} 2\pi\frac{\delta_0}{\lambda}=\frac{b_1}{b}.$$

Im Falle der totalen Reflexion haben nun sowohl P' als S' komplexe Werte. Ist

$$P'=b+ib_1,\quad S'=a+ia_1,$$

so sind nach dem Gesagten die Verrückungskomponenten in der reflektierten Welle[35])

$$v'=\sqrt{b^2+b_1^2}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x\sin j-z\cos j+\delta_0}{\lambda}\right)+\varepsilon\right],$$

$$u'\cos j+w'\sin j=\sqrt{a^2+a_1^2}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x\sin j-z\cos j+\delta_0'}{\lambda}\right)+\varepsilon\right],$$

wo

$$\operatorname{tg} 2\pi\frac{\delta_0'}{\lambda}=\frac{a_1}{a}$$

ist. Die Berechnung von b, b_1, a, a_1 ergibt nun:

$$\sqrt{b^2+b_1^2}=\sqrt{P^2}=|P|,\quad \sqrt{a^2+a_1^2}=\sqrt{S^2}=|S|,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\delta_0}{\lambda}\right)=\frac{-2n\cos j\sqrt{n^2\sin^2 j-1}}{n^2+1-2n^2\sin^2 j},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\delta_0'}{\lambda}\right)=\frac{-2n\cos j\sqrt{n^2\sin^2 j-1}}{n^2+1-(n^4+1)\sin^2 j}.$$

War das einfallende Licht in der Einfallsebene oder senkrecht, dagegen polarisiert, d. h. war $S=0$ oder $P=0$, so gilt ein gleiches auch bei totaler Reflexion für das reflektierte Licht, und die Intensität des reflektierten Lichtes ist in beiden Fällen gleich der des

35) Es ist hier $\varepsilon'=\varepsilon$, somit das einfallende Licht als linear polarisiert angenommen.

einfallenden. Hat das einfallende Licht das Polarisationsazimut α, so daß

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|S|}{P},$$

so ist das reflektierte Licht, dessen Intensität auch hier gleich der des einfallenden ist, im allgemeinen elliptisch polarisiert, da es sich aus zwei senkrecht zueinander polarisierten Schwingungen zusammensetzt, die eine Phasenverzögerung haben. Geradlinige Polarisation des reflektierten Lichtes kann nur eintreten, wenn $\delta_0 = \delta_0'$ ist, und das ist nur möglich, wenn beide gleich 0, d. h. für $\sin j = 1/n$ und $j = 90^0$, d. h. für den Grenzwinkel der totalen Reflexion und für streifende Inzidenz. Zirkulare Polarisation des reflektierten Lichtes würde eintreten, wenn $\delta_0 - \delta_0' = \pm \lambda/8$. Das gibt eine Bedingung für den Einfallswinkel j, die eine reelle Lösung, d. h. eine Lösung für die $\sin j < 1$, nur zuläßt, wenn

$$n > 3 + \sqrt{8}$$

ist.

Gegen *Fresnels* Reflexionstheorie sind die verschiedensten Einwürfe erhoben, die namentlich die Annahmen 3), 4) und 6), sowie die willkürliche Interpretation des Imaginären bei der totalen Reflexion betreffen. Gegenüber diesen Einwänden sucht *Poincaré* in seiner math. Theorie des Lichtes, Abschnitt 208, *Fresnels* Anschauungen zu rechtfertigen, wenn er auch zugeben muß, daß *Fresnels* Analyse der Strenge entbehrt. — Daß man die Formeln der Totalreflexion auch ohne die *Fresnel*sche Deutung des Imaginären ableiten kann, ist zuerst von *F. Neumann* gezeigt[36]).

13. Aberration des Lichtes bei Fresnel. *Fresnels* Hypothese zur Erklärung der Aberration des Lichtes hängt auf das engste mit den Grundannahmen seiner Reflexionstheorie zusammen, und daß *Fresnel* die Aberrationserscheinungen zu erklären vermag, führt *É. Verdet* in der Einleitung zu *Fresnels* Werken als ein wesentliches Moment zugunsten seiner Reflexionstheorie an.

Will man in der Undulationstheorie die Aberration des Lichtes erklären, so muß man annehmen, daß der im Fernrohr enthaltene Äther an der Bewegung desselben nicht teilnimmt. Andererseits zwingt die Erfahrung, nach der die Aberration in einem mit

36) Ann. Phys. Chem. 40, 1837; Werke 2, p. 585. Vorher hatte allerdings schon *Cauchy* (Paris C. R. 2, 1836) bemerkt, daß man statt der imaginären Sinus und Kosinus Exponentialgrößen einführen könne, wie man es heutzutage allgemein tut. Die Durchführung des Problems ohne jede Benutzung des Imaginären rührt von *F. Neumann* her (vgl. Nr. **20**b, S. 56).

Wasser gefüllten Fernrohr dieselbe ist, wie in einem mit Luft gefüllten, zu der Annahme, daß der Äther, in dem sich das Licht fortpflanzt, nicht völlig unbeweglich im Raume ist, sondern *teilweise* an der Erdbewegung teilnimmt. Hinsichtlich der bei der Bewegung des Mediums mitgenommenen Äthermasse macht nun *Fresnel* folgende Annahme: Ist δ_0 die Dichtigkeit des freien Äthers, δ die des Äthers im bewegten Medium, so bleibt die Masse δ_0 der Volumeneinheit des letzteren Äthers in Ruhe, nur der Überschuß $\delta - \delta_0$ nimmt an der Bewegung des ponderablen Materie teil. Daraus ergibt sich, daß der Schwerpunkt des Systems ruhender und bewegter Äther sich, wenn v die Geschwindigkeit der ponderablen Materie ist, mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

bewegt, wo n den Brechungsindex bezeichnet, der ja nach *Fresnel* gleich $\sqrt{\frac{\delta}{\delta_0}}$ ist. Dies *Fresnel*sche Resultat ist durch Interferenzversuche von *Fizeau*, sowie von *Michelson* und *Morley* bestätigt. — Eine strengere Begründung der *Fresnel*schen Anschauung findet man in *Poincarés* mathematischer Theorie des Lichtes Nr. 240. Für die Elektronentheorie ist der sogenannte „*Fresnel*sche Mitführungskoeffizient" besonders wichtig geworden; vgl. Art. *H. A. Lorentz*, Encyklop. V 14, p. 271.

III. Die mechanisch-elastische Begründung der Theorie.

14. Die Lichtbewegung in isotropen Medien nach der Elastizitätstheorie. C. L. Navier, S. D. Poisson. *Fresnels* experimentell begründetes Resultat, daß die Lichtschwingungen transversal seien, rief zunächst vielseitigen Widerspruch hervor, insbesondere von seiten *Poissons*. Eine strenge theoretische Begründung der Möglichkeit transversaler Wellen war *Fresnel* nicht möglich, weil zu der Zeit, wo er seine Untersuchungen anstellte, eine Theorie der Elastizität fehlte. Die Grundgleichungen derselben wurden für isotrope Medien zuerst von *C. L. Navier*[37]), später auf anderem Wege von *S. D. Poisson*[38]) und *A. L. Cauchy* (siehe weiterhin) abgeleitet. Die *Navier-Poisson*schen Gleichungen unterscheiden sich von denen der modernen Elastizitätstheorie[39]) dadurch, daß sie die Erscheinungen isotroper Medien nur

37) Paris Mém. 7, 1824 (vorgelegt 1821).

38) Paris Mém. 8, 1828.

39) *Navier* und *Poisson* gelangten zu ihren Gleichungen von molekulartheoretischen Vorstellungen aus durch Betrachtung der zwischen den Molekülen

von einer Konstante abhängig sein lassen, statt von zweien. Die Gleichungen der neueren Theorie[40]) lauten für isotrope Medien:

$$\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

wozu zwei Gleichungen derselben Form für v, w kommen. Darin sind u, v, w die Komponenten der Verrückung, δ die Dichtigkeit, λ, μ Konstante, während

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

die räumliche Dilatation ist. Bei *Navier* und *Poisson* ist $\lambda = \mu$, während in der neueren Theorie diese Konstanten als voneinander unabhängig betrachtet werden. Sucht man partikuläre Integrale dieser Gleichungen, welche ebenen Wellen entsprechen, so kann man, da in isotropen Medien alle Richtungen gleichwertig sind, die Fortpflanzungsrichtung als der x-Achse parallel und daher für ebene Wellen u, v, w als von y, z unabhängig annehmen. Dann bekommen die Gleichungen die Form

$$\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \delta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u = \varphi(x - V_1 t) + \varphi_1(x + V_1 t), \quad v = \psi(x - Vt) + \psi_1(x + Vt),$$
$$w = \chi(x - Vt) + \chi_1(x + Vt),$$

wo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \chi_1$ willkürliche Funktionen bezeichnen, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1, V die Werte haben

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\delta}}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{\delta}},$$

und für die *Navier-Poisson*sche Annahme $\lambda = \mu$ ergibt sich speziell

$$V_1 = V\sqrt{3}.$$

---

wirksamen Zentralkräfte. Diese Ableitung führte sie auf die nur von einer Konstante abhängigen Gleichungen. *Cauchy* hat durch seine Untersuchungen über Statik und Kinematik der Kontinua, insbesondere durch Einführung des Spannungsbegriffs, die *nicht-molekulare* Elastizitätstheorie begründet. In einem Teil seiner Arbeiten aber ist er ebenfalls von molekular-theoretischen Ansätzen ausgegangen und hat die elastischen Kräfte auf molekulare Anziehungs- und Abstoßungskräfte zurückgeführt. Näheres s. Encykl. IV, Art. 23 von *Müller-Timpe*. Vgl. ferner *H. Burkhardt:* Bericht über die Entwicklung nach oszillierenden Funktionen, Leipzig 1901—1906, § 56—64. Dort ist (§ 57) auch der Einfluß der Undulationstheorie des Lichtes auf die Ausbildung der Elastizitätstheorie erörtert.

40) Vgl. *Lamé*, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852.

In dem elastischen Medium können sich daher, da u der Fortpflanzungsrichtung parallel ist, v, w dagegen auf dieser Richtung senkrecht stehen, in jeder Richtung sowohl longitudinale Wellen fortpflanzen, als transversale, erstere mit der Geschwindigkeit V_1, letztere mit der Geschwindigkeit V. Die Schwingungsrichtung in den transversalen Wellen ist, da man die Achsen y, z beliebig drehen kann, eine beliebige Richtung der Wellenebene.

Poisson[41]) hat dasselbe Resultat auch ohne die Annahme ebener Wellen abgeleitet. Aus den allgemeinen Lösungen der elastischen Gleichungen, die er in Form von Doppelintegralen dargestellt hat, folgt, daß aus einer beliebigen Erschütterung, die ursprünglich nur einen kleinen Teil des Mediums einnahm, zwei Wellen entstehen, eine longitudinale und eine transversale, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sich wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten.

15. A. L. Cauchy. Allgemeiner molekular-theoretischer Ansatz. *Cauchy* beschränkte sich nicht auf isotrope Medien, sondern dehnte zuerst die Theorie auf kristallinische Medien aus. Gerade hier war es nötig zu untersuchen, ob die exaktere Berechnung der Einwirkung, die ein Ätherteilchen von den umgebenden Teilchen erfährt, *Fresnel*s bestreitbare Anschauung über die Art dieser Einwirkung rechtfertige oder nicht. Zur Entscheidung dieser Frage ging *Cauchy* auf die Betrachtung der zwischen den „Äthermolekülen" wirksamen Kräfte zurück. *Cauchy*s hauptsächlichste Untersuchungen sind im 3., 4. und 5. Bande seiner (älteren) Exercices de mathématique[42]) und in seinem Mémoire sur la dispersion de la lumière[43]) veröffentlicht. *Cauchy* setzt die Äthermoleküle als punktförmig voraus und nimmt an, daß

41) Paris Mém. 10, 1830. Der Titel der Arbeit ist: Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques.

42) Diese Bände sind 1828—1830 erschienen. Band 3 und 4 entwickeln die allgemeinen Gesetze für Gleichgewicht und Bewegung eines Systems materieller Punkte, Band 5, von dem nur ein Bruchstück erschienen ist, enthält den Anfang der Anwendung auf Optik. Die übrigen optischen Arbeiten *Cauchy*s außer dem Mémoire sur la dispersion enthalten meist nur die Resultate nicht veröffentlichter Untersuchungen. — Vgl. *F. X. Moth,* Die Theorie des Lichts, nach einem lithographierten Mémoire von *Cauchy*, Wien 1842; das Mém. selbst scheint bereits 1836 erschienen zu sein. S. auch *Cauchy*s Oeuvres compl., Ser. 2, tome VI ff, ferner die Darstellung von *F. G. W. Radicke* in *Dove*s Repertorium der Physik 3, Berlin 1839, und *A. Beer,* Einleitung in die höhere Optik, Braunschweig 1853, 2. Auflage 1882. Vgl. ferner die Besprechung der *Cauchy*schen Arbeiten in dem in Anm. 39) zitierten Bericht von *H. Burkhardt,* Abschnitt IX und X.

43) Prague 1836 und zugleich Paris 1836 als „Nouveaux exerc. de math." [Oeuvres (2) X].

zwischen ihnen Zentralkräfte wirksam sind, daß ferner für die Fortpflanzung des Lichtes nur solche Bewegungen der Teilchen in Betracht kommen, deren Amplituden gegen ihre relative Entfernung sehr klein sind. Endlich betrachtet er nur solche Medien, die in bezug auf drei rechtwinklige Achsen symmetrisch sind. Sind x, y, z die Koordinaten eines Teilchens m im Ruhezustande, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die eines benachbarten Teilchens μ, r die Entfernung beider, $m\mu f(r)$ die zwischen ihnen wirkende Zentralkraft, so gelten für den Gleichgewichtszustand drei Gleichungen der Form

$$\sum \mu f(r) \frac{\Delta x}{r} = 0, \tag{67}$$

wo die Summen sich auf die sämtlichen den Massenpunkt m umgebenden Teilchen μ beziehen. Die Teilchen des Mediums mögen nun eine Verschiebung erfahren, und zwar seien für den Punkt x, y, z die Komponenten derselben u, v, w, für $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ aber $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$, während sich gleichzeitig r um Δr ändert, dann sind die Gleichungen der Bewegung von m

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum \mu f(r + \Delta r) \frac{\Delta x + \Delta u}{r + \Delta r}, \tag{68}$$

zu der noch zwei analoge Gleichungen für v, w kommen.

Aus (68) folgt durch Entwicklung nach Potenzen von Δu, Δv, Δw und Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen dieser Größen, ferner unter Berücksichtigung von (67):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \sum \mu \Delta u \frac{f(r)}{r} \\ & + \sum \mu \frac{r f'(r) - f(r)}{r} \frac{\Delta x}{r} \left(\frac{\Delta u \Delta x}{r} + \frac{\Delta v \Delta y}{r} + \frac{\Delta w \Delta z}{r} \right). \end{aligned} \tag{69}$$

Diese Gleichungen werden auf ebene Wellen[44]) angewandt, d. h. solche,

---

44) Der Übersichtlichkeit wegen ist die Spezialisierung für ebene Wellen schon an (69) angeknüpft. Man hätte statt dessen auch zuerst Δu, Δv, Δw allgemein mittels der *Taylor*schen Reihe nach Potenzen von Δx, Δy, Δz entwickeln

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \cdots + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \cdots \right] + \cdots, \tag{69 a}$$

diese Ausdrücke in (69) einsetzen und dann erst die Annahme ebener Wellen einführen können. *Cauchy* hat in verschiedenen Abhandlungen beides getan; das Verfahren des Textes findet sich zuerst in exerc. de math. 5, 1830 [Oeuvres (2) IX, p. 391]. Die durch Einsetzen der Ausdrücke (69 a) in (69) sich ergebenden Gleichungen sind, wenn man die Entwicklung nach den Gliedern zweiter Ordnung von Δx abbricht, wesentlich mit den allgemeinen elastischen Gleichungen übereinstimmend. Die Anwendung des *Taylor*schen Satzes rechtfertigt sich dabei denen alle Punkte einer Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varrho$ parallele Schwingungen von gleicher Amplitude und gleicher Phase ausführen, für die also die Gleichungen gelten[45]):

$$(70)\quad \begin{cases} u = ms, \quad v = ns, \quad w = ps, \\ s = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(\varrho - Vt), \quad m^2 + n^2 + p^2 = 1. \end{cases}$$

Die hieraus folgenden Werte von

$$\Delta u = m \left\{ \frac{ds}{d\varrho} \Delta\varrho + \frac{d^2 s}{d\varrho^2} \frac{\Delta\varrho^2}{2!} + \cdots \right\}, \quad \Delta\varrho = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z,$$

setze man in (69) ein, vernachlässige, da die Molekularkräfte nur auf sehr kleine Entfernungen wirken und daher nur sehr kleine $\Delta\varrho$ in Betracht kommen, die Glieder von $\Delta\varrho^3$ ab, und beachte außerdem, daß wegen der angenommenen symmetrischen Struktur des betrachteten Mediums diejenigen Summen, welche ungerade Potenzen von Δx, Δy, Δz enthalten, verschwinden, so ergeben sich zwischen den Konstanten m, n, p, V drei Gleichungen von folgender Form:

$$(71)\quad \begin{cases} 2V^2 m = Lm + Rn + Qp, \\ 2V^2 n = Rm + Mn + Pp, \\ 2V^2 p = Qm + Pn + Np. \end{cases}$$

Die Koeffizienten L, M, N, P, Q, R hängen von α, β, γ mittels der Gleichungen:

$$(72)\quad \begin{cases} L = (\mathfrak{A} + A)\alpha^2 + (\mathfrak{B} + F)\beta^2 + (\mathfrak{C} + E)\gamma^2, \\ M = (\mathfrak{A} + F)\alpha^2 + (\mathfrak{B} + B)\beta^2 + (\mathfrak{C} + D)\gamma^2, \\ N = (\mathfrak{A} + E)\alpha^2 + (\mathfrak{B} + D)\beta^2 + (\mathfrak{C} + C)\gamma^2, \\ P = 2D\beta\gamma, \quad Q = 2E\alpha\gamma, \quad R = 2F\alpha\beta \end{cases}$$

ab, während die Koeffizienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, A, B, \ldots, F$ dem Medium eigentümliche Konstanten sind, nämlich

$$\mathfrak{A} = \sum \mu \frac{f(r)}{r} \Delta x^2, \cdots \quad A = \sum \mu \frac{rf'(r) - f(r)}{r} \frac{\Delta x^4}{r^2}, \cdots$$

$$F = \sum \mu \frac{rf'(r) - f(r)}{r} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{r^2}, \ldots$$

Die Gleichungen (71) sind dieselben, die sich ergeben, wenn man in dem Ellipsoid

$$(73)\quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qzx + 2Rxy = 1$$

---

durch, daß die Verschiebungen unendlich naher Teilchen keine endlichen Unterschiede besitzen können.

45) Man könnte auch allgemeiner $s = f(\varrho \mp Vt)$ setzen, wo f eine willkürliche Funktion ist.

die Länge und Richtung der Hauptachsen sucht. In dem betrachteten Medium pflanzen sich daher in jeder Richtung drei Systeme ebener Wellen fort, deren Schwingungsrichtungen den Achsen des Ellipsoids (73) parallel sind, während ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V den Längen der entsprechenden Achsen umgekehrt proportional sind. *Cauchy* bezeichnet jenes Ellipsoid als *Polarisationsellipsoid.*

Für isotrope Medien ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $A = B = C$, $F = E = D$. Da hier alle Richtungen gleichwertig sind, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ setzen, dann wird $M = N$, $P = Q = R = 0$. Aus den Gleichungen (71) folgt dann entweder $2V^2 = \mathfrak{A} + A$, $n = 0$, $p = 0$, was einer longitudinalen Welle entspricht, oder $2V^2 = \mathfrak{A} + D$, $m = 0$, während n und p beliebig bleiben, was einer transversalen Welle entspricht, deren Schwingungsrichtung in der Wellenebene eine beliebige Lage hat. Das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider ist

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + A}{\mathfrak{A} + D}}.$$

Kehrt man zum allgemeinen Falle zurück, so fragt sich nun, ob der durch die Gleichungen (71) und (72) dargestellte Zusammenhang zwischen den Richtungskosinus α, β, γ der Wellennormale einerseits, der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V und den Kosinus m, n, p der Schwingungsrichtung andererseits den von *Fresnel* aus der Beobachtungen abgeleiteten Gesetzen entspricht. Untersucht man diese Frage zunächst für den Fall, daß die Wellenebene parallel einer der Symmetrieebenen des Kristalls ist, daß also zwei der Größen α, β, γ verschwinden, so ergibt sich jedesmal eine longitudinale, der Wellennormale parallele Schwingung und zwei transversale, zueinander und zur Wellennormale senkrechte Schwingungen. Die für die letzteren sich ergebenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen nicht ohne weiteres den *Fresnel*schen Gesetzen, wonach je zwei Werte von V, die zu verschiedenen der hier betrachteten Wellenebenen gehören, gleich sein müssen. Man kann jedoch eine Übereinstimmung mit diesen Gesetzen auf doppelte Weise erreichen, je nachdem man von den beiden möglichen Definitionen der Polarisationsebene (vgl. Nr. 5) die eine oder die andere als zutreffend betrachtet. Ist die Polarisationsebene die durch die Wellennormale und die Schwingungsrichtung gelegte Ebene, so ist erforderlich, daß

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \tag{74}$$

ist, eine Bedingung, die für nicht isotrope Medien nur erfüllt werden kann, wenn diese drei Größen verschwinden. Legt man aber die

*Fresnel*sche Definition der Polarisationsebene zugrunde, so müssen, um Übereinstimmung mit den *Fresnel*schen Gesetzen zu erhalten, zwischen den Konstanten die Relationen bestehen:

$$(75)\quad \mathfrak{C} + D = \mathfrak{A} + F,\quad \mathfrak{A} + E = \mathfrak{B} + D,\quad \mathfrak{B} + F = \mathfrak{C} + E,$$

von denen die dritte aus den beiden ersten folgt. Durch eine der beiden Annahmen (74) oder (75) ist indessen Übereinstimmung mit den *Fresnel*schen Gesetzen nur für die Wellen erreicht, deren Normalen mit einer der Kristallachsen zusammenfallen. Soll die Übereinstimmung für alle Wellen bestehen, deren Normalen einer der Symmetrieebenen parallel sind, so sind zwischen den Konstanten des Mediums noch weitere Beziehungen erforderlich, nämlich

$$(76)\quad (B-D)(C-D) = 4D^2,\quad (C-E)(A-E) = 4E^2,$$
$$(B-F)(A-F) = 4F^2,$$

und zwar sind diese Bedingungen sowohl bei der Annahme (74), als bei der Annahme (75) erforderlich.

Für beliebige Werte von α, β, γ genügt auch die Hinzunahme von (76) zu (74), bzw. (75) nicht, um die *Fresnel*sche *Konstruktion* herzuleiten. Hier ist die weitere Annahme erforderlich, daß die Konstanten A, B, C einerseits, D, E, F andererseits einander nahezu gleich sind, so daß man die Quadrate ihrer Differenzen vernachlässigen kann. Bei dieser Vernachlässigung folgt aus (76):

$$(77)\quad A + B = 6F,\quad A + C = 6E,\quad B + C = 6D.$$

Mag man nun (74) oder (75) zu (77) hinzunehmen, so zerfällt die Gleichung dritten Grades für V^2, die sich aus (71) ergibt, in zwei Faktoren, einen in bezug auf V^2 linearen und einen quadratischen. Die aus (71) folgenden Werte von m, n, p zeigen, daß die durch Nullsetzen des linearen Faktors erhaltene Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Schwingung entspricht, die *nahezu* longitudinal (quasi-longitudinal) ist, während die beiden aus dem quadratischen Faktor sich ergebenden Werte von V^2 *nahezu* transversalen (quasi-transversalen) Schwingungen angehören. Für die beiden letzteren gilt die *Fresnel*sche Konstruktion. Die quadratische Gleichung, aus der die zugehörigen Werte von V^2 folgen, läßt sich auf die Form (31) bringen.

Aus jeder der beiden Annahmen (74) oder (75) ergeben sich also mit Hinzunahme von (77) die *Fresnel*schen Gesetze der Doppelbrechung, nur daß bei der ersten Annahme die Schwingungen in der Polarisationsebene erfolgen, bei der zweiten senkrecht dazu, d. h. also: in dem der Wellenebene parallelen Zentralschnitt der Elastizitätsfläche ist bei der *ersten Annahme* die Richtung der Schwingung, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch eine Achse des Schnitts ausgedrückt wird, der anderen Achse parallel, während bei der *zweiten Annahme* die Schwingungsrichtung parallel der Achse ist, durch die die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt ist. *Cauchy* entschied sich in seinen Exercices und in seiner Dispersion für die erste Annahme; später in einem Briefe an *Libri*[47]) verwarf er dieselbe indes, da aus der Annahme

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$$

folgen würde, daß die Drucke auf die Koordinatenebenen im Ruhezustand verschwinden. — Von den longitudinalen Schwingungen nimmt *Cauchy* an, daß sie keine Lichtwirkung hervorbringen.

Über *Cauchys* Versuche, seine Theorie auf solche Medien auszudehnen, die die Polarisationsebene drehen, vgl. Nr. 26b.

16. Modifikation der Cauchyschen Theorie durch V. von Lang. Mittels der Gleichungen (71) läßt sich leicht zeigen, daß in der *Cauchy*schen Theorie vollkommen transversale Wellen nicht möglich sind. Da die drei zu einer gegebenen ebenen Welle gehörigen Schwingungsrichtungen mit den Achsen des Polarisationsellipsoids (73) zusammenfallen, also aufeinander senkrecht sind, so muß, wenn zwei derselben streng transversal sein sollen, die dritte streng longitudinal sein. Die Gleichung (71) müßte daher durch $m = \alpha$, $n = \beta$, $p = \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ identisch erfüllt werden. Damit das möglich, müßte

$$A = B = C = 3D = 3E = 3F$$

sein, d. h. das betreffende Medium müßte isotrop sein. Eine Doppelbrechung wäre nicht möglich. Dasselbe Resultat ergibt sich auch schon, wie *V. von Lang*[48]) gezeigt hat, bei Untersuchungen von Wellen, deren Normalen in einem Hauptschnitt des Kristalls liegen. Um zu Formeln zu gelangen, die *genau* zu den *Fresnel*schen Gesetzen führen, modifiziert *V. von Lang* die Grundgleichungen (68) dahin, daß er der Funktion f (die bei *Cauchy* in allen drei Gleichungen dieselbe ist) in jeder der Gleichungen einen besonderen Wert zuerteilt. Er motiviert das durch den Einfluß der Körperteilchen auf die Ätherteilchen. Indem er die modifizierten Gleichungen genau in der gleichen Weise wie *Cauchy* behandelt, findet er durch Betrachtung der Wellen,

47) Paris C. R. 2, 1836; Ann. Phys. Chem. 39, 1836.

48) Wien Ber. 81 (1880), p. 369. Vgl. die zweite Auflage von *A. Beer*, Einleitung in die höhere Optik, 1882.

die einem Hauptschnitt parallel sind, zwischen den Konstanten Relationen, die dann zum Ziele führen.

Eine ausführliche Kritik der *Cauchy*schen Theorie ist auch von *F. Mathieu* gegeben[49]).

17. Cauchys Dispersionstheorie. Die bisherigen Entwicklungen vermögen in keiner Weise die Dispersion des Lichtes zu erklären, denn sie ergeben für alle Medien (kristallinische oder isotrope) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle als nur von den Konstanten des Mediums abhängig, dagegen als unabhängig von der Farbe. Den Grund dafür sieht *Cauchy* darin, daß bei der Entwicklung von $\Delta u, \ldots$ nur die Glieder zweiter Ordnung in bezug auf Δx, Δy, Δz berücksichtigt, die höheren Potenzen derselben aber vernachlässigt sind. Denn bei dieser Vernachlässigung erhält man auf beiden Seiten der Gleichung (69) nur die zweiten Ableitungen von u, v, w nach x, y, z und t; sämtliche Glieder in (69) haben daher nach Einführung der Werte (70) den gemeinsamen Faktor $(2\pi/\lambda)^2$, und wenn durch diesen dividiert wird, verschwindet λ, daher auch die Schwingungsdauer τ aus den Formeln. Würde man aber in der Entwicklung von $\Delta u, \ldots$ auch die Glieder höherer Ordnung von $\Delta x, \ldots$ berücksichtigen, so würde sich V als von τ abhängig ergeben. Diese Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung, die sich allerdings nur rechtfertigen ließe, wenn die Molekularabstände gegen die Wellenlänge λ nicht verschwindend klein wären, bildet den Grundgedanken von *Cauchys* Dispersionstheorie. Wendet man die Gleichungen (69) und (70) auf isotrope Medien an und betrachtet transversale Schwingungen, die sich parallel der z-Achse fortpflanzen, während die Schwingungsrichtung parallel x ist, so wird

$$\varrho = z, \quad u = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt), \quad v = 0, \quad w = 0,$$

$$(78) \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial z}\left\{\Delta z - \frac{\Delta z^3}{3!}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{\Delta z^5}{5!}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - \cdots\right\}$$
$$+ u\left\{-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{\Delta z^2}{2!} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4\frac{\Delta z^4}{4!} - \cdots\right\}, \quad \Delta v = 0, \ \Delta w = 0.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (69) ein und beachtet, daß die über alle Massenpunkte erstreckten Summen, die ungerade Potenzen von Δz enthalten, verschwinden, so folgt aus (69):

$$(79) \qquad -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 V^2 = -a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + b\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 - c\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^6 + \cdots,$$

und die a, b, c gewisse über alle Massenpunkte erstreckte Summen

49) Journ. de math. (3) 7, 1881.

bezeichnen. Da

$$\lambda = V \cdot \tau,$$

so ist hiermit $\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2$ in eine nach Potenzen von $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ fortschreitende Reihe entwickelt. Kehrt man die Reihe um, so ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = a\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + b_1\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^4 + c_1\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^6 + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{V^2} = a + b_1\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + c_1\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^4 + \cdots.$$

Falls weiter V_0, λ_0 Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge im leeren Raume für die Schwingungsdauer τ bezeichnen, so wird der Brechungsexponent

$$n = \frac{V_0}{V} = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

und aus der obigen Formel für V folgt für n eine Gleichung der Form

$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda_0{}^2} + \frac{\gamma}{\lambda_0{}^4} + \cdots,$$

aus der, wenn die Koeffizienten α, β, γ sämtlich positiv sind, die Zunahme von n mit abnehmendem λ_0 folgt. Die Formel stimmt mit den Ergebnissen der Beobachtung sehr gut überein; zur Darstellung jener Ergebnisse genügen schon die beiden ersten Glieder. Die Übereinstimmung erklärt sich daraus, daß trotz der abweichenden Grundlage die Resultate der *Cauchy*schen Theorie mit denen der heutigen Resonanztheorie sich formal decken.

Um das Fehlen der Dispersion im leeren Raume zu erklären, bringt *Cauchy* zunächst den Ausdruck (79) für V^2 auf eine andere Form. Der Faktor von u auf der rechten Seite von (78) ist

$$-\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z\right)\right] = -2\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta z\right).$$

Durch Einsetzen von (78) in (69) folgt dann:

$$V^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\sum \mu \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta z\right)\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{rf'(r) - f(r)}{r}\,\frac{\Delta x^2}{r^2}\right].$$

Unter der Annahme, daß im leeren Raume die Ätherteilchen sehr nahe aneinander liegen, ersetzt *Cauchy* die Summation durch eine Integration und führt in dem Integral Polarkoordinaten ein:

$$\Delta z = r\cos\vartheta, \quad \Delta x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \Delta y = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$\mu = \delta r^2 dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

wo δ die Dichtigkeit ist. Die Integration, über den ganzen Raum ausgedehnt, gibt

$$V^2 = \frac{\delta \lambda^2}{3\pi}[r^2 f(r)]_{r=\infty} - \frac{2}{15}\delta\pi[r^4 f(r)]_{r=0} + \cdots.$$

Soll nun V von λ unabhängig sein, so muß

$$[r^2 f(r)]_{r=\infty} = 0$$

sein, während zugleich $[r^4 f(r)]_{r=0}$ einen negativen Wert haben muß. Die nicht hingeschriebenen Glieder in (80) verschwinden bei Erfüllung dieser Bedingungen von selbst. Diesen Bedingungen kann auf verschiedene Weise genügt werden, z. B. durch

$$f(r) = \frac{-k^2}{r^4}.$$

Doch sind diese Schlüsse an die Bedingung eines kontinuierlichen Äthers geknüpft, gelten also nicht für den Äther in ponderablen Medien.

E. B. Christoffel[50]) hat das Größenverhältnis der in der *Cauchy*schen Dispersionsformel (79) auftretenden Koeffizienten näher untersucht und gefunden, daß die beiden ersten Koeffizienten a, b beliebiger endlicher Werte fähig sind, während jeder folgende im Vergleich zu dem je vorhergehenden von der Ordnung ϱ^2 ist, unter ϱ den Radius der molekularen Wirkungssphäre verstanden. Ist λ nicht sehr klein gegen ϱ, so kann man daher in (79) die rechte Seite auf die beiden ersten Summanden beschränken. Führt man nun an Stelle der Konstanten a, b, die beide positiv sind, zwei neue Konstante n_0, λ_0 ein, bezeichnet ferner mit λ, nicht wie in (79), die Wellenlänge in dem betrachteten Medium, sondern die im leeren Raume, mit n den Brechungsexponenten des Mediums, so reduziert sich die Gleichung (79) auf eine quadratische Gleichung für n^2, die als einzig brauchbare Wurzel den Wert liefert

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}, \tag{80}$$

woraus folgt, daß in das Medium nur solche Strahlen übergehen können, für die $\lambda > \lambda_0$ ist. Das durch das Medium entworfene Spektrum wird von zwei Richtungen begrenzt, die den Brechungsindizes n_0 und $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ entsprechen. Man kann n_0 als Maß des Brechungsvermögens, λ_0 als Maß des Dispersionsvermögens betrachten.

---

50) Berlin Monatsberichte 1861; Ann. Phys. Chem. 117 (1862); Ann. chimie (3) 64.

18. Cauchys Reflexionstheorie. *Cauchy* hat seiner Theorie der Reflexion und Brechung[51]) die strengen Grenzbedingungen (s. Nr. 10) zugrunde gelegt. Er nimmt also 1) Gleichheit der Verrückungskomponenten u, v, w beider Medien an der Grenze $z = 0$ an; 2) statt der Gleichheit der Komponenten des Drucks jedoch nimmt er die Gleichheit von $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ für $z = 0$ an. Er rechtfertigt diese Annahme, indem er voraussetzt, daß die beiden Medien, an deren Grenze die Reflexion erfolgt, nicht unmittelbar aneinanderstoßen, sondern daß zwischen beiden ein allmählicher, stetiger Übergang in bezug auf Dichte und Elastizität stattfindet, und indem er die Lichtbewegungen in dieser Übergangsschicht, deren Dicke klein gegen die Wellenlänge sein soll, betrachtet

Auf isotrope Medien angewandt, geben diese Grenzbedingungen, wenn die Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene ist, genau das *Fresnel*sche Resultat. Für Schwingungen in der Einfallsebene dagegen kann man den Grenzbedingungen nur genügen, wenn man im reflektierten und gebrochenen Lichte neben den transversalen auch longitudinale Schwingungen zuläßt, von letzteren aber annimmt, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär ist, und daß daher diese Strahlen ohne Bedeutung sind. Das erfordert, daß die Konstante $\mathfrak{A} + A$ (vgl. Nr. **15**) negativ ist. Dies ist aber, wie *Green* erkannt hat (s. Nr. **23**), mit der Bedingung für stabiles Gleichgewicht nicht verträglich[52]). Somit erscheint die *Cauchy*sche Theorie nicht haltbar.

Bemerkt sei, daß die Darstellung, welche *Cauchy* von seiner Theorie gibt, unvollständig und wenig übersichtlich ist. Ableitungen der *Cauchy*schen Formeln sind gegeben von *A. v. Ettinghausen*[53]), *A. Beer*[54]), *F. Eisenlohr*[55]), *Ch. Briot*[56]). Übrigens gibt die *Cauchy*sche Theorie auch von solchen Abweichungen von den *Fresnel*schen Formeln Rechenschaft, wie sie den *Jamin*schen Beobachtungen über die elliptische Polarisation des reflektierten Lichtes entsprechen.

---

51) Exercices d'analyse de phys. et math. 1, 1840; Paris Mém. 32, 1850. In seinen Arbeiten vom Jahre 1830 hatte *Cauchy* nur einen Teil der Grenzbedingungen benutzt, nicht die vollständigen.

52) Eine eingehende Kritik der *Cauchy*schen Reflexionstheorie findet man bei *K. von der Mühll*, Math. Ann. 5 (1872). Nach ihm beruht die Herleitung der Grenzbedingungen bei *Cauchy* auf einer nicht ausgesprochenen, willkürlichen Voraussetzung.

53) Ann. Phys. Chem. 50, 1840; Wien Ber. 18, 1855.

54) Ann. Phys. Chem. 91, 92, 1854.

55) Ann. Phys. Chem. 104, 1858.

56) Paris C. R. 63; Journ. de math. (2) 11, beide 1866.

Cauchy hat seine Theorie auch auf die Reflexion an Metallen ausgedehnt. Um diese zu behandeln, muß man den *Fresnel*schen Ansatz nur dahin ändern, daß 1) in den Schwingungskomponenten des reflektierten und gebrochenen Lichts die Phase ε eine andere ist als in denen des einfallenden Lichts, und zwar hat ε einen verschiedenen Wert für die in der Einfallsebene gelegenen und die senkrecht dazu gerichteten Komponenten; daß 2) den Schwingungskomponenten des gebrochenen Lichts der Faktor e^{-kz} hinzugefügt wird, was, da z im zweiten Medium positiv ist, ein Erlöschen des gebrochenen Lichts sehr bald hinter der Grenze bedingt. Mittels desselben Ansatzes kann man auch die totale Reflexion behandeln und bedarf dann nicht der willkürlichen *Fresnel*schen Interpretation des Imaginären.

19. F. Neumann. Allgemeine Grundlagen seiner Arbeiten. Ungefähr gleichzeitig mit *Cauchy* versuchte auch *F. Neumann* die *Fresnel*sche Kristalloptik strenger zu begründen [57]. Er ging aus von der Elastizitätstheorie, indem er zunächst die von *Navier* für isotrope Körper aufgestellten elastischen Gleichungen auf solche kristallinische Medien ausdehnte, die durch drei senkrechte Ebenen symmetrisch teilbar sind. Seine Grundformeln sind von der Form:

$$\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2F\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sucht man diejenigen Lösungen der Gleichungen, die ebenen Wellen entsprechen, und bezeichnet mit α, β, γ die Kosinus der Fortpflanzungs-, mit m, n, p diejenigen der Schwingungsrichtung, so ergeben sich genau die Gleichungen (71), (72), (73) der *Cauchy*schen Theorie, falls man noch in (72) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$ und in (71) links δ statt des Faktors 2 setzt. Die eine der Annahmen, die *Cauchy* machen mußte, um Übereinstimmung zwischen seinen Resultaten und denen *Fresnel*s zu erhalten, ist hier infolge der Natur der Grundgleichungen von selbst erfüllt. Die anderen Folgerungen *Neumann*s sind wesentlich mit dem Teil der *Cauchy*schen Resultate identisch, die dieser aus der Annahme $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$ abgeleitet hatte; insbesondere ergibt sich eine Übereinstimmung der theoretischen Resultate mit den *Fresnel*schen Gesetzen nur, wenn man die Polarisationsebene, abweichend von *Fresnel*,

57) Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik, Ann. Phys. Chem. 25, 1832; Werke 2, p. 159; Klassiker d. ex. Wiss. Nr. 76 (1896). *F. Neumanns* Untersuchungen sind ganz unabhängig von *Cauchy* entstanden. Kurz vor der Veröffentlichung seiner Arbeit waren *F. Neumann* die Resultate von *Cauchy*, aber nur diese, bekannt geworden.

als die Ebene definiert, die durch die Wellenebene und die Schwingungsrichtung gelegt ist. *Neumann* schließt daraus, und dieser Schluß ist unanfechtbar, daß man entweder seine Definition der Polarisationsebene oder seine Grundlage der Theorie verwerfen müsse. Dieser Schluß trifft übrigens nicht bloß auf die *Navier*sche Elastizitätstheorie zu, auf deren Boden *Neumann*, da eine andere Theorie noch nicht existierte, stand, sondern auch auf die neuere Theorie, bei der die Gleichungen für isotrope Medien nicht von einer, sondern von zwei Konstanten abhängen. Denn auch alle späteren Autoren, die von der Gleichung der allgemeineren Elastizitätstheorie ausgegangen sind, wie z. B. *Lamé*, *Kirchhoff* usw., sind zu derselben Auffassung über die Lage der Polarisationsebene gelangt. An seiner Auffassung hat *Neumann* auch in seinen späteren Arbeiten, insbesondere in seiner gleich zu besprechenden Reflexionstheorie festgehalten, während er dort die Existenz der longitudinalen Wellen, die neben den transversalen auftreten können, verwarf, also auch die Lichtschwingungen in Kristallen nicht nur als nahezu, sondern als streng transversal ansah.

20. F. Neumanns Reflexionstheorie[58]). a) *Reflexion an isotropen Medien.* Um für das reflektierte und gebrochene Licht rein transversale Bewegungen zu erhalten und daneben nicht noch longitudinale Schwingungen einzuführen, benutzt auch *Neumann* nicht die strengen Grenzbedingungen, sondern ersetzt sie teilweise durch vereinfachende Annahmen. Diese unterscheiden sich von den *Fresnel*schen (s. Nr. **10**) in folgendem: ad 2) betrachtet Neumann, wie schon bemerkt, die Schwingungen des polarisierten Lichts als *in* der Einfallsebene erfolgend; ad 3) nimmt er an, daß in allen Medien der Äther gleiche Dichtigkeit, aber verschiedene Elastizität hat; ad 4) postuliert er, daß neben den der Grenzfläche parallelen auch die dazu senkrecht gerichteten Komponenten der Verrückung für beide Medien die gleichen Werte haben. In den übrigen Annahmen schließt er sich *Fresnel* an.

Diese veränderten Annahmen bringen gegenüber der *Fresnel*schen Theorie folgende Modifikation in den Entwicklungen zuwege. Wegen 3) wird

$$\sin j : \sin j_1 = \lambda : \lambda_1 = V : V_1 = \sqrt{E} : \sqrt{E_1},$$

wo E und E_1 die Elastizitätskonstanten beider Medien bezeichnen,

58) Theoretische Untersuchungen der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger Medien reflektiert und gebrochen wird, Berlin Abh. 1835, S. 1—160; Werke 2, p. 359. Vgl die Darstellung von *F. G. W. Radicke* in *Doves* Repert. 3 (1839), p. 178 ff.

während $\delta = \delta_1$ wird. Bezeichnen ferner nach wie vor u, v, w die Schwingungskomponenten parallel x, y, z, so bezieht sich v, das bei *Fresnel* die Schwingung des *in* der Einfallsebene polarisierten Lichts darstellt, jetzt auf das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte, während u, w jetzt die Komponenten für das in der Einfallsebene polarisierte Licht bezeichnen. Abgesehen von dieser modifizierten Bedeutung, bleibt die Gleichung (48) unverändert, an Stelle von (49) aber tritt, da, wie schon bemerkt, $\delta = \delta_1$ wird, die andere

$$P^2 = P'^2 + P_1^2 \frac{q_1 \lambda_1}{q \lambda} = P'^2 + P_1^2 \frac{\sin j_1 \cos j_1}{\sin j \cos j}; \tag{81}$$

und aus (48) und (81) folgt

$$P_1 = \frac{2 \sin j \cos j}{\sin(j + j_1) \cos(j - j_1)} P, \quad P' = \frac{\operatorname{tg}(j - j_1)}{\operatorname{tg}(j + j_1)} P. \tag{82}$$

Bezeichnen, wie vorher, $\bar{J}, \bar{J}', \bar{J}_1$ die Intensitäten des *senkrecht zur Einfallsebene* polarisierten Lichts, so wird also

$$\left\{\begin{aligned} \bar{J}' &= \frac{\operatorname{tg}^2(j - j_1)}{\operatorname{tg}^2(j + j_1)} \bar{J}, \\ \bar{J}_1 &= \frac{4 \sin^2 j \cos^2 j}{\sin^2(j + j_1) \cos^2(j - j_1)} \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda q} \bar{J} = \frac{\sin 2j \sin 2j_1}{\sin^2(j + j_1) \cos^2(j - j_1)} \bar{J}, \end{aligned}\right. \tag{83}$$

und diese Formeln sind mit (60) identisch, d. h. für das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht ergibt die *Neumann*sche Theorie *genau* dieselben Formeln wie die *Fresnel*sche.

Für die Komponenten u, w gestaltet sich bei *Neumann* die Entwicklung folgendermaßen: An Stelle der einen Gleichung (56) treten wegen der Annahme 4) die zwei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (S + S') \cos j &= S_1 \cos j_1, \\ (S - S') \sin j &= S_1 \sin j_1, \end{aligned}\right. \tag{84}$$

während an Stelle von (57) die Gleichung tritt:

$$S^2 = S'^2 + S_1^2 \frac{\sin j_1 \cos j_1}{\sin j \cos j}. \tag{85}$$

Man hat demnach zur Bestimmung von zwei Unbekannten S', S_1 drei Bedingungsgleichungen; doch ist die dritte derselben eine Folge der beiden ersten. Aus diesen aber folgt:

$$S' = S \frac{\sin(j - j_1)}{\sin(j + j_1)}, \quad S_1 = \frac{2 \sin j \cos j}{\sin(j + j_1)} S, \tag{86}$$

und zwischen den Intensitäten J, J', J_1 das in der Einfallsebene polarisierten Lichts (dem ja nach *Neumanns* Annahme die Komponenten u, w angehören) ergeben sich daraus die Gleichungen

$$J' = \frac{\sin^2(j - j_1)}{\sin^2(j + j_1)} J, \quad J_1 = \frac{4 \sin^2 j \cos^2 j}{\sin^2(j + j_1)} \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda q} J = \frac{\sin 2j \sin 2j_1}{\sin^2(j + j_1)} J, \tag{87}$$

und auch das sind wieder genau die *Fresnel*schen Resultate [vgl. die Formeln (52)]. Da nun letztere, wie bemerkt, durch das Experiment (abgesehen von kleinen Abweichungen) bestätigt sind, so ist die *Neumann*sche Theorie mit der *Fresnel*schen vollständig gleichwertig[59]). Einen Vorzug der *Neumann*schen Theorie bildet einmal die Annahme der Kontinuität aller drei Verrückungskomponenten, nicht nur der der Grenze parallelen. Vor allem aber spricht für *Neumanns* Theorie, daß sie ohne Hinzufügung einer weiteren Annahme sich unmittelbar auf die Kristallreflexion ausdehnen läßt, was bei der Fresnelschen Theorie nicht der Fall ist.

b) *Reflexion an Kristallflächen.* Die Ausdehnung der Theorie auf die Reflexion und Brechung des Lichtes an Kristallflächen bildet den Hauptinhalt der *Neumann*schen Abhandlung. Schon für den Übergang des Lichtes von einem isotropen in ein einachsiges kristallinisches Medium erfordert die Lösung des Problems erheblich umfangreichere und kompliziertere analytische Entwicklungen als für die Grenze zweier isotroper Medien. Die Komplikation rührt einmal von der verschiedenen Orientierung sowohl der brechenden Fläche, als der einfallenden Wellenebene gegen die rechtwinkligen Elastizitätsachsen des kristallinischen Mediums her. Da ferner die beiden gebrochenen Wellen gegebene Schwingungsrichtungen haben, so kann man nicht, wie vorher, die Fälle, wo das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, getrennt behandeln. Auch macht die Aufstellung des Ausdrucks für die lebendige Kraft der außerordentlichen gebrochenen Welle besondere Betrachtungen erforderlich Denn denkt man sich in dem unkristallinischen Medium ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Grundflächen zwei Lagen der einfallenden Wellenebene sind, so hat sich die in diesem enthaltene Bewegung nach der Brechung auf ein schiefwinkliges[60]) Parallelepipedon ausgebreitet, das von zwei entsprechenden Lagen der gebrochenen außerordentlichen Wellenebene begrenzt wird. Die Kontinuität der Schwingungskomponenten an der Grenze, verbunden mit dem Satz der lebendigen Kraft, liefert hier vier Gleichungen, die als Unbekannte enthalten: die beiden Komponenten der reflektierten Amplitude parallel und senkrecht zur Einfallsebene und die Amplituden der beiden gebrochenen Wellen. Von diesen Gleichungen sind drei linear und eine

---

59) Betreffs des Zusammenhangs der beiden Theorien vgl. Nr. 38.

60) Schiefwinklig ist das Parallelepipedon, weil für die außerordentlichen gebrochenen Wellen die Strahlen nicht mehr mit den Wellennormalen zusammenfallen.

quadratisch; letztere läßt sich auch hier mittels der drei ersten auf eine lineare zurückführen, doch erfordert diese Reduktion eine längere Rechnung. Aus den so erhaltenen vier linearen Gleichungen, deren Auflösung keine Schwierigkeit bietet, wird eine große Reihe von Folgerungen gezogen. U. a. werden die Gesetze der Polarisation des von einer beliebigen Kristallfläche reflektierten Lichts untersucht. Auch hier existiert, wie bei der Reflexion an unkristallinischen Medien, ein Polarisationswinkel; er ist derjenige Einfallswinkel, unter welchem natürliches Licht reflektiert werden muß, damit es vollständig polarisiert sei. Die Polarisationsebene des durch Reflexion vollständig polarisierten Lichts fällt dann aber nicht mehr, wie bei unkristallinischen Medien, mit der Reflexionsebene zusammen, sondern bildet mit ihr einen Winkel, der die Ablenkung der Polarisationsebene genannt wird. Ein einfacher Ausdruck für den Polarisationswinkel ergibt sich nur, wenn die Reflexionsebene parallel mit dem Hauptschnitt der reflektierenden Ebene ist, während jener Winkel im allgemeinen von einer Gleichung vierten Grades abhängt; für die allein in Betracht kommende Wurzel wird eine Näherungsformel entwickelt. Für die Ablenkung der Polarisationsebene wird der einfache Satz aufgestellt: „Die Tangente der Ablenkung ist gleich der Tangente des Winkels zwischen der Einfallsebene und der Polarisationsebene des gewöhnlich gebrochenen Wellensystems, multipliziert mit dem Kosinus der Summe des Polarisationswinkels und des zugehörigen gewöhnlichen Brechungswinkels.“

Aus den Formeln für die Intensitäten der gebrochenen Strahlen wird ferner abgeleitet, unter welchem Azimut ein einfallender Strahl polarisiert sein muß, damit der eine der beiden gebrochenen Strahlen verschwindet. Auch die Formeln für den Übergang des Lichts aus einem einachsigen kristallinischen in ein isotropes Medium werden entwickelt, dabei die totale Reflexion besprochen, die Resultate endlich auf den Durchgang des Lichts durch ein Prisma oder eine planparallele Platte eines einachsigen Mediums angewandt. Übrigens stimmen die Resultate der *Neumann*schen Theorie mit den Beobachtungen gut überein.

Noch umfassendere Rechnungen als bei einachsigen Kristallen erfordert die Untersuchung der Reflexion und Brechung bei zweiachsigen Kristallen. Insbesondere macht hier die Zurückführung der sich aus dem Prinzip der lebendigen Kraft ergebenden quadratischen Gleichung auf eine solche ersten Grades einige Schwierigkeit. *Neumann* überwindet diese und andere Schwierigkeiten des Problems und leitet auch für zweiachsige Kristalle alle erforderlichen Formeln her. Aus den daraus gezogenen Folgerungen sei hier nur hervorhoben der Nachweis, daß die konische Refraktion auf die Erscheinung der Reflexion keinen Einfluß hat. Ermittelt wird ferner für die konische Refraktion die Lichtintensität und die Lage der Polarisationsebene für die verschiedenen Seiten des Lichtkegels.

Darauf, daß *Neumann* als erster die Formeln der Totalreflexion ohne jede Anwendung des Imaginären abgeleitet hat, ist schon am Schluß von Nr. **12** hingewiesen. Dabei versagt das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft. *Neumann* ersetzt es durch das andere, daß der Druck auf die brechende Fläche, welche durch die Verschiebung der Teile im ersten Medium entsteht, dieselbe Komponente senkrecht auf der Einfallsebene hat wie der Druck, welcher durch die Verschiebung im zweiten Medium entsteht. Betreffs der außerdem erforderlichen Einführung von Exponentialgrößen in den Ansatz für die Schwingungskomponenten des gebrochenen Lichtes vgl. den Schluß von Nr. **18**.

c) *Metallreflexion.* Hinsichtlich der Metallreflexion hat *Neumann* keine eigentliche Theorie entwickelt, sondern nur die vorhandenen Beobachtungen auf einfache Gesetze zurückgeführt[61]). Es sind die folgenden:

Es seien A, B die Amplituden des einfallenden Lichts in der Einfallsebene und senkrecht darauf, sA und pB die entsprechenden Komponenten des reflektierten Lichts, ferner habe die letztere Komponente die Phasenverzögerung δ gegen die erstere, und es sei $p:s = \operatorname{tg}\beta$, so ist

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{\lambda}2\pi\right) = \operatorname{tg} j \operatorname{tg} j_1, \quad \sin j = n \sin j_1;\\ &\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\beta_1)}{\sin\left(\frac{\delta}{\lambda}2\pi\right)}. \end{aligned}\right.$$

Darin ist n der sogenannte Brechungsindex des Metalls, d. h. die durch

$$n = \operatorname{tg}\varpi$$

definierte Konstante, wo ϖ der Polarisationswinkel ist; j ist der Einfallswinkel, β_1 der Wert von β für $j = \varpi$.

21. Neumanns Dispersionstheorie[62]). Nach *Neumann*s Ansicht rührt die Dispersion ganz oder teilweise von den Kräften her, welche zwischen den schwingenden Teilen des Lichtäthers und den ponderablen Atomen des durchsichtigen Stoffes wirksam sind. Diese

61) Ann. Phys. Chem. 26 (1832), p. 89 ff.; Ges. Werke 2, p. 199.

62) Die Theorie ist in der gleich zu besprechenden Abhandlung über akzidentelle Doppelbrechung nebenbei entwickelt (1841). Eine ausführliche Darstellung findet man in *F. Neumanns* Vorlesungen über Elastizitätstheorie, Abschn. 17.

neuen Kräfte modifizieren nicht allein die Bewegung der Ätherteilchen, sondern setzen auch die Teile des festen Körpers in Bewegung. Die letztere Bewegung ist aber bei vollkommen durchsichtigen Körpern als sehr klein zu betrachten gegen die Bewegung der Ätherteilchen und kann daher in erster Annäherung vernachlässigt werden. Bei dieser Vernachlässigung werden die Komponenten der neuen Kräfte den Projektionen der Verrückungen der Ätherteilchen proportional, und diese neuen Kräfte sind in allen Differentialgleichungen der Lichtbewegung, die für den freien Äther gelten, hinzuzufügen. In einem derartigen Medium ergibt sich, falls es isotrop ist, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V einer ebenen Welle von der Schwingungsdauer τ angenähert der Wert

$$V^2 = k(1 + M\tau^2), \tag{89}$$

wo k und M Konstante sind. Hieraus folgt, daß der Brechungsindex mit abnehmenden τ zunehmen würde. Daß in dieser Theorie zum erstenmal die direkte Einwirkung der Körpermoleküle berücksichtigt ist, scheint späteren Autoren, die von derselben Auffassung ausgegangen sind, entgangen zu sein. Bald nach *Neumann* hat auch *O. Brien* eine ganz ähnliche Theorie entwickelt[63]).

22. F. Neumanns Theorie der akzidentellen Doppelbrechung[64]). *Neumann* war der erste, der eine allgemeine Theorie der in isotropen Körpern durch Einwirkung elastischer und thermischer Kräfte entstehenden Doppelbrechung aufgestellt hat. Er zeigt zunächst, daß der Grund der Erscheinungen nicht in einer veränderten Einwirkung der Körpermoleküle auf die Ätherteilchen zu suchen ist, sondern lediglich in einer durch die veränderte relative Lage der Körperteilchen hervorgebrachten neuen Anordnung des im Körper enthaltenen Äthers. Diese Anordnung der Ätherteilchen muß dieselbe Symmetrie besitzen wie die der Körpermoleküle. In *gleichförmig* dilatierten und komprimierten Körpern befolgt daher die Doppelbrechung dieselben Gesetze, die für kristallinische Medien gelten. Der einfachste Ausdruck für diese Gesetze ist in ihrer geometrischen Konstruktion mittels der *optischen* Elastizitätsfläche enthalten (vgl. Nr. 7). Neben dieser ist die Elastizitätsfläche des Drucks zu betrachten. Die Achsen beider Flächen fallen der Richtung nach zusammen; für die Achsenlängen A, B, C der optischen Elastizitätsfläche gelten, falls α, β, γ die Dila-

63) Cambridge Phil. Trans. 7, 1842.

64) Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in komprimierten oder ungleichmäßig erwärmten unkristallinischen Körpern, Berlin Abh. 1841, p. 1—247, im Auszug in Ann. Phys. Chem. 54 (1841), p. 439—476.

tationen in den entsprechenden drei Hauptdruckachsen sind, die Gleichungen

$$(90)\qquad \begin{cases} A = G + q\alpha + p\beta + p\gamma, \\ B = G + p\alpha + q\beta + p\gamma, \\ C = G + p\alpha + q\beta + q\gamma. \end{cases}$$

Darin sind p und q zwei von der Natur des dilatierten Mediums abhängige Konstante, G ist von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in dem Medium im natürlichen Zustande sehr wenig unterschieden. *Neumann* zeigt, wie man durch sinnreiche Kombination zweier verschiedener Beobachtungen die Werte der Konstanten p, q bestimmen kann.

Während ein gleichförmig dilatierter Körper sich für das Licht wie ein Kristallindividuum verhält, ist ein ungleichförmig dilatierter Körper einem Aggregat von unendlich vielen sehr kleinen Kristallindividuen zu vergleichen, deren optische Elastizitätsachsen stetige Funktionen des Ortes sind, sowohl in Beziehung auf ihre Richtung, als ihre Größe. Wenn ein polarisierter Strahl auf ein solches Aggregat trifft, so teilt er sich nicht allein bei seinem Eintritt in zwei rechtwinklig polarisierte Strahlen, sondern auf jeder Stelle der Bahn teilt sich jeder Strahl, so wie er in ein neues Kristallindividuum tritt, wieder in zwei Teile. Die hiernach sehr schwierig erscheinende Untersuchung wird nun sehr vereinfacht, wenn die Unterschiede der optischen Elastizitätsachsen so klein sind, daß ihre Quadrate als verschwindend gegen die ersten Potenzen behandelt werden können. Unter dieser Voraussetzung zeigt *Neumann*, daß 1) die Bahnen der Lichtstrahlen im Innern des Körpers bei der Berechnung der Interferenz als geradlinig betrachtet werden können, 2) daß die nach dem Austritt miteinander interferierenden Strahlen so behandelt werden können, als hätten sie das Medium in derselben Richtung durchlaufen. Mit Hilfe dieser Sätze wird der allgemeine Ausdruck für die Differenz der Verzögerungen, mit welchen die miteinander interferierenden Strahlen aus dem Körper heraustreten, berechnet. Diese Differenz hängt ab von dem Gesetz der Drehungen, welchen die Polarisationsebene des Strahles im Innern des Körpers unterworfen ist, und von dem Gesetz seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Beide müssen als Funktionen des Ortes bekannt sein, und diese Funktionen ihrerseits lassen sich aus dem System der Verrückungen der Teilchen des Körpers ableiten; letzteres System muß gegeben sein, oder durch eine unabhängige Untersuchung ermittelt werden. Zur Erläuterung der abgeleiteten Formeln werden diese angewandt auf die Interferenzerscheinungen, welche ein tordierter Glaszylinder im polarisierten Lichte zeigt.

Weiter stellt *Neumann* auch eine Theorie der Farben auf, welche bei durchsichtigen unkristallinischen Körpern im polarisierten Lichte aus einer ungleichen Temperaturverteilung entstehen. Die Grundlage der Untersuchung bildet die Bestimmung der durch Temperaturänderung hervorgebrachten molekularen Verrückungen. *Neumann* findet diese, indem er den *Poisson*schen Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer Körper Zusatzglieder hinzufügt, die den Differentialquotienten der Temperatur nach den Koordinaten (in den Grenzbedingungen der Temperatur selbst) proportional sind, während zur Bestimmung der Temperatur die *Fourier*sche Gleichung für die Wärmeleitung dient[65]). Die Integration dieser Gleichungen führt zu den gesuchten Verrückungen, und aus ihnen folgt die Doppelbrechung ebenso, wie vorher aus durch Druck oder Zug entstehenden Verrückungen. *Neumann* gibt dann verschiedene Anwendungen seiner allgemeinen Gleichungen auf spezielle Fälle und teilt endlich die Prinzipien mit, nach denen man die bleibenden Farben berechnen kann, die feste durchsichtige Körper nach Härtung oder rascher Abkühlung zeigen.

Die von *Neumann* für isotrope Medien aufgestellte Theorie der akzidentellen Doppelbrechung ist von *F. Pockels* auf gleichförmig deformierte Kristalle erweitert[66]).

23. G. Green. *Green*s erste optische Arbeit bezieht sich auf die Reflexion an der Grenze zweier isotropen Medien[67]). Er legt dabei, unabhängig von *Cauchy* und vor diesem, genau dieselben Grenzbedingungen zugrunde, wie die *Cauchy*sche Theorie, nimmt aber hinsichtlich der longitudinalen Wellen an, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit (und damit die eine Elastizitätskonstante des Mediums) unendlich groß sei. Diese Annahme kommt im wesentlichen darauf hinaus, daß der Äther inkompressibel ist[68]). Bemerkenswert ist in dieser wie in der folgenden Arbeit, daß sich *Green* von molekularen Vorstellungen völlig frei macht.

---

65) Diese Gleichungen sind schon vorher von *J. M. C. Duhamel* aufgestellt, von *Neumann* unabhängig von *Duhamel* gefunden.

66) Über den Einfluß elastischer Deformationen, speziell einseitigen Druckes, auf das optische Verhalten kristallinischer Körper, Ann. Phys. Chem. (2) 37, 1889; Über die durch einseitigen Druck hervorgebrachte Doppelbrechung regulärer Kristalle, Ann. Phys. Chem. (2) 39, 1890.

67) Cambridge Phil. Trans. 1838; Math. papers of *Green,* p. 243—281.

68) Vgl. *K. Von der Mühll*, Math. Ann. 27 (1886), p. 506.

Greens Resultate stimmen aber mit den *Fresnel*schen Formeln und somit auch mit der Erfahrung nur zum Teil überein, nämlich hinsichtlich der senkrecht zur Einfallsebene erfolgenden Schwingungen, während für die Schwingungen in der Einfallsebene angenäherte Übereinstimmung nur stattfindet, falls der Brechungsindex n wenig von 1 verschieden ist.

Eine Modifikation der *Green*schen Theorie durch *S. Haughton*[69]), die darin besteht, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen als *sehr* groß, nicht als unendlich anzunehmen ist, scheint wegen fehlerhafter Rechnung nicht haltbar[68]).

Eine zweite Arbeit von *Green*[70]) betrifft die Fortpflanzung des Lichts in Kristallen. *Green* geht hier von den Gleichungen der nichtmolekularen Elastizitätstheorie aus

$$\delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \tag{91}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Die elastischen Kräfte X_x, X_y, ... sind lineare homogene Funktionen der sechs Größen x_x, y_y, z_z, $x_y = y_x$, $x_z = z_x$, $y_z = z_y$ (der linearen Dilatationen und Gleitungen). *Green* macht nun die fundamentale Annahme, daß ein elastisches Potential existiert, d. h. eine homogene Funktion Φ zweiter Ordnung der sechs Größen $x_x, \ldots, y_z$ mit konstanten Koeffizienten, deren Ableitungen nach diesen Größen die elastischen Kräfte ergeben. Die Zahl der in Φ enthaltenen Konstanten ist bei beliebiger Lage der Koordinatenachsen 21 (während ohne die Annahme eines elastischen Potentials die Zahl der Konstanten 36 beträgt). *Green* untersucht darauf, welche Beziehungen zwischen den Koeffizienten bestehen müssen, damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in den kristallinischen Medien genau den *Fresnel*schen Gesetzen gemäß vor sich gehe. Er findet, daß dazu Φ die Form haben muß:

$$\begin{aligned} 2\Phi = {} & G(x_x + y_y + z_z)^2 + L(y_z^2 - 4y_yz_z) + M(z_x^2 - 4z_zx_x) \\ & + N(x_y^2 - 4x_xy_y) + 2P(x_yx_z - 2x_xy_z) + 2Q(y_zy_x - 2y_yz_x) \\ & + 2R(z_xz_y - 2z_zx_y). \end{aligned} \tag{92}$$

Bestimmt man nämlich für diese Form von Φ diejenigen Lösungen der elastischen Gleichungen, welche ebenen Wellen entsprechen[71]), so ergibt sich, daß in jeder Richtung sich drei Wellen fortpflanzen, deren eine rein longitudinal ist und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{G}$

69) Phil. Mag. (4) 6 (1853).

70) Cambridge Phil. Trans. 1839; Papers p. 291.

71) Vgl. p. 43, Gl. (70).

besitzt, während die beiden anderen Wellen rein transversal sind. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der letzteren ergibt sich, falls das Medium in bezug auf drei rechtwinklige Achsen symmetrisch ist, genau die *Fresnel*sche Gleichung (31), wenn man die Symmetrieachsen zu Koordinatenachsen wählt.

Eine einfache Ableitung des *Green*schen Ausdrucks für das elastische Potential hat *P. Volkmann* gegeben [72]); eine andere Deutung dieses Ausdrucks rührt von *E. Beltrami* her [73]). Eine Erweiterung der *Green*schen Betrachtung hat *H. M. Macdonald* [74]) versucht, indem er das elastische Potential als von 9 Veränderlichen abhängig annahm. Dasselbe ist bei ihm eine homogene Funktion zweiter Ordnung der sechs Größen $x_x, \ldots, x_y, \ldots$ und der doppelten Rotationskomponenten

(93) $$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \cdots$$

24. J. Mac Cullagh [75]). Auf *Mac Cullagh*s geometrische Untersuchungen über die Wellenfläche ist schon oben hingewiesen. Seine dynamische Lichttheorie kann als eine Art Wirbeltheorie des Äthers bezeichnet werden, da nach ihr die Erscheinungen lediglich von den doppelten Rotationskomponenten ξ, η, ζ (93) abhängen. In dieser Hinsicht erweist sich *Mac Cullagh* als formaler Vorläufer der elektromagnetischen Lichttheorie, mit deren Formeln die seinen im wesentlichen übereinstimmen. Vgl. hierzu den Anfang des Art. V 22 von *W. Wien.* Hieraus erklärt sich dann die Überlegenheit der Mac Cullaghschen Theorie gegenüber denen seiner Vorgänger, während andererseits Mac Cullagh ebensowie Maxwell auf ein direktes mechanisches Verständnis der Optik verzichtet. Seine Differentialgleichungen haben die Form

(94) $$\delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}(Z) - \frac{\partial}{\partial z}(H),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wo Ξ, H, Z lineare Funktionen der ξ, η, ζ mit sechs Koeffizienten sind, die sich übrigens durch ein Potential Φ ausdrücken lassen:

(95) $$\Xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \cdots,$$

wo Φ die Form hat:

(96) $$2\,\Phi = A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2\,A_{12}\xi\eta + 2\,A_{13}\xi\zeta + 2\,A_{23}\eta\xi.$$

72) Ann. Phys. Chem. (2) 35 (1888).

73) Lomb. Ist. Rend. (2) 24 (1891).

74) London Math. Soc. Proc. 32, 1900.

75) The collected works of *J. Mac Cullagh*, ed. by *J. Jellet* and *S. Haughton*, Dublin, London 1880.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die *Fresnel*schen Gesetze der Kristalloptik, falls man, wie *Neumann*, die Schwingungen als in der Polarisationsebene erfolgend auffaßt.

Bemerkt werden mag, daß der *Mac Cullagh*sche Ausdruck für das Potential Φ nicht übereinstimmt mit dem Potential der durch die relative Verschiebung in dem elastischen Körper entstehenden Kräfte. Nach *G. Kirchhoff*[76]) kann man bei der Theorie von *Mac Cullagh* den Äther als einen elastischen Körper betrachten, der noch anderen Kräften unterworfen ist als den durch die Elastizität bedingten. *P. Volkmann*, der in seinen Vorlesungen über die Theorie des Lichts auf die Forschungen von *Mac Cullagh* näher eingeht, als es sonst in den Lehrbüchern üblich ist, spricht der Theorie einen mehr mathematischen als physikalischen Charakter zu (es sei denn, daß man seine Formeln elektromagnetisch deutet). Das Verhältnis der *Mac Cullagh*schen Formeln zu denen von *Cauchy* und *Green* hat *G. G. Stokes* näher entwickelt in einem Anhang zu seinem Report on double refraction[77]). Der Report selbst enthält eine kritische Beleuchtung der genannten und anderer Theorien. — Auch die Rotationspolarisation hat *Mac Cullagh* in den Kreis seiner Untersuchungen gezogen (vgl. Nr. **26**).

Für die Reflexionstheorie stellt *Mac Cullagh* folgende Grenzbedingungen auf, die wieder mit denen der elektromagnetischen Theorie übereinstimmen: Gleichheit der Schwingungskomponenten u, v, w und Gleichheit der Kraftkomponenten Ξ, H zu beiden Seiten der Grenzfläche $z = 0$. Die eine dieser Bedingungen, die Kontinuität von w, ist übrigens eine Folge der anderen, wenn man die Dichtigkeit in beiden Medien als gleich annimmt. Der Vorzug dieser Bedingungen ist, daß nicht, wie bei *Fresnel* und *Neumann*, die Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft nötig ist. Die Resultate stimmen, was zunächst die Reflexion an der Grenze zweier isotropen Medien betrifft, genau mit den *F. Neumann*schen überein, ebenso wie beide Forscher dieselbe, von der *Fresnel*schen abweichende Definition der Polarisationsebene zugrunde legen. Für die Amplitudengesetze der partiellen Reflexion hat *Mac Cullagh* eine interessante geometrische Konstruktion gegeben[78]): Man lege durch die Grenzamplitude der einfallenden Welle und die gebrochene Wellennormale eine Ebene, so gibt der Schnitt derselben mit der reflektierten, bzw. der gebrochenen

---

76) Berlin Abh. 1876; Gesammelte, Abh. p. 352.

77) Report. Brit. Ass. 1862.

78) Vgl. *P. Volkmann,* Vorles. üb. d. Theorie des Lichtes, p. 316; *H. Poincaré,* Math. Theorie des Lichtes, § 215.

Wellenebene die Richtung der reflektierten, bzw. der gebrochenen Grenzamplitude. Die Größe dieser beiden letzten Grenzamplituden erhält man durch Zerlegung der einfallenden Grenzamplitude nach den konstruierten Richtungen.

Mac Cullagh hat seine Untersuchungen sodann auf die Kristallreflexion ausgedehnt und ist dabei wesentlich zu denselben Resultaten wie *F. Neumann* gelangt. Muß man auch hinsichtlich dieser Resultate *Neumann*, dessen große Abhandlung schon 1835 der Berliner Akademie vorgelegt ist, unbedingt die Priorität zusprechen[79]), so ist doch die Ableitung, die *Mac Cullagh* gibt, durchaus eigenartig. Durch Einführung des Begriffs der *uniradialen Schwingungsazimute*, d. h. derjenigen Schwingungsazimute der einfallenden Welle, für welche die Intensität einer der gebrochenen Wellen verschwindet, vereinfacht er die Rechnung und macht die Resultate anschaulich. Auch hier gibt er eine einfache geometrische Interpretation der Amplitudengesetze[80]).

Auch die Theorie der Totalreflexion hat *Mac Cullagh* entwickelt, doch beschränken sich seine Veröffentlichungen darüber auf einige kurze Notizen, die lediglich die Resultate ohne Ableitung wiedergeben. Nach den in diesen Notizen enthaltenen Andeutungen hat *P. Volkmann*[81]) die Theorie ausgearbeitet, und zwar sowohl für isotrope, als für anisotrope Medien. Dabei tritt, wie in *Mac Cullagh*s Originalarbeiten, die anschauliche geometrische Deutung des Vorgangs zutage.

25. G. Lamé. *Lamé*, dessen erste Arbeiten bis 1834 zurückreichen[82]), hat die Resultate seiner Forschungen in abgerundeter Form in seinen Leçons sur la théorie mathémat. de l'élasticité des corps solides[83]), Vorlesungen 17—24, dargestellt. *Lamé* geht von den allgemeinen elastischen Gleichungen (91) aus, und zwar ohne Annahme eines Potentials der elastischen Kräfte, so daß die Ausdrücke der elastischen Kräfte durch die $x_x, \ldots, x_y, \ldots$ 36 Konstante enthalten. Es werden diejenigen partikulären Integrale der Gleichungen untersucht, die ebenen Wellen entsprechen. Durch die Bedingung, daß den Beobachtungen entsprechend für jede Fortpflanzungsrichtung einer Welle sich *zwei* mögliche Schwingungsrichtungen ergeben müssen, wird diese Konstantenzahl auf 12 reduziert. Weiter wird die Annahme

79) Vgl. *F. Neumann*, Gesammelte Werke 2, p. 551 ff.

80) Vgl. *P. Volkmann*, § 92; *H. Poincaré*, § 223; vgl. auch *A. Cornu*, Paris C. R. 60 (1865), 62 (1866); Ann. chim. phys. (4) 11 (1868).

81) Gött. Nachr. 1885, 1886; Ann. Phys. Chem. (2) 29 (1886); Vorles. üb. d. Theorie des Lichts, § 98 ff.

82) Ann. chim. phys. (2) 55 u. 57 (1834).

83) Paris 1852.

eingeführt, daß die räumliche Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ verschwindet und damit die longitudinalen Wellen fortfallen; dadurch gehen von den 12 Konstanten 6 weitere verloren, die übrig bleibenden 6 endlich reduzieren sich durch eine zweckmäßige Wahl des Koordinatensystems auf 3. Die reduzierten Gleichungen haben die Form

$$(97)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - b^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

nebst zwei anderen, die durch zyklische Vertauschung von u, v, w sowie von a, b, c entstehen. Die partikulären Lösungen dieser Gleichungen, die ebenen Wellen entsprechen, führen genau auf die *Fresnel*schen Gesetze, falls man die Polarisationsebene mit *Neumann* als die Ebene definiert, die durch Wellennormale und Schwingungsrichtung gelegt ist.

Übrigens ergeben sich die *Lamé*schen Gleichungen aus dem *Green*schen Potentialausdruck (92), wenn man darin

$$G = 0,\quad P = Q = R = 0,\quad L = a^2,\quad M = b^2,\quad N = c^2$$

setzt, ebenso aus dem *Mac Cullagh*schen Potentialausdruck (96), wenn darin $A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$ wird.

Lamé hat weiter auch diejenigen partikulären Integrale seiner Differentialgleichungen aufgestellt, welche die sich von einem Punkte aus ausbreitenden Wellen darstellen. Indes werden diese Integrale in den optischen Achsen unbestimmt[84]).

Die allgemeine Lösung der *Lamé*schen Gleichungen (ohne Beschränkung auf ebene oder sich von einem Punkte aus ausbreitende Wellen) ist auf Grund einer von *C. Weierstraß* herrührenden, vorher noch nicht veröffentlichten Integrationsmethode von Frau *S. von Kowalevski* aufgestellt[85]).

Nach *V. Volterra*[86]) sind weder die *Lamé*schen partikulären, noch die *Kowalevski*schen allgemeinen Lösungen eindeutige Funktionen des Ortes. Deshalb leitet *Volterra* andere Ausdrücke für die allgemeinen Integrale der *Lamé*schen Gleichungen ab, Ausdrücke, die allerdings

---

84) Die Frage, welche Form die Lösungen der Elastizitätsgleichungen haben müssen, um transversale Schwingungen darzustellen, die sich von einem Erschütterungspunkte aus fortpflanzen, ist später auch von *A. Brill* behandelt [Math. Ann. 1 (1869), p. 225], und zwar sowohl für isotrope, als für nichtisotrope Körper. Für letztere bilden die *Lamé*schen Gleichungen den Ausgangspunkt. — Für isotrope Medien ist dieselbe Frage von *W. Voigt* (J. f. Math. 89, 1880) und *G. Kirchhoff* (J. f. Math. 90, 1880; Gesammelte Abh., Nachtrag, p. 17) untersucht.

85) Acta math. 6 (1885), p. 249—404.

86) Acta math. 16 (1892), p. 153—215.

nicht für den ganzen Raum gelten, sondern nur für $y \geqq 0$. Die *Volterra*sche Arbeit enthält ferner die Transformation der *Lamé*schen Gleichungen auf beliebige Koordinaten.

IV. Verschiedene Modifikationen der älteren Lichttheorien.

26. C. Neumann. *C. Neumanns* optische Arbeiten[87]) betreffen 1) eine wesentliche Modifikation der Lichttheorie, 2) eine mechanische Theorie der magnetischen Drehung der Polarisationsebene und, damit verbunden, eine neue Theorie der natürlichen Drehung.

a) Die *C. Neumannsche Modifikation der allgemeinen Theorie* besteht darin, daß er annimmt, die Dichtigkeit des Äthers sei zwar bei Einwirkung starker Kräfte veränderlich, werde aber durch so schwache Kräfte, wie sie bei der Lichtbewegung in Frage kommen, nicht verändert, so daß man hier den Äther als inkompressibel ansehen kann. Er führt aber die Inkompressibilitätsbedingung nicht wie *Lamé* nachträglich in die Differentialgleichungen ein, sondern berücksichtigt diese Bedingung schon bei der Ableitung ihrer Gleichungen. Er begründet das damit, daß die *Lamé*schen Gleichungen nicht damit vereinbar sind, daß der Anfangszustand der Bewegung des Mediums ganz beliebig angenommen werden kann. *C. Neumann* leitet für die Lichtschwingungen folgende Gleichungen ab:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X + \frac{1}{\delta}\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \tag{98}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

in denen die Dichtigkeit δ irgend eine Funktion der Koordinaten ist; die Gleichungen enthalten neben u, v, w eine vierte Unbekannte Δ, den durch die Bewegung entstehenden Druck. Dafür kommt aber zu jenen drei Gleichungen noch die Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

hinzu.

Für die Komponenten der zwischen den Molekülen wirkenden Anziehungskräfte $X, \ldots$ setzt *C. Neumann* unter der Voraussetzung, daß nur solche Kristalle betrachtet werden, die durch drei aufeinander senkrechte Ebenen symmetrisch teilbar sind, die allgemeinen Ausdrücke

87) Explicare tentatur, quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur, Habilitationsschrift Halle a. S. 1858. Die magnetische Drehung der Polorisationsebene des Lichtes, Halle a. S. 1863. Über die Ätherbewegung in Kristallen, Math. Ann. 1 (1869), p. 325—358; 2 (1870), p. 182—186.

$$(99)\quad \begin{cases} X = (h_{11}+h_1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (h_{12}+h_2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h_{13}+h_3)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \qquad + 2h_{12}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2h_{13}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{h}_1 u, \end{cases}$$

und ähnlich für Y und Z. Integriert man dann wieder die Differentialgleichungen für den Fall ebener Wellen, so ergeben sich zwei genau transversale Wellen. Fügt man noch die Annahme hinzu, daß die Einwirkung der ponderablen Moleküle auf die Ätherteilchen (die in den Ausdrücken für X in den Koeffizienten $\mathfrak{h}$ enthalten sind) gleich Null ist, so sind die Vibrationsrichtungen beider Wellen aufeinander senkrecht. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Wellen ergibt sich eine quadratische Gleichung; um diese auf eine einfache Form zu bringen, werden zwischen den 6 Koeffizienten $h_{11}, h_{12}, \ldots$ die Relationen angenommen:

$$(100)\quad \begin{cases} h_{11} + h_{22} = 6h_{12}, \\ h_{33} + h_{11} = 6h_{31}, \\ h_{22} + h_{33} = 6h_{23}. \end{cases}$$

Die Gleichung für V nimmt dann, wenn α, β, γ die Richtungskosinus der Wellennormale gegen die Kristallachsen sind, folgende Form an:

$$(101)\quad 0 = \frac{\alpha^2}{V^2 - (\bar{p} + h_{23})} + \frac{\beta^2}{V^2 - (\bar{p} + h_{31})} + \frac{\gamma^2}{V^2 - (\bar{p} + h_{12})},$$

wo

$$(101\text{a})\quad \bar{p} = h_1\alpha^2 + h_2\beta^2 + h_3\gamma^2$$

ist.

Nimmt man dazu die Formeln, die die Schwingungsrichtungen der beiden Wellen bestimmen, so stellen diese Formeln genau die *Fresnel*schen Gesetze dar [vgl. Gl. (31)], falls die Koeffizienten h_1, h_2, h_3 einander gleich sind, und falls man die *F. Neumann*sche Definition der Polarisationsebene zugrunde legt.

C. Neumann untersucht die in bezug auf die Koeffizienten h_{11}, $h_{12}, \ldots$ gemachten Annahmen näher, indem er auf die Bedeutung jener Koeffizienten zurückgeht. Ein Teil der angenommenen Relationen ergibt sich als Folge der Vorstellung, daß die periodische Änderung der Dichtigkeit δ (die von der Einwirkung der ponderablen Moleküle herrührt) nur sehr gering ist, so daß man für die h, die periodische Funktionen des Raumes sind, ihre konstanten Mittelwerte setzen kann. Dagegen läßt sich die Gleichheit der Koeffizienten h_1, h_2, h_3 aus jener Grundvorstellung nicht ableiten, wenn sie mit ihr auch nicht im Widerspruch zu stehen scheint[88]). Durch eine andere Annahme über

88) Eine etwas modifizierte Darstellung der *C. Neumann*schen Theorie findet man in *F. Neumanns* Vorlesungen über Elastizitätstheorie, Abschn. 14.

die h ergeben sich für V und für die Polarisationsrichtung ebenfalls die *Fresnel*schen Gesetze; nur muß man jetzt die *Fresnel*sche Definition der Polarisationsebene zugrunde legen[89]).

b) Was die *natürliche Drehung der Polarisationsebene* betrifft, so hatte bereits *Mac Cullagh* erkannt, welche Modifikation die Differentialgleichungen der doppelten Strahlenbrechung erfahren müssen, um die Lichtbewegung im Bergkristall darzustellen, und *Cauchy* hatte die analogen Zusatzglieder für zweiachsige Kristalle gefunden. Bei beiden fehlt eine rationelle Begründung, so daß ihre Formeln nur den Wert empirischer Formeln haben. *C. Neumann* fand nun[90]): Wenn man die Annahme macht, daß die relative Verrückung eines Ätherteilchens in bezug auf ein anderes auf dieses letztere ebenso einwirkt, wie das Element eines elektrischen Stromes auf einen Magnetpol, so ergeben sich Kräfte, deren Komponenten, falls u, v, w die Verrückungen eines Teilchens sind, die Werte haben

$$C\frac{\partial v}{\partial z} - B\frac{\partial w}{\partial y}, \quad A\frac{\partial w}{\partial x} - C\frac{\partial u}{\partial z}, \quad B\frac{\partial u}{\partial y} - A\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{102}$$

Fügt man diese Kräfte zu denen hinzu, die sich durch die Annahme ergeben, daß die Wirkung zwischen zwei Ätherteilchen nur von ihrer Entfernung abhängt, so erhält man Differentialgleichungen, aus denen die Erscheinungen der Rotationspolarisation in einachsigen Kristallen folgen. Die in Rede stehenden Differentialgleichungen sind allgemeiner als die *Mac Cullagh*schen, unterscheiden sich aber von den letzteren dadurch, daß sie die ersten Ableitungen von u, v, w nach den Koordinaten enthalten, die *Mac Cullagh*schen die dritten Ableitungen. Doch ist dieser Unterschied unwesentlich, da es nur darauf ankommt, das Auftreten von Ableitungen ungerader Ordnung zu motivieren.

Dieselbe Annahme zur Erklärung der Zirkularpolarisation wie *C. Neumann* hat später auch *A. Clebsch*[91]) gemacht.

c) Weiter hat es *C. Neumann* unternommen, die von *Airy*[92]) rein empirisch aufgestellten Differentialgleichungen für diejenigen Ätherbewegungen, welche der magnetischen Drehung der Polarisationsebene entsprechen, rationell zu begründen. Der Theorie liegt die

---

89) *B. de Saint-Venant* hat in den Paris C. R. 57 (1863) die obige Gleichung (101) für V^2 aus der *Cauchy*schen Theorie abgeleitet und ebenfalls die Bedingungen untersucht, unter denen diese allgemeinere Gleichung in die spezielle *Fresnel*sche übergeht. Er findet die Annahme $h_1 = h_2 = h_3$ natürlicher, als die Annahme, die auf die *Fresnel*sche Definition der Polarisationsebene führt.

90) Vgl. die in Anm. 87) angeführten Schriften.

91) Theorie der zirkular polarisierenden Medien J. f. Math. 57 (1860).

92) *G. B. Airy*, Phil. Mag. (3) 28 (1846), Ann. Phys. Chem. 70 (1847).

Anschauung zugrunde, daß der in den Körpern befindliche Äther nicht direkt durch die Einwirkung der äußeren magnetischen Kraft in Bewegung versetzt wird, daß vielmehr diese Kraft zunächst in den einzelnen Körpermolekülen geschlossene Molekularströme induziert, die ihrerseits auf die zunächst gelegenen Ätherteilchen wirken (eine Annahme, die durchaus dem heutigen Standpunkte der Elektronentheorie entspricht). Betreffs des Gesetzes, nach dem diese Wirkung erfolgt, wird die Hypothese aufgestellt, daß die von einem elektrischen Teilchen μ auf ein Ätherteilchen m ausgeübte Kraft gleich

$$\mu m \left\{-\frac{d\Phi(r)}{dr} + G\frac{d\Phi(r)}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\,G\,\Phi(r)\frac{d^2r}{dt^2}\right\} \tag{103}$$

ist, wenn r die Entfernung beider Teilchen ist. In dieser Formel, die für $\Phi = \frac{1}{r}$ in das *Weber*sche Gesetz für die Einwirkung zweier bewegten elektrischen Teilchen übergeht, ist $\Phi(r)$ eine Funktion, die für kleine r sehr viel größer als $\frac{1}{r}$ ist. Aus jenem Gesetze ergibt sich zunächst die Kraft, welche ein sehr kleiner geschlossener elektrischer Strom auf ein Ätherteilchen ausübt, daraus weiter die Einwirkung aller in einem gleichförmig magnetisierten Körper vorhandenen Molekularströme auf den Lichtäther. Bei der Berechnung der letztgenannten Einwirkung kann man sich wegen der Annahme über die Größe von $\Phi(r)$ auf die Molekularströme beschränken, die innerhalb einer sehr kleinen, um das Ätherteilchen beschriebenen Kugel liegen. Dadurch werden die auf dieses Teilchen ausgeübten Kräfte von der Gestalt des Körpers unabhängig. Diese Kräfte verschwinden ferner, wenn die Geschwindigkeit des Äthers gleich Null ist; sie können also in dem ruhenden Äther keine Bewegung hervorbringen, sondern nur eine vorhandene Bewegung modifizieren.

Fügt man diese Kräfte zu den elastischen Molekularkräften hinzu, so ergeben sich für den Fall, daß der betrachtete Körper durch eine konstante Kraft in einen gleichförmigen magnetischen Zustand versetzt ist, für die Lichtbewegung Differentialgleichungen, deren Lösungen man als eine Superposition von zwei zirkular polarisierten Wellen ansehen kann, und zwar verlaufen die kreisförmigen Bewegungen in entgegengesetztem Sinne, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschieden sind. Daraus ergibt sich die Drehung der Polarisationsebene, die ein linear polarisierter Lichtstrahl beim Durchgang durch den Körper erleidet.

27. Ch. Briot, É. Sarrau. *Briot*, der sich in seinen analytischen Entwicklungen eng an *Cauchy* anschließt[93]), verwirft dessen Erklärung

93) *Ch. Briot*, Essais sur la théorie mathématique de la lumière, Paris 1864;

der Dispersion und zwar hauptsächlich deshalb, weil die Dispersion im leeren Raume fehlt. Als Grund der Dispersion nimmt er die Einwirkung der ponderablen Moleküle auf die Ätherteilchen an. Diese Einwirkung kann eine doppelte sein. Einmal kann durch die Einwirkung der ponderablen Teilchen die Anordnung der Ätherteilchen eine andere werden als im freien Äther, zweitens aber kommen zu den Kräften, die die Ätherteilchen bei einer Verrückung aufeinander ausüben, noch neue, von den ponderablen Molekülen herrührende Kräfte hinzu. *Briot* unterwirft zunächst diese Kräfte für sich allein (ohne Annahme einer veränderten Anordnung der Ätherteilchen) der Rechnung, indem er annimmt, daß bei der Lichtbewegung die ponderablen Moleküle in Ruhe bleiben. Er findet, daß infolge jener Kräfte die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V von der Wellenlänge λ abhängt, und zwar mittels einer Gleichung von der Form

(104) $$V^2 = a + b\lambda^2.$$ [94])

Hiernach müßte, da b positiv ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Wellenlänge wachsen, was den Beobachtungen widerspricht. Die direkte Einwirkung der Körpermoleküle auf den Äther kann daher nicht als Grund der Dispersion angesehen werden. Nebenbei findet *Briot* noch, daß, wenn die in Rede stehende Wirkung keinen Einfluß auf V haben, also $b = 0$ sein soll, die Ätherteilchen von den Körpermolekülen nach dem *Newton*schen Gesetz angezogen werden müssen. Was die andere Möglichkeit betrifft, nämlich die durch die Moleküle bewirkte Abänderung in der Anordnung der Ätherteilchen, denkt sich *Briot* den von Äther erfüllten Raum zwischen der ponderablen Materie als aus Zellen bestehend, die einander kongruent sind, während innerhalb jeder einzelnen Zelle die Dichtigkeit etwas variiert. Die Dichtigkeit des Äthers wird demnach eine periodische Funktion der Koordinaten. In den Differentialgleichungen für die Ätherschwingungen sind infolgedessen die Koeffizienten nicht mehr konstant, sondern periodische Funktionen der Koordinaten. Diejenigen Integrale dieser Differentialgleichungen, welche ebenen Schwingungen entsprechen, bestehen dann aus zwei Teilen, einem periodischen Hauptteil oder mittleren Teil und einem Teil, der dieselbe Periodizität besitzt

---

deutsch von *W. Klinkerfues* 1867. Die erste Hälfte der *Briot*schen Schrift enthält Modifikationen der *Cauchy*schen Theorie der Lichtbewegung in Kristallen. Auch *Briots* Arbeiten über die Reflexion, Journ. de math. (2) 12, 13 (1866, 1867) stehen ganz auf *Cauchy*schem Boden.

94) Von neueren Autoren wird ein λ^2 direkt proportionales Glied der Dispersionsformel bisweilen als *Briot*sches Glied bezeichnet.

wie die Dichtigkeit, also innerhalb der einzelnen Zellen variiert. Da der Mittelwert des zweiten Teiles verschwindet, hat dieser keinen merklichen Einfluß auf das Wesen der Erscheinung. Trotzdem darf von ihm nicht abstrahiert werden, da die Koeffizienten der Gleichungen, welche den Hauptteil, die mittlere Bewegung, ergeben, durch die periodischen Glieder modifiziert werden. Der Einfluß dieser Glieder ist der, daß das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit um eine konstante Größe und um einen variablen Term verändert wird. Letzterer ist dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional, erzeugt also die Dispersion. Für isotrope Medien folgt dann leicht die *Christoffel*sche Dispersionsformel (s. Gl. (80)).

Briot zieht aus seinen Formeln noch den Schluß, daß wenn das Glied, das die Dispersion im freien Äther hervorruft, verschwinden soll, die Äthermoleküle sich mit einer Kraft abstoßen, die umgekehrt proportional der sechsten Potenz der Entfernung ist.

Auf Grund seiner Vorstellungen über die durch die Wirkung der ponderablen Materie hervorgebrachten periodischen Ungleichheiten der Ätherdichtigkeit sucht *Briot* auch die Rotationspolarisation der asymmetrischen Medien zu erklären. Während in unbegrenzten symmetrischen Medien die Verteilung der Ätherteilchen auf parallelen Linien die gleiche ist, treten hier an Stelle der geraden Linien Spiralen. Speziell beim Quarz nimmt *Briot* eine Verteilung der Ätherteilchen in Spiralen an, deren Achsen auf der Kristallachse senkrecht stehen. Aus dieser Verteilung leitet er das Resultat ab, daß Lichtstrahlen, die der Kristallachse parallel sind, zirkular polarisiert sind; für andere Richtungen des Strahls wird der drehende Effekt der Ätheranordnung durch die gleichzeitig stattfindende Doppelbrechung modifiziert, wodurch elliptische Schwingungen entstehen, die für Strahlen senkrecht zur Achse in nahezu geradlinige Schwingungen übergehen. — Drehende Lösungen werden als isotrope Medien betrachtet, in denen asymmetrische kleine Kristalle schwimmen, die nach allen möglichen Richtungen orientiert sind. In diesen Medien pflanzen sich nach *allen* Richtungen zwei zirkulare Schwingungen von entgegengesetzter Drehung mit verschiedener Geschwindigkeit fort. Die Drehung der Polarisationsebene durch derartige Medien findet *Briot* in erster Näherung dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional.

An die *Briot*sche Anschauung über die periodisch veränderliche Dichtigkeit des Äthers knüpft auch die Theorie von *É. Sarrau*[95]) an,

95) Paris C. R. 60 (1865); Journ. de math. (2) 12, 13 (1867, 1868).

während sie gleichzeitig, abweichend von *Briot* und *Cauchy*, die Elastizität des Äthers sowohl von Richtung zu Richtung, als von Mittel zu Mittel als konstant annimmt. Ohne über die Form der Periodizität der Dichtigkeitsänderung eine Annahme zu machen, werden aus den Differentialgleichungen, die die variable Dichtigkeit enthalten, solche mit konstanten Koeffizienten hergeleitet, die den mittleren Zustand darstellen. Diese Gleichungen enthalten neben den Ableitungen zweiter Ordnung nach den Koordinaten auch die dritter und vierter Ordnung. Bei Vernachlässigung der Glieder, die von höheren Ableitungen als der zweiten abhängen, und damit der Dispersion, ergibt die Theorie für die holoedrischen Kristalle, daß die Lichtschwingungen linear sind, in der durch Strahl und Wellennormale gehenden Ebene liegen und auf dem Strahl senkrecht stehen; sie sind daher auch zu den Schwingungen, die die *Neumann*sche Theorie ergibt, senkrecht, fallen aber für nichtisotrope Medien nicht mit der *Fresnel*schen Schwingungsrichtung zusammen, sind auch nicht rein transversal. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gilt das *Fresnel*sche Gesetz. Die Hinzunahme der vorher vernachlässigten Glieder ermöglicht auch die Erklärung der Rotationspolarisation der asymmetrischen Kristalle.

Die Theorien von *Briot* und *Sarrau*, gegen die *B. de Saint-Venant* in einer eingehenden Kritik[96]) erhebliche Bedenken geltend gemacht hat, erfordern, um zum Ziel zu gelangen, sehr umständliche und wenig übersichtliche Rechnungen. Eine vereinfachte Darstellung des Wesens beider Theorien findet man bei *H. Poincaré*[97]).

28. L. Lorenz, K. von der Mühll. Die *Jamin*schen Beobachtungen, wonach die *Fresnel*schen Formeln in der Nähe des Polarisationswinkels aufhören mit der Erfahrung übereinzustimmen, hat *L. Lorenz*[98]) in Ausführung einer *Cauchy*schen Idee (vgl. Nr. 18) dadurch zu erklären gesucht, daß er annahm, der Übergang zwischen den beiden Medien, an deren Grenze die Reflexion und Brechung stattfindet, sei kein plötzlicher, sondern werde durch eine sehr dünne Schicht vermittelt, in welcher sich die Dichtigkeit und die Elastizität des Äthers stetig ändern. In zwei verschiedenen Ansätzen hat *Lorenz* die Wirkung einer solchen Übergangsschicht der Rechnung zu unterwerfen gesucht. Doch sind seine Formeln teilweise nur mangelhaft

96) Ann. chim. phys. (4) 25 (1872); auch als besondere Schrift erschienen, Paris 1872.

97) Mathemat. Theorie des Lichtes, deutsch von *E. Gumlich* und *W. Jäger*, Berlin 1894.

98) Ann. Phys. Chem. 111 (1860), p. 460; 114 (1861), p. 238.

begründet, und die Rechnungen enthalten unzulässige Vernachlässigungen[99]).

Ferner hat *Lorenz* auch den Versuch unternommen, die Doppelbrechung dadurch zu erklären, daß er die anisotropen Medien als aus sehr dünnen isotropen Schichten bestehend auffaßt, deren optisches Verhalten von Schicht zu Schicht sich stetig ändert[100]). Doch hat diese Auffassung nirgends Anklang gefunden.

Eine weitere Arbeit von *Lorenz* wird im letzten Abschnitt Erwähnung finden, während seine Dispersionstheorie in dem Artikel von *W. Wien* besprochen werden soll.

Mathematisch besonders sorgsam, aber ohne greifbaren physikalischen Erfolg ist die Behandlung der Reflexion bei *K. Von der Mühll*[101]). *Von der Mühll* behandelt zuerst die Reflexion ohne Annahme einer Übergangsschicht. Er legt dabei für die Lichtbewegung im Innern der Medien die Gleichungen von *C. Neumann* zugrunde, nimmt also mit diesem an, daß bei den Lichtschwingungen der Äther als inkompressibel zu betrachten ist (vgl. Nr. **26**a), während doch seine Dichtigkeit in verschiedenen Medien verschieden ist, ebenso seine Elastizität. Die Grenzbedingungen endlich bilden bei ihm die vollständigen Bedingungen der Elastizitätstheorie, Gleichheit der Verrückungskomponenten und der Druckkomponenten an der Grenzfläche. Man kann allen sechs Bedingungen durch gewisse partikuläre Integrale der allgemeinen Gleichungen genügen, die neben trigonometrischen auch Exponential-Funktionen enthalten. Die aus diesem Ansatz resultierenden Formeln können aber durch keine Annahme über das Verhältnis der Dichtigkeit beider Medien mit der Erfahrung in Einklang gebracht werden.

Infolgedessen wendet sich *Von der Mühll* der Annahme einer Übergangsschicht zu. Er berechnet den Effekt dieser Schicht auf doppelte Weise, einmal indem er einen Übergang von dem einen Medium zum anderen durch unendlich viele, unendlich dünne Schichten voraussetzt und die einzelnen Schichten als homogen behandelt, dann durch direkte Annahme einer kontinuierlichen Änderung von Elastizität und Dichtigkeit. Als Resultat der sehr umfangreichen Rechnungen ergeben sich für die Intensität des reflektierten und ge-

---

99) Vgl. die Besprechung der Arbeiten in den Fortschr. d. Physik durch *E. B. Christoffel.*

100) Ann. Phys. Chem. 118 (1863), p. 111.

101) Über die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze unkristallinisher Medien, Math. Ann. 5 (1872) p. 471—559; ein Teil der Resultate ist schon in der Dissertation des Verfassers, Königsberg 1866, veröffentlicht.

brochenen Strahles konvergente Reihen, deren einzelne Glieder die Form von vielfachen Integralen haben. Die Annahme, daß die Dicke der Übergangsschicht gegen die Wellenlänge verschwindend klein ist, vereinfacht zwar die Resultate, führt aber zu denselben unzulässigen Formeln wie die Annahme eines plötzlichen Übergangs. Man muß daher annehmen, daß die Dicke der Übergangsschicht nicht sehr klein gegen die Wellenlänge ist. Für diesen Fall aber sind die Resultate so kompliziert, daß sie eine direkte Vergleichung mit den Beobachtungen nicht zulassen.

In einer späteren Arbeit[102]) hat *Von der Mühll* noch einen Weg angedeutet, wie man die Übergangsschicht behandeln könne, ohne die Bedingung der Inkompressibilität zu Hilfe zu nehmen. Es würden dann in der Übergangsschicht longitudinale Wellen möglich sein, während über die verfügbaren Größen so zu bestimmen wäre, daß außerhalb der Übergangsschicht die longitudinalen Wellen verschwinden. Die diesem Vorschlage entsprechenden Rechnungen sind später von *F. H. Wehner* durchgeführt[103]). Die Anpassung der Endformeln an die Beobachtungen stößt ebenso wie bei *Von der Mühll* auf große Schwierigkeiten.

Die Untersuchungen *Von der Mühll*s sind daher für die Optik völlig unfruchtbar geblieben.

29. J. W. Strutt (Lord Rayleigh). Die *Fresnel*sche Theorie (und ebenso die Theorien von *Cauchy* und *Green*) enthält einen Widerspruch in sich, und zwar liegt derselbe darin, daß bei der Reflexion die Elastizität des Äthers in allen isotropen Medien als gleich angenommen wird, während bei der Behandlung der Doppelbrechung die Elastizität des Äthers in Kristallen in verschiedenen Richtungen als verschieden betrachtet werden muß. Diesen Widerspruch sucht die Theorie von *Strutt*[104]) durch die Annahme zu beseitigen, daß der Einfluß der wägbaren Materie auf den Äther nicht darin bestehe, dessen Elastizitätskraft zu ändern, sondern sich als eine Art Widerstand äußere, analog dem hydrodynamischen Widerstande. Diesen Widerstand bei Kristallen als nach verschiedenen Richtungen verschieden anzunehmen, liegt in der Natur der Sache. Der Widerstand hängt nun von der Beschleunigung ab, und durch ihn werden in den Hauptgleichungen die Koeffizienten der zweiten Ableitungen der Verrückungen nach der Zeit geändert, nicht aber die Koeffizienten der Ableitungen nach den

102) Über *Greens* Theorie der Reflexion usw., Math. Ann. 27 (1886), p. 506—514.
103) Arch. Math. Phys. (2) 9 (1890), p. 337—374.
104) Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 519.

Koordinaten. Auf die Hauptachsen des als symmetrisch angenommenen Kristalls bezogen, lauten die Hauptgleichungen, die ähnlich wie bei *Green* abgeleitet werden:

$$(105)\qquad \begin{cases} \varrho_x \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A-B)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + B\Delta u, \\ \varrho_y \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (A-B)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + B\Delta v, \\ \varrho_z \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (A-B)\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + B\Delta w. \end{cases}$$

Man kann diese Gleichungen deuten als die eines Mediums, das nach verschiedenen Richtungen gleiche Elastizität, aber verschiedene Dichtigkeit besitzt. Durch Anwendung der Gleichungen auf ebene transversale Wellen findet *Strutt* für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V an Stelle der *Fresnel*schen Gleichung (31) die folgende:

$$(106)\qquad \frac{\alpha^2}{V^2\varrho_x - B} + \frac{\beta^2}{V^2\varrho_y - B} + \frac{\gamma^2}{V^2\varrho_z - B} = 0,$$

oder, wenn a, b, c die Hauptwerte von V bezeichnen:

$$(106\text{a})\qquad \frac{\alpha^2}{\frac{V^2}{a^2} - 1} + \frac{\beta^2}{\frac{V^2}{b^2} - 1} + \frac{\gamma^2}{\frac{V^2}{c^2} - 1} = 0.$$

An Stelle des Ellipsoids (33), dessen mit der Wellenebene paralleler Zentralschnitt in der *Fresnel*schen Theorie durch seine Achsenrichtungen die Schwingungsrichtungen, durch seine Achsenlängen die reziproken Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden zugehörigen Wellen bestimmt, tritt hier das Ellipsoid

$$(107)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ein Resultat, das schon *G. G. Stokes*[105]) als Ergebnis einer von der *Fresnel*schen verschiedenen physikalischen Theorie der Doppelbrechung hingestellt hatte.

Die Reflexionstheorie von *Strutt*[106]) ist im wesentlichen die *Green*sche, nur daß *Strutt* von vornherein sowohl die Dichtigkeit, als die Elastizität in beiden Mitteln als verschieden annimmt und erst in den Schlußresultaten die Annahme einführt, daß nur eine der beiden Größen in beiden Medien denselben Wert hat. Ist die Dichtigkeit gleich, die Elastizität verschieden, so würden sich für den Fall, daß die Brechungsverhältnisse beider Medien nur wenig verschieden sind, Folgerungen ergeben, die aller Erfahrung widersprechen. Daher verwirft *Strutt*

105) Report Brit. Ass. 1862.

106) Phil. Mag. (4) 42 (1871), p. 81.

diese Annahme und glaubt daraus den Schluß ziehen zu können, daß nur die *Fresnel*sche Definition der Polarisationsebene zulässig sei.

Die *Haughton*sche Modifikation der *Green*schen Theorie (s. Nr. 23). hält *Strutt* deshalb für bemerkenswert, weil dadurch in die Formeln für die Reflexion zwei Konstante anstelle einer eingeführt würden. Dadurch könne man auch von den *Jamin*schen Beobachtungen Rechenschaft geben.

Strutt versucht auch den Einfluß einer Übergangsschicht auf die Reflexion in Rechnung zu ziehen, indem er die Übergangsschicht als von mittlerer Dichtigkeit annimmt. Dadurch gelangt er zu Formeln, die mit den Beobachtungen besser übereinstimmen[107]), als die der übrigen Theorien.

In einer dritten Arbeit[108]) hat *Strutt* die Lichtzerstreuung durch kleine Körper untersucht. Auch hier ist er zu Resultaten, die der Erfahrung entsprechen, nur unter der Voraussetzung gelangt, daß die Dichtigkeit des Äthers in verschiedenen Medien verschieden ist.

Für die Metallreflexion hat *Strutt* die *Cauchy*schen Formeln hergeleitet[109]). Er geht dabei für die Lichtbewegung in Metallen von einer Gleichung aus, die sich von der Gleichung für durchsichtige isotrope Medien durch Hinzufügung eines der Geschwindigkeit proportionalen Gliedes unterscheidet.

Für die *Strutt*sche Theorie spricht, daß in ihr die verschiedensten Erscheinungen durch ein und dieselbe Grundannahme (Verschiedenheit allein der Ätherdichtigkeit) ihre Erklärung finden. Auf die äußerst zahlreichen und wichtigen späteren optischen Arbeiten von *Strutt* braucht hier nicht eingegangen zu werden, da sie bereits auf dem Boden der elektromagnetischen Theorie stehen oder spezielle Fragen betreffen.

30. G. Kirchhoff. Von *G. Kirchhoff*s Arbeiten sind zwei optischen Inhalts. Die erste[110]) betrifft die Reflexion des Lichtes an Kristallflächen. Die Arbeit enthält in ihrem ersten Teil eine auf den *Green*schen Ausdruck des Potentials der elastischen Kräfte gestützte, sehr elegante und übersichtliche Ableitung der Formeln der Doppelbrechung. Abweichend von *Green* wird die *F. Neumann*sche Definition der Polarisationsebene zugrunde gelegt, während wiederum die Resul-

---

107) Nach *G. Lundquist* Ann. Phys. Chem. 152 (1874). Vgl. andererseits V*on der Mühll* Math. Ann. 27 (1886), p. 511 ff.

108) Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 447.

109) Phil. Mag. (4) 43 (1872), p. 321.

110) Berlin Abh. (1876), p. 57. *Kirchhoff,* Gesammelte Abhandl. p. 352.

tate von den *F. Neumann*schen sich dadurch unterscheiden, daß von den drei zu einer gegebenen Normalenrichtung gehörigen Wellen die eine genau longitudinal, die beiden anderen genau transversal sind. Für letztere ergeben sich die *Fresnel*schen Gesetze. Dabei wird eine neue, physikalisch anschauliche Definition des zu einer gegebenen Wellennormale gehörigen Strahles aufgestellt. Man denke sich in dem Mittel, in dem eine bestimmte ebene Lichtwelle fortschreitet, eine beliebige Ebene und berechne die Arbeit des (auf die Zeiteinheit und die Flächeneinheit bezogenen) Druckes, der auf ein Element dieser Ebene von der einen Seite her ausgeübt wird. Soll diese Arbeit verschwinden, so muß die betrachtete Ebene einer gewissen Richtung parallel sein; diese ist die Richtung des Strahles, der zu der betrachteten Lichtwelle gehört. Der so definierten Strahlenrichtung entspricht elektromagnetisch die Richtung des *Poynting*schen Vektors[110a]).

Was die Reflexionstheorie betrifft, so nimmt *Kirchhoff* mit *F. Neumann* an, daß in den verschiedenen Medien die Elastizität des Äthers verschieden, die Dichtigkeit aber dieselbe ist. Von den *Neumann*schen Grenzbedingungen behält er die der Kontinuität der drei Verschiebungskomponenten bei, vermeidet aber die Anwendung des Satzes der lebendigen Kraft durch die Annahme, daß auf die Grenzfläche außer den elastischen Druckkräften noch ein fremder Druck wirkt, den man sich etwa von den wägbaren Teilen beider Medien herrührend denken kann. Die elastischen Druckkräfte brauchen dann zu beiden Seiten der Grenzfläche nicht gleiche Werte zu haben. Die Bedingung, daß die Arbeit des genannten fremden Druckes verschwindet, liefert die vierte Grenzbedingung. Aus dieser Bedingung folgt zugleich, daß der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft gültig bleibt, nur daß er eben keine Grundannahme bildet. Die Resultate stimmen mit denen von *F. Neumann* und *Mac Cullagh* überein. Die Darstellung ist eleganter und übersichtlicher als bei den genannten Autoren. Es fehlen jedoch die vielen Anwendungen, die *F. Neumann* von seinen Formeln macht.

Die zweite Arbeit[111]) betrifft eine Präzisierung und Verallgemeine-

---

110a) *W. Voigt* hat [Ann. Phys. 18 (1905), p. 645; 19 (1906), p. 14] gezeigt, daß die in der *Kirchhoff*schen Definition liegende Deutung der Lichtstrahlen durch den Energiefluß nicht notwendig mit der älteren geometrischen (s. Nr. 8, S. 26) durch den Radiusvektor der Wellenfläche zusammenfällt.

111) Zur Theorie der Lichtstrahlen, Berlin Ber. 1882, p. 641; Ann. Phys. Chem. (2) 18 (1883), p. 663; Gesammelte Abhandl. Nachtrag, p. 22—54. Den wesentlichen Teil der Arbeit hat *Kirchhoff* schon viele Jahre vorher in seinen Vorlesungen vorgetragen.

rung des *Huygens*schen Prinzips und damit eine strengere Begründung der Theorie der Bildung der Lichtstrahlen, ihrer Reflexion und Brechung, sowie der Theorie der Beugungserscheinungen. Die Grundlage dieser Untersuchung bildet die Anwendung des *Green*schen Satzes auf solche Funktionen, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \tag{108}$$

genügen. Weiteres über diese Untersuchungen findet man in dem Artikel von *Wien.* Auch auf die sich an die *Kirchhoff*sche Arbeit anschließenden Abhandlungen von *G. A. Maggi*[112]), *E. Beltrami*[113]), *V. Volterra*[114]) und *A. Gutzmer*[115]) kann hier nur kurz hingewiesen werden.

31. Sir W. Thomson (Lord Kelvin). *Sir W. Thomson*[116]) hat eine Reflexionstheorie entwickelt, die die vollständigen Grenzbedingungen der Elastizität (Gleichheit der Verrückungs- und Druckkomponenten) berücksichtigt und die longitudinalen Wellen dadurch fortschafft, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich Null gesetzt wird. Damit müßte also für isotrope Medien (s. S. 40) die Konstante

$$\lambda + 2\mu = 0$$

sein, und zwar müßte diese Bedingung für die beiden Medien, die bei der Reflexion in Betracht kommen, erfüllt sein. Dem entsprechend wird beiden Medien gleiche Elastizität, aber verschiedene Dichtigkeit zugeschrieben. Das Verschwinden von $\lambda + 2\mu$ bedingt zwar eine unstabile („quasi-labile") Konstitution dss Äthers; nach *Thomson* bietet aber diese Annahme die einzige Möglichkeit, den vollständigen Grenzbedingungen durch rein transversale Wellen zu genügen. *Thomson* sucht sich auch ein Bild von der Konstitution eines Mediums zu machen, das die postulierten Eigenschaften des Äthers besitzt, und findet, daß homogener, luftfreier Schaum, der durch Adhäsion an einem Gefäß von dem Zusammenschwinden zurückgehalten wird, genau die Bedingung $\lambda + 2\mu = 0$ erfüllt. Auf Grund seiner Annahme findet er für die Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichtes genau die *Fresnel*schen Formeln[117]).

---

112) Ann. di mat. (2) 16 (1888).

113) Lombard. Ist. Rend. (2) 21 (1889); Rom Acc. Linc. Rend. (5) 1^1 (1892).

114) Rom Acc. Linc. Rend. 1^2 (1892).

115) J. Math. 114, 1895.

116) Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 414.

117) *Thomsons* Ableitung ist reproduziert in *P. Volkmanns* Vorlesungen über die Theorie des Lichtes, § 88. Dort ist auch gezeigt, wie man diese Theorie leicht so modifizieren kann, daß sie auf die *F. Neumann*schen Formeln führt.

Thomsons Theorie des kompressiblen Äthers ist von *R. T. Glazebrook* auf Doppelbrechung, Dispersion, einschließlich der anomalen Dispersion, Metallreflexion und auf die Lichtbewegung in bewegten Medien ausgedehnt[118]).

V. Theorien, die das Mitschwingen der ponderablen Teilchen in Rechnung ziehen.

32. J. Boussinesq. Wenn auch schon in früheren Theorien mehrfach eine Einwirkung der Körperteilchen auf den Äther angenommen war (vgl. z. B. *F. Neumanns* Dispersionstheorie, Nr. 21), so ist doch ein direktes Mitschwingen jener Teilchen zuerst von *Boussinesq* als Grundlage der Theorie herangezogen. In seiner Théorie nouvelle des ondes lumineuses[119]) geht *Boussinesq* von folgenden Grundanschauungen aus. Der Äther ist durchweg isotrop; seine Elastizität und seine Dichtigkeit sind in allen Medien die gleichen. Die optische Verschiedenheit der verschiedenen Medien rührt lediglich davon her, daß auch die ponderablen Teilchen mit in Bewegung geraten; sie werden aber wegen ihrer verhältnismäßig sehr großen Masse nur so wenig verschoben, daß die dadurch geweckten elastischen Kräfte der wägbaren Materie als verschwindend angesehen werden können. Die ponderablen Teilchen bewegen sich daher so, als wären sie ganz isoliert, und sie werden durch die periodische Ätherbewegung in synchrone Schwingungen versetzt. Dadurch, daß der Äther isotrop ist und ein Teil seiner elastischen Kraft zur Mitbewegung der ponderablen Teilchen verwendet wird, ergibt sich der Ansatz:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varrho_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta u, \tag{109}$$

wo u, v, w, wie stets, die Verrückungskomponenten des Äthers bezeichnen, U, V, W die der ponderablen Moleküle ϱ, ϱ_1 die Dichtigkeiten, θ die räumliche Dilatation des Äthers, Δ den bekannten *Laplace*schen Differentialausdruck. Da ferner die Schwingungen der Körpermoleküle isochron mit denen der Ätherteilchen erfolgen, so sind U, V, W Funktionen der u, v, w und ihrer Ableitung nach den Koordinaten, und zwar wegen der Kleinheit von u, v, w lineare Funktionen dieser Größen. Die Ableitungen von u, v, w nach der Zeit

118) Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 521.

119) Paris C. R. 65 (1867) p. 167; Journ. de math. (2) 13 (1868), p. 313. Die weiteren im Journ. de math. 13 (1868); 17 (1872); 18 (1873) sowie in den Ann. chim. (4) 30 (1873) veröffentlichten Arbeiten des Verfassers enthalten weitere Ausführungen der Theorie.

einzuführen, erweist sich nur bei den magneto-optischen Erscheinungen als erforderlich. Für isotrope Medien ergibt sich so der Ansatz

$$(110)\qquad U = Au + B\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \theta}{\partial x} + D\Delta u + \dots;$$

für Medien, die keine drehende Eigenschaft besitzen, ist $B = 0$ zu setzen. Zur Erklärung der Dispersion sind rechts noch die höheren Ableitungen von u, v, w hinzuzufügen. Zur Erklärung der Doppelbrechung sind, wenn die Koordinatenachsen den Hauptachsen parallel sind, die Konstanten A in den Gleichungen für U, V, W verschieden anzunehmen, während für isotrope Medien A in allen drei Gleichungen denselben Wert hat. In einem späteren Ansatz nimmt *Boussinesq* angenähert für U, V, W lineare Funktionen der drei Größen u, v, w. Hinsichtlich der Doppelbrechung hat übrigens *Poincaré*[120]) gezeigt, daß der Ansatz von *Boussinesq* zu denselben Folgerungen führt, wie der von *Sarrau* (s. Nr. 27).

Für die Reflexion fallen bei *Boussinesq* die Schwierigkeiten, welche sich der Anwendung des vollständigen Kontinuitätsprinzips bei der Annahme ungleicher Elastizität oder ungleicher Dichtigkeit entgegenstellen, von selbst fort, da der Äther in den beiden aneinander stoßenden Medien völlig gleiche Beschaffenheit hat. Dieser Umstand sowie auch, daß *Boussinesq* eine große Anzahl von Einzelerscheinungen nach einem einheitlichen Prinzip, nur durch geringe Modifikationen des Ansatzes, zu erklären vermag, hat *B. de Saint-Venant* veranlaßt, in seiner kritischen Besprechung der verschiedenen Lichttheorien[121]) die Theorie von *Boussinesq* für die am meisten einwandfreie erklären.

Später hat *Boussinesq*[122]) seine Theorie dahin modifiziert, daß er von dem Mitschwingen der Körperteile abstrahiert, dafür aber einen Widerstand einführt, den jene Moleküle der Lichtbewegung entgegensetzen, außerdem aber eine Einwirkung der ponderablen Teilchen auf den Äther postuliert. Letztere Wirkung gibt auf der rechten Seite von (109) ein Glied proportional u, während jener Widerstand durch eine lineare Funktion von $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ dargestellt wird. Diesen modifizierten Ansatz hat er, ebenso wie den ursprünglichen, auch auf den Durchgang des Lichtes durch bewegte Medien ausgedehnt[123]). Die Annahme, daß der Äther ruht und nur die ponderable Materie

120) Math. Theorie des Lichts, § 177.

121) Ann. chim. (4) 25 (1872), auch als besondere Schrift zu Paris 1872 erschienen. Vgl. *Darboux* Bull. 3 (1872), p. 195.

122) In drei Aufsätzen in den Paris C. R. 117 (1893).

123) Paris C. R. 135 (1902)

sich bewegt, führt dazu, dem Ausdruck für den erwähnten Widerstand noch Zusatzglieder von der Form

$$\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}+\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}+\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \tag{111}$$

hinzuzufügen, und aus diesen ergibt sich der Wert des *Fresnel*schen Mitführungskoeffizienten ohne die *Fresnel*sche Annahme einer teilweisen Mitführung des Äthers. — Auch die anomale Dispersion und den Durchgang des Lichtes durch absorbierende Medien hat *Boussinesq* in seine Theorie einzubeziehen versucht[124]).

33. W. Sellmeier. *Sellmeier*[125]) war der erste, der eine theoretische Erklärung der 1862 von *F. P. Le Roux* am Joddampf, 1870 von *C. Christiansen* am Fuchsin entdeckten und dann namentlich von *A. Kundt* studierten anomalen Dispersion versuchte. Er ging dabei hinsichtlich des Verhaltens des Äthers in verschiedenenen Medien von denselben Anschauungen aus wie *Boussinesq* und mußte daher wie dieser das Mitschwingen der ponderablen Teilchen in Rechnung ziehen. Das tat er aber in wesentlich anderer Art als *Boussinesq*, indem er vor allem auch die Elastizitätskräfte der wägbaren Materie mit berücksichtigte, während *Boussinesq* diese vernachlässigte. Falls diese Kräfte allein wirkten, würde die Bewegung eines ponderablen Moleküls längs einer seiner Hauptachsen (d h. einer der drei senkrechten Achsen, längs denen eine Verrückung erfolgen muß, damit die Reaktionskraft die Richtung der Verrückung hat) durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta^2} U \tag{112}$$

bestimmt. Hierbei wird, ähnlich wie bei *Fresnel* (vgl. Nr. 3), eine „quasi-elastische", der Verrückung proportionale Reaktionskraft eingeführt, welche durch die unbekannten molekularen Zusammenhänge hervorgebracht wird und von der gewöhnlichen elastischen Kraft zu unterscheiden ist. — Wird nun das Medium von einer Lichtbewegung durchsetzt, so erleidet der Gleichgewichtsort des betrachteten ponderablen Teilchens eine periodische Verschiebung von derselben Schwingungsdauer und Phase wie die Lichtbewegung, nämlich

$$U_0 = a_0 \sin\frac{2\pi}{\tau}(t+\alpha), \tag{113}$$

und die Gleichung für die Bewegung des Teilchens wird nun:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta^2}(U - U_0). \tag{114}$$

---

124) Paris C. R. 134 (1902); 136 (1903).

125) Ann. Phys. Chem. 145, p. 399, 520; 147, p. 386, 525, beide 1872.

Ihr Integral ist, je nachdem $\delta \lessgtr \tau$ oder $\delta = \tau$ ist:

(115) $$U = \frac{\tau^2}{\tau^2 - \delta^2} a_0 \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + \alpha) + b \sin \frac{2\pi}{\delta}(t + \beta),$$

bzw.

(115a) $$U = -\frac{\pi a_0}{\delta} t \cos \frac{2\pi}{\delta}(t + \alpha) + b \sin \frac{2\pi}{\delta}(t + \beta),$$

wobei b und β die Integrationskonstanten sind. Die in (113), (115), (115a) auftretenden Konstanten a_0, b, β sind nun keine eigentlichen Konstanten, sie sind vielmehr mit der Zeit veränderlich, wenn auch langsam im Vergleich mit der Geschwindigkeit der Lichtbewegung. Es folgt das daraus, daß im natürlichen Licht die Schwingungsrichtung und damit die Projektion der Amplitude auf eine bestimmte Richtung ξ veränderlich ist, und daß von dieser Projektion auch a_0, b, β abhängen. Aus der Veränderlichkeit von b, β ergibt sich, daß die zweiten Summanden in (115) und (115a) im allgemeinen auf die Lichterscheinungen keinen Einfluß haben; sie werden daher als unwesentliche Körperschwingungen bezeichnet, während die ersten Summanden die wesentlichen Schwingungen bilden. Diese wesentlichen Schwingungen haben im Fall (115) eine ganz andere Wirkung auf die Lichtbewegung als im Falle (115a). Im Falle (115) geht in einer Reihe von Schwingungen keine lebendige Kraft vom Äther an die Körpermoleküle über, nur die Masse des Schwingenden wird vermehrt und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geändert. In Körperteilchen, die nach (115) schwingen, sieht *Sellmeier* daher die Ursache der Refraktion; er nennt sie refraktive Teilchen. Körperteilchen dagegen, deren wesentliche Schwingung nach (115a) erfolgt, bilden die Ursache der Absorption, da sie der Lichtbewegung fortdauernd lebendige Kraft entziehen. Ist endlich τ nahe gleich δ, so haben auch die zweiten Summanden von (115), die im allgemeinen unwesentlich sind, eine Wirkung auf die Lichtschwingungen, sie ergeben eine Nebenabsorption.

Für die wesentlichen Schwingungen (115) leitet *Sellmeier* dann folgende Dispersionsformel her:

(116) $$n^2 - 1 = \frac{\sum m \frac{\tau^2}{\tau^2 - \delta^2} a_0{}^2}{m' a'^2}.$$

Darin ist m' die gesamte Äthermasse in einem Volumen V, das so klein ist, daß alle in ihm enthaltenen Ätherteilchen in gleicher Phase schwingen, a' deren Amplitude, m die Masse der einzelnen in V enthaltenen mitschwingenden Körperteilchen, für die δ, das sich von Teilchen zu Teilchen ändern kann, $\gtrless \tau$ ist. Die Formel folgt daraus, daß man für den in V enthaltenen Äther die Energie (kinetische und potentielle) berechnet, die er während seines Fallens vom Verschiebungsmaximum bis zum Ruheorte verliert, und entsprechend die Energie, die die ponderablen Teilchen während derselben Zeit gewinnen, und beide gleich setzt[126]). Die Diskussion dieser Formel führt auf die Möglichkeit der anomalen Dispersion.

Auch Formeln für die Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichtes leitet *Sellmeier* her. Seine Grenzbedingungen sind den *Fresnel*schen ähnlich, nur daß an Stelle des Satzes der lebendigen Kraft das obige Prinzip tritt: die mechanische Energie in einem Volumen V ist konstant.

34. Weitere Ansätze zur Erklärung der anomalen Dispersion. Etwa gleichzeitig mit *Sellmeier* hat *O. E. Meyer*[127]) versucht, die Differentialgleichung für eine ebene Wellenbewegung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{117}$$

durch Zusatzglieder so zu modifizieren, daß sich aus ihr eine anomale Dispersion ergäbe. Er fügt auf der rechten Seite von (117) das Glied

$$-\varkappa \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{oder} \quad -\nu \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \tag{118}$$

hinzu und begründet diese Hinzufügung im ersten Falle durch einen Widerstand der ponderablen Teile, im zweiten durch eine Art innerer Reibung der Ätherteilchen. Die Integration der so entstehenden Gleichungen führt auf Dispersionsformeln, die ein Wachsen des Brechungsexponenten mit der Schwingungsdauer, also anomale Dispersion ergeben, für die Absorptionskonstante aber Werte, die den Erscheinungen nicht entsprechen.

Bemerkenswerter ist der Ansatz von *H. Helmholtz*[128]), der wie *Sellmeier* ein Mitschwingen der ponderablen Teilchen annimmt, dasselbe aber in anderer Art in Rechnung stellt. Da diese Arbeit in dem Artikel von *Wien* besprochen werden wird, sei hier nur erwähnt, daß es *Helmholtz* gelingt, auch für den Fall, wo die eigene Schwingungsdauer der ponderablen Teilchen der Periode der erregenden Lichtoszillationen gleich ist, die Rückwirkung der erstgenannten Schwin-

---

126) Den in Gl. (116) liegenden Satz, daß die brechende Kraft eines Mediums gleich ist den Quotienten der lebendigen Kraft seiner Körper- und Ätherteilchen, sowie die ihm zugrunde liegende Vorstellungsweise bezeichnet *E. Ketteler* als das *Sellmeier*sche Prinzip.

127) Ann. Phys. Chem. 145 (1872).

128) Berlin Monatsber. 1874, p. 667.

gungen auf den Äther zu ermitteln und damit Formeln für die Absorption zu gewinnen.

Um einen besseren Anschluß der Refraktionsformel an die Erfahrung zu erzielen, hat *E. Lommel* den *Helmholtz*schen Ansatz etwas modifiziert[129]). Er nimmt dabei an, daß Äther und Körperteilchen nach einer gemeinsamen, im Raum festen Gleichgewichtslage hingezogen werden, ferner, daß den Körperteilchen durch die Ätherbewegung ein periodischer Impuls erteilt werde, der wiederum auf den Äther zurückwirke. Im übrigen wirken auf den Äther nur seine elastischen Kräfte, auf die Körperteilchen elastische Kräfte, die dem Ausschlag proportional sind, und außerdem ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand.

Lommel hat seine Theorie auch auf die Lichtbewegung in Kristallen ausgedehnt, außerdem die Fluoreszenz dadurch abzuleiten gesucht, daß er in der Gleichung für die Bewegung der ponderablen Moleküle neben den ersten noch höhere Potenzen ihrer Verrückung einführte.

35. W. Voigts ältere Arbeiten. In seiner ersten optischen Arbeit[130]) ging *Voigt* von der Elastizitätstheorie aus und untersuchte, wie man diese Theorie erweitern müsse, um aus ihr die Lichterscheinungen für vollkommen durchsichtige Medien abzuleiten. Die Erweiterung besteht in der Betrachtung eines aus Äther und ponderablen Teilchen gemischten Mediums. Auf beide Arten von Teilchen wirken zunächst die von den umgebenden *gleichartigen* Massen ausgeübten elastischen Kräfte, deren Komponenten X, Y, Z, bezw. Ξ, H, Z seien. Daneben werden auch von den ungleichartigen Massen Kräfte mit den Komponenten A, B, C ausgeübt, die dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung gehorchen müssen. Die Differentialgleichungen der Bewegung werden daher, wenn u, v, w die Verrückungskomponenten, m die Dichtigkeit des Äthers ist, und U, V, W, μ dieselbe Bedeutung für die ponderable Materie haben:

$$(119) \qquad m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X + A, \quad \mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Xi - A, \ldots$$

Von den Kräften $A, \ldots$ wird weiter gefordert, daß für sie das Prinzip der Energie gilt, daß also der Ausdruck für ihre Arbeit sich auf die Form eines vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit bringen lasse. Das liefert acht verschiedene Ansätze. Bei dem ersten ist A eine lineare homogene Funktion von $u - U$, $v - V$, $w - W$, bei

129) Erlangen Ber. 1877; Ann. Phys. Chem. (2) 3 u. 4 (1878).

130) Ann. Phys. Chem. (2) 19 (1883), p. 873.

dem zweiten eine ebensolche Funktion der zweiten Ableitung von $u - U$, $v - V$, $w - W$ nach der Zeit. Im dritten und vierten wird

$$(120) \qquad -A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

gesetzt, und für die Größen A_x, A_y, A_z werden Ausdrücke von derselben Form genommen, wie vorher für A selbst genommen sind. Wenn man nun noch den Äther als inkompressibel und als von verschwindender Dichte, aber in allen Medien als von gleicher Konstitution annimmt, so sind die U, V, W verschwindend klein. Die allein übrig bleibenden Gleichungen für u, v, w ergeben dann für kristallinische Medien Gesetze, die viel komplizierter sind als die *Fresnel*schen Gesetze, die sich jedoch durch passende Annahmen über die verfügbaren Konstanten auf letztere zurückführen lassen. Dabei sind aber die in den *Fresnel*schen Gesetzen auftretenden Parameter nicht konstant, sondern von der Farbe abhängig. Eine Modifikation der obigen vier Ansätze, bei der auch die ersten oder dritten Ableitungen von $u - U$, $v - V$, $w - W$ auftreten, ergibt die Erscheinungen der Zirkularpolarisation. Die Reflexion endlich wird mittels der *Kirchhoff*schen Grenzbedingungen behandelt. Die sich ergebenden Formeln können sowohl mit den *F. Neumann*schen, als den *Fresnel*schen in Übereinstimmung gebracht werden, mit letzteren aber nur, wenn man zwischen den Konstanten Relationen annimmt, durch welche die in den Formeln enthaltene Dispersion verschwindet.

Weiter hat *Voigt* seine Theorie auch auf *absorbierende* isotrope und kristallinische Medien ausgedehnt[131]). Mußten bei den durchsichtigen Medien die A der Bedingung genügen, daß die Energie einer in dem Körper fortgepflanzten Bewegung unter allen Umständen erhalten bleibt, so müssen sie jetzt die Forderung erfüllen, daß stets ein Verlust an Energie eintritt. Er hat aus dieser Forderung bei isotropen Medien Ausdrücke für die A hergeleitet, die, verbunden mit den nötigen Grenzbedingungen, das optische Verhalten der Metalle mit großer Genauigkeit darstellen. Auch für kristallinische Medien werden die entsprechenden Ausdrücke aufgestellt.

In einer späteren Arbeit[132]) geht *Voigt* von noch allgemeineren Ansätzen hinsichtlich der A aus. Er nimmt an, daß die auf die Ätherteilchen ausgeübten Kräfte, sei es, daß dieselben von den übrigen Ätherteilchen oder von den ponderablen Molekülen herrühren, aus

---

131) Gött. Nachr. 1884, p. 137 und 337; Ann. Phys. Chem. (2) 23 (1884), p. 104 und 577.

132) Ann. Phys. Chem. (2) 43 (1891), p. 410.

Gliedern folgender Formeln bestehen:

$$(121)\qquad A, -\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x \partial y}+\cdots,$$

wo die A lineare Funktionen der Verrückungen und ihrer Ableitungen nach der Zeit von beliebig hoher Ordnung sind, die A_x, A_y, A_z lineare Funktionen von $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ und ihrer ersten, zweiten usw. Ableitungen nach der Zeit, die $A_{xx}, A_{xy}, \ldots$ endlich lineare Funktionen von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ und ihren Ableitungen nach der Zeit. Wegen der Periodizität der Verrückungskomponenten ist nun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} u \quad \text{usw.};$$

ersetzt man demgemäß $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}, \ldots$ durch u, $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \frac{\partial^5 u}{\partial t^5}, \ldots$ durch $\frac{\partial u}{\partial t}$, so enthalten die Ausdrücke für $A, A_x, \ldots$ nur nullte und erste Ableitungen nach der Zeit; doch sind die Koeffizienten dieser Ausdrücke nicht mehr konstant, sondern Reihen, die nach fallenden Potenzen des Quadrats der Schwingungsdauer fortschreiten. Von den Ableitungen der u, v, w nach den Koordinaten darf man in $A, A_x, \ldots$ nur die ersten beibehalten, d. h. man muß von den $A_{xx}, A_{xy}, \ldots$ und etwaigen Kräften, die von Größen noch höherer Ordnung abhängen, abstrahieren, weil sich sonst für eine Fortpflanzungsrichtung mehr als zwei Wellen ergeben würden. Die immer noch sehr große Zahl von Konstanten wird durch die Annahme der Inkompressibilität des Äthers reduziert. So ergibt sich, daß für durchsichtige Medien, bei denen kein Energieverlust stattfindet, die A verschwinden. Die A_x, $A_y, \ldots$ zerfallen in zwei Teile; die Teile, die nur von den $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$, nicht aber von deren Ableitung nach der Zeit abhängen, enthalten im allgemeinen zwölf Konstante; sie stellen sich für jede Farbe als die Superposition zweier Kraftsysteme dar, die in bezug auf zwei im allgemeinen verschiedene Achsenkreuze symmetrisch verteilt sind, und von denen das eine mit den *Neumann*schen, das andere mit den *Fresnel*schen Werten identisch ist. Diejenigen Teile von $A_x, \ldots$ ferner, die die Ableitungen nach der Zeit enthalten und mit dem Energieprinzip und der Inkompressibilität vereinbar sind, müssen um eine Achse gleichmäßig verteilt sein und geben Wirkungen, die vollständig mit denen zusammenfallen, die in einem homogenen magnetischen Felde beobachtet werden, dessen Kraftlinien jener Achse parallel laufen.

Die absorbierenden Kräfte ferner haben genau dieselbe Form, wie die betreffenden Kräfte für durchsichtige Medien, falls man in letzteren u, v, w durch ihre ersten Ableitungen nach der Zeit ersetzt. Für die absorbierenden Kräfte gelten daher ähnliche Gesetze, wie die vorher erwähnten für die ersten Teile der A_x, ...

Auch die Grenzbedingungen für den Übergang des Lichtes aus einem Medium in ein anderes leitet *Voigt* aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie her und gelangt für durchsichtige Kristalle zu den *Kirchhoff*schen Bedingungen, während sich für absorbiernde Medien die von *Voigt* selbst[133]) und *Drude*[134]) aufgestellten Gleichungen ergeben.

Zum Schluß zeigt *Voigt* den Zusammenhang zwischen den von ihm für nicht aktive durchsichtige Medien aufgestellten Formeln und den Formeln der elektromagnetischen Lichttheorie.

Wir sehen, daß *Voigt*, der zuerst von rein mechanischen Vorstellungen zur Begründung der Lichttheorie ausgegangen war, in dem Bestreben, die Theorie so zu erweitern, daß sie alle möglichen Erscheinungen umfaßt, schließlich zu einer Darstellung gelangte, die von der molekular-mechanischen Deutung der eingeführten Kräfte abstrahiert und wegen der großen Zahl der in dem Ansatz auftretenden verfügbaren Konstanten als wesentlich phänomenologisch bezeichnet werden kann. Noch entschiedener hat sich *Voigt* in seinem Kompendium der theoretischen Physik auf den phänomenologischen Standpunkt gestellt (vgl. Abschn. VI, Nr. 39).

VI. Die Behandlung der Optik vom phänomenologischen Standpunkt.

36. Theoretische Arbeiten, die wesentlich phänomenologischen Charakter haben. *Drude* weist gelegentlich[135]) darauf hin, daß eine phänomenologische Theorie keineswegs nur eine mathematische Rechenübung und für die Naturerkenntnis nutzlos sei. Gerade die Optik biete eine große Zahl von Beispielen für den Nutzen rein phänomenologischer Ansätze. So sei *Fresnel*s Theorie der Doppelbrechung so wenig streng begründet, daß man sie als phänomenologisch bezeichnen müsse, und doch habe sie zur Entdeckung der konischen Refraktion geführt. Von neueren Theorien habe die phänomenologisch zu

---

133) Vgl. die in Anm. 131 zitierten Arbeiten aus dem Jahre 1884.

134) Ann. Phys. Chem. (2) 32 (1887), p. 584.

135) *A. Winkelmanns* Handbuch der Physik, zweite Auflage, 6, p. 1140, Anm. 3.

nennende Theorie von *Voigt* zur Auffindung mancher bisher nicht beobachteten Erscheinungen geführt, z. B. in absorbierenden Kristallen.

Wir möchten dem hinzufügen, daß, wenn eine phänomenologische Theorie auch nur als Vorstufe einer eigentlichen Theorie betrachtet werden kann, sie schon dadurch einen wesentlichen Nutzen gewährt, daß sie die Fülle der Einzelerscheinungen rationell zusammenfaßt und durch Formeln exakt darstellt. In dieser Beziehung sind auch solche Theorien nützlich, deren mathematische Entwicklung nicht haltbar ist, wie z. B. die Theorie von *Ketteler*[136]). *E. Ketteler* ist es gelungen, einen einigermaßen brauchbaren Ansatz zu finden, den er dann in sehr zahlreichen Versuchen fortwährend in diesem oder jenem Punkt geändert hat, bis er schließlich zu Gleichungen (allgemeine und Grenzgleichungen) gelangt ist, die wohl geeignet waren, die Beobachtungen wiederzugeben.

Ähnliches gilt von der Art, in der *V. von Lang*[137]) die Doppelbrechung begründet. Er geht davon aus, daß im *freien* Äther die Ausschläge u, v, w der Teilchen lediglich den elastischen Gleichungen genügen, während für die Lichtbewegung in anderen Medien u, v, w durch die Schwingungen U, V, W der Körperteilchen beeinflußt werden. Diesem Einfluß trägt er dadurch Rechnung, daß er in den elastischen Gleichungen $u - U$, $v - V$, $w - W$ an Stelle von u, v, w einführt und annimmt, daß die Verhältnisse $U:u$, $V:v$, $W:w$ für ein bestimmtes System rechtwinkliger Achsen überall im Körper konstante, voneinander verschiedenem Wert haben. So gelangt er zu den *Fresnel*schen Gesetzen der Doppelbrechung und zwar mit *Fresnel*s Definition der Polarisationsebene.

Denselben Ansatz hat *von Lang* auch in die Theorie der Zirkularpolarisation eingeführt[138]). Auch hier dürfte sich die grundlegende Annahme lediglich dadurch rechtfertigen lassen, daß sie zu richtigen Resultaten führt, so daß auch diese Theorie mehr phänomenologischen als rationellen Charakter hat.

---

136) *E. Ketteler*, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeiersche Prinzip, Braunschweig 1885. — Vgl. auch die zahlreichen Abhandlungen *Ketteler*s in den Ann. Phys. Chem., deren erste die Lichterscheinungen in bewegten Medien betrafen, während die von 1876 ab erschienenen eine molekular-mechanische Begründung der normalen und anomalen Dispersion zu geben versuchten.

Was die Bezeichnung „Bessel-Sellmeiersches Prinzip" betrifft, so nennt *Ketteler* die Heranziehung des Trägheitsmomentes des mitschwingenden Mittels: „Besselsches Prinzip". Hinsichtlich dès Sellmeierschen Prinzips vgl. Nr. 33, Anm. 126).

137) Ann. Phys. Chem. 159 (1876); Wien Ber. 83 (1876).

138) Ann. Phys. Chem. Suppl.-Bd. 8 (1878).

37. L. Lorenz, M. Lévy. Der erste, der sich, allerdings nicht von vornherein, auf einen bewußt phänomenologischen Standpunkt stellte, war *L. Lorenz*[139]). Er erklärt die Ausbildung des Molekularmechanik für völlig unfruchtbar und will der Optik eine rein analytische Grundlage geben. Er zeigt, daß aus Gleichungen von der Form der *Lamé*schen bei angemessenen Grenzbedingungen alle optischen Erscheinungen hervorgehen.

M. Lévy[140]) hat die Frage untersucht: Welches sind die allgemeinsten Gleichungen der Doppelbrechung, die mit den *Fresnel*schen Gesetzen vereinbar sind? Ohne jede Hypothese über das Wesen des Lichtes kann man den Vorgang der Ausbreitung desselben durch einen Vektor darstellen, dessen Komponenten u, v, w, wenn das Medium kontinuierlich ist, einem System von partiellen Differentialgleichungen genügen. Diese Gleichungen müssen, da Interferenz des Lichtes möglich ist, linear und, falls man von der Dispersion und der Zirkularpolarisation absieht, auch homogen sein. Sollen diese Gleichungen auf die *Fresnel*sche Wellenfläche führen, so müssen sie z. B. die Form haben:

$$(122)\ (\mathrm{A}_1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{b} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{c} - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}.$$

Darin treten neben den Hauptbrechungsindizes a, b, c die fünf willkürlichen Konstanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mu:\lambda$, $\nu:\lambda$ auf. Außer dieser Form sind noch drei andere möglich, in denen nur die acht Konstanten in etwas anderer Anordnung auf die Terme der rechten Seiten verteilt sind. Die Verteilung der Konstanten in den vier Formen ist folgende:

$$(122\mathrm{a})\quad \left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{A}_1) & \mathfrak{a},\ c^2,\ b^2,\ \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{b} - c^2),\ \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{c} - b^2);\\ (\mathrm{A}_2) & \mathfrak{a},\ c^2,\ b^2,\ \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{a} - c^2),\ \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{a} - b^2);\\ (\mathrm{B}_1) & \mathfrak{a},\ a^2,\ a^2,\ \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{b} - a^2),\ \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{c} - a^2);\\ (\mathrm{B}_2) & \mathfrak{a},\ a^2,\ a^2,\ \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{a} - b^2),\ \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{a} - c^2). \end{array}\right.$$

Alle vier Systeme ergeben für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Gleichung dritten Grades, die in zwei Faktoren zerfällt, deren einer die *Fresnel*sche Gleichung für transversale Schwingungen ergibt. Damit die dritte Welle fortfällt, ist nur nötig,

139) Über die Theorie des Lichtes, Ann. Phys. Chem. 121 (1864), p. 579—600.

140) Paris C. R. 105 (1887); Journ. de math. (4) 4 (1888).

den Konstanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ negative Werte zu geben. Die Konstanten $\mu : \lambda$, $\nu : \lambda$ bestimmen die Schwingungsrichtung der nicht fortfallenden Wellen. Je nach der Annahme über $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mu : \lambda$, $\nu : \lambda$ ergeben sich die verschiedenen Theorien. Z. B. folgen aus dem System (A_2) für

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0, \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\lambda} = 1$$

die Theorien von *F. Neumann*, *Mac Cullagh* und *Lamé*. Die Gleichungen (B_2) ergeben unter denselben Annahmen die *Fresnel*sche Theorie. Durch andere Annahmen wiederum kann man die Resultate der *Sarrau*schen Theorie erhalten.

Die obigen Gleichungen setzen voraus, daß der betrachtete Kristall in bezug auf drei rechtwinklige Ebenen symmetrisch ist. Besteht diese Symmetrie nicht, so braucht man, um zur *Fresnel*schen Wellenfläche zu gelangen, nur u, v, w durch beliebige lineare Funktionen dieser Größen zu ersetzen.

38. P. Drude. *Drude*s Untersuchung[141]) bezieht sich darauf, wie weit die Resultate der hauptsächlichsten bisher aufgestellten Theorien, ganz abgesehen von ihrer Begründung und Herleitung, den Anforderungen der praktischen Physik genügen, d. h. imstande sind, eine Klasse von optischen Erscheinungen bequem zu beschreiben, sowie numerische Beziehungen zwischen verschiedenen Erscheinungen abzuleiten. Dabei wird der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Theorien erörtert.

Für durchsichtige isotrope Medien wird ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \Delta u = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \quad \text{usw.} \tag{123}$$

gebildet, verbunden mit den Grenzbedingungen

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad a_1 \xi_1 = a_2 \xi_2, \quad a_1 \eta_1 = a_2 \eta_2 \tag{124}$$

oder

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2. \tag{124'}$$

Darin sind u, v, w die Komponenten eines periodisch mit der Zeit sich ändernden Vektors, für den $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$; ξ, η, ζ die Komponenten eines anderen Vektors, der mit dem vorigen durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{usw.}$$

141) In wie weit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik? Gött. Nachr. 1892, p. 366—412.

zusammenhängt. Die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf zwei Medien, deren Trennungsfläche die Ebene $z = 0$ ist. Das System (123) in Verbindung mit (124) entspricht der *F. Neumann*schen, (123) zusammen mit (124′) der *Fresnel*schen Theorie. Man gelangt von den *Neumann*schen Grenzbedingungen (124) zu den *Fresnel*schen (124′), wenn man nicht u, v, w, sondern $a\xi$, $a\eta$, $a\zeta$ als Komponenten des Lichtvektors interpretiert. Ebenso wird man umgekehrt von den Grenzbedingungen (124′) zu den Bedingungen (124) geführt, wenn nicht u, v, w, sondern ξ, η, ζ als Komponenten des Lichtvektors angesehen werden[142]). In der einen Theorie folgt der kinetische Vektor, d. h. der, mit dessen Verschwinden die kinetische Energie verschwindet, den *Neumann*schen, der potentielle Vektor den *Fresnel*schen Gesetzen, während in der anderen Theorie gerade das Umgekehrte stattfindet. Beide Theorien sind völlig gleichwertig.

Zur Erklärung der Dispersion muß man der Gleichung (123) Zusatzglieder hinzufügen, die als herrührend von der Einwirkung der ponderablen Teilchen angesehen werden können, und die Gleichungen lauten dann in der *Neumann*schen Theorie

$$(125)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a'\Delta u + a''\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + a'''\frac{\partial^4 \Delta u}{\partial t^4} + \cdots,$$

in der *Fresnel*schen

$$(125')\qquad \frac{1}{a'}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{a''}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{1}{a'''}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + \cdots = \Delta u.$$

Die Zusatzglieder sind als Reihenentwicklungen aufzufassen, die konvergieren, so lange die Schwingungsdauer des Lichtes nicht mit der eigenen Schwingungsdauer der Materie zusammenfällt. Zur Darstellung der Erscheinungen absorbierender Medien muß man in den Gleichungen (123) der Konstante a komplexe Werte beilegen. Will man für derartige Medien auch die Dispersion berücksichtigen, so muß man auf der rechten Seite von (125) weitere Zusatzglieder der Form

$$b\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + b'\frac{\partial^3 \Delta u}{\partial t^3} + \cdots$$

hinzufügen, dagegen auf der linken Seite (125′) Glieder der Form

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{b'}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \cdots$$

Für *natürliche aktive* Medien ist das einfachste Erklärungssystem

---

142) Die Beziehungen der Schwingungskomponenten von *Fresnel*, *Neumann* und *Sarrau* legt auch *Poincaré* in seinen Vorlesungen über die mathematische Theorie des Lichtes, § 178, dar, die Beziehungen zwischen den ersten beiden *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. (2) 43 (1891), p. 410.

$$(126) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Delta u + \sigma \cdot \xi, \quad \text{usw.},$$

und die Grenzbedingungen sind entweder, der *Neumann*schen Anschauung entsprechend,

$$(127) \qquad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad a_1 \xi_1 + \sigma_1 u_1 = a_2 \xi_2 + \sigma_2 u_2,$$
$$a_1 \eta_1 + \sigma_1 v_1 = a_2 \eta_2 + \sigma_2 v_2,$$

oder, den *Fresnel*schen Vorstellungen entsprechend,

$$(127') \qquad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2.$$

Vor dem *Mac Cullagh*schen System, in dem in den Gleichungen (126) rechts $\Delta\xi$ an Stelle von ξ steht, verdient das System (126) den Vorzug.

Drude bespricht in seinem Aufsatz auch die elektromagnetische Lichttheorie und ihr Erklärungssystem für die Erscheinungen isotroper wie kristallinischer Medien. Er bezeichnet diese Theorie, wenn man sie in ihrer dispersionsfreien Gestalt auch nicht als vollkommen betrachten könne, doch als den besten Pfadfinder.

39. W. Voigts spätere Darstellung. Eine ganz andere Darstellung der Optik als in seinen früheren Arbeiten (vgl. Nr. 35) hat *Voigt* in seinem Kompendium der theoretischen Physik gegeben. Aus der Tatsache, daß das Licht aus ebenen transversalen Wellen besteht, die sich *im leeren Raum* mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, die von dem stattfindenden Schwingungszustand und von der Fortpflanzungsrichtung unabhängig ist, und daß mehrere Schwingungen sich superponieren, ohne aufeinander einzuwirken, folgt für die Komponenten u, v, w des Lichtvektors die Darstellung

$$(128) \qquad u = \sum F_h\left(t - \frac{r}{V}\right),$$

wo V konstant, $r = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ist, während die F_h beliebige periodische Funktionen darstellen, die für die anderen Komponenten andere Werte haben. Eliminiert man aus diesen Formeln die willkürlichen Funktionen $F_h, \ldots$ und die Richtungskosinus α, β, γ, so erhält man für jede der Komponenten eine Differentialgleichung der Form

$$(129) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta u = V^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right);$$

die zweite Form, in der ξ, η, ζ die Komponenten eines zweiten, mit den u, v, w durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots$$

verbundenen Vektors sind, ergibt sich aus der ersten mit Rücksicht darauf, daß die räumliche Dilatation gleich Null ist. Diese Hauptgleichungen kann man nun ersetzen durch das *Hamilton*sche Prinzip, das für Lichtschwingungen folgendermaßen lautet: Setzt man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' \quad \text{usw.},$$

ferner

$$(130) \qquad 2\varphi = V^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad 2\psi = u'^2 + v'^2 + w'^2,$$

$$\int \varphi\, dS = \Phi, \quad \int \psi\, dS = \Psi,$$

wo dS das Volumenelement und die Integration über den ganzen leeren Raum zu erstrecken ist, so ist

$$(131) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta(\Phi - \Psi)\, dt = 0.$$

Um die Lichtbewegung in anderen Medien zu erhalten, ist es nur nötig, die Funktion φ, die als potentielle Energie der Volumeneinheit angesehen werden kann, angemessen zu erweitern, während die Funktion ψ, die kinetische Energie der Volumeneinheit, ihre Form behält, da sie bei einer Erweiterung diesen Charakter verlieren würde. Aus dem so erweiterten *Hamilton*schen Prinzip folgen nicht nur die allgemeinen Gleichungen der Lichtbewegung, sondern auch die Grenzbedingungen für den Übergang von einem Medium zum anderen; und zwar ergeben sich diese Oberflächenbedingungen durch Grenzübergang aus den Hauptgleichungen.

Die wichtigste Erweiterung von φ ist:

$$(132) \qquad 2\varphi = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + \cdots + 2a_{12}\xi\eta,$$

wo die Koeffizienten a_{11} usw. nicht mehr konstant sind, sondern Funktionen der Schwingungsdauer τ. Dieser Ansatz für φ liefert die Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in gewöhnlichen durchsichtigen Kristallen, und zwar haben dieselben die Form:

$$(133) \qquad u'' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right), \ldots$$

Die Grenzbedingungen sind für ein der xy-Ebene paralleles Element:

$$(134) \qquad \bar{u}_h = \bar{u}_i, \quad \bar{v}_h = \bar{v}_i, \quad \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi}\right)_h = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta}\right)_h = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta}\right)_i,$$

wobei sich der Index h auf das eine, i auf das andere Medium bezieht. An Stelle einer der beiden ersten Gleichungen (134) kann auch die andere $\bar{\zeta}_h = \bar{\zeta}_i$ treten, an Stelle einer der beiden letzteren die Gleichung $\bar{w}_h = \bar{w}_i$. Aus diesen Gleichungen werden alle Gesetze der Kristalloptik, ferner die Formeln für Reflexion an Kristallflächen, sowie an der Grenze isotroper Medien, einschließlich der für totale Reflexion, abgeleitet. Dabei wird auch der Einfluß von Oberflächenschichten erörtert.

Auch zur Erklärung der optischen Eigenschaften von Kristallen bei der Einwirkung von Temperaturänderungen, von Deformationen und von elektrischen Kräften bedarf es keines neuen Ansatzes für φ; nur nehmen infolge jener Einwirkung die Konstanten in (132) andere Werte an, und das Wesen der Untersuchung besteht in der Aufsuchung der Beziehungen zwischen den alten und den neuen Konstanten.

Eine zweite Erweiterung, bei der

$$\delta\varphi = c(u\delta\xi + v\delta\eta + w\delta\zeta) \tag{135}$$

wird, verbunden mit dem aus (132) folgenden Werte von $\delta\varphi$, liefert die Gesetze der Erscheinungen für die natürliche und für die magnetische Drehung der Polarisationsebene.

Dem Einfluß der Bewegung auf das optische Verhalten trägt *Voigt* dadurch Rechnung, daß er den Differentialgleichungen (129) Zusatzglieder gibt, so daß diese Gleichungen die Form annehmen:

$$u'' = a\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) - 2a'\frac{\partial u}{\partial s}, \tag{136}$$

wo s die Richtung der Translation bezeichnet.

Für absorbierende Medien nimmt, da hier die Schwingungsenergie verkleinert wird, das *Hamilton*sche Prinzip die Form an:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int [\delta(\varphi - \psi) - \delta'\alpha]\, dk, \tag{137}$$

wo α die in der Volumeneinheit geleistetete Arbeit bezeichnet. Von verschiedenen Ansätzen betreffs $\delta'\alpha$ erweist sich nur der eine als brauchbar:

$$-\delta'\alpha = \frac{\partial\chi}{\partial\xi'}\delta\xi + \frac{\partial\chi}{\partial\eta'}\delta\eta + \frac{\partial\chi}{\partial\zeta'}\delta\zeta, \tag{138}$$

wo

$$2\chi = m_{11}\xi'^2 + m_{22}\eta'^2 + \cdots + 2m_{12}\xi'\eta' \tag{139}$$

ist. Die daraus folgenden Differentialgleichungen und Grenzbedingungen unterscheiden sich von den Gleichungen (133), (134) nur dadurch, daß $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial\xi'}$ an Stelle von $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ steht. Durch Einführung komplexer Größen kann man die in Rede stehenden Gleichungen genau auf die Form der Gleichungen (133), (134) bringen.

40. Schlußwort. Den Höhepunkt der elastischen Optik bezeichnen ohne Frage die genialen Arbeiten *Fresnels*. Seine Anschauung von der Natur der optischen Vorgänge einschließlich der durch seine Nachfolger bewirkten Vervollständigung und Erweiterung erwies sich als sicherer Führer durch die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen und als glücklicher Wegweiser zur Entdeckung neuer experimenteller Tatsachen. In dieser Hinsicht hat auch die elektromagnetische Auffassung der optischen Phänomene kaum mehr zu leisten vermocht. Indes haben die immer wieder aufgenommenen Versuche, aus den *Fresnel*schen Sätzen ein konsequentes mechanisches System zu entwickeln, keinen befriedigenden Abschluß gefunden und konnten nur durchgeführt werden auf Kosten der ursprünglichen Einfachheit und Anschaulichkeit der Grundlagen, oder schließlich unter Drangabe jeder spezielleren mechanischen Vorstellung.

(**Abgeschlossen im November 1907.**)

V 22. ELEKTROMAGNETISCHE LICHTTHEORIE.

Von

W. WIEN

IN WÜRZBURG.

MIT EINEM BEITRAG ÜBER MAGNETOOPTISCHE PHÄNOMENE.

Von **H. A. LORENTZ** in Leiden.

Inhaltsübersicht.

21. Dispersionstheorie von *H. A. Lorentz.*
22. Theorie der Dispersion von *Planck.*
23. Theorie der Fluoreszenz.
24. Grundlagen der Kristalloptik.
25. Ponderomotorische Kräfte.
26. Lichtdruck.
27. Relativitätstheorie.
28. Vergleich mit der Erfahrung.

Literatur.

Lehrbücher.

J. Cl. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, 1873, 2. Aufl. 2 Bde. Oxford 1881; deutsch von *Weinstein*, Berlin 1883.

Tumlirz, Die elektromagnetische Theorie des Lichts, Leipzig 1883.

J. E. H. Gordon, A physical treatise on electricity and magnetism, London 1880.

Mascart et Joubert, Électricité et magnétisme, deutsch von *Levy*, Berlin 1886.

Poincaré, Électricité et optique, Paris Carré 1890; deutsch von *Gumlich* u. *Jäger*, Berlin 1894.

Drude, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894.

Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie, Leipzig 1894; 2. Aufl. von *Abraham*, 2 Bde. 1905.

Helmholtz, Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts, Hamburg und Leipzig 1897.

Drude, Lehrbuch der Optik, Leipzig 1900; 2. Aufl. 1905.

E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie, Leipzig 1900.

J. J. Thomson, Recent researches on electricity and magnetism, Oxford 1893.

W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik, 2 Bde. Leipzig 1895.

P. Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichts, Leipzig 1891.

II. Vorläufer der Maxwellschen Theorie.

Mac Cullagh, Transactions Irish Academy, Bd. 27 part III, p. 461; Proc. of the Ir. Acad. I (1837—1840), p. 383. Bd. 21; An essay towards a dynamical theory of cristalline reflection and refraction. Vgl. *G. F. Fitzgerald*, Phil. Mag. (5) 7 (1879), p. 216.

Riemann, Ein Beitrag zur Elektrodynamik, Ann. Phys. 131 (1858), p. 237; Ges. Abh., p. 270.

Lorenz, Über die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen, Pogg. Ann. 31 (1867), p. 243; außerdem Ann. Phys. Chem. 18 (1863), p. 111; 121 (1864), p. 579; Ann. 7 (1879), p. 161.

III. Grundlegende Abhandlungen über elektromagnetische Lichttheorie.

Faraday, Experimental researches on electricity, 3 Bde, London 1839—1855.

Maxwell, A dynamical theory of the electromagnetic field, Scient. pap. 1, p. 526; London Phil. Transact. 155 (1864), p. 459; On the general equations of the electromagnetic field, London Phil. Trans. 5, 1865, p. 459.

Helmholtz, Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper, Wiss. Abh. 1, p. 545; J. f. Math. 72, p. 57.

— Über die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierbaren Körper wirkenden Kräfte, Wiss. Abh. 1, p. 798; Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 385.

Stefan, Über die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichts, Wien Ber. 70 (1874), p. 589.

H. A. Rowland, On the general equations of the electromagnetic action, Amer. Journ. of math. 2 (1874), p. 354; 3, p. 89.

— On the propagation of an arbitrary electromagnetic disturbance, Am. Journ. 6, Nr. 4.

H. A. Lorentz, Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1877), p. 197.

Rayleigh, On the electromagnetic theory of light, Phil. Mag. 12 (1881), p. 81.

Poynting, On the transfer of energy in the electromagnetic field, Phil. Trans. 2 (1884), p. 343.

H. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper, Gött. Nachr., März 1890; Ann. Phys. 41 (1890), p. 369; Ges. Abh. 2, p. 208; für bewegte Körper, Ann. Phys. 41 (1890), p. 369; Ges. Abh. 2, p. 256.

O. Heaviside, Electrical papers, London „The electrician", 2 Bde.

— Electromagnetic theory, London „The electrician", 2 Bde. 1899.

— On the electromagnetic wave surface, Phil. Mag. 19 (1885), p. 397.

E. Cohn, Elektrodynamik der Leiter, Berlin Ber. 26 (1889), p. 405.

Sir William Thomson, Lectures of molecular dynamics and the wave theory of light, Baltimore 1884 (Nachschrift von *Hathaway*).

F. Kolacek, Versuch einer Dispersionserklärung vom Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie, Ann. Phys. Chem. 32 (1887), p. 224, 429; 34 (1888), p. 673. S. dagegen *Goldhammer*, ebenda 46 (1892), p. 104.

Goldhammer, die Dispersion und Absorption des Lichtes nach der elektrischen Lichttheorie, Ann. Phys. 47 (1892), p. 93.

Helmholtz, Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung, Berlin Ber. 15. Dez. 1892; Wiedem. Ann. 48 (1893), p. 389.

Drude, Über die Beziehungen der Dielektrizitätskonstanten zum optischen Brechungsexponenten, Göttinger Nachrichten 1893, Nr. 2, p. 1.

Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 2 Bde. Leipzig 1891 (Mechanische Analogien).

H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Arch. néerlandaises des sciences exactes et naturelles, T. XXV, Leiden, J. B. Brill 1892.

— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

Birkeland, Intégration générale des équations de Maxwell, Arch. de Génève 34 (1894), p. 1.

Reiff, Zur Dispersionstheorie, Ann. Phys. Chem. 55 (1895), p. 82.

M. Planck, Zur elektromagnetischen Theorie der Dispersion in isotropen Nichtleitern, Berlin Ber. 1. Mai 1902.

P. Drude, Optische Eigenschaften und Elektronentheorie, Ann. Phys. 14 (1904), p. 677, 936.

H. A. Lorentz, Über elektromagnetische Systeme, die sich mit kleinerer als der Lichtgeschwindigkeit bewegen, Akad. v. Wetensch. Amsterdam 1904, p. 986.

A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Systeme, Ann. Phys. 17 (1905), p. 891.

Bezeichnungen.

dS Raumelement.
$d\omega$ Flächenelement.
$d\Omega$ Flächenelement der Einheitskugel.
N Äußere Normale einer Fläche.
c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.
c_1 Geschwindigkeit der Wellen (Phasen) im Körper.
c_g Gruppengeschwindigkeit.
$\mathfrak{E}$ elektrische Feldstärke.
$\mathfrak{H}$ magnetische Feldstärke.
$\mathfrak{D}$ elektrische „Erregung“.
$\mathfrak{B}$ magnetische „Erregung“.
$\mathfrak{p}$ elektrisches Moment beim Verschieben eines Ions.
$\mathfrak{P}$ elektrisches Moment der Volumeneinheit, elektrische „Polarisation“.
$\mathfrak{S}$ *Poynting*scher Strahlungsvektor.
ε Dielektrizitätskonstante.
μ Permeabilität.
σ Leitfähigkeit.
ϱ_e Dichte der wahren Elektrizität.
e Elektrizitätsmenge, Elementarquantum.
ν Brechungsverhältnis.
$\mathfrak{N}$ Anzahl der Ionen pro Volumeneinheit.
$n = \frac{2\pi}{\tau}$ Schwingungszahl.
$\lambda = \frac{2\pi}{b}$ Wellenlänge.
ϑ Phasenwinkel.
α Einfallswinkel.
β Brechungswinkel.
α_0 Haupteinfallswinkel.
h_0 Hauptazimuth.
a Absorptionsindex für die Länge 1.
$k = \frac{a}{b}$ Absorptionsindex für die Wellenlänge.

Die Vorläufer.

1. Die Lichttheorie von Mac Cullagh. Die ersten Keime der elektromagnetischen Lichttheorie liegen bereits in älteren elastischen Theorien, besonders in den Untersuchungen von *Mac Cullagh*[1]). Obwohl von einer elektromagnetischen Deutung keine Rede sein konnte, haben doch die von *Mac Cullagh* aufgestellten Differentialgleichungen bereits große Verwandtschaft mit den Maxwellschen Gleichungen. Denken wir uns eine elastische Verschiebung, deren Vektor $\mathfrak{r}$ sei, bezeichnen mit $\mathfrak{s}$ die negative Rotation derselben und mit $\mathfrak{R}$ einen geeignet definierten Kraftvektor, so setzt *Mac Cullagh*[2])

$$\text{(I)} \qquad -s\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \operatorname{rot}\mathfrak{R},$$

wo s die Dichtigkeit des Äthers bezeichnet.

Multiplizieren wir die Gleichungen mit $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\,dt$ und integrieren über einen geschlossenen Raum, dessen Volumelement dS, dessen Oberflächenelement $d\omega$ und dessen äußere Normale an der Oberfläche N heiße, so ist

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} dts\int dS\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) &= \frac{s}{2}\frac{d}{dt}\int dS\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)^2 dt = \\ -\int d\omega\left[\mathfrak{R}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]_N dt &+ \int dS\operatorname{rot}\left(\mathfrak{R}\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)dt \end{aligned}$$

wo $-\mathfrak{s} = \operatorname{rot}\mathfrak{r}$ ist. Nennen wir $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\,dt$ die Deformation im Volumelement dS, so wird das letzte Glied die Deformationsarbeit oder die potentielle Energie ausdrücken, während das Glied auf der linken Seite die Änderung der kinetischen Energie mißt.

Für diese potentielle Energie wird nun der Ausdruck angenommen:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} G = \tfrac{1}{2}(a_{11}\mathfrak{s}_x^2 &+ a_{22}\mathfrak{s}_y^2 + a_{33}\mathfrak{s}_z^2 \\ &+ 2a_{12}\mathfrak{s}_x\mathfrak{s}_y + 2a_{23}\mathfrak{s}_y\mathfrak{s}_z + a_{13}\mathfrak{s}_x\mathfrak{s}_z), \end{aligned}$$

woraus sich dann $\mathfrak{R} = \frac{\partial G}{\partial \mathfrak{s}}$ ergibt.

Für isotrope Medien ist

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0, \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33},$$

1) *Mac Cullagh*, An essay towards a dynamical theory of cristalline reflection and refraction, Irish Trans. 21.

2) Vgl. *Volkmann*, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes, Leipzig 1891; *Drude*, Gött. Nachr. 1892, p. 400, sowie den vorangehenden Artikel von *Wangerin* Nr. 24.

also $G = \frac{1}{2} a \mathfrak{s}^2$, daher $\mathfrak{R} = a \mathfrak{s}$ und

$$\text{(IV)} \qquad - s \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = a \operatorname{rot} \mathfrak{s}.$$

Diese Gleichung in Gemeinschaft mit

$$- \mathfrak{s} = \operatorname{rot} \mathfrak{r}$$

gibt bereits den Grundtypus des Systems der *Maxwell*schen Differentialgleichungen in bezug auf die räumlichen Differentialquotienten an. Die Differentialquotienten nach der Zeit sind indessen verschieden und hierin beruht zum Teil die Schwierigkeit, die *Maxwell*schen Gleichungen mechanisch zu deuten[2a]). Für die Optik indessen kann dies System mit dem *Maxwell*schen als gleichwertig bezeichnet werden und man kann andererseits wieder das allgemeinere *Mac Cullagh*-System für Kristalle zur Erweiterung der *Maxwell*schen Gleichungen für anisotrope Medien benutzen.

Besonders charakteristisch für die *Mac Cullagh*sche Theorie ist der Umstand, daß nicht die gewöhnlichen elastischen Deformationen, welche den Größen

$$\frac{\partial \mathfrak{r}_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{r}_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{r}_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{r}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{r}_z}{\partial y}$$

usw. proportional sind, vorkommen, sondern die Drehungen.

Vom Standpunkte der rein elastischen Theorien mußte daher die *Mac Cullagh*sche Behandlung weniger befriedigen, weil sie schon in den Grundlagen von der Theorie fester Körper mehr abwich, als die Theorien von *Green, Neumann* und *Kirchhoff*, wo die potentielle Energie des Äthers nur von den Deformationen der gewöhnlichen Elastizitätstheorie abhing.

Dem elektromagnetischen Standpunkt steht aber die *Mac Cullagh*sche Theorie näher als die anderen und kann in gewisser Beziehung als Vorläufer bezeichnet werden[3]).

Auch die Grenzbedingungen beim Übergang von einem Medium in ein anderes sind bei *Mac Cullagh* dieselben wie bei der elektromagnetischen Theorie, obwohl eine genauere Begründung nicht gegeben werden konnte.

2. B. Riemann. Als ein Vorläufer der elektromagnetischen Lichttheorie von elektrischer Seite ist die Arbeit von *Riemann*[4]) anzusehen,

---

2a) Vgl. *M. Witte,* Ann. Phys. 26, p. 235.

3) Die Übereinstimmung der Lichttheorie von *Mac Cullagh* mit der *Maxwell*schen hat *Fitz Gerald* gezeigt: Phil. Mag. (5) 7 (1879), p. 216.

4) *Riemann,* Ann. Phys. Chem. 91; Ges. Abh., p. 270. Vgl. Encykl. V 12, Art. Reiff und Sommerfeld, p. 46.

die im wesentlichen die Übereinstimmung zwischen Lichtgeschwindigkeit und dem Verhältnis der elektromagnetischen und elektrostatischen Einheiten zu einer Verknüpfung beider Gebiete zu benutzen sucht. *Riemann* erweitert die gewöhnliche *Poisson*sche Differentialgleichung des elektrostatischen Potentials

$$\Delta\varphi - 4\pi\varrho = 0$$

in die Gleichung

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi + c^2 4\pi\varrho = 0,$$

aus der ohne weiteres folgt, daß bei genügend langsamer Veränderlichkeit das Glied $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ nur als Korrektionsglied anzusehen ist.

Diese Gleichung ist den aus der *Maxwell*schen Theorie gefolgerten analog gebildet und spricht aus, daß sich die Wirkung von einem Punkt aus mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Die aus dieser Gleichung von *Riemann* gezogenen Folgerungen sind nach der Kritik von *Clausius*[5]) nicht einwandsfrei.

Der Unterschied der *Riemann*schen Gleichung von den *Maxwell*schen liegt darin, daß in den letzteren die von *Riemann* für das Potential aufgestellte Gleichung für jede Komponente der elektrischen und magnetischen Kraft gelten muß. Die *Riemann*sche Gleichung ist im allgemeinen mit den *Maxwell*schen unvereinbar, weil nach dieser bei veränderlichen Zuständen überhaupt kein Potential existiert.

3. Die Theorie von L. Lorenz. Etwas näher an die *Maxwell*sche Theorie rückt die von *Lorenz*[6]) heran. Er fügt zu den für Ströme geltenden Gesetzen, die aus der Fernwirkungstheorie abgeleitet sind, Glieder hinzu, welche aussprechen, daß die Wirkung in die Ferne Zeit zur Ausbreitung braucht, und welche mit den von *Kirchhoff* aus dem *Weber*schen Gesetz abgeleiteten Formeln übereinstimmen, wenn man die Glieder dritter Ordnung vernachlässigt.

Die *Kirchhoff*schen Gleichungen[6a]) lauten, wenn J_x den elektrischen Strom in der x-Richtung, ϱ die Dichte der Elektrizität, σ die Leitfähigkeit, r den Abstand des Aufpunktes xyz vom Integrationspunkte $x'y'z'$ bedeutet:

---

5) *Clausius,* Ann. Phys. Chem. 95, p. 606.

6) *Lorenz,* Über die Identität der Schwingungen des Lichtes mit elektrischen Strömen, Ann. Phys. Chem. 131, p. 243—263.

6a) *G. Kirchhoff,* Ges. Abh., p. 155.

$$\frac{J_x}{\sigma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U_x}{\partial t},$$

(VI) $$U_x = \int dS' \frac{x - x'}{r^3}\left\{J_x(x - x') + J_y(y - y') + J_z(z - z')\right\}$$

$$\varphi = \int dS' \frac{\varrho}{r},$$

wobei die Beziehung

(VIa) $$\operatorname{div} J = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

gilt.

Die Abhängigkeit der Raumdichte der Elektrizität ϱ von der Zeit wird nun so modifiziert, daß an einem bestimmten Raumpunkt die von einem elektrisierten Volumelement ausgehende Wirkung nicht von der Raumdichte der Elektrizität in der Entfernung r zu derselben Zeit, sondern von der um $\frac{r}{c_1}$ zurückliegenden Zeit abhängt. *Lorenz* geht also von demselben Gedanken wie *Riemann* aus; c_1 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung.

Berücksichtigen wir nur Glieder zweiter Ordnung der Größe $\frac{r}{c_1 t}$, so ist

(VII) $$\varrho_{t-\frac{r}{c_1}} = \varrho_t - \frac{\partial \varrho}{\partial t}\frac{r}{c_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\frac{r^2}{c_1^{\,2}},$$

ferner

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho_{t-\frac{r}{c_1}}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho_t}{r}\right) + \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\frac{x - x'}{r}.$$

Nennen wir Φ die Funktion, welche entsteht, wenn wir in φ anstatt t die Variable $t - \frac{r}{c_1}$ einführen, so ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int dS' \varrho \frac{x - x'}{r}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial}{\partial t}\int dS' \frac{d\varrho}{dt}\frac{x - x'}{r}.$$

Setzen wir für $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ seinen Wert aus (VIa), integrieren partiell über einen unendlich großen Raum, an dessen Grenzen die Wirkungen verschwinden, so erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{dS'}{r} J_x + \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial U_x}{\partial t}$$

oder bei Vernachlässigung von Gliedern vierter Ordnung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{dS'}{r} J_{x_{t-\frac{r}{c_1}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2c_1^{\,2}}\frac{\partial U_x}{\partial t}.$$

Mit der angewandten Näherung können wir demnach setzen, wenn $c^2 = 2c_1^2$ ist:

$$\text{(VIII)} \quad \frac{J_x}{\sigma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{dS'}{r} J_{x_{t-\frac{r}{c_1}}}.$$

Die Gleichungen sind deshalb bemerkenswert, weil die Form der Ausdrücke gerade die ist, welche in den neueren, besonders an die Arbeiten von *H. A. Lorentz*[7]) anknüpfenden Untersuchungen vorkommt.

Die Differentialgleichungen in der Form, wie sie für die Theorie des Lichtes gebraucht werden, gewinnt *Lorenz* durch die Benutzung eines von ihm aufgestellten Satzes[7a]), der ebenfalls in der Elektronentheorie eine große Rolle spielt.

Hiernach ist

$$\text{(IX)} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int \frac{dS'}{r} F\left(t - \frac{r}{c_1}, x', y', z'\right)$$
$$= -4\pi F(t, x, y, z).$$

Der Beweis dieses Satzes gelingt leicht, wenn man um den Punkt $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, also um $r = 0$, eine Kugel mit unendlich kleinem Radius beschreibt und für das Raumelement das durch Polarkoordinaten ausgedrückte $r^2 dr \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$ einführt.

Im ganzen Raum außerhalb der Kugel haben wir:

$$\frac{\partial \frac{F}{r}}{\partial r} = -\frac{F'}{c_1 r} - \frac{F}{r^2}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{F}{r}}{\partial r^2} = \frac{F''}{c_1^2 r} + \frac{2F'}{c_1 r^2} + \frac{2}{r^3}F,$$

$$\Delta \frac{F}{r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{F''}{c_1^2 r} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{F}{r}\right),$$

so daß also in diesem Raum

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int \frac{dS'}{r} F$$

verschwindet.

Für das Raumintegral über die kleine Kugel können wir nach dem *Green*schen Satz schreiben:

$$\Delta \int \frac{dS'}{r} F = \int d\omega \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{F}{r}\right) = \iint r^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F}{r}\right)$$
$$= 4\pi r^2 \left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{1}{r} - \frac{F}{r^2}\right)$$
$$= -4\pi F \quad \text{für } \lim r = 0.$$

7) *H. A. Lorentz,* Théorie électromagnétique de *Maxwell,* Leiden 1892, p. 119; Versuch einer Theorie usw., Leiden 1895, p. 51.

7a) *L. Lorenz,* J. f. Math. 58 (1861), p. 329.

Macht man dieselbe Umformung im Integral $\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{dS'}{r}$, so sieht man unmittelbar, daß es für lim $r = 0$ verschwindet. Es bleibt also nur $-4\pi F_{r=0}$ übrig.

Mit Hilfe dieses Satzes werden die Gleichungen (VIII) in folgende verwandelt:

$$\text{(X)} \qquad \Delta J_x - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 J_x}{\partial t^2} = 4\pi\sigma\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial J_x}{\partial t}\right).$$

Hier ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wirkungen

$$= c_1 = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

doch kann ebenso gut ein anderer Wert gefunden werden, wenn man nicht gerade von den *Kirchhoff*schen Gleichungen ausgeht, die sich auf das *Weber*sche Gesetz stützen.

Im leeren Raum ist $\varrho = 0$ und dann haben wir es mit reinen transversalen Wellen zu tun.

Auch die Grenzbedingungen werden in der Theorie von *Lorenz* bereits in derselben Weise, wie es in der *Maxwell*schen Theorie geschieht, angegeben.

Sie steht aber hinter dieser insofern zurück, als nur auf die elektrischen Kräfte, nicht auf die magnetischen, Rücksicht genommen wird. Der wichtige Umstand, daß neben der elektrischen immer eine magnetische Kraft besteht, die bei transversalen Wellen senkrecht aufeinander stehen, fehlt bei *Lorenz.* Dadurch geht ihr aber einer der wichtigsten Vorzüge der *Maxwell*schen Theorie verloren, daß sie die beiden einander gegenüberstehenden Systeme der älteren Theorie, deren Vektoren auch senkrecht zueinander angenommen werden mußten, zusammenfaßt[8]).

Die Theorie Maxwells.

4. Die Grundlagen. Die Grundlagen der *Maxwell*schen Theorie[9]) bedürfen noch sehr einer kritischen Bearbeitung. Es ist bisher noch

8) In bezug auf andere Theorien, die mit der *Maxwell*schen den Gedanken gemeinsam haben, daß die elektrische Fernwirkung Zeit braucht, vgl. *C. Neumann,* Die elektrischen Kräfte, Leipzig 1875; Prinzipien der Elekrodynamik, Tübingen 1868; *Loschmidt,* Wien Ber. 58 (1868), p. 17; *Edlund,* Théorie des phénomènes électriques, Mem. de l'acad. de Suède 12 (1873).

9) *Maxwell,* Phil. Trans. 1865, p. 459. Die *Maxwell*schen Gleichungen als Grenzfall in eine sowohl Fernkräfte als Polarisation des Mediums enthaltenden Theorie aufzunehmen versucht *Helmholtz,* Wiss. Abh. 1, p. 611. Vgl. *Glazebrook,* Cambridge Phil. Soc. 5 (1884—86), p. 142. Zu den Schwierigkeiten des Grenzüberganges vgl. *Heaviside,* Electrom. theory 2, p. 504.

nicht genügend klar dargestellt, was hypothetisch und was durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen sichergestellt ist. Es ist hier nicht der Ort, ausführlich auf diese Fragen einzugehen. Deshalb sei die Aufstellung der *Maxwell*schen Differentialgleichungen hier nur kurz erwähnt. Über ihre systematische Formulierung vgl. Encykl. V. 13, Art. *H. A. Lorentz.*

Als genügend durch Versuche bestätigt kann die Tatsache gelten, daß bei geschlossenen Strömen diese eine zirkulare magnetische Erregung des umgebenden Feldes hervorrufen, durch das die Stärke des Stromes selbst bestimmt werden kann. Wir haben daher die erste Fundamentalgleichung

$$\frac{1}{c}\mathfrak{J} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}.$$

Eine Erweiterung auf ungeschlossene Ströme ist bereits hypothetisch. Es bildet einen wesentlichen Teil der *Maxwell*schen Theorie, daß die zeitlichen Änderungen der elektrischen Erregung $\mathfrak{D}$ als Strömen gleichwertig betrachtet werden können und sich zu diesen ohne gegenseitige Störung addieren.

Die erweiterte Gleichung wird hiernach

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J} = c \operatorname{rot}\mathfrak{H}. \tag{1}$$

Da nun $\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho_e$ ist, so wird auch

$$\operatorname{div}\mathfrak{J} = -\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \operatorname{div}\mathfrak{C} = 0. \tag{1a}$$

Hieraus ergibt sich durch partielle Integration nach den Koordinaten

$$0 = \int d\omega\, \mathfrak{C}_N$$

erstreckt über eine geschlossene Fläche.

Diese Gleichung spricht aus, daß die durch eine geschlossene Fläche gehende Gesamtströmung Null ist.

Daher ist die Hypothese, daß die Gleichungen (1) nur für geschlossene Ströme gelten, unnötig und es genügt die eine, Leitungsstrom und Änderung der Erregung als gleichwertig anzusehen.

Das zweite System der *Maxwell*schen Gleichungen, welches aussagt, daß Änderungen der magnetischen Erregung zirkulare elektrische Kräfte hervorrufen, ist zunächst ganz hypothetisch, da diese Wirkungen bisher experimentell nicht mit Sicherheit nachgewiesen sind[10].

---

10) Vgl. *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. 23 (1884), p. 84; Ges. Abh. 1, p. 295.

Man kann jedoch diese Hypothese umgehen, wenn man dafür eine andere einführt, die bereits experimentelle Bestätigung gefunden hat, daß die elektrische Kraft sich mit der Phasengeschwindigkeit c_1 im Raum ausbreitet.

Da diese Ausbreitung bisher nur in isolierenden Medien sich hat bestimmen lassen, so können wir in Gleichung (X) $\sigma = 0$ setzen und haben nach unserer Hypothese für $\mathfrak{J}$ die Änderungsgeschwindigkeit der Erregung einzusetzen. So erhalten wir

$$c_1^2 \Delta \mathfrak{D} = \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Da ferner bei dieser Ausbreitung erfahrungsmäßig keine Ladungen im Innern des Mediums auftreten, so haben wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0.$$

Unter dieser Bedingung ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{D} = -\Delta \mathfrak{D} = -\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2}.$$

Für Isolatoren ist nach (1):

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2} = c \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c_1^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{D}.$$

Daher

$$\frac{c}{c_1^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathfrak{D}.$$

Ist nun

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \qquad \mu = \frac{c^2}{c_1^2} \frac{1}{\varepsilon},$$

so haben wir

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{3}$$

Nun kommen erfahrungsmäßig bei Änderungen der magnetischen Kraft keine solchen vor, die einem Strom analog wären. Die Gleichung (3) bedarf daher keiner Ergänzungen. Die der Gleichung $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ analoge $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ stellt die einfachsten Fälle der statischen Magnetisierung dar.

Die beiden Systeme (1) und (3) bilden nun die Basis der elektromagnetischen Lichttheorie.

Aus ihnen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{D} = -\operatorname{div} \mathfrak{J}.$$

Nach dem *Ohm*schen Gesetz ist[11])

$$\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E};$$

---

11) Das *Ohm*sche Gesetz ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß eine sich selbst überlassene elektrische Kraft nach der Differentialgleichung

daher ist

$$
(4) \qquad \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \sigma \mathfrak{E} &= c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= - c \operatorname{rot} \mathfrak{E}; \end{aligned}
$$

$$
(4a) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \varrho_m, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho_e, \quad \frac{\partial \varrho_e}{\partial t} = - \frac{\sigma}{\varepsilon} \varrho_e, \quad \varrho_e = \varrho_{e_0} e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}.
$$

Ist h eine der Koordinaten x, y, z, so haben wir

$$
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \Delta \mathfrak{E}_h - \frac{\partial \varrho_e}{\partial h},
$$

und wenn wir $\varrho_m = 0$ annehmen

$$
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = - \Delta \mathfrak{H}.
$$

Wenden wir diese Operationen auf (4) an, so können wir einmal $\mathfrak{E}$ und dann $\mathfrak{H}$ eliminieren und erhalten

$$
(5) \qquad \begin{aligned} \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= c^2 \Delta \mathfrak{H}, \\ \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_h}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathfrak{E}_h}{\partial t} &= c^2 \Delta \mathfrak{E}_h + \frac{\partial \varrho_e}{\partial h}. \end{aligned}
$$

So lange $\varrho_e = 0$ ist, breiten sich hiernach die elektrischen und magnetischen Kräfte in ganz gleicher Weise aus. Sie sind untrennbar miteinander verbunden und wenn durch die Leitungsfähigkeit des Mediums zunächst nur die elektrischen Kräfte direkt beeinflußt werden, so werden doch durch den Zusammenhang der magnetischen mit den elektrischen auch die ersteren bei der Ausbreitung der Schwingungen in derselben Weise verändert.

Die elektrische Energie setzen wir[12])

$$
(6) \qquad W_e = \tfrac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}), \quad \text{also wenn} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \text{ ist:} \quad W_e = \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2.
$$

die magnetische

$$
W_m = \tfrac{1}{2} (\mathfrak{H} \mathfrak{B}), \quad \text{also wenn} \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \text{ ist:} \quad W_m = \frac{\mu}{2} \mathfrak{H}^2.
$$

$$
\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = - \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}
$$

abnimmt. Dies wäre wohl die einfachste Deutung im ursprünglichen Faraday-Maxwellschen Sinne. Die Vorstellungen der Elektronentheorie sind mehr denen W. Webers ähnlich. Vgl. *E. Cohn*, Berlin Ber. 26 (1889), p. 405.

12) Dieser Ausdruck für die Energie ist die hypothetische Verallgemeinerung des für statische und stationäre Zustände geltenden, aus dem die tatsächlichen Beobachtungen ponderomotorischer Kräfte durch Variation der Lage sich ergeben. Vgl. *Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 400; Wiss. Abh. 1, p. 798; *Hertz*, Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 369; Ges. Abh. 2, p. 256.

Multiplizieren wir das erste Gleichungssystem (4) mit $\mathfrak{E}$, das zweite mit $\mathfrak{H}$ und addieren beide, so erhalten wir

$$\varepsilon\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \sigma\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = c(\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{E}).$$

Nun ist

$$\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \operatorname{div}[\mathfrak{H}\mathfrak{E}].$$

Nennen wir N die nach außen gerichtete Normale einer geschlossenen Fläche, integrieren über den von ihr umschlossenen Raum, so haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\,dS &= -\int d\omega\,\mathfrak{S}_N - \int dS\sigma\mathfrak{E}^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m),\end{aligned} \tag{7}$$

wo $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$.

Dies ist der *Poynting*sche Satz[13]). Den Vektor $\mathfrak{S}$ können wir den *Poynting*schen Vektor nennen. Er sagt aus, daß die zeitliche Änderung der gesamten elektromagnetischen Energie sich aus zwei Teilen zusammensetzt.

Der eine ist die Energie, die durch das Leitungsvermögen im Raum selbst in *Joule*sche Wärme verwandelt wird, der andere geht durch die Oberfläche des betrachteten Raumes hindurch.

Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts folgt, daß $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ senkrecht steht.

5. Grenzbedingungen. Von großer Wichtigkeit für die elektromagnetische Lichttheorie sind die Bedingungen, die an der Grenze verschiedenartiger Körper zu erfüllen sind. Diese Grenzbedingungen haben der älteren elastischen Theorie große Schwierigkeiten gemacht, weil es nicht möglich war, sie aus der Theorie der Elastizität fester Körper in der Weise zu entwickeln, wie es zur Ableitung der Gesetze der Reflexion und Brechung erforderlich war. Erst *F. Neumann*[14]) und *Kirchhoff* haben diese Schwierigkeiten bis zu einem gewissen Grade überwunden, indem sie das Prinzip der Erhaltung der Energie einführten. Hierbei war allerdings die Hypothese von Druckkräften, die an der Grenze wirksam werden, nicht zu vermeiden.

---

13) *Poynting*, London, Phil. Trans. 2 (1884), p. 343.

14) Von *F. Neumann* rührt die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf die Grenzbedingungen her, wobei indessen neue hypothetische Druckkräfte eingeführt werden müssen. Ann. Phys. Chem. 25; Vorles. über theoretische Optik, herausgeg. von Dorn, Leipzig 1885, p. 190. Die sachliche Formulierung hat *Kirchhoff* gegeben, Ges. Abh., p. 352. Noch allgemeiner *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 43 (1891), p. 410.

Es ist einer der wesentlichen Vorzüge der elektromagnetischen Theorie, daß sich die notwendigen Grenzbedingungen ohne Zuhilfenahme irgend einer Hypothese aus den Differentialgleichungen selbst ableiten lassen [15]). Man kann sie nach *Hertz* [16]) aus der Annahme gewinnen, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte beim Übergang von einem Körper in einen anderen nicht einen plötzlichen Sprung machen, sondern in der Grenzschicht schnell aber nicht unstetig von einem Wert zum anderen übergehen. Jedenfalls dürfen die Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte nicht unendlich werden. Bei der Bildung von rot $\mathfrak{E}$ und rot $\mathfrak{H}$ dürfen daher nach den Grundgleichungen auch diese Ausdrücke nicht unendlich werden.

Bilden wir die Differentialquotienten normal zur Grenzschicht, so müssen die Größen, die wir nach der Normale differenzieren, auf beiden Seiten der Grenzschicht gleiche Werte haben. Nun kommen bei der Operation rot nur Differentialquotienten vor, bei denen jede Komponente der Vektoren nach einer zu ihr senkrechten Richtung differenziert wird. Bei einer Differentiation nach der Normalen zur Grenzschicht kommen daher nur die zur Grenzschicht parallelen Komponenten in Betracht, während die normalen an beiden Seiten verschiedene Werte haben dürfen. Daß die normalen Komponenten unstetig sein dürfen, hängt damit zusammen, daß sich an der Oberfläche der Körper Ladungen ausbilden können. Auch bei der elektromagnetischen Lichttheorie müssen wir solche periodisch wechselnde Ladungen an den Grenzflächen der Körper annehmen.

Nach der allgemeinen elektromagnetischen Theorie können auch die magnetischen Komponenten normal zu den Grenzflächen verschiedene Werte annehmen. Die Erfahrung hat indessen gezeigt, daß bei den optischen Erscheinungen dazu kein Anlaß vorliegt und daß für diese die Permeabilität für alle Medien gleich, also

$$\mu = 1$$

zu setzen ist, so daß auch div $\mathfrak{H} = 0$ ist. Es kommt kein freier Magnetismus vor. Diese Gleichung erfordert denn auch, daß die Bedingung der Stetigkeit der parallelen magnetischen Komponenten auch

15) Daß die elektromagnetische Theorie ohne Zuhilfenahme besonderer Annahmen die richtigen Grenzbedingungen liefert zeigte *Helmholtz*, Wiss. Abh. 1, p. 558; J. f. Math. 72.

16) *H. Hertz*, Gött. Nachr. 19. März 1890; Ann. Phys. Chem. 40, p. 577; Ges. Abh. 2, p. 208.

die der normalen nach sich zieht, weil die Unstetigkeit dieser Komponente freien Magnetismus bedeuten würde.

Ist die Grenzfläche parallel der yx-Ebene, so folgt aus diesen Grenzbedingungen zunächst

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_x', \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_y', \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_x', \quad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_y', \quad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_z'$$

wenn sich die nicht gestrichenen Größen auf das eine Medium, die gestrichenen auf das andere beziehen.

Ferner geht aus den Gleichungen (4) hervor, daß auch

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \sigma \mathfrak{E}_z$$

auf beiden Seiten gleiche Werte haben.

6. Ebene Wellen. Die Gleichungen (5) für

$$\varrho_e = 0, \quad \mu = 1$$

werden integriert durch den Ansatz:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{H}\end{matrix}\right\} = A e^{int-(a+ib)z+i\vartheta}, \tag{8}$$

wenn die Gleichung besteht:

$$-\varepsilon n^2 + in\sigma = c^2(a+ib)^2$$

oder

$$\begin{aligned} -\varepsilon n^2 &= c^2(a^2 - b^2), \\ n\sigma &= 2c^2 ab. \end{aligned} \tag{9}$$

Hierdurch werden ebene Wellen dargestellt. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ behält denselben Wert, wenn $a = 0$ und $nt - bz + \vartheta = 0$ ist.

Dieser Ort schreitet mit der Geschwindigkeit $\frac{n}{b} = c_1$ in der Richtung der positiven z fort. Wir nennen diese Geschwindigkeit die Phasengeschwindigkeit.

Da die Größe $e^{int-ibz+i\vartheta}$ periodisch ist, so haben wir an einem feststehenden Ort periodische Schwankungen der Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Betrachten wir Wellen, die parallel der z-Achse fortschreiten und nehmen nur $\mathfrak{E}_x$ von Null verschieden an, so folgt aus den Gleichungen (4), wenn in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Größen A als A_e und A_m, die Größen ϑ als ϑ und ϑ_1 unterschieden werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0, \quad \mathfrak{H}_y &= A_m e^{int-(a+ib)z+i\vartheta}, \\ A_e(i\varepsilon n + \sigma) &= A_m c(a+ib) e^{i(\vartheta_1 - \vartheta)}, \\ A_m in &= A_e c(a+ib) e^{i(\vartheta - \vartheta_1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Durch Elimination von A_e und A_m ergeben sich wieder die Gleichungen (9).

Ist σ von Null verschieden, so ist es auch a. Schreiten die Wellen in der Richtung der positiven z fort, so ist b und damit auch a positiv und die Amplitude A erhält den Faktor e^{-az}, der ausspricht, daß die Amplitude beim Fortschreiten kleiner wird. Die Leitungsfähigkeit des Mediums bedingt Dämpfung der Wellen.

Da A_e und A_m, die Amplituden der elektrischen und magnetischen Wellen, reell sein müssen, so folgt

$$a \cos(\vartheta - \vartheta_1) - b \sin(\vartheta - \vartheta_1) = 0,$$

$$\text{(11)} \qquad \vartheta - \vartheta_1 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \frac{c_1^2}{c^2} \frac{\sigma}{n},$$

$$A_m = A_e \frac{c}{n} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Durch das Leitungsvermögen σ wird eine Phasendifferenz $\vartheta - \vartheta_1$ der magnetischen Kraft gegenüber der elektrischen bedingt. Ist $\sigma = 0$, so haben elektrische und magnetische Kraft gleiche Phase.

Die einzelnen Konstanten haben folgende Bedeutung:

n ist die Schwingungszahl in 2π Sekunden. Die Schwingungsdauer τ ist gleich $\frac{2\pi}{n}$; die Wellenlänge ist die Strecke in der Richtung z, auf der sich die Vektoren periodisch wiederholen, also $\lambda = \frac{2\pi}{b}$; die Konstante a bedingt die Dämpfung der Amplitude. a ist der Absorptionsindex für die Längeneinheit. Nach (9) ist dann

$$\text{(12)} \qquad a = \frac{1}{2} \frac{n\sigma}{c^2 b} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{c} \frac{c_1}{c};$$

er hängt also außer von dem Leitungsvermögen nur noch von den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in dem Medium und im freien Äther ab.

Die Phasengeschwindigkeit $\frac{n}{b}$ ergibt sich aus (9)

$$\text{(13)} \qquad c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon + \frac{a^2 c^2}{n^2}}}.$$

Für nicht absorbierende Medien ist $c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, *das Verhältnis der Phasengeschwindigkeit im Medium zu der im leeren Raum ist* $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Für $\mathfrak{E}$ kann man sowohl den reellen wie den imaginären Teil nehmen.

Nehmen wir den reellen, so ist

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= A_e \cos(nt - bz + \vartheta) e^{-az}, \\ \mathfrak{H}_y &= A_e \frac{c}{n} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(nt - bz + \vartheta_1) e^{-az}. \end{aligned}$$

Schreiben wir das Argument

$$nt - bz + \vartheta = \Theta,$$

so ist

$$(15)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{H}_y &= A_e \frac{c}{n} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\Theta + \vartheta_1 - \vartheta) e^{-az}, \\ \mathfrak{E}_x &= A_e \cos \Theta e^{-az}. \end{aligned}$$

Nun ist die elektrische Energie

$$W_e = \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}_x^2 = A_e^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2 \Theta\, e^{-2az}.$$

Bilden wir den Mittelwert über eine ganze Schwingung, nämlich

$$(16)\qquad \frac{1}{\tau} \int_0^\tau W_e dt = \frac{\varepsilon A_e^2}{4} e^{-2az} = \frac{c^2}{n^2} \frac{A_e^2}{4} e^{-2az} (b^2 - a^2),$$

letzteres wegen (9); ebenso ergibt sich

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau W_m dt = \frac{c^2}{n^2} e^{-2az} \frac{A_e^2}{4} (b^2 + a^2).$$

Hieraus folgt, daß die mittlere magnetische Energie im allgemeinen größer ist als die elektrische; nur wenn a gleich Null ist, also in nicht leitenden Substanzen, sind beide gleich. Da die mittlere elektrische Energie nicht negativ sein kann, so muß $a < b$ sein[17]. Die Schwächung der Wellen darf auf die Strecke z nicht $> e^{-bz}$ sein. Tatsächlich ist die Absorption bei Metallen beträchtlich größer. Hieraus läßt sich folgern, daß die *Maxwell*schen Gleichungen in dieser Form für die Theorie des Durchgangs des Lichts durch Metalle unzureichend sind.

Aus den Gleichungen (4) kann man sehen, daß Umkehr des Vorzeichens von b, also Umkehr der Fortpflanzungsrichtung, bei *isolierenden* Substanzen das entgegengesetzte Vorzeichen entweder der elektrischen oder der magnetischen Vektoren bedingt, was auch durch die Vektorenformel $\mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ ausgedrückt wird.

Wir haben bei vollständiger senkrechter Reflexion nach Gleichung (10) und (9) für $\sigma = 0$, wenn sich die einfallende Welle $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_y$ in der negativen, die reflektierte Welle $\mathfrak{E}_x'$, $\mathfrak{H}_y'$ in der positiven z-Richtung fortpflanzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \quad A_e \cos(nt + bz), \\ \mathfrak{H}_y &= -A_e \sqrt{\varepsilon} \cos(nt + bz), \end{aligned}$$

und

17) *E. Cohn*, Ann. Phys. Chem. 45 (1892), p. 58.

$$\mathfrak{E}_x' = A_e \cos(nt - bz),$$

$$\mathfrak{H}_y' = A_e \sqrt{\varepsilon} \cos(nt - bz),$$

daher

$$\mathfrak{E}_x + \mathfrak{E}_x' = 2 A_e \cos nt \cos bz,$$

$$\mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_y' = 2 \sqrt{\varepsilon} A_e \sin nt \sin bz.$$

Hierdurch werden stehende Wellen dargestellt. Wenn die elektrische Kraft ihr Maximum hat sowohl in bezug auf Zeit wie Raum, so ist die magnetische Null und umgekehrt. Es geht daher abwechselnd magnetische und elektrische Energie ineinander über und zu bestimmten Zeiten gibt es keine elektrische, zu anderen keine magnetische Energie im ganzen Raum.

Da nach (10) *elektrische und magnetische Vektoren senkrecht aufeinander stehen*, so ist die Energieströmung ein Maximum. Sie erfolgt in der Richtung der fortschreitenden Welle, indem

$$\mathfrak{S}_z = - A_e^2 \sqrt{\varepsilon} \cos^2(nt + bz)$$

und

$$\mathfrak{S}_z' = A_e^2 \sqrt{\varepsilon} \cos^2(nt - bz)$$

ist. Daher ist

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathfrak{S}_z \, dt = - \frac{A_e^2 \sqrt{\varepsilon}}{2}$$

und

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathfrak{S}_z' dt = \frac{A_e^2 \sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Die über eine ganze Schwingung erstreckte Strömung der Energie hebt sich daher bei stehenden Wellen auf.

7. Allgemeine Integrale der Maxwellschen Gleichungen in einem beliebigen unendlich ausgedehnten Medium. Die *Maxwell*schen Gleichungen (5) lassen sich häufig in solchen Fällen integrieren, wo es sich um Ausbreitung elektromagnetischer Störungen, die durch gegebene Anfangsbedingungen hervorgerufen werden, handelt. Die mathematischen Hilfsmittel dazu sind durch die Sätze von *Poisson, Gauß, Green, Helmholtz, Kirchhoff* u. a. geliefert.

Zunächst können wir die Gleichung

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_h}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathfrak{E}_h}{\partial t} = c^2 \Delta \mathfrak{E}_h + \frac{\partial \varrho_e}{\partial h}$$

vereinfachen. Es ist $\varrho_e = \varrho_{e_0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$ (nach 4a).

Setzen wir nun

$$(17) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_h + \frac{\varrho_e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}}{4\pi} \int \frac{dS}{r} \frac{\partial \varrho_{e_0}}{\partial h},$$

so haben wir die Gleichung

$$(18) \qquad \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathfrak{E},$$

die jetzt mit der Gleichung für den magnetischen Vektor identisch ist.

Die Gleichung (17) lehrt den Einfluß etwa vorhandener Ladungen berechnen. In Leitern nimmt dieser Einfluß sehr schnell ab.

Für die Integration haben wir uns nur mit Gleichungen von der Form (18) zu beschäftigen.

Wenn zur Zeit $t = 0$ die Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in einem bestimmten Raum S vorgeschriebene Werte haben und außerhalb desselben Null sind, so läßt sich nach einem von *Birkeland*[18]) angegebenen Verfahren der Wert dieser Größen zu einer beliebigen anderen Zeit bestimmen.

Wir machen zunächst einige vorbereitende Betrachtungen.

Es sei

$$(19) \qquad U = \int \frac{F}{t}\, d\omega,$$

ausgedehnt über eine Kugelfläche vom Radius $r = c_1 t$.

F ist eine Funktion der drei Variabeln

$$x + c_1 t \cos\alpha, \quad y + c_1 t \sin\alpha \cos\beta, \quad z + c_1 t \sin\alpha \sin\beta,$$

α, β sind die Winkel der Polarkoordinaten. Die Funktion F ist beliebig und wird später das zur Zeit $t = 0$ gegebene Feld darzustellen haben.

Nun ist

$$\int_0^r dr\, U = V$$

das über das Innere unserer Kugel erstreckte Raumintegral. Daher ist auch

$$U = \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad V = \int \frac{F}{t}\, dS$$

und

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{t} \Delta F\, dS.$$

Hier ist zunächst nach x, y, z zu differenzieren. Setzen wir $r \cos\alpha = x'$ usw., so können wir x und x' vertauschen. Wir können da-

18) *Birkeland*, Arch. de Génève 34 (1895), p. 1. Die Darstellung folgt der Entwicklung von *Cohn*, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, p. 412.

her auch nach den Variabeln differenzieren, über die die Integration erstreckt wird.

Nach dem *Green*schen Satz ist aber

$$\int \Delta F \, dS = \int \frac{\partial F}{\partial r} \, d\omega,$$

also

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{t} \frac{\partial F}{\partial r} \, d\omega = \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{t} \frac{\partial F}{\partial r} r^2 d\Omega,$$

wo $d\Omega$ das Flächenelement der Kugel vom Radius Eins ist.

Weiter ist

$$\Delta U = \int \frac{1}{t} \left(r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial F}{\partial r} \right) d\Omega \quad \text{und da} \quad r = c_1 t,$$

$$= \int \left(t \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial t} \right) d\Omega.$$

Nun ist auf der Kugeloberfläche

$$U = c_1^2 \int d\Omega \, tF,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_1^2 \int d\Omega \left(t \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial t} \right) = c_1^2 \Delta U. \tag{20}$$

Für die weiteren Vorbereitungen bilden wir die Funktion

$$W = \frac{\sigma_1^2}{8 c_1^3} \int_0^{c_1 t} dr \int r^2 d\Omega \, F \varphi + \int F t \, d\Omega, \tag{21}$$

wo φ eine Funktion von $c_1^2 t^2 - r^2$ sein soll, die für $c_1 t = r$ gleich Eins wird und die durch eine Differentialgleichung bestimmt werden wird, um später die Integration der Maxwellschen Gleichungen zu ermöglichen; über die Konstante σ_1 wird unten verfügt werden. Ferner ist

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\sigma_1^2}{8 c_1^3} \int_0^{c_1 t} dr \int r^2 d\Omega \, F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\sigma_1^2 \mathfrak{R} t^2}{8} \int_{r = c_1 t} F \, d\Omega + \frac{\sigma_1^2}{4} t \int F \, d\Omega \tag{22}$$

$$+ \frac{\sigma_1^2}{8} t^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{r = c_1 t} F \, d\Omega + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int F t \, d\Omega,$$

wo $\mathfrak{R} = \dfrac{d\varphi}{dt}_{r = c_1 t}$ ist.

Ferner ist

$$c_1^2 \Delta W = \frac{\sigma_1^2}{8 c_1} \int_0^{c_1 t} dr \int r^2 d\Omega \, \Delta F \varphi + c_1^2 \Delta \int F t \, d\Omega. \tag{23}$$

Auch hier können wir die Variabeln vertauschen und nach dem *Green*schen Satz schreiben

$$\int dS\,\Delta F\varphi = \int F\Delta\varphi\, dS + \int d\omega\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial r} - F\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right).$$

An der Oberfläche ist $r = c_1 t$,

$$d\omega = r^2 d\Omega = c_1{}^2 t^2 d\Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{1}{c_1} = -\frac{\mathfrak{K}}{c_1},$$

da φ eine Funktion von $c_1{}^2 t^2 - r^2$ ist.

Daher ist

$$(24)\qquad \int dS\,\Delta F\varphi = \int F\Delta\varphi\, dS + c_1 t^2\int d\Omega\frac{\partial F}{\partial t} + \mathfrak{K}c_1 t^2\int F\, d\Omega.$$

Ziehen wir nun (23) von (22) ab und berücksichtigen (20) und (24), so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_1{}^2\Delta W = \frac{\sigma_1{}^2}{8c_1{}^3}\int dS F\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_1{}^2\Delta\varphi\right) + \frac{\sigma_1{}^2 t}{4}\int F\, d\Omega.$$

Bestimmen wir nun φ durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_1{}^2\Delta\varphi = \frac{\sigma_1{}^2}{4}\varphi$$

und so, daß für $c_1{}^2 t^2 = r^2$ die Funktion $\varphi = 1$ wird, dann ist

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_1{}^2\Delta W = \frac{\sigma_1{}^2}{4}W.$$

Nun ist φ eine Funktion von $c_1{}^2 t^2 - r^2$, daher

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_1{}^2\Delta\varphi = 4\varphi'' c_1{}^2(c_1{}^2 t^2 - r^2) + 8\varphi' c_1{}^2 = \frac{\sigma_1{}^2}{4}\varphi,$$

wo φ' und φ'' die erste und zweite Derivierte nach $c_1{}^2 t^2 - r^2$ sind. Daher haben wir für φ die Gleichung

$$\varphi'' + \frac{2}{c_1{}^2 t^2 - r^2}\varphi' - \frac{\sigma_1{}^2}{16c_1{}^2}\frac{\varphi}{c_1{}^2 t^2 - r^2} = 0.$$

Setzen wir $c_1{}^2 t^2 - r^2 = -\frac{u^2}{4}$, so erhalten wir

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d\varphi}{du} + \frac{\sigma_1{}^2}{16c_1{}^2}\varphi = 0,$$

die durch die *Bessel*sche Funktion $J_1\left(\frac{u\sigma_1}{4c_1}\right)$ integriert wird.

Für kleine Werte von $\frac{u\sigma}{4c_1}$ gilt die Reihenentwicklung

$$(26)\qquad \begin{aligned}\varphi &= 1 - \frac{u^2\sigma_1{}^2}{2\cdot 4\cdot 16}\frac{1}{c_1{}^2} + \frac{u^4\sigma_1{}^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{(16c_1{}^2)^2}\cdots\\ &= 1 + \frac{(c_1{}^2t^2 - r^2)\sigma_1{}^2}{2\cdot 4\cdot c_1{}^2}\frac{1}{4} + \frac{(c_1{}^2t^2 - r^2)\sigma_1{}^2}{2\cdot 4\cdot c_1{}^4}\frac{1}{16}\cdots.\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Lösung der Aufgabe ohne weiteres hinschreiben. Im Raum S ist $\mathfrak{E} = \Phi$ als Funktion des Orts zur Zeit $t = 0$ gegeben. Da auch die magnetischen Kräfte gegeben sein müssen, so ist durch die Gleichungen (4) auch $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \Phi_1$ bekannt.

Im übrigen muß $\mathfrak{E}$ der Gleichung (18) genügen.

Setzen wir

$$\mathfrak{E} = e^{-\frac{\sigma}{2\varepsilon}t}\mathfrak{E}_1,$$

so haben wir, wenn wir $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \sigma_1$, $\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = c_1^2$ setzen, für $\mathfrak{E}_1$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_1}{\partial t^2} - \frac{\sigma_1^2}{4}\mathfrak{E}_1 = c_1^2 \Delta \mathfrak{E}_1. \tag{27}$$

Wir behaupten, daß diese Differentialgleichung durch den Ausdruck integriert wird:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_1^2}{8c_1^3}\int_0^{c_1 t} dr\left[\int r^2 d\Omega\,\varphi\left(\frac{\sigma_1}{2}\Phi + \Phi_1\right) + \frac{\partial}{\partial t}\int \Phi\,\varphi r^2 d\Omega\right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left[\int t\,d\Omega\left(\frac{\sigma_1}{2}\Phi + \Phi_1\right) + \frac{\partial}{\partial t}\int t\,d\Omega\,\Phi\right].$$

In der Tat, da $\mathfrak{E}_1$ analog der durch (21) definierten Funktion W gebildet ist, so genügt sie der Gleichung (25) oder, was dasselbe ist (27). Für $t = 0$ wird der Radius der Kugel $r = c_1 t$ ebenfalls Null Es verschwinden daher die Volumintegrale und es bleibt nur

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{4\pi}\int \Phi\, d\Omega = \Phi.$$

Da nun für $t = 0$

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}$$

ist, so ist auch

$$\mathfrak{E} = \Phi$$

für $t = 0$.

Andererseits ist

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega\left(\frac{\sigma_1}{2}\Phi + \Phi_1\right) = \frac{\sigma_1}{2}\Phi + \Phi_1 \text{ für } t = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\frac{\sigma_1}{2}\mathfrak{E}_1 + \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial t} = -\frac{\sigma_1}{2}\Phi + \Phi_1 + \frac{\sigma_1}{2}\Phi = \Phi_1 \text{ für } t = 0.$$

Also sind auch die Anfangsbedingungen erfüllt.

Zunächst folgt, daß für alle Punkte, die so liegen, daß die um sie mit dem Radius $r = c_1 t$ gelegte Kugel das Störungsgebiet, wo Φ und Φ_1 von Null verschieden sind, nicht trifft, $\mathfrak{E}$ verschwindet. Man denke sich um einen solchen Aufpunkt außerhalb des Störungsgebiets die Kugel mit dem Radius $c_1 t$ gelegt, die sich mit vorrückender Zeit allmählich erweitert. $\mathfrak{E}$ ist so lange Null, bis die Kugel das Störungsgebiet berührt. Dringt sie nun in das Störungsgebiet ein, so sind Φ und Φ_1 von Null verschieden und zwar für das Stück der Kugeloberfläche, die sich im Störungsgebiet befindet und für den Raumteil, der sich im Innern der Kugel befindet. Bei weiterem Vorrücken der Kugel geht ihre Oberfläche wieder aus dem Störungsgebiet heraus, dann sind Φ und Φ_1 an der Kugeloberfläche wieder Null, aber das ganze Störungsgebiet liegt im Innern der Kugel.

Ist also σ von Null verschieden, so ist $\mathfrak{E}$ zunächst Null, bis die Kugel das Störungsgebiet berührt, es wird dann von Null verschieden in einem genau angebbaren Moment. Dann bleibt es von Null verschieden, da zunächst Oberflächenintegrale und Raumintegrale, dann die letzteren allein Beiträge liefern, bis für $t = \infty$ der Wert von $\mathfrak{E} = 0$ wird.

Ist dagegen $\sigma = 0$, das Medium also ein Isolator, dann verschwinden die Raumintegrale und $\mathfrak{E}$ wird wieder Null, sobald die Kugel das Störungsgebiet wieder verläßt. In diesem Falle tragen zum Werte von $\mathfrak{E}$ nur die Punkte im Störungsgebiet bei, die auf der Kugelfläche liegen. Dagegen tragen bei einem leitenden Medium alle Punkte zum Werte von $\mathfrak{E}$ bei, welche die sich erweiternde Kugel einmal aufgenommen hat. Sobald also die Kugel durch das Störungsgebiet hindurchgegangen ist, hängt der Wert von $\mathfrak{E}$ von allen Punkten des Störungsgebietes ab.

Wird z. B. eine fluoreszierende Substanz, die sich in einem durchsichtigen Medium befindet, plötzlich bestrahlt und leuchtet unter dieser Strahlung selbst, so wird die Lichtintensität des Fluorescenzlichts an einem Ort des Mediums bestimmt werden durch die Wellen, die von jedem Element der leuchtenden Substanz ausgehen. Wenn dagegen das Medium absorbiert, so gelangt zwar die Strahlung an jeden Ort mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Außerdem ist aber noch eine Nachwirkung vorhanden, die von allen Elementen der leuchtenden Substanz ausgehend zu derselben Zeit eine bestimmte allmählich abklingende Lichtintensität hervorruft.

Wie übrigens bereits erwähnt, sind die *Maxwell*schen Gleichungen in der Form, wie wir sie auf elektromagnetischer Grundlage aufgestellt haben, für die Darstellung der Absorption des Lichtes unzureichend.

Auf die notwendigen Ergänzungen kommen wir später zurück.

Dagegen sind die Gleichungen für durchsichtige Medien ausreichend, sobald man von den Erscheinungen der Dispersion, die mit der Absorption eng zusammenhängt, absieht.

8. Ausbreitung beliebiger Störungen in durchsichtigen Medien. Für durchsichtige Medien haben wir die Gleichungen

$$
\begin{gathered}
c_1^2 \Delta \mathfrak{E} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2},\\
c_1^2 \Delta \mathfrak{H} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2},\\
\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.
\end{gathered} \tag{28}
$$

Für die Behandlung spezieller Fälle sich ausbreitender elektromagnetischer Störungen, die namentlich auch für die Beugungstheorie nützlich sind, dienen folgende Theoreme[19]).

Sei

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Wir differenzieren $\frac{1}{r}$ nach $\mathfrak{a}$ verschiedenen Richtungen $p_1, \ldots, p_{\mathfrak{a}}$. Dann ist eine „räumliche Kugelfunktion" F und eine zugehörige „Kugelflächenfunktion" f dargestellt durch

$$F_{\mathfrak{a}} = \frac{(-1)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{f_{\mathfrak{a}}}{r^{\mathfrak{a}+1}},$$

wo f nicht von der Größe von r, sondern nur von der Richtung abhängt.

Aus der Homogenität von F folgt[20]), daß

$$x \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial x} + y \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial y} + z \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial z} = -(\mathfrak{a}+1) F_{\mathfrak{a}}$$

und aus der Darstellung von F als Differentialquotient von $1/r$, daß

$$\Delta F_{\mathfrak{a}} = 0$$

ist. Wir machen nun für $\mathfrak{E}$ den speziellen Ansatz

$$\mathfrak{E} = \psi \, [\mathfrak{h} \operatorname{grad} F_{\mathfrak{a}}], \tag{29}$$

wo ψ nur eine Funktion von r ist und $\mathfrak{h}$ den Vektor x, y, z bezeichnet.

Zunächst folgt

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

Mit Rücksicht auf $\Delta F_{\mathfrak{a}} = 0$ ist

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathfrak{E}_x = \left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\left(y \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial z} - z \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial y}\right) \\
+ \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\left(xy \frac{\partial^2 F_{\mathfrak{a}}}{\partial x \partial z} + y^2 \frac{\partial^2 F_{\mathfrak{a}}}{\partial y \partial z} + yz \frac{\partial^2 F_{\mathfrak{a}}}{\partial z^2} + y \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial z}\right. \\
\left. - xz \frac{\partial^2 F_{\mathfrak{a}}}{\partial x \partial y} - yz \frac{\partial^2 F_{\mathfrak{a}}}{\partial y^2} - z^2 \frac{\partial^2 F_{\mathfrak{a}}}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

---

19) *H. A. Rowland,* Amer. J. of math. 6, Nr. 4. Vgl. auch Phil. Mag. (5) 17, (1884), p. 413.

20) *Maxwell,* Treatise on electr. and magn. 1, p. 180.

Schreiben wir

$$y \frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial z} - z \frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial y} = \chi,$$

so ist

$$\Delta \mathfrak{E}_x = \left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\chi + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\left(x\frac{\partial \chi}{\partial x} + y\frac{\partial \chi}{\partial y} + z\frac{\partial \chi}{\partial z}\right).$$

Da nun χ ebenfalls eine homogene Funktion der Koordinaten von demselben Grade wie $F_\mathfrak{a}$ ist, so haben wir

$$x\frac{\partial \chi}{\partial x} + y\frac{\partial \chi}{\partial y} + z\frac{\partial \chi}{\partial z} = -(\mathfrak{a}+1)\chi$$

und

(29a) $$\Delta \mathfrak{E}_x = \left[\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{d\psi}{dr}\frac{2}{r}\mathfrak{a}\right]\chi.$$

Zunächst folgt aus der Gleichung (28) und (29a), wenn wir

$$\psi = \varphi_\mathfrak{a} r^\mathfrak{a} e^{i(nt+br)}$$

setzen, wo φ nur von r abhängt, daß wir ψ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r}\mathfrak{a}\frac{d\psi}{dr} = -\frac{n^2}{c_1{}^2}\psi,$$

und da

$$\frac{n^2}{c_1{}^2} = b^2$$

ist, daß wir $\varphi_\mathfrak{a}$ der Differentialgleichung

(30) $$\frac{d^2\varphi_\mathfrak{a}}{dr^2} + \frac{2in}{c_1}\frac{d\varphi_\mathfrak{a}}{dr} - \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1)}{r^2}\varphi_\mathfrak{a} = 0$$

unterwerfen müssen.

Zu demselben Resultat führt die Behandlung von $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$, so daß durch die Ausdrücke (29) die Gleichungen (28) integriert werden, sobald (30) erfüllt ist. Durch diese Wahl von φ ist also die Abhängigkeit der durch (29) dargestellten speziellen Lösungen $\mathfrak{E}$ von r festgelegt.

Setzen wir

$$\varphi_\mathfrak{a} = a_0 + a_1\frac{ic_1}{n}\frac{1}{r} - a_2\frac{c_1{}^2}{n^2}\frac{1}{r^2}\cdots + a_j\left(\frac{ic_1}{n}\right)^j\frac{1}{r^j} + \cdots,$$

so ergibt sich a_j aus a_{j-1} nach der Formel

$$a_j = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1)a_{j-1} - j(j-1)a_{j-1}}{2j}.$$

Ist $\mathfrak{a}$ ganzzahlig, so ist für ein bestimmtes j

$$-\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1) + j(j-1) = 0;$$

wenn daher

$$j = \mathfrak{a} + 1$$

ist, wird

$$a_j = 0.$$

Mit diesem Gliede bricht die Reihe ab.

Für $r = \infty$ wird $\varphi_\mathfrak{a} = a_0$.

Wir gehen jetzt von unseren speziellen Lösungen $\mathfrak{E}$ zu einer allgemeineren über.

Denken wir uns die Werte von $\mathfrak{E}$ auf der unendlichen Kugelfläche gegeben, so müssen diese sich nach der Beziehung

$$F_{\mathfrak{a}} = \frac{f_{\mathfrak{a}}}{r^{\mathfrak{a}+1}},$$

wo f nicht von r abhängt, für konstantes r ausdrücken lassen durch die Gleichungen (29), wobei die F in Reihen, die nach den Funktionen f fortschreiten, entwickelt sind. Dadurch sind die $\mathfrak{E}$ ebenfalls durch Reihen, die nach Größen $\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}$ fortschreiten, dargestellt.

Daß dies möglich ist, folgt aus der Theorie der Kugelfunktionen.

Die $\mathfrak{E}$ sind von r unabhängig, aber sie müssen der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} = 0$$

genügen. Sind α und β die Winkel der Polarkoordinaten, so daß

$$x = r \cos \alpha,$$
$$y = r \sin \alpha \cos \beta,$$
$$z = r \sin \alpha \sin \beta$$

ist, so können wir die $\mathfrak{E}$ auf die Form bringen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_{\mathfrak{a},x} = \text{const.} \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial \beta}, \\ (31)\qquad &\mathfrak{E}_{\mathfrak{a},y} = \text{const.} \left(- \sin\beta \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial \alpha} - \cos\beta \operatorname{cotg}\alpha \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial \beta}\right), \\ &\mathfrak{E}_{\mathfrak{a},z} = \text{const.} \left(\cos\beta \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial \alpha} - \sin\beta \operatorname{cotg}\alpha \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial \beta}\right), \end{aligned}$$

wodurch die Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} = 0$ für $r = \text{const.}$ erfüllt ist. Dies ist die Operation $[\mathfrak{h} \operatorname{grad} F_{\mathfrak{a}}]$ für $r = \text{const.}$

Man überzeugt sich davon leicht, wenn man beachtet, daß für $r = \text{const.}$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} = - \frac{\sin\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ (32)\qquad &\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin\beta}{r\sin\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta}, \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\cos\alpha\sin\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos\beta}{r\sin\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \end{aligned}$$

ist. An der Oberfläche $r = R = \infty$ sollen nun die $\mathfrak{E}$ durch die $\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}$ dargestellt sein:

$$(33\text{a})\qquad \mathfrak{E}_{r=R} = \frac{a_0 e^{i(nt+bR)}}{R} \{A_0 \mathfrak{E}_0 + A_1 \mathfrak{E}_1 + A_2 \mathfrak{E}_2 \ldots\}.$$

Wir behaupten, daß im übrigen Raum die $\mathfrak{E}$ gegeben sind durch

$$(33)\qquad \mathfrak{E} = \frac{e^{i(nt+br)}}{r}\{A_0\varphi_0\mathfrak{E}_0 + A_1\varphi_1\mathfrak{E}_1 + A_2\varphi_2\mathfrak{E}_2 \ldots\}.$$

Für $r = \text{const.}$ ist: $\mathfrak{E} = \frac{\psi}{r^{\mathfrak{a}+1}}[\mathfrak{h} \operatorname{grad} f_{\mathfrak{a}}] = \frac{\varphi}{r}[\mathfrak{h} \operatorname{grad} f_{\mathfrak{a}}]$. Da nun durch (31) diese Beziehung erfüllt ist, so muß jedes Glied der Gleichung (33) die Gleichungen (28) erfüllen, wenn die $\varphi_{\mathfrak{a}}$ der Gleichung (30) genügen.

Da für $r = R = \infty$ die sämtlichen $\varphi = a_0$ werden, so geht für diesen Wert (33) in (33a) über.

Wir haben daher das Theorem:

Wenn die Vektoren $\mathfrak{E}$ auf der unendlichen Kugelfläche bekannt sind, lassen sie sich durch Reihen, die nach Kugelfunktionen fortschreiten, an jeder Stelle des Raumes ausdrücken.

Ganz dieselben Betrachtungen beziehen sich auf die magnetischen Kräfte, die, sobald die elektrischen Kräfte gegeben sind, durch die Gleichungen (4) bestimmt sind.

Man kann indessen auch von der magnetischen Kraft ausgehen und die Gleichungen (29) auf diese anwenden.

Setzen wir, um einen speziellen Fall zu betrachten,

$$F = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3},$$

so erhalten wir Symmetrieverhältnisse um die z-Achse.

Dann ist bei Anwendung von (29)

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\psi y}{r^3},$$

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\psi x}{r^3},$$

$$\mathfrak{H}_z = 0.$$

Da $\mathfrak{H}_x x + \mathfrak{H}_y y = 0$ ist, gibt es keine radialen magnetischen Kräfte.

Diese bilden Kreise um die z-Achse.

Es ist $\mathfrak{a} = 1$, also folgt $a_{\mathfrak{a}} = -a_0$, daher

$$\psi = a_0\left(r - \frac{ic_1}{n}\right)e^{i(nt+br)}$$

und

$$\mathfrak{H}_x = -a_0\left(r - \frac{ic_1}{n}\right)\frac{y}{r^3}e^{i(nt+br)},$$

$$\mathfrak{H}_y = a_0\left(r - \frac{ic_1}{n}\right)\frac{x}{r^3}e^{i(nt+br)}.$$

Ferner ist

$$\frac{n}{c_1} = -b = \frac{2\pi}{\lambda}$$

daher

$$(34)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \quad i a_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{i(nt+br)}}{r}\right), \\ \mathfrak{H}_y &= - i a_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{i(nt+br)}}{r}\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach (4)

$$(35)\qquad \begin{aligned} \varepsilon \mathfrak{E}_x &= \frac{a_0}{b} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{e^{i(nt+br)}}{r}\right), \\ \varepsilon \mathfrak{E}_y &= \frac{a_0}{b} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{e^{i(nt+br)}}{r}\right), \\ \varepsilon \mathfrak{E}_z &= - \frac{a_0}{b}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{i(nt+br)}}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{e^{i(nt+br)}}{r}\right)\right). \end{aligned}$$

Für sehr kleine r wird

$$e^{i(nt+br)} = e^{int}.$$

Daher ist

$$(36)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{E}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \Delta \Phi = 0, \\ \Phi = \frac{a_0 \partial}{b\, \partial z}\left(\frac{e^{int}}{r}\right). \end{gathered}$$

Dies ist das Potential eines elektrischen Doppelpols, dessen Moment $\frac{a_0}{b}$ ist und dessen Ladung in der Periode $\frac{2\pi}{n}$ zwischen gleichen positiven und negativen Werten hin und her schwankt.

Die aufgestellten Formeln erlauben, die elektrischen und magnetischen Kräfte im ganzen Raum zu berechnen[21]). Durch sie werden die *Hertz*schen Schwingungen eines kleinen Senders dargestellt.

Zu demselben Ausdruck wird man geführt, wenn man annimmt, daß eine sehr kleine elektrische Ladung sich um ihre Ruhelage hin und her bewegt. Nur müssen die Elongationen klein gegen $\frac{1}{b}$ sein. Vgl. Encykl. V. 14, Art. *Lorentz*, Nr. **17**.

Bei diesen im Punkte $r = 0$ erregten elektrischen Schwingungen wird bei jeder Schwingung Energie ausgestrahlt.

Wird die Amplitude der Schwingung $\frac{a_0}{b} = A$ konstant gehalten, so berechnet sich die ausgestrahlte Energie, indem man den Poynting-

21) Diese Formeln sind zuerst von *Rowland* a. a. O. gegeben. Später hat sie offenbar unabhängig *Hertz* entwickelt, Ann. Phys. Chem. 36 (1888), p. 1; Ges. Abh. 2, p. 147. Vgl. *H. A. Lorentz*, Versuch einer Theorie usw., p. 54 sowie Encykl. V 18 Art *Abraham*.

schen Vektor über eine unendlich große Kugelfläche integriert. Es ergibt sich für eine Schwingung

$$\frac{16\,\pi^4 A^2}{3\lambda^3}.$$

Es ist sehr wahrscheinlich, daß der hier betrachtete Typus von Schwingungen auch bei der Lichterregung im wesentlichen mitspielt. Es ist jedoch nicht nötig, auf diesen Mechanismus näher einzugehen, wenn es sich nur darum handelt, die Art der Ausbreitung im Raum zu untersuchen. Dann kann die Störung selbst beliebig sein.

Man braucht daher nur eine Lösung der Gleichungen (28)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_1{}^2 \Delta \varphi$$

zu benutzen, die an der Erregungsstelle selbst unendlich werden muß, wodurch ausgedrückt wird, daß dort Zufuhr von Energie stattfindet.

Nehmen wir

$$\varphi = A \frac{e^{i(nt+br)}}{r}.$$

Dann haben wir Schwingungen, die im Punkte $r = 0$ erregt werden und sich nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit

$$-\frac{n}{b} = c_1$$

ausbreiten.

9. Das Huygenssche Prinzip. Für das Studium dieser Ausbreitung ist das *Huygens*sche Prinzip von großem Nutzen, das seine präzise Formulierung in einer Erweiterung des *Green*schen Satzes[22]) findet. Nach dem *Green*schen Satz ist

$$\text{(37)} \qquad \int dS(V\Delta\varphi - \varphi\Delta V) = \int d\omega \left(V\frac{\partial\varphi}{\partial N} - \varphi\frac{\partial V}{\partial N}\right).$$

Wenn nun

$$V = \frac{Ae^{i(nt+br)}}{r}$$

ist, so haben wir nach (28)

$$\Delta V + \frac{n^2}{c^2} V = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta V + b^2 V = 0.$$

Genügt φ derselben Gleichung, so können wir schreiben:

$$\int dS(V\Delta\varphi + b^2 V\varphi - \varphi\Delta V - b^2 V\varphi) = \int d\omega \left(V\frac{\partial\varphi}{\partial N} - \varphi\frac{\partial V}{\partial N}\right)$$

22) Vgl. *Helmholtz,* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, J. f. Math. 57 (1859), p. 1; Wiss. Abh. I, p. 303; *Kirchhoff*, Zur Theorie der Lichtstrahlen, Berlin Ber. 22. Juni 1881, p. 641; Ann. Phys. Chem. 18 (1883), p. 663; Ges. Abh. Nachtrag, p. 22.

oder

$$(37\mathrm{a})\qquad 0 = \int d\omega \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \frac{\partial V}{\partial N} \right).$$

Nun ist

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} e^{i(nt+br)} + \frac{iAbe^{i(nt+br)}}{r},$$

wenn es sich um eine Kugelfläche handelt. Eine kleine Kugel legen wir um den Punkt $r = 0$, um diesen, in dem die Funktion unstetig wird, auszuschließen. Ist $d\Omega$ das Element der Kugeloberfläche vom Radius Eins, so haben wir $d\omega = r^2 d\Omega$, daher über diese Kugel erstreckt

$$A \int\limits_{\lim r=0} d\Omega \left\{ r e^{i(nt+br)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(e^{i(nt+br)} - ibre^{i(nt+br)}\right) \varphi \right\},$$

$$= 4\pi A e^{int} \varphi_0,$$

wo φ_0 den Wert von φ für $r = 0$ bezeichnet.

Außerdem sind die Integrationen über die Grenzflächen des betrachteten Raumes zu erstrecken. Daher bleibt

$$(38)\qquad 4\pi\varphi_0 = \int d\omega\, \varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ibr}}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial N} - \int d\omega \frac{e^{ibr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

Diese Gleichung stellt eine präzise Fassung des *Huygens*schen Prinzips dar[23]).

Das zweite Integral stellt eine auf der Oberfläche ausgebreitete Schicht von Erregungspunkten dar, deren Amplitude $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ proportional ist.

Das erste bedeutet eine Doppelschicht von Erregungspunkten. Die Amplitude der einen Schicht ist $-\frac{\varphi}{dN}$, die der anderen, die sich im Abstande dN befindet, $+\frac{\varphi}{dN}$ proportional. Die erste hat den Faktor $\frac{e^{ibr}}{r}$, die andere $\frac{e^{ibr}}{r} + \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{e^{ibr}}{r}\right) dN$. Wenn beide zusammenwirken, bleibt $\varphi \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{e^{ibr}}{r}\right)$.

Sei nun φ die Funktion, wenn ein undurchsichtiger Körper in den Raum gebracht wird, φ' dieselbe Funktion ohne den Körper.

Nach (38) kann die Änderung von φ' durch die Anwesenheit des Körpers durch ein über seine Oberfläche genommenes Integral berücksichtigt werden.

Daher ist

$$4\pi(\varphi - \varphi') = \int d\omega\, \varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ibr}}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial N} - \int d\omega \frac{e^{ibr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

---

23) Eine Erweiterung auf absorbierende und kristallinische Medien gibt *H. A. Lorentz*, Wiss. Abh. I, Leipzig 1907, p. 415.

Wir nehmen nun für φ die Funktion

$$\frac{1}{r_1} e^{i(nt+br_1)},$$

wo r_1 die Entfernung eines zweiten Punktes, den wir 1 nennen wollen, bezeichnet. Auch diese Funktion genügt der Gleichung (28). Daher wird

$$(39) \qquad 4\pi(\varphi - \varphi') = \int d\omega \left\{ \frac{1}{rr_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial N} \right) + \frac{ib}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N} \right) \right\} e^{int+ib(r+r_1)}.$$

In der weiteren Behandlung des Integrals (39) spielt nun der Umstand eine wesentliche Rolle, daß die Wellenlänge des Lichts unendlich klein gegen die in Betracht kommenden Entfernungen, also gegen die vorkommenden Werte von r ist. Dann ist $b = \frac{2\pi}{\lambda}$ als unendlich groß anzusehen.

Es hängt diese Vereinfachung mit dem Umstande zusammen, daß das Integral

$$(40) \qquad \int \frac{dF}{d\zeta} \sin(b\zeta + \vartheta) d\zeta,$$

genommen zwischen endlichen Grenzen, für $b = \infty$ verschwindet, wenn $\frac{dF}{d\zeta}$ zwischen diesen Grenzen endlich und stetig bleibt.

Der Beweis gelingt leicht, wenn man $\frac{dF}{d\zeta}$ in eine *Fourier*sche Reihe entwickelt:

$$\frac{dF}{d\zeta} = a_0 + b_1 \sin\zeta + b_2 \sin 2\zeta + \cdots + a_1 \cos\zeta + a_2 \cos 2\zeta + \cdots.$$

Wir haben dann Glieder von der Form

$$\cos a\zeta \sin(b\zeta + \vartheta) \quad \text{und} \quad \sin a\zeta \sin(b\zeta + \vartheta).$$

Für das erste können wir einsetzen.

$\frac{1}{2}(\sin(a\zeta + b\zeta + \vartheta) - \sin(a\zeta - b\zeta - \vartheta))$, für das zweite

$\frac{1}{2}(\cos(a\zeta + b\zeta + \vartheta) - \cos(a\zeta - b\zeta - \vartheta))$.

Bei der Ausführung der Integration haben wir dann für jedes Glied

$$\lim_{b=\infty} \frac{\pm \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (a\zeta \pm (b\zeta + \vartheta))}{a \pm b} = 0.$$

Ein analoges Resultat ergibt sich, wenn anstatt sinus in (40) und (41) cosinus eingeführt wird, da ja das Ergebnis für jeden Wert von ϑ also auch für $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ gilt.

Andererseits ist

$$(41) \qquad \lim_{b=\infty} b \int \frac{dF}{d\zeta} \sin(b\zeta + \vartheta)\, d\zeta = -\frac{dF}{d\zeta} \cos(b\zeta + \vartheta),$$

wie sich leicht durch partielle Integration und Benutzung des eben abgeleiteten Resultates ergibt.

Für unendlich großes b ist

$$4\pi(\varphi - \varphi') = ib \int d\omega \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N}\right) e^{int + ib(r+r_1)},$$

und wenn wir nur den imaginären Teil der Exponentialfunktion nehmen:

$$(42) \quad 4\pi(\varphi - \varphi') = -b \int d\omega \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N}\right) \sin(nt + b(r + r_1)).$$

Wir setzen nun $r + r_1 = \zeta$. Dann werden durch die Gleichung

$$\zeta = \text{const.}$$

Rotationsellipsoide dargestellt. Diese Rotationsellipsoide schneiden die Fläche ω in bestimmten Kurven, für die ζ konstant ist. Wir wählen zwei solche Kurven, deren eine festgehalten werden soll, während die andere variiert wird. Das Integral

$$\int d\omega \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N}\right),$$

ausgedehnt auf die Fläche ω zwischen den Kurven, ist dann eine Funktion von ζ. Sind die Kurven benachbart, so können wir setzen:

$$\frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int d\omega \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N}\right),$$

wo das Integral auf den unendlich schmalen Streifen zwischen den Kurven zu erstrecken ist. Für diesen ist ζ konstant, so daß

$$\sin(nt + b\zeta) \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int d\omega \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N}\right) \sin(nt + b\zeta)$$

ist. Über die ganze Fläche ω erstreckt ist dann das Integral

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sin(nt + b\zeta) \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int d\omega \frac{1}{rr_1} \left(\frac{\partial r}{\partial N} - \frac{\partial r_1}{\partial N}\right) \sin(nt + b\zeta).$$

Aus (42) ergibt sich daher unter Berücksichtigung von (41)

$$(43) \qquad 4\pi(\varphi - \varphi') = \left(\frac{dF}{d\zeta} \cos(b\zeta + nt)\right)_{\zeta_0}^{\zeta_1}.$$

Diese Ableitung setzt voraus, daß der Differentialquotient $\frac{dF}{d\zeta}$ in der Fläche ω nirgends unendlich wird. Sie setzt ferner voraus, daß keine Konzentrationen der Strahlen durch konkave Flächen stattfinden. Einer von den Fällen, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, ist der, daß die Fläche ω von der Verbindungslinie der beiden Punkte $r = 0$ und $r_1 = 0$ geschnitten wird. Dann hat an dieser Stelle $\zeta = r + r_1$ ein Minimum, und daher ist $d\zeta = 0$ und $\frac{dF}{d\zeta}$ wird unendlich.

Wenn die Verbindungslinie die Fläche ω nicht schneidet, dann liegen die Punkte $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = \zeta_1$ in der Linie, in der eine von $r_1 = 0$ ausgehende Kegelfläche die Fläche ω berührt. Durch die Ellipsoide $\zeta_0 + d\zeta$ und $\zeta_1 + d\zeta$ werden dann Flächenstücke abgeschnitten, die verschwindend klein gegen die an den übrigen Teilen der Fläche von zwei Ellipsoiden ζ und $\zeta + d\zeta$ begrenzten sind, weil die Ellipsoide bei ζ_0 und ζ_1 erst in die Fläche ω einzudringen beginnen. Daher ist $\frac{dF}{d\zeta} = 0$ und $\varphi = \varphi'$, wenn (43) gilt.

Nun nehmen wir an, daß der Punkt $r_1 = 0$ leuchtend sei, d. h. daß in ihm eine Energiezufuhr von außen stattfindet, ferner daß die Verbindungslinie der beiden Punkte die Fläche einmal schneidet, so daß (43) nicht gilt. Dann breitet sich diese Energie in Kugelwellen aus, die auf die Oberfläche ω fallen. Ist diese vollkommen schwarz, d. h. reflektiert sie nichts von den auffallenden Wellen und läßt sie auch nichts hindurch, so ist an dem Teil der Oberfläche, auf den die Wellen direkt auffallen können, der Zustand angenähert so, als ob der Körper nicht vorhanden wäre. D. h. es ist $\varphi = \varphi'$, $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N}$.

Ergänzen wir diesen Teil der Fläche ω zu einer geschlossenen, die den Punkt $r_1 = 0$ umschließt und an der überall $\varphi = \varphi'$, $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi'}{\partial N}$ ist. Dies ist möglich, wenn keine Reflexion an dem Körper stattfindet.

Nach (38) ist dann über die ganze Fläche erstreckt:

$$\int d\omega\, \varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ibr}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial N} - \int d\omega \frac{e^{ibr}}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 4\pi\varphi'.$$

Da die Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 die Ergänzungsfläche nicht schneidet, so ist der über sie erstreckte Teil Null, bei dem anderen, der Oberfläche des Körpers angehörenden, ist die Normale entgegengesetzt zu nehmen, weil sie jetzt ins Innere des umschlossenen Raumes gerichtet ist. Daher ist das Gesamtintegral

$$-4\pi\varphi' \quad \text{und} \quad 4\pi(\varphi - \varphi') = -4\pi\varphi'.$$

Daher ist

$$4\pi\varphi = 4\pi\varphi'$$

oder

$$4\pi\varphi = 4\pi\varphi' - 4\pi\varphi' = 0,$$

je nachdem die gerade Verbindungslinie von $r_1 = 0$ und $r = 0$ an dem Körper vorbeigeht, oder ihn schneidet.

Im ersten Falle ist das Licht durch die Anwesenheit des Körpers nicht beeinflußt, im zweiten herrscht Dunkelheit.

Dieser Satz spricht also die geradlinige Ausbreitung des Lichtes aus. Die Tatsache, daß die Wellenlänge des Lichtes nicht verschwindend klein, sondern endlich ist, bedingt, daß die gezogenen Schlußfolgerungen nicht streng sind. So kann der Ausdruck (40), wie schon erwähnt, endlich bleiben, wenn $\xi = r + r_0$ für einen Teil der Fläche annähernd konstant ist, weil dann $d\xi$ gegen Null konvergiert und $\frac{dF}{d\xi}$ unendlich wird. Der Ausdruck (40) wird sehr klein, weil er mit der Wellenlänge multipliziert erscheint. Von der Größe der Wellenlänge hängt es also ab, wie groß der Ausdruck bleibt, wenn $r + r_1$ nur geringe Abweichungen von einem konstanten Werte zeigen. Die Größe $r + r_1$ ist nahe konstant, wenn annähernd parallele Strahlen auf einen Schirm mit einer Öffnung fallen. Dann geht Licht in den geometrischen Schatten und gibt Veranlassung zu den *Fraunhofer*schen Beugungserscheinungen. Einen anderen Fall, bei dem $r + r_1$ nahe konstant ist, bietet das von *Fresnel* angestellte Experiment, bei dem von einer Lichtquelle von geringer Ausdehnung Strahlen auf einen kreisförmigen Schirm oder auf einen Schirm mit kreisförmiger Öffnung fielen. Hier ist $r + r_1$ für den Rand konstant und es zeigen sich ebenfalls Beugungserscheinungen.

Wie wir gesehen haben, herrscht im Punkt $r = 0$ Dunkelheit oder Licht, je nachdem die Verbindungslinie zwischen $r = 0$ und $r_1 = 0$ den Körper schneidet oder nicht schneidet. Geht sie unmittelbar an dem Körper vorbei, so findet dort ein plötzlicher Übergang von dem einen Fall zum anderen statt. Wäre die Wellenlänge wirklich unendlich klein, so wäre dieser Übergang unstetig. Da aber die Wellenlänge endlich ist, so ist der Übergang stetig und die Region dieses Übergangs hängt von der Wellenlänge ab. Strahlen, die nahe an dem Körper vorbeigehen, werden daher auch von ihm modifiziert und es treten auch hier Beugungserscheinungen auf, die Licht in den geometrischen Schatten bringen. Für die spezielle Beugungstheorie sei auf Art. 25 verwiesen.

10. Reflexion und Brechung in durchsichtigen Medien. Ein wesentlicher Vorteil der elektromagnetischen Lichttheorie liegt in dem Umstande, daß die Grenzbedingungen, wie sie für die allgemeinen elektromagnetischen Vorgänge gelten, ohne weiteres die beobachteten Gesetze der Reflexion und Brechung ergeben, während die elastischen Theorien gezwungen waren, neue Hypothesen über die an der Grenze wirkenden Kräfte zu Hilfe zu nehmen.

Legen wir die z-Achse in die Richtung der Normale der als eben vorausgesetzten Grenzfläche beider Medien und die xy-Ebene in die Grenzebene selbst. Die Einfallsebene ist die Ebene, die durch die Normale und die Fortpflanzungsrichtung der als eben angenommenen einfallenden Welle gelegt ist. Sie sei die yz-Ebene. Normale und Fortpflanzungsrichtung bilden miteinander den Winkel α, den Einfallswinkel. Erfahrungsmäßig treten an der Grenzebene zwei neue Wellensysteme auf, von denen das eine sich in das zweite Medium hinein fortpflanzt, mit der Normale den Winkel β bildend. Das andere geht in das erste Medium zurück.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene yz liegen. Nach den Entwicklungen p. 109 liegen dann die elektrischen in der Einfallsebene. Es sind also nur $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$, sowie $\mathfrak{H}_x$ von Null verschieden.

Die Gleichungen (4) ergeben daher für $\sigma = 0$:

$$(44)\qquad \begin{gathered} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}, \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}. \end{gathered}$$

Wir setzen nun für die einfallende Welle

$$(45)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_{ey} &= A_e \cos\alpha\, e^{i(nt - b(y\sin\alpha + z\cos\alpha))}, \\ \mathfrak{E}_{ez} &= -A_e \sin\alpha\, e^{i(nt - b(y\sin\alpha + z\cos\alpha))}, \qquad \frac{n}{b} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \\ \mathfrak{H}_{ex} &= -A_e \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, e^{i(nt - b(y\sin\alpha + z\cos\alpha))}, \end{aligned}$$

Hierdurch wird den Gleichungen (44) genügt.

Für die reflektierte Welle ist $-z$ statt z zu setzen, weil diese ins erste Medium zurückgeht. Um die Grenzbedingung erfüllen zu können, muß für $z = 0$ das Argument der Exponentialfunktion für die einfallende und reflektierte Null gleich sein, daher ist

$$(45)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_{ry} &= -A_r \cos\alpha\, e^{int - ib(y\sin\alpha - z\cos\alpha)}, \\ \mathfrak{E}_{rz} &= -A_r \sin\alpha\, e^{int - ib(y\sin\alpha - z\cos\alpha)}, \\ \mathfrak{H}_{rx} &= -A_r \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, e^{int - ib(y\sin\alpha - z\cos\alpha)}. \end{aligned}$$

Hierdurch ist ausgesprochen, daß der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel ist.

Für die eindringende Welle ist z positiv, aber es muß berücksichtigt werden, daß dort ε, μ und b andere Werte haben. Da es sich um erzwungene Schwingungen handelt, so wird vorausgesetzt, daß die Schwingungszahl n durch äußere Einwirkung konstant gehalten wird.

Für die eindringende Welle ist demnach

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_{gy} = A_g \cos\beta\, e^{int - ib_1(y\sin\beta + z\cos\beta)},\\
(45\text{a})\qquad &\mathfrak{E}_{gz} = -A_g \sin\beta\, e^{int - ib_1(y\sin\beta + z\cos\beta)},\\
&\mathfrak{H}_{gx} = -A_g\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\, e^{int - ib_1(y\sin\beta + z\cos\beta)}.
\end{aligned}
$$

Nach den Grenzbedingungen p. 109 müssen die tangentialen Komponenten auf beiden Seiten der Grenze gleich sein, also

$$
\mathfrak{E}_{ey} + \mathfrak{E}_{ry} = \mathfrak{E}_{gy},
$$
$$
\mathfrak{H}_{ex} + \mathfrak{H}_{rx} = \mathfrak{H}_{gx},
$$

daher für $z = 0$ zunächst $b_1 \sin\beta = b \sin\alpha$

$$
(46)\qquad (A_e - A_r)\cos\alpha = A_g \cos\beta
$$

sowie

$$
(46\text{a})\qquad A_e\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + A_r\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = A_g\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}.
$$

Die erste Gleichung

$$
(47)\qquad \frac{b_1}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon\mu}} = \frac{c_1}{c} = \nu
$$

spricht das *Snellius*sche Brechungsgesetz aus; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \nu$ ist das Brechungsverhältnis.

Ist $\mu = \mu_1$, so ist

$$
(48)\qquad \nu = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}},
$$

wodurch die wichtige Maxwellsche Beziehung zwischen Dielektrizitätskonstante und Brechungsverhältnis ausgesprochen wird.

Eliminieren wir aus (46) und (46a) A_g, so erhalten wir wegen $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}$, wenn $\mu = \mu_1$ ist.

$$
A_r\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = A_e\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right),
$$

$$
(49)\qquad A_r = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} A_e.
$$

Dies ist die bereits von *Fresnel* aufgestellte Formel für die reflektierte Amplitude.

Ist $A_r = 0$, so haben wir für diese Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes kein reflektiertes Licht. Dann ist nach der der Gleichung (49) vorangehenden Formel

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

Nun kann α nicht gleich β sein. Daher muß

$$2\alpha = \pi - 2\beta, \qquad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

sein, d. h. es steht der gebrochene Strahl auf dem reflektierten senkrecht. Man bezeichnet diesen Winkel als Polarisationswinkel, weil nur eine Schwingungsrichtung reflektiert werden kann.

Würden wir in der reflektierten Welle

$$\mathfrak{E}_{ry} = A_r \cos\alpha e^{int - ib(y\sin\alpha - z\cos\alpha)},$$

statt

$$- A_r \cos\alpha e^{int - ib(y\sin\alpha - z\cos\alpha)}$$

setzen, so müßte auch für $\mathfrak{E}_{rz}$ und $\mathfrak{H}_{rx}$ das Vorzeichen verändert werden.

Dann erhielten wir

$$A_r = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} A_e,$$

so daß die Umkehr des Vorzeichens der tangentialen Komponente der elektrischen Kraft in dem Vorgange der Reflexion begründet ist. Denkt man sich selbst in der Richtung des Lichtes schwimmend und blickt senkrecht zur Einfallsebene, so wird, wenn im Augenblick der Reflexion die Amplitude der elektrischen Kraft die Richtung nach links hatte, sie auch im reflektierten Strahl die Richtung nach links haben.

Liegen die magnetischen Schwingungen in der Einfallsebene, so ist zu setzen:

$$\mathfrak{E}_{ex} = A_e e^{i(nt - b(y\sin\alpha + z\cos\alpha))},$$

$$\mathfrak{E}_{rx} = A_r e^{i(nt - b(y\sin\alpha - z\cos\beta))},$$

$$\mathfrak{E}_{gx} = A_g e^{i(nt - b_1(y\sin\beta + z\cos\beta))},$$

und

$$
(51)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{H}_{ey} &= A_e\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\alpha\, e^{i(nt-b(y\sin\alpha+z\cos\alpha))},\\
\mathfrak{H}_{ez} &= -A_e\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\alpha\, e^{i(nt-b(y\sin\alpha+z\cos\alpha))},\\
\mathfrak{H}_{ry} &= -A_r\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\alpha\, e^{i(nt-b(y\sin\alpha-z\cos\alpha))},\\
\mathfrak{H}_{rz} &= -A_r\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\alpha\, e^{i(nt-b(y\sin\alpha-z\cos\alpha))},\\
\mathfrak{H}_{gy} &= A_g\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\beta\, e^{i(nt-b_1(y\sin\beta+z\cos\beta))},\\
\mathfrak{H}_{gz} &= -A_g\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sin\beta\, e^{i(nt-b_1(y\sin\beta+z\cos\beta))}.
\end{aligned}
$$

Die Grenzbedingungen ergeben wieder

$$b\sin\alpha = b_1\sin\beta,$$

so daß auch hier das *Snellius*sche Brechungsgesetz gelten muß.

Ferner für $\mu = \mu_1$

$$A_e + A_r = A_g,$$

$$\sqrt{\varepsilon}\,A_e\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon}\,A_r\cos\alpha = A_g\sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta,$$

woraus die *Fresnel*sche Formel

$$(52)\qquad A_r = -A_e\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ folgt.}$$

Wir haben also das Vorzeichen von A_r umzukehren, so daß auch hier folgt, daß sich die elektrische Kraft bei der Reflexion umkehrt, während die magnetische ihre Richtung beibehält.

Die beiden Formeln (49) und (52) stimmen mit der Erfahrung überein, wenn im ersten Falle die Polarisationsebene senkrecht, im zweiten parallel zur Einfallsebene liegt. Die magnetischen Schwingungen müssen also in der Polarisationsebene, die elektrischen senkrecht zu ihr erfolgen.

Die elektromagnetische Theorie faßt also die beiden Theorien von *Neumann* und *Fresnel* zusammen. Vgl. Artikel *Wangerin* Nr. **10.** Die erste geht von der Hypothese aus, daß die Lichtschwingungen in der Polarisationsebene erfolgen und daß die Dichtigkeit des Lichtäthers überall dieselbe ist. Die zweite nimmt an, daß die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen und daß die Elastizität in allen Medien die gleiche ist.

Der *Fresnel*sche Lichtvektor ist also mit der elektrischen, der *Neumann*sche mit der magnetischen Kraft identisch.

Alle Versuche, eine Entscheidung zwischen beiden Theorien herbeizuführen, mußten scheitern, wenn in der Tat beide Vektoren vorhanden sind.

Obwohl durch die elektromagnetische Hypothese der Streitfall in der ursprünglichen Form erledigt ist, so bleibt doch die Frage offen, ob die elektrische oder die magnetische Kraft die Lichtwirkungen hervorruft. Nach den neueren Anschauungen, wonach die Wirkung des Lichts auf die Körper durch die Ladungen der Atome vermittelt wird, ist es allerdings wahrscheinlich geworden, daß die elektrische Kraft bei den Lichtschwingungen die unmittelbare Wirkung hervorruft.

Ist der Winkel $\alpha = 0$, so ist auch $\beta = 0$ und die Formeln (49) und (52) geben gemeinschaftlich vom Vorzeichen abgesehen

$$A_e \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = A_r,$$

und da

$$\frac{\alpha}{\beta} = \nu \quad \text{für} \quad \lim \alpha \text{ und } \lim \beta = 0,$$

so ist

(52a) $$A_r = A_e \frac{\nu - 1}{\nu + 1}.$$

Nach (50) wird kein Licht reflektiert, wenn die magnetische Kraft senkrecht zur Polarisationsebene schwingt und der gebrochene Strahl senkrecht auf dem reflektierten steht. Aus der Beziehung

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

folgt in diesem Fall

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon},$$

und da außerdem $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$ ist, so folgt

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \nu,$$

wodurch das *Brewster*sche Gesetz ausgesprochen wird.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, geht alles einfallende Licht hindurch.

In der Reflexionsformel

$$A_r = A_e \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$$

kommt dieser Fall dadurch zum Ausdruck, daß für $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ die Tangente unendlich wird, wodurch A_r verschwindet.

Wenn die magnetischen Schwingungen in der Einfallsebene erfolgen, ist eine solche Möglichkeit nicht gegeben, weil $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ niemals Null werden kann.

11. Totalreflexion. Ist $\varepsilon_1 < \varepsilon$,[23] so ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 1$; überschreitet dann α eine gewisse Grenze, so kann die Gleichung nicht mehr durch reelle Werte von β erfüllt werden, da für solche $\sin\beta \lesseqq 1$ ist.

Setzen wir

$$\sin\beta = p, \quad \cos\beta = \pm\sqrt{1-p^2},$$

so muß für solche Fälle

$$\cos\beta = \pm\, i\sqrt{p^2-1}, \quad p > 1$$

sein. Die Exponentialfunktion in den Ausdrücken (45) wird dann

$$e^{int - ib(py \pm iz\sqrt{p^2-1})}.$$

Hier muß das untere Vorzeichen im Exponenten gelten, weil sonst die Größe mit wachsendem z unendlich werden würde.

Die Schwingungen nehmen also im zweiten Medium wegen des Faktors

$$e^{-z\sqrt{p^2-1}}$$

schnell ab.

Die Grenzbedingungen (46) geben für $\mu = \mu_1$, wenn die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene liegen

$$(A_e - A_r)\cos\alpha = -A_g i\sqrt{p^2-1},$$

$$A_e\sqrt{\varepsilon} + A_r\sqrt{\varepsilon} = A_g\sqrt{\varepsilon_1},$$

oder

$$A_e\left(\cos\alpha + i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}\sqrt{p^2-1}\right) = A_r\left(\cos\alpha - i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}\sqrt{p^2-1}\right).$$

Setzen wir nun

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon}} = \varrho\cos\vartheta, \quad \frac{\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \varrho\sin\vartheta,$$

also

$$(53) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon} + \frac{p^2-1}{\varepsilon_1}},$$

so wird

$$A_e e^{i\vartheta} = A_r e^{-i\vartheta}, \quad A_r = A_e e^{2i\vartheta}.$$

Der Modul von A_e ist gleich dem von A_r; also die Amplitude des reflektierten Lichts gleich der des einfallenden. Der Faktor $e^{2i\vartheta}$ bedeutet, daß die reflektierte Welle gegenüber der einfallenden in der Phase um 2ϑ verschoben ist.

---

23) Die Gesetze der totalen Reflexion sind bereits durch Einführung komplexer Größen von *Fresnel* abgeleitet; Oeuvres compl. 1, p. 779; strenger von *Neumann*, Vorles. über theoretische Optik, p. 157. Vgl. auch Art. *Wangerin*, Nr. **12** und **20**.

Dabei ist

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}\frac{\sqrt{p^2-1}}{\cos\alpha} = 2\operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{p^2-1}}{\cos\alpha}, \tag{54}$$

oder wegen

$$\frac{\sin\alpha}{p} = \frac{1}{\nu},$$

da jetzt der Strahl aus dem Medium mit größerem ε kommt,

$$\vartheta = \vartheta_s = \operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{\nu^2\sin^2\alpha-1}}{\cos\alpha}.$$

Hier deutet der Index s an, daß die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erfolgen.

Es hängt also die Phasenverschiebung vom Brechungsverhältnis und vom Einfallswinkel ab.

Liegen die magnetischen Schwingungen in der Einfallsebene (Index p), so ist

$$A_e + A_r = A_g,$$

$$(\sqrt{\varepsilon}A_e - \sqrt{\varepsilon}A_r)\cos\alpha = -A_g i\sqrt{p-1}\sqrt{\varepsilon_1}$$

$$= -(A_e + A_r)i\sqrt{p^2-1}\sqrt{\varepsilon_1}.$$

Wir setzen hier

$$\sqrt{\varepsilon}\cos\alpha = \varrho\cos\vartheta,\quad \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{p^2-1} = \varrho\sin\vartheta$$

und haben

$$A_e e^{i\vartheta} = A_r e^{-i\vartheta},\quad A_r = A_e e^{2i\vartheta},$$

$$\vartheta_p = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{p^2-1}\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon}\cos\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{p^2-1}}{\nu\cos\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\nu^2\sin^2\alpha-1}}{\nu\cos\alpha}.$$

Der Unterschied in der Phasenverschiebung in beiden Fällen ist

$$2(\vartheta_s - \vartheta_p) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\alpha\sqrt{\nu^2\sin^2\alpha-1}}{\nu\sin^2\alpha}\right). \tag{55}$$

Die Zusammensetzung von Schwingungen, die rechtwinklig aufeinander mit einem bestimmten Phasenunterschied erfolgen, ergibt elliptisch polarisiertes Licht.

12. Metallreflexion. Ableitung der Cauchyschen Formeln nach Lorentz. Die Formeln der Reflexion für absorbierende, also leitende Medien lassen sich in ganz ähnlicher Weise gewinnen.

Wenn die Leitfähigkeit des Mediums, auf das der Strahl fällt, unendlich groß ist, so gestalten sich die Verhältnisse sehr einfach.

Aus den Gleichungen (4) ergibt sich für $\sigma = \infty$

$$\mathfrak{E} = 0.$$

Da nun die tangentialen Komponenten an beiden Seiten der Grenzfläche beider Medien gleich sein sollen, so müssen an dieser

Grenzfläche die tangentialen Komponenten der elektrischen Kraft in *beiden* Medien Null sein. Ferner folgt aus dieser Bedingung, daß dann auch der Differentialquotient nach der Zeit der normalen Komponente der magnetischen Kraft verschwinden muß.

Diese Bedingung läßt sich bei auffallenden elektromagnetischen Wellen nur erfüllen, wenn die Amplitude der reflektierten Welle der der einfallenden gleich und entgegengesetzt ist. Wir haben also totale Reflexion bei jedem Einfallswinkel.

Für elektromagnetische Wellen von großer Länge kann man häufig diese vereinfachte Betrachtung benutzen. Für Lichtwellen ist sie unzureichend. Auch die Formeln, die man gewinnt, wenn man für σ das durch Messungen an stationären Strömen bekannte Leitungsvermögen einsetzt, stehen, wie wir oben, p. 111, gesehen haben, mit der Erfahrung in Widerspruch.

Es ist daher eine Erweiterung der *Maxwell*schen Gleichungen geboten, die *H. A. Lorentz*[24]) zunächst in der Richtung gesucht hat, daß er das *Ohm*sche Gesetz für die Lichtschwingungen nicht mehr als gültig annahm. Das *Ohm*sche Gesetz wird durch die Gleichung

$$\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}$$

ausgesprochen. *Lorentz* setzt nun hierfür

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}\frac{1}{\sigma} + k_1 \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t}.$$

Da bei den Lichtschwingungen die Abhängigkeit von der Zeit sich auf den Faktor e^{int} beschränkt, so ist diese Erweiterung gleichbedeutend damit, anstatt $\frac{1}{\sigma}$ die Größe $\frac{1}{\sigma} + ink_1$ einzusetzen.

Aus den Gleichungen (9) erhalten wir daher

$$(56) \qquad -\varepsilon n^2 + \frac{in}{\frac{1}{\sigma} + ink_1} = c^2(a+ib)^2,$$

woraus

$$(57) \qquad \begin{aligned} -\varepsilon n^2 - \frac{n^2 k_1}{\frac{1}{\sigma^2} + n^2 k_1{}^2} &= c^2(a^2 - b^2), \\ \frac{\frac{n}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma^2} + n^2 k_1{}^2} &= 2ab \end{aligned}$$

folgt.

Da die Grenzbedingungen dieselben sind, wie für durchsichtige Medien, so können wir die dort gewonnenen Formeln ohne weiteres

24) *H. A. Lorentz,* Zeitschr. Math. Phys. (23) (1878), p. 209.

benutzen, wenn wir berücksichtigen, daß die Konstanten komplex sind. Aus den Gleichungen (9) folgt, daß die den Konstanten b in Gleichung (47) entsprechenden Größen für absorbierende Medien komplex sind.

Wir setzen daher

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \varrho e^{i\theta}, \quad \cos\beta = \varrho_1 e^{i\theta_1}. \tag{57a}$$

Grenzt nun ein durchsichtiges Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε an ein absorbierendes und gilt α für ersteres, β für das zweite, so ist $\sin\alpha$ reell. Die Gleichung (47) gibt dann, da für das absorbierende Medium $a_1 + ib_1$ statt b zu setzen ist,

$$\frac{(a_1+ib_1)^2}{(ib)^2} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 = \frac{\varepsilon_1 - \dfrac{i}{\dfrac{n}{\sigma} + ik_1 n^2}}{\varepsilon} \tag{57b}$$

$$= \varrho^2 e^{2i\Theta} = \frac{b_1{}^2 - a_1{}^2}{b^2} - \frac{2a_1 b_1 i}{b^2}.$$

Indessen läßt sich auch ohne diese *Lorentz*sche Hypothese eine Theorie der Metallreflexion geben, wenn man nur berücksichtigt, daß die bei durchsichtigen Medien reellen Konstanten bei absorbierenden komplex werden. Wir setzen das Verhältnis der einfallenden zur reflektierten Amplitude nach (49) und (52)

$$p + qi = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad p_1 + q_1 i = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)},$$

die erste Formel gilt für die magnetischen Schwingungen in der Einfallsebene, die zweite für die senkrecht zur Einfallsebene.

Dann ist wegen (57a)

$$p + qi = -\frac{\dfrac{\varrho\varrho_1 e^{i(\theta+\theta_1)}}{\cos\alpha} - 1}{\dfrac{\varrho\varrho_1 e^{i(\theta+\theta_1)}}{\cos\alpha} + 1}.$$

Um Amplituden- und Phasenänderung zu erhalten, muß nun $p + qi$ und $p_1 + q_1 i$ auf die Form $Ae^{i\vartheta}$ gebracht werden, so daß

$$A^2 = p^2 + q^2, \quad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

$$A_1{}^2 = p_1{}^2 + q_1{}^2, \quad \vartheta_1 = \operatorname{arctg}\frac{q_1}{p_1}$$

sind. A ist dann nach (52) das Verhältnis der reflektierten Amplitude zur einfallenden, wenn die magnetischen Schwingungen in der Einfallsebene liegen, A_1 nach (51a) dasselbe Verhältnis, wenn sie senkrecht zur Einfallsebene liegen. ϑ und ϑ_1 geben die entsprechenden Phasen-differenzen. Setzen wir weiter

$$p^2 + q^2 = \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad p_1^{\,2} + q_1^{\,2} = \operatorname{tg}^2 \gamma_1,$$

so folgt

$$\cos 2\gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = \frac{1 - (p^2 + q^2)}{1 + (p^2 + q^2)} = \frac{2\,\varrho\,\varrho_1 \cos(\theta + \theta_1)}{\cos\alpha\left(1 + \dfrac{\varrho^2 \varrho_1^{\,2}}{\cos^2\alpha}\right)}.$$

Führen wir zur Vereinfachung

$$\frac{\varrho\,\varrho_1}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\xi$$

ein, so wird

$$\cos 2\gamma = \cos(\theta + \theta_1)\,\frac{2\operatorname{tg}\xi}{1 + \operatorname{tg}^2\xi} = \cos(\theta + \theta_1)\sin 2\xi$$

$$= \cos(\theta + \theta_1)\sin\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\,\varrho_1}{\cos\alpha}\right)\right\},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\sin(\theta + \theta_1)\operatorname{tg}\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\,\varrho_1}{\cos\alpha}\right)\right\},$$

und ebenso

$$\cos 2\gamma_1 = \quad \cos(\theta + \theta_1)\sin\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\cos\alpha\right)\right\}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = -\sin(\theta - \theta_1)\operatorname{tg}\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\cos\alpha\right)\right\}.$$

Bei der Beobachtung kommt es auf den Phasenunterschied der beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene an, also auf die Größe $\vartheta - \vartheta_1$, und auf das Verhältnis der Intensitäten

$$\frac{A^2}{A_1^{\,2}} = \frac{p^2 + q^2}{p_1^{\,2} + q_1^{\,2}}.$$

Setzen wir

$$\frac{p + q i}{p_1 + q_1 i} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} i,$$

so ist

$$\frac{p^2 + q^2}{p_1^{\,2} + q_1^{\,2}} = \frac{A^2}{A_1^{\,2}} = \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2.$$

Ferner haben wir

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} i = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\varrho\,\varrho_1\cos\alpha}\,e^{-i(\theta + \theta_1)} - 1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\varrho\,\varrho_1\cos\alpha}\,e^{-i(\theta + \theta_1)} + 1}.$$

Schreiben wir nun

(57c) $$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 = \operatorname{tg}^2 h = \frac{A^2}{A_1^{\,2}},$$

so ist h der Winkel, den die resultierende Schwingung mit der Richtung von A_1 bildet. Wir erhalten

(58) $$\begin{aligned} \cos 2h &= \cos(\theta + \theta_1)\sin\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varrho\,\varrho_1\cos\alpha}\right)\right\}, \\ \operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_1) &= \sin(\theta + \theta_1)\operatorname{tg}\left\{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varrho\,\varrho_1\cos\alpha}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Dies sind die *Cauchy*schen Formeln der Metallreflexion, die er selbst formal abgeleitet hat. Bei ihrer Entwicklung konnte er die Schwierigkeiten der Grenzbedingungen noch nicht überwinden.

13. Metallreflexion. Zusammenhang der optischen Konstanten mit beobachtbaren Größen. Für die Beobachtung der Metallreflexion sind besonders die des Hauptazimuths und Haupteinfallswinkels geeignet. Unter dem letzteren versteht man den Wert $\alpha = \alpha_0$, bei der die Phasendifferenz

$$\vartheta - \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$$

wird, unter dem ersteren den zugehörigen Wert $h = h_0$.

Für diese Spezialwerte ist $\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_1) = \infty$. Dann muß

$$2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{\varrho \varrho_1 \cos \alpha_0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

sein. Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\varrho \varrho_1 \cos \alpha_0}, \tag{59}$$

$$\cos 2h_0 = \cos(\theta + \theta_1), \quad \pm 2h_0 = \theta + \theta_1.$$

Man beobachtet die Werte von α_0 und h_0. Um aus ihnen $\theta, \theta_1, \varrho, \varrho_1$ zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen.

Aus (57a) folgt

$$\varrho^2 \varrho_1^2 \cos 2(\theta + \theta_1) = \varrho^2 \cos 2\theta - \sin^2 \alpha,$$

$$\varrho^2 \varrho_1^2 \sin 2(\theta + \theta_1) = \varrho^2 \sin 2\theta.$$

Daher für die betrachteten Spezialwerte von α und h bei Berücksichtigung von (59)

$$\begin{aligned} \varrho^2 \cos 2\theta &= \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \cos 4h_0 + \sin^2 \alpha_0, \\ \varrho^2 \sin 2\theta &= \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \sin 4h_0. \end{aligned} \tag{60}$$

Quadriert und addiert man die letzten beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$\varrho^4 = \operatorname{tg}^4 \alpha_0 (1 - \sin^2 2\alpha_0 \sin^2 2h_0),$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \frac{\sin 4h_0}{\varrho^2}.$$

Auf diese Weise sind ϱ und θ durch α_0 und h_0 bestimmt.

Durch die Gleichungen $\theta + \theta_1 = \pm 2h_0$ und $\varrho_1 = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\varrho \cos \alpha_0}$ sind es auch θ_1 und ϱ_1. Dann sind durch (58) h und $\vartheta - \vartheta_1$ bestimmt und nach (57c) $\frac{A^2}{A_1^2}$. Aus der Beobachtung von Hauptazimut und Haupteinfallswinkel lassen sich daher Phasendifferenz und Amplitudenverhältnis der reflektierten, mit ihren magnetischen Schwingungen parallel und senkrecht zur Einfallesbene orientierten Wellen berechnen. Nimmt man dann die *Lorentz*sche Hypothese hinzu, so kann man die unbekannten Konstanten k_1 und ε_1 berechnen, wenn noch σ gegeben ist. Nach (57a) hatten wir

$$\varrho^2 e^{2i\theta} = \frac{\varepsilon_1 - \dfrac{i}{\dfrac{n}{\sigma} + i k_1 n^2}}{\varepsilon},$$

$$(62) \qquad \varrho^2 \cos 2\theta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{k_1}{\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{\sigma^2} + k_1{}^2 n^2\right)}\right)$$

$$= \operatorname{tg}^2 \alpha_0 (\sin^2 \alpha_0 \cos 4 h_0 + \cos^2 \alpha_0) = -\frac{a_1{}^2 - b_1{}^2}{b^2},$$

$$(63) \qquad \varrho^2 \sin 2\theta = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sigma\left(\dfrac{n}{\sigma^2} + k_1{}^2 n^3\right)}$$

$$= \pm \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 \sin 4 h_0 = -\frac{2 a_1 b_1}{b^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich k_1 und ε_1 berechnen. Für $h_0 = \frac{\pi}{4}$ ist $\sin 4 h_0 = 0$. Da nun $\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sigma\left(\frac{n}{\sigma^2} + k_1{}^2 n^3\right)}$ nicht verschwinden kann, so darf das Hauptazimut diesen Betrag nicht überschreiten.

Da die Beobachtungen in einzelnen Fällen für h_0 Werte ergeben, die nahe an $\frac{\pi}{4}$ herangehen, so nähert sich $\cos 4 h_0$ dem Wert -1. Da nun der zugehörige Haupteinfallswinkel α_0 bis 70^0 beträgt, so wird die rechte Seite von (62) negativ. Weil aber die ε positiv sein müssen, so folgt mit Notwendigkeit, daß k_1 von Null verschieden ist. Die beiden Formeln (62) und (63) stellen die bisherigen Beobachtungen genügend dar, doch ist die Abhängigkeit von der Schwingungszahl n noch nicht durch ausreichendes Beobachtungsmaterial festgestellt.

Die in das absorbierende Medium gebrochene Welle wird durch den Ausdruck dargestellt

$$e^{int - (a_1 + b_1 i)(y \sin\beta + z \cos\beta)};$$

da nach (57a) und (57b)

$$\frac{a_1 + b_1 i}{ib} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{a_1 + b_1 i}{ib} = \varrho e^{i\theta}, \quad \cos\beta = \varrho_1 e^{i\theta_1}$$

ist, so kann man ihn auch schreiben

$$(64) \qquad e^{z \varrho \varrho_1 b \sin(\theta + \theta_1) + i(nt - y b \sin\alpha - z \varrho \varrho_1 b \cos(\theta + \theta_1))}.$$

Wollen wir die Verhältnisse der gebrochenen Welle in der für durchsichtige Medien geltenden Form betrachten, so können wir die

Gleichungen

$$(65)\qquad \frac{a_1 + b_1 i}{ib} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$i\varrho\varrho_1 b e^{i(\theta+\theta_1)} = (a_1 + b_1 i)\cos\beta$$

benutzen. Der reelle Teil des Exponenten (64) mißt die Absorption der gebrochenen Welle. Der imaginäre Teil läßt sich auf die Form bringen, die er auch für durchsichtige Medien haben würde, wenn β_1 der Brechungswinkel wäre. Dann muß nach dem Brechungsgesetz für durchsichtige Medien und nach Analogie (45a) oder (51) sein

$$b_1' \sin\beta_1 = b\sin\alpha, \quad b_1'\cos\beta_1 = b\varrho\varrho_1\cos(\theta+\theta_1),$$

und durch Quadrieren und Addieren erhalten wir

$$(66)\qquad \frac{b_1'^2}{b^2} = \sin^2\alpha + \varrho^2\varrho_1^2\cos^2(\theta+\theta_1).$$

Die Größe $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = \frac{b_1'}{b}$ können wir auch hier der Analogie nach als Brechungsverhältnis ν bezeichnen.

Setzen wir

$$s + \mathfrak{s} i = \varrho\varrho_1 e^{i(\theta+\theta_1)},$$

so ist

$$-(a_1 + b_1 i)^2 = b^2\sin^2\alpha + b^2(s^2 + \mathfrak{s} i)^2.$$

Weiter ist

$$(s + \mathfrak{s} i)^2 = \varrho^2\varrho_1^2 e^{2i(\theta+\theta_1)} = \varrho^2 e^{2i\theta}(1 - \sin^2\beta)$$
$$= \varrho^2 e^{2i\theta} - \sin^2\alpha,$$

so daß

$$s^2 - \mathfrak{s}^2 = \varrho^2\cos 2\theta - \sin^2\alpha,$$
$$2s\mathfrak{s} = \varrho^2\sin 2\theta$$

wird. Hieraus folgt

$$s^2 - \frac{\varrho^4\sin^2 2\theta}{4s^2} = \varrho^2\cos 2\theta - \sin^2\alpha$$

und

$$2s^2 = \varrho^2\cos 2\theta - \sin^2\alpha + \sqrt{(\varrho^2\cos 2\theta - \sin^2\alpha)^2 + \varrho^4\sin^2 2\theta},$$

sowie nach (66)

$$(67)\qquad \nu^2 = \frac{b_1'^2}{b^2} = \sin^2\alpha + s^2 = \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\varrho^2\cos 2\theta$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{(\varrho^2\cos 2\theta - \sin^2\alpha)^2 + \varrho^4\sin^2 2\theta}.$$

Die Größen $\varrho^2\cos 2\theta$ und $\varrho^2\sin 2\theta$ sind den Gleichungen (60) zu entnehmen.

Aus dieser Gleichung sieht man, daß das Brechungsverhältnis ν vom Einfallswinkel α abhängig ist. Ist keine Absorption vorhanden, so ist $\theta = 0$ und die Gleichung (67) geht in die identische

$$\nu^2 = \frac{b_1{}^2}{b^2} = \varrho^2$$

über.

Von großer Wichtigkeit ist die Tatsache, daß auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der gebrochenen Welle vom Einfallswinkel abhängt, da das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten vom Brechungsverhältnis bestimmt wird.

Ändert sich also das Brechungsverhältnis, so ändert sich damit auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der gebrochenen Welle im absorbierenden Medium. Es hängt dies damit zusammen, daß die Intensität längs der Welle nicht überall gleichen Wert hat.

Man muß daher in absorbierenden Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gebrochener Wellen wohl von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unbegrenzter ebener Wellen, die überall gleiche Intensität haben, unterscheiden. Das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der letzten in beiden Medien wird durch die Größe

$$\frac{b_1}{b} = \varrho \cos \theta$$

bestimmt. Für $\alpha = 0$, also senkrechte Inzidenz, ist auch

$$\nu = \varrho \cos \theta,$$

während sonst bei schwacher Absorption, also kleinen Werten von $\varrho^2 \sin 2\theta$, annähernd

$$\nu^2 = \varrho^2 \cos 2\theta + \frac{1}{4} \frac{\varrho^4 \sin^2 2\theta}{\varrho^2 \cos 2\theta - \sin^2 \alpha}$$

ist.

Außer dem Brechungsverhältnis ist der Absorptionsindex a_1 für absorbierende Medien wesentlich; a_1 ist der Absorptionsindex für die Längeneinheit; $b_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$ bezieht sich auf das absorbierende Medium bei senkrechter Inzidenz. Nun ist nach (62) und (63)

$$\varrho^4 = \frac{(a_1{}^2 + b_1{}^2)^2}{b^4} = \operatorname{tg}^4 \alpha_0 (\sin^4 \alpha_0 + 2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \cos 4h_0 + \cos^4 \alpha_0),$$

$$\frac{(a_1{}^2 - b_1{}^2)^2}{b^4} = \operatorname{tg}^4 \alpha_0 (\sin^2 \alpha_0 \cos 4h_0 + \cos^2 \alpha_0)^2,$$

woraus sich $\frac{a_1}{b}$ und $\frac{b_1}{b}$ ergeben.

In vielen Fällen kann man $\cos^2 \alpha_0$ vernachlässigen und erhält dann

$$\frac{a_1{}^2 + b_1{}^2}{b^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0,$$

$$\frac{a_1{}^2 - b_1{}^2}{b^2} = -\operatorname{tg}^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 \cos 4h_0,$$

$$\frac{b_1^2}{b^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha_0 \sin^2\alpha_0(\cos 4h_0 + 1) = \operatorname{tg}^2\alpha_0 \sin^2\alpha_0 \cos^2 2h_0,$$

$$\frac{a_1^2}{b^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha_0 \sin^2\alpha_0(1 - \cos 4h_0) = \operatorname{tg}^2\alpha_0 \sin^2\alpha_0 \sin^2 2h_0$$

und

$$\frac{a_1}{b_1} = \operatorname{tg} 2h_0.$$

Die Größe $\frac{a_1}{b_1}$ ist der Absorptionsindex bezogen auf die Wellenlänge.

Setzen wir nämlich

$$a_1 = \frac{2\pi k}{\lambda},$$

so ist

$$\frac{a_1}{b_1} = k.$$

Aus dem Ausdruck

$$e^{-a_1 z} = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}kz}$$

sieht man, daß durch die Absorption auf der Strecke $z = \lambda$ die Amplitude im Verhältnis $1 : e^{-2\pi k}$ abnimmt.

Da $\frac{b_1'}{b} = \nu$, bei senkrechter Inzidenz $b_1' = b_1$, $\frac{a_1}{b_1} = k$ ist, so wird nach (57b)

$$(68)\qquad \begin{aligned} \varrho^2 \cos 2\theta &= \nu^2(1 - k^2), \\ \varrho^2 \sin 2\theta &= -2\nu^2 k. \end{aligned}$$

Von großer Wichtigkeit für das Experiment ist der Zusammenhang von Reflexionsvermögen eines Metalls mit dem Brechungsverhältnis und Absorptionsindex. Unter Reflexionsvermögen versteht man die bei senkrechter Inzidenz zurückgeworfene Lichtmenge dividiert durch die auffallende für eine ganze Schwingung berechnet.

Die reflektierte Amplitude erhalten wir aus (52a)

$$A_r = A_e \frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - 1}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + 1}.$$

Für $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ müssen wir $\varrho e^{i\theta} = \frac{a_1 + ib_1}{ib} = \nu(1 - ik)$ einsetzen, so daß

$$A_r = A_e \frac{\nu(1-ik) - 1}{\nu(1-ik) + 1}.$$

Nun hat A_e den Faktor e^{int}. Daher ist der reelle Teil

$$\frac{(\nu^2 - 1 + k^2\nu^2)\cos nt + 2k\nu \sin nt}{(\nu+1)^2 + k^2\nu^2}.$$

Nimmt man hiervon das Quadrat und integriert über eine ganze Schwingung, integriert ebenso das Quadrat der auffallenden Amplitude über eine ganze Schwingung, so erhält man das Verhältnis

$$(68a)\qquad \mathfrak{R} = \frac{(\nu-1)^2 + k^2\nu^2}{(\nu+1)^2 + k^2\nu^2}$$

als Reflexionsvermögen. Mit zunehmendem k nähert sich das Reflexionsvermögen dem Werte Eins. Die Metalle von besonders starker Absorption reflektieren daher das Licht fast vollständig. Für lange Wellen kann man k_1 und ε_1 vernachlässigen, so daß dann $k = 1$ und $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda c \sigma}{\pi}}$ ist. Für große ν ist dann $\mathfrak{R} = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} = 1 - \frac{2}{\nu}\cdot$

14. Stehende Wellen. Starke Reflexion kann Veranlassung zur Bildung stehender Wellen sein. Vgl. p. 113. Bei senkrechter Inzidenz sind stehende Wellen sowohl für den elektrischen als auch bei anderer Polarisationsrichtung für den magnetischen Vektor vorhanden.

Nehmen wir vollständige Reflexion an, so kann gesetzt werden $A_e = A_r = 1$, und wir haben nach den Formeln (45), wenn wir $i(nt - b(y \sin\alpha + z\cos\alpha)) = iu_e$, $i(nt - b(y\sin\alpha - z\cos\alpha)) = iu_r$ setzen,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_y &= \cos\alpha\,(e^{iu_e} - e^{iu_r}),\\
\mathfrak{E}_z &= -\sin\alpha\,(e^{iu_e} + e^{iu_r}),\\
\mathfrak{H}_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(e^{iu_e} + e^{iu_r}).
\end{aligned}$$

Hier liegen die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene. Liegen sie parallel zur Einfallsebene, so ist nach (51)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= e^{iu_e} + e^{iu_r},\\
\mathfrak{H}_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\alpha\,(e^{iu_e} - e^{iu_r}),\\
\mathfrak{H}_z &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\alpha\,(e^{iu_e} + e^{iu_r}).
\end{aligned}$$

Nehmen wir die reellen Teile, so ist im ersten Fall

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_y &= 2\cos\alpha\sin(nt - by\sin\alpha)\sin(bz\cos\alpha),\\
\mathfrak{E}_z &= -2\sin\alpha\cos(nt - by\sin\alpha)\cos(bz\cos\alpha),\\
\mathfrak{H}_x &= -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos(nt - by\sin\alpha)\cos(bz\cos\alpha).
\end{aligned}$$

Hier verschwindet $\mathfrak{H}_x$ für alle Orte, wo $bz\cos\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ist.

Aber $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ können nicht gleichzeitig verschwinden. Es bleibt daher immer elektrische Kraft übrig. Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist

$$\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau (\mathfrak{E}_y^2+\mathfrak{E}_z^2)=1,$$

d. h. der Mittelwert der Energie über eine ganze Schwingung genommen ist vom Orte unabhängig. Im zweiten Fall haben wir

$$\mathfrak{E}_x = \quad 2\cos(nt-by\sin\alpha)\cos(bz\cos\alpha),$$

$$\mathfrak{H}_y = \quad 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\alpha\sin(nt-by\sin\alpha)\sin(bz\cos\alpha),$$

$$\mathfrak{H}_z = -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\alpha\cos(nt-by\sin\alpha)\cos(bz\sin\alpha).$$

Hier verschwindet die elektrische Kraft an einzelnen Stellen und der Mittelwert der magnetischen Energie ist überall gleich.

15. Theorie der Dispersion. Allgemeines über die Hypothese mitschwingender Ionen. Obwohl die hier behandelte Theorie der Metallreflexion die beobachteten Tatsachen bis zu einem gewissen Grade darstellt, so muß sie doch als ungenügend angesehen werden, da erfahrungsmäßig die Absorption eng mit einer anderen Erscheinung zusammenhängt, die in den bisherigen Gleichungen der elektromagnetischen Theorie nicht vorkommt, der Dispersion. So hat denn auch die *Lorentz*sche Annahme einer Modifikation des *Ohm*schen Gesetzes nur das Verdienst, zu zeigen, nach welcher Richtung bei den Lichtschwingungen Abweichungen vom *Ohm*schen Gesetz zu erwarten sind, ohne daß sie als eine ausreichende Theorie der Absorption gelten könnte.

Allgemein kann man sagen, daß die Dispersion die Zuhilfenahme weiterer Vektoren außer dem magnetischen und elektrischen beansprucht[25]).

25) *Cauchy* versuchte zuerst auf Grund der Annahme in den Äther eingebetteter Atome die Theorie der Dispersion zu geben, Nouveaux exercices de mathématiques, Prag 1835; Mém. sur les vibrations d'un double système et de l'éther contenu dans un corps cristallisé; Paris Mém. de l'acad. des sciences 22, p. 615. Vgl. *Tovey*, Phil. Mag. (3) 8, p. 7. Die Theorie des Mitschwingens führte *Sellmeier* ein, Ann. Phys. Chem. 145, p. 582; 147 (1871, 1872), p. 386 und 525; vgl. *Ketteler*, Ann. Phys. Chem., Pogg. Jubelband 1874. Eine Reibungskraft benutzte *O. E. Meyer*; Ann. Phys. Chem. 145, p. 80. Wie Lord *Rayleigh* ausführt Phil. Mag. 48 (1889), p. 151, hat bereits *Maxwell* in Cambr. Callendar 1869 auf derselben Grundlage die Theorie der anormalen Dispersion gegeben. Einen neuen Vektor für die mitschwingenden Moleküle und damit eine neu hinzukommende Differentialgleichung führte aber erst *Helmholtz* in die Theorie ein, Berlin Ber. Oktober 1874; Ann. Phys. Chem. 154 (1875), p. 582.

Setzen wir anstatt $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \sum_{\mathfrak{a}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}$$

und nehmen an, daß zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}$ lineare Differentialgleichungen bestehen

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} + a_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}}{\partial t} + b_{\mathfrak{a}} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}}{\partial t^2} + \cdots = \varepsilon_{\mathfrak{a}} \mathfrak{E} + a'_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + b'_{\mathfrak{a}} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} \cdots.$$

Für periodische Störungen haben wir die Abhängigkeit von der Zeit auf den Faktor e^{int} zu beschränken und erhalten

$$(69) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{E} \frac{\varepsilon_{\mathfrak{a}} + a'_{\mathfrak{a}} in - b'_{\mathfrak{a}} n^2 \ldots}{1 + a_{\mathfrak{a}} in - b_{\mathfrak{a}} n^2 \ldots}, \\ \mathfrak{D} &= \mathfrak{E} \left(1 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\varepsilon_{\mathfrak{a}} + a'_{\mathfrak{a}} in - b'_{\mathfrak{a}} n^2 \ldots}{1 + a_{\mathfrak{a}} in - b_{\mathfrak{a}} n^2 \ldots}\right). \end{aligned}$$

Diese Verallgemeinerung ist gleichbedeutend damit, daß anstatt der Dielektrizitätskonstante ε gesetzt wird

$$(69\text{a}) \qquad 1 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\varepsilon_{\mathfrak{a}} + a'_{\mathfrak{a}} in - b'_{\mathfrak{a}} n^2 \ldots}{1 + a_{\mathfrak{a}} in - b_{\mathfrak{a}} n^2 \ldots}.$$

Die Konstanten a, a', b, b' sind nur durch bestimmte Hypothesen zu gewinnen. Solche erhält man am einfachsten, wenn man nach dem Vorgange von *Helmholtz* die elektrisch geladenen Ionen der Körper durch die elektrischen Schwingungen des Lichts in Bewegung setzen läßt. Die Erscheinungen der Dispersion durch Mitschwingen der wägbaren Teile zu erklären ist bereits auf Grund der elastischen Theorie von *Maxwell*, *Sellmeier*, *O. E. Meyer*, *Ketteler* und *Helmholtz* mit Erfolg versucht. Aus diesen Theorien ging bereits mit Sicherheit hervor, daß die gewöhnliche Dispersion durch bloßes Mitschwingen, die anomale Dispersion aber durch gleichzeitige Absorption erklärt werden müsse.

Die elektromagnetische Theorie konnte diese Hypothese direkt übernehmen, doch mußte auf die Wechselwirkung zwischen Materie und Äther näher eingegangen werden. Der erste derartige Versuch rührt von *Kolaček*[26]) her. Er nimmt an, daß durch die elektromagnetischen Schwingungen Ströme in den Molekülen der Körper hervorgerufen werden, die wieder auf die Schwingungen im Äther nach dem Induktionsgesetz zurückwirken. Obwohl auf dieser Grundlage eine Theorie der Dispersion sehr wohl möglich ist, so entspricht sie doch nicht den modernen Anschauungen, nach denen man geneigt ist,

---

26) *Kolaček*, Ann. Phys. Chem. 32 (1887), p. 224 und 429; 34 (1887), p. 673.

Ströme auf Bewegung der Elektronen zurückzuführen. Dann sind Ströme innerhalb der Moleküle oder Atome undenkbar.

Eine möglichst von Hypothesen freie formale Darstellung der Dispersion hat *Drude*[27]) nach einer Anregung von *Hertz* gegeben, wobei im wesentlichen die oben dargelegte Erweiterung der Dielektrizitätskonstante benutzt wird.

Am einfachsten und anschaulichsten kommt man indessen zu der Theorie der Dispersion durch Verfolgung der *Helmholtz*schen Annahme[28]) des Mitschwingens geladener Atome, die übrigens schon vor Helmholtz von *H. A. Lorentz* gemacht war (vgl. Nr. **21**). Man kann diese Annahme nicht als neue Hypothese bezeichnen, weil wir schon durch die Vorgänge der Elektrolyse gezwungen sind, solche elektrische Ladungen der Atome vorauszusetzen. Neu ist nur die weitere Annahme, daß das positive und negative Quantum räumlich in gewissem Abstand voneinander sich befinden müssen, weil sonst die Wirkung der elektrischen Kräfte sich aufheben würde.

Der weiter von *Helmholtz* benutzte Weg, die elektromagnetischen Differentialgleichungen zugleich mit den Bewegungsgleichungen der Atome aus dem *Hamilton*schen Prinzip abzuleiten, kann indessen nicht als zweckmäßig bezeichnet werden. Ganz abgesehen davon, daß bei der Anwendung des *Hamilton*schen Prinzips alles auf die Art der Variation ankommt, die bei Vorgängen mit unbekannten Parametern zweifelhaft bleibt, läßt sich auch der Ausdruck für die Energie, aus der die Gleichungen zu entwickeln sind, nicht mit Sicherheit aufstellen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ den Vektor des elektrischen Moments der Ionen bezogen auf die Volumeinheit, mit e ihre Ladung, mit v die Geschwindigkeit, so ist

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = ve.$$

Denken wir uns nämlich ein Volumelement $dx\,dy\,dz$, so sind $\mathfrak{p}_x dy\,dz$ die durch $dy\,dz$ hindurchgehenden Momente. Ändert sich nun $\mathfrak{p}_x$ um $\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x}dx$, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x}dx \cdot dy\,dz = e\,dx\,dy\,dz$$

die infolge dieser Veränderung durch $dy\,dz$ hindurchgehende Ladung. Daher ist auch

$$\frac{d\mathfrak{p}_x}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} = ev_x.$$

27) *Drude,* Gött. Nachr. 1892, Nr. 2, p. 1.

28) *Helmholtz,* Elektromagn. Theorie der Farbenzerstreuung, Berlin Ber. 15. Dez. 1892; Ann. Phys. Chem. 48 (1893), p. 389.

Helmholtz setzt nun die elektrische Energie gleich

$$\frac{1}{2}\left\{\varepsilon\mathfrak{E}^2 - 2\mathfrak{E}\mathfrak{p}\cos(\mathfrak{E}\mathfrak{p}) + \frac{\mathfrak{p}^2}{\varepsilon_1}\right\},$$

wo ε_1 eine neue Konstante bezeichnet. Haben $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{p}$ gleiche Richtung, wie es in isotropen Medien der Fall ist, so haben wir

$$\cos(\mathfrak{E}\mathfrak{p}) = 1.$$

Reiff[29]) dagegen hält einen Ausdruck der Energie für wahrscheinlicher wo das zweite Glied ganz fehlt, und in der Tat ergeben sich daraus Gleichungen, die zu denselben Dispersionsformeln führen, wie der *Helmholtz*sche Ausdruck. Mit noch größerem Recht könnte man aber auch voraussetzen, daß die Feldstärke im Äther $\mathfrak{E}$ und die Erregung in den Molekülen $\mathfrak{p}$ sich einfach addieren, so daß die Gesamterregung

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{p}$$

würde. Nach dem allgemeinen Ausdruck für die Energie (6) ergibt sich diese dann gleich

$$\frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{E}\mathfrak{p}).$$

Bei dieser Unsicherheit erscheint es daher überhaupt nicht zweckmäßig, von dem unbekannten Ausdruck der Energie auszugehen und es empfiehlt sich mehr, die direkten Bewegungsgleichungen aufzustellen, weil hier die Grundannahmen durchsichtiger bleiben.

Da von magnetischen Erregungen durch die Lichtschwingungen in den Molekülen abgesehen wird, so bleibt das eine System der *Maxwell*schen Gleichungen unverändert,

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot}\mathfrak{E}.$$

Zu der elektrischen Feldstärke im anderen System kommen die durch die Verschiebung der Ionen hervorgerufenen $\mathfrak{p}$ hinzu, so daß dann dies System die Gestalt erhält

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E} + \mathfrak{p}) = \operatorname{rot}\mathfrak{H}. \tag{70}$$

Es kommt nun auf die Bestimmung von $\mathfrak{p}$ an.

Wir nennen m_a die Masse eines Ions, e_a seine Ladung, l_a seine Verschiebung aus der Ruhelage, $\mathfrak{N}_a$ die Anzahl der Ionen in der Volumeinheit, so ist

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = e_a\mathfrak{N}_a\frac{dl_a}{dt}$$

29) *Reiff*, Über die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien, Ann. Phys. Chem. 50 (1893), p. 361.

die Elektrizitätsmenge, die durch die Querschnittseinheit fließt. Diese ist einem Strom äquivalent und superponiert sich zu $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$.

Auf jedes Ion wirkt nun

1) eine Kraft $e_\mathfrak{a} \mathfrak{E}$,

2) eine Kraft $-e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 l_\mathfrak{a}$, welche das Ion in die Ruhelage zurückzieht. Der Ursprung dieser Kraft bleibt dunkel und sie ist als Notbehelf anzusehen. Daß die Ladung im Quadrat auftritt, soll andeuten, daß die Richtung der Kraft bei positiver und negativer Ladung dieselbe ist. Da aber die unbekannte Konstante $f_\mathfrak{a}$ als Faktor hinzutritt, ist es gleichgültig, in welcher Form $e_\mathfrak{a}$ vorkommt.

3) Dasselbe gilt für das Reibungsglied, das zur Erklärung der Absorption hinzugefügt werden muß.

Die Bewegungsgleichung des Ions lautet demnach

$$m_\mathfrak{a} \frac{d^2 l_\mathfrak{a}}{dt^2} = e_\mathfrak{a} \mathfrak{E} - e_\mathfrak{a}^2 f^2 l_\mathfrak{a} - \eta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}^2 \frac{d l_\mathfrak{a}}{dt}.$$

Da die Abhängigkeit von t wieder auf den Faktor e^{int} zu beschränken ist, so haben wir

$$- m_\mathfrak{a} n^2 l_\mathfrak{a} = e_\mathfrak{a} \mathfrak{E} - e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 l_\mathfrak{a} - \eta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}^2 i n l_\mathfrak{a},$$

daher

$$l_\mathfrak{a} = \frac{e_\mathfrak{a} \mathfrak{E}}{e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 - m_\mathfrak{a} n^2 + \eta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}^2 i n}$$

und

(71) $$\mathfrak{p} = \frac{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{E} \mathfrak{N}_\mathfrak{a}}{e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 - m_\mathfrak{a} n^2 + \eta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}^2 i n}.$$

Die Gleichung (70) wird demnach

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \left(1 + \frac{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{N}_\mathfrak{a}}{e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 - m_\mathfrak{a} n^2 + \eta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}^2 i n}\right) = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

der Einfluß auf die Gleichung (70) ist also derselbe, als wenn wir in der Gleichung

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{N}_\mathfrak{a}}{e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 - m_\mathfrak{a} n^2 + \eta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}^2 i n}$$

oder auch

(72) $$\varepsilon = 1 + \frac{1}{A^2 - B^2 n^2 + C^2 i n}$$

$$A^2 = \frac{f_\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{N}_\mathfrak{a}}, \qquad B^2 = \frac{m_\mathfrak{a}}{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{N}_\mathfrak{a}}, \qquad C^2 = \frac{\eta_\mathfrak{a}}{\mathfrak{N}_\mathfrak{a}}$$

schreiben. Will man dem Medium auch ohne Mitschwingen der Moleküle eine Dielektrizitätskonstante ε_0 zuschreiben, so ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{A^2 - B^2 n^2 + C^2 i n}$$

zu setzen. Haben wir es mit mehreren Atomgruppen zu tun, ist anstatt $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \cdots$$

zu setzen und wir erhalten für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{A_{\mathfrak{a}}^2 - B_{\mathfrak{a}}^2 n^2 + C_{\mathfrak{a}}^2 i n}.$$

16. Ableitung spezieller Dispersionsformeln.

a) *Vernachlässigung des Reibungsgliedes* ($\eta = 0$). Durch die Gleichung

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 \mathfrak{l}_{\mathfrak{a}}}{dt^2} = -\mathfrak{f}^2 e_{\mathfrak{a}} \mathfrak{l}_{\mathfrak{a}}$$

wird die freie Schwingung bestimmt. Sie ergibt

(72a) $$m_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}^2 = \mathfrak{f}_{\mathfrak{a}}^2 e_{\mathfrak{a}}^2 \quad \text{oder} \quad n_{\mathfrak{a}} = \frac{A}{B}.$$

In unserem Fall würde die Dielektrizitätskonstante bei der der freien Schwingung entsprechenden Schwingungszahl n unendlich werden. In der Nähe der Eigenschwingung muß daher immer auf die Absorption Rücksicht genommen werden.

Durchsichtig sind die Körper, bei denen die Eigenschwingungen der Atomgruppen vom Gebiet des Sichtbaren entfernt liegen. Hierbei sind die Eigenschwingungen im Ultraroten von denen im Ultravioletten zu unterscheiden. Sind Eigenschwingungen im Ultraroten vorhanden, so ist für das sichtbare Gebiet $B^2 n^2 > A^2$, bei Eigenschwingungen im Ultraviolett ist $A^2 > B^2 n^2$. Wir können also bei Absorption im Ultraviolett entwickeln

$$\frac{1}{A^2 - B^2 n^2} = \frac{1}{A^2\left(1 - \frac{B^2 n^2}{A^2}\right)} = \frac{1}{A^2}\left\{1 + \frac{B^2}{A^2} n^2 + \frac{B^4}{A^4} n^4 + \cdots\right\}$$

und für ein Absorptionsgebiet im Ultrarot

$$\frac{1}{A^2 - B^2 n^2} = -\frac{1}{B^2 n^2\left(1 - \frac{A^2}{B^2 n^2}\right)} = -\frac{1}{B^2 n^2}\left\{1 + \frac{A^2}{B^2 n^2} + \frac{A^4}{B^4 n^4} + \cdots\right\}.$$

Die Dielektrizitätskonstante ist, wenn nur ein Absorptionsstreifen vorhanden ist,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{A^2 - B^2 n^2}.$$

Nun ist das Brechungsverhältnis gegen das Vakuum gleich der

Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstanten (vgl. (48)), also

(73) $$\nu^2 = \varepsilon_0 + \frac{1}{A^2 - B^2 n^2},$$

also für ein Absorptionsgebiet im Ultraroten

$$\nu^2 = \varepsilon_0 - \frac{1}{B^2 n^2} - \frac{A^2}{B^4 n^4} - \cdots.$$

Kommt noch ein solches im Ultravioletten hinzu, so ist

$$\nu^2 = \varepsilon_0 - \frac{1}{B^2 n^2} - \frac{A^2}{B^4 n^4} - \cdots + \frac{1}{A'^2} + \frac{B'^2}{A'^2} n^2 + \cdots.$$

Beschränken wir uns auf die ersten Glieder, so ist

$$\nu^2 = \varepsilon_0 + \frac{1}{A'^2} - \frac{1}{B^2 n^2} + \frac{B'^2}{A'^2} n^2.$$

Hier rührt das Glied mit dem Faktor n^2 von dem Absorptionsgebiet im Ultravioletten, das mit $\frac{1}{n^2}$ von dem im Ultraroten her.

Aus dieser Gleichung folgt, daß ν immer mit n wächst.

Für $n = 0$, also sehr langsame Schwingungen, ist

$$\underset{n=0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \frac{1}{A^2}.$$

Dies ist die nach den gewöhnlichen Methoden gemessene Dielektrizitätskonstante. Die Gleichung

$$\underset{n=0}{\varepsilon} = \nu^2$$

kann im sichtbaren Gebiet nur dann annähernd gelten, wenn im Ultraroten keine Eigenschwingungen liegen, weil sonst das Gebiet $n = 0$ von dem sichtbaren durch die Eigenschwingung, wo $\varepsilon = \infty$ werden würde, getrennt ist.

Bei mehreren Eigenschwingungen ist für die Dielektrizitätskonstante außerhalb des Absorptionsgebiets zu setzen

(73a) $$\varepsilon_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{A_{\mathfrak{a}}^2 - B_{\mathfrak{a}}^2 n^2}.$$

Schreiben wir $\frac{2\pi c}{\lambda} = n$, so haben wir

$$\varepsilon = \nu^2 = \varepsilon_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{A_{\mathfrak{a}}^2 - B_{\mathfrak{a}}^2 \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2}}$$

$$= \varepsilon_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{A_{\mathfrak{a}}^2} + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{B_{\mathfrak{a}}^2 4\pi^2 c^2}{A_{\mathfrak{a}}^2 (A_{\mathfrak{a}}^2 \lambda^2 - B_{\mathfrak{a}}^2 4\pi^2 c^2)}.$$

Für $\lambda = \infty$ wird

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{A_{\mathfrak{a}}^2},$$

das heißt die Dielektrizitätskonstante wird durch die Eigenschwingungen der Moleküle vergrößert.

Nun ist die Wellenlänge der Eigenschwingung

$$\lambda_a = 2\pi c \frac{B_a}{A_a}.$$

Daher ist

$$\varepsilon = \varepsilon_{\lambda=\infty} + \sum \frac{\lambda_a^2}{A_a^2(\lambda^2 - \lambda_a^2)}.$$

Bei zwei Eigenschwingungen im sichtbaren Gebiete haben wir

(74) $$\nu^2 = C_0 + \frac{C_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{C_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}$$

als Dispersionsformel.

b) *Beibehaltung des Reibungsgliedes. Die Umgebung der Absorptionslinien.* Kommt man in die Nähe der Eigenschwingung, so muß die Absorption berücksichtigt werden. Dann haben wir für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_0 + \frac{1}{A^2 - B^2 n^2 + C^2 in}.$$

Die Gleichung (9) gibt uns

$$-\varepsilon n^2 = c^2(a + ib)^2,$$

also

$$-\frac{c^2}{n^2}(a + ib)^2 = \varepsilon_0 + \frac{1}{A^2 - B^2 n^2 + C^2 in},$$

bei Einführung zweier Hilfsgrößen P_1 und P_2 wird

$$\frac{c^2}{n^2}(b^2 - a^2) = \varepsilon_0 + \frac{A^2 - B^2 n^2}{(A^2 - B^2 n^2)^2 + C^4 n^2} = P_1,$$

$$2ab\frac{c^2}{n^2} = \frac{C^2 n}{(A^2 - B^2 n^2)^2 + C^4 n^2} = P_2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{c^2}{n^2}(b^2 + a^2) = \sqrt{P_1^2 + P_2^2},$$

(75) $$\frac{c^2 a^2}{n^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{P_1^2 + P_2^2} - \tfrac{1}{2} P_1,$$

$$\frac{c^2 b^2}{n^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{P_1^2 + P_2^2} + \tfrac{1}{2} P_1.$$

Nehmen wir zunächst die Absorption als klein an, so ist P_2 klein gegen P_1 und

$$\frac{c^2 a^2}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{P_2^2}{P_1},$$

$$\frac{c^2 b^2}{n^2} = P_1.$$

Nun ist $\frac{n}{b}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem Medium, $\frac{n}{bc}$ ist das Verhältnis dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu der im Vakuum, also $\frac{1}{\nu}$, so daß

$$\nu^2 = P_1$$

ist. Ferner ist

$$\frac{dP_1}{dn} = \frac{2n[B^2(A^2 - B^2n^2)^2 - A^2C^4]}{[(A^2 - B^2n^2)^2 + C^4n^2]^2}. \tag{75a}$$

Dies wird Null für

$$A^2 - B^2n^2 = \pm \frac{AC^2}{B},$$

woraus

$$n^2 = \frac{A^2 \mp \frac{A}{B}C^2}{B^2}$$

folgt.

Dies sind die einzigen endlichen Werte von n, für die $\frac{dP_1}{dn}$ verschwindet. Es muß also der eine einem Maximum, der andere einem Minimum entsprechen. Nun ist für diese Werte von n

$$\nu^2 = P_1 = \varepsilon_0 \pm \frac{B^2}{C^2} \frac{1}{2AB \mp C^2}. \tag{76}$$

Es entspricht also das obere Vorzeichen einem Maximum, das untere einem Minimum von P_1, dem oberen Vorzeichen entspricht der kleinere, dem unteren der größere Wert von n.

Das Maximum von $P_1 = \nu^2$ liegt also bei den kleineren Schwingungszahlen, das Minimum bei den größeren. Werden daher die Werte von ν als Ordinaten, von n als Abszissen aufgetragen, so ist zunächst $\nu = \varepsilon_0 + \frac{1}{A^2}$ für $n = 0$. So lange die Absorption keine Rolle spielt, wächst ν mit zunehmendem n bis zum Maximum. In der Nähe des Maximums beginnt die Absorption, ν fällt mit weiter zunehmendem n bis zum Minimum herab und steigt dann wieder, um sich für $n = \infty$ dem Werte ε_0 zu nähern. Den Gang des Brechungsindex ν als Funktion der Schwingungszahl n veranschaulicht beistehende Figur, wo das schraffierte Gebiet das Absorptionsgebiet darstellt.

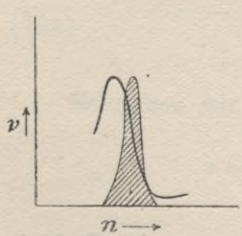

Fig. 1.

Auf der Strecke zwischen dem Maximum und dem Minimum, wo ν mit zunehmendem n abnimmt, liegt anomale Dispersion. Sie kann nur bei gleichzeitiger starker Absorption vorhanden sein.

Aus der Folgerung, daß ν von dem Minimum aus mit zunehmendem n wachsend dem Werte ε_0 sich nähert, folgt weiter, daß das Minimum selbst bei Werten von ν liegt, die kleiner als ε_0 sind.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit muß hier größer sein als im Vakuum, wenn $\varepsilon_0 = 1$ angenommen wird. Derartige Brechungsverhältnisse sind bisher nur bei einigen Metallen beobachtet. Bei allen durchsichtigen Substanzen müssen Eigenschwingungen im Ultraviolett liegen, welche das Brechungsverhältnis im sichtbaren Teil auf einen größeren Wert hinaufdrücken.

Entfernen wir uns von der Eigenschwingung in der Richtung wachsender n, so folgt wegen (75a) und (76), daß $\nu \frac{d\nu}{dn}$ groß ist für große Werte von B^2 und kleine von C^2 und klein im umgekehrten Falle. Große Werte von B^2 bedeuten große mitschwingende Massen, große von C^2 starke Reibung. Die Kurve für ν^2 ist daher steil bei großen mitschwingenden Massen und kleiner Reibung, flach bei kleinen Massen und großer Reibung.

Im ersteren Falle sind die Absorptionsstreifen schmal, im zweiten breit.

Die hier behandelte Theorie läßt sich auch ohne weiteres auf die Metallreflexion anwenden.

Bei mehreren mitschwingenden Ionenarten haben wir anstatt der Dielektrizitätskonstanten

$$\varepsilon_0 + \sum_a \frac{1}{A^2 - B^2 n^2 + C^2 i n}$$

zu setzen.

Nach (57a) ist dies gleich $\varrho^2 e^{2i\theta}$, während nach (62), (63) und (68)

$$(77) \qquad \begin{aligned} \nu^2(1-k^2) &= \varrho^2 \cos 2\theta = \varepsilon_0 + \sum_a \frac{A^2 - B^2 n^2}{(A^2 - B^2 n^2)^2 + C^4 n^2} \\ &= \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \left(\sin^2 \alpha_0 \cos 4 h_0 + \cos^2 \alpha_0\right), \\ -2\nu^2 k &= \varrho^2 \sin 2\theta = -\sum_a \frac{C^2 n}{(A^2 - B^2 n^2)^2 + C^4 n^2} \\ &= \pm \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 \sin 4 h_0 \end{aligned}$$

folgen. Wir haben hier Systeme von drei Konstanten A, B, C durch die Beobachtungen zu bestimmen, während die Beobachtung für eine Farbe nur zwei Konstanten liefert. Zur Prüfung der Theorie müssen diese daher erst durch Beobachtungen von α_0 und h_0 für die verschiedenen n bestimmt sein. Vgl. Nr. **10**.

17. Drudes Bestimmung der bei der Dispersion wirksamen Ionenarten[27]). Wir hatten nach Gleichung (72a) für die Eigen-

---

27) *Drude*, Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 677, 936,

schwingung in nicht absorbierenden Medien

$$n_\mathfrak{a} = \frac{f_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}}{\sqrt{m_\mathfrak{a}}}.$$

Ferner nach (73) für nicht absorbierende Medien

$$\nu^2 = \varepsilon_0 + \sum_\mathfrak{a} \frac{1}{A^2 - B^2 n^2} = \varepsilon_0 + \sum_\mathfrak{a} \frac{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{N}_\mathfrak{a}}{e_\mathfrak{a}^2 f_\mathfrak{a}^2 - m_\mathfrak{a} n^2}$$

$$= \varepsilon_0 + \sum_\mathfrak{a} \frac{M_\mathfrak{a}}{n_\mathfrak{a}^2 - n^2}, \quad \text{wo} \quad M_\mathfrak{a} = \frac{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{N}_\mathfrak{a}}{m_\mathfrak{a}}$$

gesetzt ist.

Schreiben wir

$$n = \frac{2\pi c}{\lambda}, \qquad n_\mathfrak{a} = \frac{2\pi c}{\lambda_\mathfrak{a}},$$

so wird

$$\nu^2 = \varepsilon_0 + \sum_\mathfrak{a} \frac{M_\mathfrak{a} \lambda_\mathfrak{a}^2}{4\pi^2 c^2} + \sum_\mathfrak{a} \frac{M_\mathfrak{a} \lambda_\mathfrak{a}^4}{4\pi^2 c^2 (\lambda^2 - \lambda_\mathfrak{a}^2)}$$

$$= \mathfrak{E} + \sum_\mathfrak{a} \frac{\mathfrak{F}_\mathfrak{a}}{\lambda^2 - \lambda_\mathfrak{a}^2}, \qquad \mathfrak{F}_\mathfrak{a} = \frac{e_\mathfrak{a}^2 \mathfrak{N}_\mathfrak{a} \lambda_\mathfrak{a}^4}{m_\mathfrak{a} 4\pi^2 c^2}.$$

Bei solchen Körpern, deren Dispersion sich durch die zweikonstantige Dispersionsformel (74) darstellen läßt, haben wir zwei Ionenarten anzunehmen, von denen die eine positiv, die andere negativ geladen sein muß, weil keine freien Ladungen auftreten.

Diese Bedingung liefert die Gleichung

$$\mathfrak{N}_1 e_1 + \mathfrak{N}_2 e_2 = 0$$

oder

$$\frac{\mathfrak{F}_1 m_1}{e_1 \lambda_1^4} + \frac{\mathfrak{F}_2 m_2}{e_2 \lambda_2^4} = 0.$$

Nun ist bei allen solchen Körpern für die im Ultrarot liegende Eigenschwingung $\frac{\mathfrak{F}_1}{\lambda_1^4}$ viel kleiner als für die ultraviolette Eigenschwingung $\frac{\mathfrak{F}_2}{\lambda_2^4}$, d. h. $\frac{m_1}{e_1}$ muß viel kleiner als $\frac{m_2}{e_2}$ sein.

Diese Tatsache läßt sich aus der Hypothese erklären, daß die ultravioletten Schwingungen durch negative Elektronen, bei denen $\frac{m_2}{e_2}$ klein ist, dagegen die ultraroten Eigenschwingungen durch positive Ionen mit großem $\frac{m_1}{e_1}$ bedingt werden.

Für die negativen Elektronen hätte man $\frac{m}{e}$ konstant und gleich dem an Kathodenstrahlen gemessenen Wert zu setzen.

Nennt man nun i die Zahl der Elektronen, die an einem positiven Ion haften, s die Dichte des Körpers, M sein Molekulargewicht, m_H die Masse eines Wasserstoffatoms, so ist

$$s = \frac{\mathfrak{N}}{i} m_H M = \frac{\mathfrak{F} m 4\pi^2 c^2}{e^2 \lambda^4 i} m_H M$$

oder

$$i = \frac{4\pi^2 c^2 \mathfrak{F} M}{s\lambda^4} \frac{m_H}{e} \cdot \frac{m}{e}.$$

Für $\frac{m_H}{e}$ ist der aus der Elektrolyse, für $\frac{m}{e}$ der aus Kathodenstrahlenmessungen bekannte Wert einzusetzen.

Die auf diese Weise gewonnenen Zahlen stimmen in roher Annäherung mit den Valenzzahlen der betreffenden Körper überein, so daß die Hypothese möglich wird, daß die Valenzzahlen durch die Anzahl der schwingungsfähigen Elektronen gegeben werden. Die neueren Untersuchungen über das Zeemanphänomen bei festen Körpern und bei den Bandenspektren, bei denen die elementare Theorie Werte von $\frac{e}{m}$ giebt, die weit größer sind als der aus den Messungen an Kathodenstrahlen bekannte, lassen es zweifelhaft erscheinen, ob die tatsächlichen Verhältnisse wirklich so einfach liegen.

18. Absorption in Metallen bei Annahme von Leitungselektronen. *Drude*[28]) hat die Theorie der Metalloptik noch dadurch modifiziert, daß er die Eigenschaft der Leitung der Elektrizität auf Ionen zurückführt, die sich innerhalb des Körpers frei verteilen können und nur Reibungskräften unterworfen sind[29]).

Im allgemeinen hat man frei bewegliche und schwingende Ionen gesondert anzunehmen: für die frei beweglichen fehlt die elastische Kraft, welche das Ion in die Gleichgewichtslage zurückzieht, d. h. die Konstante A^2 in (77) ist Null.

Wir haben daher

$$\nu^2(1 - k^2) = \varepsilon_0 - \sum_{\mathfrak{a}} \frac{B_{\mathfrak{a}}^{\,2}}{B_{\mathfrak{a}}^{\,4} n^2 + C_{\mathfrak{a}}^{\,4}},$$

$$2\nu^2 k = \frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{C_{\mathfrak{a}}^{\,2}}{B_{\mathfrak{a}}^{\,4} n^2 + C_{\mathfrak{a}}^{\,4}}.$$

Nimmt man zwei Ionengattungen an, so haben wir außer ε_0 die Konstanten B_1, B_2, C_1, C_2. Die Konstanten C_1 und C_2 sind indessen nicht unabhängig voneinander, da die Bewegungen der beiden

28) *Drude,* Physik. Zeitschr. 1 (1899/1900), p. 161.

29) Die Hypothese freier Elektronen in Metallen scheint wegen des zu großen Wertes, den dann die spezifische Wärme annehmen würde, nicht haltbar zu sein. Wahrscheinlich sind die Elektronen nur kurze Zeit frei, im übrigen gebunden.

Ionen die Leitfähigkeit des Mediums ausmachen sollen. Es war nach (71) und (72)

$$C^2 = \frac{\eta_\alpha}{\mathfrak{N}_\alpha}.$$

$\eta_\alpha e_\alpha^2$ war die Reibungskonstante, sodaß $\frac{1}{\eta_\alpha e_\alpha}$ die Geschwindigkeit ausdrückt, welche das Ion unter dem Einfluß der Feldeinheit erreicht. Daher ist $\frac{\mathfrak{N}_\alpha}{\eta_\alpha} = \frac{1}{C^2}$ die Leitfähigkeit σ, nämlich das Produkt aus Anzahl der Ionen, Geschwindigkeit im Felde Eins Ladung des Ions. Bei zwei Ionengattungen muß die gesamte Leitfähigkeit

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2}$$

sein. Wir können demnach auch schreiben

$$\text{(78)} \quad \begin{aligned} \nu^2(1-k^2) &= \varepsilon_0 - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} \frac{B_\alpha^2 \sigma_\alpha^2}{n^2 B_\alpha^4 \sigma_\alpha^2 + 1} = \mathfrak{A}, \\ 2\nu^2 k &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} \frac{\sigma_\alpha}{n^2 B_\alpha^4 \sigma_\alpha^2 + 1} = \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Nach diesen Gleichungen kann $k > 1$ sein, ohne daß die Dielektrizitätskonstante ε_0 negativ wird.

Ferner ist

$$\nu^2 k < \frac{\sigma}{n};$$

beides entspricht den an Metallen gemachten Beobachtungen. $\nu^2 k$ muß stets mit n abnehmen.

Ferner haben wir

$$2\nu^2 = \frac{\mathfrak{B}^2}{-\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}, \qquad k = -\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} + \sqrt{\frac{\mathfrak{A}^2}{\mathfrak{B}^2} + 1}.$$

Da $\mathfrak{B}$ schneller als $\mathfrak{A}$ mit zunehmendem n abnimmt, so nimmt auch ν in diesen Fällen mit zunehmendem n ab, d. h. bei Metallen ist anomale Dispersion Regel. Soweit dies nicht zutrifft, müssen außer den Leitungsionen noch mitschwingende Ionen herangezogen werden. Aber auch hier liegen die Verhältnisse wahrscheinlich viel verwickelter.

19. Theorie der Dispersion von Gibbs[30]**).** In eigentümlicher Weise hat *J. W. Gibbs* die Theorie der Dispersion behandelt, indem

---

30) *J. W. Gibbs*, Notes on the electromagnetic theory of light, Americ. Journ. of science 23, p. 262, 466; 25, p. 107.

er als notwendigen zweiten Vektor eine unregelmäßige Bewegung des Mediums annimmt. Diese soll auf die elektrische Kräfte in der Weise zurückwirken, daß die elektrische Energie um einen Betrag proportional $\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right)^2$ vermehrt wird. Eine exakte Begründung dieses Ansatzes wird nicht gegeben. Nimmt man an, daß durch das Licht Wärme, also unregelmäßige Bewegung der Moleküle, erzeugt wird, so kann man ihre Energie wohl als Energie auffassen, welche neu hinzukommt, und da diese nur auftritt, wenn die Moleküle durch die elektrischen Kräfte bewegt werden, so mag zugegeben werden, daß sie proportional $\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right)^2$ ist. Warum indessen die bereits sonst vorhandene Wärme, die bei verschiedenen Temperaturen verschieden ist, nicht auf das Licht einwirkt, erhellt nicht.

Wie wir oben Nr. 6 sahen ist die elektrische Energie gleich der magnetischen und wenn man das auch hier annimmt, was indessen als weitere Hypothese anzusehen ist, so hat man

$$\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 = \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2 + \frac{A\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right)^2,$$

wo A der Proportionalitätsfaktor der Zusatzenergie ist.

Bei periodischer Schwingung gibt der Faktor e^{int}

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\mathfrak{E}^2}{\mathfrak{H}^2} - An^2\frac{\mathfrak{E}^2}{\mathfrak{H}^2},$$

woraus durch Mittelbildung

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\nu^2} = A_1 - A_2 n^2$$

als Dispersionsformel folgt.

20. Theorie von William Thomson. Lord *Kelvin*[31]) hat in den Vorlesungen, die er im Jahre 1884 in Baltimore gehalten hat, die Mechanik eines Moleküls analysiert, das aus elastischen, durch elastische Federn symmetrisch miteinander verbundenen konzentrischen Kugelschalen besteht. Obwohl diese Theorie mit der elektromagnetischen Lichttheorie außer Zusammenhang steht, hat sie doch enge Beziehungen zur Theorie der Dispersion, weil sie sehr weit auf eine allerdings sehr hypothetische Mechanik des Moleküls eingeht.

Seien ξ und M Verschiebung und Masse eines Ätherteilchens, das an der äußersten Kugelschale anliegt, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, M_1, M_2, M_3, \ldots$ Verschiebungen und Massen der Schalen. Die durch die Verschiebungen

31) Sir *William Thomson*, Lectures of molecular dynamics and the wave theory of light, Baltimore 1884 (Nachschrift von *Hathaway*).

hervorgerufenen elastischen Kräfte der Federn sollen den relativen Verschiebungen proportional gesetzt werden. Dann sind die Differentialgleichungen der Bewegung

$$M_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = C_1(\xi - \xi_1) - C_2(\xi_1 - \xi_2),$$

$$M_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = C_2(\xi_1 - \xi_2) - C_3(\xi_2 - \xi_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_\alpha \frac{d^2\xi_\alpha}{dt^2} = C_\alpha(\xi_{\alpha-1} - \xi_\alpha) - C_{\alpha+1}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha+1}).$$

Werden sämtliche Schalen in periodische Schwingungen von der Schwingungszahl n gesetzt, so haben wir für alle ξ den Faktor e^{int} anzunehmen. Dann ist

$$-M_1 n^2 = C_1\left(\frac{\xi}{\xi_1} - 1\right) - C_2\left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\right),$$

$$-M_2 n^2 = C_2\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - 1\right) - C_\alpha\left(1 - \frac{\xi_3}{\xi_2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-M_\alpha n^2 = C_\alpha\left(\frac{\xi_{\alpha-1}}{\xi_\alpha} - 1\right) - C_{\alpha+1}\left(1 - \frac{\xi_{\alpha+1}}{\xi_\alpha}\right).$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$\frac{\xi}{\xi_1} = -\frac{M_1}{C_1} n^2 + 1 + \frac{C_2}{C_1}\left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$$

und durch Elimination von $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ aus der zweiten

$$\frac{\xi}{\xi_1} = -\frac{M_1}{C_1} n^2 + 1 + \frac{C_2}{C_1}\left\{1 - \frac{1}{-\frac{M_2}{C_2} n^2 + 1 + \frac{C_3}{C_2}\left(1 - \frac{\xi_3}{\xi_2}\right)}\right\}.$$

Man erhält also allgemein durch fortgesetzte Elimination für $\frac{\xi}{\xi_1}$ einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\xi_1}{\xi} = \frac{A_0 + A_1 n^2 + A_1 n^4 + \cdots + A_{\alpha-1} n^{2\alpha-2}}{B_0 + B_1 n^2 + B_2 n^4 + \cdots + B_\alpha n^{2\alpha}}$$

der, in Partialbrüche zerlegt, die Gestalt annimmt

$$= \frac{q_1}{\frac{n^2}{k_1^2} - 1} + \frac{q_2}{\frac{n^2}{k_2^2} - 1} + \cdots,$$

wo die k_1, k_2 die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$B_0 + B_1 n^2 + B_2 n^4 + \cdots = 0$$

sind. Für jede Wurzel wird ξ_1 unendlich. Sie entspricht der Eigenschwingung einer Schale. Differenzieren wir $\frac{\xi}{\xi_1}$ nach n^2, so wird

$$\frac{d}{dn^2}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) = -\frac{M_1}{C_1} - \frac{C_2}{C_1}\frac{d}{dn^2}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$$

$$= -\frac{M_1}{C_1} + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\xi_2{}^2}{\xi_1{}^2}\right)\left[-\frac{M_2}{C_2} - C_3\frac{d}{dn^2}\left(\frac{\xi_3}{\xi_2}\right)\right]$$

und

$$-C_1\frac{d}{dn^2}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) = M_1 + M_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2 + M_3\left(\frac{\xi_3}{\xi_2}\right)^2 + \cdots.$$

Die lebendige Kraft des ganzen Systems ist

$$E = \frac{1}{2}n^2(M_1\xi_1{}^2 + m_2\xi_2{}^2 + \cdots),$$

die der ersten Schale

$$E_1 = \frac{1}{2}M_1 n^2 \xi_1{}^2,$$

daher

$$-\frac{C_1}{M_1}\frac{d}{dn^2}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) = \frac{E}{E_1}.$$

Andererseits ist

$$\frac{d}{dn^2}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) = \frac{1}{k_1{}^2 q_1} \quad \text{für} \quad n^2 = k_1{}^2.$$

In derselben Weise ergeben sich $q_2, q_3, q_4, \ldots$, so daß, wenn wir $\frac{E_1}{E}$ für $n^2 = k_1{}^2$ mit R_1, $\frac{E_2}{E}$ für $n^2 = k_2{}^2$ mit R_2 bezeichnen:

$$\frac{\xi_1}{\xi} = -\frac{C_1}{M_1}\left(\frac{R_1}{n^2 - k_1{}^2} + \frac{R_2}{n^2 - k_2{}^2} + \cdots\right).$$

Die Bewegungsgleichung des mit der äußersten Schale elastisch verbundenen Athers lautet, wenn M seine Dichte, e seine Elastizitätskonstante bedeuten,

$$M\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = C\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + C_1(\xi_1 - \xi).$$

Die herankommende Lichtwelle bewirkt eine Verschiebung des Äthers

$$\xi = Ae^{i(nt - bx)},$$

so daß

$$-\frac{Mn^2}{C_1} = -\frac{Cb^2}{C_1} + \left(\frac{\xi_1}{\xi} - 1\right)$$

und

$$\frac{\xi_1}{\xi} = -\frac{Mn^2}{C_1} + \frac{C}{C_1}b^2 + 1$$

ist. Wir haben daher $\frac{\xi_1}{\xi}$ einmal durch die Wirkung der herankommenden Lichtwelle, das andere Mal durch die inneren Schwingungen des Moleküls ausgedrückt. Setzen wir beide gleich, so haben wir

$$-\frac{Mn^2}{C_1} + \frac{C}{C_1}b^2 + 1 = -\frac{C_1}{M_1}\left\{\frac{R_1}{n^2 - k_1{}^2} + \frac{R_2}{n^2 - k_2{}^2} + \cdots\right\},$$

$$\frac{b^2}{n^2} = \frac{1}{C}\left\{M - \frac{C_1}{n^2}\left(1 + \frac{C_1}{M_1}\left(\frac{R_1}{n^2 - k_1{}^2} + \frac{R_2}{n^2 - k_2{}^2} + \cdots\right)\right)\right\}.$$

Diese Formel enthält die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Anwesenheit der Moleküle. Nun ist nach der Elastizitätstheorie $\sqrt{\frac{C}{M}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Äther. Das Brechungsverhältnis ergibt sich daher

$$\nu = \sqrt{\frac{C}{M}} \cdot \frac{b}{n},$$

da $\frac{b}{n}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem mit Molekülen beladenen Äther ist.

Daher haben wir

$$(81) \quad \nu^2 = \frac{b^2}{n^2}\frac{C}{M} = 1 - \frac{C_1}{Mn^2}\left(1 + \frac{C_1}{M_1}\left(\frac{R_1}{n^2-k_1^2} + \frac{R_2}{n^2-k_2^2} + \cdots\right)\right).$$

Ist nur eine Kugelschale vorhanden, so ist

$$(81\text{a}) \quad \begin{aligned} \nu^2 &= 1 - \frac{C_1}{Mn^2}\left(1 + \frac{C_1}{M_1}\frac{R}{n^2-k_1^2}\right) \\ &= 1 - \frac{A}{n^2}\left(1 + \frac{B}{n^2 - B_1}\right). \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich dieser mit den früheren Formeln ist ersichtlich, daß man zu einander ähnlichen Dispersionsformeln geführt wird, wenn man die Annahme mitschwingender Gebilde macht, denen bestimmte Eigenschwingungen zukommen, ohne daß es auf die sonstigen speziellen Voraussetzungen der Theorie ankommt.

21. Dispersionstheorie von H. A. Lorentz. *Lorentz*[32]) gelangt zu den Gleichungen, welche die Fortpflanzung des Lichtes in ponderablen Körpern bestimmen, indem er ein System von Molekülen betrachtet, deren jedes ein einzelnes bewegliches Elektron enthält. Letzteres hat eine bestimmte Gleichgewichtslage, aus der es aber verschoben wird, sobald das Molekül von elektrischen Schwingungen getroffen wird, und es ist nun zu berücksichtigen, daß die mitschwingenden Elektronen zu Mittelpunkten elektromagnetischer Wellen werden, die ihrerseits die Elektronenbewegungen beeinflussen.

Es sei $\mathfrak{q}$ die Verschiebung eines Elektrons aus der Gleichgewichtslage, e die Ladung, und also

$$\mathfrak{p} = e\mathfrak{q}$$

das durch die Verschiebung in dem Molekül hervorgebrachte elektrische Moment. Indem wir dieses als für benachbarte Moleküle

---

32) *H. A. Lorentz,* La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Arch. néerl. 25 (1892), p. 363. Der folgenden Darstellung liegt eine freundliche persönliche Mitteilung von Herrn *H. A. Lorentz* zugrunde.

gleich groß betrachten (anderenfalls hätte man mit Mittelwerten zu rechnen) erhalten wir für das elektrische Moment des Körpers pro Volumeneinheit

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{N}\mathfrak{p} = \mathfrak{N}e\mathfrak{q}, \tag{82}$$

wo $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit bedeutet.

Für die elektrische Kraft $\mathfrak{d}$ und die magnetische Kraft $\mathfrak{h}$, welche ein einzelnes Molekül in einem um r entfernten Punkt (x, y, z) hervorbringt, gelten die Gleichungen[32a])

$$\mathfrak{d} = -\frac{1}{4\pi c^2 r}[\ddot{\mathfrak{p}}] + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathfrak{p}_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{p}_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{p}_z]}{r}\right\}, \tag{83}$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{r}[\dot{\mathfrak{p}}]\right\}, \tag{84}$$

in welchen die rechteckigen Klammern dazu dienen, die Werte von $\mathfrak{p}_x$ usw. für die Zeit $t - \frac{r}{c}$ anzuzeigen. Mittels dieser Formeln kann man auch das Feld berechnen, welches irgend ein Teil S des Körpers in einem äußeren Punkte (x, y, z) zur Folge hat; man hat nur $[\mathfrak{p}]$ durch $[\mathfrak{P}]dS$ zu ersetzen und sodann über den betreffenden Raum zu integrieren.

Wir fassen jetzt ein bestimmtes Molekül A ins Auge und bilden die Bewegungsgleichung für das in demselben enthaltene Elektron. Auf dieses Teilchen möge zunächst eine Kraft $-f\mathfrak{q}$ wirken (f positive Konstante), die es nach der Gleichgewichtslage zurücktreibt. Ferner besteht eine Wirkung des eigenen Feldes und zwar zerfällt diese in einen Widerstand, den wir hier vernachlässigen wollen, und eine der Beschleunigung proportionale und entgegengesetzte Kraft, die wir dadurch berücksichtigen, daß wir in den Bewegungsgleichungen unter m die Summe der materiellen und der sogenannten elektromagnetischen Masse des Elektrons verstehen. (Hierbei ist zu bemerken, daß nach neueren Erfahrungen negative Elektronen gar keine materielle Masse haben, so daß für solche m einfach die elektromagnetische Masse bedeutet.) Bezeichnen wir nun mit $(\mathfrak{E}', \mathfrak{H}')$ das Feld, welches an der Stelle von A besteht, mit Ausschluß des eigenen Feldes, so lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathfrak{q}} = -f\mathfrak{q} + e\mathfrak{E}'.$$

Wir legen um A als Mittelpunkt eine physikalisch unendlich kleine Kugel, und verstehen unter $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1)$, $(\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2)$, $(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0)$ die Felder, welche von den in dieser Kugel liegenden Molekülen, von den übrigen Teilchen des Körpers, und von äußeren Ursachen herrühren,

[32a]) Vgl. diese Encyklopädie V 14, Art. *H. A. Lorentz* Nr. **13**.

so daß

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_0,$$
$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_0$$

ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß man von $\mathfrak{H}_1$ absehen darf, und daß man für $\mathfrak{E}_1$ schreiben kann

$$\mathfrak{E}_1 = s\mathfrak{P},$$

wo s eine von der Anordnung der Moleküle abhängige Konstante bedeutet. In dem einfachen Falle einer kubischen Anordnung ist $s = 0$.

Den Wert von $\mathfrak{E}_2$ erhält man, wenn man den Ausdruck (83) in der oben angegebenen Weise integriert, und das Resultat läßt sich in einfacher Weise darstellen, wenn man das Vektor-Potential

$$\mathfrak{A} = \int \frac{[\mathfrak{P}]}{r} dS \tag{85}$$

einführt. Berechnet man $\mathfrak{E}_2$ in der Weise für einen beliebigen Punkt (x, y, z), daß man immer eine physikalisch unendlich kleine um (x, y, z) als Mittelpunkt gelegte Kugel von der Integration ausschließt, so wird $\mathfrak{A}$ eine bestimmte Funktion von x, y, z, t, und man findet

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{3}\mathfrak{P} - \frac{1}{4\pi c^2}\ddot{\mathfrak{A}} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{1}{4\pi c} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{A}}.$$

Um nun Gleichungen zu gewinnen, die für die Lösung des Problems geeignet sind, kann man folgenderweise (einfacher als in der zitierten Abhandlung) verfahren. Während nach obigen Formeln die magnetische Kraft an der Stelle des Moleküls A den Wert

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi c} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{H}_0 \tag{86}$$

hat, verstehe man unter „elektrischer Kraft" den Vektor

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{4\pi c^2}\ddot{\mathfrak{A}} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{E}_0, \tag{87}$$

eine Definition, die darauf hinausläuft, daß man $\mathfrak{E}$ als die Kraft im Innern einer langen und engen unendlich kleinen, zylindrischen Höhlung, deren Achse mit der Richtung von $\mathfrak{P}$ zusammenfällt, auffaßt, was einer bekannten Definition der magnetischen Kraft für das Innere eines magnetisierten Körpers entspricht.

Die Bewegungsgleichung wird jetzt

$$m\ddot{\mathfrak{q}} = -f\mathfrak{q} + e(\tfrac{1}{3} + s)\mathfrak{P} + e\mathfrak{E},$$

oder, mit Berücksichtung der Formel (82),

(88) $$\frac{m}{\mathfrak{N} e^2} \ddot{\mathfrak{P}} + \left(\frac{f}{N e^2} - s - \frac{1}{3}\right) \mathfrak{P} = \mathfrak{E}.$$

Ferner folgt aus (86)

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi c} \text{rot rot}\, \dot{\mathfrak{A}} + \text{rot}\, \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{4\pi c} (\text{grad div}\, \dot{\mathfrak{A}} - \Delta \dot{\mathfrak{A}}) + \text{rot}\, \mathfrak{H}_0,$$

also, wenn man die Beziehung

$$\text{rot}\, \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{E}}_0,$$

die aus (85) folgende Gleichung

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} = -4\pi \mathfrak{P}$$

und auch (87) beachtet,

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{E}} + \dot{\mathfrak{P}}).$$

Zur Abkürzung kann man hier noch

(89) $$\mathfrak{E} + \mathfrak{P} = \mathfrak{D}$$

setzen (elektrische Erregung), so daß

(90) $$\text{rot}\, \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}$$

wird.

Desgleichen ergibt sich aus (86) und (87)

(91) $$\text{rot}\, \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}},$$

wobei der Umstand benutzt worden ist, daß zwischen $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ die entsprechende Relation besteht.

Während nun (90) und (91) die gewöhnliche Gestalt der Feldgleichungen haben, wird für den vorliegenden Fall der Zusammenhang zwischen der elektrischen Kraft und der Elektrizitätsbewegung durch (88) — in Verbindung mit (89) — ausgedrückt.

Fügt man zu (88) noch ein Dämpfungsglied $\gamma \frac{d\mathfrak{P}}{dt}$ hinzu, so erhält man in derselben Weise wie bei der Ableitung der Gleichung (71), (72)

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{-\frac{n^2 m}{\mathfrak{N} e^2} + i n \gamma + \frac{f}{\mathfrak{N} e^2} - s - \frac{1}{3}}$$

und für unendlich lange Wellen ($n = 0$)

$$\varepsilon = \frac{f + (\frac{2}{3} - s)\mathfrak{N} e^2}{f - (\frac{1}{3} + s)\mathfrak{N} e^2},$$

woraus für $s = 0$

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{N} e^2}{f}}{1 - \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{N} e^2}{f}}$$

entsprechend der *Clausius-Mosotti*schen Formel folgt.

22. Theorie der Dispersion von Planck[33]. Man findet als Gleichung für einen kleinen elektromagnetischen Resonator, dessen Dämpfung nur durch Strahlung erfolgt (vgl. unten Art. Strahlung):

$$\frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} - \frac{1}{\pi n_0} l \frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3} + n_0^2 \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{E}_0 3 c^3 l}{2 \pi n_0}, \tag{92}$$

wobei die Dämpfung

$$l = \frac{16 \pi^4}{3 \lambda^3 K}$$

und die Energie des Resonators

$$U = \frac{1}{2} K \mathfrak{p}^2 + \frac{1}{2} L \left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right)^2,$$

$$L = \frac{2 \pi n}{3 c^3 l}, \qquad K = \frac{2 \pi n_0^3}{3 c^3 l}$$

und wo $\mathfrak{E}_0$ die auf den Resonator ausgeübte Kraft ist.

$\mathfrak{p}$ ist das elektrische Moment eines Resonators (Moleküls), also $\frac{\mathfrak{p}}{e}$ seine Elongation aus der Gleichgewichtslage. Dann ist die kinetische Energie

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{L}{2} \left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right)^2 = \frac{\pi n}{3 c^3 l} \left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right)^2,$$

infolgedessen

$$\frac{e^2}{m} = \frac{3 c^3 l}{2 \pi n};$$

ist die Masse rein elektromagnetisch, so ist unter der Annahme, daß die Ladung e gleichmäßig auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R ausgebreitet ist[33a]:

$$m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \frac{1}{R},$$

also

$$R = \frac{cl}{\pi n}.$$

---

33) *M. Planck*, Berlin Ber., 1. Mai 1902.

33a) *M. Abraham*, Gött. Nachr. 1902, Heft I, p. 19); Encykl. V 14, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. 21. Nach der Relativitätstheorie ist die elektromagnetische Masse einer bewegten Ladung nichts anderes als die Trägheit der elektrostatischen Energie.

Machen wir mit *Planck* die Annahme, daß die elektrische Polarisation durch die Anwesenheit der Moleküle bedingt ist, so ist $\mathfrak{p}$ das durch die Verteilung der Ladung e erzeugte Moment. Ist $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Ladungen in der Volumeinheit, $\overline{\mathfrak{p}}$ das mittlere Moment, so ist die Erregung $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{p}}$. Die Grundgleichungen

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}$$

ergeben wieder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + 4\pi\mathfrak{N}\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{p}}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathfrak{E};$$

die von den übrigen Molekülen auf einen Resonator ausgeübte Wirkung ist wie bei der Bildung des ersten Gliedes von $\mathfrak{E}_2$ auf p. 164 gleich $\frac{4\pi\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{p}}}{3}$, und die gesamte Kraft

(92a) $$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E} + \frac{4\pi\mathfrak{N}\overline{\mathfrak{p}}}{3}.$$

Daher folgt aus (92) und (92a)

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{p}}}{\partial t^2} - \frac{l}{\pi n_0}\frac{\partial^3 \overline{\mathfrak{p}}}{\partial t^3} + \left(n_0^2 - \frac{2l\mathfrak{N}c^3}{n_0}\right)\overline{\mathfrak{p}} = \frac{3lc^3}{2\pi n_0}\mathfrak{E}.$$

Setzen wir nun $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_y = 0$

$$\mathfrak{E}_x = Ae^{int-(a+bi)z}, \quad \overline{\mathfrak{p}}_x = Be^{int-(a+bi)z},$$

$$k = \frac{a}{b}, \quad \frac{bc}{n} = \nu, \quad g = \frac{2l\mathfrak{N}c^3}{n_0^3}, \quad \alpha = \frac{n^2-(1-g)n_0^2}{3gn_0^2}, \quad \beta = \frac{ln^3}{3\pi g n_0^3},$$

so ergibt sich

(92b) $$\nu^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha)^2+\beta^2}+(\alpha^2+\beta^2-\alpha)}{2(\alpha^2+\beta^2)},$$
$$k^2\nu^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha)^2+\beta^2}-(\alpha^2+\beta^2-\alpha)}{2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Ist die Dämpfung l klein, so daß β^2 gegen α^2 vernachlässigt werden kann, so folgt

$$\nu^2 = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{3gn_0^2}{n^2-(1-g)n_0^2}$$

als Dispersionsformel. Für $n = 0$, also unendliche Schwingungsdauer, erhält man

$$\nu^2 = \frac{1+2g}{1-g}$$

in Übereinstimmung mit der *Clausius-Mosotti*schen Formel. Die *Lorentz*sche Theorie ergab diese Formel, wenn von der Dämpfung abgesehen wurde, während bei der *Planck*schen immer eine schwache Dämpfung vorhanden sein muß, da diese ja durch die Strahlung bedingt wird.

Aus der Vergleichung mit den Beobachtungen am Wasserstoff ergibt sich für die Linie D, wo $\nu = 1{,}0001429$ ist,

$$k\nu = 9{,}6 \cdot 10^{-14}.$$

Der Absorptionsindex für die Längenheit a ist

$$a = bk = \frac{k\nu n}{c}.$$

Aus (92b) folgt für kleine β

$$k^2\nu^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^3(\alpha - 1)}, \quad \nu^2 = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

und hieraus

$$k\nu = \frac{\beta(\nu^2 - 1)^2}{2\nu},$$

so daß

$$a = \frac{\beta(\nu^2 - 1)^2 n}{2\nu c} = \frac{n^4(\nu^2 - 1)^2}{12\pi c^4 \nu \mathfrak{N}\lambda^4} = \frac{4\pi^3(\nu^2 - 1)^2}{3\nu\mathfrak{N}\lambda^4}$$

wird.

Ist ν nicht weit von 1 verschieden, so ist annähernd

$$\nu^2 - 1 = 2(\nu - 1)$$

und dann wird

$$a = \frac{16\pi^3(\nu - 1)^2}{3\mathfrak{N}\lambda^4}$$

$2a$ ist der Absorptionskoeffizient für die Intensität und der Wert von $2a$ stimmt genau mit dem von *Lord Rayleigh*[34]) abgeleiteten überein. Da die absorbierte Energie wieder in der Form von Strahlung ausgesandt wird, so wird durch die Gasmoleküle eine Zerstreuung des Lichtes hervorgerufen. Da a sehr stark mit abnehmender Wellenlänge zunimmt, so muß blaues Licht viel mehr als rotes zerstreut werden. Nach Rayleigh hat man die Entstehung des Himmelsblaus in dieser Weise aufzufassen.

23. Theorie der Fluoreszenz. Wenn man die einfache Differentialgleichung eines schwingenden Moleküls

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - K\frac{dx}{dt}$$

betrachtet, welche als Integral

$$x = \mathfrak{A}e^{(-\alpha + \beta i)t}$$

---

34) Lord *Rayleigh,* Phil. Mag. 49 (1899), p. 379.

hat, so ist $\beta_0 = \frac{a}{\sqrt{m}}$ die Schwingungszahl der ungedämpften Einzelschwingung und $\beta^2 = \sqrt{\beta_0 - \frac{K^2}{4m^2}}$ die Schwingungszahl der gedämpften Schwingung.

Den Ausdruck für die gedämpfte Schwingung kann man als *Fourier*sches Integral umformen und erhält

$$e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \Delta) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin((\beta + x)t + \Delta)\, dx}{\alpha^2 + x^2}.$$

Man sieht hieraus, daß eine gedämpfte Schwingung durch Summierung einer unendlichen Anzahl ungedämpfter mit unendlich kleinen Amplituden dargestellt werden kann.

Eine Erweiterung der Gleichung der Molekularschwingung durch Hinzufügung von Gliedern, die dem Quadrate oder höheren Potenzen der Elongation proportional sind, führt zu Schwingungen, die die Summations- und Differenztöne der anregenden und gedämpften Schwingung enthalten.

Man kann auf diese Weise leicht mannigfache Schwingungen als durch eine bestimmte einfache erregt ableiten und auf dieser Unterlage eine Theorie der Absorption und Fluoreszenz geben[35]).

Derartige Theorien entsprechen aber nicht ganz den Anforderungen der modernen theoretischen Physik, die verlangt entweder von bestimmt präzisierten Vorstellungen und Hypothesen oder von allgemeinen Gesetzen auszugehen.

Die gewöhnlichen Gleichungen, die eine Eigenschwingung der Ionen enthalten, zur Erklärung der Fluoreszenz heranzuziehen, ist deshalb aussichtslos, weil die Farbe des Fluoreszenzlichtes immer von der des erregenden Lichtes abweicht. Bei linearen Gleichungen sind aber immer die Periode der Erregung und die des ausgesandten Lichtes identisch.

W. Voigt[35a]) hat eine Theorie der Fluoreszenz aufgestellt, wonach die Ionen zwei verschiedene Eigenschwingungen besitzen, von denen die eine große, die andere kleine Dämpfung hat. Die erstere würde stark absorbierend wirken, und diese Energie könnte dann in der anderen Schwingung mit geringer Dämpfung ausgestrahlt werden.

24. Grundlagen der Kristalloptik. Die Erweiterung der elektromagnetischen Lichttheorie für Kristalle geschieht am einfachsten durch

---

35) *E. Lommel,* Ann. Phys. Chem. 3 (1878), p. 251.

35a) *W. Voigt*, Arch. Néerl. (2) 6, p. 352.

die Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante in verschiedenen Richtungen des Mediums verschieden ist[36]). Da die magnetische Konstante μ erfahrungsmäßig sich bei den optischen Vorgängen in Kristallen nicht von Eins unterscheidet, so braucht auf sie keine Rücksicht genommen zu werden.

Die *Maxwell*schen Gleichungen sind in dieser erweiterten Form

$$(93)\quad \begin{aligned} \frac{1}{c}\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}+\varepsilon_{12}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial t}\\ \frac{1}{c}\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}+\varepsilon_{22}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial t}\\ \frac{1}{c}\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}+\varepsilon_{32}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}+\varepsilon_{33}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

Abgekürzt schreiben wir

$$\mathfrak{D}=(\varepsilon)\mathfrak{E},$$

so daß dann die allgemeinen Gleichungen werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\mathfrak{H},\\ \frac{1}{c}\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot}\mathfrak{E}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}=\mathfrak{x},\quad 2F=\varepsilon_{11}\mathfrak{x}_x^2+\varepsilon_{22}\mathfrak{x}_y^2+\varepsilon_{33}\mathfrak{x}_z^2 +2\varepsilon_{12}\mathfrak{x}_x\mathfrak{x}_y+2\varepsilon_{13}\mathfrak{x}_x\mathfrak{x}_z+2\varepsilon_{23}\mathfrak{x}_y\mathfrak{x}_z$$

und nehmen an, daß $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}$, $\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}$ ist, so haben wir

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}}\right)=\operatorname{rot}\mathfrak{H}.$$

Faßt man den Vektor $\mathfrak{x}$ als Längenvektor auf, so wird durch F ein Ellipsoid dargestellt. Legt man die Koordinatachsen in die Achsen des Ellipsoids, so ist

$$2F=\varepsilon_{11}\mathfrak{x}_x^2+\varepsilon_{22}\mathfrak{x}_y^2+\varepsilon_{33}\mathfrak{x}_z^2.$$

Bei passender Wahl des Koordinatensystems kann man daher

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0$$

36) *Maxwell,* Treatise on electr. and magn. 2, Art. 794. Mit der elektromagnetischen Theorie stimmen überein die von *Kirchhoff* präziser gefaßte *Neumann*sche Theorie, Berlin Abh. 1876 = Ges. Abh., p. 352. Vgl. *Voigt*, Ann. Phys. Chem. 43 (1891), p. 436 und die Theorie von *Mac Cullagh,* Irish Trans. 21; vgl. *Fitzgerald*, Phil. Mag. (5) 7, p. 216. Weiterbildungen der *Fresnel*schen Theorie sind die Theorien von *Boussinesq*, Journ. de math. (2) 13 (1868), p. 330; Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 519, und *Sarrau*, Journ. de math. (2) 17 (1867), p. 167; 13 (1868), p. 59, die jedoch nicht ganz mit der elektromagnetischen Theorie übereinstimmen.

setzen. Die allgemeinen Gleichungen werden dadurch einfacher, indem

$$\mathfrak{D}_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{D}_y = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{D}_z = \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z$$

wird. Wir integrieren die allgemeinen Gleichungen, indem wir allen Vektoren den Faktor

$$e^{i(nt + b_x x + b_y y + b_z z)},$$

durch den ebene Wellen dargestellt werden, beilegen. Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\varepsilon_1 n \mathfrak{E}_x = b_y \mathfrak{H}_z - b_z \mathfrak{H}_y, \quad && \frac{1}{c} n\mu \mathfrak{H}_x = b_z \mathfrak{E}_y - b_y \mathfrak{E}_z, \\ (94) \qquad &\frac{1}{c}\varepsilon_2 n \mathfrak{E}_y = b_z \mathfrak{H}_x - b_x \mathfrak{H}_z, \quad && \frac{1}{c} n\mu \mathfrak{H}_y = b_x \mathfrak{E}_z - b_z \mathfrak{E}_x, \\ &\frac{1}{c}\varepsilon_3 n \mathfrak{E}_z = b_x \mathfrak{H}_y - b_y \mathfrak{H}_x, \quad && \frac{1}{c} n\mu \mathfrak{H}_z = b_y \mathfrak{E}_x - b_x \mathfrak{E}_y. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen beziehentlich mit b_x, b_y, b_z und addieren, so erhalten wir

$$(95) \qquad b_x \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x + b_y \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y + b_z \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z = 0$$

oder

$$b_x \mathfrak{D}_x + b_y \mathfrak{D}_y + b_z \mathfrak{D}_z = 0$$

und

$$b_x \mathfrak{H}_x + b_y \mathfrak{H}_y + b_z \mathfrak{H}_z = 0.$$

Nun sind $b_x x + b_y y + b_z z =$ const. die Ebenen gleicher Phase. Daher hat der Vektor b die Richtung, in der die Welle fortschreitet.

Es stehen also die magnetischen Kräfte und die elektrischen Erregungen senkrecht auf der Wellennormale. Dagegen bildet die elektrische Kraft einen Winkel mit der Wellennormale, der nicht ein rechter ist, da elektrische Kraft und Erregung nicht dieselbe Richtung haben.

Multiplizieren wir das erste System der Gleichungen (94) mit $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, das zweite mit $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ und addieren, so erhalten wir

$$\mathfrak{d}_x \mathfrak{H}_x + \mathfrak{d}_y \mathfrak{H}_y + \mathfrak{d}_z \mathfrak{H}_z = 0,$$
$$\mathfrak{B}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{B}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{B}_z \mathfrak{E}_z = 0,$$

d. h. es stehen elektrische und magnetische Erregung senkrecht auf magnetischer und elektrischer Kraft[37]).

Bei den kristallinischen Medien hat man die Richtung der Wellennormale von der des Strahls zu unterscheiden.

Bilden wir hier den *Poynting*schen Energiestrom, so erhalten wir

---

37) *O. Heaviside*, On the electrom. wave surface, Phil. Mag. (5) 19 (1885), p. 397. Über die allgemeine Wellenfläche vgl. *Heaviside*, Electrom. theory 2, p. 520.

wie Gl. (7)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int dS\,(\varepsilon_{11}\mathfrak{E}_x^2+\varepsilon_{22}\mathfrak{E}_y^2+\varepsilon_{33}\mathfrak{E}_z^2+\mu\mathfrak{H}^2)=-\int d\omega\,\mathfrak{S}_N,$$
$$\mathfrak{S}=c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Definieren wir die Richtung des Lichtstrahls als Richtung des *Poynting*schen Vektors $\mathfrak{S}$, so steht der Strahl senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft.

Die Richtung der elektrischen Erregung ist dagegen nicht transversal, da sie von der der elektrischen Kraft abweicht.

Nun ist $\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$ die reziproke Länge, welche die in der Richtung N der Wellennormale fortschreitende Welle in der Zeit $\frac{1}{n}$ durchschreitet, daher ist

$$b_x^2+b_y^2+b_z^2=\frac{n^2}{c_N^2}, \tag{96}$$

wo c_N die in der Richtung N der Wellennormale gemessene Geschwindigkeit bezeichnet.

Eliminieren wir nun aus den Gleichungen (94) die $\mathfrak{H}$, so erhalten wir

$$\varepsilon_1\mathfrak{E}_x=\frac{c^2}{n^2\mu}\left(\frac{n^2}{c_N^2}\mathfrak{E}_x-b_x(b_x\mathfrak{E}_x+b_y\mathfrak{E}_y+b_z\mathfrak{E}_z)\right)$$
$$\varepsilon_2\mathfrak{E}_y=\frac{c^2}{n^2\mu}\left(\frac{n^2}{c_N^2}\mathfrak{E}_y-b_y(b_x\mathfrak{E}_x+b_y\mathfrak{E}_y+b_z\mathfrak{E}_z)\right)$$
$$\varepsilon_3\mathfrak{E}_z=\frac{c^2}{n^2\mu}\left(\frac{n^2}{c_N^2}\mathfrak{E}_z-b_z(b_x\mathfrak{E}_x+b_y\mathfrak{E}_y+b_z\mathfrak{E}_z)\right)$$

oder

$$\varepsilon_1\mathfrak{E}_x=\frac{c^2 b_x}{n^2\mu\left(\frac{c^2}{\mu c_N^2\varepsilon_1}-1\right)}(b_x\mathfrak{E}_x+b_y\mathfrak{E}_y+b_z\mathfrak{E}_z) \tag{97}$$

usw.

Multiplizieren wir die letzten Gleichungen mit b_x, b_y, b_z und addieren, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (95) und (96)

$$\frac{b_x^2}{\frac{c^2}{\varepsilon_1}-\mu c_N^2}+\frac{b_y^2}{\frac{c^2}{\varepsilon_2}-\mu c_N^2}+\frac{b_z^2}{\frac{c^2}{\varepsilon_3}-\mu c_N^2}=0. \tag{98}$$

Nun sind

$$\frac{b_x}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=\alpha_x,\quad \frac{b_y}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=\alpha_y,\quad \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=\alpha_z$$

die Richtungskosinus von b oder N. Wir können die Gleichung daher auch schreiben:

$$\frac{\alpha_x^2}{\frac{c^2}{\varepsilon_1}-\mu c_N^2}+\frac{\alpha_y^2}{\frac{c^2}{\varepsilon_2}-\mu c_N^2}+\frac{\alpha_z^2}{\frac{c^2}{\varepsilon_3}-\mu c_N^2}=0.$$

Diese Gleichung ist bereits von *Fresnel*[38]) abgeleitet, von dem die erste Theorie der Lichtbrechung in Kristallen herrührt.

Wir haben im allgemeinen eine quadratische Gleichung für c_N^2 als Funktion von α_x, α_y, α_z. Es gibt daher im allgemeinen zwei verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und zwei verschiedene Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten hängen von der Richtung im Kristall ab.

Geht der Lichtstrahl in der Richtung der x-Achse, so ist

$$\alpha_y = \alpha_z = 0.$$

Dann sind die beiden Lichtgeschwindigkeiten

$$c_N = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu}} \quad \text{und} \quad c_N = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3 \mu}}.$$

Für gewisse Kristalle ist $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, für diese ist also in dieser einen Richtung nur eine Geschwindigkeit vorhanden. Man nennt sie einachsige Kristalle.

Im allgemeinen ist die quadratische Gleichung für c_N^2

$$(99) \quad \mu^2 c_N^4 - \mu c_N^2 \left[\alpha_x^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_2} + \frac{c^2}{\varepsilon_3}\right) + \alpha_y^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_3} + \frac{c^2}{\varepsilon_1}\right) + \alpha_z^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_1} + \frac{c^2}{\varepsilon_2}\right)\right]$$
$$+ \alpha_x^2 \frac{c^4}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} + \alpha_y^2 \frac{c^4}{\varepsilon_3 \varepsilon_1} + \alpha_z^2 \frac{c^4}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = 0.$$

Da nun $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$ ist, so können wir das von c_N freie Glied mit $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2$ multiplizieren. Wir erhalten dann[39]), wenn wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{A} = \alpha_x^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_2} - \frac{c^2}{\varepsilon_3}\right), \quad \mathfrak{B} = \alpha_y^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_3} - \frac{c^2}{\varepsilon_1}\right), \quad \mathfrak{C} = \alpha_z^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_1} - \frac{c^2}{\varepsilon_2}\right)$$

setzen,

$$c_N^2 = \frac{1}{2}\left[\alpha_x^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_2} + \frac{c^2}{\varepsilon_3}\right) + \alpha_y^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_3} + \frac{c^2}{\varepsilon_1}\right) + \alpha_z^2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon_1} + \frac{c^2}{\varepsilon_2}\right)\right]$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} - 2\mathfrak{C}\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}.$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen ist gleich

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C})^2 - 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Nun sei

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1,$$

dann haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ gleiches, $\mathfrak{B}$ entgegengesetztes Vorzeichen. Also ist $-\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ positiv und der Ausdruck unter der Wurzel kann nicht

38) *Fresnel*, Paris Mém. 7, p. 45.

39) *G. Kirchhoff*, Vorles. über Optik, herausgeg. v. *Hensel*, Leipzig 1891, p. 201.

negativ werden und nur verschwinden, wenn

$$\mathfrak{B} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{C}$$

sind. (Da nämlich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, so kann nicht $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ sein.) Wir haben also für diesen Fall

$$\alpha_y = 0, \quad \alpha_x = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}}, \quad \alpha_z = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}.$$

Bei dieser Richtung der Wellen fallen also die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung zusammen und wir haben nur eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Man nennt diese Richtungen die optischen Achsen. Im allgemeinen gibt es wegen des unbestimmten Vorzeichens zwei solche Achsen. Nur wenn $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ist, ist $\alpha_z = 0$ und

$$\alpha_x = \pm 1.$$

Dann haben wir nur eine solche Richtung.

25. Ponderomotorische Kräfte. Die theoretische Ableitung der von elektromagnetischen Wellen ausgeübten Strahlung ist von größter Wichtigkeit, weil nicht nur wichtige Folgerungen für die Gesetze der Strahlung sich hieraus ergeben, sondern weil diese Kräfte auch die einzigen bisher experimentell bestätigten sind, die dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung nicht unterliegen, wenn der Lichtäther als ruhend angenommen wird. Allerdings kann dies Gesetz in der Form aufrecht gehalten werden, daß man der Energie, auch der frei ausgestrahlten, Trägheit zuschreibt, wie es aus dem Prinzip der Relativität gefolgert werden muß.

Die von *Maxwell*[40]) gegebene Ableitung für die allgemeinen in anisotropen Körpern wirkenden Kräfte muß als schwer verständlich bezeichnet werden. Außerdem stimmen die von ihm angegebenen Druckkräfte nicht nur nicht mit den von *Helmholtz* und *Hertz* entwickelten überein, sondern auch nicht mit der von ihm selbst gemachten Anwendung auf den speziellen Fall des Strahlungsdrucks.

Für den Fall, daß die elektromagnetischen Zustände statisch oder stationär sind, lassen sich die ponderomotorischen Kräfte, wie *Helmholtz* gezeigt hat, aus den Änderungen der Energie bei einer Variation der Lage der magnetisierten und elektrisierten Körper gegeneinander berechnen nach einem Prinzip, das dem der virtuellen Verrückungen in der Mechanik entspricht. Bei allgemein veränderlichen Zuständen

---

40) *Maxwell*, Electr. and magn., art. 640ff. Vgl. hierzu Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 45 (1898) p. 522.

41) *Helmholtz*, Erhaltung der Kraft, Ges. Abh. 1, p. 62; ferner 1, p. 798.

hängt aber die Energie nicht nur von der Lage der elektrischen und magnetischen Körper oder der Stromträger ab, und die Ortsänderungen dieser gegeneinander ergeben daher auch nicht die vollständigen ponderomotorischen Kräfte. *Hertz* hat die ponderomotorischen Kräfte als Druckkräfte aus den Energieänderungen berechnet, die sich bei Deformation des elektromagnetischen Mediums einstellen. Diese Ableitung wird zweifelhaft, wenn die Frage entsteht, ob der Lichtäther an der Deformation der Körper teilnimmt und versagt ganz im reinen Äther, dessen mögliche Deformationen vollkommen zweifelhaft sind.

Bei diesen Betrachtungen muß auch noch die Form, in welcher die Energie einzuführen ist, als bekannt vorausgesetzt werden, was ohne Hypothesen oder ohne Zurückgreifen auf die Kenntnis der ponderomotorischen Kräfte nicht möglich ist.

Die *Hertz*sche Ableitung der ponderomotorischen Kräfte bringt Art. *H. A. Lorentz*, V 13 Nr. **23** zur Darstellung. Für den vorliegenden Zweck, die Bestimmung des Lichtdruckes, können wir die Darstellung sehr vereinfachen, indem wir uns auf ruhende nicht deformierbare Medien beschränken und von den bekannten ponderomotorischen Kräften zwischen Strömen und Magneten ausgehen, die wir dann in naheliegender Weise hypothetisch zu verallgemeinern haben werden. Als bekannt müssen die ponderomotorischen Kräfte für statische und stationäre Zustände vorausgesetzt werden. Die Anwendung auf nicht stationäre Zustände ist dann ohne hypothetische Verallgemeinerung nicht möglich.

Diese Kräfte finden ihren einfachsten Ausdruck in dem *Coulomb*schen Gesetz der elektrischen Anziehung und Abstoßung, in der Anwendung desselben Gesetzes auf die Wechselwirkung zwischen Magneten und in dem *Biot-Savart*schen Gesetz für die Wirkung magnetischer Kräfte auf Stromelemente.

Das gewöhnliche *Coulomb*sche Gesetz muß insofern erweitert werden, als noch die durch die Erfahrung bestätigte Aussage hinzuzufügen ist, daß elektrische und magnetische Kräfte in einem polarisierbaren Medium auf dort vorhandene elektrische oder magnetische Quanten immer so einwirken, als ob das Medium nicht vorhanden wäre. Sie wirken nach der *Hertz*schen Bezeichnungsweise auf die wahre Elektrizität (beziehentlich Magnetismus). Die von den Quanten ausgehenden Kräfte dagegen werden durch die entgegengesetzte Wirkung der durch Polarisation frei gewordenen Mengen im Verhältnis $\frac{1}{\varepsilon}$ oder $\frac{1}{\mu}$ verringert. Zwei in einem polarisierbaren Medium liegende

Mengen wirken daher aufeinander im Vergleich zur Wirkung im Vakuum, als ob jede im Verhältnis $1 : \sqrt{\varepsilon}$ verkleinert wäre[43]).

Dieser Ableitung liegt die Annahme zugrunde, daß die Kräfte, die auf die durch Polarisation freigewordene Elektrizität wirken, diese Wirkung nicht auf die in das Medium eingebettete Elektrizität übertragen können. Wenn eine positiv geladene Kugel sich in einem flüssigen Dielektrikum befindet, so wird sich um die Kugel aus dem Dielektrikum negative Elektrizität ansammeln. Die Kräfte, die auf diese negative Elektrizität wirken, sollen keine Wirkung auf die Kugel haben.

Die auf ein Stromelement nach dem *Biot-Savart*schen Gesetz einwirkenden magnetischen Kräfte müssen ebenfalls daraufhin untersucht werden, wie sie abzuändern sind, wenn das Stromelement in ein magnetisch polarisierbares Medium eingebettet ist. Hierzu dient folgende Betrachtung. Sei das magnetisch polarisierbare Medium zunächst homogen, so werden die um den Strom verlaufenden kreisförmigen magnetischen Kraftlinien eine gleichgerichtete Erregung hervorrufen. Da diese Kraftlinien in sich zurücklaufen, also keine freien Enden haben, so tritt durch die Erregung auch kein freier Magnetismus auf und die ponderomotorische Kraft auf einen Magnetpol wird durch das polarisierbare Medium nicht geändert. Bringen wir also Strom und Magnetpol aus Luft in ein magnetisierbares Medium, so bleiben die gegenseitigen Kräfte ungeändert. Die Kraft des Pols ist aber im Verhältnis $\frac{1}{\mu}$ kleiner geworden. Bei konstant gehaltener Kraft wird daher die Wirkung auf den Strom im Verhältnis $1 : \mu$ vergrößert, d. h. wir erhalten die richtige Größe, wenn wir anstatt der Kraft die „Erregung" $\mathfrak{B}$ einführen[43a]).

Wenn nun aber nach *Maxwells* Anschauung die Kraft auf jeden Teil des Stroms durch den Zustand der unmittelbaren Nachbarschaft bestimmt wird, so muß auch im allgemeinen Fall eines nicht isotropen Mediums die Erregung für die Stärke der ponderomotorischen Einwirkung maßgebend sein.

In Luft wirkt ein Feld $\mathfrak{H}$ auf den Strom i mit den Kraftkomponenten

---

42) *Hertz,* Ges. Abh. 2, p. 275.

43) *Helmholtz,* Ges. Abh. 1, p. 614; *Stefan,* Wien Ber. 70 (1874), p. 589; *Silow,* Ann. Phys. Chem. 156 (1875), p. 389.

43a) Dies war die bisher gebräuchliche Auffassung. *Einstein* und *Laub* sind zu einer etwas andern Anschauung gelangt, Ann. Phys. 26 (1908), p. 545.

$$i_y\mathfrak{H}_z - i_z\mathfrak{H}_y,$$
$$i_z\mathfrak{H}_x - i_x\mathfrak{H}_z,$$
$$i_x\mathfrak{H}_z - i_y\mathfrak{H}_x,$$

in einem polarisierbaren Medium mit den Komponenten

$$i_y\mathfrak{B}_z - i_z\mathfrak{B}_y \tag{100}$$

usw. ein.

Seien nun in dem Medium magnetische Quanten und Ströme beliebig verteilt, so ist die Menge des wahren Magnetismus in dem Volumelement

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) dx dy dz$$

und die zugehörige, *Coulomb*sche ponderomotorische Kraft in der Richtung x

$$\mathfrak{H}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Die *Biot-Savart*sche ponderomotorische Kraft auf den Strom ist durch (100) bestimmt.

Verstehen wir unter i den totalen Strom, d. h. die Summe von Verschiebungs- und Leitungsstrom, so haben wir einzuführen

$$i_y = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x},$$
$$i_z = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}.$$

Addieren wir beide Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte und drücken die Erregungen entsprechend dem Schema (93) durch die Kräfte aus, so erhalten wir unter der Voraussetzung, daß

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad \mu_{13} = \mu_{31}, \quad \mu_{23} = \mu_{32}$$

ist, für die Gesamtkraft auf die Volumeinheit bezogen, parallel x soweit dieselbe von den magnetischen Wirkungen abhängt, oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x = & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_x - \mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_y - \mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_z] \\ & + \frac{\partial}{\partial y}[\mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_x] \\ & + \frac{\partial}{\partial z}[\mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_x]. \end{aligned} \tag{100}$$

Diese Kraft kann also durch die parallel x wirkenden Druckkräfte ersetzt werden

$$X_x = [\mathfrak{B}_x\mathfrak{H}_x - \mathfrak{B}_y\mathfrak{H}_y - \mathfrak{B}_z\mathfrak{H}_z]$$

normal auf das Flächenelement $dydz$, und

$$X_y = \mathfrak{B}_y \mathfrak{H}_x$$

tangential auf das Flächenelement $dxdz$, und

$$X_z = \mathfrak{B}_z \mathfrak{H}_x$$

tangential auf $dxdy$. Die anderen Komponenten ergeben sich durch Vertauschung der Indizes.

Bei *Maxwell* ist $X_x = \mathfrak{B}_x \mathfrak{H}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2)$, bei *Hertz* und *Helmholtz* $X_y = \frac{1}{2}(\mathfrak{B}_y \mathfrak{H}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x)$. Die letzteren Werte erhält man, wenn man verlangt, daß $X_y = Y_x$ ist.

Unsere Ausdrücke stimmen für den freien Äther sowohl mit den von *Maxwell* als mit den von *Hertz* und *Helmholtz* angegebenen überein. Mit letzteren stimmen sie auch noch für isotrope Körper; für anisotrope Körper stimmen die tangentialen Kräfte mit *Maxwell*, die normalen mit *Hertz* und *Helmholtz* überein. Da sich hier ebenso wie bei *Maxwell*

$$X_y = \mathfrak{B}_y \mathfrak{H}_x,$$

andererseits

$$Y_x = \mathfrak{B}_x \mathfrak{H}_y$$

ergeben hat, so ist im allgemeinen X_y nicht gleich Y_x wie bei *Hertz*. Bekanntlich tritt dann ein Drehungsmoment am Volumelement $dxdydz$ um die z-Achse auf, dessen Größe

$$Y_x - X_y$$

ist. Bei der Symmetrie, die in der *Maxwell*schen Theorie zwischen elektrischen und magnetischen Größen besteht, wird man das gefundene System von Druckkräften auch für die elektrischen Kräfte inAnspruch nehmen. Hierin liegt, daß man als Gegenstück zu der *Biot-Savart*schen Kraft $[i\mathfrak{B}]$ eine „*Hertz*sche Kraft“ (vgl. *Lorentz*, V 13, Nr. **24** d) von der Größe $-\frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{D}]$ postuliert, d. h. zu der Wirkung des Magnetfeldes auf den elektrischen Strom eine Wirkung des elektrischen Feldes auf den „magnetischen Strom“ hinzunimmt.

In isotropen Körpern sind die Druckkräfte, die von den elektrischen Kräften herrühren,

$$\begin{aligned}
X_x &= \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2),\\
Y_y &= \frac{\varepsilon}{2}(-\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2),\\
Z_z &= \frac{\varepsilon}{2}(-\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2),\\
X_y &= Y_x = \varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y,\\
X_z &= Z_x = \varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z,\\
Y_z &= Z_y = \varepsilon \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z.
\end{aligned} \tag{100a}$$

Haben wir eine ebene in der Richtung der z fortschreitende Welle, so ist, wenn die elektrische Kraft parallel x gerichtet ist, nur noch $\mathfrak{H}_y$ von Null verschieden. Dann ist also von den elektrischen Kräften herrührend

$$X_x = \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}_x^2,$$

$$\text{(100 b)} \qquad Y_y = -\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}_x^2, \qquad X_y = X_z = Y_z = 0,$$

$$Z_z = -\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}_x^2,$$

von den magnetischen Kräften herrührend

$$X_x = -\frac{\mu}{2}\mathfrak{H}_y^2,$$

$$\text{(100 c)} \qquad Y_y = \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}_y^2, \qquad X_y = X_z = Y_z = 0,$$

$$Z_z = -\frac{\mu}{2}\mathfrak{H}_y^2,$$

Da nun $\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}_x^2 = \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}_y^2$ ist, so ist die Gesamtwirkung gegeben durch die Komponenten

$$\text{(100 d)} \qquad X_x = Y_z = 0, \qquad Z_z = -\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}_x^2 - \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}_y^2.$$

Dieselbe Kraft ist ein Druck in der Richtung z normal auf ein Flächenelement, das senkrecht zu z steht.

Auch ein Strahlen aussendender Körper muß einen solchen Druck an jeder Stelle seiner Oberfläche erleiden. Ein Körper, der nach einer Richtung mehr Strahlen aussendet als nach der entgegengesetzten, erfährt also als Resultante der Einzeldrucke einen einseitigen Druck und bildet das einfachste Beispiel einer Ausnahme des Satzes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Diese Nichterfüllung des Satzes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung hängt damit zusammen, daß die Druckkräfte auf ein Volumenelement bei allgemein veränderlichen Zuständen sich nicht aufheben.

Im leeren Raum ist die X-Komponente der auf ein Volumenelement wirkenden Kraft

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z)$$

oder bei Berücksichtigung der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$

$$= \mathfrak{E}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}\right) + \mathfrak{E}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right)$$

usw. oder

$$= \frac{\mathfrak{E}_y}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} - \frac{\mathfrak{E}_z}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}.$$

Ganz analog ergibt sich aus den magnetischen Kräften eine x-Komponente

$$= -\frac{\mathfrak{H}_y}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{\mathfrak{H}_z}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}.$$

Beide zusammen geben die Komponente der Gesamtkraft

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y)$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}.$$

Die Kraft auf das Volumelement ist also nur von Null verschieden, wenn eine zeitliche Änderung des Poyntingschen Energiestroms vorhanden ist. Ihre Richtung ist die des Vektors $\partial \mathfrak{S}/\partial t$. Da sie mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit dividiert wird, so können merkliche Werte nur bei große Änderungsgeschwindigkeit des Energiestroms eintreten[43]).

Anders gestalten sich die allgemeinen ponderomotorischen Kräfte, wenn man sich auf den Boden der Elektronentheorie stellt.

Nach Bd. V 14, p. 161 ist die auf einen Körper wirkende Kraft durch eine Gleichung bestimmt, die von *Lorentz* eingeführt ist,

$$\mathfrak{F} = \int \varrho (\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\, dS,$$

und die sich in die Gleichung

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$$

durch geteilte Integration umformen läßt. Hier ist

(101) $$\mathfrak{F}_2 = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}\, dS,$$

während $\mathfrak{F}_1$ mit den oben entwickelten, auf den Fall des reinen Äthers spezialisierten Spannungen an einer Fläche identisch ist. Daher ist im freien Äther

(102) $$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = 0,$$

wie es ja aus der Grundgleichung hervorgeht, da hier $\varrho = 0$ ist.

---

43) Auf die Tatsache, daß bei allgemein veränderlichen Zuständen die Volumelemente des leeren Raums Kräfte erfahren, hat zuerst *Hertz* aufmerksam gemacht (Ges. Abh. 2, p. 235; der Ausdruck (101) findet sich bei *Helmholtz*, Ges. Abh. 3, p. 531).

26. Lichtdruck. Trotz der Verschiedenheit der allgemeinen Ausdrücke für die Kräfte führen in speziellen Fällen die *Maxwell*schen Spannungen und die Elektronentheorie zu denselben Werten für die ponderomotorische Kraft, nämlich wenn $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ verschwindet. Bei rein periodischen Vorgängen verschwindet $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ über eine ganze Periode integriert, so daß in diesen Fällen die *Maxwell*schen Spannungen mit der Elektronentheorie übereinstimmende *Mittelwerte* der ponderomotorischen Kräfte ergeben.

Man kann aber den Lichtdruck einfacher aus $\mathfrak{F}_2$ gewinnen, wenn man die Fläche, auf welche die Spannungen $\mathfrak{F}_1$ wirken würden, so weit entfernt denkt, daß hier das Feld verschwindet.

Die Größe $\frac{1}{c^2}\mathfrak{S}$ nennt *Abraham*[44]) die elektromagnetische Bewegungsgröße der Volumeneinheit.

Nun ist S die durch die Flächeneinheit, deren Normale die Richtung $\mathfrak{S}$ hat, in der Sekunde fließende Energie.

Wir könnten $\frac{S}{c^2}$ auch die Raumdichte der Bewegungsgröße nennen. In der Zeit τ hat sich ein Zylinder von der Länge $l = c\tau$ mit dieser Dichte gefüllt. Geben wir dem Zylinder die Einheit des Querschnitts, so ist sein Volumen $c\tau$. Ist nun der Zylinder leer und geht sämtliche Strahlung durch ihn hindurch, so ist die auf ihn wirkende Kraft Null. Wenn aber im vorderen Querschnitt die Energie vernichtet wird, so ist der Mittelwert von $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ über die Schwingungsdauer erstreckt, nicht Null sondern $\frac{1}{\tau}(\mathfrak{S}_\tau - \mathfrak{S}_0)$. Ist die Absorption sehr stark, so ist $\mathfrak{S}_\tau$ klein gegen $\mathfrak{S}_0$. Daher ist die auf den Cylinder wirkende Kraft $\mathfrak{F}_2 = \frac{\mathfrak{S}_0}{c^2\tau} \cdot c\tau = \frac{\mathfrak{S}_0}{c}$.

Der so gewonnene Ausdruck für die Kraft gestattet den Lichtdruck auch für Bewegung mit beliebigen Geschwindigkeiten unter der Lichtgeschwindigkeit zu berechnen[45]).

Sei die x-Achse die Richtung der Normale eines vollkommenen Spiegels nach außen, α_1 und α_2 seien die Winkel, welche der einfallende und reflektierte Strahl mit der x-Achse bildet, S_1, S_2 und $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ Energie und Bewegungsgröße des einfallenden und reflektierten Strahles.

Wir machen nun die Annahme, daß eine Bewegung des Spiegels

44) *M. Abraham,* Ann. Phys. 10 (1903), p. 105.
45) *M. Abraham,* Theorie der Elektrizität 2, p. 343.

in seiner Ebene keinen Einfluß auf den Reflexionsvorgang besitzt und auch mit keiner Arbeitsleistung verbunden ist. Dann kommt offenbar nur die normale Komponente der Geschwindigkeit u_x in betracht. (Über die Beziehung dieser Annahme zum *Huygens*schen Prinzip vgl. *Abraham* a. a. O.) Die auf den Spiegel fallenden, beziehentlich von ihm ausgehenden Energiemengen sind

$$(103\text{a}) \qquad \frac{S_1}{c}(-c\cos\alpha_1 + u_x) \quad \text{und} \quad \frac{S_2}{c}(c\cos\alpha_2 - u_x)$$

und die Kraft

$$(103\text{b}) \qquad \frac{\mathfrak{S}_1}{c^2}(-c\cos\alpha_1 + u_x) \text{ und } -\frac{\mathfrak{S}_2}{c^2}(c\cos\alpha_2 - u_x)\cdot$$

Die Differenz zwischen auffallender und reflektierter Strahlung ist bei vollkommener Spiegelung gleich der Arbeitsleistung des Strahlungsdrucks, so daß

$$(104) \qquad \begin{aligned} &\frac{S_1}{c^2}(-c\cos\alpha_1 + u_x)\, u\cos\varphi_1 - \frac{S_2}{c^2}(c\cos\alpha_2 - u_x)\, u\cos\varphi_2 \\ &= \frac{S_1}{c}(-c\cos\alpha_1 + u_x) - \frac{S_2}{c}(c\cos\alpha_1 - u_x) \end{aligned}$$

ist, wenn φ_1 und φ_2 die Winkel bezeichnen, die einfallender und reflektierter Strahl mit der Richtung von u bilden.

Nun ergibt die Bedingung, daß der Lichtdruck keine tangentielle Komponente hat,

$$(105) \; \sqrt{1-\cos^2\alpha_1}\, S_1(-c\cos\alpha_1 + u_x) - S_2(c\cos\alpha_2 - u_x)\sqrt{1-\cos^2\alpha_2} = 0,$$

so daß wir zusammen mit (104) erhalten

$$(106) \qquad \frac{1-\frac{u}{c}\cos\varphi_1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}} = \frac{1-\frac{u}{c}\cos\varphi_2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_2}}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{u_x}{u}\cos\alpha_x + \frac{u_y}{u}\cos\alpha_y + \frac{u_z}{u}\cos\alpha_z \\ &= \frac{u_x}{u}\cos\alpha_x + \frac{\sin\alpha_x}{u}\sqrt{u_y^2 + u_z^2}. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} c - u\cos\varphi_1 &= c - u_x\cos\alpha_1 + \sqrt{1-\cos^2\alpha_1}\sqrt{u_y^2+u_z^2}, \\ c - u\cos\varphi_2 &= c - u_x\cos\alpha_2 + \sqrt{1-\cos^2\alpha_2}\sqrt{u_y^2+u_z^2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (106)

$$(106\text{a}) \qquad \frac{c-u_x\cos\alpha_1}{c-u_x\cos\alpha_2} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_2}}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nach einigen Umformungen die neuen Gleichungen ableiten

$$\text{(107a)} \qquad \frac{2}{1-\frac{u_x^2}{c^2}} = \frac{-\cos\alpha_1}{-\cos\alpha_1 + \frac{u_x}{c}} + \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2 - \frac{u_x}{c}},$$

$$\text{(107b)} \qquad \frac{1-\frac{u_x}{c}\cos\alpha_1}{-\cos\alpha_1 + \frac{u_x}{c}} = \frac{1-\frac{u_x}{c}\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2 - \frac{u_x}{c}}.$$

Die vorangehenden Formeln enthalten einfache geometrische Sätze über den relativen, d. h. den vom bewegten Spiegel aus beurteilten Strahlengang. So sagt Gl. (106a) aus, daß im relativen Strahlengang die Tangente des Einfallswinkels gleich der Tangente des Reflexionswinkels ist.

Wir erhalten aus (103b) für den Lichtdruck parallel der x-Achse

$$p = -\frac{1}{c}\left\{S_1 \cos\alpha_1\left(-\cos\alpha_1 + \frac{u_x}{c}\right) - S_2\cos\alpha_2\left(\cos\alpha_2 - \frac{u_x}{c}\right)\right\}$$

und unter Benutzung von (105), (106a) und (107b)

$$p = \frac{S_1}{c}\left(-\cos\alpha_1 + \frac{u_x}{c}\right)^2 \left\{\frac{-\cos\alpha_1}{-\cos\alpha_1 + \frac{u_x}{c}} + \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2 - \frac{u_x}{c}}\right\}$$

und unter Anwendung von (107a)

$$\text{(108)} \qquad p = \frac{2S_1\left(-\cos\alpha_1 + \frac{u_x}{c}\right)^2}{c\left(1-\left(\frac{u_x}{c}\right)^2\right)}.$$

Wie wir gesehen haben, hängt dieser Ausdruck für den Lichtdruck aufs engste zusammen mit der Definition der *Lorentz*schen ponderomotorischen Kraft.

Es ist bemerkenswert, daß man zu demselben Wert für den Lichtdruck gelangt, wenn man von der Relativitätstheorie ausgeht.

27. **Die Relativitätstheorie.** *H. A. Lorentz*[46]) hat gezeigt, daß die *Maxwell*schen Gleichungen für ruhende Körper ihre Form behalten, wenn man die Zustandsgrößen auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Koordinatensystem bezieht und neue Variable einführt.

46) *H. A. Lorentz*, Acad. v. Wetensch. Amsterdam 12 (1904), p. 986. Dieselbe Transformation nur für die Strahlungsvorgänge ist gegeben *W. Wien,* Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 641.

Einstein[47]) hat dieselbe Transformation von einem etwas anderen Standpunkt aus durchgeführt, indem er nämlich postuliert, daß durch eine Koordinatentransformation auf ein zweites, relativ bewegtes System die *Maxwell*schen Gleichungen invariant bleiben, und daß die Vorgänge unabhängig davon sind, ob man sie auf das eine oder andere System bezieht.

Nach dieser Transformation bleiben die Gleichungen der Elektrodynamik ungeändert, wenn anstatt $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, der Geschwindigkeit der Elektronen u, ϱ, x, y, z, t für eine konstante Bewegung mit der Geschwindigkeit v parallel der x-Achse eingeführt werden, die gestrichelten Größen

$$(109)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{E}_x' = \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{E}_y' = k\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_z\right), \quad \mathfrak{E}_z' = k\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y\right), \\ \mathfrak{H}_x' = \mathfrak{H}_x, \quad \mathfrak{H}_y' = k\left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z\right), \quad \mathfrak{H}_z' = k\left(\mathfrak{H}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y\right), \\ x' = k(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ u_x' = \dfrac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \quad u_y' = \dfrac{u_y}{k\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \quad u_z' = \dfrac{u_z}{k\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \\ \varrho' = k\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)\varrho, \\ k^2 = \dfrac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{array}\right.$$

Aus diesen Ansätzen läßt sich nun zunächst der allgemeine Schluß ziehen, daß im ruhenden System mögliche elektromagnetische Vorgänge auch im bewegten sich in gleicher Weise abspielen müssen und wir deshalb kein Mittel haben, aus Vorgängen in einem bewegten System auf die Bewegung selbst zu schließen. In der Tat enthalten die Größen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, x', t' nur die entsprechenden ungestrichelten Größen, die, wenn man nur das bewegte System kennt, unbekannt bleiben.

Was schließlich die Größen u anlangt, so sind die hierfür gefundenen Ausdrücke identisch mit denen, die man als Additionstheorem zweier Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie erhält. Da nämlich die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume als konstant betrachtet werden muß, so muß die Möglichkeit ausgeschlossen werden, daß die Lichtgeschwindigkeit durch Addition zweier kleinerer Geschwindigkeiten überschritten wird. Ein Überschreiten der Licht-

47) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 891.

geschwindigkeit würde nicht vereinbar sein mit der obigen Transformation. Denn für $v > c$ wird k imaginär nnd die Transformation sinnlos. Das erwähnte Additionstheorem bewirkt nun, daß zwei Geschwindigkeiten zusammen nie die Lichtgeschwindigkeit überschreiten können.

Die Größen u' sind daher nichts anderes als die Zusammensetzung von u und v.

Man erhält die Ladungsdichte

$$\varrho' = \frac{\partial \mathfrak{E}_x'}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y'}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z'}{\partial z'}.$$

Aus (109) folgt für konstantes t und für $u'_x = 0$

$$dx' = k dx, \; dy' = dy, \; dz' = dz, \; \varrho' dx' = \varrho dx,$$

also auch

$$\varrho dx\, dy\, dz = \varrho' dx' dy' dz',$$

so daß die Ladungen ungeändert bleiben, ob sie vom ruhenden oder bewegten System gemessen werden.

Man kann daher eine optische Beziehung, die für ein ruhendes System gefunden ist, durch eine einfache Koordinatentransformation für ein bewegtes System ableiten. Auf diese Weise läßt sich die Richtung eines von einem bewegten Spiegel reflektierten Lichtstrahls bestimmen und die reflektierte Energie. Das Energieprinzip gibt daher die vom Strahlungsdruck geleistete Arbeit, aus der sich der Strahlungsdruck selbst entnehmen läßt[48]) in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Wert (108).

Aus der Gleichung

$$t = k\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right)$$

folgt für $x' = 0$, d. h. für den dem Ort des mit dem gestrichenen System bewegten Beobachters, $t = kt'$, so daß das Verhältnis zweier Schwingungszahlen

$$\frac{n'}{n} = k$$

wird. Eine in einem ruhenden System beobachtete elektromagnetische Schwingungszahl n wird von einem relativ Bewegten aus als $n' = nk$ gemessen, wozu noch die gewöhnliche Änderung nach dem *Doppler*schen Prinzip kommt. Dasselbe folgt aus der Gleichung $t' = kt$ für $x = 0$, $\frac{n}{n'} = k$, wo jetzt n' die relativ bewegte Schwingungszahl ist. Man beobachtet hiernach auch senkrecht zur Beobachtungsrichtung

48) *A. Einstein*, a. a. O. p. 915.

nicht die unveränderte Schwingungszahl, sondern

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Bildet die Richtung des Strahls mit der Richtung der Bewegung den Winkel φ, so ist allgemein[49])

$$n' = n\frac{1-\cos\varphi\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Auch der Mitführungskoeffizient läßt sich nach der Relativitätstheorie ableiten.

28. **Vergleich mit der Erfahrung.** Nach der elektromagnetischen Lichttheorie soll die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum c dieselbe sein, welche die Beziehung zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maßsystem feststellt (vgl. V 13, p. 82). Obwohl diese Theorie von *Maxwell* in *Faradays* Ideen über die Vermittelung der elektromagnetischen Wirkungen durch Übertragung von einem Körperelement zum anderen wurzelt, so ist doch das Ergebnis eines Versuchs für ihre Entstehung entscheidend gewesen. Es war dies die Bestimmung des Verhältnisses der elektromagnetischen und elektrostatischen Einheiten durch *Kohlrausch* und *Weber*[50]). Auch die Theorien von *B. Riemann* und *Lorenz* sind durch die Ergebnisse von *Kohlrausch* und *Weber* angeregt. Bei der Zurückführung der elektromagnetischen Einheiten auf absolutes mechanisches Maß kann man entweder von der mechanischen Kraft zwischen elektrischen Körpern oder zwischen Magnetpolen ausgehen. Man erhält so zwei voneinander unabhängige Maßsysteme, deren Beziehung zueinander durch das *Biot-Savart*sche Gesetz der Wirkungen eines Stromelements auf einen Magnetpol bestimmt ist. Hierbei kommt es auf die durch das Element strömende Elektrizitätsmenge an, oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf die Geschwindigkeit, mit der eine bestimmte Dichte der Elektrizität durch den Leiter strömt. Das Verhältnis der beiden Systeme wird hiernach durch eine Geschwindigkeit bestimmt, die *Kohlrausch* und *Weber* in der Weise messen, daß eine elektrostatisch

---

49) *A. Einstein*, a. a. O. p. 911.

50) *Kohlrausch* und *Weber*, Elektrodynamische Maßbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäten auf mechanisches Maß; *W. Weber*, Elektrodynamische Maßbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen, § 27.

gemessene Elektrizitätsmenge durch ein ballistisches Galvanometer geleitetet und ihre magnetische Wirkung beobachtet wurde. Das Ergebnis war:

$$3{,}111 \cdot 10^{10} \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$$

(nach einer Korrektion von *W. Voigt* Ann. Phys. 2, p. 476).

Die Methode ist ungenau, weil die statische Elektrizität in einer Leydener Flasche angesammelt war, bei der ein unvermeidlicher Rückstand bei der Entladung bleibt. *Maxwell*[51]) hat daher die Methode modifiziert. Er lud eine bewegliche mit festem Schutzring versehene Scheibe, die an dem Arm einer Torsionswage befestigt war und einer zweiten, festen gegenüberstand, durch eine Batterie von 2600 Quecksilberchloridelementen, und maß durch die Torsion die elektrostatische Anziehung. Dieselbe Batterie wurde durch ein Galvanometer und einen sehr großen Widerstand geschlossen und die magnetische Wirkung an der Ablenkung der Galvanometernadel beobachtet.

Obwohl diese Methode der von *Kohlrausch* und *Weber* an sich zweifellos überlegen ist, so sind die Ergebnisse der Versuche ungenau, wahrscheinlich weil die Konstanz der Batterie nicht genügend war. Diese Versuche sind von *Exner*[52]) wiederholt, der anstatt der Torsionswage eine empfindliche gewöhnliche Wage verwendet. *W. Thomson*[53]) hat dieselbe Methode angewandt, benutzt aber nur 60 Daniellsche Elemente und mißt die elektrostatische Anziehung mit seinem absoluten Elektrometer. Seine Messungen sind von *M'Kichen* und *King*[54]) und von *Shida*[55]) wiederholt. Bei den neueren Bestimmungen wird meistens ein Kondensator von bekannter Kapazität durch eine Batterie von konstanter Spannung geladen und durch ein Galvanometer entladen, so bei der Methode von *Ayrton* und *Perry*[56]). *Klemenčic*[57]) ladet nach einem Vorschlag von *Boltzmann* den Kondensator durch einen Stimmgabelunterbrecher 70 Mal in der Sekunde und entlädt ihn eben so oft durch ein Galvanometer, das hierdurch einen konstanten Ausschlag zeigt. Dieselbe Methode wendet *Stoletow*[58]) an, während *J. J. Thomson*[59]) den Unterbrecher in einen Zweig einer Wheatstoneschen

51) *Maxwell*, Phil. Trans. 1868, p. 643. Phil. Mag. (4) 36 (1868), p. 316.
52) *F. Exner*, Wien Ber. 86 (1882), p. 106.
53) *W. Thomson*, Proc. Royal Soc., Febr. 23, Apr. 12 (1860).
54) *M'Kichen*, Phil. Mag. (4) 47 (1874), p. 218.
55) *Shida*, Phil. Mag. (5) 10 (1880), p. 431.
56) *Ayrton* und *Perry*, Phil. Mag. (5) 7 (1879), p. 277.
57) *Klemenčic*, Wien Ber. (2) 83 (1881), p. 603.
58) *Stoletow*, Soc. franç. de phys. 4. Nov. 1881.
59) *J. J. Thomson*, Trans. of Royal Soc. (3) (1883), p. 707.

Brücke legt. Ähnliche Methoden haben *Himstedt*[60]), *Rowland*[61]), *H. Abraham*[62]) benutzt.

Auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Beobachtung elektrischer Schwingungen, ist *Colley*[63]) die Bestimmung des Verhältnisses der elektrischen Einheiten gelungen. Nach den Theorien von *W. Thomson*[64]) und *Kirchhoff*[65]) ist die Schwingungsdauer einer elektrischen Schwingung in einem Leiter von der Kapazität K und der Selbstinduktion L (beide elektrostatisch gemessen)

$$\tau = 2\pi \frac{\sqrt{LK}}{c},$$

wo c das Verhältnis der Einheiten ist. Kennt man L, K und τ, so läßt sich hieraus c berechnen. Die Bestimmung von L und K macht keine Schwierigkeiten. Die Beobachtung von τ geschah in der Weise, daß der Wechselstrom auf einen Magneten wirkte, mit dem ein Spiegel befestigt war. Die Schwingungen dieses Spiegels wurden dann nach der stroboskopischen Methode analysiert. Bei den Versuchen war

$$L = 154{,}7 \cdot 10^6 \text{ cm}, \quad K = 2{,}764 \cdot 10^6 \text{ cm}, \quad \tau = 0{,}002154 \text{ sec.}$$

In der folgenden Tabelle sind die verschiedenen Werte für c zusammengestellt[66]).

Es fehlte jedoch lange der wichtige Beweis, daß sich elektromagnetische Störungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, wie es von der *Maxwell*schen Theorie gefordert wird. Dieser Beweis ist durch die *Hertz*schen Versuche erbracht. Es muß jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit an Drähten, wie die von *Lecher* und *Sarasin* und *De la Rive*, für die *Maxwell*sche Theorie nichts beweisen, da für diesen Fall die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit auch von anderen Theorien verlangt wird. Entscheidend sind die Versuche mit stehenden Wellen im freien Raum, die durch Reflexion an einer Wand erzeugt werden[67]), und die Versuche von *Klemenčic* und *Czermak*[68]), bei denen die elek-

---

60) *Himstedt*, Ann. Phys. Chem. 29 (1886), p. 560; 33 (1888), p. 1.
61) *H. A. Rowland*, Phil. Mag. (5) 28 (1889), p. 304.
62) *H. Abraham*, Paris C. R. 114 (1892), p. 654 u. 1355.
63) *Colley*, Ann. Phys. Chem. 26, p. 432; 28 (1885), p. 1.
64) *W. Thomson*, Phil. Mag (4) 5 (1853), p. 393.
65) *G. Kirchhoff*, Ges. Abh., p. 168.
66) Rapport II du Congrès international de physique 1900, p. 247.
67) *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. 34 (1880), p. 610; Ges. Abh., p. 133.
68) *J. Klemenčic* und *Paul Czermak*, Ann. Phys. Chem. 50 (193), p. 174.

trischen Wellen durch Reflexion an zwei Spiegeln, ähnlich wie beim *Fresnel*schen Spiegelversuch, zur Interferenz gebracht werden. Eine

Beobachter	$c \cdot 10^{-10}$
Weber und Kohlrausch	3,111
Maxwell	2,842
W. Thomson	2,825
M'Kichen und King	2,892
Shida	2,958
Ayrton und Perry	2,960
Exner	2,920
Klemenčic	3,018
Stoletow	2,999
J. J. Thomson	2,963
Himstedt	3,0057
Rosa	2,999
H. Abraham	2,992
Colley	3,015
Pellat	3,0092
Hurmuzescu	3,001
Perrot und Fabry	2,9978
Rosa und Dorsey 1907[69])	2,9971

solche Interferenz kann nur dann zustande kommen, wenn die beiden von den Spiegeln zurückgeworfenen Wellen einen Gangunterschied gegeneinander haben, der nur bei endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in Luft möglich ist.

Auf große Genauigkeit können diese Messungen indessen keinen Anspruch machen und namentlich ist die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unsicher, weil die Beobachtungen direkt die Wellenlänge geben, während die Schwingungsdauer nach der Formel $\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LK}$ berechnet werden muß. Hier werden für L und K die für stationäre Verhältnisse gewonnenen Werte eingesetzt, was für sehr schnelle Schwingungen nicht mehr richtig ist.

Über die Lichtgeschwindigkeit liegt ebenfalls eine große Zahl verschiedener Beobachtungen vor.

Die älteren astronomischen Beobachtungen aus der Aberration und Verfinsterung der Jupiterstrabanten hatten ergeben $c = 3{,}08 \cdot 10^{10}$.

Die erste von *Fizeau*[70]) ausgeführte terrestrische Bestimmung

69) *E. A. Rosa* und *N. E. Dorsey*, Bulletin Bureau of Standard vol. VI 3 u. 4, 1907.

70) *Fizeau*, Paris C. R. (1849); Pogg. Ann. 79.

der Lichtgeschwindigkeit beruhte darauf, daß ein paralleles Lichtbündel durch die Lücken eines Zahnrades geschickt und nach Durchlaufen einer größeren Strecke auf demselben Wege zurückreflektiert wurde. Bei einer bestimmten Umdrehungsgeschwindigkeit des Zahnrades war dem zurückkehrenden Lichtstrahl durch das Vorrücken des Zahns der Durchgang verschlossen. Die zweite terrestrische Methode rührt von *Foucault*[71]) her. Hier wird das Licht durch einen Spalt auf einen rotierenden Hohlspiegel geworfen, der es auf einen festen Spiegel wirft, von wo es auf demselben Wege zum rotierenden Spiegel zurückkehrt. Da dieser inzwischen seine Stellung bei der Rotation geändert hat, wird das Lichtbündel auf einen Weg geleitet, der mit der Richtung des Hingangs einen Winkel bildet. Das von dem zurückkehrenden Licht entworfene Bild des Spalts fällt in der ursprünglichen *Foucault*schen Anordnung mit dem Spalt selbst nahe zusammen. Da nämlich bei *Foucault* das Licht nur geringe Strecken zurücklegte, so war die Verschiebung des Bildes nur 0,8 mm.

Die *Fizeau*sche Methode ist von *Cornu* 1874 und 1878 wiederholt, außerdem von *Young* und *Forbes*[72]), bei deren Versuchen sich eine Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von rotem und blauem Licht um 1,8% ergeben hat, ein Ergebnis, das mit allen anderen Beobachtungen und namentlich mit den astronomischen unvereinbar ist.

Die *Foucault*sche Methode ist von *A. A. Michelson*[73]) wiederholt angewendet worden. Bei ihr waren die Abstände so vergrößert, daß die Verschiebung des Bildes 133 mm betrug. Auch *Newcomb*[74]) hat dieselbe Methode angewendet. Eine genaue Theorie der Messung in Luft rührt von *H. A. Lorentz* her[75]).

A. A. Michelson[75]) hat ferner die *Foucault*schen Versuche, die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten zu bestimmen, wiederholt und quantitative Ergebnisse erhalten. Er fand für das Verhältnis in Luft und Schwefelkohlenstoff 1 : 1,75, während aus dem Brechungsverhältnis 1 : 1,65 erwartet werden muß. Das Verhältnis in Luft und in Wasser fand er 1,33. Das Verhältnis von Rot und Blau war in Schwefelkohlenstoff 1,014. Die letztere Zeit stimmt

---

71) *Foucault*, Paris C. R. 60, p. 501, 792; Ann. Phys. Chem. 118.

72) *Young* and *Forbes*, Phil. Trans. R. Soc. London 1882, p. 231.

73) *A. A. Michelson*, Proc. of Americ. Assoc. for the advancement of science St. Louis Meeting Aug. 1878, p. 71—77; Sillim. Journ. (3) 18, p. 390—393.

74) *Newcomb*, Astron. pap. prepared for the use of the Americ. Ephem. and Nautical almanac 1885, p. 12—230.

75) *H. A. Lorentz*, Ges. Abh. I, S. 470, Leipzig 1907.

mit der aus der Abhängigkeit des Brechungsverhältnisses von der Wellenlänge sich ergebenden gar nicht überein, da die Brechungsverhältnisse zwischen den Linien B und G sich wie $\frac{167}{161}$ verhalten.

Indessen hatte schon Lord *Rayleigh*[76]) darauf aufmerksam gemacht, daß mit den Methoden, die man zur terrestrischen Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit benutzt, nicht die eigentliche Lichtgeschwindigkeit, sondern entweder die Gruppengeschwindigkeit, wie nach der *Fizeau*schen Methode, oder das Verhältnis des Quadrates der Lichtgeschwindigkeit zur Gruppengeschwindigkeit, wie bei der *Foucault*schen Methode, bestimmt wird.

Die einfachsten Gruppen gewinnt man durch Übereinanderlagerung zweier Wellenzüge von etwas verschiedener Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Setzen wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= A \sin(n_1 t - b_1 x) + \sin(n_2 t - b_2 x)\\ &= 2A \sin\left(\frac{n_1 + n_2}{2} t - \frac{b_1 + b_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{n_2 - n_1}{2} t - \frac{b_2 - b_1}{2} x\right).\end{aligned}$$

Ist nun b_2 nahe gleich b_1, so ist auch n_2 nahe gleich n_1, das Argument des Kosinus ist klein und dieser ändert seinen Wert langsam.

Durch den Sinus wird eine Wellenlinie dargestellt, deren Amplitude zufolge des sich langsam ändernden Kosinus langsam auf $2A$ ansteigt und wieder fällt. Dadurch werden Gruppen von Wellen dargestellt, die durch Zwischenräume kleiner Amplitude voneinander getrennt sind. Entsprechende Punkte zweier Gruppen sind durch die Strecke $\frac{4\pi}{b_2 - b_1}$ voneinander getrennt, die Geschwindigkeit der Gruppe ist $\frac{n_2 - n_1}{b_2 - b_1} = \frac{dn}{db}$. Die Geschwindigkeit der einzelnen Welle ist $c_1 = \frac{n}{b}$, so daß die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{d(bc_1)}{db} = c_1 + b\,\frac{dc_1}{db}$$

wird, oder

$$c_g = c_1 - \lambda\,\frac{dc_1}{d\lambda}.$$

Bei der *Foucault*schen Methode ist nach Lord *Rayleigh* zu berücksichtigen, daß in einem dispergierenden Medium die von dem rotierenden Spiegel ausgehende Wellenfront noch eine besondere Drehung erfährt.

Während der Lichtstrahl die Strecke l zweimal zurückgelegt hat

76) *A. A. Michelson*, Report Brit. Assoc. Montreal 1884, p. 654; Astronomical papers (1885), p. 235—258.

77) Lord *Rayleigh*, Nature 24 (1881), p. 382—383; 25 (1881), p. 52.

und zum rotierenden Spiegel zurückkehrt, hat sich der Spiegel um den Winkel

$$\alpha = \frac{2 l \omega}{c_1}$$

gedreht, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Gemessen wird der Winkel 2α.

Während der kleinen Zeit t hat sich die Wellenfront infolge der Drehung des Spiegels um $2\omega t = 2\beta$ gedreht und während der Schwingungsdauer des Lichtes $\frac{\lambda_1}{c_1}$ um $\frac{2\omega\lambda_1}{c_1} = 2\beta$. Es bedeutet λ_1 die Wellenlänge in dem Medium. Schreiten wir auf der Wellenfront um die Strecke dx vor, so vergrößern wir den Abstand der beiden Wellenfronten um $d\lambda_1$, wo $2\beta = \frac{d\lambda_1}{dx}$ ist.

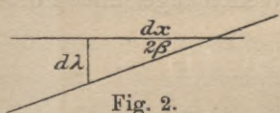

Fig. 2.

Ist nun c_1 von λ_1 abhängig, so ist

$$\frac{dc_1}{d\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dx} = \frac{dc_1}{dx}$$

eine durch die Dispersion hervorgerufene Drehung der Wellenfront. Die Drehung 2ω ist also hierdurch vermindert um den Betrag

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{dc_1}{d\lambda_1}\frac{2\omega\lambda_1}{c_1}.$$

Die Drehung $2\alpha = \frac{4 l\omega}{c_1}$ ist demnach vermindert um $\frac{dc_1}{d\lambda_1}\cdot\frac{4 l\omega\lambda_1}{c_1^2}$ so daß wirklich beobachtet wird

$$2\alpha = \frac{4 l\omega}{c_1}\left(1 - \frac{dc_1}{d\lambda_1}\frac{\lambda_1}{c_1}\right)$$

oder da

$$\frac{c_1}{c} = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

ist,

$$2\alpha = \frac{4 l\omega}{c_1}\left(1 - \frac{dc_1}{d\lambda}\frac{\lambda}{c_1}\right)$$

oder

$$2\alpha = \frac{4 l\omega}{c_1^2} c_g.$$

Es wird also nach dieser Ableitung durch die *Foucault*sche Methode $\frac{c_g}{c_1^2}$ gemessen.

Es bleibt aber zweifelhaft, ob in der *Rayleigh*schen Betrachtung außer der Veränderung der Wellenfront nicht auch noch die Änderungen der Amplitude wie bei der *Fizeau*schen Methode hinzukommen.

Schuster[78]) findet durch eine abweichende Betrachtung, daß man

78) *A. Schuster*, Nature 33, S. 439; 1886.

Brauns, Dr. R., Professor an der Universität Kristalle. Mit 6 Tafeln. [XI u. 370 S

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der U führung in die Elektronentheorie. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.

Fröhlich, Dr. J., Professor an der Univer forschung und theoretische Deutu keiten der Polarisation des von Glasgittern gebeugten Lichtes. Sonderabdruck aus den mathem. und naturw. Berichten aus Ungarn. XXII. Band. Mit 35 Figuren. [XVI u. 358 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 18.—

Gleichen, Dr. A., Regierungsrat, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit 251 Figuren. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Kohlrausch, Dr. F., Lehrbuch der praktischen Physik. 10. vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

—— kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2. vermehrte Auflage. 6.—10. Tausend. Mit zahlreichen Figuren. [XVIII u. 268 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Planck, Dr. M., Professor an der Universität Berlin, das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. 2. Auflage. A. u. d. T.: Wissenschaft und Hypothese. Bd. VI. [XVI u. 278 S.] 8. 1908. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Pockels, Dr. F., Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Starke, Dr. H., Professor an der Universität Greifswald, experimentelle Elektrizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen u. Ergebnisse. Mit 275 Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

v. Steinheil, Dr. A. und Dr. E. Voit, Professor in München, Handbuch der angewandten Optik. 3 Bände. I. Band. Voraussetzung für die Berechnung optischer Systeme und Anwendung auf einfache und chromatische Linsen. Mit Figuren und 7 lithogr. Tafeln. [VI u. 314 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. ℳ 12.—
Hierzu besonders: Beilagen. [109 S.] Geh. n. ℳ 3.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausgegeben von Felix Auerbach. 8. In Leinwand geb. (Erscheint Ostern 1909.)

Volkmann, Dr. P., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf die elastische und die elektromagnetische Anschauung. Mit Figuren im Text. [XVI u. 432 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. ℳ 11.20.

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Wüllner, weil. Geheimer Regierungsrat Dr. A., Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Mit 1104 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren und 4 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1896/1907:

Bei gleichzeitigem Bezuge aller 4 Bände ermäßigt sich der Gesamtpreis des Werkes geh. auf n. M. 44.—, in Halbfranz geb. auf n. M. 50.—

Einzeln:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. 6. Auflage bearbeitet von A. Wüllner und A. Hagenbach. [XIV u. 1058 S.] 1907. Geh. n. ℳ 16.—, in Halbfranzbd. n. ℳ 18.—
II. — Die Lehre von der Wärme. 5. Auflage. [XI u. 936 S.] 1896. Geh. n. ℳ 12.—, in Halbfranzband n. ℳ 14.—
III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. 5. Auflage. [XV u. 1415 S.] 1897. Geh. n. ℳ 18.—, in Halbfranzband n. ℳ 20.—
IV. — Die Lehre von der Strahlung. 5. Auflage. [XII u. 1042 S.] 1899. Geh. n. ℳ 14.—, in Halbfranzband n. ℳ 16.—