

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301660

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

- BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, } RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
 IN 2 TEILEN
- II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN. { H. BURKHARDT IN MÜNCHEN UND
 W. WIRTINGER IN WIEN.
- III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN. W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
- IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN . . . { F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND
 C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
- V: PHYSIK, IN 3 TEILEN. A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
- VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . { PH. FURTWÄNGLER IN AACHEN UND
 E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
- VI, 2: ASTRONOMIE K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
- VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK (IN VORBEREITUNG).

BAND V2. HEFT 3.

P. DEBYE IN MÜNCHEN: STATIONÄRE UND QUASISTATIONÄRE FELDER . . . S. 393
 M. ABRAHAM IN MAILAND: ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN S. 483

AUSGEGEBEN AM 18. MÄRZ 1910.

F. No. 22802



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1910.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II₁, Heft 1—6; Bd. II₂, Heft 1; Bd. III₁, Heft 1; Bd. III₂, Heft 1; Bd. III₃, Heft 1—4; Bd. III₄, Heft 1—3; Bd. IV₁₁, Heft 1—4 (vollständig); Bd. IV₁₂, Heft 1; Bd. IV₂₁, Heft 1—4 (vollständig); Bd. IV₂₂, Heft 1 u. 2; Bd. V₁, Heft 1—4; Bd. V₂, Heft 1—3; Bd. V₃, Heft 1 u. 2; Bd. VI_{1A}, Heft 1—3; Bd. VI_{1B}, Heft 1; Bd. VI₂, Heft 1 u. 2.

Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Aufgabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche die Antworten die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlicher angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprache an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck - München, O. Hölder - Leipzig, F. Klein - Göttingen, V. v. Lang - Wien, W. Wirtinger - Wien,
H. v. Seeliger - München, H. Weber - Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt - München, Ph. Furtwängler - Aachen, F. Klein - Göttingen, W. Fr. Meyer - Königsberg, C. H. Müller - Göttingen,
K. Schwarzschild - Göttingen, A. Sommerfeld - München, E. Wiechert - Göttingen und W. Wirtinger - Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens - Magdeburg
P. Bachmann - Weimar
J. Bauschinger - Straßburg
G. Bohlmann - Berlin [i. E.]
L. v. Bortkewitsch - Berlin
H. Burkhardt - München
E. Czuber - Wien
W. v. Dyck - München
D. Hilbert - Göttingen
O. Hölder - Leipzig
G. Landsberg - Kiel
R. Mehmke - Stuttgart
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
E. Netto - Gießen
V. Pareto - Lausanne
A. Pringsheim - München
K. Runge - Göttingen
A. Schoenflies - Königsberg
i. P.
H. Schubert - Hamburg
D. Sellwanoff - St. Petersburg
E. Study - Bonn
K. Th. Vahlen - Greifswald
H. Weber - Straßburg i. E.
A. Wiman - Lund.

A. Voss - München
A. Wangerin - Halle
E. v. Weber - Würzburg
W. Wirtinger - Wien
E. Zermelo - Göttingen.

III. Band:

L. Berzolari - Pavia
H. Burkhardt - München
G. Castelnuovo - Rom
M. Dehn - Münster i. W.
F. Dingeldey - Darmstadt
F. Enriques - Bologna
G. Fano - Turin [rand
C. Guichard - Clermont-Fer-
P. Heegaard - Vedbaek bei
Kopenhagen
K. Heun - Karlsruhe
G. Kohn - Wien
H. Liebmann - Leipzig
R. v. Lilienthal - Münster i. W.
G. Loria - Genua
H. v. Mangoldt - Danzig
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
E. Müller - Wien
J. Neuberger - Lüttich
E. Papperitz - Freiberg i. S.
K. Rohn - Leipzig
G. Scheffers - Charlottenburg
A. Schoenflies - Königsberg
C. Segre - Turin [i. P.
M. Simon - Straßburg i. E.
J. Sommer - Danzig
P. Stäckel - Karlsruhe
O. Stöckel - Rostock
H. Steinitz - Charlottenburg
A. Voss - München
E. Wälsch - Brünn
H. G. Zeuthen - Kopenhagen
K. Zindler - Innsbruck.

IV. Band:

M. Abraham - Mailand
C. Cranz - Berlin
P. u. T. Ehrenfest - Petersburg
S. Finsterwalder - München
O. Fischer - Leipzig
Ph. Forchheimer - Graz

Ph. Furtwängler - Aachen
M. Grübler - Dresden
L. Henneberg - Darmstadt
K. Heun - Karlsruhe
G. Jung - Mailand
F. Klein - Göttingen
A. Kriloff - Petersburg
H. Lamb - Manchester
A. E. H. Love - Oxford
R. v. Mises - Straßburg i. E.
C. H. Müller - Göttingen
L. Prandtl - Göttingen
H. Reiffner - Aachen
A. Schoenflies - Königsberg
P. Stäckel - Karlsruhe
O. Tedone - Genua
E. Timerding - Straßburg i. E.
A. Timpe - Aachen
A. Voss - München
G. T. Walker - Simla (Indien)
G. Zemplén - Budapest.

V. Band:

M. Abraham - Mailand
L. Boltzmann (†)
G. H. Bryan - Bangor (Wales)
P. Debye - München
H. Dieselhorst - Berlin
H. Dubois - Berlin
Fr. Emde - Berlin
S. Finsterwalder - München
R. Gans - Tübingen [burg
F. W. Hinrichsen - Charlotten-
E. W. Hobson - Cambridge
J. H. van 't Hoff - Berlin
H. Kamerlingh-Onnes - Leiden
M. Laue - München
Th. Liebisch - Königsberg
H. A. Lorentz - Leiden
L. Mamlouk - Berlin
G. Mie - Greifswald
H. Minkowski (†)
O. Mügge - Göttingen
J. Nabl - Wien
F. Pockels - Heidelberg
L. Prandtl - Göttingen
R. Reiff - Stuttgart
C. Runge - Göttingen

A. Schoenflies - Königsberg
M. Schröter - München
A. Sommerfeld - München
E. Study - Bonn
A. Wangerin - Halle
W. Wien - Würzburg
J. Zenneck - Braunschweig

VI, 1. Band:

R. Bourgeois - Paris
G. H. Darwin - Cambridge
F. Exner - Wien
S. Finsterwalder - München
Ph. Furtwängler - Aachen
F. R. Helmert - Potsdam
S. Hough - Kapstadt
H. Meldau - Bremen
P. Pizzetti - Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt - Potsdam
W. Trabert - Innsbruck
E. Wiechert - Göttingen.

VI, 2. Band

E. Anding - Gotha
J. Bauschinger - Berlin
A. Bemporad - Catania
E. W. Brown - Haverford
C. Ed. Caspari - Paris
C. V. L. Charlier - Lund
F. Cohn - Berlin
R. Emden - München
F. K. Ginzler - Berlin
J. v. Heppinger - Wien
G. Herglotz - Leipzig
H. Kobold - Kiel
F. R. Moulton - Chicago
G. v. Niessl - Brünn
S. Oppenheim - Prag
L. Schulhof - Paris
K. Schwarzschild - Göttingen
E. Strömgren - Kopenhagen
K. Sundman - Helsingfors
E. T. Whittaker - Dublin
A. Wilkens - Hamburg
C. W. Wirtz - Straßburg i. E.
H. v. Zeipel - Pulkowa.

Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a/S.) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Die bezüglichen Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beige-steuert die Herren W. Ahrens, M. Böcher, A. v. Braunmühl, T. J. P. A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, L. Henneberg, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Kürschák, E. Lampe, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, Otto Meißner, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, K. Petr, S. Pincherle, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, E. Study, Th. Vahlen, A. Wangerin, K. v. Wesendonck, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr. - Marauenhof, Herzog Albrechtallee 27.



11-348764

~~16677~~



V 17. STATIONÄRE UND QUASISTATIONÄRE FELDER.

VON

P. DEBYE

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

I. Stationäres Feld.

A. Allgemeine Formulierung der Probleme.

1. Grundgleichungen.
2. Das innere elektrische Feld.
3. Das äußere elektrische Feld.
4. Das magnetische Feld; allgemeiner Fall.
5. Das magnetische Feld; spezieller Fall $\mu = \text{const.}$

B. Spezielle Behandlung körperlicher Leiter.

6. Die übliche Fragestellung.
7. Die *Greensche* Funktion.
8. Elektroden endlicher Abmessungen. Halbraum. Kugel.
9. *Kirchhoff's* Methode zur Bestimmung der Leitfähigkeit. Parallelepiped. Kreis-
zylinder.
10. *Nobilische* Ringe.
11. Inhomogene Leiter.
12. Näherungsweise Berechnung des Widerstandes. Draht von variablem Quer-
schnitt. Übergangswiderstand.

C. Flächenleiter.

13. Grundgleichungen. Übliche Fragestellung.
14. Zusammenhang mit der Theorie der Flächen.
15. Ebene Platten.
16. Gekrümmte Platten.

D. Lineare Leiter.

17. Grundgleichungen.
18. Das äußere Feld.
19. Spezielle Fälle der Stromverzweigung: *Wheatstonesche* Brücke, usw.

Akc. Nr. BPK-3-197/2017
3522/52

20. Das magnetische Feld in speziellen Fällen: Einzelner gerader Draht, zwei oder mehrere parallele gerade Drähte.
21. Das magnetische Feld eines Kreisstroms.
22. Das magnetische Feld einer Spule.

II. Quasistationäres Feld.

A. Allgemeines.

23. Grundgleichungen und Potentiale.
24. Die Energiegleichung.

B. Spezielles über Körper- und Flächenleiter.

25. Körperliche Leiter.
 - a) Ruhende Körper.
 - b) Bewegte Körper.
26. Flächenleiter.

C. Lineare Leiter.

27. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Stromkreise ohne Kapazität. Definition der Induktionskoeffizienten.
28. Die Differentialgleichungen für Stromkreise mit Kapazität.
29. Die Energiegleichung.
30. Induktionskoeffizienten für geradlinige Leiter. Der mittlere geometrische Abstand R .
31. Werte für R in speziellen Fällen.
32. Werte für die Induktionskoeffizienten in speziellen Fällen.
 - a) Geradlinige Leiter.
 - b) Kreisförmige Leiter.
33. Spezielle Fälle von Stromkreisen mit zeitlich veränderlicher elektromotorischer Kraft. Der Widerstandsoperator.
34. *Wheatstonesche* Brücke für Wechselstrom.

III. Ponderomotorische Wirkungen.

35. Berechnung der Kräfte zwischen Strömen.
36. Galvanometer.
37. Das ballistische Galvanometer.

Literatur.

- J. C. Maxwell*, Treatise on electricity and magnetism 2 Vol., Oxford 1 (1873); 2 (1881); 3 (1892).
- C. Neumann*, Die elektrischen Kräfte, Leipzig 1873.
- G. Wiedemann*, Die Lehre von der Elektrizität, Braunschweig, 1. Aufl., 3 Bde, 1872; 2. Aufl., 4 Bde, 1893.
- E. Mascart et J. Joubert*, Leçons sur l'électricité et le magnétisme, 2 Vol., Paris 1882.
- F. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie des Potentials, Leipzig 1887.
- H. Poincaré*, Electricité et optique, Paris, 1 (1890/91); 2 (1901).

- O. Heaviside*, Electrical papers 2 Vol., London 1892.
 — Electromagnetic theory 2 Vol., London 1893, 1899.
A. Heydweiller, Hilfsbuch für die Ausführung elektrischer Messungen, Leipzig 1892.
F. Bedell and *A. C. Crehore*, Alternating currents, Ithaca N. Y., 1 (1892); 4 (1904).
P. Drude, Physik des Äthers, Stuttgart 1894.
W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, Leipzig 1895.
E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900.
H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet, Braunschweig 1900.
A. Russell, A Treatise on the theory of alternating currents, 2 Vol., Cambridge 1904—06.
M. Abraham und *A. Föppl*, Theorie der Elektrizität, Leipzig, 2 Bde; 1. Band, 1. Aufl. 1894, 2. Aufl. 1904, 3. Aufl. 1907.
H. Burkhardt, Oscillierende Funktionen, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 10, 1909.
E. Orlich, Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909.

Bezeichnungen.

Die Bezeichnungen allgemeiner Größen, wie bei *H. A. Lorentz*, Enc. d. math. Wiss. V 13.

I. Stationäres Feld.

A. Allgemeine Formulierung der Probleme.

1. Grundgleichungen. Wenn in Leitern zeitlich unveränderliche eingeprägte elektrische Kräfte \mathfrak{E}^e vorhanden sind, so ist im allgemeinen eine stationäre Strömung der Elektrizität möglich. Das zugehörige elektromagnetische Feld, definiert durch die elektrischen, resp. magnetischen Feldstärken \mathfrak{E} , resp. \mathfrak{H} , wird für isotrope Körper, auf die wir uns hier beschränken, beschrieben durch die Maxwellschen Gleichungen¹⁾:

$$(I) \quad 0 = \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

$$(II) \quad \frac{\sigma}{c} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$

Die eingeprägten elektrischen Kräfte sind die Energiequellen, aus denen die mit dem (spezifischen) Strom

$$(III) \quad \mathfrak{J} = \sigma (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \sigma \mathfrak{E}^t$$

verbundene Wärmeentwicklung gedeckt wird. Letztere hat pro Zeit- und Volumenelement den Wert

$$(IV) \quad q = \mathfrak{J} \mathfrak{E}^t = \sigma (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2.$$

1) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6 und Nr. 9. Wir erinnern daran, daß hier wie im Artikel von *H. A. Lorentz* der Index e die „eingeprägte“, der Index t die „totale“ elektrische Kraft andeutet und bemerken, daß auch wir die dort erklärten rationellen Einheiten (V 13, Nr. 7) benutzen.

Da nach (I) ein skalares Potential existiert, können wir schreiben:²⁾

$$(1) \quad \mathfrak{E} = - \text{grad } \varphi;$$

nach (II) gilt dann für φ die Bedingungsgleichung

$$(2) \quad \text{div } \sigma \text{ grad } \varphi = \text{div } \sigma \mathfrak{E}^e,$$

oder bei räumlich konstanter Leitfähigkeit

$$(2') \quad \Delta \varphi = \text{div } \mathfrak{E}^e.$$

Nur in dem besonderen Fall, daß die eingepprägten elektrischen Kräfte wirbelfrei verteilt sind, ist keine Strömung möglich. Betrachtet man nämlich einen Körper, der ganz in einem Nichtleiter eingebettet ist, so daß ihm durch seine Begrenzung hindurch kein Strom zugeführt werden kann, so liefern die beiden nach der obigen Voraussetzung gültigen Gleichungen:

$$(3) \quad \text{div } \sigma (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \text{rot } (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = 0,$$

zusammen mit der Grenzbedingung³⁾

$$(4) \quad \mathfrak{E}_n + \mathfrak{E}_n^e = 0,$$

auf Grund des Greenschen Satzes, unmittelbar überall im Innern des Körpers:

$$(5) \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e = 0.$$

Der Fall der rotationslosen Verteilung der \mathfrak{E}^e tritt ein bei jedem aus solchen gleichtemperierten Körpern bestehenden Kreis, in denen ein eventueller Strom keine chemischen Änderungen hervorbringt (Metalle). Die eingepprägten Kräfte \mathfrak{E}^e und damit auch nach (5) die Feldstärken \mathfrak{E} verschwinden im Innern eines solchen Kreises überall mit Ausnahme der Übergangsschichten zwischen den verschiedenen Metallen. Hier nehmen sie so große Werte an, daß das durch eine Übergangsschicht hindurch erstreckte Linienintegral: $\int \mathfrak{E} ds$ einen endlichen Wert erhält. Die Tatsache, daß nach Gleichung (I) das betrachtete Linienintegral nur von der Wahl der Endpunkte des Integrationsweges abhängt, ist gleichbedeutend mit dem Voltaschen Spannungsgesetz⁴⁾.

2. Das innere elektrische Feld. Wir denken uns zunächst einen Körper mit stetig veränderlicher Leitfähigkeit eingebettet in einen Nichtleiter und betrachten die eingepprägten elektrischen Kräfte als gegebene Größen. Um das elektrische Feld (und damit zu gleicher

2) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. H. A. Lorentz V 13, Nr. 14.

3) Vgl. Nr. 2 dieses Artikels.

4) Vgl. *Elektrostatik und Magnetostatik* Art. R. Gans V 15, Nr. 20.

Zeit die Stromlinien), im Innern dieses Körpers zu bestimmen, haben wir zunächst Gleichung (2):

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \sigma \mathfrak{E}^e;$$

hierzu treten noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche. Über diese sagt Gleichung (I) aus, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen Kraft \mathfrak{E} stetig übergehen, Gleichung (II), daß die Normalkomponente der totalen elektrischen Kraft $\mathfrak{E}^t = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e$ verschwindet⁵⁾. In Formeln:

$$(6) \quad \mathfrak{E}_{hi} = \mathfrak{E}_{ha},$$

$$(7) \quad \mathfrak{E}_{ni}^t = 0,$$

oder durch das Potential ausgedrückt

$$(6') \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_a,$$

$$(7') \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_i = \mathfrak{E}_n^e.$$

Hierbei bedeutet h eine in die Oberfläche fallende, n die zur Oberfläche senkrechte Richtung; i bezieht sich auf das Innere, a auf das Äußere des betrachteten Körpers.

Man zeigt leicht mittels des Greenschen Satzes, angewandt auf die Differenz zweier verschiedenen, als möglich vorausgesetzten, Lösungen, daß durch (2) und (7') das Potential bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Diese ist für die Strömung im Innern des Körpers belanglos und hat ebenso wie (6) resp. (6') nur Bedeutung für die Berechnung des äußeren elektrischen Feldes (vgl. Nr. 3).

Besteht der betrachtete Stromleiter aus verschiedenen Körpern, so daß also σ sich un stetig ändert, so treten zur Grenzbedingung (7) resp. (7') noch die Übergangsbedingungen zwischen den verschiedenen Leitern. So gilt z. B. an der Übergangsschicht zwischen Leiter (1) und Leiter (2)

$$(8) \quad \mathfrak{E}_{n_1} = \mathfrak{E}_{n_2},$$

$$(9) \quad \sigma_1 \mathfrak{E}_{n_1}^t = \sigma_2 \mathfrak{E}_{n_2}^t,$$

oder durch das Potential ausgedrückt:

$$(8') \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_2,$$

$$(9') \quad \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 - \sigma_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 = \mathfrak{E}_{n_1}^e - \mathfrak{E}_{n_2}^e.$$

5) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. H. A. Lorentz V 13, Nr. 6.

Ändern sich beim Durchgang durch die Übergangsschicht die tangentiellen Komponenten der eingepprägten elektrischen Kräfte stetig oder sind diese sogar vollends Null, wie das z. B. bei aneinander grenzenden Metallen der Fall ist, so können wir statt (8) auch schreiben

$$(8'') \quad \mathfrak{E}_{h_1} + \mathfrak{E}_{h_1}^e = \mathfrak{E}_{h_2} + \mathfrak{E}_{h_2}^e.$$

Die Gleichungen (8'') und (9) liefern dann für die Stromkomponenten nach (III):

$$(10) \quad \frac{\mathfrak{S}_{h_1}}{\sigma_1} = \frac{\mathfrak{S}_{h_2}}{\sigma_2},$$

$$(11) \quad \mathfrak{S}_{n_1} = \mathfrak{S}_{n_2}.$$

In (10) und (11) ist das *Gesetz der Brechung der Stromlinien*⁶⁾ enthalten. Bezeichnet man nämlich mit α_1 bzw. α_2 die Winkel ($< \frac{\pi}{2}$), die \mathfrak{S}_1 bzw. \mathfrak{S}_2 mit der Normalen der Übergangsschicht machen, so erhält man aus diesen Gleichungen

$$(12) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Auch liegen „einfallender“ und „gebrochener“ Strom in einer Ebene. Es sei noch bemerkt, daß beim Übergang von einem Metall auf ein anderes das Potential φ sich nach den Bemerkungen am Schluß von Nr. 1 unstetig ändert; der Sprung ist aber nur abhängig von der Art der sich berührenden Metalle, so daß auch jetzt noch das Potential des ganzen Körpers bis auf eine willkürliche Konstante vollständig bestimmt ist.

3. Das äußere elektrische Feld. Denken wir uns den in Nr. 2 betrachteten Körper nur vom freien Äther umgeben, so gilt hier für das Potential⁷⁾

$$(13) \quad \Delta\varphi = 0.$$

Die Grenzbedingung (6) resp. (6') liefert an der Oberfläche

$$(14) \quad \varphi_a = \varphi_i + \text{const.},$$

wobei φ_i den Wert bedeutet, den das im Innern des Körpers gültige Potential an seiner Oberfläche annimmt und der bekannt ist, sobald das innere elektrische Feld bestimmt ist; φ_a bedeutet den Oberflächenwert des im Außenraum geltenden Potentials.

Wegen der in (14) vorkommenden unbekanntenen Konstante bleibt

6) G. Kirchhoff, Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige, Ges. Abh., p. 1. Siehe auch Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497.

7) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik Art. R. Gans V 15, Nr. 3.

(auch unter Hinzunahme der Bedingungen im Unendlichen) in φ ein Bestandteil unbestimmt, der einer statischen Ladung des ganzen stromführenden Systems entspricht. Auch letzterer ist bekannt, sobald man noch die Gesamtladung des ganzen Systems kennt oder der Potentialwert für irgend einen Punkt des Körpers angenommen wird. Alsdann ist das Potential φ vollständig bestimmt und man erkennt, daß jeder elektrische Strom notwendig verknüpft ist mit ganz bestimmten Oberflächenladungen⁸⁾ des durchströmten Körpers.

Die Bedingungen des Problems sind leicht zu verallgemeinern für den Fall, daß außer dem stromführenden Körper noch andere Leiter oder Dielektrika sich in seiner Umgebung befinden⁷⁾.

4. Das magnetische Feld. Allgemeiner Fall. Unter der Annahme, daß die magnetische Erregung \mathfrak{B} der magnetischen Feldstärke \mathfrak{S} einfach proportional ist, so daß wir schreiben können⁹⁾

$$(15) \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{S},$$

ist durch (II) zusammen mit der Aussage, daß die magnetische Erregung quellenfrei verteilt ist:

$$(16) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

das magnetische Feld bestimmt, sobald die Strömung bekannt ist. Letztere kann nach Nr. 2 ohne Rücksicht auf das Vorhandensein eines magnetischen Feldes für sich bestimmt werden. Durch die Annahmen (15) und (16) haben wir sowohl permanente Magnete, wie die Erscheinungen der Hysterisis von unsern Betrachtungen ausgeschlossen¹⁰⁾. Nach (16) können wir setzen¹¹⁾:

$$(17) \quad \mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

wo \mathfrak{A} das sogenannte Vektorpotential bedeutet. Für \mathfrak{A} gilt dann nach (II) und (15) unter Berücksichtigung von (III):

$$(18) \quad \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \mathfrak{S},$$

oder wenn μ abteilungsweise konstant ist, wie wir voraussetzen wollen:

$$(18') \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \mathfrak{S}.$$

Nach (17) ist zwar \mathfrak{B} eindeutig durch \mathfrak{A} , aber nicht umgekehrt \mathfrak{A}

8) Vgl. die Beispiele in Nr. 8 und Nr. 20.

9) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 8.

10) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 15 u. Nr. 19; *Elektrostatik und Magnetostatik* Art. *R. Gans* V 15, Nr. 23, Nr. 24, Nr. 31 u. Nr. 32.

11) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 28.

eindeutig durch \mathfrak{B} bestimmt. Wir können und wollen deshalb noch voraussetzen, daß \mathfrak{A} quellenfrei verteilt ist, in Formel:

$$(19) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0.$$

Mit Berücksichtigung von (19) kann man dann auch für jede der drei rechtwinkligen Koordinatenrichtungen x, y, z die Gleichung (18') in der Form schreiben:

$$(18'') \quad \Delta \mathfrak{A}_x = -\frac{\mu}{c} \mathfrak{S}_x, \quad \Delta \mathfrak{A}_y = -\frac{\mu}{c} \mathfrak{S}_y, \quad \Delta \mathfrak{A}_z = -\frac{\mu}{c} \mathfrak{S}_z.$$

Zu (18'), resp. (18'') und (19) treten zur vollständigen Bestimmung des magnetischen Feldes außer den Bedingungen im Unendlichen noch die Grenzbedingungen beim Übergang von einem Medium (1) auf ein Medium (2) hinzu¹²⁾. Sie lauten nach (II) und (16) unter Berücksichtigung von (15):

$$(20) \quad \mathfrak{S}_{h_1} = \mathfrak{S}_{h_2},$$

$$(21) \quad \mu_1 \mathfrak{S}_{n_1} = \mu_2 \mathfrak{S}_{n_2}.$$

Die Gleichungen (20) und (21) enthalten das Gesetz der Brechung der magnetischen Kraftlinien analog wie (10) und (11) für die Stromlinien.

Ist speziell $\mu_2 \gg \mu_1$ und weiß man, daß \mathfrak{B} im Innern des stark magnetischen Körpers auch bei unendlich wachsendem μ endlich bleibt¹³⁾, so kann man die Bedingung (20) näherungsweise ersetzen durch

$$(21') \quad \mathfrak{S}_{h_1} = 0,$$

mit andern Worten, die magnetischen Kraftlinien stehen im Körper 1 senkrecht zur Trennungsfläche 1 — 2, ebenso wie die Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes senkrecht zur Oberfläche leitender Körper endigen.

Schließt man die stromführenden Körper derart durch Flächen aus, daß ohne diese zu durchdringen eine Umkreisung eines endlichen Stromes nicht mehr möglich ist, so kann man nach (II) in dem übrig bleibenden, nunmehr einfach zusammenhängenden Raum, an Stelle des Vektorpotentials \mathfrak{A} ein eindeutiges, skalares Potential ψ einführen, so daß gesetzt werden kann:

$$(22) \quad \mathfrak{S} = -\operatorname{grad} \psi.$$

Für dieses gilt dann nach (16) wieder die Gleichung¹⁴⁾

$$(23) \quad \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi = 0.$$

12) Vgl. *Maxwellsche Theorie* Art. H. A. Lorentz V 13, Nr. 6.

13) Das entgegengesetzte Verhalten zeigt \mathfrak{B} z. B. im Innern eines stromdurchflossenen, magnetisierbaren Drahtes, wo die der Oberfläche parallele Komponente von \mathfrak{B} mit unendlich wachsendem μ unendlich wird.

14) Vgl. *Elektrostatik und Magnetostatik* Art. R. Gans V 13, Nr. 3.

mit den Grenzbedingungen

$$(23') \quad \psi_1 = \psi_2$$

$$(23'') \quad \mu_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_2$$

für die Trennungsfläche zwischen den Körpern 1 und 2. Im allgemeinen ist ψ zur Beschreibung des magnetischen Feldes konstanter Ströme nicht geeignet. Eine Ausnahme macht jedoch der Fall der linearen Leiter, wo die oben betrachteten allgemeinen Flächen in berandete, doppelt überdeckte übergehen, an denen das Potential ψ einfache Unstetigkeiten besitzt¹⁵⁾.

5. Das magnetische Feld. Spezieller Fall $\mu = \text{const.}$ Wenn die Permeabilität überall denselben Wert hat, geht die durch (18''), (20) und (21) definierte Randwertaufgabe in eine einfache Integrationsaufgabe über. Kombiniert man nämlich mittels des *Greenschen* Satzes die drei Komponenten der Elementarlösung von (18'') für den Fall $\mathfrak{S} = 0$:

$$(24) \quad \mathfrak{A}_x = \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{r}$$

mit den entsprechenden Komponenten des gesuchten Vektorpotentials, so erhält man ohne weiteres

$$(25) \quad \mathfrak{A} = \frac{\mu}{4\pi c} \int \frac{\mathfrak{S}}{r} dS,$$

wobei das Integral über alle stromführenden Körper zu erstrecken ist.

Nach (15) und (17) erhält man aus (25) für die magnetische Feldstärke den Ausdruck

$$(26) \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{[\mathfrak{S} \mathbf{r}]}{r^3} dS;$$

\mathbf{r} bedeutet dabei den Vektor vom Betrage r in der von dS nach dem Aufpunkte hinzeigenden Richtung.

Gleichung (26) entspricht dem *Biot-Savartschen* Gesetz¹⁶⁾.

B. Spezielle Behandlung körperlicher Leiter.

6. Die übliche Fragestellung. In den in der Praxis vorkommenden Fällen liegen gewöhnlich die den Strom erzeugenden eingepprägten elektrischen Kräfte außerhalb des Körpers¹⁷⁾, in dem man die Strö-

15) Für die nähere Ausführung sehe man Nr. 18 dieses Artikels.

16) Vgl. Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze Art. R. Reiff und A. Sommerfeld V 12, Nr. 2.

17) Vgl. indessen Teil II dieses Artikels, wo die durch Bewegung in einem magnetischen Feld erzeugten elektrischen Kräfte zur Sprache kommen, welche

mung bestimmen will. Diesem wird der Strom zugeführt durch die Elektroden. Nur dann wenn letztere aus viel besser leitendem Material wie der Körper (streng genommen aus unendlich gut leitendem Material) bestehen, ist das Problem der Bestimmung der Stromlinien für den betrachteten Leiter ein in sich abgeschlossenes. Wir wollen die Voraussetzungen $\sigma = \infty$ für die Elektroden und $\mathfrak{E}^e = 0$ machen; das physikalische Problem deckt sich dann unter Berücksichtigung von (2), resp. (2') und sinngemäßer Anwendung von (8) und (9) mit dem folgenden mathematischen:

a) Innerhalb des betrachteten Körpers ist eine Funktion φ zu bestimmen, die überall der Gleichung

$$(2) \quad \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0$$

resp.

$$(2') \quad \Delta \varphi = 0$$

genügt, an den Elektroden A, B, C, \dots konstante vorgeschriebene Werte $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \dots$ annimmt und an den übrigen Teilen der Begrenzung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ liefert.

Ist φ bestimmt, so folgt \mathfrak{E} und \mathfrak{S} nach (1) und (III). Besteht der Leiter aus mehreren Teilen verschiedener Leitfähigkeit, so sind an den Übergangsschichten noch die Grenzbedingungen (10) und (11), sowie der Voltasche Potentialsprung zu beachten.

Nennt man die durch die einzelnen Elektroden A, B, C, \dots gehenden Ströme J_A, J_B, J_C, \dots , so daß

$$(27) \quad J_A = \int_A \mathfrak{S}_n d\sigma, \quad J_B = \int_B \mathfrak{S}_n d\sigma, \dots,$$

so erhält man aus (2) durch Multiplikation mit φ und Integration über das Volumen des Leiters nach dem Greenschen Satz die Energiegleichung:

$$(28) \quad \varphi_A J_A + \varphi_B J_B + \dots = \int \sigma \mathfrak{E}^2 dS = Q,$$

wo Q nach (IV) die ganze im Körper entwickelte Joulesche Wärme bedeutet.

Andererseits ergibt sich durch direkte Integration von (2) über das Volumen des Leiters die „Inkompressibilitätsbedingung“:

$$(29) \quad J_A + J_B + J_C + \dots = 0.$$

bei genügend kleinen Geschwindigkeiten als eingeprägte elektrische Kräfte behandelt werden können.

Sind nur zwei Elektroden A und B vorhanden, so wird nach (29)

$$(30) \quad J_A = -J_B = J$$

und

$$(31) \quad Q = J(\varphi_A - \varphi_B),$$

und man erhält, wenn man noch den *Widerstand* R des Körpers einführt, durch den Ansatz

$$(32) \quad \varphi_A - \varphi_B = RJ,$$

aus (31) die Formel:

$$(31') \quad Q = RJ^2.$$

Für den Fall, daß mehr Elektroden vorhanden sind, kann von einem Widerstande des Körpers nicht mehr die Rede sein.

Das unter a) definierte Problem kann noch erheblich vereinfacht werden durch die Annahme sehr kleiner kugelförmiger Elektroden¹⁸⁾, welche in manchen Fällen vollkommen für die physikalischen Bedürfnisse ausreicht. Liegen nämlich die einzelnen Elektroden weit auseinander und sind bei Oberflächenelektroden die Krümmungsradien der benachbarten Oberfläche groß gegen ihre Dimensionen, so kann man dieselben als punktförmig betrachten, soweit nur Potentialwerte in einigem Abstand der Elektroden in Betracht gezogen werden. Man erhält dann die Fragestellung:

b) *Innerhalb des Leiters eine Funktion φ zu bestimmen, die überall der Gleichung*

$$(2) \quad \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

resp.

$$(2') \quad \Delta \varphi = 0$$

genügt mit Ausnahme gewisser Punkte $a, b, \dots, a', b', \dots$, wo φ unendlich wird wie $\frac{A}{r}, \frac{B}{r}, \dots, \frac{A'}{r}, \frac{B'}{r}, \dots$.

Bedeutet a', b', \dots Pole im Inneren, a, b, \dots solche auf der Begrenzung des Körpers, so gilt analog zu (29) die Inkompressibilitätsbedingung in der Form:

$$(29') \quad 4\pi(A' + B' + \dots) + 2\pi(A + B + \dots) = 0.$$

Für die Berechnung der *Jouleschen* Wärme, sowie des Widerstandes muß man den Elektroden wieder endliche Dimensionen zuschreiben (vgl. z. B. Nr. 8).

Zieht man nur Oberflächenelektroden in Betracht, so ist es natürlicher, sie als (kreisrunde) Scheibchen (Radius a) statt wie

18) Einige auf der Hand liegende Fälle, wo auch bei ausgedehnten Elektroden die Rechnung einfach wird, finden Erwähnung in Nr. 8.

oben als kleine Halbkugeln zu behandeln. Die Fragestellung a) läßt sich jetzt nach anderer Richtung vereinfachen. Wenn nämlich die früheren Voraussetzungen über die Kleinheit der Elektroden erfüllt sind, so kann man in ihrer Nähe die Oberfläche des Körpers als eben voraussetzen. Dann kommt das Problem a) in der Umgebung irgend einer Elektrode auf die Bestimmung des Potentials einer geladenen kreisförmigen leitenden Scheibe hinaus. Unter Benutzung der bekannten Lösung für diesen Fall¹⁹⁾ wird jetzt die Fragestellung:

c) Innerhalb des Leiters eine Funktion φ zu bestimmen, die überall der Gleichung

$$(2) \quad \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

resp.

$$(2') \quad \Delta \varphi = 0$$

genügt und für die auf der Begrenzung die Bedingungen gelten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{außerhalb der Elektroden,}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{J_M}{2\pi\alpha_M\sigma} \frac{1}{\sqrt{\alpha_M^2 - \varrho_M^2}} \quad \text{innerhalb der Elektroden.}$$

Hierbei bedeutet J_M den ganzen durch die Elektrode M hindurchgehenden Strom, ϱ_M den Abstand des betrachteten Punktes der Elektrode von ihrem Mittelpunkt, α_M ihren Radius. Das Problem ist einfacher wie das unter a) genannte, da im Falle c) die Oberflächenbedingung sich nur auf $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ bezieht.

7. Die Greensche Funktion. Wenn die Aufgabe der Bestimmung der Stromlinien in der Form c) vorliegt, ist es möglich sie zurückzuführen auf die Berechnung einer Greenschen Funktion G , die nur von der Form des betrachteten Leiters abhängt. Hierzu bestimme man $G = G_{pq}^u$ so²⁰⁾, als Funktion der beiden Punkte p, q und des variablen Aufpunktes u , daß sie im Innern des Körpers der Differential-

19) Vgl. Potentialtheorie Art. H. Burkhardt und W. F. Meyer II A 7 b, Nr. 15 sowie Elektrostatik und Magnetostatik Art. R. Gaus V 15, Nr. 12.

20) F. Klein, Vorlesung über Potentialtheorie II. Teil Sommersemester 1888 oder auch F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 249, wo u. a. über die Vertauschbarkeit von Pol und Aufpunkt berichtet wird. Vgl. auch Potentialtheorie Art. H. Burkhardt und W. F. Meyer II A 7 c, Nr. 18. Vgl. für allgemeine Differentialgleichungen: Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen Art. A. Sommerfeld II A 7 c. Eine experimentelle Bestätigung des Vertauschbarkeitssatzes (V. Volterra, Nuovo Cim. (3) 11 (1882), p. 188) lieferte G. Poloni, Rend. Lomb. 15 (1882), p. 535.

gleichung (2) resp. (2') genügt, auf dessen Oberfläche $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ liefert und in den beiden Punkten p bzw. q unendlich wird, wie $\frac{1}{r_p}$ bzw. $-\frac{1}{r_q}$, unter r_p, r_q die Abstände von den Punkten p bzw. q verstanden. Die Funktion G_{pq}^u ist demnach (vgl. Fragestellung b, Nr. 6) das Potential eines elektrischen Stromes der durch unendlich kleine Elektroden in den beliebig gewählten Punkten p , resp. q zu-, resp. abgeführt wird. Durch Anwendung des Greenschen Satzes erhält man dann für das gesuchte Potential φ :

$$(33) \quad \varphi_p - \varphi_q = \frac{1}{4\pi} \int G \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wobei das Integral über die Oberfläche des Leiters zu erstrecken ist; man sieht, daß das Potential nur bis auf eine beliebige Konstante φ_q bestimmt ist.

Statt der oben definierten Greenschen Funktion G kann man auch eine andere²¹⁾ $N = N_p^u$, die *F. Neumannsche Funktion*, einführen. Sie genügt auch der Gleichung (2) bzw. (2'), hat aber nur einen Pol p , indem sie sich verhält wie $\frac{1}{r_p}$ und liefert auf der Oberfläche des Leiters $\frac{\partial N}{\partial n} = c = \text{const.}$ Sie ist demnach das Potential eines durch die unendlich kleine Elektrode bei p zugeführten Stromes, von der Stärke $4\pi\sigma$, welcher den Körper in gleichmäßiger Verteilung über die Oberfläche verläßt. Die Konstante c , die ersichtlich ein Maß für den Gesamtstrom ist, kann also nicht beliebig gewählt werden; sie liefert mit der Körperoberfläche multipliziert den Wert 4π (vgl. (29) und (29')). Durch diese Funktion ist φ auf Grund des Greenschen Satzes darstellbar in der Form²²⁾:

$$(34) \quad \varphi_p = \frac{1}{4\pi} \int N \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \frac{c}{4\pi} \int \varphi d\sigma.$$

Die Integrationen sind wieder über die Oberfläche des Leiters zu erstrecken, das zweite Integral repräsentiert die beliebige additive Konstante.

Bestimmt man die in N vorkommende beliebige Konstante so,

21) *Fr. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie des Potentials, herausgegeben von *C. Neumann*, Leipzig 1887, p. 270. *Fr. Neumann* nennt N die charakteristische Funktion.

22) Nennt man die Körperoberfläche Σ , so kann statt dem zweiten Integral von (34) auch geschrieben werden $\frac{1}{\Sigma} \int \varphi d\sigma$, wonach dieses also den Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche darstellt.

daß das über die Oberfläche des Leiters erstreckte Integral

$$\int N d\sigma = 0$$

wird, so gilt, wie man mittels des Greenschen Satzes nachweist, der Vertauschungssatz:

$$(35) \quad N_p^u = N_u^p.$$

Unter Benutzung von (35) zeigt man leicht, daß, wenn man nach (34) das Potential in den Elektroden A, B, \dots mittels der durch diese Elektroden gehenden Ströme J_A, J_B, J_C ausdrückt in der Form:

$$(36) \quad \begin{cases} \varphi_A = a_{11}J_A + a_{12}J_B + a_{13}J_C + \dots \\ \varphi_B = a_{21}J_A + a_{22}J_B + a_{23}J_C + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

die Koeffizienten a_{mn} nicht voneinander unabhängig sind. Vielmehr besteht die Beziehung:

$$(37) \quad a_{mn} = a_{nm},$$

so daß bei ν Elektroden die betreffenden Potentiale sich mittels $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ voneinander unabhängigen Koeffizienten in den durch sie hindurchgehenden Strömen ausdrücken lassen²³⁾.

8. Elektroden endlicher Abmessungen. Halbraum, Kugel. Das in Nr. 6 unter a) angeführte Problem fällt mit dem entsprechenden elektrostatischen zusammen, wenn man die Begrenzung des stromdurchflossenen Körpers so wählt, daß diese, wo sie nicht von Teilen der Oberfläche der geladenen Körper gebildet wird, aus Kraftlinien besteht. Stehen nur zwei auf die Potentialdifferenz V geladene Körper einander gegenüber in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstante ϵ , so hat der, dem später vom Strom durchflossen zu denkende Teil der Anordnung eine Kapazität K von der Größe

$$K = \frac{\epsilon}{V} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo das Integral über den später als eine Elektrode fungierenden Oberflächenteil des betreffenden Körpers zu erstrecken ist. Andererseits ist der Widerstand des stromdurchflossenen Raunteiles

$$\frac{1}{W} = \frac{\sigma}{V} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo σ die Leitfähigkeit dieses Raumes ist und das Integral dieselben Grenzen hat wie das obige. Allgemein hat man demnach zwischen

²³⁾ G. Kirchhoff, Über die Messung elektrischer Leitfähigkeiten, Monatsber. der Akademie der Wiss. Berlin, Juli 1880 oder auch Ges. Werke, p. 66.

W und K den Zusammenhang²⁴⁾:

$$(38) \quad \frac{K}{\varepsilon} = \frac{1}{\sigma W}.$$

Als einfache hierzu gehörige Anordnung sei z. B. der Fall zweier konzentrischer Zylinderstücke als Elektroden erwähnt, deren Krümmungsradien r_1 und r_2 sind, während die seitliche Begrenzung von den zugehörigen Radien gebildet wird. Hier ist

$$K = \frac{\varepsilon \alpha}{\log \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{\alpha \sigma} \log \frac{r_2}{r_1},$$

wenn die Radien den Winkel α miteinander machen.

Befindet sich innerhalb eines Halbraumes I von der Leitfähigkeit σ eine kleine unendlich gut leitende kugelförmige Elektrode, durch die dem Körper der Strom J zugeführt wird und ist die zweite Elektrode unendlich groß und unendlich weit entfernt, so läßt sich das Problem der Stromverteilung in der Form b) ohne weiteres mittels eines Spiegelungsverfahrens²⁵⁾ lösen. Für das Potential erhält man innerhalb des Leiters den Wert:

$$(39) \quad \varphi_i = \frac{J}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

wenn r_1 den Abstand vom Mittelpunkt der Elektrode, r_2 den Abstand von ihrem Spiegelbild in bezug auf die Grenzebene des Leiters bedeutet. Hieraus ergibt sich für den Widerstand des Halbraumes nach (32) der Wert:

$$(40) \quad R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h} \right) \cong \frac{1}{4\pi\sigma a},$$

24) Vgl. hierzu *E. Cohn*, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, p. 155.

25) Vgl. hierzu Potentialtheorie, Art. *Burkhardt-Meyer*, II A 7b, Nr. 16 und Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans*, V 15, Nr. 13. Es tritt jetzt insofern eine Abweichung auf, als beide Bildpunkte mit demselben Zeichen genommen werden müssen.

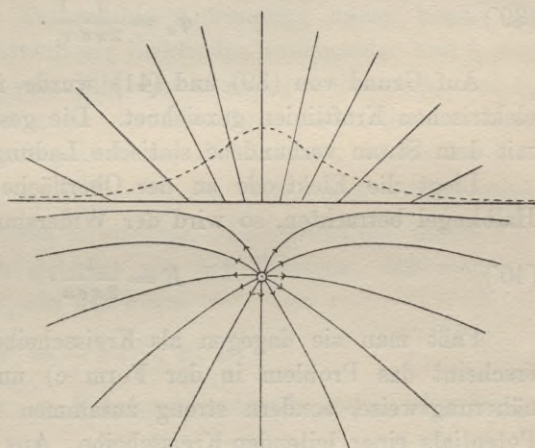


Fig. 1.

wobei a den Radius und h den Abstand der Elektrode von der Begrenzung bedeutet. Sowohl (39) wie (40) gelten nur näherungsweise, so lange $a \ll h$ ist.

Für den Fall, daß letztere Bedingung nicht zutrifft, daß man aber an der Kugelform der Elektrode festhält, kann das Problem gelöst werden durch Benutzung der bekannten Potentialverteilung²⁶⁾ zweier gleich großen gleich stark geladenen Kugeln. Die Symmetrieebene entspricht der Begrenzung des Leiters, an der die Elektrode also gespiegelt erscheint.

Das (39) entsprechende Potential im Außenraum II ist nach Nr. 2 einfach dargestellt durch

$$(39') \quad \varphi_a = \frac{J}{2\pi\sigma} \frac{1}{r_1}.$$

Auf Grund von (39) und (41) wurde in Fig. 1 der Verlauf der elektrischen Kraftlinien gezeichnet. Die gestrichelte Kurve stellt die mit dem Strom verbundene statische Ladung der Oberfläche dar.

Liegt die Elektrode an der Oberfläche und kann man sie als Halbkugel betrachten, so wird der Widerstand

$$(40') \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma a}.$$

Faßt man sie dagegen als Kreisscheibe vom Radius a auf, so erscheint das Problem in der Form c) und fällt dann nicht nur näherungsweise, sondern streng zusammen mit der Bestimmung des Potentials einer leitenden Kreisscheibe. Aus der bekannten Lösung²⁷⁾ für diesen Fall erhält man jetzt

$$(40'') \quad R = \frac{1}{4\sigma a}.$$

Das Spiegelungsverfahren läßt sich auch anwenden, wenn beide Halbräume (I und II) leiten²⁸⁾. Sind die Leitfähigkeiten σ_1 bzw. σ_2 , so erhält man in I:

$$(41) \quad \varphi_1 = \frac{J}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{r_2} \right),$$

26) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gans*, V 15, Nr. 13.

27) Das Potential der Kreisscheibe ergibt sich in elementarer Form durch Spezialisierung der betreffenden Lösung für das Ellipsoid, vgl. Potentialtheorie, Art. *H. Burkhardt-W. F. Meyer*, IIA 7b, Nr. 15. Man sehe auch Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans*, V 15, Nr. 12.

28) Für den analogen Fall der Elektrostatik (verschiedene Dielektrizitätskonstanten) vgl. Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans*, V 15, Nr. 13. Das theoretische Resultat wurde experimentell geprüft von *Joubin*, Paris C. R. 110 (1890), p. 37.

in II:

$$(41') \quad \varphi_2 = \frac{J}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{r_1},$$

und für den Widerstand

$$(42) \quad R = \frac{J}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{a} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{2h} \right).$$

Auch für mehrere Elektroden bleibt natürlich das Verfahren anwendbar. So erhält man z. B. für den Widerstand zwischen zwei Elektroden mit den Radien a bzw. b , wenn durch jede der ganze Strom hindurchgeht, den Wert:

$$(42') \quad R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2h_1} + \frac{1}{2h_2} - \frac{2}{l_1} - \frac{2}{l_2} \right),$$

ein Resultat, das in der Telegraphie Anwendung finden kann. Es bedeutet hierin l_1 den Abstand der Elektroden voneinander und l_2 den Abstand einer Elektrode vom Bild der anderen, während h_1 und h_2 die Tiefen der Elektroden unter der Oberfläche des Halbraums sind.

Bei der Kugel ist im Gegensatz zur Elektrostatik wegen der hier vorliegenden Grenzbedingung ($\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$) die *Thomsonsche* Spiegelungsmethode nicht ohne weiteres anwendbar. Die Grundlage dieses Verfahrens wird bekanntlich gebildet von der Tatsache, daß man aus dem äußeren Potential φ_a , in der Form

$$\varphi_a = \frac{1}{\varrho} F\left(\frac{a}{\varrho}, \vartheta, \omega\right)$$

geschrieben, wobei ϱ , ϑ , ω Polarkoordinaten bedeuten, das innere Potential erhält zu

$$\varphi_i = \frac{1}{a} F\left(\frac{\varrho}{a}, \vartheta, \omega\right)$$

wenn noch a den Kugelradius bedeutet²⁹⁾. Diese Transformation läßt sich nun, wie *H. Helmholtz*³⁰⁾ bemerkt, dennoch im vorliegenden Falle verwenden, um in recht eleganter Weise das Strömungsproblem (in der Form b) Nr. 6) für die Kugel zu lösen. Wird der Strom J z. B. zu- resp. abgeführt durch zwei Elektroden im Innern, so kann man als ersten Teil des Potentials im Innern die (für den unendlichen Raum gültige) Funktion

$$(43) \quad \varphi^0 = \frac{J}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

betrachten, wenn r_1 resp. r_2 die Abstände von den Elektroden bedeuten. Den bei diesem Ansatz durch die Oberfläche der Kugel hin-

29) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R Gans*, V 15, Nr. 13.

30) *H. Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 89 (1853), p. 211 und p. 253; Wissensch. Abh., Leipzig 1888, p. 494.

durchgehenden Strom kann man nun, was den Außenraum anbelangt, kompensieren durch den entgegengesetzten, von einer „elektromotorischen Oberflächenbelegung“ der Kugel erzeugten, welche als elektrische Doppelschicht aufgefaßt werden kann. Setzt man für das Potential dieser Doppelschicht im Außenraum, entsprechend ihrer Entstehung durch Zusammenrücken zweier einfacher Belegungen:

$$\Phi = \frac{a^2}{\varrho^2} f' \left(\frac{a}{\varrho}, \vartheta, \omega \right),$$

so kann, da für $r > a$ überall $\Phi = \varphi^0$ sein soll, f aus (43) durch Integration ohne weiteres bestimmt werden. Die einer Doppelschicht angepaßten Transformationsformeln, welche aus den oben angegebenen für eine einfache elektrische Belegung geltenden durch Differentiation hervorgehen, ergeben dann ohne weiteres für den Zusatz φ^1 , den man zu φ^0 im Innern der Kugel hinzufügen muß, damit die Grenzbedingung $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=a} = 0$ erfüllt wird, die Formel:

$$(43') \quad \varphi^1 = f \left(\frac{\varrho}{a}, \vartheta, \omega \right) + \frac{\varrho}{a} f' \left(\frac{\varrho}{a}, \vartheta, \omega \right).$$

Liegen die beiden Elektroden z. B. auf der Oberfläche der Kugel in den Punkten $\vartheta = \vartheta_1, \omega = 0$ und $\vartheta = \vartheta_2, \omega = 0$, so ergibt sich für φ^1 die Formel:

$$(44) \quad \varphi^1 = \frac{J}{4\pi\sigma} \log \frac{a + r_2 - \varrho \cos \alpha_2}{a + r_1 - \varrho \cos \alpha_1},$$

wenn noch α_1 resp. α_2 die Winkel bedeuten, die der nach dem Aufpunkt gezogene Strahl mit den beiden durch die Elektroden gehenden Strahlen bildet. Die Lösung des vorliegenden Problems kann man auch durch Entwicklung nach Kugelfunktionen erhalten. Die betreffenden Reihen können nachher durch elementare Funktionen summiert werden. Die Aufgabe wurde in der Form b) gelöst von *W. M. Hicks*³¹⁾ und *R. Felici*³²⁾; die *Neumannsche* charakteristische Funktion ist angegeben bei *C. Neumann*³³⁾. (Man beachte die verschiedenen Werte für den Widerstand, die sich ergeben, je nachdem das Problem in der Form b) oder c) angesetzt wird.)

31) *W. M. Hicks*, Messenger of mathematics 12 (1883), p. 183.

32) *R. Felici*, Tortolini Ann. 1854, p. 270. Vgl. auch Fortschritte der Phys. 10 (1854), p. 548.

33) *C. Neumann*, Vorles. über die Theorie des Potentials von *F. Neumann*, Leipzig 1887, p. 273. Vgl. auch *A. Beer*, Einleitung in die Elektrostatik usw., Braunschweig 1865, p. 356 und *Riemann-Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. Aufl., Braunschweig 1900, 1, p. 457.

9. Kirchhoffs Methode zur Bestimmung der Leitfähigkeit.

Parallelopiped. Kreiszyylinder. Um die Leitfähigkeit zu bestimmen, benutzt *Kirchhoff*³⁴⁾ die durch nebenstehende Figur veranschaulichte Methode.

K ist der zu untersuchende Körper, P ein bekannter Widerstand, G ein Differentialgalvanometer, E eine Stromquelle. Der Strom wird dem Körper bei 1 zugeführt, von 2 führt eine Leitung durch P zum Element zurück; an zwei Punkten 3 und 4 des Körpers und an den Enden des Vergleichswiderstandes P sind die beiden Zweige des Differentialgalvanometers angelegt. Die Widerstände in diesen Zweigen

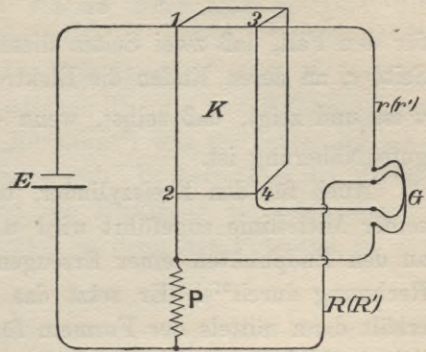


Fig. 2.

werden zweimal so abgeglichen, daß die Nadel des Galvanometers keinen Ausschlag zeigt. Bezeichnet man die hierzu nötigen Widerstände mit r und R bzw. r' und R' und nennt ϱ die Potentialdifferenz zwischen 3 und 4, dividiert durch den durch 1 und 2 hindurchgehenden Strom, für den Fall, daß zwischen 3 und 4 kein äußerer Strom kreist, so hat man zur Berechnung von ϱ auf Grund von Nr. 7 die Beziehung

$$(45) \quad \frac{\varrho}{P} = \frac{r' - r}{R' - R}.$$

Um die Leitfähigkeit zu bestimmen, muß noch ϱ durch die Dimensionen des Körpers ausgedrückt werden. *G. Kirchhoff* führte diese Rechnung zuerst aus³⁵⁾ für ein rechtwinkliges Parallelopiped auf Grund der von *Grenhill*³⁶⁾ angegebenen Lösung des betreffenden Strömungs-

34) *G. Kirchhoff*, Berlin Monatsber. der Akad. d. Wiss. 1. Juli 1880 oder auch Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 66. Angewandt wurde die Methode von *G. Kirchhoff* und *G. Hansemann*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 406; vgl. auch *G. Kirchhoff*, Ges. Werke, Nachtrag, Leipzig 1891, p. 1. Die Methode wurde in etwas abgeänderter Form benutzt von *K. Strecker*, Ann. Phys. Chem. 25 (1885), p. 456, zur Auswertung der *Siemensschen* Quecksilbereinheit des Widerstandes.

35) *G. Kirchhoff*, Berlin Monatsber. der Akad. der Wiss. 1. Juli 1880 und Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 71.

36) *Grenhill*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. 1879, p. 293 und auch *H. Niebour*, Diss. Leipzig 1886; *Grunerts Archiv* (2) 4 (1886), p. 337, sowie *Appel* und *A. Chervet*, C. R. 98 (1884), p. 98 und *A. Chervet*, Ann. de chim. et phys. (6) (1884), p. 259. Vgl. für den analogen Fall der Elektrostatik: Elektrostatik und Magneto-

problems, welche durch fortgesetzte Spiegelung der Pole an den Seitenflächen erhalten und in Θ -Reihen umgerechnet werden kann. Er fand die Näherungsformel:

$$(46) \quad \varrho = \frac{1}{\sigma a} \frac{c}{a} \left(1 - \frac{a}{c} 0,7272 \right)$$

für den Fall, daß zwei Seiten dieselbe Länge a haben und die dritte Seite c , an deren Enden die Elektroden angelegt werden, groß gegen a ist und zeigt, daß selbst, wenn $\frac{c}{a} = 2$ wird, (46) noch eine sehr gute Näherung ist.

Auch für den Kreiszyylinder, bei dem der Strom an den Enden seiner Mittellinie zugeführt wird und die beiden anderen Elektroden an den Endpunkten einer Erzeugenden liegen, führte er später die Rechnung durch³⁷⁾. Er setzt das Problem in der Form c) an und erhält dann mittels der Formeln für die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach *Besselschen* Funktionen, indem er noch die Größe der Elektroden nur in erster Näherung berücksichtigt, für das Potential den Ausdruck:

$$(47) \quad \varphi = \frac{Ja}{\pi\sigma} \left\{ \frac{z}{a} + \sum \frac{\sin \lambda_v \frac{z}{a} J_0 \left(\lambda_v \frac{r}{a} \right)}{\cos \lambda_v \frac{c}{a} \lambda_v J^2(\lambda_v)} \right\}.$$

Hierin bedeutet z eine Koordinate in Richtung der Zylinderachse von der Mittelebene aus gemessen, r den senkrechten Abstand von dieser Achse, a den Radius, c die Höhe des Zylinders, J_0 die *Bessel*-sche Funktion nullter Ordnung, während unter λ_v die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung

$$(48) \quad J_0'(\lambda) = 0$$

zu verstehen sind. Aus (47) erhält er dann für ϱ die Näherung:

$$(49) \quad \varrho = \frac{1}{\pi\sigma a} \frac{c}{a} \left(1 - \frac{a}{c} \cdot 0,76958 \right),$$

die ebenso wie (46) schon einen sehr genauen Wert ergibt, wenn c nur ein mäßiges vielfaches von a ist.

10. Nobilische Ringe³⁸⁾. Läßt man in gewissen über einer gut gereinigten Metallplatte aufgeschichteten Elektrolyten den Strom durch

37) *G. Kirchhoff*, Berlin Monatsber. d. Akad. d. Wiss. 26. April 1883, p. 519, und Ges. Werke, Nachtrag, Leipzig 1891, p. 54. Die Strömung in einem Zylinder wurde schon vorher behandelt von *B. Riemann* in seiner Abhandlung über die Nobilischen Ringe, Ann. Phys. Chem. 95 (1855), p. 130; Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 54 und von *H. Weber*, J. f. Math. 75 (1872), p. 75 und 76 (1873), p. 1.

38) *Nobili*, Memorie et osservazione edite et inedite, Firenze 1 (1834), p. 56; Bibliothèque universelle de Genève, Anc. Sér. sciences et arts 59 (1835), p. 263 und p. 416.

eine Spitze ein- und durch die Platte austreten, so entsteht auf dieser ein Niederschlag, dessen Dicke mit zunehmendem Abstände von der positiven Elektrode abnimmt. Dieser zeigt bei auffallendem Lichte die *Newtonschen* Farbenringe und scheint daher sehr geeignet, die Gesetze der Stromverteilung experimentell zu prüfen. Dieses wurde ausgeführt von *E. Becquerel*³⁹⁾, *du Bois-Reymond* und *P. Beetz*⁴⁰⁾, die sich aber bei dem Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung auf unrichtige Formeln stützten. *B. Riemann*⁴¹⁾ war der erste, der eine mathematisch einwandfreie Berechnung gab. Er betrachtet die Metallplatte als vollkommen leitend und die Elektrode als punktförmig; durch das Spiegelungsverfahren erhält er dann das Potential in der Form:

$$(50) \quad \varphi = \frac{J}{4\pi\sigma} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2mh - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2mh + a)^2}} \right\}.$$

Hierbei bedeutet z eine Koordinate senkrecht zur Platte, r den senkrechten Abstand von der durch die Elektrode hindurchgehenden z -Achse, h die Dicke der Flüssigkeitsschicht und a die Höhe der Elektrode oberhalb der Platte.

Für die Dicke der Ringe ist nach dem *Faradayschen* Gesetz die Stromdichte an der Platte maßgebend, die, wenn a sowohl wie die betrachteten Entfernungen von der z -Achse klein gegen h sind, durch die Formel:

$$(51) \quad i = \frac{J}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dargestellt wird, da man in diesem Falle nur die zwei ersten Glieder der Reihe (50) zu berücksichtigen braucht. Liegt dagegen die Elektrode in der Oberfläche der Flüssigkeit und will man die Stromdichte in größerer Entfernung von der z -Achse kennen, so ist es vorteilhaft φ in eine Reihe zu entwickeln, die nach $\sin \nu\pi \frac{z}{2h}$ fortschreitet. Die Koeffizienten dieser Reihe werden *Besselsche* Funktionen, die man im vorliegenden Fall $\left(\frac{r}{h} \gg 1\right)$ durch ihre semikonvergenten Entwicklungen ersetzen kann. Die Vernachlässigung der höheren Glieder der *Fourierschen* Reihe liefert schließlich für i den Wert⁴²⁾:

$$(52) \quad i = \frac{J}{2} \frac{1}{h\sqrt{r h}} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{r}{h}}.$$

39) *E. Becquerel*, Ann. chim. phys. (3) 13 (1845), p. 342.

40) *E. du Bois-Reymond* und *W. Beetz*, Ann. Phys. Chem. 71 (1847), p. 71.

41) *B. Riemann*, Ann. Phys. Chem. 95 (1855), p. 130 und Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 54.

42) Vgl. auch *Riemann-Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der

Durch spätere Versuche von *A. Guéhard*⁴³⁾ wurde das Interesse für diesen Gegenstand wieder neu erweckt. Dieser erzeugte *Nobilische* Kurvensysteme in der oben angegebenen Art unter Zuhilfenahme mehrerer Elektroden, sah die so erhaltenen Figuren aber als identisch an mit den Äquipotentialkurven der Flächenströmung⁴⁴⁾. Diese offenbar irrige Annahme wurde dann sowohl theoretisch wie experimentell widerlegt, u. a. von *W. Voigt*⁴⁵⁾.

Bei den Versuchen zeigte sich, wie übrigens schon *Riemann* vermutet hatte, daß die Resultate getrübt wurden durch die bei wachsender Dicke der niedergeschlagenen Schicht wachsende Polarisation der Metallplatte, die bei der Rechnung nicht berücksichtigt war. In dieser Hinsicht wurde die Theorie vervollständigt von *H. Weber*⁴⁶⁾, der versuchsweise eine Polarisation proportional der erzeugenden Stromdichte einführte, so daß die Grenzbedingung an der Platte von $\varphi = \text{const.}$ in

$$(53) \quad h \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi = 0$$

übergeht, in der h eine durch den Versuch zu bestimmende Konstante bedeutet. *Roiti*⁴⁷⁾ dagegen macht die Annahme, daß die Gegenpolarisation nur bis zu einem gewissen Maximum ansteigen kann. Im stationären Zustand kann dann nur durch diejenigen Teile der Platte ein Strom hindurchgehen, in denen dieses Maximum erreicht ist; in den übrigen Teilen der Platte hebt die Gegenpolarisation das Potential der Stromverteilung auf, ohne dabei ihren Maximalwert zu erreichen. Die Begrenzung dieses Teiles bestimmt sich erst durch die

math. Physik, Braunschweig 1900, p. 460. Die Formel (52) wurde geprüft von *W. Beetz* in einer zweiten experimentellen Arbeit, *Ann. Phys. Chem.* 97 (1856), p. 22.

43) *A. Guéhard*, *Paris C. R.* 90 (1880), p. 984; 93 (1881), p. 582; 93 (1881), p. 792; 94 (1882), p. 437; 94 (1882), p. 851; 96 (1883), p. 1424; *Journal de physique* (2) 1 (1882), p. 205; 2 (1883), p. 87; 2 (1883), p. 335.

44) Vgl. für die Strömung in Flächenleitern, dieser Art. C, Nr. 13 u. f.

45) *W. Voigt*, *Ann. Phys. Chem.* 17 (1882), p. 257 und 19 (1883), p. 183, wo auch über (zum Teil unter Mitwirkung von *Werner*) ausgeführte Versuche berichtet wird. Vgl. auch *H. Meyer*, *Diss. Göttingen* 1880; *Gött. Nachr.* 1882, p. 666; *Ann. Phys. Chem.* 18 (1883), p. 136; *E. Mach*, *Wien Ber.* (2) 86 (1882), p. 8; *Ann. Phys. Chem.* 17 (1882), p. 858. *A. Elsas* bespricht die den *Guéhard'schen* Versuchen genau entsprechende Formulierung des mathematischen Problems, ohne es aber zu lösen, *Ann. Phys. Chem.* 29 (1886), p. 331 und 30 (1887), p. 620.

46) *H. Weber*, *Journ. f. Math.* 75 (1872), p. 75 und 76 (1873), p. 1.

47) Vgl. *Riemann-Weber*, *Die partielle Differentialgleichung der mathematischen Physik*, Braunschweig 1900, p. 468 ff.

vollständige Lösung des mathematischen Problems. Ausgeführt wurde die Berechnung für den Fall einer unendlich hohen Flüssigkeitsschicht und einer punktförmigen Elektrode von *R. Gans*⁴⁸⁾. Der Teil der Platte, durch den der Strom im stationären Zustand hindurchgeht, ist ein Kreis, dessen Radius a sich bestimmt aus der Gleichung:

$$(54) \quad \frac{a}{c} = \cotg \frac{2\pi\sigma\varphi_0 a}{J},$$

wobei c den Abstand der Elektrode von der Platte, φ_0 den Unterschied der Potentiale innerhalb des betrachteten Kreises und demjenigen eines unendlich weit entfernten Punktes der Platte bedeutet und J der ganze durch die Elektrode hindurchgehende Strom ist.

Eine Verbesserung des *Riemannschen* Resultates durch Mitberücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit der Platte erzielten *Wild*⁴⁹⁾ und *Ditscheiner*⁵⁰⁾.

11. Inhomogene Leiter. Bringt man innerhalb eines unendlich ausgedehnten Leiters von der Leitfähigkeit σ_1 , der in der positiven x -Richtung von einem konstanten (spezifischen) Strom i durchflossen wird, eine Kugel von der Leitfähigkeit σ_2 und dem Radius a an, so bekommt man das resultierende Stromfeld, indem man zu dem ursprünglichen Potential

$$(55) \quad \varphi_1 = -\frac{i}{\sigma_1} x$$

noch ein Zusatzpotential φ_2 addiert. Dieses ist im Innern der Kugel durch die Gleichung:

$$(56) \quad \varphi_2 = \varphi_2^i = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \frac{i}{\sigma_1} x$$

dargestellt; außerhalb der Kugel gilt:

$$(56') \quad \varphi_2 = \varphi_2^a = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \frac{i}{\sigma_1} \frac{a^3}{r^3} x.$$

Der Nullpunkt der x -Achse ist hierbei im Mittelpunkt der Kugel gedacht, während r den Abstand von diesem Mittelpunkt bedeutet.

Allgemeinere Fälle kann man behandeln durch Entwicklung nach Kugelfunktionen⁵¹⁾.

Sind mehrere Kugeln unregelmäßig in den Leiter verteilt in solchem Abstände, daß sie sich gegenseitig nicht mehr merklich beein-

48) *R. Gans*, Zeitschr. Math. Phys. 49 (1903), p. 298 und 53 (1906), p. 434.

49) *Wild*, Neue Denkschr. d. Schweiz. Nat. Ges. 15 (1857), p. 1.

50) *L. Ditscheiner*, Wien Ber. 78 (1878), p. 93.

51) Vgl. *J. C. Maxwell*, Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Bd. 1 p. 398, Art. 10 u. f.

flussen, so wird dieser sich verhalten, als ob seine Leitfähigkeit von dem Werte σ_1 in

$$(57) \quad \sigma_1' = \frac{2\sigma_2 + \sigma_1 + p(\sigma_2 - \sigma_1)}{2\sigma_2 + \sigma_1 - 2p(\sigma_2 - \sigma_1)} \sigma_1$$

verändert ist⁵²⁾, wenn unter p das Verhältnis der Summe der Kugelvolumina zum Inhalt des ganzen Körpers verstanden wird.

Das einfache obige Resultat reicht nicht mehr aus, wenn der Leiter ein Elektrolyt ist, da dann an der Oberfläche der eingebetteten Körper durch den Strom Ablagerungen zustande kommen, die eine Gegenpolarisation verursachen. Auf Grund der *Roitischen* Annahme (vgl. das Ende von Nr. 10) wurde dieser Fall für einen im Elektrolyten eingebetteten Zylinder theoretisch untersucht von *Volterra*⁵³⁾. Eine qualitative Untersuchung über die verschiedenen eigenartigen, durch die Polarisation verursachten Erscheinungen gibt *J. Stark*⁵⁴⁾.

*Maxwell*⁵⁵⁾ untersucht auch noch den Fall eines geschichteten Leiters. Er zeigt, daß, wenn das Verhältnis von Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit für die verschiedenen Schichten nicht konstant ist, ein solches Dielektrikum Rückstandserscheinungen zeigen wird, analog den bei Kondensatoren beobachteten.

12. Näherungsweise Berechnung des Widerstandes. Draht von variablem Querschnitt. Übergangswiderstand. Hat man einen Leiter, dem der Strom durch zwei vollkommen leitende Elektroden zugeführt wird (Formulierung a) Nr. 6), so gelingt die strenge Bestimmung von φ und damit die Berechnung des Widerstandes nur in den wenigsten Fällen. Eine oft sehr nützliche Methode zur näherungsweisen Berechnung gibt *Rayleigh*⁵⁶⁾. Das Prinzip der Methode beruht auf der plausibelen Tatsache, daß der Widerstand eines solchen Leiters zu- bzw. abnimmt, wenn die Leitfähigkeit stellenweise erniedrigt bzw. erhöht wird. Man kann dies beweisen, indem man zu einer Variation $\delta\sigma$ von σ und der zugehörigen $\delta\varphi$ von φ die entsprechende Variation δQ der *Jouleschen* Wärmeentwicklung berechnet in der

52) *J. C. Maxwell*, l. c. p. 403, Art. 314.

53) *V. Volterra*, Torino Atti 18 (1882), p. 133 und p. 147.

54) *J. Stark*, Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 246, wo auch die auf diesen Gegenstand sich beziehende Literatur zusammengestellt ist.

55) *J. C. Maxwell*, Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Bd. 1, p. 407, Art. 319. Vgl. über die Leitfähigkeit von Dielectrica und die verschiedenen vorgeschlagenen Theorien *E. v. Schweidler*, Ann. Phys. Chem. 24 (1907), p. 711 (am Schluß der Arbeit findet sich eine ausgedehnte Literaturangabe).

56) *Lord Rayleigh*, Phil. Trans. 161 (1870), p. 77. Vgl. auch *J. C. Maxwell*, Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Bd. 1, p. 390, Art. 306.

Form:

$$(57') \quad \delta Q = \delta \int \sigma \operatorname{grad}^2 \varphi dS = \int \delta \sigma \operatorname{grad}^2 \varphi dS + 2 \int \sigma (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \delta \varphi) dS.$$

Der Greensche Satz angewandt auf φ und $\delta \varphi$ zeigt dann, daß das letztere Integral verschwindet, so daß aus (57') die Behauptung ohne weiteres folgt. Indem man also die Stromlinien in berechenbare Bahnen zwingt durch Anbringung eines Systems vollkommen leitender resp. vollkommen isolierender Flächen, kann man den Widerstand zwischen zwei Grenzen einschließen.

Um die Methode auf einen langen Draht von variablem Querschnitt und der Leitfähigkeit σ anzuwenden, denke man sich diesen entstanden durch Rotation einer Kurve $a = f(z)$ um die z -Achse, so daß a also den jeweiligen Radius des Drahtes bedeutet. Nimmt man jetzt als unendlich gut leitende Flächen Ebenen senkrecht zur z -Achse an, so erhält man für den Widerstand eines Stückes von der Länge l den zu kleinen Wert:

$$(58) \quad R_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{A}{\pi},$$

wobei A durch die Gleichung:

$$(58') \quad A = \int_0^l \frac{dz}{a^2}$$

definiert ist.

Nimmt man andererseits als vollkommen isolierende Flächen die der seitlichen Begrenzung ähnlichen Rotationsflächen an, $\varrho = \theta f(z)$, wobei $0 < \theta < 1$ und ϱ den senkrechten Abstand von der Mittellinie bedeutet, so erhält man den zu hohen Wert:

$$(59) \quad R_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{A} \right),$$

wobei B durch die Gleichung

$$(59') \quad B = \int_0^l \left(\frac{da}{dz} \right)^2 \frac{dz}{a^2}$$

definiert ist.

Gleichung (58) entspricht dem gewöhnlich angewandten Verfahren, das also immer einen zu kleinen Wert ergibt. Je langsamer sich der Querschnitt in der z -Richtung ändert, desto geringer ist nach (59') die obere Grenze für den Fehlbetrag.

Eine zweite Anwendung gestattet das Prinzip bei der Berechnung des Übergangswiderstandes, d. h. des Zusatzwiderstandes, den man berücksichtigen muß, wenn ein kreisförmiger Draht von der Länge l und dem Radius a in eine größere Metallmasse endet.

Den ersten zu kleinen Wert R_1 für den Widerstand erhält man,

wenn der Draht an seiner Ansatzstelle durch eine vollkommen leitende Kreisscheibe abgeschlossen wird. Betrachtet man die Metallmasse als unendlich groß, so ist das Potential φ hier so zu bestimmen, daß es innerhalb der Scheibe einen konstanten Wert annimmt und auf dem Rest der horizontal gedachten Begrenzung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ liefert. Es ist also dasselbe, wie das elektrostatische Potential einer geladenen leitenden Kreisscheibe. Aus der bekannten Lösung für diesen Fall erhält man nach (32) für den Widerstand den ersten zu kleinen Wert:

$$(60) \quad R_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{1}{4a} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} \left(l + \frac{\pi}{4} a \right).$$

Den zweiten zu großen Wert R_2 erhält man, indem der Strom im Innern des Drahtes durch isolierende Zylinderflächen gezwungen wird, bis zur Ansatzstelle parallel zur Achse zu fließen. Das Potential in der Metallmasse bestimmt sich jetzt aus der Bedingung, daß innerhalb der Kreisscheibe vom Radius a

$$(61) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{J}{\pi a^2 \sigma} = \text{const.}$$

(J = Gesamtstrom) und auf dem Rest der Begrenzung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ ist.

Es ist nunmehr nicht nötig, das Potential wirklich zu bestimmen. Bedeutet nämlich ΔR_2 den Widerstand des Halbraumes, so gilt nach (31')

$$(62) \quad \Delta R_2 J^2 = \sigma \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \frac{J}{\pi a^2} \int \varphi d\sigma,$$

wobei das Integral über die Kreisscheibe zu erstrecken ist. Dieses läßt sich ohne Mühe ausführen und liefert für den ganzen Widerstand den Wert:

$$(63) \quad R_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{8}{3\pi^2 a} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} \left(l + \frac{8}{3\pi} a \right).$$

Nach (60) und (63) erhält man also die Widerstandskorrektion, indem man den Draht um den Bruchteil α seines Halbmessers verlängert denkt, wobei α liegt zwischen⁵⁷⁾

$$(64) \quad \frac{\pi}{4} = 0,785 \quad \text{und} \quad \frac{8}{3\pi} = 0,849.$$

57) Lord Rayleigh erhielt London Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 70 durch weitere Näherung als obere Grenze 0,824 statt 0,849. Vgl. auch Scientific Papers, Cambridge 1899, I, p. 272. Experimentelle Bestimmungen gaben F. Kohlrausch, Ann. Phys. Chem. 35 (1888), p. 718 und W. Schrader, Ann. Phys. Chem. 44 (1891), p. 222 sowie Diss. Straßburg 1891.

C. Flächenleiter.

13. Grundgleichungen. Übliche Fragestellung. In diesem Abschnitt haben wir solche Leiter zu betrachten, bei denen eine Dimension klein gegen die übrigen ist. Wir denken uns die begrenzenden Flächen dieser Körper beschrieben durch die Endpunkte eines kurzen Liniestückchens von der Länge λ , das sich mit einem seiner Punkte über eine gewisse geometrische Fläche nach allen Richtungen bewegt hat, wobei es stets senkrecht zu dieser gerichtet war. In Übereinstimmung mit unserer Annahme über die Größenverhältnisse interessieren wir uns nur für die Mittelwerte der elektrischen Größen auf dem betreffenden Liniestückchen. Bezeichnen wir diese Mittelbildung vorübergehend durch einen horizontalen Strich, so folgt aus (2) mit Berücksichtigung der Grenzbedingung (7):

$$(65) \quad \text{div } \sigma \text{ grad } \lambda \bar{\varphi} = \text{div } \sigma \lambda \bar{\mathcal{E}}^e,$$

wobei die Operationen div und grad zweidimensional in der zu grunde gelegten geometrischen Fläche aufzufassen sind. Eine Strömungskomponente senkrecht zur Fläche kann nach (7) und (III) nicht auftreten, so lange die Komponente von \mathcal{E}^e in der Dickenrichtung der Platte als unveränderlich betrachtet werden kann.

Gewöhnlich sieht man von dem Vorhandensein eingepprägter elektrischer Kräfte ganz ab und nimmt sowohl σ wie λ für die Platte als konstant an; in diesem Falle hat man statt (65):

$$(66) \quad \text{div grad } \bar{\varphi} = 0.$$

Wo zwei Platten mit verschiedenen Leitfähigkeiten aneinander stoßen, gelten die Grenzbedingungen (10) und (11) in leicht ersichtlicher Spezialisierung.

Indem man von einer genauen Beschreibung des Strömungsfeldes in der Nähe der Elektroden a, b, \dots absieht, kann man diese als punktförmig annehmen. An diesen Stellen muß sich das Potential dann verhalten wie $A \log r_a, B \log r_b, \dots$, unter r den auf der Fläche gemessenen Abstand vom betreffenden Punkt verstanden. Die Konstanten A, B, \dots müssen bei einer endlichen Platte in der Summe Null ergeben (vgl. (29')). Auch linienförmige Elektroden hat man in Betracht gezogen; an diesen muß das Potential konstante Werte annehmen, wenn sie aus unendlich gut leitendem Material bestehen.

14. Zusammenhang mit der Theorie der Flächen⁵⁸⁾. Denkt man sich auf einer Fläche die Lage eines beliebigen Punktes definiert

58) Die hier gewählte Darstellung entspricht den Ausführungen von *F. Klein*, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig

durch zwei stetig veränderliche Parameter p und q , so daß das Linienelement in der Form

$$(67) \quad ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$$

dargestellt werden kann, so nimmt (66) die Gestalt an:

$$(68) \quad \frac{\partial}{\partial p} \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial p} - F \frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial q} - F \frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0.$$

Definiert man eine Funktion φ' durch die Gleichung

$$(69) \quad d\varphi' = - \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial q} - F \frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} dp + \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial p} - F \frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} dq,$$

was nach (68) möglich ist, so nennt man diese Funktion das zu φ „konjugierte Potential“ und bezeichnet $\Phi = \varphi + i\varphi'$ als „komplexe Funktion auf der Fläche“. Man zeigt leicht, daß φ' derselben Differentialgleichung (68) wie φ genügt. Von größter Wichtigkeit für die Theorie ist nun die Bemerkung, daß, wenn man die unabhängigen Variablen p und q so wählt, daß $p + iq$ selbst eine komplexe Funktion der Fläche ist, die Differentialgleichung die einfache Form

$$(70) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0$$

annimmt. Zu gleicher Zeit wird $E = G$ und $F = 0$, so daß zwischen φ und φ' die Beziehungen

$$(71) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \varphi'}{\partial q},$$

$$(71') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = - \frac{\partial \varphi'}{\partial p}$$

bestehen; das Quadrat des Linienelements wird einfach

$$(72) \quad ds^2 = E(dp^2 + dq^2).$$

Die Linien $p = \text{const.}$, resp. $q = \text{const.}$ bilden also ein isometrisches Kurvensystem auf der Fläche.

(71) und (71') zeigen, daß die Funktionen der Fläche analytische Funktionen voneinander sind; (72) zeigt, daß, wenn man

$$p + iq = x + iy$$

setzt, die Fläche konform auf die Ebene abgebildet wird. Man kann also einerseits, wenn eine konforme Abbildung der Fläche auf die

1881 und Vorlesung über „Riemannsche Flächen“, Sommersemester 1891—92, der seinerseits an *E. Beltrami*, Sulla teoria generale di parametri differenziali, Bologna Mem. (2) 8 (1868), p. 549 anknüpft. Vgl. übrigens Enc. III D 6a, Art. A. Vofß, Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander.

Ebene bekannt ist, die Differentialgleichung für φ in die einfache Form (70) schreiben; andererseits wird durch die experimentelle Bestimmung irgend einer zu einer Strömung gehörigen Potentialverteilung die konforme Abbildung der Fläche auf die Ebene geleistet⁵⁹).

15. Ebene Platten. Da $z = x + iy$ eine „Funktion der Ebene“ ist, erscheint die Differentialgleichung für ebene Platten in der einfachen Form⁶⁰)

$$(70') \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

die Differentialgleichung des logarithmischen Potentials. Betrachtet man wieder die Kombination $\varphi + i\varphi' = \Phi$, so ist die einfachste Lösung

$$(73) \quad \Phi = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log(z - z_0);$$

sie entspricht einer einfachen Stromquelle im Punkte $x = x_0, y = y_0$, durch die der Strom J in die Platte eintritt. Sind mehrere Elektroden vorhanden, so besteht Φ aus einer Summe von Gliedern der Form (73).

Natürlich kann man sich die unendliche Ebene längs einer Stromlinie ($\varphi' = \text{const.}$) durchgeschnitten denken und damit zu dem Fall einer begrenzten ebenen Platte übergehen⁶¹). Im Prinzip hiervon nicht verschieden aber direkter ist die Konstruktion der Lösung für eine begrenzte Platte mittels der Abbildungsmethode⁶²). Der einfachste Fall ist der der Halbebene, dessen Lösung als Grundlage dienen kann. Denkt man sich diese begrenzt durch die x -Achse, so erhält man die Lösung für zwei Elektroden in den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 , durch die der Strom J in die Platte ein- bzw. austritt, indem man in der unteren Halbebene die durch Spiegelung an der x -Achse entstehenden Elektroden in den Punkten $x_0, -y_0$ und $x_1, -y_1$ zu den gegebenen hinzufügt. Die Funktion Φ erhält dann die

59) Auf diesen Zusammenhang wurde wohl zuerst von *G. Kirchhoff* hingewiesen, Monatsber. d. Akad. d. Wiss. Berlin (1875); Ges. Abh., Leipzig 1882, p. 56.

60) Die Differentialgleichung (70') findet sich zuerst bei *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497. Man vgl. auch *W. Smaasen*, Ann. Phys. Chem. 69 (1846), p. 161.

61) Eingehend werden die Verhältnisse bei mehreren Polen in der unendlichen Ebene untersucht von *C. C. Foster* und *O. J. Lodge*, Phil. Mag. (49) 4 (1875), p. 385; (50) 4 (1875), p. 475; *O. J. Lodge* (1) 5 (1876), p. 373.

62) Auf zahlreiche Beispiele wurde die Methode angewandt von *Holz Müller*, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882.

Form⁶³⁾

$$(74) \quad \Phi = -\frac{J}{2\pi\lambda\sigma} \left(\log \frac{z-z_0}{z-z_1} + \log \frac{z-\bar{z}_0}{z-\bar{z}_1} \right),$$

wobei der horizontale Strich bedeutet, daß in der betreffenden Größe i mit $-i$ zu vertauschen ist.

Da auf der Begrenzung ($y=0$) der imaginäre Teil von Φ konstant ist, erhält man die Lösung für eine Platte, die durch irgend eine andere Kurve begrenzt wird, indem man die Halbebene auf das Innere des von der betrachteten Kurve begrenzten Gebietes abbildet, so daß die reelle Achse der neuen Begrenzung entspricht. Für den Kreis mit dem Radius a geschieht das z. B. durch die gebrochene lineare Transformation⁶⁴⁾:

$$(75) \quad \xi = \xi + i\eta = a \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \text{bzw.} \quad z = i \frac{1-\xi/a}{1+\xi/a}.$$

Aus (74) erhält man dann, unter Weglassung einer belanglosen Konstante, für Φ den Wert:

$$(76) \quad \Phi = -\frac{J}{2\pi\lambda\sigma} \left(\log \frac{\xi-\xi_0}{\xi-\xi_1} + \log \frac{\xi-\xi'_0}{\xi-\xi'_1} \right),$$

wenn $\xi_0, \xi_1, \xi'_0, \xi'_1$ die Punkte bedeuten, die bei der Transformation aus $z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1$ hervorgehen. Aus (75) folgt, daß ξ_0 und ξ'_0 bzw. ξ_1 und ξ'_1 harmonische Punkte in bezug auf den Kreis mit dem Radius a sind. Sie liegen also auf einem vom Mittelpunkt ausgehenden Strahl, während das Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkt gleich a^2 ist.

63) Vgl. z. B. F. Auerbach, Ann. Phys. Chem. 3 (1878), p. 498.

64) Die Lösung für den Kreis wurde zuerst angegeben und experimentell geprüft für den Fall, daß die Elektroden auf der Begrenzung liegen, von G. Kirchhoff, Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 1 und Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497. In einer zweiten Abhandlung Ann. Phys. Chem. 67 (1846), p. 344 gibt er statt der in der vorher genannten Arbeit gebrauchten Methode der direkten Potentialbestimmung ein zweites Verfahren an, beruhend auf der magnetischen Wirkung der Strömung auf eine kleine in der Nähe der Platte aufgehängte Magnetnadel.

Das Resultat für einen Kreisring erhält L. Ditscheiner, Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 282, durch fortgesetzte Spiegelung.

Die von zwei exzentrischen Kreisen begrenzte Platte wird behandelt von E. Jochmann, Zeitschr. Math. Phys. 1865, p. 48 und 1865, p. 89.

Der Fall einer aus zwei gleichen Hälften verschiedener Materialien bestehenden Kreisplatte wird theoretisch und experimentell untersucht von G. Quincke, Ann. Phys. Chem. 7 (1856), p. 382. (Vgl. für das angewandte abgeänderte Spiegelungsverfahren den analogen Fall in Nr. 8.)

Die Strömung in einer unendlichen Platte mit einem von einer Ellipse begrenzten anders leitenden Teil behandelt J. Haubner, Wien Ber. (2) 87 (1883), p. 412.

Die Lösung für einen unendlich langen Streifen von der Breite a , in dem zwei Elektroden vorhanden sind, durch die der Strom ein- bzw. ausgeführt wird, erhält man, indem man die schon betrachtete Halbebene mittels der Transformation⁶⁵⁾

$$(77) \quad \pi \frac{\xi}{a} = \log z \quad \text{bzw.} \quad z = e^{\pi \frac{\xi}{a}}$$

auf den Streifen in der ξ -Ebene abbildet. Hiernach wird:

$$(78) \quad \Phi = - \frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \left(\log \frac{e^{\pi \frac{\xi}{a}} - e^{\pi \frac{\xi_0}{a}}}{e^{\pi \frac{\xi}{a}} - e^{\pi \frac{\xi_1}{a}}} + \log \frac{e^{\pi \frac{\xi}{a}} - e^{\pi \frac{\xi_0'}{a}}}{e^{\pi \frac{\xi}{a}} - e^{\pi \frac{\xi_1'}{a}}} \right),$$

wobei nach (77)

$$(79) \quad \xi_0' = \bar{\xi}_0 \quad \text{und} \quad \xi_1' = \bar{\xi}_1;$$

in Worten: ξ_0' und ξ_1' entstehen durch Spiegelung der wirklichen Elektroden an einer der Begrenzungslinien des Streifens. Man kann natürlich (78) auch dadurch erhalten, daß man die Wirkung der durch fortgesetzte Spiegelung an den Begrenzungslinien entstehenden Pole in geeigneter Weise summiert.

Will man die Strömung in einer rechteckigen Platte mit zwei Einströmungspunkten berechnen, so kann man die obere z -Halbebene mittels des elliptischen Integrals erster Gattung auf das Innere des vorgelegten Rechtecks in der ξ -Ebene abbilden. Bedenkt man, daß durch diese Abbildung oder auch direkt nach dem Spiegelungsverfahren e^Φ eine doppelperiodische Funktion wird mit den Perioden $2a$ und $2ib$ (a bzw. b bedeuten die Seiten des Rechtecks in der ξ - bzw. η -Richtung), die in den Punkten $\xi = \xi_0$, $\xi = \bar{\xi}_0$, $\xi = -\xi_1$, $\xi = -\bar{\xi}_1$ einfache Pole hat, so wird man ohne weiteres auf die Darstellung geführt⁶⁶⁾

$$(80) \quad \Phi = - \frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{\sigma(\xi - \xi_0)\sigma(\xi + \xi_0)\sigma(\xi - \bar{\xi}_0)\sigma(\xi + \bar{\xi}_0)}{\sigma(\xi - \xi_1)\sigma(\xi + \xi_1)\sigma(\xi - \bar{\xi}_1)\sigma(\xi + \bar{\xi}_1)}.$$

65) Das Resultat für den Streifen wurde zuerst angegeben von *J. Stefan* und experimentell geprüft von *v. Obermayer*, Wien Ber. (60) 2 (1869), p. 245. Eine angenäherte Lösung durch Berücksichtigung nur zweier Spiegelpunkte gibt *F. Auerbach*, Ann. Phys. Chem. 3 (1878), p. 498. Das genaue Resultat wird daraufhin nochmals (in Produktform) angegeben von *L. Ditscheiner*, Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 282.

66) Die Strömung in einer rechteckigen Platte wurde zuerst behandelt von *E. Jochmann*, Zeitschr. Math. Phys. 1865, p. 48 und 1865, p. 89, später wurde das Resultat auf anderem Wege abgeleitet von *E. Heine*, Berlin Ber. 1874, p. 186, und ausführlicher *J. f. Math.* 1875, p. 1. Für den Fall, daß die Elektroden in der Nähe einer Plattenecke liegen, daß also die Platte näherungsweise durch einen Quadranten der unendlichen Ebene ersetzt werden kann, wird das

Die Funktion σ ist die bekannte von Weierstraß eingeführte Modifikation der ϑ -Funktion.

Ebenso kann man beliebige Polygone behandeln, da auch hier die Abbildung auf die Halbebene nach H. A. Schwarz mittels bestimmter Integrale bewerkstelligt werden kann.

Sind nur zwei Elektroden A und B vorhanden, so kann man von einem Widerstand R der betrachteten Platte reden. Dieser beträgt nach (32) allgemein

$$(81) \quad R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{J}.$$

Hieraus findet man z. B. für die unendliche Ebene

$$(82) \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{d^2}{\varrho_A \varrho_B},$$

wenn d der Abstand und ϱ_A bzw. ϱ_B die Radien der kleinen kreisförmigen Elektroden bedeuten.

Für einen Kreis⁶⁷⁾ vom Radius a erhält man aus (76)

$$(83) \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma\lambda} \log \left(\frac{AB^2}{\varrho_A \varrho_B} \frac{A'B'}{A'B} \right),$$

wobei A' bzw. B' die oben erklärten Bildpunkte von A und B bedeuten und unter AB , usw. der Abstand der Punkte A und B , usw. zu verstehen ist.

16. Gekrümmte Platten. Wie in Nr. 14 gezeigt wurde, erhält die Differentialgleichung des Potentials auf einer Fläche die einfache Form

$$(70) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

wenn durch den Ansatz

$$(84) \quad \xi = p + iq = x + iy = z$$

die Fläche konform auf die Ebene abgebildet wird. Ist die Fläche geschlossen und einfach zusammenhängend, so kann man sie konform auf die unbegrenzte Ebene beziehen. Daraus folgt als Lösung für zwei punktförmige Elektroden, durch die der Strom J der Fläche zu bzw. abgeführt wird:

$$(85) \quad \Phi = \varphi + i\varphi' = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{z - z_0}{z - z_1} = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{\xi - \xi_0}{\xi - \xi_1},$$

wenn wir wieder statt φ allein die komplexe Funktion der Fläche Φ

Resultat angegeben und experimentell geprüft von G. Quincke, Ann. Phys. Chem. 7 (1856), p. 382.

67) Vgl. G. Kirchhoff, Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497.

betrachten. Ebenso wie für ebene Platten sind $\varphi = \text{const.}$ die Niveau-
linien des Potentials und $\varphi' = \text{const.}$ die Strömungslinien.

Für die Kugel erhält man eine konforme Abbildung durch stereo-
graphische Projektion. Hat die Kugel den Radius a und fällt ihr
Mittelpunkt mit dem Nullpunkt der z -Ebene zusammen, so lautet
diese Abbildung in Formeln

$$(86) \quad \frac{z}{a} = \frac{\xi}{a-Z}$$

mit der Nebenbedingung

$$(87) \quad \xi^2 + \eta^2 + Z^2 = a^2,$$

wenn ξ, η, Z die Cartesischen Koordinaten der Kugelpunkte bedeuten
und $\xi = \xi + i\eta$ ist. Führt man auf der Kugel Poldistanz θ und
geographische Länge ω ein, so kann man statt (86) auch schreiben

$$(86') \quad \frac{z}{a} = \frac{e^{i\omega}}{\text{tg} \frac{\theta}{2}},$$

so daß man für zwei Elektroden die Lösung erhält⁵⁷⁾:

$$(88) \quad \Phi = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{\frac{\xi}{a-Z} - \frac{\xi_0}{a-Z}}{\frac{\xi}{a-Z} - \frac{\xi_1}{a-Z}} = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{\frac{e^{i\omega}}{\text{tg} \frac{\theta}{2}} - \frac{e^{i\omega_0}}{\text{tg} \frac{\theta_0}{2}}}{\frac{e^{i\omega}}{\text{tg} \frac{\theta}{2}} - \frac{e^{i\omega_1}}{\text{tg} \frac{\theta_1}{2}}}.$$

Beliebige Zylinderflächen⁵⁸⁾ lassen sich durch bloßes Abrollen
auf die Ebene abbilden; die Lösung erscheint hier als einfachperio-
dische Funktion.

Als Beispiel einer Fläche, die sich nicht auf die ganze Ebene
abbilden läßt, weil sie nicht einfach zusammenhängend ist, sei die
von *Kirchhoff* behandelte Ringfläche⁵⁹⁾ erwähnt. Ihr Bild erscheint
in der Ebene als Rechteck, so daß die Lösung auf doppelperiodische
Funktionen führt.

D. Lineare Leiter.

17. Grundgleichungen. Betrachtet man ein System, bestehend
aus p linearen Leitern, so interessieren uns zunächst die unter Ein-
wirkung der gegebenen eingepprägten elektrischen Kräfte \mathcal{E}_e in jedem

68) Das Resultat wurde zuerst (durch direkte Lösung der Potentialgleichung)
erhalten von *L. Boltzmann*, Wien Ber. (52) 2 (1865), p. 214. Vom Standpunkt
der Abbildung aus wird es später beleuchtet von *G. Kirchhoff*, Berlin Ber. Juli
1875; Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 56 und von *A. Töpler*, Ann. Phys. Chem. 10
(1877), p. 375.

69) Vgl. *L. Boltzmann*, Wien Ber. (52) 2 (1865), p. 214.

70) Vgl. *G. Kirchhoff*, Berlin Ber. Juli 1875 und Ges. Werke, Leipzig 1882,
p. 56.

Drahte fließenden Gesamtströme J_p . Diese lassen sich durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen bestimmen auf Grund der beiden Kirchhoffschen Relationen⁷¹⁾:

$$(89) \quad \sum J_p = 0 \text{ für jeden Knotenpunkt;}$$

$$(90) \quad \sum J_p w_p = \sum E_p \text{ für jeden geschlossenen Umgang.}$$

In (90) ist w_p der Widerstand des p^{ten} Drahtes, gemessen zwischen zwei Knotenpunkten und definiert durch die Formel⁷²⁾:

$$(91) \quad w_p = \int_0^l \frac{ds}{\sigma q_p},$$

wobei q_p der betreffende Querschnitt und s die auf der Leitlinie des Drahtes von der Länge l gemessene Entfernung bedeutet. E_p ist die sogenannte im Draht wirkende *elektromotorische Kraft*, dargestellt durch das Integral:

$$(92) \quad E_p = \int_0^l \mathfrak{E}_{es} ds.$$

Ist Querschnitt und Leitfähigkeit längs des Drahtes unveränderlich, so gilt statt (91) einfach:

$$(91') \quad w_p = \frac{l}{\sigma q_p}.$$

Die Gleichungen (89) und (90) sind nur eine andere Ausdrucksweise für die (geeignet spezialisierten) Fundamentalgleichungen (I) und (II) Nr. 1. Gleichung (89) ist äquivalent mit der aus (II) für eine beliebige geschlossene Fläche folgenden Beziehung:

$$(89') \quad \int \mathfrak{J}_n d\sigma = 0,$$

während die auf eine geschlossene Linie s bezogene Integralform von (I):

$$(90') \quad \left(\int \right) \mathfrak{E}_s ds = 0$$

71) G. Kirchhoff, Ann. Phys. Chem. 72 (1847), p. 497 und 75 (1848), p. 189, sowie Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 22 und p. 32. Bemerkungen, welche zur Vereinfachung der Rechnung bei komplizierteren Systemen dienen können, finden sich außer bei G. Kirchhoff, loc. cit., bei J. A. Fleming, Phil. Mag. (5) 20 (1885), p. 221; S. Kalischer, Ann. d. Phys. 46 (1892), p. 113; W. Feussner, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 1304 und 15 (1904), p. 385; von mehr mathematischem Standpunkt aus werden die Gleichungen untersucht von W. Ahrens, Math. Ann. 49 (1897), p. 311. Die Elektrotechnik, die die Kirchhoffschen Regeln bei der Projektierung von Leitungsnetzen in großem Maßstab anzuwenden hat, entwickelt ihre eigenen, zum Teil mit denen der Graphostatik identischen Methoden (vgl. Art. V 19).

72) Vgl. auch Nr. 12.

auf Grund von (II) mit (90) identisch wird, wenn man w_p und E_p durch (91) und (92) definiert.

Zu den vorher betrachteten Strömen gehört ebenso wie im allgemeinen Falle ein Potential φ , im Innern der Leiter bestimmt durch die aus (2) durch Spezialisierung hervorgehende Gleichung:

$$(93) \quad \frac{d}{ds} \sigma q \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \sigma q \mathfrak{E}_e.$$

Für $\varphi = \varphi_s$ im Punkte s des Drahtes folgt hieraus:

$$(94) \quad \varphi_s - \varphi_0 = \int_0^s \mathfrak{E}_e ds - \int_0^s \frac{C}{\sigma q} ds,$$

wobei φ_0 das Potential am Anfange des Drahtes und C eine von s unabhängige Konstante bedeutet. Nach (1) und (III) ist C mit dem Gesamtstrome J identisch, während $\int_0^s \mathfrak{E}_e ds = E_s$ die im betreffenden

Seitenstück wirkende elektromotorische Kraft darstellt. Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (91) geht also (94) über in

$$(94') \quad \varphi_s - \varphi_0 = E_s - w_s J.$$

Für die in dem betreffenden Drahtstück erzeugte Wärme Q_s gilt nach (IV), (1) und (94'):

$$(95) \quad Q_s = w_s J^2.$$

Nur dann, wenn in dem Drahte die eingepprägten elektrischen Kräfte fehlen, kann man statt (95) auch schreiben:

$$(95') \quad Q_s = J(\varphi_s - \varphi_0) = \frac{(\varphi_s - \varphi_0)^2}{w_s}.$$

18. Das äußere Feld. Das magnetische Feld ergibt sich (vgl. Nr. 4 und Nr. 5) entweder aus einem Vektorpotential \mathfrak{A} oder einem skalaren Potential ψ . Für solche Abstände von den Drähten, gegen welche die Querschnittsdimensionen zu vernachlässigen sind, gilt die Spezialform von (25)

$$(96) \quad \mathfrak{A} = \sum_p \frac{\mu J_p}{4\pi c} \left(\int \frac{d\mathfrak{s}_p}{r} \right),$$

wenn wir uns auf den Fall konstanter Permeabilität im ganzen Raum beschränken und unter J_p resp. $d\mathfrak{s}_p$ Strom resp. Längenelement des p^{ten} Drahtes verstehen, während r den Abstand des Aufpunktes vom betreffenden Linienelement $d\mathfrak{s}_p$ bedeutet. Ist μ nicht konstant, so führt die Bestimmung von \mathfrak{A} auf die Lösung einer Randwertaufgabe (vgl. Nr. 4). Aus \mathfrak{A} folgen die magnetischen Feldkomponenten nach (17) und (15). In der Nähe der Drähte würde (96) für \mathfrak{A} ein loga-

rithmisches Unendlichwerden ergeben; in Wirklichkeit muß man hier die endliche Drahtdicke unter Anwendung von (25) berücksichtigen, wodurch dieses singuläre Verhalten verschwindet.

Beschränkt man sich durchweg auf größere Entfernungen von den Stromleitern, so ist das Potential ψ wegen seines skalaren Charakters einfacher wie \mathfrak{A} . Unter der Annahme $\mu = \text{const.}$ im ganzen Raume gilt für ψ nach (23) durchweg außerhalb der stromführenden Leiter:

$$(97) \quad \Delta\psi = 0.$$

Das Potential ψ ist indessen nicht eindeutig, da nach (II) und (22) die Beziehung gilt:

$$(98) \quad \int_0^1 \mathfrak{F} ds = -(\psi_1 - \psi_0) = \frac{J}{c}$$

für jeden geschlossenen Weg mit den Anfangspunkten 0 und 1, der den Strom J umkreist.

Haben wir einen einfachen Stromkreis⁷³⁾, dessen Öffnung wir verschließen durch eine gedachte Fläche, an der wir für ψ nach (98) einen Sprung von der Größe $\frac{J}{c}$ vorschreiben, so ist hierdurch zusammen mit (97) und den Bedingungen im Unendlichen ψ bis auf eine belanglose Konstante bestimmt. Die Vergleichung der gesuchten Funktion mit der Grundlösung $\frac{1}{r}$ von (97) ($r =$ Abstand vom gewählten Aufpunkt) mittels des Greenschen Satzes, liefert ohne weiteres

$$(99) \quad \psi = \frac{J}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma,$$

wobei n resp. $d\sigma$ Normale resp. Flächenelement der angenommenen vom Strome berandeten Unstetigkeitsfläche bedeutet⁷⁴⁾, während die Integration sich über diese ganze Fläche erstreckt. Man kann noch bemerken, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma = -\frac{d\sigma}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{d\sigma}{r^2} \cos(n, r)$$

den räumlichen Winkel $d\Omega$ darstellt, unter dem das Flächenelement $d\sigma$ vom Aufpunkte aus gesehen wird und daraufhin ψ nach (99) in

73) Der Fall einer Stromverzweigung läßt sich durch die stets mögliche Zerlegung in einfache Stromkreise auf den oben behandelten Fall zurückführen.

74) In (99) ist die positive Normale n so zu bestimmen, daß sie mit dem Strom ein Rechtssystem bildet; unter \mathfrak{F} ist dann stets der absolute Betrag des Stromes zu verstehen.

die äußerst einfache Form schreiben:

$$(100) \quad \psi = \frac{J}{4\pi c} \Omega.$$

Ω ist dabei der Winkel, unter dem der ganze Stromkreis vom Aufpunkte aus erscheint⁷⁵⁾. Die Formeln (99) und (100) sind sofort einleuchtend, wenn man die Unstetigkeitsfläche als magnetische Doppelschicht deutet.

In der Nähe der Drähte muß man natürlich auf die wirklich vorhandene Stromverteilung Rücksicht nehmen; im Stromgebiet selbst existiert kein skalares Potential mehr.

Ist μ nicht im ganzen Raume konstant, so führt die Bestimmung von ψ auf die Lösung einer Randwertaufgabe (vgl. Nr. 4), ähnlich wie dasselbe oben für \mathcal{A} bemerkt wurde.

Die Bestimmung des äußeren elektrischen Feldes führt unter allen Umständen auf eine Randwertaufgabe, wie sie in Nr. 3 näher definiert wurde.

19. Spezielle Fälle der Stromverzweigung: Wheatstonesche Brücke usw. Die in Fig. 3 skizzierte, von *Wheatstone*⁷⁶⁾ und später von *Kirchhoff*⁷⁷⁾ angegebene Drahtkombination wird ganz allgemein benutzt zum Vergleichen von Widerständen. Die Leitung *ASB* besteht gewöhnlich ganz oder in ihrem mittleren Teil aus einem über eine Teilung gespannten Draht, auf dem der Kontakt *S* gleitet, R_2 und R_3 sind die zu vergleichenden Widerstände, *E* eine Stromquelle, *G* ein Galvanometer. Der Kontakt *S* wird so gestellt, daß das Galvanometer keinen Strom zeigt. Dann ist der Brückenstrom $i_1 = 0$ und die Beziehungen (89) und (90) liefern die Relation:

$$(101) \quad r_2 R_2 = r_3 R_3.$$

Für die Beurteilung der Empfindlichkeit ist noch die Größe von i_1 von Interesse, für den Fall, daß der Kontakt *S* nicht gerade die oben

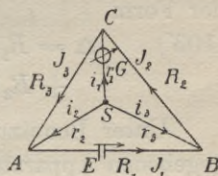


Fig. 3.

75) Für die Darstellung des räumlichen Winkels durch Oberflächen- oder Linienintegrale vgl. man *J. C. Maxwell*, *Treatise on electr. a. magn.*, Oxford 1881, 2, p. 36 ff., Art. 417 ff.

76) *C. Wheatstone*, *Phil. Trans.* 2 (1843), p. 323 und *Ann. Phys. Chem.* 62 (1844), p. 535. Für die verschiedenen üblichen Methoden zur Widerstandsbestimmung vgl. man *F. Kohlrausch*, *Lehrbuch der praktischen Physik*, Leipzig 1905, p. 413 ff.

77) *G. Kirchhoff*, *Ann. Phys. Chem.* 64 (1845), p. 512; *Ges. Abh. Leipzig* 1882, p. 14.

angenommene Stellung einnimmt⁷⁸⁾. Die erste *Kirchhoffsche* Gleichung (89), angewandt auf die drei Knotenpunkte *A, B, C*, liefert dann:

$$(102) \quad \begin{cases} J_1 - J_3 - i_2 = 0, \\ J_2 - J_1 - i_3 = 0, \\ J_3 - J_2 - i_1 = 0, \end{cases}$$

während die zweite Gleichung (90), angewandt auf die drei Stromkreise *SAB, SBC* und *SCA* unter Benutzung von (102) die Beziehungen gibt

$$(102') \quad \begin{cases} (R_1 + r_2 + r_3)J_1 - r_3J_2 - r_2J_3 = E, \\ (R_2 + r_3 + r_1)J_2 - r_1J_3 - r_3J_1 = 0, \\ (R_3 + r_1 + r_2)J_3 - r_2J_1 - r_1J_2 = 0. \end{cases}$$

Aus (102') folgen J_1, J_2, J_3 , nachher liefert (102) die Werte i_1, i_2, i_3 . So erhält man z. B. für i_1 den Wert:

$$(103) \quad i_1 = E \frac{R_2 r_2 - R_3 r_3}{\Delta},$$

wobei Δ die Determinante des Gleichungssystems (102') bedeutet und durch die verschiedenen Widerstände ausgedrückt werden kann in der Form

$$(103') \quad \Delta = R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 (r_1 + r_2) + R_2 R_3 (r_2 + r_3) \\ + R_3 R_1 (r_3 + r_1) + (R_1 + R_2 + R_3) (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1).$$

Unter Benutzung der obigen Resultate findet sich, daß man bei gegebenen Apparaten und Widerständen die empfindlichste Anordnung erhält, wenn man den Knotenpunkt zwischen den beiden größten Widerständen (R_2, R_3) mit demjenigen zwischen den beiden kleinsten (r_2, r_3) durch diejenige Leitung von den zwei noch übrig gebliebenen (Galvanometer- resp. Elementleitung) verbindet, welche den größeren Widerstand hat.

Handelt es sich um die Vergleichung sehr kleiner Widerstände (dicke Stäbe), so ist die *Wheatstonesche* Brücke in gewöhnlicher Anordnung ungeeignet. Es zeigen nämlich erstens alle Verbindungen der Widerstände miteinander einen Übergangswiderstand, der im vorliegenden Falle nicht mehr zu vernachlässigen ist, während man es zweitens praktisch nicht so einrichten kann, daß bei dicken Stäben der Strom schon in unmittelbarer Nähe der Verbindungsstelle über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilt wird (Ausbreitungswider-

78) Vgl. z. B. *J. C. Maxwell*, *Treatise on electr. and magn.*, Oxford 1881, 1, p. 436, Art. 347; man sehe auch *H. Weber*, *Verein f. Naturwissensch. zu Braunschweig* 5 (1886), p. 19.

stand). Man benutzt in diesem Falle entweder eine kompliziertere, von *W. Thomson*⁷⁹⁾ angegebene Drahtverzweigung, oder eliminiert die oben besprochenen Widerstände nach *A. Matthiessen* und *Hockin*⁸⁰⁾ durch Kombination von vier Beobachtungen in einer der *Wheatstone*-schen Brücke im Prinzip gleichen Stromverzweigung.

20. Das magnetische Feld in speziellen Fällen: Einzelner gerader Draht, zwei oder mehrere parallele gerade Drähte. Erstreckt sich der einzelne Draht in der z -Richtung von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$, so ergibt (96) für die z -Komponente \mathfrak{A}_z des Vektorpotentials für den Fall eines positiven Stromes J :

$$(104) \quad \mathfrak{A}_z = \frac{J}{4\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = -\frac{J}{2\pi c} \log \varrho + \text{const.},$$

wenn noch ϱ den senkrechten Abstand des Aufpunktes vom Drahte bedeutet und von einer (unendlich großen) Integrationskonstante abgesehen wird, während für das äußere Medium $\mu = 1$ gesetzt wird. Das zu demselben Strom gehörige skalare (magnetische) Potential ist

$$(105) \quad \psi = -\frac{J}{c} \frac{\vartheta}{2\pi},$$

wenn ϑ den um die z -Achse gemessenen Winkel bedeutet.

Nach (104) oder (105) ergibt (17) oder (22)

$$(106) \quad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_\varrho = 0, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \frac{J}{2\pi c} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Gleichung (106) gilt für beliebige Querschnittsform des stromführenden Drahtes, so lange die Entfernung ϱ groß ist. Beim kreisförmigen Draht gilt (104) und (106) durchweg bis in unmittelbare Nähe der Drahtoberfläche.

Im Innern dieses Drahtes existiert kein Potential ψ , wohl aber das Vektorpotential \mathfrak{A}^i , für dessen z -Komponente man nach (18'') und (20) erhält:

$$(104') \quad \mathfrak{A}_z^i = -\frac{J\mu}{4\pi c} \frac{\varrho^2}{a^2} + \text{const.},$$

wenn das Drahtmaterial die Permeabilität μ hat und der Drahtradius gleich a gesetzt wird. Aus (107) folgt nach (17) und (15)

$$(106') \quad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_\varrho = 0, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \frac{J}{2\pi c} \frac{\varrho}{a^2}.$$

79) *W. Thomson*, *Phil. Mag.* (4) 24 (1862), p. 149. Vgl. auch zur praktischen Ausführung *W. Jaeger*, *St. Lindeck* u. *H. Diesselhorst*, *Zeitschr. f. Instr.* 23 (1903), p. 33 u. 65, sowie *Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanstalt* 4 (1903), p. 118.

80) Vgl. *F. Kohlrausch*, *Lehrbuch der praktischen Physik*, Leipzig 1910, p. 451.

Der unendlich lange, gerade Draht ist eine recht unphysikalische Abstraktion, da der Energiegehalt zwischen zwei Ebenen $z = \text{const.}$ in endlichem Abstände voneinander sich als unendlich groß erweist (vgl. auch Nr. 32a).

Sind mehrere unendlich lange parallele Drähte $1, \dots, p, \dots, n$ vorhanden, welche von den Strömen $J_1, \dots, J_p, \dots, J_n$ in der z -Richtung durchflossen werden, so hat das dazu gehörige Vektorpotential wieder nur eine z -Komponente und es gilt einfach:

$$(107) \quad \mathfrak{A}_z = - \sum_1^n \frac{J_p}{2\pi c} \log \varrho_p + \text{const.}$$

ϱ_p bedeutet dabei den senkrechten Abstand des Aufpunktes vom p^{ten} Drahte. Gleichung (107) ist genau richtig bis in unmittelbarer Nähe der Drahtoberflächen, wenn die Querschnitte kreisförmig sind und das Drahtmaterial dieselbe Permeabilität (z. B. $\mu = 1$) wie die des Außenraums hat. Das innere Feld des p^{ten} Drahtes bekommt man, indem man über sein eigenes nach (104') gebildetes Vektorpotential noch die äußeren Potentiale der sonstigen Drähte überlagert, so daß

$$(107') \quad - \mathfrak{A}_z^i = \frac{\mathfrak{S}_p}{4\pi c} \frac{e^2}{a_p^2} + \sum_1^{p-1} \frac{\mathfrak{S}_p}{2\pi c} \log \varrho_p + \sum_{p+1}^n \frac{\mathfrak{S}_p}{2\pi c} \log \varrho_p.$$

Ist das Drahtmaterial magnetisierbar ($\mu \neq 1$), so führt die Bestimmung des Feldes auch bei kreisförmigem Querschnitt auf die Lösung einer Randwertaufgabe, näher definiert durch (18''), (20) und (21).

Als Beispiel sei erwähnt der Fall zweier paralleler Drähte von kreisförmigem Querschnitt (Radius = a), die in entgegengesetzter Richtung vom Strome J durchflossen werden. Für diese gilt, so lange μ durchweg const., z. B. gleich 1 ist, im Außenraum:

$$(108) \quad \mathfrak{A}_z = - \frac{\mathfrak{S}}{2\pi c} \log \frac{e_1}{e_2};$$

im Innern des ersten resp. zweiten Drahtes hat man⁸¹⁾:

$$(108') \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_z^i = - \frac{J}{2\pi c} \left(\frac{1}{2} \frac{e_1^2 - a^2}{a^2} - \log \frac{e_2}{a} \right) \\ \text{resp.} \\ \mathfrak{A}_z^i = \frac{J}{2\pi c} \left(\frac{1}{2} \frac{e_2^2 - a^2}{a^2} - \log \frac{e_1}{a} \right). \end{cases}$$

Ist für die Drähte $\mu \neq 1$, so kann \mathfrak{A} in Strenge unter Einführung von Bipolarkoordinaten bestimmt werden. So lange indessen

81) In (108') wurden zu den Formeln solche im übrigen belanglose Konstanten hinzugefügt, daß das Vektorpotential an der Oberfläche der Drähte stetig ist.

der Abstand der beiden Drahtmittellinien d nicht zu klein im Vergleich mit a ist, genügt die Näherung, die man erhält, wenn man über das nach (107) und (107') gebildete Feld noch die durch die beiden Drähte einzeln verursachte Strömung überlagert. Hierbei kann man das ursprüngliche Feld des einen Drahtes in der Nähe des anderen als homogen ansehen und erhält dann ohne weiteres im Außenraume:

$$(109) \quad \mathfrak{H}_s = -\frac{J}{2\pi c} \left[\log \frac{e_1}{e_2} + \frac{a}{d} \frac{\mu-1}{\mu+1} \left(\frac{a}{e_1} \sin \vartheta_1 + \frac{a}{e_2} \sin \vartheta_2 \right) \right],$$

und im Innern des ersten resp. zweiten Drahtes:

$$(109') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_s^i = -\frac{J\mu}{2\pi c} \left(\frac{1}{2} \frac{e_1^2}{a^2} + \frac{2}{\mu+1} \frac{e_1}{d} \sin \vartheta_1 \right) \\ \text{resp.} \\ \mathfrak{H}_s^i = \frac{J\mu}{2\pi c} \left(\frac{1}{2} \frac{e_2^2}{a^2} - \frac{2}{\mu+1} \frac{e_2}{d} \sin \vartheta_2 \right), \end{array} \right.$$

wenn unter ϑ_1 resp. ϑ_2 die um die Achsen des ersten resp. zweiten Drahtes gemessenen Polarwinkel bedeuten, von der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Drahtquerschnitte als Nulllinie aus gemessen, wobei letztere vom ersten nach dem zweiten Draht hinzeigt.

Unter Benutzung von Bipolarkoordinaten läßt sich auch das elektrische Feld zweier paralleler Drähte leicht angeben. Man führe die neuen Koordinaten α und β ein durch den Ansatz:

$$(110) \quad e^{\alpha+i\beta} = \frac{(x+iy) + \frac{D}{2}}{(x+iy) - \frac{D}{2}},$$

wobei x, y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene senkrecht zu den Drahtachsen bedeuten, während der Nullpunkt $x=y=0$ in der Mitte zwischen den beiden Drähten liegt. Die Drahtoberflächen bilden dann Kurven $\alpha = \text{const.}$ mit

$$\alpha = \mp \alpha_0 = \mp \frac{1}{2} \log \frac{d+D}{d-D},$$

wenn noch $D = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2}$ die Länge derjenigen Linien bedeutet, die man durch den Punkt $x=y=0$ als Tangente an die beiden Kreisquerschnitte ziehen kann, gemessen zwischen den beiden Berührungspunkten. Führt man um die Punkte $x = \pm \frac{D}{2}$ der x -Achse Polarkoordinaten e_1, ϑ_1 resp. e_2, ϑ_2 ein⁸²⁾, so ist allgemein

$$\alpha = \log \frac{e_1}{e_2}, \quad \beta = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

82) Die Nullpunkte dieser Koordinatensysteme sind also verschieden von den vorher (bei der Besprechung des magnetischen Feldes) als Nullpunkte benutzten Mittelpunkten der Drahtquerschnitte.

Durchfließt nun wieder der Strom J beide Drähte in entgegengesetzten Richtungen, so gilt für das Potential im Innern des ersten resp. zweiten Drahtes einfach:

$$(111) \quad \varphi_1 = -\frac{J}{\pi a^2 \sigma} z \quad \text{resp.} \quad \varphi_2 = \frac{J}{\pi a^2 \sigma} z - \varphi_0,$$

wobei φ_0 eine von dem Widerstand der sehr weit weg gedachten Verbindung der beiden Drähte abhängige Konstante bedeutet.

Das äußere Potential bestimmt sich nun nach Nr. 3 als Lösung der Potentialgleichung

$$(112) \quad \Delta \varphi = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

mit

$$p = \frac{D/2}{\mathfrak{E}_0 \alpha - \cos \beta}$$

zu

$$(113) \quad \varphi = +\frac{J}{\pi a^2 \sigma} \frac{\alpha}{\alpha_0} z - \frac{\varphi_0}{2} \frac{\alpha_0 + \alpha}{\alpha_0},$$

woraus man für die elektrischen Feldstärken erhält:

$$(114) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\alpha = -\frac{1}{p} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{1}{p \alpha_0} \left(\frac{J}{\pi a^2 \sigma} z - \frac{\varphi_0}{2} \right), \\ \mathfrak{E}_\beta = -\frac{1}{p} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0, \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{J}{\pi a^2 \sigma} \frac{\alpha}{\alpha_0}. \end{cases}$$

Der Wert von \mathfrak{E}_α für $\alpha = \alpha_0$ stellt die Oberflächenladung des Drahtes pro Flächeneinheit dar. Sind die Drähte weit genug entfernt, so ist diese um den Umfang gleichmäßig verteilt und ergibt sich aus der Formel:

$$(114') \quad \mathfrak{E}_\alpha = +\frac{\frac{a}{d}}{\log \frac{d}{a}} \left(\frac{J}{\pi a^2 \sigma} \frac{z}{d} - \frac{\varphi_0}{2d} \right).$$

21. Das magnetische Feld eines Kreisstroms. Führt man in der Ebene des (linearen) Kreisstromes vom Radius a Polarkoordinaten ϱ , ϑ ein und nennt die Koordinate senkrecht zu dieser Ebene z , so erhält man für die einzig vorhandene Komponente \mathfrak{A}_ϑ des Vektorpotentials \mathfrak{A} nach (96) ohne weiteres:

$$(115) \quad \mathfrak{A}_\vartheta = \frac{J a}{2 \pi c} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + a^2 - 2 a \varrho \cos \vartheta}}.$$

Durch die Substitution

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \xi$$

wird (115) in die übliche Form der vollständigen elliptischen Inte-

grale erster und zweiter Gattung F und E übergeführt. Man erhält:

$$(115') \quad \mathfrak{A}_\varrho = \frac{J}{\pi c} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) F(k) - E(k) \right],$$

wobei der Modul k durch die Formel:

$$(116) \quad k^2 = \frac{4a\varrho}{z^2 + (\varrho + a)^2}$$

zu definieren ist⁸³).

Auf der Achse des Kreises (z -Achse) und in unendlicher Entfernung wird $k = 0$, auf dem Drahte selbst ist $k = 1$. Für Werte von $k \ll 1$ ergibt (110') die Entwicklung:

$$(115'') \quad \mathfrak{A}_\varrho = \frac{J}{32c} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} k^3 \left[1 + \frac{3}{4} k^2 + \frac{75}{128} k^4 + \dots \right].$$

Aus \mathfrak{A}_ϱ folgen, gemäß (17), die Komponenten der magnetischen Feldstärke nach den Formeln:

$$\mathfrak{H}_\varrho = -\frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{A}_\varrho, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \mathfrak{A}_\varrho;$$

die Kraftlinien werden gebildet von den Linien $\mathfrak{A}_\varrho = \text{const.}$

Beschreibt man das Feld statt durch das Vektorpotential \mathfrak{A} durch das skalare Potential ψ , so erhält man für letzteres am bequemsten einen Ausdruck in Form einer Kugelfunktionsreihe⁸⁴). Nach (99) gilt zunächst auf der Achse:

$$\psi = \psi_0 = \frac{J}{2c} (1 - \cos \alpha),$$

wobei α der Winkel ist, den die vom Aufpunkt nach einem Punkt des Stromes gezogene Gerade mit der Achse macht. Legt man nun durch den Stromkreis eine Kugel vom beliebigen Radius R und führt um ihren Mittelpunkt Kugelkoordinaten r, θ ein ($\theta = \text{const.}$ sind

83) *G. M. Minchin*, Phil. Mag. (5) 35 (1893), p. 354. In der Hydrodynamik treten diese Formeln wohl zuerst auf bei der Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung in Wirbelringen; vgl. *W. Thomson*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 25 (1) (1869), p. 217 und *W. M. Hicks*, Phil. Trans. 171 (1881), p. 628.

84) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 303; vgl. auch *H. Weber*, Dedekind Festschr., Braunschweig 1901, p. 89, sowie *H. Diesselhorst*, Diss. Berlin 1896. Durch elliptische Integrale dritter Gattung wurde der räumliche Winkel dargestellt von *G. M. Minchin*, Phil. Mag. (5) 35 (1893), p. 354; das Verhalten des magnetischen Potentials ψ in der Nähe des Drahtes, welcher jetzt nicht mehr als unendlich dünn angenommen wird, untersucht derselbe Autor: Phil. Mag. (5) 36 (1893), p. 201. Eine für die Rechnung bequemere Darstellung mittels *Jacobischer* θ -Funktionen, wobei der Gebrauch von Tafeln unnötig wird, gibt *H. Nagaoka*, Phil. Mag. (6) 6 (1903), p. 19.

Das Potential eines rechteckigen Stromes wird behandelt von *W. Kind*, Diss. Göttingen 1878 und *G. M. Minchin*, Electrician 903 (1895), p. 603 und 906 (1895), p. 706.

Breitenkreise), so erhält das Potential $\psi = \psi_0$ auf der Achse ($\theta = 0$ resp. $\theta = \pi$) die Form:

$$(117) \quad \psi_0 = \frac{J}{2c} \left\{ 1 - \frac{r - R \cos \theta_0}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta_0}} \right\},$$

wobei θ_0 der Winkel ist, den die vom Mittelpunkte dieser Kugel nach einem Punkte des Stromes gezogene Linie mit der Achse bildet, so daß

$$(118) \quad \sin \theta_0 = \frac{a}{R}.$$

Statt (117) kann man auch, je nachdem $r < R$ oder $r > R$ ist, schreiben⁸⁵⁾:

$$(119) \quad \psi_0 = \frac{J}{2c} \left[(1 + \cos \theta_0) - \sin^2 \theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n P'_n(\cos \theta_0) \right]$$

resp.

$$(119') \quad \psi_0 = \frac{J}{2c} \sin^2 \theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P'_n(\cos \theta_0).$$

Mit Rücksicht darauf, daß ψ der Potentialgleichung genügt, folgt dann aus (119) und (119') ohne weiteres:

$$(120) \quad \psi = \frac{J}{2c} \left[(1 + \cos \theta_0) - \sin^2 \theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n P'_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) \right]$$

resp.

$$(120') \quad \psi = \frac{J}{2c} \sin^2 \theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P'_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta),$$

wobei (120) innerhalb und (120') außerhalb unserer Kugel vom Radius R gilt. Die beiden magnetischen Feldkomponenten folgen nach (22) durch Anwendung der Formeln:

$$\mathfrak{H}_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \mathfrak{H}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Von Interesse für die Theorie der Tangentenboussole z. B. ist das Feld in der Nähe des Mittelpunktes des Kreisstromes. Man erhält aus (120), indem man, wie das für die Umgebung dieses Punktes am einfachsten ist, noch den Radius unserer Kugel zu $R = a$ annimmt:

$$(121) \quad \mathfrak{H}_\theta = -\frac{J}{2c} \frac{\sin \theta}{a} \left[P'_1(\cos \theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 P'_3(\cos \theta) \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a}\right)^4 P'_5(\cos \theta) + \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P'_{2n+1}(\cos \theta) + \dots \right],$$

85) Das Resultat folgt aus der bekannten Entwicklung der Quadratwurzel unter Benutzung der Relationen zwischen P'_n und P_n .

oder auch ausgerechnet:

$$(121') \quad \mathfrak{S}_\theta = -\frac{J \sin \theta}{2c} \frac{1}{a} \left[1 - \frac{3}{8} \frac{r^2}{a^2} (3 + 5 \cos 2\theta) + \dots \right].$$

Bei der Anwendung dieses Resultats auf die Tangentenbussole ist zu bedenken, daß θ das Komplement des gewöhnlich benutzten, von der Ebene des Stromkreises aus gemessenen Winkels ist.

22. Das magnetische Feld einer Spule. Befindet man sich nicht in unmittelbarer Nähe der Wicklung, so wird man für die Rechnung den Wicklungsraum als gleichmäßig vom Strome erfüllt ansehen können. Wird der Draht vom Strome \mathfrak{S} durchflossen und ist die Anzahl Windungen n , so wird der in Rechnung zu ziehende Strom pro Flächeneinheit (vgl. Fig. 4)

$$(122) \quad \mathfrak{S} = \frac{nJ}{2l(A-a)}.$$

Verschließt man die Spule durch zwei Ebenen $z = +l$ und $z = -l$, so gilt nach (99) für das skalare Potential $\psi = \psi_a$ im äußeren Raum:

$$\psi_a = \frac{\mathfrak{S}}{4\pi c} \int_{\varrho=a}^{\varrho=A} d\varrho \int_{z=-l}^{z=+l} dz \int_0^{\varrho} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mathfrak{S}}{4\pi c} \int_a^A d\varrho \int_0^{\varrho} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r} \right]_{z=-l}^{z=+l} d\varphi,$$

wobei r den Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt bedeutet⁸⁶⁾.

Schreibt man

$$(123) \quad \psi_a = \Psi_1 - \Psi_2$$

mit

$$(124) \quad \Psi_1 = \frac{J}{2c} \int_a^A d\varrho \int_0^{\varrho} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \right)_{z=l} d\varphi \quad \text{und} \quad \Psi_2 = \frac{J}{2c} \int_a^A d\varrho \int_0^{\varrho} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \right)_{z=-l} d\varphi,$$

so kann Ψ_1 resp. Ψ_2 gedeutet werden als das Potential je einer geeigneten mit magnetischen Massen belegter Kreisscheiben; im Grenzfall $A - a \ll a$ ist die Belegung gleichförmig. Im Innenraum gilt die Formel

$$(125) \quad \psi = \psi_i = \Psi_1 - \Psi_2 - \frac{\mathfrak{S}}{c} (A - a) z,$$

da das Potential entstanden gedacht werden kann durch Differenzwirkung einer unendlich langen Spule mit zwei aufgesetzten bis ins Unendliche reichenden Stücken, welche vom entgegengesetzt gerichteten Strome durchflossen werden.

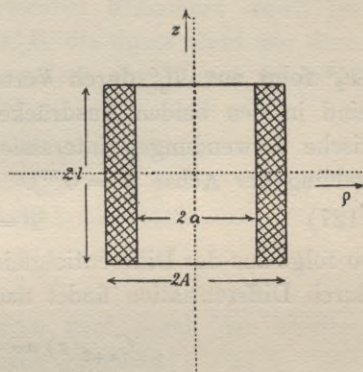


Fig. 4.

86) Spulen mit Eisenkern werden behandelt von *W. Rogowski*, Diss. Danzig 1908.

Die Potentiale Ψ_1 und Ψ_2 können nur auf der Mittellinie in endlicher Form angegeben werden. Dort gilt, so lange $A - a \ll a$ ist:

$$(126) \quad \Psi_1 = \Psi_1^0 = \frac{1}{2c} \frac{nJ}{2l} (\sqrt{a^2 + (z-l)^2} - \sqrt{(z-l)^2})$$

und im allgemeinen Falle:

$$(126') \quad \Psi_1 = \Psi_1^0 = \frac{\Im}{4c} \left[\left\{ A \sqrt{A^2 + (z-l)^2} - a \sqrt{a^2 + (z-l)^2} \right\} \right. \\ \left. - 2(A-a) \sqrt{(z-l)^2} \right. \\ \left. + (z-l)^2 \log \frac{A + \sqrt{A^2 + (z-l)^2}}{a + \sqrt{a^2 + (z-l)^2}} \right].$$

Ψ_2^0 folgt aus Ψ_1^0 durch Vertauschung von l mit $-l$; die Wurzeln sind in den beiden Ausdrücken stets positiv zu wählen. Für praktische Anwendungen interessiert hauptsächlich das Feld in der Umgebung der Achse $\varrho = 0$ ⁸⁷⁾. Macht man den Ansatz

$$(127) \quad \Psi = \sum C_n(z) \varrho^n,$$

so folgt aus der Differentialgleichung für Ψ , daß man die C_n sukzessive durch Differentiation findet nach der Formel:

$$C_{n+2}(z) = - \frac{1}{(n+2)^2} \frac{d^2}{dz^2} C_n(z).$$

Im vorliegenden Falle, wo $C_0(z) = \Psi^0 = \Psi_1^0 - \Psi_2^0$ und $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = 0$, erhält man demnach

$$(128) \quad \Psi = \Psi^0 - \frac{\varrho^2}{2^2} \frac{d^2}{dz^2} \Psi^0 + \frac{\varrho^4}{2^2 4^2} \frac{d^4}{dz^4} \Psi^0 - + \dots$$

Für die Anwendung sowie für die Substitution in (128) bequemer wie die Formeln (126) und (126') sind Entwicklungen von Ψ_0 nach Potenzen von $z - z_0$, wenn z_0 denjenigen Punkt bedeutet, in dessen Umgebung man das Feld berechnen will. Die betreffende Entwicklung lautet in der Nähe des Mittelpunktes ($z_0 = 0$) für die dünne Spule ($A - a \ll a$):

$$(129) \quad \Psi^0 = \frac{1}{c} \frac{nJ}{2l} \left(1 - \frac{l}{d}\right) z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{l}{d} \left(1 + \frac{l}{d}\right) \frac{z^2}{d^2} + \dots \right],$$

wenn $d^2 = a^2 + l^2$ gesetzt wird.

87) Einen allgemeinen Ausdruck für das Potential einer gleichmäßig mit Masse belegten Scheibe und damit zugleich für das Potential einer unendlich dünnen Spule ($A - a \ll a$) erhält man leicht (analog wie im vorigen Paragraphen für die Doppelschicht) in Form einer Kugelfunktionsreihe; vgl. *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 284 Art. 676, sowie *W. Thomson* und *Tait*, Natural Philosophy, Art. 546. In Form elliptischer Integrale wird das Potential der Kreisscheibe erhalten von *G. M. Minchin*, Phil. Mag. (5) 37 (1894), p. 204; eine Integraldarstellung mit *Besselschen* Funktionen findet sich bei *H. Weber*, J. f. Math. 75 (1872), p. 89.

Hieraus oder auch direkt aus (126') folgt für den allgemeinen Fall die Entwicklung:

$$(129') \quad \Psi^0 = \frac{\mathfrak{S}}{c} l z \left[\left\{ \frac{A-a}{l} - \log \frac{A+D}{a+d} \right\} - \frac{z^2}{2} \left\{ \frac{1}{D(A+D)} - \frac{1}{d(a+d)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{l^2}{3} \left(\frac{A+2D}{D^3(A+D)^2} - \frac{a+2d}{d^3(a+d)^2} \right) \right\} + \dots \right],$$

wenn analog wie oben $D^2 = A^2 + l^2$ gesetzt wird. Für die verschiedenen Grenzfälle (lange, resp. flache Spulen z. B.) kann man natürlich auch wieder noch die geschweiften Klammern durch geeignete Entwicklungen ersetzen⁸⁸⁾. Ist z. B. die Spule nicht nur dünn im Vergleich mit ihrem Durchmesser, sondern dieser auch klein im Vergleich mit der Länge, so ergibt (129):

$$\Psi^0 = \frac{1}{2c} \frac{nJ}{2l} \frac{a^2}{l^2} z \left[1 + \frac{z^2}{l^2} + \dots \right],$$

so daß nach (125) und (128) mit Rücksicht auf (122):

$$(130) \quad \Psi_i = - \frac{1}{c} \frac{nJ}{2l} z \left[\left(1 - \frac{a^2}{2l^2} \right) - \frac{1}{4} \frac{a^2}{l^2} \frac{2z^2}{l^2} - \frac{3z^4}{l^4} + \dots \right].$$

Der Betrag der Inhomogenität des Feldes wird durch den zweiten Term der eckigen Klammer zum Ausdruck gebracht.

Innerhalb der Spule ist also in der Nähe der Mitte die in Richtung der Achse gerichtete Feldstärke in erster Näherung:

$$\mathfrak{H}_z = \frac{1}{c} \frac{nJ}{2b};$$

außerhalb der Spule wird dieselbe:

$$\mathfrak{H}_z = - \frac{1}{c} \frac{nJ}{2l} \frac{a^2}{2l^2},$$

also im Verhältnis $a^2/2l^2$ geringer. Die Kraftlinienverteilung im ganzen Raume wird veranschaulicht durch Fig. 5⁸⁹⁾. Dieselbe ist so eingerichtet, daß der Kraftfluß konstant ist zwischen zwei Rotationsflächen, welche durch Umdrehung aufeinander folgender Kraftlinien um die Spulenachse entstehen. Die Wicklung ist bei der Ausrechnung als unendlich dünn angenommen, während $l = 2a$ gesetzt ist.

Die Homogenität wird verbessert, indem man an den Enden der Zylinderspule zwei Spulen in Form abgestumpfter Kegel aufsetzt⁹⁰⁾.

88) Solche Entwicklungen, auch für $z_0 \neq 0$, finden sich bei *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 324 ff. Art. 709 ff., sowie besonders ausführlich bei *E. Mascart et J. Joubert*, Leçons sur l'électricité et le magnétisme, Paris 1886, p. 81 ff.

89) Diese Figur wurde mir freundlichst zur Verfügung gestellt von Herrn Prof. *R. Emden*.

90) *L. Houllévigie*, Journ. de phys. (3) 7 (1898), p. 466.

Eine solche Konstruktion bildet die Annäherung an ein der Länge nach gleichmäßig bewickeltes Ellipsoid, das ebenso wie die gleichmäßig bewickelte Kugel im Innern ein absolut homogenes Feld erzeugt⁹¹⁾.

Ist die Spule flach, d. h. ist sowohl $(A - a)$ wie $l \ll a$, so ergibt (125) für Ψ^0 die Näherungsformel:

$$(131) \quad \Psi^0 = \frac{3b}{c} z \left[\left(1 - \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \frac{bl}{a^2} \right) + \frac{l}{2a} \frac{z^2}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b}{a} \right) + \dots \right],$$

wobei die Faktoren der einzelnen Glieder richtig sind bis auf Größen

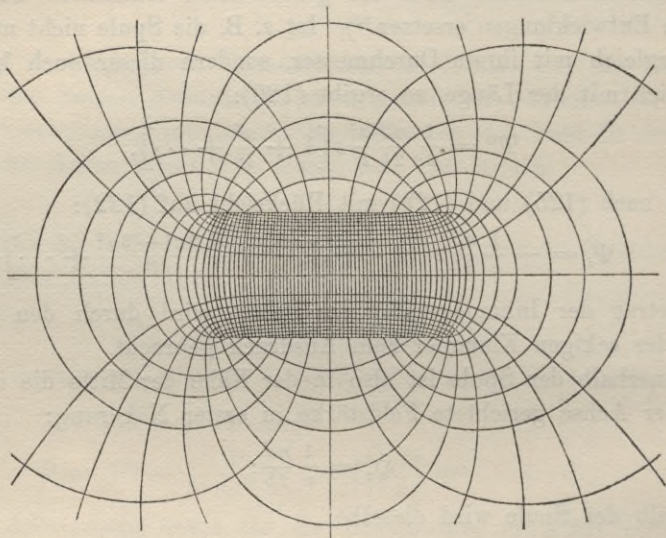


Fig. 5.

von der Ordnung l^3/a^3 und zur Abkürzung $A - a = b$ gesetzt wurde. Nach (125) und (128) wird wieder:

$$(131') \quad \Psi_i = -\frac{1}{c} \frac{3bl}{a} z \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{b}{a} \right) - \frac{2z^2 - 3e^2}{4a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b}{a} \right) + \dots \right]$$

eine Formel, die bei der Berechnung des Kraftfeldes einer mit mehreren Windungen versehenen Tangentenbussole Anwendung findet.

Neben dem magnetischen Felde wäre es für manche Zwecke wichtig, auch das elektrische Feld von Spulen zu kennen. Dieses ist indessen als Randwertaufgabe (vgl. Nr. 3) ein schwierigeres Problem wie das oben behandelte und wurde wohl deshalb in der Literatur nur gestreift⁹²⁾.

91) Vgl. hierzu J. C. Maxwell, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 279 ff., Art. 670 ff.

92) M. Brillouin, Ann. chim. phys. 26 (1902), p. 460, betrachtet den Fall

II. Quasistationäres Feld.

A. Allgemeines.

23. Grundgleichungen und Potentiale. Im folgenden sollen solche Vorgänge betrachtet werden, die zeitlich so langsam verlaufen, daß der Raum, welcher von dem ausgesandten elektromagnetischen Felde in einer Zeit überstrichen wird, während welcher sich der Zustand des Systems nicht merklich ändert, als unendlich groß zu betrachten ist im Vergleich mit den Dimensionen des Systems, wenigstens soweit die Ausbreitung im freien Äther in Frage kommt.

a) *Ruhende Körper*. Für ruhende Systeme kommt man dann oft zu einer befriedigenden Beschreibung, indem man den Verschiebungsstrom $\epsilon \mathfrak{C}$ durchweg vernachlässigt und demgemäß die Grundgleichungen in der Form schreibt⁹³):

$$(I') \quad \frac{1}{c} \mathfrak{B} = \frac{\mu}{c} \mathfrak{H} = - \operatorname{rot} \mathfrak{C},$$

$$(II') \quad \frac{1}{c} \mathfrak{S} = \frac{\sigma}{c} (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_e) = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

wenn wir uns von vornherein auf isotrope Körper beschränken und $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ setzen. Der einzige Unterschied gegen den stationären Fall besteht also darin, daß die elektrische Feldstärke jetzt nicht mehr wirbelfrei verteilt ist. Dementsprechend sind das elektrische und magnetische Feld nicht mehr wie im Teil I in Strenge jedes für sich zu bestimmen; man kann aber das ganze Feld aus einem Vektor \mathfrak{P} ableiten⁹⁴). Mit Rücksicht auf (16) und (I') kann man nämlich zunächst unter Einführung eines skalaren Potentials φ schreiben:

$$(132) \quad \begin{cases} \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{C} = - \frac{\mathfrak{P}}{c} - \operatorname{grad} \varphi. \end{cases}$$

Aus der nach (II') für \mathfrak{P} und φ folgenden Gleichung fällt dann φ

einer Zylinderspule, die längs einer Erzeugenden einen Potentialsprung (als Stromquelle) besitzt, es hat indessen das sich ergebende elektrische Feld nur sehr entfernte Ähnlichkeit mit dem einer gewöhnlichen Spule. *P. Drude*, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 324, berechnet die Kapazität einer Spule (für seine Theorie des Tesla-transformators), indem er dieselbe durch zwei auf entgegengesetzt gleiche Potentiale geladene Kreisringe in einem Abstände gleich der Länge der Spule ersetzt.

93) Vgl. *Maxwellsche Theorie*, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6 und Nr. 9.

94) Vgl. das über den ähnlich gebauten *Hertzschen* Vektor Gesagte in *Elektromagnetische Wellen*, Art. *M. Abraham* V 18, Nr. 5.

heraus, wenn man die zulässige Annahme

$$(133) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = - \frac{\mu \sigma}{c} \varphi$$

macht, wodurch diese Gleichung die Form annimmt

$$(134) \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{\mu \sigma}{c^2} \dot{\mathfrak{B}} = - \frac{\mu \sigma}{c} \mathfrak{E}_e$$

oder

$$(134') \quad \Delta \mathfrak{B} - \frac{\mu \sigma}{c^2} \dot{\mathfrak{B}} = - \frac{\mu \sigma}{c} \mathfrak{E}_e,$$

während \mathfrak{E} und \mathfrak{H} nach (132) unter Berücksichtigung von (133) jetzt allein durch \mathfrak{B} ausgedrückt sind. Hat man z. B. einen Körper, in dem zeitlich veränderliche, eingeprägte elektrische Kräfte wirken, und will man das zugehörige elektromagnetische Feld berechnen, so ist der Gang der Rechnung folgender: Zunächst bestimmt man die zwei zum Innern, resp. zum Äußeren des Körpers gehörigen Funktionen \mathfrak{B} so als Lösungen von (134'), daß die Bedingungen im Unendlichen und die Grenzbedingungen an der Oberfläche erfüllt sind, wobei letztere besagen, daß die Tangentialkomponenten von \mathfrak{H} und die Normalkomponenten von $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ stetig übergehen. Diese Feldstärken leiten sich nach der ersten Gleichung von (132) ab. Aus \mathfrak{B} , das jetzt vollständig bestimmt ist, folgt dann im Innern des Körpers der Wert von \mathfrak{E} ohne weiteres mit Rücksicht auf (133) aus der zweiten Gleichung von (132) durch Differentiation. Für den den Körper umgebenden Nichtleiter ($\sigma = 0$) versagt indessen diese Berechnungsweise, weil dort Gleichung (133) ihre Bedeutung als Verbindungsglied von \mathfrak{B} mit φ verliert. Die Aussage, daß außer den Ladungen auf der Oberfläche des Körpers keine anderen mehr im Nichtleiter vorhanden sind,

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

führt dann aber für das Potential φ , mit Rücksicht auf (132) und (133) mit $\sigma = 0$ zu der Bestimmungsgleichung

$$(134'') \quad \Delta \varphi = - \frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\mathfrak{B}} = 0$$

Da nach dem Obigen einerseits \mathfrak{B} im ganzen Raum und andererseits \mathfrak{E} an der Oberfläche des Körpers bekannt ist, folgt aus (134'') das Potential φ bis auf eine belanglose additive Konstante. Sind noch fremde Ladungen im Nichtleiter zerstreut, so braucht man dem eben erhaltenen φ nur noch das elektrostatische Potential dieser Ladungen zu überlagern.

Ist die Strömung schon bekannt, so verwendet man mit Vorteil das Vektorpotential \mathfrak{A} zur Beschreibung des magnetischen Feldes, wie es in Nr. 4 definiert wurde und dessen Wert man aus den bekannten

Strömen durch Integration nach (25) findet. Der Unterschied in der Definition von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} besteht darin, daß statt Gleichung (133) durchweg $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ gilt. Im freien Äther sind also \mathfrak{B} und \mathfrak{A} durch dieselbe Gleichung definiert. Auch das skalare magnetische Potential ψ (vgl. Nr. 4) ist außerhalb der Leiter ebenso wie im stationären Fall ohne weiteres zu verwenden. Ein skalares elektrisches Potential φ , aus dem \mathfrak{E} ableitbar, existiert indessen nicht mehr. Statt dessen kann man mit Rücksicht auf die Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ dort, wo keine Ladungen vorhanden sind, \mathfrak{E} aus einem Vektor \mathfrak{G} ableiten nach der Gleichung:

$$(135) \quad \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{G},$$

welcher z. B. gelegentlich von *Maxwell* (Current-Funktion) benutzt wurde⁹⁵). Die frühere Bestimmung von \mathfrak{E} aus einem Potential wird näherungsweise richtig, wenn man die vom veränderlichen Magnetfeld im Äther erzeugten elektrischen Kräfte vernachlässigt. Nur im Inneren der Leiter werden dann bei dieser Annahme die Gleichungen gegenüber dem stationären Fall abgeändert.

b) *Bewegte Körper*. Für bewegte Körper (Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes gleich v) genügt es in den meisten praktischen Fällen, nur die linke Seite der Gleichung (I') zu vervollständigen durch das der „Induktion durch Bewegung“ entsprechende Glied $\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} [\mathfrak{H} v]$. Die Grundgleichungen lauten dann⁹⁶):

$$(I'') \quad \frac{\mu}{c} \dot{\mathfrak{H}} + \frac{\mu}{c} \operatorname{rot} [\mathfrak{H} v] = - \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

$$(II'') \quad \frac{\sigma}{c} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e) = \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$

Streng genommen wäre auch die linke Seite von (II') durch Glieder zu vervollständigen, die dem Verschiebungsstrom, dem Konvektionsstrom und dem „Röntgen“strom entsprechen; dieselben können aber öfters außer Betracht gelassen werden. Die verschiedenen Theorien für bewegte Körper (von *Hertz*, *Lorentz*, *Cohn*, *Minkowski* usw.) sind bei Zulassung dieser Vernachlässigungen alle gleichlautend. Statt $\operatorname{rot} [\mathfrak{H} v]$ in Gleichung (I'') kann man für starre Körper auch schreiben:

$$(v \operatorname{grad}) \mathfrak{H} + [\mathfrak{H}, \frac{1}{2} \operatorname{rot} v].$$

Diesen beiden Glieder entsprechen dann die von der Translations-

95) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. a. magn., Oxford 1881, 2, p. 263, Art. 647 ff.

96) Vgl. *Maxwellsche Theorie*, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6. Die dortigen Hauptgleichungen gehen mit den weiter unten angegebenen Vernachlässigungen in (I'') und (II'') über auf Grund der dortigen Relation (14) und der in Nr. 17 angegebenen Stromzerlegung.

bewegung, resp. Drehbewegung an der betreffenden Stelle erzeugten Wirbel der elektrischen Kraft.

Die Grenzbedingungen an der Oberfläche bewegter Körper nehmen nach (I'') und (II'') eine andere Gestalt an, wie bisher. Nach (II'') gehen zwar noch immer die Tangentialkomponenten von \mathfrak{H} an der Trennungsfläche der Körper 1 und 2 stetig ineinander über, die Tangentialkomponenten \mathfrak{E}_h von \mathfrak{E} indessen zeigen dort einen Sprung von der Größe

$$(136) \quad \mathfrak{E}_{h2} - \mathfrak{E}_{h1} = \frac{1}{c} [\mathfrak{B}v]_{h1} - \frac{1}{c} [\mathfrak{B}v]_{h2}$$

m. a. W. die elektrische Feldstärke hat an der Oberfläche bewegter Körper einen Flächenwirbel von der Größe:

$$(137) \quad [n, \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1] = \frac{1}{c} [n[\mathfrak{B}v]]_1 - \frac{1}{c} [n[\mathfrak{B}v]]_2,$$

wobei n die von 1 nach 2 positiv gerechnete Einheitsnormale bedeutet. Da die Normalkomponente von \mathfrak{B} die Trennungsfläche stetig durchsetzt, kann man den Flächenwirbel von \mathfrak{E} auch darstellen in der Form:

$$(137') \quad [n, \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1] = \frac{v_n}{c} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) - (v_1 - v_2) \frac{\mathfrak{B}_n}{c}.$$

Bewegt sich der Körper im freien Raum, so kann man den Flächenwirbel für unmagnetische Körper noch einfacher ausdrücken durch die Formel:

$$(137'') \quad [n, \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1] = -v_1 \frac{\mathfrak{B}_n}{c},$$

wobei v die Geschwindigkeit der Oberfläche des betreffenden Körpers ist.

Ebenso wie oben kann man auch hier einen Vektor \mathfrak{P} einführen, definiert durch:

$$(138) \quad \text{grad div } \mathfrak{P} - \text{rot rot } \mathfrak{P} - \frac{\mu\sigma}{c^2} (\dot{\mathfrak{P}} - [v \text{ rot } \mathfrak{P}]) = -\frac{\mu\sigma}{c} \mathfrak{E}_e$$

oder

$$(138') \quad \Delta \mathfrak{P} - \frac{\mu\sigma}{c^2} (\dot{\mathfrak{P}} - [v \text{ rot } \mathfrak{P}]) = -\frac{\mu\sigma}{c} \mathfrak{E}_e,$$

aus dem \mathfrak{H} und \mathfrak{E} folgen nach den Gleichungen:

$$(139) \quad \begin{cases} \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{E} = -\frac{\dot{\mathfrak{P}}}{c} + [v \text{ rot } \frac{\mathfrak{P}}{c}] + \frac{c}{\mu\sigma} \text{grad div } \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Für Nichtleiter versagt die letzte Gleichung von (139), weil auch hier wieder die zu grunde gelegte Zusammenhangsformel zwischen \mathfrak{P} und φ als solche ihren Sinn verliert. Man kann aber immer noch wie oben \mathfrak{E} bestimmen aus

$$(139') \quad \mathfrak{E} = -\frac{\dot{\mathfrak{P}}}{c} + [v \text{ rot } \frac{\mathfrak{P}}{c}] - \text{grad } \varphi.$$

Das Potential φ erhält man dann im Außenraum für sich aus der Gleichung

$$(139'') \quad \Delta \varphi = -\frac{1}{c} \operatorname{div} (\mathfrak{P} - [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{P}]) = \frac{1}{c} (\operatorname{rot} \mathfrak{P}, \operatorname{rot} \mathfrak{v}),$$

deren Lösung an der Oberfläche der Körper den vorher besprochenen Grenzbedingungen anzupassen ist.

Das über die verschiedenen anderen Potentiale oben für ruhende Körper Gesagte überträgt sich ohne weiteres.

24. Die Energiegleichung. Aus (I') und (II') folgt die Energiegleichung in der Form⁹⁷⁾:

$$(140) \quad \dot{W}_m + Q + \operatorname{div} \mathfrak{S} = \mathfrak{I} \mathfrak{E}_e,$$

wobei $W_m = \frac{\mu}{2} \mathfrak{H}^2$ die magnetische Energie, $Q = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e)^2 = \mathfrak{I}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e)$ die Joulesche Wärme, $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$ den Poyntingschen Strahlungsvektor und $\mathfrak{I} \mathfrak{E}_e$ die von den eingepprägten elektrischen Kräften geleistete Arbeit, alles pro Volumeneinheit gerechnet, bedeutet. Infolge der Vernachlässigung des Verschiebungsstroms tritt die elektrische Energie $W_e = \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2$ nicht in der Energiegleichung auf, die Grundgleichungen (I') und (II') beschreiben also nur solche Zustände, bei denen dieselbe praktisch neben der magnetischen Energie zu vernachlässigen ist. Sind die stromführenden Systeme auf einen endlichen Bereich beschränkt, so ergibt (133) durch eine Integration über den Raum:

$$(141) \quad \int (\dot{W}_m + Q) dS = \int \mathfrak{I} \mathfrak{E}_e dS,$$

da das über eine unendlich entfernte Fläche erstreckte Integral $\int \mathfrak{S}_n d\sigma$ verschwindet, wie sich aus der expliziten Darstellung (25) des Vektorpotentials, spezialisiert für große Abstände von den Strömen, ohne weiteres ergibt. Soweit (I') und (II') ausreichen, findet also Energieverlust durch Strahlung nicht statt.

Für bewegte Körper erhält man aus (I'') und (II'') die Energiegleichung, bezogen auf ein ruhendes Raunteilchen, in der Form:

$$(142) \quad \dot{W}_m + Q + \frac{v}{c} [\mathfrak{I} \mathfrak{B}] + \operatorname{div} (\mathfrak{S} + \mathfrak{S}') = \mathfrak{I} \mathfrak{E}_e,$$

wenn man noch neben dem gewöhnlichen Strahlungsvektor \mathfrak{S} den Vektor

$$(143) \quad \mathfrak{S}' = [\mathfrak{H} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]]$$

97) Für die allgemeine Form der Energiegleichung sei verwiesen auf *Maxwellsche Theorie*, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 22 und Nr. 23. Man vgl. auch *G. Nordström*, Die Energiegleichung für das elektromagnetische Feld bewegter Körper. Diss. Helsingfors 1908.

einführt, welcher dem absoluten Betrag nach gleich $|\mathfrak{H}||\mathfrak{B}||\mathfrak{v}|\sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{B})$ ist und in der $\mathfrak{v}, \mathfrak{B}$ -Ebene senkrecht auf \mathfrak{B} steht. Das Auftreten dieses neuen Strahlungsvektors \mathfrak{S}' neben \mathfrak{S} wird sofort verständlich, wenn man bedenkt, daß $\frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$ nach (I') die durch die Bewegung erzeugte elektrische Kraft darstellt. Die Rechnung ergibt ursprünglich ein Glied von der Form $(\mathfrak{H} \text{ rot } [\mathfrak{B}\mathfrak{v}])$, wofür man dann auch schreiben kann $([\mathfrak{B}\mathfrak{v}] \text{ rot } \mathfrak{H}) - \text{div } [\mathfrak{H}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]]$, was mit Rücksicht auf (II'') die Energiegleichung in der Form (142) ergibt. Das Glied $\frac{\mathfrak{v}}{c}[\mathfrak{S}\mathfrak{B}]$ ist als Arbeitsleistung der *Biot-Savartschen* Kraft $\frac{1}{c}[\mathfrak{S}\mathfrak{B}]$ aufzufassen. Statt in der Form (142) kann man die Energiegleichung ersichtlich auch schreiben:

$$(142') \quad \frac{dW_m}{dt} + Q + \frac{\mathfrak{v}}{c}[\mathfrak{S}\mathfrak{B}] + \text{div}(\mathfrak{S} + \mathfrak{S}' - W_m \mathfrak{v}) = \mathfrak{S}\mathfrak{E}_e,$$

wenn $\frac{dW_m}{dt}$ die Änderungsgeschwindigkeit der in dem betreffenden bewegten Element enthaltenen magnetischen Energie bedeutet.

Führt man noch den Tensor der *Maxwellschen* Spannungen τ^* ein⁹⁸⁾, so kann man (142') die einfache Form geben⁹⁹⁾:

$$(142'') \quad \frac{dW_m}{dt} + Q + \text{div} \mathfrak{S} + (\tau^* \text{ def } \mathfrak{v}) = \mathfrak{S}\mathfrak{E}_e.$$

Im allgemeinen ist übrigens (142) resp. (142') noch zu vervollständigen durch die Arbeit der Kräfte nicht elektromagnetischen Ursprungs.

B. Spezielles über Körper- und Flächenleiter.

25. Körperliche Leiter. a) *Ruhende Körper.* Der wichtigste Fall, bei dem die durch ein veränderliches magnetisches Feld erzeugten Wechselströme zur Messung verwandt werden, ist der der Induktionswaage¹⁰⁰⁾. Im Innern einer wechselstromdurchflossenen Spule befindet sich ein Kern aus irgend einem Metall, in dem die Wirbelströme entstehen; gemessen wird die dadurch hervorgerufene scheinbare Änderung des Widerstandes und der Selbstinduktion (vgl. Nr. 27 u. f.) der umgebenden Spule. Will man aus diesen Messungen Rückschlüsse

98) Vgl. *Maxwellsche Theorie*, Art. H. A. Lorentz V 13, Nr. 23.

99) Für die Definition der Tensoroperationen $\text{def } \mathfrak{v}$ und $(\tau^* \text{ def } \mathfrak{v})$ vgl. man R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1969, p. 80.

100) Dieselbe wurde zuerst angegeben von D. E. Hughes, Phil. Mag. (5) 8 (1879), p. 50; eine orientierende Rechnung über ihr Verhalten gaben O. J. Lodge, Phil. Mag. (5) 9 (1880), p. 123 und Lord Rayleigh, Rep. Brit. Assoc. 1880, indem sie den Kern durch eine Drahtwindung ersetzt dachten.

auf den absoluten Wert der Leitfähigkeit machen, so muß natürlich die Stromverteilung im Kern berechnet sein. Eine erste Näherung für nicht zu schnelle Wechsel erhält man, indem die vom magnetischen Wechselfeld induzierte elektrische Kraft als eingeprägte behandelt wird, während dem das Feld der so erzeugten Ströme als so klein angesehen wird, daß das zugehörige magnetische Feld nicht mehr der Grund für neue Induktionen sein kann.

Ist z. B. in einer (unendlich) langen Spule, die in ihrem Innern das in der z -Richtung gerichtete homogene magnetische Wechselfeld

$$(143) \quad \mathfrak{H}_z = H_0 e^{i\nu t}$$

erzeugt, ein langer zylindrischer Kern vom Radius a und mit der Leitfähigkeit σ angebracht, so werden in demselben Kreisströme $\mathfrak{I} e^{i\nu t}$ erzeugt, die sich nach (I') bestimmen aus

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \mathfrak{I} = - \frac{i\nu\mu\sigma}{c} H_0$$

zu:

$$(144) \quad \mathfrak{I} = - \frac{i\nu\mu\sigma}{2c} H_0 r,$$

wenn r der Abstand von der Mittellinie des Kernes ist. Die Werte \mathfrak{H} und \mathfrak{I} aus (143) und (144) erfüllen indessen nicht die zweite Grundgleichung (II'); eine zweite Näherung erhält man, indem jetzt aus dieser Gleichung das zum Werte \mathfrak{I} aus (144) zugehörige magnetische Feld berechnet wird, welches dann wieder in Gleichung (I') als Ursache eines Induktionsstroms höherer Ordnung auftreten kann. Durch fortgesetzte Näherung ist es möglich, den genannten Ausdruck für die Induktionsströme zu gewinnen. Kann und will man sich auf eine erste Näherung beschränken, so ist es in allgemeineren Fällen vorteilhaft, das induzierende Magnetfeld nach (17) aus einem Vektorpotential \mathfrak{A}_0 abzuleiten; man erhält dann aus (I')

$$(145) \quad \mathfrak{E} = - \frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c} - \text{grad } \varphi,$$

so daß man nach (II') das skalare Potential φ zu bestimmen hat aus

$$(146) \quad - \text{div } \mathfrak{E} = \Delta \varphi + \frac{1}{c} \text{div } \dot{\mathfrak{A}}_0 = 0,$$

wenn noch $\mathfrak{E}_e = 0$ gesetzt wird. Die Größe $\frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c}$ spielt dieselbe Rolle, wie eine gewöhnliche eingeprägte elektrische Kraft (vgl. Gleichung (2')). Gleichung (146) ist dann weiter zu behandeln, wie im ersten Abschnitt angegeben.

Manchmal ist es indessen weitaus vorzuziehen, das Problem auf

Grund von (I') und (II') sofort ins strenge zu stellen¹⁰¹⁾. Man kann dann im allgemeinen von den Gleichungen (134) oder (138) für \mathfrak{B} ausgehen. In dem schon oben betrachteten besonderen Fall kann man ebenso gut aus (I') und (II') gleich für die Größe H , definiert durch den Ansatz:

$$(147) \quad \mathfrak{S}_z = H e^{i\nu t},$$

die Gleichung gewinnen:

$$(148) \quad \Delta H - \frac{i\mu\sigma\nu}{c^2} H = 0$$

mit der Grenzbedingung

$$(148') \quad H = H_0 \quad \text{für} \quad r = a.$$

Setzt man noch

$$(149) \quad k^2 = -\frac{i\mu\sigma\nu}{c^2},$$

so wird demnach

$$(150) \quad H = H_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)},$$

wo J_0 die gewöhnliche *Besselsche* Funktion nullter Ordnung bedeutet. Der Strom \mathfrak{S} folgt nach (II') durch Differentiation von (150). Für kleine Werte von ka und damit auch von kr hat man statt (150)

101) Der Fall einer Kreisscheibe, der der ursprünglichen *Hughesschen* Anordnung entspricht, wird behandelt von *H. Lamb*, Proc. Roy. Soc. London 42 (1887), p. 289, sowie von *A. Oberbeck*, Ann. d. Phys. 31 (1887), p. 812; für die zur Anwendung kommende spezielle Methode vgl. Nr. 26 dieses Artikels. Der hier näher ins Auge gefaßte Fall eines zylindrischen Kernes wird behandelt von *A. Oberbeck*, Ann. d. Phys. 21 (1884), p. 672, und von *H. Lamb*, Proc. London math. soc. (1884), p. 139, sowie von *W. v. Ignatowski*, Journ. d. russ. phys. chem. Ges. 34 (1902), p. 49. Experimentelle Untersuchungen wurden mit der Induktionswage u. a. ausgeführt von *A. Oberbeck* u. *J. Bergmann*, Ann. d. Phys. 31 (1887), p. 792; *J. Bergmann*, Ann. d. Phys. 42 (1891), p. 90; *M. Wien*, Ann. d. Phys. 49 (1893), p. 306, der eine allgemeine Methode zur Messung der Leitfähigkeit im obigen Sinne ausarbeitet. Zur Bestimmung der Leitfähigkeit von Na. wurde die *Wiensche* Methode benutzt von *E. Lohr*, Wien Ber. 113 (1904), p. 911. Eine genauere Untersuchung des Einflusses der endlichen Länge der Kerne, sowie eine vollständige Theorie der Induktionswage für Kerne mit kreisförmigem, resp. rechteckigem Querschnitt gibt *J. W. Grover*, Diss. München 1908. Für die Technik ist der Fall eines Kernes aus Blech von Wichtigkeit, vgl. *J. J. Thomson*, Electrician 28 (1892), p. 599 und *P. Debye*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54 (1906), p. 418, der u. a. experimentell untersucht wird von *A. Kühns*, Elektrot. Zeitschr. 27 (1906), p. 901. Der Fall einer Kugel in einem magnetischen Wechselfeld wird behandelt von *A. Oberbeck*, Ann. d. Phys. 31 (1887), p. 812; *H. Lamb*, Proc. London math. soc. (1884), p. 139; *C. Niven*, Philos. Trans. 172 (1882), p. 307 und von *C. S. Whitehead*, Phil. Mag. 48 (1899), p. 165. Einige Folgerungen der *Hertzschen* Theorie (vgl. Ann. 83) für eine Kugel im Drehfeld werden experimentell geprüft von *O. M. Corbino*, Phys. Zeitschr. 6 (1905), p. 227 und Nuovo Cim. (5) 9 (1905), p. 204.

in erster Näherung:

$$(150') \quad H = H_0 \left(1 - i \frac{\mu \sigma v}{4c^2} (a^2 - r^2) \right).$$

Das Zusatzglied entspricht dem magnetischen Felde des durch (144) dargestellten spezifischen Stromes. Für große Werte von ka und kr kann (150) ersetzt werden durch den Näherungswert

$$(150'') \quad H = H_0 \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\sqrt{\frac{\mu \sigma v}{2c^2}}(a-r)} e^{-i \sqrt{\frac{\mu \sigma v}{2c^2}}(a-r)},$$

der entsprechend dem nach dem Innern des Kernes hin sehr stark abfallenden Exponentialfaktor den „Skin“effekt zum Ausdruck bringt. Die Wirkung der Wirbelströme im Kern verkleinert im Innern der Spule das ursprüngliche Magnetfeld; neben einer scheinbaren Vergrößerung des Widerstandes erzeugt derselbe also im Anschluß an die energetische Definition (Nr. 29) des Selbstinduktionskoeffizienten noch eine Verringerung des Selbstinduktionskoeffizienten der umgebenden Spule.

b) *Bewegte Körper.* Sind die Geschwindigkeiten der Bewegung klein, so genügt in manchen Fällen eine Näherung, welche der in dieser Nummer zuerst behandelten ganz analog ist. Sei nämlich \mathfrak{A}_0 wieder das Vektorpotential des ursprünglich vorhandenen magnetischen Feldes, dann ergibt sich \mathfrak{E} nach (I'') näherungsweise aus:

$$(151) \quad \mathfrak{E} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c} + \frac{1}{c} [v, \text{rot } \mathfrak{A}_0] - \text{grad } \varphi,$$

wenn wir noch mit Rücksicht darauf, daß keine Ladungen im Raum vorhanden sind, φ bestimmen aus:

$$(152) \quad -\text{div } \mathfrak{E} = \Delta \varphi + \frac{1}{c} \text{div} (\dot{\mathfrak{A}}_0 - [v \text{ rot } \mathfrak{A}_0]) = 0.$$

Das Potential φ genügt also derselben Gleichung wie im stationären Fall, wenn wir die Größe:

$$\frac{\mathfrak{A}_0}{c} - \left[\frac{v}{c} \text{rot } \mathfrak{A}_0 \right]$$

als eingeprägte elektrische Kraft auffassen. Bei dieser Näherung ist, wie leicht ersichtlich, die Rückwirkung der „induzierten Ströme erster Ordnung“ auf das Feld unberücksichtigt geblieben. Durch sukzessive Übereinanderlagerung der Wirkungen der Felder erster, zweiter usw. Ordnung kann man das Induktionsproblem wieder in Strenge lösen. Wenn ausführbar, so ist die direkte Integration indessen vorzuziehen; wie diese zu erfolgen hat, möge an dem folgenden einfachen Beispiel erläutert werden¹⁰²⁾.

102) Die zuerst von Arago, Ann. de chim. et phys. 27 (1824), p. 363 und 28

Ein um seine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Zylinder von der Leitfähigkeit σ und der Permeabilität $\mu = 1$ (Radius = a) befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Stärke H_0 , dessen Kraftlinien senkrecht zur Zylinderachse verlaufen. Fällt die Zylinderachse mit der z -Achse des Koordinatensystems und die Richtung der Feldstärke H_0 mit der x -Achse zusammen, so kann das ursprüngliche Feld nach (139) abgeleitet werden aus einem Vektor $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_z^0 = u_0$, dessen einzig vorhandene z -Komponente den Wert hat:

$$(152) \quad u_0 = H_0 y = H_0 \rho \sin \varphi = \Im [H_0 \rho e^{i\varphi}],$$

wobei noch in der $x - y$ -Ebene Polarkoordinaten ρ, φ eingeführt wurden. Auch der Vektor \mathfrak{B} des induzierten Zusatzfeldes hat nur z -Komponenten, die im Innern des Zylinders u_i und im Außenraum u_a heißen mögen. Dann gilt nach (138') mir $v_\rho = 0, v_\varphi = \rho \omega, v_z = 0$:

$$(153) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial u_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} - \frac{\sigma \omega}{c^2} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} = 0$$

und im Außenraum ($v_\rho = v_\varphi = v_z = 0$):

$$(153') \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial u_a}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_a}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Rechnet man mit komplexen Größen, von denen man später den imaginären Teil nimmt, so folgt aus (153) und (153')¹⁰³:

(1825), p. 325 beschriebenen Einwirkungen rotierender Leiter auf beweglich aufgehängte Magneten, welche dann von *M. Faraday*, Exp. Res. Ser. 1, § 81 u. f. (1831) auf die vorhandenen induzierten Ströme zurückgeführt wurden, sind in der angegebenen Art zuerst näherungsweise berechnet von *Jochmann*, Crelles Journ. 63 (1863), p. 1; Ann. Phys. Chem. 122 (1864), p. 214. Die Wirkung einer leitenden Kugel auf die Schwingungen eines Magneten wird untersucht von *Riecke*, Gött. Abhdl. 21 (1876), p. 1. Die strenge Berechnung der in Kugeln durch bewegte Magnete erzeugten Ströme rührt her von *H. Hertz*, Diss. Berlin 1880 oder Ges. Werke Bd. I, p. 37. Die Induktionsströme erster Ordnung in Ellipsoide werden berechnet von *R. Gans*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 48 (1902), p. 1; eine allgemeine Untersuchung über die bei diesen Problemen auftretenden harmonischen Funktionen wird angedeutet von *A. Tauber*, Ber. d. Deutsch. Math.-Ver. 7 (1899), p. 14. Der für die Technik wichtige Fall der Wirbelstrombremsen wird behandelt von *R. Rüdberg*, Samml. elektrot. Vortr. Nr. 8, Bd. X, Stuttgart 1906. Zu diesen Erscheinungen gehören auch die der sogenannten Unipolar-Induktion Genaueres in *Maxwellsche Theorie*, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 18. Kritisches über die oft aufgeworfene Frage nach dem Mitrotieren der Kraftlinien findet sich bei *H. Poincaré*, Eclair. électr. 23 (1900), p. 41. Eine historische Darstellung der ausgedehnten Literatur findet sich bei *S. Valentiner*, Die elektromagn. Rotationen und die Unipolarinduktion. Karlsruhe 1904.

103) $J_1(ka)$ bedeutet die *Besselsche* Funktion erster Ordnung mit dem Argument ka .

$$(154) \quad \begin{cases} u_i = 2 H_0 a \frac{1}{J_1(ka) + ka J_1'(ka)} J_1(k\rho) e^{i\varphi}, \\ u_a = H_0 a \frac{J_1(ka) - ka J_1'(ka)}{J_1(ka) + ka J_1'(ka)} \frac{a}{\rho} e^{i\varphi}, \end{cases} \quad k^2 = \frac{\sigma \omega}{c^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

wobei die ursprünglich verfügbaren konstanten Faktoren dadurch bestimmt werden, daß an der Oberfläche des Zylinders ($\rho = a$) sowohl die Tangential- wie die Normalkomponenten von \mathfrak{H} stetig übergehen, letzteres, weil μ für den ganzen Raum denselben Wert hat. Bei Benutzung der Differentiationsvorschrift (139) ist jetzt \mathfrak{H} im ganzen Raum, \mathfrak{E} indessen nur im Innern des Zylinders aus (154) zu bestimmen. Im Außenraum müssen wir (vgl. das Ende von Nr. 23) zunächst ein Potential φ bestimmen, so beschaffen, daß die aus φ abgeleitete tangential elektrische Feldstärke gegen die innere entsprechende einen Sprung zeigt von der Größe

$$\frac{1}{c} [\mathfrak{H}v].$$

Dieses ist hier, wie man sich sofort überzeugt, der Fall, wenn die äußere tangential elektrische Feldstärke verschwindet. Demnach wird überall im Außenraum $\varphi = 0$, ein äußeres elektrisches Feld ist nicht vorhanden. Man versteht dieses Resultat wohl am besten, wenn man sich die Entstehung der Ströme überlegt, während dem der Zylinder in Rotation versetzt wird. Man sieht dann, daß keine normal zur Oberfläche gerichtete Strömung vorhanden ist, also auch keine Ladungen erzeugt werden können. Die Sachlage würde indessen sofort eine andere, wenn wir dem Zylinder eine endliche Länge erteilen würden. Die Formeln (154) vereinfachen sich im Grenzfall $ka \ll 1$ zu

$$(154') \quad \begin{cases} u_i = H_0 \rho e^{i\varphi} \left(1 - i \frac{\sigma \omega}{8c^2} (\rho^2 - 2a^2)\right) \\ u_a = -i \frac{\sigma \omega a^2}{8c^2} H_0 a \frac{a}{\rho} e^{i\varphi}, \end{cases}$$

woraus z. B. nach (139) in erster Näherung:

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\omega}{c} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} = -\frac{i\omega}{c} H_0 \rho e^{i\varphi}.$$

Für große Werte von ka und $k\rho$ wird:

$$(154'') \quad \begin{cases} u_i = \frac{H_0 a}{\xi a} \sqrt{\frac{2a}{\rho}} e^{-\xi(a-\rho)} e^{i\left\{\varphi - \frac{\pi}{4} - \xi(a-\rho)\right\}} \\ u_a = -H_0 a \frac{a}{\rho} e^{i\varphi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\xi a} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \end{cases} \quad \text{mit } \xi = \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2c^2}}$$

und demnach

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{i\omega}{c} \frac{H_0 a}{\xi a} \sqrt{\frac{2a}{\rho}} e^{-\xi(a-\rho)} e^{i\left\{\varphi - \frac{\pi}{4} - \xi(a-\rho)\right\}}.$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ist also der ganze Zylinder von Strömen erfüllt, die gegen das erzeugende magnetische Feld eine Phasenverschiebung von π haben. Bei großen Geschwindigkeiten bildet sich wieder ein „Skin“-Effekt aus, die Ströme sind auf eine Schicht in der Nähe der Oberfläche beschränkt und haben in der Grenze in unmittelbarer Nähe der Oberfläche eine Phasenverschiebung von $3\pi/4$ gegen das erzeugende Feld.

26. Flächenleiter. Für Flächenleiter, deren Dicke so klein ist, daß bei dem in Betracht kommenden Tempo der Änderungen des magnetischen Feldes der Strom noch als in der Dickenrichtung gleichförmig über den Querschnitt verteilt angenommen werden kann, wird es möglich, die Bestimmung der Induktionswirkungen in sehr einfacher Weise auszuführen¹⁰⁴). Berechnet man \mathfrak{H} aus einem Vektorpotential \mathfrak{A} , so gilt (vgl. Nr. 3) im Raume außerhalb der Stromschicht:

$$(18) \quad \Delta \mathfrak{A} = 0.$$

Beschränken wir uns nun auf eine ebene Schicht in der x, y -Ebene von der Dicke δ , so sind auf beiden Seiten $z = \pm \frac{\delta}{2}$ die magnetischen Feldstärken parallel zur Schicht, soweit sie vom Strome herrühren, einander gleich. Nennt man dieselben in unmittelbarer Nachbarschaft der Schicht H_x und H_y , so gibt Gleichung (II') die Beziehung:

$$(155) \quad H_x = \frac{1}{2c} J_y, \quad H_y = -\frac{1}{2c} J_x,$$

wenn J der Strom in der Schicht bedeutet. In diese Grenzbedingungen wollen wir nun statt H und J die Komponenten A_x und A_y des Vektorpotentials \mathfrak{A} für $z = \frac{\delta}{2}$ einführen. Es hat einerseits das vom Strome herrührende Vektorpotential \mathfrak{A} keine z -Komponente, so daß man erhält

$$(156) \quad H_x = -\frac{\partial}{\partial z} A_y, \quad H_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x.$$

Andererseits folgt allgemein aus (I'):

$$(157) \quad \mathfrak{H} = -\frac{\sigma}{c} (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_0) - \text{grad } \varphi,$$

wenn noch \mathfrak{A}_0 das Vektorpotential des äußeren erregenden magnetischen Feldes bedeutet. Sieht man von einer von eingepprägten Kräften gewöhnlicher Art herrührenden Strömung ab, so kann $\varphi = 0$ gesetzt

104) Die Methode rührt her von J. C. Maxwell, Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, Bd. 2, p. 263, Art. 647f., sowie Proc. Roy. Soc. 20, p. 160.

werden, dann wird nach (157):

$$(158) \quad J = -\frac{\sigma\delta}{c}(\dot{A} + \dot{A}_0).$$

Die Kombination von (156) und (158) mit (155) liefert also die an der Schicht ($z = 0$) zu erfüllende Bedingung:

$$(159) \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\sigma\delta}{2c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\sigma\delta}{2c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t}.$$

Die Gleichung (18), die ja von vornherein im ganzen Raum erfüllt sein muß, zusammen mit der Randbedingung (159) definiert das Problem vollständig.

Sind z. B. in der Schicht Ströme erzeugt, deren Vektorpotential zur Zeit $t = 0$ gegeben ist durch

$$(160) \quad \mathfrak{A}_x = f_1(x, y, z), \quad \mathfrak{A}_y = f_2(x, y, z),$$

so ist, da (18) die Zeit nicht enthält, auch

$$(160') \quad \mathfrak{A}_x = f_1(x, y, z + ut), \quad \mathfrak{A}_y = f_2(x, y, z + ut)$$

eine Lösung. Denken wir uns nun die Ursache der Induktion zur Zeit $t = 0$ plötzlich verschwunden, so werden die Gleichungen (160') das Magnetfeld für alle folgenden Zeiten richtig darstellen, wenn wir noch, damit die Grenzbedingung (160) mit $A_0 = 0$ erfüllt ist, die Geschwindigkeit u bestimmen zu

$$(161) \quad u = \frac{2c^2}{\sigma\delta}.$$

Ist die Leitfähigkeit unendlich groß, so wird $u = 0$, so daß das Feld (160') und damit die Ströme in der Platte für alle Zeiten erhalten bleiben. Denken wir uns andererseits auf der positiven Seite der Schicht zur Zeit $t = 0$ plötzlich ein System erzeugt, dem das Vektorpotential \mathfrak{A}_0 zukommt, so folgt aus (150) für den Oberflächenwert A des von den Strömen herrührenden Vektorpotentials \mathfrak{A}

$$A = -A_0 \quad \text{für } t = 0.$$

Man kann nun den Wert $A = -A_0$ gemäß (18) in den oberen Raum ($z > 0$) fortsetzen, indem man für $t = 0$ das Vektorpotential $-\mathfrak{A}(x, y, z)$ berechnet als zugehörig zu einem dem erregenden System ganz gleichen, das in bezug auf die Ebene $z = 0$ spiegelbildlich zum erregenden Systeme liegt. Im unteren Raum $z < 0$ ist die Wirkung zur Zeit $t = 0$ Null; das Vektorpotential der Strömung entspricht also für $z < 0$ und $t = 0$ einem mit dem erregenden zusammenfallenden System, bei dem alle Ströme im Vergleich mit dem ursprünglichen die umgekehrte Richtung erhielten. Bleibt das erregende Feld weiterhin konstant, so wird der zeitliche Verlauf der Vorgänge

(für $t > 0$) ohne weiteres durch (160') bestimmt, so daß z. B. für $z > 0$ das Vektorpotential der Ströme in der Schicht dem sich mit der Geschwindigkeit u nach $z = -\infty$ bewegenden Spiegelbild des ursprünglichen Systems entspricht.

Durch geeignete Übereinanderlagerung solcher den unendlich kleinen Änderungen des erregenden Systems entsprechenden bewegten Bilder erhält man ohne weiteres auch die Lösung für die Wirkung der von irgend einem beliebig veränderlichen System erzeugten Ströme in sehr anschaulicher Form.

Zur Lösung kann man ganz ähnlich wie oben auch von dem skalaren magnetischen Potential ausgehen. Unter Benutzung der in diesem Falle geltenden Formeln fand z. B. *Maxwell*¹⁰⁵), daß die Kraftwirkung, welche von einer leitenden Ebene auf einen parallel mit derselben im Abstände $z = h$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit v in der x -Richtung bewegten magnetischen Pol von der Stärke 1 ausgeübt wird, sich zusammensetzt aus einer verzögernden Kraft

$$X = -\frac{1}{4h^2} \frac{vu}{(u + \sqrt{u^2 + v^2})\sqrt{u^2 + v^2}}$$

und einer abstoßenden Kraft

$$Z = \frac{1}{4h^2} \frac{v^2}{(u + \sqrt{u^2 + v^2})\sqrt{u^2 + v^2}},$$

wobei die Geschwindigkeit u durch (161) definiert wird.

In analoger Weise gelang es von den von *Arago* entdeckten Kräften einer rotierenden Kreisscheibe auf einen Magnetpol Rechenschaft zu geben¹⁰⁶).

C. Lineare Leiter.

27. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Stromkreise ohne Kapazität. Definition der Induktionskoeffizienten. Für lineare

105) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, Bd. 2, p. 273, Art. 664 f.

106) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, Bd. 2, p. 275, Art. 668 f. Der Fall der Induktion in einer unendlich großen rotierenden Ebene wird behandelt von *A. B. Basset*, Phil. Mag. (5) 22 (1886), p. 140. Die Berechnung der Induktion in ellipsoidischen Flächen findet sich bei *H. Lamb*, Proc. Roy. Soc. London 42 (1887), p. 196. Eine ausgedehnte Behandlung der Induktion in ebenen, zylindrischen und sphärischen Flächen rührt her von *G. H. Bryan*, Phil. Mag. 38 (1894), p. 198 und 45 (1898), p. 381. Vgl. auch *J. Larmor*, Proc. Math. Soc. London (2) 8 (1909), p. 1. Die Wirkung endlicher Stromschichten behandelt *J. H. Jeans*, Proc. Math. Soc. London 31 (1899) p. 151. Eine genaue Behandlung, ohne Vernachlässigung der Verschiebungsströme, der in einer Platte von einem parallelen wechselstromdurchflossenen Drahte induzierten Ströme gibt *T. Levi-Civita*, Rend. R. Acc. dei Lincei (5) 11 (1902), p. 163, 191 u. 228; Nuovo Cim. (5) 3 (1902), p. 442.

Leiter lassen sich die allgemeinen Beziehungen (I') und (II') ähnlich spezialisieren, wie das in Nr. 17 für die Ableitung der *Kirchhoffschen* Relationen geschah.

Nach (II') ist

$$(162) \quad \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0,$$

so daß genau wie in Nr. 17 für jeden Knotenpunkt gilt:

$$(162') \quad \sum J_p = 0,$$

wobei unter J_p der Gesamtstrom im p^{ten} Drahte verstanden wird. So lange wir (II') zugrunde legen und keine Verschiebungsströme berücksichtigen, ist also in einem Einzeldrahte die Stromstärke für alle Querschnitte dieselbe.

Gleichung (I') ergibt für jeden geschlossenen Umgang mit dem Längenelement ds

$$(163) \quad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n d\sigma = -\frac{\dot{Z}}{c},$$

wenn $d\sigma$ resp. n Flächenelement resp. Normale der eingeschlossenen Fläche bedeuten und zur Abkürzung der durch diese Fläche pulsierende Kraftfluß

$$(164) \quad \int \mathfrak{B}_n d\sigma = Z$$

gesetzt wird. Mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (III) kann statt (163) auch geschrieben werden:

$$(163') \quad \int \mathfrak{S}_\sigma ds = \int \mathfrak{E}_s ds - \frac{\dot{Z}}{c}.$$

Nach (163') ist eine gleichmäßige Verteilung des Stromes über die Drahtquerschnitte außer bei ganz spezieller Verteilung der eingepprägten elektromotorischen Kräfte im allgemeinen ausgeschlossen. Für nicht zu schnell veränderliche Zustände wird es indessen in erster Näherung gestattet sein, mit einer gleichmäßigen Stromverteilung zu rechnen, bei der zugleich die Ströme \mathfrak{S} der einzelnen Stromfäden noch keine Phasenverschiebung gegeneinander zeigen. Dazu ist vor allen Dingen nötig, daß es gestattet sei unter Z einen Mittelwert für die verschiedenen Stromfäden zu verstehen. Dann geht unter Berücksichtigung der Definitionen (91) und (92) für den Widerstand w und die elektromotorische Kraft E Gleichung (163') über in

$$(163'') \quad \sum J_p w_p = \sum E_p - \frac{\dot{Z}}{c}.$$

Ist $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ und μ von \mathfrak{H} unabhängig, so ist \mathfrak{B} und damit auch Z eine lineare Funktion aller Ströme. Die Kombination von (163'')

man, indem noch mit Rücksicht auf (17) das Oberflächenintegral in ein Linienintegral umgewandelt wird:

$$(167) \quad 4\pi c Z_{\mu\nu} = \frac{1}{q_\mu} \int dq_\mu \int (\mathfrak{A}_\nu d\mathfrak{s}_\mu) = \frac{J_\nu}{q_\mu q_\nu} \int dq_\mu \int dq_\nu \int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu d\mathfrak{s}_\nu)}{r}.$$

Hiernach ist also mit Rücksicht auf (156) der gegenseitige Induktionskoeffizient zu berechnen nach der Formel:

$$(168) \quad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = \frac{1}{q_\mu q_\nu} \int dq_\mu \int dq_\nu \int \int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu d\mathfrak{s}_\nu)}{r},$$

während sich für den Selbstinduktionskoeffizient ergibt¹⁰⁸⁾:

$$(169) \quad 4\pi c^2 L_{\mu\mu} = \frac{1}{q_\mu^2} \int \int dq_\mu dq'_\mu \int \int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu d\mathfrak{s}'_\mu)}{r},$$

wobei die Integration zweimal über den betreffenden Draht zu erstrecken ist. Unter der Voraussetzung, daß die Drahtquerschnitte klein gegen die Entfernungen der Drähte sind, läßt sich (168) vereinfachen zu

$$(168') \quad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = \int \int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu d\mathfrak{s}_\nu)}{r}.$$

Nach (168) oder (168') folgt noch die Beziehung:

$$(170) \quad L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}.$$

Die zuletzt erhaltene Beziehung (170) ist nicht auf den vorausgesetzten Fall konstanter räumlicher Permeabilität beschränkt, sie gilt allgemein, auch wenn ferromagnetische Körper sich im Felde befinden, so lange nur μ als von der Feldstärke unabhängig angesehen werden kann. Zerlegt man nämlich die Feldstärke \mathfrak{H} sowie das Vektorpotential \mathfrak{A} , entsprechend dem Vorhandensein von n Strömen J_1 bis J_n , in n Teilfelder \mathfrak{H}_1 bis \mathfrak{H}_n resp. n Teilpotentiale \mathfrak{A}_1 bis \mathfrak{A}_n , so ist der in (165) auftretende über den μ^{ten} Stromkreis gemittelte Kraftfluß Z_μ zusammengesetzt aus n Bestandteilen, so daß z. B.

$$Z_\mu = Z_{\mu 1} + \dots + Z_{\mu\mu} \dots + Z_{\mu n}.$$

Allgemein bedeutet dabei also $Z_{\mu\nu}$ den Kraftfluß, den der ν^{to} Stromkreis für sich allein genommen durch den μ^{ten} hindurchschickt, gemittelt für alle Stromfäden des letzteren. Nun ist also zunächst der Definition nach:

$$J_\mu Z_{\mu\nu} = \frac{J_\mu}{q_\mu} \int dq_\mu \int \mathfrak{B}_{\nu\nu} d\sigma_\mu = \int \mathfrak{F}_\mu dq_\mu \int \mathfrak{B}_{\nu\nu} d\sigma_\mu,$$

108) Die hier benutzte Definition des Selbst- und gegenseitigen Induktionskoeffizienten unterscheidet sich von der üblichen durch den Faktor $\frac{1}{4\pi c^2}$, so daß hier $4\pi c^2 L$ dem Zahlenwert nach mit der sonst gebräuchlichen Definition übereinstimmt.

wobei $\mathfrak{B}_{n\nu}$ die auf der vom Strome umrandeten Fläche mit dem Element $d\sigma_\mu$ senkrecht stehende Komponente des Teilfeldes \mathfrak{B}_ν bedeutet. Weiterhin ist nach (18):

$$\int \mathfrak{H}_\mu dq_\nu \int \mathfrak{B}_{n\nu} d\sigma_\mu = \int \mathfrak{H}_\mu dq_\mu \int \mathfrak{A}_{\nu s} ds = \int (\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{A}_\nu) dS,$$

wobei letztere Integration über den ganzen unendlichen Raum erstreckt werden kann, oder auch mit Rücksicht auf (II):

$$J_\mu Z_{\mu\nu} = c \int (\mathfrak{A}_\nu \operatorname{rot} \mathfrak{H}_\mu) dS.$$

Schließlich können wir dann unter Benutzung der Beziehung:

$$\operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

und unter Berücksichtigung von (18) auch schreiben:

$$(171) \quad \frac{J_\mu}{c} Z_{\mu\nu} = \int (\mathfrak{H}_\mu \operatorname{rot} \mathfrak{A}_\nu) dS = \int (\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{B}_\nu) dS.$$

Ebenso folgt natürlich:

$$(171') \quad \frac{J_\nu}{c} Z_{\nu\mu} = \int (\mathfrak{H}_\nu \mathfrak{B}_\mu) dS,$$

so daß, so lange die Permeabilität von der Feldstärke unabhängig ist:

$$(172) \quad \frac{J_\mu}{c} Z_{\mu\nu} = \frac{J_\nu}{c} Z_{\nu\mu},$$

was mit Rücksicht auf die Definition (165) der Induktionskoeffizienten gleichbedeutend mit (170) ist.

Die alle unter sich gleichen Größen:

$$\frac{J_\mu}{c} Z_{\mu\nu} = \frac{J_\nu}{c} Z_{\nu\mu}$$

resp.

$$\int (\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{B}_\nu) dS = \int (\mathfrak{H}_\nu \mathfrak{B}_\mu) dS$$

resp.

$$\mathfrak{L}_{\mu\nu} J_\mu J_\nu = \mathfrak{L}_{\nu\mu} J_\nu J_\mu$$

bedeuten die wechselseitige Energie der Stromkreise μ und ν (vgl. Nr. 29). Diese Größe trat historisch zuerst auf als *F. Neumannsches Potential*, aus dem zugleich auch die Kraftwirkung zweier Ströme aufeinander ohne weiteres berechnet werden kann (vgl. Nr. 35). Die obigen Überlegungen sind, wie schon hervorgehoben, nur so lange ausreichend als die Stromverteilung noch nicht merklich von der stationären abweicht. So lange diese Bedingung erfüllt ist, kann man demnach durch Bildung des oben definierten Begriffes des Induktionskoeffizienten die Integration der ursprünglichen *Maxwellschen* Gleichungen von vornherein ersetzen durch die viel einfachere Behandlung einer endlichen Zahl totaler Differentialgleichungen. Sobald in-

dessen die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit so groß wird, daß bei periodischen Vorgängen z. B. die Wellenlänge im Innern der Leiter von der Größenordnung der Querschnittsdimensionen derselben wird, so ist eine Integration der Grundgleichungen nicht mehr zu umgehen. Hat man diese (vielleicht auch nur annähernd) ausgeführt und so die Stromverteilung über die Drahtquerschnitte bestimmt, dann kann man freilich wieder unter Benutzung dieses Resultats Widerstände und Induktionskoeffizienten definieren, mit deren Hilfe die Aufgabe dann nachträglich auf totale Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Die Definition dieser Begriffe erfolgt dann wohl am besten energetisch in der in Nr. 29 angegebenen Art.

Sind die Stromkreise in Bewegung begriffen, so hat man nach (II'') auf der rechten Seite von (163) noch die Größe

$$-\frac{1}{c} \int \operatorname{rot}_n [\mathfrak{B}v] d\sigma$$

zu addieren. Nach einem bekannten Satze¹⁰⁹⁾ ist dann die ganze rechte Seite gleich der totalen Änderungsgeschwindigkeit $\frac{dZ}{dt}$ des Kraftflusses. Mit Rücksicht darauf, daß die Induktionskoeffizienten noch Parameter enthalten, welche die gegenseitige Lage der Stromkreise bestimmen und weil zugleich für die Berechnung des magnetischen Feldes nur die augenblickliche Lage der Ströme maßgebend ist, sind auch jetzt nach (165) die Erscheinungen mittels dieser Koeffizienten darstellbar.

28. Die Differentialgleichungen für Stromkreise mit Kapazität.

Sind in einem Stromkreis größere Kondensatoren enthalten, so verliert die ausnahmslose Vernachlässigung der Verschiebungsströme ihre Berechtigung, dieselben müssen dann wenigstens im Innern der Kondensatoren als Fortsetzung des Leitungsstromes in Betracht gezogen werden. Setzt man für den spezifischen Verschiebungsstrom

$$(173) \quad \mathfrak{S} = \varepsilon \mathfrak{E},$$

so erhält man nach (I') zunächst statt (162)

$$(174) \quad \operatorname{div} (\mathfrak{S} + \mathfrak{B}) = 0.$$

Gleichung (163) dagegen bleibt unverändert. Betrachtet man z. B. den Fall eines einzelnen Stromkreises mit eingeschalteter Kapazität, so besteht das Linienintegral in (163) aus einem Teil (1), der dem Leitungsstrom entlang geht, wo $\mathfrak{S} = 0$ angenommen werden kann, und einem Teil (2), der dem Verschiebungsstrom im Innern des Kon-

109) Vgl. *Maxwells* elektromagnetische Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 4, Gleichung (14).

densators entlang geführt wird, wo $\mathfrak{S} = 0$ ist. Differenziert man nun (163) nach t , so kann für den Teil (1) des betreffenden Integrals geschrieben werden:

$$\int_{(1)} \frac{\dot{\mathfrak{S}}}{\sigma} ds - \int_{(1)} \dot{\mathfrak{G}}_e ds = w\dot{J} - \dot{E},$$

während sich für den zweiten Teil unter Berücksichtigung von (173) ergibt:

$$\int_{(2)} \mathfrak{B} ds = J \int_{(2)} \frac{ds}{q^2} = J \frac{l}{q^2} = \frac{J}{K},$$

wobei q den für den Verschiebungsstrom im Innern des Kondensators verfügbaren Querschnitt und l den Abstand der Kondensatorplatten bedeutet. Die Größe K ist demnach die Kapazität des Kondensators.

Mit Rücksicht auf (174) und (165) lautet also jetzt die Differentialgleichung für den Strom in einem Kreis mit Selbstinduktion und Kapazität

$$(175) \quad L\ddot{J} + w\dot{J} + \frac{J}{K} = \dot{E}.$$

Sind mehrere Kreise oder ein Stromnetz vorhanden, so liefert wieder (163) und (174) in der oben angegebenen Art die genügende Anzahl Gleichungen zur Bestimmung der Ströme¹¹⁰). Streng genommen geht indessen von jeder Stelle der Drähte ein Verschiebungsstrom in das Dielektrikum, so daß nach (174) der Strom J längs der Drähte nicht konstant sein kann. Man kann diesen Umstand näherungsweise in Rechnung ziehen, indem man jedem Element des Stromleiters eine spezifische Kapazität und Selbstinduktion zuschreibt. Der Strom ergibt sich dann als Funktion der Stelle im Draht und der Zeit durch die Lösung der mit der Wärmeleitungsgleichung formal identischen Telegraphengleichung¹¹¹).

29. Die Energiegleichung. Vernachlässigt man die Verschiebungsströme, so ist nach (133) neben der von den eingepprägten elektrischen Kräften herrührenden Energie nur noch die Wärmeenergie Q und die magnetische Energie W_m zu berücksichtigen. Unter den spezielleren Voraussetzungen der Nr. 27 gilt für ein Stromnetz, wie ohne weiteres ersichtlich:

$$(176) \quad Q = \sum w_p J_p^2.$$

110) Dabei wird man dann noch auf den Begriff der gegenseitigen Kapazität geführt, welche indessen in den allermeisten Fällen unberücksichtigt bleiben kann. Vgl. hierzu *M. Wien*, Ann. Phys. Chem. 61 (1897), p. 151.

111) Vgl. Elektromagnetische Wellen, Art. *M. Abraham* V 18, Nr. 11.

in erster Näherung die Energiegleichung noch zu vervollständigen durch die hauptsächlich in Betracht kommende in denselben aufgespeicherte Energie, welche sich noch durch die Kapazitäten und Elektrizitätsmengen der Kondensatoren ausdrücken läßt¹¹²⁾.

30. Induktionskoeffizienten für geradlinige Leiter. Der mittlere geometrische Abstand. Die Induktionskoeffizienten sind streng genommen nur definiert für geschlossene Stromkreise, die Formeln (168) und (169) legen es indessen nahe, den Induktionskoeffizienten zusammzusetzen aus Bruchteilen, die einzelnen ungeschlossenen Stücken der Leitung entsprechen. In diesem Sinne wollen wir die folgenden Formeln für den Induktionskoeffizient eines endlichen geraden Drahtes auffassen. Die allgemeinen Formeln (168) und (169) lassen nämlich in diesem Falle nach *Maxwell*¹¹³⁾ eine sehr einfache Interpretation zu. Das innere Doppelintegral in (168) entspricht dem $4\pi c^2$ -fachen des gegenseitigen Induktionskoeffizienten m zweier paralleler Linien. Haben diese die Länge l und den gegenseitigen Abstand ξ , so wird

$$(179) \quad 4\pi c^2 m = \iint \frac{(d\mathfrak{s}_\mu d\mathfrak{s}_\nu)}{r} = l \log \frac{\sqrt{l^2 + \xi^2} + l}{\sqrt{l^2 + \xi^2} - l} - 2\sqrt{l^2 + \xi^2} + 2\xi,$$

oder entwickelt nach Potenzen von ξ/l

$$(179') \quad 4\pi c^2 m = 2l \left\{ \log \frac{2l}{\xi} - 1 + \frac{\xi}{l} - \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{l^2} + \dots \right\}.$$

Sind nun die Querschnitte der Drähte klein gegen ihre Länge, so kann man für die Ausführung der noch erforderlichen Integration in (168) für das innere Integral nach (179') Näherungswerte einsetzen. Benutzt man zwei Glieder dieser Reihe, so erhält man:

$$(180) \quad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = 2l \left\{ \log 2l - \frac{1}{q_\mu q_\nu} \iint \log \xi dq_\mu dq_\nu - 1 \right\}.$$

Setzt man schließlich

$$(181) \quad \iint \log \xi dq_\mu dq_\nu = q_\mu q_\nu \log R,$$

so ist R der *mittlere geometrische Abstand* der beiden Querschnitte voneinander. Mit dieser Abkürzung wird dann:

$$(182) \quad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = 2l \left\{ \log \frac{2l}{R} - 1 \right\},$$

d. h. ebenso groß wie der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier *Linien* im Abstände R voneinander. Nach (181) ist klar, daß R

112) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans* V 15, Nr. 7.

113) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, 2 p. 298, Art. 691, sowie Scientific Papers, Cambridge 1890, p. 280.

zwischen dem kleinsten und dem größten Abstand zweier Punkte der Querschnitte liegt. Für einen einzelnen Draht hat man die Integration (181) zweimal über den betreffenden Querschnitt zu erstrecken und erhält dann in R den mittleren geometrischen Abstand des Querschnitts von sich selbst. Gleichung (182) ergibt dann mit diesem Wert von R den Selbstinduktionskoeffizienten. Hat man R für kompliziertere Figuren zu bestimmen, so kann man mit Vorteil den folgenden sofort aus (181) folgenden Satz benutzen.

Sind R_A, R_B, \dots die mittleren geometrischen Abstände verschiedener Teile mit den Flächeninhalten A, B, \dots einer Figur von einer anderen Figur N , so ist der mittlere geometrische Abstand R der ganzen aus A, B, \dots zusammengesetzten Figur von N gegeben durch:

$$(183) \quad (A + B + \dots) \log R = A \log R_A + B \log R_B + \dots$$

Sind die Leiter im Gegensatz zu den obigen Voraussetzungen kurz gegen ihren Abstand $l \ll \xi$, so kann man, indem (179) jetzt nach Potenzen von l/ξ entwickelt wird, für L_{uv} in erster Näherung den Wert erhalten:

$$(182') \quad 4\pi c^2 L_{uv} = l \frac{l}{\xi}$$

31. Werte für R in speziellen Fällen¹¹⁴. Nach (181) ist der mittlere geometrische Abstand R_0 eines Punktes von einem Querschnitt q_1 gegeben durch

$$q_1 \log R_0 = \int \log \xi dq_1,$$

sein Logarithmus ist also gleich dem logarithmischen Potential des gleichförmig mit Elektrizität von der Dichte 2π bedeckten Querschnitts dividiert durch dessen Flächeninhalt. Die Größe $q_1 \log R_0$ genügt also der Potentialgleichung, so daß es in manchen Fällen ohne direkte Ausführung der Integration in (181) möglich ist, R_0 in einfacher Weise zu finden. So ist z. B. das Potential φ einer Kreisscheibe vom Radius a in einem Punkt im Abstände $r > a$ vom Mittelpunkt

$$\varphi = \pi a^2 \log r$$

114) Die mittleren geometrischen Abstände von Kreisen und Linien voneinander finden sich bei *J. C. Maxwell*, Scientific Papers, Cambridge 1890, p. 280. Für eine Rechtecksfläche wird R berechnet von *B. Rosa*, Bull. of the Bur. of Stand. 3 (1907), p. 1, eine bequeme Näherungsformel gibt *Sumec*, Elektrot. Zeitschr. 27 (1906), p. 1175. Für Kombinationen mehrerer Kreisflächen (in Kabeln) wird R berechnet von *Ch. E. Guye*, Arch. des Sciences phys. et natur. 32 (1894), p. 480 u. p. 574, C. R. 118 (1894), p. 1329. Eine Zusammenstellung vieler Resultate findet sich bei *E. B. Rosa* und *L. Cohen*, Bull. of the Bur. of Stand. 5 (1909) p. 1.

und damit

$$(184) \quad \log R_0 = \log r \quad \text{oder} \quad R_0 = r.$$

Ist $r < a$, so wird

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(r^2 - a^2) + \pi a^2 \log a,$$

so daß

$$(184') \quad \log R_0 = \frac{r^2 - a^2}{2a^2} + \log a \quad \text{oder} \quad R_0 = a e^{-\frac{a^2 - r^2}{2a^2}}.$$

Ebenso ergibt sich für einen kreisringförmigen Querschnitt mit den Radien a und b ($b > a$):

$$(185) \quad \begin{cases} \log R_0 = \log r & \text{für } r > b, \\ \log R_0 = \frac{b^2 \log b - a^2 \log r}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} & \text{für } a < r < b, \\ \log R_0 = \frac{b^2 \log b - a^2 \log a}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2} & \text{für } r < a. \end{cases}$$

Aus den angegebenen Formeln folgt sofort für den mittleren geometrischen Abstand R zweier sich nicht überdeckender Kreisringe

$$(186) \quad R = d,$$

wo d der Abstand ihrer Mittelpunkte ist.

Der Logarithmus des mittleren geometrischen Abstandes eines Kreisringes von sich selbst mit den Radien b und a folgt aus (185) durch einfache Integration zu:

$$(187) \quad \log R = \log b - \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \log \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \frac{3a^2 - b^2}{b^2 - a^2}.$$

Als Spezialfall dieser Formel ergibt sich für eine Kreisfläche vom Radius b ($a = 0$):

$$(187') \quad R = b e^{-1/4}$$

und für eine Kreislinie ($b = a$):

$$(187'') \quad R = b.$$

Der mittlere geometrische Abstand eines Kreisringes von mehreren anderen folgt sofort unter Benutzung des Satzes (183) am Ende der Nr. 30.

32. Werte für die Induktionskoeffizienten in speziellen Fällen.

a) *Gerade Leiter.* Nach den Ausführungen der Nr. 30 ist der Selbstinduktionskoeffizient L eines langen geraden Drahtes (Länge = l) gleich dem gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier Linien von der Länge l in einem dem mittleren geometrischen Abstände des Querschnitts von sich selbst gleichen Abstand¹¹⁵⁾. Für einen kreis-

115) Über die Bedeutung des Ausdrucks „Induktionskoeffizient eines endlichen geraden Drahtes“ vgl. Nr. 30.

förmigen Querschnitt erhält man also nach (182) und (187')

$$(188) \quad 4\pi c^2 L = 2l \left(\log \frac{2l}{a} - \frac{3}{4} \right),$$

während der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier gerader Leiter 1 und 2 mit kreisförmigem Querschnitt sich ergibt zu

$$(188') \quad 4\pi c^2 L_{12} = 2l \left(\log \frac{2l}{d} - 1 \right),$$

wenn d der Abstand der Kreismittelpunkte ist.

Setzt man R aus (187) in (182) ein, so folgt L für einen geraden Leiter mit kreisringförmigem Querschnitt.

Für zwei parallele Drähte (Länge = l , Radius = a resp. b), die im selben Sinne vom Strome durchflossen werden, ergibt sich der mittlere geometrische Abstand R dieses Querschnittsystems von sich selbst durch zweimalige Anwendung der Regel (183) zu:

$$(189) \quad (F_1 + F_2)^2 \log R = F_1^2 \log R_1 + 2F_1 F_2 \log R_{12} + F_2^2 \log R_2.$$

Hierin sind F_1 resp. F_2 die Flächeninhalte des ersten resp. zweiten Querschnittes, während R_1 resp. R_2 den mittleren geometrischen Abstand des ersten resp. zweiten Querschnittes von sich selbst und R_{12} den mittleren geometrischen Abstand der beiden Querschnitte voneinander bedeutet. In dem speziellen Falle zweier Kreisquerschnitte wird:

$$(a^2 + b^2)^2 \log R = (a^4 \log a + 2a^2 b^2 \log d + b^4 \log b) - \frac{1}{4}(a^4 + b^4)$$

und damit nach (182):

$$(190) \quad 4\pi c^2 L = 2l \left\{ \log 2l - \frac{a^4 \log a + 2a^2 b^2 \log d + b^4 \log b}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{3a^4 + 8a^2 b^2 - 3b^4}{(a^2 + b^2)^2} \right\},$$

wenn noch d der Abstand der beiden Drahtachsen bedeutet, der übrigens ebenso wie a und b klein gegen l sein muß.

Werden die beiden Drähte in entgegengesetzter Richtung von demselben Strom durchflossen, so daß sie die Hin- und Rückleitung für denselben Strom bilden, so hat man darauf Rücksicht zu nehmen, daß in der Definitionsgleichung (169) die beiden Längenelemente $d\mathfrak{s}$ und $d\mathfrak{s}'$ in entgegengesetzten Richtungen positiv zu rechnen sind. Dann erhält man aus (169) zunächst für den Fall beliebiger, aber gleicher Querschnitte in derselben Näherung wie in Nr. 30:

$$(191) \quad 4\pi c^2 L = 2l \log \frac{R_{12}^2}{R_1 R_2}.$$

Man kann sich überzeugen, daß (191) auch dann noch gilt, wenn die beiden Querschnitte ungleichen Flächeninhalt und dementsprechend ungleiche spezifische Ströme aufweisen. In unserem speziellen Falle

erhält man¹¹⁶⁾ aus (191) mit Rücksicht auf (186) und (187')

$$(192) \quad 4\pi c^2 L = 2l \left(\log \frac{d^2}{ab} + \frac{1}{2} \right).$$

Der Selbstinduktionskoeffizient wird also nicht mehr wie in (176) und (178) mit wachsender Drahtlänge unendlich groß (vgl. dazu noch Nr. 20).

Um z. B. den Selbstinduktionskoeffizienten L eines Rechtecks aus Draht von kreisförmigem Querschnitt zu berechnen, dessen Seitenlängen l resp. d und dessen zugehörige Drahtradien a resp. b sind, kann man die Formeln (188) und (188') folgendermaßen verwenden. Deutet man die vier aufeinander folgenden Seiten, mit einer von der Länge l anfangend, mit 1, 2, 3, 4 an und bedeuten L_{11}, L_{22}, \dots Selbstinduktionskoeffizienten der Seiten 1, 2, ..., während L_{12}, L_{13}, \dots in analoger Weise die gegenseitigen Induktionskoeffizienten sind, so erhält aus der Definitionsformel (169) unmittelbar, daß:

$$L = (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14}) + (L_{22} + L_{23} + L_{24} + L_{21}) \\ + (L_{33} + L_{34} + L_{31} + L_{32}) + (L_{44} + L_{41} + L_{42} + L_{43}).$$

Mit Rücksicht darauf, daß einerseits

$$L_{12} = L_{14} = L_{23} = L_{21} = L_{34} = L_{32} = L_{41} = L_{43} = 0$$

und andererseits der Wert für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten bei den Größen L_{13}, L_{24}, L_{31} und L_{42} mit dem negativen Zeichen zu versehen ist, da in den entsprechenden Leitern die Ströme entgegengesetzt fließen, erhält man schließlich:

$$(193) \quad 4\pi c^2 L = 4l \left(\log \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right) + 4d \left(\log \frac{2d}{b} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{d}{l} \right).$$

Die Selbstinduktionskoeffizienten wurden dabei berechnet nach (188), die Größe L_{13} nach (188') und die Größe L_{24} nach (182'). Formel (193) gilt also nur für langgestreckte Rechtecke, bei denen $d \ll l$ ist¹¹⁷⁾.

Die andere nach Nr. 29 für L mögliche Berechnungsweise aus

116) Die entsprechende Formel für magnetisierbare Drähte wird angegeben von *H. M. Macdonald*, Proc. Camb. Phil. Soc. 7 (1891), p. 259 u. 15 (1892), p. 303.

117) Der Selbstinduktionskoeffizient eines zu einem Quadrate gebogenen Drahtes vom Kreisquerschnitt wurde berechnet von *G. Kirchhoff*, Ann. d. Phys. 121 (1864), p. 551, Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 176. Für ein Rechteck wird dieselbe Größe berechnet von *M. Wien*, Ann. d. Phys. 53 (1894), p. 939 und von *M. E. Mascart*, C. R. 118 (1894), p. 277. Eine Zusammenstellung der hierher gehörigen Ergebnisse, sowie Formeln für den Selbstinduktionskoeffizienten bei quadratischem Drahtquerschnitt wird gegeben von *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, Bull. of the Bur. of Stand. 5 (1909), p. 50 ff.

der magnetischen Energie versagt im Falle eines oder mehrerer paralleler Drähte, welche in gleicher Richtung vom Strome durchflossen werden. Es liegt dieses daran, daß der Strom von vornherein als unendlich lang gegen alle auch noch so großen Entfernungen vorausgesetzt wird, wodurch dann die magnetische Feldstärke wie $\frac{1}{\rho}$ (ρ = Abstand vom Drahte) abnimmt und somit die magnetische Energie pro Längeneinheit wie $\log \rho$ unendlich wird. Die Schwierigkeit verschwindet sofort, sobald der Gesamtstrom durch eine Ebene senkrecht zu den Drähten Null ist, wie z. B. im obigen Falle zweier paralleler Drähte mit entgegengesetzt gleichem Strom. Die Berechnung der magnetischen Energie, welche am einfachsten auf Grund von (177') durch Integration über den durchflossenen Raum erfolgt, liefert für L den oben schon in (192) angegebenen Wert. Diese Art der Rechnung legt es dann nahe, ebenso wie die Energie in einen Teil im Innern und einen Teil für das Äußere der Stromleiter auseinanderfällt, auch den Induktionskoeffizienten L in einen inneren L_i und einen äußeren L_a zu zerlegen. Bei schnellem Wechselstrom¹¹⁸⁾ hat dann hauptsächlich L_i seinen Wert gegen den für langsamen Wechselstrom geändert, während die Änderung in L_a nur sehr unbedeutend oder auch genau Null ist. Da im Innern der Drähte meistens nur ein geringer Teil der ganzen magnetischen Energie aufgespeichert ist, so ist die prozentuale Änderung von L bei Erhöhung der Wechselzahl gewöhnlich sehr klein. Im Falle des in (188) z. B. zugrunde gelegten geraden Drahtes wird für sehr schnelle Schwingungen angenähert:

$$(188'') \quad 4\pi c^2 L = 2l \left(\log \frac{2l}{a} - 1 \right),$$

da dann der Strom nur in einer dünnen Schicht an der Drahtoberfläche fließt. Für sehr schnelle Schwingungen ist also L prozentual nur um $1/4 \log \frac{2l}{a}$ gegen seinen Wert für langsamen Wechselstrom geändert.

b) *Kreisförmige Leiter.* Haben die zu betrachtenden kreisförmigen Leiter Durchmesser, welche groß sind im Vergleich mit ihren Quer-

118) Die Stromverteilung usw. im Innern eines geraden, wechselstromdurchflossenen Drahtes mit Kreisquerschnitt wird berechnet von *W. Thomson*, *Electrician*, Febr. 1889 und *Lum. élect.* 31 (1889), p. 288; man vgl. auch *E. Brylinski*, *Ecl. élect.* 12 (1897), p. 97. Eine numerische Diskussion der Formeln wird ausgeführt von *E. Merrit*, *Phys. Rev.* 5 (1897), p. 47; der Fall gedämpfter Schwingungen wird behandelt von *E. H. Barton*, *Proc. Phys. Soc. London* 16 (1899), p. 409.

schnittsdimensionen resp. ihrem gegenseitigen Abstand, wie das in den allermeisten Fällen zutrifft, so ist eine ähnliche Vereinfachung möglich wie in Nr. 30. Bei der Berechnung der Induktionskoeffizienten wird zunächst wieder das innere Integral in (168) für zwei koaxiale Kreise näherungsweise ausgeführt, mit Rücksicht darauf, daß der Abstand der beiden Ringe klein gegen ihren Durchmesser ist. Der betreffende Ausdruck, der also gleich dem $4\pi c^2$ -fachen des gegenseitigen Induktionskoeffizienten m zweier Kreislinien ist, ergibt:

$$(194) \quad 4\pi c^2 m = 4\pi A \log \frac{8A}{\xi} \cdot \left\{ 1 + \frac{x}{2A} + \frac{x^2 + 3y^2}{16A^2} - \frac{x^3 + 3xy^2}{32A^3} + \dots \right\} \\ - \left\{ 2 + \frac{x}{2A} - \frac{3x^2 - y^2}{16A^2} + \frac{x^3 - 6xy^2}{48A^3} + \dots \right\},$$

wobei A der Radius des ersten und $A + x$ der Radius des zweiten Kreises ist, während der Abstand der Kreisebenen y und der kürzeste Abstand der Kreisebenen ξ ist, so daß $\xi^2 = x^2 + y^2$.

Die weiteren Glieder kann man erhalten durch Entwicklung der elliptischen Integrale in dem in Strenge für m gültigen Ausdruck¹¹⁹⁾:

$$(195) \quad 4\pi c^2 m = 4\pi \sqrt{A(A+x)} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) F(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(195') \quad k = \frac{2\sqrt{A(A+x)}}{\sqrt{(2A+x)^2 + y^2}}.$$

Die Näherungsformel:

$$(194') \quad 4\pi c^2 m = 4\pi A \left(\log \frac{8A}{\xi} - 2 \right),$$

welche der in Nr. 30 wirklich benutzten Näherung entspricht, ergibt sich auch direkt, indem man m nach (165) durch den Kraftfluß definiert, den der größere Kreis durch den kleineren hindurchschickt.

Benutzt man diese Näherung, so erhält man nach (168) und (181) für den gegenseitigen Induktionskoeffizient $L_{\mu\nu}$ zweier benachbarten parallelen Kreisströme μ und ν :

$$(196) \quad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = 4\pi A \left(\log \frac{8A}{R} - 2 \right),$$

119) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. 2, Oxford 1881, p. 306, Art. 696 ff., die höheren Glieder im Ausdruck (194) wurden berechnet von *J. G. Coffin*, Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 113, vgl. auch *J. G. Coffin* u. *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 359. Eine Darstellung von (195) mittels ϑ -Reihen gibt *H. Nagaoka*, Phil. Mag. 6 (1903), p. 19; eine Zusammenstellung der Resultate bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1 ff. Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier Windungen auf einem Eisenring wird berechnet von *L. Boltzmann*, Wien Anz. 15 (1878), p. 203, Wiss. Abh., Leipzig 1909, p. 324.

wobei R wieder den mittleren geometrischen Abstand der Querschnitte voneinander bedeutet. Für den Selbstinduktionskoeffizienten eines Kreisringes vom Radius A mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius a erhält man so z. B. nach (187''):

$$(197) \quad 4\pi c^2 L = 4\pi A \left(\log \frac{8A}{a} - \frac{7}{4} \right)$$

und für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier Kreisdrähte 1 und 2 vom gleichen Querschnittsradius a im Abstände $\xi = d$:

$$(198) \quad 4\pi c^2 L_{12} = 4\pi A \left(\log \frac{8A}{d} - 2 \right).$$

Will man genauer rechnen, so muß man für die folgenden Glieder in (194) die Integration über die Querschnitte wirklich ausführen. Die Methode, welche z. B. den Selbstinduktionskoeffizienten eines Kreisdrahtes dadurch genauer auswertet, daß die beiden Kreislinien, auf die es in (194) ankommt, in einer Ebene angenommen werden ($y = 0$) und dann für x der mittlere geometrische Abstand des Querschnittes von sich selbst auch in die höheren Glieder eingesetzt wird, ist streng genommen inkonsequent und unrichtig. Indessen kann man zeigen, daß der so erhaltene Wert näher an die Wahrheit herankommt, wie der ohne Berücksichtigung der höheren Glieder erhaltene¹²⁰⁾.

Für Spulen wird die genaue Rechnung recht umständlich. Für eine unendlich lange Spule mit dem Radius A und ν Windungen pro Längeneinheit erhält man für den Selbstinduktionskoeffizienten pro Längeneinheit das einfache Resultat:

$$(199) \quad 4\pi c^2 L = 4\pi^2 A^2 \nu^2,$$

wenn der vom Isolationsmaterial eingenommene Raum als verschwindend angenommen wird. Kann man den vom Strome durchflossenen Raum als unendlich dünn und als gleichmäßig vom Strom erfüllt betrachten, so kann man für den Selbstinduktionskoeffizienten durch Integration von (195) einen strengen Ausdruck ableiten von der Form:

$$(200) \quad 4\pi c^2 L = \frac{8\pi}{3} A n^2 \left[\frac{F(\sin \gamma) + (\operatorname{tg}^2 \gamma - 1) E(\sin \gamma)}{\sin \gamma} - \operatorname{tg}^2 \gamma \right].$$

120) Vgl. *M. Wien*, Ann. d. Phys. 53 (1894), p. 928. Die einfache Formel (197) wurde zuerst angegeben von *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 121 (1864), p. 551, Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 176. Von *G. M. Minchin*, Electrician 32 (1893), p. 169 und Phil. Mag. (5) 37 (1894), p. 300, *W. M. Hicks*, Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 456 und *Bláthy*, London Electrician 24 (1890), p. 630 wurden ebenfalls Formeln für den Selbstinduktionskoeffizienten angegeben, die sich indessen als fehlerhaft herausgestellt haben. Hat der Draht elliptischen Querschnitt, so gilt eine von *J. J. Thomson* im Phil. Mag. 23 (1886), p. 384 angegebene Formel. Eine Zusammenstellung der Resultate findet sich bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1.

Hierbei bedeutet n die Gesamtzahl der Windungen, während γ der durch

$$(200') \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{l} \quad (2l = \text{Länge der Spule})$$

definierte, für die Spule charakteristische Winkel ist¹²¹⁾. Eine kleine Spule vom Radius $a < A$ und der Länge l hat bei n Windungen gegen die oben betrachtete unendlich lange Spule in erster Näherung einen gegenseitigen Induktionskoeffizienten

$$(201) \quad 4\pi c^2 L_{12} = 4\pi^2 a^2 n v,$$

wenn sie koaxial mit derselben liegt¹²²⁾.

Für kurze weite Spulen mit einer Windungslage (von n Windungen) kann man wohl am einfachsten den Selbstinduktionskoeffizienten finden durch geeignete Summation der Selbstinduktionskoeffizienten und der gegenseitigen Induktionskoeffizienten der einzelnen Windungen, wie diese in erster Näherung durch (197) und (198) dargestellt werden. Man erhält dann¹²³⁾

$$(202) \quad 4\pi c^2 L = 4\pi A \left[n(n-1) \left(\log \frac{8A}{a} - 2 \right) + n \left(\log \frac{8A}{a} - \frac{7}{4} \right) - C \right],$$

121) Die obige exakte Formel (200) wurde zuerst angegeben von *L. Lorenz*, Ann. d. Phys. 7 (1879) p. 16, Oeuvres Scientifiques, Kopenhagen 1899, Tome 2, p. 196. Eine Reihenformel für den betreffenden Selbstinduktionskoeffizienten wird abgeleitet von *Lord Rayleigh* u. *M. Niven*, Proc. Roy. Soc. 32 (1881) p. 104 oder auch *Lord Rayleigh*, Scientific Papers, Cambridge 1900, 2, p. 15; die für nicht zu große Werte von l/a gut konvergierende Formel wird durch weitere Glieder der Entwicklung vervollständigt von *J. G. Coffin*, Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 113.

122) Der gegenseitige Induktionskoeffizient zwischen einem Kreis und einem koaxialen Solenoid, über das dieselben Voraussetzungen wie oben gemacht werden, wird berechnet von *L. Lorenz*, Ann. d. Phys. 25 (1885), p. 1, Oeuvres Scient. Kopenhagen 1899, 2, p. 1. Derselbe kann durch elliptische Integrale ausgedrückt werden. Dieses ist auch dann noch der Fall, wenn der Strom in der äußeren Spule in Schraubenwindungen fließt, vgl. *J. V. Jones*, Proc. Roy. Soc. 63 (1898), p. 198; Reihenentwicklungen wurden für den betreffenden Ausdruck von demselben Autor schon Phil. Mag. 27 (1889), p. 61 abgeleitet. Eine andere Art der Entwicklung hat *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 3 (1907), p. 1 ff. Für zwei Spulen mit dünnen Stromschichten wird der gegenseitige Induktionskoeffizient berechnet von *Gray*, Absolute Measurements 2, part I, p. 274, vgl. auch *Himstedt*, Ann. d. Phys. 26 (1885), p. 551, *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 3 (1907), p. 301, sowie *G. F. C. Searle* und *J. R. Airey*, Electrician 56 (1905), p. 318 und *A. Russell*, Phil. Mag. (6) 13 (1907), p. 420. Eine Zusammenstellung der Resultate findet sich bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1 ff.

123) Vgl. *B. Strasser*, Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 763 und 24 (1907), p. 960, die Größen C sind dort tabelliert; ein anderer Ausdruck wird abgeleitet von *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 161.

wobei die Konstante C sich ergibt aus

$$(202') \quad C = 2 \log \{1! 2! 3! \dots (n-1)!\}$$

und A der mittlere Radius der Spule, a der Drahradius und d der Abstand zweier Mittelpunkte benachbarter Drahtquerschnitte ist. In zweiter Näherung kommt ein Glied hinzu von der Ordnung

$$n^4 \frac{d^2}{A^2} \log \frac{A}{d}.$$

Für kurze weite Spulen mit mehreren Windungslagen wurde der Selbstinduktionskoeffizient berechnet von *Stephan*¹²⁴⁾. Das ursprünglich von *Maxwell*¹²⁵⁾ herrührende Verfahren bestand in einer Berechnung von L für einen gleichmäßig mit Strom erfüllt gedachten Querschnitt¹²⁶⁾ unter Hinzunahme einer nachherigen Korrektur für die endliche Ausdehnung des Isolationsmaterials und der Abweichung des vorausgesetzten rechteckigen Drahtquerschnitts vom wirklich vorhandenen Kreisquerschnitt. Für den Spezialfall eines quadratischen Wicklungsquerschnittes vereinfacht sich die *Stefansche* Formel ohne Korrektur zu:

$$(203) \quad 4\pi c^2 L = 4\pi A n^2 \left[\log \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{A}{b} - 0,84834 + \frac{1}{24} \frac{b^2}{A^2} \left(\log \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{A}{b} + 1,2242 \right) \right],$$

wenn A der mittlere Spulenradius, b eine Seite des Wicklungsquerschnitts und n die Anzahl Windungen bedeutet. Die Korrektur ΔL wegen des kreisförmigen Drahtquerschnittes, welche zu dem in (203) angegebenen Wert zu addieren ist, beträgt:

$$(203') \quad 4\pi c^2 \Delta L = 4\pi A n \left(\log \frac{d}{a} + 0,15494 \right),$$

wenn der Querschnittsradius gleich a und der Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Drahtquerschnitte gleich d gesetzt wird¹²⁷⁾.

124) *J. Stephan*, Ann. d. Phys. 22 (1884), p. 107; vgl. auch *B. Weinstein*, ebenda 21 (1884), p. 329.

125) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. 2, Oxford 1881, p. 301, Art. 693.

126) Außer von *J. Stephan* und *B. Weinstein* loc. cit. wird der Selbstinduktionskoeffizient eines Ringes von rechteckigem Querschnitt noch berechnet von *N. Garbasso*, Nuovo Cim. (5) 2 (1901), p. 97. Vgl. auch noch *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, Appendix III, p. 321. Für eine Spule mit mehreren gleichmäßig vom Strom durchflossenen Schichten wird dieselbe Größe ausgewertet von *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 4 (1907), p. 398.

127) Der Koeffizient 0,15494 der Formel (203') wurde von *J. C. Maxwell* zuerst zu 0,11835 angegeben (Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, p. 302, Art. 693), *J. Stephan* gab statt dessen in Ann. d. Phys. 22 (1884), p. 116 den obigen Wert an. Eine Neuberechnung von *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 3 (1907), p. 1 zeigt, daß die betreffende Zahl, welche teilweise den Einfluß, der die

Formel (203) ist besonders deshalb von Interesse, weil die von *M. Wien* eingeführten Selbstinduktionsnormalien, welche durch geeignete Wahl der Dimensionen möglichst große Selbstinduktion mit möglichst geringem Widerstand verbinden, den Voraussetzungen derselben entsprechen¹²⁸).

Die in dieser Nummer angegebenen Werte für die Induktionskoeffizienten beruhen wesentlich auf der Annahme einer gleichmäßigen Stromverteilung in den Drähten. Für schneller veränderliche Felder ist diese Annahme nicht mehr richtig, wodurch dann z. B. bei Spulen eine Verkleinerung des Selbstinduktionskoeffizienten und zu gleicher Zeit eine Vergrößerung des Widerstandes bedingt ist. Es ist indessen erstere Wirkung prozentual sehr viel geringer wie die zweite, weil die hauptsächlichste Änderung des magnetischen Feldes im Innern der Drähte stattfindet, welche für sich nur einen kleinen Beitrag zur ganzen magnetischen Energie und damit zum Selbstinduktionskoeffizienten liefern, wie auch schon unter a) dieser Nr. bemerkt wurde¹²⁹).

33. Spezielle Fälle von Stromkreisen mit zeitlich veränderlicher elektromotorischer Kraft. Der Widerstandsoperator¹³⁰). Wird

einzelne Windung umgebenden Drähte mißt, eben deshalb von der Lage der gerade betrachteten Windung in der Spule abhängt. Sie schwankt indessen nur zwischen 0,15497 (statt 0,15494 bei *Stephan*) und 0,15612, je nachdem nur die nächsten acht oder unendlich viele Windungen die gerade betrachtete beeinflussen.

128) Außer den obigen theoretischen Formeln existiert für den Selbstinduktionskoeffizienten noch eine empirische Formel von *J. Perry*, *Phil. Mag.* 30 (1890), p. 223. Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier Spulen kann aus den Tabellen bei *J. C. Maxwell*, *Treatise on elektr. and magn.*, Oxford 1881, 2, p. 317, App. I entnommen werden nach einer Bemerkung von *Lord Rayleigh*, ebenda, p. 321, App. II. Außerdem finden sich Formeln für die betreffende Größe bei *B. Weinstein*, *Ann. d. Phys.* 21 (1884), p. 350 und *J. Stephan*, *Ann. d. Phys.* 22 (1884), p. 107, vgl. hierzu auch *E. B. Rosa*, *Bull. Bur. of Stand.* 4 (1908), p. 342 u. p. 348. Andere Entwicklungen werden angegeben von *Lyle*, *Phil. Mag.* 3 (1902), p. 310; eine kritische Zusammenstellung der Resultate bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, *Bull. Bur. of Stand.* 5 (1909), p. 1 ff.

129) Die Abhängigkeit des Widerstandes und der Selbstinduktion von der Frequenz wird berechnet von *M. Wien*, *Ann. d. Phys.* 14 (1904), p. 1, sowie von *A. Sommerfeld*, *Ann. d. Phys.* 15 (1904), p. 673 und 24 (1907), p. 609. Auf die Selbstinduktion wird die erste *Sommerfeldsche* Methode übertragen von *J. G. Coffin*, *Bull. Bur. of Stand.* 2 (1906), p. 275, *Phys. Rev.* 125 (1906), p. 193. Vgl. auch *G. Picciati*, *Nuovo Cimento* (5) 11 (1906), p. 351 und *L. Cohen*, *Bull. Bur. of Stand.* 4 (1907—8) Nr. 76. Durch Unterteilung des Drahtes in mehrere von kleinerem Querschnitt wird die Widerstandserhöhung vermieden nach *F. Dolezalek*, *Ann. d. Phys.* 12 (1903), p. 1142.

130) Sehr viele hierher gehörige Fälle werden ausführlich behandelt in der Monographie von *F. Bedell* und *A. Crehore*, *Alternating Currents*, Ithaca, N. Y. 1904. Die Stromverteilung in Leiternetze wird näher ins Auge gefaßt von *M. Brillouin*, *Journ. de Phys.* 10 (1881), p. 24, *Ann. de l'école norm.* 10 (1881), p. 9.

in einen Stromkreis mit Selbstinduktion L plötzlich eine elektromotorische Kraft E zur Zeit $t = 0$ eingeführt, bis zu welcher der Strom $J = 0$ war, so erhält man nach der aus (163'') und (165) folgenden allgemein gültigen Differentialgleichung:

$$(204) \quad L\dot{J} + wJ = E$$

für den Strom:

$$(205) \quad J = \frac{E}{w} \left(1 - e^{-\frac{w}{L}t} \right),$$

d. h. ein allmähliches Ansteigen.

Ein zweiter wichtiger Spezialfall ist die Entladung eines Kondensators (Kapazität = K) durch einen Stromkreis mit Selbstinduktion und Widerstand, der auf Grund von (175) mit $E = 0$ behandelt werden kann. Für die physikalische Meßtechnik ist der Fall einer zeitlich periodischen elektromotorischen Kraft wichtig. Setzen wir in komplexer Schreibweise:

$$(206) \quad E = E_0 e^{i\nu t},$$

so daß die Schwingungszahl in 2π Sekunden ν ist, so erhalten wir aus (163) für J den Wert:

$$(207) \quad J = \frac{E_0}{\omega} e^{i\nu t} = \frac{E}{\omega}$$

mit

$$(208) \quad \omega = w + i\nu L + \frac{1}{i\nu K}$$

oder anders geschrieben:

$$(207') \quad J = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + \left(\nu L - \frac{1}{\nu K}\right)^2}} e^{i\left(\nu t - \arctg \frac{\nu L - \frac{1}{\nu K}}{w}\right)}.$$

Der Nenner von E_0 , der in (207') an Stelle des Gleichstromwiderstandes w tritt, ist stets größer als w , außer in dem Falle vollkommener Resonanz ($\nu = \nu_0$), für den das Zusatzglied zu w^2 verschwindet, und also¹³¹⁾

$$(209) \quad \nu^2 = \nu_0^2 = \frac{K}{L}.$$

In diesem besonderen Falle sind nach (207') Strom und Spannung in Phase. Für die an Stelle des Widerstandes in Kreisen ohne Kapazität auftretende Größe $\sqrt{w^2 + \nu^2 L^2}$ ist der Name *Impedanz* üblich geworden, für die beim Vorhandensein einer Kapazität zu benützte

131) Für die Diskussion der entsprechenden Eigenschwingungen vgl. man Elektromagnetische Wellen, Art. *M. Abraham*, V 18, Nr. 3.

Größe $\sqrt{w^2 + \left(\nu L - \frac{1}{\nu K}\right)^2}$ wurde der Name *Impediment* vorgeschlagen. Die Größe $\left(\nu L - \frac{1}{\nu K}\right)$ wurde mit dem Namen *Reaktanz* belegt, νL allein heißt auch oft *Induktiver Widerstand* im Gegensatz zum *Ohmschen Widerstand* w .

Der Ausdruck (207) für J zeigt, daß man die Erscheinungen für Wechselstrom genau so wie bei Gleichstrom rechnen kann, wenn nur an Stelle des Gleichstromwiderstandes w der *Widerstandsoperator* ω , wie er durch (208) definiert ist, eingeführt wird. Zugleich legt diese Darstellung eine graphische Behandlung des Zusammenhangs zwischen E und J nahe, E erscheint dabei als ebener Vektor in einer komplexen Ebene, während J entsteht durch Division mit der komplexen Größe ω , eine Operation, die bekanntlich dadurch graphisch ausgeführt werden kann, daß der Vektor E im Verhältnis $\frac{1}{|\omega|}$ verkürzt und um

den Winkel $\frac{1}{i} \log \frac{\omega}{|\omega|} = \text{arctg} \frac{\nu L - \frac{1}{\nu K}}{w}$ zurückgedreht wird. Fehlt die Kapazität im Stromkreis, so hat man in (208) $K = \infty$ zu setzen und hat dann also:

$$(208') \quad \omega = w + i\nu L.$$

Als Beispiel für diese Rechenmethode sei der Fall erwähnt zweier parallel geschalteter Stromführungen mit den Widerständen w_1, w_2 und den Selbstinduktionen L_1, L_2 , welche so weit voneinander entfernt sind, daß ihre gegenseitige Induktion vernachlässigt werden kann. Dieser Kombination entspricht der Widerstandsoperator $\omega = w + i\nu L$, numerisch oder auch graphisch zu berechnen aus

$$(210) \quad \frac{1}{w + i\nu L} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{w_1 + i\nu L_1} + \frac{1}{w_2 + i\nu L_2}.$$

Die nicht empfehlenswerte Trennung in Reelles und Imaginäres ergibt:

$$(210') \quad w = \frac{(w_1 + w_2)(w_1 w_2 - \nu^2 L_1 L_2) + \nu^2 (L_1 + L_2)(w_1 L_2 + w_2 L_1)}{(w_1 + w_2)^2 + \nu^2 (L_1 + L_2)^2},$$

$$(210'') \quad L = \frac{\nu(w_1 + w_2)(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \nu(L_1 + L_2)(w_1 w_2 - \nu^2 L_1 L_2)}{(w_1 + w_2)^2 + \nu^2 (L_1 + L_2)^2}.$$

34. Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom. Die Gleichgewichtsbedingung für die mit Wechselstrom beschickte *Wheatstone*-sche Brücke ohne Kapazität lautet unter Einführung der Widerstandsoperatoren

$$\omega_1 = w_1 + i\nu l_1, \quad \omega_2 = w_2 + i\nu l_2, \quad \dots,$$

$$\Omega_1 = W_1 + i\nu L_1, \quad \Omega_2 = W_2 + i\nu L_2, \quad \dots$$

an Stelle der Gleichstromwiderstände $r_1, r_2, \dots, R_1, R_2, \dots$ der Nr. 19

(vgl. auch die dortige Fig. 3):

$$(211) \quad \omega_2 \Omega_2 = \omega_3 \Omega_3.$$

Da ω und Ω komplex sind, zerfällt (211) in zwei voneinander unabhängige Bedingungen, welche im allgemeinen Falle, in dem alle Zweige Selbstinduktion enthalten, lauten:

$$(211') \quad \begin{cases} w_2 W_2 - \nu^2 l^2 L^2 = w_3 W_3 - \nu^2 l_3 L_3, \\ w_2 L_2 + l_2 W_2 = w_3 L_3 + W_3 l_3. \end{cases}$$

Sind die Zweige AS und BS induktionsfrei ($l_2 = 0$, $l_3 = 0$), so kommt statt (211')

$$(212) \quad \begin{cases} w_2 W_2 = w_3 W_3, \\ w_2 L_2 = w_3 L_3, \end{cases}$$

so daß man eine solche Anordnung der *Wheatstoneschen* Brücke nach *Maxwell* unmittelbar zum Vergleich von Selbstinduktionen benutzen kann¹³²). Als Stromzeiger benutzt man in der Wechselstrombrücke das gewöhnliche Telephon oder nach *M. Wien* ein optisches Telephon oder ein Vibrationsgalvanometer. Solange in dem zuletzt betrachteten Falle erstens die Leitung ASB als induktionsfrei angesehen werden kann und zweitens die zu vergleichenden Widerstände und Selbstinduktionen sich noch nicht merklich mit der Schwingungszahl ändern oder merkliche Kapazität besitzen, kann die Einstellung der Brücke mit dem gewöhnlichen Telephon vorgenommen werden. Die Obertöne der Stromquelle kommen dann eben nicht in Betracht, da nach (212) die Gleichgewichtsbedingungen die Schwingungszahl ν nicht enthalten. Ist eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, so benutzt man am besten ein optisches Telephon oder Vibrationsgalvanometer als Nullinstrument, welche beide hauptsächlich nur auf eine bestimmte Schwingungszahl ansprechen. Die erstgenannte Fehlerquelle, welche nach (211') die erste Gleichung von (198) in

$$w_2 W_2 - w_3 W_3 = \nu^2 (l_2 L_2 - l_3 L_3)$$

überführt und demnach sich mit steigender Frequenz immer mehr bemerkbar macht, wird von *Giebe*¹³³) zur Grundlage einer Methode zur Bestimmung kleiner Selbstinduktionen mit großem Widerstand gemacht.

Ebenso wie zum Vergleich von Selbstinduktionen kann die Brücke zum Vergleich von Kapazitäten benutzt werden. Man legt

132) Die Empfindlichkeit der Wechselstrombrücke wird untersucht von *Lord Rayleigh*, Proc. Roy. Soc. London 49 (1891), p. 203.

133) *E. Giebe*, Ann. d. Phys. 24 (1907), p. 941.

dazu in die Zweige AS und AC die beiden zu vergleichenden Kapazitäten k_2 und K_3 und wählt die Zweige SB und CB induktionsfrei mit den Widerständen w_2 und W_3 . Mit Rücksicht auf (211) und (208) wird dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$(213) \quad \frac{W_2}{w_3} = \frac{k_2}{K_3}.$$

Außer für Vergleichsmessungen, die sich übrigens auch noch auf gegenseitige Induktionskoeffizienten unter sich oder kombiniert mit Selbstinduktionskoeffizienten oder auf Kapazitäten kombiniert mit Selbstinduktionen usw. beziehen können, dient die Brücke zur absoluten Bestimmung von Selbstinduktionen und Kapazitäten. Für die verschiedenen Methoden sei auf das Lehrbuch von *E. Orlich*¹³⁴⁾ verwiesen.

III. Ponderomotorische Wirkungen.

35. Berechnung der Kräfte zwischen Strömen. Die ponderomotorische Kraft, die auf einen Leiter ausgeübt wird, ergibt sich am einfachsten durch die Berechnung der Variation der Energie, die bei konstant gehaltenen Strömen durch die virtuelle Bewegung des betreffenden Stromkreises bedingt wird. Sind z. B. zwei Stromkreise 1 und 2 vorhanden, so ist nach (178) die im Raume aufgespeicherte magnetische Energie:

$$(214) \quad W_m = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2.$$

Ist die Lage und Form vom Stromkreis 2 bestimmt durch die Parameter p_1, p_2, \dots und bedingt die Lagenänderung z. B. nur die Änderung des Parameters p_1 in $p_1 + \delta p_1$, so ist

$$(215) \quad \delta W_m = \frac{\partial W_m}{\partial p_1} \delta p_1 = J_1 J_2 \delta L_{12} = J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial p_1} \delta p_1$$

und somit die (verallgemeinerte) „Kraft in der Richtung p_1 “:

$$(216) \quad \mathfrak{F}_1 = - J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial p_1}.$$

Allgemein sind also die Kräfte ableitbar als negativer Gradient eines elektrodynamischen Potentials (*F. Neumann* 1847), das z. B. im obigen Falle zweier Stromkreise nichts anderes ist wie die wechselseitige Energie

$$J_1 J_2 L_{12}.$$

Ist die Form der Einzelstromkreise veränderlich, so müssen bei

134) *E. Orlich*, Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909, p. 226 ff.

der Differentiation natürlich auch die Glieder

$$\frac{L_1 J_1^2}{2}, \text{ resp. } \frac{L_2 J_2^2}{2}$$

berücksichtigt werden.

Außer der in vielen Fällen sehr bequemen obigen Berechnung der Kräfte aus den Induktionskoeffizienten kann man auch mit Rücksicht auf (Nr. 24) die Kraftwirkung zwischen den Strömen zurückführen auf die an jedem Stromelement angreifende Elementarkraft

$$(217) \quad f = \frac{1}{c} [\mathfrak{S}\mathfrak{B}].$$

Eine dritte Berechnungsart knüpft an die *Maxwellschen* Spannungen an. Die Gesamtkraft erhält man dann durch eine Oberflächenintegration, im Gegensatz zur vorher genannten Berechnungsart, die eine Volumintegration nötig macht.

Von praktischem Interesse sind die Kräfte auf weiches Eisen (Permeabilität von der Feldstärke unabhängig), welche sich unter Benutzung der Darstellung durch die *Maxwellschen* Spannungen besonders leicht überblicken lassen. Bedenkt man, daß die vom Magnetfeld herrührenden Spannungen \mathfrak{X}_m , für ein Flächenelement mit der gerichteten Normalen n berechnet, den Wert haben¹³⁵⁾

$$\mathfrak{X}_m = \mathfrak{H} \mathfrak{B}_n - \frac{n}{2} (\mathfrak{H} \mathfrak{B}),$$

so erhält man für die Differenz der Spannungen an den beiden Seiten einer Begrenzungsfläche Luft—Eisen den Wert:

$$(218) \quad \mathfrak{X}_{m1} - \mathfrak{X}_{m2} = (\mathfrak{H}_1 \mathfrak{B}_{n1} - \mathfrak{H}_2 \mathfrak{B}_{n2}) - \frac{n}{2} \{ (\mathfrak{H}_1 \mathfrak{B}_1) - (\mathfrak{H}_2 \mathfrak{B}_2) \}.$$

Diese Differenz, welche die wirklich beobachtbare Spannung \mathfrak{X} darstellt, ist, wie man leicht sieht, senkrecht zur Eisenoberfläche gerichtet und hat den Wert:

$$(218') \quad |\mathfrak{X}| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \mathfrak{B}_n^2 + \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) \mathfrak{H}_h^2.$$

Die Größen \mathfrak{B}_n , resp. \mathfrak{H}_h bedeuten senkrecht, resp. parallel zur Begrenzungsfläche gerichtete Feldstärken und gehen beide stetig durch diese hindurch.

Für die Wirkung auf Magnete ist der Definition nach die magnetische Feldstärke maßgebend.

Außer den magnetischen Kräften treten auch noch elektrische Kräfte zwischen Stromleitern auf, welche ihre Angriffspunkte in den auf den Leiteroberflächen angesammelten Ladungen finden. Dieselben

135) Vgl. *Maxwellsche Theorie*, Art. H. A. Lorentz, V 13, Nr. 23 ff.

sind indessen meistens gegen die magnetischen Wirkungen zu vernachlässigen.

36. Galvanometer. Die Instrumente zur Messung oder Konstatierung von Strömen beruhen zum allergrößten Teil auf der mechanischen Wirkung zwischen Stromkreisen und Magneten oder auch zwischen Stromkreisen unter sich.

Erstere Wirkung wird benutzt in der Tangentenboussole, einem Stromkreis, welcher in den magnetischen Meridian gestellt wird und in dessen Mittelpunkt eine kurze Magnetnadel durch die Einwirkung des Stromes meßbare Ablenkungen aus ihrer Gleichgewichtslage erfährt. Ist der Ausschlagswinkel α , so ist nach (121') das Moment des Stromes in erster Näherung proportional $\cos \alpha$ ($\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$), während das vom Erdfeld herrührende zurücktreibende Moment $\sin \alpha$ proportional ist. Man erhält also:

$$(219) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2aH} \frac{J}{c} = C \frac{J}{c},$$

wenn noch H die Horizontalintensität des erdmagnetischen Feldes, a der Radius des Stromkreises und J der zu messende Strom bedeutet. Nach (121') oder (131') kann man die Abweichung von der Homogenität des Feldes in der Nähe des Kreismittelpunktes noch in Rechnung ziehen; diese Korrektion wird übrigens dann besonders wichtig, wenn der Stromleiter aus einer Spule mit mehreren Windungen besteht. Wird der Stromkreis der Nadel nachgedreht, bis beide in einer Ebene liegen, so entsteht die Sinusboussole, bei welcher der Strom dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist. Handelt es sich nicht um die absolute Strommessung, so kann man die Windungen der Nadel sehr viel näher rücken und damit eine viel größere Empfindlichkeit erreichen¹³⁶⁾. Es wird dann für kleine Ausschläge α :

$$(220) \quad \alpha = CJ,$$

wo der Reduktionsfaktor C jetzt durch den Versuch zu bestimmen ist. Eine noch größere Empfindlichkeit erreicht man durch Benutzung eines nahezu astatischen Nadelsystems oder indem man von außen her durch einen Richtmagneten die Wirkung des Erdfeldes zum größten Teile kompensiert. Damit die Nadel nicht zu viele Schwin-

136) Der vorteilhafteste Querschnitt der Wicklung wird berechnet von J. C. Maxwell, Treatise on electr. and magn. 2, Oxford 1881, p. 331. Die Konstruktionsgrundsätze und die Theorie der Spiegelgalvanometer werden behandelt von Th. des Coudres, Zeitschr. f. Elektrochemie 3 (1897), p. 417, 441, 465, 489 und 513. Über die Anordnungen von Helmholtz, Gauguin usw. zur Erzeugung eines möglichst homogenen Feldes vgl. man J. C. Maxwell, Treatise on electr. a. magn. Oxford 1881, 2, p. 322, Art. 707 ff.

gungen ausführt, ehe sie wieder in ihrer Gleichgewichtslage in Ruhe ist, wird dieselbe von Metallmassen (Kupfer) möglichst nahe umgeben, in welchen dann die entstehenden Wirbelströme für eine wirksame Dämpfung sorgen. Diese sehr empfindlichen Instrumente werden stark durch kleine von zufälligen Ursachen (Trambahnen) herrührende Schwankungen des erdmagnetischen Feldes beeinflusst. Einen wirksamen Schutz gegen die äußeren Einflüsse liefert eine mehrfache Panzerung mit Stahlmänteln hoher Permeabilität¹³⁷). Von äußeren magnetischen Störungen fast ganz unabhängig sind auch die nach dem *Deprez-d'Arsonval*-Prinzip gebauten Galvanometer¹³⁸), bei denen eine vom Strom durchflossene Spule in einem starken Magnetfeld hängt und durch ihren Ausschlag den Strom anzeigt. Dieser Typus ist im Gebrauche bequemer wie die Panzergalvanometer, welche sich indessen durch geringeren inneren Widerstand auszeichnen. Ebenfalls von Störungen unabhängig ist das *Einthoven*-Galvanometer, welches zur Strommessung den Ausschlag eines sehr dünnen vom Strom durchflossenen Drahtes benutzt, der in einem starken Magnetfeld senkrecht zu den Kraftlinien ausgespannt ist¹³⁹). Auf der Wirkung von Strömen auf Ströme beruht das Elektrodynamometer, bei welchem eine bewegliche und eine feste Drahtrolle mit ihren Mittelpunkten zusammenfallend und mit ihren Achsen senkrecht zueinander angeordnet sind. Dieselben werden hintereinander vom Strome durchflossen, so daß der Ausschlag der beweglichen Rolle dem Quadrate des Stromes proportional wird. Letzterem Umstand verdankt das Instrument auch seine Anwendbarkeit für Wechselstrom.

37. Das ballistische Galvanometer¹⁴⁰). Außer zur Messung von konstanten Strömen können diejenigen Galvanometer, welche eine genügend lange Schwingungsdauer besitzen, auch zur Messung kurzdauernder Ströme verwendet werden. Solange kein Strom durch das Instrument fließt, kann der Ausschlag α als Funktion der Zeit t bestimmt werden aus der Differentialgleichung¹⁴¹):

137) Vgl. *H. du Bois* und *H. Rubens*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 84.

138) *Deprez* und *d'Arsonval*, Paris C. R. 102 (1886), p. 504. Vgl. zur Theorie u. a. *W. P. White*, Phys. Rev. 19 (1904), p. 305 und 23 (1906), p. 382.

139) *W. Einthoven*, Arch. Neerl. (2) 6 (1901), p. 625; eine eingehende theoretische Behandlung rührt her von *P. Hertz*, Zeitschr. Math. Phys. 58 (1910), p. 1.

140) Vgl. *H. Diesselhorst*, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 458 und 712, sowie *H. A. Wilson*, Proc. Phys. Soc. 20 (1906), p. 264, Phil. Mag. (6) 12 (1906), p. 269, Electrician 55 (1906), p. 860, und *Ledeboer*, Paris C. R. 102 (1886), p. 504.

141) Die Verhältnisse bei großen Amplituden werden diskutiert von *O. Chwolson*, Mém. de l'acad. de St.-Pétersbourg 5 (1879), p. 26.

$$(221) \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\delta \frac{d\alpha}{dt} + (\nu^2 + \delta^2)\alpha = 0,$$

in der δ und ν zwei dem Instrumente eigentümliche Konstanten bedeuten. Einen orientierenden Überblick über die Abhängigkeit von ν und δ von den verschiedenen Umständen erhält man durch folgende schematische Überlegung. Hat z. B. die Spule eines *Deprez*-Galvanometers n Windungen und ist H die Stärke des Magnetfeldes, so ist die bei einer Bewegung in derselben nach (I') induzierte elektromotorische Kraft

$$(222) \quad E = \frac{2nlaH}{c} \frac{d\alpha}{dt},$$

wenn a der Abstand des dem Magnetfeld ausgesetzten Stückes l einer Einzelwindung bedeutet. Ist noch w der Widerstand, durch den E einen Strom erzeugt, und ist dieser Strom die einzige Ursache der Dämpfung, so ist die in der Zeit δt in Wärme umgesetzte Energie

$$(223) \quad \frac{1}{w} \left(\frac{2nlaH}{c} \right)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \delta t,$$

wenn keine Rücksicht auf einen eventuellen Phasenunterschied zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft E genommen wird. Andererseits ist die Variation der kinetischen Energie:

$$(223') \quad \delta \left[\frac{\Theta}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right] = \Theta \frac{d^2\alpha}{dt^2} \delta \alpha$$

und die Variation der potentiellen Energie der Aufhängung

$$(223'') \quad \delta \left[\frac{M}{2} \alpha^2 \right] = M\alpha \delta \alpha,$$

wenn noch Θ das Trägheitsmoment und M das zurücktreibende Moment der Aufhängung ist. Der Energiesatz liefert jetzt Gl. (221), wobei mit Rücksicht auf (223), (223') und (223'')

$$(224) \quad 2\delta = \frac{1}{w\Theta} \left(\frac{2nlaH}{c} \right)^2$$

und

$$(224') \quad \nu^2 + \delta^2 = \frac{M}{\Theta}.$$

Wird durch ein solches Galvanometer ein kurz dauernder Strom geschickt, während dessen Verlauf die Nadel sich noch nicht wesentlich von ihrer Ruhelage entfernt hat, so wirkt dieser wie ein Stoß, der der Aufhängung eine plötzliche Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0$ erteilt¹⁴²⁾, welche proportional mit der gesamten durchgegangenen

142) Für den Einfluß der endlichen Zeitdauer eines Stromstoßes vgl. man *Dorn*, Ann. d. Phys. 17 (1882), p. 654, sowie *Diesselhorst*, ebenda 9 (1902), p. 458 u. p. 712.

Elektrizitätsmenge ist. Diesem Anfangszustand entspricht dann nach (221) die Lösung

$$(225) \quad \alpha = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\delta t} \sin \nu t.$$

Der erste maximale Ausschlag wird erreicht zur Zeit t_0 , definiert durch

$$(226) \quad \operatorname{tg} \nu t_0 = \frac{\nu}{\delta}$$

und hat also den Wert

$$(227) \quad \alpha = \alpha_0 = \omega_0 \frac{e^{-\frac{\delta}{\nu} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\delta}}}{\sqrt{\nu^2 + \delta^2}}.$$

Ob nach diesem Ausschlag das Galvanometer aperiodisch in seine Ruhelage zurückkehrt oder noch um diese Schwingungen ausführt, hängt nach dem obigen Überschlag z. B. davon ab, ob sich ν aus (224) und (224') als imaginäre oder reelle Größe ergibt. Der Grenzfall der Aperiodizität wird erreicht für $\nu = 0$, dann ist nach (225)

$$(225') \quad \alpha = \omega_0 t e^{-\delta t}$$

und der maximale Ausschlag

$$(227') \quad \alpha_0 = \frac{1}{e} \frac{\omega_0}{\delta}.$$

Die Bedingung $\nu = 0$ lautet nach den orientierenden Gleichungen (224) und (224'), ausgedrückt in den Bestimmungsstücken des Galvanometers:

$$(228) \quad w \left(\frac{2nlaH}{e} \right)^2 = 2\sqrt{M\Theta}.$$

Soll das ballistische Galvanometer zu absoluten Messungen gebraucht werden, so muß noch ω_0 mit der durchgegangenen Elektrizitätsmenge

$$E = \int J dt$$

verknüpft werden. Fließt durch das Instrument ein konstanter Strom J_0 und ist das von demselben ausgeübte Drehmoment $G \frac{J}{c}$, so bewirkt er eine statische Ablenkung

$$(229) \quad \alpha = \frac{G}{M} \frac{J}{c} = C \frac{J}{c},$$

wo also C der „statische Reduktionsfaktor“ ist. Andererseits liefert (221), wenn noch die rechte Seite durch die Stromwirkung vervollständigt wird, durch direkte Integration mit Rücksicht auf die kurze Stromdauer für die anfängliche Winkelgeschwindigkeit:

$$(230) \quad \omega_0 = \frac{G}{\Theta} \frac{E}{c} = \mathfrak{C} \frac{E}{c},$$

wenn jetzt \mathfrak{C} der „dynamische Reduktionsfaktor“ ist. Aus (229) und

(230) folgt jetzt mit Rücksicht auf (224')

$$(231) \quad \frac{\mathcal{C}}{C} = \frac{M}{\Theta} = \nu^2 + \delta^2,$$

so daß wir aus (227) für den maximalen Ausschlag erhalten:

$$(232) \quad \alpha = C \cdot \frac{E}{c} \sqrt{\nu^2 + \delta^2} e^{-\frac{\delta}{\nu} \arctg \frac{\nu}{\delta}}.$$

Als Spezialfälle seien hervorgehoben der Fall geringer Dämpfung für den

$$(232') \quad \alpha_0 = \nu C \cdot \frac{E}{c}$$

und der aperiodische Grenzfall für den

$$(232'') \quad \alpha_0 = \frac{\delta}{e} C \frac{E}{c} \quad (e = 2,718 \dots).$$

Ist im allgemeinen der statische Reduktionsfaktor C , die auf 2π sec bezogene Schwingungszahl ν und die Dämpfung δ bestimmt, so können unter Zugrundelegung von (232) absolute ballistische Messungen ausgeführt werden. Relative Vergleichsmessungen sind ohne Bestimmung von ν und δ möglich, da ja nach (232) der maximale Ausschlag proportional E ist.

Sind die Ausschläge von vornherein klein, so kann man eventuell die Stromstöße im Instrument im Takte seiner Eigenschwingungsdauer folgen lassen und dadurch einen größeren Ausschlag erreichen.¹¹⁵⁾

143) Spezielleres über diese und ähnliche unter den Namen *Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode* bekannten Verfahren findet sich bei *W. Weber*, Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. I (1846), p. 341, Ges. Werke, Berlin 1893, 3, p. 438 ff. Vgl. auch *F. Kohlrausch*, Lehrbuch d. prakt. Physik, Leipzig 1905, p. 484.

V 18. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN.

VON

M. ABRAHAM

IN MAILAND.

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung.

1. Die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen.
2. Geschichte und Begrenzung des Gebietes.

II. Entstehung und Ausbreitung elektrischer Wellen.

3. Theorie der Entladung eines Kondensators.
4. Die *Hertz*sche Lösung der Feldgleichungen.
5. Superposition *Hertz*scher Lösungen.
6. Elektrische Eigenschwingungen.
 - a) Allgemeine Sätze.
 - b) Orthogonale Koordinaten.
 - c) Spezielle Fälle.
7. Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie.
8. Elektrische Resonanz.
9. Zerstreuung elektrischer Wellen.

III. Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.

10. Eindringen des Feldes in zylindrische Leiter; Skin-Effekt.
11. Elektrische Drahtwellen; elementare Theorie.
12. Drahtwellen; strenge Theorie.
 - a) Einzeldraht.
 - b) Kabel und Paralleldrähte.
13. Reflexion am Ende der Leitung.

Literatur.

- M. Abraham*, Theorie der Elektrizität, 2 Teile, Leipzig 1904/5 bzw. 1907/8.
M. Brillouin, Propagation de l'électricité, Paris 1904.
E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900.
P. Drude, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894.

J. A. Fleming, The principles of electric wave telegraphy, London 1906.

O. Heaviside, Electrical papers, 2 vol., London 1892.

O. Heaviside, Electromagnetic theory, 2 vol., London 1893, 1899.

H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892 = Ges. Werke 2.

H. Poincaré, Les oscillations électriques, Paris 1894.

J. J. Thomson, Notes on recent researches in electricity and magnetism, Oxford 1893.

J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, Stuttgart 1905.

I. Einleitung.

1. Die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen. Die mathematische Grundlage der Theorie rasch veränderlicher elektromagnetischer Felder sind die Hauptgleichungen für ruhende Körper (vgl. Art. V 13, Nr. 6):

$$(I) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} (\mathfrak{S} + \mathfrak{D}),$$

$$(II) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \mathfrak{B}.$$

Hierzu treten die Beziehungen, welche einerseits die elektrische Erregung \mathfrak{D} und den Leitungsstrom \mathfrak{S} mit der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} , andererseits die magnetische Erregung \mathfrak{B} mit der magnetischen Feldstärke \mathfrak{H} verknüpfen. Für isotrope Körper, auf welche wir uns im folgenden beschränken, lauten diese Beziehungen (vgl. Art. V 13, Nr. 8 I; dort ist auch erwähnt, daß die dritte dieser Beziehungen nicht allgemein gilt):

$$(III) \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{S} = \sigma \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

Ihre Einführung in (I) und (II) ergibt die *Feldgleichungen für ruhende isotrope Körper*:

$$(1) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

$$(2) \quad - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

Aus (2) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0,$$

d. h. die Dichte des wahren Magnetismus (Art. V 13, Nr. 15) an einem gegebenen Orte ändert sich zeitlich nicht. Wir setzen sie im folgenden durchweg gleich Null:

$$(3) \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0.$$

Auch setzen wir in Nichtleitern die Dichte der wahren Elektrizität (V 13, Nr. 11) gleich Null:

$$(4) \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0,$$

obwohl aus (1) nur folgt, daß für $\sigma = 0$ deren zeitliche Änderung verschwindet.

Es würde sich nämlich, wenn wir jenen Dichten in Isolatoren einen von Null verschiedenen Wert zuschreiben würden, ihr zeitlich konstantes Feld dem veränderlichen Felde, welches uns angeht, superponieren. Für periodische und gedämpft periodische Schwingungen, auch in Leitern, befriedigt übrigens jede Lösung von (1) und (2) gleichzeitig auch (3) und (4).

Zu den Feldgleichungen treten an Trennungsflächen zweier Körper die *Grenzbedingungen* (Art. V 13, Nr. 6):

$$(5) \quad \mathfrak{H}_{hI} = \mathfrak{H}_{hII},$$

$$(6) \quad \mathfrak{E}_{hI} = \mathfrak{E}_{hII},$$

für jede in die Tangentialebene der Trennungsfläche fallende Richtung h .

In einem idealen Grenzfall jedoch, nämlich wenn einer der aneinander grenzenden Körper ein „vollkommener Leiter“, von der Leitfähigkeit $\sigma = \infty$, ist, fällt die Grenzbedingung (5) weg. Hier kann nämlich die Flächendichte j des tangentiellen Leitungsstromes einen von Null verschiedenen Wert annehmen; mit ihr sind die tangentiellen Komponenten der magnetischen Feldstärke in dem angrenzenden Körper verknüpft durch:

$$(7) \quad j = c[n\mathfrak{H}].$$

(n ist der Einheitsvektor, der die äußere Normalenrichtung der Oberfläche des vollkommenen Leiters anzeigt.)

In das Innere eines solchen idealen Leiters dringt das elektromagnetische Feld nicht ein. Dementsprechend folgt aus (6), daß die zu seiner Oberfläche tangentiellen Komponenten von \mathfrak{E} in dem angrenzenden Körper gleich Null sind:

$$(8) \quad [n\mathfrak{E}] = 0.$$

Bei schnellen elektrischen Schwingungen ist es bisweilen gestattet, die metallischen Leiter durch vollkommene zu ersetzen, und an ihrer Oberfläche die Grenzbedingung (8) vorzuschreiben.

2. Geschichte und Begrenzung des Gebietes. Ihre wichtigste Anwendung finden die Feldgleichungen für ruhende Körper in der Theorie der schnellen elektrischen Schwingungen. *Heinrich Hertz*, der Entdecker dieser Schwingungen, berichtet in der einleitenden Übersicht, die er seinen „*Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen*“

*Kraft*¹⁾ voranschickt, selbst über die Geschichte seiner Versuche. Wie er erzählt, war es ein Zufall, der ihn im Jahre 1886 erkennen ließ, daß der elektrische Funke unter gewissen Umständen sehr schnelle elektrische Schwingungen auszulösen vermag. Der Wichtigkeit dieser Entdeckung für die damals noch strittigen Grundlagen der Elektrodynamik sich wohl bewußt, nahm er sofort die experimentelle Prüfung der *Faraday-Maxwellschen* Theorie in Angriff. Das erst nach manchem Irrwege erreichte Ziel war die Bestätigung dieser Theorie. Durch seine Hohlspiegelversuche konnte *Hertz* die Analogie der elektromagnetischen und der Lichtwellen unmittelbar veranschaulichen, und so auch diejenigen Physiker, welche damals noch auf dem Boden der Fernwirkungstheorie standen, von der Fruchtbarkeit der elektromagnetischen Lichttheorie überzeugen.

Die Entstehung der elektrischen Schwingungen, ihre Ausbreitung im Raume, ihre Fortleitung durch Drähte, das sind die Probleme, über deren mathematische Behandlung in diesem Artikel berichtet werden soll. Diese Probleme sind insbesondere auch für die *drahtlose Telegraphie* von Bedeutung, um deren Betrieb mittelst *Hertzscher* Wellen sich *G. Marconi*, *F. Braun* und *A. Slaby* verdient gemacht haben.

Es ist einigermaßen schwierig, unser Gebiet einerseits gegen die Elektrodynamik langsam veränderlicher Felder, andererseits gegen die Optik abzugrenzen. Der prinzipielle Gegensatz der langsamen und der schnellen Schwingungen ist darin begründet, daß die Theorie der quasistationären Strömung, welche dort gilt, hier meist versagt, daß mithin die Integration der Feldgleichungen unumgänglich wird. Indessen werden in der Literatur der schnellen Schwingungen, insbesondere der drahtlosen Telegraphie, Begriffe wie „Kapazität“ und „Selbstinduktion“ vielfach verwandt, ohne daß die Berechtigung zu ihrer Anwendung aus den Feldgleichungen abgeleitet wird.

Während von den schnellsten *Hertzschen* Schwingungen zu den langsamsten Wechselströmen eine kontinuierliche Reihe herstellbarer Frequenzen führt, ist es bisher nicht gelungen, die Kluft zu überbrücken, welche die Wellen rein elektrischen Ursprungs von denen der strahlenden Wärme trennt. Dadurch ist eine Abgrenzung gegen das Gebiet der Optik zwar für den Experimentator gegeben, aber nicht für den Theoretiker. Dieser braucht, um das elektrodynamische Problem zu einem optischen zu machen, nur die Wellenlängen und

1) *H. Hertz*, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892 = Ges. Werke 2.

gleichzeitig die Abmessungen der Körper zu verkleinern. So werden wir denn gelegentlich (vgl. Nr. 9) auch optische Probleme in den Kreis der Erörterungen ziehen.

II. Entstehung und Ausbreitung elektrischer Wellen.

3. Theorie der Entladung eines Kondensators. Die von *W. Thomson*²⁾ herrührende Theorie der Entladung eines Kondensators durch einen Schließungsdraht beruht auf den folgenden Voraussetzungen:

a) Das elektrische Feld kann durch das elektrostatische Feld der Kondensatorbelegungen ersetzt werden, dessen Energie ist:

$$(9) \quad U = \frac{1}{2} \frac{e^2}{K} = \frac{1}{2} K \varphi^2$$

($\pm e$ Ladung der Belegungen des Kondensators, φ Spannung, K Kapazität des Kondensators).

b) Die Kapazität des Schließungskreises ist gegen diejenige des Kondensators zu vernachlässigen, so daß die Stromstärke

$$(10) \quad J = - \frac{de}{dt} = - K \frac{d\varphi}{dt}$$

für alle Querschnitte des Schließungsdrahtes die gleiche ist.

c) Das magnetische Feld ist dasjenige eines stationären Stromes, von der magnetischen Energie:

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} J^2$$

(L Selbstinduktionskoeffizient des Schließungskreises).

d) Der Strom J verteilt sich gleichförmig über den Querschnitt, so daß die *Joulesche* Wärmeentwicklung durch den Gleichstromwiderstand R bestimmt ist:

$$(12) \quad Q = RJ^2.$$

Auf Grund dieser Voraussetzungen ergibt die Energiegleichung:

$$(13) \quad Q = - \frac{d}{dt} \{ U + T \}$$

für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorentladung die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2} L \ddot{\varphi} + R \dot{\varphi} + \frac{\varphi}{K} = 0$$

oder

$$(14) \quad \ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + (\nu^2 + \delta^2)\varphi = 0,$$

2) *W. Thomson*, *Phil. Mag.* (4) 5 (1853), p. 393 = *Math. and phys. papers* 1, p. 540.

wobei abkürzungsweise gesetzt ist:

$$(14a) \quad v^2 = \frac{c^2}{KL} - \frac{1}{4} \frac{R^2 c^4}{L^2}, \quad \delta = \frac{Rc^2}{2L}.$$

Man erhält zwei partikuläre Integrale von (14):

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_1 = e^{k_1 t}, & \varphi_2 = e^{k_2 t}, \\ k_1 = -\delta + \nu i, & k_2 = -\delta - \nu i, \end{cases}$$

und hat demgemäß folgende Fälle zu unterscheiden:

$$(A) \quad R > \frac{2}{c} \sqrt{\frac{L}{K}}, \quad v^2 < 0, \quad k_1 \text{ und } k_2 \text{ reell;}$$

in diesem Falle stellt das allgemeine Integral

$$(15a) \quad \varphi = a_1 e^{k_1 t} + a_2 e^{k_2 t}$$

eine *aperiodische Entladung* dar.

$$(B) \quad R < \frac{2}{c} \sqrt{\frac{L}{K}}, \quad v^2 > 0, \quad k_1 \text{ und } k_2 \text{ konjugiert komplex;}$$

der reelle Teil des allgemeinen Integrals:

$$(15b) \quad \varphi = a e^{-\delta t} \sin(\nu t + \alpha)$$

stellt hier eine *periodische Entladung* dar, von der Frequenz $\nu/2\pi$ und der Dämpfungskonstanten δ . Liegt insbesondere der Widerstand R soweit unter dem kritischen Werte, daß es zulässig ist, R^2 gegen $\frac{4L}{c^2 K}$ zu vernachlässigen, so gilt nach (14a) für die Schwingungsdauer τ der oszillatorischen Entladung die „*Thomsonsche Formel*“:

$$(15c) \quad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{LK}.$$

Eine Lücke der *Thomsonschen* Theorie gibt sich dadurch kund, daß diese Theorie nur die Grundschiwingung des Systems liefert. Diese Lücke hat *G. Kirchhoff*³⁾ auszufüllen gesucht; indem er die Kapazität des Schließungskreises berücksichtigte, berechnete er nicht nur die Frequenz der Grundschiwingung genauer, sondern auch die Frequenzen der Oberschwingungen. Seine auf der Fernwirkungstheorie fußenden Entwicklungen beanspruchten für beliebige Form des Schließungsdrahtes Gültigkeit; vom Standpunkte der *Maxwellschen* Theorie aus jedoch können wir ihre Gültigkeit nur für gewisse spezielle Formen der Drahtleitung als erwiesen betrachten (vgl. Nr. 13). — Über die Gültigkeit der Voraussetzung (d) der *Thomsonschen* Theorie vgl. man Nr. 10.

Die *Thomson-Kirchhoffsche* Theorie gibt zwar eine Vorstellung

3) *G. Kirchhoff*, Ann. d. Phys. 121 (1864), p. 551 = Ges. Abh., p. 168.

von dem Verlaufe der elektrischen Schwingung im Entladungskreise, sie erklärt jedoch nicht die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in dem umgebenden Raum und die hiermit verknüpfte Dämpfung durch Strahlung (vgl. Nr. 5).

4. Die Hertz'sche Lösung der Feldgleichungen. In dem von wägbarer Materie leeren Raume lauten die Feldgleichungen (1—4):

$$(16a) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H},$$

$$(16b) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E},$$

$$(16c) \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0,$$

$$(16d) \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichungen, welche die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einem Schwingungszentrum aus darstellt, ist von *H. Hertz*⁴⁾ angegeben worden. Er befriedigt (16a, c, d) durch den Ansatz

$$(17a) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{E}_z = -\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\right),$$

$$(17b) \quad \mathfrak{H}_x = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial x}, \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Durch diesen Ansatz wird auch (16b) genügt, wenn Π , die sogenannte „Hertz'sche Funktion“, ein Integral der partiellen Differentialgleichung ist:

$$(17c) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}.$$

Ein überall, ausgenommen den Koordinatenursprung, endliches Integral dieser Differentialgleichung ist

$$(18) \quad \Pi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}.$$

Es stellt Wellen dar, die sich vom Koordinatenursprung aus nach allen Seiten hin in den Raum ausbreiten. Aus der zunächst willkürlichen Funktion $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ leitet sich das elektromagnetische Feld, gemäß (17a, b), folgendermaßen ab:

$$(18a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = \frac{3xz}{4\pi r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3xz}{4\pi cr^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{xz}{4\pi c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ \mathfrak{E}_y = \frac{3yz}{4\pi r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3yz}{4\pi cr^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{yz}{4\pi c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ \mathfrak{E}_z = \frac{3z^2 - r^2}{4\pi r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3z^2 - r^2}{4\pi cr^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{z^2 - r^2}{4\pi c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right), \end{array} \right.$$

4) *H. Hertz*, Ann. d. Phys. 36 (1888), p. 1 = Ges. Werke 2, p. 147.

$$(18b) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{y}{4\pi c r^3} f'(t - \frac{r}{c}) - \frac{y}{4\pi c^2 r^2} f''(t - \frac{r}{c}), \\ \mathfrak{E}_y = \frac{x}{4\pi c r^3} f'(t - \frac{r}{c}) + \frac{x}{4\pi c^2 r^2} f''(t - \frac{r}{c}), \\ \mathfrak{E}_z = 0. \end{cases}$$

Bei der Annäherung an den Koordinatenursprung wird das elektrische Feld mit demjenigen eines der z -Achse parallelen Dipoles, vom Moment $f(t)$, identisch, das magnetische Feld mit demjenigen eines Stromelementes, welches der zeitlichen Änderung des Momentes jenes elektrischen Dipoles entspricht. Ist das Moment eines solchen Dipoles als Funktion der Zeit gegeben, so bestimmen (18a, b) sein elektromagnetisches Feld. Dasselbe besitzt Rotationsymmetrie um die z -Achse; die elektrische Feldstärke liegt in den Meridianebenen, während die magnetische Feldstärke senkrecht zu ihnen gerichtet ist. In großen Entfernungen r vom Erregungszentrum, wo die letzten Terme in (18a, b) maßgebend sind, stehen beide Vektoren senkrecht zum Radiusvektor, und sind dem Betrage nach einander gleich; es ist hier:

$$(18c) \quad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \left| \frac{\sin \vartheta}{4\pi c^2 r} f''(t - \frac{r}{c}) \right|.$$

In dieser Kugelwelle sind demnach die Feldstärken dem Sinus der Poldistanz ϑ proportional; sie nehmen bei der Ausbreitung der Kugelwelle im umgekehrten Verhältnis des Kugelradius ab, so daß die Welle durch zwei konzentrische Kugeln die gleiche Energiemenge hindurchführt. Nach dem *Poyntingschen* Satze (Art. V 13, Nr. 22) berechnet sich die in der Sekunde in den Raum hinausgesandte Energiemenge zu

$$(18d) \quad \frac{1}{6\pi c^3} \left\{ f''(t - \frac{r}{c}) \right\}^2.$$

Betrachtet man Π als Funktion von $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, z und t , und setzt

$$(19) \quad Q(\varrho, z, t) = -\varrho \frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} = \frac{\sin^2 \vartheta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c} f'(t - \frac{r}{c}) \right\},$$

so kann man die allgemeinen Ausdrücke (18a) der elektrischen Komponenten einfacher schreiben⁴⁾:

$$(19a) \quad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial Q}{\partial \varrho}, \quad \mathfrak{E}_\varrho = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Hieraus folgt, daß für einen gegebenen Zeitpunkt t_1 die Gleichung der elektrischen Kraftlinien ist:

$$(19b) \quad Q(\varrho, z, t_1) = \text{constans.}$$

Unter Annahme eines periodisch wechselnden Momentes $f(t)$ sind von *Hertz* selbst die Kraftlinienbilder gezeichnet und diskutiert⁴⁾⁵⁾ worden. Da aber die Schwingungsamplituden, falls keine Energie nachgeliefert wird, infolge der Strahlung abnehmen müssen, so wird eher der Ansatz zutreffen

$$f(t) = a \cdot e^{-\delta t} \sin(\nu t);$$

diesen Ansatz haben *K. Pearson* und *A. Lee*⁶⁾ der Zeichnung der Kraftlinien zugrunde gelegt. Nimmt man jedoch, entsprechend der Auslösung der Schwingungen des *Hertz*schen Erregers durch den elektrischen Funken, an, daß zur Zeit $t = 0$ die gedämpfte Schwingung beginnt, so hat man zu setzen

$$(20) \quad \begin{cases} t < 0: f(t) = f(0), & f'(t) = 0, \\ t > 0: f(t) = a \cdot e^{-\delta t} \sin(\nu t + \alpha). \end{cases}$$

Bis zur Zeit $t = 0$ besteht dann im ganzen Raume ein elektrostatisches Feld. Dann geht vom Erregungszentrum eine elektromagnetische Störung aus, die zur Zeit t in eine Kugel vom Radius (ct) eingeschlossen ist. Auf dieser Kugel dürfen die — durch (18a, b) bestimmten — Feldstärken nicht unendlich werden; daher müssen $f(t)$ und $f'(t)$ so gewählt werden, daß sie für $t = 0$ stetig sind, d. h. gemäß den Bedingungen⁷⁾:

$$(20a) \quad a \cdot \sin \alpha = f(0), \quad \cotg \alpha = \frac{\delta}{\nu}.$$

Es bleibt jedoch $f''(t)$ für $t = 0$ unstetig, das gestörte Feld ist demnach von dem ungestörten durch eine Unstetigkeitsfläche der Feldkomponenten getrennt, die mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum hinausleitet⁷⁾.

Kann man in diesem Sinne behaupten, daß die elektromagnetische Störung sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, so gilt für die Phasen der hier betrachteten Kugelwellen nicht das Gleiche. Die Geschwindigkeit, mit der eine Phase der Schwingung sich fortpflanzt, kann sehr wohl größer als c , ja sogar unendlich werden. Sind doch nach (18a, b) die Wellenphasen in der Nachbarschaft des Schwingungszentrums durch $f(t)$ bzw. $f'(t)$, in großen Entfernungen dagegen durch $f''\left(t - \frac{r}{c}\right)$ bestimmt. Durch die im Vergleiche mit ebenen Wellen anomale Art der Fortpflanzung gewinnt die Phase der elektrischen Kraft im ganzen π , diejenige der magnetischen Kraft $\frac{\pi}{2}$; bei Versuchen

5) Siehe auch *M. Brillouin*, Propagation de l'électricité, p. 294.

6) *K. Pearson* und *A. Lee*, Phil. Trans. A. 193 (1900), p. 159.

7) *A. E. H. Love*, Roy. Soc. Proc. 74 (1904), p. 73.

über die Interferenz von Luftwellen und Drahtwellen ist dieser Umstand zu beachten ^{7a)}).

H. Hertz beabsichtigte durch die gegebene Lösung der Feldgleichungen das Feld seines „Erregers“ darzustellen. Dieser bestand aus einem geraden, in der Mitte durch die Funkenstrecke unterbrochenen Draht von 150 cm Länge, der in zwei Kugeln von je 30 cm Durchmesser mündete. Wengleich die *Hertz*sche Lösung manche Seite des Vorganges zutreffend beschreibt, so sind doch die Voraussetzungen der Theorie bei diesem Erreger keineswegs erfüllt. Nach der Theorie müßte sich in Entfernungen, die klein gegen die Wellenlänge sind, der Erreger als elektrischer Dipol darstellen. Der Abstand der jeweils entgegengesetzt geladenen Kugeln des Erregers voneinander müßte demnach klein gegen die Entfernung r eines Aufpunktes sein, die selbst wieder klein gegen die Wellenlänge ist. In Wirklichkeit aber war die gemessene Wellenlänge der Eigenschwingungen gleich 750 cm, also nur gleich der fünffachen Drahtlänge.

Die *Hertz*sche Theorie des Erregers ist auch insofern unbefriedigend, als sie die Wellenlänge der Eigenschwingung unbestimmt läßt, während diese in Wirklichkeit durch die Abmessungen des Erregers bestimmt ist. Von einer vollständigen Theorie des Erregers wird zu verlangen sein, daß sie ebensowohl Frequenzen und Dämpfungsdekremente der Eigenschwingungen bestimmt, wie ihr elektromagnetisches Feld.

5. Superposition Hertzscher Lösungen. Dennoch ist die *Hertz*sche Lösung für die Theorie der elektrischen Wellen von ebenso grundlegender Bedeutung, wie es die Lösung $e/4\pi r$ der Laplaceschen Gleichung für die Potentialtheorie ist. Durch Superposition *Hertz*scher Dipole kann man nämlich allgemeinere Lösungen der Feldgleichungen erhalten, mit deren Hilfe man das von veränderlichen Leitungsströmen erregte Feld darzustellen vermag.

Zunächst kann man die Beschränkung hinsichtlich der Richtung der Achse des Dipols fallen lassen, indem man das Formelsystem (17 a—c) vektoriell verallgemeinert⁸⁾. Die *Hertz*sche Funktion II

^{7a)} Lösungen der Feldgleichungen, welche periodischen, von n -fachen Polen ausgehenden Störungen entsprechen, sonst aber der *Hertz*schen Lösung analog sind, hat *H. A. Rowland* schon vor *Hertz* aufgestellt und namentlich auf optische Phänomene angewandt. Vgl. Amer. J. of math. 6, p. 359 und Phil. Mag. 17 (1884), p. 423.

⁸⁾ Vgl. *M. Abraham*, Theorie der Elektrizität 2, p. 56, 62. Man beachte, daß dieser Vektor die beiden Potentiale der Elektronentheorie (vgl. Art. *Lorentz* V 14, Nr. 4), das skalare ϕ und das vektorielle α , passend zusammenfaßt. Die zwischen ihnen bestehende Relation (V 14 Gl. (2)) $\operatorname{div} \alpha = -\dot{\phi}/c$ wird identisch

erscheint dann als z -Komponente des „Hertzschen Vektors“ \mathfrak{H} , aus dem die Feldstärken \mathfrak{E} , \mathfrak{H} sich folgendermaßen ableiten:

$$(21a) \quad \mathfrak{E} = \text{grad div } \mathfrak{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2},$$

$$(21b) \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Dies ist ein Lösungssystem der Feldgleichungen (16 a—d), falls der Hertzsche Vektor der partiellen Differentialgleichung genügt

$$(21c) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{H} = \text{grad div } \mathfrak{H} - \text{rot rot } \mathfrak{H}.$$

Ihr als Verallgemeinerung von (18) anzusprechendes Integral

$$(21d) \quad \mathfrak{H} = \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}$$

entspricht einem im Koordinatensprung befindlichen Dipol von dem jeweils beliebig gerichteten Momente $p(t)$. Die zeitliche Änderung dieses Vektors

$$(21e) \quad p'(t) = J(t) d\mathfrak{s}$$

ist einem Stromelemente äquivalent.

Hat man es mit zeitlich rasch veränderlichen Strömen zu tun, die in linearen Leitern fließen, so kann man, falls die Stromstärke $J(t)$ in den Elementen $d\mathfrak{s}$ der Leitungsdrähte bekannt ist, das im Raume erregte elektromagnetische Feld durch Superposition der Felder der einzelnen Stromelemente berechnen⁹⁾. Herrscht bis zur Zeit $t = 0$, wo die elektrischen Ströme zu fließen beginnen, das elektrostatische Feld \mathfrak{E}_0 , so setze man

$$(22) \quad \mathfrak{H} = \int \frac{d\mathfrak{s}}{4\pi r} \int_0^{t - \frac{r}{c}} J(t) dt.$$

In Entfernungen von den Leitern, die groß gegen ihre Querschnittsabmessungen sind, erhält man als Feldstärken der elektromagnetischen Störung:

$$(22a) \quad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \text{grad div } \mathfrak{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2},$$

$$(22b) \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

befriedigt, wenn man setzt $\varphi = -\text{div } \mathfrak{H}$, $a = \dot{\mathfrak{H}}/c$, und es erweisen sich daraufhin die Felddarstellungen (IX), (X) der Elektronentheorie (V 14, p. 157) als gleichlautend mit den obigen Gl. (21a), (21b).

9) M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2, p. 286—296.

Für einen einzelnen Schwingungskreis, dessen Abmessungen klein sind, sowohl gegen die Wellenlänge, als auch gegen die Entfernung des Aufpunktes, und dessen Stromstärke J für alle Querschnitte des Leitungsdrahtes jeweils die gleiche ist, geht der allgemeine Ausdruck (22) des Hertzischen Vektors wiederum in den spezielleren (21d) über, wobei aber statt (21e)

$$(22c) \quad \mathbf{p}'(t) = J(t) \int d\mathfrak{s}$$

zu setzen ist; es geht mithin hier die Vektorsumme aller Leiterelemente ein.

Die Formeln (22c, 21d) kann man auf die Theorie der Entladung eines ebenen Kondensators anwenden, falls die Voraussetzung (b) der Thomsonschen Theorie (vgl. Nr. 3) erfüllt ist. Der Vektor \mathbf{p} ist dann mit dem elektrischen Momente der Kondensatorbelegungen identisch⁹⁾. Das elektromagnetische Feld ist dasjenige eines Hertzischen Dipols, wenigstens in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Schwingungskreises sind.

Dieses Ergebnis, im Verein mit dem für die Strahlung eines Hertzischen Dipols geltenden Ausdruck (18d), gestatten es, die Thomsonsche Theorie der Kondensatorentladung mit Rücksicht auf die Strahlungsdämpfung zu korrigieren. Betrachtet man, was in erster Annäherung erlaubt ist, die Schwingungen der oszillatorischen Entladung als rein periodische, so wird der Mittelwert ihrer Energie

$$\overline{W} = \frac{L}{c^2} \overline{J^2} = \frac{L}{c^2 d^2} \cdot \overline{f''(t)^2}$$

(d ist der Abstand der Kondensatorbelegungen).

Aus (18d) ergibt sich der relative Energieverlust in der Sekunde, nfolge der Strahlung:

$$2\delta = \frac{d^2}{6\pi cL} \cdot \frac{\overline{f''(t)^2}}{f''(t)^2} = \frac{d^2 v^2}{6\pi cL};$$

dabei hat δ die Bedeutung der Dämpfungskonstanten der Schwingungsamplituden; das logarithmische Dekrement der Strahlungsdämpfung¹⁰⁾ wird mit Rücksicht auf (15c)

$$(22d) \quad \delta \cdot \tau = \delta \cdot \frac{2\pi}{v} = \frac{d^2 v}{6cL} = \frac{d^2}{6\sqrt{KL^3}} = \frac{d^2 v^3 K}{6c^3}.$$

10) *M. Planck*, Berlin Ber. 1896, p. 151; *Physik. Zeitschr.* 2 (1901), p. 530, leitet für einen, als Hertzischen Dipol aufzufassenden Oszillator eine Schwingungsgleichung ab. Vgl. auch *M. Planck*, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906, p. 100 ff. Die Schwingungen zweier strahlender Dipole behandelt, unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung, *V. W. Ekman*, *Archiv f. Mat., Astr. och Fysik* 3 (1907).

Im Grenzfall eines vollkommen geschlossenen Kreises verschwindet die in (22c) eingehende Vektorsumme aller Stromelemente. Es ist demnach die Strahlung eines geschlossenen Kreises gleich null, wofern die jener Formel zugrunde liegenden Voraussetzungen zutreffen; dieselben verlangen in allen Querschnitten jeweils gleiche Stromstärke und Abmessungen des Kreises, die klein gegen die Wellenlänge sind. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so kann auch der geschlossene Kreis Wellen von endlicher Energie entsenden. Das Feld dieser Wellen ist durch den Ausdruck (22) für den Hertzschen Vektor bestimmt; dieser Ausdruck zieht in den einzelnen Leiter-elementen verschiedene Stromstärken in Betracht, sowie auch die verschiedenen Phasen, mit denen die von ihnen entsandten Beiträge im Aufpunkte eintreffen können. Ein Beispiel für die Anwendung von (22) auf ungeschlossene Ströme bieten die Antennen der drahtlosen Telegraphie dar¹¹⁾ (vgl. Nr. 7).

Streng genommen ist allerdings die Stromverteilung längs linearer Leiter nicht als bekannt zu betrachten, sondern es ist eben die Aufgabe der Theorie, sie aus den Feldgleichungen und den Grenzbedingungen (vgl. Nr. 1) zu ermitteln. Von *H. C. Pocklington*¹²⁾ ist gezeigt worden, daß es für gewisse Formen vollkommen leitender Drähte (den zum Kreisring gebogenen und den schraubenförmig gewundenen) möglich ist, durch Aneinanderreihung Hertzscher Dipole auf der Drahtachse der Grenzbedingung (8) auf der Drahtoberfläche Genüge zu leisten und ihr die Stromverteilung bzw. die Schwingungsfrequenz anzupassen.

Man kann auch daran denken¹³⁾, die Stromverteilung an der Oberfläche räumlich ausgedehnter vollkommener Leiter zu ermitteln, indem man Hertzsche Dipole längs ihrer Oberfläche zunächst willkürlich verteilt und dann nachträglich ihre Verteilung der Grenzbedingung (8) anzupassen sucht. Doch wird nur selten dieses Verfahren zum Ziele führen. Wie bei dem analogen elektrostatischen Probleme der Elektrizitätsverteilung auf einem Leiter, wird es sich in den meisten Fällen als erfolgreicher erweisen, auf die Feldgleichungen zurückzugehen, und ihre Integration, mit Rücksicht auf die gestellten Grenzbedingungen, direkt in Angriff zu nehmen.

6. Elektrische Eigenschwingungen. Im Innern eines homogenen isotropen Isolators gelten die Feldgleichungen (1, 2):

11) *M. Abraham*, Physik. Zeitschr. 2 (1901), p. 329; Theorie der Elektrizität 2, p. 297—307.

12) *H. C. Pocklington*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 9 (1897), p. 324.

13) *H. Poincaré*, Paris C. R. 113 (1891), p. 515.; Oscill. él. p. 79.

$$(23) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H}, \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E}.$$

Ist der Isolator in eine vollkommen leitende Hülle eingeschlossen, so gilt an seiner Oberfläche die Grenzbedingung (8):

$$(23a) \quad [n\mathfrak{E}] = 0.$$

Die Eigenschwingungen eines solchen *abgeschlossenen Systems* müssen, wegen der fehlenden Wärmeentwicklung, *ungedämpft* sein. Es zeigt sich bei jeder Eigenschwingung eines solchen Systems, daß die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} im ganzen Felde in derselben Phase schwingt, und daß \mathfrak{H} gegen \mathfrak{E} überall die Phasendifferenz $\pi/2$ besitzt¹⁴). Diese elektromagnetischen Eigenschwingungen lassen sich, ebenso wie die analogen akustischen, mit einem Minimaltheorem in Verbindung bringen¹⁴).

Größeres Interesse als die Schwingungen eines abgeschlossenen Bereiches besitzen die Eigenschwingungen eines Raumes, der nach außen hin unbegrenzt ist, nach innen aber an die Oberfläche eines vollkommenen Leiters grenzt. Die Eigenschwingungen eines solchen *offenen Systems* — eines idealisierten Hertzschen Erregers — sind trotz der fehlenden Wärmeentwicklung stets *gedämpft*, weil die in den Raum hinausgehenden Wellen elektromagnetische Energie fortführen. Die entsprechenden Lösungen von (23, 23a) sind gleichfalls mit einem Minimaltheorem verknüpft¹⁵).

6a. Allgemeine Sätze. Wir wollen das gegebene System Σ mit einem ihm geometrisch ähnlichen Systeme Σ' vergleichen. Die Koordinaten einander zugeordneter Punkte in Σ und Σ' , insbesondere der Leiteroberflächen, mögen sich folgendermaßen entsprechen:

$$(24) \quad x = kx', \quad y = ky', \quad z = kz'.$$

An Stelle des durch die Konstanten ε, μ gekennzeichneten Isolators in Σ soll in Σ' der von wägbarer Materie leere Raum treten. Die hier geltenden Feldgleichungen schreiben wir:

$$(25) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} = \text{rot } \mathfrak{H}', \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'} = \text{rot } \mathfrak{E}'.$$

Man nehme ein Lösungssystem $\mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ dieser Feldgleichungen, welches x', y', z', t' zu Unabhängigen hat, als bekannt an; dasselbe mag an der Leiteroberfläche der (23a) entsprechenden Grenzbedingung genügen:

$$(25a) \quad [n'\mathfrak{E}'] = 0.$$

14) H. Poincaré, Arch. de Genève 25 (1891), p. 5; Élé. et optique 1. éd., p. 235.

15) F. Hasenöhrle, Physik. Zeitschr. 7 (1906), p. 37.

Ihm ordnet sich ein Lösungssystem von (23, 23a) zu:

$$(25b) \quad \mathcal{E} = M \cdot \mathcal{E}' \sqrt{\mu}, \quad \mathcal{H} = M \cdot \mathcal{H}' \sqrt{\varepsilon},$$

wofern man entsprechende Zeiten t, t' in Σ, Σ' aufeinander folgendermaßen bezieht:

$$(25c) \quad t = kt' \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

Ist Σ' ein offenes System, so ist auch Σ ein solches. Besitzt das Feld $\mathcal{E}', \mathcal{H}'$ in großen Entfernungen vom Leiter den Charakter einer nach außen hin eilenden Welle, so gilt das Gleiche für das durch (25b) bestimmte Feld \mathcal{E}, \mathcal{H} . Es hat M die Bedeutung eines von den Erregungsbedingungen abhängigen Faktors.

Entsprechende Zeiten sind insbesondere die Schwingungsperioden τ, τ' zweier einander entsprechender Eigenschwingungen in Σ und Σ' . Gemäß (25c) ist:

$$(25d) \quad \tau = k\tau' \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

Die Schwingungsdauer jeder der Eigenschwingungen ist demnach proportional den Längsabmessungen von Σ , ferner der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante und aus der magnetischen Permeabilität des Isolators¹⁶⁾. Da die Geschwindigkeiten ebener Wellen in Σ und Σ' in dem Verhältnis $1:\sqrt{\varepsilon\mu}$ stehen, so ergibt (25d) für die Wellenlängen λ, λ' die Beziehung

$$(25e) \quad \lambda = k\lambda'.$$

Die Wellenlänge der Eigenschwingungen ist den Längsabmessungen des Systems proportional; sie ist, wenn sie in demselben Medium gemessen wird, in welchem die Schwingungen entstehen, von dessen Konstanten ε, μ unabhängig¹⁶⁾.

Aus (25b) leitet man ferner ab, daß die logarithmischen Dekremente zweier einander entsprechender Eigenschwingungen in Σ und Σ' die gleichen sind¹⁶⁾.

Der in (25d) enthaltene Satz über die Schwingungsperioden zweier geometrisch ähnlicher Systeme ermöglicht es, die Eigenschwingungen eines Systemes an einem im verkleinerten Maßstabe ausgeführten Modell zu studieren. So hat *P. Drude*¹⁷⁾ experimentell die Abhängigkeit der Eigenschwingungen kleiner Spulen von deren Parametern untersucht. Mit Hilfe des obigen Satzes kann man auf Grund dieser Messungen auch die Schwingungsperioden größerer Spulen angeben.

16) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 66 (1898), p. 435.

17) *P. Drude*, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 293.

6b. Orthogonale Koordinaten. Um wenigstens für einige Leiterformen die elektrischen Eigenschwingungen zu berechnen, wendet man allgemeine orthogonale Koordinaten an (Art. IV 14, Nr. 20); durch diese drückt sich das Quadrat der Länge eines Linienelementes folgendermaßen aus:

$$(26) \quad ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}.$$

Auf Grund der Darstellung der Rotation (des curl) durch allgemeine orthogonale Koordinaten (Art. IV 14, Gl. 41) kann man die Feldgleichungen für den leeren Raum schreiben¹⁶⁾:

$$(26a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\alpha}{\partial t} = h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathfrak{S}_\gamma}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\mathfrak{S}_\beta}{h_2} \right) \right\}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\beta}{\partial t} = h_3 h_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mathfrak{S}_\gamma}{h_3} \right) \right\}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\gamma}{\partial t} = h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mathfrak{S}_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{h_1} \right) \right\}; \end{array} \right.$$

$$(26b) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_\alpha}{\partial t} = h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathfrak{E}_\gamma}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\mathfrak{E}_\beta}{h_2} \right) \right\}, \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_\beta}{\partial t} = h_3 h_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\mathfrak{E}_\alpha}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mathfrak{E}_\gamma}{h_3} \right) \right\}, \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_\gamma}{\partial t} = h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mathfrak{E}_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathfrak{E}_\alpha}{h_1} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

Gelingt es, die Parameter (α, β, γ) der drei orthogonalen Flächenscharen so zu wählen, daß die Leiteroberfläche einer der drei Scharen angehört, etwa durch $\alpha = \alpha_0$ dargestellt wird, so verlangt die Grenzbedingung (23a):

$$(26c) \quad \mathfrak{E}_\beta = 0, \quad \mathfrak{E}_\gamma = 0 \quad \text{für } \alpha = \alpha_0.$$

Ist eine Lösung von (26a—c) gefunden, so ist es leicht, sie auf Grund der oben abgeleiteten Sätze auf den Fall zu übertragen, daß der vollkommene Leiter in einen beliebigen, homogenen, isotropen Isolator eingebettet ist.

Die Gleichungen (26a—c) vereinfachen sich beträchtlich, wenn der Leiter und sein Feld Rotationssymmetrie besitzen. Man kann dann unter γ den Parameter von Halbebenen verstehen, die durch die Symmetrieachse gelegt sind, etwa den Winkel, den eine solche Halbebene mit einer anderen, festen, einschließt. Dann erhält (26) die Form

$$(27) \quad ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \rho^2 d\gamma^2.$$

h_1 , h_2 , und $h_3 = \frac{1}{\rho}$, der reziproke Abstand von der Symmetrieachse, hängen jetzt, ebenso wie die Feldkomponenten, nur noch von (α, β) ab. Infolge dessen zerfallen die Differentialgleichungen (26a, b) für das axial-symmetrische Feld in zwei voneinander unabhängige Gruppen, einerseits \mathfrak{E}_α , \mathfrak{E}_β , \mathfrak{H}_γ , andererseits \mathfrak{H}_α , \mathfrak{H}_β , \mathfrak{E}_γ . Die Gleichungen der ersten Gruppe sind:

$$(27a) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\alpha}{\partial t} = \frac{h_2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} (\rho \mathfrak{H}_\gamma), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\beta}{\partial t} = -\frac{h_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\rho \mathfrak{H}_\gamma), \end{cases}$$

$$(27b) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\gamma}{\partial t} = h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mathfrak{E}_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathfrak{E}_\alpha}{h_1} \right) \right\},$$

$$(27c) \quad \mathfrak{E}_\beta = 0 \text{ für } \alpha = \alpha_0.$$

Diese Gruppe, bei welcher die elektrischen Kraftlinien in den Ebenen $\gamma = \text{const.}$ liegen, besitzt wegen ihrer Anwendung auf den Hertzschen Erreger ein größeres Interesse, als die zweite Gruppe. Es ist zweckmäßig, der weiteren Behandlung eine Hilfsfunktion $Q(\alpha, \beta, t)$ zugrunde zu legen, aus der sich die Feldstärken folgendermaßen ableiten:

$$(28) \quad \mathfrak{E}_\alpha = \frac{h_2}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \beta}, \quad \mathfrak{E}_\beta = -\frac{h_1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \alpha},$$

$$(28a) \quad \mathfrak{H}_\gamma = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Hierdurch sind die Gl. (27a) identisch erfüllt; (27b) nimmt die Form an:

$$(28b) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = h_1 h_2 \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_1}{\rho h_2} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_2}{\rho h_1} \frac{\partial Q}{\partial \beta} \right) \right\},$$

während die Grenzbedingung (27c) verlangt:

$$(28c) \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

Die Funktion Q ist eine Verallgemeinerung der von *H. Hertz* zur Darstellung der elektrischen Kraftlinien angewandten (vgl. Nr. 4); es gehen in der Tat die Gleichungen (19a) aus (28) durch Einführung von Zylinderkoordinaten hervor. Die Gleichung der elektrischen Kraftlinien, die dort durch (19b) gegeben war, lautet in dem hier betrachteten allgemeineren Falle gemäß (28) für eine gegebene Zeit t_1 :

$$(28d) \quad Q(\alpha, \beta, t_1) = \text{constans.}$$

Aus der Grenzbedingung (28c) kann man ableiten¹⁸⁾, daß von

18) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 67 (1899), p. 834.

der Oberfläche des vollkommenen Leiters aus die Phasen der gedämpft periodischen Eigenschwingungen mit unendlicher Geschwindigkeit ihren Weg in den Raum beginnen. Mit wachsender Entfernung von dem Leiter muß sich ihre Geschwindigkeit asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit nähern.

Wir gehen jetzt dazu über, für spezielle Formen der Leiteroberfläche die Eigenschwingungen zu berechnen.

6c. Spezielle Fälle. Die Eigenschwingungen des Außenraumes einer vollkommen leitenden Kugel hat J. J. Thomson¹⁹⁾ untersucht.

Bei Einführung räumlicher Polarkoordinaten (r, ϑ, γ) wird

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r \sin \vartheta},$$

und es nimmt die partielle Differentialgleichung (28b) die Form an:

$$(29) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \right).$$

Die durch (28, 28a) bestimmten Feldstärken dürfen auf der Symmetrieachse ($\vartheta = 0$) des Feldes nicht unendlich werden. Dieser Bedingung entsprechende komplexe Partikularlösungen von (29) erhält man, wenn man setzt:

$$(29a) \quad Q_n = e^{-p_n c t} \cdot S_n(p_n r) \cdot \sin^2 \vartheta \cdot P_n'(\cos \vartheta).$$

Hier ist unter $P_n(\cos \vartheta)$ die zonale Kugelfunktion n^{ter} Ordnung zu verstehen, während S_n als Funktion seines Argumentes $z = p_n r$ der mit der Besselschen verwandten Differentialgleichung zu genügen hat:

$$(29b) \quad S_n'' - S_n \left(1 + \frac{n(n+1)}{z^2} \right) = 0.$$

Die gesuchte Lösung soll für große Werte von r nach außen hin forteilenden Kugelwellen entsprechen. Um dieser Bedingung zu genügen, wählt man das folgende Integral von (29b) aus:

$$(29c) \quad S_n = z^{n+1} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left(\frac{e^{+z}}{z} \right).$$

Die Grenzbedingung (28c), angewandt auf eine Kugel vom Radius a , ergibt

$$(29d) \quad S_n'(z) = 0 \quad \text{für } z = p_n a.$$

Hieraus bestimmen sich die „Eigenwerte“ p_n der komplexen Konstanten

$$(29e) \quad p_n = \frac{\sigma_n}{\lambda_n} \pm \frac{2\pi i}{\lambda_n},$$

19) J. J. Thomson, Lond. math. soc. Proc. 15 (1884), p. 197; Rec. res. p. 361.

und damit die Wellenlängen λ_n und die Strahlungsdekremente σ_n der Eigenschwingungen.

Für $n = 1$ folgt aus (29c, d):

$$(29f) \quad S_1'(z) = e^{+z} \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) = 0 \text{ für } z = p_1 a.$$

Hieraus resultiert für p_1 eine quadratische Gleichung, aus deren konjugiert komplexen Wurzeln man nach (29e) findet

$$(29g) \quad \lambda_1 = \frac{4\pi a}{3}, \quad \sigma_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

In ganz entsprechender Weise ergibt sich für p_n eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades. Diese Gleichung besitzt für gerade n , außer den konjugiert komplexen Wurzeln, mindestens eine reelle. Obwohl diese letztere einen aperiodisch gedämpften Vorgang darstellt, so ist sie doch mit heranzuziehen, wenn man das Abklingen eines mit der Kugelfunktion n^{ter} Ordnung verknüpften elektrostatischen Anfangszustandes verfolgt²⁰⁾.

Den Fall einer vollkommen leitenden, von einer konzentrischen dielektrischen Schicht umhüllten Kugel hat *A. Lampa*²¹⁾ erledigt. *F. Kolaček*²²⁾ hat allgemein die Eigenschwingungen einer isolierenden, oder auch leitenden, Kugel untersucht. Die Eigenschwingungen der dielektrischen Schicht eines Kugelkondensators behandeln *J. J. Thomson*²³⁾ und *J. Larmor*²⁴⁾. Der letztere geht auch auf die Eigenschwingungen des ebenen und des zylindrischen Kondensators ein²⁴⁾.

Die Untersuchung der Eigenschwingungen vollkommen leitender Zylinder führt auf Zylinderfunktionen, und zwar auf solche erster oder zweiter Art, je nachdem es sich um den Innenraum²⁵⁾ oder um den Außenraum²⁶⁾ handelt. Die Eigenschwingungen des Innenraumes haben *J. J. Thomson*²⁵⁾, *Lord Rayleigh*²⁷⁾ und *R. H. Weber*²⁸⁾ behandelt. In der letztgenannten Arbeit kommt eine von *H. Weber*²⁹⁾ herührende Methode zur Verwendung, welche die beiden Feldgleichungen in eine einzige, für einen komplexen Vektor geltende Feldgleichung

20) *A. E. H. Love*, Lond. math. soc. Proc. (2) 2 (1904), p. 88.

21) *A. Lampa*, Wien Ber. 112 (1903), p. 37.

22) *F. Kolaček*, Ann. d. Phys. 58 (1896), p. 271.

23) *J. J. Thomson*, Rec. res., p. 373 ff.

24) *J. Larmor*, Lond. math. Soc. Proc. 26 (1894), p. 119.

25) *J. J. Thomson*, Rec. res., p. 344.

26) *J. J. Thomson*, Rec. res., p. 347.

27) *Rayleigh*, Phil. Mag. 43 (1897), p. 125.

28) *R. H. Weber*, Ann. d. Phys. 8 (1902), p. 721.

29) *Riemann-Weber*, D. part. Diffgl. d. math. Physik. 2 (1901), p. 348.

zusammenzieht. Mit Hilfe derselben Methode erledigt A. Kalähne³⁰⁾ den Fall einer zum Kreisring gebogenen Röhre von rechteckigem Querschnitt, der gleichfalls auf Besselsche Funktionen führt.

Die Theorie der Eigenschwingungen eines *gestreckten, vollkommen leitenden Rotationsellipsoids* ist von M. Abraham¹⁶⁾ entwickelt worden. Wählt man als Längeneinheit den halben Abstand der Brennpunkte und versteht unter α, β die Parameter konfokaler Rotationsellipsoide bzw. Hyperboloide, so hat man zu setzen

$$\varrho = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}},$$

so daß (28b) die Form erhält

$$(30) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} (\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta^2}.$$

Man kann auch in diesem Falle komplexe Partikularlösungen in Form von Produkten ansetzen:

$$(30a) \quad Q_n = e^{-p_n ct} \cdot H_n(\alpha) \cdot E_n(\beta), \quad \begin{cases} \alpha_0 \leq \alpha < \infty, \\ -1 \leq \beta \leq +1, \end{cases}$$

deren Faktoren $H_n(\alpha), E_n(\beta)$ dann Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen sein müssen:

$$(30b) \quad H_n''(\alpha) + H_n(\alpha) \left(-p_n^2 + \frac{k_n}{1 - \alpha^2} \right) = 0,$$

$$(30c) \quad E_n''(\beta) + E_n(\beta) \left(-p_n^2 + \frac{k_n}{1 - \beta^2} \right) = 0.$$

k_n und p_n sind noch zu bestimmende Konstanten; p_n ist durch (29e) mit den Wellenlängen und Dämpfungsdekrementen der Eigenschwingungen verknüpft. Gemäß (28, 28a) werden die Felder der Eigenschwingungen dargestellt durch die reellen Teile der komplexen Ausdrücke:

$$(30d) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\alpha = e^{-p_n ct} \cdot \frac{H_n(\alpha) \cdot E_n'(\beta)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - \beta^2)}}, \\ \mathfrak{E}_\beta = - e^{-p_n ct} \cdot \frac{H_n'(\alpha) \cdot E_n(\beta)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)}}, \\ \mathfrak{H}_\gamma = - p_n e^{-p_n ct} \cdot \frac{H_n(\alpha) \cdot E_n(\beta)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1)}}. \end{cases}$$

Da die Feldkomponenten auf den durch $\beta = \pm 1$ gegebenen Stücken der Symmetrieachse nicht unendlich werden dürfen, so muß $E_n(\beta)$ für $\beta = \pm 1$ verschwinden, und in diesen beiden singulären

Punkten der Differentialgleichung (30c) auch endliche erste Ableitungen besitzen.

Hieraus gewinnt man folgende, die Konstanten p_n, k_n verknüpfende Beziehung:

$$(30e) \quad p_n^2 - q_n^2 = k_n \cdot \frac{\int_{-1}^{+1} d\beta \chi_n(\beta) E_n(\beta)}{\int_{-1}^{+1} d\beta \chi_n(\beta) E_n(\beta) (1 - \beta^2)},$$

wo gesetzt ist:

$$(30f) \quad q_n = \pm \frac{\pi n i}{2}, \quad \chi_n(\beta) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi n \beta}{2}\right) & \text{für ungerade } n, \\ \sin\left(\frac{\pi n \beta}{2}\right) & \text{für gerade } n. \end{cases}$$

Die gesuchte Funktion $E_n(\beta)$ genügt der Integralgleichung³¹⁾

$$(31) \quad e_n E_n(\alpha) = (1 - \alpha^2) \int_{-1}^{+1} d\beta E_n(\beta) e^{p_n \alpha \beta}$$

(e_n ist eine Konstante).

Falls es sich um die Eigenschwingungen des Außenraumes handelt, hat man als Integral von (30b) dasjenige auszuwählen, welches für große Werte von α nach außen hin fortschreitenden Kugelwellen entspricht. Dasselbe läßt sich in der Form darstellen

$$(31a) \quad H_n(\alpha) = (1 - \alpha^2) \int_{-\infty}^{+1} d\beta E_n(\beta) e^{p_n \alpha \beta}.$$

Die gemäß (28c) an der Oberfläche des ellipsoidischen Leiters vorzuschreibende Grenzbedingung

$$(31b) \quad H_n'(\alpha_0) = 0$$

liefert eine zweite Beziehung zwischen den Konstanten p_n und k_n .

Diese einigermaßen verwickelten Beziehungen lassen sich in verhältnismäßig einfacher Weise durch sukzessive Approximationen lösen¹⁶⁾, wenn der Leiter ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid ist; für einen solchen „stabförmigen“ oder „nadelförmigen“ Leiter ist α_0 nur wenig größer als 1. In diesem Falle erhält man aus (31b) als erste, verschwindender Dicke des Leiters entsprechende Näherung¹⁶⁾: $k_n = 0$, mithin aus (30e, f)

$$(32) \quad \pm \frac{2\pi i}{\lambda_n} + \frac{\sigma_n}{\lambda_n} = p_n = \pm \frac{\pi n i}{2},$$

31) M. Abraham, Math. Ann. 52 (1899), p. 81.

daher

$$(32a) \quad \lambda_n = \frac{4}{n}, \quad \sigma_n = 0.$$

In diesem Grenzfalle des geradlinigen Leiters sind die Eigenschwingungen ungedämpft; die Wellenlänge der Grundschiwingung ($n = 1$) ist gleich der doppelten Länge des Leiters (diese war gleich 2 gesetzt); die Oberschwingungen sind harmonisch. Man erhält für Q_n :

$$(32b) \quad Q_n = e^{-p_n c t} \cdot H_n(\alpha) \cdot E_n(\beta) = e^{p_n(\alpha - ct)} \cdot \chi_n(\beta).$$

Der reelle Teil hiervon liefert gemäß (28d) die Gleichung der elektrischen Kraftlinien zu verschiedenen Zeiten; dieser ersten Annäherung entsprechende Kraftlinienbilder hat F. Hack³²⁾ gezeichnet. Für ungerade n ist die Mittelebene ($\beta = 0$) eine Knotenebene für die tangentielle elektrische Komponente \mathfrak{E}_α , für gerade n dagegen für die magnetische Feldstärke \mathfrak{H}_y ¹⁶⁾. Allgemein findet man, für beliebiges n , $n - 1$ Knotenflächen der magnetischen Feldstärke, von der Form konfokaler Rotationshyperboloide. Für einen geradlinigen, in der Mitte durch eine Funkenstrecke unterbrochenen Erreger hat F. Kiebitz³³⁾ das Vorhandensein der Eigenschwingungen ungerader Ordnung bis $n = 17$ experimentell festgestellt, und speziell für $n = 3$ den theoretischen Verlauf der Knoten- und Bauchflächen des magnetischen Feldes bestätigt gefunden.

Treibt man die Approximation einen Schritt weiter, so findet man für die Eigenwerte p_n :

$$(32c) \quad \pm \frac{2\pi i}{\lambda_n} + \frac{\sigma_n}{\lambda_n} = p_n = \pm \frac{\pi n i}{2} + \varepsilon C_n,$$

wo gesetzt ist

$$(32d) \quad \varepsilon = \frac{1}{4 \log \left(\frac{2}{b} \right)},$$

(b ist der Radius des Mittelquerschnitts des Leiters, bezogen auf die halbe Länge als Einheit),

$$(32e) \quad C_n = \int_0^{2\pi n} dx \cdot \frac{1 - \cos x}{x} = \log 2\pi n + 0,577 \dots + \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \frac{5!}{(2\pi n)^6} - \dots,$$

mithin

$$(32f) \quad \lambda_n = \frac{4}{n}, \quad \sigma_n = \frac{4\varepsilon}{n} C_n.$$

32) F. Hack, Ann. d. Phys. (4) 14 (1904), p. 539.

33) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. (4) 5 (1901), p. 872.

Die Wellenlänge λ_n bleibt somit ungeändert; doch tritt ein mit zunehmender Dicke des Leiterquerschnitts wachsendes Strahlungsdrekrement σ_n auf. Die Korrektur, welche die Funktion Q_n durch Berücksichtigung der Glieder von der Ordnung ε erfährt, ist nur gering, wie auch aus der Zeichnung der entsprechenden Kraftlinienbilder der gedämpften Schwingung³⁴⁾ hervorgeht. Auch die Strom- und Ladungsverteilung längs des Leiters erfährt durch Berücksichtigung der Glieder von der Ordnung ε bzw. ε^2 eine in praktischen Fällen zu vernachlässigende Änderung¹⁶⁾.

Handelt es sich um ein nahezu kugelförmiges Rotationsellipsoid, so wird man, von der Lösung für die Kugel als erster Annäherung ausgehend, Reihenentwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität zur Darstellung der Eigenschwingungen verwenden³⁵⁾. Für sehr gestreckte Ellipsoide jedoch erweist sich die Konvergenz dieser Reihen, wenigstens was die Eigenschwingungen der Ordnung $n \geq 3$ anbelangt, als unzulänglich³⁶⁾.

7. Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie. Die ursprüngliche Senderanordnung Marconis besteht aus einem geraden Drahte, der sogenannten „Antenne“, der von dem einen Pole einer Funkenstrecke aus senkrecht in die Höhe geführt ist, während der andere Pol geerdet ist. Dieser Sender ist dem geradlinigen Leiter ähnlich, dessen Eigenschwingungen oben (Nr. 6) behandelt worden sind. Er schwingt indessen nicht, wie jener, frei im Raume; vielmehr kommt der Einfluß der Erde in Betracht. Diesem Einfluß kann man nun in sehr einfacher Weise Rechnung tragen¹¹⁾, wofern die Erde sich diesen schnellen Schwingungen gegenüber wie ein vollkommener Leiter verhält. Es sei h die Länge der vertikalen Antenne, gerechnet von der Erde bis zur Spitze; spiegelt man sie an der Erdoberfläche, so bilden die Antenne und ihr Spiegelbild zusammen einen geraden Draht von der Länge $2h$, dessen ungeradzahlige Eigenschwingungen an der Erdoberfläche (soweit dieselbe als eben zu betrachten ist) der Grenzbedingung (8) Genüge leisten. Das Feld jener ungeradzahligen Eigenschwingungen stimmt somit oberhalb der Erdoberfläche mit demjenigen des Marconi-Senders überein. Dieser Auffassung zufolge ist die Wellenlänge der Grundschwingung des Sendedrahtes der vierfachen Höhe desselben gleich; die Stromverteilung ist angenähert diejenige

34) F. Hack, Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 634.

35) F. Ehrenhaft, Wien Ber. 113 (1904), p. 273; M. Brillouin, Propagation de l'électricité, Paris 1904, p. 326 ff.

36) M. Brillouin, l. c. „Corrections et éclaircissements“, p. VII ff.

stehender Drahtwellen, mit einem Stromknoten an der Spitze, einem Strombauche am Erdungspunkte. Nimmt man die Stromverteilung als gegeben an, so kann man die Amplituden der von der Antenne entsandten Wellen auch nach der in Nr. 5 dargelegten Methode berechnen¹¹⁾. Man findet, daß nach allen Seiten hin in den Luftraum hinaus Wellen entsandt werden, daß aber deren Amplituden für die zur Antenne senkrechten Richtungen die stärksten sind. Die Wellenamplituden sind umgekehrt proportional der Entfernung von der Antenne; in einer gegebenen Entfernung hängen sie nur von der maximalen Stromstärke in der Antenne ab, nicht aber von deren Länge.

Für das Strahlungsdekrement der Grundschwingung geben die Formeln (32 d, e, f) den Wert¹¹⁾

$$(33) \quad \sigma_1 = 4 \varepsilon C_1 = \frac{2,44}{\log \left(\frac{2h}{b} \right)}$$

(*b* Radius des äquatorialen Querschnitts).

Obwohl dieser Ausdruck zunächst nur auf ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid Bezug hat, dessen Querschnitt nach der Spitze hin abnimmt, so wendet man sie auch auf geradlinige Antennen von konstantem Querschnitt, die man strengere bisher nicht zu behandeln vermag, mit Erfolg an. In praxi ist übrigens *h* so groß gegen *b*, daß es auf den genauen Zahlwert des als Argument des Logarithmus eingehenden Quotienten kaum ankommt.

Daß die soeben skizzierte Theorie des Marconi-Senders in ihren Grundzügen die bei der drahtlosen Telegraphie stattfindenden Vorgänge zutreffend beschreibt, haben die ausgedehnten Untersuchungen von *C. Tissot*³⁷⁾ dargetan; die Energie der Wellen nimmt wirklich mit dem reziproken Quadrate der Entfernung ab; die Wellenlänge ist nur wenig größer, als die vierfache Länge des Sendedrahtes; die Dämpfungsdekremente finden sich in guter Übereinstimmung mit der Formel (33), wenigstens dann, wenn auf offener See telegraphiert wird, und wenn für gute Erdung gesorgt ist. Das Meerwasser ist demnach hier mit genügender Annäherung als vollkommen leitend zu betrachten, so daß der Seespiegel ein vollkommener Spiegel für die elektromagnetischen Wellen von diesen Frequenzen ist. Das stimmt auch mit dem Ergebnisse theoretischer Betrachtungen von *K. Uller*³⁸⁾

37) *C. Tissot*, Étude de la résonance des systèmes d'antennes, Thèse Paris 1905; Journal de phys. (4) 5 (1906), p. 326.

38) *K. Uller*, Beiträge zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung, Diss. Rostock 1903; *J. Zenneck*, Ann. d. Phys. (4) 23 (1907) p. 836 bringt eine genauere Durchrechnung der praktischen Verhältnisse für verschiedene Bodenarten und

und *J. Zenneck*³⁸⁾ überein, welche die Fortpflanzung ebener Wellen längs der Meeresoberfläche betreffen. Befindet sich dagegen der Sender auf dem Festlande, so ist nach *C. Tissot* seine Dämpfung beträchtlich größer; das Erdreich kann demnach nicht als vollkommen leitend gelten, es läßt vielmehr die Wellen eindringen und absorbiert einen Teil ihrer Energie; gleichzeitig stehen die elektrischen Kraftlinien nicht mehr senkrecht auf der Erdoberfläche und können nach den Rechnungen von *Zenneck*³⁸⁾ bis 35° gegen die Vertikale geneigt sein.

Über den Einfluß, welchen die Krümmung der Erdoberfläche auf die Fortpflanzung der vom Sender ausgehenden Wellen hat, liegen befriedigende theoretische Untersuchungen bisher nicht vor.

Bei der einfachen Senderanordnung Marconis ist die Dämpfung der Senderschwingungen ziemlich groß; es ist ihr logarithmisches Dekrement¹¹⁾³⁷⁾:

$$0,2 < \sigma_1 < 0,3,$$

so daß die Bedingungen für die scharfe Abstimmung des Empfängers auf den Sender nicht günstig sind. Auch ist der Steigerung der für die Intensität der entsandten Wellen maßgebenden Amplituden von Strom und Spannung in der Antenne dadurch eine Grenze gesetzt, daß das Funkenpotential nicht beliebig groß gemacht werden kann. Daher ist auch die Reichweite der Wellen bei der ursprünglichen Marconi-Schaltung eine beschränkte.

Einen größeren Spielraum, sowohl hinsichtlich der Abstimmbarkeit, wie der Reichweite, bieten die *gekoppelten Sender* dar, zu deren Verwendung *F. Braun*, *A. Slaby* und auch *G. Marconi* selbst übergegangen sind. Die Schwingungen werden in einem geschlossenen, nicht strahlenden, Kondensatorkreis erregt; auf die Antenne werden sie übertragen, indem diese entweder direkt an jenen Primärkreis angelegt (galvanische Koppelung), oder durch Induktion mit ihm verkoppelt wird (magnetische Koppelung). Für die Amplituden der entsandten Wellen ist wiederum die maximale Stromamplitude in der Antenne maßgebend.

Einige Gesichtspunkte für die Beurteilung solcher Senderanordnungen sind, auf Grund der allgemeinen Theorie der gekoppelten elektromagnetischen Systeme³⁹⁾, von *M. Wien*⁴⁰⁾ dargelegt worden.

Feuchtigkeitsgrade. Über die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs der ebenen Grenzfläche eines Isolators und eines Leiters vgl. man übrigens *E. Cohn*, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, p. 449.

39) *A. Oberbeck*, Ann. d. Phys. 55 (1895), p. 623 und *R. Domalip* u. *F. Kolaček*,

Diese zunächst für langsame Schwingungen ausgearbeitete Theorie setzt den Strom in jedem der beiden Teilsysteme als quasistationär voraus, eine Voraussetzung, die bei der Antenne auch nicht ange nähert zutrifft. Dennoch werden gewisse, im Anschluß an jene Theorie gewonnene Eigenschaften der Schwingungen gekoppelter Systeme auch von einer strengeren Theorie anzuerkennen sein.

Zwei ursprünglich getrennte Systeme von gleicher Eigenperiode ergeben, miteinander gekoppelt, ein System mit zwei Eigenschwingungen verschiedener Frequenz. Je nachdem die Koppelung „lose“ oder „eng“ ist, ist die „Schwingungsdifferenz“ der Frequenzen der beiden Eigenschwingungen klein oder groß. Die aus dem Zusammenwirken der beiden Eigenschwingungen resultierenden Schwebungen sind es, welche den Übergang der Energie aus dem Primärkreis in die Antenne mit sich bringen. Hiernach erscheinen zwei Grenzfälle als möglich⁴⁰):

a) *Große Schwingungsdifferenz* (kleine Schwebungsdauer). Dieser Fall wird durch starke Koppelung erzielt; hier kann man, durch Vermehrung der Antennenkapazität (Käfigantennen) die Stromamplituden in der Antenne steigern, und so die Reichweite der entsandten Wellen vergrößern. Dadurch vergrößert man selbstverständlich auch die Strahlungsdämpfung und verschlechtert die Abstimmbarkeit.

b) *Kleine Schwingungsdifferenz* (große Schwebungsdauer). Dieser Fall wird durch lose Koppelung der Antenne erzielt; dementsprechend sind die Amplituden der in der Antenne erregten Schwingungen nur gering und die Reichweite daher nicht groß. Im Verlaufe der Schwebung steigert sich die Amplitude der Antennenschwingungen allmählich und bleibt eine Zeitlang stationär, indem der Primärkreis die ausgestrahlte Energie nachliefert. Die Bedingungen sind günstig für die Abstimmung auf einen schwach gedämpften Empfänger.

Eine exakte Behandlung des keineswegs als quasistationär zu betrachtenden Stromes in der Antenne wird in den Arbeiten von

Ann. d. Phys. 57 (1896), p. 731. haben die magnetische Koppelung behandelt, *J. v. Geitler*, Ann. d. Phys. 55 (1895), p. 513; 57 (1896), p. 412; 66 (1898), p. 999 die elektrostatische Koppelung. Den allgemeinen Fall, wo magnetische, elektrische und galvanische Koppelung gleichzeitig vorliegen, behandelt *M. Wien*, Ann. d. Phys. 61 (1897), p. 651. Es werden für die Eigenschwingungen des gekoppelten Systemes 2 simultane gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten aufgestellt, so daß sich die Eigenwerte als Wurzeln einer Gleichung 4^{ten} Grades ergeben. *P. Drude*, Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 512 führt die Theorie der magnetischen Koppelung genauer durch.

40) *M. Wien*, Ann. d. Phys. 8 (1902), p. 686.

*G. Seibt*⁴¹⁾, *M. Abraham*⁴²⁾ und *L. Mandelstamm*⁴³⁾ angestrebt. Der Strom im Primärkreis wird auch hier als quasistationär angenommen. Die Verteilung von Strom und Spannung, die sich in der Antenne ausbildet, wird dagegen als übereinstimmend mit der bei stehenden elektrischen Drahtwellen herrschenden betrachtet. Es kann, z. B. bei galvanischer Koppelung, der Anschlußpunkt der Antenne kein Spannungsknoten, und daher die Wellenlänge λ der Grundschiwingung des gekoppelten Systems nicht gleich der vierfachen Antennenlänge sein. Vielmehr ergibt sich eine transzendente Gleichung von der Form

$$(34) \quad \operatorname{tg} x = f(x) \quad \text{für} \quad x = \frac{2\pi h}{\lambda};$$

dabei ist $f(x)$ eine rationale Funktion von x , in welche die elektromagnetischen Konstanten des gekoppelten Systemes eingehen; die Gleichung (34) kann zur rechnerischen oder graphischen Ermittlung der sämtlichen Eigenfrequenzen des gekoppelten Senders dienen (über die numerische Berechnung der Wurzeln vgl. Art. IV 26, Nr. 2 von *H. Lamb*). Der Fall der magnetischen Koppelung führt auf dieselben Gleichungen, wie derjenige der galvanischen Koppelung⁴⁴⁾ 43).

8. Elektrische Resonanz. Zur Untersuchung des Feldes elektrischer Luft- oder Drahtwellen bediente sich *H. Hertz* eines *Resonators*⁴⁵⁾; derselbe bestand aus einem zum Kreise oder zum Rechteck gebogenen Drahte, der in zwei einander gegenüberstehende Kugeln mündete. Wird der Resonator von dem auffallenden Wellenzuge in so starke Schwingungen versetzt, daß die Spannung zwischen den Kugeln eine gewisse Grenze überschreitet, so springt ein Funke über; diese Fünken im Resonator verwandte *H. Hertz*⁴⁶⁾ zur Analyse des elektromagnetischen Feldes.

Als *E. Sarasin* und *L. de la Rive*⁴⁷⁾ das Feld stehender Drahtwellen mit solchen Resonatoren untersuchten, bemerkten sie, daß die gemessene Wellenlänge wesentlich von den Abmessungen des Resonators abhängt. Sie bezeichneten diese Erscheinung als „*multiple Resonanz*“, und deuteten sie dahin, daß der Erreger keine bestimmte Frequenz besitze, sondern daß er alle innerhalb eines gewissen Intervalles

41) *G. Seibt*, Elektrische Drahtwellen mit Berücksichtigung der Marconischen Wellentelegraphie, Diss. Rostock 1902.

42) *M. Abraham*, Physik. Zeitschrift 5 (1904), p. 174.

43) *L. Mandelstamm*, Physik. Zeitschrift 5 (1904), p. 245.

44) *J. Zenneck*, Physik. Zeitschrift 4 (1903), S. 656.

45) *H. Hertz*, Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 87 ff.

46) *H. Hertz*, Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 115 ff., 133 ff.

47) *E. Sarasin* u. *L. de la Rive*, Arch. de Genève (3) 23 (1890), p. 113.

liegende Schwingungen gleichzeitig ausführe. *H. Hertz*⁴⁸⁾ dagegen, und ebenso *H. Poincaré*⁴⁹⁾ und *V. Bjerknes*⁵⁰⁾, faßten jene Erscheinung als eine Folge der beträchtlichen Strahlungsdämpfung der Erregerschwingungen auf. Nach der von *V. Bjerknes* ausgearbeiteten Theorie⁵⁰⁾ ist der Resonator als System von einem Grade der Freiheit anzusehen, welches der Differentialgleichung der gedämpften Schwingung gehorcht. Sind ν_2, δ_2 Frequenz und Dämpfungskonstante der Eigenschwingungen des Resonators, ν_1, δ_1 diejenigen der Erregerschwingungen, so gelten für die erzwungenen Schwingungen des Resonators die Differentialgleichung:

$$(35) \quad \ddot{\varphi} + 2\delta_2\dot{\varphi} + (\nu_2^2 + \delta_2^2)\varphi = A \cdot e^{-\delta_1 t} \cdot \sin(\nu_1 t + \alpha)$$

und die Anfangsbedingungen:

$$(35a) \quad t = 0: \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0.$$

A ist ein von der Amplitude der einfallenden Welle abhängiger „Intensitätsfaktor“. Bekanntlich setzt sich die Lösung von (35) und (35a) aus zwei Bestandteilen zusammen, nämlich aus einem partikulären Integrale dieser inhomogenen Differentialgleichung (d. h. einer gedämpften Schwingung mit den Konstanten ν_1, δ_1), und aus einem Integrale der homogenen Differentialgleichung der Eigenschwingungen (einer gedämpften Schwingung der Frequenz ν_2 und der Dämpfungskonstanten δ_2). Je nachdem die Dämpfungskonstante des Erregers (δ_1) oder diejenige des Resonators (δ_2) geringer ist, wird der erste oder der zweite Bestandteil länger andauern, und der erzwungenen Resonator-schwingung ihr Gepräge geben. Der von *Hertz* verwandte Resonator besitzt nun eine weit geringere Dämpfung, als der Erreger. In der erzwungenen Schwingung des Resonators tritt daher dessen eigene Frequenz hervor; so erklärt sich die Erscheinung der multiplen Resonanz.

Im allgemeinen ist, nach der Theorie von *V. Bjerknes*, die erzwungene Schwingung des Resonators von den vier Konstanten beider Leiter abhängig. Ist einer der beiden Leiter verstellbar, und trägt man etwa seine Periode als Abszisse, die entsprechende Erregung des Resonators als Ordinate auf, so erhält man die sogenannte „Resonanzkurve“, die ein Maximum in der Nähe des Isochronismus besitzt. *V. Bjerknes* hat gelehrt⁵⁰⁾, aus dieser Kurve die Werte jener vier Konstanten zu ermitteln, wobei er hauptsächlich den elektrometrisch

48) *H. Hertz*, Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 18.

49) *H. Poincaré*, Électricité et optique 2 (1890), p. 249.

50) *V. Bjerknes*, Ann. d. Phys. 44 (1891), p. 74, 92, 513; 55 (1895), p. 121.

oder bolometrisch bestimmten Integraleffekt als Maß der Resonatorerregung in Betracht gezogen hat. Die Resonanzkurve der Maximalamplitude hat *P. Drude*⁵¹⁾ diskutiert; er faßt dabei Erreger und Resonator als ein gekoppeltes System von zwei Freiheitsgraden auf; der Grenzfall, wo die Rückwirkung des Resonators auf den Erreger verschwindet, ist es', auf den die Theorie von Bjerknes sich bezieht.

In Wirklichkeit ist der Resonator wohl kaum als System von nur einem Freiheitsgrade zu betrachten. Schon *H. Hertz* fand es notwendig, das Integral der in seinem Funkenresonator induzierten elektromotorischen Kraft in seine von den einzelnen Elementen des Leiters beigesteuerten Bestandteile zu zerlegen⁴⁵⁾. Seine Andeutungen führten *H. Poincaré*⁵²⁾ und *P. Drude*⁵³⁾ genauer durch, indem sie der Theorie des *Hertzschen* Resonators die partielle Differentialgleichung der erzwungenen Saitenschwingungen zugrunde legten.

Obleich die Theorie von Bjerknes die Oberschwingungen des Erregers und des Resonators außer acht läßt, stellt sie doch die Erscheinungen der elektrischen Resonanz in ihren Grundzügen befriedigend dar. Sie erweist sich insbesondere auch in der drahtlosen Telegraphie als anwendbar³⁷⁾, wenigstens auf die ursprüngliche Marconische Anordnung, welche der einfachen Sendeantenne (Nr. 7) eine gleiche Empfangsantenne gegenüberstellt. Bei den neueren Anordnungen, bei denen der Empfänger, ebenso wie der Sender, ein gekoppeltes System mit zwei Grundschwingungen darstellt, gestaltet sich der Resonanzvorgang weit verwickelter. Man kann hier noch weniger als bei der einfachen Empfangsantenne hoffen, die Integration der Feldgleichungen strenge durchzuführen.

Was die mathematische Formulierung des Problems der elektrischen Resonanz anbelangt, so stimmt sie ganz mit derjenigen des Zerstreuungsproblems überein, zu dem wir jetzt übergehen (Nr. 9). Nur kommt es beim Resonanzproblem mehr auf den Vorgang im Sekundärleiter, beim Zerstreuungsproblem mehr auf die von diesem ausgehenden sekundären Wellen an.

9. Zerstreuung elektrischer Wellen. In einem isotropen — und im allgemeinen homogenen — Isolator mit den Konstanten (ϵ_1, μ_1) schreite ein Wellenzug $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ (etwa ebener Wellen) fort. Irgendwo sei die Homogenität durch die Anwesenheit eines Körpers mit den Konstanten $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ gestört. Es wird dann, um die Feldgleichungen im Innern dieses Körpers und den an seiner Oberfläche geltenden

51) *P. Drude*, Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 512.

52) *H. Poincaré*, Oscillations électriques, Paris 1893, p. 220 ff.

53) *P. Drude*, Gött. Nachr. 1894, p. 189; Ann. d. Phys. 53 (1894), p. 721.

Grenzbedingungen (vgl. Nr. 1) zu genügen, notwendig sein, zu dem ersten Felde ($\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$) ein zweites ($\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2$) hinzuzufügen, derart, daß $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2, \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ Lösungen der Feldgleichungen in beiden Körpern, und der Grenzbedingungen an ihrer Trennungsoberfläche sind. In dem ersten Körper erfüllt dann ($\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2$) für sich die Feldgleichungen; es entspricht Wellen, die von dem zweiten Körper ausgehen, und die man, im Gegensatze zu den einfallenden „primären“ Wellen, als „sekundäre“ Wellen bezeichnen kann; diese Wellen bringen eine *Zerstreuung* der Strahlungsenergie mit sich. Wenn die Welle ($\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$), welche sich durch Superposition der primären und der sekundären Welle ergibt, sich nicht den Vorstellungen der geometrischen Optik gemäß verhält, spricht man wohl auch von einer „*Beugung*“ der Wellen durch den störenden Körper. Die Beugung spielt im Gebiete der langen elektrischen Wellen eine noch größere Rolle als bei den kurzen Lichtwellen; nicht nur die geometrische Optik, sondern auch die klassische Beugungstheorie (vgl. Art. V 25) stellen hier eine unzureichende Annäherung dar. Aber auch beim Lichte versagen die Methoden der klassischen Beugungstheorie, wenn die Abmessungen der beugenden Teilchen von der Ordnung der Wellenlänge, oder gar kleiner werden.

Probleme der meteorologischen Optik — die Farbe und die Polarisation des Himmelslichtes — waren es, welche *Rayleigh*⁵⁴⁾ veranlaßten, die Zerstreuung des Lichtes durch kleine Teilchen zu behandeln. In seinen ersten Arbeiten steht er noch auf dem Standpunkte der mechanischen Theorie des Lichtes, und erst später überträgt er seine Ergebnisse in die Sprache der elektromagnetischen Theorie⁵⁵⁾; dabei handelt es sich um isolierende Teilchen, die klein gegen die Wellenlänge sind, und ihrer Dielektrizitätskonstanten nach nur wenig von der Umgebung abweichen. Die Intensität des zerstreuten Lichtes findet *Rayleigh* der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional, und erklärt so das Überwiegen der blauen Farbe im Himmelslichte; auch die Polarisation des zerstreuten Lichtes ergibt sich in Übereinstimmung mit den Erfahrungen der meteorologischen Optik. Dabei haben wohl die Luftmoleküle selbst an der Zerstreuung des Sonnenlichtes Anteil, so daß man versuchen kann, aus den vorliegenden Beobachtungen die Zahl der Luftmoleküle in der Volumeinheit zu berechnen⁵⁶⁾.

54) *J. W. Strutt-Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 107, 274, 447.

55) *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 12 (1881), p. 81.

56) *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 375; *Lord Kelvin*, Baltimore Lectures (1904), p. 301 ff.

Nimmt man an, daß die isolierenden Teilchen, welche das Licht zerstreuen, die Form dreiachsiger Ellipsoide haben, so braucht man über ihre Dielektrizitätskonstante keine einschränkende Voraussetzung zu machen. Wenn nur die Abmessungen der Ellipsoide klein gegen die Wellenlänge sind, so kann man ihre Erregung durch die primäre Welle mit genügender Annäherung nach den Methoden der Potentialtheorie bestimmen, und alsdann die entsandten sekundären Wellen berechnen⁵⁷⁾. Auch vollkommen leitende Ellipsoide lassen sich so behandeln⁵⁷⁾.

Die Zerstreuung elektrischer Wellen durch eine vollkommen leitende Kugel kann man exakt behandeln, indem man die Lösung nach Kugelflächenfunktionen entwickelt⁵⁸⁾⁵⁹⁾. Dabei ergeben sich Resonanzerscheinungen, indem die Erregung der Kugel, und daher auch der Druck des Lichtes, für einen gewissen Wert des (auf die Wellenlänge als Einheit bezogenen) Kugelradius ein Maximum besitzt⁵⁹⁾. In entsprechender Weise läßt sich der Fall dielektrischer Kugeln erledigen⁶⁰⁾; für gewisse, den Eigenschwingungen benachbarte Wellenlängen wird die Intensität des zerstreuten Lichtes abnorm groß, was ebenfalls als Resonanzerscheinung zu deuten ist⁶¹⁾⁶²⁾.

Das Problem wird ein ebenes, wenn es Kreiszyylinder, mit zur Wellenebene paralleler Achse, sind, welche das auffallende Licht zerstreuen; man zerlegt dann die einfallende Welle in zwei parallel bzw. senkrecht zur Zylinderachse polarisierte Komponenten, und wendet in jedem der beiden Fälle eine Reihenentwicklung nach Besselschen Funktionen an⁵⁵⁾⁶³⁾⁶⁴⁾⁶⁵⁾. Die Näherungsmethode von *Rayleigh* ist auch auf elliptische Zylinder⁵⁷⁾ anwendbar, deren Querschnittsabmessungen klein gegen die Wellenlänge sind. Die strenge Behandlung des Zerstreuungsproblemles führt in diesem Falle auf Funktionen des elliptischen Zylinders.

H. Hertz hat bei seinen Versuchen ein *Gitter*⁶⁶⁾ verwandt, bestehend aus parallelen, äquidistanten Metalldrähten, deren Abstand

57) *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 44 (1893), p. 28.

58) *J. J. Thomson*, Rec. res. 1893, p. 437.

59) *K. Schwarzschild*, München Ber. 1901, p. 293.

60) *A. E. H. Love*, Lond. math. soc. Proc. 30 (1899), p. 308.

61) *H. Lamb*, Camb. Phil. Trans. 18 (1900), p. 348.

62) *F. Hasenöhl*, Wien Ber. 111 (1902), p. 1229. Eine Anwendung auf die Ultramikroskopie macht *F. Ehrenhaft*, Wien Ber. 114 (1905), p. 1115.

63) *J. J. Thomson*, Rec. res. 1893, p. 428.

64) *W. Seitz*, Ann. d. Phys. 16 (1905), p. 747; 19 (1906), p. 554.

65) *W. v. Ignatowski*, Ann. d. Phys. 18 (1906), p. 495.

66) *H. Hertz* Ausbr. d. el. Kraft, Ges. W. 2, p. 190.

klein gegen die Wellenlänge ist; ein solches Gitter läßt von der senkrecht auffallenden ebenen Welle nur diejenige Komponente durch, in welcher die elektrische Kraft senkrecht zur Längsrichtung der Drähte schwingt; die andere Komponente wird reflektiert. Die Theorie eines solchen Gitters hat *J. J. Thomson*⁶⁷⁾ gegeben. *H. Lamb*⁶⁸⁾ hat den Fall behandelt, daß das Gitter, statt aus Drähten, aus Metallstreifen besteht. Vgl. Art. *H. Lamb* IV 26, Nr. 7 b.

III. Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.

10. Eindringen des Feldes in zylindrische Leiter. Skin-Effekt.

Wir berichten zunächst über Untersuchungen, die sich mit dem Eindringen des elektromagnetischen Wechselfeldes in zylindrische Leiter beschäftigen. Die einschlägigen Arbeiten von *Maxwell*⁶⁹⁾, *Rayleigh*⁷⁰⁾, *Heaviside*⁷¹⁾ und *Stefan*⁷²⁾ geben auch einen gewissen Einblick in die Rolle, welche solchen Leitern bei der Fortleitung elektrischer Wellen zukommt.

Im Innern eines metallischen Leiters darf man den Verschiebungsstrom \mathfrak{D} gegen den Leitungsstrom \mathfrak{S} vernachlässigen und demgemäß die Feldgleichungen (1, 2) schreiben:

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{c}{c} \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{H}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Hat, wie wir annehmen, der Leiter die Form eines unendlichen Zylinders von kreisförmigem Querschnitt, so empfiehlt sich die Einführung von Zylinderkoordinaten (z, ρ, ψ) ; der Ausdruck (26) für das Quadrat des Linienelementes lautet dann

$$(37) \quad ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2.$$

Substituiert man dementsprechend

$$\alpha = z, \quad \beta = \rho, \quad \gamma = \psi; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = \frac{1}{\rho}$$

in die rechten Seiten von (26a), so erhält man die auf Zylinderkoor-

67) *J. J. Thomson*, Rec. res. 1893, p. 425.

68) *H. Lamb*, Lond. math. soc. Proc. 29 (1898), p. 523. Die Theorie von Lamb wird durch neuere experimentelle Untersuchungen von *Cl. Schaefer* und *J. Langwitz*, Ann. d. Phys. 21 (1906), p. 587, sowie von *G. H. Thomson*, Ann. d. Phys. 22 (1907), p. 365, im ganzen bestätigt.

69) *J. Cl. Maxwell*, Treatise 2, art. 689.

70) *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 21 (1886), p. 381.

71) *O. Heaviside*, El. papers 2, p. 39 ff. u. 168 ff. (1886—87).

72) *J. Stefan*, Wien Ber. 95. 1887, p. 917; Ann. d. Phys. 41 (1890), p. 400.

dinaten bezogenen Komponenten von $\text{rot } \mathfrak{H}$:

$$(37a) \quad \begin{cases} \text{rot}_z \mathfrak{H} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \mathfrak{H}_\psi) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}_\varrho}{\partial \psi}, \\ \text{rot}_\varrho \mathfrak{H} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \psi} - \frac{\partial \mathfrak{H}_\psi}{\partial z}, \\ \text{rot}_\psi \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varrho}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke, und die entsprechenden der Komponenten von $\text{rot } \mathfrak{E}$, sind in die Feldgleichungen (36) einzuführen. Beschränkt man sich auf axialsymmetrische und gleichzeitig von z unabhängige Felder, so gelten die partiellen Differentialgleichungen

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \mathfrak{H}_\psi), & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \mathfrak{E}_\psi), \\ \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}_\psi = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varrho}, & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\psi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho}. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen zerfallen in zwei voneinander unabhängige Paare, welche einerseits $\mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_\psi$, andererseits $\mathfrak{H}_z, \mathfrak{E}_\psi$ miteinander verknüpfen. Das erste Paar bezieht sich auf ein Wechselfeld, dessen elektrische Feldstärke der Drahtachse parallel ist, während die magnetischen Kraftlinien die Achse umkreisen. Das zweite Paar dagegen bezieht sich auf ein longitudinales magnetisches Wechselfeld, welches die Drahtachse umkreisende elektrische Ströme hervorruft. In mathematischer Hinsicht besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Fällen; wir verfolgen den ersten weiter und erhalten nach Elimination von \mathfrak{H}_ψ

$$(38a) \quad \frac{\sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho} \right).$$

Eine partikuläre Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$(39) \quad \mathfrak{E}_z = C \cdot e^{i\nu t} \cdot J_0(x),$$

wo gesetzt ist

$$(39a) \quad x = k\varrho, \quad k^2 = -\frac{i\nu\sigma\mu}{c^2},$$

und wo $J_0(x)$ der Besselschen Differentialgleichung genügt:

$$(39b) \quad J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) = 0.$$

Da die Lösung auf der Zylinderachse nicht unendlich werden darf, so hat man unter $J_0(k\varrho)$ die Besselsche Funktion erster Art

$$(39c) \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \alpha} d\alpha$$

zu verstehen. Sie bestimmt die Verteilung des durch (39) gegebenen Wechselfeldes der Frequenz ν über den Querschnitt des zylindrischen Leiters. Um dieses Feld im Innern des Leiters zu erregen, muß längs seiner Mantelfläche die longitudinale Feldstärke wirken:

$$(40) \quad \bar{\mathfrak{E}}_z = C \cdot e^{i\nu t} \cdot J_0(kb),$$

wo b den Querschnittsradius bezeichnet.

Der gesamte Strom, welcher den Leiterquerschnitt durchfließt, ist gemäß (38a)

$$J = 2\pi \int_0^b \sigma \bar{\mathfrak{E}}_z \rho d\rho = \frac{2\pi c^2}{i\nu\mu} \left\{ \rho \frac{\partial \bar{\mathfrak{E}}_z}{\partial \rho} \right\}_{\rho=b}$$

oder nach (39)

$$(40a) \quad J = C \cdot e^{i\nu t} \cdot \frac{2\pi c^2}{i\nu\mu} (x J_0'(x))_{x=kb}.$$

Stellt man den Zusammenhang der komplexen Ausdrücke für J und $\bar{\mathfrak{E}}_z$ folgendermaßen dar

$$(41) \quad \bar{\mathfrak{E}}_z = RJ + \frac{1}{c^2} L_i \frac{dJ}{dt} = J \left\{ R + \frac{i\nu}{c^2} L_i \right\},$$

so folgt aus (40) und (40a):

$$(41a) \quad R + \frac{i\nu}{c^2} L_i = \frac{i\nu\mu}{2\pi c^2} \left\{ \frac{J_0(x)}{x J_0'(x)} \right\}_{x=kb}.$$

Aus diesem komplexen Ausdrucke kann man die beiden reellen Größen R und L_i berechnen.

Die physikalische Bedeutung dieser beiden Größen ergibt sich aus dem Poyntingschen Satze. Versteht man unter $\bar{\mathfrak{E}}_z$, $\bar{\mathfrak{H}}_\psi$, J an Stelle der obigen komplexen Ausdrücke jetzt deren reelle Teile, welche den wirklichen physikalischen Vorgang darstellen, so ist der Energiestrom, der in die Längeneinheit des zylindrischen Leiters tritt:

$$-2\pi(\rho \mathfrak{E}_\rho)_{\rho=b} = 2\pi c(\bar{\mathfrak{E}}_z \cdot \rho \bar{\mathfrak{H}}_\psi)_{\rho=b} = \bar{\mathfrak{E}}_z \cdot J.$$

Nach (41) aber wird dies

$$(42) \quad \bar{\mathfrak{E}}_z \cdot J = RJ^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2c^2} \cdot L_i \cdot J^2 \right).$$

Integriert man über die Zeit einer ganzen Schwingung, so muß die in das Innere des Leiters tretende Energie den Verlust durch Joulesche Wärmeentwicklung decken; diese letztere wird durch das erste Glied der rechten Seite von (42) angegeben, während das zweite Glied, das bei der Integration über eine ganze Schwingung hinausfällt, den zeitlichen Zuwachs der magnetischen Energie des Drahtinnern anzeigt (vgl. Nr. 12). Dieser Bedeutung gemäß bezeichnet man R als „effektiven Widerstand“, L_i als „effektive innere Selbstinduktion“ (der Längeneinheit) des Leiters.

Je nachdem einer der beiden Fälle vorliegt

$$(43) \quad \left| \frac{k^2 b^2}{4} \right| = \frac{\nu \sigma \mu b^2}{4c^2} = \vartheta b^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{klein} \\ \text{groß} \end{array} \right\} \text{ gegen } 1,$$

sind für $J_0(x)$, die Besselsche Funktion erster Art, die nach aufsteigenden oder fallenden Potenzen des Argumentes fortschreitenden Reihenentwicklungen anzuwenden. Im ersten Falle — d. h. bei hinreichend kleinen Werten der Frequenz ν , der Leitfähigkeit σ , der magnetischen Permeabilität μ und des Drahtradius b — nehmen, wenn man von der Mantelfläche des Zylinders aus in das Innere fortschreitet, Amplitude und Phase von \mathcal{E} , nur ein wenig ab. In diesem Falle ergibt (41a):

$$(43a) \quad R = R_0 \left\{ 1 + \frac{(\vartheta b^2)^2}{12} - \frac{(\vartheta b^2)^4}{180} \dots \right\},$$

$$(43b) \quad L_i = \frac{\mu}{8\pi} \left\{ 1 - \frac{(\vartheta b^2)^2}{24} + \frac{13 \cdot (\vartheta b^2)^4}{4320} \dots \right\},$$

so daß der effektive Widerstand nur wenig den Gleichstromwiderstand

$$(43c) \quad R_0 = \frac{1}{\sigma \pi b^2} = \frac{\nu \mu}{4\pi c^2} \cdot \frac{1}{\vartheta b^2}$$

übersteigt, während die effektive Selbstinduktion des Drahtinnern ein wenig kleiner ist als bei gleichförmiger Stromverteilung $\left\{ \frac{\mu}{8\pi} \right\}$.

Im zweiten Falle jedoch, d. h. bei hinreichend großen Werten von Frequenz ν , Leitfähigkeit σ , Permeabilität μ und Querschnittsradius b , wo die asymptotische Darstellung der Besselschen Funktionen durch semikonvergente Reihen anzuwenden ist, ergeben sich aus (41a) die sogenannten *Rayleigh*⁷⁰⁾-*Stefanschen*⁷²⁾ Formeln:

$$(43d) \quad R = \frac{1}{2\pi b} \cdot \sqrt{\frac{\nu \mu}{2\sigma c^2}} + \frac{R_0}{4},$$

$$(43e) \quad L_i = \frac{1}{2\pi b} \cdot \sqrt{\frac{\mu c^2}{2\sigma \nu}}.$$

In diesem Grenzfalle dringt das Feld und der Strom nur sehr wenig in das Innere des Leiters ein; nur unmittelbar an der Oberfläche befindet sich eine dünne Stromhaut; bei Hertzschen Schwingungen ist die Dicke dieser Haut nur von der Ordnung eines Hundertmillimeters. Die Bildung einer Stromhaut an der Oberfläche wird von den Engländern als „*skin-effect*“ bezeichnet.

Handelt es sich nicht, wie soeben angenommen worden ist, um periodische, sondern um gedämpfte Schwingungen, so gelten für R und L_i etwas abweichende Formeln⁷³⁾.

73) E. H. Barton, Phil. Mag. 47 (1899), p. 433.

Ein weit größeres Anwachsen des effektiven Widerstandes mit der Frequenz, als es die obigen Formeln für gerade Drähte von kreisförmigem Querschnitt anzeigen, fanden *Battelli* und *Magri*⁷⁴⁾ sowie *F. Dolezalek*⁷⁴⁾ bei Spulen und erklärten dasselbe zutreffend durch einen einseitigen Skin-Effekt am inneren Umfang der Spule. Eine elementare, für geringe Frequenzen gültige Theorie des Skin-Effectes in Spulen hat *M. Wien*⁷⁵⁾ gegeben. Die von *A. Sommerfeld*⁷⁶⁾ auf Grund der Feldgleichungen durchgeführte Behandlung des Problems bezieht sich auf Spulen und Rollen, die aus dicht neben- bzw. übereinander gewickelten Lagen eines Drahtes von rechteckigem Querschnitt bestehen. Später⁷⁷⁾ behandelt derselbe auch den Widerstand in Solenoiden von kreisförmigem Querschnitt des Drahtes und endlicher Ganghöhe im Anschluß an eine Vorarbeit von *G. Picciati*⁷⁷⁾ und kommt dabei zu qualitativ denselben Resultaten wie in der vorgenannten einfacheren Theorie.

In der Thomsonschen Theorie der Entladung eines Kondensators (Nr. 3) wird die Stromverteilung über den Querschnitt als gleichförmig angenommen (Vorauss. d.). Daß diese Voraussetzung nicht genau zutrifft, und R sowie L_i nicht als Konstanten, sondern als Funktionen der Frequenz anzusehen sind, kompliziert das Problem der Kondensatorentladung; insbesondere was die Grenze zwischen aperiodischer und oszillatorischer Entladung, und was den zeitlichen Verlauf des beginnenden Entladungsvorganges anbelangt, bedarf die Thomsonsche Theorie einer Korrektur⁷⁸⁾.

Das Problem des Eindringens eines longitudinalen magnetischen Wechselfeldes in einen Kreiszyylinder ist von *O. Heaviside*, *A. Oberbeck* und *H. Lamb* behandelt worden⁷⁹⁾. Die Untersuchung fußt auf dem

74) *A. Battelli* und *L. Magri* Phil. Mag. (6) 5 (1903), p. 1; *F. Dolezalek*, Ann. d. Phys. 12 (1903), p. 1142.

75) *M. Wien*, Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 1.

76) *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 15 (1904), p. 673. Qualitativ bestätigt durch die Messungen von *Th. Black*, Diss. Straßburg 1905 und Ann. d. Phys. 19 (1906), p. 157.

77) *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 24 (1907), p. 609; *G. Picciati*, Nuovo Cimento (5) 11 (1906), p. 351.

78) Vgl. hierzu: *J. Stefan*, Ann. d. Phys. 41 (1890), p. 421; *J. J. Thomson*, Rec. res., 1893, p. 335; *E. H. Barton* u. *W. B. Morton*, Phil. Mag. 48 (1899), p. 143, 148.

79) *O. Heaviside*, El. papers 1 (1884—85), p. 353 ff; *A. Oberbeck*, Ann. d. Phys. 21 (1884), p. 672; *H. Lamb*, Lond. Math. Soc. Proc. 15 (1884), p. 138; ebenda 15, p. 270 behandelt er den Fall eines transversalen magnetischen Wechselfeldes.

Paare der Gleichungen (38), welche \mathfrak{H}_z und \mathfrak{E}_ψ miteinander verknüpfen, und geht der oben angegebenen ganz parallel. Die sogenannten „Wirbelströme“, welche durch zeitlich wechselnde magnetische Felder in Leitern erregt werden, sind wegen des durch sie bedingten Energieverlustes auch für die Elektrotechnik von Interesse. Der Fall der planparallelen Platte ist von *J. J. Thomson*⁸⁰⁾, der Fall eines Zylinders von rechteckiger Basis — insbesondere sehr schmales Rechteck, Blechstreifen, mit longitudinalem Magnetfeld ist von *P. Debye*⁸⁰⁾ erledigt worden. Eine Reihe anderer technisch wichtiger Fälle der Wirbelstromverteilung hat *R. Rüdenberg*⁸¹⁾ bearbeitet.

Die Analogie⁸²⁾ des elektrischen und des magnetischen Problems erstreckt sich auch auf den Fall, wo die longitudinale elektrische bzw. magnetische Feldstärke nicht längs des Kreiszylinders konstant ist, sondern eine gedämpft periodische Veränderung zeigt. Das von *J. J. Thomson*⁸³⁾ untersuchte magnetische Problem, dessen Lösung die Fortpflanzung von Wellen magnetischer Erregung längs eines magnetisierbaren Drahtes darstellt, entspricht durchaus dem elektrischen Probleme der Fortpflanzung elektrischer Wellen längs eines einzelnen Drahtes, über das wir in Nr. 12 berichten.

11. Elektrische Drahtwellen; elementare Theorie. Die Anfänge der Theorie der elektrischen Wellen, die sich in Kabeln und längs Drähten fortpflanzen, liegen in der Vor-Maxwellschen Epoche. *W. Thomson*⁸⁴⁾ war es, der für Kabelwellen eine mit der Wärmeleitungsgleichung formal identische partielle Differentialgleichung aufstellte; er berücksichtigte nur die Kapazität und den Widerstand des Kabels. Von *G. Kirchhoff*⁸⁵⁾ wurde die Selbstinduktion der Leitung in die Theorie eingeführt und die Telegraphengleichung abgeleitet. Die Bedeutung der Selbstinduktion, insbesondere für die Fragen der Tele-

80) *J. J. Thomson*, *Electrician* 28 (1892), p. 597; *P. Debye*, *Zeitschr. Math. Phys.* 54 (1906), p. 418.

81) *R. Rüdenberg*, *Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen* (Sammlung elektrotechnischer Vorträge X), Stuttgart 1906.

82) Vgl. hierzu *J. Zenneck*, *Ann. d. Phys.* 9 (1902), p. 497; 10, p. 845; 11 (1903), p. 867, 1121, 1135.

83) *J. J. Thomson*, *Rec. res.*, p. 302 ff.

84) *W. Thomson*, *Lond. Roy. Soc. Proc.* 1855 = *Math. and phys. papers* 2, p. 61.

85) *G. Kirchhoff*, *Ann. d. Phys.* 100 (1857), p. 193; 102 (1857), p. 529. = *Ges. Abh.*, p. 131, 154; *Berlin Ber.* 1877, p. 598 = *Ges. Abh.*, p. 182. Über die Betrachtung der Drahtwellen vom Standpunkte der Fernwirkung vgl. auch: *A. Elsaß*, *Ann. d. Phys.* 49 (1893), p. 487.

phonie, richtig erkannt zu haben, ist das Verdienst von *O. Heaviside*⁸⁶⁾.

Die ältere Theorie definierte die Kapazität und die Selbstinduktion einer Leitung durch die elektrostatischen und die elektrodynamischen Fernwirkungen der Leiterelemente. Die Feldwirkungstheorie hingegen betrachtet diese Begriffe nicht als von vornherein gegebene; sie stellt vielmehr die Aufgabe, auf Grund der Feldgleichungen zu untersuchen, ob bzw. in welchen Fällen sich jene Begriffe präzise definieren lassen, wofern sie es nicht vorzieht, ohne Heranziehung dieser Hilfsbegriffe die Fortpflanzung der Wellen direkt durch Integration der Feldgleichungen zu ermitteln.

Was das Drahtinnere anbelangt, so sind die Feldgleichungen der Fernwirkungstheorie und diejenigen der Maxwellschen Theorie formal miteinander identisch, wenigstens dann, wenn man den hypothetischen Verschiebungsstrom im Leiter vernachlässigt. Doch sieht die Fernwirkungstheorie die Ladungen der Leiterelemente als das Wesentliche an, und betrachtet dementsprechend den Draht, welcher die Elektrizität leitet, als den eigentlichen Sitz des Vorgangs. Die Feldwirkungstheorie dagegen richtet ihr Augenmerk auf die Vorgänge in dem Dielektrikum, in dem sich die elektromagnetischen Kräfte fortpflanzen; dem Draht schreibt sie nur eine sekundäre Bedeutung zu, da ja in ihn das Feld hochfrequenter Schwingungen kaum eindringt⁸⁷⁾. Dennoch geben die Drähte, indem sie die Endpunkte der elektrischen Kraftlinien zwingen, an ihrer Oberfläche entlang zu gleiten, der elektromagnetischen Welle die Richtung; in diesem Sinne sind die Drähte auch vom Standpunkte der Feldwirkung aus als Leiter der Wellen zu bezeichnen.

Im Innern eines homogenen, isotropen Dielektrikums gelten, nach Nr. 1, die Feldgleichungen (1—4):

$$(44a) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H},$$

$$(44b) \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E},$$

$$(44c) \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0,$$

$$(44d) \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0.$$

Die soeben hervorgehobene Tatsache, daß hochfrequente Schwingungen in metallische Leiter nur sehr wenig eindringen, legt es nahe,

86) *O. Heaviside*, *El. papers* 2, p. 119 ff., 307 ff.

87) Vgl. *H. Hertz*, *Ges. Werke* 2, p. 171 ff.

Das Problem der Drahtwellen zu idealisieren, indem man die Leiter als vollkommene betrachtet. In solche Leiter dringt das Feld überhaupt nicht ein, und es gilt an ihrer Oberfläche die Grenzbedingung (8), welche verlangt, daß die elektrische Feldstärke senkrecht zur Leiteroberfläche gerichtet ist. Sind, wie wir weiterhin voraussetzen, die Leiteroberflächen Zylinder mit zur z -Achse parallelen Erzeugenden, so kann man jener Grenzbedingung entsprechende Lösungen des Problems folgendermaßen finden⁸⁸⁾: Man setze

$$(45) \quad \mathfrak{E}_z = 0, \quad \mathfrak{H}_z = 0,$$

$$(45a) \quad \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$(45b) \quad \mu \mathfrak{H}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mu \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Dabei sind Φ und Ψ Funktionen von (x, y, z, t) , welche in jeder Querschnittsebene der Leitung der Laplaceschen Gleichung genügen:

$$(45c) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Dieser Ansatz erfüllt das System (44a—d) der Feldgleichungen, sofern zwischen Φ und Ψ die Beziehungen bestehen:

$$(45d) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Hieraus resultiert die partielle Differentialgleichung der schwingenden Saite:

$$(45e) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

die in bekannter Weise gelöst wird durch

$$(45f) \quad \Phi = \Phi_0(x, y) \cdot f(z - wt), \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Diese partikuläre Lösung entspricht einer Welle, die sich parallel der positiven z -Achse ungedämpft und unverzerrt fortpflanzt. Sie erfüllt (45d), wenn man setzt:

$$(45g) \quad \Psi = \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot \Phi.$$

Nach (45) ist die betrachtete Welle eine transversale, d. h. die elektromagnetischen Vektoren liegen in der Querschnittsebene. Die Welle pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit längs der Leitung fort, wie ebene homogene Wellen in dem betreffenden Dielektrikum.

88) *Rayleigh*, Phil. Mag. 44 (1897), p. 199. Vgl. auch *Abraham-Föppl*, Theorie der Elektrizität 1, Aufl. 2 (1904), p. 331 ff; Aufl. 3 (1907), p. 340 ff.

Was das Feld in einer beliebigen Querschnittsebene anbelangt, so leitet sich, nach (45a), das elektrische Feld aus dem ebenen Potentiale Φ , das magnetische aus der Stromfunktion (vgl. Art. IV 14, Nr. 7) Ψ ab. Aus (45g) folgt, daß die elektrischen Äquipotentialkurven $\Phi = \text{const.}$ mit den magnetischen Erregungslinien $\Psi = \text{const.}$ zusammenfallen. Für jede Querschnittsebene aber ist Φ bestimmt durch die Laplacesche Gleichung, und die Forderung, entsprechend der Grenzbedingung (8) auf jedem der Leiterquerschnitte einen konstanten Wert anzunehmen. Diese Bedingungen sind durchaus identisch mit denen, welchen das elektrostatische Potential der leitenden unendlichen Zylinder zu genügen hat; nur ist bei dem elektrostatischen Probleme die Ladung der Längeneinheit des betreffenden i^{ten} Zylinders:

$$(45h) \quad e_i = - \varepsilon \int ds_i \frac{\partial \Phi}{\partial n_i}$$

(s_i Umfangslinie des Querschnitts, n_i äußere Normale)

für alle Querschnitte des Zylinders die gleiche, während sie hier von Querschnitt zu Querschnitt variieren kann. Für die Stromstärke durch denselben Leiterquerschnitt

$$(45i) \quad J_i = - \frac{c}{\mu} \int ds_i \frac{\partial \Psi}{\partial n_i}$$

folgt aus (45g, h, i):

$$(45k) \quad J_i = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot e_i = w \cdot e_i.$$

In den Gültigkeitsbereich der soeben dargelegten Methode fallen folgende Anordnungen: Ein *Kabel* mit vollkommen leitenden, zylindrischen Belegungen; zwei jeweils in gegenüberliegenden Querschnitten entgegengesetzt geladene *Paralleldrähte*, wie sie nach dem Vorgange von *J. Lecher*⁸⁹⁾ vielfach zur Fortleitung Hertzscher Schwingungen verwandt werden. Auch eine beliebige Zahl paralleler Drähte kann unter Vernachlässigung ihres Leitungswiderstandes nach dieser Methode behandelt werden, falls

$$(45l) \quad \sum_{i=1}^n e_i = 0$$

ist; dabei ist die Summe über alle in einer Ebene liegenden Querschnittselemente der n Leiter zu erstrecken. Würde diese Summe nicht gleich null sein, so würden in unendlichem Abstände von der Leitung Φ , Ψ , und ebenso die elektrische und magnetische Energie der Welle, logarithmisch unendlich werden. Dieser Umstand läßt es, wie schon

89) *J. Lecher*, Ann. d. Phys. 41 (1890). p. 850.

H. Hertz bemerkte⁹⁰⁾, nicht zu, z. B. Wellen längs eines einzelnen Drahtes nach dieser Methode zu behandeln. In diesem Falle muß man die endliche Leitfähigkeit des Drahtes berücksichtigen, wenn man eine physikalisch zulässige Lösung zu erhalten wünscht (vgl. Nr. 12).

Für zwei Paralleldrähte ist bei der Lecherschen Anordnung,

$$(46) \quad e_2 = -e_1,$$

und gemäß (45k)

$$(46a) \quad J_2 = -J_1.$$

Wie bei dem analogen elektrostatischen Probleme kann man durch

$$(46b) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{e_1}{K}$$

die auf die Längeneinheit bezogene „Kapazität der Leitung“ definieren; im Falle zweier Drähte von gleichem kreisförmigen Querschnitt ist ihr Wert:

$$(46c) \quad K = \frac{\pi \varepsilon}{\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)}$$

($2a$ Abstand der Drahtachsen, b Radius des Querschnitts).

Auf der linken Seite von (46b) steht die Differenz der Werte von Φ für zwei Punkte der beiden Leiter, welche in derselben Querschnittsebene liegen. Die durch diese Differenz bestimmte „Spannung“ ist gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke, erstreckt von einem Punkte des ersten bis zu einem Punkte des zweiten Leiters, und zwar längs einer ganz in der Querschnittsebene verlaufenden Kurve. (Für eine aus der Querschnittsebene heraustretende Kurve wäre, in dem Felde der Drahtwellen, jenes Linienintegral vom Wege abhängig.)

In entsprechender Weise ist durch die linke Seite der Gleichung

$$(46d) \quad \Psi_1 - \Psi_2 = \frac{I_a}{c} \cdot J_1$$

der auf die Längeneinheit der Leitung bezogene „Induktionsfluß“ definiert, und durch die Gleichung selbst die auf die Längeneinheit bezogene (äußere) „Selbstinduktion der Leitung“.

Aus (45g, k) folgt

$$(46e) \quad KI_a = \varepsilon \mu_a$$

(μ_a Permeabilität des Dielektrikums),

so daß z. B. für zwei Paralleldrähte von gleichem, kreisförmigem Quer-

90) H. Hertz, Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 11.

schnitt sich aus (46c) ergibt

$$(46f) \quad L_a = \frac{\mu_a}{\pi} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right).$$

Eine dem Gedankengange der Fernwirkungstheorie näher stehende Behandlungsweise⁹¹⁾ des Problems geht von dem Induktionsgesetz aus. Wendet man dieses auf ein Band an, welches von zwei benachbarten Querschnittsebenen und von den beiden Leiteroberflächen begrenzt ist, so folgt

$$(47) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial(\Psi_1 - \Psi_2)}{\partial t} = \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial z}.$$

Nimmt man hierzu die aus der Konstanz der Elektrizität folgende Beziehung

$$(47a) \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = -\frac{\partial J_1}{\partial z},$$

und definiert K und L_a den Gleichungen (46b, d) gemäß, so erhält man

$$(47b) \quad \frac{KL_a}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2}.$$

Hieraus ergibt sich als Geschwindigkeit der Drahtwelle

$$(47c) \quad w = \frac{c}{\sqrt{KL_a}},$$

was mit (45f) übereinstimmt, falls (46e) gilt.

Doch ist wohl zu beachten, daß auf Grund der Feldgleichungen Kapazität und Selbstinduktion der Leitung nur für zylindrische Leiter definiert worden sind, und auch für solche nur dann, wenn das magnetische Feld rein transversal ist. Würde nicht überall die Beziehung gelten

$$(48) \quad \mathfrak{S}_z = 0,$$

die infolge der Feldgleichungen (44b, c) die Relationen mit sich bringt:

$$(48a) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = 0,$$

$$(48b) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} = 0,$$

so wäre es nicht mehr möglich, aus Φ das elektrische, aus Ψ das magnetische Feld so abzuleiten, wie es die Gleichungen (45a, b) fordern. Dann würden die Begriffe der Spannung und des Induktionsflusses, und damit auch die der Kapazität und der Selbstinduktion in der Luft schweben. Die durch (45) noch hinzugenommene Spezial-

91) *P. Drude*, Physik d. Äthers, p. 374 ff; Ann. d. Phys. 60 (1897), p. 1.

sierung dagegen, welche besagt, daß auch \mathfrak{E}_z verschwindet, ist für die Existenz dieser Begriffe nicht wesentlich; würden wir sie fallen lassen, so würden für Φ und Ψ eben nicht mehr die Differentialgleichungen (45c) logarithmischer Potentiale, sondern andere partielle Differentialgleichungen gelten (Nr. 12), so daß K und L_a nicht mehr mit Hilfe der Potentialtheorie berechnet werden könnten.

Die obige, auf den Gleichungen (47), (47a) fußende Ableitung der für die Fortpflanzung der Wellen längs der beiden Leiter maßgebenden Gleichungen läßt sich so verallgemeinern, daß dem Einfluß des Leitermaterials, wenigstens unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen, Rechnung getragen wird⁹²). Der endliche Leitungswiderstand bedingt es, daß an der Oberfläche der beiden Leiter die longitudinale elektrische Komponente nicht verschwindet, wenn auch ihre Werte $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1$, $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2$ gegen die transversalen Komponenten von \mathfrak{E} sehr klein sind. Macht man die

Annahme A: $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1$ und $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2$ haben längs der Umfangslinie des betreffenden Leiterquerschnitts jeweils einen konstanten Wert, so ergibt das Induktionsgesetz als Verallgemeinerung von (47)

$$(49) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial(\Psi_1 - \Psi_2)}{\partial t} = \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial z} + (\overline{\mathfrak{E}}_z)_1 - (\overline{\mathfrak{E}}_z)_2.$$

Wenn man hier für die Spannung und den Induktionsfluß die Beziehungen (46b, d) und die oben erhaltenen Werte von K und L_a einführt, so involviert das die

Annahme B: Das transversale elektromagnetische Feld im Dielektrikum erfährt durch das Hinzutreten der longitudinalen elektrischen Komponente eine zu vernachlässigende Änderung.

Für die Stromstärken J_1 und J_2 , welche von den Wechselfeldern $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1$, $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2$ in den Leiterquerschnitten erregt werden, setzt man, ebenso wie in Nr. 10, Gl. (41):

$$(49a) \quad \begin{cases} (\overline{\mathfrak{E}}_z)_1 = R_1 J_1 + \frac{1}{c^2} L_{i1} \cdot \frac{\partial J_1}{\partial t} = J_1 \left\{ R_1 + \frac{i\nu}{c^2} \cdot L_{i1} \right\}, \\ (\overline{\mathfrak{E}}_z)_2 = R_2 J_2 + \frac{1}{c^2} L_{i2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial t} = J_2 \left\{ R_2 + \frac{i\nu}{c^2} \cdot L_{i2} \right\}. \end{cases}$$

So sind die effektiven Werte der Widerstände und der inneren Selbstinduktionen, für Schwingungen einer gegebenen Frequenz, durch Querschnittsform und Material der zylindrischen Leiter bestimmt.

Aus (49, 49a) im Verein mit (46a, b, d) erhält man

$$(49b) \quad -\frac{1}{c^2} L \frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial e_1}{\partial z} + R J_1,$$

92) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 475 ff.

wo abkürzungsweise gesetzt ist

$$(49c) \quad R = R_1 + R_2, \quad L = L_a + L_{i1} + L_{i2}.$$

Aus (49b) und der auch hier streng gültigen Gleichung (47a) folgt

$$(50) \quad \frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} - \frac{LK}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - RK \cdot \frac{\partial e_1}{\partial t} = 0.$$

Das ist die sogenannte „*Telegraphengleichung*“, welche die Fortpflanzung der Elektrizität längs der Leitung bestimmt. Es ist indessen zu beachten, daß R und L nur für eine gegebene Frequenz ν als Konstanten zu betrachten sind. Die Fortpflanzung solcher Schwingungen wird dargestellt durch $e_1 = C \cdot e^{i\nu t - iqz}$, wobei die komplexe Konstante q , und damit Geschwindigkeit und räumliche Dämpfung der Welle, sich bestimmt aus

$$(50a) \quad q^2 = \frac{\nu^2}{c^2} \cdot LK - i\nu RK.$$

Was die Annahme (A) anbelangt, so trifft sie bei axial-symmetrischer Anordnung, z. B. für das Kabel, zu. Für Paralleldrähte jedoch gilt sie nur dann, wenn deren Abstand groß gegen ihren Querschnittsradius ist. Andererseits darf der Abstand der beiden Leiter nicht zu groß werden, sonst würde die Annahme (B) nicht mehr erfüllt sein, indem die longitudinalen Verschiebungsströme das Feld in der Querschnittsebene beeinflussen würden. In den meisten praktischen Fällen ist der Fehler, der durch Einführung der Annahmen (A) und (B) entsteht, nur gering, so daß die soeben skizzierte Theorie mit genügender Annäherung gilt⁹³⁾. Der Grad der Annäherung läßt sich natürlich nur für solche Fälle genau beurteilen, in denen man über eine exakte Lösung des Problems verfügt (vgl. Nr. 12).

12. Drahtwellen; strenge Theorie. a) *Einzeldraht.* Die elektromagnetischen Wellen, die an einem *einzelnen, geraden, unendlichen Drahte* von kreisförmigem Querschnitt entlang fortschreiten, sind von *J. J. Thomson*⁹³⁾ und besonders eingehend von *A. Sommerfeld*⁹⁴⁾ untersucht worden. Führt man in die Feldgleichungen (1, 2) den Formeln (37a) gemäß Zylinderkoordinaten (z, ϱ, ψ) ein, so ergeben sich, unter Annahme axialer Symmetrie, zwischen den Komponenten $\mathfrak{E}_z, \mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{H}_\psi$ die Verknüpfungsgleichungen

93) *J. J. Thomson*, Lond. Math. Soc. Proc. 17 (1886), p. 310.

94) *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 67 (1899), p. 233. Die in den folgenden Gleichungen (54) bis (55d) enthaltenen Folgerungen finden sich noch nicht in der zitierten Arbeit.

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathfrak{H}_\psi), \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}_\rho = - \frac{\partial \mathfrak{H}_\psi}{\partial z}, \\ - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\psi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \rho}. \end{cases}$$

Dieselben werden erfüllt durch den Ansatz⁹⁴⁾

$$(51a) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right), & \mathfrak{E}_\rho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}, \\ \mathfrak{H}_\psi = - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \rho} - \frac{\sigma}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}, \end{cases}$$

falls $\Pi(\rho, z, t)$ der partiellen Differentialgleichung genügt

$$(51b) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{\sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right).$$

Π ist eine verallgemeinerte Hertzsche Funktion, wie der Vergleich mit Nr. 4, insbesondere (19, 19a), lehrt. Die Gleichung der elektrischen Kraftlinien wird jeweils gegeben durch

$$(51c) \quad Q(\rho, z, t) = - \rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \text{constans.}$$

Die im Innern des Drahtes geltenden Gleichungen erhält man unter Vernachlässigung des hypothetischen Verschiebungsstromes, indem man setzt

$$\mu = \mu_i, \quad \varepsilon = 0, \quad \text{für } \rho < b.$$

Im Außenraum dagegen, der von dem Dielektrikum erfüllt ist, gilt

$$\mu = \mu_a, \quad \sigma = 0 \quad \text{für } \rho > b.$$

An der Oberfläche des Drahtes gelten die Grenzbedingungen (5, 6); sie verlangen die Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} :

$$(51d) \quad \mathfrak{E}_{z,i} = \mathfrak{E}_{z,a}, \quad \mathfrak{H}_{\psi,i} = \mathfrak{H}_{\psi,a}, \quad \text{für } \rho = b.$$

Die Fortpflanzung einfach periodischer Schwingungen parallel der z -Achse wird dargestellt durch den Ansatz

$$(52) \quad \Pi = e^{i \nu t - i q z} \cdot u(\rho);$$

q ist eine zu bestimmende, komplexe Konstante, von welcher Geschwindigkeit und räumliche Dämpfung der Wellen abhängen. Aus (51b) resultiert für u die Besselsche Differentialgleichung:

$$(52a) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + u = 0,$$

wobei die Unabhängige x die Bedeutungen hat:

$$(52b) \quad x = x_i = \rho \sqrt{k_i^2 - q^2}, \quad k_i^2 = -\frac{i\nu\sigma\mu_i}{c^2}, \quad \text{für } \rho < b,$$

$$(52c) \quad x = x_a = \rho \sqrt{k_a^2 - q^2}, \quad k_a^2 = \frac{\nu^2 \varepsilon \mu_a}{c^2}, \quad \text{für } \rho > b.$$

Im Drahtinnern hat man für $u(\rho)$ die auf der Drahtachse ($\rho = 0$) endliche Besselsche Funktion erster Art zu setzen:

$$(52d) \quad u = u_i = C \cdot J_0(x_i), \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \alpha} d\alpha.$$

Im Außenraum dagegen sind Besselsche Funktionen zweiter Art anzuwenden:

$$(52e) \quad u = u_a = D \cdot K_0(x_a),$$

$$(52f) \quad K_0(x) = \frac{1}{i} \int_0^{i\infty} e^{ix \cos \alpha} d\alpha = \int_1^\infty \frac{e^{-ix\xi} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung (52a) und erfüllt die zu stellende Bedingung, daß in großer Entfernung von der Drahtachse der gesamte zur Drahtachse senkrechte Energiefluß verschwindet, wofür das in (52c) noch willkürliche Vorzeichen der Wurzel so gewählt wird, daß in der komplexen Größe

$$\sqrt{k_a^2 - q^2} = \alpha + \beta i, \quad \beta > 0$$

ist. Für große x wird

$$(52g) \quad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^i \left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

während für kleine Werte von x (unter Vernachl. von x^2 gegen 1) gilt

$$(52h) \quad K_0(x) = \log\left(\frac{2\gamma i}{x}\right), \quad \gamma = 0,5615 \dots = \frac{1}{1,781}.$$

Aus (51a, b), in Verbindung mit (52, 52d, e), folgt für das elektromagnetische Feld im Drahtinnern:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = C \cdot (k_i^2 - q^2) \cdot J_0(x_i) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{E}_\rho = -C \cdot iq \cdot (k_i^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot J_0'(x_i) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{H}_\varphi = -C \cdot \frac{\sigma}{c} (k_i^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot J_0'(x_i) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \end{array} \right\} \rho < b.$$

Im Außenraume dagegen wird das Feld dargestellt durch

$$(53a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = D \cdot (k_a^2 - q^2) \cdot K_0(x_a) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{E}_\rho = -D \cdot iq \cdot (k_a^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot K_0'(x_a) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{H}_\varphi = -D \cdot \frac{i\nu\varepsilon}{c} \cdot (k_a^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot K_0'(x_a) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \end{array} \right\} \rho > b.$$

Aus den Grenzbedingungen (51d) ergibt sich demgemäß, nach Elimination der Konstanten C und D :

$$(53b) \quad \frac{(k_i^2 - q^2)}{\sigma} \cdot \left(\frac{J_0(x)}{x J_0'(x)} \right)_{x=b\sqrt{k_i^2 - q^2}} = \frac{(k_a^2 - q^2)}{i\nu\varepsilon} \cdot \left(\frac{K_0(x)}{x K_0'(x)} \right)_{x=b\sqrt{k_a^2 - q^2}},$$

eine transzendente Gleichung, welche zur Berechnung der für die Fortpflanzung der Welle maßgebenden Konstanten q dient.

Es ist nicht ohne Interesse, die gegebene Lösung der Feldgleichungen den Ansätzen der beiden vorigen Abschnitte gegenüberzustellen. In Nr. 10 wurde nur das Drahtinnere betrachtet, und zwar unter Annahme eines von z unabhängigen Feldes. In dem hier behandelten allgemeineren Falle, wo die Komponenten mit z nach einer Exponentialfunktion variieren, ergibt (41):

$$(54) \quad R + \frac{i\nu}{c^2} L_i = - \frac{(k_i^2 - q^2)}{2\pi\sigma} \left(\frac{J_0(x)}{x J_0'(x)} \right)_{x=b\sqrt{k_i^2 - q^2}}.$$

Wird hier q^2 gegen k_i^2 gestrichen — die numerische Berechnung erweist das in allen praktischen Fällen als zulässig — so geht (54), mit Rücksicht auf (52b), in (41a) über, so daß die letztgenannte Gleichung mit genügender Annäherung zur Berechnung von R und L_i dienen kann.

In Nr. 11, wo wir die Drähte als vollkommen leitend betrachteten, mußten wir den Einzeldraht von der Behandlung ausschließen, weil die logarithmischen Potentiale, aus welchen dort das Feld abgeleitet wurde, im Unendlichen ein unzulässiges Verhalten der Komponenten ergeben würden. Die hier dargelegte Theorie beseitigt jene Schwierigkeit, indem sie die endliche Leitfähigkeit des Drahtes in Betracht zieht. Nur in der Nachbarschaft des Drahtes, wo für $K_0(x)$ die Näherungsformel (52h) gilt, reichen die logarithmischen Potentiale zur Darstellung des Feldes aus. In großer Entfernung von der Drahtachse dagegen ist die Formel (52g) zu verwenden, die ein ganz anderes Verhalten der Komponenten ergibt.

Wie im Anschluß an Gl. (48) bemerkt wurde, ist das Verschwinden der longitudinalen magnetischen Feldstärke die Bedingung für die Existenz eines elektrischen Potentials Φ und einer magnetischen Stromfunktion Ψ in der Querschnittsebene. Diese Bedingung ist auch in dem hier diskutierten Falle erfüllt. In der Tat kann man, gemäß (51a), im Außenraume setzen:

$$(55) \quad \mathfrak{E}_\rho = - \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \mu_a \mathfrak{H}_\varphi = - \frac{\partial \Psi}{\partial \rho},$$

wofern man Φ und Ψ folgendermaßen aus der Funktion Π ableitet:

$$(55a) \quad \Phi = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \Psi = \frac{\varepsilon \mu_a}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

An der Drahtoberfläche wird, mit Rücksicht auf (52), (52e):

$$(55b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = D \cdot iq K_0(x) e^{i\nu t - iqz}, \\ \Psi_1 = D \cdot \frac{i\nu \varepsilon \mu_a}{c} K_0(x) e^{i\nu t - iqz}, \end{array} \right\} x = b \sqrt{k_a^2 - q^2}.$$

Während die in Nr. 11 behandelten Fälle dadurch gekennzeichnet sind, daß die vom Drahte ausgehenden elektrischen Kraftlinien ganz in der Querschnittsebene verlaufen, und auf einem zweiten, parallelen Leiter endigen, spielt im Falle des Einzeldrahtes die longitudinale Komponente der Feldstärke eine wesentliche Rolle; die Verschiebungsströme, welche deren zeitliche Schwankungen begleiten, besorgen gewissermaßen die Rückleitung und ersetzen so den anderen Leitungsdraht. Die „Spannung“ und den „magnetischen Induktionsfluß“ kann man auch hier eindeutig definieren, indem man unter Spannung das Linienintegral der elektrischen Feldstärke versteht, erstreckt längs einer ganz in der Querschnittsebene verlaufenden Kurve, die auf der Drahtoberfläche beginnt und bis in unendliche Entfernung reicht, und andererseits den magnetischen Induktionsfluß durch eine Kurve derselben Art bestimmt. Aus (55) folgt, da Φ und Ψ im Unendlichen verschwinden, daß die in (55b) angegebenen Werte Φ_1 , Ψ_1 Spannung und magnetischen Induktionsfluß des Einzeldrahtes darstellen. Definiert man weiter die „Kapazität“ und die „äußere Selbstinduktion“ durch

$$(55c) \quad \Phi_1 = \frac{e_1}{K}, \quad \Psi_1 = \frac{1}{c} L_a J_1,$$

und berechnet die Ladung e_1 der Längeneinheit und den Gesamtstrom J_1 aus den in (53a) angegebenen Werten von \mathfrak{E}_ϱ und \mathfrak{H}_ψ , so folgt

$$(55d) \quad K = \frac{2\pi\varepsilon}{\xi}, \quad L_a = \frac{\mu_a \xi}{2\pi},$$

in Übereinstimmung mit der Relation (46), wobei unter ξ die komplexe Größe zu verstehen ist:

$$(55e) \quad \xi = - \left(\frac{K_0(x)}{x K_0'(x)} \right)_{x=b\sqrt{k_a^2 - q^2}}.$$

Führt man die so erhaltenen Werte von K und L_a , und die in (54) angegebenen von R und L_i in (50a) ein, so erhält man zur Bestimmung von q eine Gleichung, die mit (53b) identisch ist.

Um q aus dieser Gleichung zu ermitteln, macht man die nachträglich durch die numerische Berechnung zu rechtfertigende Annahme, daß

$$(56) \quad \eta = - \frac{b^2(k_a^2 - q^2)}{4\gamma^2}$$

dem Betrage nach klein gegen 1 ist. Alsdann kann man zur Berechnung von ξ aus (55e) die Näherungsformel (52h) verwenden und erhält so:

$$(56a) \quad \xi = \log \left(\frac{2i\gamma}{b\sqrt{k_a^2 - q^2}} \right) = -\frac{1}{2} \log \eta$$

Vereinfacht man in entsprechender Weise die rechte Seite von (53b) und setzt links, was gleichfalls die nachträgliche numerische Auswertung rechtfertigt, q^2 klein gegen k_i^2 , so folgt, mit Rücksicht auf (52), (52b), (52c):

$$(57) \quad \eta (-\log \eta) = \frac{b^2 k_a^2}{2\gamma^2} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_a} \left(\frac{J_0(x)}{x J_0'(x)} \right)_{x=k_i b} = m.$$

Die abkürzungsweise mit m bezeichnete rechte Seite dieser Gleichung ist als bekannt anzusehen. Die Auflösung geschieht durch eine Reihe sukzessiver Approximationen, die nach dem kettenbruch-ähnlichen Schema fortschreiten⁹⁴):

$$(57a) \quad \eta = \frac{m}{-\log \frac{m}{-\log \frac{m}{-\log \frac{m}{\dots}}}}$$

Die gute Konvergenz dieses Verfahrens ist durch die Kleinheit der Beträge des gegebenen m bzw. des erhaltenen η bedingt. Durch η bestimmen sich gemäß (55d) und (56a) K und L_a und andererseits aus (56) die komplexe Konstante q , welche Geschwindigkeit und räumliche Dämpfung der längs des Einzeldrahtes fortschreitenden Welle angibt. Es sind, ähnlich wie in Nr. 10, zwei Grenzfälle zu unterscheiden, je nachdem das Argument von $J_0(x)$ in (57) groß oder klein ist. In dem ersten Falle, der starkem Skin-Effekt entspricht, ist die räumliche Dämpfung gering, die Geschwindigkeit ist nur wenig kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Im zweiten Falle dagegen, wo das Feld merklich in den Draht eindringt, ist die Dämpfung beträchtlicher, auch ist die Verzögerung der Welle durch den Draht größer⁹⁴). In praxi liegt bei *Hertz*schen Schwingungen fast stets der erste Fall vor.

b) *Kabel und Paralleldrähte*. Wellen in *Kabeln* sind auf Grund der Feldgleichungen von *J. J. Thomson*⁹⁵) untersucht worden. Der Isolator ist hier von zwei konzentrischen Kreiszyllindern begrenzt, die ihn von dem inneren und äußeren Leiter trennen. In dem inneren Leiter kommen wiederum *Besselsche* Funktionen erster Art zur Verwendung, in dem äußeren solche zweiter Art, während die Lösung

95) *J. J. Thomson*, London Roy. Soc. Proc. 46 (1889), p. 1; Rec. res., p. 262 ff.

in dem Isolator aus beiden Partikulärintegralen der *Besselschen* Differentialgleichung sich zusammensetzt. Die vier an den Trennungsfächen geltenden Grenzbedingungen ergeben nach Elimination der drei Quotienten der eingehenden multiplikativen Konstanten eine transzendente Gleichung, aus der sich die für die Fortpflanzung der Welle maßgebende Konstante q bestimmt. In allen praktischen Fällen gibt die elementare Theorie (Nr. 11) eine ausreichende Annäherung. Den Fall, wo der äußere Leiter des Kabels durch Luft ersetzt ist (also Draht mit dielektrischem Mantel in Luft) behandelt *F. Harms*^{95a}); die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt in eigentümlich sprunghafter Weise von der Dicke des Mantels ab.

Auf Wellen, die längs zweier *Paralleldrähte* von kreisförmigem Querschnitt fortschreiten, bezieht sich eine sehr ausführliche Untersuchung von *G. Mie*⁹⁶). Er führt Bipolarkoordinaten in die Feldgleichungen ein und löst sie durch Reihen, die nach Produkten aus trigonometrischen Funktionen und *Besselschen* Funktionen zweiter Art fortschreiten. Glücklicherweise lassen sich die zunächst recht verwickelten Formeln vereinfachen, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

A) $2a$ groß gegen b . ($2a$ Abstand der Drahtachsen, b Querschnittsradius.)

B) $|q^2 - k_a^2| \cdot 4a^2$ klein gegen 1.

Im Falle B), d. h. bei hinreichend kleinem Abstände der Drähte, kann man die longitudinale elektrische Komponente und damit den zur Leitung parallelen Verschiebungsstrom vernachlässigen. Es ist jedoch die durch die Anwesenheit des anderen Drahtes bedingte Störung der Symmetrie zu berücksichtigen; es zeigt sich, daß sie das Auftreten einer longitudinalen magnetischen Komponente und damit die Drahtachse umkreisender Leitungsströme und merkwürdiger Skin-Effekte im Gefolge hat⁹⁶).

Im Falle A) dagegen kann das Feld in jedem der beiden Drähte als axial-symmetrisches gelten; es kommt hier zwar nicht die longitudinale magnetische, wohl aber die longitudinale elektrische Komponente in Betracht. Dieser Fall, den man auch direkt in Angriff nehmen kann⁹⁷), ist demjenigen des Einzeldrahtes nahe verwandt. Spannung und Induktionsfluß der Leitung sind eindeutig zu definieren und finden sich, wenn die gegenüberliegenden Elemente der

95a) *F. Harms*, Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 44.

96) *G. Mie*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 201.

97) *W. B. Morton*, Phil. Mag. 50 (1900), p. 605. Derselbe Autor diskutiert den Verlauf der Kraftlinien: Phil. Mag. 4 (1902), p. 302.

beiden Paralleldrähte jeweils entgegengesetzt geladen sind, gleich:

$$(58) \quad \begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 = D \cdot 2iq e^{i\nu t - iqz} \cdot \{K_0(x_1) - K_0(x_2)\}, \\ \Psi_1 - \Psi_2 = D \cdot \frac{2i\nu\epsilon\mu}{c} e^{i\nu t - iqz} \cdot \{K_0(x_1) - K_0(x_2)\}, \end{cases}$$

$$(58a) \quad x_1 = b\sqrt{k_a^2 - q^2}, \quad x_2 = 2a\sqrt{k_a^2 - q^2}.$$

Man kann, wie bei dem Einzeldrahte, x_1^2 klein gegen 1 annehmen, im allgemeinen aber nicht x_2^2 . Dementsprechend erhält man hier für K und L_a Ausdrücke von der Form (55d), wo aber für ξ statt des Wertes (56a) zu setzen ist:

$$(58b) \quad \xi = 2 \left\{ \log \left(\frac{2i\gamma}{b\sqrt{k_a^2 - q^2}} \right) - K_0(2a\sqrt{k_a^2 - q^2}) \right\}.$$

Im allgemeinen ist ξ komplex; daher sind es auch Kapazität und äußere Selbstinduktion der Leitung.

Gelten jedoch beide Bedingungen A) und B) gleichzeitig, so liegt der von der elementaren Theorie behandelte Fall vor (vgl. Nr. 11, Annahme A) und B)). Dann ist auch auf $K_0(x_2)$ die Näherungsformel (52h) anzuwenden, so daß man erhält:

$$(58c) \quad \xi = 2 \log \left(\frac{2a}{b} \right).$$

In diesem Falle ergeben sich aus (55d) für K und L_a reelle Werte, die auch als Grenzwerte aus (46c), (46f) abgeleitet werden können. Indem die Theorie von *Mie* die Bedingungen A) und B) voneinander trennt, gestattet sie es, den Grad der Näherung, welchen die elementare Theorie erreicht, nach jeder der beiden Richtungen hin genauer zu beurteilen.

Eine beliebige Anzahl (n) paralleler Drähte, welche in die Ecken eines regelmäßigen Polygons eingespannt sind, hat *W. B. Morton*⁹⁸⁾ untersucht für den Fall, daß die Abstände je zweier Drähte groß gegen die Querschnittsradien sind und dennoch der Bedingung B) genügen. Das ist der Fall der elementaren Theorie, wenn die Beziehung (451) erfüllt ist, d. h. wenn $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ ist. Dann ergeben sich für die Kapazitäts- und Selbstinduktionskoeffizienten reelle, von den geometrischen Abmessungen des Querschnittes der Leitung abhängige Werte, und durch diese ist q^2 explizit bestimmt. Ist jedoch jene Beziehung (451) nicht erfüllt, so kommt, ähnlich wie beim Einzeldraht, die Rückleitung durch die Verschiebungsströme in Betracht, und es ergibt sich für q eine transzendente Gleichung.

98) *W. B. Morton*, *Phil. Mag.* (6) 1 (1901), p. 563.

In allen Fällen^{94) 96)}, wo die dielektrische Rückleitung in Frage kommt, bestimmen sich K und L_α durch Gleichungen von der Form (55d), wobei die komplexe Größe ξ zu schreiben ist:

$$(59) \quad \xi = |\xi| e^{\alpha i}, \quad \alpha > 0.$$

Das bedeutet, daß für einen bestimmten Leiterquerschnitt die Spannung der Ladung, der Induktionsfluß dem Strome der Phase nach etwas voreilt; der Phasenwinkel α ist meist klein; nur dann, wenn α null und daher ξ reell wird, liegt der Fall der elementaren Theorie (Nr. 11) vor. Es entsteht nun die Frage, ob und wie die komplexen Größen K und L_α mit der elektrischen und der magnetischen Energie der Welle zusammenhängen. Definiert man die „effektive Kapazität“ K' und die „effektive äußere Selbstinduktion“ L'_α durch

$$(59a) \quad \bar{U} = \frac{|e_1|^2}{2K'}, \quad \bar{T} = \frac{1}{2c^2} L'_\alpha |\bar{J}_1|^2,$$

[die horizontalen Striche deuten die Mittelwertbildung über die Zeit einer Schwingung an. Elektrische Energie U und magnetische Energie T sind auf die Längeneinheit der Leitung zu beziehen], so gilt es, diese reellen Größen mit den komplexen Ausdrücken von K und L_α in Verbindung zu bringen. Zur Lösung dieser Aufgabe zieht M. Abraham⁹⁹⁾ einen Satz heran, welcher dem Poyntingschen Satze in gewisser Weise verwandt ist. Der Poyntingsche Satz ergibt bei Mittelwertbildung über eine ganze Schwingung und bei Integration über eine geschlossene Fläche (Flächenelement $d\sigma$, äußere Normale n):

$$(59b) \quad \int \bar{\mathfrak{E}}_n d\sigma = \bar{Q}, \quad \mathfrak{E} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Der erwähnte Satz jedoch, der sich ebenfalls aus den Feldgleichungen und Grenzbedingungen (Nr. 1) ergibt, besagt:

$$(59c) \quad \frac{1}{2} \int \bar{\mathfrak{X}}_n d\sigma = \bar{T} - \bar{U}, \quad \mathfrak{X} = [\mathfrak{A}\mathfrak{H}].$$

Dabei stellt der Vektor \mathfrak{X} eine Art Vektorpotential dar, aus dem sich die Feldstärken des Wechselfeldes folgendermaßen ableiten:

$$(59d) \quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \quad \mu \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}.$$

Der Satz (59c) gilt für eine beliebige geschlossene Fläche, welche beliebige homogene isotrope Körper, Leiter, Halbleiter oder Isolatoren, einschließt; dieselben können mit irgend welchen Trennungsfächen aneinander grenzen.

Auf das Drahtinnere angewandt, ergibt der Poyntingsche Satz (59b) den Zusammenhang des effektiven Widerstandes R mit der Jouleschen

Wärme (vgl. Nr. 10). In ähnlicher Weise folgt aus (59c), daß die effektive Selbstinduktion L_i des Drahtinnern in der Tat die magnetische Energie des Drahtinnern bestimmt.

Beide Sätze gemeinsam, auf den Isolator angewandt, bestimmen die durch (59a) definierten Größen K und L_a folgendermaßen⁹⁹⁾:

$$(60) \quad \begin{cases} L_a' = |L_a| \cdot (1 - \beta), \\ \frac{1}{K'} = \frac{1}{|K|} \cdot (1 - \beta). \end{cases}$$

Dabei ist β ein kleiner Winkel, der mit dem Phasenwinkel α von ξ (vgl. (59)) verknüpft ist durch

$$(60a) \quad \beta = \alpha \frac{\nu L_i}{c^2 R}.$$

Bei starkem Skin-Effekt, wo in (41a) für $J_0(x)$ sein asymptotischer Wert zu setzen ist, wird $R = \nu L_i / c^2$, daher $\beta = \alpha$. Dann und nur dann, wenn α gleich null, d. h. wenn K und L_a reell sind, sind sie mit den für die Energie maßgebenden Größen K' und L_a' identisch.

Selbstverständlich ist der Gültigkeitsbereich der Relationen (60) durch die Bedingung eingeschränkt, daß in der Querschnittsebene ein elektrisches Potential und eine magnetische Stromfunktion existieren müssen, da anderenfalls K und L_a nicht definiert wären.

Die vorstehenden Entwicklungen beruhen selbstverständlich auf der Voraussetzung, daß außer den zur Stromleitung verwandten Drähten sich keine Leiter im Felde befinden; in der Nähe befindliche Leiter würden das Feld wesentlich verändern. Ein hierauf bezügliches Problem hat *T. Levi-Civita*¹⁰⁰⁾ behandelt: längs eines Drahtes, dem parallel ein ebener, dünner, leitender Schirm aufgestellt ist, pflanzt sich eine elektromagnetische Welle fort; es gelingt auf Grund der erhaltenen Formeln, für diesen Fall den Einfluß des Schirmes auf das elektrische und magnetische Feld zu diskutieren.

13. Reflexion am Ende der Leitung. Wir setzen fest, daß die — etwa aus zwei Paralleldrähten bestehende — Leitung sich von der Ebene ($z = 0$) aus nach der Seite der negativen z hin erstrecken soll. Unter Vernachlässigung des Widerstandes und der inneren Selbstinduktion der Leitungsdrähte ist die Geschwindigkeit der Drahtwellen:

$$(61) \quad w = \frac{c}{\sqrt{KL}}.$$

Zwischen Spannung V' und Strom J' besteht für die einfallende Welle der elementaren Theorie zufolge (Gl. (45k), (46b)) der Zu-

100) *T. Levi-Civita*, Acc. Linc Rend. XI¹ (1902), p. 163, 191, 228.

sammenhang:

$$(61a) \quad J' = we' = wKV';$$

für die am Ende ($z = 0$) reflektierte und nun nach der Seite der negativen z hin fortschreitende Welle hingegen sind Strom J'' und Spannung V'' verknüpft durch

$$(61b) \quad J'' = -we'' = -wKV''.$$

Die Aufgabe, aus den am Ende der Leitung vorgeschriebenen Bedingungen, welche sich auf den resultierenden Strom:

$$(61c) \quad J_0 = J + J'' = wK(V' - V'')$$

und die resultierende Spannung:

$$(61d) \quad V_0 = V' + V''$$

beziehen, die Amplitude und Phase der reflektierten Welle zu ermitteln, ist in umfassendster Weise von *O. Heaviside*⁸⁶⁾ behandelt worden, und zwar vom Standpunkte der elementaren Theorie aus. Wir unterscheiden drei Fälle:

A) *Kondensator von der Kapazität K_0 am Ende.* Man hat für $z = 0$ die Bedingung:

$$(62) \quad J_0 = K_0 \frac{dV_0}{dt} = i\nu K_0 V_0.$$

Hieraus, in Verbindung mit den Gleichungen (61a) bis (61d), folgt:

$$(62a) \quad \frac{V' - V''}{V' + V''} = i \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\nu K_0}{wK} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{K_0}{K},$$

und daher:

$$(62b) \quad \frac{V''}{V'} = e^{-2\gamma i}.$$

Es wird demnach die Welle am Ende der Leitung ohne Amplitudenverlust, aber mit einer Phasenverzögerung 2γ reflektiert. Die gleiche Phasenverzögerung erhält man, wenn man sich die Endkapazität beseitigt denkt und sich statt dessen vorstellt, daß die Welle eine weitere Strecke der Leitung von der Länge $\gamma\lambda/2\pi$ in Hinweg und Rückweg durchlaufen hätte, ohne an dem offenen Ende einen Phasenverlust zu erleiden. Bei $z = \gamma\lambda/2\pi$ ist dann ein Stromknoten zu denken; liegt bei $z = -l$ ein Spannungsknoten, so hat man:

$$l + \gamma \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4} + k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Hieraus ergibt sich, mit Rücksicht auf (62a), für

$$(62c) \quad x = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

die transzendente Gleichung:

$$(62d) \quad x \operatorname{tg} x = \frac{Kl}{K_0}.$$

Rechts steht hier der Quotient aus der Kapazität Kl der Leitung (von der Länge l) und der Endkapazität K_0 . Man kann aus (62c), (62d) bei gegebener Wellenlänge λ die Lage der Spannungsknoten ermitteln¹⁰¹⁾. Man kann jene Gleichungen aber auch verwenden, wenn man die Eigenschwingungen eines Systems berechnen will, bestehend aus einem Kondensator und zwei parallelen Drähten von der Länge l , die einerseits in den Kondensator münden, andererseits durch eine kurze Brücke leitend miteinander verbunden sind. Die Gleichung (62d) stimmt dann mit derjenigen überein, auf welche die Kirchhoffsche Theorie der Kondensatorentladung³⁾ führt (vgl. Nr. 3).

B) *Widerstand R_0 am Ende.* Sind die Drähte am Ende durch eine induktionsfreie Brücke vom Widerstand R_0 verbunden, so gilt bei $z = 0$ die Bedingung:

$$(63) \quad V_0 = R_0 J_0.$$

Hieraus, in Verbindung mit den Gleichungen (61a) bis (61d), folgt:

$$(63a) \quad \frac{V''}{V'} = \frac{wKR_0 - 1}{wKR_1 + 1}.$$

Es findet demnach eine Amplitudenverringerng der Welle bei der Reflexion statt. Die Spannung wird am Ende mit gleicher oder mit entgegengesetzter Phase reflektiert, je nachdem $R \geq 1/wK$ ist. Im Grenzfalle $R_0 = 1/wK$ wird die einfallende Welle durch den Endwiderstand vollständig absorbiert, so daß sich überhaupt keine rücklaufende Welle ausbildet.

C) *Selbstinduktion L_0 am Ende.* Sind die beiden Drähte der Leitung am Ende durch eine widerstandsfreie Selbstinduktion L_0 überbrückt, so gilt bei $z = 0$ die Bedingung:

$$(64) \quad V_0 = \frac{1}{c^2} L_0 \frac{dJ_0}{dt} = \frac{iv}{c^2} L_0 J_0.$$

Hieraus, in Verbindung mit (61a) bis (61d), folgt:

$$(64a) \quad \frac{V' - V''}{V' + V''} = -i \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c^2}{vwKL_0}.$$

Berücksichtigt man (61) und die Beziehung

$$\lambda = w \frac{2\pi}{\nu},$$

so wird

$$(64b) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{L}{L_0}.$$

101) E. Cohn und F. Heerwagen, Ann. d. Phys. 43 (1891), p. 343. Es wird in dieser Arbeit auch berücksichtigt, daß der statische Wert der Kapazität K_0 eines ebenen Kondensators bei schnellen Schwingungen zu korrigieren ist.

Somit folgt aus (64a):

$$(64c) \quad \frac{V''}{V'} = e^{2\gamma l}.$$

Es wird demnach die Spannungswelle am Ende der Leitung mit einer Phasenvoreilung 2γ reflektiert. Eine Brücke mit Selbstinduktion ist äquivalent einer Verkürzung der Leitung¹⁰²⁾, und zwar um die Strecke $\gamma \lambda/2\pi$.

Die Eigenschwingungen eines Systems, bestehend aus zwei Paralleldrähten von der Länge l , die einerseits durch die Selbstinduktion L_0 , andererseits durch eine kurze Brücke von verschwindender Selbstinduktion verbunden sind, bestimmen sich ähnlich, wie im Falle A). Für die in (62c) definierte Größe x , und somit für die Wellenlängen der Eigenschwingungen, erhält man die transzendente Gleichung:

$$(64d) \quad x \operatorname{tg} x = \frac{lL}{L_0},$$

deren rechte Seite der Quotient aus der Selbstinduktion der Leitung und derjenigen des Endes ist.

Eine strenge, auf den Feldgleichungen beruhende Theorie von den Vorgängen am Ende einer Leitung zu geben, ist sehr schwierig; nicht einmal für den Fall eines einzelnen Drahtes von kreisförmigem konstanten Querschnitt ist dieses Problem gelöst. Für einen Leiter, dessen Querschnitt nach dem freien Ende hin wie derjenige eines gestreckten Rotationsparaboloides abnimmt, hat *M. Abraham*¹⁰³⁾ versucht, die stehenden Wellen zu behandeln, welche sich in der Nähe des freien Endes ausbilden. Die Vorgänge stehen in einer gewissen Analogie zu den Luftschwingungen am offenen Ende einer Röhre, mit dem Unterschiede jedoch, daß die Strahlung nicht, wie dort, vom Ende aus, sondern von allen Elementen der Leitung aus seitlich in den Raum gesandt wird.

102) *P. Drude*, Ann. d. Phys. 60 (1897), p. 1.

103) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 32.

(Abgeschlossen im Juli 1906; spätere Literatur konnte nur teilweise berücksichtigt werden.)



Verlag von B. G. Teubner

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348764

Wissenschaft und

L.

Sammlung von Einzel

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen.

8. In Leinwand geb.

Die Sammlung will die in den verschiedenen Wissensgebieten durch rastlose Arbeit gewonnenen Erkenntnisse von umfassenden Gesichtspunkten aus im Zusammenhang miteinander betrachten. Die Wissenschaften werden in dem Bewußtsein ihres festen Besitzes in ihren Voraussetzungen dargestellt, ihr pulsierendes Leben, ihr Haben, Können und Wollen aufgedeckt. Andererseits aber wird in erster Linie auch auf die durch die Schranken der Sinneswahrnehmung und der Erfahrung überhaupt bedingten Hypothesen hingewiesen.

Bisher erschien in dieser Sammlung:

I. Band: **Wissenschaft und Hypothese.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München. 2. Aufl. 1906. Geb. *M.* 4.80.

II. Band: **Der Wert der Wissenschaft.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von E. und H. Weber-Straßburg i. E. Mit einem Bildnis des Verfassers. 1906. Geb. *M.* 3.60.

III. Band: **Mythenbildung und Erkenntnis.** Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. Von G. F. Lipps-Leipzig. 1907. Geb. *M.* 5.—

IV. Band: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola-Pavia. Deutsch von H. Liebmann-Leipzig. Mit 76 Figuren. 1908. Geb. *M.* 5.—

V. Band: **Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels-Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer und 43 Illustrationen. 1902. Geb. *M.* 6.80.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von M. Planck-Berlin. 2. Auflage. 1908. Geb. *M.* 6.—

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert-Göttingen. Mit zahlreichen Figuren. 3. durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. 1909. Geb. *M.* 6.—

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Allgemein wissenschaftliche Vorträge. Von P. Volkmann-Königsberg i. Pr. 2. Auflage. 1910. Geb. *M.* 6.—

X. Band: **Wissenschaft und Religion.** Von E. Boutroux-Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg i. E. 1910. Geb. *M.* 6.—

XI. Band: **Probleme der Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-Göttingen. 2 Teile. 1910. Geb.

I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.** *M.* 4.—

II. Teil: **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.** [Unter der Presse.]

XII. Band: **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp-Marburg. 1910. Geb.

Unter der Presse:

VIII. Band: **Das Wissen unserer Zeit in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von E. Picard-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München.

Unter der Presse:

- Band II. Teil 2. Elliptische Funktionen. Von **J. Harkness** in Montreal (Canada) und **W. Wirtinger** in Wien. — Automorphe Funktionen. Von **R. Fricke** in Braunschweig.
- III. - 1. Konfigurationen der projektiven Geometrie. Von **E. Steinitz** in Berlin. — Darstellende Geometrie. Von **E. Papperitz** in Freiberg (Sa.). — Die verschiedenen Koordinatensysteme. Von **E. Müller** in Wien.
- IV. - 1. Dynamische Probleme der Maschinentechnik. Von **K. Heun** in Karlsruhe und **R. v. Mises** in Straßburg i. E.
- IV. - 2. Fertigungsprobleme im Maschinenbau. Von **Th. v. Kármán** in Göttingen.
- IV. - 2. Theorie des Erddrucks. Von **H. Reißner** in Aachen. — Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme: Das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von **P. u. T. Ehrenfest** in Petersburg.
- VI. - 2. Theorie der Finsternisse. Von **F. K. Ginzel** in Berlin und **A. Wilkens** in Hamburg. — Chronologie. Von **F. K. Ginzel** in Berlin. — Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Von **G. Berglotz** in Leipzig. — Die Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem. Von **G. v. Niessl** in Brünn.

Band V: Physik, in 3 Teilen. Redigiert von **A. Sommerfeld** in München.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

Vorwort zu Band V von **A. Sommerfeld** in München.
Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 1.

A. Einleitung.

- *1. Maß und Messen: **K. Runge** in Göttingen.
*2. Gravitation: **J. Zenneck** in Braunschweig.

B. Thermodynamik.

- *3. Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik: **G. H. Bryan** in Bangor, Wales.
*4. Dissipation der Energie, insbesondere Wärmeleitung: **E. W. Hobson** - Cambridge u. **H. Dießelhorst** - Berlin.
*5. Technische Wärmetheorie: **M. Schröter** in München und **L. Prandtl** in Göttingen.

C. Molekularphysik.

- *6. Chemische Atomistik: **F. W. Hinrichsen** in Charlottenburg und **L. Mamlock** in Berlin nebst zwei Beiträgen von **E. Study** in Bonn.
*7. Kristallographie: **Th. Liebisch** in Berlin, **A. Schoenflies** in Königsberg i. Pr. und **O. Mügge** in Göttingen.
*8. Kinetische Theorie der Materie: **L. Boltzmann** (†) und **J. Nabl** in Wien.
*9. Kapillarität: **H. Minkowski** in Göttingen.
10. Die Zustandsgleichung mit besonderer Berücksichtigung graphischer Methoden: **H. Kamerlingh-Onnes** in Leiden.
11. Physikalische und Elektrochemie: **J. H. van't Hoff** in Berlin.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 2.

D. Elektrizität und Optik.

Physikalische Grundlegung der Elektrizitätslehre.

- *12. Standpunkt d. Fernwirkung, die Elementargesetze: **R. Reiff** in Stuttgart und **A. Sommerfeld** in München.
*13. Maxwells elektromagnetische Theorie: **H. A. Lorentz** in Leiden.
*14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektromagnetische Theorie: **H. A. Lorentz** in Leiden.

Mathematische Spezialausführungen zur Elektrizitätslehre

- *15. Elektrostatik und Magnetostatik: **R. Gans** in Tübingen.
*16. Beziehungen zwischen elektrostatischen und magnetostatischen Zustandsänderungen einerseits und elastischen u. thermischen andererseits: **F. Pockels** in Heidelberg.
*17. Stationäre und quasi-stationäre Felder: **P. Debye** in München.
*18. Elektrische Schwingungen: **M. Abraham** in Mailand.
19. Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme und Magnetismus: **H. Dießelhorst** in Berlin. — Magnetische Eigenschaften der Körper von **H. du Bois** in Berlin.
20. Elektrotechnik: **Fr. Emde** in Berlin.

III. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 3.

Physikalische Grundlegung der Optik.

- *21. Ältere Theorie: **A. Wangerin** in Halle a. S.
*22. Elektromagnetische Lichttheorie: **W. Wien** in Würzburg. Mit einem Beitrag von **H. A. Lorentz** in Leiden über magneto-optische Phänomene.
*23. Theorie der Strahlung: **W. Wien** in Würzburg.

Mathematische Spezialausführungen zur Optik.

24. Strahlenoptik und optische Instrumente: **S. Finsterwalder** in München.
25. Wellenoptik (Interferenz und Beugung): **M. Laue** in München.
26. Kristalloptik: **F. Pockels** in Heidelberg. [München].
27. Gesetze der Spektralanalyse. Von **C. Runge** in Göttingen.

E. Schlußwort.

28. Allgemeine physikalische Anschauungen und Methoden: **A. Sommerfeld** in München und **G. Mie** in Greifswald.

Register zu Band V.

VERLAG VON **B. G. TEUBNER** IN LEIPZIG UND BERLIN.

Über das System der Fixsterne.

Aus populären Vorträgen.

Von Professor **Dr. K. Schwarzschild**,

Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums bei Potsdam.

Mit 13 Figuren im Text. [44 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. M. 1.—

Wie unzweifelhaft die Zusammengehörigkeit der Fixsterne innerhalb eines großen organischen Systems durch die neueste Entwicklung der astronomischen Forschung geworden ist, das soll vor allen Dingen aus den hier vereinigten populären Vorträgen hervorgehen, die bei verschiedenen Gelegenheiten gehalten sind, aber im wesentlichen immer dasselbe Thema variieren. Ein erster einleitender Vortrag behandelt das Fernrohr und die Grenzen seiner Leistungsfähigkeit.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348764

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301660