



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301666





# ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU  
BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN  
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLEICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . .	} RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG. H. BURKHARDT † (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE IN BRAUN- SCHWEIG UND E. HILB IN WÜRZBURG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . . . .	
— III: GEOMETRIE, IN 4 TEILEN . . . . .	} W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN BASEL.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN. . . . .	
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN . . . . .	} F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER. A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . .	
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . .	} PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT (1899–1905) IN GÖTTINGEN. K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916) UND S. OPPENHEIM IN WIEN.
— VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK . . . . .	
	} H. E. TIMERDING IN BRAUNSCHWEIG.

BAND VI 2 HEFT 7.

KURT LAYES IN CHIKAGO (ILL.). VI 2. 16: DIE SATELLITEN . . . . .	S. 809
J. KAUSCHINGER IN LEIPZIG. VI 2. 17: BESTIMMUNG UND ZUSAMMENHANG DER ASTRONO- MISCHEN KONSTANTEN . . . . .	S. 844

AUSGEGEBEN AM 22. JULI 1920.



xxx  
408

VERLAG UND DRUCK VON B.G. TEUBNER IN LEIPZIG 1920.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II<sub>1</sub>, Heft 1–9 (vollständig); Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1–4; Bd. III<sub>1</sub>, Heft 1–3; Bd. III<sub>2</sub>, Heft 1–6; Bd. III<sub>3</sub>, Heft 1–4; Bd. IV<sub>1I</sub>, Heft 1–4 (vollständig); Bd. IV<sub>1II</sub>, Heft 1–3; Bd. IV<sub>2I</sub>, Heft 1–4 (vollständig); Bd. IV<sub>2II</sub>, Heft 1–6 (vollständig); Bd. V<sub>1</sub>, Heft 1–5; Bd. V<sub>2</sub>, Heft 1–3; Bd. V<sub>3</sub>, Heft 1–3; Bd. VI<sub>1A</sub>, Heft 1–3; Bd. VI<sub>1B</sub>, Heft 1–4; Bd. VI<sub>2</sub>, Heft 1–7.

Aufgabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtanstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck - München, O. Hölder - Leipzig, F. Klein - Göttingen, A. Krazer - Karlsruhe,  
V. v. Lang - Wien, M. Planck - Berlin H. v. Seeliger - München, W. Wirtinger - Wien

steht der Redaktion, die aus den Herren

R. Fricke - Braunschweig, Ph. Furtwängler - Wien, E. Hilb - Würzburg, F. Klein - Göttingen, W. Fr. Meyer - Königsberg  
H. Mohrmann - Basel, C. H. Müller - Hannover, S. Oppenheim - Wien, A. Sommerfeld - München  
und H. E. Timerding - Braunschweig

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie beteiligen sich ferner die Herren

<b>I. Band:</b>	O. Szász - Frankfurt a. M.	O. Fischer (†)	L. Prandtl - Göttingen
W. Ahrens - Rostock	O. Tooplitz - Kiel	L. Föppl - Dresden	R. Reiff (†)
P. Bachmann (†)	E. Vessiot - Lyon	Ph. Forchheimer - Graz	C. Runge - Göttingen [a. M.]
J. Bauschinger - Leipzig	A. Voss - München	Ph. Furtwängler - Wien	A. Schoenflies - Frankfurt
G. Bohlmann - Berlin	A. Wangerin - Halle	M. Grübler - Dresden	M. Schröter - München
L. v. Bortkewitsch - Berlin	E. v. Weber - Würzburg	M. Grüning - Hannover	R. Seeliger - Greifswald
H. Burkhardt (†)	Fr. A. Willers - Charlottenburg	E. Hellinger - Frankfurt a. M.	A. Sommerfeld - München
E. Czuber - Wien	W. Wirtinger - Wien	L. Heeneberg - Darmstadt	E. Study - Bonn
W. v. Dyck - München	E. Zermelo - Zürich	K. Heun - Karlsruhe	A. Wangerin - Halle
D. Hilbert - Göttingen		G. Jung - Mailand	W. Wien - Würzburg
O. Hölder - Leipzig	<b>III. Band:</b>	Th. v. Kármán - Aachen	J. Zenneck - München
G. Landsberg (†)	H. Beck - Bonn	F. Klein - Göttingen	
R. Mehmke - Stuttgart	G. Berkhan (†)	A. Kriloff - Petersburg	<b>VI, 1. Band:</b>
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.	L. Berwald - Prag	H. Lamb - Manchester	R. Bourgeois - Paris
E. Netto (†)	L. Berzolari - Pavia	A. E. H. Love - Oxford	G. H. Darwin (†)
V. Pareto - Lausanne	G. Castelnuovo - Rom	R. v. Mises - Berlin	F. Exner - Wien
A. Pringsheim - München	M. Dehn - Breslau	C. H. Müller - Hannover	S. Finsterwalder - München
C. Runge - Göttingen [a. M.]	F. Dingeldey - Darmstadt	L. Prandtl - Göttingen	Ph. Furtwängler - Wien
A. Schoenflies - Frankfurt	F. Enriques - Bologna	G. Prange - Hannover	F. R. Helmert (†)
H. Schubert (†)	G. Fano - Turin	H. Reiffner - Charlottenburg	S. Hough - Kapstadt
D. Schwanoff - St. Petersburg	P. Heegaard - Kopenhagen	A. Schoenflies - Frankfurt	H. Meißner - Bremen
E. Study - Bonn	J. Helmslev - Kopenhagen	P. Stückel (†) [a. M.]	W. Moebius - Leipzig
K. Th. Vahlen - Greifswald	G. Kohn - Wien	O. Tedone - Genua	P. Pizzetti - Pisa
H. Weber (†)	G. Kowalewski - Prag	H. E. Timerding - Braunschweig	C. Reinhardt (†)
A. Wiman - Upsala	H. Liebmann - München	A. Timpe - Berlin	A. Schmidt - Potsdam
	R. v. Lillenthal - Münster i. W.	A. Voss - München	E. v. Schweidler - Innsbruck
	G. Loria - Genua	G. T. Walker - Simla (Indien)	W. Trubert - Wien
	H. v. Mangoldt - Danzig	K. Wieghardt - Wien	E. Wiechert - Göttingen
	W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.	G. Zemplén (†)	
	H. Mohrmann - Basel		<b>VI, 2. Band:</b>
	E. Müller - Wien	<b>V. Band:</b>	E. Anding - Gotha
	E. Papperitz - Freiberg i. S.	M. Abraham - Stuttgart	J. Bauschinger - Leipzig
	Th. Pöschel - Prag	L. Boltzmann (†)	A. Bemporad - Catania
	K. Rohn - Leipzig	M. Born - Frankfurt a. M.	A. Brill - Frankfurt a. M.
	H. Rothe - Wien	G. H. Bryan - Bangor (Wales)	E. W. Brown - New-Haven
	E. Salkowski - Hannover	P. Debye - Zürich	A. v. Brunn - Danzig
	G. Scheffers - Charlottenburg	P. S. Epstein - München	C. Ed. Caspari - Paris
	A. Schoenflies - Frankfurt	S. Finsterwalder - München	F. Cohn - Berlin
	C. Segre - Turin [a. M.]	R. Gans - La Plata	R. Emden - München
	J. Sommer - Danzig	K. Herzfeld - München	F. K. Ginzel - Berlin
	F. Stückel (†)	F. W. Hinrichsen (†)	P. Guthnik - Berlin
	O. Staude - Rostock	E. W. Hobson - Cambridge	J. v. Heppner - Wien
	E. Steinitz - Breslau	H. Kamerlingh-Onnes - Leiden	G. Herglotz - Leipzig
	H. Tietze - Erlangen	W. H. Keesom - Leiden	J. Holsteck - Wien
	A. Voss - München	M. v. Laue - Berlin	H. Kobold - Kiel
	R. Weitzingboeck - Graz	W. Lenz - München	Th. Kottlar - Wien
	M. Zacharias - Berlin	Th. Liebisch - Berlin	K. Laves - Chicago
	H. G. Zeuthen - Kopenhagen	H. A. Lorentz - Haarlem	J. Lense - Wien
	K. Zindler - Innsbruck	L. Lamlock - Berlin	G. v. Niessl - Wien
		G. Mie - Halle	S. Oppenheim - Wien
		H. Minkowski (†)	K. Schwarzschild (†)
	<b>IV. Band:</b>	O. Mügge - Göttingen	K. Sundman - Helsingfors
	M. Abraham - Stuttgart	J. Nabl - Wien	E. T. Whittaker - Edinburgh
	P. Franz - Berlin	W. Pauli - München - Wien	A. Wilkens - Breslau
	C. n. T. Ehrenfest - Leiden	F. Pockels (†)	C. W. Wirtz - Kiel
	S. Finsterwalder - München		H. v. Zeipel - Upsala

## Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a/S., Wettiner Straße 17, zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.



11-348777



~~III 16677~~

## VI 2. 16. DIE SATELLITEN.

VON

**KURT LAVES**

IN CHIKAGO (ILL.).

### Inhaltsübersicht.

**Einleitung:** Überblick.

#### A. Die empirische Methode. 1610—1760.

1. Das Jupitersystem
2. Das Saturnsystem.

#### B. Die analytische Methode. 1760 bis zur Gegenwart.

3. Einführung in die *Lagrange-Laplacesche* Theorie der Galileischen Satelliten und Neuentdeckungen.
4. *Bessels* Untersuchungen über das Saturnsystem.
5. Die Auffindung der Satelliten von Uranus, Neptun und Mars.
6. Die Störungen in einem Satellitensystem; Bezeichnungsweise.
7. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse des Hauptplaneten.
8. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse der Ringe.
9. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten
10. Die Störungsfunktion *R*.
11. Die säkularen Ungleichheiten der Knoten und Neigungen.
12. Die Integrale der Gleichungen (12) für die Spezialsysteme:
  - α) Das Jupitersystem: Die vier *Galileischen* Satelliten.
  - β) Das Saturnsystem:
    - a) *Japetus*,
    - b) *Titan* und *Rhea*,
    - c) *Hyperion*,
    - d) *Dione*, *Tethys*, *Enceladus* und *Mimas*,
    - e) *Phöbe* und *Themis*.
  - γ) Die Satelliten des Mars, Uranus und Neptun.
13. Die säkularen und langperiodischen Ungleichheiten der Exzentrizitäten, der Längen der Perizentren und mittleren Längen,
  - α) Das Jupitersystem:
    - a) Die vier *Galileischen* Satelliten,
    - b) Die übrigen Satelliten.

- β) Das Saturnsystem:
- a) Japetus, Titan und Rhea; Phöbe und Themis,
  - b) Die Satellitenpaare, bei denen Librationsglieder auftreten:  
Hyperion-Titan,  
Enceladus-Dione,  
Tethys-Mimas.
- γ) Die übrigen Satellitensysteme.
14. Die kurzperiodischen und die von der Sonne herrührenden Ungleichheiten.
15. Die Bestimmung der Konstanten der Satellitensysteme.

## Literatur.

### Lehrbücher und Monographien.

#### Lehrbücher.

- P. S. Laplace*, *Traité de Mécanique céleste*, t. IV, Paris 1805 = *Oeuvres* 4 (1880), p. 1—190.
- F. Tisserand*, *Traité de Mécanique céleste*, Paris 1896, t. IV, chp. 1—9.

#### Das Jupitersystem.

- J. Bailly*, *Essai sur la théorie des satellites de Jupiter*, Paris 1766.
- J. Lagrange*, *Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter*. *Oeuvres* VI, p. 67 ff.
- J. Delambre*, *Tables des satellites de Jupiter*. *Conn. des temps pour 1791* = *Lalande Astr.* I (1792), p. 236.
- M. Cl. de Damoiseau*, *Tables éclipiques des satellites de Jupiter*. Paris Bur. Long. tabl. astr. V (1836), und deren Fortsetzungen von *D. P. Todd*: A continuation of *de Damoiseaus tables of the satellites of Jupiter*. Wash. American Bureau of Navig. 1876 (for 1880—1900), und *L. Pottier*, *Par. Bull. astr.* 1 (1896), p. 67 u. 107 (für 1900—1920).
- C. L. Souillart*, *Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter I*. *Lond. Astr. Soc. Mem.* 45 (1879).
- *Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter II*. *Paris Mém.* 30 (1887).
- A. Marth*, *Formules for positions of satellites and correction of elements*. *Lond. Astr. Soc. Month. Not.* 47 (1887), p. 333.
- *Data for computing the positions of satellites of Jupiter with Tables of the inequalities*. *Lond. Astr. Soc. Month. Not.* 51 (1891), p. 505.
- W. de Sitter*, *Discussion of Heliometer observations of Jupiters satellites*. Groningen (Dissertation) 1901.
- *Determination of inclin. and nodes of satellites of Jupiter*. *Cape obs. ann.* XII, Part 3 (1906).
- *Libration of the 3 inner satellites of Jupiter*. *Groningen Laboratory Nr.* 17 (1907).
- *On the masses and elements of Jupiters satellites and the mass of the system*. *Amsterdam Akad.* 10 (1908).
- B. Cookson*, *Determination of mass of Jupiter and orbits of satellites*. *Cape obs. ann.* XII, Part 2 (1906).
- *Determination of the elements of the orbits of Jupiters satellites*. *Cape obs. ann.* XII, Part 4 (1907).

- R. A. Sampson*, A discussion of the eclipses of Jupiters satellites 1878—1893. Harvard obs. ann. 52, Part 2 (1910).  
 — Tables of the 4 great satellites of Jupiter. Durham obs., 1910, p. 1—299.  
*F. Cohn*, Bestimmung der Bahnelemente des V. Jupitermondes. Astr. Nachr. 142 (1897), p. 289.  
*H. Struve*, Bestimmung der Säkularbewegung des V. Jupitermondes. Berlin Ber. 1906, p. 790.  
*A. Wilkens*, Über die Säkulargleichungen der vier helleren Jupitermonde. Astr. Nachr. 201 (1915), p. 85.

## Das Saturnsystem.

- F. W. Bessel*, Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seine vier Trabanten, Königsbg. Archiv für Naturw. u. Math. I (1812), p. 113 = Abh. I, p. 110. Zitiert als *Bessel I*.  
 — Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnsatelliten, Astr. Nachr. 9 (1831), p. 1, samt erster Fortsetzung Astr. Nachr. 9. (1831), p. 381 u. zweiter Fortsetz. Astr. Nachr. 11 (1834), p. 17 = Abh. I, p. 127, 147 u. 148. Zitiert als *Bessel II*.  
 — Bestimmung der Lage und der Größe des Saturnringes und der Figur des Saturn, Astr. Nachr. 12 (1835), p. 153 = Abh. I, p. 150. Zitiert als *Bessel III*.  
 — Theorie des Saturnsystems, Astr. Nachr. 28 (1849), p. 1, 49, 321 u. 371 = Abh. I, p. 160. Zitiert als *Bessel IV*.  
*H. Struve*, Beobachtungen der Saturnstrabanten am 15" Refraktor. Poulkova obs. Suppl. 1 (1888).  
 — Beobachtungen am 30zölligen Refraktor. Poulkova obs. (2) XI (1898).  
*W. Meyer*, Recherches sur Saturne, ses anneaux et ses satellites. Mém. Société phys. de Genève 27 (1881), und Le système de Saturne, ibid. 30 (1884). Zitiert als *Meyer (Genève)*.  
*K. Bohlin*, Sur les éléments de l'orbite de Téthys. Acad. des Sciences de Suède (1885).  
*A. Hall*, The six inner satellites of Saturn. Wash. obs. 1883, App. 1 (1886).  
 — The orbit of Japetus. Wash. obs. 1882, App. 1 (1885).  
*H. Struve*, Neue Bestimmung der Libration von Mimas und Tethys. Astr. Nachr. 162 (1903), p. 325.  
*F. Tisserand*, Sur un cas remarquable du problème des perturbations. Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 425.  
 — Sur les mouvements des apsides des satellites de Saturn. Ann. Toulouse 2 (1886).  
 — Sur le déplacement séculaire du plane de Japetus. Ann. Toulouse 2 (1886).  
*S. Newcomb*, On the motion of Hyperion (a new case in the celestial mechanic). Wash. Astron. Pap. 3 (1884).  
*G. W. Hill*, On the motion of Hyperion and the mas of Titan. Astron. Journal 8 (1888), p. 57.

## Die Satellitensysteme von Mars, Uranus und Neptun.

- H. Struve*, Bestimmung der Abplattung und des Äquators von Mars. Astr. Nachr. 138 (1895), p. 217.  
*S. Newcomb*, Discussion of observations of the sat. of Uranus and Neptune. Wash. obs. 1873, App. 1 (1875) = Wash. Astr. Pap. 1.  
*F. Tisserand*, Déplacements séculaires de l'équateur d'une planète. Paris Bull. astr. 11 (1814), p. 337.  
*H. Struve*, Beobachtungen des Neptuntrabanten am 30zölligen Refraktor. St. Pét. mém. 42 (1894), Nr. 4.

### Einleitung.

Die Entwicklung der Satellitentheorie zerfällt der Zeit nach in zwei Abschnitte:

1. Die Zeit vor der Einführung des *Newtonschen* Gravitationsgesetzes 1610—1760,
2. Die Zeit von 1760 bis zur Gegenwart.

Im ersten Abschnitt werden an der Hand der Finsternisbeobachtungen der vier *Galileischen* Satelliten auf empirischem Wege die Hauptungleichheiten in der Länge bei der Bewegung dieser Satelliten aufgefunden. Die Schwierigkeit, die Ungleichheiten in der Breite zu erschließen, führt vorwiegend zum Aufgeben der empirischen Methode. Dieses geschieht etwa um die Mitte des 18. Jahrhunderts. Seit dem Eintreten von *Lagrange* und *Laplace* beherrscht die analytische Methode das Feld und gewinnt in der *Laplaceschen* Satellitentheorie der vier *Galileischen* Trabanten eine scheinbar endgültige und abschließende Darstellung.

Im Saturnsystem geben *Bessels* heliometrische Feinmessungen die Basis für seine grundlegende Theorie der Saturntrabanten. Wesentliche Weiterführungen der letzteren Theorie sind einmal in der *Newcombschen* Theorie des Hyperion, und andererseits in *H. Struves* systematischen Untersuchungen des Gesamtsystems zu sehen.

Die auf der *Laplaceschen* Theorie aufgebauten Tafeln der Finsternisse von *Delambre* und *Damoiseau* bringen infolge schwerwiegender Inkonsistenzen die Forschung im Jupitersystem zu einer langjährigen Stagnation. Durch *Souillarts* Weiterführung der *Laplaceschen* Theorie und *Marths* vielseitige Bemühungen und endlich durch die systematisch angestellten Feinmessungen von *Gill*, *Finlay*, *de Sitter*, *Cookson*, ferner *Pickering* und *Sampson* ist die Basis für eine spätere moderne Theorie der vier *Galileischen* Trabanten geschaffen worden.

#### A. Die empirische Methode. 1610—1760.

1. Das Jupitersystem. Die vier ersten Trabanten des Jupiter wurden von *Galilei*<sup>1)</sup> am 7. Januar 1610, von *Simon Mayer*<sup>2)</sup> 3) unab-

Für die ältere Literatur vgl.: *Houzeau et Lancaster*: Bibliogr. générale de l'Astr., Bruxelles 1882. Vol. II: 1388—1406; *R. Grant*, History of Physical. Astr., London 1855, p. 76—96, u. *R. Wolf*, Handbuch der Astr., ihrer Geschichte u. Literatur, Bd. I u. II, Zürich 1890 u. 1892.

1) *Sidereus Nuntius*, Opere di *Galileo* 2, p. 5, engl. Ausgabe von *Carlos* 1880.

2) *Oudemans et Bosscha*, *Galilée et Marius*, Arch. neerl. Scienc. VIII (1903).

3) *J. Klug*, *S. Marius* aus Guggenhausen und *Galilei*. München Akad. Abh. 2 (1902), p. 385.

hängig davon am 8. Januar entdeckt. Aus den von *Galilei* noch ungenau bestimmten Umlaufzeiten und Distanzen leitete *Kepler* die Gültigkeit seines dritten Gesetzes für das Jupitersystem ab. 1675 entdeckte *Olaus Römer* aus den Verfinsterungen des I. Satelliten die endliche Fortpflanzungszeit des Lichtes. Die Bestimmung der geographischen Längen<sup>4)</sup> wurde durch die Beobachtung der Verfinsterungen des I. Satelliten wesentlich verbessert und dadurch die Aufmerksamkeit der Astronomen diesen Beobachtungen und ihren tabellarischen Vorausbestimmungen zugewendet. Solche Tabellen werden vor allen von *J. D. Cassini*<sup>5)</sup>, *Bradley*<sup>6)</sup> und *Wargentin*<sup>7)</sup> veröffentlicht. Während *Cassini* nur beim I. Satelliten die Lichtgleichung ansetzt, weil die unregelmäßigen Bewegungen der andern Trabanten nicht dadurch behoben zu werden schienen, wird bei den Tafeln von *Bradley* und *Wargentin* sowohl auf die Lichtgleichung Rücksicht genommen, wie auch schon die große Ungleichheit von 437 Tagen in Rechnung gestellt wird. Dieser große Fortschritt wird gleichzeitig und unabhängig von beiden Forschern erreicht, doch gebührt *Wargentin*, der Zeit der Publikation nach, der Vorrang. Spätere Neuauflagen der *Wargentinschen* Tafeln stellen zwei langperiodische Ungleichheiten beim III. Satelliten in die Berechnungen ein. Die starke Exzentrizität der Bahn des IV. Satelliten wurde von *Bradley* zuerst klar erkannt, und von *Maraldi II*<sup>8)</sup> wird der Wert seiner Mittelpunktsgleichung schon sehr genau angegeben. Damit fiel endlich das eine der *Cassinischen* Axiome, daß alle Trabantenbahnen Kreisgestalt haben. Das andere Axiom, wonach die Bahnen gleiche und konstante Neigung im Raume haben sollten, wird ebenfalls als durch die Beobachtungen nicht bestätigt erkannt. Die Neigung des IV. Satelliten<sup>9)</sup> zur Jupiterbahn ist kleiner als diejenige der anderen Satellitenbahnen; bei scheinbarer konstanter Neigung zur Jupiterbahn bewegt sich der Knoten der Bahn in direkter Richtung auf der Jupiterbahn. Zu dieser wichtigen Erkenntnis trat die andere, daß die Neigungen der

4) *J. D. Reuß*, Repert. commentationum a societatis literariis editarum. Göttingen 1804, tom. 5 (Astron.), p. 258.

5) *J. D. Cassini*, Comparaison des satellites de Jupiter et de Saturne. Paris hist. 1730.

6) *J. Bradley*, Indication de la période de 437 jours des trois premiers satellites de Jupiter, Lond. Phil. Trans. 1726.

7) *P. W. Wargentin*, Tabulae pro calculandis eclipsibus satellitum Jovis. Acta Upsal. 1741.

8) *J. D. Maraldi*, Vgl. Artikel in Paris hist. (2) mém. 1 und 2 von 1732 an.

9) —, Mouvement des noeuds du 4<sup>ième</sup> satellite. Paris hist. (2) mém. 1758.

drei innern Satellitenbahnen variabel sind und nach *Maraldi*<sup>10)</sup> durch die Annahme einer Libration des Knotens um eine mittlere Lage dargestellt werden. Die Periode dieser Librationen bei den einzelnen Satelliten ist verschieden; sie wächst mit dem Abstände vom Zentralkörper. Diese allgemeinen Andeutungen werden genügen, um anzudeuten, wie außerordentlich erfolgreich die heuristische Methode bei der Diskussion der zahlreichen und relativ sehr genauen Verfinsterungsbeobachtungen gewesen ist. Trotzdem *Bradley*, durchaus klarblickend, die endgültige Aufklärung nur auf der Basis des *Newton*-schen Grundgesetzes schon um 1745 voraussagt, bedarf es doch noch einer Reihe wichtiger Vorarbeiten, bis hierfür der Boden reif ist. Dahin kann man *Clairauts* wichtige Arbeiten über die Mondbewegung<sup>11)</sup> und die Gestalt der Erde<sup>12)</sup>, ferner *Eulers*<sup>13)</sup> Untersuchung über die Apsidenbewegung eines Satelliten rechnen.

2. Das Saturnsystem. Durch *Galileis*<sup>14)</sup> Entdeckung der unregelmäßigen Gestalt des Saturn war die Anregung geboten, diesen Planeten intensiver mit den neugeschaffenen optischen Mitteln zu beobachten. Die Natur des Ringsystems wurde durch *Huygens*<sup>15)</sup> scharfsinnige Erklärung „annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato“ erschlossen. Das hiernach vorausgesagte Verschwinden der Ringe und ihre Wiedererscheinung wurde durch die Beobachtung bestätigt, und eine erste approximative Bestimmung der Neigung der Ringebene zur Ekliptik ermöglicht. Die Entdeckung des größten der Saturnsatelliten, Titan, durch *Huygens*<sup>16)</sup> fällt in das Jahr 1655, in dem auch das Verschwinden der Ringe eintrat. In den Jahren von 1671 bis 1684 gelang es *Cassini I*, vier weitere Trabanten zu entdecken, wovon der als zweiter entdeckte Japetus in nahezu dreifachem Abstände Saturn—Titan erst in 79 Tagen den Zentralkörper umkreist. Die drei andern Satelliten sind Rhea, Dione und Tethys, in den Abständen 9, 6 und 5, wobei der Radius des Saturnkörpers als Einheit genommen ist. Ein volles Jahrhundert sollte verstreichen, ehe die Vervollkommnung der astronomischen Instrumente weitere Neu-

10) *J. D. Maraldi*, Variation de l'inclinaison et libration des noeuds du second satellite. Paris hist. (2) mém. 1768.

11) *Clairaut*, L'orbite de la Lune. Paris hist. (2) mém. 1743, p. 17, u. 1748 p. 421.

12) *Clairaut*, Nouvelle théorie de la figure de la Terre. Paris 1743.

13) *Euler*, Du mouvement des apsides des satellites de Jupiter. Berl. hist. 1773, p. 311.

14) *Galileo*, Opere T. 2; édit. Padua.

15) *Huygens*, Systema Saturnium. Hagae 1659.

16) *Huygens*, De Saturni luna observatio nova. Hagae 1656.

entdeckungen möglich machte. Die in dieser Zeit angestellten sehr spärlichen Beobachtungen des Durchgangs durch die Ringebene sind von *Bessel*<sup>17)</sup><sup>18)</sup> zusammengestellt und diskutiert, sowie auch alle mit Bezug auf die Satelliten gemachten Beobachtungen.

## B. Die analytische Methode. 1760 bis zur Gegenwart.

3. Einführung in die Lagrange-Laplacesche Theorie der Galileischen Satelliten und Neuentdeckungen. Der erste Schritt zur Einführung des *Newtonschen* Gravitationsgesetzes in die Satellitentheorie geschah durch *Newton*<sup>19)</sup> selbst, der die Bewegung der Bahnebene des IV. Satelliten auf der Jupiterbahn durch die störende Wirkung der Sonne zu erklären suchte. Hierbei ergab sich ihm aber eine retrograde Bewegung statt der durch die Beobachtung erwiesenen direkten. Der Grund für diese Differenz lag, wie sich erst viel später herausstellte, in der Vernachlässigung der störenden Wirkungen des III. Satelliten und der Abplattung. Der nächste Versuch in dieser Richtung war *Baillys*<sup>20)</sup><sup>21)</sup><sup>22)</sup> Übertragung der *Clairautschen* Mondtheorie auf die Jupitersatelliten. Der Erfolg seiner Arbeiten war, daß er die große Ungleichheit von 437 Tagen wirklich analytisch darstellte und durch geschickte Kombination die Masse des II. Satelliten bestimmte. Dem spezifischen Charakter des Problems der Jupitersatelliten war *Bailly* aber noch nicht nahe gekommen, erst *Lagrange* war dieses vorbehalten. *Lagrange*<sup>23)</sup> gibt in seiner Preisarbeit die Differentialgleichungen der Bewegungen der Satelliten unter Berücksichtigung der gegenseitigen Anziehungen, der Attraktion der ellipsoidalen Jupitermasse und der Sonnenanziehung. Indem er diese Gleichungen zunächst unter Vernachlässigung der Exzentrizitäten und Neigungen integriert, kommt er auf die Ungleichheit von 437 Tagen bei den Verfinsterungen der drei innern Satelliten. Bei der Berücksichtigung der Exzentrizitäten und Neigungen stößt er auf die nämliche Schwierigkeit, die *Euler* und *Lagrange* bei der Theorie von

17) *F. W. Bessel* III.

18) *F. W. Bessel* II.

19) *Newton*, Principia, lib. III prop. 23.

20) *Bailly*, Essai sur la théorie des satellites de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1766.

21) *Bailly*, La cause de la variation de l'inclinaison de l'orbite du second satellite de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1765.

22) *Bailly*, Mouvement des noeuds et variation de l'inclinaison des satellites de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1766.

23) *Lagrange*, Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter. Turin Mel. 3 (1766) = Oeuvr. 6, p. 67.

Jupiter und Saturn erfahren hatten. *Lagrange* verfährt hier ähnlich, wie er es dort getan hat. Er erhält so für jeden Satelliten vier Mittelpunktsgleichungen und vier Breitengleichungen. Diese letztern denkt er sich geometrisch nachgebildet durch vier Ebenen, wovon sich die erste auf der Jupiterbahn bewegt, die zweite auf der ersten, die dritte auf der zweiten und die vierte, welche die Bahnebene des Satelliten selber ist, auf der dritten.

Indem aber *Lagrange* die Neigung zwischen Jupiteräquator und Jupiterbahnebene vernachlässigt, bringt er Glieder zum Verschwinden, die sehr charakteristisch bei den Breitenstörungen sind. Diese Lücke wird von *Laplace*<sup>24)</sup><sup>25)</sup><sup>26)</sup> ausgefüllt, der dann vor allem durch seine Untersuchungen, die sich an die Gleichungen  $\mu_1 - 2\mu_2 + 3\mu_3 = 0$  und  $l_1 - 2l_2 + 3l_3 = 180^\circ$  anschließen, die Gesamtheorie auf einen hohen Grad von Vollkommenheit erhebt. Seine Formeln werden von *Boward*<sup>27)</sup> numerisch berechnet, doch bleiben noch die 31 Unbekannten darin stehen: die Elemente und Massen der vier Satelliten, die Abplattung Jupiters und die Neigung und Knotenlänge seines Äquators. Die große Arbeit, die Werte dieser 31 Unbekannten aus mehr als 2000 Finsternisbeobachtungen zu bestimmen, wurde durch *Delambre*<sup>28)</sup> ausgeführt. Eine Revision seiner Tafeln der Finsternisse, die sich auf 6000 Beobachtungen stützte, erschien im Jahre 1804. Die Werte der *Delambreschen* Koeffizienten legte *Laplace* seiner Bestimmung der Massen und Elemente der Satelliten sowie der Bestimmung der Abplattung Jupiters zugrunde. Die 1836 erschienenen *Damoiseauxchen*<sup>29)</sup> Tafeln sind nicht bloß eine Weiterführung der *Delambreschen* Tafeln, sondern suchen eine Verbesserung der Koeffizienten durch Hinzuziehung weiterer Beobachtungen zu geben. Dabei haben eine Reihe von Koeffizienten Änderungen erfahren, während andere ihre ursprünglichen Werte behielten. Da das Verfahren, nach welchem die Änderungen vorgenommen sind, von *Damoiseau* nicht angegeben ist, ist der Zweifel gerechtfertigt, ob alle

24) *Laplace*, Theorie des satellites de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1788—89.

25) *Laplace*, Mécanique céleste, t. 4, livre 8, chp. 1—16 (1805).

26) *Laplace*, Du mouvement des satellites de Jupiter notice historique. Méc. céle., t. 5, livre 16, chp. 5.

27) Zur Geschichte der Entwicklung der Theorie und der Tafeln der Jupitersatelliten vgl. *A. Souchon*, Traité d'astronomie pratique. Paris 1883. Introduction historique: tables du mouvement des satellites de Jupiter.

28) *Delambre*, Table des satellites de Jupiter. Conn. des temps pour 1791 = Lalande Astr. Paris I (1792), p. 236, und Corrections: Conn. des temps pour 1794.

29) *Damoiseau*, Tables écliptiques des satellites de Jupiter. Paris 1836, samt Fortsetzungen von *Todd* u. *Pottier*. Siehe Literatur.

Ungleichheiten durch ein und dasselbe Elementensystem dargestellt werden können. Das stellt aber den ganzen Wert der *Damoiseauschen* Tafeln in Frage. *Bessel*<sup>37)</sup>, *Adams*<sup>36)</sup> und *Souillart*<sup>31)</sup> haben sich in diesem Sinne geäußert.

Von *Souillart*<sup>30) 31)</sup> wird die *Laplacesche* Theorie der *Galileischen* Trabanten wesentlich weiterentwickelt, und *Marth*<sup>32) 33) 34) 35)</sup> veröffentlicht auf der Basis dieser neuen Theorie Tafeln für die Berechnung der Positionen der Trabanten, ohne die eine Benutzung der Beobachtungen für die Theorie unmöglich war. Durch *Marth* angeregt, werden von 1891 Heliometermessungen der Satelliten untereinander von *Gill* und *Finlay* vorgenommen, die durch photographische Aufnahmen ergänzt werden. *De Sitters*<sup>38) 39) 40) 41)</sup> und *Cooksons*<sup>42) 43)</sup> Diskussionen dieser und ähnlicher Beobachtungen sowie solcher in Helsingfors und Pulkova<sup>44)</sup> ergeben zum ersten Male eine zuverlässige Bestimmung der Neigungen und Knoten der Satellitenbahnen sowie

30) *L. C. Souillart*, Théorie analytique des satellites de Jupiter I. Lond. Astr. Soc. Mem. 45 (1879).

31) *L. C. Souillart*, Théorie analytique II. Paris Mém. 30 (1887).

32) *A. Marth*, Researches on satellites. Astr. Nachr. 44 (1856), p. 113.

33) *A. Marth*, On the formulae for computing the apparent positions of a satellite. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 47 (1886), p. 333.

34) *A. Marth*, Data for computing the positions of satellites of Jupiter. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 51 (1891), p. 505, ferner regelmäßige Vorausberechnungen in den laufenden Nummern der Monthly Notices.

35) *A. Marth*, Observatory 1890, Aprilnummer: Über Mikrometermessungen im Jupitersystem.

36) *J. C. Adams*, Repetitions on some numerical calculus to the theory of Jupiter's satellites. Scient. Papers 2 (1875), p. 191.

37) *F. W. Bessel*, Bestimmung der Masse des Jupiter. Astr. Untersuch. 2 (1836), p. 25.

38) *W. de Sitter*, Discussion of Heliometer Observ. of Jupiter's satellite. Groningen 1901 = Cape obs. ann. XII, part 1.

39) *W. de Sitter*, Determination of the inclinations and nodes of satellites of Jupiter. Cape obs. ann. XII part 3 (1906).

40) *W. de Sitter*, Some points in the theory of Jupiter satellites. Amsterdam Akad. Proc. X (1907), p. 95.

41) *W. de Sitter*, Über die Libration der 3 großen Jupitersatelliten (holländisch.) Handl. Ned. Nat. Geneesk. Congress. X 1905, p. 124 = Astr. Lab. Grön. 17 (1907).

42) *B. Cookson*, Determination of the mass of Jupiter and orbits of satellites. Cape obs. ann. XII part 2 (1906).

43) *B. Cookson*, Determination of the elements of the orbits of Jupiter satellites. Cape obs. ann. XII part 4 (1907).

44) *F. Renz*, Phot. Positionen der Jupitertrabanten. 1. und 2. Teil. St. Pét. Acad. mém. VIII (1902).

auch der Koeffizienten gewisser kurzperiodischer Ungleichheiten. *De Sitters* Ergebnisse werden im X. Band der Sitzungsberichte der Akademie von Amsterdam<sup>40)</sup> zusammengefaßt. — Parallel hiermit geht *Sampsons*<sup>45)47)48)</sup> Reduktion der photometrischen Beobachtungen der Jupitersatelliten am Harvard Observatorium, die von *E. Pickering* in systematischer Weise fast ein Vierteljahrhundert lang ausgeführt worden sind. Im Gegensatz zu der alten Beobachtungsmethode gewähren diese photometrischen Beobachtungen eine Genauigkeit wie die von Heliometermessungen.<sup>49)50)</sup> *Sampsons*<sup>46)</sup> Tafeln beruhen lediglich auf dem Vergleich dieser Beobachtungen mit der Theorie von *Souillart*. Der von *de Sitter*<sup>41)</sup> gefundene Betrag von  $0,158^{\circ}$  in der Libration der drei innern Satelliten wird von *Sampson* nicht bestätigt, wie er auch beträchtlich in dem Werte der Dauer dieser Oszillation von *de Sitter* abweicht. Beachtenswert ist der von *de Sitter* geäußerte Wunsch nach einer den dynamischen Bedingungen mehr entsprechenden Theorie der drei inneren Satelliten, bei der der Jupiteräquator als Beziehungsebene benutzt wird. *Griffins*<sup>51)</sup> Arbeit kann voraussichtlich hierfür die Basis bilden. — 1892 wird der V. Satellit von *E. E. Barnard* auf der Licksternwarte aufgefunden. Elementenbestimmungen werden von *F. Cohn*<sup>52)</sup>, *E. E. Dobbins*<sup>53)</sup> und *H. Struve*<sup>54)</sup> abgeleitet. Auf die starke jährliche Bewegung des Perijoviums wird zuerst von *Tisserand*<sup>55)56)</sup>, dann *Adams*<sup>57)</sup> und *Callandreaux*<sup>58)</sup> hinge-

45) *R. A. Sampson*, A discussion of the eclipses of Jupiter satellites 1878—1893. Harv. obs. ann. 52 part 2 (1910), p. 143.

46) *R. A. Sampson*, Tables of the 4 great satellites of Jupiter. Durham Observat. (1910), p. 1.

47) *W. de Sitter, Sampson*, Controverse Bd. 24, 25 des Journal Observatory 1901 ff.

48) *R. T. A. Innes*, Professor *Sampsons* Tables of the satellites of Jupiter. Observatory 33 (1910), p. 478.

49) *A. Obrecht*, Étude sur les éclipses des satellites de Jupiter. Paris 1844.

50) *M. A. Cornu*, Études expérimentales relatives à l'observations photométriques des satellites de Jupiter. Paris C. R. (1883), p. 1815.

51) *F. L. Griffin*, Periodic Orbits of  $k$  finite bodies, revolving about a relatively large central mass. Amer. Math. Soc. Trans. IX p. 1 (1908).

52) *F. Cohn*, Bestimmung der Bahnelemente des V. Jupitermondes. Astr. Nachr. 143 (1897), p. 289.

53) *E. E. Dobbins*, On the orbit of the V. satellite of Jupiter. Astr. Journ. 24 (1904), p. 83.

54) *H. Struve*, Bestimmung der Säkularbewegung des V. Jupitermondes. Berl. Ber. 1906, p. 790.

55) *F. Tisserand*, Sur le mouvement du V<sup>ième</sup> satellite de Jupiter. Paris C. R. 117 (1893), p. 1024.

wiesen und sie durch *Cohn* und *H. Struve* genauer aus den Beobachtungen hergeleitet. Der VI. und VII. Satellit werden von *Perrine* auf photographischem Wege 1905 und 1906 aufgefunden, *Melotte* in Greenwich findet auf gleiche Weise 1908 den VIII. Satelliten.<sup>59) 60)</sup> Die Neigung aller drei Satelliten zur Jupiterebene ist nahezu 30°, der VI. und VII. bewegen sich, wie es scheint, in derselben Ebene derart, daß sich ihre Bahnen schneiden; der VIII.<sup>61)</sup> in so großer Entfernung vom Planeten, daß die Stabilität<sup>61a)</sup> seiner Bahn zweifelhaft erscheint.

4. Bessels Untersuchungen über das Saturnsystem. Im Jahre 1789 entdeckte *W. Herschel* die beiden innersten Saturnsatelliten *Mimas* und *Enceladus*, 1848 fanden fast gleichzeitig *W. Bond* und *Lassell* den Satelliten *Hyperion*, und auf photographischem Wege gelang es *W. Pickering* 1890 und 1904 *Phöbe* und *Themis* zu entdecken.

Konjunktionsbeobachtungen der Satelliten mit Punkten des Planeten oder des Ringes sowie gelegentliche Beobachtungen der nur selten sich ereignenden Verfinsterungen oder Schattenvorübergänge bildeten bis auf *Bessel* das unzulängliche Material, auf das sich eine Theorie der Bewegungen der Satelliten hätte gründen lassen. In voller Erkenntnis dieser Tatsache beschränkte sich *Laplace*<sup>62)</sup> darauf, aus der Theorie die Erklärung für die vom Saturnäquator stark abweichende und variable Bahnlage des *Japetus* herzuleiten (vgl. Nr. 12 βa). *Bessels*<sup>63)</sup> mikrometrische und heliometrische Messungsreihen, die er bei noch unzureichenden Beobachtungsmitteln schon 1806 in Liliental begann und mit Unterbrechungen am Königsberger Helio- meter bis zu seinem Ende fortsetzte, bildeten die Basis für seine

56) *F. Tisserand*, Sur excentricité de l'orbite du Vième satellite de Jupiter. Paris C. R. 119 (1894), p. 581.

57) *W. S. Adams*, The polar compression of Jupiter and the Vth satellite. Astr. Journ. 20 (1899), p. 133.

58) *O. Callandreau*, Sur l'anomalie du mouvement du périhélie du Vième satellite de Jupiter. Paris C. R. 130 (1900), p. 17.

59) VI., VII. und VIII. Trabant des Jupiters. Vgl. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 67—72 und Observatory 28—31.

60) *F. E. Ross*, Elemente des VII. Satelliten. Astr. Nachr. 174 (1907), p. 359.

61) *A. C. Crommelin*, The motion of Jupiter VIII satellite from 1908 to 1916. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 71, (1911) p. 50.

61a) *C. Kobb*, Sur un cas d'instabilité possible. Paris Bull. astr. 18 (1901), p. 219.

62) *Laplace*, Méc. céleste, t. IV, lib. 8, chp. 17.

63) *F. W. Bessel* I.

fundamentalen theoretischen Untersuchungen über das Saturnsystem. Aus den Heliometerbeobachtungen des Titan, die über alle vier Quadranten seiner Bahn sich erstreckten, in Verbindung mit überlieferten Konjunktionsbeobachtungen des 17. und 18. Jahrhunderts, gelang es *Bessel*, die Elemente dieser Bahn<sup>64)</sup> so erschöpfend zu bestimmen, daß auch die modernen Beobachtungen noch sicher genug durch diese Elemente dargestellt werden. Neigung und Knotenlänge der Ringebene<sup>64) 17)</sup>, die bis dahin nur aus Beobachtungen des Verschwindens und Wiedererscheinens des Ringe bestimmt waren, wurden von *Bessel* aus direkten Heliometermessungen abgeleitet. Die Elongationsmessungen von *Rhea*, *Titan* und *Japetus* bestätigten die Bestimmung der Masse des Saturn, die vorher lediglich aus den Bahnstörungen, die Jupiter von Saturn erfährt, hergeleitet worden waren. Ferner ergab die Diskussion der älteren und neueren Beobachtungen des Verschwindens und Wiedererscheinens der Ringe einen wichtigen Schluß mit Bezug auf die Dicke der Ringe. Daß *Bessel* eine erschöpfende Bearbeitung des Saturnsystems vor Augen gehabt, etwa wie es *Laplace* beim Jupitersystem getan hat, geht einmal aus den leider unvollendet gebliebenen Untersuchungen über das Saturnsystem hervor<sup>65)</sup>, dann aber auch aus den Relativmessungen der einzelnen Satelliten untereinander. Diese Beobachtungsmethode, die in der Folgezeit große Bedeutung gewonnen hat, ergab für die Ermittlung der Bahnelemente der anderen Satelliten, wenn sie so mit Titan durch Relativmessungen verbunden wurden, einen gleichen Grad der Genauigkeit wie bei diesem. — Die Beobachtungen von *Lassell*, *Marth*, *Bond*, *Jacob*, *Meyer*<sup>66)</sup>, *A. Hall*<sup>67) 68) 69)</sup> und andern ergaben für die weitere Erschließung der Bewegungen im Saturnsystem wichtiges Beobachtungsmaterial. Jedoch sind es erst die langjährig fortgesetzten systematischen Mikrometermessungen der Satelliten untereinander sowie auch mit Bezug auf das Planetenzentrum, wie sie *H. Struve*<sup>70) 71) 72) 73)</sup>

64) *F. W. Bessel*, Über die Neigung der Ebene des Saturnringes. Berl. astr. Jahrb. für 1829, p. 175 = Abh. I, p. 319.

65) *F. W. Bessel* IV. Vgl. dazu auch *Schumacher* (Herausgeber der Astr. Nachr.), Literatur in den Astr. Nachr. bis Band 60 auf p. 194, und *Houzeau Lancaster*, Bibliogr. astr. II, p. 1440—1740.

66) *W. Meyer*, Gèneve.

67) *A. Hall*, The six inner satellites of Saturn. Wash. obs. 1883, App. 1 (1886).

68) *A. Hall*, The orbit of Japetus. Wash. obs. 1882, App. 1 (1885).

69) *A. Hall*, Determination of the orbit of Titan. Yale Univers. Obs. 1889.

70) *H. Struve*, Bestimmung der Elemente der Saturntrabanten. Astr. Nachr. 111 (1895), p. 1 u. 17.

mit dem 15- und später mit dem 30-zölligen Refraktor zu Pulkova ausführte, durch deren Diskussion *Struve* unsere Kenntnis des Systems wesentlich vertiefte. Diesen Untersuchungen geht *Newcombs*<sup>74)</sup> wichtige Arbeit über das System Hyperion-Titan voraus, deren Resultate erst durch *A. Halls* Beobachtungsreihen mit dem 26-zölligen Refraktor zu Washington möglich gemacht wurden, und an die sich *Hill*<sup>75)</sup> und *O. Stone*<sup>76)</sup> anschließen.

##### 5. Die Auffindung der Satelliten von Uranus, Neptun und Mars.

*W. Herschel* entdeckte die beiden äußeren Uranussatelliten *Titania* und *Oberon* im Jahre 1787. 1851—52 fanden *Lassell* und *Marth* die zwei innern *Ariel* und *Umbriel* auf *Lassells* Sternwarte auf Malta. Die wichtigste Eigenschaft der Bahnen dieser Satelliten ist ihre Neigung von gegen  $98^\circ$  zur Ekliptik. — Neptuns Satellit wurde gleichfalls von *Lassell* entdeckt, 1846; *O. Struve*, *W. Bond* und *Newcomb*<sup>77)</sup> haben die Elemente der Bahn bestimmt. Die von *Marth* zuerst bemerkte Veränderung der Bahnlage des Satelliten wurde von *Tisserand* als die Störung erkannt, welche die Abplattung des Planeten auf den Satelliten ausübt. — Die Monde des Mars wurden 1877 von *A. Hall* in Washington entdeckt. Auffallend ist die schnelle Umlaufzeit des innern Satelliten *Phobos*, die etwa nur ein Drittel der Rotationsdauer des Planeten selbst ist, sowie die nahe Koinzidenz der Ebenen beider Satellitenbahnen mit der Äquatorebene des Mars.

##### 6. Die Störungen in einem Satellitensystem; Bezeichnungsweise.

Um die Theorie der Satellitenstörungen in allgemeiner Form darzustellen, wird das Saturnsystem als der allgemeine Fall aufgefaßt. Darnach kann der Hauptplanet als ein konzentrisch geschichtetes Rotationsellipsoid angesehen werden, das von einem Ring enggeschichteter Massenpartikel umkreist wird, die sich alle nahezu in derselben Ebene bewegen. Diese Ringebene fällt nahezu mit der Äquatorebene des Planeten zusammen. Die Massen des Planeten, der Ringe

71) *H. Struve*, Beobachtungen der Saturntrabanten am 15'' Refr. Poulkova obs. Suppl. 1 (1888).

72) *H. Struve*, Beobachtungen am 30'' Refraktor. Poulkova obs. (2) XI (1898). Vgl. auch *Astr. Nach.* 123 (1889), p. 251 und 162 (1903) p. 325.

73) *H. Struve*, Beobachtungen des Saturntrabanten Titan. Berlin Ber. 1908.

74) *S. Newcomb*, On the motion of Hyperion, a new case in the celestial mechanic. Wash. Astr. Pap. 3 (1884).

75) *G. W. Hill*, On the motion of Hyperion and the mass of Titan. *Astr. Journ.* 8 (1888), p. 57.

76) *O. Stone*, On the motion of Hyperion. *Annals of Mathematics* 3 (1887), p. 161, u. 4, (1888) p. 53.

77) *Houzeau et Lancaster*: Bibliographie astr. II, 1470—1740.

und einzelnen Satelliten seien mit  $m_A, m_R, m_j$  bezeichnet. Der Koordinatenanfang liege im Schwerpunkt von  $m_A$ , und die positiven Achsen der  $x, y, z$  weisen resp. nach dem Frühlingspunkt, Sommersolstitium und Nordpol der Ekliptik zur Zeit  $t$ . Die Bahnebene des Satelliten  $m_j$  ist zur  $xy$ -Ebene unter dem Winkel  $i_j$  geneigt, die Länge des aufsteigenden Knotens sei  $n_j$ ; für Äquator und Ringe seien die entsprechenden Größen  $i_A, n_A, i_R, n_R$ . Mit Bezug auf die Äquatorealebene seien diese Größen resp. mit  $\gamma_j$  und  $\vartheta_j$  und mit bezug auf die Bahn des störenden Körpers  $m_k$  mit  $\gamma_{jk}$  und  $\vartheta_{jk}$  bezeichnet. Die *Keplersche* Bewegung des Satelliten erleidet Störungen folgender Art:

1. Störungen, die von der ellipsoidischen Gestalt des Hauptplaneten,
2. Störungen, die von den Ringen,
3. Störungen, die von den gegenseitigen Anziehungen der Satelliten,
4. Störungen, die von der Sonne

herrühren. Diese Störungskräfte machen sich bemerkbar in zweierlei Hinsicht:

- (1) Die Bahnebenen ändern ihre Lagen im Raume, und
- (2) die Form der Bahnkurve und die Bewegung in derselben erleiden Veränderungen.

Die Diskussion von (1) bedingt als notwendiges Vorstudium die Untersuchung der rotierenden Bewegung des Hauptplaneten, insofern als die Lage und Neigung seiner Äquatorealebene mit in die Lösung eines Systems von simultanen Differentialgleichungen eingeht. Aus einer erschöpfenden Diskussion von (1) und (2) ergeben sich durch Vergleich mit den Beobachtungen Masse und Gestaltbestimmung des Hauptplaneten, der Ringe und ihrer Lagen im Raum sowie die sieben Elemente jedes einzelnen Satelliten.

**7. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse des Hauptplaneten.** Die *Poissonsschen* Differentialgleichungen sind:

$$(1) \quad \sin i_A \frac{dn_A}{dt} = \frac{1}{C_A p_A} \frac{\partial \Omega_A}{\partial i_A}, \quad \frac{di_A}{dt} = - \frac{1}{C_A p_A \sin i_A} \frac{\partial \Omega_A}{\partial n_A}.$$

Die hier auftretende Größe  $\Omega_A$  setzt sich zusammen aus den Beiträgen, welche die Sonne, die Satelliten und die Ringe liefern:  $\Omega_A = \frac{1}{m_A} \sum m_i V_i$ . Die Potentiale  $V_i$  werden je nach den speziellen Annahmen durch einen der drei folgenden Ausdrücke gegeben:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} (a) V &= \frac{m}{r} \left[ 1 - \frac{3 f \delta d (a^5 e^2 \sqrt{1-e^2})}{3 \cdot 5 r^2 f \delta d (a^3 \sqrt{1-e^2})} y_2 + \frac{3 f \delta \cdot d (a^7 e^4 \sqrt{1-e^2})}{5 \cdot 7 \cdot r^4 f \delta \cdot d (a^5 \sqrt{1-e^2})} y_4 + \dots \right] \\ (b) V &= \frac{m}{r} \left[ 1 - \frac{3 e^2 f \delta d a^5}{3 \cdot 5 r^2 f \delta d a^5} y_2 + \frac{3 e^4 f \delta d a^7}{5 \cdot 7 r^4 f \delta d a^5} y_4 + \dots \right] \\ (c) V &= \frac{m}{r} \left[ 1 - \frac{3 e^2 a^2}{3 \cdot 5 r^2} y_2 + \frac{3 e^4 a^4}{5 \cdot 7 r^4} y_4 + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

wobei (a) das Potential eines aus elliptischen Schichten bestehenden Rotationsellipsoides,

(b) das Potential für den Fall, daß alle Schichten ähnlich sind,

(c) das Potential eines homogenen Rotationsellipsoides ist.

Hierbei bezeichnen  $\delta$  die Dichte,  $a$  die halbe große Achse der elliptischen Schichten, und die  $y_i$  sind Kugelfunktionen einer Veränderlichen. Bei der Kleinheit von  $e$  und  $a/r$  sind diese Reihen äußerst konvergent, so daß ein Mitnehmen des  $y_4$ -Gliedes nur bei den innersten Satelliten nötig ist. Durch Wahl des Äquators als Bezugsebene und Einführung von  $\gamma$  und des Arguments der Breite,  $u - \Gamma$ , in die  $y$ -Funktionen (vgl. VI 2 13 § 30 und 14 § 20) wird:

$$(3) \quad \Omega_A = -\frac{3}{4} k_A \left\{ \frac{m_s}{r_s^3} \sin^2 \gamma_s [1 - \cos 2(u_s - \Gamma_s)] + \frac{m_R}{a_R^3} \sin^2 \gamma_R + \sum_j \frac{m_j}{r_j^3} \sin^2 \gamma_j [1 - \cos 2(u_j - \Gamma_j)] \right\}$$

wo  $k_A = \frac{f \delta d (a^5 e^2 \sqrt{1-e^2})}{5 f \delta d (a^3 \sqrt{1-e^2})}$ . Setzt man  $h_A = \frac{2 k_A}{C_A} = \frac{1 f \delta d (a^5 e^2 \sqrt{1-e^2})}{2 f \delta d (a^3 \sqrt{1-e^2})}$

so werden die Differentialgleichungen (1):

$$(4) \quad \sin i_A \frac{dn_A}{dt} = -\frac{3 h_A}{8 p_A} \frac{\partial R_A}{\partial i_A} \quad \frac{di_A}{dt} = \frac{3 h_A}{8 p_A} \frac{\partial R_A}{\sin i_A \partial n_A}$$

wo  $-\frac{4}{3} \Omega_A = R_A$  gesetzt ist.

8. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse der Ringe.<sup>78)</sup> Nach Analogie mit (4) sind diese Gleichungen:

$$(5) \quad \frac{di_R}{dt} = \frac{3 h_R}{8 p_R} \frac{\partial R_R}{\sin i_R \partial n_R} \quad \sin i_R \frac{dn_R}{dt} = -\frac{3 h_R}{8 p_R} \frac{\partial R_R}{\partial i_R}$$

die  $R_R$ -Funktion ist genau wie die  $R_A$ -Funktion gebaut, hier ist  $h_R = 1$ .

78) Vgl. 65) § 3, dann 72) sowie *Tisserand*: Sur le déplacement du plan de Japetus. Ann. Toulouse II (1886), ferner: Mouvement des apsides des satellites de Saturne, ebenda, und Un cas remarquable du problème des perturbations. Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 425 u. 504.

9. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten.<sup>65)</sup>

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_A + m_R}{r^3} x = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_A + m_R}{r^3} y = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_A + m_R}{r^3} z = \frac{\partial R}{\partial z} \end{cases}$$

$$R = V_A + V_R + m_s \left[ \frac{1}{\Delta_s} - \frac{xx_s + yy_s + zz_s}{r_s^3} \right] \\ + \sum m_j \left[ \frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{r_j^3} \right]$$

Statt der Differentialgl. in  $x, y$  und  $z$  werden allgemein die in den Bahnelementen bei der Satellitentheorie benutzt. Dieselben sind:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin i \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \left\{ \frac{\partial R}{\sin i \partial n} + \operatorname{tg} i/2 \left( \frac{\partial R}{\partial w} + \frac{\partial R}{\partial E} \right) \right\} \\ \frac{da}{dt} &= 2\sqrt{a} \frac{\partial R}{\partial E} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \frac{\partial R}{\partial w} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \left[ 1 - \sqrt{1-e^2} \right] \frac{\partial R}{\partial E} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} i/2}{\sqrt{a(1-e^2)}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dE}{dt} &= -2\sqrt{a} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \left[ 1 - \sqrt{1-e^2} \right] \frac{\partial R}{\partial e} \\ &\quad + \frac{\operatorname{tg} i/2}{\sqrt{a(1-e^2)}} \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad R = -\frac{m_A k_A}{2 r^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma_A [1 - \cos 2(u - \Gamma_A)] \right] \\ + \frac{m_R k_R}{2 r^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma_R [1 - \cos 2(u - \Gamma_R)] \right] \\ + m_s \left[ \frac{1}{\Delta_s} - \frac{xx_s + yy_s + zz_s}{r_s^3} \right] + \sum m_j \left[ \frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{r_j^3} \right]$$

10. Die Störungsfunktion  $R$ .<sup>70) 71) 72) 79)</sup>  $R$  wird in bekannter Weise nach säkularen, langperiodischen und kurzperiodischen Gliedern entwickelt. Im Jupiter- und Saturnsystem treten zu den säkularen und langperiodischen Gliedern noch Librationsglieder. Dieses kann unter Umständen die Entwicklung von  $R$  bis zum Quadrat der störenden

79) F. Tisserand, Méc. céleste, IV, p. 9.

Massen notwendig machen. Im allgemeinen sind die Bahnen der inneren Satelliten sehr wenig zur Äquatorialebene des Planeten geneigt, während die der äußeren beträchtliche Neigungen aufweisen.  $R$  wird deshalb für beide Fälle verschieden entwickelt werden. Die Sonne, der einzige störende Körper von außerhalb, der zu berücksichtigen ist, bewegt sich in einer scheinbaren Bahn, die bei Jupiter zur Äquatorealebene geringe, bei Mars, Saturn, Uranus und Neptun größere Neigung aufweist.

**11. Die säkularen Ungleichheiten der Knoten und Neigungen.**

Um in den Reihenentwicklungen für  $R_A$ ,  $R_R$  und  $R_s$  die säkularen Glieder abzusondern, denkt man sich  $R$  nach den mittleren Anomalien des störenden und gestörten Körpers entwickelt. Durch doppeltes Mittelbilden in bezug auf diese Variablen werden die säkularen Glieder erhalten. Es genügt, bis zu den Quadraten der Entwicklungsparameter vorzugehen. Dann enthält  $R$  die Variable  $E$  nicht mehr und  $\omega$  nur in den quadratischen Gliedern. Vernachlässigt man diese, die auch in  $\frac{di}{dt}$  quadratisch auftreten, so trennen sich die Gleichungen für  $\frac{di}{dt}$  und  $\frac{dn}{dt}$  gänzlich von den übrigen säkularen Gleichungen. Für ein System von  $n$  Satelliten bestehen dann  $2n$  simultane Differentialgleichungen, zu denen noch vier weitere Differentialgleichungen für die säkularen Änderungen der Äquatoreal- und Ringebenen treten. Die Störungsfunktion nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$(8a) \quad R = -C_A \sin^2 \gamma_A - C_s \sin^2 \gamma_s - \sum C_j \sin^2 \gamma_j,$$

wo die  $C$ -Größen von den Massen der störenden Körper und den Elementen des gestörten und störenden Körpers abhängen.

Die  $2n + 4$  Differentialgleichungen sind dann:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin i_\lambda \frac{dn_\lambda}{dt} = - \sum_j K_{\lambda j} \sin \gamma_{\lambda j} \cos \gamma_{\lambda j} \cos \psi_{\lambda j} \\ \frac{di_\lambda}{dt} = \sum_j K_{\lambda j} \sin \gamma_{\lambda j} \cos \gamma_{\lambda j} \sin \psi_{\lambda j} \\ \sin i_A \frac{dn_A}{dt} = - \sum_j K_{Aj} \sin \gamma_{Aj} \cos \gamma_{Aj} \cos \psi_{Aj} \\ \frac{di_A}{dt} = \sum_j K_{Aj} \sin \gamma_{Aj} \cos \gamma_{Aj} \sin \psi_{Aj} \\ \sin i_R \frac{dn_R}{dt} = - \sum_j K_{Rj} \sin \gamma_{Rj} \cos \gamma_{Rj} \cos \psi_{Rj} \\ \frac{di_R}{dt} = \sum_j K_{Rj} \sin \gamma_{Rj} \cos \gamma_{Rj} \sin \psi_{Rj}, \end{array} \right.$$

hier ist  $\psi_{\lambda j}$  der Bogen der gestörten Bahn, der zwischen Ekliptik und störender Bahn liegt.

Beim Saturnsystem werden später Ring- und Äquatorebene als zusammenfallend angenommen werden, so daß sich bei allen Planeten die Säkularstörungen durch ein System von  $2n + 2$  simultanen Differentialgleichungen bestimmen. Wenn die Elemente und Massen bekannt sind, werden durch Gleichungen (9) die Geschwindigkeiten der Pole der Satellitenbahnen für jede Zeit  $t$  gegeben, für welche die Elemente bekannt sind. — Durch die Integration der Gleichungen gelangen wir andererseits zur Kenntnis der Verbindungen, die zwischen den Satelliten in säkularer Hinsicht statthaben. Es ist hierzu vorteilhaft, neue Variablen, wie folgt, einzuführen:

$$(10) \quad \begin{cases} x_j = \sin i_j \cos n_j \\ y_j = \sin i_j \sin n_j \\ z_j = \cos i_j \end{cases}$$

und

$$(11) \quad \cos \gamma_{jk} = x_j x_k + y_j y_k + z_j z_k = \xi_{jk}.$$

Hierbei bezieht sich der Index  $j$  auf sämtliche Mitglieder des Systems inklusive der Sonne. Die Gleichungen nehmen die folgende Gestalt an:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dx_A}{dt} = [K_{A_s} \xi_{A_s} z_A + K_{AR} \xi_{AR} z_R + \sum (K_{Aj} \xi_{Aj} z_j)] y_A \\ \quad - [K_{RA} \xi_{RA} z_A] y_R - [K_{As} \xi_{As} z_A] y_s - [K_{A1} \xi_{A1} z_1] y_1 - [ ] y_2 \dots \\ \frac{dx_R}{dt} = - [K_{RA} \xi_{RA} z_R] y_A + [K_{Rs} \xi_{Rs} z_R + K_{RA} \xi_{RA} z_A + \sum \dots] y_R \\ \quad - [K_{Rs} \xi_{Rs} z_R] y_s - [K_{R1} \xi_{R1} z_1] y_1 \dots \\ \frac{dx_\lambda}{dt} = - [K_{\lambda A} \xi_{\lambda A} z_\lambda] y_A + [K_{\lambda R} \xi_{\lambda R} z_\lambda] y_R + [ ] y_s \dots \end{cases}$$

und ähnliche Gleichungen in den  $y$ .

In die Klammerausdrücke rechts gehen nur die  $z$ - und  $\xi$ -Koordinaten ein.

Wenn  $x$ ,  $y$  und  $z$  bekannt sind, bestimmen diese Gleichungen sämtliche Variablen. Die Klammergrößen von (12) werden Konstante und die Gleichungen damit linear und integrierbar, wenn die Kosinus sämtlicher Neigungen, d. h. alle  $z$  und  $\xi$ , als unveränderlich angenommen werden. *Bessel*<sup>87)</sup> zeigt, wie dann die Integrale von (12) erhalten werden, bei der einen oder anderen der folgenden Annahmen über  $x$  und  $y$ :

$$(a) \quad \begin{aligned} x_s &= \sum h \sin [it + H] \\ y_s &= \sum h \cos [it + H] \end{aligned}$$



$$(14) \begin{cases} x_\lambda = N_{\lambda 1} \cos(b_1 t + c_1) + N_{\lambda 2} \cos(b_2 t + c_2) + N_{\lambda 3} \cos(b_3 t + c_3) \\ \quad + N_{\lambda 4} \cos(b_4 t + c_4) + N_{\lambda A} \cos(b_A t + c_A) \\ y_\lambda = N_{\lambda 1} \sin(b_1 t + c_1) + N_{\lambda 2} \sin(b_2 t + c_2) + N_{\lambda 3} \sin(b_3 t + c_3) \\ \quad + N_{\lambda 4} \sin(b_4 t + c_4) + N_{\lambda A} \sin(b_A t + c_A) \end{cases}$$

$$\lambda = 1, 2, 3, 4, A,$$

wo die  $b_i$  die Wurzeln der Fundamentalgleichung 5. Grades sind; die  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_A$  und  $N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{1A}$  sind die zehn willkürlichen Konstanten. Bei Berücksichtigung der störenden Glieder treten rechts *Fouriersche* Reihen von der Form  $\sum S \frac{\sin}{\cos}(st - \sigma)$  auf, wo die Summation sich auf alle störenden Planeten bezieht. Nimmt man nun die zehn Größen  $N_{1\lambda} \sin c_\lambda$  und  $N_{1\lambda} \cos c_\lambda$  als Funktionen von  $t$  an, so ergeben sich z. B. für den I. Satelliten nach der Integration Zusatzglieder von der Form:

$$(15) \begin{cases} \delta x_1 = \sum S \left( \frac{\mathfrak{N}_1}{s - b_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{s - b_s} + \dots + \frac{\mathfrak{N}_A}{s - b_A} \right) \cos(st - \sigma) \\ \quad + \sum S \left( \frac{\mathfrak{N}_1}{b_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{b_2} + \dots + \frac{\mathfrak{N}_A}{b_A} \right) \cos \sigma \\ \delta y_1 = \sum S \left( \frac{\mathfrak{N}_1}{s - b_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{s - b_s} + \dots + \frac{\mathfrak{N}_A}{s - b_A} \right) \sin(st - \sigma) \\ \quad + \sum S \left( \frac{\mathfrak{N}_1}{b_1} + \dots \right) \cos \sigma. \end{cases}$$

*Souillarts* numerische Berechnungen haben ergeben, daß die Zusatzglieder für den III. und IV. Satelliten eben merklich werden, während sie für die anderen ganz unmerklich bleiben. — Geht man zur Darstellung der Breiten der Satelliten über der augenblicklichen Jupiterbahn über, so setzen sich diese entsprechend dem Vorhergehenden aus vier resp. fünf Sinusgliedern zusammen; der Koeffizient des von der Abplattung herrührenden Gliedes ist dabei weitaus der bedeutendste. Dieses Glied charakterisiert bei jedem der Satelliten die „*Laplacesche feste Ebene*“, die durch den gemeinsamen Durchschnitt der Äquator- und Jupiterbahnebene hindurchgeht. Die Neigungen dieser festen Ebenen zur Äquatorebene sind resp. 10'', 67'', 4', 38'' und 24' 12'', und die augenblicklichen Satellitenebenen entfernen sich periodisch nur wenig von diesen festen Ebenen.

$\beta$ ) *Das Saturnsystem.* a) *Japetus.* Schon *Laplace* hat die beträchtliche Bahnneigung des *Japetus* und die Bewegung seiner Knoten auf der Bahnebene auf den störenden Einfluß der Sonne zurückgeführt. Die beträchtliche Neigung der störenden Bahnen zur ge-

störten macht es erwünscht, auf die ursprüngliche Form der Differentialgleichungen zurückzugreifen:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \sin i \frac{dn}{dt} &= -K_s \sin \gamma_s \cos \gamma_s \cos \psi_s - K' \sin \gamma_A \cos \gamma_A \cos \psi_A \\ \frac{di}{dt} &= -K_s \sin \gamma_s \cos \gamma_s \sin \psi_s - K' \sin \gamma_A \cos \gamma_A \sin \psi_A. \end{aligned} \right.$$

Hier ist  $K' = K_A + \sum_j K_j$ , wo in  $K_A$  die Wirkungen der Abplattung und der Ringe vereinigt gedacht sind. Die Integration dieser Gleichungen geschieht unter der Annahme, daß Äquator- und Planetenebene einen konstanten Winkel  $A$  miteinander bilden. Durch die Einführung der *Laplaceschen* „festen“ Ebene läßt sich die Integration in geschlossener Form vermittlells elliptischer Funktionen ausführen. Die feste Ebene geht durch die Schnittlinie der Äquator- und Planetenebenen; ihre Neigung zu der ersteren ist gegeben durch:

$$\text{tang } 2i_A = \frac{K_s \sin 2A}{K' + K_s \cos 2A}.$$

Bezeichnet man mit  $A$ ,  $F$  und  $S$  die Pole der drei Ebenen auf der Einheitskugel, so geht der Pol  $J$  der Japetusbahn in einer sphärischen Ellipse um  $F$  derart, daß  $F$  den Ellipsenmittelpunkt bildet. *Tisserand*<sup>78)</sup> hat diese Bewegung näher diskutiert. Die Dauer der Oszillation von  $J$  um  $F$  ist um so größer, je kleiner  $K_s$  und  $K'$  sind. Aus einer Diskussion von älteren und neueren Beobachtungen, die etwa 100 Jahre voneinander getrennt sind, bestimmte *H. Struve*  $\frac{K_s}{K'} = 0,750$  und die Periode zu etwa 3300 Jahren.

b) *Titan und Rhea*. *Bessel*<sup>18)</sup> hat die Bahn Titans einer muster-gültigen Untersuchung unterzogen, sodaß sein Elementensystem noch jetzt die modernen Beobachtungen gut darstellt. Allein bei der Bestimmung von Neigung und Knotenlänge sind *H. Struves*<sup>71) 72) 73)</sup> neuere Untersuchungen als eine wesentliche Verbesserung aufzufassen. *Bessel* begnügte sich, den Einfluß von Abplattung und Ringen genähert anzusetzen, indem er die Bewegung in  $n$  als Bruchteil der durch die Sonne verursachten Bewegung des Knotens auf der Saturnbahn voraussetzte. Als eine Folge davon ergab sich eine äußerst geringe Veränderung der Bahnneigung, die auf lange Zeiträume hin unmerklich geblieben wäre. An Stelle dessen zeigen die neueren Beobachtungen mit Evidenz ein allmähliches Anwachsen der Neigung, welches durch die kombinierte Wirkung der Störungen von Sonne, Abplattung und Ringen und Japetus erklärt wird. Rheas Bahnlage wird in ganz ähnlicher Weise wie die von Titan beeinflusst, nur daß

der schon bei Titan geringe Einfluß von Japetus ganz vernachlässigt werden kann. Streng genommen ergibt sich für die beiden Satelliten das folgende System simultaner Differentialgleichungen:

$$(17) \begin{cases} \frac{dx_T}{dt} = -\beta_T \mu_T \cdot y_T + K_{TS} Y_S + K_{TJ} Y_J + \sum K_{Tj} y_j \\ \frac{dy_T}{dt} = +\beta_T \mu_T \cdot x_T - K_{TS} X_S - K_{TJ} X_J - \sum K_{Tj} x_j \\ \frac{dx_R}{dt} = -\beta_R \mu_R \cdot y_R + K_{RS} Y_S + K_{RJ} Y_J + \sum K_{Rj} y_j \\ \frac{dy_R}{dt} = +\beta_R \mu_R \cdot x_R - K_{RS} X_S - K_{RJ} X_J - \sum K_{Rj} x_j \end{cases}$$

wo 
$$\beta_\lambda \mu_\lambda = K_{jA} + \sum K_{\lambda j} \quad \text{und}$$

$$(18) \begin{cases} x_\lambda = \sin i_\lambda \cdot (n_\lambda - n_A) & X_S = -\sin \gamma_S \cos \gamma_S \sin \psi_S \\ y_\lambda = i_\lambda - i_A & Y_S = -\sin \gamma_S \cos \gamma_S \cos \psi_S \\ & X_J = -\sin \gamma_J \cos \gamma_J \sin \psi_J \\ & Y_J = -\sin \gamma_J \cos \gamma_J \cos \psi_J \end{cases}$$

Sowohl für die Sonne wie für Japetus werden die  $XY$ -Größen durch Reihen von der Form gegeben:

$$X = \sum c_\lambda (\sin b_\lambda - h_\lambda t)$$

$$Y = \sum c_\lambda (\cos b_\lambda - h_\lambda t)$$

gegeben. Statt die Gleichungen simultan zu integrieren, genügt es, die zwei Gleichungen für jeden Satelliten separat zu behandeln. Bei genügend eingeschränkter Zeit können auch die  $X_S Y_S$  und  $X_J Y_J$  als konstant angesetzt werden. Es ergibt sich so:

$$(19) \begin{cases} x_T = c_T \sin (b_T - \beta_T \mu_T t) + \frac{K_{TS}}{\beta_T \mu_T} X_{TS} + \frac{K_{TJ}}{\beta_T \mu_T} X_J \\ \quad + \frac{K_{TR} x_R}{\beta_T \mu_T - \beta_R \mu_R} \\ y_T = c_T \cos (b_T - \beta_T \mu_T t) + \frac{K_{TS}}{\beta_T \mu_T} Y_{TS} + \frac{K_{TJ}}{\beta_T \mu_T} Y_J \\ \quad + \frac{K_{TR} x_R}{\beta_T \mu_T - \beta_R \mu_R}; \end{cases}$$

hier ist der Einfluß von Rhea ganz vernachlässigt worden. Bei Rhea kann von Japetus ganz abgesehen werden, während Titan infolge seiner Masse und größeren Nähe berücksichtigt ist. Man erhält so:



d) *Dione, Tethys, Enceladus und Mimas*. Der Einfluß von Titan, der bei Rhea Ungleichheiten von 2' bis 4' in  $x$  und  $y$  hervorbringt, geht bei Dione schon auf 0,3' bis 0,4' herab. Ungefähr von derselben Ordnung sind die säkularen Ungleichheiten, welche Tethys in der Bahnebene von Dione verursacht. Das von der Sonne abhängige Glied wird bei diesen vier Satelliten ganz unmerklich. Sofern demnach nur die säkularen Störungen in Frage kommen, kann man für die vier Satelliten schreiben:

$$(24) \quad \begin{cases} x = c \sin (b - \beta \mu t) \\ y = c \cos (b - \beta \mu t). \end{cases}$$

Auf die Librationsglieder, die in jedem der Systeme ähnlich wie bei Hyperion-Titan auftreten, braucht bei den Störungen der Bahnebene nicht Rücksicht genommen zu werden, weil ihre Beträge unterhalb der Beobachtungsfehler verbleiben.

e) *Phöbe und Themis*. Die Bahnen von Themis und Phöbe sind noch zu kurze Zeit bekannt, als daß die Eigentümlichkeiten der Bewegung dieser Satelliten genügend überblickt werden könnten. Es scheint, daß sich Themis<sup>82)</sup><sup>84)</sup> in großer Nähe von Titan und Hyperion bewegt bei einer Bahnneigung von etwa 40° zur Ekliptik. Titans Einfluß auf die Bahnlage von Themis wird fraglos bedeutend sein, doch fehlen noch Angaben, die sich auf gesicherte Beobachtungen stützen. Phöbes<sup>81)</sup><sup>83)</sup><sup>85)</sup><sup>86)</sup> Bahnneigung zur Ekliptik ist gleichfalls bedeutend, bei der überaus großen Entfernung dieses Trabanten von Saturn wird die Sonnenstörung die Bahnlage noch viel stärker beeinflussen, als es bei Japetus der Fall ist. In der Tat bringt die Sonne nach den Berechnungen von Roß eine jährliche Knotenbewegung von 0,431° und eine Neigungsänderung von 0,02° zustande. Roß hat die Bahnstörungen nach *Delaunays* Methode ausgeführt.

γ) *Die Satelliten des Mars, Uranus und Neptun*. Für die Bahnlagen der Satelliten dieser Systeme gelten Gleichungen (16) Während

81) *W. H. Pickering*, The IX<sup>th</sup> satellite of Saturn, Harvard obs. ann. 53 (1904), Nr. 3.

82) *W. H. Pickering*, An investigation of the X<sup>th</sup> satellite of Saturn, Harvard obs. ann. 61 (1908), p. 86.

83) *W. H. Pickering*, Phoebe, the IX<sup>th</sup> satellite, Harvard obs. ann. 53 (1904), Nr. 5.

84) *W. H. Pickering*, The XI<sup>th</sup> and X<sup>th</sup> satellite of Saturn, Harvard obs. ann. 53 (1905), Nr. 9, p. 173.

85) *F. E. Roß*, Investigations on the orbit of Phoebe, Harvard obs. ann. 53 (1905), Nr. 6, p. 101.

86) *A. Hall*, The orbits of the satellites of Mars, Wash. obs. for 1875 (1878).

bei den Marssatelliten<sup>86)87)</sup> die Knotenbewegung infolge der Sonnenattraktion noch  $0,1^0$  resp.  $0,2^0$  beträgt, kann sie beim Uranus- und Neptunsystem ganz vernachlässigt werden. Die Pole der *Laplaceschen* festen Ebenen liegen beim Marssystem nahe dem Pol des Planetenäquators — für Phobos in einem Abstand von weniger als  $1'$ , bei Deimos etwa  $1^0$  —, und um diese Pole bewegen sich die Pole der Satellitenbahnen mit nahezu uniformer Geschwindigkeit. *Marth*<sup>88)</sup>, *J. C. Adams*<sup>89)</sup>, *Tisserand*<sup>90)</sup> und *Struve*<sup>91)92)</sup> haben diese Bewegungen unter verschiedenen Annahmen über die Marsabplattung diskutiert.

Die Knotenbewegungen für die beiden innern Uranustrabanten<sup>93)94)95)96)97)</sup> können vor der Hand nur aus den noch sehr ungenau bestimmten Bewegungen des Periuraniums ermittelt werden. Für die beiden äußeren Trabanten fehlen noch alle Angaben.

Die von *Marth*<sup>98)</sup> zuerst wahrgenommene Bewegung des Knotens des Neptuntrabanten auf der Bahnebene des Planeten wurde von *Tisserand*<sup>99)</sup> und *Newcomb*<sup>100)</sup> zu einer Bestimmung der Lage des Planetenäquators benutzt. *H. Struve*<sup>101)</sup> hat aus fortlaufenden Beobachtungsreihen am 30-zölligen Pulkovaer Refraktor die Dauer der Periode zu  $1734 \sin \gamma$  Jahren berechnet, wobei  $\gamma$  noch nicht bestimmt ist.

87) *Harshman*, The orbit of Deimos, *Astr. Journ.* 14 (1894), p. 144.

88) *A. Marth*, On the satellites of Mars, *Astr. Nachr.* 95 (1879), p. 369.

89) *J. C. Adams*, On the ellipticity of Mars and its effect on the motion of the satellite, *Lond. Astr. Soc. Month. Not.* 40 (1879), p. 10 = *Scient. pap.* I, p. 275.

90) *F. Tisserand*, Sur les satellites de Mars, *Paris C. R.* 84 (1879), p. 961.

91) *H. Struve*, Bestimmung der Abplattung und des Äquators des Mars, *Astr. Nachr.* 138 (1895), p. 217.

92) *H. Struve*, Über die Lage der Marsachse und die Konstanten im Mars-system, *Berl. Ber.* 1911, p. 1056.

93) *S. Newcomb*, The Uranian and Neptunian systems, *Wash. obs.* 1873, App. 1 (1875).

94) *O. Bergstrand*, Über die Bahn des ersten Uranussatelliten, *Upsala Nova Acta* 20 (1904).

95) *O. Bergstrand*, Sur le mouvement du 2<sup>ième</sup> satellite d'Uranus, *Arkiv for Matem.* 6 (1909), p. 6.

96) *O. Bergstrand*, Sur la figure et la masse d'Uranus, *Paris C. R.* 149 (1909), p. 333.

97) *A. Hall*, The orbits of Oberon and Titania, *Wash. obs.* 1885, App. 1.

98) *A. Marth*, Ephemeris of the satellite of Neptune, *Lond. Astr. Soc. Month. Not.* 46 (1886), p. 504.

99) *Tisserand*, L'aplatissement de Neptune, *Paris C. R.* 107 (1908), p. 804.

100) *S. Newcomb*, Note on the satellite of Neptun, *Astr. Journ.* 8 (1888), p. 143.

101) *H. Struve*, Beobachtungen des Neptuntrabanten am 30'' Refraktor. *St. Pét. mém.* 42 (1894), Nr. 4.

13. Die säkularen und langperiodischen Ungleichheiten der Exzentrizitäten, der Längen, der Perizentren und der mittleren Längen. *a) Das Jupitersystem. a) Die vier Galileischen Satelliten.* Die säkularen Ungleichheiten in den Exzentrizitäten und Perijovien müssen mit den langperiodischen Gliedern vereinigt werden, die infolge der nahen Kommensurabilitäten der drei innern Satelliten bedeutende Beträge annehmen. *Souillart* hat *Laplaces* Untersuchungen wesentlich hier ausgedehnt, indem er zu den Gliedern von den Argumenten  $2l_2 - l_1 - \bar{\omega}_1$  die Zusatzglieder von den Argumenten  $4l_2 - 2l_1 - 2\bar{\omega}_1$ ,  $4l_2 - 2l_1 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$  und  $4l_2 - 2l_1 - 2\bar{\omega}_2$  und entsprechende für den zweiten und dritten Trabanten hinzufügte. Die Differentialgleichungen für die *Lagrangeschen* Koordinaten  $h_j = e_j \sin \bar{\omega}_j$  und  $k_j = e_j \cos \bar{\omega}_j$  haben die Form:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} - c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + c_{13}k_3 + c_{14}k_4 \\
 & \quad = -\frac{1}{2}m_2\mu F \cos u + \alpha_{12}(k_1 \cos 2u + h_1 \sin 2u) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_{12}(k_2 \cos 2u + h_2 \sin 2u) \\
 \frac{dk_1}{dt} + c_{11}h_1 - c_{12}h_2 - c_{13}h_3 - c_{14}h_4 \\
 & \quad = +\frac{1}{2}m_2\mu F \sin u + \alpha_{12}(h_1 \cos 2u - k_1 \sin 2u) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_{12}(h_2 \cos 2u - k_2 \sin 2u) \\
 \frac{dh_2}{dt} + c_{21}k_1 - c_{22}k_2 + c_{23}k_3 + c_{24}k_4 \\
 & \quad = -\frac{1}{2}\mu_2(m_1G - m_3F') \cos u + (\alpha_{21} + \alpha_{23})(k_2 \cos 2u + h_2 \sin 2u) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_{21}(k_1 \cos 2u + h_1 \sin 2u) - \beta_{23}(k_3 \cos 2u + h_3 \sin 2u) \\
 \frac{dk_2}{dt} - c_{21}h_1 + c_{22}h_2 - c_{23}h_3 - c_{24}h_4 \\
 (25) \left\{ \begin{aligned}
 & \quad = \frac{1}{2}\mu_2(m_1G - m_3F') \sin u + (\alpha_{21} + \alpha_{23})(h_2 \cos 2u - k_2 \sin 2u) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_{21}(h_1 \cos 2u - k_1 \sin 2u) - \beta_{23}(h_3 \cos 2u - k_3 \sin 2u) \\
 \frac{dh_3}{dt} + c_{31}k_1 + c_{32}k_2 - c_{33}k_3 + c_{34}k_4 \\
 & \quad = \frac{1}{2}m_2\mu_3 G' \cos u + \alpha_{32}(k_3 \cos 2u + h_3 \sin 2u) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_{32}(k_2 \cos 2u + h_2 \sin 2u) \\
 \frac{dk_3}{dt} - c_{31}h_1 - c_{32}h_2 + c_{33}h_3 - c_{34}h_4 \\
 & \quad = -\frac{1}{2}m_2\mu_3 G' \sin u + \alpha_{32}(h_3 \cos 2u - k_3 \sin 2u) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_{32}(h_2 \cos 2u - k_2 \sin 2u) \\
 \frac{dh_4}{dt} + c_{41}k_1 + c_{42}k_2 + c_{43}k_3 - c_{44}k_4 = 0 \\
 \frac{dk_4}{dt} - c_{41}h_1 - c_{42}h_2 - c_{43}h_3 + c_{44}h_4 = 0,
 \end{aligned} \right. \\
 & \quad \quad \quad u_{21} = 2l_2 - l_1, \quad u_{32} = 2l_3 - l_2;
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$



$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(2l_2 - l_1) = \frac{d}{dt}(2l_3 - 2l_2) = 2n_2 - n_1 = 2n_3 - n_2$$

konstant ist, gehen sie über in ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstanten rechten Seiten. Ein Vergleich der noch nicht abgeschlossenen numerischen Entwicklungen *Wilkens'* mit denen *Souillarts* zeigt eine genügende Übereinstimmung. Merklichere Unterschiede finden sich nur beim zweiten Monde vor, was seinen Grund haben dürfte in der Kommensurabilität seiner Bewegung sowohl zum ersten wie zum dritten Mond.

Nun sind noch die rechts auftretenden Größen  $u_{21}$  und  $u_{23}$  Störungen unterworfen, die von den langperiodischen Gliedern der Störungsfunktion abhängen. Für dieselben gelten die Differentialgleichungen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varrho_1}{dt^2} = \frac{3}{2} m_2 \mu_1^2 \left\{ F_1(k_1 \sin u_{21} - h_1 \cos u_{21}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a_1}{a_2} G_1(k_2 \sin u_{21} - h_2 \cos u_{21}) \right\} \\ \frac{d^2 \varrho_2}{dt^2} = \frac{3}{2} m_1 \mu_2^2 \left\{ G_1(k_2 \sin u_{21} - h_2 \cos u_{21}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a_2}{a_1} F_1(k_1 \sin u_{21} - h_1 \cos u_{21}) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \frac{3}{2} m_3 \mu_3^2 \left\{ F_2(k_3 \sin u_{32} - h_3 \cos u_{32}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a_2}{a_3} G_2(k_3 \sin u_{32} - h_3 \cos u_{32}) \right\} \\ \frac{d^2 \varrho_3}{dt^2} = -3 m_2 \mu_3^2 \left\{ G_2(k_3 \sin u_{32} - h_3 \cos u_{32}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a_3}{a_2} F_2(k_2 \sin u_{32} - h_2 \cos u_{32}) \right\}. \end{array} \right.$$

Bei Mitnahme der in den Massen linearen Glieder ergibt sich für  $u_{21}$  die Ungleichheit:

$$(29) \quad \delta u_{21} = \frac{\mathfrak{A} M_{11} + \mathfrak{B} M_{21} + \mathfrak{C} M_{31}}{(2n_2 - n_1 - g)^2} \sin(u_{21} - gt - \beta) + \dots,$$

wo die Koeffizienten  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  linear in den Massen sind. Ähnlich für  $u_{23}$ . Bei Berücksichtigung dieser Glieder auf der rechten Seite von (25) wird die Fundamentalgleichung für  $g$  jetzt nicht mehr vom 4. Grade sein, sondern infolge des Nenners in (29) nimmt sie einen höheren Grad an. Ihre approximative Auflösung ergibt dann ein neues (26) entsprechendes System von Gleichungen. Nimmt man nun auf die *Souillartschen* Glieder auf den rechten Seiten von (25) Rücksicht, so werden die Gleichungen (27) die Integrale von (25) darstellen, wenn man in den Nennern die Größen  $c$  durch die Größe  $\alpha$  sich vergrößert denkt. Die Berücksichtigung entsprechender Glieder in den Gleichungen (28) ist mit keinen weiteren Schwierigkeiten verknüpft. Natürlich treten die Werte von  $h$  und  $k$  auch in die Ausdrücke für

die Sonnenstörungen ein und bedingen je 4 Glieder, die dem Evek-tionsglied in der Mondtheorie entsprechen. — Die Glieder vom Qua-drat der Massen, die bei der Diskussion der Gleichungen in  $h$  und  $k$  vernachlässigt wurden, spielen eine wichtige Rolle in den Differential-gleichungen für die mittleren Längen. Setzt man nämlich

$$\vartheta = u_{32} - u_{21} \quad \text{und} \quad \beta^2 = K \left( \frac{m_2 m_3}{a_1^2} + \frac{9 m_3 m_1}{a_2^2} + \frac{4 m_1 m_2}{a_3^2} \right),$$

wo 
$$K = \text{const.} \frac{\mu_1}{\mu_1 - 2\mu_2 + c_{22}},$$

so ergibt sich die von *Laplace* zuerst aufgestellte Differentialgleichung der Libration:

$$(30) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \beta^2 \sin \vartheta.$$

Aus den Beobachtungen ergibt sich angenähert  $\vartheta = 180^\circ$  und dieses führt mit Hilfe von (30) zu den allgemein gültigen *Laplace*-schen Relationen:

$$(31) \quad \mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3 = 0 \quad \text{una}$$

$$(32) \quad l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180^\circ.$$

Dieselben werden, wie *Laplace* gezeigt hat, auch durch von außen eintretende Störungen auf die Dauer nicht in Frage gestellt. Das allgemeine Integral von (30) ist:

$$(33) \quad \vartheta = 180^\circ - D \sin(\beta t + E).$$

*Delambres* Diskussion der Finsternisse hat ergeben, daß die Ampli-tude von  $\vartheta - 180^\circ$  verschwindend klein ist, was durch *Sampson*<sup>46)</sup> bestätigt zu sein scheint, während *de Sitters*<sup>41)</sup> Diskussion  $0,158^\circ$  ergibt. — Mit Benutzung von (32) werden die aus den Integralen von (25) sich ergebenden Störungen der Längen der drei innern Satelliten auf die Form gebracht:

$$(34) \quad \delta v_1 = (I) \sin(Ut + \mu'_1 t); \quad \delta v_2 = - (II) \sin(Ut + \mu'_2 t); \\ \delta v_3 = - (III) \sin(Ut + \mu'_3 t - 90^\circ),$$

wenn man die Zeit von einer gemeinsamen Konjunktion der beiden ersten Satelliten zählt und wenn  $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3$  die mittleren synodischen Bewegungen bezeichnen. Es ist

$$(34a) \quad U = v_1 - 2v_2 = v_2 - 2v_3.$$

*Souillarts* Werte für I, II und III sind:  $1634''$ ,  $3860''$  und  $262''$ , während *Laplace* dafür  $1561''$ ,  $3737''$  und  $226''$  gefunden hatte, bedeutende Abweichungen, die den Wert der *Souillartschen* Theorie bestätigen. Die bekannte Finsternisperiode  $T = 437,659$  Tage ergibt sich aus (34a):  $T = \frac{2\pi}{U}$ .

b) *Die übrigen Satelliten.* Beim V. Satelliten sind Knoten- und Perijoviumbewegung einander numerisch gleich. Da ein Fall von Kommensurabilität hier nicht auftritt, kann man in dem *Newcomb-Tisserandschen* Satz — vgl. § 12  $\beta$  —  $m'$  gleich Null setzen und erhält:

$$(35) \quad \begin{cases} h = c \sin(b + \beta \mu t) \\ k = c \cos(b + \beta \mu t). \end{cases}$$

Die Beobachtungen haben die jährliche Bewegung des Perijoviums zu  $916^{\circ}$  ergeben, ein Wert, der von dem theoretischen Werte *Tisserands*<sup>55) 56)</sup> abweicht. — Die Bahnen des VI. und VII. Satelliten sind noch zu wenig bekannt, als daß sich etwas Definitives über die Bewegungen in denselben aussagen ließe. Sollte es sich bestätigen, daß sie in derselben Ebene liegen und sich schneiden, so würde damit ein neuer Fall der Himmelsmechanik vorliegen, der große theoretische Schwierigkeiten bieten wird. — Der VIII. Trabant bewegt sich retrograd in seiner Bahn. *Cowell* und *Crommellin*<sup>61)</sup> haben gefunden, daß *Delau-nays* Methode nicht direkt anwendbar ist, weil die Parameter hier zu große Werte annehmen und darum die Reihenentwicklungen zu langsam konvergieren. Nach *Kobb*<sup>61a)</sup> ist die Bahn möglicherweise instabil.

$\beta$ ) *Das Saturnsystem.* a) *Japetus, Titan und Rhea. Phöbe und Themis.* Die Differentialgleichungen für die Länge des Perisaturniums und die Exzentrizität enthalten auf den rechten Seiten die von der Sonne, Abplattung, Ringen und je den benachbarten Satelliten herrührenden Störungen. Es brauchen nur Glieder vom Quadrat des Sinus der Neigung der Bahnebenen und der Exzentrizitäten mitgenommen zu werden. Da keine Kommensurabilitäten zwischen den mittlern Bewegungen stattfinden, treten keine langperiodischen Glieder hier auf.

b) *Die Satellitenpaare, bei denen Librationsglieder auftreten.* Wenn die mittleren Bewegungen,  $\mu$  und  $\mu'$ , zweier Satelliten so beschaffen sind, daß  $(j + 1)\mu' - j\mu$  ( $j$  ganze Zahl) klein ist im Verhältnis zu  $\mu'$  und  $\mu$ , so werden bei einem ellipsoidischen Zentralkörper die Integrale der Differentialgleichungen für  $h, k; h', k'$ , wenn  $V = (j + 1)\nu' - j\nu$  gesetzt wird, die Form haben:

$$(36) \quad \begin{cases} h = c \sin(b + \beta \mu t) + A m' \sin V \\ k = c \cos(b + \beta \mu t) + A m' \cos V \\ h' = c' \sin(b' + \beta' \mu' t) + A' m \sin V \\ k' = c' \cos(b' + \beta' \mu' t) + A' m \cos V. \end{cases}$$

$A$  und  $A'$  sind gegebene Funktionen der Elemente,  $c, c'$  und  $b, b'$

sind die willkürlichen Konstanten. Sind  $c$  und  $c'$  Null, so ergibt sich das allgemeine Theorem:

*Bei zwei ursprünglichen Kreisbahnen werden, wenn die Bewegung des Konjunktionpunktes im Verhältnis zu den Satellitenbewegungen klein ist, die gegenseitigen Störungen wechselseitig eine Exzentrizität erzeugen, und die so erzeugten Apsidenlinien werden bei beiden Bahnen durch den Konjunktionpunkt gehen.*

Wenn  $c$  und  $c'$  klein sind, ohne doch gleich Null zu sein, so wird das System eine Libration um jene Mittellage erleiden. Die Systeme Hyperion-Titan, Mimas-Tethys und Dione-Enceladus können alle unter diesem Gesichtspunkt betrachtet werden.

*Hyperion-Titan.* A. Hall stellte die Beobachtungen des Hyperion zufriedenstellend dar, indem er für die Länge des Perisaturniums die Formel ableitete:

$$\bar{\omega} = 174,24^{\circ} - 20,344^{\circ}t - 0,103^{\circ}t^2.$$

Newcomb<sup>103)</sup> verband diese retrograde jährliche Bewegung von  $20^{\circ}$  mit dem nahezu gleichen Betrag, den  $4\mu_H - 3\mu_T$  in einem Jahre annimmt, und erkannte die hohe Wichtigkeit des Argumentes:  $V = 4l_H - 3l_T - \bar{\omega}_H$ . Indem in der Störungsfunktion außer den säkularen Gliedern das erste Glied  $e_H C \cos V$  genommen wird, erhält man die Gleichungen:

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{d\mu_H}{dt} = + 3,91 m_T \mu_H^2 \sin V \\ \frac{dE_H}{dt} = + 4,22 m_T \mu_H^2 \cos V \\ \frac{d\bar{\omega}_H}{dt} = m_T \mu_H (4,53 + 3,26 \cos V). \end{cases}$$

Für  $V$  ergibt sich die Differentialgleichung:

$$(38) \quad \frac{d^2V}{dt^2} = 15,6 m_T \sin V \left( 1 + \frac{dV}{dt} \right).$$

Die Beobachtungen zeigen, daß  $V$  um den mittleren Wert  $\pi$  herum schwankt. Macht man  $V = 180^{\circ} - H$ , so wird angenähert:

$$(39) \quad \frac{d^2H}{dt^2} = - 15,6 m_T \sin H.$$

Aus dem Integral dieser Gleichung:

$$(40) \quad H = \alpha \cos K\mu_H t - \beta \sin K\mu_H t,$$

103) S. Newcomb, On the mutual action of the satellites of Saturn, Astr. Journ. 8 (1888), p. 104.

wo  $K = \sqrt{15,6 m_T}$  ist, ergibt sich eine Massenbestimmung des Titan, deren genauer Wert aber erst durch Berücksichtigung der andern merklichen Glieder der Störungsfunktion erhalten werden könnte. Nun ist aber die Berechnung der Koeffizienten dieser Glieder infolge des großen Wertes von  $\frac{a_T}{a_H}$  mit großen Schwierigkeiten verknüpft, so daß es *Newcomb* vorzog, durch Quadratur ihren Betrag in Rechnung zu stellen. Die Bestimmung der Masse des Titan gelang so mit großer Genauigkeit. *Hill*<sup>75)</sup>, *Tisserand*<sup>78)</sup>, *O. Stone*<sup>76)</sup> haben ihrerseits durch periodische Lösungen das gleiche Problem sehr elegant behandelt und gleichfalls durch Quadratur die Störung in  $\bar{\omega}_H$  für einen halben synodischen Umlauf bestimmt und damit auf die Größe der Masse des Titan geschlossen. Eine zufriedenstellende analytische Theorie, welche die wesentlichen Glieder in der Entwicklung von  $R$  berücksichtigt und zugleich auf die Exzentrizität der Titanbahn Rücksicht nimmt, ist bisher noch nicht entwickelt worden. Jedoch hat *H. Struve* aus einer Diskussion der Beobachtungen eine Darstellung von  $V$  in der Form:

$$V = 180^\circ + A \sin \left( \frac{360^\circ}{T} (t - t_0) \right)$$

gegeben, in der er nicht nur die Konstanten  $A$  und  $t_0$ , sondern auch  $T$ , die Periode der Libration, durch die Beobachtungen bestimmt. *Eichelberger*<sup>104)</sup> hat gleichfalls auf rein empirischem Wege eine Darstellung von  $V$  erhalten, bei der zu der Darstellung von *Struve* noch Glieder vom Sinus des Vielfachen des Winkels  $\Pi$  treten, der gleich der Differenz der Längen der Perisaturnien der beiden Bahnen ist.

*Enceladus-Dione*. Aus dem Theorem von *Newcomb* folgt, daß die Exzentrizität und Apsidenbewegung von Enceladus sich aus zwei Teilen zusammensetzt. Wäre die Masse der Dione Null, so wäre  $e = c$ ,  $\bar{\omega} = b + \beta ut$ ; die Apsidenbewegung wäre in diesem Falle gleich der Knotenbewegung. Ist umgekehrt  $c$  sehr klein gegenüber  $f$ , wo  $f = Am'$  gesetzt ist, so wird genähert  $e = f$  und  $\bar{\omega} = 2l' - l$ , die Apsidenbewegung ist dann  $2\mu' - \mu$ , das Perisaturnium von Enceladus fällt beständig mit dem Konjunktionspunkt der beiden Trabanten zusammen. Die Beobachtungen *Struves* zeigten, daß der letztere Fall der Wirklichkeit entspricht. Aus  $e = f = Am'$  folgt, daß die Masse Diones aus dem Mittelwert für  $e$  erhalten werden kann. Der Wert von  $c$  kann nicht aus den Werten der oskulierenden Werte

104) *Eichelberger*, The orbit of Hyperion, Astr. Journ. 11 (1892), p. 145.

von  $e$  bestimmt werden, wohl ist es aber möglich, auf dem Umweg durch die Längen hierzu zu gelangen, wie dieses *Struve*<sup>72)</sup> gezeigt hat. Hierbei ist von Wichtigkeit, daß sich die Werte von  $\beta\mu$  für beide Satelliten mit hinreichender Genauigkeit aus den Knotenbewegungen von Tethys und Mimas bestimmen lassen.

*Tethys-Mimas.* Die merkliche Neigung der Bahnen von Tethys und Mimas zum Saturnäquator haben es möglich gemacht, die säkularen Bewegungen der Knoten aus den Beobachtungen mit Sicherheit zu bestimmen. Darauf fußend, hat *H. Struve*<sup>72)</sup> die merkwürdige Beziehung aufdecken können, die zwischen den mittleren Bewegungen der Trabanten und den säkularen Bewegungen der Knoten besteht und zu der großen Libration zwischen Thetys und Mimas Anlaß gibt. Der Librationswinkel ist hier:  $W = 4l_T - 2l_M - \theta_T - \theta_M$ . Die Störungsfunktion hat die folgende Form:

$$\Omega = -\frac{\beta}{2a}\gamma^2 - m_1 \frac{B^{(3)}}{4}\gamma\gamma_1 \cos W,$$

wenn man nur die hauptsächlichsten säkularen und Librationsglieder mitnimmt. Aus den Differentialgleichungen für die Elemente ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung in  $W$ , die mit genügender Annäherung auf die Gleichung für Pendelschwingungen reduziert werden kann. Die Beobachtungen zeigen, daß in der Tat der Fall des oszillatorischen Pendels statthat, d. h. Librationsbewegung. Die Differentialgleichungen in  $\mu_T$  und  $\mu_M$  ergeben durch doppelte Integration die großen Librationsglieder in den Längen beider Satelliten. Unter der Annahme, daß der Ausschlag von  $W$  etwa  $79^\circ$  beträgt, wie die Beobachtungen zeigen, ferner daß das Verhältnis der Massen der Trabanten  $= \frac{1}{15}$  ist, ergibt sich für die Länge von Mimas eine Amplitude von  $45^\circ$ , für die Länge von Thetys etwa  $2,5^\circ$ , wenn man bei beiden nur die ersten Glieder in Betracht zieht. Das Verhältnis der Koeffizienten der beiden Librationsglieder ergibt einen Wert für das Verhältnis der Massen der beiden Satelliten, während die Periode der Libration sogleich die Masse des großen Satelliten ergibt. Man kann betreffs der Konjunktionen von Mimas und Thetys aussagen, daß sie immer um die Mitte des Bogens statthaben werden, der auf dem Saturnäquator zwischen den aufsteigenden Knoten der beiden Trabanten gelegen ist. Von diesem Punkt können sie sich in maximo bis auf  $45^\circ$  entfernen. Die Dauer der Oszillation ist etwa 68 Jahre.

$\gamma$ ) *Die übrigen Satellitensysteme.* Da Kommensurabilitäten in den Bewegungen der Satelliten dieser Systeme nicht aufzutreten scheinen,

so werden die Gleichungen für die Größen  $h$  und  $k$  beim Neptun- und wohl auch dem Marssystem sich wie die für den V. Jupitermond schreiben lassen, während bei den Uranustrabanten noch auf die gegenseitigen Anziehungen der Satelliten untereinander wird Rücksicht genommen werden müssen.

14. Die kurzperiodischen und die von der Sonne herrührenden Ungleichheiten werden analog den unter VI 2 B 14 und 15 entwickelten Prinzipien hergeleitet und brauchen daher hier nicht weiter besprochen zu werden. Infolge der nahen Kommensurabilitäten der mittleren Bewegungen der drei inneren älteren Jupitermonde sind diese kurzperiodischen Ungleichheiten sehr bedeutend, wie man aus den Kapiteln 13, 14 und 15 von Bd. IV der *Mécanique céleste* von *Tisserand* ersehen kann.

15. Die Bestimmung der Konstanten der Satellitensysteme. Durch die beobachteten säkularen Verschiebungen der Knoten und Apisidenlinien werden für jeden Satelliten theoretisch zwei Gleichungen gegeben, in die neben den von den Potentialen des Planeten und der Ringe herrührenden Konstanten  $k_A, l_A$  und  $k_R, l_R$  die Massen der meßbar einwirkenden Satelliten eintreten. Überall, wo einestheils Abweichungen von der Kreisbahn oder andererseits Abweichung der Trabantenbahnebene von der Äquatorealebene des Planeten sich nicht haben beobachten lassen, scheiden die betreffenden Satelliten aus den die Massen bestimmenden Gleichungen aus. Die Massen der Planeten ergeben sich aus den Elongationsbeobachtungen vorwiegend der äußeren Satelliten. Der VIII. Satellit Jupiters sowie der IX. Satellit Saturns werden in der Zukunft wohl die allerge nauesten Massenbestimmungen ihrer Planeten ergeben. Für die Konstantenbestimmungen im Jupitersystem finden sich in der *Mécanique céleste* von *Laplace* und ebenso in der von *Tisserand* eingehende Erörterungen, die noch in den Diskussionen von *de Sitter* und *Sampson* im Anschluß an *Souillarts* Werk weitergeführt sind. Den Anteil, den der V. Jupitermond dabei hat, ist von *Cohn* und *de Sitter* näher diskutiert worden. Für das Saturnsystem findet man alles Nötige im 16. und 17. Abschnitt der zweiten Pulkovaer Abhandlung von *H. Struve*. Für Uranus werden erst zukünftige genauere Satellitenmessungen ein verlässliches Resultat erbringen. Aus der Knotenverschiebung des Neptunsatelliten wird sich in nächster Zukunft nicht nur die Lage des Neptunäquators, sondern auch die Größe der Abplattung bestimmen lassen. Auch bei Jupiter und Saturn sind die so errechneten Bestimmungen der Lagen des Planetenäquators den durch direkte Messung gewonnenen Werten überlegen. Das gleiche gilt für den

Planeten Mars<sup>105</sup>), dessen Abplattung mit einiger Genauigkeit bisher fast nur auf diesem Wege bestimmt werden konnte. Betreffs der Figur der Planeten und des Saturnrings vgl. VI 2, B 20 (*Oppenheim*)

---

105) Vgl. *Hartwig*, Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Mars und Venus, nach Heliometermessungen ausgeführt auf der Kgl. Sternwarte in Straßburg, Astr. Ges. Publ. 15 (1879); ferner: Untersuchungen über den Durchmesser und die Abplattung des Mars, Astr. Nachr. 150 (1899), p. 313, sowie die unter 91) und 92) zitierten Abhandlungen *H. Struves*; endlich die zahlreichen Beobachtungen von *P. Lowell* in *Lowell-Obs. Annals I* (1898), *Observations of the Planet Mars during the opposition 1894—95, made at Flagstaff (Arizona)*; bes. capt. II, § 3, und ebenda Bull. Nr. 24, 33, 46, 56 (1912).

(Abgeschlossen im Sommer 1916.)

# VI 2, 17. BESTIMMUNG UND ZUSAMMENHANG DER ASTRONOMISCHEN KONSTANTEN.

VON

J. BAUSCHINGER

IN LEIPZIG.

## Inhaltsübersicht.

### Einleitung.

1. Die astronomischen Konstanten.
2. Geodätische Konstanten.
3. Physikalische Konstanten.
4. Astronomische und physikalische Einheiten. Die Gravitationskonstante.

### Erde.

5. Die Sonnenparallaxe. Trigonometrische Bestimmung.
6. Die Aberrationskonstante.
7. Die Lichtgleichung.
8. Die Mondgleichung in der Erdbewegung. Beziehung zwischen Mondmasse und Sonnenparallaxe.
9. Die Präzessions- und die Nutationskonstante.
10. Die Trägheitsmomente und die Abplattung der Erde.
11. Die Schiefe der Ekliptik und der Frühlingspunkt.
12. Tropisches und siderisches Jahr.
13. Sternzeit und mittlere Zeit.
14. Verwendung der Schweremessungen.
15. Die Erdmasse und ihre Beziehung zur Sonnenparallaxe.

### Mond.

16. Die Mondparallaxe.
17. Die parallaktische Ungleichheit in der Mondbewegung.
18. Die Elemente der Mondbahn.
19. Die Störungsglieder der Mondbewegung.
20. Die Mondmasse.

### Planeten.

21. Die Theorien der Sonne und der großen Planeten.
22. Bestimmung der Planetenmassen.
23. Ableitung der Massen von Merkur, Venus und Erde aus den Säkularstörungen.
24. Die Massen der Planeten Merkur, Venus und Erde.
25. Die Sonnenparallaxe aus den Gravitationsmethoden.
26. Die Massen von Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun.

## Literatur.

- Wm. Harkness*, The solar Parallax and its related Constants, including the figure and density of the Earth. Washington Observations for 1885 Appendix III, Washington 1891. (Hierin findet man die ältere Literatur.)
- S. Newcomb*, The elements of the four inner Planets and the fundamental Constants of Astronomy. Suppl. to the American Ephemeris for 1897. Washington 1895. (Zitiert: Fund. Const.)
- F. Tisserand*, Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du Soleil. Obs. de Paris ann., mém. XVI. 1882.
- S. Newcomb*, Investigation of the distance of the Sun and of the elements which depend upon it. Wash. obs. 1865 App. II.
- D. Gill*, Determination of the Solar Parallax. Combination of Results and General Conclusions. Cape Obs. ann. Vol. VI, part 5. 1897.
- F. W. Bessel*, Fundamenta Astronomiae. Regiomonti 1818.
- , Tabulae Regiomontanae Reductionum. Regiomonti 1830.
- U. J. Leverrier*, Annales de l'Observatoire de Paris, t. 1—14. 1855—1877.
- S. Newcomb*, Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington Vol. I—IX. 1882—1912. (Zitiert: Astr. Pap.)
- F. R. Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 2 Bände. Leipzig 1880—1884. (Zitiert: *Helmert*, H. G.)
- P. A. Hansen*, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Leipzig. Ges. Wiss. Abhdl. 6 (1862), p. 91—498, 7 (1864), p. 1—399.

## Einleitung.

**I. Die astronomischen Konstanten.** Als astronomische Konstanten werden hier sowohl diejenigen Größen verstanden, die die Grundeinheiten aller Maßbestimmungen in der Astronomie bilden, wie die Sonnenparallaxe, die Gravitationskonstante u. a., als auch jene, die bei der analytischen Behandlung der Probleme als Integrationskonstante auftreten, wie die Präzessionskonstante, die Planetenelemente u. a. Allen ist gemeinsam, daß sie direkt oder indirekt durch Messung bestimmt werden müssen, daß ihre zahlenmäßige Bestimmung infolge der Fortschritte der Meßkunst also in der Regel eine lange Geschichte hinter sich hat; ferner, daß zwischen ihnen eine ganze Reihe von Zusammenhängen besteht, die nicht nur an sich wichtig sind, sondern auch für die zahlenmäßige Festlegung der Größen und die Prüfung der Theorien bedeutungsvoll werden. Auf die Entwicklungsgeschichte einzugehen, ist hier nicht beabsichtigt; an der Hand der unten zitierten Werke<sup>1)</sup> wird man sie leicht

1) *J. C. Houzeau*, Vade-mecum de l'astronome. App. à la nouv. série des Ann. astr. de l'Obs. de Bruxelles. Bruxelles 1882. — *Wm. Harkness*, The solar Parallax and its related Constants. Washington 1891.

verfolgen können; dagegen ist neben der Angabe der Messungsmethoden und der jetzt zuverlässigsten Werte die Auseinandersetzung der Zusammenhänge das Hauptziel des Artikels. Die Anordnung ist der Inhaltsübersicht zu entnehmen. Da es sich vielfach um eine Nachlese zu anderen Artikeln des Bandes handelt, war eine weitergehende systematische Darstellung zwecklos.

**2. Geodätische Konstanten.** Die in der Astronomie gebrauchten, der Geodäsie zu entlehnenden Konstanten sind die Dimensionen des Erdkörpers und die Bestimmungen der Schwerkraft der Erde. Wir verweisen betreff näherer Ausführungen auf Band VI 1, insbesondere Artikel 3 (*Pizetti*), Nr. 50 und 51 und Artikel 7 (*Helmert*), Nr. 4 und geben hier nur die zuverlässigsten im folgenden verwendeten Resultate:

Halbe große Achse des Erdellipsoids  $\varrho_0 = 6\,377\,397$  m [6,8046435]  
nach *Bessel* (1841).

Abplattung  $\alpha = \frac{1}{299,153} = 0,0033428$  [7,524107<sub>-10</sub>].

Beschleunigung der normalen Schwerkraft (nach *Helmert* (1901)):

$$g = 978,046 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^4 \varphi) \text{ cm,}$$

$\varphi$  = geogr. Breite;

hieraus Abplattung  $\alpha = \frac{1}{298,3}$ .

Länge des Sekundenpendels (nach *Iwanoff*)

$$l = 99,0997 + 0,5240 \sin^2 \varphi - 0,0016 (\sin \varphi' - \frac{5}{3} \sin^3 \varphi') \text{ cm,}$$

$\varphi$  = geogr. Breite,  $\varphi'$  = geoz. Breite;

hieraus Abplattung  $\alpha = \frac{1}{296,6}$ .

Für die geozentrische Breite  $\varphi_1'$ , die aus

$$\sin \varphi_1' = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

bestimmt ist und *mittlere Breite* genannt wird, findet man

$$\varphi_1' = 35^\circ 15' 52''$$

und die dazu gehörige geographische Breite

$$\varphi_1 = 35^\circ 26' 42''.$$

Hierfür wird der entsprechende Radiusvektor der Erde

$$\varrho_1 = [9,9995142] \varrho_0 = 6\,370\,268 \text{ m [6,8041577]}$$

und die Beschleunigung

$$g_1 = 978,046 \times [0,000773] = 979,787 \text{ cm [2,991132]}.$$

Der vertikale Teil der *Zentrifugalkraft* in der Breite  $\varphi$  ist

$$-\frac{4\pi^2 \varrho \cos \varphi \cos \varphi'}{\tau^2},$$

wo  $\varrho$  der zu  $\varphi'$  gehörige Radiusvektor und  $\tau = 86164$  die Rotationsdauer der Erde in Sekunden mittlerer Zeit ist. Für die mittlere Breite  $\varphi_1$  wird sie

$$- 2,253 \text{ cm}$$

und daher die von Zentrifugalkraft befreite Schwere oder die Anziehung

$$G_1 = 979,787 + 2,253 = 982,040 \text{ cm.}$$

Das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere wird aus den gegebenen Ausdrücken berechnet; am Äquator wird es:

$$c_0 = \frac{3,391}{978,046} = 0,0034672 = \frac{1}{288,41},$$

allgemein

$$c = \frac{4\pi^2 \varrho \cos \varphi \cos \varphi'}{g 86164^2} = \frac{4 \varrho \cos \varphi \cos \varphi'}{786164^2}$$

und in der mittleren Breite  $\varphi_1$

$$c_1 = 0,0022997 [7,361671_{-10}] = \frac{1}{434,84}$$

und damit die Anziehung

$$G_1 = g_1(1 + c_1) = l_1 \pi^2(1 + c_1) = L_1 \pi^2.$$

**3. Physikalische Konstanten.** Aus physikalischen Messungen gehen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und die Dichtigkeit der Erde hervor.

Die älteren Werte für  $c$  sind von *Harkness*<sup>2)</sup> S. 29 zusammengestellt. Als zuverlässigster Wert kann der aus den Versuchen von *Michelson* und *Newcomb*<sup>3)</sup> hervorgehende gelten:

$$c = 299860 \pm 30 \text{ km pro Sekunde.}$$

Er wird bestätigt durch neuere Versuche von *Perrotin*<sup>4)</sup>, der aus zwei Reihen findet:

$$c = 299880 \pm 50 \text{ km pro Sekunde.}$$

Wir haben im folgenden

$$c = 299865 \pm 26 \text{ km pro Sekunde}$$

angenommen.

Über die Dichtigkeitsbestimmungen der Erde sei auf *Encykl. V 1 Art. 2 (Zenneck)*, Nr. 9 verwiesen, wo gefunden wird:

$$A = 5,513;$$

daraus folgt die in Nr. 4 abgeleitete Gravitationskonstante:

$$0,6675 \times 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \text{ gr}^{-1}.$$

2) *W. Harkness*, The solar Parallax . . . , s. Literatur.

3) *Astr. Pap.*, Vol. II, p. 202.

4) *Perrotin*, Paris C. R. 1902, p. 881.

4. **Astronomische und physikalische Einheiten.** Die **Gravitationskonstante.** Das jetzt in der Physik gebräuchliche System der Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit, das Zentimeter-Gramm-Sekundensystem (wobei Gramm = Masse =  $m$ , nicht gleich Gewicht, sondern Gewicht =  $mg$ ,  $g$  = Beschleunigung), wird in der Astronomie nur dann verwendet, wenn sie sich auf physikalische Maßbestimmungen bezieht; im übrigen bedient sie sich, um zu große Zahlen zu vermeiden, seit jeher eines besonderen Systemes von Einheiten.

1. **Längeneinheit** ist die halbe große Achse  $a$  der Erdbahnellipse mit der kleinen Abänderung, die weiter unten besprochen wird. Um die Beziehung zu einem irdischen Maß herzustellen, wird der Winkel  $\pi''_{\odot}$  eingeführt, unter welchem der Radius des Erdäquators  $\rho_0$ , der durch geodätische Messungen bestimmt wird, in der Entfernung  $a$  gesehen wird; dieser Winkel, die Sonnenparallaxe, ist durch astronomische Messungen bekannt; es wird

$$a = \frac{\rho_0}{\pi''_{\odot} \sin 1''}.$$

Mit  $\rho_0 = 637739715$  [8,80464346] Zentimeter folgt:

$$\text{astr. Längeneinheit} = \frac{[14,1190686]}{\pi''_{\odot}} \text{ cm}$$

oder mit  $\pi''_{\odot} = 8''79$

$$\text{astr. Längeneinheit} = [13,1750797] \text{ cm.}$$

In dieser Einheit werden alle Entfernungen im Sonnensystem angegeben.

In der Stellarastronomie wird diejenige Länge als Einheit gebraucht, in welcher die eben besprochene  $a$  unter einem Winkel von  $1''$  erscheint; diese Länge, *Sternweite* genannt, ist also

$$1 \text{ Sternweite} = 206264,8 \text{ Erdbahnhalfachsen.}$$

Ist  $p''$  die Parallaxe eines Sternes, so ist  $\frac{1}{p''}$  seine Entfernung in Sternweiten.

2. **Zeiteinheit** ist der mittlere Sonnentag, dessen Definition in Nr. 13 gegeben ist; er ist gleich 1,002737909 Rotationen der Erde um ihre Achse und wird in 86400 mittlere Zeitsekunden geteilt. Damit ist die Beziehung zwischen physikalischer und astronomischer Zeiteinheit gegeben. Eine Rotation der Erde wird in 86164,091 mittl. Zeitsekunden ausgeführt; die Erde rotiert also mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\left( \frac{2\pi}{86164,091} \right) \text{ Radian} = 15''0411 \text{ in der Sekunde.}$$

3. Die Einheit der *Masse* wird in die Astronomie durch das *Newtonsche* Gesetz eingeführt, wonach die Anziehung zwischen zwei Massen  $m$  und  $m'$  in der Entfernung  $r$  gegeben ist durch  $\frac{k^2 m m'}{r^2}$ ; hierin ist  $k^2$  die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung. Hat man  $k^2$  für die Längeneinheit bestimmt, so ist dadurch die Masseneinheit festgelegt. Masse im astronomischen Sinn ist also nicht gleich Anziehungskraft, sondern entspricht dem, was die Physik Masse nennt, nicht dem, was die Physik Gewicht nennt. Die analytische Behandlung des Problems der Bewegung der zwei Körper  $m$  und  $m'$  führt auf die Gleichung:

$$(1) \quad n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k^2(m+m')}{a^3}}$$

(das dritte *Keplersche* Gesetz), worin  $T$  die Umlaufszeit,  $a$  die große Halbachse der Bahnellipse ist. Nimmt man als die beiden Körper die Sonne  $m$  und die Erde  $m'$ , legt die Längen- und die Zeiteinheit wie oben fest, benutzt die aus anderen Erscheinungen hervorgehende Tatsache, daß die Anziehungskraft der Erde auf die Einheit der Entfernung der 354 710<sup>te</sup> Teil von der der Sonne ist, und nimmt für  $T$  die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne = 365,2563835 Tage (beides nach den Annahmen von *Gauß*<sup>5)</sup>), so wird obige Beziehung:

$$k^2 m \left(1 + \frac{1}{354710}\right) = \left(\frac{2\pi}{365,2563825}\right)^2$$

und gibt in  $k^2 m = 0,0002959122082$  [6,4711628828<sub>-10</sub>]

die Anziehungskraft der Sonne auf die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung und in der Einheit der Zeit. Setzt man  $k^2$  gleich obiger Zahl 0,0002959122082, so ist die Masse der Sonne  $m = 1$  zu nehmen und ist damit die Masseneinheit definiert. Die Konstante  $k^2$  (*Gaußsche* Konstante, Attraktionskonstante des Sonnensystems, Anziehungskraft der Sonne) ist oben nach *Gauß* mit Werten der Erdmasse und des siderischen Jahres gerechnet, die nicht mehr als richtig bezeichnet werden können. Statt aber die Konstante den jeweiligen besten Werten dieser beiden Größen anzupassen, zieht man es vor, sie ungeändert beizubehalten und dafür die Längeneinheit einer leichten Änderung zu unterwerfen, damit die Richtigkeit der Gleichung (1) erhalten bleibt. Mit den Werten

$$m' = \frac{1}{329390} \quad \text{und} \quad T = 365,25636042$$

5) *C. F. Gauß*, *Theoria motus corporum coelestium*. 1809, art. 1 = Werke, Band 7.

wird  $\log a = 0,000000013$ ,

und die Einheit der Entfernung ist also streng genommen nicht die die halbe Erdbahnachse, sondern eine Größe, in der ausgedrückt die halbe Erdbahnachse den eben angegebenen Wert hat. Der Unterschied ist in den Sonnen- und Planetentafeln kaum merkbar.

Würde man als Zeiteinheit die Dauer von  $1:k = 58,13244087$  mittleren Sonnentagen einführen, so würde als Attraktionskonstante sich 1 ergeben. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hiervon bei theoretischen Untersuchungen vielfach Gebrauch gemacht.

Wird die Sonnenmasse = 1 gesetzt, so erscheinen die Planetenmassen als reine Zahlenfaktoren  $m', m'', \dots$ , die mit  $k^2$  multipliziert die Anziehungskräfte derselben in der Einheit der Entfernung geben. So wird die Anziehungskraft von Erde + Mond in der Entfernung 1

$$\frac{0,0002959122082}{330200}$$

und die des Erdkörpers allein (Mondmasse =  $\frac{1}{81,53}$  Erdmassen gesetzt)

$$\frac{0,0002959122082}{334250} = [0,947092_{-10}].$$

Um diese Zahl in das cm/sec-System der Physik überzuführen, ist sie mit

$$\frac{14978738000000^3}{86400^3} = [29,6533981]$$

(entsprechend dem *Besselschen* Radius des Erdäquators und der zu obiger Masse gehörigen Sonnenparallaxe  $8''782$ ) zu multiplizieren und wird dann  $[20,600490] = 398556 \times 10^{15}$ .

Dies ist also die Anziehungskraft der Erde in einer Sekunde und in 1 cm Entfernung vom Erdmittelpunkt.

Diese Größe läßt sich durch Messung der Länge des Sekundenpendels auch physikalisch bestimmen. Nach *Helmert* (s. Nr. 2) wird für die Breite  $\varphi_1'$ , deren  $\sin$  gleich  $1:\sqrt{3}$  ist,

die Schwere . . . . .  $g_1 = 979,787 \text{ cm/sec}^2$ ,

die Korr. für Zentrifugalkraft . . . . . + 2,253

also die Anziehung der Erde an der

Oberfläche der Breite  $\varphi_1'$  . . . . .  $982,040 \text{ cm/sec}^2$ . [2,992130]

Der Radius der Erde in der Breite  $\varphi_1'$  ist nach *Bessel*

$$637026800 \text{ cm} \quad [8,8041577]$$

und folglich die Anziehung in 1 cm/sec<sup>2</sup>

$$982,040 \times 637026800^2 = [20,600444] = 398515 \times 10^{15}.$$

Für die Anziehungskraft des Mondes erhält man in denselben Einheiten

$$[18,689173] = 488847 \times 10^{13}$$

und für die der Sonne

$$[26,124561] = 133218 \times 10^{21}$$

Die Anziehung eines Kubikzentimeters Masse von der mittleren Dichtigkeit der Erde  $\rho = 5,513$  erhält man aus obiger Zahl  $[20,600490]$ , wenn man sie durch die Masse der Erde in Grammen, also durch

$$\frac{[27,034565] \text{ Kubikzentimeter}}{[0,741388] \text{ Dichte}} \\ [27,775953] \text{ Gramm}$$

dividiert. Es ergibt sich somit in

$$[2,824537_{-10}] = 0,6676 \times 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \text{ gr}^{-1}$$

die Gravitationskonstante im Einheitensystem der Physik.

### Die Konstanten der Erde und der Erdbewegungen.

5. Die Sonnenparallaxe. Trigonometrische Bestimmung. Unter Sonnenparallaxe versteht man in abgekürzter Bezeichnung den Winkel  $\pi_{\odot}$ , unter welchem im Mittelpunkt der Sonne der Radius des Erdäquators  $\rho_0$  erscheint, wenn die Erde sich in ihrer mittleren Entfernung  $a$  von der Sonne im Horizont eines Punktes des Erdäquators befindet; die vollständige Bezeichnung ist *Äquatorealhorizontalparallaxe*. Um  $a$  in irdischem Maß auszudrücken, hat man die Beziehung:

$$\sin \pi_{\odot} = \frac{\rho_0}{a} \quad \text{oder} \quad a = \frac{\rho_0 \cdot 206264,8}{\pi_{\odot}}$$

Mit den Werten  $\rho_0 = 6377,397$  km und  $\pi_{\odot} = 8''80$  wird

$$a = 149480976 \text{ km.}$$

Die *trigonometrische Methode* zur Bestimmung von  $\pi_{\odot}$  wird, da sich die Sonnenscheibe zu genauen Messungen nicht eignet, nicht direkt auf die Sonne angewendet, sondern auf einen der Erde möglichst nahen Planeten des Sonnensystems, aus dessen gemessener Entfernung dann unter Heranziehung der Eigenschaften der Gravitation (des dritten *Keplerschen Gesetzes*) auf die Entfernung der Erde von der Sonne geschlossen wird. Wegen der näheren Ausführung sei auf den Artikel VI 2, 2 (*Cohn*) Nr. 9b verwiesen, hier werden nur die *Resultate* aufgeführt, und zwar nur jene, die heute noch als stimm- berechtigt gelten können:

	$\pi_{\odot}$	Mittl. Fehler	Gew.
1. Aus der Marsopposition 1877, beobachtet von <i>Gill</i> auf Ascension <sup>6)</sup> . . . . .	8" 780	$\pm 0''020$	1,0
2. Aus Kontaktbeobachtungen während der Venusdurchgänge 1761, 1769, 1874, 1882 nach der Diskussion von <i>Newcomb</i> <sup>7)</sup> . . . . .	8" 794	$\pm 0''022$	0,8
3. Aus Heliometer- und photogr. Messungen während der Venusdurchgänge 1874 und 1882 nach der Diskussion von <i>Newcomb</i> <sup>8)</sup> . . . . .	8" 857	$\pm 0''023$	0,8
4. Aus Heliometermessungen der kleinen Planeten Victoria, Sappho und Iris 1888/89 nach <i>Gills</i> Plan <sup>9)</sup> . .	8" 802	$\pm 0''007$	8
5. Aus Meridianbeobachtungen der kleinen Planeten Victoria, Sappho und Iris 1888/89 nach der Diskussion von <i>Aucers</i> <sup>10)</sup> . . . . .	8" 806	$\pm 0''044$	0,2
6. Aus Beobachtungen des Planeten Eros 1900/01, mikrometrisch, nach der Diskussion von <i>Hinks</i> <sup>11)</sup> . . . . .	8" 806	$\pm 0''006$	11
7. Aus Beobachtungen des Planeten Eros 1900/01, photographisch, nach <i>Hinks</i> <sup>12)</sup> . . . . .	8" 807	$\pm 0''004$	25

Die Gewichte sind unter Annahme des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit  $\pm 0''020$  angesetzt und führen zu

$$\pi_{\odot}'' = 8''806 \pm 0''003 \text{ (trig. Meth.)}$$

Es können nur solche Messungsmethoden bei Bestimmung dieser wichtigsten Zahl der Astronomie zugelassen werden, bei denen kein unkontrollierbarer systematischer Fehler zu befürchten ist. Hierüber haben *Newcomb* in Fund. Const. S. 154 und *Gill*<sup>13)</sup> Bemerkungen gemacht.

Außer der direkten hat man noch vier indirekte Methoden, zur Kenntnis der Sonnenparallaxe zu gelangen, die auf den Eigenschaften des Lichtes und der Gravitation beruhen. Man sehe die Nr. 6, 8, 15, 17 und die Zusammenstellung in Nr. 25.

**6. Die Aberrationskonstante.** Durch die Theorie der jährlichen Aberration (siehe VI 2, 2 (*Cohn*) Nr. 7a) wird die Größe

$$A = \frac{na \sec \varphi}{c} \quad \text{oder} \quad A'' = \frac{na \sec \varphi}{c} 206264'' 8$$

6) *D. Gill*, Account of a determination of the solar parallax from obs. of Mars, made at Ascension in 1877. Lond. Astr. Soc. mem. 46 (1880/81).

7) *S. Newcomb*, Fund. Const., p. 146.

8) Id., p. 144.

9) Cape Obs. Ann. VI (1897), part. 6, p. 11.

10) Id., part 5, p. [95].

11) *A. R. Hinks*, Solar Parallax Papers, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1910), p. 603.

12) Id., vol. 69, p. 566.

13) *D. Gill*, On Solar Parallax. Observatory I (1878).

eingeführt, die Aberrationskonstante, die in der Verbindung der linearen Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn mit der Lichtgeschwindigkeit die wichtigste Konstante der Astronomie und Physik ist. Da  $n'' = n 206264''8$  die mittlere Winkelbewegung der Erde um die Sonne,  $a$  die halbe große Erdbahnnachse,  $\varphi$  der Exzentrizitätswinkel der Erdbahnellipse ist, so stellt der Zähler  $na \sec \varphi$  von  $A$  das Mittel aus der größten (Perihel-) und der kleinsten (Aphel-) Lineargeschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vor, der Nenner ist die Lichtgeschwindigkeit  $c$ ,  $A$  also das Verhältnis beider; oder  $A$  ist die mittlere Erdgeschwindigkeit selbst, wenn  $c$  als Einheit genommen wird. Durch Einführung der Sekunde mittlerer Zeit als Zeiteinheit und des Kilometer als Längeneinheit wird aus  $A''$

$$(2) \quad A'' = \frac{n'' \varrho_0 \sec \varphi \cdot 206\,264,8}{86\,400 \pi'' c} = \frac{[7,732622]}{54\,028\,370} \pi'' c.$$

Diese Beziehung zwischen Aberrationskonstante, Sonnenparallaxe und Lichtgeschwindigkeit ( $n'' = 3548''193$ ,  $\varrho_0 = 6377,397$  km und  $\varphi = 0^\circ 57' 35''3$  können als völlig bekannte Größen betrachtet werden) wird uns unten weiter beschäftigen; hier gehen wir zunächst auf die direkte astronomische Bestimmung der Aberrationskonstante ein. Sie gehört zu den wichtigsten, aber auch schwierigsten Aufgaben der praktischen Astronomie; denn da die Beobachtungen, bei denen im Gestirnsort infolge der Aberration die größten Ausschläge eintreten, zu entgegengesetzten Jahres- und Tageszeiten angestellt werden müssen, sind systematische Fehler nur bei besonderen Anordnungen der Messungen und bei besonderen Vorsichtsmaßregeln zu beseitigen. Die Diskussion der Aberrationsformeln (dieser Band S. 56) läßt erkennen, daß man vier verschiedene Methoden anwenden kann: 1. Messung von Rektaszensionen eines Polsternes, 2. Messung von Meridianzenitdistanzen eines Polsternes, beides in oberer und unterer Kulmination, 3. Durchgangsbeobachtungen von Zenitsternen im ersten Vertikal nach dem Vorschlag von *W. Struve*<sup>14)</sup>, 4. die *Talcottsche* Methode der Messung von Unterschieden der Zenitdistanzen je zweier in nahezu gleichen Abständen nördlich und südlich vom Zenit kulminierender Sterne nach dem Vorschlag von *Küstner*.<sup>15)</sup> Die Resultate aus allen vorhandenen Bestimmungen zu einem definitiven Wert der Konstante zu-

14) *F. G. W. Struve*, Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes . . . St. Pétr. mém. tom. 3 (1844).

15) *F. Küstner*, Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationskonstante. Berlin, Sternw. Ergebn., Heft 3 (1888).

sammenzustellen, ist dreimal unternommen worden, von *Harkness*<sup>16)</sup>, *Newcomb*<sup>17)</sup> und *Chandler*<sup>18)</sup> mit den Ergebnissen:

<i>Harkness</i> . . . . .	20"466 ± 0"011	wahrsch. F.
<i>Newcomb</i> , Pulkowaer Bestimm. . .	20"493 ± 0"011	
"    Anderweitige Bestimm. . .	20"463 ± 0"013	
<i>Chandler</i> , Benutzte Bestimm. . .	20"521 ± 0"005	
"    Ausgeschl. Bestimm. . .	20"450.	

Der *Harkness*sche Wert kommt nicht mehr in Betracht, weil dabei der Veränderlichkeit der Polhöhe, die 1888 durch *Küstner* aufgedeckt wurde, noch nicht Rechnung getragen ist. Diese Entdeckung machte eine Neureduktion aller älteren Beobachtungsreihen notwendig, die durch *Chandler* vorgenommen wurde, von dessen Resultaten auch *Newcomb* Gebrauch macht. *Newcomb* faßt ohne ersichtlichen Grund alle Pulkowaer und alle anderweitigen Bestimmungen zu je einem Wert zusammen, wie in obiger Übersicht bereits angegeben. Am durchgreifendsten verfuhr *Chandler*, indem er von 67 Bestimmungen 24 meist ältere wegen des Verdachtes systematischer, nicht mehr zu ermittelnder Fehler ausschloß. Wir geben eine Übersicht seiner Werte:

		Gew.
1. Aus 3 Pulkowaer Reihen Rektasz. von Polaris . . . . .	20"53	6
2. Aus 10 Reihen Meridianzenitdistanzen von Polsternen . . . .	20"514	22
3. Aus 3 Pulkowaer Reihen Durchgangsbeobacht. im I. Vert. . . .	20"525	24
4. Aus 25 Reihen nach <i>Küstners</i> Methode . . . . .	20"523	151
5. Aus 2 Reihen nach <i>Loewys</i> Methode <sup>19)</sup> . . . . .	20"48	5
6. Aus 7 Reihen Rektasz. von Polsternen . . . . .	[20"45]	5
7. Aus 13 Reihen Meridianzenitdistanzen . . . . .	[20"46]	5
8. Aus 2 Reihen Durchgangsbeobachtungen im I. Vert. . . . .	[20"43]	2
9. Aus 2 Reihen nach <i>Küstners</i> Methode . . . . .	[20"44]	1

Die Werte 1. bis 5. ergeben

$$A = 20''521 \quad \pm 0''007 \text{ mittl. F.}$$

Werden die von *Chandler* ausgeschlossenen Werte 6. bis 9. hinzugezogen, so wird

$$A = 20''517.$$

Der abgerundete Wert

$$A = 20''52 \quad \pm 0''007 \text{ mittl. F.}$$

muß also unter allen Umständen als wohlgesichertes Ergebnis aller bisherigen Messungen betrachtet werden.

16) *Wm. Harkness*, (s. Literatur) p. 27 (1891).

17) *Fund. Const.*, p. 135 (1895).

18) *S. C. Chandler*, *The Probable Value of the Constant of Aberration. Astr. Journ.*, vol. 23, p. 1 (1903).

19) Diese Methode (*Paris C. R.* 112 (1890)) wurde hier als praktisch fast un- ausführbar nicht weiter berücksichtigt.

Durch die Aberrationskonstante wird die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn  $v_0$  in ihrem Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Diese Geschwindigkeit hängt nun einerseits mit den Erdbahnelementen zusammen  $\left(n = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}\right)$

$$v_0 = na \sec \varphi = \frac{2\pi}{T_s} a \sec \varphi = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}} \sec \varphi \quad (m = m'' + D)$$

und kann daraus berechnet werden, läßt sich aber auch direkt durch spektrographische Methoden messen, wie zuerst *Küstner*<sup>20)</sup> vorge schlagen und ausgeführt hat. Daß man hieraus dann die Sonnenparallaxe ableiten kann, zeigt Gl. (2); das primäre Resultat ist aber die Aberrationskonstante und gehört daher an diese Stelle; denn durch die Linienverschiebung im Spektrum direkt gemessen wird  $\frac{v_0}{c}$ . *Küstner* findet hierfür

$$\frac{29,617 \pm 0,057}{299865 \pm 26} = 0,000098766 = 20''37 \pm 0'04.$$

Diesem vorläufigen Wert sind weitere Bestimmungen nach dieser Methode noch nicht gefolgt.

Die oben abgeleitete Beziehung (2) zwischen  $A$ ,  $\pi''$  und  $c$  wird, wenn man  $c = 299865$  km/sec einführt:

$$(3) \quad A''\pi'' = [2,255696].$$

Folgende Tafel gibt zusammengehörige Werte von  $A''$  und  $\pi''$ :

20''470 . . .	8''8020	20''510 . . .	8''7848
480 . . .	7976	520 . . .	7805
490 . . .	7933	530 . . .	7762
500 . . .	7891	540 . . .	7719.

Die Konstante der *täglichen Aberration* (siehe diesen Band, S. 54), hervorgehend aus der Rotationsgeschwindigkeit  $\vartheta$  der Erde (in 1<sup>o</sup> mittl. Zeit)

$$A_t = \frac{e_0}{c} \vartheta = \left(\frac{e_0}{c} 15 \times 1,002739\right)'' = 0''320,$$

wird immer aus  $e_0$  und  $c$  berechnet, da sie wegen ihrer Kleinheit direkt nicht beobachtbar ist.

**7. Lichtgleichung.** Die Lichtgleichung, d. h. die Zeit, welche das Licht zur Zurücklegung der halben großen Achse der Erdbahn gebraucht, wird auf astronomischem Wege durch die Beobachtung der Verfinsterungen der Jupitersatelliten bestimmt. Es liegen nur zwei

20) *F. Küstner*, Eine spektrographische Bestimmung der Sonnenparallaxe. Astr. Nachr. 169 (1905), p. 241.

Diskussionen, von *Delambre*<sup>21)</sup> und von *Glaserapp*<sup>22)</sup>, vor mit den Resultaten:

$$\text{Delambre } 493^{\circ}2$$

$$\text{Glaserapp } 500^{\circ}8 \pm 1^{\circ}2,$$

deren Mittel  $L = 497^{\circ}0$

nur als Wert von geringem Gewicht geschätzt werden kann. Man bestimmt die Lichtgleichung jetzt sicherer aus der Erdbahnhalfachse  $a$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$ :

$$L = \frac{a}{c} = \frac{206\,264,8 \times \varrho_0}{c \pi_{\odot}}$$

**8. Die Mondgleichung in der Erdbewegung. Beziehung zwischen Mondmasse und Sonnenparallaxe.** Die Erde bewegt sich im Laufe eines Monats um den Schwerpunkt von Erde und Mond, der, abgesehen von den Planetenstörungen, in elliptischer Bewegung sich befindet. Diese Schwankung wird als Störungsglied in die Erd-(Sonnen-)bewegung eingeführt und hängt in erster Linie vom Verhältnis  $\mu$  der Mond- zur Erdmasse ab. Der analytische Ausdruck des Hauptgliedes dieser sog. Mondgleichung für die Störung in Länge ist:

$$\frac{\mu}{1 + \mu} \frac{\pi_{\odot}''}{\sin \pi_{\odot}} \sin(L_{\text{D}} - L_{\odot}),$$

wo  $L_{\text{D}}$  und  $L_{\odot}$  die mittleren Längen,  $\pi_{\text{D}}$  und  $\pi_{\odot}$  die Parallaxen von Mond und Sonne sind. Der Koeffizient

$$L = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{\pi_{\odot}''}{\sin \pi_{\odot}}$$

kann durch Beobachtungen der Sonne zu den Zeiten der Mondquadraturen ( $L_{\text{D}} - L_{\odot} = \pm 90^{\circ}$ ) bestimmt werden und leidet natürlich unter der Unsicherheit der Sonnenbeobachtungen überhaupt; systematische Fehler jedoch sind nicht zu befürchten, da stets beide Sonnenränder beobachtet werden können und in beiden Quadraturen der Betrag systematischer Beobachtungsfehler derselbe ist. Immerhin war es ein Fortschritt, als *Gill*<sup>23)</sup> einen neuen Weg erkannte,  $L$  durch schärfere Beobachtungen zu ermitteln. Statt der Sonne beobachtet er mehrere Lunationen hindurch einen Körper des Sonnensystems, der nahe an der Erde ist und sich scharf beobachten läßt, z. B. einen kleinen Planeten (Viktoria); in die geozentrischen Örter desselben gehen die Koordinaten der Sonne ein, die die Mondgleichung ent-

21) *J. B. J. Delambre*, Tables éclipiques des satellites de Jupiter. Paris 1817.

22) *S. Glaserapp*, Untersuchung der Verfinsterungen der Jupitersatelliten (russisch). St. Petersburg 1874. (Referat von *Downing*, The Observatory XII, 1889.)

23) Lond. Astr. Soc. Month. Not. 54 (1894); Cape Obs. ann. VI, p. 536.

halten. Man kann also aus ihnen Korrekturen der benutzten Mondgleichung ableiten. Da  $\pi_D$  gut bekannt ist, führt *Gill*

$$(4) \quad x = \frac{\mu}{1 + \mu} \pi''_{\odot}$$

als Unbekannte ein, die mit  $L$  durch

$$L = \frac{x}{\sin \pi_D}$$

zusammenhängt.

Aus Sonnenbeobachtungen auf sieben Sternwarten 1820—1864 fand *Newcomb* (Fund. Const., p. 142)

$$L = 6''485 \pm 0''027 \text{ mittl. F.}$$

*Gill* (Cape obs. ann., vol. VI, part 6, p. 29; korrigiert nach Monthly, Not., vol. 70, p. 74) fand

$$L = 6''413 \pm 0''013.$$

*Hinks* (Monthly Not. 70 (1909), p. 72) fand aus den Beobachtungen des Eros 1900/01

$$L = 6''431 \pm 0''005.$$

Werden diese drei Werte von  $L$  nach Maßgabe ihrer mittleren Fehler vereinigt, so ergibt sich

$$L = 6''430 \pm 0''005 \text{ mittl. F.}$$

und daraus mit  $\sin \pi_D = [8,21990]$

$$x = 0,10669 \pm 0,00008.$$

Setzt man  $\mu = 1/E$ , so wird

$$\frac{\mu}{1 + \mu} = \frac{1}{1 + E}$$

und daher die Gleichung (4)

$$(5) \quad (1 + E)x = \pi''_{\odot}.$$

Diese Beziehung zwischen der Mondmasse und der Sonnenparallaxe wird zur Bestimmung der Mondmasse benutzt (siehe Nr. 20), kann aber auch, allerdings mit geringem Vorteil, zur Ermittlung der Sonnenparallaxe verwendet werden, wenn die Mondmasse anderweitig bekannt geworden ist (Nutation).

**9. Die Präzessions- und die Nutationskonstante.** Über Theorie und Verwendung der Präzession und Nutation ist auf die Artikel VI 2, 2 (*Cohn*) und VI 2, 22, sowie auf die Lehrbücher der Mechanik des Himmels<sup>24)</sup> zu verweisen.

24) Z. B. *F. Tisserand*, Mécanique céleste, t. II, p. 371; *Th. Oppolzer*, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Band I<sup>2</sup>, p. 124 (gibt die Entwicklungen in größter Ausdehnung); *J. Bauschinger*, Bahnbestimmung der Himmelskörper, p. 51; *S. Newcomb*, A Compendium of Spherical Astronomy, p. 225.

Infolge der Anziehung von Mond und Sonne auf das Erdsphäroid geht der Knoten des Erdäquators auf der *festen* Ekliptik (für eine bestimmte Epoche, hier durchweg 1850,0) mit einer Geschwindigkeit zurück, die Lunisolarpräzession in Länge genannt wird und deren Betrag durch die Theorie in der Form geboten wird:

$$\begin{aligned} \text{Lunisolarpräzession} &= P_{\text{D}} + P_{\text{S}} \text{ in einem jul. Jahr} \\ (6) \quad P_{\text{D}} &= [5,975052] \cos \varepsilon \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C}, \\ P_{\text{S}} &= [3,72509] \cos \varepsilon \frac{C-A}{C}. \end{aligned}$$

Die Wirkung des Mondes ist durch  $P_{\text{D}}$ , die der Sonne durch  $P_{\text{S}}$  gegeben. Die mit ihren Logarithmen angesetzten Zahlenkoeffizienten<sup>25)</sup> sind lediglich aus den Elementen der Mond- und Sonnenbahn zusammengesetzt und können als Konstante betrachtet werden. Es ist ferner

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{Schiefe der Ekliptik für 1850,0} = 23^{\circ}27'31''68, \\ \mu &= \text{Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse,} \\ A &= \text{Trägheitsmoment der Erde, bezogen auf Achsen im} \\ &\quad \text{Äquator,} \\ C &= \text{Trägheitsmoment der Erde, bezogen auf die Drehungs-} \\ &\quad \text{achse der Erde.} \end{aligned}$$

Hiernach ist die Größe

$$(7) \quad \mathbf{P} = \frac{P_{\text{D}} + P_{\text{S}}}{\cos \varepsilon} = \left\{ [5,975052] \frac{\mu}{1+\mu} + [3,72509] \right\} \frac{C-A}{C}$$

eine absolute Konstante. *Newcomb* führt sie als „Präzessionskonstante“ ein, während man früher die unten eingeführte allgemeine Präzession mit diesem Namen belegte. Da aber  $\varepsilon$  sich stark ändert, ist  $P_{\text{D}} + P_{\text{S}}$  ebenfalls starken Änderungen unterworfen, und es ist daher vorzuziehen,  $\mathbf{P}$  als „Präzessionskonstante“ zu verwenden.

Die Rückwärtsbewegung des Knotens des Erdäquators auf der durch die Planetenstörungen *bewegten* Ekliptik geschieht mit einer Geschwindigkeit, welche „allgemeine Präzession in Länge“ genannt wird. Ihr Betrag wird erhalten, wenn zur Lunisolarpräzession die sogenannte „Planetenpräzession“ hinzugefügt wird, deren Wert  $-\alpha \sin L \cotg \varepsilon = -0''1231$  lediglich durch die Theorie aus den Planetenmassen berechnet wird. Es wird also

$$(8) \quad \text{Allgemeine Präzession} = \mathbf{P} \cos \varepsilon - 0''1231.$$

Aus diesen Größen können die entsprechenden Geschwindigkeiten bezogen auf das System des Äquators berechnet werden, nämlich die

25) *S. Newcomb*, Fund. Const., p. 132.

- (9) Allgemeine Präzession in Rektasz. =  $m = P \cos \varepsilon^2 - 0''1342$ ,  
 Lunisolarpräzession in Dekl. . . . =  $n = P \cos \varepsilon \sin \varepsilon$ .

Diese beiden Größen  $m$  und  $n$  können und müssen aus den Beobachtungen der Fixsterne bestimmt werden,  $m$  aus den Rektaszensionen,  $n$  aus den Deklinationen. Man benutzt hierzu Beobachtungen derselben Gestirne zu zwei möglichst voneinander entfernten Epochen. Da bei allen diesen Bestimmungen naturgemäß wenigstens teilweise dasselbe Beobachtungsmaterial verwendet wird, wird hier auf die Anführung früherer Bestimmungen verzichtet und nur die neueste von *Newcomb* ausgeführte angegeben<sup>26)</sup>: die instantanen Geschwindigkeiten für ein *tropisches* Jahr und gültig für die Epoche 1850 ergaben sich zu:

$$m = 46''0711, \quad n = 20''0511,$$

und hieraus dann:

- (10) Allgemeine Präzession in Länge  $50''2453$ ,  
 Lunisolarpräzession „ „  $50''3684$

und schließlich

- (11)  $P = 54''9066 - 0''0000364 T$

( $T$  in Jahrhunderten von 1850 aus gezählt). Es ist hier die geringe Veränderlichkeit von  $P$  mitangegeben, die eine Folge der säkularen Änderung der Exzentrizität der Erdbahn ist, welche auf die Zahlenwerte in (7) einwirkt; sie ist natürlich rein theoretisch.

Die Bestimmung der Präzessionskonstante ist eine schwer zu befriedigende Aufgabe. Schon die Verwendung recht ungleichförmigen Materiales, wie es durch die Verschiedenheit der Epochen geboten ist, erschwert die Lösung. Neuerdings erkannte systematische Verfälschungen der Beobachtungen, wie die Helligkeitsgleichung bei Meridiandurchgängen, lassen sich bei den älteren Beobachtungen nicht mehr berücksichtigen, ebenso die Unterschiede, die bei Tag- und Nachtbeobachtungen auftreten. Aber auch prinzipielle Bedenken machen sich dagegen geltend, daß man in dem bestimmten Werte  $P$  das vor sich habe, was er nach Gleichung (7) darstellen soll. Wenn die benutzten Sterne einem System angehören, das eine Rotationsbewegung ausführt, dann läßt sich diese von der Präzessionsbewegung nicht trennen, da man keine absolut feste Richtung am Himmel hat.<sup>26a)</sup> An-

26) *S. Newcomb*, A new determination of the Precessional Constant. Wash. Astr. Pap., vol. VIII, part 1. Washington 1898. Die definitiven Werte stehen Seite 72.

26a) *H. Seeliger*, Über die sogenannte absolute Bewegung. München Ber. 36 (1906).

dere Schwierigkeiten bereiten die Eigenbewegungen der Fixsterne und ihr systematischer Charakter in der Apexbewegung. Die ausschließliche Benutzung kleinster Sterne, bei denen noch am ehesten die genannten Einflüsse verschwinden werden, scheidet gegenwärtig noch an dem Mangel von älterem Beobachtungsmaterial. Aber die Fragen, die in nicht ferner Zeit an die Stellarastronomie herantreten werden, werden nachdrücklich auf die Notwendigkeit einer möglichst einwandfreien Kenntnis der Präzessionskonstante hinweisen.

Das Hauptglied der *Nutation* in Schiefe, mit dem das Hauptglied der *Nutation* in Länge theoretisch zusammenhängt, hat, wie die Theorie lehrt, die Zusammensetzung

$$(12) \quad N = [5,40289] \cos \varepsilon \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{C - A}{C},$$

wo wieder der logarithmisch angesetzte Zahlenfaktor eine genau bekannte, aus den Elementen der Mond- und Sonnenbahn berechenbare Größe ist. Insbesondere geht in ihn ein die mittlere Bewegung des Mondknotens auf der Ekliptik, die bekanntlich den Knoten der Mondbahn in etwa  $18\frac{2}{3}$  Jahren durch den ganzen Umkreis führt. Die Länge dieses Knotens ist auch das Argument der Hauptglieder der *Nutation*. Mit dem Wert von  $\varepsilon = 23^{\circ}27'31''68$  für 1850,0 wird die Gleich. (12)

$$(13) \quad N = [5,36542] \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{C - A}{C}.$$

Die Bestimmung der *Nutationskonstante* aus Gestirnsbeobachtungen geschieht, wie die Gleichungen, dieser Band, S. 40, lehren, durch Verfolgung mehrerer Gestirnsörter, am besten von Polsternen, durch eine ganze Periode des Mondknotenumlaufes. Sind die Gestirne durch die Stunden der Rektaszension wohl verteilt, so ist zu erwarten, daß sich alle systematischen Fehler von selbst eliminieren. Die berühmteste Bestimmung ist die von *Peters*<sup>27)</sup>, dessen Wert für  $N = 9''223 \pm 0''020$  mehr als 50 Jahre in fast allgemeinem Gebrauch gewesen ist. Später hat *Newcomb* das gesamte Material, hauptsächlich von den Sternwarten Greenwich, Pulkowa und Washington herrührend, neu diskutiert und gefunden<sup>28)</sup>

$$N = 9''210 \pm 0''008.$$

Die letzte Zusammenfassung gibt *Chandler*<sup>29)</sup> mit Benutzung von nahezu demselben Material. Hier ist seine Tabelle:

27) *C. A. F. Peters*, Numerus constans Nutationis. St. Pé. Mém. 3 (1844).

28) *Fund. Const.*, p. 131.

29) *Astr. Journ.* 16 (1895), p. 1.

<i>Aus Rektaszensionen:</i>	N	p
<i>Peters</i> (Dorpat), Polaris . . . . .	9''216	4
<i>De Ball</i> (Pulkowa), 3 Polsterne . . . . .	217	7
<i>Newcomb</i> (Greenwich), 4 Polsterne . . . . .	196	10
<i>Aus Deklinationen:</i>		
<i>Lundahl</i> (Dorpat), Polaris . . . . .	236	1
<i>Chandler</i> (Pulkowa), 3 Zenitsterne . . . . .	210	2
<i>De Ball</i> (Pulkowa), 3 Polsterne . . . . .	234	7
<i>Newcomb</i> (Greenwich), 47 Sterne . . . . .	194	21
<i>Newcomb</i> (Washington), 69 Sterne . . . . .	204	9
<i>Chandler</i> (Greenwich), 34 Sterne . . . . .	192	25

Das Mittel ist  $N = 9''202$ .

Gegenwärtig gilt als sicherster Wert der von der internationalen Konferenz zu Paris 1896 gewählte<sup>30)</sup>:

$$(14) \quad N = 9''210 \quad (\text{gültig für 1900}).$$

N ist etwas veränderlich wegen des Faktors  $\cos \varepsilon$  in (12) und der Säkularänderung von  $\varepsilon$ . Für die hier angenommene Epoche 1850 wird

$$N = 9''214 \pm 0''008,$$

ein Wert, den wir für das Folgende zugrundelegen wollen.

Die beiden Gleichungen (7) und (13) geben nach Einsetzung der gewonnenen Zahlenwerte ( $P$  ist um  $0''0012$  korrigiert zur Reduktion auf das julianische Jahr als Einheit)

$$(15) \quad \begin{aligned} 54''9078 &= \left\{ [5,975052] \frac{\mu}{1+\mu} + [3,72509] \right\} \frac{C-A}{C}, \\ 9''214 &= [5,36542] \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C} \end{aligned}$$

und können zur Bestimmung von  $\mu$  und  $\frac{C-A}{C}$  dienen. Die Auflösung ergibt

$$(16) \quad \frac{C-A}{C} = 0,003278 = 1/305,1$$

$$\mu = \frac{1}{81,51 \pm 0,20}.$$

$\frac{C-A}{C}$  kann auch noch aus der Mondbewegung bestimmt werden (Nr. 10), und  $\mu$  ergibt sich auch durch die Mondgleichung der Erdbewegung, wenn man die Sonnenparallaxe als bekannt annimmt (Nr. 8). Weiteres siehe Nr. 10 und Nr. 20.

**10. Die Trägheitsmomente und die Abplattung der Erde.** Diese beiden Konstanten müssen hier, als mit mehreren astronomischen Konstanten zusammenhängend, mitbehandelt werden. Es wurde in Nr. 9 gefunden, daß der Unterschied der Trägheitsmomente um die Polarachse und um eine Äquatorialachse  $C - A$  die Erscheinungen

30) Paris Bull. astr. 15 (1898).

der Präzession und Nutation erzeugt und daß aus den beobachteten Werten dieser letzteren gefunden wird:

$$(17) \quad \frac{C-A}{C} = 0,003278.$$

Diese selbe Differenz wirkt nun nicht nur auf die Lage der Erdachse, sondern weiter auch auf den Mond und erzeugt in dessen Bewegung einige periodische Störungsglieder in Länge und Breite von etwa 8" Größe und der Periode eines Mondknotenumlaufes bzw. eines Mondumlaufes um die Erde, die beobachtet und zur Kenntnis von  $C$  und  $A$  verwertet werden können. Das Glied in Länge wurde von *Tobias Mayer* empirisch entdeckt, dann von *Laplace* erklärt, unter Hinzufügung der Glieder in Breite. Die Behandlung dieser Glieder gibt *Laplace* in *Méc. cél.*, livre VII, no. 20, seine Zahlen sind heute ohne Bedeutung. *Hansen* (Darlegung I, p. 459; II, p. 273) zeigt zuerst ihre genaue Zusammensetzung, vergleicht sie mit der Beobachtung und leitet aus dem Breitenglied  $C - A$  und die Abplattung ab. *Helmert* (H. G. II, p. 469) vervollständigt *Hansens* Rechnung; ihm sind die folgenden Zahlenangaben entnommen: aus den Gliedern in Breite und Länge folgt

$$(18) \quad \frac{1}{M} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) \frac{1}{e_0^2} = 0,001070 \text{ bzw. } 0,001103,$$

im Mittel = 0,001086,

worin  $M$  und  $e_0$  Masse und Äquatorradius der Erde bedeuten.

*Newcomb* (Astr. Pap., vol. IX, p. 225) gewinnt mittelst des Hauptgliedes in Breite aus einer sehr großen Reihe genauer Mondbeobachtungen

$$(19) \quad \frac{1}{M} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) \frac{1}{e_0^2} = 0,001117$$

und macht auf die Unsicherheit dieses Resultates aufmerksam, da es die genaue Kenntnis der Schiefe der Ekliptik voraussetze.

Außer diesen periodischen Störungsgliedern erzeugt die Differenz  $C - A$  säkuläre Störungsglieder in der Bewegung der Länge des Perihels und des Knotens der Mondbahn; daß diese Glieder nicht unmerklich sind, hat zuerst *Hansen* (Darlegungen I, p. 470) ausgesprochen; *Newcomb* (Astr. Pap. IX, p. 225) leitet aus der Bewegung des Perihels und des Knotens ab:

$$(20) \quad \frac{1}{M} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) \frac{1}{e_0^2} = 0,001117 \text{ bzw. } 0,001121,$$

im Mittel = 0,001119.

Aus den Werten (18), (19), (20) ergibt sich mit den Gewichten 2, 1, 2, wenn zugleich  $B = A$  gesetzt wird,

$$(21) \quad \frac{1}{M e_0^2} (C - A) = 0,001105.$$

Werden die Gleichungen (17) und (21) verbunden, so folgt (*Hansen*, Darlegung I, p. 472)

$$(22) \quad \begin{aligned} C &= M e_0^2 0,3371, \\ A &= M e_0^2 0,3360. \end{aligned}$$

Die hieraus sich ergebenden Schlüsse auf die Massenordnung des Erdinneren gehören nicht hierher.

Mit den Trägheitsmomenten des Erdkörpers hängt die *Abplattung*  $\alpha$  durch die von *Laplace* aufgestellte Formel zusammen:

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{C - A}{M e_0^2} + \frac{1}{2} c,$$

die von *Helmert* (H. G. II, p. 83) in die merklich genauere verbessert wurde:

$$(23) \quad \alpha = \frac{3}{2} \frac{C - A}{M e_0^2} (1 + \alpha) + \frac{1}{2} c \left(1 - \frac{3}{2} c\right) - \frac{1}{7} \alpha^2;$$

hierin bedeutet  $c$  das Verhältniß der Zentrifugalkraft zur Schwere am Äquator, also nach Nr. 2  $c = 0,0034672$ .

Mit dem oben gefundenen Werte

$$\frac{1}{M} \frac{C - A}{e_0^2} = 0,001105$$

folgt dann:

$$(24) \quad \alpha = 0,003386 = 1 : 295,3.$$

Aus Schweremessungen mittelst des Sekundenpendels hat *Helmert* abgeleitet (siehe VI 1, 3 (*Pizzetti*), Nr. 51)

$$(25) \quad \alpha = 1 : 298,3$$

und *Iwanoff* (ebendort)

$$(26) \quad \alpha = 1 : 296,6.$$

Bekanntlich geben die geodätischen Vermessungen Abplattungen

$$\frac{1}{299,153} \text{ (Bessel)}, \quad \frac{1}{293,465} \text{ (Clarke)},$$

zwischen denen die obigen liegen.

**11. Die Schiefe der Ekliptik und der Frühlingspunkt.** Die Neigung des Erdäquators gegen die Erdbahn, die Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon$  und der Knoten beider Ebenen, der Frühlingspunkt  $\mathcal{T}$ , gehen aus Meridianbeobachtungen der Sonne hervor, die in der Nähe der vier Hauptpunkte der Sonnenbahn angestellt werden. Deklinationsbeobachtungen zu den Zeiten der Solstitien geben  $\varepsilon$ , Deklinationsbeobachtungen und Durchgänge der Sonne und der Zeitsterne um die Zeit der Äquinoktien geben  $\mathcal{T}$ . Die Praxis dieser Bestimmungen ist

in dem Artikel VI 2, 2 (*Cohn*), Nr. 3—5 auseinandergesetzt. Die Bestimmung der Schiefe leidet, außer an der Unsicherheit der Sonnenbeobachtungen überhaupt, wesentlich daran, daß Beobachtungen verglichen werden müssen, die unter ganz verschiedenen atmosphärischen Bedingungen zustande kommen, Sommer- und Winterbeobachtungen, die außer verschiedenen instrumentellen Einflüssen auch Unterschieden der Refraktion unterliegen, denen schwierig beizukommen ist. Gehäuft werden die Schwierigkeiten bei Bestimmungen der Säkularänderung der Schiefe, weil hier notwendig noch verschiedene Beobachter und Instrumente konkurrieren. *Newcomb* (*Fund. Const.*, p. 33) hat aus einer eingehenden Diskussion sich schließlich für den in den Sonnentafeln angenommenen Wert entschieden:

1900, Jan. 0 Greenwich 0<sup>h</sup> M. Z.

$$(27) \quad \varepsilon = 23^{\circ}27'8''26 - 46''845 T - 0''0059 T^2 + 0''00181 T^3$$

(T in jul. Jahrhunderten von 1900 an gezählt).

Die Festlegung des Frühlingspunktes hängt sowohl von Deklinationsmessungen als von Durchgangsbeobachtungen ab. Wird die Schiefe der Ekliptik als bekannt angenommen, so gibt die gemessene Deklination der Sonne  $\delta_{\odot}$  die Rektaszension  $\alpha_{\odot}$  durch

$$\sin \alpha_{\odot} = \cotg \varepsilon \operatorname{tg} \delta_{\odot},$$

$\alpha_{\odot}$  aber bestimmt den Abstand der Sonne vom Frühlingspunkt im Moment des Durchganges und damit diesen selbst. Sofort angeschlossene Durchgänge von Fixsternen legen den Frühlingspunkt auch durch diese fest. Das auf diese Weise aufgestellte System von Fixsternrektaszensionen (das Fundamentalsystem) dient dann statt des direkten Anschlusses an  $T$  für die Koordinatenmessung am Himmel. Sein Fehler geht in alle Messungen ein und muß sorgfältig überwacht werden. Für weitere Einzelheiten wird auf die unten angeführten Werke<sup>31)</sup> verwiesen.

**12. Tropisches und siderisches Jahr.** Durch Bearbeitung von etwa 40000 Sonnenbeobachtungen in dem Zeitraum von 1750—1890 fand *Newcomb*<sup>32)</sup> für die mittlere tropische (d. h. auf den Frühlingspunkt bezogene) Bewegung der Sonne in einem julianischen Jahrhundert von 36525 mittleren Sonnentagen den Betrag

31) *A. Wagner*, Poulkova obs. 3 (1870), 12 (1887); *A. Auwers*, Neue Reduktion der Bradleyschen Beobachtungen aus den Jahren 1750—62, 1, St. Petersburg 1903; *F. Cohn*, Königsb. Beob. 39 (1899); *S. Newcomb*, *Fund. Const.*, p. 15; *S. Newcomb*, *Catalogue of 1098 Clock and Zodiacal Stars*, *Astr. Pap.*, vol. 1; *S. Newcomb*, *Catalogue of Fundamental Stars*, *Astr. Pap.*, vol. VIII.

32) *Fund. Const.*, p. 182.

129602766''74, (gültig für 1850),

der vor Einführung in die Sonnentafeln<sup>33)</sup> noch um den Betrag + 0''30 verbessert und auf die Epoche 1900 gebracht wurde (durch Anbringung der berechneten Säkularstörungen); er kam dann auf

$$(28) \quad 129602768''13 + 2''178 T,$$

worin T in julianischen Jahrhunderten von 1900 Jan. 0<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> 0<sup>s</sup> mittl. Zeit Greenwich ab zu zählen ist; er ist die Grundlage der Zeitrechnung. Zuerst folgt aus ihm für die Dauer eines *tropischen Jahres*, d. h. des Zeitraumes, den der Mittelpunkt der Sonne von einem Durchgang durch den Frühlingspunkt bis zum Durchgang durch den nächsten, inzwischen rückwärts gegangenen braucht:

$$(29) \quad T_t = \frac{365,25 \times 1296000}{1296027''6813 + 0''02178 T} = \frac{1296000''}{3548''33043 + 0''0000596 T} \\ = 365,24220 - 0,00000614 T \text{ Tage.}$$

Sodann der Wert für die mittlere tägliche *tropische* Bewegung:

$$(30) \quad 3548''33043 + 0''0000596 T.$$

Durch Subtraktion des eintägigen Betrages der allgemeinen Präzession in Länge, nämlich

$$\frac{50''2564 + 0''0222 T}{365,2422} = 0''13760 + 0''000060 T$$

erhält man ferner die mittlere tägliche *siderische* Bewegung der Sonne:

$$(31) \quad n'' = 3548''19283$$

und die Dauer des *siderischen Jahres*:

$$(32) \quad T_s = \frac{1296000''}{3548''19283} = 365,25636 \text{ Tage} = 31558148^s.9 \text{ m. Z.}$$

Das tropische Jahr beginnt nach einer von *Bessel* getroffenen Festsetzung in dem absoluten von keiner Ortszeit abhängigen Moment, in welchem die Größe *A* (s. Nr. 13, Gl. 34) ohne die Nutation, also die mittlere AR. der mittleren Sonne

$$(33) \quad A_0 = 279^\circ 41' 27''54 + (3548''33043 \times 365,25) t$$

jeweils den Betrag 280° erreicht. Auf diesen Moment (bezeichnet mit z. B. 1919,0) pflegt man die Angaben der Fixsternastronomie zu beziehen: seine Beziehung zum Beginn des jeweiligen bürgerlichen Jahres wird ein für allemal vorausberechnet (s. *Bauschinger*, Tafeln der theor. Astr. Taf. XXXIa)

**13. Sternzeit und mittlere Zeit.** Die Zeit wird durch die Umdrehung der Erde um ihre Achse, die als gleichförmig angenommen

33) Astr. Pap. Vol. VI, p. 9.

wird, gemessen; Zeitmessung wird dadurch Winkelmessung. Es muß ein Punkt an der Himmelssphäre vereinbart werden und auf der Erde ein Index, der stets zugänglich ist. Der Winkel zwischen beiden mißt die stattgehabte Bewegung und gibt das Maß für die dazu gebrauchte Zeit. Als Index gilt der Meridian des Erdortes, der mit der rotierenden Erde die Himmelssphäre in der Richtung von West nach Ost überstreicht. Als Fixpunkte an der Sphäre sind zwei im Gebrauch, die beide auf dem Äquator liegen: der Frühlingspunkt  $F$  und der Mittelpunkt  $S$  einer fingierten im Äquator sich gleichmäßig bewegenden Sonne, die stets möglichst nahe an der wahren, sich ungleichförmig bewegenden Sonne bleibt. Der erste führt zur Sternzeit, der zweite zur mittleren Sonnenzeit. Der Winkel zwischen Meridian und  $F$  bzw.  $S$ , in der entgegengesetzten Richtung der Bewegung vom Meridian aus gezählt, heißt Stundenwinkel und mißt die Zeit.

Der Frühlingspunkt wird durch Präzession und Nutation (s. Nr. 9) bewegt, aber so nahe gleichförmig, daß seiner Benutzung zur Herstellung eines gleichförmigen Zeitmaßes kein Bedenken entgegensteht. Der Moment, in dem der Meridian eines Ortes über den wahren Frühlingspunkt hinweggeht, ist der Beginn eines Zeitintervalles, des *Sterntages*, dessen Ende mit der nächsten Koinzidenz von Meridian und Frühlingspunkt zusammenfällt. Der Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes mißt die seit Beginn des Sterntages verflossene *Ortssternzeit*.

Die mittlere (fingierte) Sonne bewegt sich mit derselben mittleren Geschwindigkeit im Äquator, wie die wahre in der Ekliptik, d. h. ihre Rektaszension wird durch folgenden Ausdruck definiert<sup>34)</sup>

$$(34) \quad A = 279^{\circ} 41' 27'' 54 + (3548'' 33043 \times 365,25) t \\ + 0'' 0001395 t^2 + \text{Nutation in AR}$$

oder in Zeiteilung:

$$A = 18^{\text{h}} 38^{\text{m}} 45^{\text{s}} 836 + (3^{\text{m}} 56^{\text{s}} 55536 \times 365,25) t \\ + 0^{\text{s}} 0000093 t^2 + \text{Nutation in AR,}$$

wobei  $t$  in julianischen Jahren von dem Moment 1900 Jan. 0 = 1899 Dez. 31 0<sup>h</sup> mittlerer Zeit Greenwich an gezählt ist. Der Moment, in welchem der Meridian eines Ortes über diese mittlere Sonne hinweggeht (mittlerer Mittag) ist der Beginn eines Zeitintervalles, des *mittleren Sonnentages*, dessen Ende mit der nächsten Koinzidenz zusammenfällt. Der Stundenwinkel der mittleren Sonne mißt die seit Beginn des mittleren Sonnentages verflossene *mittlere Ortszeit*.

34) Newcomb, Astr. Pap. VI, p. 9.

Die Formel (34) zeigt, daß die mittlere Sonne sich in jedem mittleren Tag um den Winkel

$$3548''33043 = 3^m 56^s 55536$$

in der Richtung der Rotationsbewegung, also von West nach Ost, vom Frühlingspunkt entfernt. Da der Meridian in einem Sterntag

$$360^\circ = 1296000'' = 86400^s$$

beschreibt, braucht er

$$\frac{3548''33043}{1296000} = \frac{236^s 55536}{86400} = 0,002737909 \text{ Sterntage,}$$

um die bewegte Sonne einzuholen, und es ist daher

$$(35) \quad 1 \text{ mittl. Sonnentag} = 1,002737909 \text{ Sterntage,}$$

$$\text{woraus} \quad 1 \text{ Sterntag} = 0,997269567 \text{ mittl. Sonnentage}$$

$$\text{oder} \quad 1 \text{ mittl. Sonnentag} = 24^h 3^m 56^s 55536 \text{ Sternzeit}$$

$$1 \text{ Sterntag} = 23^h 56^m 4^s 09058 \text{ mittl. Zeit}$$

$$= 86164^s 09058 \text{ mittl. Zeit.}$$

Der Überschuß von  $3^m 56^s 55536$  Sternzeit der Dauer eines mittleren Tages über die Dauer eines Sterntages häuft sich in

$$\frac{86400}{236,55536} = 365,24220 \text{ mittl. Tagen}$$

zu einem vollen Sterntag an. Man hat also zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit auch die Beziehung:

$$(36) \quad 366,24220 \text{ Sterntage} = 365,24220 \text{ mittl. Tage.}$$

**14. Verwendung der Schweremessungen.** Wir stellen hier die Formeln zusammen, die die Benutzung der Schweremessungen auf der Erdoberfläche für astronomische Zwecke vermitteln.

Nennt man  $1, m'', m''\mu$  die Massen von Sonne, Erde (ohne Mond) und Mond,  $m_1'' = m''(1 + \mu)$  die Masse von Erde und Mond zusammen, so ergibt sich für die Anziehung  $G_1$  in der mittleren Breite  $\varphi_1'$ , der der Erdradius  $\varrho_1$  entspricht, die Formel

$$(37) \quad k^2 m'' = \varrho_1^2 G_1,$$

worin  $G_1$  durch  $\pi^2 L_1$  bestimmt ist ( $L_1 =$  Länge des Sekundenpendels). Damit verbinden wir die *Keplerschen* Gleichungen für die Mond- und für die Erdbewegung:

$$(38) \quad k^2 m'' (1 + \mu) = n_1^2 a_1^3$$

$$(39) \quad k^2 (1 + m''(1 + \mu)) = n''^2 a''^3.$$

Aus (37) und (38) folgt:

$$\frac{\varrho_1}{a_1} = \left( \frac{\varrho_1}{G_1} \cdot \frac{n_1^2}{1 + \mu} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{\varrho_1}{\pi^2 L_1} \cdot \frac{n_1^2}{1 + \mu} \right)^{\frac{1}{3}}$$

oder, wenn mit  $T_D$  die siderische Umlaufszeit des Mondes in Sekunden bezeichnet und  $n_D = \frac{2\pi}{T_D}$  gesetzt wird:

$$(40) \quad \sin \pi'_D = \frac{e_0}{a_D} = \frac{e_0 e_1}{e_1 a_D} = \frac{e_0}{e_1} \left( \frac{4\pi^2 e_1}{G_1(1+\mu)T_D^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{e_0}{e_1} \left( \frac{4 e_1}{T_D^2 L_1 (1+\mu)} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der ungestörten Mondparallaxe  $\pi'_D$ . Die gestörte ergibt sich hieraus durch Hinzufügung des konstanten Betrages der Störungen oder durch Multiplikation mit dem Faktor 1,0009077; dies gibt dann die Konstante im sin der Mondparallaxe (Nr. 16).

Aus (37) und (39) folgt:

$$(41) \quad \begin{aligned} \sin \pi_{\odot} &= \frac{e_0}{a''} = \frac{e_0}{e_1} \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{e_1}{G_1(1+\mu)}} \sqrt[3]{\frac{m_1''}{1+m_1''}} \\ &= \frac{e_0}{e_1} \sqrt[3]{\frac{4}{T^2} \frac{e_1}{L_1(1+\mu)}} \sqrt[3]{\frac{m_1''}{1+m_1''}}, \end{aligned}$$

wo gesetzt ist  $n'' = \frac{2\pi}{T}$  und  $T$  die siderische Umlaufszeit der Erde in Sekunden bedeutet. Diese Gleichung ist die Beziehung zwischen Sonnenparallaxe und Erdmasse (Nr. 15).

Wir fügen hinzu, daß, wenn an Stelle der Anziehung auf einen Punkt der Erdoberfläche die Anziehung auf den Mond herangezogen wird, die entsprechende Beziehung sich aus (38) und (39) ergibt:

$$(42) \quad \frac{1}{m_1''} = \frac{\left(\frac{n''}{n_D}\right)^2}{\left(\frac{a_D}{a}\right)^3} - 1 = \frac{\left(\frac{T_D}{T}\right)^2}{\left(\frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin \pi_D}\right)^3} - 1,$$

wo  $T_D$  die siderische Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist.

Hieraus kann man die Erdmasse bestimmen (Nr. 17), wenn das Verhältnis der Sonnen- zur Mondparallaxe irgendwie bekannt wird.

### 15. Die Erdmasse und ihre Beziehung zur Sonnenparallaxe.

Durch Vergleichung der Anziehung  $G_1$ , welche die Masse der Erde auf einen Punkt ihrer Oberfläche ausübt und die durch die Messung der Länge  $L_1$  des einfachen Sekundenpendels gefunden wird, mit jener, welche sie auf die Sonne ausübt, ergibt sich die Beziehung (41) zwischen der Erdmasse und der Sonnenparallaxe:

$$\sin \pi_{\odot} = \frac{e_0}{e_1} \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{e_1}{G_1(1+\mu)}} \sqrt[3]{\frac{m_1''}{1+m_1''}}.$$

Hierin ist die Anziehung  $G_1$  für mittlere Breite gebraucht, da die Mechanik zeigt, daß Punkte, die auf dem Parallel der geozentrischen Breite  $\varphi_1'$  der Erdoberfläche liegen, welcher durch  $\sin \varphi_1' = \sqrt{\frac{1}{3}}$

bestimmt ist, bei jeder Hypothese über Gestalt und Massenordnung der Erde so angezogen werden, als ob deren Gesamtmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Trägt man in die Formel die Zahlenwerte aus Nr. 2, 12, 20

$$\varrho_0 = [6,8046435] \text{ m} \quad \varrho_1 = [6,8041577] \text{ m}$$

$$G_1 = [0,992130] \text{ m/sec.} \quad T = [7,4991115] \text{ Sekunden}$$

$$\mu = 1 : 81,53$$

ein, so folgt:

$$\pi''_{\odot} = 607''02 \sqrt[3]{\frac{m_1''}{1 + m_1''}}$$

oder bequemer, wenn  $M = \frac{1}{m_1''}$  gesetzt wird,

$$(43) \quad \pi''_{\odot} \sqrt[3]{M} = 607''02 \quad [2,783202]$$

$M =$  Sonnenmasse in Einheiten der (Erde + Mond) Masse.

Folgende Tabelle enthält zusammengehörige Werte von  $\pi_{\odot}$  und  $M$

$\pi_{\odot}$	$M$ (Erde + Mond)
8''770	331590 1130
780	330460 1130
790	329330 1120
800	328210 1120
810	327090 1120

Durch Differenzieren der Formel und Einführung der Abplattung  $\alpha$  der Erde durch  $\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = 1 + \frac{\alpha}{3}$  erhält man:

$$d\pi''_{\odot} = - [4,94924]_{-10} dM + [3,66271]_{-10} d\varrho_1 - [5,51708]_{-10} d\frac{1}{\alpha}$$

und sieht, daß 1000 m Unsicherheit in  $\varrho_1$  und 10 Einheiten im Nenner von  $\alpha$  noch keine 0''001 in  $\pi''_{\odot}$  hervorbringen, daß also die Zahl 607''02 hier als Konstante gelten kann. Wenn daher die Säkularstörungen den Wert der Erdmasse auf 0,003 ihres Betrages genau geben, so folgt aus der Formel (43) die Sonnenparallaxe auf 0''01 genau. Jedenfalls ist man gezwungen, die Werte von  $\pi_{\odot}$  und  $M$  so zu wählen, daß (43) erfüllt ist.

### Der Mond.

**16. Die Mondparallaxe.** Die Bestimmung der Mondparallaxe kann wie die der Sonnenparallaxe auf zwei Wegen erfolgen, dem trigonometrischen und dem durch Benutzung der Eigenschaften der Gravitation. Der erste ist hier wegen der Größe des gesuchten Winkels

technisch leicht ausführbar, leidet aber an dem Umstande, eine genaue Kenntnis der Erdadplattung vorauszusetzen, in so hohem Maße, daß man umgekehrt vorgeschlagen hat, durch Messungen der Mondparallaxe die Erdgestalt zu bestimmen (siehe *Helmert*, *Höh. Geod.* II, p. 451). Das scheidet nur daran, daß die Methode einerseits genauere Mondtafeln voraussetzt, als wir zurzeit besitzen, und daß sie andererseits von systematischen Messungsfehlern freiere Meridianbeobachtungen von absoluten Monddeklinationen verlangt, als zurzeit unsere Instrumente leisten können. Immerhin ziehen es die Mondtheoretiker seit *Laplace* vor, die Mondparallaxe durch die Gravitation zu ermitteln, besonders seitdem ein großes Netz von Schweremessungen vorliegt.

Die trigonometrische Methode besteht in der Vergleichung von Meridiandeklinationen des Mondes, die an zwei auf demselben Meridian liegenden Sternwarten der Nord- und Südhalbkugel der Erde angestellt werden z. B. in Greenwich und am Cape. Es liegen zwei Bearbeitungen der Mondbeobachtungen dieser beiden und einiger anderer Sternwarten vor, die von *Breen* (*Lond. Astr. Soc. mem.* 32 (1863)) und die von *Stone* (ebenda 34 (1865)). Nach der Interpretation von *Newcomb* (*Astr. Pap.*, vol. I, p. 79) sind ihre Resultate:

$$(44) \quad \begin{array}{l} \textit{Breen} \quad \sin \pi_{\text{D}} = 3422''62 \sin 1'' \\ \textit{Stone} \quad \sin \pi_{\text{D}} = 3422,70 \sin 1'' \end{array}$$

Ersterer Wert beruht auf 123 Beobachtungen des Mondes, angestellt am Cape von 1830—1837 mit entsprechenden Beobachtungen von Greenwich, Edinburgh und Cambridge, letzterer beruht auf 239 Cape-Beobachtungen 1856—1861, verglichen mit entsprechenden in Greenwich.

Die eben angegebene Zahl pflegt man meist als die Konstante der Mondparallaxe zu bezeichnen, es kommt aber auch vor, daß man  $\pi_{\text{D}}$  selbst, nicht seinen Sinus so benennt; es ist  $\pi_{\text{D}}'' = (\sin \pi_{\text{D}})'' + 0''157$ ; wir werden im folgenden die Zahlenangaben stets für den Sinus machen und überhaupt definieren: Die Konstante der Mondparallaxe ist das konstante Glied im vollständigen Störungsausdruck für den Sinus der Parallaxe des Mondes. Diese von der Definition der Sonnenparallaxe abweichende Fassung ist hier notwendig, da bei den starken Störungen der Mondbahn nicht ohne schärfere Definition von einer mittleren Entfernung oder der großen Halbachse der Bahnellipse gesprochen werden kann. Das konstante Glied ist verschieden bei den verschiedenen Mondtheorien, und bei der Vergleichung sind Transformationen erforderlich.

Das Prinzip der physikalischen Bestimmung der Mondparallaxe beruht auf der Vergleichung der Anziehung der Erde auf

Punkte ihrer Oberfläche, ermittelt durch Messung der Länge des Sekundenpendels, mit der auf den Mond ausgeübten Anziehung, wie sie durch das dritte *Keplersche* Gesetz geboten wird (siehe Nr. 14 Gleichung (40)), also auf der Verbindung der Gleichungen:

$$\frac{k^2 m''}{e_1^2} = l_1 \pi^2 (1 + \chi_1) = g_1 (1 + \chi_1) = G_1$$

$$k^2 m'' (1 + \mu) = n_D^2 a_D^3;$$

darin bedeutet  $m''$  die Erdmasse (ohne Mond),  $\mu$  das Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse,  $l_1$  die Länge des einfachen Sekundenpendels,  $\chi_1$  das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere,  $g_1$  die Schwere, alle drei für die mittlere Breite  $\varphi_1'$ ,  $e_1$  den zugehörigen Radius der Erde,  $n_D$  die mittlere siderische Bewegung des Mondes,  $a_D$  die große Halbachse der Mondbahnellipse, in der der Mond sich bewegen würde, wenn er keinen Störungen unterworfen wäre.<sup>35)</sup> Die Gleichungen geben

$$(45) \quad \sin \pi_D = \frac{e_0 e_1}{e_1 a_D} = \frac{e_0}{e_1} \left( \frac{n_D^2 e_1}{1 + \mu G_1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

und lassen erkennen, daß kein direkt beobachteter Wert mit dem hieraus berechneten an Genauigkeit konkurrieren kann, daß es also verschwendete Mühe ist, eine Korrektion der Parallaxe durch Einführung in irgendwelche Bedingungsgleichungen erzielen zu wollen. Der erste Faktor in der Klammer rechts kann als völlige Konstante angesehen werden: eine Änderung im Nenner von  $\mu$  um  $+0,1$  würde die Parallaxe übrigens nur um  $+0''017$  ändern; der zweite Faktor allein hängt von Größen ab, die noch unter Diskussion stehen; in welchem Maße dies der Fall ist, erkennt man daraus, daß eine Änderung von

$+1000$  m in  $e_1$  die Parallaxe um  $+0''18$

und von  $+1$  mm in  $G_1$  „ „ „  $-0,11$

ändern würde. Die Unsicherheit von  $e_1$  und  $G_1$  übersteigt die angegebenen Grenzen sicher nicht und ist fast ausschließlich durch den adoptierten Wert der Abplattung bedingt. Die Unsicherheit der berechneten Parallaxe bleibt also unter  $\pm 0''10$ ; für die beobachtete Parallaxe müßte beim heutigen Stand der Mondbeobachtung an Meridiankreisen mindestens der dreifache Betrag angesetzt werden.

Mit (45) rechnet zuerst *Laplace* 1799 in *Méc. cél.* Livre II Nr. 5 die Mondparallaxe und wiederholt diese Rechnung in Livre VII Nr. 19.

35) Dieser Zusammenhang kann auch zur Bestimmung des Äquatorialradius der Erde verwendet werden, wenn man die Mondparallaxe als bekannt voraussetzt, siehe *Helmert*, *Höh. Geod.* II, p. 460.

Ihm folgt *Hansen*, der sein Verfahren in den „Fund. nova . . .“ p. 126, in Astr. Nachr. 17 (1840), p. 297, in den „Tables de la Lune“ p. 4 und in der „Darlegung . . .“ I, p. 415 auseinandersetzt, und von *Newcomb* in Astr. Pap. I, p. 77 kommentiert wird. *Hansen* rechnet mit der anomalistischen Bewegung  $n_D$ , und infolgedessen ist seine mittlere Entfernung  $a_D$  abweichend von den anderen Theorien definiert, die die siderische Bewegung zugrunde legen; es lassen sich daher nur die Resultate vergleichen. Es ist wichtig, die *Hansensche* Parallaxe genau zu kennen, da seine Tafeln nun schon 60 Jahre fast allen Monduntersuchungen zugrunde liegen. In den Astr. Nachr. a. a. O. gibt *Hansen* selbst als  $\sin \pi_D$  3422''06 an, diese Zahl scheint aber durch Rechenunsicherheiten etwas entstellt zu sein, *Newcomb* a. a. O. findet mit denselben Daten, die *Hansen* benutzt, 3422''09, allein auch diese Zahl hält einer genaueren Prüfung nicht stand. Um zu finden, welche Parallaxe tatsächlich den Tafeln zugrunde liegt, muß man die Angaben in diesen selbst a. a. O. und in der damit übereinstimmenden Darlegung a. a. O. zusammenstellen, da *Hansen* selbst das Schlußresultat nicht mehr angibt; dann aber erhält man zweifelsfrei:

$$\sin \pi_D = 3419''41 + 2''71 = 3422''12. \quad (\text{Hansen})$$

*Adams*<sup>36)</sup> findet nach derselben Methode, aber mit anderen Werten für die Mondmasse und für die Länge des Sekundenpendels

$$\sin \pi_D = 3422''325, \quad (\text{Adams})$$

ebenso *Newcomb* (Fund. Const. S. 193) mit *Clarke's* Erddimensionen und *Helmerts* Pendellänge

$$\sin \pi_D = 3422''55. \quad (\text{Newcomb})$$

Reduziert man alle drei Angaben auf das in Nr. 2 adoptierte System und die Mondmasse 1 : 81,53, so wird:

$$\text{Hansen } \sin \pi_D = 3422''39$$

$$\text{Adams} \quad \quad \quad 3422,39$$

$$\text{Newcomb} \quad \quad 3422,43.$$

Dabei ist zu beachten, daß diese Zahlen bereits den konstanten Teil des Störungsbetrages enthalten. Die Gleichung (45) gibt nämlich mit den eben erwähnten Daten die *ungestörte* Parallaxe 3419''39, d. h. die Parallaxe ohne den konstanten Betrag der Störungen. Nach der Theorie von *Delaunay*<sup>37)</sup>, die auch für den obigen Wert von *Adams*

36) *J. C. Adams*, On new Tables of the moons Parallax, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 13 (1862), p. 263 und Naut. Alm. 1856.

37) *Ch. Delaunay*, Expressions numériques des trois coordonnées de la lune. Conn. des Temps 1869. Add. p. 10.

gilt und von *Newcomb* bei Ableitung des seinigen adoptiert wurde, erhält man daraus den konstanten Teil im Störungsausdruck des  $\sin$  der Parallaxe, wenn mit 1,0009077 multipliziert wird, in unserem Falle

$$\sin \pi_D = 3422''50.$$

In den Theorien von *Delaunay*<sup>38)</sup> und *Brown*<sup>39)</sup> (s. auch VI 2, 14 (*Brown*)) wird von dem beobachteten, also dem gestörten Wert der Konstante ausgegangen, und zwar von dem oben (Gleichung 44) angegebenen  $\sin \pi_D = 3422''70 = \frac{1}{a}$  (nach der Bezeichnung von *Brown*); der ungestörte Wert  $\frac{1}{a}$ , wo  $a$  die Halbachse der intermediären oder Variationsbahn ist, die für die Durchführung der Theorie als Fundamentalkonstante gebraucht wird, ergibt sich durch Multiplikation von  $\frac{1}{a}$  mit 0,9990931 =  $\frac{1}{1,0009077}$  zu

$$\frac{1}{a} = 3419''596.$$

Der genannte Zahlenfaktor wird von *Delaunay* a. a. O. p. 10, von *Hill*<sup>40)</sup> und von *Brown* (a. a. O. Bd. 53, p. 88, Bd. 57, p. 109) abgeleitet. Die Halbachse  $a$  genügt mit dem beobachteten (siderischen) Wert von  $n_D$  streng dem *Keplerschen* Gesetz

$$n_D^2 a^3 = k^2 m'' (1 + \mu)$$

und führt mit der Gleichung für die Erde

$$n''^2 a''^3 = k^2 (1 + m'' (1 + \mu)),$$

wenn entsprechend

$$\frac{1}{a''} = \pi''_{\odot}$$

und  $n''$  gleich der siderischen mittleren Bewegung der Erde gesetzt wird, zum zugrunde liegenden Wert der (Erde + Mond)-Masse  $m_1''$

$$\frac{m_1''}{1 + m_1''} = \left(\frac{n_D}{n''}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{a''}}{\frac{1}{a}}\right)^3.$$

Mit dem sehr genau bekannten Verhältnis der siderischen Bewegungen von Sonne und Mond

$$\frac{n''}{n_D} = 0,0748013 \quad [8,8739091_{-10}]$$

und dem beobachteten Wert der Mondparallaxe (44)  $\sin \pi_D = 3422''70$

38) *Ch. Delaunay*, *Theorie du mouvement de la Lune*, Paris 1860, 1867.

39) *E. W. Brown*, *Theory of the motion of the Moon*. Lond. Astr. Soc. mem. 53 (1897), 54 (1900), 57 (1905), 59 (1908).

40) *G. W. Hill*, *Res. in the Lunar theory*, *Americ. J. of Math.* I (1877) = *Works* I, p. 284—335. Siehe auch *Tisserand*, *Méc. céleste*. Vol. III p. 272.

$\sin 1''$ , korrigiert für Störungen:  $\sin(\pi_D) = 3419''60 \sin 1''$  ergibt diese Gleichung:

$$\pi''_{\odot} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{m_1''}} = \frac{\sin(\pi_D)}{\sin 1''} \left(\frac{n''}{n_D}\right)^{\frac{2}{3}} = 607''08.$$

Dieses ist dieselbe Gleichung wie (43), nur ist der Zahlenwert rechts auf anderem Wege bestimmt, nämlich hier durch die **Mondbewegung**, dort durch Pendelmessungen.

Es ist von Interesse, den besten zurzeit erreichbaren Wert der Konstante des  $\sin$  der Mondparallaxe zu kennen. Wir berechnen ihn mit folgenden Daten. Die Länge des Äquatorialradius der Erde wird nach der Berechnung von *Battermann*<sup>41)</sup> aus *Helmerts* Berichten über die Tätigkeit des Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung für 1906 und 1907 zu  $\varrho_0 = 6378102$  m mit der zugehörigen Abplattung 1:298,3 angenommen; die Beschleunigung der Schwerkraft nach Nr. 2, die Mondmasse nach Nr. 20 zu 1:81,53 und die mittlere siderische Bewegung des Mondes in einer Sekunde nach *Newcomb* zu  $\log n = 4,425159 - 10$  (in Bogen). Es ergibt sich

$$\sin \pi_D \text{ (ohne den konst. Teil der Stör.)} = 3419''52$$

$$\sin \pi_D \text{ (für die Variationsbahn)} = 3422,62.$$

**17. Die parallaktische Ungleichheit in der Mondbewegung.** Mit diesem Namen wird eines der größeren Störungsglieder in der Mondlänge bezeichnet, dessen Koeffizient vom Verhältnis der Sonnenparallaxe zur Mondparallaxe abhängt und dessen Argument die Differenz der Mond- und Sonnenlänge ist. Der analytische Ausdruck kann in der Form aufgestellt werden

$$(46) \quad - C \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin(\pi_D)} \sin(L_D - L_{\odot}),$$

worin  $C$  ein von der benutzten Störungstheorie abhängiger Zahlenfaktor,  $\mu$  das Verhältnis der Mond- zur Erdmasse,  $\pi_{\odot}$  die Sonnenparallaxe,  $(\pi_D)$  die Parallaxe der ungestörten Mondbahn,  $L_D$  und  $L_{\odot}$  die mittleren Längen von Mond und Sonne sind. Nach einer Berechnung von *Battermann*<sup>42)</sup> sind die Werte von  $\log C$  in den Theorien von

	log C
<i>Hansen</i> , Tables de la Lune . . . . .	4,696510
<i>Hansen</i> , Darlegung der in den Mondtafeln angewandten Störungen . . . . .	4,696311
<i>Brown</i> , Theory of the Motion of the Moon	4,697301.

41) *H. Battermann*, Beitrag zur Bestimmung der Mondbahn. Berlin Sternwarte Ergebn. Nr. 13 (1900), p. 12.

42) Ebenda p. 15.

Mit der Mondmasse  $1 : 81,53$  und der oben abgeleiteten ungestörten Mondparallaxe  $(\pi_D)'' = 3419''52$  ergeben sich hiernach für den Koeffizienten  $P$  der Ungleichheit die Werte:

$$(47) \quad \begin{aligned} P &= [1,151891_n] \pi_{\odot}'' = -14,1870 \pi_{\odot}'' && \text{Hansen}_1 \\ &[1,151692_n] \pi_{\odot}'' = -14,1805 \pi_{\odot}'' && \text{Hansen}_2 \\ &[1,152682_n] \pi_{\odot}'' = -14,2129 \pi_{\odot}'' && \text{Brown.} \end{aligned}$$

Nach *Delaunay* (Theorie du mouvement de la lune II, p. 847) wird  $\log C = 4,696856$  und daher mit obigen Daten:

$$P = [1,152237] \pi_{\odot}'' = -14,1983 \pi_{\odot}'' \quad \text{Delaunay.}$$

Könnte man  $P$  mit hinlänglicher Sicherheit aus den Beobachtungen ermitteln, so läge in dieser Gleichung ein ausgezeichnetes Mittel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe vor. Allein hierzu werden sowohl einwandfreie Beobachtungen und eine genaue Kenntnis des Mondhalbmessers als auch eine exakte Mondtheorie erfordert. Die Gleich. (46) zeigt, daß die Beobachtungen bei  $L_D - L_{\odot} = \pm 90^{\circ}$ , also bei den Quadraturen angestellt sein müssen; dies erfordert Meridianbeobachtungen bei Tageslicht, wo die Irradiation eine große Rolle spielt, und für die beiden Quadraturen ist an verschiedenen Rändern des Mondes einzustellen; die Reduktion erfordert also eine genaue Kenntnis des Mondhalbmessers und wird außer durch die Irradiation noch erschwert durch die Unregelmäßigkeiten des Mondrandes. Ältere Meridianbeobachtungen, bei denen die Rücksichtnahme auf diese Umstände erschwert ist, scheiden hier völlig aus; die aus ihnen abgeleiteten Werte von  $P$  sind in die unten folgende Zusammenstellung nicht aufgenommen. Durch zweierlei Beobachtungsarten des Mondortes ist in neuerer Zeit ein Fortschritt erzielt worden: 1. durch die ausschließliche Benutzung von Sternbedeckungen durch den Mond nach dem Vorschlag von *H. Battermann*<sup>43)</sup>, 2. durch die Ableitung der Mondörter aus der Beobachtung des Kraters Moesting A nach dem Vorschlage von *J. Franz*.<sup>44)</sup> Diese bleiben daher allein neben einem von *Newcomb*<sup>45)</sup> aus den Greenwicher und Washingtoner Meridianbeobachtungen seit 1862 und einem von *Cowell*<sup>46)</sup> aus den Beobachtungen 1847—1901 abgeleiteten Werte stimmberechtigt. Die Werte sind:

43) Berlin Sternw. Ergebn. 5 (1891), 11 (1902), 13 (1910).

44) Astr. Nachr. 136 (1894), p. 353.

45) Fund. Const. p. 151.

46) *P. H. Cowell*, Analysis of 145 Terms in the Moons Longitude 1750—1901. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 108.

<i>Newcomb</i> , Beob. am Mer.-Kreis Greenw. u. Washingt.	— 124''88 ± 0''16
<i>Battermann</i> , aus etwa 1000 Sternbedeckungen	— 124, 93 ± 0,18
<i>Franz</i> aus Beobachtungen von Moesting A	— 124, 36 ± 0,27
<i>Cowell</i> aus Greenwicher Beobachtungen 1847—1901	— 124, 90

Mit den Gewichten 2, 5, 1, 2 folgt hieraus:

$$(48) \quad P = -124''86;$$

die Unsicherheit kann auf etwa ± 0''15 geschätzt werden.

Nicht nur die Ableitung von  $P$  aus den Beobachtungen setzt eine exakte Mondtheorie voraus, weil sonst die Ablösung von  $P$  von den übrigen Störungsgliedern nicht möglich ist, sondern die oben angegebenen Werte von  $\log C$  zeigen auch, in wie hohem Grade das Verhältnis von  $P$  zur Sonnenparallaxe von der Theorie abhängig ist. Die theoretische Unsicherheit in der Sonnenparallaxe steigt hiernach bis 0''020; eine Verwendung der Gleichung zu ihrer Bestimmung ist daher zurzeit noch aus Gründen der Theorie und der Beobachtung nur mit Vorbehalt möglich.

*Hansen*<sup>47)</sup> leitet aus der Vergleichung seiner mit dem Faktor  $\frac{a_D}{a_\odot}$  multiplizierten Störungsglieder, also in der Hauptsache der parallaktischen Ungleichheit, mit den Beobachtungen eine Korrektion des genannten Faktors ab und bestimmt dann mit dem verbesserten Faktor durch die Gleichung (42)

$$\frac{1}{m_1''} = \frac{\left(\frac{n}{n_D}\right)^2}{\left(\frac{a_D}{a}\right)^3} - 1$$

die Erdmasse und mittelst dieser dann nach Gleichung (43) die Sonnenparallaxe. Dabei hat er für  $\frac{n}{n_D}$  das Verhältnis der anomalistischen Bewegungen zu nehmen, das auch sonst seiner Theorie zugrunde liegt. Die von ihm erhaltenen Werte (Erdmasse =  $\frac{1}{319455}$ ,  $\pi_\odot = 8''906$ ) zeigen die Unsicherheit der Grundlage.

*Newcomb* (Fund. Const. p. 190) leitet aus der Gleichung (47)

$$P = [1,15173_n] \pi_\odot''$$

die unsichere Konstante  $P$  selbst mittelst der Sonnenparallaxe  $\pi_\odot = 8''79$  ab:

$$P = -124''66$$

in erträglicher Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert.

47) *P. A. Hansen*, Darlegung der in den Mondtafeln angewandten Störungen II, art. 266—269

18. Die Elemente der Mondbahn. Gegen Ende des 17. Jahrh. waren durch reine Beobachtung, an der die Babylonier, Ptolemäus und Tycho Brahe den größten Anteil hatten, die Hauptzüge in der Bewegung des Mondes erkannt: die Mittelpunktsgleichung im Betrage von etwa  $5\frac{1}{2}^{\circ}$ , die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik im Betrage von etwa  $5^{\circ}$ , die rückläufige Bewegung des Knotens, welche ihn in 6793 Tagen durch den Umkreis führt, die rechtläufige Bewegung des Perigäums, welche es in 3233 Tagen den Umkreis beschreiben läßt, die Hauptstörungsglieder in Länge, nämlich die Evekion (Ptolemäus) welche in den Syzygien und Quadraturen den Ort des Mondes um  $1\frac{1}{4}^{\circ}$  verschiebt, die Variation (Tycho Brahe), welche in den Oktanten eine Änderung von  $40'$  erzeugt und die jährliche Gleichung (Tycho Brahe) im Betrage von  $11'$ ; endlich die mittlere Bewegung, welche durch die Verbindung der alten Finsternisse mit den neueren Beobachtungen mit einer Genauigkeit bekannt war, wie bei keinem anderen Himmelskörper. *Newton* und seine Nachfolger erklärten die erkannten Bewegungen durch die Gravitation und wiesen theoretisch kleinere Störungsglieder nach, die die Beobachtung bestätigte. Es entstanden Mondtafeln, welche aus einer Mischung von Theorie und Beobachtung zusammengesetzt, schließlich *Laplace* und seinen Nachfolgern ermöglichten, eine reine Theorie des Mondes aufzubauen, welche die Beobachtung so gut darstellt, daß die genaue Bestimmung der Mondbahnelemente durch Bedingungsgleichungen stattfinden kann. Diese Gleichungen, welche die differentiellen Änderungen der Mondbahnelemente und ihrer säkularen Bewegungen in Verbindung mit der Differenz Beobachtung minus Theorie setzen, bilden von da ab das einzig gebrauchte Mittel, die der Beobachtung zu entnehmenden Elemente der Theorie zuzuführen. Es muß hier genügen, auf einige der neuesten Arbeiten dieser Richtung hinzuweisen.<sup>48)</sup> Auf der Grundlage der *Hansenschen* Mondtafeln<sup>49)</sup> bestimmt *Newcomb* aus den genauesten Beobachtungen von 275 Jahren, hauptsächlich Sternbedeckungen durch den Mond, die Mondelemente; wir geben seine Resultate, soweit sie Konstante betreffen.

Als mittlere Länge des Mondes für die Epoche 1850 Jan. 0,0 m. Z. Gr. und ihre Änderung ergaben die Beobachtungen:

48) *S. Newcomb*, Researches on the Motion of the moon I, Washington 1878 (Washington Observations 1875), II. Astr. Papers, Vol. IX (1912), p. I.

*H. Battermann*, Beitrag zur Bestimmung der Mondbahn und des Mondhalbmessers aus Beobachtungen von Sternbedeckungen. Berlin Sternw., Ergebn. Heft 5, 11, 13, 1891—1910.

*P. H. Cowell*, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 108, 721.

49) *P. A. Hansen*, Tables de la Lune, London 1857.

$$(49) \lambda = 123^{\circ} 4' 47'' 66 + 17325644'' 0211 t + 9'' 08 T^2 + 0'' 0068 T^3,$$

wobei  $t$  in julianischen Jahren,  $T$  in julianischen Jahrhunderten von 1850 ab zu zählen ist, und der Betrag der allgemeinen Präzession in Länge mit inbegriffen ist. Wird dieser mit

$$(50) \text{ Allg. Präz.} = 50'' 2453 t + 1'' 11 T^2 + 0'' 00087 T^3$$

in Abzug gebracht, so erscheint in dem Ausdruck

$$(51) \Delta\lambda = + 17325593'' 7758 t + 7'' 97 T^2 + 0'' 0059 T^3$$

als erstes Glied die siderische jährliche Bewegung in Länge und als zweites die Säkularakzeleration derselben. Die Darstellung der Beobachtungen durch diesen Ausdruck und durch die Theorie ist keine befriedigende. In den Differenzen zeigt sich eine große Wellenbewegung mit kleineren darüber gelagerten Wellen, über welche die Theorie zurzeit keinen Aufschluß geben kann; die Abweichungen steigen über  $12''$  mit einer Periode von etwa 275 Jahren (s. Tabelle und graphische Darstellung bei *Newcomb* Res. II, p. 211). Infolgedessen bleibt auch der aus den Beobachtungen abgeleitete Wert der Säkularakzeleration  $7'' 97$  unsicher, und die Frage dieser schicksalsreichen Zahl kann noch nicht geregelt werden. Wir verweisen auf ihre in Theorie und Beobachtung interessante Geschichte in *Tisserand*, *Méc. céleste* vol. III, p. 240, und *Encycl.* VI 2, 14 (*Brown*), Nr. 23, p. 720.

Für die Länge des Perigäums und des Knotens ergaben die Beobachtungen für dieselbe Epoche und mit derselben Bezeichnung wie oben:

$$(52) \pi = 99^{\circ} 51' 54'' 14 + 146485'' 5315 t - 37'' 17 T^2 - 0'' 045 T^3$$

$$(53) \Omega = 146 13 40, 01 - 69629, 2020 t + 7, 57 T^2 + 0, 008 T^3.$$

Wird auch hier die Präzession in Abzug gebracht, so erscheinen in:

$$(54) \Delta\pi = + 146435'' 2862 t - 38'' 28 T^2 - 0'' 046 T^3$$

$$(55) \Delta\Omega = - 69679, 4473 t + 6, 46 T^2 + 0, 007 T^3$$

die beobachteten säkularen Störungen der beiden Elemente. Sie stehen in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Beträgen, die *Brown* (*Mem. R. A. S.* vol. 59, p. 94) abgeleitet hat:  $\Delta\pi = + 146435'' 21$  und  $\Delta\Omega = - 69679'' 36$  und haben gestattet, einen neuen Wert für die Differenz der Trägheitsmomente des Erdkörpers abzuleiten (siehe Nr. 10).

Die Formel (49) gibt die tropische Umlaufszeit des Mondes oder den tropischen Monat, die Formel (51) den siderischen Monat, nämlich für 1850 gültig:

$$(56) \text{ trop. Monat} = \frac{1296000 \times 365,25}{17325644,02} = 27^d 3215811 = 27^d 7^h 43^m 4^s 61$$

$$(57) \text{ sid. Monat} = \frac{1296000 \times 365,25}{17325593,78} = 27^d 3216610 = 27^d 7^h 43^m 11^s 51 \\ = 2360591^s 51.$$

Für die Umlaufzeiten in bezug auf das Perigäum und in bezug auf den Knoten erhält man durch die Divisoren  $\Delta\lambda - \Delta\pi$  und  $\Delta\lambda - \Delta\Omega$ :

$$(58) \text{ Anomalistischer Monat} = \frac{1296000 \times 365,25}{17179158,49} = 27^d 55455041 \\ = 27^d 13^h 18^m 33^s 16$$

$$(59) \text{ Drakonitischer Monat} = \frac{1296000 \times 365,25}{17395273,22} = 27^d 21221993 \\ = 27^d 5^h 5^m 35^s 80.$$

Wir fügen die Dauer des synodischen Monats bei, die aus der Differenz der siderischen Bewegung von Mond und Sonne erhalten wird, nämlich aus

$$17325593''78 - 1295977'43 = 16029616''35$$

$$(60) \text{ synod. Monat} = \frac{1296000 \times 365,25}{16029616,35} = 29^d 53058775 = 29^d 12^h 44^m 2^s 78$$

Die beiden Elemente Exzentrizität und Neigung zeichnen sich im Gegensatz zu den beiden letztbesprochenen durch außerordentliche Konstanz aus, so daß sie, abgesehen von den periodischen Störungen für historische Zeiten als nahe konstant gelten können. Die Exzentrizität  $e$  ergibt sich aus der Beobachtung durch den Koeffizienten des Hauptgliedes der Mittelpunktsgleichung, nämlich durch

$$(61) \quad \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \sin g \quad g = \text{mittl. Anomalie.}$$

*Airy*<sup>50)</sup> bestimmte den Koeffizienten aus allen Greenwicher Mondbeobachtungen 1750—1847 zu 22639''06, und *Newcomb*<sup>51)</sup> fand aus den Greenwicher Beobachtungen 1846—1874 und den Washingtoner 1862—1874 22639''58. In der Theorie von *Delaunay* wird der *Airysche* Wert und entsprechend  $e = 0,05489930$ , in den Tafeln von *Hansen* wird  $e = 0,05490807$  gebraucht, *Brown*<sup>52)</sup> adoptiert den *Newcomb'schen* Wert 22639,58 und entsprechend  $e = 0,05490056$ , *Battermann*<sup>53)</sup> erhält aus seinen drei Reihen als Korrektion des *Hansen-*

50) *G. B. Airy*, Corrections of the elements of the Moons orbit. Lond. Astr. Soc. mem. 29 (1859).

51) *S. Newcomb*, Transformation of *Hansens* Lunar Theory. Astr. Pap. vol. I p. 69

52) *Brown*, a. a. O. Bd. 57, p. 109.

53) *Battermann*, a. a. O. Heft 13, p. 43.

schen Wertes  $-0''53 \pm 0,08$ , also  $e = 0,05490550$ . *P. H. Cowell* (Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 147) findet aus Beobachtungen 1750—1901  $22639''50$  und gibt (ebd. p. 745) eine Zusammenstellung.

In derselben Weise wird die *Neigung* der Mondbahn gegen die Ekliptik  $I$  durch das Hauptglied in der Breite  $\beta$  bestimmt. Dieses hat in der Theorie von *Delanay*<sup>54)</sup> die Zusammensetzung

$$(62) \quad \beta = \left( 2\gamma - 2\gamma e^2 - \frac{1}{4}\gamma^5 + \frac{7}{32}\gamma e^4 \right) \sin(g + \omega)$$

$$\gamma = \sin \frac{I}{2} \quad \omega = \text{Abstand des Perigäums von Knoten.}$$

*Airy* bestimmte in der oben zitierten Arbeit aus den Greenwicher Beobachtungen 1750—1847 den Koeffizienten zu  $18461''26$ , womit sich ergab

$$\gamma = 0,04488663$$

und

$$I = 5^{\circ}8'43''29.$$

*Newcomb*<sup>55)</sup> stellte als entsprechenden in *Hansens* Tafeln implizite enthaltenen Koeffizienten  $18461''63$  fest und fand dazu aus den Greenwicher und Washingtoner Beobachtungen 1862—1874 die Korrektion  $-0''15$  und später (Res. II, p. 223)  $-0''18$ . Mit diesem letzteren ergibt sich  $18461''45$ . *Hansen* selbst gibt in seinen Tafeln den Wert an:

$$I = 5^{\circ}8'39''96.$$

Den Wert von *Newcomb* adoptiert *Brown* (Astr. Soc. mem. 57 (1905), p. 138). Aus 5646 Beobachtungen von 1847—1901 findet *Cowell* (a. a. O. p. 564)  $18461''35 \pm 0''05$ .

**19. Die Störungsglieder der Mondbewegung** werden durch die Theorie bestimmt, welche ihre Zusammensetzung angibt. Die folgende Tabelle gibt die Zahlen für die größten Glieder nach den Theorien von *Hansen*, *Delanay* und *Brown* und für die Parallaxe von *Adams*. Hinzugefügt sind die direkt aus der Beobachtung ermittelten Werte nach *Cowell*.<sup>56)</sup>

54) Conn. d. T. 1869, p. 10

55) Astr. Pap. I, p. 76.

56) *P. H. Cowell*, Analysis of 145 Terms in the Moons Longitude 1750—1901 (Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 108). The Moons observed Latitude 1847—1901 (ebenda p. 721).

		<i>g</i>	<i>g'</i>	Hansen	Delaunay	Brown	Cowell
<i>Länge</i>	Mittelp. Gl.	1	0	22640''15	22640''15	22639''58	+22639''50
	Jährl. Gl.	0	-1	+ 669,85	+ 669,76	+ 668,94	+ 668,2
			$2\omega - 2\omega'$				
	Evektion	1	-2	+ 4586,56	+ 4586,44	+ 4586,44	+ 4586,4
	Variation	2	-2	+ 2369,75	+ 2369,74	+ 2369,90	+ 2370,2
			$\omega - \omega'$				
	Parall. Gl.	1	-1	- 125,43	- 125,98	- 124,78	- 124,90
			$\omega$				
<i>Breite</i>	Red. Ekl.	1	0	+18461''65	+18461''26	+18461''48	+18461''35
<i>sin Parall.</i>	Konst.	0	0	3422,12	3422,70	3422,70	<i>Adams</i> 3422,32
			$2\omega - 2\omega'$				
	Evektion	1	-2	+ 34,31	+ 34,29	+ 34,31	+ 34,30
	Variation	1	-2	+ 28,22	+ 28,20	+ 28,23	+ 28,23

20. Die Mondmasse. Man hat zwei Wege zur Bestimmung der Mondmasse, den durch die Nutationskonstante (Nr. 9) und den durch die Mondgleichung (Nr. 8). Der erste gibt

$$\mu = \frac{1}{81,51 \pm 0,20};$$

bei Ansetzung des mittleren Fehlers ist der mittlere Fehler der Präzessionskonstante schätzungsweise zu  $\pm 0''005$  angenommen worden.

Der zweite gibt, wenn für die Sonnenparallaxe der trigonometrische Wert  $\pi_{\odot}'' = 8''806 \pm 0''003$  eingeführt wird:

$$\mu = \frac{1}{81,54 \pm 0,09}.$$

Die Vereinigung beider Werte führt auf den endgültigen Wert

$$\mu = \frac{1}{81,53 \pm 0,08},$$

der infolge der guten Übereinstimmung der durch ganz verschiedene Methoden gewonnenen Einzelresultate nicht nur das Vertrauen auf ihn selbst stärkt, sondern auch auf die Konstanten der Sonnenparallaxe, der Präzession und Nutation, aus denen er hervorging.

Nimmt man die Mondmasse als bekannt an, so gestatten die Gleichungen (15) der Nr. 9 nicht nur die Ermittlung von  $\frac{C-A}{C}$ , sondern man wird dann auch die Nutationskonstante aus ihrer theoretischen Zusammensetzung ableiten können.

Die erste Gleichung gibt mit  $\mu = \frac{1}{81,53}$

$$\frac{C-A}{C} = 0,003278;$$

die rechte Seite der zweiten Gleichung (15) gibt für die Nutationskonstante für 1850:

$$N = 9''213,$$

der in völliger Übereinstimmung mit dem direkt aus den Beobachtungen hervorgegangenen Wert sich befindet.

## Die Planeten.

**21. Die Theorien der Sonne und der großen Planeten.** Die Bahnelemente der Sonne und der Planeten gingen von *Ptolemäus* ungeändert auf *Copernikus* über mit Ausnahme der Entfernungen, für die dieser zum ersten Male statt Vermutungen gemessene Werte setzen konnte. Genau kannte man nur die Umlaufzeiten. *Kepler* bestimmte aus den Beobachtungen *T. Brahes* die Bahnelemente im heutigen Sinn und legte sie den *Rudolfinischen Tafeln* zugrunde (1627). Nach Einführung des *Newtonschen* Gesetzes (1686) begann man um die Mitte des 18. Jahrhunderts Störungen zu rechnen, zuerst tastend an einzelnen Erscheinungen, die die Beobachtungen gezeigt hatten, dann zum erstenmal zusammenfassend durch *Laplaces Mécanique céleste* (1798—1825). Zum zweitenmal nahm *Leverrier* das Gesamtproblem auf (*Annales de l'Obs. de Paris*, T. 5—14, 1859—1877) und zum drittenmal *Newcomb* (*Astr. Pap.*, T. 1—7, 1882—1898). Die Bestimmung der Konstanten, zu denen seit *Newton* die Massen getreten waren, geschieht durch Bedingungsgleichungen, die zwischen den Änderungen der Elemente und Massen einerseits und den Änderungen der Koordinaten des geozentrischen Ortes andererseits aufgestellt werden. Zur Bildung, praktischen Aufstellung und Lösung dieser Gleichungen sei besonders auf

*S. Newcomb*, *Formulae and Tables* (*Astr. Pap.*, vol. II (1891), p. 1),

*G. W. Hill*, *Tables of Jupiter, Saturn* (*Astr. Pap.*, vol. VII (1898), p. 7, 149)

verwiesen.

Auf die Angabe der Bahnelemente kann verzichtet werden, da man sie in allen Ephemeriden und Tafelsammlungen findet.<sup>57)</sup>

**22. Die Massen der Planeten.** Die Massen der Körper des Sonnensystems werden aus den Wirkungen bestimmt, die sie nach dem *Newtonschen* Gesetz auf benachbarte Körper ausüben. Die Hauptwirkung ist ausgesprochen in dem dritten *Keplerschen* Gesetz für die Planeten:

$$k^2(M + m) = n^2 a^3$$

$$k^2(M + m') = n'^2 a'^3$$

57) Die authentischen Werte finden sich in den *Newcomb-Hillschen Tafeln* (l. c.).

wo  $M$  die Sonnenmasse,  $m, m', \dots$  die Planetenmassen bedeuten, und unter  $n, n', \dots, a', \dots$  die der elliptischen, ungestörten Bewegung zugehörigen Werte der mittleren Bewegungen und großen Halbachsen zu verstehen sind. Setzt man die Sonnenmasse als Einheit der Masse, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längeneinheit fest, bestimmt  $n$  durch Messung der Länge des siderischen Jahres und  $m$  durch Messung der Sonnenparallaxe (Nr. 15), so wird  $k^2$  bekannt, aber dies reicht nicht aus, die übrigen Planetenmassen zu bestimmen, da wohl die  $n', \dots$ , aber nicht die  $a', \dots$  mit genügender Schärfe ermittelt werden können. Man benutzt daher umgekehrt obige Gleichungen zur Bestimmung der  $a', \dots$ , wenn die Massen anderweitig bekannt geworden sind. Dagegen führt die Anwendung desselben Gesetzes auf die Satelliten der Planeten zu so genauen Massenbestimmungen, daß man davon bei allen Planeten, die von Satelliten umlaufen werden, Gebrauch macht.

Mit der Bezeichnung: Sonnenmasse = 1, Erdmasse =  $m$ , Planetenmasse =  $m'$  (Gesamtmasse einschließlich aller Satelliten), Masse aller Satelliten =  $m'\Sigma$ , Masse eines einzelnen =  $m'\mu$ , mittlere Bewegungen der Erde, des Planeten und des Satelliten bzw.  $n, n', \nu$ , große Halbachsen derselben Körper bzw. 1,  $a', a' \sin \mathcal{A}$ , folgen aus

$$k^2(1 + m) = n^2,$$

$$k^2(1 + m') = n'^2 a'^3,$$

$$k^2 m'(1 - \Sigma + \mu) = \nu^2 a'^3 \sin \mathcal{A}^3$$

die drei Formen

$$\frac{m'}{1 + m'} = \left(\frac{\nu}{n'}\right)^2 \frac{(a' \sin \mathcal{A})^3}{a'^3} (1 + \Sigma - \mu),$$

$$(63) \quad m' = \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (a' \sin \mathcal{A})^3 (1 + m)(1 + \Sigma - \mu),$$

$$m' = \left(\frac{\nu}{k}\right)^2 (a' \sin \mathcal{A})^3 (1 + \Sigma - \mu).$$

$\mathcal{A}$  ist die große Halbachse der Satellitenbahn, gesehen aus der mittleren Entfernung  $a'$ , und kann bei den Elongationen des Satelliten direkt gemessen werden. Die  $\nu, n, n'$  folgen aus den Umlaufzeiten, die man auch direkt in die Formeln einführen kann. Die Attraktionskonstante  $k^2$  in der letzten Formel ist auf dieselben Einheiten zu bringen, in denen  $\nu$  ausgedrückt ist. Der Faktor  $1 + \Sigma - \mu$  kann nur verwendet werden, wenn die Massen der Satelliten bekannt sind; er ist nur von verschwindendem Einfluß.

Obige Formeln setzen die elliptischen, d. h. die ungestörten Werte von  $\nu$  und  $\mathcal{A}$  voraus; da die gestörten Werte beobachtet werden, sind diese zuerst vom Betrag der Störungen zu befreien. Es kommen zu-

nächst die Störungen der Satellitenlänge in Betracht, die von der Abplattung des Hauptkörpers, von der Sonne und von den übrigen Satelliten herrühren, und zwar nur die Säkularstörungen;  $\nu$  wird aus der Vergleichung der Längen für verschiedene Epochen abgeleitet und begreift also in sich den säkularen Teil der Störungen in der Epoche; dieser ist aus allen drei Ursachen zusammengefaßt gleich

$$\nu \left[ 2 \frac{k}{a^2} - \left( \frac{n'}{\nu} \right)^2 - \Sigma \mu a^2 \frac{\partial A^0}{\partial a} \right] = \nu \sigma^{58},$$

und die oben statt  $\nu$  einzutragende ungestörte mittlere Bewegung  $\nu_0$  wird also:

$$\nu_0 = \nu(1 - \sigma).$$

Im Ausdruck von  $\sigma$  bedeuten  $a$  die große Halbachse der Satellitenbahn  $= a' \sin \mathcal{A}$  und  $k$  die Abplattungskonstante, deren Zusammenhang mit der Abplattung des Planeten folgender ist. Sind  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  Äquatorial- und Polarhalbmesser des als Rotationsellipsoid angenommenen Planetenkörpers, also

$$\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \chi = \text{Abplattung},$$

ferner  $\varphi$  das Verhältniß der Zentrifugalkraft zur Schwere am Äquator, so gibt die Gleichgewichtsbedingung

$$k = \mathfrak{a}^2 \left( \chi - \frac{\varphi}{2} \right)$$

und, wenn  $T$  die Umlaufszeit des Satelliten,  $U$  die Rotationszeit des Planeten ist, die Gleichung

$$\varphi = \left( \frac{T}{U} \right)^2 \left( \frac{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}} \right)^3$$

die Größe  $\varphi$ , so daß aus:

$$\chi = \frac{k}{\mathfrak{a}^2} \left( \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi$$

die Abplattung berechnet und mit der beobachteten verglichen werden kann.  $\frac{k}{\mathfrak{a}^2}$  läßt sich aus den beobachteten Säkularstörungen der Elemente des Satelliten bestimmen, oder es läßt sich umgekehrt aus der beobachteten Abplattung ableiten:

$$\frac{k}{\mathfrak{a}^2} = \left( \chi - \frac{1}{2} \varphi \right) \left( \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} \right)^2.$$

Für den ungestörten Wert  $a_0$  von  $a = a' \sin \mathcal{A}$  findet man:

$$a_0 = \frac{a' \sin \mathcal{A}}{\left( 1 - \frac{1}{2} \sigma \right)}.$$

---

58) *P. S. Laplace*, *Méc. cél.*, vol. IV, ch. 2; *H. Struve*, *Beobachtungen der Saturnstrabanten*. Supplement I aux Obs. de Poulkova 1888, p. 63 und 115.

Es sind also obige Formen (63) noch mit dem Faktor

$$(64) \quad \frac{(1-\sigma)^2}{(1-\frac{1}{2}\sigma)^3} = (1 - \frac{1}{2}\sigma), \quad \sigma = \left(2 \frac{k}{a^2} - \left(\frac{n'}{v}\right)^2\right)$$

zu multiplizieren, um den Störungen Rechnung zu tragen.

Durch diese Methode wurden die Massen aller großen Planeten bestimmt, die mit Satelliten versehen sind, das sind also alle mit Ausnahme des Merkur und der Venus. Die übrigen jetzt zu besprechenden Methoden sind für sie nur zur Sicherung und Prüfung herangezogen worden.

Das zweite Mittel, Planetenmassen zu bestimmen, beruht auf der Verwendung der Säkularstörungen der vier Bahnelemente, Länge des Perihels und des Knotens, Neigung und Exzentrizität; die große Halbachse hat keine Säkularstörungen, und die Störungen der mittleren Länge für die Epoche lassen sich in der Beobachtung nicht von der mittleren Bewegung trennen. Die Säkularstörungen eines Elementes werden durch die Theorie in der Form geboten

$$c'm' + c''m'' + \dots,$$

wo die  $c$  bekannte Funktionen der Elemente, die  $m$  die Massen der störenden Planeten sind. Werden sie mit angenommenen Massenwerten  $m_0', m_0'', \dots$  berechnet:  $R$  und andererseits beobachtet:  $B$ , so erhält man, wenn die wahren Massen mit  $m_0'(1 + v')$ ,  $m_0''(1 + v'')$ , ... bezeichnet werden, die Bedingungsgleichung

$$(65) \quad c'm_0'v' + c''m_0''v'' + \dots = B - R.$$

Solche Gleichungen erhält man vier für jeden Planeten einer zusammenbetrachteten Gruppe (für die Erde nur drei, weil an Stelle von Knoten und Neigung die Schiefe der Ekliptik tritt), also  $4n$  (bzw.  $4n - 1$ ), und leitet daraus durch Ausgleichung die  $n$  Unbekannten  $v', \dots$  ab. In jeder der drei großen Bearbeitungen des Planetensystems durch Laplace (Méc. cé.), Leverrier (Ann. de l'Obs. de Paris) und Newcomb (Astr. Pap. Washington) bildet diese Ausgleichung die Hauptprüfung durch die Vergleichung der hieraus gewonnenen Massen mit den durch die Satelliten gebotenen.

Man kann die großen Planeten in zwei Gruppen teilen, die innere mit Merkur, Venus, Erde, Mars und die äußere mit Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Da sich wegen der kleinen Massen der inneren, und der weiten Entfernung der äußeren beide Gruppen gegenseitig nur wenig beeinflussen, kann man das Problem der Massenbestimmung in zwei Abteilungen zerlegen, was die Aufgabe wesentlich erleichtert. Die äußere satellitenreiche Gruppe macht nur insofern Schwierigkeiten, als die dort auftretenden Glieder langer Periode sich schwer von den

säkularen trennen lassen. Dagegen ist die Massenausgleichung der inneren Gruppe von jeher nur unvollkommen gelungen und hat Hypothesen notwendig gemacht. Die Entdeckung der Marssatelliten 1877 hat mehr Sicherheit gebracht, aber die durch *Leverrier*<sup>59)</sup> aufgefundene Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur hat die astronomische Forschung über 50 Jahre beschäftigt. In der nächsten Nummer wird hierauf näher eingegangen.

Die *dritte*, unvollkommenste Methode, die Planetenmassen zu bestimmen, beruht auf der Heranziehung der periodischen Störungen. Diese werden durch die Theorie in der Form geboten

$$(66) \quad \sum m'h \sin(il - i'l + K_{il}),$$

worin  $h$  von bekannter Zusammensetzung ist,  $i, i'$  ganze Zahlen sind,  $K_{il}$  ebenfalls bekannt,  $l$  und  $l'$  die Längen der Planeten bedeuten; die Zahl der Glieder ist groß, und jedes besitzt eine bestimmte Periode, innerhalb welcher  $il - i'l$  alle Werte von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  annimmt. Die Koeffizienten  $m'h$  sind in der Mehrzahl sehr klein. Während die Säkularstörungen zu ihrer Bestimmung aus den Beobachtungen sehr lange Zeiträume erfordern, spielen sich die periodischen meist rasch ab, aber es bedarf fortlaufender Reihen scharfer Beobachtungen, um sie mit einiger Sicherheit herauschälen zu können. Der Massenfaktor ergibt sich dann ebenso wie bei den Säkularstörungen. Man macht von dieser Methode nur Gebrauch, wenn man dazu gezwungen ist. Das ist nur bei Merkur und Venus der Fall, wenn man Ursache hat, der Masse aus den Säkularstörungen zu mißtrauen (siehe Nr. 23).

Eine *vierte* Methode, die Planetenmasse aus ihren Wirkungen auf Massen an der Oberfläche des Planeten etwa durch Pendelmessungen zu bestimmen, ist nur bei der Erde anwendbar; hierüber ist Näheres in Nr. 15 zu finden.

**23. Ableitung der Massen von Merkur, Venus und Erde aus den Säkularstörungen.** An sich eignen sich die Säkularstörungen zur Bestimmung der Massen derjenigen Planeten, die nicht von Monden begleitet sind, viel besser als die periodischen Störungen, und sie sind daher früher fast ausschließlich zu diesem Zweck herangezogen worden. Als sich aber bei der umfassenden Bearbeitung des Planetensystems durch *Leverrier* und in verschärftem Maße bei der neuesten Bearbeitung durch *Newcomb* deutliche Unstimmigkeiten, insbesondere die Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur, herausstellten, mußte man Bedenken tragen, die Massen von Merkur, Venus

59) Ann. de l'Obs. de Paris, vol. V (1859).

und Erde auf die Säkularstörungen zu gründen, da sie die Anomalien nicht erklären konnten und nicht berechenbare Einflüsse als möglich zuzugeben waren. Nachdem jedoch die *Einsteinsche* Gravitations-theorie<sup>60)</sup> für die Perihelbewegung des Merkur einen Ausdruck gefunden hat, den man als richtig betrachten muß, auch wenn man sich nicht zu seiner Begründung bekennt, ist das Problem in ein neues Stadium getreten. Es sei daher gestattet, etwas ausführlicher auf die Neuregelung der Konstanten der Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars hier einzugehen, da die *Newcombsche* Bearbeitung auf der sicher unrichtigen Hypothese beruht, daß die Perihelie der Planeten eine anomale Bewegung proportional ihren mittleren Bewegungen ausführen.

*Einstein* leitet aus seiner Gravitationstheorie ab, daß das Perihel für jeden ganzen Umlauf des Planeten um die Sonne im Sinne der Bewegung um den Betrag

$$\varepsilon = 6\pi \frac{h^2}{c^2} \frac{1}{a(1-e^2)} = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)} \text{ Radiusteile}$$

vorrückt. Nach Einführung von  $\sin \varphi = e$  und  $n = \frac{2\pi}{T}$  wird daraus

$$\varepsilon = 6\pi \left( \frac{na \sec \varphi}{c} \right)^2.$$

$na \sec \varphi = v_0$  ist das Mittel aus der größten und der kleinsten Linear-geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn; also kann man nach Übergang auf Sekunden auch schreiben:

$$\varepsilon'' = 3 \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 1296\,000'',$$

oder, da  $\frac{v_0}{c} = A$  die Aberrationskonstante des Planeten ist (Nr. 6),

$$(67) \quad \varepsilon'' = 3888\,000 A^2 \text{ Sekunden.}$$

Folgende Tabelle gibt für die 4 Planeten die Zahlenwerte:

	Mittl. Bahn- geschwindig- keit in km/sek $v_0$	$A$	$A''$	Perihelbew. $\varepsilon''$ für einen Umlauf	Perihelbeweg. in 100 jul. Jahren $D\pi''$	$eD\pi''$
Merkur	48,879	0,00020626	33''62	0''10331	42''89	8''82
Venus	34,994	11670	24,07	0,05295	8,607	0,059
Erde	29,766	09926	20,47	0,03831	3,831	0,064
Mars	24,216	08076	16,66	0,02536	1,348	0,126

Die Zahlen der letzten Spalte sind Ausfluß der Theorie und können den durch die Theorie gebotenen Säkularstörungen des Elementes  $eD\pi_1''$  hinzugefügt werden. Dies ist in folgender Tabelle geschehen, welche in der ersten Zahlenspalte die mit den Massen

60) Berlin. Ber. 1915, p. 839.

	$\frac{1}{m}$		$\frac{1}{m}$
Merkur . . . .	7500000	Jupiter . . . .	1047,88
Venus . . . . .	410000	Saturn . . . . .	3501,6
Erde + Mond	327000	Uranus . . . . .	22756
Mars . . . . .	3093500	Neptun . . . . .	19540

(A)

gerechneten Säkularstörungen für 100 jul. Jahre enthält<sup>61)</sup> für die Elemente: Exzentrizität  $e$ ,  $e$  mal Perihelbewegung, Neigung  $i$  und  $\sin i$  mal Knotenlänge, bei der Erde  $D\varepsilon$  = Säkularänderung der Schiefe der Ekliptik.

		Theorie <i>R</i>	Beobachtung <i>B</i>
Merkur	$De$	+ 4'' 24	+ 3'' 36 ± 0'' 50
	$eD\pi_1$	+ 109,36 + 8'' 82	+ 118,24 40
	$Di$	+ 6,76	+ 7,14 80
	$\sin i D\theta$	- 92,12	- 91,89 50
Venus	$De$	- 9,58	- 9,46 20
	$eD\pi_1$	+ 0,39 + 0,06	+ 0,29 20
	$Di$	+ 3,43	+ 3,87 30
	$\sin i D\theta$	- 105,92	- 105,44 08
Erde	$De$	- 8,57	- 8,55 09
	$eD\pi$	+ 19,36 + 0,06	+ 19,48 12
	$D\varepsilon$	- 46,65	- 47,11 25
Mars	$De$	+ 18,71	+ 19,00 27
	$eD\pi_1$	+ 148,82 + 0,13	+ 149,55 35
	$Di$	- 2,34	- 2,26 20
	$\sin i D\theta$	- 72,43	- 72,60 20

	Bedingungsgleichungen				$\sqrt{p}$	Nach der Ausgl.
	$B - R$					$B - R$
Merkur	0,00	$v$ + 2,8	$v'$ + 1,1	$v'' = -0'' 86$	2	- 0'' 86
	0,00	+ 56,8	+ 18,8	= + 0,06	2,5	- 0,04
	- 0,04	- 0,6	- 1,4	= + 0,38	1,25	+ 0,37
	- 0,33	- 49,3	- 12,2	= + 0,23	2	+ 0,42
Venus	- 1,30	0,0	- 4,9	= + 0,12	5	+ 0,20
	- 0,81	0,0	- 3,9	= - 0,16	5	- 0,11
	+ 0,76	0,0	0,0	= + 0,44	3,33	+ 0,35
	+ 0,26	- 29,2	- 43,2	= + 0,48	12	+ 0,02
Erde	- 0,12	+ 1,3		= + 0,02	10	+ 0,02
	- 0,18	+ 5,8		= + 0,06	8	+ 0,04
	- 0,21	- 28,3		= - 0,46	4	- 0,26
Mars	+ 0,03	+ 0,1	+ 2,1	= + 0,29	4	+ 0,32
	+ 0,06	+ 4,6	+ 21,4	= + 0,60	3	+ 0,86
	- 0,04	+ 12,0	0,0	= + 0,08	5	+ 0,01
	- 0,27	- 25,1	- 7,4	= - 0,17	5	- 0,09

61) *Newcomb*, Fund. Const., p. 107.

In der Spalte Beobachtung finden sich die von *Newcomb*<sup>62)</sup> aus den Beobachtungen 1750—1890 abgeleiteten Werte mit ihren mittleren Fehlern. Die Bedingungsgleichungen für die Korrektionsfaktoren  $1 + \nu$ ,  $1 + \nu'$ ,  $1 + \nu''$  obiger Massen sind angefügt; die Zahlen für Mars sind weggelassen, da sie keinen stimmberechtigten Wert liefern können. Als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit wurde  $\pm 1''00$  angenommen und hiernach die abgerundeten Werte für die Quadratwurzeln aus den Gewichten angesetzt. Die Auflösung ergibt:

$$(68) \quad \begin{aligned} \nu &= + 0,12258 \pm 0,13691 && \text{Gewicht } 7429, \\ \nu' &= + 0,00645 \pm 0,00534 && \text{„ } 48767, \\ \nu'' &= - 0,01428 \pm 0,00444 && \text{„ } 70522, \end{aligned}$$

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit  $\pm 1''180$  in guter Übereinstimmung mit dem vorausgesetzten Wert. Die Fehlerquadratsumme sinkt von  $[\Delta \Delta p] = 49''30$  auf  $16''70$ . Die übrigbleibenden Fehler sind in der letzten Spalte angegeben und sind mit einer einzigen Ausnahme, der Perihelbewegung des Mars, durchaus befriedigend. Aber die Abweichung ist noch nicht unerklärlich, zumal die *Newcombsche* Mars-theorie noch an kleinen Mängeln zu leiden scheint.

Wenn man nach dem Vorschlag von *Anding* (dieser Band S. 13) die übrig bleibenden Abweichungen in den drei Elementen  $eD\pi_1$ ,  $Di$  und  $\sin iD\theta$  durch eine Drehung des Inertialsystems zu erklären sucht, so ergibt die Anwendung der Gleichungen (4) (dieser Band S. 14), natürlich jetzt mit Einschluß der Gleichung für das Merkurperihel, die Zahlen folgender Tabelle:

		Bedingungsgleichungen			$B - R$	$\sqrt{p}$	$\Delta$
Merkur	$eD\pi_1$	+ 0,009	$\mathcal{X}' - 0,009 \mathcal{Y}' + 0,205 \mathcal{Z}' = - 0'04$		$2\frac{1}{2}$	- 0'47	
	$Di$	+ 0,680	+ 0,732	$= + 0,37$	$1\frac{1}{4}$	+ 0,28	
	$\sin iD\theta$	- 0,728	+ 0,674	+ 0,122 $= + 0,42$	2	+ 0,25	
Venus	$eD\pi_1$	0,000	- 0,000	+ 0,007 $= - 0,11$	5	- 0,12	
	$Di$	+ 0,245	+ 0,968	$= + 0,35$	$3\frac{1}{2}$	+ 0,30	
	$\sin iD\theta$	- 0,968	+ 0,245	+ 0,059 $= + 0,02$	12	+ 0,02	
Erde	$eD\pi_1$			+ 0,017 $= + 0,04$	8	0,00	
Mars	$eD\pi_1$	+ 0,001	- 0,001	+ 0,093 $= + 0,86$	3	+ 0,67	
	$Di$	+ 0,659	+ 0,751	$= + 0,01$	5	- 0,09	
	$\sin iD\theta$	- 0,751	+ 0,659	+ 0,032 $= - 0,09$	5	- 0,07	

Die Auflösung ergibt

$$\mathcal{X}' = + 0''12, \quad \mathcal{Y}' = + 0''02, \quad \mathcal{Z}' = + 2''07 \pm 1''56$$

oder, wenn man von vornherein  $\mathcal{X}' = \mathcal{Y}' = 0$  annimmt:

$$\mathcal{Z}' = + 1''05.$$

62) Ebd. p. 94, mit der Abänderung für den Venusknoten p. 162.

Eine wesentliche Besserung der Restfehler wird nicht erzielt, aber die S. 14 dieses Bandes hervorgehobene Schwierigkeit scheint gehoben zu sein, da nun auch das Planetensystem eine verschwindende Drehung des Inertialsystems gegen das empirische nachweist. — Wir kehren zur Massenbestimmung zurück.

Da die für  $\nu$  und  $\nu'$  gefundenen Werte sehr unsicher bestimmt sind, werden die Gleichungen auch noch nach  $\nu''$  allein aufgelöst mit dem Resultat

$$(69) \quad \nu'' = -0,01030 \pm 0,00226 + 0,006 \nu - 0,676 \nu'.$$

Die Darstellung wurde kaum geändert (Fehlerquadratsumme  $[AAp] = 19''87$ , mittlerer Fehler der Gewichtseinheit  $\pm 1''19$ ).

Die hier gefundenen Massen sollen nun mit den anderweitigen Bestimmungen derselben verbunden werden.

**24. Die Massen der Planeten Merkur, Venus und Erde.** Wir legen der folgenden Untersuchung dasselbe System von Massen zugrunde wie oben (System (A), p. 888) und suchen dessen Korrektionsfaktoren  $1 + \nu$ ,  $1 + \nu'$ ,  $1 + \nu''$ .

Merkur. Die Masse dieses Planeten ist so klein, daß sie sich aus den periodischen Störungen nur durch die Venus ermitteln läßt, Erde und Mars scheiden aus. *Newcomb* fand als Korrektion der *Leverrierschen* Masse  $1 : 3000000$  (Fund. Const., p. 102), aus den periodischen Störungen der Venus als Korrektionsfaktor  $1 - 0,584 \pm 0,133$ . Das gibt für die Korrektion von (A)

$$(70) \quad \nu = +0,040 \pm 0,333.$$

Aus den Säkularstörungen haben wir oben (Nr. 23) gefunden

$$(71) \quad \nu = +0,123 \pm 0,137.$$

An anderen Mitteln, die Merkurmasse zu bestimmen, gibt es nur noch das durch die periodischen Kometen, die dem Merkur sehr nahe kommen, insbesondere durch den *Enckeschen* und durch den *Winneckeschen* Kometen. Allein die Resultate, die hier zutage getreten sind, sind so unsicher und widersprechend, daß sie nicht stimmberechtigt sind, zumal die Theorie dieser Kometen wegen der Akzeleration noch nicht ins Reine gebracht ist. Wir vereinigen daher obige Werte zu

$$(72) \quad \nu = +0,111 \pm 0,125; \quad \text{womit}$$

$$1 : m = 6750000 \pm 927500.$$

Venus. Aus den periodischen Störungen, die durch die Venus in den Bewegungen der Erde (Sonne), des Merkur und des Mars hervorgerufen werden, leitet *Newcomb* (Fund. Const., p. 24) folgende Korrektionen der Masse  $\frac{1}{401847}$  ab:

$$\begin{aligned} \nu' &= -0,0118 \pm 0,0034 && \text{aus Sonne,} \\ &= -0,0121 \pm 0,0050 && \text{aus Merkur,} \\ &= -0,0076 && \text{aus Mars,} \end{aligned}$$

letztere ist so unsicher, daß sie außer Betracht bleibt, die beiden ersten führen zu  $\nu' = -0,0119 \pm 0,002$

und  $1 : m' = 406690 \pm 1140,$

also zu dem Korrektionsfaktor für die Masse ( $A$ )

$$(73) \quad \nu' = +0,0081 \pm 0,0028.$$

Aus den Säkularstörungen haben wir oben gefunden

$$(74) \quad \nu' = +0,0065 \pm 0,0053.$$

Beide Resultate geben vereinigt:

$$(75) \quad \begin{aligned} \nu' &= +0,0075 \pm 0,0025 && \text{und} \\ 1 : m' &= 406950 \pm 1010. \end{aligned}$$

Erde. Bei der Bestimmung der Erdmasse durch die periodischen Störungen, die sie auf die Planeten Merkur, Venus und Mars ausübt, treten so bedeutende Schwierigkeiten auf, daß auf diese Methode verzichtet werden muß. Die Planeten Merkur und Venus bieten nämlich dem Beobachter Scheiben dar mit unscharfen Rändern und durch die wechselnde Beleuchtungsphase von sichelförmigem Umriß, so daß nur ein Rand beobachtet werden kann und der Halbmesser als neue unsichere Größe eingeführt werden muß. Zudem treten die Störungen durch die Erde, als von der gegenseitigen Lage der beiden Planeten abhängig, an denselben Punkten der scheinbaren Venusbahn, an denen hauptsächlich beobachtet werden kann, mit demselben Betrag auf, so daß daraus auf die Größe des Störungsgliedes kein Schluß gezogen werden kann. Beim Planeten Mars sind noch Unsicherheiten in der Theorie vorhanden, die seine Verwendung für den vorliegenden Zweck ausschließen.

Für die Ermittlung der Säkularstörungen sind die genannten Schwierigkeiten von geringerer Bedeutung, da hier die systematischen Fehler sich gegenseitig aufheben. Es ist also aus ihnen ein zuverlässiger Wert der Erdmasse zu erwarten. Obige Diskussion ergab:

$$\nu'' = -0,0143 \pm 0,0044,$$

oder, was vorzuziehen ist:

$$\nu'' = -0,0103 \pm 0,0023 + 0,006 \nu - 0,676 \nu'.$$

Dieser Wert beruht hauptsächlich auf der Bewegung des Knotens der Venusbahn auf der Ekliptik, die durch die Vergleichung der Venus-

durchgänge 1761 und 1769 mit denen von 1874 und 1882 von *Newcomb* (Fund. Const., p. 159) mit großer Sicherheit bestimmt wurde.

Adoptieren wir  $v = + 0,111 \pm 0,125$ ,  
 $v' = + 0,0075 \pm 0,0025$ , so folgt:  
 (76)  $v'' = - 0,0146 \pm 0,0046$ .

Zur Bestimmung der Erdmasse steht noch ein Weg offen, nämlich aus ihrer Wirkung auf einen Körper der Erdoberfläche, die durch das Sekundenpendel gemessen werden kann, in Verbindung mit ihrer Wirkung auf die Sonne unter Anwendung des dritten *Keplerschen* Gesetzes; er führt auf die Gleichung (Nr. 15)

$$\pi_{\odot}'' \sqrt[3]{M} = 607''02,$$

worin  $\frac{1}{M}$  die Erd- + Mondmasse bedeutet. Unter Verwendung des durch die trigonometrischen Methoden gewonnenen Wertes von

$$\pi_{\odot}'' = 8''806 \pm 0''003$$

erhalten wir

$$M = 327546 \pm 335 \quad \text{und damit}$$

$$(77) \quad v'' = - 0,0017 \pm 0,0010.$$

Dieser Wert steht in unüberbrückbarem Widerspruch mit (76) und weist darauf hin, daß entweder die trigonometrisch bestimmte Sonnenparallaxe oder die Bewegung der Venusknoten zu verdächtigen ist. Nachdem über letztere vor Ablauf von hundert Jahren keine weitere Auskunft erwartet werden kann, versuchen wir mit anderen Werten der Sonnenparallaxe zu operieren.

Die Aberrationskonstante (Nr. 6)

$$A = 20''521 \pm 0,007$$

gibt in Verbindung mit der Lichtgeschwindigkeit (Nr. 3)

$$c = 299865 \pm 26 \text{ km}$$

durch die Formel (Nr. 6)

$$A'' \pi_{\odot}'' c = [7,732622]$$

für die Sonnenparallaxe den Wert:

$$(78) \quad \pi_{\odot}'' = 8''780 \pm 0''004.$$

Die Mondgleichung in der Erdbewegung (Nr. 8) kann herangezogen werden, da die Mondmasse in ihr auch durch die Nutationskonstante unabhängig von der Sonnenparallaxe bestimmt ist; man erhält mit  $E = 81,53 \pm 0,08$  und  $\kappa = 0,10669 \pm 0,00008$

$$(79) \quad \pi_{\odot}'' = 8''805 \pm 0''015.$$

Trotz der in Nr. 17 ausgesprochenen Bedenken soll auch die paralaktische Ungleichheit unter Verwendung der zurzeit am vollständig-

sten ausgebauten Theorie von *Brown* herangezogen werden, d. h. die Gleichung  $[1,152720] \pi''_{\odot} = 124''86 \pm 0,15$ .

Sie gibt:

$$(80) \quad \pi''_{\odot} = 8''784 \pm 0''011.$$

Diese drei Werte (78)—(80) weisen auf eine deutliche Verkleinerung des durch trigonometrische Methoden bestimmten Wertes  $\pi''_{\odot} = 8''806$  hin und konstatieren so einen Gegensatz zwischen diesem und dem durch Licht und Gravitationseigenschaften bedingten Wert. Mit dem am sichersten bestimmten  $8''780 \pm 0,004$  sind alle drei wohl vereinbar, und es soll daher mit diesem die Erdmasse abgeleitet werden. Man findet:

$$(81) \quad \nu'' = -0,0105 \pm 0,0013,$$

was mit dem aus den Säkularstörungen folgenden wohl vereinbar ist.

Will man einen definitiven Wert der Erdmasse, so bleibt nichts übrig als ein Kompromiß in der Auswahl der Sonnenparallaxe aus den trigonometrischen und physikalischen Methoden; ein solcher ist

$$\pi_{\odot} = 8''79 \pm 0''01.$$

Mit ihm folgt:  $M = 329350 \pm 1125$  und

$$(82) \quad \nu'' = -0,0071 \pm 0,0034.$$

Aus der Vereinigung von (76) und (82) folgt:

$$(83) \quad \nu'' = -0,0097 \pm 0,0028 \quad \text{und}$$

$$1 : m'_1 = 330200 \pm 930.$$

Dieser Wert ist mit den beobachteten Säkularstörungen noch vereinbar und führt zur Sonnenparallaxe

$$\pi''_{\odot} = 8''782 \pm 0,008.$$

Der Widerspruch zwischen diesem Wert und dem durch die trigonometrischen Methoden gefundenen

$$\pi''_{\odot} = 8''806 \pm 003$$

kann zurzeit nicht weggeschafft werden und muß offen bleiben.

**25. Sonnenparallaxe aus den Gravitationsmethoden.** Wir stellen hier auch die durch die Gravitationsmethoden erlangten Werte der Sonnenparallaxe zusammen, um durch den Vergleich mit der Tabelle in Nr. 5 die Sicherheit beider Gruppen hervortreten zu lassen.

	M. F.	Gew.
1. Aus der Aberrationskonstante $20''521$	$8''780 \pm 0''004$	25,0
2. Aus der Erdmasse $1 : 330200$ . . .	$8,782 \pm 0,008$	6,2
3. Aus der Mondgleichung . . . . .	$8,805 \pm 0,015$	1,8
4. Aus der parall. Ungleichheit . . .	$8,784 \pm 0,011$	3,3.

Die Gewichte sind wieder unter Annahme des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit  $\pm 0''020$  angesetzt und führen zu

$$\pi_{\odot} = 8''782 \pm 0''003.$$

Wenn wir von dem Wert aus der Aberrationskonstante absehen, bei dem die Theorie der Aberration in Zweifel gezogen werden kann, ist nur der Wert aus der Erdmasse das unübersteigliche Hindernis einer Ausgleichung der beiden Gruppen. Dabei darf folgendes nicht aus dem Auge gelassen werden. Der Wert der Erdmasse beruht in erster Linie auf der Sicherheit, die wir der Knotenbewegung der Venus zuschreiben und diese darauf, daß weitere Massen oder Kräfte als die in Rechnung gezogenen nicht vorhanden sind. Wären wir gezwungen, diese Annahme aufzugeben, so müßte auch der Wert der Erdmasse eine Nachprüfung erfahren. Es scheint aber, daß der Einklang, der jetzt durch die *Einsteinsche* Theorie in den Planetenbewegungen hergestellt ist, hierzu nicht nötigt.

**26. Die Massen der Planeten Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun.** Betreff der älteren Bestimmungen dieser Massen sei auf die Zusammenstellungen bei *Harkness* S. 34—35 verwiesen. Wir geben hier nur eine Auswahl neuerer Werte.

Mars. *A. Hall* hat bald nach Entdeckung der Satelliten die Masse bestimmt:  $1 : m''' = 3093500 \pm 3295$ ,

die bis heute beibehalten ist, da eine spätere Bestimmung von ihm (1892) nur die unbedeutende Korrektion  $v''' = + 0,014$  lieferte und auch die Bestimmung von *H. Struve* (St. Pé. Mém. VIII (1899))

$$1 : m''' = 3090000 \pm 10000$$

zu einer Änderung keinen Anlaß gab.

Jupiter. Diese größte und wichtigste Masse des Sonnensystems darf nicht auf die Satelliten allein begründet werden, da systematische Fehler bei den Messungen nicht ausgeschlossen sind. Daher hat *Newcomb* folgendes Material zusammengetragen:

		Methode:	$1 : m^{IV}$	Gew.
<i>Bessel</i>	1842	Satelliten	1047,879 $\pm$ 0,158	$\frac{1}{2}$
<i>Möller</i>	1872	Kom. Faye	788 $\pm$ 0,185	1
<i>Krueger</i>	1873	Plan. Themis	538 $\pm$ 0,052	5
<i>Schur</i>	1881	Satelliten	232 $\pm$ 0,246	$\frac{1}{12}$
<i>Haerdtl</i>	1888	Kom. Winnecke	175 $\pm$ 0,014	10
<i>Hill</i>	1892	Saturn	380	7
<i>Newcomb</i>	1894	Pl. Polyhymnia	340	20

und daraus den Wert abgeleitet

$$1 : m^{\text{IV}} = 1047,35 \pm 0,065,$$

der jetzt allgemein verwendet wird. Neuerdings ist nur eine Bestimmung von *Cookson* (Lond. Astr. Soc. Month. Not. 64 (1904), p. 742) hinzugekommen:

$$1 : m^{\text{IV}} = 1047,67 \pm 0,06.$$

Saturn. Der alte klassische Wert von *Bessel* (1833) aus Satellitenbeobachtungen

$$1 : m^{\text{V}} = 3501,6 \pm 0,78$$

wird noch immer beibehalten, obwohl *H. Struve* durch eine Revision der *Besselschen* Reduktion  $1 : m^{\text{V}} = 3502,5$  fand und obwohl alle weiteren Ermittlungen auf eine Vergrößerung der Masse hinweisen:

		$1 : m^{\text{V}}$
<i>A. Hall</i>	1885	3481,3 $\pm$ 0,54
<i>L. de Ball</i>	1887	3492,8 $\pm$ 2,4
<i>H. Struve</i>	1888	3498,0 $\pm$ 1,17
<i>A. Hall</i>	1889	3500,5 $\pm$ 1,14
<i>H. Struve</i>	1898	3495,3

Uranus. Folgende Bestimmungen liegen vor:

		$1 : m^{\text{VI}}$
<i>Newcomb</i>	1875	22540 $\pm$ 50
<i>Hall</i>	1885	22682 $\pm$ 27
<i>Hill</i>	1893	22869
<i>Bergstrand</i>	1903	23383 $\pm$ 115

Neptun.

		$1 : m^{\text{VII}}$
<i>Bond</i>	1850	19400
<i>Newcomb</i>	1875	19380 $\pm$ 70
<i>Hall</i>	1885	19092 $\pm$ 64
<i>Holden</i>	1885	18279 $\pm$ 114
<i>Hill</i>	1893	19700

(Abgeschlossen Sommer 1919.)





# Einführende die Relativität

**Physikalisches über Raum und Zeit.** Von Prof. Dr. H. A. Lorentz. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik.) Geh. . . . . M. 1.60

„In anschaulicher Darstellung legt der Verfasser die physikalischen Erfahrungen dar, die zum Verständnis des Verlaufs der Naturvorgänge im Raum-Zeitssystem führen und in denen die Relativitätstheorie wurzelt. Das Hauptgewicht ist auf eine das volle Verständnis vom Standpunkte des physikalischen Denkens erschließende Darstellung gelegt, und die mathematische Formulierung ist nur im Anhang berührt.“ (Astronom. Nachrichten.)

**Einführung in die Relativitätstheorie.** Von Dr. Werner Bloch. 2. Aufl. Mit 16 Figuren. (ANuG Bd. 618.) Kart. M. 2.80, geb. . . . . M. 3.50

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, dem Laien die der Relativitätstheorie zugrunde liegenden Gedanken, die heute auf das wissenschaftliche Weltbild umgestaltend einwirken, in ihrer geschichtlichen Entwicklung verständlich zu machen. Er zeigt, welche umstürzende Bedeutung diese neue Theorie auf die bisher un begründet für selbstverständlich gehaltenen Sätze über Zeit- u. Längenmessung gehabt hat, und welche Ausblicke uns auf der neuen Grundlage bereits erschlossen sind.

**Das Relativitätsprinzip.** Leichtfaßlich entwickelt von Professor A. Angersbach. (Mathematisch-physikalische Bibliothek Nr. 39.) Kart. . . . . M. 1.40

Ohne das Rüstzeug der höheren Mathematik vorauszusetzen, führt das Bändchen, ausgehend von den Anschauungen der klassischen Mechanik, den Leser schrittweise in die neue Raum- und Zeitauffassung ein.

**Das Relativitätsprinzip.** Eine Einführung in die Theorie. Von Prof. Dr. A. von Brill. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik.) 4. Auflage unter der Presse.

Das Büchlein beschränkt sich hauptsächlich auf den Teil der Theorie, der den Widerspruch zwischen der Maxwell-Hertzschen Lichttheorie und der Erfahrung zu überbrücken berufen ist. Die Grundgleichungen der Theorie erfahren eine eingehende Behandlung, und es wird an ihnen abgeleitet, wie an Stelle der dreidimensionalen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik die vierdimensionale Impuls-Energiegleichung tritt, und welche Behandlung damit der Begriff „Masse“ erfährt. Auch die neuerdings von A. Einstein aufgestellte Theorie der Gravitation wird in längerer Besprechung gewürdigt.

**Das Relativitätsprinzip.** Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Von Prof. Dr. H. A. Lorentz, Kurator des physik. Laboratoriums in Haarlem. Bearbeitet von Dr. W. H. Keesom, Prof. an der Reichstierarzneischule in Utrecht. Geh. M. 2.—

Die Schrift behandelt nach einer kurzen historischen Einleitung das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die darauf fußende Relativitätsmechanik sowie das Einsteinsche Äquivalenzprinzip. In einem Nachtrage werden einige spezielle Fragen mathematisch weiter ausgearbeitet.

**Das Relativitätsprinzip.** Eine Sammlung von Abhandlungen. Von Prof. Dr. H. A. Lorentz, Kurator des physik. Laboratoriums in Haarlem, Dr. A. Einstein, Professor am Kaiser-Wilhelm-Institut für physik. Chemie, Berlin, Prof. Dr. H. Minkowski. Mit Anmerkungen von Dr. A. Sommerfeld, Professor an der Universität München, und Vorwort von Dr. O. Blumenthal, Professor an der Techn. Hochschule Aachen, und 1 Bildnis H. Minkowskis. 3., verbesserte Auflage. (Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien.) Geh. M. 8.—, geb. M. 11.—

Die vorliegende Sammlung führt die historische Entwicklung der Theorie an Hand der Originalarbeiten vor Augen. Dank dem Entgegenkommen Prof. Einsteins konnten in der neuen Auflage die wichtigsten seiner Arbeiten über die Relativitätstheorie im Zusammenhang zum Abdruck gebracht werden, so daß die Schrift nunmehr zu einem für das Verständnis der Theorie und ihrer Bedeutung grundlegenden Quellenwerk geworden ist.

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlags (Juni 1920 100%, Abänderung vorbehalten) und der Buchhandlungen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348777

L. Inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

## Erschienene Bände bzw. Hefte:

- Band I. Arithmetik und Algebra, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.  
 - II. Analysis, in 3 Teilen. Teil I, in 9 Hefen, vollständig erschienen. Teil II, in 5-6 Hefen, davon 4 erschienen. Teil III, in 10-11 Hefen, davon 3 erschienen.  
 - III. Geometrie, in 4 Teilen. Teil I, in 8 Hefen, davon 6 erschienen. Teil II, in 10-11 Hefen, davon 7 erschienen. Teil III, in 6-7 Hefen, davon 4 erschienen.  
 - IV. Mechanik, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig erschienen. II. Teilband in 4-5 Hefen, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft (in Vorbereitung).  
 - V. Physik, in 3 Teilen. Teil I, in 6 Hefen, davon 5 erschienen. Teil II, in 5 Hefen, davon 3 erschienen. Teil III, in 6-7 Hefen, davon 3 erschienen.  
 - VI, 1. Geodäsie und Geophysik, in 1 Teilband. I. Hälfte in 3 Hefen erschienen. II. Hälfte in 5 Hefen, davon 4 erschienen.  
 - VI, 2. Astronomie, in 1 Teilband, in 10-11 Hefen, davon 7 erschienen.

## Unter der Presse:

- Band II. Teil 2. Nichtlineare Differentialgleichungen. Von E. Hilb in Würzburg. — Abelsche Funktionen und Thetafunktionen von A. Krazer in Karlsruhe i. B.  
 - II. 3. Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlicher. Redigiert unter Leitung von E. Borel in Paris, bearbeitet von A. Rosenthal in München. — Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von K. Hensel in Marburg. — Neuere Untersuchungen über Funktionen komplexer Veränderlicher. Von L. Bieberbach in Frankfurt a. M.  
 - III. 1. Neuere Dreiecksgeometrie. Von G. Berkhan (+) und W. Fr. Meyer in Königsberg. — Systeme geometrischer Analyse. Von Hermann Rothe in Wien. — Polyeder und Raumeinteilungen. Von E. Steinitz in Breslau.  
 - III. 2. Liniengeometrie. Von K. Zindler in Innsbruck.  
 - III. 3. Dreifach orthogonale Systeme. Von E. Salkowski in Hannover.  
 - VI. 2. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. Von S. Oppenheim in Wien. — Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Von S. Oppenheim in Wien. Nebst einem Beitrag: Gravitation und Relativitätstheorie. Von Th. Kottler in Wien.

## Band VI, 2. Teil: Astronomie. Red. von K. Schwarzschild † (1904-1916) und S. Oppenheim in Wien.

\* erschienen, † unter der Presse

Vorwort zu Band VI, Teil 2 von S. Oppenheim in Wien.  
 Inhaltsverzeichnis von Band VI, Teil 2.

### A. Sphärische Astronomie.

#### I. Theorie der Koordinaten.

- \*1. Über Koordinaten und Zeit: E. Anding in Gotha.  
 \*2. Reduktion der astronomischen Beobachtungen (sphärische Astronomie im engeren Sinne): F. Cohn in Berlin.  
 \*3. Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie: C. W. Wirtz in Kiel.

#### II. Theorie der Instrumente.

- \*4. Theorie der Uhren: C. Ed. Caspari in Paris.  
 \*5. Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler: F. Cohn in Berlin.

### III. Spezielle Ausführungen u. Anwendungen.

- \*6. Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion): A. Bemporad in Catania.  
 \*7. Theorie der Finsternisse: F. K. Ginzl in Berlin u. A. Wilkens in Breslau.  
 \*8. Chronologie: F. K. Ginzl in Berlin.

### B. Mechanik des Himmels.

#### I. Bahnbestimmung.

- \*9. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen: G. Herglotz in Leipzig.  
 \*10. Die Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem: G. v. Niessl in Wien.  
 \*11. Doppelsterne und Trabanten. Visuelle und spektrographische Doppelsterne: J. v. Hepperger in Wien.

#### II. Störungen der Umlaufbewegungen.

- III. Analytische Entwicklung d. Störungen.  
 \*12. Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen: E. T. Whittaker in Edinburgh.

- \*13. Entwicklung der Störungsfunktion: H. v. Zeipel in Upsala.

- \*14. Erdmond: E. W. Brown in New-Haven.  
 \*15. Theorie der Planeten: K. Sundman in Helsingfors  
 \*16. Die Satelliten: K. Laves in Chicago.  
 \*17. Bestimmung und Zusammenhang astronomischer Konstanten: J. Bauschinger in Leipzig.  
 18. Kometen: J. Holetschek und J. Lense in Wien.

### IIb. Numerische Berechnung aller Störungen

19. Spezielle Störungen der Planeten und Kometen. Numerische Behandlung besonderer Fälle der Dreikörperproblems. Mehrfache Fixsternsysteme: A. v. Brunn in Danzig.

### III. Gestalt und Rotation der Himmelskörper.

20. Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation der starren Erde. Libration des Mondes: A. Brill in Frankfurt a. M.  
 †21. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper: S. Oppenheim in Wien.

### IV. Allgemeine Fragen.

- †22. Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes: S. Oppenheim in Wien. Nebst einem Beitrag: Gravitation und Relativitätstheorie: Th. Kottler in Wien.

### C. Stellarastronomie.

23. Stellarastronomie: H. Kobold in Kiel.

### D. Astrophysik.

24. Photometrie und ihre Anwendungen: P. Guthnick in Berlin-Neubabelsberg.  
 25. Thermodynamik der Himmelskörper (Sonnentheorie, neue Sterne): R. Emden in München.  
 26. Kosmogonie. (Kant, Laplace, G. Darwin). Widerstehendes Mittel. Spekulative Ausblicke: R. Emden in München.

### Bisher erschien:

Heft 1 (1-4). [193 S.] 1905. n. M. 5.80.	Heft 5 (13). [109 S.] 1913. n. M. 3.40.
— 2 (5-6). [140 S.] 1908. n. M. 4.—	— 6 (14-15). [141 S.] 1915. n. M. 4.40.
— 3 (7-10). [128 S.] 1910. n. M. 3.60.	— 7 (16-17). [87 S.] 1920. n. M. 4.—
— 4 (11-12). [94 S.] 1912. n. M. 3.—	

Auf diese Preise kommen die Aufschläge des Verlags und der Buchhandlungen.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348777

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301666