



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000301662





# ENCYKLOPÄDIE

DER

# MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN  
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN  
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . .      | } RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG. |  |
| II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . . . .                       |  | { H. BURKHARDT IN MÜNCHEN UND<br>W. WIRTINGER IN WIEN.       |
| III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . .                     |  | W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.                                  |
| IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN . . . . .                   |  | { F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND<br>C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.    |
| V: PHYSIK, IN 3 TEILEN . . . . .                          |  | A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.                                    |
| VI: 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . .                   |  | { PH. FURTWÄNGLER IN AACHEN UND<br>E. WIECHERT IN GÖTTINGEN. |
| VI: 2: ASTRONOMIE . . . . .                               |  | K. SCHWARZSCHILD IN POTSDAM.                                 |
| VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK (IN VORBEREITUNG). |  |  |

## BAND VI 2. HEFT 3.

- |   |     |
|---|-----|
| F. W. SINZEL IN BERLIN UND A. WILKENS IN KIEL: THEORIE DER FINSTERNISSE . . . | 385 |
| F. W. SINZEL IN BERLIN: CHRONOLOGIE . . . . .                                 | 366 |
| B. BERGLOTZ IN LEIPZIG: BAHNBESTIMMUNG DER PLANETEN UND KOMETEN . . .         | 379 |
| S. VON NIESSL IN WIEN: DIE BESTIMMUNG DER METEORBAHNEN IM SONNENSYSTEM        | 427 |

AUSGEGEBEN AM 13. SEPTEMBER 1910.

*Fr. 22802*



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1910.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II<sub>1</sub>, Heft 1—6; Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1; Bd. II<sub>3</sub>, Heft 1; Bd. III<sub>1</sub>, Heft 1—3; Bd. III<sub>2</sub>, Heft 1—4; Bd. III<sub>3</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>11</sub>, Heft 1—4 (vollständig); Bd. IV<sub>12</sub>, Heft 1; Bd. IV<sub>21</sub>, Heft 1—4 (vollständig); Bd. IV<sub>22</sub>, Heft 1—3; Bd. V<sub>1</sub>, Heft 1—4; Bd. V<sub>2</sub>, Heft 1—3; Bd. V<sub>3</sub>, Heft 1 n. 2; Bd. VI<sub>1A</sub>, Heft 1—3; Bd. VI<sub>1B</sub>, Heft 1; Bd. VI<sub>2</sub>, Heft 1—3.

Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

- Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 4 (1859), p. 303 (*Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859)*).
- Analyse der ekliptischen Tafeln, Leipzig Ber. 15 (1863), p. 143 (*Hansen, Analyse d. ekl. Tafeln (1863)*).
- F. W. Bessel*, Analyse der Finsternisse, erschien in *Bessel*, Astron. Untersuch., Band 2, Königsberg 1842, p. 95. Abgedruckt in *Bessel*, Abhdl., Band 3, p. 369 (*Bessel, Analyse der Finsternisse (1842)*).
- J. A. Grunert*, Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen, Wien Denkschr. 8 (1854), 1. Abtheilung, p. 133.
- R. Schram*, Beitrag zur *Hansenschen* Theorie der Sonnenfinsternisse, Wien Ber. 92 (1885), p. 1233.
- C. Stechert*, Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwertung zur Längenbestimmung, Archiv der deutschen Seewarte 22. Jahrg. (1899), Nr. 1, Hamburg 1899.

## b. Lehrbücher.

- J. J. Littrow*, Theoretische und praktische Astronomie, Wien 1821, Bd. 2, 6. Kap.
- A. Sawitsch*, Abriss der praktischen Astronomie, 2. Aufl., deutsch neu herausgegeben von *C. F. W. Peters*, Leipzig 1879, 5. Abschnitt, p. 452 ff.
- F. Brünnow*, Lehrbuch der sphärischen Astronomie (4. Aufl. Berlin 1881: *Brünnow*) 5. Abschnitt, 5. Kapitel.
- W. Chauvenet*, A manual of spherical and practical astronomy (2 vols.), 5<sup>th</sup> ed. (*Chauvenet (1900)*) Philadelphia 1885, 1893, 1900, vol. 1, chapter 10, p. 436.

## 2. Tafeln.

- C. L. Largeteau*, Tables pour le calcul des syzygies éclipitiques, Conn. des temps pour 1846 (Paris 1843), additions, p. 3 (*Largeteau, Tables (1843)*).
- P. A. Hansen*, Ekliptische Tafeln für die Konjunktionen des Mondes und der Sonne, Leipzig Ber. 9 (1857), p. 75 (*Hansen, Ekl. Tafeln (1857)*).
- Th. von Oppolzer*, Syzygientafeln für den Mond, Astr. Ges. Publ. 16, Leipzig 1881 (*Oppolzer, Syzygientafeln (1881)*).
- Tafeln zur Berechnung der Mondfinsternisse, Wien Denkschr. 47 (1883) (*Oppolzer, Tafeln f. Mondf. (1883)*).
- P. Lehmann*, Tafeln zur Berechnung der Mondphasen und der Sonnen- und Mondfinsternisse, herausgegeben vom k. Statistischen Bureau, Berlin 1882 (*Lehmann, Tafeln (1882)*).
- S. Newcomb*, On the recurrence of solar eclipses with tables of eclipses (für den Zeitraum 700 vor Chr. bis 2300 nach Chr.), Wash. Astron. Papers, vol. 1, Washington 1882, Nr. 1 (*Newcomb, Recurrence of solar ecl. (1882)*).
- R. Schram*, Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse, Wien Denkschr. 51 (1886), p. 385 (*Schram, Tafeln zur Berechn. v. Sonnenf. (1886)*).
- Reduktionstafeln für den *Oppolzerschen* Finsterniskanon zum Übergang auf die *Ginzelschen* empirischen Korrekturen, Wien Denkschr. 56 (1889), p. 185 (*Schram, Reduktionstafeln (1889)*).

## 3. Berechnete Finsternisse.

- L'Art de vérifier les dates des faits historiques, éd. par des Benedictins, 1<sup>re</sup> éd. Paris 1750; 2<sup>ième</sup> éd. Paris 1770; 3<sup>ième</sup> éd., 3 tomes, Paris 1783, 84, 87 (*L'Art de vérifier les dates*).

- A. *G. Pingré*, Chronologie des éclipses qui ont été visibles depuis le pôle boréal jusque vers l'équateur, pendant les dix siècles qui ont précédé l'ère chrétienne, Paris 1787.
- C. *Hallaschka*, Elementa eclipsium, quas patitur tellus, luna eam inter et solem versante, Prag 1816 [Sonnenfinsternisse von 1816—1860]. Fortgesetzt u. d. T.: Calculus eclipsis Solis observatae die 19. novembris 1816 cui accedunt Elementa eclipsium quas patitur tellus, luna eam inter et solem versante, ab anno 1861 usque ad annum 1900 etc., Prag 1820 [Sonnenfinsternisse von 1861—1900].
- E. *Mahler*, Die zentralen Sonnenfinsternisse des 20. Jahrhunderts, Wien Denkschr. 49 (1885), p. 237.
- Th. von *Oppolzer*, Canon der Finsternisse, Wien Denkschr. 52 (1887) (*Oppolzer Canon* (1887)).
- F. *K. Ginzl*, Spezieller Canon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Altertumswissenschaften und den Zeitraum von 900 vor Chr. bis 600 nach Chr., Berlin 1899 (*Ginzl, Canon* (1899)).

#### 4. Graphische und Näherungsmethoden.

- W. *Leonhardi*, Anleitung zur Berechnung und graphischen Bestimmung der Sonnen- und Mondfinsternisse, Leipzig 1846.
- Bach* (in Straßburg), Calcul des éclipses de soleil par la méthode des projections, Paris 1860.
- A. *Laussedat*, Paris C. R. 70 (1870), p. 240.
- A. *Cayley*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 30 (1870), p. 162.
- Ph. *Hatt*, Paris C. R. 86 (1878), p. 303.

## II. Sternbedeckungen.

- J. *J. Littrow*, Über eine neue Methode, Sternbedeckungen für verschiedene Orte vorher zu bestimmen, Tübinger Zs. für Astr. 4 (1817), p. 334.
- C. *Kramp*, Mémoire sur les occultations des étoiles fixes par la lune, Annales des mathématiques pures et appliquées, tome 8, Nismes et Paris 1818, p. 165.
- J. *Fr. Encke*, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen, Berl. astr. Jahrb. für 1830 (Berlin 1828), p. 253.
- F. *W. Bessel*, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen, Berl. astr. Jahrb. für 1831 (Berlin 1829), p. 257, sowie Astr. Nachr. 7 (1829), p. 1 = *Bessel*, Abhdl. 1, p. 209.
- C. *F. A. Shadwell*, Tables for facilitating the approximate prediction of occultations and eclipses for any particular place, London 1847.
- T. *Chevallier*, Report of the 17<sup>th</sup> meeting of the British Association for the advancement of science, held 1847, London 1848, Notices, p. 7.
- F. *C. Penrose*, On a method of predicting, by graphical construction, occultations of stars by the moon and solar eclipses for any given place, London 1869.
- Bailla*, Occultations, prédiction graphique, Paris C. R. 85 (1877), p. 1056.
- C. *Berry*, Théorie complète des occultations à l'usage spécial des officiers de marine et des astronomes, Paris 1880.
- P. *Jaffré*, Théorie complète élémentaire des occultations, St. Nazaire 1883.
- C. *Stechert*, Tafeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen, Archiv der deutschen Seewarte, 19. Jahrg. (1896), Nr. 3, Hamburg 1896. (*Stechert, Tafeln für Sternbedeck.* (1896)).

*C. Stechert*, Hilfsgrößen für die Berechnung der im nächsten Jahre stattfindenden Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, Ann. d. Hydr. seit 1897 jährlich (*Stechert, Hilfsgrößen (1897)*).

### III. Planetenvorübergänge.

- J. F. Encke*, Über die Vorausberechnung der Planetendurchgänge, Berl. astr. Jahrb. für 1842, p. 291.
- J. L. Lagrange*, Mémoire sur le passage de Vénus du 3 Juin 1769, Berl. hist. 1766, p. 265 = Oeuvres 2 (1868), p. 335.
- P. A. Hansen*, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 9 (1870), p. 455.
- K. Friesach*, Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe, Leipzig 1874.
- M. Vodušek*, Neue Methode für die Berechnung der Sonnen- und Mondesparallaxe aus Planetenvorübergängen und Sonnenfinsternissen, Laibach 1879.
- Ferner in vielen Werken über die Bestimmung der Sonnenparallaxe und in Lehrbüchern, z. B. in den Seite 336 unter I 1 b zitierten *Brünnow*, p. 390; *Chauvenet* (1900), vol. 1, p. 591.

### IV. Verfinsterungen der Jupitertrabanten.

- J. B. J. Delambre*, Tables pour calculer les éclipses des quatre satellites de Jupiter, erschienen in *J. J. de Lalande*, Astronomie, 3<sup>ième</sup> éd., tome 1, Paris 1792, Anhang (Tables astronomiques), p. 236.
- P. S. de Laplace*, Traité de mécanique céleste, tome 4, Paris 1805, livre 8, chapitre 8 = Oeuvres 4 (1880), p. 106.
- W. S. B. Woolhouse*, New tables for computing the occultations of Jupiters satellites by Jupiter, The nautical almanac and astronomical ephemeris for the year 1835, London 1834, appendix.
- M. C. T. de Damoiseau*, Tables écliptiques des satellites de Jupiter, 5. Band der Paris Bur. Long. tabl. astr., Paris 1836, und deren Fortsetzungen von *D. P. Todd*, A continuation of *de Damoiseau's* tables of the satellites of Jupiter, Washington, The American Bureau of Navigation 1876 (für 1880—1900) und *L. Pottier*, Paris Bull. astr. 13 (1896), p. 67 u. 107 (für 1900—1920).

### V. Schatten des Saturnringes.

- C. Souillart*, Sur l'ombre d'une planète, Astr. Nachr. 91 (1878), p. 129.
- H. Seeliger*, Über den Schatten eines Planeten, München Ber. 24 (1894), p. 423.
- Zur Theorie der Beleuchtung der großen Planeten, insbesondere des Saturn, Münch. Abh. 16 (1887), 2. Abteilung, p. 405.

## Einleitung.

**I. Einteilung der Finsternisse.** Verfinsterungen der Himmelskörper können auf zweierlei Weise entstehen. Wird ein Planet von seinem Zentralkörper beleuchtet, so können die den Planeten umlaufenden Monde, bei geeigneter Stellung ihrer Bahnen, von Zeit zu

Zeit in den Schatten des Planeten kommen und unsichtbar werden (*wahre Finsternisse*). Innerhalb des Sonnensystems kann dies z. B. beim Erdmonde, ferner in den Trabantensystemen von Jupiter, Saturn, Mars usw. stattfinden. Wichtig für die Beobachtung sind von diesen wahren Verfinsterungen nur die Mondfinsternisse, die Verfinsterungen der Jupiter- und Saturntrabanten und die durch den Schatten des Saturnrings bewirkten Finsternisse. Die anderen Fälle, wo den betreffenden Himmelskörpern nicht das Sonnenlicht entzogen wird, sondern nur eine Verdeckung des einen Körpers durch den anderen *in bezug auf den Beobachtungsort* stattfindet, bezeichnet man als *scheinbare Finsternisse*. Diesen Fall illustrieren z. B. die Sonnenfinsternisse, die Sternbedeckungen durch den Mond oder die Planeten und die Vorübergänge der beiden inneren Planeten Merkur und Venus vor der Sonne.

### A. Sonnenfinsternisse.

2. Kriterium für das Stattfinden einer Sonnenfinsternis überhaupt. Die Sonnenfinsternisse können nur zur Zeit des Neumondes stattfinden, und auch dann nur, wenn der Mond der Verbindungslinie von Erde und Sonne genügend nahe kommt. Der äußere Umhüllungskegel von Sonne und Mond begrenzt den Kernschatten, der innere den Halbschatten des Mondes. Je nach der Entfernung des Mondes von der Erde erscheint uns bekanntlich der Mondradius größer oder kleiner als der der Sonne, so daß die Spitze des Kernschattenkegels dementsprechend näher zur Erde oder weiter von ihr entfernt liegt. Ist der scheinbare Durchmesser des Mondes in dem Augenblick, wo die Mitten von Sonne und Mond und der Beobachtungsort auf einer Geraden liegen, größer als der der Sonne, so erreicht die Spitze des Schattenkegels die Erde, der Beobachtungsort fällt in den Kernschatten und es findet für ihn eine *totale Sonnenfinsternis* statt. Erscheint aber der Mond Durchmesser kleiner als der der Sonne, so trifft die Spitze des Schattenkegels die Erde nicht; der Mond verdeckt die Sonne zentral, aber nicht ganz, es entsteht eine *ringförmige Sonnenfinsternis*. Erreicht die Kegelspitze die Erde nur in einem Teile der Schnittkurve der Kegellachse und der Erdoberfläche, so findet eine *ringförmig-totale Sonnenfinsternis* statt. Passiert die Erde den Kernschatten überhaupt nicht, so kann höchstens eine *partielle Verfinsterung* durch den Halbschatten eintreten. Das Kriterium für das Stattfinden einer Sonnenfinsternis überhaupt ergibt sich aus der Bedingung, daß der Mond um die Zeit der Konjunktion<sup>1)</sup> herum in

1) *Konjunktion* zweier Gestirne bedeutet den Zeitpunkt, in dem sie, auf

den äußeren Umhüllungskegel von Sonne und Erde eintauchen oder diesen Kegel doch mindestens berühren, d. h. der scheinbare Minimalabstand der Zentren von Sonne und Mond, wie ein bloßes Aufzeichnen der Kegeldurchschnitte lehrt,  $\leq m + \mu + p - \pi$  sein muß, wenn  $m$  und  $\mu$  die vom Zentrum der Erde aus gesehenen Radien,  $p$  und  $\pi$  die Parallaxen von Mond und Sonne bedeuten. Ist  $\beta$  die Breite des Mondzentrums gegen die Ekliptik zur Zeit der Konjunktion und  $i$  die Neigung der Mondbahn gegen dieselbe Grundebene, so ist der scheinbare Mindestabstand der Zentren von Sonne und Mond gleich  $\beta \cos i$ ; folglich können wir dem Kriterium auch die folgende Form geben:  $\beta \leq (m + \mu + p - \pi) \sec i$ .

Entsprechend den Grenzwerten für die innerhalb enger Grenzen mit der Zeit variablen  $m$ ,  $\mu$ ,  $p$ ,  $\pi$  und  $i$  ergeben sich als Grenzwerte für  $\beta$  die folgenden:  $\beta_1 = 1^\circ 34',9$  und  $\beta_2 = 1^\circ 23',2$ . Ist, absolut genommen,  $\beta < \beta_2$ , so findet sicher eine Finsternis statt, ist aber  $\beta > \beta_1$ , so ist eine Finsternis unmöglich; ist  $\beta$  schließlich zwischen  $\beta_1$  und  $\beta_2$  gelegen, so hängt das Stattfinden der Finsternis von den speziellen Werten von  $m$ ,  $\mu$ ,  $p$ ,  $\pi$ ,  $i$  ab.

**3. Die Grundgleichungen der Finsternisse.** Ist das Eintreten einer Sonnenfinsternis als sicher erkannt, so ist zunächst der *Bereich der Sichtbarkeit* der Finsternis auf der Erde zu ermitteln. In jedem Zeitmoment schneidet der Schattenkegel des Mondes auf der Erdoberfläche den Bereich der jeweils verfinsterten Erdorte aus. Die doppeltgekrümmte Schnittkurve soll kurz als „*Schattenoval*“ bezeichnet werden. Die Enveloppen der Schattenovale bilden die *nördliche* und *südliche Grenzkurve*, und die Berührungspunkte der Mantelgeraden des Schattenkegels mit der Erde die *östliche* und *westliche Grenzkurve*.

Die Ermittlung dieser und anderer Kurven und der Sichtbarkeitsverhältnisse überhaupt basiert auf der Diskussion der Bedingung, die ausdrückt, daß ein Punkt der Erdoberfläche sich auf dem Umhüllungskegel von Sonne und Mond befindet. Die Gleichung dieses Kegels, den wir, weil Sonne und Mond Kugeln sind, als *Kreiskegel* betrachten, erhält ihre einfachste Gestalt, wenn eine der Achsen, die  $z$ -Achse des *rechtwinkligen Koordinatensystems*, auf das die Punkte der Kegeloberfläche bezogen werden sollen, der Kegelachse parallel ist. Den Anfangspunkt des Koordinatensystems legen wir in den Mittelpunkt  $O$  der Erde, auf den auch in den Ephemeriden die Ko-

---

das Figurenzentrum der Erde bezogen, gleiche Rektaszension haben. Die in den Ephemeriden angegebene *Zeit des Neumonds* ist exakt die Konjunktion von Sonne und Mond, also nicht der Zeitpunkt kleinster Mondphase.

ordinaten von Sonne und Mond stets bezogen sind; als Längeneinheit wählen wir den Erdradius.

Sind jetzt  $x, y, z$  die Koordinaten des Mondes,  $\xi, \eta, \zeta$  die eines Erdortes  $E$ ,  $f$  der Öffnungswinkel des Schattenkegels und endlich  $u'$  und  $u$  die Radien der beschatteten Kreise in der  $x-y$ -Ebene<sup>1a)</sup> und in deren Parallelebene durch  $E$  (Figur 1), so lautet die Bedingung dafür, daß der Erdort  $E$  auf dem Schattenkegel liegt:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = u^2.$$

Substituieren wir hier  $u = u' - \zeta \operatorname{tg} f$ , so erhält die Grundgleichung der Finsternisse die Form:

$$\text{I) } (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (u' - \zeta \operatorname{tg} f)^2$$

oder in Polarkoordinaten  $u$  und  $p$ , wo  $p$  den in der  $x-y$ -Ebene gezählten Positionswinkel des Schattenkreismittelpunktes  $S$  im Erdort  $E$  darstellt:

$$\text{II) } \left. \begin{aligned} x - \xi &= u \sin p \\ y - \eta &= u \cos p \end{aligned} \right\}, \text{ wo } u = u' - \zeta \operatorname{tg} f.$$

Die Koordinaten  $x, y, z$  des Mondes in unserem speziellen Koordinatensystem ergeben sich aus den in den Ephemeriden zu findenden, die auf den Äquator oder die Ekliptik als Fundamentelebene bezogen sind, durch eine gewöhnliche Koordinatentransformation<sup>2)</sup>; dasselbe gilt von den Koordinaten des Erdortes.

Ist  $k$  der in Einheiten des Erdradius ausgedrückte lineare Mondradius, so wird  $u' = \left(z + \frac{k}{\sin f}\right) \operatorname{tg} f$ , und der Öffnungswinkel  $f$ , den wir beim Halbschatten positiv, beim Kernschatten negativ zählen müssen, ergibt sich aus den Gleichungen

$$\sin f_h = \frac{k + S}{G} \quad (\text{Halbschattenkegel}),$$

$$\sin f_k = \frac{k - S}{G} \quad (\text{Kernschattenkegel}),$$

wo  $S$  den linearen Sonnenradius und  $G$  die Entfernung Sonne-Mond bedeutet; werden  $S$  und  $G$  durch die Parallaxen von Sonne und

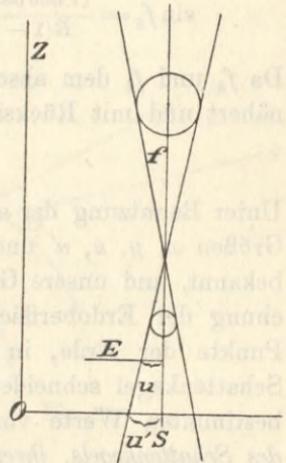


Fig. 1.

1<sup>a)</sup> Der beschattete Kreis in der  $x-y$ -Ebene heißt „Schattenkreis“.

2) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), I. Abschnitt, § 2 = *Astr. Nachr.* 14 (1837), p. 132 = *Bessel*, *Astron. Untersuch.* 2, p. 111 = *Bessel*, *Abhdl.* 3, p. 376; *Hansen*, *Theorie d. Sonnenf.* (1859), p. 310 usw.

Mond ( $\pi_{\odot}$  und  $\pi_{\ominus}$ ) und den Abstand Erde-Sonne  $R$  ausgedrückt, und  $h$  durch seinen numerischen Wert ersetzt, so ist<sup>3)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sin f_h &= \frac{(7.668767)}{R(1-\mu)} && \text{(Halbschatten)} \\ \sin f_k &= \frac{(7.666584_n)}{R(1-\mu)} && \text{(Kernschatten)} \end{aligned} \right\} \text{ wo } \mu = \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin \pi_{\ominus}}.$$

Da  $f_h$  und  $f_k$  dem absoluten Betrage nach fast gleich sind, so ist genähert und mit Rücksicht darauf, daß  $\cos f$  nahezu = 1:

$$u'_h + u'_k = 2k = 0,54.$$

Unter Benutzung der astronomischen Ephemeriden sind dann also die Größen  $x, y, z, u'$  und  $f$  für jeden Zeitpunkt  $t$  eines ersten Meridians bekannt, und unsere Gleichung I resp. II repräsentiert, mit der Gleichung der Erdoberfläche  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$  verbunden, den Ort der Punkte der Erde, in welchen sich die Oberflächen von Erde und Schattenkegel schneiden; im speziellen liefert das System II zu jedem bestimmten Werte von  $p$ , d. h. zu jeder bestimmten Mantelgeraden des Schattenkegels, ihren Schnittpunkt mit der Erde. Charakteristisch für die Fundamentalgleichungen ist, daß die Zeit  $t$  transzendent in dieselben eingeht, weil die Koordinaten von Sonne und Mond transzendente Funktionen der Zeit sind, während die den Erdort definierenden Koordinaten der Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$  insofern nur algebraisch auftreten, als nur algebraische Funktionen von  $\sin \varphi$  und  $\sin \lambda$  vorkommen. Folglich sind alle Auflösungen der Grundgleichungen nach der Zeit  $t$  transzendent, während die Auflösung nach den Koordinaten eines Erdortes bei gegebener Zeit algebraisch ist.

Die wichtigsten und zugleich klassischen Bearbeitungen der an die Grundgleichungen der Finsternisse sich anschließenden Probleme stammen von F. W. Bessel<sup>4)</sup> und P. A. Hansen<sup>5)</sup>. Während Bessel alle Aufgaben der Theorie soweit als möglich streng und direkt zu lösen sucht, will Hansen dieselben Aufgaben mit zwar theoretisch geringerer, für die Bedürfnisse der Praxis aber durchaus genügender Genauigkeit lösen. Aber typisch und auffällig für die Bearbeitung der Finsternisprobleme durch diese beiden Autoren und andere ist, daß das geometrisch doch so anschauliche Problem trotzdem so wenig geometrische Interpretation gefunden hat.

3) Eingeclammerte Zahlen bedeuten diejenige Zahl, deren dekadischer Logarithmus in der Klammer steht.

4) Bessel, Analyse der Finsternisse (1842).

5) Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859) usw.

Nach Aufstellung der Grundgleichungen sind dieselben jetzt für die folgende Anwendung vorzubereiten.

Zunächst ist die *Wirkung der Strahlenbrechung*, die, wie *P. A. Hansen*<sup>6)</sup> zuerst nachgewiesen hat, einen Einfluß auf die Erscheinung ausübt, in Rechnung zu ziehen.

Eine Mantelgerade des Schattenkegels *SB* (s. Fig. 2), d. h. eine Berührende der beiden Scheiben von Sonne und Mond, treffe die Grenze der Atmosphäre, wo deren brechende Kraft in Wirksamkeit zu treten beginnt, in *B*; der gebrochene Strahl trifft das Auge des Beobachters in *A*, dem die Berührung der Scheiben in der Richtung der letzten Tangente an den gebrochenen Lichtstrahl, in der Richtung *AS'* erscheint. Der un-

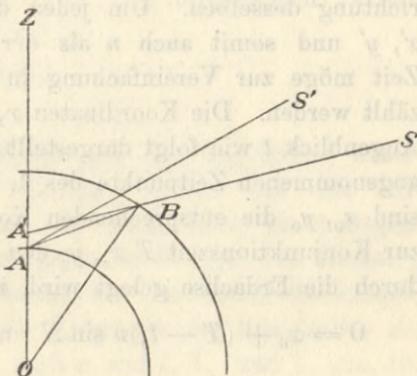


Fig. 2.

gebrochene Lichtstrahl *SB* würde dagegen in seiner Verlängerung die Vertikale von *A* in *A'* schneiden. Man würde also die Erscheinung, wenn keine Refraktion stattfindet, in *A'* in derselben Weise und zu derselben Zeit wahrnehmen, wie bei Vorhandensein einer Strahlenbrechung im Beobachtungsort *A*. Mithin findet die Strahlenbrechung dadurch Berücksichtigung, daß der Erdradius *AO* durch *A'O* ersetzt wird; wird also  $\frac{A'A}{AO} = \psi$  gesetzt, so sind der Erdradius *AO* und folglich auch die geozentrischen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  mit  $(1 + \psi)$  zu multiplizieren, wo  $\psi$  von der brechenden Kraft der Erdatmosphäre, der Refraktionskonstanten und der Zenitdistanz des Berührungspunktes abhängt<sup>7)</sup>.

Eine *Erhebung des Beobachters* über die Erdoberfläche um die Höhe  $\psi'$  ist ebenso wie die Strahlenbrechung durch Anbringung eines Faktors  $(1 + \psi')$  an die Koordinaten des Erdortes zu berücksichtigen.

Ferner sind die *Koordinaten des Mondes* mit Rücksicht auf die Praxis und auf die Auflösung der Grundgleichungen nach der Zeit *t* nach *Potenzen der Zeit zu entwickeln*. In der Regel wählt man fünf die Zeit der Konjunktion des Mondes umschließende Zeitpunkte und berechnet für jeden derselben die Koordinaten *x, y, z* des Mondes

6) *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 185.

7) Eine Tafel für  $\log(1 + \psi)$  findet sich bei *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 325.

und deren stündliche Änderungen  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ . Setzt man

$$x' = n \sin N, \quad y' = n \cos N,$$

so bedeutet  $n$  die stündliche Bewegung des Schattenkreismittelpunktes relativ zum Erdmittelpunkt und  $N$  den Positionswinkel der Bewegungsrichtung desselben. Um jeden der 5 Zeitpunkte herum kann man  $x'$ ,  $y'$  und somit auch  $n$  als der Zeit proportional annehmen. Die Zeit möge zur Vereinfachung in Sternzeit des Ersten Meridians gezählt werden. Die Koordinaten  $x$ ,  $y$  können dann für einen beliebigen Augenblick  $t$  wie folgt dargestellt werden. Ist  $t_0$  einer der willkürlich angenommenen Zeitpunkte des 1. Meridians um den Neumond herum, sind  $x_0$ ,  $y_0$  die entsprechenden Koordinaten des Mondes, so ist, wenn zur Konjunktionszeit  $T$   $x_c$ ,  $y_c$  den Mondort bedeutet und die  $yz$ -Ebene durch die Erdachse gelegt wird, in diesem Augenblicke  $x_c = 0$ , d. h.

$$0 = x_0 + (T - t_0)n \sin N \quad \text{und} \quad y_c = y_0 + (T - t_0)n \cos N \\ = y_0 - x_0 \operatorname{ctg} N.$$

Folglich ist der kürzeste Abstand  $\gamma$  des Erdmittelpunktes von der Kegelachse:

$$\gamma = y_c \sin N = y_0 \sin N - x_0 \cos N$$

und die zugehörige Zeit

$$\tau = T - \frac{1}{n} y_c \cos N = t_0 - \frac{1}{n} (x_0 \sin N + y_0 \cos N).$$

Mithin erhalten die Koordinaten  $x$  und  $y$ , wenn  $t_1$  die Ortssternzeit des Beobachtungsortes,  $\lambda$  seine westliche Länge ist, die Form:

$$\begin{cases} x = -\gamma \cos N + (t_1 + \lambda - \tau)n \sin N \\ y = \gamma \sin N + (t_1 + \lambda - \tau)n \cos N. \end{cases}$$

Für die *Koordinaten des Erdortes* gelten ferner die folgenden in die Grundgleichungen zu substituierenden Formeln:

$$\begin{cases} \xi = \varrho \cos \varphi' \sin (t - \lambda - l), \\ \eta = \varrho \{ \sin \varphi' \cos b - \cos \varphi' \sin b \cos (t - \lambda - l) \}, \\ \zeta = \varrho \{ \sin \varphi' \sin b + \cos \varphi' \cos b \cos (t - \lambda - l) \}, \end{cases}$$

wo  $\varrho$  den lokalen Erdradius,  $\varphi'$  die geozentrische Breite<sup>8)</sup>,  $\lambda$  die westliche Länge,  $b$  und  $l$  Deklination und Rektaszension des Zielpunktes der Kegelachse bedeuten. Mit *Hansen*<sup>8)</sup> kann man in diese Ausdrücke

8) *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 333.

9) Die *geozentrische Breite*  $\varphi'$  des Erdortes ist sein Winkelabstand vom Erdäquator, gesehen vom Figurenzentrum des Erdellipsoids. Formeln für  $\varrho$  und  $\varphi'$  siehe Seite 49, Fußnote 87; Tafeln für zahlreiche Erdorte in jedem Jahrgang der *Conn. des temps*.

statt der zwei abhängigen Variablen  $\varrho$  und  $\varphi'$  eine einzige Variable  $\varphi_1$ , die sogenannte „reduzierte Breite“, die formal der exzentrischen Anomalie der Planetenbewegung entspricht, substituieren. Ist nämlich  $\alpha$  die Abplattung der Erde, und setzt man die halbe große Achse der Erdmeridiane = 1, so lauten die in  $\xi, \eta, \zeta$  eingehenden Verbindungen von  $\varrho$  und  $\varphi'$  als Funktion von  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned}\varrho \cos \varphi' &= \cos \varphi_1, \\ \varrho \sin \varphi' &= (1 - \alpha) \sin \varphi_1.\end{aligned}$$

Die Koordinaten  $b$  und  $l$  des Zielpunktes der Kegelachse unterscheiden sich um die Zeit einer Finsternis herum von den entsprechenden Koordinaten der Sonne um nicht mehr als  $\frac{1}{4}$  Bogenminute und zwar offenbar um eine kleine Größe von der Ordnung der Sonnenparallaxe; bei  $\infty$  ferner Sonne, also bei Sternbedeckungen, fallen der Sonnenmittelpunkt und der Zielpunkt der Kegelachse zusammen. Deshalb führt man noch, statt  $b$  und  $l$ ,  $b_\odot$  und  $l_\odot$  ein, indem man setzt

$$b - b_\odot = \Delta b, \quad l - l_\odot = \Delta l.$$

Dann lauten die *Grundgleichungen der Finsternisse in ihrer endgültigen Form*:

$$\text{III) } \begin{cases} u \sin p = -\gamma \cos N + (t_1 + \lambda - \tau) n \sin N \\ \quad - (1 + \omega) \cos \varphi_1 \sin(t_1 - l_\odot - \Delta l), \\ u \cos p = \gamma \sin N + (t_1 + \lambda - \tau) n \cos N \\ \quad - (1 + \omega) \{ (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos(b_\odot + \Delta b) \\ \quad - \cos \varphi_1 \sin(b_\odot + \Delta b) \cos(t_1 - l_\odot - \Delta l) \}, \end{cases}$$

wo

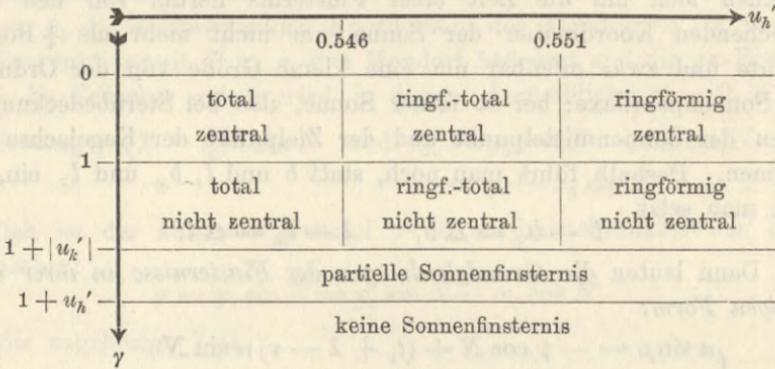
$$\begin{aligned}u &= u' - (1 + \omega) \{ (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin(b_\odot + \Delta b) \\ &\quad + \cos \varphi_1 \cos(b_\odot + \Delta b) \cos(t_1 - l_\odot - \Delta l) \} \operatorname{tg} f \\ 1 + \omega &= (1 + \psi) (1 + \psi')\end{aligned}$$

ist.

Es sei noch bemerkt, daß  $t_1 - l_\odot$  die wahre Ortszeit  $t'$  und  $N$  der Positionswinkel der Bewegungsrichtung des Zielpunktes der Kegelachse gegen den Deklinationskreis an der betreffenden Stelle der Sphäre ist.

Die numerischen Beträge von  $\gamma$  und  $u'$  entscheiden über die *Gattung der Finsternis*. Reicht nämlich die Spitze des Kernschattenkegels über die  $xy$ -Ebene hinaus, so daß die  $z$ -Koordinate der Spitze negativ ist, so ist die Finsternis für alle Erdorte, welche der Kernschattenkegel überstreicht, total; der entsprechende Radius  $u'_h$  des Halbschattenkreises muß dann  $< 0,546$  sein. Erreicht aber die Spitze des Kernschattenkegels die Erdoberfläche überhaupt nicht, so ist die

Finsternis für die Orte, die in der Verlängerung des Kernschattenkegels über seine Spitze hinweg liegen, ringförmig und  $u_h' > 0,551$ . Liegt  $u_h'$  zwischen beiden Grenzwerten, so erscheint die Finsternis, was den Kernschatten betrifft, teils total, teils ringförmig. Soll die Finsternis zentral sein, so muß  $\gamma$  kleiner als der Erdradius, d. h.  $\gamma < 1$  sein; für totale Finsternisse muß  $\gamma - u_k' < 1$  sein; für ringförmige  $\gamma + u_k' < 1$ , weil  $u_k'$  in diesem Falle negativ; schließlich für partielle Finsternisse:  $\gamma - u_h' < 1$ . Wir erhalten insgesamt die in folgender Tabelle dargestellten Bereiche der Größen  $u_h'$  und  $\gamma$ , welche die verschiedenen Gattungen der Finsternis bedingen:



**4. Die Grenzkurven der Sichtbarkeit.** Ist der Halbmesser der Erde = 1, so kann der Radius  $u_h'$  des Halbschattens höchstens 0,58 werden, und es ist deshalb nicht möglich, daß die Erde von dem Schattenkegel vollständig eingehüllt wird. Folglich ist die Sichtbarkeit einer Sonnenfinsternis in bestimmte Gebiete auf der Erdoberfläche eingeschlossen und durch Grenzkurven von den Gebieten getrennt, die nichts von der Finsternis wahrnehmen. Gelangen alle Mantelgeraden des Schattenkegels zum Eintritt in die Erde, so besteht die Begrenzung aus vier verschiedenen Kurven, die man zweckmäßig als *nördliche* resp. *südliche* und als *westliche* resp. *östliche Grenzkurve* bezeichnet. Wie erwähnt, bilden die Enveloppen der Schattenovale auf der Erde die nördliche resp. südliche Grenzkurve, während der Ort der Punkte, in denen die Mantelgeraden die Erde berühren, die westliche resp. östliche Grenzkurve darstellt. Zeitlich sind der erste resp. letzte Punkt der Grenzkurven

- a) die Punkte des Beginns und Endes der Finsternis überhaupt,

die als Berührungspunkte von Erde und Halbschattenkegel auf der westlichen resp. östlichen Grenzkurve (aber auf deren inneren Teilen,

vgl. Fig. 7) gelegen sind. Der Berührungspunkt der beiden Scheiben von Sonne und Mond erscheint im Horizont des Erdorts, weil die dem Berührungspunkt entsprechende Mantelgerade die Erde berührt. Bei äußeren Berührungen, also im Falle des Halbschattens, steht der Sonnenmittelpunkt in jenen Momenten unter dem Horizonte, der des Mondes über demselben; ist  $R$  die Strahlenbrechung im Horizont und  $r_{\odot}$  der scheinbare Sonnenradius, so ist die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem Horizont

$$-(R \pm r_{\odot}) \text{ für } \begin{array}{l} \text{äußere} \\ \text{innere} \end{array} \text{ Berührungen resp. } \begin{array}{l} \text{Halbschatten} \\ \text{Kernschatten} \end{array}$$

Ist  $t'$  die wahre Sonnenzeit des Berührungspunktes auf der Erde,  $\varphi$  und  $\lambda$  seine Breite und westliche Länge, so daß  $t' + \lambda = \tau'$  die entsprechende wahre Zeit des ersten Meridians, und  $\delta_{\odot}$  die Deklination der Sonne, so ist für den Auf- und Untergang der Sonne:

$$\cos t' = \cos(\tau' - \lambda) = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_{\odot}$$

$$-(R \pm r_{\odot}) \sec \varphi \sec \delta_{\odot} \begin{array}{l} \text{äußere} \\ \text{innere} \end{array} \text{ Berührung,}$$

womit wir die *erste Bedingung* für die gesuchten Punkte erhalten. Da nun Erde und Schattenkegel nach der allerersten resp. vor der allerletzten Berührung zwei Mantelgeraden des Kegels als gemeinsame Tangenten besitzen, so muß für die allerletzte resp. allererste Berührung, wo nur eine einzige Mantelgerade berührt, die entsprechende Zeit  $\tau'$  des ersten Meridians ein Maximum resp. Minimum sein. Man erhält folglich die *zweite Bedingungsgleichung* für die allererste und allerletzte Berührung, indem man die Fundamentalgleichungen II) nach  $\tau'$  differenziert, wobei  $p$  ebenfalls als variabel zu betrachten ist, und nach der Differentiation  $d\tau' = 0$  setzt; die gleich 0 gesetzte Determinante der so erhaltenen drei in  $dp$ ,  $d\varphi$ ,  $d\lambda$  homogenen Gleichungen stellt die gesuchte Bedingung dar. Dieselbe hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Im Augenblicke einer allerersten oder allerletzten Berührung liegen nämlich die Mittelpunkte  $S$  und  $M$  von Sonne und Mond, der Berührungspunkt auf der Erde und sein Zenitpunkt  $Z$  in einer einzigen Ebene, die auch noch den Zielpunkt  $S_1$  der Kegelachse enthält (s. Fig. 3). Letzterer fällt aber, wie schon erwähnt, nahezu mit dem Sonnenmittelpunkt zusammen, da er sich im Falle einer Finsternis höchstens um  $\frac{1}{4}$  Bogenminute, d. h. weniger als  $\frac{1}{60}$  des scheinbaren Sonnenhalbmessers vom Sonnenmittelpunkt entfernen kann. Folglich ist der

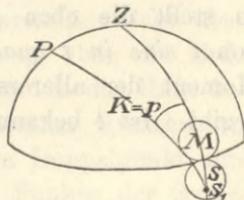


Fig. 3.

um den Zielpunkt  $S_1$  der Kegelachse im Äquatorsystem gemessene Positionswinkel  $p$  des Berührungspunktes der beiden Scheiben streng gleich dem parallaktischen Winkel des Zielpunktes, also sehr genähert gleich dem parallaktischen Winkel  $K$  des Sonnenmittelpunktes im Augenblick der ersten resp. letzten Berührung im Horizont. Da nun im Horizont allgemein  $\sin K = \cos \varphi \sin t'$ , so ist wegen  $p = K$

$$\sin p = \cos \varphi \sin t',$$

also wegen

$$\begin{cases} \cos t' = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_{\odot} + \text{Refraktionsglied,} \\ \sin p = \cos \varphi \sqrt{1 - (-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_{\odot} + \text{Refr.})^2}, \end{cases}$$

wodurch  $t'$  und  $p$  als Funktionen von  $\varphi$  allein dargestellt sind. Die Substitution dieser Ausdrücke für  $t'$  und  $p$  in das System III) liefert dann zwei Gleichungen für  $\varphi$  und  $\lambda$ , und zwar ergibt sich bei Auflösung nach  $\varphi$  und  $\lambda$  eine Gleichung 4. Grades für  $\sin \varphi$  resp.  $\sin \lambda$ , entsprechend den zwei inneren und zwei äußeren Berührungen des Schattenkegels mit der Erde.

In der Praxis löst man diese Gleichungen durch *Näherungsmethoden* auf<sup>10)</sup>. Die *ersten Näherungswerte* kann man sich leicht bei *Voraussetzung einer kugelförmigen Erde* verschaffen. Sind nämlich  $a, b, c$  die Koordinaten der Spitze des Schattenkegels in unserem Koordinatensystem  $(x, y, z)$ , so lautet die Bedingung der Berührung des Schattenkegels und der Erdkugel, wenn man deren Radius = 1 setzt:

$$(1 + c \sin f)^2 = (a^2 + b^2) \cos^2 f, \quad f = \text{Öffnungswinkel des Kegels,}$$

wie man durch bloßes Aufzeichnen sofort erkennt. In der Praxis entwickelt man dann die Koordinaten  $a, b, c$  in Potenzreihen nach der Zeit, so daß  $a = a_0 + a_1 \cdot t + \dots$  usw.

Begnügt man sich nun in dieser Entwicklung der Koordinaten mit den in  $t$  linearen Gliedern, was in der Praxis durchaus ausreicht, so stellt die eben genannte Bedingungsgleichung zur Bestimmung von  $t$  eine in  $t$  quadratische Gleichung dar, deren eine Lösung den Moment der allerersten und die andere den der letzten Berührung ergibt. Ist  $t$  bekannt, so folgen  $\varphi$  und  $\lambda$  aus den Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 = \cos^2 f,$$

$$\xi : \eta = a : b,$$

$$\xi = \sin f.$$

10) Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 357 usw.

F. W. Bessels analytische Methode für die Bestimmung der Berührungspunkte ist die folgende. *Bessel* löst die allgemeine Aufgabe, die Schnittkurve von Erde und Schattenkegel zu ermitteln, in der Weise, daß er die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  eines beliebigen Punktes jener Kurve als Funktion des Positionswinkels  $p$  darstellt, indem er also die Schnittpunkte jeder einzelnen Mantelgeraden mit der Erde bestimmt. Da zwei Schnittpunkte vorhanden sind, erhält man die Koordinaten in der Form:  $\xi = \alpha \pm \beta P(p)$ , wo  $P$  ein von  $p$  abhängiger Wurzelausdruck ist. Die Berührung einer durch den Positionswinkel  $p$  charakterisierten Mantelgeraden mit der Erde ist dann folglich durch  $P = 0$  bedingt; im Falle einer allerersten resp. allerletzten Berührung tritt zu dieser Bedingung noch  $d\tau' = 0$  hinzu. Wie *Bessel*<sup>11)</sup> gezeigt hat, erhält man zwei getrennte Gleichungen, deren eine  $p$ , die andere  $\tau'$  liefert. Die Bedingung  $P = 0$  enthält außer  $p$  an Variablen noch die Koordinaten des Mondes, die sphärischen Koordinaten des Zielpunktes der Kegelachse und ferner den Öffnungswinkel  $f$ ; man entwickelt alle diese langsam veränderlichen Größen nach Potenzen von  $t$  und leitet die Berührungszeiten wieder durch sukzessive Näherungen her.

#### b) Die östliche und westliche Grenzkurve.

Den frühesten resp. spätesten Berührungen folgen resp. gehen vorher weitere Berührungen der Erde mit den Mantelgeraden des Schattenkegels. Die entsprechenden Berührungspunkte auf der Erde, in denen die Berührung der Scheiben von Sonne und Mond im Horizont erfolgt, bilden in ihrer Gesamtheit *die östliche und die westliche Grenzkurve*. Bewegt sich der Schattenkegel so durch die Erde hindurch, daß nacheinander alle Mantelgeraden zur Berührung mit der Erde kommen, so besteht der Ort der Berührungspunkte aus zwei getrennten und geschlossenen ovalförmigen Kurven, deren eine die westliche, die andere die östliche Grenzkurve darstellt. Ragt aber der Schattenkegel während seiner Hinwegbewegung über die Erde über dieselbe hinaus, so daß nicht alle Mantelgeraden die Erde berühren können, so gehen die beiden sonst getrennten Grenzkurven ineinander über und bilden eine einzige mit einem Doppelpunkt versehene schleifenförmige Kurve. — Die einzelnen Punkte der Grenzkurve genügen einmal dem Fundamentalsystem II) und ferner der

11) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), II. Abschn. § 20; Astron. Untersuch. 2, p. 162 = *Bessel*, Abhdl. 3, p. 397.

Bedingung, daß die Zeit, zu welcher wir die Mantelgerade die Erde schneiden lassen, bei festgehaltenem  $p$ , d. h. bei Fixierung einer bestimmten Mantelgeraden, ihren kleinsten resp. größtmöglichen Wert annehmen muß. Wir erhalten so drei Bedingungsgleichungen, aus denen wir die *Koordinaten des Berührungspunktes* auf der Erde ( $\varphi$  und  $\lambda$ ) und die zugehörige Zeit  $t$  als *Funktion von  $p$*  ermitteln können.

Die Bedingungsgleichung selber für die Punkte der westlichen resp. östlichen Grenzkurve kann man analytisch ganz analog dem Falle der Punkte der ersten und letzten Berührungen herleiten<sup>12)</sup>. Aber auch hier können wir die betreffende Bedingung leicht auf geometrischem Wege erlangen. Während die scheinbare Zentrale der Scheiben von Sonne und Mond im Falle der frühesten resp. spätesten

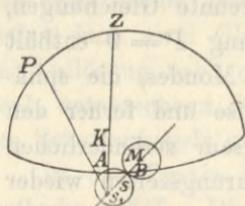


Fig. 4.

Berührung senkrecht zum Horizont des Berührungspunktes der Erde stand, ist sie für jeden anderen Punkt der Grenzkurve im Augenblick der Berührung um einen beliebigen Winkel gegen den Horizont geneigt (s. Fig. 4). Sind  $S$  und  $M$  die Mitten von Sonne und Mond und  $B$  der Berührungspunkt der beiden Scheiben, so liegt der Zielpunkt der Kegelachse in der Verlängerung

von  $SM$  in  $S_1$ , und zwar höchstens  $\frac{1}{4}$  Bogenminute von  $S$  entfernt. Dann ist  $S_1B = f$ , gleich dem Öffnungswinkel des Schattenkegels, und  $PS_1B = p$ , gleich dem Positionswinkel des Berührungspunktes. Da ferner

$$S_1A = -H \quad (A = \text{Schnittpunkt von Horizont und } S_1Z)$$

die Höhe der Sonne und  $PS_1Z = K$  den parallaktischen Winkel derselben bedeutet, so ist mit Rücksicht darauf, daß  $H$  und  $f$  kleine Winkel sind:

$$H = -f \cos(p - K)$$

die *Bedingungsgleichung für die Punkte der östlichen resp. westlichen Grenzkurve*.

Da man  $H$  und  $K$  als Stücke des sphärischen Dreiecks  $PZS_1$  auch durch  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\delta_{\odot}$ ,  $t$  ausdrücken kann, so kann man die soeben erwähnte Bedingung in eine solche zwischen  $p$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\delta_{\odot}$ ,  $t$  transformieren. Man kann auch umgekehrt mit *P. A. Hansen* in die Grundgleichungen überall  $H$  und  $K$  statt  $t$  und  $\varphi$  einführen. Mit den beiden Grundgleichungen II) zusammen, haben wir dann die drei Gleichungen, die

12) Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 349.

uns  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $p$  und  $t$  als Funktionen einer dieser Größen liefern. In der Praxis löst man diese Gleichungen wie immer durch Näherungen auf<sup>13)</sup>.

F. W. Bessel löst die Aufgabe mittels der S. 349 erwähnten Bedingung  $P(p, t) = 0$ , die eine der Größen  $p$  und  $t$  als Funktion der anderen liefert.  $P(p, t)$  ist eine ganze rationale Funktion 4. Grades in  $\sin p$  und transzendent in  $t$ . Ist also  $t$  bekannt, so wird  $p$  aus einer trigonometrischen Form 4. Grades bestimmt, die, wie F. W. Bessel näher ausführt, stets in zwei reelle Faktoren 2. Grades zerlegt werden kann<sup>14)</sup>. Alle vier Wurzeln können reell sein, d. h. der Schattenkegel kann das Erdellipsoid nicht nur in zwei, sondern unter Umständen sogar in vier Mantelgeraden berühren. Alsdann können sich Erde und Schattenkegel bei entsprechender Lage in zwei getrennten Kurven  $AB$  und  $CD$  schneiden, wie die Figur 5 schematisch andeutet, so daß vier Mantelgeraden die Erde berühren. Im Falle einer kugelförmigen Erde ist aber nur eine einzige Schnittkurve vorhanden und folglich auch nur zwei Berührungspunkte. Sollten bei dem tatsächlichen Ellipsoid vier reelle Berührungen vorhanden sein, so müßte der Radius des Schattenkreises bei der geringen Exzentrizität der Erdmeridiane nahezu gleich dem Erdradius sein, was aber bei weitem nicht der Fall ist, so daß die Gleichung 4. Grades im Falle einer Sonnenfinsternis nur zwei reelle Wurzeln hat.

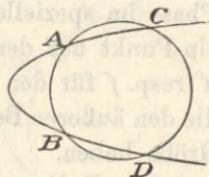


Fig. 5.

Sind  $p$  und  $t$  bekannt, so liefern die Fundamentalgleichungen den entsprechenden Erdort, d. h.  $\varphi$  und  $\lambda$ . Substituiert man, mittels  $P = 0$ ,  $p$  als Funktion von  $t$  in die Fundamentalgleichungen II), so stellen diese die Gleichung der Grenzkurve dar, die aber transzendent ist, weil  $t$  transzendent in den Koordinaten enthalten ist, während die erzeugenden Schnittkurven von Schattenkegel und Erde als Schnitte zweier algebraischen Flächen 2. Grades algebraisch und zwar vom 4. Grade sind.

Die Wirkung der Strahlenbrechung ist gerade für die östliche und westliche Grenzkurve eine maximale, weil die Strahlenbrechung selbst im Horizont ihr Maximum erreicht.

13) Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 349.

14) Bessel, Analyse der Finsternisse (1842), II. Abschn., §§ 12 und 22 = Bessel, Astron. Untersuch. 2, p. 137 und p. 168 usw. = Bessel, Abhdl. 3, p. 386 und 399.

## c) Die nördliche und südliche Grenzkurve.

Sie werden durch die Enveloppen der Schattenkreise des Halbschattenkegels gebildet. Jeder Punkt derselben sieht von der Finsternis weiter nichts als die Berührung der beiden Scheiben von Sonne und Mond, d. h. die äußere Berührung ist für jene Erdorte das Maximum der Finsternis, die größte Phase. Fassen wir allgemein an einem Punkte innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches der Finsternis jede einzelne Phase als eine Berührung der Mondscheibe mit einer der betreffenden Phase entsprechenden verkleinerten Sonnenscheibe auf, so müssen wir den Radius  $u'$  des Schattenkreises als eine Funktion der Zeit betrachten, und der Augenblick der größten Phase ist durch das Minimum von  $u'$ , folglich auch von  $f$  in bezug auf die Zeit  $t$  bedingt. Soll die größte Phase im speziellen Falle verschwinden, d. h. soll der betreffende Erdort ein Punkt auf der nördlichen oder südlichen Grenzkurve sein, so muß  $u'$  resp.  $f$  für den betreffenden Punkt im Augenblick der größten Phase die den äußeren Berührungen von Erde und Schattenkegel entsprechende Größe haben.

Die Bedingungsgleichung für die Punkte der Grenzkurve wird ganz analog der für die östliche und westliche Grenzkurve erhalten. Die Grundgleichungen werden bei variablem  $u'$  nach der Zeit differenziert, und nach der Differentiation wird  $du' = df = 0$  gesetzt. Die gleich 0 gesetzte Determinante der entstehenden drei homogenen Gleichungen zwischen  $du$ ,  $dp$  und  $dt$  ist dann die gesuchte Bedingungsgleichung der Grenzkurve, nachdem für  $u'$  resp.  $f$  die den äußeren Berührungen entsprechende Größe substituiert worden ist. Die Auflösung der Bedingungsgleichung nach dem Winkel  $\psi = p - N$  gibt derselben die Form:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha + \beta \sin(\gamma + t)}{\delta \cos(\varepsilon + t)},$$

wo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  und  $\varepsilon$  von den Variablen und Parametern des Problems abhängen, außer von der Zeit  $t$ , die, soweit sie explizit in  $\operatorname{tg} \psi$  auftritt, ersichtlich gemacht ist. Mit den Fundamentalgleichungen II) zusammen haben wir dann wieder drei Gleichungen zur Bestimmung von  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $p$  und  $t$  als Funktion einer derselben als willkürlichem Parameter.

Die numerische Auflösung dieser Gleichungen erfolgt wieder durch sukzessive Näherungen<sup>15)</sup>; dieselben basieren vor allem darauf, daß der Winkel  $\psi = p - N$ , welcher den Positionswinkel des Be-

15) Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 341.

rührungspunktes gegen die Bewegungsrichtung des Zielpunktes der Kegelachse fixiert, stets nahezu  $90^\circ$  resp.  $270^\circ$  ist; denn die Richtung vom Schattenkreismittelpunkt nach dem Berührungspunkt steht nahezu senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schattenkreismittelpunktes und kann sich höchstens um  $20^\circ$  von  $90^\circ$  resp.  $270^\circ$  unterscheiden, so daß  $\sin \psi$  stets nahezu  $= \pm 1$ .

Wählt man die Zeit  $t$  als willkürlichen Parameter und löst die Gleichungen nach dem Positionswinkel  $p$  auf, so erhält man eine Gleichung 8. Grades für  $\sin p$ , falls man die Erde als Rotationsellipsoid betrachtet<sup>16)</sup>; im Falle einer kugelförmigen Erde reduziert sich diese Gleichung auf den 6. Grad. Zur geometrischen Veranschaulichung nehme man statt des Schattenkegels einen Zylinder, dessen Achse in der Ebene des Äquators liegt und der, ohne eigene Bewegung, so gelegt wird, daß er mehr als halb von der zunächst kugelförmig angenommenen Erde umschlossen wird. Dann ist die Schnittkurve ein einziges räumliches Oval. Die nördlichsten und südlichsten Punkte desselben  $A, B, C, D, E, F$  (s. Fig. 6) repräsentieren die sechs Lösungen unserer Gleichung, sie befriedigen die Bedingung  $du' = 0$ . Dabei sehen  $A, B, D, F$  die Ränderberührung als Maximum,  $C$  und  $E$  als Minimum der Finsternis.

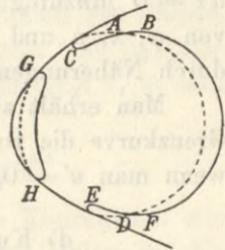


Fig. 6.

Zu diesen sechs Punkten resp. Lösungen treten im Falle einer ellipsoidischen Erde noch zwei weitere hinzu, weil die Schnittkurve in diesem Fall, wie bereits p. 351 erwähnt, aus zwei getrennten Kurven bestehen kann; es tritt dann das Oval  $GH$  hinzu, wo  $G$  und  $H$  ebenfalls die Bedingung  $du' = 0$  befriedigen, und zwar so, daß die Berührung der Ränder ein Minimum bedeutet. Tatsächlich erfüllen die Dimensionen der Erde und des Schattenkegels die zu dieser Art des Verlaufes der Erscheinung notwendige Bedingung nicht.

Die nördliche und südliche Grenzkurve sind geschlossene Kurven, aber nur ein Teil derselben liegt auf der der Sonne zugewandten, der andere auf der von der Sonne abgewandten Seite. Die Endpunkte des der Sonne zugewandten Teiles dieser Kurven, also die zeitlich frühesten Punkte, sind die, in denen die jene Kurven erzeugenden Mantelgeraden des Schattenkegels die Erde berühren, d. h. Punkte, die gleichzeitig auch auf der westlichen resp. östlichen Grenzkurve liegen und in denen sich nördliche resp. südliche Grenzkurve mit der westlichen resp. östlichen berühren.  $J, K, L$  und  $M$  mögen diese Endpunkte

16) Bessel, Analyse der Finsternisse (1842), p. 173.

sein (s. Fig. 7); daß dieselben für beide Kurvenklassen *Berührungspunkte* sind, folgt daraus, daß, wenn dieselben sich schneiden würden, die den Schnittpunkten entsprechenden Erdörter  $J'$  und  $K'$  im nächsten Augenblick nach der Berührung in den Schatten geraten würden, was der Voraussetzung widerspricht, daß jene Punkte höchstens eine Berührung wahrnehmen dürfen.

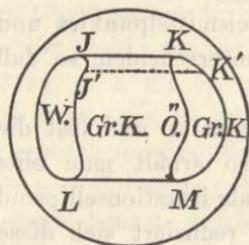


Fig. 7.

Man erhält die Endpunkte offenbar, wenn man zu den schon fixierten drei Bedingungsgleichungen noch die der östlichen und westlichen Grenzkurve entsprechende Bedingung  $d\tau = 0$  hinzufügt; man hat dann vier Gleichungen zur Bestimmung von  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $p$  und  $t$ . Die numerische Auflösung erfolgt wie immer durch Näherungen<sup>17)</sup>.

Man erhält aus den Gleichungen für die nördliche und südliche Grenzkurve die von der Kegelachse beschriebene *Kurve der Zentralität*, wenn man  $u' = 0$ , d. h.  $f$  und  $k$  (Mondradius)  $= 0$  setzt.

#### d) Kurven sonstiger spezieller Phasen.

Zu diesen Kurven gehören einmal die Kurven, in deren Punkten eine bestimmte vorgelegte Phase als größte Phase wahrgenommen wird (*Kurven gleicher größter Phase*); man gewinnt dieselben offenbar aus den Gleichungen der nördlichen resp. südlichen Grenzkurve, indem man sich aus der Sonne eine der vorgelegten größten Phase entsprechende verkleinerte Scheibe, einem bestimmten  $u'$  resp.  $f$  entsprechend, herausgeschnitten denkt, so daß die Erscheinung dem Falle verschwindender Phase analog ist.

Eine spezielle Kurve ist ferner die, deren Punkte die *größte Phase im Horizonte* sehen. Man erhält dieselbe, indem man zu den Bedingungsgleichungen der größten Phase noch die Bedingung des Sonnenauf- resp. -unterganges hinzufügt.

Schließlich ist noch die Kurve erwähnenswert, auf der die *größte Phase im Mittage* gesehen wird. Diese Kurve trennt den Sichtbarkeitsbereich der Finsternis in zwei Teile, deren einer den größten Teil der Finsternis am Vormittage, der andere dagegen am Nachmittage wahrnimmt. Diese Kurven sind namentlich für die Untersuchung antiker Finsternisse von Interesse. Man erhält diese Kurve wieder aus den Gleichungen der nördlichen resp. südlichen Grenzkurve, in-

17) Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 355.

dem man die wahre Ortszeit  $t = 0$  setzt und  $u'$  entsprechend den verschiedenen größten Phasen innerhalb der zulässigen Grenzen variiert.

**5. Der lokale Verlauf der Finsternis.** Für einen Erdort, der innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches der Finsternis liegt, interessiert es mit Rücksicht auf die Beobachtung der Erscheinung, die *Zeiten des Eintritts der verschiedenen Phasen*, speziell die Zeit der Berührungen und die der größten Phase zu bestimmen. Die Berechnung des Eintretens jeder anderen Phase der Finsternis reduziert sich, wie schon erwähnt, durch Annahme einer entsprechend verkleinerten Sonnenscheibe sofort auf das Problem der Ränderberührung.

Da die strenge Auflösung der Grundformeln nach der Zeit transzendent ist, so bedient man sich einer Näherungsmethode<sup>18)</sup>, die schnell zum Ziel führt. Man entwickelt die Koordinaten des Mondes, des Erdortes und der übrigen veränderlichen Größen um die Eintrittszeit der Erscheinung herum nach Potenzen der Zeit  $t$ , so daß die Fundamentalgleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = u^2 = (u' - \xi \operatorname{tg} f)^2$$

bei Mitnahme nur der in  $t$  linearen Glieder in den Koordinaten eine zur Bestimmung von  $t$  quadratische Gleichung liefert. Haben die Koordinaten  $x, y$  im Moment  $T_0$  des ersten Meridians die Werte  $x_0, y_0$ , und sind ihre minutlichen Änderungen  $x', y'$ , so sind die Koordinaten im Zeitpunkt  $T$  des Beobachtungsortes der Länge  $\lambda$  und der geozentrischen Breite  $\varphi'$ :

$$x = x_0 + [T - (T_0 - \lambda)]x'$$

und analog  $y, \xi$  und  $\eta$ .

Ist  $d$  die Deklination und  $H$  der Stundenwinkel des Zielpunktes der Kegellachse für den Nullmeridian, die z. B. in der französischen Ephemeride „*Connaissance des Temps*“ berechnet vorliegen, so lauten die Koordinaten des Erdortes (Radius =  $\rho$ ) und dessen Änderungen, wenn wir noch

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin \varphi' &= A \sin B, \\ \rho \cos \varphi' \cos (H - \lambda) &= A \cos B \end{aligned} \right\}$$

setzen<sup>3)</sup>:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \sin (H - \lambda), \\ \eta &= A \sin (B - d), \\ \xi &= A \cos (B - d), \end{aligned} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= (7.63\ 982) A \cos B, \\ \frac{d\eta}{dt} &= (7.63\ 982) \xi \sin d. \end{aligned} \right.$$

18) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), p. 207 und *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 411.

Setzen wir schließlich noch, um der Lösung eine trigonometrische Form zu geben

$$m \sin M = x_0 - \xi, \quad n_1 \sin N_1 = x' - \frac{d\xi}{dt}, \quad \sin \psi = \frac{m}{u} \sin (M - N_1)$$

$$m \cos M = y_0 - \eta, \quad n_1 \cos N_1 = y' - \frac{d\eta}{dt}, \quad u = u' - \xi \operatorname{tg} f,$$

so lautet nach Substitution dieser Hilfsgrößen in die Fundamentalgleichung deren Auflösung nach  $T$ :

$$T = T_0 - \lambda \mp \frac{m}{n_1} \frac{\sin (M - N_1 \pm \psi)}{\sin \psi} \quad \begin{array}{l} \text{oberes Vorzeichen: Eintritt,} \\ \text{unteres „ „ Austritt.} \end{array}$$

Die Zeit der größten Phase wird:

$$T_1 = T_0 - \lambda - \frac{m}{n_1} \cos (M - N_1).$$

Ist  $u^*$  der dem Zeitpunkt  $T_1$  entsprechende Minimalwert von  $u$ , so ist  $u^* = \pm m \sin (M - N_1)$ , wo  $u^*$  stets positiv zu nehmen ist. Teilt man den Sonnendurchmesser in 12, *Zolle* (frz. *doigts*) benannte Teile, so ist die Zahl der vom Monde verdeckten, in Zollen ausgedrückten Teile des Sonnendurchmessers im Augenblick der größten Phase, d. h. die *Größe der Finsternis*<sup>19)</sup>:  $12 \frac{u_h - u^*}{u_h - u_k}$  oder auch, weil  $u_k$  sehr klein gegen  $u_h$ , genähert  $12 \frac{u_h - u^*}{u_h}$ , was geometrisch durch bloßes Aufzeichnen sofort ersichtlich ist. Ebenso findet man leicht für die *Positionswinkel der Berührungspunkte*:

$$N_1 + 180^\circ - \psi \quad \text{für den Eintritt,}$$

$$N_1 + \psi \quad \text{„ „ Austritt.}$$

Ferner bedient man sich zur Vorausbestimmung des lokalen Verlaufs einer Finsternis vielfach und vorteilhaft der *teils graphischen, teils interpolatorischen Methode*. Man berechnet für eine Reihe von Zeitpunkten, welche die Erscheinung umfassen, die scheinbaren lokalen Örter von Sonne und Mond und die denselben Momenten entsprechenden scheinbaren Abstände von Sonne und Mond. Durch Interpolation findet man dann leicht die den Berührungen der Ränder entsprechenden Zeiten und Zeit und Größe der größten Phase. Diese nach *J. Kepler* benannte Methode ist *in extenso* von *Bohnenberger*<sup>20)</sup> entwickelt worden.

19) Die englischen Astronomen geben die „*magnitude of eclipse*“ in Dezimalteilen des Sonnendurchmessers an.

20) *J. G. F. Bohnenberger*, *Nautical Almanac and astronomical ephemeris for the year 1836*, London 1835.

**6. Anwendung der Sonnenfinsternisse; Tafeln.** Die Bedeutung der totalen Sonnenfinsternisse liegt vor allem darin, daß sie die einzige Gelegenheit zu bestimmten astrophysikalischen Studien an der Sonne und ihrer nächsten Umgebung bieten; ferner liefern sie der Mondtheorie die genauesten Daten über den Mondort, bezogen auf den Ort der Sonne, um die Zeit des Neumonds, und die einzige Möglichkeit, die scheinbare säkulare Mondakzeleration nachzuweisen; in der geographischen Längenbestimmung (vgl. p. 134) stehen sie den Sternbedeckungen durch den Mond lediglich durch ihre relative Seltenheit, nicht an Genauigkeit nach. Die Durchmusterung größerer Zeiträume des Altertums nach Finsternissen der Sonne und des Mondes stellt sich in den Dienst der Chronologie. Demgemäß machte sich das Bedürfnis nach Tabulierung früherer und zukünftiger Finsternisse bald geltend; schon die „*Art de vérifier les dates*“ (1. Ausgabe 1750) machte ins einzelne gehende Angaben über die Finsternisse seit Christi Geburt<sup>21)</sup>.

Das erste bequeme, die Ergebnisse der Theorie vollständig berücksichtigende und doch die zulaßbarsten Abkürzungen einführende Hilfsmittel zur schnelleren Berechnung der Sonnen- (und Mond-)finsternisse lieferte *P. A. Hansen* mit seinen „*Ekliptischen Tafeln*“. Er entwickelte die in seiner Theorie auftretenden Größen, welche sonst zum Teil aus den Sonnen- und Mondtafeln zu berechnen gewesen wären, in trigonometrische Reihen nach der Zeit<sup>22)</sup>. Mittels dieser Tafeln erhält man sämtliche Hilfsgrößen, die man zur Ermittlung der näheren Umstände der Sichtbarkeit einer Finsternis nötig hat. *Hansens* Analyse wurde 1881 von *Th. v. Oppolzer* genauer wiederholt in seinen *Syzygientafeln*<sup>23)</sup>. Da die *Oppolzerschen* ekliptischen Tafeln auf sorgfältiger Revision der Grundlagen beruhen und bei ihrer Tabulierung erheblich mehr Glieder mitgenommen worden sind, als bei den *Hansenschen*, so sind sie wesentlich genauer als die letzteren. Ebenfalls auf *Hansens* Analyse fußen die Tafeln von *P. Lehmann*<sup>24)</sup>; sie sind aber genauer als *Hansens* Tafeln und reichen von 2500 v. Chr. bis 2400 n. Chr. Auch *Largeteau's* Tafeln<sup>25)</sup> leisten, obwohl auf ältere Grundlagen gestützt, gute Dienste für die näherungsweise Ermittlung der Sonnenfinster-

21) *L'Art de vérifier les dates*, 1. éd., p. 1—73; 2. éd., p. 39—89; 3. éd. tome 1, p. 41—83, umfaßt die in der alten Welt sichtbaren Sonnen- und Mondfinsternisse seit Christi Geburt bis bzw. 1800, 1900, 2000.

22) *Hansen*, Ekl. Tafeln (1857) und *Hansen*, Analyse d. ekl. Tafeln (1863).

23) *Oppolzer*, Syzygientafeln (1881).

24) *Lehmann*, Tafeln (1882).

25) *Largeteau*, tables (1843).

nisse. Da *Oppolzers* Syzygientafeln besonders für die systematische Berechnung der Finsternisse für lange Zeiträume geeignet sind, stellte *Oppolzer* einen „Kanon der Finsternisse“<sup>26)</sup> her, welcher für die Sonnenfinsternisse von 1208 v. Chr. bis 1261 n. Chr. sämtliche Elemente und für die zentralen unter denselben drei Hauptpunkte der Zentralität liefert; letztere gestatten unmittelbar eine ungefähre Übersicht des Hauptgebietes der Sichtbarkeit der Finsternisse.

Die Bestimmung der Zeit und Größe der Verfinsterungsphase für einen gegebenen Ort (und damit auch der Hauptkurven) hat *R. Schram*<sup>27)</sup> außerordentlich vereinfacht. Unter Aufgabe des Anspruches auf Genauigkeit erhält man aus dessen Tafeln mittels weniger Rechenoperationen unter Zugrundelegung der Elemente des *Oppolzerschen* Kanons (oder auch näherungsweise richtig mittels aus den Tafeln selbst erlangbarer Elemente) für jeden gegebenen Ort mit einer zu historischen Zwecken mehr als hinreichenden Genauigkeit Zeit und Größe der Phase. Auch auf *Newcombs* Tafeln<sup>28)</sup> ist noch zu verweisen.

Zur Darstellung der *historischen Sonnenfinsternisse*, namentlich des Altertums, reichen die *Hansenschen* Grundlagen der Mondtheorie, auf welche die Mehrzahl der genannten ekliptischen Tafeln zurückgeht, bekanntlich nicht ganz aus<sup>29)</sup>. *Th. von Oppolzer* hat deshalb in seinen „Syzygientafeln“ empirische Korrekturen gegeben, die aus einer provisorischen Ausgleichung einer Anzahl historischer Finsternisse abgeleitet sind. Der „Kanon der Finsternisse“ ist mit Hinzuziehung dieser Korrekturen berechnet. *F. K. Ginzel* hat diese Korrekturen aus 21 mittelalterlichen Finsternissen, für die ein reichhaltiges Beobachtungsmaterial vorliegt, und aus einer vom Jahre 71 n. Chr. von neuem abgeleitet und einen Anschluß jener Finsternisse an die vorchristlichen hergestellt<sup>30)</sup>. Diese Korrekturen sind von *R. Schram* tabuliert worden<sup>31)</sup>; *Ginzel* hat diese Tafeln zur Berechnung eines ausführlichen Nachweises sämtlicher zwischen 900 v. Chr. bis 600 n. Chr. innerhalb des Ländergebietes von 350° bis 50° östl. Länge und 25° bis 50° nördl. Breite stattgefundenen Sonnenfinsternisse verwendet<sup>32)</sup>. Dieses

26) *Oppolzer*, Canon (1887).

27) *Schram*, Tafeln zur Berechn. v. Sonnenf. (1886).

28) *Newcomb*, Recurrence of solar ecl. (1882).

29) Siehe VI 2, 17 (*Brown*), Erdmond.

30) *F. K. Ginzel*, Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, Wien Ber. 85 (1882), p. 663; 88 (1883), p. 629; 89 (1884), p. 491.

31) *Schram*, Reduktionstafeln (1889).

32) *Ginzel*, Kanon (1899).

Werk liefert für jeden beliebigen Ort dieses Gebietes Zeit und Phase und außerdem speziell für Rom, Athen, Memphis und Babylon noch genauere Angaben.

**7. Die Perioden der Finsternisse.** Da die Mondbahn gegen die Sonnenbahn um einen bestimmten Winkel ( $i = 5^{\circ} 8' 8''$ ) geneigt ist, so gibt es zwei Perioden im Jahre, während welcher die Sonne einmal dem aufsteigenden, das andere Mal dem niedersteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn nahe ist. Ist der Mond gleichzeitig einem dieser Knoten nahe, so kann eine Finsternis, Sonnen- oder Mondfinsternis oder auch beides, in Frage kommen. Diese als „*Finsternisperiode*“ bezeichnete kritische Zeit dauert im Durchschnitt für Sonnenfinsternisse 36 Tage, von denen 18 Tage vor dem Durchgange der Sonne durch den Knoten und 18 Tage nachher liegen. Für Mondfinsternisse beträgt die Finsternisperiode nur 23 Tage, wenn für diese nur die durch den Kernschatten der Erde verursachten Finsternisse, die allein genauerer Beobachtung zugänglich sind, in Betracht gezogen werden. Da die Mondknoten sich nun aber bekanntlich rückläufig bewegen, so fällt die Finsternisperiode nicht immer in denselben Monat, sondern liegt in jedem folgenden Jahre durchschnittlich 20 Tage früher. Nach etwa 18 Jahren fällt also die Finsternisperiode wieder in denselben Monat; genauer ist die zwischen den drakonitischen, d. h. vom Durchgang durch den Mondknoten an gezählten Sonnen- und Mondumläufen bestehende Beziehung die folgende:

$$242 \text{ drakonitische Mondumläufe} = 6585,357 \text{ Tagen,}$$

$$19 \text{ drakonitische Sonnenumläufe} = 6585,780 \text{ Tagen,}$$

d. i. nahezu 18 Jahre 10 Tage.

Diese größere Periode von 18 Jahren und 10 oder 11 Tagen (je nachdem in den 18 Jahren 5 oder 4 Schalttage enthalten sind), nach deren Ablauf sich die Finsternisse wieder nahezu in derselben Reihenfolge wiederholen, ist der schon den Alten bekannt gewesene *Saroszyklus*, der ihnen ein Mittel zur Vorhersagung der Finsternisse gab. Eine bestimmte Finsternis wiederholt sich aber nach Ablauf des Zyklus nicht zur selben Stunde, sondern, dem Bruchteil des Periodenwertes entsprechend,  $7^h 42^m$  später, sodaß die Mitte der Finsternis erst nach Ablauf von 3 Zykeln annähernd zur selben Stunde eintritt. Da ferner in einem Zyklus 223 Konjunktionen von Sonne und Mond stattfinden, die nach diesen 223 Lunationen verflossene Zeit aber nur 6585.3212 Tage, also etwas weniger als 242 drakonitische Mondumläufe (6585.357 Tage) beträgt, so findet die 223. Konjunktion von Sonne und Mond statt, bevor der Mond den Knoten erreicht hat; der Mond ist in diesem

Augenblick noch annähernd  $\frac{1}{2}$  Grad (genauer  $28'$ ) vom Knoten entfernt, sodaß eine bestimmte Finsternis nach Ablauf des Zyklus  $\frac{1}{2}$  Grad weiter vom Knoten entfernt eintritt. Da nun die Finsternisperiode für die Sonne 36 Tage beträgt, während welcher Zeit die Sonne rund  $36^\circ$  am Himmel zurücklegt, so erhält sich eine Sonnenfinsternis über rund 72 Zykeln, d. h. für eine Zeit von über 1200 Jahren. Da die Finsternisperiode für Mondfinsternisse nur 23 Tage beträgt, so erhalten sich die Mondfinsternisse über eine entsprechend kürzere Zeit von rund 46 Zykeln oder von nahezu 900 Jahren.

Andere brauchbare d. h. nicht zu große Perioden zur Finsternis-Vorausbestimmung, welche namentlich für den Fall eines bestimmten Ortes der Erde sich als nützlich erweisen, behandelt Ginzell<sup>33)</sup>.

## B. Mondfinsternisse.

8. Kriterium für das Stattfinden einer Mondfinsternis überhaupt. Die Mondfinsternisse können nur um die Zeit des Vollmondes eintreten. Wie bei den Sonnen-, ist auch bei den Mondfinsternissen das *Stattfinden der Finsternis überhaupt an eine analoge Bedingung gebunden*, die man durch bloßes Aufzeichnen der Schattenumrisse sofort erkennt. Die Bedingung ist die, daß die Breite  $\beta$  des Mondes gegen die Ekliptik zur Zeit des Vollmondes in bestimmte Grenzen eingeschlossen ist, und zwar muß dem absoluten Werte nach

$$\beta \leq (p + \pi - r_\odot) \sec i + r_\epsilon \text{ (Kernschatten),}$$

resp.

$$\beta \leq (p + \pi + r_\odot) \sec i + r_\epsilon \text{ (Halbschatten)}$$

sein.

Da  $(p + \pi - r_\odot) \sec i + r_\epsilon$  zwischen  $51' 57''$  und  $64' 19''$ ,  $(p + \pi + r_\odot) \sec i + r_\epsilon$  zwischen  $1^\circ 24' 32''$  und  $1^\circ 35' 54''$  schwankt, so findet sicher eine Mondfinsternis statt, wenn dem absoluten Werte nach

$$\beta < 51' 57'' \text{ (Kernschatten),}$$

resp.

$$\beta < 1^\circ 24' 32'' \text{ (Halbschatten).}$$

In anderen Fällen ist das Stattfinden der Finsternis von den jeweiligen Werten von  $p$ ,  $\pi$ ,  $r_\odot$ ,  $r_\epsilon$ ,  $i$  abhängig. Da der Durchmesser des Kernschattenquerschnittes der Erde in der Mondentfernung im Mittel  $82'$  beträgt, so kann der Mond, dessen Durchmesser im Mittel nur  $32'$  beträgt, völlig in ihn eintauchen. Die durch den Einfluß der Erdatmosphäre eintretende *Vergrößerung des Erdschattens*<sup>34)</sup>

33) F. K. Ginzell, Kanon (1899), p. 263.

34) J. Hartmann, Die Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen,

um etwa  $\frac{1}{51}$  bewirkt, daß die eben abgeleiteten Grenzwerte der Breite des Mondes entsprechend zu vergrößern sind.

**9. Verlauf einer Mondfinsternis.** Wegen der Undeutlichkeit der Schattengrenze sind die Mondfinsternisse zu genaueren Messungen nicht brauchbar. Deshalb genügt zur Darstellung ihres Verlaufs eine *graphische Methode* resp. eine Näherungsrechnung. Man berechnet aus den stündlichen Bewegungen von Sonne und Mond die *Relativbewegung des Mondes gegen die Mitte des Erdschattens*, d. h. gegen den Gegenpunkt der Sonne, und zwar kann man dieselbe innerhalb kurzer Zeiten als gleichförmig betrachten. Zu einer beliebigen Zeit  $t$  sind dann die Längen- resp. Breitendifferenzen von Mond und Schattenmittelpunkt:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_0 + \lambda' t, \quad \Delta\beta = \Delta\beta_0 + \beta' t,$$

wo  $\lambda'$  und  $\beta'$  die betreffenden Relativbewegungen bedeuten, und die Berührungszeiten von Mond und Erdschatten folgen, wenn  $\varrho$  der scheinbare Schattenradius und  $r_\epsilon$  der scheinbare Mondradius ist, aus der Bedingungsgleichung:

$$(\varrho \pm r_\epsilon)^2 = (\Delta\lambda_0 + \lambda' t)^2 + (\Delta\beta_0 + \beta' t)^2; \quad +, \text{ falls äußere Berührung,} \\ -, \text{ falls innere Berührung,}$$

wo  $\varrho = \pi + p - r_\odot$ , im Mittel =  $41' 9''$ . Zeichnet man sich den Weg des Mondes gegen den als ruhend gedachten Schatten auf, so kann man aus dieser Zeichnung sogleich die Positionswinkel der Berührungspunkte, ebenso den Betrag der größten Phase direkt ablesen.

Eine *Mondfinsternis* ist überall da *sichtbar*, wo der Mond über dem scheinbaren Horizont steht, wo also die Zenitdistanz des Mondes  $z_\epsilon < 90 - p_\epsilon + R$  (wo  $R$  = Strahlenbrechung im Horizont), folglich ist die Sichtbarkeitsbedingung einer bestimmten Phase der Mondfinsternis für einen Ort der geozentrischen Breite  $\varphi'$  und Länge  $\lambda$ , wenn  $\theta$  die Sternzeit des ersten Meridians für jene Phase:

$$\cos z_\epsilon = \sin \delta_\epsilon \sin \varphi' + \cos \delta_\epsilon \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha_\epsilon - \lambda) > \sin (\pi_\epsilon - R),$$

wo  $\alpha_\epsilon$  und  $\delta_\epsilon$  Rektaszension und Deklination des Mondes sind.

**10. Tafeln zur Berechnung von Mondfinsternissen.** Die Mondfinsternisse können in ähnlicher Weise wie die Sonnenfinsternisse aus entsprechend eingerichteten *ekliptischen Tafeln* berechnet werden. Die schon genannten Tafeln von *C. L. Largeteau*<sup>25)</sup>, *P. Lehmann*<sup>24)</sup> und *Th. von Oppolzer*<sup>26)</sup> ermöglichen diese Rechnung ohne weiteres. Die

Leipzig Ges. Wiss. Abh. 17 (1891), p. 363; *H. Seeliger*, Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen, Münch. Abh. 19, Abteilung 2 (1896), p. 35.

„Syzygientafeln“ von Th. von Oppolzer<sup>35)</sup> gestatten den Übergang von den für die Konjunktion des Mondes ermittelten Elementen zu denen für die Opposition, indem man an die Elemente nur entsprechende Korrekturen anzubringen braucht. Oppolzer hat ferner für den Fall, daß nur ungefähre Angaben für die Mondfinsternisse verlangt werden, durch Zusammenziehung der Argumente die Rechnung noch so abgekürzt<sup>36)</sup>, daß man die Zeit und Größe der größten Phase und die Dauer der Finsternis innerhalb kurzer Zeit berechnen kann. Mit diesen Tafeln sind die 5200 Mondfinsternisse im „Canon der Finsternisse“ berechnet worden.

### C. Andere Finsternisse und Bedeckungen.

**11. Sternbedeckungen durch den Mond.** Die Sternbedeckungen durch den Mond bilden einen speziellen Fall der Sonnenfinsternisse; man erhält aus deren Theorie die entsprechende für die Sternbedeckungen, indem man die Sonnenparallaxe und ebenso den Öffnungswinkel des Schattenkegels als verschwindend betrachtet, weil man die Entfernung der Fixsterne als beliebig groß und den Schattenkegel deshalb als Zylinder ansehen kann. Dann ist aber der Radius  $u'$  des Schattenkreises konstant, gleich dem linearen Mondradius  $k$ , sodaß die Fundamentalgleichung jetzt lautet:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = k^2.$$

Zur Berechnung der Berührungs-, d. h. in diesem Falle der Ein- und Austrittszeiten entwickelt man wieder die Koordinaten nach Potenzen der Zeit  $t$  und begnügt sich in erster Annäherung mit den in  $t$  linearen Gliedern. Man reicht aber selten mit nur einer Annäherung aus, sondern muß deren mehrere machen. Zur Abkürzung derselben sind deshalb zahlreiche Methoden von Astronomen und Nautikern angegeben worden<sup>36)</sup>. Besonders bemerkenswert ist ein von C. Stechert<sup>37)</sup> entwickeltes Verfahren, das die Vorausbestimmung der Berührungszeiten, die dem Beobachter der Erscheinung im voraus bekannt sein müssen, durch ein halb numerisches, halb graphisches

35) Oppolzer, Tafeln f. Mondf. (1883).

36) Siehe Abschnitt II (Sternbedeckungen) des Literaturverzeichnisses. Für die praktische Rechnung vgl. Chauvenet (1900), vol. 1, §§ 340—346 und die Formelzusammenstellung bei W. F. Wislicenus, Handbuch der geographischen Ortsbestimmungen auf Reisen, Leipzig 1891.

Lehrbuch der Navigation, herausgeg. vom Reichsmarineamt, 3 Bde Berlin 1901 Bd. II p. 372.

37) Stechert, Tafeln für Sternbedeck. (1896) sowie Stechert, Hilfsgrößen (1897).

Verfahren unter Benutzung von Tafeln außerordentlich abkürzt. Wie bereits erwähnt, führt die Auflösung der Grundgleichung nach der Zeit auf eine transzendente Gleichung, und zwar bringt *Stechert* dieselbe auf die folgende Form:

Ist  $\theta_0$  die Sternzeit der wahren Konjunktion in Rektaszension für den ersten Meridian,  $\lambda$  die Länge des Beobachtungsortes,  $\varphi'$  seine geozentrische Breite,  $y$  die zwischen der wahren Konjunktion für den ersten Meridian und der für den Beobachtungsort verfließenden Zeit,  $A$  die Rektaszension des bedeckten Sterns,  $\delta_0$  die wahre Deklination des Mondes im Augenblick der Konjunktion,  $\Delta\alpha$  die Rektaszensionsbewegung des Mondes in  $1^h$  mittlerer Zeit, so lautet die für die Zeit  $y$  explizit geschriebene Grundgleichung:

$$y = (0,00119) \frac{Pr \cos \varphi'}{\Delta\alpha \cos \delta_0} \sin (\theta_0 - A - \lambda + y),$$

wo  $r$  der lokale Erdradius und  $P$  die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes. Diese *transzendente Gleichung für  $y$*  ist völlig analog der *Keplerschen Gleichung* der Planetenbewegung. Setzen wir nämlich den Faktor des Sinus gleich  $e$ , ferner  $A - \theta_0 + \lambda = M$  und  $\theta_0 - A - \lambda + y = \varepsilon$ , so geht unsere transzendente Gleichung über in  $\varepsilon - e \sin \varepsilon = M$ , also in die *Keplersche Gleichung*, wo  $\varepsilon$  der exzentrischen,  $M$  der mittleren Anomalie und  $e$  der Exzentrizität entspricht. *Stechert* gibt zur Lösung der Gleichung eine Tafel, die mit  $e$  und  $M$  als Argument die Unbekannte  $\varepsilon$  und somit auch  $y$  liefert. Ist  $y$  bekannt, so erhält man die Ein- und Austrittszeit mittels der Relativbewegung des Mondes gegen den Stern; die Positionswinkel der Ein- und Austrittstellen am Mondrande erhält man graphisch aus einer Zeichnung, in der man den Mond als ruhend und den Weg des Sterns in erster Annäherung als geradlinig betrachtet. In zweiter Annäherung kann man auch die Krümmung der Bahn berücksichtigen.

Der *Nutzen der Sternbedeckungen* für die Astronomie besteht in der Möglichkeit, mittels derselben Längendifferenzen auf der Erde<sup>37a)</sup>, ferner die Parallaxe und den Radius des Mondes, genaue Positionen desselben und die Sonnenparallaxe zu bestimmen<sup>37b)</sup>. Besonders wertvoll

37<sup>a)</sup> Hierzu von historischem Interesse *J. Cassini* (le fils), *Méthode de déterminer les longitudes des lieux de la terre par les eclipses des étoiles fixes et des planètes par la lune*, Paris hist. (2) mém. 1705, p. 194, sowie *L. Euler*, *Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la lune*, Berl. hist. 1747. Im übrigen vgl. VI 2, 3 (*Wirtz*), Nr. 34.

37<sup>b)</sup> *H. Battermann*, Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen am 6füßigen *Merzsch*

sind für diese Zwecke die Bedeckungen von helleren Sternhaufen wegen der großen Zahl der Bedeckungen (Plejaden). Schließlich bieten die Sternbedeckungen auch ein Mittel zur Herleitung der Abplattung des Erdkörpers, eine Aufgabe, die F. W. Bessel<sup>38)</sup> kritisch behandelt hat.

**12. Planetenvorübergänge.** Wird ein Planet vom Monde bedeckt oder ein Fixstern durch einen Planeten, so ist die Theorie der Erscheinung der für die Sonnenfinsternisse resp. Sternbedeckungen völlig analog. Eine Komplikation des Problems entsteht nur durch die eventuell ellipsoidische Figur des bedeckten resp. bedeckenden Planeten und ferner durch die unvollständige Beleuchtung der Planetenscheibe<sup>39)</sup>. Mit der Bestimmung des Schattens eines ellipsoidischen Planeten beschäftigten sich Seeliger<sup>40)</sup> und Souillart<sup>41)</sup>. Die Fixsternbedeckungen durch Planeten dienen einmal zur Herleitung genauer Planetenörter und ferner zur Untersuchung der Atmosphäre der Planeten. In dem speziellen Falle einer Bedeckung der Sonne durch Venus diente die Beobachtung derselben zu der Bestimmung der Sonnenparallaxe.

**13. Finsterniserscheinungen in anderen Trabantensystemen.** Die Theorie der Mondfinsternisse findet ein Analogon bei den *Verfinsterungen eines Trabanten* durch den Schatten seines Hauptplaneten. Die Beobachtung dieser Finsternisse liefert genaue Daten für die *Bahnbestimmung* des Trabanten und hat in diesem Zusammenhang insbesondere zu der Entdeckung der *Lichtgeschwindigkeit* geführt. Da die Zeit des Verschwindens des Trabanten von der Lichtstärke des Fernrohrs abhängt, so legt man neuerdings *photometrisch* den Moment fest, in dem die Helligkeit des Trabanten auf *die Hälfte des normalen Wertes* gesunken ist. Man hat auch den Eintritt der Verfinsterung als Zeitsignal in den Dienst der geographischen *Längenbestimmung*<sup>42)</sup>

---

Fernrohr; sowie: Bestimmung der Mondlänge, des Mondhalbmessers und der Sonnenparallaxe: Berlin Sternw. Ergeb. 5 (1891) bzw. 11 (1902). Vgl. VI. 2, 3 (Wirtz), Seite 135.

38) Bessel, Analyse der Finsternisse (1842); Bessel, Astron. Untersuch. 2, p. 227 = Bessel, Abh. 3, p. 423.

39) F. W. Bessel, Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe, Astr. Nachr. 12 (1835), p. 201—214 und p. 217—236 = Bessel, Astron. Untersuch. 1 (1841), p. 239 = Bessel, Abh. 1 (1875), p. 327.

40) H. Seeliger, Über den Schatten eines Planeten, Münch. Ber. 24 (1894), p. 423.

41) C. Souillart, Sur l'ombre d'une planète, Astr. Nachr. 91 (1878), p. 129.

42) Vgl. VI 2, 3 (Wirtz), S. 114.

gestellt. Das seltene Phänomen, daß ein Saturnmond in den Schatten des Saturnringes kommt<sup>43)</sup>, ist insofern interessant, als es die Durchsichtigkeit des Florrings des Saturn zu messen erlaubt.

Zum Schluß sei auf die Vorausberechnungen der Finsterniserscheinungen verwiesen, wie sie in der Literatur vorliegen.

Über den Verlauf der einzelnen Sonnenfinsternisse, Mondfinsternisse, Merkurdurchgänge, Sternbedeckungen durch den Mond, Verfinsterungen und Bedeckungen im Jupitersystem findet man die ausführlichsten Angaben in den betreffenden Jahrgängen der „*Connaissance des temps*“. *A. Marth* veröffentlichte für die Satelliten des Uranus (seit 1870), Saturn (seit 1873), Jupiter (seit 1875), Neptun (seit 1878), Mars (seit 1883) in den „*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London*“ Ephemeriden, die seit 1897 *A. C. D. Crommelin* weiterführt.

43) Über die Japetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem im Jahre 1889 vgl. *A. Marth*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889), p. 427; *H. Buchholz*, Astr. Nachr. 137 (1895) p. 241.

(Abgeschlossen im Dezember 1907.)

## VI 2, 8. CHRONOLOGIE

VON

F. K. GINZEL

IN BERLIN.

## Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Tagesbeginn und Tageseinteilung.
3. Wochen.
4. Jahreszeiten.
5. Jahr, Urform desselben.
6. Mond- und Sonnenjahr. Einschaltung, Ausgleichung.
7. Besondere Jahrformen und Zyklen.
8. Epochen (Ären).

Literatur.

## I. Ältere Werke.

- J. J. Scaliger*, De emendatione temporum, Paris 1583, Genf 1629.  
*S. Calvisius*, Opus chronologicum, Leipzig 1605, verschiedene Ausgaben 1629, 1650, 1685.  
*J. J. Scaliger*, Thesaurus temporum, Leyden 1606, Amsterdam 1658.  
*Dion. Petavius*, De doctrina temporum, Paris 1627.

## II. Neuere Lehr- und Handbücher.

- L. Ideler*, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, Berlin 1825 [immer noch Hauptwerk, aber jetzt in den meisten Kapiteln veraltet] (*Ideler, Hdb.* (1825)).  
*W. Matzka*, Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, Wien 1844 [eingehende arithmetische Behandlung der chronologischen Aufgaben] (*Matzka, Chr.* (1844)).  
*E. Brinckmeier*, Praktisches Handbuch der Chronologie aller Zeiten und Völker, Berlin 1882.  
*Wolf*, Handb. 1 (1890), p. 598.  
*H. Grottefend*, Zeitrechnung des deutschen Mittelalters und der Neuzeit, 3 Bde., Hannover und Leipzig 1891—98.  
*W. F. Wislicenus*, Astronomische Chronologie, Leipzig 1895.  
*Valentiner*, Handwörterbuch 1 (1897), p. 593—624 [verfaßt von *W. F. Wislicenus*].

- F. Rühl*, Chronologie des Mittelalters und der Neuzeit, Berlin 1897.  
*H. Grotefend*, Taschenbuch der Zeitrechnung des deutschen Mittelalters und der Neuzeit, 2. Aufl., Hannover und Leipzig 1905.  
*F. K. Ginzcl*, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, I. Bd.: Zeitrechnung der Babylonier, Ägypter, Mohammedaner, Perser, Inder, Südostasiaten, Chinesen, Japaner und Zentralamerikaner, Leipzig 1906 (*Ginzcl, Handb. d. Chron. I (1906)*).

### III. Spezialwerke.

Unter den Spezialwerken, deren es für alle Länder, Völker und Zeiten gibt, heben wir heraus:

- R. Lepsius*, Chronologie der Ägypter 1, Berlin 1849.  
*E. Greswell*, Origines Calendariae Italicae, Oxford 1854.  
*L. M. Lewiso*hn, Geschichte und System des jüdischen Kalenderwesens, Leipzig 1856.  
*H. Brugsch*, Nouvelles recherches sur la division de l'année des anciens Égyptiens, Berlin 1856.  
*Th. Mommsen*, Römische Chronologie, Berlin 1859 (*Mommsen, Röm. Chronol. (1859)*).  
*H. Brugsch*, Matériaux pour servir à la reconstruction du calendrier des anciens Égyptiens, Berlin-Leipzig 1864 (*Brugsch, Matériaux (1864)*).  
*Ph. Huschke*, Das alte römische Jahr und seine Tage, Breslau 1869.  
*A. Schwarz*, Der jüdische Kalender historisch und astronomisch untersucht, Breslau 1872.  
*H. Brugsch*, Thesaurus Inscriptionum Aegyptiacarum, vol. 1 u. 2, Leipzig 1883 (*Brugsch, Thesaurus Inscr. Aegypt. (1883)*).  
*Aug. Mommsen*, Chronologie, Leipzig 1883 [betreffend die Griechen, besonders die Athener].  
*A. Schmidt*, Handbuch der griechischen Chronologie, Jena 1888.

Die Literatur über die Zeitrechnung der Römer, Griechen, Kleinasiaten, Araber, Perser, Ägypter ist ungemein reichhaltig und in philologischen und orientalistischen Fachzeitschriften zerstreut; dieselbe wird jetzt durchwegs in dem oben unter II zitierten Handbuch der math. u. techn. Chronolog. von *F. K. Ginzcl* (1906) berücksichtigt.

### IV. Tafeln.

- F. Wüstenfeld*, Vergleichungstabellen der muhammedanischen und christlichen Zeitrechnung, Leipzig 1854; fortgesetzt bis 1500 H. von *E. Mahler*.  
*Th. v. Oppolzer*, Canon der Finsternisse, Wien Denkschr. 52 (1887).  
*H. Grotefend*, siehe oben unter II.  
*H. Jacobi*, „On the computation of Hindu-Dates in Inscriptions“, in dem Sammelwerk „Epigraphia Indica [Archaeological survey of India], edited by *J. Burgess*, Calcutta 1892—94“, vol. 1, p. 403 und vol. 2, p. 487.  
*F. K. Ginzcl*, Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Altertumswissenschaften, von 900 v. Chr. bis 600 n. Chr., Berlin 1899.  
*R. Schram*, Kalendariographische und chronologische Tafeln, Leipzig 1908.

**I. Einleitung.** Die Begründung der Chronologie als selbständiger Wissenschaft durch *Scaliger, Petavius, Calvisius*<sup>1)</sup>, *Dodwell* u. a. schließt etwa mit der Zeit *Idelers*<sup>2)</sup> ab. Bis dahin bilden hauptsächlich die Nachrichten der *klassischen Autoren* und einzelne den betreffenden Völkern angehörende Schriftsteller die Quelle, aus welcher man die Schlüsse über die Beschaffenheit der *technischen* Chronologie der Nationen zog. Der großartige Aufschwung, den bald nach Beginn des 19. Jahrhunderts die *Ausgrabungen* im Orient und die vielfältigen *archäologischen Funde* auf klassischem Boden in der Epigraphik und überhaupt in der Altertumsforschung bewirkten, hat die Basis der Chronologie ganz umgestaltet. Jetzt sind die uns erhalten gebliebenen Dokumente, Münzen, Inschriften, Stein- und Kupferplatten, Denkmäler, Papyrus usw. das Hauptmaterial, auf Grund dessen man die Chronologie der Völker festzustellen sucht, und die klassischen Autoren kommen erst in zweiter Linie in Betracht. Daneben ist das Studium der *Festkalender* einzelner Nationen und der mit diesen in Verbindung stehenden *Mythologie* zur unabweisbaren Notwendigkeit für die Befestigung der Chronologie geworden, nicht minder die Berücksichtigung der Resultate der Sprachforschung. Allein immer noch, trotz großer Fortschritte in diesen Zweigen, greifen gegenwärtig die wissenschaftlichen Bedingungen in der technischen Chronologie noch nicht so vollkommen ineinander ein, wie zu wünschen wäre, und eben das tiefere Eindringen mittels der modernen Hilfsmittel hat die Klärstellung mancher chronologischer Kapitel, deren Lösung zu *Idelers* Zeit schon nahegerückt schien, auf die Zukunft gestellt.

In der *mathematischen* Chronologie sind seit den Versuchen von *Gauß, Delambre, Cicolini, Tittel, Matzka*<sup>3)</sup>, die Arithmetik resp. Zahlentheorie zur Lösung der praktisch vorkommenden Aufgaben zu verwenden, keine besonderen Fortschritte gemacht worden. Dagegen haben gegenwärtig die mathematischen und astronomischen Hilfsmittel der Chronologie, die *Tafeln*<sup>4)</sup> zur Verwandlung gegebener Daten einer Zeitrechnung in die einer anderen, zur Bestimmung des Datums der Feste, ferner der Finsternisse, heliakischer Sternaufgänge<sup>5) 22)</sup> usw. einen sehr befriedigenden Stand der Vollkommenheit erreicht.

1) Vgl. das Literaturverzeichnis unter I.

2) *Ideler*, Hdb. (1825).

3) *Matzka*, Chr. (1844).

4) Siehe Abschnitt IV des Literaturverzeichnisses.

5) *W. F. Wislicenus*, Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- und Untergänge der Gestirne, Astr. Ges. Publ. 20 (1892).

**2. Tagesbeginn und Tageseinteilung.** Die Ägypter der älteren Zeit begannen den Tag mit Eintritt der Nacht (nach Sonnenuntergang), nach den Inschriften etwa mit der 10. Nachtstunde<sup>6</sup>), die Babylonier haben, wie es scheint, differierende Taganfänge gehabt, bei ihren Astronomen bilden Mitternacht oder Sonnenuntergang den Tagesanfang, die bürgerliche Rechnung war wahrscheinlich nach letzterer Art<sup>7</sup>), die meisten nach dem Mondjahre rechnenden Völker beginnen den Tag mit Sonnenuntergang, die alten Griechen mit der Morgendämmerung, die späteren Römer mit Mitternacht, die Etrusker um Mittag.

*Rohe Tageseinteilungen*, mit liturgischen Gebräuchen in den ältesten Zeiten entstanden und zum Teil sich bis in spätere Zeit erhaltend, sind: „nach Gebeten“ (Juden, Mohammedaner) nach Vigilien, „Horen“ (Römer, Mittelalter), Nachtwachen (Chinesen, Juden) u. dgl. Die älteste *genauere Teilung* der Tag- und der Nachthälfte ist die in 12 Stunden, wahrscheinlich von den Babyloniern oder Ägyptern begründet. Auf alten ägyptischen Denkmälern erscheinen schon die 12 Sonnenscheiben, symbolisch die Tagesphase ausdrückend. In den astronomischen Tafeln der Babylonier ist überall Sexagesimalteilung des Tages angewendet, bei den Griechen, Römern Zwölftteilung. Zu unterscheiden sind die *ῥαῖ καίριαι* (horae temporales) der Alten von den *ῥαῖ ἰσημεριναί* (horae aequinoctiales); die ersteren bezeichnen die *natürlichen Tagesstunden*, d. h. die Zwölftel des Tagbogens der Sonne je nach dessen Länge, sind also nach der Jahreszeit länger und kürzer; sie waren allgemein in Gebrauch; die anderen, *gleichteiligen Stunden*, kommen fast nur bei Astronomen vor (*Ptolemäus*). Die späteren Juden teilen so: 1 Stunde = 1080 chelakim, 1 chelak = 76 regaim (sexagesimale, von den Babyloniern übernommene Teilung). Bei den Indern treten mehrere Systeme auf, zum Teil auf Sexagesimalteilung beruhend; der Tag = 60 ghati, 1 ghati = 60 vinadi, 1 vinadi = 60 prana, mit diversen Varianten und weiteren Unterabteilungen, die in arithmetische Spielerei ausarten.

**3. Wochen.** Die siebentägige Woche ist sicher vorderasiatischen Ursprungs<sup>8</sup>); sie ist durch die Juden zu den Arabern verbreitet

6) *Brugsch*, Thesaurus Inscr. Aegypt. (1883), vol. I, p. 185; *Brugsch*, Matériaux (1864), p. 103.

7) *F. X. Kugler*, Babylonische Mondrechnung, Freiburg i. Br. 1900, p. 114, 192, 201.

8) *Eb. Schrader*, Keilschriften und altes Testament, 1883, p. 19—21; *E. Schürer*, Die siebentägige Woche im Gebrauch der christlichen Kirche, Zeitschrift für die neutestamentlichen Wissenschaften und Kunde des Urchristentums, Bd. 6 (1905), p. 1.

worden, die Griechen und Inder erhielten sie vielleicht direkt von den Babyloniern. Die Namen der Tage entsprechen den sieben altbabylonischen Gottheiten von Sonne (Samas), Mond (Sin), Merkur (Nebo), Venus (Istar), Saturn (Adar), Jupiter (Merodach), Mars (Nergal). Die 28tägige Woche der Chinesen deutet auf Zerlegung des Mondmonats (resp. der 28 Mondhäuser) in vier Gruppen. Bei den Ägyptern finden wir, da für diese das Sonnenjahr bestimmend war, eine andere, zehntägige Woche, entsprechend den 36, schon in sehr alten Inschriften auftretenden Dekanen (Schutzgottheiten der Abgestorbenen), welche in den Sternbildern des Zodiakus (unter Dreiteilung der zwölf Zeichen) symbolisiert werden<sup>9)</sup>; bei den Römern der alten Zeit weist der Gebrauch achttägiger Wochenabschnitte (Nundinen) auf das Mondjahr<sup>10)</sup>. Weniger deutlich und nur durch gewisse mythologische Kongruenzen nachweisbar erscheinen Teilungen nach Wochen, z. B. bei den alten Persern.

4. Jahreszeiten. Ursprünglich unterschieden die meisten Völker einzelne Jahreszeiten nur nach Maßgabe der klimatischen Beschaffenheit ihres Landes, z. B. hatte das nordische und frühmittelalterliche Jahr nur zwei Hälften, die alten Ägypter unterschieden Sommer, Winter und Überschwemmungszeit; an den Ursitzen der Indogermanen (am Indus) hatte man ursprünglich nur hima = Winter und samâ = Sommer; nachdem sich die Einwanderung über den Punjab ausgedehnt hatte, zählte man drei Jahreszeiten, und als die indischen Arier sich über ganz Indien verbreitet hatten, waren, den sehr verschieden gestalteten Verhältnissen des ausgedehnten Landes entsprechend, im Sprachgebrauch sechs Jahreszeiten eingebürgert. Es ist bei einzelnen Nationen deutlich an Festen u. dgl. bemerkbar, daß die ursprünglich den Jahreszeiten gegebenen Namen mit der Zeit wegen der Verschiebung des Wandeljahres (von 365 Tagen) gegen das feste (von  $365\frac{1}{4}$  Tagen) ihre Bedeutung geändert haben, z. B. bei den Ägyptern und Persern. Von der Erkenntnis der vier astronomischen Jahrpunkte (*astronomische Jahreszeiten*) und von der unter sich verschiedenen Länge der Jahreszeiten konnte erst bei ziemlich vorgeschrittener Kenntnis der Astronomie die Rede sein. Die Babylonier kannten im dritten Jahrh. v. Chr. die Längen der astronomischen Jahreszeiten bereits sehr genau<sup>11)</sup>; sie setzen die Jahrpunkte auf den achten Grad der Zodiakalzeichen (statt auf den dritten); die-

9) Brugsch, Thesaurus Inscr. Aegypt. (1883), vol. 1, p. 131.

10) Mommsen, Röm. Chronol. (1859), p. 228 ff.

11) Kugler<sup>7)</sup>, p. 104.

selbe Einrichtung findet sich bei den Römern (*Columella*) und, mit teilweisen Widersprüchen, bei den Griechen (*Meton*); es ist kaum noch zweifelhaft, daß die Annahmen der Römer und Griechen auf babylonischer Überlieferung beruhen. Im Mittelalter finden sich noch weitere Abirrungen im Anfange der Jahreszeiten von den römischen. Die Ägypter der Ptolemäer- und Römerzeit unterscheiden vier Jahreszeiten und symbolisieren dieselben durch die Sonne (das Utsaauge) als Kind (Winter, am Sokarfest Geburt der Sonne), als Jüngling (Frühjahr), als Mann (Sommer, erwachsene Sonne), und als Greis (Herbst).

**5. Jahr, Urform desselben.** Die ursprüngliche Form des Jahres bei den einzelnen Völkern hängt innig mit dem jeweiligen Kultus zusammen, war aber jedenfalls in Asien vorwiegend das *Mondjahr*. Für das einstige Vorhandensein eines theoretischen Jahres von nur 360 Tagen finden sich gewisse Spuren [babylonische und ägyptische Tempelrechnungen; die besondere, bei den meisten vorderasiatischen Völkern wiederkehrende konstante Trennung der fünf Anhängetage (*Epagomenen*) von den 360 Tagen des 365tägigen Jahres u. a.], welche zu der Annahme berechtigen, daß man zwar nach einem solchen Jahre in der Praxis nicht rechnete, aber vielleicht bei den Schaltungsversuchen davon ausging. Daß es bis zur Formulierung des 365tägigen Wandeljahres einer erheblichen Zeit bedurfte, beweist die Existenz des altindischen 360tägigen *Savanajahrs* und anderer Formen, welche in den vedischen Schriften auftreten<sup>12</sup>). Bei den Babyloniern, Arabern, Juden usw. saß das Mondjahr schon in sehr alter Zeit fest (Mondkultus in Südbabylon, Arabien, Spuren bei den Juden), während es betreffs der Ägypter derzeit noch Streitfrage ist, ob diese nach der Übergangsperiode eines Naturjahres nicht sofort zum Sonnenjahr von 365 Tagen gelangt sind, ohne das Mondjahr rechnungsmäßig (außer zu sakralen Zwecken) zu gebrauchen. In Roms und Griechenlands ältester Zeit bildete das Mondjahr den Ausgangspunkt, von welchem man durch mancherlei Reformen zum Sonnenjahre gelangte.

**6. Mond- und Sonnenjahr. Einschaltung, Ausgleichung.** Die Lichtphasen des Mondes wickeln sich innerhalb des **synodischen Monats** =  $29^d 12^h 44^m 2^s,98 = 29^d,53059$  ab. Da die bürgerliche Rechnung nur nach ganzen Tagen zählen kann, muß der Überschuß von  $0^d,53059$  von Zeit zu Zeit entsprechend eingeschaltet werden, was

12) *G. Thibaut*, Artikel: „Astronomie, Astrologie und Mathematik“, im Grundriß der indo-arischen Philologie und Altertums-Kunde, hrsg. von *G. Bühler* und *F. Kielhorn*, 3. Band, 9. Heft, Straßburg 1899.

durch den Gebrauch hohler und voller Monate (zu 29 und 30 Tagen) bewirkt werden kann<sup>13)</sup>. Das *freie Mondjahr* (ohne Rücksicht auf den Sonnenlauf) besteht aus Gemeinjahren zu 354 und aus Schaltjahren zu 355 Tagen, die in zwölf Mondmonaten untergebracht werden. Das *tropische Sonnenjahr*, d. h. die Zeit, welche die Sonne bedarf, um zum Frühlingspunkt (s. S. 19) zurückzukehren, beträgt für das Jahr 1800 (nach Hansen<sup>14)</sup>)  $365^d 5^h 48^m 46^s,43$ . Wird es nur zu  $365^d$  angenommen, so entsteht das *Wandeljahr*, das sich durch Vernachlässigung des Überschusses von  $5^h 48^m 46^s,43$  alsbald gegen die Jahreszeiten verschiebt. Die Berücksichtigung des Überschusses geschah anfänglich durch die Annahme  $365\frac{1}{4}^d$  (*festes Jahr, julianisches Jahr*), späterhin (1582, vgl. Nr. 8) durch ein 365tägiges Jahr mit entsprechender Einschaltung (*Gregorianisches Jahr*<sup>15)</sup>). Das *gebundene Mondjahr* entsteht, wenn das Mondjahr mittels Schaltungen in eine bleibende Übereinstimmung mit dem Sonnenjahre gebracht werden soll<sup>16)</sup>.

13) Die Dauer des synodischen Monats ist

$$29 \frac{45\,842\,976}{86\,400\,000} = \left( 30 - \frac{405,57024}{864} \right) \text{ Tage.}$$

Verwandelt man den in der Klammer stehenden Bruch in einen Kettenbruch und ermittelt die Werte der einzelnen Näherungsbrüche, so erhält man der Reihe nach  $\frac{1}{2}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17}, \frac{23}{49}, \frac{422}{899}$ . Der erste Näherungsbruch läßt schon erkennen, daß man etwa jeden zweiten Monat hohl anzuwenden haben wird. Eine viel befriedigendere Schaltung erreicht man mit den Näherungen  $\frac{7}{15}$  und  $\frac{8}{17}$ , nämlich, wenn man unter fünfzehn Monaten sieben hohl sein läßt resp. unter siebzehn Monaten acht. Der vierte Näherungswert  $\frac{23}{49}$  gibt bereits den bürgerlichen Mondmonat nur noch um  $2^s$  zu groß.

14) P. A. Hansen et C. F. R. Olufsen, Tables du Soleil, Copenhague 1853, p. 1.

15) Die möglichen Schaltungen gehen aus den Näherungsbrüchen hervor, die man aus der Kettenbruchentwicklung des Überschusses bestimmen kann.

Es ist  $365^d 5^h 48^m 46^s,43 = 365 \frac{2092683}{8640000}$ . Der letztere Bruch ergibt die Nähe-

rungen  $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}$ ; der erste Näherungsbruch gibt die Regel an, nach je

vier Jahren einzuschalten. Die Näherung  $\frac{8}{33}$ , nämlich daß man innerhalb von 33 Jahren siebenmal nach vier Jahren, einmal nach fünf Jahren einschalten kann, ist schon ziemlich richtig; der dritte Bruch  $\frac{31}{128}$ , in 128 Jahren viermal nach fünf, 27mal nach vier Jahren einzuschalten, gibt die Länge des tropischen Jahres bereits sehr genau.

16) Die entsprechenden Näherungsbrüche gehen hervor aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\text{trop. Jahr}}{\text{synod. Monat}} &= 365 \frac{209,26426}{864} : 29 \frac{458,42976}{864} \\ &= \frac{31556926,426}{2551442,976} = 12 \frac{939610714}{2551442976} \end{aligned}$$



*kallippische* Reihen zu einer Periode von  $4 \cdot 76 = 304$  Jahren kombinierte, und zwar sei dieselbe um einen Tag zu verkleinern, demnach<sup>21)</sup> kam hierdurch der synodische Monat auf  $29^d 12^h 44^m 2^s,55$ , das tropische Jahr auf  $365^d 5^h 55^m 15^s,47$ , wodurch die beste Übereinstimmung des Mondjahrs mit der Sonne erreicht war. — Die Römer bedienten sich seit des 3. Jahrh. v. Chr. eines 24jährigen Schaltzyklus, welcher aber im Lauf der Zeit mißverstanden und zu willkürlichen Schaltungen benutzt wurde; die hieraus entstandene Kalenderverwirrung beseitigte *Julius Caesar* durch Einführung des festen Sonnenjahres. Das freie Mondjahr hat sich bei den Mohammedanern erhalten.

#### 7. Besondere Jahrformen und Zyklen.

a) *Sothisperiode*. Der Sirius (Isis-Sothis der Ägypter) ging im Altertum für die mittlere Breite Ägyptens am 1. Thoth (20. Juli) heliakisch<sup>22)</sup> auf; da um dieselbe Zeit der Beginn der Nilschwelle fiel, wurde dieses Datum für die Ägypter bestimmend, ihr Wandeljahr um diese Zeit anzufangen. Die Periode faßt 1460 julianische Jahre, das Wandeljahr kehrt, da es alle vier Jahre um einen Tag zu kurz ist, nach Ablauf der Sothisperiode wieder zum selben Datum zurück. Wenn die Angabe *Censorinus*, daß am 20. Juli 139 n. Chr. ein heliakischer Aufgang des Sirius stattfand, richtig ist, müßten 1322 v. Chr. und 2782 v. Chr. ebensolche Aufgänge stattgefunden haben; *Oppolzer* hat aber die Verkürzung der Sothisperiode nachgewiesen<sup>23)</sup>. Die Existenz der Sothisperiode als Rechnungszyklus läßt sich bisher aus den ägyptischen Inschriften nicht erhärten, dagegen sind etwa vier Daten inschriftlich bekannt, welche zu heliakischen Siriusaufgängen das gleichzeitige Datum des Wandeljahrs angeben.

b) *Setperiode* (von 30 Jahren), eine in ägyptischen Inschriften öfters nachweisbare Periode, *Apis-Zyklus* (25 Jahre), *Phönix-Periode* (nach *Herodot*<sup>24)</sup> 500 Jahre), alle drei ohne chronologische Verwertung.

c) *Saren* und *Sossen* der Babylonier, früher einseitig als Multipla von 60 Jahren (600 resp. 3600 Jahre) verstanden, nach den neueren Forschungen aber überhaupt als terminologische Ausdrücke gewisser Stufen in sexagesimalen Systemen zu betrachten. — Der 60jährige Jahreszyklus der *Chinesen* (auch zur Zählung der Tage und Monate gebraucht) ist der Rest einer solchen Sexagesimalteilung. Jedes Jahr

21)  $4 \cdot 940 \text{ Monate} = 3760 \text{ Monate} = 4 \cdot 27759^d - 1^d = 111035^d$ .

22) Der *heliakische Aufgang* (*jährliche Aufgang*) eines Gestirns ist derjenige Tag im Jahre, an dem das Gestirn erstmalig in der Morgendämmerung dem bloßen Auge erkennbar wird. Vgl. *Ginzel*, Handb. d. Chron. I (1906), p. 186.

23) *Th. v. Oppolzer*, Wien Ber. 90 1884<sup>2</sup>.

24) *Herodot*, II 73.

dieses Zyklus, welcher gewissermaßen die Epoche der Zählung vertritt, hat einen besonderen Namen. Der Ursprung des 12-teiligen Tierzyklus der Ostasiaten ist noch nicht befriedigend aufgeklärt.

d) *Große Jahre*. Bei den klassischen Schriftstellern (*Diodor*, *Plutarch*, *Solinus* und vielen anderen) und inschriftlich (bei den Ägyptern als *heh-* und *hunti-*Perioden) auftretende Zyklen von 216, 12954, 36000 und anderen Jahren, die in ihrer Entstehung größtenteils auf Kombinationen von sexagesimalem Aufbau und Schaltungen, und auf Mond- und Sonnenjahren (in manchen Fällen auch auf Planetenjahren, d. h. Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne) beruhen (*Platonische Jahre*).

e) *Jupiterjahre*. Speziell auf Indien beschränkt, aber wahrscheinlich von babylonischer Herkunft<sup>25</sup>). Fünf Jupiterumläufe machen ungefähr einen 60jährigen Zyklus ( $59\frac{1}{3}$  Jahre). Der Gebrauch dieses 60jährigen Zyklus beschränkt sich auf Nordindien; die einzelnen Jahre desselben haben (wie der 60jährige Zyklus der Chinesen) besondere Namen. Noch älter in Indien scheint ein 12jähriges Jupiterjahr zu sein (Jupiter nimmt etwa alle 12 Jahre dieselben Stellungen am Sternhimmel ein), welches sich vorzugsweise nach den heliakischen<sup>22</sup>) Aufgängen des Jupiter richtet.

f) Sonst vorkommende Jahrzyklen: *Lustrum* (ursprünglich 4-, dann 5jährig), *Yuga* (5jährig), *Sabbathjahr* (alle 7 Jahre), *Jubeljahre*, *goldene Jahre* (bei den Christen und Juden) und andere.

g) *Indiktionen*, *Sonnen-* und *Mondzirkel*. Der erstere Zyklus ist eine künstlich (aus Schatzungs- oder Steuerperioden?) gebildete Reihe von 15 Jahren, die gegen Ende des 3. Jahrh. n. Chr. in chronologischen Gebrauch gekommen ist. Es gibt dreierlei Arten der Indiktionen (*Römerzinszahl*, *kaiserliche Zahl*, a. Zeichen): Die griechische (*byzantinische*) [mit 1. September anfangend], die *konstantinische* (*kaiserliche*) [beginnend mit 24. September] und die *römische* (*päpstliche*) *Indiktion* [mit 1. Januar beginnend]. — *Sonnenzirkel* heißt im julianischen Kalender die Periode von 28 Jahren (7 vierjährigen Schaltkreisen), nach deren Ablauf die Wochentage wieder auf denselben Monatstag zurückkommen. — Da 19 tropische Sonnenjahre nahe gleich 235 synodischen Mondmonaten sind<sup>16</sup>), so gehen die Mondphasen nach 19 Sonnenjahren ungefähr auf dieselben Jahrestage zurück; dies ist der *Mondzirkel*, die Stellung eines Jahres in demselben wird durch die *guldene Zahl*

25) Den Babyloniern waren, wie aus aufgefundenen astronomischen Tafeln derselben hervorgeht, die Perioden der Rückkehr der Planeten in dieselben Himmelsstellungen gut bekannt.

(*numerus aureus*) bezeichnet (im gregorianischen Kalender wird die goldene Zahl durch die *Epakte* ersetzt).

h) *Osterzyklen*. Nach 28 Mondzirkeln (zu 19 Jahren), also nach 532 Jahren, fallen im julianischen Kalender die Mondphasen wieder auf dieselben Wochentage, diese Periode (*Osterperiode, cyclus paschalis*) eignet sich daher zur Bestimmung des christlichen Osterfestes, welches am ersten Sonntage nach dem ersten Frühjahrsvollmonde zu feiern ist<sup>26)</sup>. Es gibt mehrere Osterzyklen, die sich durch den Anfang der Periode voneinander unterscheiden (*Anianus, Victorius, Dionysius, Exiguus*).

8. *Epochen (Aeren)*. Die Anfangspunkte, von denen die Jahre gezählt werden, sind überaus verschieden und zahlreich; wir können hier nur einige Andeutungen geben. — *Olympiaden* (4jährig, Epoche Sommer 776 v. Chr.), mit Varianten. — *Jahre der Stadt* (Rom), u. c. (*urbis conditae*) [*varronisch* gerechnet vom 1. Januar 753 v. Chr., *capitolinisch* ein Jahr später]. — *Weltaeren* (des Panodors, die Alexandria und Byzantina), die *konstantinopolitanische* [Epoche 1. September 5509 v. Chr.], die *jüdische Weltaera* [3761 v. Chr.], *Aera Nabonassars* [747 v. Chr.]. — Die altpersische *Aera Jezdegird* und die neuere *Dschelaleddins*. Die *Hedschra* [Epoche 16. Juli 622 n. Chr. (Volkskalender)] — *Julianische Periode* [Epoche 1. Januar 4713 v. Chr.]. — Die *christliche* (nach Jahren von der Geburt Christi ab zählende) Zeitrechnung kam durch die Ostertafel des Dionysius im 6. Jahrh. in Gebrauch. Bis 1582 n. Chr. wurde die julianische Schaltung gebraucht, und da um diese Zeit das julianische Datum schon um 10 Tage gegen das wahre zurückgeblieben war, durch Gregor XIII. eine Schaltungsreform eingeführt (alter oder griechischer, *julianischer Stil*, neuer oder *gregorianischer Stil*).

26) Eine Regel zur Berechnung des gregorianischen Osterfestes gab C. F. Gauß, *Monatl. Corr.* 2 (1800), p. 121 = *Werke* 6 (1874), p. 73, dazu Nachtrag in *Tübinger Z. für Astr.* 1 (1816), p. 158. Vgl. *Wolf*, *Handb.* 1, p. 622.

(Abgeschlossen im Juli 1910.)

# VI. 2. BAHNBESTIMMUNG DER PLANETEN UND KOMETEN.

## 3. KINEMATIK

### 1. Kinematik

#### 1. Kinematik

## B. MECHANIK DES HIMMELS.

### A. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 1. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 2. Bahnbewegungen der Himmelskörper

### B. Vollständige Bahnbewegungen

#### 1. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 2. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 3. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 4. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 5. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 6. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 7. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 8. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 9. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 10. Bahnbewegungen der Himmelskörper

### C. Kosmodynamik

#### 11. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 12. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 13. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 14. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 15. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 16. Bahnbewegungen der Himmelskörper

#### 17. Bahnbewegungen der Himmelskörper



## VI 2, 9. BAHNBESTIMMUNG DER PLANETEN UND KOMETEN.

VON

**G. HERGLOTZ**

IN LEIPZIG.

---

### Inhaltsübersicht.

#### I. Keplersche Bewegung.

1. Keplersche Gesetze.
2. Elemente der Bahn.
3. Koordinaten eines Ortes.
4. Bestimmung der wahren Anomalie.
5. Lambertsches Theorem.
6. Verhalten der Koordinaten im komplexen Gebiet.

#### II. Vorläufige Bahnbestimmung.

##### a) Planetenbahnen.

7. Formulierung der Aufgabe.
8. Grundgleichungen.
9. Herstellung der Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse. Erforderliche Genauigkeit.
10. Näherungsausdrücke der Dreiecksverhältnisse.
11. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen.
12. Methode von Laplace. Satz von Lambert.
13. Bestimmung der Elemente aus zwei vollständigen Orten.
14. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen.
15. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.
16. Bestimmung einer Kreisbahn.

##### b) Kometenbahnen.

17. Formulierung der Aufgabe. Grundgleichungen.
  18. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen nach der Methode von W. Olbers.
  19. Bestimmung der Elemente aus den Distanzen.
  20. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen.
  21. Ausnahmefälle. Methode von Gauß.
- 
22. Korrekturen wegen Parallaxe und Aberration.

### III. Definitive Bahnbestimmung.

23. Allgemeine Formulierung der Aufgabe.
24. Methoden mit gleichmäßiger Berücksichtigung aller Orte.
25. Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen.
26. Methoden mit Bevorzugung zweier Orte.

## Literatur.

### Lehrbücher und Monographien.

- C. F. Gauß*, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamburgi 1809 = *C. F. Gauß*, Werke 7. Deutsch von *C. Haase*, Gotha 1877 (*Gauß*, Theoria motus).
- J. Frischauf*, Theorie der Bewegung der Himmelskörper, Graz 1868. 2. Aufl. unter dem Titel: Grundriß der theoretischen Astronomie, Graz 1871.
- J. Frischauf*, Die Gauß-Gibbssche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen; mit einem Anhang zum „Grundriß der theoretischen Astronomie“, Leipzig 1905.
- J. C. Watson*, Theoretical astronomy, Philadelphia 1868. 2. ed. 1877. 3. ed. 1881 (*Watson*, Theor. astr.).
- W. Klinkerfues*, Theoretische Astronomie, Braunschweig 1871. 2. Aufl. bearb. von *H. Buchholz*, 1899. (*Klinkerfues-Buchholz*, Theor. Astr.).
- Th. von Oppolzer*, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Band 1, Leipzig 1870. 2. Aufl. Leipzig 1882 (2. Aufl. *Oppolzer*, Bahnb. 1). Französisch von *E. Pasquier*, Paris 1886. Band 2, Leipzig 1880 (*Oppolzer*, Bahnb. 2).
- F. Tisserand*, Leçons sur la détermination des orbites, red. par *J. Perchot*, avec une préface de *H. Poincaré*, Paris 1899.
- J. Bauschinger*, Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig 1901 (*Bauschinger*, Tafeln).
- J. Bauschinger*, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906.

### Journal-Literatur und anderes.

- J. H. Lambert*, Insigniores orbitae cometarum proprietates, Aug. Vindel. 1761. Deutsch hrsg. v. *J. Bauschinger* in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 133, Leipzig 1902 (*Lambert*, Insign. propr. 1761).
- J. L. Lagrange*, Sur la détermination des orbites des comètes d'après trois observations, Drei Abhandlungen in Berlin Mém. 1778, p. 111, 124; 1783, p. 296 = Oeuvres 4, p. 439, 451, 496.
- P. S. Laplace*, Mémoire sur la détermination des orbites des comètes, Paris Hist. (1780) Mém. p. 13 = Oeuvres 10, p. 93.
- W. Olbers*, Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen zu bestimmen, hrsg. v. *F. v. Zach*, Weimar 1797. 2. Aufl. v. *J. F. Encke*, Weimar 1847. 3. Aufl. v. *J. Galle*, Leipzig 1864 = *W. Olbers*, Werke 1, p. 3—56 (*Olbers*, Abh. über Kometenbahnen).
- J. F. Encke*, Bestimmung einer elliptischen Bahn, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1854. Hrsg. von *J. Bauschinger* in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 141, Leipzig 1903.

- P. A. Hansen*, Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers. Leipzig Berichte 1863, Bd. 15, p. 83. Hrsg. von *J. Bauschinger* in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 141, Leipzig 1903.
- E. Weiß*, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, Wien Denkschr., Band 60, Wien 1893, p. 345.
- K. Zelbr*, Artikel „Bahnbestimmung“ in *W. Valentiner*, Handwörterbuch der Astronomie (Enzyklopädie der Naturwissenschaften 3 (2)), Breslau 1897, p. 452.
- O. Callandreau*, Aperçus des méthodes pour la détermination des orbites, Paris Ann. de l'Obs., mém. 23, Paris 1902.
- P. Harzer*, Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern. Publicationen der Sternwarte zu Kiel, Nr. 11, Kiel 1901.
- Bibliographie* in *W. Valentiner*, Handwörterbuch der Astronomie, Artikel „Bahnbestimmung“ von *K. Zelbr*. Ferner bei *R. Radau*, Paris Bull. astr. 16 (1899), p. 432.

## I. Keplersche Bewegung.

1. **Keplersche Gesetze.** Werden durchgehend die Massen der Planeten und Kometen gegenüber derjenigen der Sonne als sehr klein vernachlässigt, so wird die dadurch idealisierte Bewegung eines solchen Himmelskörpers bezüglich eines zur Sonne festen Koordinatensystems, die Keplersche Bewegung, vollständig durch die folgenden drei „Keplerschen Gesetze“ beschrieben:

1. Die Bewegung erfolgt in einer durch die Sonne gelegten Ebene so, daß die vom Radiusvektor überstrichene Sektorfläche der Zeit proportional wächst.

2. Die Bahn ist ein Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkt sich die Sonne befindet (bei der Hyperbel in jenem, gegen welchen zu die Bahnkurve konkav ist).

3. Der Quotient der vom Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichenen Sektorfläche durch die Quadratwurzel aus der Länge des Parameters des Kegelschnittes hat für alle Himmelskörper denselben Wert.

Das Doppelte der durch das dritte Gesetz gegebenen, dem Sonnensystem eigentümlichen Zahl, die sogenannte Gaußsche Konstante  $k$ , hat in astronomischen Einheiten ausgedrückt den Wert  $k = 0,0172021$ . Vgl. den Artikel V 2 (*Zenneck*).

2. **Elemente der Bahn.** Um mit Hilfe dieser drei Gesetze den Ort des Planeten für eine beliebige Zeit zu bestimmen, ist die Kenntnis der Lage und Gestalt des Kegelschnittes sowie die Kenntnis des Ortes in der Bahn zu einer bestimmten Zeit (Epoche) erforderlich, also die Angabe von  $2 + 3 + 1 = 6$  Größen, den sechs Bahnelementen. Die Lage der Bahnebene wird bei der üblichen Wahl des ekliptikalischen

Koordinatensystems festgelegt durch ihre Neigung  $i$  gegen die Ekliptik und den Winkel  $\Omega$  ihrer Schnittgeraden mit der Ekliptik (Knotenlinie) gegen die Frühlingsnachtgleichenlinie, die Knotenlänge  $\Omega$ . Hierauf ist die Lage des Kegelschnittes in seiner Ebene gegeben durch den Winkel  $\pi$ , welchen der kürzeste Radiusvektor (Apsidenlinie) mit der Knotenlinie einschließt, statt dessen mitunter der gebrochene Winkel  $\bar{\omega} = \pi + \Omega$ , die Perihellänge, eingeführt wird. Die Gestalt des Kegelschnittes ist charakterisiert durch die Länge  $|a|$  der großen Halbachse, und die (numerische) Exzentrizität  $e$ , mit denen der Parameter  $p$  und der kürzeste Radiusvektor  $q$  (Periheldistanz) zusammenhängen durch:

$$(1) \quad p = a(1 - e^2), \quad q = a(1 - e).$$

Hiebei möge, um Ellipse und Hyperbel durch die gleichen Formeln zu beherrschen, für erstere  $a > 0$ , für letztere  $a < 0$  genommen werden. Die Angabe des Ortes zu einer bestimmten Zeit wird geleistet durch Angabe des Zeitpunktes  $t_0$ , zu welchem sich der Himmelskörper gerade im Perihel befindet, der Perihelzeit.

Aus den Koordinaten  $x, y, z$  und Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  zu irgend einem Zeitpunkt berechnen sich die Elemente sofort vermöge der Flächensätze und der Laplaceschen<sup>1)</sup> Integrale:

$$(2) \quad \begin{aligned} c_1 &= y\dot{z} - z\dot{y}, & f_1 &= x\dot{u} - u\dot{x}, \\ c_2 &= z\dot{x} - x\dot{z}, & f_2 &= y\dot{u} - u\dot{y}, \\ c_3 &= x\dot{y} - y\dot{x}, & f_3 &= z\dot{u} - u\dot{z}, \\ u &= r\dot{r}, & \dot{u} &= V^2 - \frac{k^2}{r}, \end{aligned}$$

in denen  $c_1, c_2, c_3$  die Komponenten eines zur Bahnebene normalen Vektors der Länge  $k\sqrt{p}$  sind,  $f_1, f_2, f_3$  aber diejenigen eines in der Apsidenlinie liegenden Vektors der Länge  $k^2e$ .

Den Charakter der Bahn gibt unmittelbar das Vorzeichen der aus der Energiegleichung

$$(3) \quad V^2 = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{a}$$

folgenden Größe  $a$ .

**3. Koordinaten eines Ortes.** Ein beliebiger Ort des Himmelskörpers ist nun fixiert durch den in Richtung der Bewegung gezählten Winkel des Radiusvektors gegen die Apsidenlinie, die wahre Anomalie  $v$ , aus welcher der Radius selbst folgt, durch:

$$(4) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

1) P. S. Laplace, Méc. céle. 1 (= Oeuvres 1), p. 181. Über die geometrische Bedeutung vgl. G. Darboux, Paris Bull. Astr. 5 (1888), p. 89.

Ihren Zusammenhang mit der Zeit gibt das erste und dritte Keplersche Gesetz, angewandt auf den Sektor zwischen dem Radiusvektor und der Apsidenlinie, wobei man aber den Sektor nicht direkt durch  $v$ , sondern einfacher mittels des vermöge:

$$(5) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v, \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{1+e \cos v}, \quad \cos E = \frac{e + \cos v}{1+e \cos v} \end{aligned}$$

mit  $v$  zusammenhängenden Hilfswinkels  $E$ , die exzentrische Anomalie ausdrückt, und hiedurch aus dem ersten und dritten Gesetz die Keplersche Gleichung erhält:

$$(6) \quad \frac{k(t-t_0)}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e \sin E,$$

nebst:

$$(7) \quad r = a(1 - e \cos E).$$

Man pflegt zu setzen:

$$(8) \quad \frac{k}{|a|^{\frac{3}{2}}} = n, \quad n(t-t_0) = M, \quad M + \bar{\omega} = l$$

und  $n$  als mittlere tägliche Bewegung,  $M$  als mittlere Anomalie,  $l$  als mittlere Länge zu bezeichnen. Bei Planetenbahnen wird ferner statt der Durchgangszeit durch das Perihel  $t_0$  die mittlere Länge zur Epoche ( $t = 0$ ) eingeführt:

$$(9) \quad \varepsilon = \bar{\omega} - nt_0.$$

Bei der Hyperbel ist, wofern in (5)  $\sqrt{1-e} = +i\sqrt{e-1}$  gewählt wird, in (6)  $\sqrt{a} = -i\sqrt{-a}$  zu setzen. Da in diesem Fall  $E$  rein imaginär wird, empfiehlt es sich einen reellen, durch:

$$(10) \quad \operatorname{tang} \frac{F}{2} = -i \operatorname{tang} \frac{E}{2}, \quad \sin F = -i \operatorname{tang} E, \quad \cos F = \frac{1}{\cos E}$$

bestimmten Hilfswinkel  $F$ , den sogenannten Lambertschen Winkel<sup>2)</sup> von  $\frac{E}{i}$  einzuführen, wonach (6) in:

$$(11) \quad n(t-t_0) = e \operatorname{tang} F - \log \operatorname{nat} \operatorname{tang} \left( \frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

übergeht.

Für die Parabel ist  $\frac{1}{a} = 0$ ,  $1 - e = 0$ , aber  $a(1 - e) = q$  zu setzen, so daß aus (6) folgt:

$$(12) \quad \frac{k(t-t_0)}{\sqrt{2q^{\frac{3}{2}}}} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v.$$

2) Vgl. VI 2, 3 (Wirtz) Seite 150, Fußnote 330.

E. Halley<sup>3)</sup> wählte  $\frac{1}{100}$  des rechtwinkligen Parabelsektors als Flächeneinheit und bezeichnete die in dieser Einheit gerechnete Sektorfläche:

$$(13) \quad M = \frac{75k}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} (t - t_0)$$

als „motus medius“ in der Parabel. Zugleich gab er als erster eine Tafel für  $v$  mit  $M$  als Argument. Diese Definition von  $M$  hat sich noch bei einigen späteren Autoren erhalten, während Th. v. Oppolzer und J. Bauschinger einfach

$$(14) \quad M = \frac{t - t_0}{q^{\frac{3}{2}}}$$

setzen, dessen Logarithmus bereits J. C. Burckhardt<sup>4)</sup> als Argument einer entsprechenden Tafel wählt. — Ist  $v$  und damit  $r$  für den gewünschten Zeitpunkt bestimmt, so sind damit auch die Koordinaten des Himmelkörpers gegeben. Die auf ein beliebiges heliozentrisches System bezogenen rechtwinkligen Koordinaten setzt C. F. Gauß<sup>5)</sup>, mit  $u = v + \pi = v + \bar{\omega} - \Omega$  das Argument der Breite bezeichnend, in die Form:

$$(15) \quad \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A + u) \\ y &= r \sin b \sin (B + u) \\ z &= r \sin c \sin (C + u), \end{aligned}$$

worin die Gaußschen Konstanten  $a, b, c$  und  $A, B, C$  sich bzw. mit den auf die Bahnebene und die Knotenlinie als Anfangsrichtung bezogenen Breiten und Längen der Koordinatenachsen zu  $90^\circ$  ergänzen.

**4. Bestimmung der wahren Anomalie.** a) *Numerische Näherungsmethoden.* Die numerische Auflösung der Gl. (6) geschieht bei Bahnen geringer Exzentrizität am raschesten durch sukzessive Approximation nach der Newtonschen Näherungsmethode. Als Ausgangsnäherung kann  $M$  oder der von J. F. Encke<sup>6)</sup> vorgeschlagene und von N. Herz<sup>7)</sup> verbesserte Wert dienen. Hilfstafeln geben insbesondere Th. v. Oppolzer<sup>8)</sup>, J. J. Åstrand<sup>9)</sup>, F. Tietjen<sup>10)</sup>.

3) E. Halley, A synopsis of the astronomy of comets, Lond. Phil. Trans. 1705.

4) J. C. Burckhardt, Conn. d. temps pour l'an 1818 (1815), p. 319.

5) C. F. Gauß, Monatl. Corr. 9 (1804), p. 385 = Werke 6, p. 94.

6) J. F. Encke, Astr. Nachr. 30 (1850), p. 277.

7) N. Herz, Astr. Nachr. 99 (1881), p. 31.

8) Th. v. Oppolzer, Wien Denkschr. d. k. Akad. 50 (1885), p. 185.

9) J. J. Åstrand, Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Keplerschen Problems, Leipzig 1890.

10) F. Tietjen, Berlin. Veröff. d. k. Recheninst. n° 1 (1892).

Die Auflösung der bei parabolischen Bahnen auftretenden Gleichung (12) kann direkt der sogen. Barkerschen Tafel<sup>11)</sup> entnommen werden, welche  $M$  mit dem Argumente  $v$  gibt. Liegt jedoch  $v$  nahe an  $180^\circ$ , so wird der großen Interpolationsdifferenzen halber ihr Gebrauch beschwerlich, und man hat sich dann des besonderen von *F. W. Bessel*<sup>12)</sup> und *B. Nicolai*<sup>13)</sup> ausgebildeten Verfahrens zu bedienen; sie ersetzen mit Rücksicht auf den dann sehr kleinen Wert von  $\text{ctg } \frac{v}{2}$  die Gl. (12) durch eine einfachere und tabulieren die Korrektion für den so bestimmten Näherungswert als Funktion desselben. Den umgekehrten Weg,  $v$  mit dem Argument  $M$  zu tabulieren, hat *J. C. Burckhardt*<sup>14)</sup> eingeschlagen, dann *U. J. Leverrier*<sup>15)</sup> und *C. F. Gauß*<sup>16)</sup>, der auch besondere Vorschriften<sup>17)</sup> für große  $v$  gibt. Eben solche Tafeln gibt *J. Bauschinger*<sup>18)</sup>. Die Verfahren, welche zur Bestimmung der wahren Anomalie für der Einheit benachbarte Exzentrizitäten dienen, sind gleicherweise gültig, mag  $e$  wenig kleiner oder größer als 1 sein, und umfassen daher auch die nahe parabolischen Hyperbelbahnen, welche die einzigen bei Kometen auftretenden Hyperbelbahnen sind. Das jenen Verfahren zugrunde liegende Prinzip ist, die mit einem passend gewählten Faktor versehene mittlere Anomalie als das  $M$  der Gleichung (12) zu nehmen, und dann die Korrektion, welche dem aus ihr folgenden Werte von  $v$  hinzuzufügen ist, nach Potenzen einer mit  $1 - e$  verschwindenden Größe zu entwickeln. Die Berechnung der Korrektion wird dann wieder durch Tafeln erleichtert. Das zuerst von *L. Euler*<sup>19)</sup> angegebene Verfahren wurde von *W. Bessel*<sup>20)</sup> weiter durchgeführt, eine von *Th.*

11) *Th. Barker*, Account of the discoveries concerning comets, London 1757. *R. Luther* hat das Intervall von  $5'$  auf  $100''$  reduziert, und die Tafel wurde der *F. Enckeschen* Ausgabe (Weimar 1847) von *Obers*, Abh. über Kometenbahnen angehängt. Auch in *Watson*, Theor. astr. (Intervall  $1'$ ) (Tafel 6) und von *J. Strobel* neu berechnet in *Oppolzer*, Bahn. 1 (1882) (Intervall  $10''$ ) (Tafel 4).

12) *F. W. Bessel*, Astr. Nachr. 22 (1845), p. 253 = Ges. Abh. 1, p. 12. Vgl. *Oppolzer*, Bahn. 1, wo von *A. Palisa* berechnete Tafeln (a. a. O. Tafel 5a und 5b) zu Bessels Methode abgedruckt sind. (Zuerst veröffentlicht Berlin Ber. 1880, p. 511.)

13) *B. Nicolai*, Astr. Nachr. 21 (1844), p. 77.

14) *P. S. Laplace*, Méc. céleste, trans. b. Bowditch, vol. 3.

15) *U. J. Leverrier*, Paris Ann. de l'obs. 1, (1885), p. 226, auch in *C. F. Gauß* Theoria motus, dtsh. v. Haase, p. 24.

16) *C. F. Gauß*, Werke 7, p. 351 (Nachlaß).

17) *C. F. Gauß*, Astr. Nachr. 20 (1843), p. 299 = Werke 6, p. 191.

18) *J. Bauschinger*, Tafeln, Nr. 15.

19) *L. Euler*, Misc. Berol. 7 (1743), p. 1 (Determin. orb. com. A. 1742 obs).

20) *W. Bessel*, Monatl. Corr. 12 (1805), p. 197 = Ges. Abh. 1, p. 9.

v. *Oppolzer*<sup>21)</sup> herrührende veränderte Form desselben von *R. Schramm* und *F. K. Ginzel*<sup>22)</sup> ausgearbeitet. Ein ähnliches Verfahren gibt *F. Brünnow*<sup>23)</sup>.

Das Gaußsche Verfahren<sup>24)</sup> bestimmt die Korrektur nicht durch Reihenentwicklung, sondern durch sukzessive Approximation, deren Konvergenz auf der Kleinheit von  $E$  beruht. Eine vergleichende Betrachtung verschiedener Verfahren gibt *R. Radau*<sup>25)</sup>.

Betreffs der numerischen Näherungsmethoden vergleiche man neben den Kompendien der Bahnbestimmung vor allem die „*Tafeln zur theoretischen Astronomie*“ von *J. Bauschinger*. Eine Bibliographie des Keplerschen Problems gibt *R. Radau*<sup>25 a)</sup>.

b) *Allgemeine Reihenentwicklungen.* *Lagrange*<sup>26)</sup> hat, die nach ihm benannte Reihe auf die Gleichung (6) anwendend, verschiedene Ausdrücke in der elliptischen Bewegung (z. B.  $E$ ,  $r$ ,  $r \cos v$ ,  $r \sin v$ ) nach Potenzen von  $e$  entwickelt, wobei die Koeffizienten endliche trigonometrische Reihen in  $M$  werden. Diese Potenzreihen konvergieren für alle reellen Werte von  $M$  nur, so lange  $e$  kleiner ist als der für reelles  $t - t_0$  genommene Minimalwert  $\varrho$  des aus Gl. (23) berechneten  $|e|$ . Für diesen folgt nun:

$$(16) \quad \frac{\varrho E \sqrt{1 + \varrho^2}}{1 + \sqrt{1 + \varrho^2}} = 1, \quad \varrho = 0,6627434^{27)}.$$

Diese Grenze wurde zuerst von *P. S. Laplace*<sup>28)</sup> aus den asymptotischen Werten der Koeffizienten hergeleitet. Von den Autoren, welche sie dann aus allgemeinen funktionentheoretischen Gesichtspunkten herleiteten, seien hier neben den in II B 1 Nr. 15 (*Osgood*) aufgeführten Arbeiten über die Lagrangesche Reihe noch *V. Puiseux*<sup>29)</sup> und

21) *Th. von Oppolzer*, Über die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen, München Abh. 13 (1878), p. 139.

22) *Th. v. Oppolzer*, Bahn. 1, p. 65.

23) *F. Brünnow*, Astr. Notices 1 (1861), p. 12, 177.

24) *Gauß*, Theoria motus, art. 37 ff. Weitere Hilfstafeln und Zusätze siehe *A. Marth*, Astr. Nachr. 43 (1856), p. 115 = *Gauß* Theoria motus, dtsh. v. Haase (Anhang), p. 28.

25) *R. Radau*, Paris Bull. astr. 2 (1885), p. 509.

25 a) *R. Radau*, Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 37.

26) *J. L. Lagrange*, Berlin Mem. 25 (1771) = Oeuvres 3, p. 113.

27) Bezüglich dieses Wertes vgl. Correspondance d'*Hermite* et de *Stieltjes* 1 (1905), p. 433. Mit  $E$  wird die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

28) *P. S. Laplace*, Paris Mém. de l'acad. 6 (1823), p. 61 = Oeuvres 12, p. 549.

29) *V. Puiseux*, Journal d. math. 14 (1849), p. 33 und Note 1 zu Lagranges Méc. analyt. 2 éd. 4 = Oeuvres 12, p. 341.

*J. A. Serret*<sup>30)</sup> genannt. Ist  $\varrho < e < 1$ , so konvergieren die Reihen bloß in gewissen Intervallen um  $M = 0$  und  $M = 180^\circ$ . Rascher konvergierende Umformungen dieser Reihen gibt *E. Weiß*<sup>31)</sup>, und *T. Levi-Civita*<sup>32)</sup> bemerkt, daß die Potenzentwicklungen nach  $\eta = \frac{e E \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}}$  für alle reellen  $M$  und  $|\eta| < 1$ , also insbesondere alle reellen  $e < 1$  konvergieren.

Ordnet man aber, was bereits Lagrange tat, jene Potenzentwicklungen nach den Cos und Sin der Vielfachen von  $M$ , so erhält man die für alle reellen  $M$  und  $e < 1$  konvergenten trigonometrischen Entwicklungen, mit denen sich zuerst insbesondere *W. Bessel*<sup>33)</sup> eingehend beschäftigte. Verschiedene dieser Reihen haben einfach Besselsche Funktionen von  $e$  zu Koeffizienten. In großer Allgemeinheit hat *P. A. Hansen*<sup>34)</sup> die Entwicklungen einer ganzen Reihe von Ausdrücken behandelt.

Explizite Angaben der Reihenentwicklungen verschiedener Größen findet man bei *U. J. Leverrier*<sup>35)</sup> und *A. Cayley*<sup>36)</sup>.

Betreffs der weiteren Literatur über beide Arten von Reihen und die asymptotischen Werte ihrer Koeffizienten vergleiche man das diesbezügliche Referat auf p. 93—122 von *H. Burckhardt*, „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen“ im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 10.

**5. Das Lambertsche Theorem** besagt, daß die zum Durchlaufen eines Bahnstückes  $MM'$  nötige Zeit  $T$  bloß von der Summe  $r + r'$  der äußeren Radienvektoren, der Sehne  $s$  und der großen Halbachse  $a$  der Bahn abhängt, woraus der fertige Ausdruck von  $T$  selbst durch Spezialisierung auf die geradlinige Bewegung, also unmittelbar aus den Formeln von Nr. 3 für  $e = 1$  folgt.

Es folgt im besondern für die *Ellipse* ( $a > 0$ ):

$$(17) \quad \frac{k}{a^{3/2}} T = (\varepsilon - \sin \varepsilon) - (\delta - \sin \delta),$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r + r' + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r + r' - s}{4a}}, \quad 0 < \delta < \varepsilon < \pi.$$

30) *J. A. Serret*, Paris. annal. de l'observ. 5 (1859), p. 337.

31) *E. Weiß*, Wien. Denkschr. d. k. Akad. 49 (1885), p. 133; Auszug Wien Berichte 90 (1884), p. 785.

32) *T. Levi-Civita*, Lincei Rend. d. R. Accad. 13 (1904), p. 260.

33) *W. Bessel*, Berl. Abh. 1816, p. 49 = Ges. Abh. 1, p. 17; Berl. Abh. 1824, p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 92.

34) *P. A. Hansen*, Leipzig Ber. 1853, p. 7.

35) *U. J. Leverrier*, Paris Ann. de l'observ. 1 (1855), p. 182.

36) *A. Cayley*, Lond. Ast. Soc. Mem. 28 (1860), p. 187; 29 (1861), p. 191 = Works 3, p. 319, 360.

Sind  $S, S'$  die beiden Brennpunkte, und zwar  $S$  jener, in welchem die Sonne sich befindet, so ist dieser Ausdruck zunächst gültig, wenn das von Bogen und Sehne begrenzte Segment weder  $S$  noch  $S'$  in seinem Innern enthält, während man nach *A. Cayley*<sup>37)</sup> in demselben  $\varepsilon$  und  $\delta$  zu ersetzen hat bzw. durch:  $2\pi - \varepsilon$  und  $-\delta$ ,  $\varepsilon$  und  $-\delta$ ,  $2\pi - \varepsilon$  und  $\delta$ , je nachdem das Segment  $S$  und  $S'$ , oder bloß  $S$  oder bloß  $S'$  in seinem Innern enthält.

Für die *Hyperbel* ( $a < 0$ ) ergibt sich

$$(18) \quad \frac{k}{(-a)^{3/2}} T = (\sinh \varepsilon - \varepsilon) \mp (\sinh \delta - \delta),$$

$$\sinh \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r+r'+s}{-4a}}, \quad \sinh \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r+r'-s}{-4a}}, \quad 0 < \delta < \varepsilon,$$

und für die *Parabel* ( $\frac{1}{a} = 0$ ):

$$(19) \quad 6kT = (r + r' + s)^{3/2} \mp (r + r' - s)^{3/2},$$

wo in beiden Fällen das untere oder obere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem das Segment  $S$  in seinem Innern enthält oder nicht. Das Theorem wurde zuerst von *L. Euler*<sup>38)</sup> für die Parabel bewiesen, dann von *J. Lambert*<sup>39)</sup> durch geometrische Betrachtung auf beliebige Kegelschnitte ausgedehnt, der analytische Beweis von *J. L. Lagrange*<sup>40)</sup> nachgetragen.

In enger Beziehung steht das Theorem zum Prinzip der kleinsten Wirkung, nach welchem das Bahnstück  $MM'$  Extremale des Integrales:

$$(20) \quad J = \int_M^{M'} V \sqrt{dx^2 + dy^2} = k \int_M^{M'} \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist, indem unter  $W(r, r', s, a)$  sein Extremalwert verstanden

$$(21) \quad k^2 T = 2a^2 \frac{\partial W}{\partial a}$$

wird. Es kommt das Theorem also darauf hinaus, daß  $W$   $r, r'$  nur in der Verbindung  $r + r'$  enthält, was *C. G. Jacobi*<sup>41)</sup> mit Hilfe der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, und in besonders einfacher Weise *N. Joukoffski*<sup>42)</sup> zeigt. Da weiter die den verschiedenen

37) *A. Cayley*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 29 (1869), p. 318 = Works 7, p. 387.

38) *L. Euler*, Misc. Berol. 7 (1743), p. 1.

39) *J. Lambert*, Insign prop. 1761 probl. 41.

40) *J. L. Lagrange*, Berl. Mém. 1778, p. 181 = Oeuvres 4, p. 559.

41) *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik (= Werke Supplbd.) 25. Vorl.

42) *N. Joukoffski*, Nouv. annal. d. math. (3) III (1884), p. 90.

Vorzeichen entsprechenden Werte von  $T$  stets gleichzeitig durch die verschiedenen zwischen  $MM'$  möglichen Bahnen realisiert werden, erhellt der Zusammenhang der Vorzeichenregeln mit der Lage der „konjugierten“ Punkte. Daß  $\frac{\sqrt{|1-e^2|}}{2n} W$  die vom Leitstrahl  $S'M$  überstrichene Fläche darstellt, bemerkt  $T^{43}$ .

Weitere Beweise des Theorems geben noch *J. J. Sylvester*<sup>44</sup>), *A. Cayley*<sup>45</sup>), *J. C. Adams*<sup>46</sup>), *E. Catalan*<sup>47</sup>).

**6. Das Verhalten der Koordinaten im komplexen Gebiete**, ist, im Falle der Ellipse und Hyperbel, weil dieselben da ganze lineare Funktionen von  $\sin E$  und  $\cos E$  sind, durch jenes von  $E$  bestimmt.  $E$  selbst aber ist nach (6) eine unendlich vieldeutige Funktion von den beiden Variablen  $t$  und  $e$ , die im Endlichen nur singular wird an den algebraischen durch

$$(22) \quad r = 0$$

ausgeschnittenen Verzweigungsstellen:

$$(23) \quad \frac{k(t-t_0)}{a^{3/2}} = i \lg \frac{eE\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}.$$

Daraus folgen sofort einerseits die Konvergenzverhältnisse der Potenzreihen nach  $e$  bei der Ellipse (Nr. 4), andererseits die Konvergenzradien für Potenzentwicklungen nach  $t-t_1$ , welche *F. R. Moulton*<sup>48</sup>) diskutiert. Die Beziehung (23) wird eingehender Weise geometrisch veranschaulicht von *C. V. Charlier*<sup>49</sup>) (Ellipse) und *H. G. Block*<sup>50</sup>) (Hyperbel). Die betreffenden Untersuchungen (auch in Nr. 4) sind im allgemeinen insofern unstreng, als sie von vornherein die singularen Stellen der inversen Funktion von  $f(x)$  durch die Nullstellen von  $f'(x)$  vollständig gegeben annehmen (wogegen man die Sätze von *A. Hurwitz*<sup>51</sup>) vergleiche), welche so entstehende Lücke sich indess an Hand der Differentialgleichungen der Bewegung ausfüllen läßt.

43) *T. Quarterly Journ. of math.* 7 (1866), p. 45.

44) *J. J. Sylvester*, *Phil. Mag.* 31 (1866), p. 52 = *Papers* 2, p. 519; *Lond. Astr. Soc. Monthly* 26 (1865), p. 27 = *Papers* 2, p. 496.

45) *A. Cayley*, *Lond. Astr. Soc. Monthly Not.* 22 (1862), p. 238 = *Works* 3, p. 562.

46) *J. C. Adams*, *Mess. of math.* 7 (1877), p. 97.

47) *E. Catalan*, *Nouv. annal. d. math.* (3) 3 (1884), p. 506.

48) *F. R. Moulton*, *Astron. Journ.* 23 (1903), p. 93.

49) *C. V. Charlier*, *Lunds Meddel.*, n° 22 (1904); ferner *Mechanik des Himmels* (Leipzig 1902—7) 2, p. 255.

50) *H. G. Block*, *Lunds Meddel.*, n° 23 (1904); *Arkiv of math. astr. ok fys.* 1 (1904), p. 467.

51) *A. Hurwitz*, *Paris C. R.* 143 (1906), p. 877; 144 (1907), p. 63.

Im Falle der Parabel<sup>52)</sup> sind die Koordinaten ganze quadratische Funktionen von  $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ , dieses aber ist nach (12) eine dreiwertige algebraische Funktion von  $t$ , welche im Endlichen nur singular wird an den beiden Verzweigungspunkten:

$$(24) \quad k(t - t_0) = \pm \frac{i}{3} p^{3/2}.$$

## II. Vorläufige Bahnbestimmung.

### a) Planetenbahnen.

**7. Formulierung der Aufgabe.** Das Auftauchen von Kometen und die Entdeckungen der kleinen Planeten erfordern nun aber auch die Lösung jener Aufgabe, welche die Umkehrung der bisher besprochenen bildet: die Bahnelemente eines Himmelskörpers aus gegebenen Beobachtungen zu bestimmen. Da die einzelne Beobachtung desselben bloß die Richtung erkennen läßt, in welcher dieser von der Erde aus gesehen wird, also zwei unabhängige Daten, etwa Rektaszension und Deklination, liefert, so reichen drei Beobachtungen mit Angabe der Beobachtungszeiten gerade hin, die sechs Bahnelemente zu bestimmen. Man kann auch sagen, die drei Beobachtungen liefern drei durch die drei Erdorte  $E, E', E''$  gehende Gerade, auf denen sich der Himmelskörper zu den Zeiten  $t, t', t''$  befindet, und demgemäß das Bahnbestimmungsproblem so aussprechen: Einen Kegelschnitt mit gegebenem Brennpunkte  $S$  (Sonne) zu finden, der drei gegebene Gerade in den ebenfalls noch zu findenden Punkten  $H, H', H''$  so schneidet, daß:

$$(25) \quad \begin{aligned} \text{Sector } (HSH) &= \frac{1}{2} \sqrt{p} k(t - t) = \frac{1}{2} \sqrt{p} \theta', \\ \text{Sector } (H'SH'') &= \frac{1}{2} \sqrt{p} k(t' - t') = \frac{1}{2} \sqrt{p} \theta, \\ \text{Sector } (HSH'') &= \frac{1}{2} \sqrt{p} k(t'' - t) = \frac{1}{2} \sqrt{p} \theta'. \end{aligned}$$

Diese fünf Bedingungen und die Kenntnis des einen Brennpunktes legen den Kegelschnitt völlig fest. — Die älteren Versuche zur Lösung des Problems ließen allmählich erkennen, daß sie am zweckmäßigsten in zwei Schritten erfolgt. Der erste besteht in der Bestimmung der geozentrischen Distanzen:

$$(26) \quad \varrho = EH, \quad \varrho' = E'H, \quad \varrho'' = E''H',$$

der zweite in der Ermittlung des Kegelschnittes aus den nunmehr bekannten drei vollständigen heliozentrischen Orten.

52) *W. A. Hamilton*, *Astron. Journ.* 23 (1903), p. 49.

Direkt an die obige Formulierung der Aufgabe knüpft *A. Cayley*<sup>53)</sup> seine geometrische Behandlung des Problems an.

**8. Grundgleichungen.** Die zur Bestimmung von  $\varrho, \varrho', \varrho''$  nötigen drei Gleichungen ergeben sich auf dem Wege über die Dreiecksverhältnisse

$$(27) \quad n = \frac{\text{Dreieck } (H' S H'')}{\text{Dreieck } (H S H'')}, \quad n'' = \frac{\text{Dreieck } (H S H')}{\text{Dreieck } (H S H'')}.$$

Legt man nämlich durch die Sonne eine beliebige Ebene und bezeichnet mit  $D, D', D''$  die Abstände der drei Orte  $H, H', H''$  von derselben, so muß, da diese mit der Sonne in einer Ebene liegen, sein:

$$(28) \quad D' = nD + n''D''.$$

Wird jetzt eine zur vorigen parallele Ebene durch die Erde gelegt, welche die scheinbare Himmelskugel in dem größten Kreise  $K$  schneiden möge, und nennt man die von der Erde aus gesehenen sphärischen Abstände der Sonne und des Himmelskörpers von diesem größten Kreise  $K$ , den Zeiten  $t, t', t''$  entsprechend, bzw.  $P, p, P', p', P'', p''$ , so kann statt (28) sofort geschrieben werden:

$$(29) \quad \varrho' \sin p' - R' \sin P' = n(\varrho \sin p - R \sin P) + n''(\varrho'' \sin p'' - R'' \sin P''),$$

unter  $R, R', R''$  die Entfernungen der Erde von der Sonne zu den Beobachtungszeiten verstanden. Es mag gleich hier bemerkt werden, daß eben diese Relation auch für die Erdbahn selbst, für die  $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$  ist, gelten muß, wofern nur statt  $n, n''$  die auf diese bezüglichen Dreiecksverhältnisse  $N, N''$  gesetzt werden:

$$(30) \quad R' \sin P' = NR \sin P + N''R'' \sin P''.$$

Es repräsentiert nun (29) bei Wahl von drei verschiedenen Bezugskreisen  $K: K_1, K_2, K_3$ , ein System von drei Gleichungen, welche, da  $R, P, p, \dots$  durch Sonnentafeln und Beobachtungen bekannte Größen sind, die geozentrischen Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$  linear mit den Dreiecksverhältnissen  $n, n''$  verknüpfen. Die einer beliebigen Wahl von  $K$  entsprechende Gleichung wird eine lineare Kombination der obigen drei, welchen Umstand man zur Elimination einer oder zweier geozentrischer Distanzen benutzen wird, wobei die hiezu nötige Lage von  $K$  sofort durch die Anschauung gegeben ist. Insbesondere erhält man so durch Wahl der drei Seiten des durch die drei scheinbaren, geozentrischen Orte des Himmelskörpers bestimmten sphärischen Dreieckes als Bezugskreise  $K_1, K_2, K_3$  das für Planetenbahnbestimmungen vorteilhafteste System, in welchem die geozentrischen Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$ ,

53) *A. Cayley*, Lond. Astr. Soc. Mem. 38 (1870), p. 17 = Papers 7, p. 400.

soweit sie explizite auftreten, getrennt sind:

$$(31) \quad \begin{aligned} n\varrho \sin p &= nR \sin P_1 + n''R'' \sin P_1'' - R' \sin P_1', \\ -\varrho' \sin p' &= nR \sin P_2 + n''R'' \sin P_2'' - R' \sin P_2', \\ n''\varrho'' \sin p'' &= nR \sin P_3 + n''R'' \sin P_3'' - R' \sin P_3', \end{aligned}$$

wobei aber nunmehr  $p, p', p''$  die drei Höhen jenes Dreieckes und  $P_i, P_i', P_i''$  die sphärischen Abstände der drei scheinbaren Sonnenorte von der  $i^{\text{ten}}$  Seite desselben bezeichnen.

Wäre man nun im Stande  $n, n''$  irgendwie durch die geozentrischen Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$  auszudrücken, so erhielte man durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (29) die gewünschten drei Gleichungen für  $\varrho, \varrho', \varrho''$ . Nun gelingt dies in der Tat, indem man auf die Kenntnis der bisher noch nicht benutzten Zwischenzeiten  $\theta, \theta', \theta''$  basiert. Wie nämlich aus einer Abzählung der Unbekannten folgt, ist der Kegelschnitt durch die drei heliozentrischen Distanzen und die entsprechenden Zwischenzeiten:

$$(32) \quad r = SH, \quad r' = SH', \quad r'' = SH'', \quad \theta = k(t'' - t), \quad \theta'' = k(t' - t)$$

festgelegt, so daß also auch die Dreiecksverhältnisse  $n, n''$  sich notwendig durch diese fünf Größen ausdrücken lassen müssen. Auf der anderen Seite läßt sich jede heliozentrische Distanz  $r$  aus der gleichzeitigen geozentrischen Distanz  $\varrho$  sofort berechnen, da im Dreieck  $HSE$ , die Seite  $SE = R$  der Erdephemeride, der Winkel bei  $E$  der Beobachtung entnommen werden kann. So kann man schließlich die Dreiecksverhältnisse  $n, n''$  selbst durch die  $\varrho, \varrho', \varrho'', \theta, \theta''$  ausdrücken, und erhält in (29) tatsächlich die drei zur Bestimmung der drei geozentrischen Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$  nötigen Gleichungen.

**9. Herstellung der Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse. Erforderliche Genauigkeit.** Da jedoch die Dreiecksverhältnisse in äußerst verwickelter Weise von  $r, r', r'', \theta, \theta''$  abhängen, so müssen diese Gleichungen erst dadurch traktabel gemacht werden, daß man die Funktionen  $n(r, r', r'', \theta, \theta'')$  und  $n''(r, r', r'', \theta, \theta'')$  durch einfach gebaute Näherungsausdrücke ersetzt. Als Grundlage der Näherung bietet sich sofort die Kleinheit der Zwischenzeiten dar, denn in praxi tritt dieses Problem der ersten Bahnbestimmung nur in den ersten Wochen nach Entdeckung eines neuen Himmelskörpers auf. Man wird daher  $n, n''$  zuerst nach Potenzen einer Größe  $\varepsilon$  von der Ordnung der Zwischenzeiten entwickeln, indem man vorher etwa, unter  $\lambda, \mu, f, g$  endliche Größen verstehend, setzt:

$$(33) \quad \begin{aligned} \theta &= f\varepsilon, \quad \theta'' = g\varepsilon, \\ r &= r' - \theta''(\lambda - \mu\theta''), \quad r'' = r' + \theta(\lambda + \mu\theta), \end{aligned}$$

wodurch dann:

$$(34) \quad n = \Phi(f, g, \lambda, \mu, \varepsilon), \quad n'' = \Phi(g, f, \lambda, \mu, -\varepsilon)$$

wird, und nun bloß die ersten Glieder dieser Reihen in (29) einführt. Die Methode, nach welcher diese Entwicklung erlangt wird, ist wesentlich diese: Man sieht zunächst außer  $r'$  auch noch  $\frac{dr'}{dt}$ ,  $\frac{d^2r}{dt^2}$  als bekannt an und drückt durch diese drei Größen und  $\theta$ ,  $\theta''$  die Dreiecksverhältnisse  $n$ ,  $n''$  aus, indem man erst vermöge der beiden Differentialgleichungen:

$$(35) \quad \frac{d^2D}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}D = 0, \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}u = 0, \quad u = r \frac{dr}{dt}$$

den Abstand  $D(\tau)$  zur Zeit  $t' + \frac{\tau}{k}$  in der Form darstellt:

$$(36) \quad D(\tau) = \varphi(\tau)D' + \psi(\tau)\frac{dD'}{d\tau},$$

wo  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  Potenzreihen nach  $\tau$  mit in  $r'$ ,  $\frac{dr'}{dt}$ ,  $\frac{d^2r'}{dt^2}$  rationalen Koeffizienten sind. Nach Elimination von  $\frac{dD'}{d\tau}$  aus den beiden für  $\tau = -\theta''$  und  $\tau = \theta$  aus (36) zu erhaltenden Gleichungen gibt der Vergleich des Eliminationsresultates mit (28):

$$(37) \quad n:n'':1 = \psi(\theta):-\psi(-\theta''):\psi(\theta)\varphi(-\theta'') - \varphi(\theta)\psi(-\theta'').$$

Die Konvergenzverhältnisse der Reihen  $\varphi$ ,  $\psi$  sind durch die singulären Punkte der Koordinaten (vgl. Nr. 6) bestimmt, die der Reihen für  $n$ ,  $n''$  noch außerdem durch die Nullstellen der Dreiecksfläche  $\frac{1}{2}rr''\sin(v'' - v)$ , welche aber, wie *F. R. Moulton*<sup>53)</sup> bemerkt, nur verschwindet, wenn  $r$  oder  $r'' = 0$ , d. h.  $t$  oder  $t''$  ein singulärer Punkt der Koordinaten ist oder der Zwischenwinkel  $v'' - v$  ein Multiplum von  $180^\circ$  wird. Die endlichen Ausdrücke für  $\varphi$ ,  $\psi$  gibt *F. Kühnert*<sup>54)</sup>.

Um dann  $\frac{dr'}{dt}$ ,  $\frac{d^2r'}{dt^2}$  mit Hilfe der noch unbenutzten  $r$ ,  $r''$  zu eliminieren, entwickelt man von der zweiten Differentialgleichung (35) ausgehend  $r$  und  $r''$  bzw. nach Potenzen von  $\theta''$  und  $\theta$ , wobei in den Koeffizienten  $\frac{dr'}{dt}$  und  $\frac{d^2r'}{dt^2}$  auftreten, und leitet aus der Vergleichung dieser beiden Reihen mit  $r$  und  $r''$  die Werte jener Größen in Form von Potenzreihen nach  $\varepsilon$  her.

Noch vorteilhafter wird man  $n$ ,  $n''$  durch Oskulationsausdrücke ersetzen, d. h. Funktionen von  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $\theta$ ,  $\theta''$ , die einerseits möglichst einfach gebaut sind, und deren Entwicklungen nach  $\varepsilon$  andererseits noch in Termen möglichst hoher Ordnung mit denen von  $n$  und  $n''$  über-

54) *F. Kühnert*, *Astr. Nachr.* 95 (1879), p. 145, 203.

einstimmen. Die Wahl derselben bildet den wesentlichsten Unterschied der im letzten Jahrhundert aufgestellten Methoden.

Von besonderer Wichtigkeit ist es festzustellen, wie genau  $n, n''$  zu nehmen sind, damit die Grundgleichungen (29) die Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$  mit einer vorgegebenen Genauigkeit liefern. Es zeigt sich in dieser Hinsicht: sind  $n, n''$  bis  $\varepsilon^{v+2}$  exklusive genau, so werden  $\varrho, \varrho', \varrho''$  bis  $\varepsilon^v, \varrho - \varrho', \varrho'' - \varrho'$  bis  $\varepsilon^{v+1}$  und  $\frac{\theta}{\theta'} \varrho + \frac{\theta''}{\theta'} \varrho'' - \varrho'$  bis  $\varepsilon^{v+2}$  exklusive genau sein. Gleiches findet aber auch dann noch statt, wenn  $n, n''$  bloß bis  $\varepsilon^{v+1}$ , aber doch  $n + n''$  bis  $\varepsilon^{v+2}$  exklusive genau sind.

Berechnet man dann weiter unter Benutzung solcher Werte der Dreiecksverhältnisse und Distanzen nach irgend welchem der unter Nr. 11 genannten Verfahren die heliozentrischen Zwischenwinkel:

$$(38) \quad 2f = \sphericalangle H'SH'', \quad 2f' = \sphericalangle HSH'', \quad 2f'' = \sphericalangle HSH',$$

so erhält man diese allemal bis  $\varepsilon^{v+1}$  exklusive genau.

Für die Funktionaldeterminante der drei Grundgleichungen nach  $\varrho, \varrho', \varrho''$  findet man angenähert etwa durch Verwendung der Ausdrücke (41):

$$(39) \quad D + \frac{3\theta\theta''}{2r'^4} R\Delta \cos z',$$

wobei  $D$  den Eckensinus des durch die drei scheinbaren geozentrischen Orte des Himmelskörpers,  $\Delta$  jenen des durch die äußeren Orte des Himmelskörpers und den mittleren Sonnenort gebildeten sphärischen Dreiecks bezeichnet. Hier ist im allgemeinen das erste Glied von der Ordnung  $\varepsilon^2$  das zweite von der Ordnung  $\varepsilon^3$ , so daß  $D$  oder nach *Th. v. Oppolzer*<sup>55)</sup> der nahe halb so große Flächeninhalt des Dreiecks ein Maß für die Sicherheit der zu gewinnenden Werte der Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$  abgibt. Wird  $D = 0$ , in welchem Falle die obigen Genauigkeitsangaben in Frage gestellt sind, so fallen entweder zwei der scheinbaren geozentrischen Orte des Himmelskörpers zusammen, oder es liegen alle drei in einem größten Kreise. Tritt letzteres ein, so ist entweder  $r'$  nahe  $= R'$ , oder der mittlere Sonnenort, nach *F. Tietjen*<sup>56)</sup> genauer der zur Zeit  $\frac{1}{3}(t + t' + t'')$  liegt nahe in demselben größten Kreise.

**10. Näherungsausdrücke der Dreiecksverhältnisse.** Ein bis  $\varepsilon^v$  exklusive genauer Wert irgend einer Größe möge allgemein im folgenden ein  $v^{\text{ter}}$  Näherungswert derselben genannt werden.

Die Ersetzung der Dreiecke durch die zugehörigen Sektoren er-

55) *Th. v. Oppolzer*, *Bahn.* 1, p. 367; *Astr. Nachr.* 92 (1878), p. 97.

56) *F. Tietjen*, *Astr. Nachr.* 73 (1869), p. 353.

gibt zunächst für  $n, n''$  die 2<sup>ten</sup> Näherungswerte:

$$(40) \quad n = \frac{\theta}{\theta'}, \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'}.$$

Ebenfalls 2<sup>te</sup> Näherungswerte, bei denen aber  $n + n''$  bis  $\varepsilon^3$  exklusive genau ist, sind die bereits bei *J. L. Lagrange*<sup>57)</sup> und in der Folge insbesondere bei *C. F. Gauß* auftretenden Ausdrücke:

$$(41) \quad n = \frac{\theta}{\theta'} \left( 1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^3} \right), \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \left( 1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^3} \right),$$

welche im speziellen bei gleichen Zwischenzeiten,  $\theta = \theta''$ , 3<sup>te</sup> Näherungswerte liefern, bei denen überdies wieder  $n + n''$  bis  $\varepsilon^4$  exklusive genau ist<sup>58)</sup>. Allgemein 3<sup>te</sup> Näherungswerte sind:

$$(42) \quad n = \frac{\theta}{\theta'} \left( 1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6r'^3} \right), \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \left( 1 + \frac{\theta'^2 - \theta''^2}{6r'^3} \right).$$

4<sup>te</sup> Näherungswerte stellen die von *Th. v. Oppolzer*<sup>59)</sup> angegebenen Ausdrücke dar:

$$(43) \quad \begin{aligned} n &= \frac{\theta}{\theta'} \left( 1 + 4 \frac{\theta'^2 - \theta^2}{3} x + 4 \frac{\theta^2\theta''}{\theta'} xy \right), \\ n'' &= \frac{\theta''}{\theta'} \left( 1 + 4 \frac{\theta'^2 - \theta''^2}{3} x - 4 \frac{\theta\theta''^2}{\theta'} xy \right), \\ x &= \frac{1}{(r+r'')^3}, \quad y = \frac{r'' - r}{r'' + r}. \end{aligned}$$

Ebensolche von etwas anderer Form gibt *R. Radau*<sup>60)</sup>, gelegentlich einer zusammenfassenden Behandlung der verschiedenen Näherungsausdrücke.

Desgleichen sind 4<sup>te</sup> Näherungswerte, bei denen aber wieder  $n + n''$  bis  $\varepsilon^5$  exklusive genau ist, die von *J. W. Gibbs*<sup>61)</sup> durch Interpolation der Koordinaten mittels eines Polynoms 4<sup>ten</sup> Grades in  $t - t'$  abgeleiteten Ausdrücke:

$$(44) \quad n = \frac{\theta}{\theta'} \frac{1 + \frac{\theta'\theta'' - \theta^2}{12r'^3}}{1 - \frac{\theta\theta'' + \theta'^2}{12r'^3}}, \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \frac{1 + \frac{\theta\theta' - \theta''^2}{12r''^3}}{1 - \frac{\theta\theta'' + \theta'^2}{12r'^3}},$$

57) *J. L. Lagrange*, Berlin Mém. 1783, p. 296 = Oeuvres 4, p. 451.

58) Letzteres folgt daraus, daß  $n + n''$  bei gleichen Zwischenzeiten nach (34) bloß gerade  $\varepsilon$ -Potenzen enthält.

59) *Th. v. Oppolzer*, Bahnab., p. 100 (1. Aufl., p. 231). Bezüglich der geometrischen Bedeutung der Zusatzglieder in diesen und den früheren Ausdrücken vgl. die Vorrede von *H. Poincaré* in *Tisserand-Perchot*. Leçons.

60) *R. Radau*, Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 401.

61) *J. W. Gibbs*, National academy of sciences 4 (1888) = Papers 2, p. 118, 149. Das erwähnte Verhalten der *Gibbs*schen Ausdrücke rücksichtlich ihrer Genauigkeit hat *E. Weiß* in den Denkschriften der Wiener Akademie 60 (1893), p. 345, klargelegt.

welche im speziellen bei gleichen Zwischenzeiten  $\theta = \theta'$  5<sup>te</sup> Näherungswerte liefern, bei denen überdies wieder  $n + n''$  bis  $\varepsilon^6$  exklusive genau ist. Schon früher hatte *A. de Gasparis*<sup>62)</sup> Glieder höherer Ordnung in  $n, n''$  mitzunehmen versucht, aber ziemlich komplizierte Formen erhalten.

Bei verschwindender Exzentrizität stellen die von *W. Ebert*<sup>63)</sup> angegebenen Ausdrücke:

$$(45) \quad n = \frac{\theta}{\theta'} \frac{1 + \frac{3\theta'^2 - 8\theta^2}{48r'^3}}{1 - \frac{5\theta'^2}{48r'^3}}, \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \frac{1 + \frac{3\theta'^2 - 8\theta''^2}{48r'^3}}{1 - \frac{5\theta'^2}{48r'^3}}$$

4<sup>te</sup> Näherungswerte dar, bei denen aber der Fehler von  $n + n''$  den Faktor  $(\theta - \theta'')^2$  enthält, so daß bei gleichen Zwischenzeiten  $n + n''$  bis  $\varepsilon^6$  exklusive genau ist.

*P. Harzer*<sup>64)</sup> hat die allgemeinen Reihenentwicklungen von  $n, n''$  nach  $\varepsilon$  bis  $\varepsilon^{10}$  durchgeführt, indem er dabei die einer Kreisbahn entsprechenden Werte von  $n, n''$  als Faktoren abspaltete, und hat die Verwendung der erhaltenen Ausdrücke bei numerischer Rechnung durch mehrere Tafeln erleichtert.

**11. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen.** Der in Nr. 9 angegebene Zusammenhang zwischen dem Genauigkeitsgrade der  $n, n''$  und demjenigen der  $\varrho, \varrho', \varrho''$  läßt erkennen, daß die Näherungsausdrücke (40) der Dreiecksverhältnisse, durch welche zwar das System (29) überhaupt linear in den geozentrischen Distanzen würde, gar keine Näherung für diese gewähren, was bereits *J. L. Lagrange*<sup>65)</sup> hervorhebt. Mit ihrer Verwendung fallen wesentlich die Versuche der Kometenbahnbestimmung jener älteren Autoren zusammen (*Kepler, P. Bouguer*<sup>66)</sup>), welche den Kometen als in gerader Linie sich gleichförmig bewegend annehmen.

*J. L. Lagrange* selbst wählte nicht  $r, r', r''$ , sondern  $r', \frac{dr'}{dt}, \frac{d^2r'}{dt^2}$  als Unbekannte, drückt also nach Nr. 9  $n, n'', r, r''$  durch eben diese Größen aus, wobei unter Vernachlässigung von  $\varepsilon^3$  im wesentlichen die Gleichung (51) für  $r'$  folgt.

62) *A. de Gasparis*, Astr. Nachr. 42, 43, 46, 47 (1856—58); siehe hierüber auch *G. Lorenzoni* Astr. Nachr. 132 (1893), p. 225.

63) *W. Ebert*, Wien Denkschr. 78 (1906), p. 645.

64) *P. Harzer*, Kiel Sternw. Publ. 11 (1901).

65) *J. L. Lagrange*, Berlin Mém. 1778, p. 124; 1783, p. 296 = Oeuvres 4, p. 451, 496 und Méc. analyt. 2 (= Oeuvres 12), p. 41.

66) *P. Bouguer*, Paris hist. 1733 mém., p. 331.

a) *Methode von Gauß*. Die niedrigste überhaupt zulässige Näherung für  $n, n''$  bilden vielmehr die Ausdrücke (41), welche im allgemeinen erste, bei gleichen Zwischenzeiten aber zweite Näherungswerte der geozentrischen Distanzen finden lassen.

Auf ihnen basiert die von *Gauß* in der *Theoria motus* ausführlich entwickelte Methode, welche indess in wesentlichen Punkten (vgl. Nr. 13, 14) von den Verfahren abweicht, deren sich *Gauß*<sup>67)</sup> bei seinen ersten Bahnbestimmungen der Ceres und Pallas bedient hat. Da diese Ausdrücke (41) bloß  $r'$  enthalten, so hat man in der zweiten Gleichung des Systems (31), wenn  $r'$  unter Bezugnahme auf das Dreieck  $SH'E'$  durch  $\varrho'$  ausgedrückt gedacht wird, eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten  $\varrho'$ , nach deren Bestimmung  $\varrho, \varrho''$  sofort aus der ersten und dritten Gleichung des Systems (31) sich ergeben.

Statt  $\varrho'$  führt *Gauß* als Unbekannte den Winkel  $z' = \sphericalangle SH'E'$  am Planeten ein, durch den sich  $\varrho'$  und  $r'$  ihrerseits in der Form darstellen

$$(46) \quad \varrho' : r' : R' = \sin(z' + \psi') : \sin \psi' : \sin z',$$

wofern mit  $\psi'$  der durch die Beobachtung bekannte Winkel  $\sphericalangle SE'H'$  an der Erde bezeichnet wird. Hiedurch erhält *Gauß* für  $z'$  eine Gleichung (8ten Grades in  $\sin z'$ ) der einfachen Gestalt:

$$(47) \quad M \sin^4 z' = \sin(z' + \omega),$$

welche nun durch sukzessive Näherung leicht zu lösen ist.

Da die Erdbahn selbst eine Lösung der Aufgabe bildet und für sie  $z' = 180^\circ - \psi'$  ist, so muß diese Gleichung, weil selbst nur näherungsweise richtig, eine dem Werte  $180^\circ - \psi'$  mindestens nahe gleiche Wurzel  $z'$  besitzen, die also beiseite zu lassen ist. Von den übrigen Wurzeln sind, da  $z'$  und  $\psi'$  Winkel desselben Dreiecks  $SH'E'$  sein sollen, bloß jene brauchbar, für die  $0 < z' < 180^\circ - \psi'$  ist. Solcher gibt es aber stets nur eine oder zwei, und zwar je nachdem  $1 + \frac{3\theta\theta''}{2R'^3} \frac{\sin P_2'}{\sin p'} \cos \psi' < 0$  oder  $> 0$  ist. In letzterem Falle haben weitere Beobachtungen über die zu treffende Wahl zu entscheiden. Mit der Diskussion der Wurzeln der Gleichung (47) hat sich zuerst *J. F. Encke*<sup>68)</sup> näher befaßt und eine Tafel zum raschen Erkennen des gerade vorliegenden Falles entworfen. Später sind *G. W. Hill*<sup>69)</sup>,

67) *C. F. Gauß*, *Monatl. Corr.* 20 (1809), p. 197 = *Werke* 6, p. 148.

68) *J. F. Encke*, *Astr. Nachr.* 27 (1848), p. 241, 257; *J. F. Encke*, *Berlin Abh.* 1848, p. 1.

69) *G. W. Hill*, *Runkles Math. Monthly.* 3 (1860), p. 26 = *Works* 1, p. 2.

*Th. v. Oppolzer*<sup>70)</sup>, *N. Herz*<sup>71)</sup> und *W. H. Young*<sup>72)</sup> hierauf zurückgekommen.

Zur Berechnung von  $\varrho$ ,  $\varrho''$  aus dem bekannt gewordenen  $\varrho'$  kann man sich statt (31) auch irgend zweier in (29) enthaltenen Gleichungen bedienen, in denen bloß  $\varrho$ ,  $\varrho'$  bzw.  $\varrho''$ ,  $\varrho'$  auftreten, was dann der Fall ist, wenn man den Bezugskreis  $K$  durch den dritten bzw. ersten scheinbaren Planetenort gehen läßt. Die hiebei restierende Willkür in der Wahl von  $K$  kann zur Vereinfachung der beiden Gleichungen benutzt werden, was meist dadurch geschieht, daß man  $K$  noch durch den dritten, bzw. ersten scheinbaren Sonnenort hindurch gehen läßt, was  $P'' = 0$  bzw.  $P = 0$  ergibt. Nur wenn hiebei die Koeffizienten von  $\varrho$  und  $\varrho''$  sehr klein werden, was eintritt, wenn die drei Sonnenorte mit dem ersten oder dritten Planetenort nahe in einem größten Kreise liegen, wird man, um die dadurch bedingte Unsicherheit in der Bestimmung von  $\varrho$ ,  $\varrho''$  zu vermeiden, anders über  $K$  verfügen.

Sind so die drei vollständigen heliozentrischen Orte des Himmelskörpers mit ihren geozentrischen und heliozentrischen Distanzen bekannt geworden, so könnten die für das Weitere wichtigen heliozentrischen Zwischenwinkel (38) direkt vermöge:

$$(48) \quad \sin 2f : \sin 2f' : \sin 2f'' = nr : r' : n''r'',$$

$$f' = f + f'',$$

bestimmt werden, da hienach  $2f$ ,  $180^\circ - 2f'$ ,  $2f''$  die Winkel eines Dreiecks der gegebenen Seiten  $nr$ ,  $r'$ ,  $n''r''$  sind. Doch wird numerisch eine größere Sicherheit erlangt, wenn man nach *Gauß*  $f'$  trigonometrisch aus den beiden äußeren heliozentrischen Orten des Himmelskörpers, und dann bloß  $f$ ,  $f''$  aus (48) berechnet.

Für den Zwischenwinkel  $f'$  gilt hiebei:

$$(49) \quad \sin^2 f' = \cos^2 \frac{J}{2} \sin^2 \frac{\alpha - \alpha''}{2} + \sin^2 \frac{J}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \alpha''}{2},$$

$$\alpha = \varphi + \psi + z, \quad \alpha'' = \varphi'' + \psi'' + z'',$$

worin  $J$  den Winkel der Ebenen  $SEH$  und  $SE''H''$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi''$  die Winkel ihrer Schnittlinie mit  $SE$  bzw.  $SE''$  bedeuten und  $\psi$ ,  $z$  und  $\psi''$ ,  $z''$  die zu  $\psi'$ ,  $z'$  analogen Größen für die erste und dritte Beobachtung sind, also alle diese Winkel bis auf  $z$ ,  $z''$  direkt durch die Beobachtungen bestimmt sind.

Nach Bekanntwerden der *Gaußschen* Methode haben insbesondere

70) *Th. von Oppolzer*, Astr. Nachr. 92 (1878), p. 97; *Th. von Oppolzer*, Wien Ber. 86 (1882), p. 885.

71) *N. Herz*, Wien Ber. 86 (1882), p. 1125.

72) *W. H. Young*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 57 (1897), p. 379.

*J.F. Encke*<sup>73</sup>), *P.A. Hansen*<sup>74</sup>) und *F. Tietjen*<sup>75</sup>) eingehende Darstellungen derselben geliefert, und für die numerische Rechnung weitere spezielle Vorschriften und weitere Umformungen der einzelnen zu berechnenden Ausdrücke angegeben.

Die Verwendung der Näherungswerte (42) der Dreiecksverhältnisse, welche bloß die Werte von  $M$  und  $\omega$  in der *Gauß'schen* Schlußgleichung (47) abändert, hat *J. F. Encke* in einem Zusatze zu seiner ebengenannten Arbeit im Berliner Jahrbuch vorgeschlagen.

b) *Methode von Th. v. Oppolzer*. Die dieser Methode zugrunde liegenden Ausdrücke (43) der Dreiecksverhältnisse liefern in allen Fällen zweite Näherungswerte für die geozentrischen Distanzen. Da dieselben bloß  $r$  und  $r''$  enthalten, so hat man in der ersten und dritten Gleichung des Systems (31), wenn  $r$  und  $r''$  unter Bezugnahme auf die Dreiecke  $SHE$  und  $SH''E''$  durch  $\varrho$  und  $\varrho''$  ausgedrückt gedacht sind, zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten  $\varrho$ ,  $\varrho''$ , die aber keiner weiteren Reduktion auf eine so einfache Form, wie *Gauß'* Schlußgleichung fähig sind, sondern in ihrer ursprünglichen Gestalt durch sukzessive Näherung gelöst werden müssen.

Statt hierauf  $\varrho'$  etwa aus der zweiten Gleichung des Systems (31) abzuleiten, schreitet *v. Oppolzer* zuvörderst zur trigonometrischen Berechnung des Zwischenwinkels  $f'$  aus den beiden durch  $\varrho$ ,  $\varrho''$  bekannt gewordenen äußeren heliozentrischen Orten des Himmelskörpers, und bestimmt dann  $r'$  gleichzeitig mit  $f$  und  $f''$  aus (48). Ausführlich dargestellt findet sich diese Methode in *v. Oppolzers* Lehrbuch der Bahnbestimmung 1. (1882) (zuerst 1869 in der 1. Auflage), auch gab *F. Tietjen*<sup>76</sup>) ein vereinfachtes vollständiges Rechenschema für dieselbe an.

c) *Methode von J. W. Gibbs*. Die ihr zugrunde liegenden Ausdrücke (44) der Dreiecksverhältnisse liefern im allgemeinen dritte, bei gleichen Zwischenzeiten aber vierte Näherungswerte für die geozentrischen Distanzen. Da in jenen Ausdrücken die drei heliozentrischen Distanzen gleichzeitig auftreten, ist eine unmittelbare Reduktion auf weniger als drei Unbekannte nicht möglich, weshalb *J. W. Gibbs* auch nicht das besondere System (31) benutzt, sondern jene drei Gleichungen, welche aus (29) hervorgehen, wenn der Bezugskreis  $K$  der Reihe nach in die drei Ebenen des geozentrischen Ekliptikal-

73) *J.F. Encke*, Berlin astr. Jahrb. für 1854, p. 316; *J.F. Encke*, Astr. Nachr. 30 (1850), p. 33 und 49; Berlin Ber. 1848, p. 60; 1849, p. 167; Berlin Abh. 1849, p. 1.

74) *P. A. Hansen*, Leipzig Ber. 15 (1863), p. 83.

75) *F. Tietjen*, Berlin astr. Jahrb. für 1879.

76) *F. Tietjen*, Berlin astr. Jahrb. für 1887.

koordinatensystems gelegt wird, weil die dann auftretenden Koeffizienten rascher zu bilden sind. Als Unbekannte wählt *Gibbs* die Projektionen der drei heliozentrischen Distanzen auf die zugehörigen geozentrischen und erzielt hiedurch eine gewisse Vereinfachung der differentiellen Korrekursionsformeln des *Newtonschen* Näherungsverfahrens, nach welchem er sein System auflöst. Außer in der Originalarbeit<sup>77)</sup> von *Gibbs* findet sich seine Methode auch in *Klinkerfues-Buchholz*, Theoretische Astronomie, ausführlich dargestellt.

*W. Fabritius*<sup>78)</sup> hat ein besonderes Approximationsverfahren zur Lösung der drei *Gibbs'schen* Gleichungen in Vorschlag gebracht, welches immer nur die wiederholte Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten erfordert. Desgleichen hat *R. Vogel*<sup>79)</sup> weitere Vereinfachungen angegeben.

d) Die von *P. Harzer*<sup>80)</sup> auf Grund seiner bis  $\epsilon^{10}$  gehenden Reihen für  $n$ ,  $n''$  ausführlich entwickelte Methode bildet das Endglied jener Reihe von Untersuchungen, welche vor allem Glieder möglichst hoher Ordnung in den Zwischenzeiten gleich beim ersten Schritt zu berücksichtigen trachten.

Nach anderer Richtung ist *E. Weiß*<sup>81)</sup> gegangen, welcher sich das Ziel stellte, die für die Praxis gerade ausreichende Genauigkeit auf dem kürzesten Wege zu erlangen. Er hat hiezu den Einfluß der einzelnen Glieder 3<sup>ter</sup> und 4<sup>ter</sup> Ordnung von  $n$ ,  $n''$  auf die Grundgleichungen einer eingehenden numerischen Abschätzung mit Rücksicht auf die speziell bei Asteroiden vorliegenden Bahnverhältnisse unterworfen und wurde dadurch zu einer von der *Gauß'schen* wenig verschiedenen Grundgleichung, als der für Asteroiden einfachsten und zweckmäßigsten geführt.

Gleicherweise ist die von *W. Ebert*<sup>82)</sup> auf den Näherungsausdrücken (45) aufgebaute Methode speziell für nahe kreisförmige Bahnen zugerichtet, läßt aber bei diesen im allgemeinen bessere Werte der Distanzen erwarten als die *Gauß'sche* Gleichung (47), wiewohl sie auf eine ähnliche, nicht kompliziertere Schlußgleichung führt.

**12. Methode von Laplace. Satz von Lambert.** Auf einem von dem früheren verschiedenen Gedankengang beruht die von *P. S. Laplace*<sup>83)</sup>

77) *J. W. Gibbs*, National acad. of sciences 4 (1888) = Papers 2, p. 118, 149.

78) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 128 (1891), p. 225.

79) *R. Vogel*, Astr. Nachr. 129 (1892), p. 37.

80) *P. Harzer*, Kiel Sternw. Publ. 11 (1901).

81) *E. Weiß*, Wien Denkschr. 60 (1893), p. 345.

82) *W. Ebert*, Wien Denkschr. 78 (1906), p. 645; Paris Bull. astr. 23 (1906),

entwickelte Methode der Bahnbestimmung. Bei dieser werden zuerst aus den beobachteten drei oder eventuell mehreren Orten die beiden Winkelkoordinaten des geozentrischen Ortes mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit für einen passend zu wählenden Zeitpunkt interpolatorisch berechnet, und dann als Unbekannte die geozentrische Distanz mit ihren beiden ersten Differentialquotienten nach der Zeit:  $\varrho$ ,  $\frac{d\varrho}{dt}$ ,  $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$  für eben diesen Zeitpunkt gewählt. Die Bestimmungsgleichungen für diese hat man direkt in den drei Bewegungsgleichungen des Himmelskörpers relativ zur Erde, welche bei Wahl des Visionsradius, der relativen Geschwindigkeit normal zu diesem und der zu beiden normalen Richtung als Bezugsachsen lauten:

$$(50) \quad \begin{aligned} K v^2 \varrho &= k^2 R \sin \alpha \sin \psi \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right). \\ 2v \frac{d\varrho}{dt} + \frac{dv}{dt} \varrho &= -k^2 R \cos \alpha \sin \varphi \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right). \\ \frac{d^2\varrho}{dt^2} - v^2 \varrho &= -k^2 \left( \frac{\cos \psi}{R^2} + \frac{\cos z}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Hierin bedeuten  $K$  die geodätische Krümmung der auf die Einheitskugel übertragenen scheinbaren geozentrischen Bahn des Himmelskörpers (positiv gezählt, wenn die Bahn gegen den scheinbaren Sonnenort zu konvex ist),  $v$  die scheinbare Geschwindigkeit desselben senkrecht zum Visionsradius, und  $\alpha$  den Winkel, welchen diese mit dem den Planetenort und den gleichzeitigen Sonnenort verbindenden größten Kreise bildet. Bemerket sei, daß die früheren Grundgleichungen (29) bei verschwindenden Zwischenzeiten gerade in dieses System (50) übergehen.

In der ersten Gleichung hat man, die geometrische Beziehung zwischen  $r$  und  $\varrho$  hinzugedacht, eine Gleichung 8<sup>ten</sup> Grades für  $\varrho$  allein, welche sich aber wegen der Wurzel  $\varrho = 0$  auf den 7<sup>ten</sup> Grad erniedrigt, und nach deren Lösung  $\frac{d\varrho}{dt}$  und  $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$  linear aus der zweiten und dritten folgen. Durch  $\varrho$  und  $\frac{d\varrho}{dt}$  ist dann Lage und Geschwindigkeit des Himmelskörpers für den gewählten Zeitpunkt gegeben, woraus nach Gl. (2) die Elemente selbst abgeleitet werden können. Auf der gleichen Methode basieren *J. W. Lubbock*<sup>84</sup>), *G. B. Airy*<sup>85</sup>), *A. Cauchy*<sup>86</sup>)

83) *P. S. Laplace*, Paris Hist. de l'acad. 1780, p. 13 = Oeuvres 10, p. 93 und Méc. céle. 1 (= Oeuvres 1), p. 218.

84) *J. W. Lubbock*, Lond. Astr. Soc. Mem. 4 (1830), p. 39.

85) *G. B. Airy*, Lond. Astr. Soc. Mem. 11 (1840), p. 181.

86) *A. Cauchy*, Zahlreiche Abhandlungen in: Paris C. R. 23 (1846), 25 (1847), 26 (1848) = Oeuvres ser. 1, t. 10.

und *Y. Villarceau*<sup>87)</sup>. Später haben *H. Bruns*<sup>88)</sup>, *K. Schwarzschild*<sup>89)</sup> und *P. Harzer*<sup>90)</sup> weitere Ausführungen zu derselben gegeben. Die Genauigkeit der *Laplaceschen* Methode untersuchte *H. Poincaré*<sup>91)</sup> und zeigte, daß man bei Interpolation der scheinbaren Bahn aus drei beobachteten Orten und Wahl des arithmetischen Mittels der drei Beobachtungszeiten als Epoche der Bahnbestimmung stets gleich zweite Näherungswerte der den drei Orten zugehörigen geozentrischen Distanzen durch Interpolation aus  $\varrho$ ,  $\frac{d\varrho}{dt}$ ,  $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$  erhält.

Aus der ersten Gleichung des Systems (50) liest man, wie dies *E. Vicaire*<sup>92)</sup> tut, unmittelbar den *Lambertschen* Satz ab, daß  $r < R$  oder  $r > R$  ist, je nachdem die scheinbare Bahn des Himmelskörpers ihre konkave oder konvexe Seite dem scheinbaren Sonnenorte zukehrt. Dieser Satz wurde zuerst von *J. H. Lambert*<sup>93)</sup> aus geometrischen Betrachtungen hergeleitet, welche analytisch gefaßt zu der mit der *Gaußschen* Gleichung (47) im wesentlichen identischen, aber erst von *Lagrange*<sup>94)</sup> aufgestellten und zur Bahnbestimmung verwandten approximativen Relation:

$$(51) \quad \varrho' \frac{\sin p'}{\sin P_2'} = \frac{1}{2} R \theta \theta' \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

überleiten, so daß bei *Lambert* der erste Keim der *Gaußschen* Methode zu suchen ist, was des näheren *J. Glauser*<sup>95)</sup> und *H. Bruns*<sup>96)</sup> erörtert haben. Bei der ersten Bahnbestimmung der *Ceres* und *Pallas* hat sich *Gauß* noch direkt der Gleichung (51) bedient. Auf ihren geometrischen Inhalt sind *R. Lehmann-Filhés*<sup>97)</sup> und *G. Sidler*<sup>98)</sup> näher eingegangen. Soll die scheinbare geozentrische Bahn einen Wendepunkt zeigen, also  $K = 0$  sein, so muß nach (50) entweder  $r = R$  sein, oder der jene tangierende größte Kreis den scheinbaren Sonnenort enthalten. Damit letzteres eintritt, muß die Relativgeschwindigkeit des Himmelskörpers gegen die Erde in die durch diese beiden und die

87) *Y. Villarceau*, Paris Ann. de l'obs. 3 (1857), p. 1.

88) *H. Bruns*, Astr. Nachr. 118 (1888), p. 241.

89) *K. Schwarzschild*, Astr. Nachr. 124 (1890), p. 211.

90) *P. Harzer*, Astr. Nachr. 141 (1896), p. 177.

91) *H. Poincaré*, Paris Bull. astr. 23 (1906), p. 161.

92) *E. Vicaire*, Paris C. R. 100 (1885), p. 778, 842.

93) *J. H. Lambert*, Berlin Nouv. Mém. 1771, p. 352.

94) *J. L. Lagrange*, Berlin Mém. 1778 = Oeuvres 4, p. 451.

95) *J. Glauser*, Astr. Nachr. 121 (1889), p. 65.

96) *H. Bruns*, Astr. Nachr. 118 (1888), p. 241.

97) *R. Lehmann-Filhés*, Astr. Nachr. 98 (1881), p. 307.

98) *G. Sidler*, Astr. Nachr. 99 (1881), p. 139.

Sonne gelegte Ebene fallen, wofür *C. F. Gauß*<sup>99)</sup> die Bedingung:

$$(52) \quad \frac{r \sin u}{\sqrt{p}} = \frac{R \sin(L - \Omega)}{\sqrt{P}}$$

angibt.

**13. Bestimmung der Elemente aus zwei vollständigen heliozentrischen Orten.** Mit den geozentrischen Distanzen  $\varrho, \varrho', \varrho''$  sind drei vollständige heliozentrische Planetenorte bekannt geworden, und es erübrigt nun, den zweiten Schritt zu tun, aus diesen die sechs Bahnelemente herzuleiten, wozu offenbar bereits zwei Orte gerade ausreichen. Man wird den ersten und dritten,  $H$  und  $H''$ , hiezu wählen, um durch Ausdehnung des Intervalls möglichste Schärfe zu erlangen, und wird dann den mittleren Ort  $H'$  zur Probe der Richtigkeit der Rechnung verwenden. Da die Ebene  $HSH''$  die Bahnebene ist, so sind  $i$  und  $\Omega$  trigonometrisch sofort zu berechnen. Die Gestalt des Kegelschnittes, also die Elemente  $a$  und  $e$ , lassen sich aus den zwei Radienvektoren  $r$  und  $r''$  und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel  $2f' = v'' - v$  ermitteln. *Gauß* führt ihre Bestimmung auf diejenige der Differenz der zu beiden Orten gehörigen exzentrischen Anomalien  $2g = E'' - E$  zurück. Zunächst nämlich folgt aus den Formeln der elliptischen Bewegung:

$$(53) \quad a = \frac{2\sqrt{rr''} \cos f'}{\sin^2 g} \left( l + \sin^2 \frac{g}{2} \right), \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{\sqrt{rr''} \sin f'}{\sin g},$$

$$(54) \quad e \cos \frac{E + E''}{2} = \frac{l \cos g - \sin^2 \frac{g}{2}}{l + \sin^2 \frac{g}{2}},$$

wobei zur Abkürzung:

$$(55) \quad l = \frac{r + r'' - 2\sqrt{rr''} \cos f'}{4\sqrt{rr''} \cos f'}$$

gesetzt ist.

Auf der anderen Seite wird der Flächeninhalt des Segmentes, das durch die Sehne  $HH''$  von der Ellipse abgetrennt wird, durch den Ausdruck  $\frac{1}{2}ab(2g - \sin 2g)$  dargestellt. Daher ergibt die Bedingung:

$$(56) \quad \text{Sektor} = \text{Dreieck} + \text{Segment} = \frac{1}{2}\sqrt{p}\theta'$$

unmittelbar die zur Bestimmung von  $x = \sin^2 \frac{g}{2}$  dienende transzendente

99) *C. F. Gauß*, Werke 7, p. 303. Es bedeuten  $P$  den Parameter der Erdbahn,  $L$  die wahre Länge der Erde.

Gleichung:

$$(57) \quad 1 + \frac{4}{3}(l+x)Q(x) = \frac{m}{\sqrt{l+x}}.$$

$$Q(x) = Q\left(\sin^2 \frac{g}{2}\right) = \frac{3}{4} \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}, \quad m = \frac{\theta'}{(2\sqrt{rr'} \cos f')^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist  $g$  gefunden, so folgen aus (53) die Elemente  $a$ ,  $e$ , und dann mit Hilfe von (54)  $E$ , also auch  $u$ . Da nun der Ort  $H$  völlig bekannt ist, so wird durch  $v$  die Richtung der Apsidenlinie, also  $\pi$  gegeben. Die Beobachtungszeit  $t$  liefert schließlich das letzte Element  $t_0$  oder  $\varepsilon$ . Die Formeln (53—55) sind übrigens von *Gauß* noch weiterer Umgestaltungen zwecks numerischer Rechnung unterzogen worden.

Die Auflösung der Gleichung (57) durch sukzessive Näherung oder Reihenentwicklung stützt sich darauf, daß vermöge der Kleinheit der Zwischenzeit  $x$  eine Größe 2<sup>ter</sup> Ordnung in den Zwischenzeiten ist. Aus einem später (Nr. 14) ersichtlichen Grunde führt *Gauß* das Verhältnis Sektor : Dreieck:

$$(58) \quad \eta' = \frac{m}{\sqrt{l+x}}, \quad x = \frac{m^2}{\eta'^2} - l$$

statt  $x$  als Unbekannte ein, und setzt dann die Gl. (57) mit Rücksicht darauf, daß  $\frac{1}{1 - \frac{6}{5}x}$  ein Näherungswert von  $Q(x)$  ist, in der

Form an:

$$(59) \quad \eta'^3 - \eta'^2 = \frac{m^2}{\frac{5}{3} + l + \xi(x)} \left( \eta' + \frac{1}{9} \right), \quad \xi(x) = x + \frac{5}{6} \left( \frac{1}{Q(x)} - 1 \right),$$

wo zwar  $\xi(x)$  durch  $x$  noch von  $\eta'$  abhängt, aber von 2<sup>ter</sup> Ordnung in  $x$  ist. Die Berechnung einer fortlaufenden Kette von  $\eta'$ - und  $x$ -Werten nach (58) und (59), ausgehend von  $x = 0$ , bildet daher ein rasch konvergentes Verfahren zur Bestimmung dieser Größen, das durch die von *Gauß* gegebenen Tafeln noch wesentlich vereinfacht wird. Eine weitere Modifikation desselben gibt *F. Tietjen*<sup>100</sup>) und die Gaußischen Tafeln auch *J. Bauschinger*<sup>101</sup>). Der Umstand, daß  $Q(x)$  eine hypergeometrische Funktion ist:

$$(60) \quad Q(x) = F\left(1, 3, \frac{5}{2}, x\right),$$

bildet die Quelle verschiedener von *Gauß* angegebener Kettenbruch- und Reihendarstellungen von  $\xi(x)$ . Später sind *P. A. Hansen*<sup>102</sup>) und neuerdings *W. Fabritius*<sup>103</sup>) und *L. de Ball*<sup>103</sup>) auf solche zurückgekommen.

100) *F. Tietjen*, Berl. astr. Jahrb. für 1879.

101) *J. Bauschinger*, Tafeln, Nr. 19 und 20.

102) *P. A. Hansen*, Leipzig Ber. 15 (1863), p. 83.

Reihenentwicklungen für die Lösung der Gl. (59) haben *P. A. Hansen*<sup>103)</sup> und *C. F. Encke*<sup>104)</sup> aufgestellt, und zwar entwickelt ersterer  $\eta'$  nach Potenzen von  $l$  und einer mit  $m^2$  verschwindenden Größe, während letzterer  $\lg \eta'$  nach Potenzen von  $\frac{\theta'}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}$  und  $\sin \frac{\gamma}{2}$  (vgl. Gl. (85)) entwickelt.

Besonders bemerkenswert ist die große Unempfindlichkeit des durch (57) und (58) berechneten Wertes von  $\eta'$  gegenüber von Veränderungen des Zwischenwinkels  $f'$ . Da nämlich angenähert:

$$(61) \quad \frac{\partial \eta'}{\partial f'} = \frac{\theta'^2 \sqrt{p}}{5 r'^5}$$

ist, so erzeugen Fehler von  $f'$  immer in  $\eta'$  Fehler einer um drei Einheiten höheren Ordnung bezüglich  $\varepsilon$ . Die zu erwartende Genauigkeit der Elemente untersucht *P. Harzer*<sup>105)</sup>.

Ein anderes bereits von *Gauß*<sup>106)</sup> angedeutetes Verfahren zur Bestimmung der Bahn aus zwei vollständigen heliozentrischen Orten besteht darin, die Gl. (57) durch die *Lambertsche* Gl. (17) zu ersetzen, indem man zunächst aus dieser den Wert von  $a$  bestimmt. Mit diesem folgt dann  $x$  aus (53) und hierauf die übrigen Elemente ebenso wie früher. Es empfiehlt sich dieses Verfahren, von welchem neuerdings auch *O. Callandreau*<sup>107)</sup> eingehend handelt, bei nahe parabolischen Bahnen und größeren Zwischenzeiten.

Da für diese wegen der Kleinheit von  $\frac{1}{a}$  auch  $\varepsilon$ ,  $\delta$  klein und daher ihre Differenz gegen den Sinus durch trigonometrische Tafeln schlecht bestimmbar werden, so setzt man hier die *Lambertsche* Gleichung in die Form:

$$(62) \quad 6\theta' = (r+r''+s)^{\frac{3}{2}} Q\left(\sin^2 \frac{\varepsilon}{4}\right) - (r+r''-s)^{\frac{3}{2}} Q\left(\sin^2 \frac{\delta}{4}\right),$$

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r+r''+s}{4a}, \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r+r''-s}{4a}$$

und legt vermittle der erwähnten hypergeometrischen Reihen oder Kettenbrüche für  $Q(x)$  Tafeln an, wie dies *J. G. Watson*<sup>108)</sup>, *Th. v. Oppolzer*<sup>109)</sup> und *J. Bauschinger*<sup>110)</sup> tun. Die wieder für kleine Zwischen-

103) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 129 (1892), p. 49. Hierzu *L. de Ball*, Astr. Nachr. 129 (1892), p. 283.

104) *J. F. Encke*, Berlin astr. Jahrb. für 1854, p. 316.

105) *P. Harzer*, Publik. d. Sternwarte Kiel 11 (1901).

106) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 109 (Schluß).

107) *O. Callandreau*, Determ. d. orbites. Paris. ann. de l'obs. 23 (1902), p. G. 1.

108) *J. C. Watson*, Theor. astr., Tafel 15 und 16.

109) *Th. v. Oppolzer*, Bahnbest. 2, Tafel 17.

110) *J. Bauschinger*, Tafeln Nr. 23.

zeiten entstehende Schwierigkeit, daß  $\theta'$  sich nach (62) als Differenz nahe gleicher Größen bestimmt, zu beheben, gibt *A. Marth*<sup>111)</sup> unter Einführung des Hilfswinkels  $\sin \gamma = \frac{s}{r+r''}$  eine andere Umformung und Reihenentwicklung, deren Benutzung er durch besondere Tafeln erleichtert. Eine für kleine Exzentrizitäten und Zwischenzeiten rasch konvergierende Reihenentwicklung gibt *M. Kowalski*<sup>112)</sup>.

*J. W. Gibbs* endlich zieht zur Bestimmung der Bahn alle drei heliozentrischen Orte jedoch mit Weglassung der Beobachtungszeiten, heran. Das hiedurch erlangte überzählige Datum gestattet die Lösung von (57) zu umgehen, indem der Parameter der Bahn aus:

$$(63) \quad p = \frac{nr + n''r'' - r'}{n + n'' - 1}$$

folgt, welche Relation unmittelbar aus (28) erhalten wird, wenn man die Ebene normal zur Apsidenlinie wählt. Indessen erscheint  $p$  als Quotient von Größen 2<sup>ter</sup> Ordnung unsicher bestimmt, ein Umstand, den *Gauß* vermieden wissen wollte, obzwar er auch dieses Verfahrens zur Herleitung der Elemente ausführlich gedacht hat<sup>113a)</sup>. Gleiches gilt auch von den zu (63) analogen Ausdrücken für  $e, v, v', v''$ , welche *W. Fabritius*<sup>114)</sup> hergeleitet hat.

Es kann nach *Gauß*<sup>113)</sup> aber auch bei Verwendung von nur zwei Orten  $p$  direkt zu mindest sehr angenähert bestimmt werden, indem aus  $\theta' \sqrt{p} = \int_0^{v''} r^2 dv$  mittels der *Cotesschen* Formeln als erste Näherung folgt:

$$(64) \quad \theta' \sqrt{p} = f'(r^2 + r''^2),$$

mit welcher der den Winkel  $(rr'')$  halbierende Radius  $r_0$  berechnet werden kann:

$$(65) \quad \frac{\cos f'}{r_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} \right) - \frac{2}{p} \sin^2 \frac{f'}{2},$$

mit dem nun wieder nach den *Cotesschen* Formeln als zweite Näherung folgt:

$$(66) \quad \theta' \sqrt{p} = \frac{1}{3} f'(r^2 + r''^2 + 4r_0^2).$$

111) *A. Marth*, Astr. Nachr. 65 (1865), p. 321. Vgl. hierzu noch *O. Callandreaux*, Paris Bull. astr. 18 (1902), p. 127 und analoge Tafeln bei *J. Bauschinger*, Tafeln.

112) *M. Kowalski*, St. Petersburg. Bull. de l'acad. 20 (1875), p. 559.

113) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 86.

113\*) *C. F. Gauß*, Theoria motus art. 82, 83.

114) *W. Fabritius*, Über die Berechnung der richtigen Distanzen, Kiew 1877 und Astr. Nachr. 90 (1877), p. 217, 225.

Diesen auf *L. Euler* zurückgehenden Weg hat *Gauß* bei seinen ersten Bahnbestimmungen der Ceres und Pallas wirklich eingeschlagen. Wird aber in (66)  $r_0^2$  aus  $r^2, r'^2, r''^2$  interpoliert:

$$(67) \quad 4r_0^2 = \left(1 - \frac{f}{f''}\right)r^2 + \frac{f'^2}{ff''}r'^2 + \left(1 - \frac{f''}{f}\right)r''^2,$$

so resultiert der von *F. R. Moulton*<sup>115)</sup> zugrunde gelegte Näherungsausdruck.

**14. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen.** Die vorigen Verfahren der Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen müssen, um als wirkliche Bahnbestimmungsmethoden bezeichnet werden zu können, durch ein weiteres Approximationsverfahren ergänzt werden, das die geozentrischen Distanzen und damit die Elemente mit beliebiger Genauigkeit zu finden gestattet. Die Auffindung eines solchen Verfahrens von praktisch leichter Durchführbarkeit ist, zumindest was nicht parabolische Bahnen angeht, ein ganz wesentlicher Fortschritt, den *Gauß* seinen Vorgängern gegenüber erzielt hat. Der Kern desselben mag gleich unter spezieller Bezugnahme auf die *Gauß*schen Näherungsausdrücke (41) der Dreiecksverhältnisse, die hier kurz durch  $(n)$  und  $(n'')$  bezeichnet werden sollen, angegeben werden. Will man  $\nu + 1^{\text{te}}$  Näherungswerte der Distanzen ermitteln, so genügt es, für  $n, n''$  in das System (29) einzuführen:

$$(68) \quad n = (n) + R, \quad n'' = (n'') + R'',$$

unter  $R, R''$  die auf  $(n), (n'')$  in den Reihenentwicklungen (34) folgenden Glieder bis mindestens  $\varepsilon^{\nu+2}$  inklusive verstanden. Hat nun eine vorhergehende Näherung für die heliozentrischen Distanzen  $\nu^{\text{te}}$  Näherungswerte  $r_*, r_*', r_*''$  ergeben, so wird man in  $n, n''$  bzw.  $n + n''$  Fehler der erlaubten Ordnungen  $\varepsilon^{\nu+2}$  bzw.  $\varepsilon^{\nu+3}$  begehen, wenn man in  $R, R''$  eben diese Werte für die heliozentrischen Distanzen einsetzt, und also auch statt (68) in dem System (29) einführen können:

$$(69) \quad n = (n) + R_*, \quad n'' = (n'') + R_*''.$$

Hier sind nun  $R_*, R_*''$  numerisch bekannte kleine Größen, daher die Ermittlung  $\nu + 1^{\text{ter}}$  Näherungswerte aus  $\nu^{\text{ten}}$  durch formal genau ebendieselben Gleichungen geschieht, wie unter (Nr. 11 a) diejenige erster.

Dies wäre im Grunde noch das von *Lagrange* vorgeschlagene Verfahren.

Der Schwerpunkt des *Gauß*schen Verfahrens ruht aber nun weiter in seiner von den umständlichen Reihenentwicklungen der  $n, n''$

115) *F. R. Moulton*, Astr. Journ. 22 (1902), p. 43. .

unabhängigen Methode der Berechnung dieser numerischen Korrekturen  $R_*$ ,  $R_*''$ . Sie sind die Überschüsse der mit den Werten  $r_*$ ,  $r_*'$ ,  $r_*''$  bis mindestens  $\varepsilon^{\nu+2}$  inklusive genau gebildeten  $n$ ,  $n''$  über die mit den gleichen Werten berechneten Näherungsausdrücke ( $n$ ), ( $n''$ ):

$$(70) \quad R_* = n_* - (n)_*, \quad R_*'' = n_*'' - (n'')_*.$$

Berechnet man aber nach Nr. 13) aus  $r_*$ ,  $r_*'$ ,  $r_*''$  und den zugleich mit diesen bei der vorhergehenden Näherung bekannt gewordenen  $\nu + 1^{\text{ten}}$  Näherungswerten  $f_*$ ,  $f_*'$ ,  $f_*''$  der Zwischenwinkel die Verhältnisse  $\eta_*$ ,  $\eta_*'$ ,  $\eta_*''$  der drei Sektorflächen zu den zugehörigen Dreiecksflächen, so kann man in (70) nehmen:

$$(71) \quad n_* = \frac{\theta}{\theta'} \frac{\eta_*'}{\eta_*}, \quad n_*'' = \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\eta_*''}{\eta_*'}.$$

Denn der hiebei begangene Fehler rührt allein von der Ersetzung der zu  $r_*$ ,  $r_*'$ ,  $r_*''$  exakt gehörenden Werte der Zwischenwinkel durch die Werte  $f_*$ ,  $f_*'$ ,  $f_*''$  her, welche voneinander um Größen der Ordnung  $\varepsilon^{\nu+1}$  verschieden sind, da beide von den wirklichen Werten derselben bloß um solche abweichen, und dies ergibt in den  $\eta_*$ ,  $\eta_*'$ ,  $\eta_*''$  Fehler der Ordnung  $\varepsilon^{\nu+4}$ , so daß  $n_*$ ,  $n_*''$  sogar um eine Einheit genauer folgen als fürs erste nötig ist<sup>116)</sup>. Die so der  $\nu + 1^{\text{ten}}$  Näherung zugrunde zu legenden Ausdrücke (69) lassen sich noch leicht, ohne die erforderliche Genauigkeit zu unterschreiten, in die von *Gauß* verwandte Form bringen:

$$(72) \quad n = \frac{1}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r_*^3}\right), \quad n'' = \frac{P}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r_*'^3}\right),$$

$$(73) \quad P = \frac{n_*''}{n_*} = \frac{\theta'' \eta_*}{\theta \eta_*''},$$

$$Q = 2r_*'^3 (n_* + n_*'' - 1) = r_*'^3 \frac{\theta \theta''}{\eta_* \eta_*'' r_* r_*'' \cos f_* \cos f_*' \cos f_*''},$$

welche überdies den Vorteil besitzt, die Berechnung bloß von  $\eta_*$ ,  $\eta_*''$  zu erfordern.

Dies Verfahren wird erst in der „*Theoria motus*“ auseinandergesetzt, während bei den ersten Bahnbestimmungen der Ceres und Pallas *Gauß* sich entweder der Methode der Variation der geozentrischen Distanzen (Nr. 26) bediente oder auch nach Hinzufügung der Differenz Beob.-Rechn. zum beobachteten mittleren Orte zu einer neuen Bahnrechnung schritt.

116) Ein Verfahren aber, welches bei den folgenden Näherungen direkt die numerischen Werte  $n_*$ ,  $n_*''$  in die Grundgleichungen einführt, worauf im wesentlichen *W. Fabritius* Berechnung der richtigen Distanzen, Kiew 1877 und *Astr. Nachr.* 90 (1877), p. 127 hinauskommt, entbehrt hienach der theoretischen Grundlage seiner Konvergenz.

Aus der Tatsache, daß die auf obigem Wege ermittelten  $n_*$ ,  $n_*''$ , bis  $\varepsilon^{v+3}$  inklusive genau sind, erhellt die Möglichkeit, bei Ersetzung der Näherungsausdrücke ( $n$ ), ( $n''$ ) durch genauere bei jedem Schritt immer gleich um zwei Einheiten in der Genauigkeit zu steigen. Bei gleichen Zwischenzeiten ist dies bei der geschilderten *Gauß'schen* Methode von selbst der Fall, bei beliebigen Zwischenzeiten aber, wenn man mit *v. Oppolzer* obiges Approximationsverfahren an seine Methode anschließt. Aus der gleichen Tatsache erhellt aber auch die Unmöglichkeit, auf dem gleichen Wege etwa bei Verwendung der *Gibbs'schen* Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse um mehr als zwei Einheiten in der Genauigkeit bei jedem Schritt zu steigen.

Übrigens geht *Gibbs* auch hier einen anderen Weg. Da er die Elemente aus allen drei heliozentrischen Orten ohne Heranziehung der Zwischenzeiten bestimmt, so ist die Bedingung, der die strengen Werte der Distanzen genügen müssen, diese, daß die umgekehrt aus den Elementen und heliozentrischen Orten berechneten Zwischenzeiten  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}''$  den gegebenen  $\theta$ ,  $\theta''$  gleich sind. Dies mit beliebiger Genauigkeit zu erreichen, ersetzt er in den Ausdrücken (44) der  $n$ ,  $n''$  die  $\theta$ ,  $\theta''$  durch so zu bestimmende unbekannte Größen  $\tau$ ,  $\tau''$ , daß  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}''$ , die jetzt bestimmte Funktionen von  $\tau$ ,  $\tau''$  sind, gerade gleich  $\theta$ ,  $\theta''$  werden. Da nun allgemein sehr nahe  $\bar{\theta} = \tau$ ,  $\bar{\theta}'' = \tau''$  ist, so werden die  $\tau$ ,  $\tau''$  einfach durch sukzessive Iteration erhalten, indem man immer beim folgenden Schritt  $\tau$ ,  $\tau''$  ersetzt durch  $\tau + \theta - \bar{\theta}$ ,  $\tau'' + \theta'' - \bar{\theta}''$  und beim ersten natürlich wie vorhin  $\tau = \theta$ ,  $\tau = \theta''$  nimmt.

**15. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.** Fällt die Bahnebene des Planeten mit der Ekliptik zusammen, so sind alle geozentrischen Breiten Null, und da aus dem Verschwinden zweier Breiten bereits das jeder anderen folgt, so liefern hier drei Beobachtungen bloß fünf unabhängige Daten und lassen also die Bahn unbestimmt. Daher werden bei sehr geringer Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik die Elemente durch drei Beobachtungen sehr unsicher bestimmt sein. Diesen Übelstand zu beseitigen ersetzt man nach *Gauß*<sup>117)</sup> die Angabe der einen geozentrischen Breite durch jene der geozentrischen Länge einer vierten Beobachtung, oder man zieht allgemeiner gesprochen (*Oppolzer*)<sup>118)</sup> die acht Daten von vier Beobachtungen (der Zeiten  $t_1, t_2, t_3, t_4$ ) dadurch in sechs unabhängige zusammen, daß man die Angabe zweier der scheinbaren Orte ( $t_2, t_3$ ) ersetzt durch die zweier, je einen der beiden Orte enthaltender größter Kreise  $K_2, K_3$

117) *C. F. Gauß*, *Theoria motus*, art. 164 ff.

118) *Th. v. Oppolzer*, *Bahn.* 1, p. 413.

und stellt so die neue Aufgabe: jene Bahn zu finden, welche zwei Gerade und zwei Ebenen zu gegebenen Zeiten  $t_1, t_4$  und  $t_2, t_3$  schneidet. Die Grundgleichungen der auf den Prinzipien von Nr. 8 beruhenden Methode ihrer Bestimmung sind die aus der Anwendung der Relation (29) auf die Orte  $t_1, t_i, t_4$  mit  $K_i$  ( $i = 2, 3$ ) als Bezugkreis und der Relation (48) auf eben diese Orte folgenden Beziehungen<sup>119</sup>):

$$(74a, b) \quad \frac{\Delta_{4i}}{\Delta_{14}} (\varrho_1 \sin p_{1i} - R_1 \sin P_{1i}) + \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_{14}} (\varrho_4 \sin p_{4i} - R_4 \sin P_{4i}) + R_i \sin P_{ii} = 0, \quad (i = 2, 3),$$

$$(75a, b) \quad r_1 \frac{\Delta_{4i}}{\Delta_{14}} : r_i : r_4 \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_{14}} = \sin 2f_{4i} : \sin 2f_{14} : \sin 2f_{1i}, \quad (i = 2, 3),$$

nebst einer zu (49) analogen Gleichung (75c), welche den heliozentrischen Zwischenwinkel  $f_{14}$  trigonometrisch durch  $\varrho_1, \varrho_4$  ausdrückt.

Sie reichen in der Tat, den Zusammenhang zwischen  $r_h$  und  $\varrho_h$  bemerkt, gerade aus die Distanzen  $r_h$  samt den Zwischenwinkeln  $f_{hk}$  zu ermitteln, falls noch die Dreiecksverhältnisse wie früher durch ihre Ausdrücke in den  $r_h$  ersetzt werden. Hiezu hat man aber einerseits festzustellen, daß abweichend gegen früher bei Verwendung  $\nu^{\text{ter}}$  Näherungswerte der Dreiecksverhältnisse bloß  $\nu - 3^{\text{to}}$  Näherungswerte der Distanzen folgen, und andererseits zu beachten, daß bloß jene Näherungsausdrücke, die  $r_1, r_4$  allein enthalten, praktikabel sind, weil bei diesen dann (74 a, b) bloß die beiden Unbekannten  $r_1, r_4$  enthalten, und sich so die numerische Rechenarbeit auf die durch Versuche zu erfolgende Auflösung dieser zwei Gleichungen reduziert, während die übrigen Unbekannten sich nachher aus (75 a, b, c) direkt bestimmen. Obwohl hienach vierte Näherungswerte der Dreiecksverhältnisse die niedrigst zulässigen wären, so langt *Gauß*<sup>117</sup>) doch, wenigstens bei mäßiger Exzentrizität und nahe gleichen Zwischenzeiten, mit seinen Ausdrücken aus, weil die Glieder dritter Ordnung in ihnen für Kreisbahnen allgemein, für gleiche Zwischenzeiten aber vermöge seiner Vorschrift, die äußeren Orte als unvollständig zu wählen ( $t_3 < t_4 < t_1 < t_2$ ), verschwinden. Die gleiche Methode gibt auch *J. C. Watson*<sup>120</sup>).

*Th. v. Oppolzer*<sup>118</sup>) wählt zur Erhöhung der Genauigkeit der Bestimmung der Bahnlage die beiden inneren Orte als unvollständig ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ) und hat in den von ihm aufgestellten Ausdrücken (43) nun unmittelbar bloß  $r_1, r_4$  enthaltende vierte Näherungswerte der Dreiecksverhältnisse, denen er übrigens noch die mit der Exzentrizität nicht

119) Unter  $\Delta_{hk}$ ,  $2f_{hk}$  ist das Dreieck und der Winkel zwischen  $r_h, r_k$ , unter  $p_{ki}, P_{ki}$  der sphärische Abstand des Planeten und der Sonne zur Zeit  $t_k$  von  $K_i$  verstanden.

120) *J. C. Watson*, Theor. astr., p. 282.

verschwindenden Glieder vierter Ordnung hinzufügt, die ebenfalls durch  $r_1, r_4$  allein ausdrückbar sind. Die Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen erfolgt jedesmal genau so wie in Nr. 14, indem man immer mit den zuletzt gefundenen Näherungswerten der  $r_h, f_{hk}$  die  $\eta$ -Größen und aus diesen die numerischen Korrekturen der angewandten Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse bestimmt, durch deren Verwendung dann die nächsten Näherungswerte der Distanzen folgen. Die Elemente ergeben sich dann nach Nr. 13 aus zweien, am besten den beiden äußeren, der durch die Distanzen bekannt gewordenen heliozentrischen Orte.

Die *Gibbsschen* Ausdrücke der Dreiecksflächen zieht *W. Fabritius*<sup>121)</sup> heran.

Unter numerischer Diskussion der einzelnen Glieder der Reihenentwicklungen der Dreiecksflächen sucht *E. Coddington*<sup>122)</sup> ein vereinfachtes Verfahren aufzustellen, bei dem insbesondere die Korrektur der Dreiecksflächen statt durch Berechnung der  $\eta$ -Größen einfach durch Berechnung weiterer Glieder ihrer Reihenentwicklung erfolgt. Zur Ermittlung beiläufiger Näherungswerte der Distanzen gibt *A. Berberich*<sup>123)</sup> ein abgekürztes Verfahren. Verschiedene zweckdienliche Winke auch bei *Klinkerfues-Buchholz*<sup>124)</sup>.

**16. Bestimmung einer Kreisbahn.** Im Falle die zu bestimmende Bahn von vornherein als kreisförmig vorausgesetzt wird, wie dies zur Erlangung einer allerersten Orientierung über die Bahnlage eines neu entdeckten kleinen Planeten bisweilen geschieht, sinkt die Zahl der zu ermittelnden Elemente auf vier, indem mit der Exzentrizität auch die Perihellänge in Wegfall kommt, und es reichen also zu ihrer Bestimmung die vier Daten von zwei vollständigen Beobachtungen gerade aus. Da diese jetzt wieder zwei Gerade liefern, auf denen der Planet sich zu den Beobachtungszeiten befinden muß, und seine gleichzeitigen heliozentrischen Entfernungen immer gleich dem Radius der Bahn sind:  $r = r'' = a$ , erscheint die Lage der beiden Orte im Raum von der einzigen Unbekannten  $a$  abhängig, zu deren Bestimmung man nun die Bedingung heranzuziehen hat, daß der von den Radienvektoren der beiden Orte eingeschlossene Winkel  $2f'$  den vom zweiten *Keplerschen* Gesetz geforderten Wert  $\frac{\theta'}{a^{3/2}}$  hat. Dies liefert

121) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 128 (1891), p. 321.

122) *E. Coddington*, Dissertation, Berlin 1902.

123) *A. Berberich*, Veröffentl. d. kgl. Recheninst. Nr. 20 (1902), p. 81.

124) *W. Klinkerfues-H. Buchholz*, Theor. Astr., p. 460.

nach Nr. 11 Gl. (49) die Gleichung:

$$(76) \quad \sin^2 \frac{\theta'}{2\alpha'^2} = \sin^2 \frac{\alpha - \alpha''}{2} \cos^2 \frac{J}{2} + \sin^2 \frac{\alpha + \alpha''}{2} \sin^2 \frac{J}{2},$$

$$\alpha = \varphi + \psi + z, \quad \alpha'' = \varphi'' + \psi'' + z'',$$

$$\sin z = \frac{R}{a} \sin \psi, \quad \sin z'' = \frac{R''}{a} \sin \psi'',$$

welche durch Versuche nach  $a$  aufzulösen ist, worauf die übrigen Elemente  $\Omega, i, \varepsilon$  aus den jetzt bekannt gewordenen beiden heliozentrischen Orten folgen<sup>125</sup>). Die Frage, wann den beiden Beobachtungen durch eine Kreisbahn nicht genügt werden kann, also (76) keine reelle Lösung zuläßt, behandelte unter der Voraussetzung, daß die Beobachtungen nahe der Ekliptik gelegen und der Opposition zeitlich benachbart sind, *F. Tisserand*<sup>126</sup>) und zeigte, daß dies dann eintritt, wenn die Bewegung in Breite eine gewisse Grenze übersteigt. Seine Darlegung vereinfachte *H. Bourget*<sup>127</sup>).

Die Aufgabe, aus drei Beobachtungen eines in der Ekliptik sich bewegendem Planeten eine Kreisbahn und gleichzeitig die Konstante  $k$  zu bestimmen, behandelt *G. W. Hill*<sup>128</sup>).

#### b) Kometenbahnen.

**17. Formulierung der Aufgabe. Grundgleichungen.** Im Falle die zu bestimmende Bahn von vornherein als Parabel vorausgesetzt wird, wie dies bei einer ersten Kometenbahnbestimmung ausnahmslos geschieht, erscheinen die noch übrigen fünf Elemente durch die sechs Daten dreier Beobachtungen überbestimmt, und man zieht deshalb die beiden Angaben der mittleren Beobachtung dadurch in eine einzige zusammen, daß man einen noch beliebig zu fixierenden größten Kreis  $K$  durch den mittleren Kometenort auf der scheinbaren Himmelskugel legt, und dann allein die Bedingung benutzt, daß der mittlere Ort auf  $K$  liegen soll — mit anderen Worten, man ersetzt in der Formulierung von Nr. 7 der allgemeinen Bahnbestimmungsaufgabe die Gerade  $E'H$  durch eine sie enthaltende Ebene. Dies hat zur Folge, daß man von den drei in (29) enthaltenen Grundgleichungen bloß die eine bei Wahl von  $K$  als Bezugskreis resultierende bilden kann; also mit den Bezeichnungen von Gl. (29) und Berücksichtigung

125) *Klinkerfues-Buchholz*, Theor. Astr., p. 237 (nach mündl. Mitt. v. *Gauß*).

126) *F. Tisserand*, Paris C. R. 119 (1894), p. 881. Paris Bull. astr. 12 (1895), p. 53.

127) *H. Bourget*, Paris Bull. astr. 23 (1906), p. 81.

128) *G. W. Hill*, Proc. of the Amer. Acad. 3 (1870), p. 201 = Works 1, p. 77; The Analyst. 1 (1874), p. 43 = Works 1, p. 170.

daß  $p' = 0$  ist:

$$(77) \quad \varrho'' = M\varrho + m,$$

$$(78) \quad M = -\frac{n \sin p}{n'' \sin p''},$$

$$m = \frac{1}{n'' \sin p''} (nR \sin P + n''R'' \sin P'' - R' \sin P').$$

Diese erste Grundgleichung enthält nun bloß  $\varrho, \varrho''$  oder die mit diesen in einfacher geometrischer Beziehung stehenden  $r, r''$  als Unbekannte. Denn hier bei der Parabel sind, wie eine Konstantenzählung lehrt, oder aus Nr. 9 wegen  $\frac{1}{a} = 0$  hervorgeht,  $n, n''$  durch  $r, r'', \theta, \theta''$  allein, ohne Heranziehung von  $r'$  ausdrückbar.

In endlicher Form sind hier die Dreiecksverhältnisse in ihrer Abhängigkeit von den beiden äußeren Radien und den Zwischenzeiten durch die von *F. W. Bessel*<sup>129)</sup> hergeleiteten beiden kubischen Gleichungen gegeben:

$$(79) \quad 4x^3 - 3(r + r'')x + \theta + \theta'' = 0$$

$$y^3 - \frac{3}{4} \frac{r'' - r}{x} y^2 + \frac{3}{2} (r + r'' - 2x^2)y + \frac{3}{4} (r'' - r)x - \frac{1}{2} (\theta'' - \theta) = 0,$$

$$n = x - y, \quad n'' = x + y.$$

Die zur Bestimmung von  $r, r''$  nötige zweite Grundgleichung bildet dann der *Eulersche Satz*:

$$(80) \quad 6\theta' = (r + r'' + s)^{3/2} - (r + r'' - s)^{3/2},$$

da die Sehne  $s = HH''$  ebenfalls mit  $r, r''$  in einfacher trigonometrischer Beziehung steht.

Diese beiden Gleichungen müssen nun wieder dadurch erst traktabel gemacht werden, daß man in der ersten für  $n, n''$  passende Näherungsausdrücke verwendet, wobei man überdies aus der noch willkürlichen Lage von  $K$  wird Nutzen zu ziehen haben. In dieser Richtung hin ist es wesentlich festzustellen, daß, wie zuerst *Th. Clausen*<sup>130)</sup> klargelegt hat, es hier, um  $r, r''$  bis Größen der Ordnung  $\varepsilon^v$  exklusive genau zu erhalten, genügt für  $M, m$  bis Größen der Ordnung  $\varepsilon^{v+1}$  exklusive genaue Werte einzuführen. Solche zu erhalten, genügt es bei allgemeiner Lage von  $K$  für  $n, n''$  bis  $\varepsilon^{v+1}$  exklusive genaue Werte zu verwenden, wofern diese nur  $n + n''$  bis  $\varepsilon^{v+2}$  exklusive genau geben; bei der *Obersschen* Wahl von  $K$  aber genügt hiezu, daß  $n/n''$  bis  $\varepsilon^{v+1}$  exklusive genau ist.

129) *F. W. Bessel* in der Zeitschrift: „Astronomische Abhandlungen“, hrsg. v. *Schumacher*, Heft 2, Altona 1823. Abgedruckt in *Bessel*, Abh. 1, p. 13.

130) *Th. Clausen*, St. Pétersb. bull. (phys.) 10 (1852), p. 175; vgl. auch *J. F. Encke*, Berlin astr. Jahrb. für 1856, p. 362.

18. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen nach der Methode von W. Olbers<sup>131</sup>). Diese liefert im allgemeinen erste, bei gleichen Zwischenzeiten,  $\theta = \theta''$ , aber zweite Näherungswerte der Distanzen.

Bei ihr wird zunächst der größte Kreis  $K$  durch den mittleren Sonnenort gelegt, wonach  $p, p'', P, P''$  im allgemeinen Größen der Ordnung  $\varepsilon$  sind und  $P' = 0$  wird, so daß nach (30) aus (78):

$$(81) \quad M = -\frac{n \sin p}{n' \sin p''}, \quad m = \frac{n \sin P}{n'' \sin p''} R + \frac{\sin P'}{\sin p''} R'' = \left(\frac{n}{n'} - \frac{N}{N'}\right) \frac{\sin P}{\sin p''} R$$

folgt. Für  $M, m$  werden nun niedrigst zulässige, also zweite Näherungsausdrücke verwendet. Solche sind aber, da  $m$  durch die besondere Wahl von  $K$  von der Ordnung  $\varepsilon^2$  bei gleichen Zwischenzeiten von der Ordnung  $\varepsilon^3$  geworden ist:

$$(82) \quad M = -\frac{\theta \sin p}{\theta'' \sin p''}, \quad m = 0,$$

welche Ausdrücke im besondern bei gleichen Zwischenzeiten dritte Näherungswerte repräsentieren. Die Bestimmung von  $r, r''$  aus den durch die geometrischen Beziehungen zwischen  $r, r''$  und  $\varrho, \varrho'', s$  zu ergänzenden Gleichungen (77) und (80) wird dann von Gauß<sup>132</sup>) auf die Ermittlung einer einzigen mit  $\varrho$  linear zusammenhängenden Unbekannten  $u$  zurückgebracht, durch die sich  $s$  und  $r + r''$  in der Form darstellen:

$$(83) \quad s = \sqrt{u^2 + A^2}, \quad r = \sqrt{\alpha(u + \beta)^2 + \gamma^2}, \quad r'' = \sqrt{\alpha''(u + \beta'')^2 + \gamma''^2}$$

und die nun so zu bestimmen ist, daß diese Werte die Eulersche Gleichung (80) erfüllen. Dies geschieht durch Anwendung der regula falsi oder eine Art fortgesetzter Iteration. Auch kann die Enckesche Behandlung der Eulerschen Gleichung (vgl. Nr. 19) hiebei mit Vorteil benutzt werden.

Eine der Olbersschen im wesentlichen gleiche Methode hat, worauf W. Fabritius<sup>133</sup>) aufmerksam machte, bereits A. Du Séjour<sup>134</sup>) vorgeschlagen. Auch J. Lambert<sup>135</sup>) kam derselben äußerst nahe und benutzte später<sup>136</sup>) direkt die Olberssche Gleichung (77) mit den Werten (82), was des näheren R. Vogel<sup>137</sup>) und J. Bauschinger<sup>138</sup>) erörtern.

131) W. Olbers, Abh. über Kometenbahnen = Werke 1, p. 3.

132) C. F. Gauß, Monatl. Corr. 28 (1813), p. 501; Gött. Com. soc. reg. 2 (1813) = Werke 6, p. 25.

133) W. Fabritius, Astr. Nachr. 106 (1883), p. 87.

134) A. P. Dionis du Séjour, Paris Hist. 1779, Mém. p. 51.

135) J. Lambert, Insign. propr. 1761, probl. 31.

136) J. Lambert, Berlin Mém. 1771, p. 352.

137) R. Vogel, Astr. Nachr. 136 (1894), p. 83.

138) J. Bauschinger, Astr. Nachr. 136 (1894), p. 83.

Läßt man ferner insbesondere die Zwischenzeiten  $\theta$ ,  $\theta''$  nach Null konvergieren, so gehen die Grundgleichungen der *Obersschen* Methode in diejenigen der auf parabolische Bahnen zugeschnittenen *Laplace'schen* Methode (vgl. Nr. 12) über:

$$(84) \quad \rho \frac{d^2 p}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{dp}{dt} = 0, \quad V^2 = \frac{2k^2}{r},$$

in denen  $V$  die Geschwindigkeit des Kometen in seiner Bahn,  $p$  aber den jeweiligen sphärischen Abstand des scheinbaren geozentrischen Kometenortes von jenem größten Kreise bezeichnet, der zur „Beobachtungszeit“ diesen mit dem gleichzeitigen Sonnenort verbindet. Die erste Gleichung kann auch unmittelbar als Ausdruck der Tatsache gefunden werden, daß die Relativbeschleunigung des Kometen gegen die Erde in der Ebene von Sonne—Erde—Komet liegt. Aus beiden Gleichungen folgt, die kinematische Beziehung zwischen  $\frac{d\rho}{dt}$  und  $V$  hinzugedacht, eine Gleichung 6<sup>ten</sup> Grades für  $\rho$ , welches wieder der niedrigste Grad ist, auf den das Kometenproblem reduzierbar ist. Sind indessen die ersten und die zweiten Differentialquotienten der beiden Koordinaten des scheinbaren Ortes vollständig gegeben, so kann durch Hinzunahme der Relation  $V^2 = \frac{2k^2}{r}$  zu dem System (50)  $\rho$  im Prinzip rational gefunden werden, worauf neuerdings *L. Picart*<sup>139)</sup> zurückkommt. Das Verhältnis der *Laplace'schen* zur *Obersschen* Methode erörtert *R. Radau*<sup>140)</sup>. Die mehrfachen Lösungen des Kometenproblems untersucht *Th. v. Oppolzer*<sup>141)</sup>, indem er die Eulersche Relation näherungsweise durch  $s^2 = \frac{2\theta'^2}{r}$  ersetzt und zeigt, daß die dann resultierende Gleichung 6<sup>ten</sup> Grades für  $\rho$  immer nur eine oder drei reelle positive Wurzeln besitzt. Dieselbe Frage behandelt dann *E. Pasquier*<sup>142)</sup>.

**19. Bestimmung der Elemente aus den Distanzen.** Die die Bahnlage fixierenden Elemente  $i$ ,  $\Omega$  ergeben sich wie bei Planetenbahnen sofort trigonometrisch aus den durch  $\rho$ ,  $\rho''$  bekannt gewordenen heliozentrischen Orten. Den Weg zur Bestimmung der übrigen Elemente eröffnet die Ermittlung der Gestalt der Parabel, also des Parameters  $p$ , welche hier abweichend von Nr. 13<sup>143)</sup> durch die beiden

138) *J. Bauschinger*, Veröffentl. d. Kgl. Recheninstitutes Nr. 20, (1902), p. 1.

139) *L. Picart*, Paris. Bull. astr. 16 (1899), p. 412; Paris C. R. 129 (1899), p. 17.

140) *R. Radau*, Paris. Bull. astr. 4 (1887), p. 409; Paris C. R. 105 (1887), p. 457.

141) *Th. v. Oppolzer*, Wien Ber. 86 (1882), p. 885; *Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 308.

142) *E. Pasquier*, Belg. Bull. (3) 32 (1896), p. 111.

143) Die dortigen Formeln auf die Parabel anzuwenden, hat man bloß zu bemerken, daß für diese stets  $x = 0$  ist.

Radien  $r, r''$  und die Zwischenzeit  $\theta'$  allein bestimmt erscheint, da der dort unter Zuhilfenahme der Beobachtungen abgeleitete Zwischenwinkel  $2f''$  hier vermöge der Sehne  $s$  gefunden werden kann, welche selbst wieder aus (80) zu berechnen ist. Letzteres geschieht nach *J. F. Encke*<sup>144</sup>) praktisch durch:

$$(85) \quad s = (r + r'') \sin \gamma, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{3}, \quad \sin \vartheta = \frac{3\theta'}{\sqrt{2}(r + r'')^{3/2}}$$

oder durch Benutzung der ebenfalls von *J. F. Encke*<sup>153</sup>) entworfenen  $\mu$ -Tafel, welche mit dem Argument  $\frac{2\theta'}{(r + r'')^{3/2}}$  den Wert von

$$(86) \quad \mu = \frac{3 \cos \frac{\gamma}{2}}{2 + \cos \gamma} \text{ gibt, mit welchem } s = \frac{2\theta'}{\sqrt{r + r''}} \mu \text{ folgt.}$$

Da sich weiter das Verhältnis von Sektor zu Dreieck in der Form darstellt:

$$(87) \quad \eta' = \frac{2 + \cos \gamma}{3 \cos \gamma} = \frac{1}{\sqrt{9 - 8\mu^2}},$$

so ist hienach auch der Parameter:

$$(88) \quad \sqrt{p} = \frac{\eta' r r'' \sin 2f''}{\theta'} = \sqrt[4]{r r''} \frac{\sin f''}{\sin \frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\cos \gamma}{2 \cos \gamma}}$$

gegeben. Nach dessen Bestimmung aber folgen Perihellänge  $\bar{\omega}$  und Perihelzeit  $t_0$  ohne weiteres aus den Gleichungen der parabolischen Bewegung.

**20. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen.** Auch für das weitere auf den Prinzipien von Nr. 14 beruhende Approximationsverfahren zur Auffindung beliebig genauer Werte der Distanzen gestalten sich bei der *Olberrschen* Wahl von  $K$  die Verhältnisse besonders günstig. Um  $\nu + 1^{\text{te}}$  Näherungswerte der Distanzen zu erhalten, genügt es, für  $\frac{n}{n''}$  einen  $\nu + 2^{\text{ten}}$  Näherungswert in  $M$  und  $m$  einzuführen. Hat nun eine vorhergehende Näherung  $\nu^{\text{te}}$  Näherungswerte  $r_*, r_*''$  der Distanzen ergeben, so wird man einen Fehler der erlaubten Ordnung  $\varepsilon^{\nu+2}$  (bei gleichen Zwischenzeiten der Ordnung  $\varepsilon^{\nu+3}$ ) begehen, wenn man ebendiese in den Ausdruck von  $\frac{n}{n''}$  durch  $r, r'', \theta, \theta''$

144) *J. F. Encke*, Berl. astr. Jahrb. für 1833, p. 264. Eben diese Umformung bei *A. P. Dionis du Séjour* Paris Hist. 1779, Mém. p. 51; ferner in *Gauß* Nachlaß Werke 7, p. 327, früher von *Klinkerfues* mitgeteilt Gött. Abh. 10, p. 196 unter Beifügung einer Tafel für  $\mu$  und  $\eta'$ . Eine ebensolche bei *B. Nicolai*, Astr. Nachr. 10 (1833), p. 233 und *J. Bauschinger*, Tafeln, Nr. 22 und 24.

einsetzt, und man wird also für  $M$  und  $m$  die numerischen Werte:

$$(89) \quad M_* = -\frac{n_* \sin p}{n_*'' \sin p''}, \quad m_* = \frac{n_* \sin P}{n_*'' \sin p''} R + \frac{\sin P''}{\sin p''} R''$$

verwenden können. Einen Fehler ebenderselben Ordnung begehend, kann man aber weiter  $m_*$  auch durch  $\frac{\varrho}{\varrho_*} m_*$  ersetzen, was darauf hinauskommt, die Grundgleichungen mit den Werten:

$$(90) \quad M = M_* + \frac{m_*}{\varrho_*}, \quad m = 0,$$

anzusetzen, so daß die Ermittlung  $\nu + 1^{\text{ter}}$  Näherungswerte aus  $\nu^{\text{ten}}$  wieder durch formal genau ebendieselben Gleichungen geschieht wie unter Nr. 18 die erster. Gleichzeitig erhellt aus den angegebenen Fehlerordnungen, daß bei gleichen Zwischenzeiten dies Verfahren bei jedem Schritt stets um zwei Einheiten genauere Werte der Distanzen liefert.

Die Berechnung von  $\frac{n_*}{n_*''}$  aus  $r_*$ ,  $r_*''$ ,  $\theta$ ,  $\theta''$  kann hier streng entweder durch die *Besselschen* Gleichungen (79) geschehen, oder dadurch, daß man auf Nr. 19 basierend noch  $r_*'$  und damit  $\eta_*$ ,  $\eta_*''$  ermittelt. Mit einer wenigstens für die ersten Schritte, die aber in der Praxis stets ausreichen, genügenden Genauigkeit kann man sich nach *E. Weiß*<sup>145)</sup> und *W. Fabritius*<sup>146)</sup> hiezu auch mit Vorteil des *Gibbsschen* Ausdruckes bedienen:

$$(91) \quad \frac{n_*}{n_*''} = \frac{\theta}{\theta''} \frac{1 + \frac{\theta' \theta'' - \theta^2}{12 r_*'^3}}{1 + \frac{\theta' \theta'' - \theta''^2}{12 r_*''^3}},$$

welcher im allgemeinen bis zu dritten Näherungswerten der Distanzen in drei Schritten, bei gleichen Zwischenzeiten aber bis zu vierten Näherungswerten in zwei Schritten führt. Endlich kann auch bei den weiteren Näherungen die Auflösung der mit dem verbesserten  $M$  gebildeten Grundgleichungen dadurch umgangen werden, daß man die Änderung von  $M$  als differentiell betrachtet und den Differentialquotienten  $\frac{d\varrho}{dM}$  aus (77), (80) bildet. Den Ausdruck für  $\frac{d^2\varrho}{dM^2}$  leitet *A. O. Leuschner*<sup>147)</sup> ab, und gibt gleichzeitig Formeln für die differentiellen Änderungen der Elemente bei Variation von  $\varrho$ ,  $\varrho''$ . Ein von obigem verschiedenes sukzessives Näherungsverfahren hat *Carlini* in Vorschlag gebracht. Man kann nämlich auch die strengen

145) *E. Weiß*, Wien Ber. 100 (1891), p. 1132.

146) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 128 (1891), p. 225.

147) *A. O. Leuschner*, Berlin. Dissertation 1897.

Werte der Distanzen mit der Annahme (82) bestimmt denken, wofern man bloß den Bezugskreis  $K$  nicht mehr durch den mittleren Kometenort gehen läßt, sondern unter Festhaltung seines Knotens seine Neigung  $\tau$  abändert. Und zwar wird dieses  $\tau$  so zu bestimmen sein, daß wenn man mit den aus  $\varrho, \varrho''$  folgenden Elementen, den Ort für die Zeit der mittleren Beobachtung berechnet, die Neigung  $\bar{\vartheta}$  des durch ihn und den mittleren Sonnenort gelegten Kreises der beobachteten  $\vartheta$  gleich ist:  $\bar{\vartheta} = \vartheta$ . Da nun wieder allgemein bis auf Größen höherer Ordnung  $\bar{\vartheta} = \tau$  ist, so findet man  $\tau$  durch sukzessive Iteration, indem man immer beim folgenden Schritt  $\tau$  ersetzt durch  $\tau + \vartheta - \bar{\vartheta}$  und beim ersten natürlich wie vorhin  $\tau = \vartheta$  setzt.

**21. Ausnahmefälle. Methode von Gauß.** Die Konvergenz der *Obersschen* Methode erscheint in dem Falle zunächst wenigstens fraglich, in welchem  $p, p''$  von höherer als erster Ordnung in  $\varepsilon$  sind, also die drei scheinbaren Kometenorte und der mittlere scheinbare Sonnenort sehr nahe auf einem größten Kreise liegen. Einerseits wird dann nämlich  $m$  von niedrigerer als zweiter Ordnung in  $\varepsilon$ , also nicht zu vernachlässigen sein, andererseits erscheint auch  $M$  numerisch recht unsicher bestimmt. Nun läßt sich durch andere Wahl von  $K$ , etwa normal zu dem die beiden äußeren Kometenorte verbindenden größten Kreise, oder nach *E. Weiß*<sup>148)</sup> so, daß sein Knoten in der Ekliptik um  $90^\circ$  von der Mitte zwischen den beiden äußeren Sonnenorten absteht, sofort erreichen, daß  $p, p''$  von erster Ordnung, also  $M$  numerisch sicher bestimmbar ist. Dagegen bleibt  $m$  auch dann noch, wie (30) lehrt, von erster Ordnung, wird aber doch durch den in seinen Gliedern niederster Ordnung auftretenden Faktor  $\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}$  in den meisten Fällen erheblich verkleinert, da die Kometen zumeist in Erdnähe entdeckt werden. *Th. v. Oppolzer*<sup>149)</sup> behält in solchen Fällen  $m$  bei und ersetzt  $n, n''$  durch die beiden ersten bloß von  $r + r''$  abhängigen Glieder seiner Näherungsausdrücke (43), wonach seine Grundgleichungen freilich nicht mehr auf die einfache *Obers-Gaußsche* Form reduzierbar sind. Sie liefern wie diese im allgemeinen erste, bei gleichen Zwischenzeiten aber zweite Näherungswerte der Distanzen.

Indessen findet sich im Nachlasse von *C. F. Gauß*<sup>150)</sup> eine Methode ausgearbeitet, der die gleiche Genauigkeit wie der *Obersschen*

148) *E. Weiß*, Wien. Ber. 92 (1885), p. 1456, wo auch ein weiterer Kunstgriff zur genaueren Berechnung von  $M$  angegeben wird.

149) *Th. v. Oppolzer*, Wien. Ber. 57 (1868), p. 219; 60 (1870). p. 918; 64 (1871). p. 676.

150) *C. F. Gauß*, Werke 7, p. 332–350.

zukommt, aber bei beliebiger Wahl von  $K$  und einem ebenso einfachen Rechenschema. *Gauß* setzt in der Grundgleichung:

$$(92) \quad \frac{n}{n'} = \frac{\theta}{\theta'}, \quad n + n'' = \frac{1}{1 - \frac{4\theta\theta'}{(r+r'')^3}},$$

was im allgemeinen  $n, n''$  bis  $\varepsilon^2$  und  $n + n''$  bis  $\varepsilon^3$  exklusive genau wiedergibt, bei gleichen Zwischenzeiten  $\theta = \theta'$  aber bis  $\varepsilon^3$  bzw.  $\varepsilon^4$  exklusive, und erhält damit aus (29) statt der *Obersschen* Relation  $\varrho'' = M\varrho$ :

$$(93) \quad M\varrho + M'\varrho'' + \mu = \frac{1}{(r+r'')^3}$$

und hiemit bei Einführung einer Hilfsgröße  $u$  analog zu (83):

$$(94) \quad s^2 = u^2 + A^2 + \left( \frac{B}{(r+r'')^3} + C \right)^2,$$

$$(95) \quad r^2 = \alpha \left( u + \beta + \frac{\delta}{(r+r'')^3} \right)^2 + \gamma^2,$$

$$r''^2 = \alpha'' \left( u + \beta'' + \frac{\delta''}{(r+r'')^3} \right)^2 + \gamma''^2.$$

Die *Eulersche* Relation (80) aber ersetzt nun *Gauß* mit großer Annäherung durch:

$$(96) \quad s = \frac{2\theta'}{\sqrt{r+r''} \sqrt[14]{1 - \frac{7\theta'^2}{3(r+r'')^3}}}$$

und geht nun zur Auffindung von  $r, r'', s, u$  in der Weise vor, daß zu einem angenommenen Werte von  $r + r''$  aus (96)  $s$ , damit aus (94)  $u$ , und damit aus (95)  $r, r''$  berechnet werden, wobei dann  $r + r''$  dem angenommenen Werte gleichkommen muß, was durch Iteration oder Anwendung der *regula falsi* sehr rasch erreicht wird. Statt (96) werden übrigens noch verschiedene andere Formen benutzt und auch ein besonderes Verfahren<sup>151)</sup> zur Herleitung der Elemente aus  $r, r'', s$  gegeben.

22. Korrekturen wegen Parallaxe und Aberration. Da die durch die Beobachtung gelieferten Visionsstrahlen nicht unmittelbar die in Nr. 7 zugrunde gelegten Verbindungsgeraden zwischen Erdmittelpunkt und Himmelskörper darstellen, sondern die noch durch die Aberration verfälschten Verbindungsgeraden zwischen dem Beobachtungsorte und dem Himmelskörper, so müßten noch durch Anbringung der Korrekturen wegen Parallaxe und Aberration jene aus diesen hergeleitet werden. Da nun einerseits die zur Reduk-

151) C. F. *Gauß*, Werke 7, p. 327.

tion des beobachteten Ortes auf den Erdmittelpunkt nötige geozentrische Distanz des Himmelskörpers von vornherein unbekannt ist, und sich andererseits die Rechnungen zur Ermittlung der Bahn etwas vereinfachen, wenn die drei Erdorte mit der Sonne in einer Ebene liegen, so legt man nach *Gauß*<sup>152)</sup> zur Elimination der Parallaxe die Durchschnittspunkte der Visionsstrahlen mit der Ekliptik als fiktive Erdorte (*locus fictus*) der Bahnbestimmung zugrunde, bringt also eine entsprechende Korrektur an den den Tafeln entnommenen Koordinaten der Erde an. Der Einfluß der Aberration<sup>153)</sup> dagegen muß zunächst unberücksichtigt bleiben, und erst nach Erlangung der ersten Näherungswerte der geozentrischen Distanzen können die diesbezüglich korrigierten Beobachtungsdaten gewonnen werden, welche dann der Ermittlung der nächsten Näherung zugrunde zu legen sind. Hierbei handelt es sich noch darum, diese Korrektur in einer solchen Weise anzubringen, daß möglichst wenige von den schon für die erste Näherung aus den Beobachtungen abgeleiteten Hilfsgrößen geändert werden. Dies wird erreicht, indem man ausgehend von der Bemerkung, daß der von der Fixsternaberration befreite, beobachtete Ort gleich dem vom selben Erdort aus gesehenen, wirklichen Ort zur Zeit  $t - \frac{\rho}{c}$  ist, die von  $\rho$  unabhängige Fixsternaberration gleich von vornherein an den Beobachtungen anbringt, und nach Erlangung der ersten Näherungswerte der Distanzen jede Beobachtungszeit um die zugehörige Lichtzeit verringert, und so mit alleiniger Abänderung der Zwischenzeiten zur nächsten Näherung schreitet.

### III. Definitive Bahnbestimmung.

**23. Allgemeine Formulierung der Aufgabe.** Die für die Konvergenz der Bahnbestimmungsmethoden aus drei Beobachtungen notwendige Voraussetzung kleiner Zwischenzeiten hat zur Folge, daß die den Beobachtungen anhaftenden Fehler solche von erheblichem Betrage in den Elementen erzeugen, die sich dann in den mit der Zeit anwachsenden Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Orten zu erkennen geben. Es wird durch diese Elemente also nur eine erste vorläufige Bahn festgelegt und aus weiteren Beobachtungen eine genauere definitive Bahn zu ermitteln sein. Hierbei wird man einerseits sich durch die Kenntnis der genäherten ersten Bahn von der Beschränkung auf zeitlich benachbarte Beobachtungen befreien, andererseits zur Erreichung möglicher Genauig-

152) *C. F. Gauß*, *Theoria motus*, art. 117.

153) *C. F. Gauß*, *Theoria motus*, art. 118.

keit gleich sämtliche bekannten Beobachtungen heranziehen, indem man die definitive Bahnbestimmung als Bahnverbesserungsaufgabe im Anschluß an die Ausgleichsrechnung so formuliert: eine bekannte vorläufige Bahn so zu korrigieren, daß die Quadratsumme der scheinbaren geozentrischen Abstände der beobachteten Orte von den gleichzeitigen berechneten Orten ein Minimum wird. Die Grundlage ihrer Behandlung bildet die Voraussetzung, daß die an den vorläufigen Elementen oder irgend sechs Bestimmungsstücken der Bahn anzubringenden Korrekturen genügend klein sind, um ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen zu können.

#### 24. Methoden mit gleichmäßiger Berücksichtigung aller Orte.

Sind daher in einem beliebigen geozentrischen Koordinatensystem zu irgend einer der Beobachtungszeiten Länge und Breite des aus der vorläufigen bzw. definitiven Bahn berechneten und des beobachteten Ortes:  $L, B$ , bzw.  $L + \delta L, B + \delta B$  und  $L + \delta' L, B + \delta' B$ , und führt man die kleinen sphärischen Abstände der beiden letzten Orte von dem durch den ersten gehenden Längen- und Breitenkreis ein:

$$(97) \quad \begin{aligned} \delta\sigma &= \cos B \delta L, & \delta'\sigma &= \cos B \delta' L, \\ \delta\tau &= \delta B, & \delta'\tau &= \delta' B, \end{aligned}$$

so wird zuvörderst sein sollen:

$$(98) \quad \mathcal{A} = \Sigma[(\delta\sigma - \delta'\sigma)^2 + (\delta\tau - \delta'\tau)^2] = \text{Minimum.}$$

Hier sind jetzt  $\delta'\sigma, \delta'\tau$  bekannte numerische Größen,  $\delta\sigma, \delta\tau$  aber nach Voraussetzung homogene, ganze lineare Verbindungen mit bekannten numerischen Koeffizienten der unbekanntenen sechs Korrekturen irgend welcher sechs Bestimmungsstücke der Bahn, die sich sonach aus sechs linearen Gleichungen bestimmen. Die Wahl dieser Bestimmungsstücke und die Entwicklung der analytischen Ausdrücke der  $\delta\sigma, \delta\tau$ , also die Bildung der Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach jenen, ist nun Sache der speziellen Methode. Am unmittelbarsten bieten sich hier als Bestimmungsstücke die Elemente selbst dar, welche Wahl der bereits von *C. F. Gauß*<sup>154</sup>) verwandten und seither am meisten benutzten und bearbeiteten Methode der Variation der Elemente zugrunde liegt. (Über die Ausdrücke der  $\delta\sigma, \delta\tau$  bei dieser vgl. Nr. 25.) *U. J. Leverrier*<sup>155</sup>) brachte die Wahl der dreien der Beobachtungszeiten entsprechenden geozentrischen

154) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 187 und *C. F. Gauß*, De elementis ellipticis Palladis, Gött. Com. soc. reg. 1 (1811) = Werke 6, p. 3, abgedr. in *Börsch-Simon*, Gauß' Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, Berlin 1887.

155) *U. J. Leverrier*, Paris C. R. 20 (1845), p. 1071. Astr. Nachr. 23 (1846), p. 183.

Orte in Vorschlag, derart, daß die diesen Zeiten zugehörigen  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  die Unbekannten der Aufgabe werden, was den Vorteil gewährt, bei den Koeffizienten in den Ausdrücken der übrigen  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  mit wenig Ziffern auszureichen. Seither ist nur *R. Radau*<sup>156)</sup> auf diese Methode kurz zurückgekommen. *Th. v. Oppolzer*<sup>157)</sup> wählte die einer mittleren Epoche zugehörigen rechtwinkligen, heliozentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten des Himmelskörpers als Bestimmungsstücke. Da nämlich von diesen die heliozentrischen Koordinaten zu einem benachbarten Zeitpunkte nahe linear abhängen, so wird, wenn das Beobachtungsmaterial einen mäßigen Zeitraum (etwa eine Opposition) umspannt, bei dieser Wahl der Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Korrekturen eine erhöhte Genauigkeit zukommen. Ergänzungen zu dieser Methode hat *F. Kühnert*<sup>158)</sup> gegeben.

Den gleichen Vorteil zu erreichen hat *F. Tietjen*<sup>159)</sup> die vollständigen, zweien der Beobachtungszeiten zugehörigen geozentrischen Koordinaten als Bestimmungsstücke gewählt, die  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  aber wegen der Kompliziertheit ihrer Ausdrücke nur für zeitlich benachbarte Beobachtungen entwickelt.

**25. Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen.** Um für die Methode der Variation der Elemente die Größen  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  oder gleich vollständiger  $\delta\rho$ ,  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  durch die Änderungen der sechs Bahnelemente auszudrücken, hat man nach dem Vorgange von *Th. Clausen*<sup>160)</sup> und *W. Goetze*<sup>161)</sup> die Bemerkung zu benutzen, daß  $\delta\rho$ ,  $\rho\delta\sigma$ ,  $\rho\delta\tau$  die Komponenten der Verrückung  $\delta s$  sind, welche der Planetenort im Raume durch die Variation der Elemente bei festgehaltenem  $t$  erfährt, und zwar genommen nach den drei zueinander normalen Richtungen  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ , gebildet vom Visionsstrahl  $\rho$  und den Tangente  $\sigma$  bzw.  $\tau$ , welche in dem scheinbaren, geozentrischen Orte des Himmelskörpers an den durch ihn gehenden Breiten-, bzw. Längengrad gelegt werden. Die Verrückung  $\delta s$  selbst aber wird, wenn  $R$  die Richtung des Radiusvektors des Himmelskörpers,  $T$  die Normale seiner Bahnebene und  $S$  die zu diesen beiden normale Richtung bedeutet, in einfachster Weise durch ihre nach diesen drei Richtungen genommenen Komponenten  $\delta R$ ,  $\delta S$ ,  $\delta T$

156) *R. Radau*, Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 401.

157) *Th. von Oppolzer*, Berlin Ber. 1878, p. 583; *Oppolzer*, Bahnb. 2, p. 428.

158) *F. Kühnert*, Astr. Nachr. 95 (1879), p. 145.

159) *F. Tietjen*, Berlin astr. Jahrb. für 1878.

160) *Th. Clausen*, J. f. Math. 7 (1831), p. 108.

161) *W. C. Goetze*, Astr. Nachr. 28 (1849), p. 97, 113 und 32 (1851), p. 113.

festgelegt:

$$(99) \quad \begin{aligned} \delta R &= \delta r, & \delta \alpha &= \sin \pi \sin i \delta \Omega + \cos \pi \delta i, \\ \delta S &= r(\delta v + \delta \gamma) = r(\delta u + \cos i \delta \Omega), & \delta \beta &= \cos \pi \sin i \delta \Omega - \sin \pi \delta i, \\ \delta T &= r(\sin v \delta \alpha - \cos v \delta \beta) & \delta \gamma &= \cos i \delta \Omega + \delta \pi, \\ &= r(\sin u \delta i - \cos u \sin i \delta \Omega), \end{aligned}$$

wobei  $\delta \alpha$ ,  $\delta \beta$ ,  $\delta \gamma$  die kleinen Drehungen sind, welche das Dreikant  $R$ ,  $S$ ,  $T$  bei Variation von  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\pi$  um seine Achsen ausführt, und  $\delta r$ ,  $\delta v$  endlich sich aus den Gleichungen von Nr. 3 ergeben zu:

$$(100) \quad \begin{aligned} \delta r &= \frac{ae \sin v}{\sqrt{1-e^2}} (\delta M_0 + t \delta n) - a \cos v \delta e - \frac{2r}{3n} \delta n, \\ r \delta v &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} (\delta M_0 + t \delta n) + a \sin v \left(1 + \frac{r}{p}\right) \delta e, \end{aligned}$$

unter  $M_0$  die mittlere Anomalie zur Epoche  $t=0$  verstanden. Bei hyperbolischen Bahnen hat man in diesen Formeln  $M_0$ ,  $n$ ,  $\sqrt{1-e^2}$ , bzw. durch  $\frac{1}{i} M_0$ ,  $\frac{1}{i} n$ ,  $i\sqrt{e^2-1}$  zu ersetzen.

Hienach können nun sofort  $\delta \varrho$ ,  $\varrho \delta \sigma$ ,  $\varrho \delta \tau$  aus  $\delta R$ ,  $\delta S$ ,  $\delta T$  vermöge der leicht trigonometrisch zu berechnenden Richtungskosinusse zwischen den Achsen  $\varrho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  und  $R$ ,  $S$ ,  $T$  zusammengesetzt werden, welche Ausdrücke sich dann nach *E. Schönfeld*<sup>162</sup>) durch Einführung der Gaußschen Hilfsgrößen des Achsensystems  $\varrho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  (siehe Nr. 3) noch erheblich zusammenziehen lassen. Mit der Herstellung der Differentialquotienten beschäftigen sich noch *M. Kowalski*<sup>163</sup>) und *Th. v. Oppolzer*<sup>164</sup>) Eine Vereinfachung auf anderem Wege zu erreichen bezieht *F. Tietjen*<sup>165</sup>) Länge und Breite,  $L$ ,  $B$  auf ein geozentrisches System, dessen Achsen den Richtungen  $R$ ,  $S$ ,  $T$  parallel sind, wodurch wegen  $\sphericalangle(\sigma, T) = 90^\circ$   $\delta T$  aus  $\delta \sigma$  herausfällt, während, wie *J. Bauschinger*<sup>166</sup>) anmerkt, sein Koeffizient  $\cos(\tau, T)$  in  $\delta \tau$  wegen

$$(101) \quad \cos^2(\sigma, T) + \cos^2(\tau, T) = \sin^2(\varrho, T)$$

seinen maximalen Wert  $\sin(\varrho, T) = \cos B$  erreicht. Dies gewährt den Vorteil, daß sehr angenäherte Werte der Elementenkorrekturen einfacher so zu erlangen sind, daß man erst  $\Sigma(\delta \sigma - \delta' \sigma)^2$ , welches jetzt bloß von  $\delta M_0$ ,  $\delta n$ ,  $\delta e$ ,  $\delta \gamma$  abhängt, zu einem Minimum macht

162) *E. Schönfeld*, Astr. Nachr. 113 (1886), p. 65.

163) *M. Kowalski*, Rech. astr. de l'obs. de Kasan 1859, p. 91.

164) *Th. v. Oppolzer*, Wien. Ber. d. k. Akad. 49 (1864), p. 271.

165) *F. Tietjen*, Astr. Nachr. 67 (1866), p. 91; *F. Tietjen*, Berlin astr. Jahrb. für 1878. Im wesentlichen das gleiche früher bei *T. H. Safford*, Mem. Am. Akad. 6 (1858), p. 461; vgl. die histor. Angaben bei *R. Radau*, Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 401.

166) *J. Bauschinger*, Berl. Rechen-Inst. Veröff. Nr. 23, 1903.

und dann noch  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  so bestimmt, daß unter Einführung der gefundenen Werte jener vier Korrekturen  $\Sigma(\delta\tau - \delta'\tau)^2$  ein Minimum wird.

R. *Radau*<sup>167)</sup> erzielt eine Trennung der Unbekannten dadurch, daß er die Komponenten von  $\delta s$  in Richtung der Schnittgeraden der Ebene  $\overline{\sigma\tau}$  mit den Ebenen  $\overline{ST}$ ,  $\overline{TR}$ ,  $\overline{RS}$  bildet, in denen bzw.  $\delta R$ ,  $\delta S$ ,  $\delta T$  nicht auftritt, und die dritte in Verbindung mit der ersten oder zweiten statt  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  der entsprechenden Minimalbedingung unterwirft. Eine ähnliche Vereinfachung sucht A. *Orloff*<sup>168)</sup> zu erzielen, während V. *Cerulli*<sup>169)</sup> hierzu die Bildung der Bedingungsgleichungen für den Zeitpunkt der Opposition oder des Knotendurchgangs des Planeten vorschlägt. Auf die Tietjenschen Formeln ist neuerdings G. *Boccardi*<sup>170)</sup> zurückgekommen. Bei nahe kreisförmigen Bahnen wird der Natur der Sache nach  $\delta\pi$  nur unsicher erhalten werden können, weshalb sich in diesem Falle die Einführung von  $e \cos \pi$ ,  $e \sin \pi$ , oder nach K. *Bohlin*<sup>171)</sup> von  $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \begin{cases} \cos \pi \\ \sin \pi \end{cases}$  an Stelle von  $e$ ,  $\pi$  empfiehlt; P. V. *Neugebauer*<sup>172)</sup> ersetzt im gleichen Falle  $\delta\pi$  durch  $e\delta\gamma$ . Bei nahe parabolischen Bahnen, wird durch Einführung der Elemente  $e$ ,  $q$ ,  $t_0$  statt  $e$ ,  $n$ ,  $M_0$ :

$$\begin{aligned} \delta r &= \left[ r - q \cos v - \frac{3k(t-t_0)}{2\sqrt{p}} e \sin v \right] \left( \frac{\delta e}{1-e} + \frac{\delta q}{q} \right) \\ &\quad + \cos v \delta q - \frac{ke \sin v}{\sqrt{p}} \delta t_0, \\ (102) \quad r \delta v &= \left[ q \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{3k(t-t_0)}{2r} \sqrt{p} \right] \left( \frac{\delta e}{1-e} + \frac{\delta q}{q} \right) \\ &\quad - \sin v \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \delta q - \frac{k\sqrt{p}}{r} \delta t_0, \end{aligned}$$

wo nun zwar die Koeffizienten von  $\delta e$  für parabolische Bahnen bestimmte Werte erlangen, aber für nahe parabolische Bahnen numerisch unsicher bestimmt sind, und daher so umgeformt werden müssen, daß sich der Nenner  $1 - e$  kürzen läßt. Dies zu erreichen entwickelte bereits C. W. *Goetze*<sup>173)</sup> in ziemlich umständlicher Weise dieselben nach Potenzen von  $1 - e$ , unter Hinzufügung diesbezüglicher Hilfstafeln. In einfacher Weise gelangten dann E. *Weiβ*<sup>174)</sup> und

167) R. *Radau*, Paris Bull. astr. 5 (1888), p. 5; Paris C. R. 105 (1887), p. 432.

168) A. *Orloff*, Paris Bull. astr. 22 (1905), p. 291.

169) V. *Cerulli*, Catania Mem. soc. spett. 34 (1905), p. 175.

170) G. *Boccardi*, Publ. d. Os. di Collurania Nr. 2 (1900), p. 37.

171) K. *Bohlin*, Astr. Nachr. 159 (1902), p. 165.

172) P. V. *Neugebauer*, Astr. Nachr. 157 (1902), p. 21.

173) C. W. *Goetze*, Erg.-Heft d. Astr. Nachr. (1849), p. 159.

174) E. *Weiβ*, Wien Ber. 83, (1881), p. 466. Tafel v. J. v. *Hepperger*.

*Th. v. Oppolzer*<sup>175)</sup> durch Entwicklung nach Potenzen von  $\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}$  und *E. Schönfeld*<sup>176)</sup> durch Heranziehung der Gaußschen Methode der Bestimmung der wahren Anomalie in nahe parabolischen Bahnen zum Ziele. — Gewährt die Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Korrekturen der Elemente noch keine genügende Annäherung, so muß das ganze Verbesserungsverfahren ein zweites Mal mit Zugrundelegung der das erste Mal gefundenen verbesserten Bahn wiederholt werden. Die Bildung der neuen  $\delta\sigma$ ,  $\delta\tau$  kann hierbei in leicht zu ersehender Weise durch Benützung der zweiten Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen, welche *L. Schulhof*<sup>177)</sup> entwickelte, durchgeführt werden.

**26. Methoden mit Bevorzugung zweier Orte.** Weniger streng vom Standpunkte der Ausgleichsrechnung aus, aber mit geringerer Rechenarbeit verbunden sind jene Verfahren, welche die Zahl der Unbekannten dadurch verringern, daß sie gewisse Bestimmungsstücke der Bahn, als welche insbesondere zwei der beobachteten geozentrischen Orte gewählt werden, als nicht zu verändernd festhalten. Als zu korrigierende Bestimmungsstücke werden dann bei der bereits von *Gauß*<sup>178)</sup> besprochenen und seither vielfach angewandten Methode der Variation der geozentrischen Distanzen  $\rho$ ,  $\rho''$  genommen, deren Korrekturen  $\delta\rho$ ,  $\delta\rho''$  nun die beiden Unbekannten der Aufgabe sind. Die Bestimmung der numerischen Werte der vier Koeffizienten von  $\delta\rho$ ,  $\delta\rho''$  in den einer der Beobachtungszeiten zugehörigen Größen  $\delta\sigma'$ ,  $\delta\tau'$  geschieht in der Praxis meist einfach dadurch, daß auf dem Wege über die Elemente, welche aus den passend zu wählenden Wertepaaren  $\eta$ ,  $o$  und  $o$ ,  $\eta''$  von  $\delta\rho$ ,  $\delta\rho''$  folgen, die entsprechenden Wertepaare für  $\delta\sigma'$ ,  $\delta\tau'$  berechnet werden. Mit den weitläufigen analytischen Ausdrücken derselben haben sich *C. W. Goetze*<sup>179)</sup> und *N. Herz*<sup>180)</sup> beschäftigt. Zu einfacheren genäherten Ausdrücken ist *J. Bauschinger*<sup>181)</sup> gelangt, welcher nach dem Vorgang von *F. Tietjen*<sup>182)</sup> von der Bemerkung ausgeht, daß nach Gl. (28), zwischen den durch

175) *Th. von Oppolzer*, Berlin Ber. 1878, p. 852; Astr. Nachr. 95 (1879), p. 13. Tafeln v. *F. K. Ginzl* in *Oppolzer*, Bahn. 2, Tafel 16.

176) *E. Schönfeld*, Astr. Nachr. 113 (1886), p. 65.

177) *L. Schulhof*, Paris Bull. astr. 6 (1889), p. 151, 192.

178) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 188.

179) *C. W. Goetze*, Astr. Nachr. 32 (1851), p. 113 und Erg.-Heft (1849), p. 159.

180) *N. Herz*, Wien Ber. 92 (1885), p. 590.

181) *J. Bauschinger*, Berl. Rechen-Inst. Veröff. Nr. 23 (1903).

182) *F. Tietjen*, Berl. astr. Jahrb. für 1878.

eine Bahnänderung erzeugten Verrückungen  $\delta s$ ,  $\delta s'$ ,  $\delta s''$  dreier Orte die vektorielle Gleichung besteht:

$$(103) \quad \delta s' = n\delta s + n''\delta s'' + (r\delta n) + (r''\delta n''),$$

wenn die beiden eingeklammerten Größen Verrückungen dieses Betrages in Richtung der beiden Radienvektoren bedeuten. Hienach sind, wenn für  $n$ ,  $n''$  bloß  $r$ ,  $r''$  enthaltende Näherungsausdrücke (vgl. diesbez. Nr. 10) gesetzt werden,  $\delta s'$  und dadurch auch  $\delta\sigma'$ ,  $\delta\tau'$  gegeben, da sich  $\delta s$ ,  $\delta r$  und  $\delta s''$ ,  $\delta r''$  unmittelbar durch  $\delta\varrho$  bzw.  $\delta\varrho''$  ausdrücken lassen. Für eine zu verbessernde parabolische Bahn werden als zu korrigierende Bestimmungsstücke bei *C. Hornsteins*<sup>183)</sup> Methode des Übergangs von parabolischen auf nahe parabolische Bahnen das Verhältnis  $M = \frac{\varrho''}{\varrho}$  der den beiden festgehaltenen Orten zugehörigen geozentrischen Distanzen und der reziproke Wert der großen Halbachse  $\alpha = \frac{1}{a}$  gewählt, und die Ausdrücke  $\delta\sigma'$ ,  $\delta\tau'$  wie früher aus zwei speziellen Annahmen über  $\delta M$  und  $\delta\alpha = \frac{1}{a}$  gewonnen. Aus den verbesserten Werten von  $M$ ,  $a$  folgen dann  $\varrho$ ,  $\varrho''$  mittels eines unmittelbar aus der *Obersschen* Methode durch Einführung der *Lambertschen* Relation an Stelle der *Eulerschen* hervorgehenden Verfahrens, worauf aus den bekannt gewordenen zwei heliozentrischen Orten die Elemente in verschiedener Weise gefunden werden können, je nachdem man hiebei auf den bekannten Wert von  $a$  rekurriert oder nicht. Die Methode der Variation des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen geht aus diesem Verfahren hervor, wenn auch die verbesserte Bahn als parabolisch vorausgesetzt, also an dem Werte  $\alpha = 0$  unverändert festgehalten wird. Die analytischen Ausdrücke der Differentialquotienten gibt für letztere *O. Leuschner*<sup>184)</sup>.

183) *C. Hornstein*, Wien Ber. 38 (1854); *C. Hornstein*, Astr. Nachr. 38 (1854), p. 323.

184) *O. Leuschner*, Berl. Diss. 1897.

## VI 2, 10. DIE BESTIMMUNG DER METEOR- BAHNEN IM SONNENSYSTEM.

VON

G. v. NIESSL

IN WIEN.

---

### Inhaltsübersicht.

Literatur.

Allgemeines.

#### I. Ermittlung des Radiationspunktes und der geozentrischen Geschwindigkeit.

##### 1. Mehrfache Beobachtungen aus verschiedenen Orten.

- a) Bestimmung des Endpunktes der Bahn.
- b) Bestimmung des scheinbaren Radianten.
- c) Lage der Bahn, Bahnlänge, Höhe des Aufleuchtens.
- d) Geozentrische Geschwindigkeit.
- e) Zenitattraktion.

##### 2. Einseitige Beobachtung verschiedener Körper desselben Stromes.

#### II. Ableitung der Bahn im Sonnensystem.

##### III. Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse.

1. Mittlere Genauigkeit der Beobachtungen und der Rechnungsergebnisse.
  2. Ergebnisse für die Höhen des Aufleuchtens und der Hemmung, und ihre Beziehungen zu anderen Faktoren (Massen, Geschwindigkeit). Vergleich mit der Theorie des Luftwiderstands.
  3. Masse der Sternschnuppen.
  4. Durchschnittliche und außergewöhnliche Bahnlängen.
  5. Die heliozentrische Geschwindigkeit und Bahnform.
- 

### Literatur.

*H. W. Brandes* in *J. F. Benzenberg*: Über die Bestimmung der geographischen Längen durch Sternschnuppen. Hamburg 1802. (Methoden der Höhenbestimmung von *Brandes* und *Olbers*.)

— Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie. Leipzig 1826 u. f., dann in *Gehlers phys. Wörterb.* IV, 1827.

- A. Quetelet*, Sur les étoiles filantes. *Corresp. mathématique et physique*. Brüssel T. IX, 1837.
- Fr. W. Bessel*, Über Sternschnuppen. *Astr. Nachr.* 16 (1839), p. 321.
- A. Erman*, Über die Sternschnuppen der Augustperiode etc. *Astr. Nachr.* 17 (1840), p. 3.
- J. G. Grunert*, Über eine geometrische Aufgabe. (Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche vier gerade Linien im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, schneidet. Mit Anwendung auf die Bestimmung der Cometenbahnen.) *Archiv Math. Phys.* I. 1841.
- Die verschiedenen Auflösungen des Sternschnuppen-Problems aus einem allgemeinen Gesichtspunkte dargestellt. *Arch. Math. Phys.*
- J. C. Houzeau*, Sur les étoiles filantes périodiques du mois d'Août etc. *Mém. de l'Acad. de Bruxelles*. T. XVIII. 1844.
- F. Petit*, Méthode pour déterminer la parallaxe et le mouvement des bolides. *Mém. de l'Acad. de Toulouse* V. 1849.
- *Recherches analytiques pour la trajectoire et la parallaxe des bolides*. Paris C. R. 32 (1851).
- E. Heis*, Die periodischen Sternschnuppen etc. Köln 1849.
- A. Laussedat*, Sur la méthode employée pour déterminer la trajectoire du bolide du 14. Mai 1864. Paris C. R. 58 (1864), p. 1222, 59 (1864), p. 74.
- A. S. Herschel*, Method of determining the path of a meteor. *Proceed. of the Brit. Meteorol. Soc.* II. 1866.
- E. Weiß*, Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen. Wien Ber. 57 II (1868), p. 281 und 62 II (1870), p. 277, sowie *Astr. Nachr.* 72 (1868), p. 81 und 76 (1870), p. 194 (Weiß, Beiträge).
- J. V. Schiaparelli*, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Autorisierte deutsche Ausgabe der Note e Riflessioni sulla teoria astronomica delle stelle cadenti von *G. v. Boguslawski*, Stettin 1871 (*Schiaparelli*).
- E. Reimann*, Die Höhenbestimmung der Sternschnuppen. Breslau 1870. (Enthält u. a. eine kritische Darstellung der bis dahin bekannt gewordenen älteren Methoden.)
- J. G. Galle*, Über die Berechnung der Bahnen heller, an vielen Orten beobachteter Meteore etc. *Astr. Nachr.* 83 (1874), p. 321.
- H. Bruns*, Bemerkung über die Berechnung der Höhe von Sternschnuppen aus korrespondierenden Beobachtungen. *Astr. Nachr.* 84 (1874), p. 379.
- R. Lehmann Filhés*, Zur Theorie der Sternschnuppen. Inaug. Dissert. Berlin 1878.
- Über die Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarms mit Hilfe eines neuen Meteoroskops. *Astr. Nachr.* 96 (1880) p. 241.
- Die Bestimmung von Meteorbahnen nebst verwandten Aufgaben. Berlin 1883.
- G. v. Nießl*, Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme. Wien Ber. 83 (1881), p. 96. Dann des Verfassers zahlreiche Bestimmungen von Meteorbahnen, ebenda.
- K. Necker*, Zur Ausgleichung von Massenbeobachtungen atmosphärischer Lichterscheinungen. Inaug.-Dissertation. Wien 1894.
- E. Weiß*, Höhenberechnung der Sternschnuppen Wien Denkschr. 1905.
- P. Moschick*, Eine neue Methode zur Bahnbestimmung von Meteoroiden. Mitteilungen der Sternwarte zu Heidelberg V. Karlsruhe 1905.
- H. Rosenberg*, Über eine Methode zur Bestimmung der Meteorbahnen. *Astr. Nachr.* 167 (1905).

**Bibliographie.**

J. C. Houzeau — A. Lancaster, Bibliographie générale de l'Astronomie, tome II, Brüssel 1882, p. 714.

---

**Allgemeines.** Die Bahnen der Körper, welche durch ihr Eindringen in die Atmosphäre Feuermeteore hervorrufen, haben im Sonnensystem planetarischen Charakter. Sie sind Kegelschnittslinien, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Der durch die Beobachtungen nachgewiesene Teil derselben ist jedoch so klein, daß er selbst für die genauesten Bestimmungen nur geradlinig angenommen werden kann. Unregelmäßige Bewegungen, welche, durch besondere Gestalten dieser Körper bedingt, zuweilen vorkommen, bleiben hier außer Betracht.

Für alle auf diese Weise sichtbar werdenden Bahnen ist die kleinste Entfernung vom Erdmittelpunkt, oder in geozentrischer Beziehung das Perigeum, im Vergleiche mit der Entfernung von der Sonne oder dem betreffenden Radiusvektor der Erdbahn verschwindend klein und gegen letzteren stets zu vernachlässigen. Es wird somit für die Fallepoche der heliozentrische Radiusvektor der Meteorbahn als identisch mit dem der Erdbahn angenommen. Weil ferner aus demselben Grunde das Zusammentreffen mit der Erde als gleichbedeutend mit dem Durchgange des Meteors durch den einen Bahnknoten gelten kann, so findet man aus der Sonnenephemeride für das Falldatum direkt stets die Länge und den Radiusvektor eines Bahnknotens.

Die *scheinbare* Lage der Lichtbahn am Himmel hängt parallaktisch mit der Lage des Beobachtungsortes zusammen. Sie wird daher für die näheren Bahnpunkte größere scheinbare Verschiebungen zeigen als für die entfernteren. Ein Punkt der geradlinigen Bahn oder ihrer Verlängerung nach rückwärts, welcher von allen Beobachtungsorten schon so weit entlegen ist, daß deren gegenseitige Entfernung nicht mehr in Betracht kommt, würde von allen Orten an derselben Stelle des Himmels gesehen werden. Dieser perspektivische Divergenzpunkt aller an den verschiedenen Erdorten statt der wahren Bahn aufgefaßten scheinbaren Bahnen ist der *scheinbare Strahlungs- oder Radiationspunkt*. Er bestimmt die geozentrische Richtung der nachgewiesenen geraden Bahnstrecke. Diese ist jedoch, abgesehen von der Wirkung der Erdschwere, welche leicht in Abrechnung gebracht wird, zusammengesetzt aus der Bewegung der Erde und aus der wahren heliozentrischen Meteorbewegung. Der projektivische Richtpunkt der

letzteren am Himmel ist der *wahre* Radiationspunkt, welcher also die *wahre Bahnrichtung am Knoten* der Meteorbahn bestimmt.

Da die Sonne sich in der Bahnebene des Meteors befinden muß, so ist diese bestimmt durch den Radiusvektor und die Bahnrichtung am Knoten, oder auf der Kugel durch den Großkreis, welcher den Ort der Sonne und den wahren Radianten enthält.

Durch letzteren ist aber auch der Winkel, welchen die wahre Bahnrichtung mit dem Radiusvektor am Knoten bildet, gegeben, und es sind dann alle weiteren Bahnelemente nur mehr von der Geschwindigkeit in diesem Teile der Bahn abhängig, welche entweder aus den Beobachtungen abgeleitet wird, oder aus theoretischen Folgerungen hervorgeht.

Die vorliegende Aufgabe besteht demnach aus zwei voneinander ziemlich strenge gesonderten Teilen, von welchen gewissermaßen der erste die geozentrischen, der zweite die heliozentrischen Beziehungen behandelt. Diese sind:

I. *Die Ermittlung des Radiationspunktes* und jener Größen, welche zur Abschätzung der relativen Geschwindigkeit nötig sind.

II. *Die Ableitung der Bahn im Sonnensystem.*

Hinsichtlich des ersten Teiles, welcher die schwierigeren und verwickelteren Arbeiten umfaßt, dessen Resultate aber zugleich auch für die Ergebnisse des zweiten ganz entscheidend sind, können die Ausgangspunkte und Ziele verschieden sein. Die wichtigsten Fälle der Radiantenbestimmung sind folgende:

1. Ermittlung der Bahnlage gegen die Erde und des Radianten durch *mehrfache* Beobachtungen *desselben* Meteors aus *verschiedenen* Erdorten (korrespondierende Beobachtungen im weitesten Sinne).

2. Nachweisung des Radianten durch Beobachtung *mehrerer* zu *demselben* Radianten (Meteorstrom) gehörigen scheinbaren Bahnen aus *einem* Erdorte (einseitige Beobachtungen).

## I. Ermittlung des Radianten und der geozentrischen Geschwindigkeit.

### 1. Mehrfache Beobachtungen aus verschiedenen Erdorten.

Reichliche Erfahrungen lehren, daß, je nach der Lage der Bahn gegen die einzelnen Beobachtungsorte, der Anfang der wahrgenommenen leuchtenden Strecke (Aufleuchten) gewöhnlich nicht identisch aufgefaßt wird, ja, daß in dieser Hinsicht Unterschiede bis zur Länge großer Bogen und, im linearen Maß, bis zu Hunderten von Kilometern vorkommen können. Ausgenommen hiervon sind die Fälle

mit lang anhaltender, scharf markierter Spur, wenn sich Beobachtungen speziell auf diese — nicht auf die ganze Bahn — beziehen.

In der Regel darf die Ableitung der Bahn von der Annahme der Identität für die bezeichneten Aufleuchtungspunkte *nicht* ausgehen.

Da die wahre Bahn von der Geraden nicht merklich abweicht, so bestimmt sie mit dem Auge des Beobachters eine Ebene, welche im Schnitt mit der gedachten Kugel einen größten Kreis liefert. Die an verschiedenen Orten beobachteten „scheinbaren Bahnen“ können daher als Bogen größten Kreises betrachtet werden, welche in ihrer Verlängerung nach rückwärts (nämlich entgegen dem Lauf des Meteors) als Schnittpunkt den „scheinbaren Radianten“ bezeichnen.

Die Ermittlung dieses scheinbaren Strahlungspunktes kommt also darauf hinaus, den einen Schnittpunkt (der andere ist dann selbstverständlich) mehrerer durch die Beobachtung derselben Meteorbahn an verschiedenen Orten gegebenen, nicht zusammenfallenden größten Kreise zu bestimmen.

Liegen nur zwei solcher Bahnbogen vor, so ist die Lösung rechnerisch oder graphisch so einfach, daß sie einer weiteren Erörterung hier nicht bedarf. Verwickelter wird die Aufgabe, wenn viele überzählige Beobachtungen zu vereinigen sind; und doch ist es gerade zur Ermittlung der Bahnverhältnisse großer Feuerkugeln wie auch der Meteoriten, für welche oft nur minder genaues, teilweise auch unvollständiges Material zur Verfügung steht, besonders erwünscht, ja notwendig, eine große Überzahl von Beobachtungen verwenden zu können. Dies sind die typischen Fälle, auf welche sich nachstehende Erörterungen vornehmlich beziehen.

Die Stelle, an welcher der planetarische Lauf eines größeren Meteors durch den Widerstand der irdischen Atmosphäre gehemmt wird („Hemmungspunkt“, „Endpunkt“ der Bahn) ist fast immer durch besondere Erscheinungen so ausgezeichnet, daß über die Identität hinsichtlich dieses Punktes selten Zweifel bestehen. Gewöhnlich ist es auch der einzige Bahnpunkt, von dem dies mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann. Überdies ist in Bezug auf denselben die nähere Verständigung mit den Beobachtern ziemlich sicher und zuweilen dessen Erforschung auch durch Schallwahrnehmung, wenn nicht gar durch Auffindung von Fallstücken begünstigt.

Die möglichst genaue Festlegung der Lage und Höhe des *Endpunktes* bildet daher in der Regel eine sehr wichtige, manchmal unentbehrliche Grundlage aller weiteren Untersuchungen.

Es hat zwar keine großen geometrischen Schwierigkeiten, die Aufgabe allgemeiner so zu lösen, daß die drei Raumkoordinaten des

Endpunktes zusammen mit den sphärischen Koordinaten des Radianten aus einem Ausgleichssystem hervorgehen. Allein eine solche Lösung würde, abgesehen davon, daß sie sich äußerst langwierig und wenig lohnend gestaltet, nur selten zu brauchbaren Resultaten führen. Sie wird daher hier weiter nicht berücksichtigt, sondern es wird die Ausmittlung des Endpunktes als wesentlichste Vorarbeit abgesondert erörtert.

a) *Bestimmung der geographischen Koordinaten und der Höhe des Endpunktes.* Aus guten Gründen wird auch bei dieser Aufgabe in der Regel eine Teilung nützlich sein, indem man vorerst die geographische Lage und hierauf die lineare Höhe ermittelt. In einzelnen Fällen wird allerdings die allgemeine Behandlung notwendig oder doch zweckmäßig. Um alle drei Unbekannten zu bestimmen, müssen die Beobachtungen drei geeignete Stücke aus mindestens zwei Orten liefern, unter welchen sich ein Höhenwinkel (scheinbare Höhe) befinden muß. Die beiden anderen können Richtungsangaben (Azimute) sein, und es ist meist zweckmäßig, wenn dies der Fall ist. Drei Azimute reichen offenbar nicht aus, um auch die lineare Höhe zu finden, wogegen die Aufgabe durch drei scheinbare Höhen im allgemeinen bestimmt sein kann. Die Ausmittlung der geographischen Lage bloß durch die Parallaxe in Höhe wird sogar die einzig mögliche, wenn die Azimutalparallaxe versagt, also z. B., wenn die Beobachtungsorte zugleich mit dem Endpunkt nahezu in demselben Vertikalschnitt angeordnet sind.

Zuweilen sind die beobachteten Höhen so unsicher, daß durch ihre Verbindung mit den Richtungsbeobachtungen das Resultat ungünstig beeinflußt wird. Hat man brauchbare Azimute bei ausreichender Parallaxe, so ist es vorzuziehen, die Lage des Endpunktes aus diesen allein zu ermitteln, wobei völlig ausreichend dem Erdsphäroid eine Kugel von entsprechendem Radius substituiert wird. Man kann sich mit Vorteil folgenden Näherungsverfahrens bedienen.

An den Orten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ ) der Erdoberfläche, bestimmt durch die geographischen Koordinaten  $L_i, \varphi_i$  seien die Azimute  $A_{ie}$  des Endpunktes  $E (L_e, \varphi_e)$  der Meteorbahn beobachtet worden.

Nach irgend einem kurzen, auch graphischen Verfahren werden zunächst Näherungswerte  $L_0, \varphi_0$  für  $L_e, \varphi_e$ , dann auch ein solcher  $H_0$  für die lineare Höhe  $H_e$  gesucht. Gewöhnlich ergeben sich diese schon sozusagen von selbst vor Beginn des eigentlichen Rechnungsvorganges, da man beim allmählichen Einlangen der Beobachtungen über die Lage des Endpunktes sich ein beiläufiges Urteil bilden muß, um danach weiteren Nachforschungen nützliche Richtung zu geben.

In allen bedeutenderen Fällen, welche eine eingehendere rechnerische Behandlung verdienen, wird man über diese Größen beiläufig bald orientiert sein.

Mit diesen Näherungswerten berechnet man nun genäherte Azimute von  $O_i$  gegen  $E$ , die hier mit  $A_{ie}$  und auch die leicht hieraus zu findenden Gegenrichtungen  $E \rightarrow O_i$ , die mit  $A_{ei}$  bezeichnet werden, ferner genäherte Distanzen  $O_i E$  oder die sphärischen Amplituden  $\varepsilon_i$  und beiläufige scheinbare Höhen  $h_{ie}$ . Letztere beeinflussen diese Bestimmung nur soweit, daß auch ganz rohe Näherungen genügen, wenn man die beobachteten Größen nicht verwenden will.

Endlich sind die Zahlenwerte für alle Unterschiede

$$A_{ie} - A_{ei} = \omega_i$$

zu bilden. Wird nun

$$L_e = L_0 + \Delta L_0, \quad \varphi_e = \varphi_0 + \Delta \varphi_0$$

genommen, wobei also  $\Delta L_0$  und  $\Delta \varphi_0$  die zu bestimmenden Verbesserungen für die vorläufigen Koordinaten des Endpunktes bezeichnen, so erhält man aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_e \cos \varphi_i = \operatorname{cotg} A_{ie} \sin (L_e - L_i) + \sin \varphi_i \cos (L_e - L_i)$$

für die Fehlergleichungen im bekannten Sinne:

$$(1) \quad v_i = o_i + a_i x + b_i y,$$

worin

$$x = \Delta L_0 \cos \varphi_0, \quad y = \Delta \varphi_0,$$

$$(2) \quad \begin{cases} o_i = \omega_i \cos h_{ie}, \\ a_i = \frac{\cos h_{ie}}{\sin \varepsilon_i} \cdot \cos A_{ei}, \\ b_i = -\frac{\cos h_{ie}}{\sin \varepsilon_i} \cdot \sin A_{ei} = -a_i \operatorname{tang} A_{ei}. \end{cases}$$

Der allgemeine Faktor  $\cos h_{ie}$  ist um so notwendiger, je ungleicher die Entfernungen, also auch die  $h_{ie}$  sind, weil die solchen Beobachtungen gewöhnlich anhaftenden Richtungsfehler nicht eigentliche Azimutdifferenzen, sondern kleine sphärische Bogen sind, welchen je nach der Zenitdistanz sehr verschiedene Azimutwerte entsprechen.

Aus den Gleichungen (1) gehen — eventuell unter Erteilung verschiedener Gewichte an die einzelnen Beobachtungen — nach der Methode der kleinsten Quadrate  $\Delta L_0$  und  $\Delta \varphi_0$ , also auch  $L_e$  und  $\varphi_e$  mit ihren mittleren Fehlern hervor.

Die endgültigen Azimute sind dann

$$A_{ie} = A_{ei} + v_i \sec h_{ie}.$$

Fallen die  $v_i$  groß aus, so ist es zu empfehlen, die  $A_{ie}$  nochmals direkt aus dem endgültigen  $L_e, \varphi_e$  zu berechnen.

$x$  und  $y$  erhält man selbstverständlich in der Einheit des Absolutgliedes  $o_i$ . In dieser Hinsicht kann man je nach Umständen verschiedene Modifikationen bevorzugen.

Bezeichnet  $\mu_i$  den *sphärischen* Abstand des genäherten Endpunktes  $E_0(L_0, \varphi_0)$  von der *beobachteten* durch  $A_{ie}$  bezeichneten Richtung, so ist genähert:  $\omega_i = \frac{\mu_i}{\sin \varepsilon_i}$ .

Wird dann gesetzt:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\cos h_{ie}}{\sin \varepsilon_i} = \sqrt{\gamma_i}, \\ \cos A_{ei} = a_i, \sin A_{ei} = -b_i, \end{cases}$$

so ist

$$(4) \quad v_i = \sqrt{\gamma_i} (\mu_i + a_i x + b_i y)$$

und  $\sqrt{\gamma_i}$  ist ein Gewichtungsfaktor für die ganze Gleichung.

Wünscht man z. B. bei Abnahme aus der Karte für  $\mu_i$  als Einheit ein Längenmaß, welches dann auch für  $x$  und  $y$  gilt, während die  $v$  im Gradmaß hervorgehen sollen, daß also allenfalls die Einheiten 1 km und  $1^\circ$  (für die Azimute und Höhen) zu nehmen seien, so wird die frühere Gleichung für  $\sqrt{\gamma_i}$  noch mit

$$\frac{1}{R \cdot \text{arc } 1^\circ} = \frac{1}{111.35} = 0.0089807$$

zu multiplizieren sein, wenn der Erdradius  $R = 6380$  km gesetzt wird.

Es können dann, wie leicht einzusehen, auch die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  mit Vorteil graphisch abgenommen werden, namentlich, wenn die Beobachtungen nicht die äußersten rechnerischen Rücksichten verdienen.

Findet man es rätlich, zur Bestimmung der Lage des Endpunktes  $(L_e, \varphi_e)$  auch die Parallaxe in Höhe einzubeziehen, was, wie schon erwähnt, manchmal kaum zu vermeiden ist, so wird man den Näherungswert  $H_0$  genauer aufzusuchen und die daraus für die vorläufigen Entfernungen  $D_{ie}$  geltenden scheinbaren Höhen  $h_{ie}$  sorgfältiger zu rechnen haben.

Ist  $H_e = H_0 + \Delta H_0$ , ferner  $\Delta L_0 \cos \varphi_0 = x$ ,  $\Delta \varphi_0 = y$ ,  $\Delta H_0 = z$  im Längenmaß, während die Verbesserungen der beobachteten Richtungen und der beobachteten Höhen  $h_{ie}$  im Gradmaß hervorgehen sollen, und wird gesetzt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\operatorname{tang} h_{ie} + \sin \varepsilon_i) \cos \varepsilon_i = K_i, \\ \frac{\cos^2 h_{ie}}{R \cdot \operatorname{arc} 1^\circ \sin \varepsilon_i} = \sqrt{\gamma_i} \cdot \cos h_{ie} = F_i, \\ h_{ie} - h_{ie} = n_i, \\ - F_i K_i \sin A_{ei} = a_i, \\ - F_i K_i \cos A_{ei} = b_i, \\ F_i = c_i, \end{array} \right.$$

so sind die Fehlergleichungen

$$(6) \quad v_i = n_i + a_i x + b_i y + c_i z$$

denjenigen beizufügen, welche man bloß aus den Richtungen erhalten hat. Hieraus ergeben sich wieder die Normalgleichungen und die Unbekannten.

Das Verfahren soll jedoch nur mit verlässlichen Höhen und dann angewendet werden, wenn solche aus Orten in der Nähe des Endpunktes mit weiter entfernten zu verbinden wären.

Soll die *lineare Höhe* des Endpunktes *abgesondert*, auf Grund der bereits endgültig ermittelten geographischen Lage desselben bestimmt werden, so pflegt man gewöhnlich die einzelnen, auf den verbesserten Endpunkt bezüglichen Entfernungen  $D_{ie}$  mit den zugehörigen beobachteten scheinbaren Höhen  $h_{ie}$  zu verbinden, um Einzelwerte für  $H_e$  zu erhalten, aus welchen dann ein Mittelwert gebildet wird. Die Entfernungen brauchen, wenn sie in bezug auf den vorläufigen Endpunkt aus den früheren Arbeiten bekannt sind, nicht neuerdings berechnet zu werden, da sie aus den ermittelten Verbesserungen  $\Delta L_0 \cos \varphi_0$  und  $\Delta \varphi_0$  namentlich mit Hilfe der Azimute  $A_{ei}$  leicht auf den definitiven Punkt  $L_e, \varphi_e$  ergänzt werden können, denn

$$\Delta D = - \frac{\Delta L \cos \varphi_0}{\sin A_{ie}} = - \frac{\Delta \varphi_0}{\cos A_{ie}}.$$

Da die Reduktion der Distanz auf die Sehne für derartige Höhenbestimmungen meist überflüssig ist, kann man nehmen:

$$(7) \quad H_i = D_{ie} \frac{\sin \left( h_i + \frac{\varepsilon_i}{2} \right)}{\cos \left( h_i + \varepsilon_i \right)}.$$

Wird  $h_i + \frac{\varepsilon_i}{2} = h'_i$  gesetzt, so gilt noch bis ungefähr 1000 km Entfernung die Näherung

$$(8) \quad H_i = D_{ie} \operatorname{tang} h'_i + \frac{(D_{ie} \operatorname{tg} h'_i)^2}{2R},$$

für einige hundert Kilometer genügt auch das erste Glied. Die Anbringung der Refraktion wird gegenüber den übrigen Unsicherheiten

selten besondere Vorteile gewähren, doch kann sie bei besonders großen Entfernungen immerhin erfolgen.

Wenn man bei Vereinigung der einzelnen Bestimmungen  $H_i$  zu einem Mittelwert die Gewichte derselben berücksichtigen will, so muß man dabei mit Vorsicht die Gewichte der angewendeten beobachteten  $h_i$  auch mit berücksichtigen, welche man gewöhnlich nicht ganz leicht abschätzen kann.

Größere Unterschiede in den Seehöhen der einzelnen Beobachtungsorte sind leicht anzubringen.

b) *Bestimmung des scheinbaren Radiationspunktes.* Die hierzu brauchbaren Angaben können in verschiedener Form gegeben sein, nämlich:

- 1) Koordinaten vom Anfang und Ende der scheinbaren Bahn ( $A, h$  oder  $\alpha, \delta$ ).
- 2) Zwei andere Punkte der Bahn oder auch nur einer, wenn er dem, als bereits sichergestellt, vorausgesetzten Endpunkt nicht zu nahe liegt. Hierher gehört auch die Richtungsbezeichnung durch entferntere Sterne.
- 3) Die scheinbare Neigung des Bahntheiles am Endpunkt gegen den Vertikal desselben, gewissermaßen der Positionswinkel gegen den Vertikal. Dieser kann auch für eine andere gut bezeichnete Bahnstelle gegeben sein. Bei Bahnen, welche einen Kulminationspunkt zeigen, ist die scheinbare Höhe desselben oft ausreichend, minder das Azimut. Eine mehr als beiläufige Angabe des scheinbaren Bahnknotens am Horizont (scheinbare Bewegungsrichtung gegen einen Horizontpunkt) ist zuweilen gut verwendbar.

Auch die Benutzung der unter 3) angeführten Stücke setzt voraus, daß der Endpunkt bereits aus anderen bestimmt werden konnte. Sie sind zuweilen, namentlich bei sehr kurzen Bahnen, besser verwendbar als die Koordinaten für Anfang und Ende der Bahn. Graphische Beobachtungsskizzen sind in solchen Fällen stets eine erwünschte Beigabe.

Zunächst werden nun aus der bekannten Lage und Höhe des Endpunktes dessen scheinbare äquatoreale Koordinaten ( $\alpha_i'', \delta_i''$ ) für die einzelnen Beobachtungsorte berechnet und im Falle 1) *statt der beobachteten*, im Falle 2) *für* den nicht bezeichneten Endpunkt genommen.

Auch in den unter 3) erwähnten Fällen dienen diese berechneten Koordinaten für den Anschluß der angegebenen scheinbaren Bahnbogen. Ist nämlich  $N'$  die in der unvollständigen Beobachtung angegebene Neigung der scheinbaren Bahn gegen den Vertikal des End-

punktes  $(A_e, h_e)$  dagegen  $N$  die Neigung gegen den *Horizont* im scheinbaren Bahnknoten und  $A_k$  das Azimut dieses Knotens, so ist

$$(9) \quad \begin{cases} \cos N = \sin N' \cos h_e, \\ \text{tang } f = \text{tang } N' \sin h_e, \\ A_k = A_e \pm f, \end{cases}$$

$\pm f$ , je nachdem die Bewegung des Meteors im Sinne der Zählung des Azimuts oder entgegengesetzt erfolgte.

In ähnlicher Weise wird die Verbindung hergestellt, wenn der Winkel mit dem Vertikal an einem anderen Punkt des Bahnbogens, für den entweder Azimut oder Höhe oder Bogenabstand vom Endpunkt mitgegeben sein muß, beobachtet wurde.

In den Fällen 1) und 2) wird aus den Koordinaten  $\alpha'_i, \delta'_i$  und  $\alpha''_i, \delta''_i$  der beiden gegebenen Bahnpunkte sodann für den hierdurch bestimmten Großkreis die Rektaszension  $\alpha_k$  des aufsteigenden äquatoralen Knotens und die Neigung  $J$  gegen den Äquator gerechnet.

Mit  $\frac{\text{tg } \delta'}{\text{tg } \delta''} = s$  wird

$$(10) \quad \begin{cases} \text{tg } (\alpha' - \alpha_k) = \frac{s \sin (\alpha'' - \alpha')}{1 - s \cos (\alpha'' - \alpha')}, \\ \text{tg } J = \frac{\text{tg } \delta'}{\sin (\alpha' - \alpha_k)} = \frac{\text{tg } \delta''}{\sin (\alpha'' - \alpha_k)}; \end{cases}$$

$\alpha_k$  ist so zu nehmen, daß beide Gleichungen für  $J$  erfüllt sind.

Diese Bestimmungen können mit Benutzung eines Kartennetzes gnomonischer Projektion, bei entsprechend großem Maßstab auch graphisch, rasch und hinreichend genau vorgenommen werden.

Hiernach ergibt sich auch das Verfahren im Falle 3). Es wird also schließlich jeder Beobachtungsort, welcher brauchbare Angaben lieferte, einen durch  $\alpha_k$  und  $J$  mit der zugehörigen Bewegungsrichtung bestimmten Großkreis für die Ermittlung des Radianten darbieten. Wären diese scheinbaren Bahnen fehlerfrei, so müßten sie nach rückwärts verlängert sich sämtlich im Radiationspunkt  $a, d$  schneiden, d. h. die Gleichung

$$(11) \quad \sin (a - \alpha_{ki}) \text{ tang } J_i = \text{tang } d$$

müßte dann für  $i = 1, 2, 3 \dots, n$  erfüllt werden.

Da dies der Beobachtungsfehler wegen nicht der Fall ist, müssen an den beobachteten Bahnbogen die entsprechenden Verbesserungen angebracht werden. Abgesehen von einigen Ausnahmefällen wird dabei angenommen, daß die Koordinaten  $\alpha'', \delta''$  unverändert bleiben, daß also die Verbesserungen nur auf  $\alpha', \delta'$  (Anfangspunkt) oder auf  $\alpha_k$  und  $J$  entfallen, was durch eine Drehung um den scheinbaren End-

punkt  $\alpha''$ ,  $\delta''$  bewirkt wird. Diese Drehung hätte demnach so zu erfolgen, daß für die nötigen Verbesserungen  $\cos \delta'_i$ ,  $\Delta \alpha'_i$  und  $\Delta \delta'_i$  mit Rücksicht auf die etwaigen Gewichte  $p_i$

$$[p (\Delta \alpha'^2 \cdot \cos^2 \delta' + \Delta \delta'^2)] = \text{Minimum} \quad (8)$$

wird.

Zu diesem Zweck wird wieder (wie bei der Ermittlung der geographischen Koordinaten des Endpunktes) — am einfachsten graphisch — ein vorläufiger Wert für  $a$ ,  $d$ , welcher hier mit  $a_0$ ,  $d_0$  bezeichnet ist, angenommen und der normale Abstand  $\Delta_i$  desselben von jedem scheinbaren Bahnbogen  $\alpha_{ki}$ ,  $J_i$  berechnet, oder auch graphisch entnommen.

Bezeichnet man  $\Delta$  als positiv, wenn  $a_0$ ,  $d_0$  innerhalb des nördlichen Polraumes von  $\alpha_{ki}$ ,  $J_i$  liegt, so findet man diesen Abstand, wenn er streng berechnet werden soll, aus

$$(12) \quad \sin \Delta_i = -\cos J_i \sin d_0 + \sin J_i \cos d_0 \sin (a_0 - \alpha_{ki}).$$

Da nun die  $\Delta_i$  die Widersprüche vorstellen, so sind die Verbesserungen  $\Delta a_0 \cos d_0$  und  $\Delta d_0$  so zu bestimmen, daß jene Null werden.

Setzt man

$$(13) \quad \begin{cases} \sin J_i \cos (a_0 - \alpha_{ki}) = \cos P_i, \\ \cos J_i \sec d_0 = \sin P'_i, \\ \Delta a_0 \cos d_0 = x, \quad \Delta d_0 = y, \\ \sin \Delta_i = \Delta_i, \end{cases}$$

so besteht die Bedingung:

$$(14) \quad 0 = \Delta_i - \cos P_i \cdot x + \sin P'_i y.$$

Um die Fehlergleichungen richtig anzusetzen, muß jedoch noch berücksichtigt werden, daß  $\Delta$ , die Verschiebung, welche der vorläufig angenommene Radiant erleiden müßte, um in den beobachteten Bahnbogen zu kommen, *keine beobachtete* Größe ist, denn der durch die Drehung zu verbessernde Ort ist  $\alpha'$ ,  $\delta'$ . Bezeichnet  $\xi$  die Veränderung, welche dieser dabei erleiden muß, so ist

$$\frac{\sin \xi}{\sin \Delta} = \frac{\xi}{\Delta} = \frac{\sin l}{\sin l'},$$

wenn die Bogenlänge von  $\alpha'$ ,  $\delta'$  bis  $\alpha''$ ,  $\delta''$  mit  $l$ , jene von  $a_0$ ,  $d_0$  bis  $\alpha''$ ,  $\delta''$  mit  $l'$  bezeichnet wird.

Der Faktor  $\frac{\sin l}{\sin l'} = \sqrt{g}$  ist daher als Gewichtungsfaktor der ganzen Gleichung anzuhängen. Unterläßt man dies, so wird den kurzen Bahnbogen, für welche dieses Sinusverhältnis ein kleiner Bruch ist, ein viel zu großes Gewicht beigelegt.

Ist die betreffende scheinbare Bahn nicht durch  $\alpha'$ ,  $\delta'$ , sondern durch die scheinbare Neigung am Endpunkt bezeichnet, so kommt man der richtigen Bewertung am nächsten, wenn man  $\sin l = 1$  nimmt.

Selbstverständlich ist überdies auch noch in allen besonderen Fällen das etwa nachweisbare Gewicht der beobachteten Größe anzubringen.

Das hier erörterte Verfahren stützt sich, wie erwähnt, auf die Voraussetzung, daß der Endpunkt sicher genug ermittelt wurde, um die aus demselben berechneten scheinbaren Positionen  $\alpha_i''$ ,  $\delta_i''$  auch bei der Bestimmung des Radianten unverändert zu lassen. Wäre dies nicht zulässig, so müßte man die Gewichte der einzelnen  $\alpha_i''$ ,  $\delta_i''$  aus den mittleren Fehlern bei der Bestimmung der Lage und Höhe des Endpunktes ableiten und dann auch das Gewicht für den ersten Punkt der Bahn  $\alpha_i'$ ,  $\delta_i'$  abschätzen. Die Verbesserungen der beiden Punkte müssen dann den Gewichten  $p'$  und  $p''$  verkehrt proportional bestimmt werden, d. h. die Drehung der scheinbaren Bahn hat nicht um den Punkt  $\alpha''$ ,  $\delta''$ , sondern um jenen Bahnpunkt zu erfolgen, welcher von diesem um die Größe  $\frac{p'}{p'+p''} \cdot l$  und von  $\alpha'$ ,  $\delta'$  um  $\frac{p''}{p'+p''} \cdot l$  absteht. Bezeichnet  $l'$  die sphärische Entfernung dieses Teilungspunktes vom vorläufigen Radianten  $a_0 d_0$ , so wäre der Faktor

$$\sqrt{g} = \frac{\sin \frac{p''}{p'+p''} \cdot l}{\sin l'}$$

Kann oder will man den Endpunkt der Bahn gar nicht vorher bestimmen, so wird man in der Regel den beiden Punkten  $\alpha' \delta'$  und

$\alpha'' \delta''$  gleiches Gewicht beimessen, so daß  $\sqrt{g} = \frac{\sin \frac{l}{2}}{\sin l'}$  zu nehmen wäre.<sup>1)</sup>

Ist der Radiant durch die endgiltigen Koordinaten  $a$ ,  $d$  bestimmt, so wird für jeden Beobachtungsort der Bogen von  $a$ ,  $d$  bis  $\alpha_i''$ ,  $\delta_i''$  der Lage nach die verbesserte scheinbare Bahn bezeichnen. Die normale Projektion des Punktes  $\alpha'$ ,  $\delta'$  auf diesen Bogen liefert einerseits die verbesserte *scheinbare Bahnlänge*, andererseits die auf die Bahnrichtung normale Komponente des Beobachtungsfehlers. Die in der Bahnrichtung gelegene ist selbstverständlich wegen der Ungleichheit der Auffassung unbestimmbar. Die nach dieser Andeutung leicht vorzunehmende Verbesserung von  $\alpha'$ ,  $\delta'$  ist jedoch nur dann notwendig, wenn die

1) Über die Ermittlung des Radianten aus überzähligen Beobachtungen ohne vorhergegangene Endpunktbestimmung vgl. auch *R. Lehmann-Filhés*. Zur Theorie der Sternschnuppen. Berlin 1878.

Angabe verlässlich genug ist, um sie noch zur Bestimmung der Aufleuchtungshöhe und der reellen Bahnlänge zu verwenden.

c) *Lage der Bahn gegen die Erde; Bahnlänge; Höhe des Aufleuchtens.* Werden für den endgültig ermittelten Hemmungspunkt ( $L_e, \varphi_e$ ) mit der diesem Meridian entsprechenden Fallzeit des Meteors aus den äquatorealen Koordinaten des definitiv bestimmten Radianten  $a, d$  die auf den Horizont des Hemmungspunktes bezogenen Werte für Azimut und Höhe des Radianten berechnet, so entspricht ersteres zugleich dem Azimut der linearen Meteorbahn und letztere der Neigung derselben gegen den Horizont des Endpunktes. Dem Azimut, welches die Projektion der Bahn auf die Erdoberfläche bezeichnet, kann man in der Karte oder rechnerisch diejenigen Orte entnehmen, über deren Scheitel das Meteor hingezogen, und die Neigung in Verbindung mit der Höhe des Endpunktes gibt die lineare Höhe, welche es an irgend einer Stelle dieser Bahn über der Erdoberfläche hatte.

Man kann weder von der wirklichen Bahnlänge des Meteors in der Atmosphäre noch von der Höhe des Aufleuchtens im allgemeinen sprechen, weil, wie schon einmal erwähnt, die Beobachter sehr häufig verschiedene Bewegungsphasen auffassen. Da die linearen Bahnlängen in Verbindung mit den Dauerschätzungen ungefähr auf die geozentrische Geschwindigkeit schließen lassen, so müssen die reellen Bahnlängen insbesondere für jene Beobachtungen ermittelt werden, welche auch Abschätzungen der Dauer liefern. Als Höhe des ersten Aufleuchtens kann dann immerhin diejenige genommen werden, welche aus der längsten noch sicher ermittelten Bahn hervorgeht.

Zur Bestimmung dieser Größen sind aber, sobald die oben erwähnte Projektion der reellen Bahn auf die Erdoberfläche und die Neigung sichergestellt sind, alle Behelfe gegeben. Für jeden einzelnen Beobachtungsort wird nun die verbesserte Position  $\alpha', \delta'$  des frühest gesehenen Bahnpunktes in Betracht kommen. Das entsprechende Azimut liefert dann den Richtungseinschnitt in die Bahntrajektorie, woraus mit Benutzung der Bahnneigung gegen den Horizont sowohl die entsprechende Bahnlänge als auch die Höhe des Meteors über diesem Punkt sich ergibt.

d) *Geozentrische oder relative Geschwindigkeit.* Sind  $L_i$  und  $t_i$  zusammengehörige Werte einer aus den Beobachtungen gerechneten wirklichen Bahnlänge und des durch Schätzung ermittelten Zeitintervalles für die Zurücklegung derselben Strecke in Zeitsekunden, so ist

$$\mathfrak{B}_i = \frac{L_i}{t_i}$$

der aus *dieser* Beobachtung hervorgehende *Durchschnittswert* der relativen Geschwindigkeit des Meteors, behaftet namentlich mit der großen Unsicherheit, welche die Dauerschätzung fast unvermeidlich mit sich bringt. Ein Durchschnittswert, weil man annehmen muß, daß die Geschwindigkeit im Verlauf der Bewegung durch die atmosphärischen Schichten nicht völlig konstant geblieben sein kann.

Liegen mehrfache, zusammengehörige Angaben  $L_1, t_1, \dots$  vor, so wird man sorgfältig zu erwägen haben, ob etwa eine einzige anscheinend sehr verlässliche Schätzung von  $t$  mit dem dieser Beobachtung entsprechenden Werte  $L$  allein beizubehalten oder ein Mittel abzuleiten wäre, immer nur im Hinblick auf Zusammengehöriges. Die aus dem *frühesten* Aufleuchten hervorgehende *größte* Bahnlänge mit dem Mittel aller Dauerschätzungen zu verbinden, was zuweilen geschieht, ist nicht zu empfehlen, weil unter diesen gewöhnlich viele Schätzungen vorkommen, die sich nur auf kürzere Bahnteile beziehen.

Am besten ist es in der Regel, die Geschwindigkeit aus jedem Paare  $L, t$  für sich zu bestimmen und dann das Mittel mit oder ohne Rücksicht auf Gewichte zu nehmen. Die häufig vorkommenden starken Überschätzungen der Dauer — also stets einseitige Fehlerquellen — machen jedoch den Erfolg einer scharfen Gewichtsbestimmung sehr oft fraglich.

Findet sich in keiner Beobachtung die zur bezeichneten Bahnlänge gehörige Dauerschätzung, so mag etwa das Mittel sämtlicher  $L$  mit dem Mittel der  $t$  verbunden werden.

Nicht selten liefern lange, größtenteils die höheren Schichten der Atmosphäre durchschneidende und auch schon in größerer Höhe endigende Bahnen wesentlich größere Werte für die Geschwindigkeit als solche, welche erst in den tieferen Schichten in geringer Länge nachgewiesen wurden. Die Beantwortung der Frage, ob solche Erfahrungen den verzögernden Einfluß des Luftwiderstandes auch quantitativ darstellen, oder mehr in der Überschätzung der Dauer begründet sind, durch welche bei kurzen Bahnen das Resultat merklicher entstellt wird als bei langen, bedarf noch weiterer Studien. Der Fall, daß sich einzelne Angaben der Beobachtungen mit Sicherheit auf besondere, bestimmt begrenzte höher oder tiefer gelegene Bahnteile beziehen, ist also immer sehr wichtig und deshalb für sich eingehender zu untersuchen.

e) *Zenitattraktion*. Geschwindigkeit und Radiant sollen für die weitere planetarische Rechnung noch von dem *Einflusse der Erdschwere*, welche erstere vergrößert und letzteren dem Zenit näher bringt, befreit werden.

Ist  $z$  die Zenitdistanz des nachgewiesenen scheinbaren Radianten im Endpunkt  $L_e \varphi_e$  und  $v'$  die von der Erdschwere befreite relative oder geozentrische Geschwindigkeit, dann  $z'$  die im selben Sinne verbesserte Zenitdistanz, so wird<sup>2)</sup> ( $g$  Schwerebeschleunigung)

$$v' = \sqrt{\mathfrak{B}^2 - 2gR},$$

worin, wenn alles in Kilometern gilt,

$$(18) \quad \begin{cases} 2gR = 125.18, \\ \operatorname{tang} \frac{\Delta z}{2} = \frac{\mathfrak{B} - v'}{\mathfrak{B} + v'} \operatorname{tang} \frac{z}{2}, \\ z' = z + \Delta z. \end{cases}$$

Das Azimut des Radianten erleidet hierdurch keine Änderung. Die äquatorealen Koordinaten des letzteren sind mit diesem und der verbesserten Zenitdistanz neuerdings zu rechnen. Wo sie im folgenden für die Berechnung der planetarischen Bahn benutzt werden, sind sie nun mit  $a'$ ,  $d'$  bezeichnet.

**2. Beobachtungen verschiedener Körper desselben Stromes aus einem Erdorte.** Wenn mehrere, demselben Strahlungspunkte angehörige scheinbare Bahnen vorliegen, welche innerhalb eines nicht zu langen Intervalles nur an *einem* Orte beobachtet wurden, und wenn die während dieser Zeit eingetretenen Änderungen in den Koordinaten des Radianten unbedeutend sind<sup>3)</sup> oder berücksichtigt werden, können diese Koordinaten auch wieder nach dem Grundsatz bestimmt werden, daß sie den *wahrscheinlichsten* Schnittpunkt der betreffenden größten Kreise bezeichnen. Indessen hat man bei einseitigen Beobachtungen nie die volle Sicherheit, daß die in Betracht gezogenen Bahnen *wirklich zum gleichen* Strahlungspunkt gehören, wodurch die Anwendung strengerer Methoden etwas an Wert verliert.

Bei einseitigen Beobachtungen kann auch die geographische Lage und Höhe des Endpunktes irgend einer Bahn nicht angegeben werden.

2) Schiaparelli p. 251

3) Die Zenitattraktion bewirkt eine mehr oder weniger merkliche eben mit der Zenitdistanz zusammenhängende Änderung im Orte des Radianten. Bei Meteoroiden, welche die Erde mit geringer Geschwindigkeit treffen, kann diese immerhin recht merklich werden. Man sollte daher bei solchen Strömen (zu welchen u. a. die „Bieliden“ gehören) nur solche Beobachtungen in eine Bestimmungsguppe vereinigen, welche hinsichtlich der Zenitdistanz des Radianten nicht allzuweit auseinander liegen. Die mit der Sonnenlänge vor sich gehende Verschiebung bleibt aber zumeist für mehrere Tage innerhalb der Grenzen, welche durch die Beobachtungsfehler gezogen sind. Die Vereinigung von Beobachtungen, welche sich auf mehrere Wochen erstrecken, wird in der Regel nur beiläufige Resultate liefern können.

Es entfällt somit die im betreffenden Teile des vorigen Abschnittes erörterte Verbesserung der Endposition  $\alpha''$ ,  $\delta''$ , welche also nur ungefähr gleichwertig sein wird mit  $\alpha'$ ,  $\delta'$ . Demnach wird es nahe liegend sein, die Verbesserungen gleichmäßig zu verteilen und die nötige Drehung des Bogens um die Bahnmitte vorzunehmen. Der

Faktor der Fehlergleichung wird also  $\frac{\sin \frac{l}{2}}{\sin l'}$  sein, wenn  $l'$  den Abstand der Bahnmitte vom vorläufigen Radianen bezeichnet. Sonst wird man das gleiche Verfahren wie dort anwenden können und zwar auch bei der in solchen Fällen gewöhnlich bevorzugten graphischen Bestimmung durch die Eintragung in Kartennetze.

R. *Lehmann-Filhés*<sup>4)</sup> erörtert die Methode, den scheinbaren Radianen bei einseitigen Sternschnuppenbeobachtungen aus scheinbaren Bahnen abzuleiten, welche je durch einen beliebigen Punkt  $\alpha$ ,  $\delta$  derselben und ihren Positionswinkel gegen den Deklinationskreis dieses Punktes bestimmt sind. Hat der Beobachter die Wahl dieses Punktes frei, so wird er ihn häufig durch die Nähe eines ihm bekannten Sternes sicherstellen können, und wenn die Aufmerksamkeit nicht allzusehr durch die genaue Fixierung von Anfang und Ende der Bahn in Anspruch genommen ist, dürfte die Bahnrichtung, also auch der Positionswinkel vermutlich genauer erhalten werden als durch Festlegung jener beiden Punkte, die bei einseitigen Beobachtungen nur beiläufig angedeutet zu werden brauchen, wenn man sie überhaupt berücksichtigen will.

Die Gleichungen (14) bis (17) in welchen der Positionswinkel  $P$  am Stundenkreis des vorläufigen Radianen  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ , also nicht der in einem beliebigen anderen Bahnpunkte  $\alpha$ ,  $\delta$  bestimmte, vorkommt, lassen sich ganz leicht auf diese Art der Lösung anwenden.

Bezeichnet  $W$  den in  $\alpha$ ,  $\delta$  bestimmten Positionswinkel, wo diese Koordinaten also bezeichnet sein müssen, so ergibt sich sofort  $\alpha_k$  aus

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang} (\alpha - \alpha_k) = \text{tang} W \sin \delta \\ \text{und} \quad \sin P = \frac{\cos \delta}{\cos \delta_0} \sin W, \\ \cos P = \frac{\cos (\alpha_0 - \alpha_k)}{\cos (\alpha - \alpha_k)} \cos W. \end{array} \right.$$

Setzt man diese Werte in die erwähnten Gleichungen, so sind sie für die vorstehende Lösung modifiziert.

Endlich mag noch erwähnt werden, daß bei einseitigen Beob-

4) R. *Lehmann-Filhés*, Astr. Nachr. 96 (1880) p. 241.

achtungen die Zenitattraktion für die Verbesserung des Radianten nur hypothetisch bestimmt werden kann, denn man muß dazu das Zenit des Bahnendpunktes, der unbekannt ist und die relative Geschwindigkeit kennen. Für den letzteren kann der Beobachtungsort genommen werden, woraus große Fehler nicht entstehen können. Statt der unbekanntes Geschwindigkeit wird gewöhnlich die aus der parabolischen Bahn sich ergebende geozentrische Geschwindigkeit genommen.

## II. Ableitung der Bahn im Sonnensystem.

Die von der Zenitattraktion befreiten Koordinaten des *scheinbaren* Radianten  $a'$ ,  $d'$  sollen in der Beziehung auf die Ekliptik mit  $\lambda'$ ,  $\beta'$  bezeichnet werden. Diese und die geozentrische (relative) Geschwindigkeit  $v'$  entstehen durch die Zusammensetzung der heliozentrischen Bewegung des Meteors mit der Geschwindigkeit  $v$  aus der durch die analogen Koordinaten  $\lambda$ ,  $\beta$  bezeichneten Richtung mit der Größe und Richtung der heliozentrischen Erdbewegung am Knoten der Meteorbahn.  $\lambda$ ,  $\beta$  bestimmen den *wahren* Radiationspunkt und  $v$  ist die *heliozentrische* Geschwindigkeit an dieser Stelle. Der viel zu unbedeutende Einfluß der Erdrotation kann hier außer Betracht bleiben.

Als Einheit zur Bezeichnung von  $v$  und  $v'$  soll nun wie üblich, wenn nichts anderes bemerkt ist, die Geschwindigkeit der Erde in der mittleren Entfernung von der Sonne genommen werden. Die in Kilometern ausgedrückten Größen werden auf diese Einheit hinreichend genau zurückgeführt, indem man durch 29.59 dividiert.

Für den Radiusvektor, oder die Entfernung der Erde von der Sonne, gilt als Einheit die mittlere Entfernung oder die große Halbachse der Erdbahn. Für jene Stelle der Erdbahn, an welcher die Sonnenlänge  $\odot$  ist, beträgt die zugehörige Entfernung in dieser Einheit:

$$r = 1 + e' \cos (\odot - II).$$

Hierin kann noch für lange Zeit hinreichend  $e' = 0.01676$  und, wenn  $T$  die Jahreszahl bezeichnet,

$$II = 101^\circ 12.8' + 1.03' (T - 1900)$$

genommen werden. Übrigens ist  $r$  für alle Tage in jedem astronomischen Jahrbuch gegeben.

Bezeichnet  $\odot'$  die Länge der Normalenrichtung an dem Punkt der Erdbahn, für welchen die Sonnenlänge  $\odot$  beträgt, so ist

$$\odot' = \odot + \frac{e'}{\sin I} \sin (\odot - II) = \odot + 57.6 \cdot \sin (\odot - II)$$

und demnach ist die Länge des in der Ekliptik liegenden jedesmaligen Zielpunktes oder *Apex* der Erdbewegung  $= \odot' - 90^\circ$ .

Endlich ist die *heliozentrische* Geschwindigkeit der Erde in der Entfernung  $r$  von der Sonne gegeben durch  $\sqrt{\frac{2}{r} - 1}$ .

Zwischen  $\lambda', \beta', v'$  und  $\lambda, \beta, v$  bestehen die drei Gleichungen:

$$(20) \begin{cases} v \cos \beta \sin (\odot' - \lambda) = v' \cos \beta' \sin (\odot' - \lambda') - \sqrt{\frac{2}{r} - 1}, \\ v \cos \beta \cos (\odot' - \lambda) = v' \cos \beta' \cos (\odot' - \lambda'), \\ v \sin \beta = v' \sin \beta', \end{cases}$$

woraus man  $\lambda, \beta$  und  $v$  findet.

Will man allein die Größe der heliozentrischen Geschwindigkeit kennen lernen, so erhält man hieraus

$$(21) v^2 = v'^2 + \left(\frac{2}{r} - 1\right) - 2v' \sqrt{\frac{2}{r} - 1} \cdot \cos \beta' \sin (\odot' - \lambda')$$

und die halbe große Achse der betreffenden Meteorbahn

$$(22) a = \frac{r}{2 - rv^2}.$$

Diese Bahn ist also eine *Ellipse* oder eine *Hyperbel*, je nachdem  $a$  positiv oder negativ ausfällt, je nachdem  $v^2 \leq \frac{2}{r}$  ist.

Der Parabel für  $a = \infty$  entspricht daher der besondere Grenzfall  $v^2 = \frac{2}{r}$ .

Zuweilen wird aus der periodischen Wiederkehr besonders reichlich auftretender Meteore eines bekannten Radianten  $\lambda', \beta'$  (z. B. der „Leoniden“) auf die Umlaufszeit  $U$  eines dichtern Meteorschwarmes geschlossen und diese danach als gegeben betrachtet. Um die übrigen Bahnelemente in einem solchen Falle zu berechnen, erhält man

$$(23) a = U^{\frac{2}{3}}$$

und hiernach auch  $v$ . Dann liefern die drei Gleichungen (20)  $v', \lambda$  und  $\beta$ , aus welchen die Bahnelemente des Stromes nach dem Folgenden abgeleitet werden können.

Bezeichnen:  $i$  die Neigung der heliozentrischen Meteorbahn gegen die Ekliptik,  $\tau$  den Winkel der Tangente an diese Bahn mit dem Radiusvektor  $r$  der Erdbahn im Knoten der Meteorbahn,  $p$  den halben Parameter,  $e$  die Exzentrizität,  $q$  die Periheldistanz derselben und  $w$  deren wahre Anomalie für den Radiusvektor  $r$ , so erhält man diese Größen aus nachstehenden Gleichungen:

$$(24) \begin{cases} \sin i \sin \tau = \sin \beta, \\ \cos i \sin \tau = -\cos \beta \sin (\odot - \lambda), \\ \cos \tau = -\cos \beta \cos (\odot - \lambda), \end{cases}$$

$$(25) \quad \begin{cases} p = r^2 v^2 \sin^2 \tau, \\ e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}, & q = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \\ \cos w = -\frac{1 - \frac{p}{r}}{e}. \end{cases}$$

Wegen Ermittlung der weiteren Elemente kann auf die Bahnberechnung der Kometen und Planeten verwiesen werden, da nunmehr alle hierzu nötigen Stücke gegeben sind. Die Größen  $i$  und  $\tau$  müssen stets in gegenseitiger Beziehung gezählt werden. Rechnet man  $\tau$  von der gegen  $180 + \odot$  hinausgehenden Verlängerung des Radiusvektor  $r$  gegen die Sonne hin stets nur im 1. oder 2. Quadranten, so erhält  $\sin i$  immer das Vorzeichen von  $\sin \beta$ . Für nördliche Radianen ist daher der betreffende Knoten stets der absteigende und es ist dann  $\Omega = \odot$ . Die Bewegung ist unter dieser Voraussetzung (nämlich für positive  $\beta$ ) recht- oder rückläufig, je nachdem  $i$  im 1. oder 2. Quadranten liegt. Für Radianen in südlicher Breite wird  $\Omega = 180 + \odot$  und die Bewegung recht- oder rückläufig, je nachdem  $i$  aus den Gleichungen im 3. oder 4. Quadranten hervorgeht. Bei der späteren Darstellung der Elemente wird aber  $i$  für den betreffenden aufsteigenden Knoten mit dem Beisatze recht- oder rückläufig angegeben.

Da für eine erhebliche Anzahl großer (auch sogenannter detonierender und selbst auch mit dem Niederfallen von Massen verbundener) Meteorerscheinungen durch sorgfältige Benutzung des Beobachtungsmaterials festgestellt ist, daß deren heliozentrische Geschwindigkeit  $v$  die oben bezeichnete parabolische Grenze wesentlich überschreitet, so daß  $a$  negativ,  $e > 1$ , die heliozentrische Bahn demnach eine ausgesprochene Hyperbel darstellt, welche schon der Lage nach unmöglich im Sonnensystem erzeugt worden sein konnte, so muß angenommen werden, daß solche Körper aus dem Weltraum in das Sonnensystem eingedrungen sind.

Körper, welche im Weltraume nahezu parallele Bahnen in großen lateralen Abständen mit identischer Geschwindigkeit beschreiben, also gleichsam einem *siderischen Strome* von bedeutender Ausdehnung angehören, können die Erdbahn in so verschiedenen Knotenlängen treffen, daß außer  $a$ , welches von der ursprünglichen kosmischen Geschwindigkeit abhängt, alle anderen gleichnamigen Bahnelemente und danach auch die Koordinaten der scheinbaren Radianen gänzlich verschieden ausfallen können.

Was unter solchen Umständen eine Vergleichung verschiedener

Fälle ermöglicht, ist nicht *der Komplex jener Elemente*, welche für die Bahnen der Planeten und Kometen charakteristisch sind, sondern nach dem hier Gesagten ausschließlich die Größe und Richtung der Bewegung für so große Werte des Radiusvektor  $\rho$ , gegen welche selbst  $r$  nahezu als verschwindend klein angesehen werden kann. Da ein solcher Bahnteil der Asymptote sehr nahe kommt, kann man für diese Entfernung  $\rho = \infty$  nehmen.

Der Richtpunkt dieser Asymptote an der scheinbaren Himmelskugel, dessen Länge und Breite hier  $l, b$  heißen sollen, kann als der *siderische* oder *kosmische Ausgangspunkt* des Meteors bezeichnet werden. Die Bestimmung desselben, für verschiedene Annahmen von  $\alpha(v)$ , bei gegebenem Strahlungspunkt  $\lambda' \beta'$ , ist hinsichtlich der hyperbolischen Meteore eigentlich das *wichtigste Ziel*.

Ist  $w'$  die wahre Anomalie der Meteorbahn für den Radiusvektor  $\rho = \infty$  und  $\sigma$  der Winkel, welchen die Richtung der Asymptote (aus dem Punkt  $l, b$ ) mit dem Radiusvektor  $r$  am Bahnknoten der Erdbahn bildet, völlig in analoger Zählung und Bedeutung wie  $\tau$ , so erhält man

$$(26) \quad \cos w' = -\frac{1}{e}, \quad \sigma = w' - w,$$

oder, wenn

$$(27) \quad \sqrt{\frac{rv^2}{rv^2 - 2}} = m,$$

$$(28) \quad \tan \frac{\sigma}{2} = \frac{m \sin \tau}{1 + m \cos \tau};$$

für umgekehrte Bestimmungen bequemer, auch

$$(29) \quad \cos(2\tau - \sigma) = \frac{2 + (rv^2 - 2) \cos \sigma}{rv^2},$$

$l, b$  erhält man dann aus:

$$(30) \quad \begin{cases} \sin(\odot - l) \cos b = -\sin \sigma \cos i, \\ \cos(\odot - l) \cos b = -\cos \sigma, \\ \sin b = \sin \sigma \sin i. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit für den Eintritt in das Sonnensystem ( $\rho = \infty$ ) gibt

$$(31) \quad v_0 = \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{v^2 - \frac{2}{r}}.$$

Für parabolische Bahnen wäre  $rv^2 - 2 = 0$ , also  $a = \infty$ , hier-  
nach:

$$(32) \quad \begin{cases} p = 2r \sin^2 \tau, & e = 1 \quad w = 180^\circ - 2\tau, \\ q = \frac{p}{2} = r \sin^2 \tau, & w' = 180^\circ, \\ \sigma = 2\tau, & v_0 = 0 \quad \pi = 180^\circ + \odot \pm w. \end{cases}$$

Es kann zuweilen von großem Interesse sein, die Aufgabe in umgekehrter Ordnung zu lösen, d. h. also den scheinbaren Radianten  $\lambda', \beta'$  für einen bestimmten Tag des Jahres ( $\odot$ ) zu bestimmen, wenn als gegeben vorausgesetzt werden:

- a) die nötigen Elemente der elliptischen Meteorbahn, oder
- b) das parabolische Aphel durch  $l, b$  oder endlich
- c) der hyperbolische kosmische Ausgangspunkt, auch wieder durch  $l, b$  mit  $v_0$  oder  $v$ .

Es ist dann nach dem Früheren bei den elliptischen Bahnen  $a$ , wenn nicht ohnehin direkt durch das Elementensystem, durch die Umlaufszeit  $U$ , bei den hyperbolischen durch die Gleichungen (31) oder (22) gegeben.

Ferner

$$(33) \quad v = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}.$$

Unter den elliptischen Elementen sind auch  $e^2$  und  $i$  gegeben. Man kann also berechnen:

$$(34) \quad p = a(1 - e^2), \quad \sin \tau = \frac{\sqrt{p}}{rv};$$

dann aus System (24) den Ort  $\lambda, \beta$  des wahren und aus (20)  $\lambda', \beta', v'$  für den scheinbaren Radianten. Die Zenitattraktion kann nur für eine bestimmte Polhöhe und Sternzeit angebracht werden.

Bei hyperbolischen Bahnen ist in der Gleichung für  $v$   $a$  negativ, bei parabolischen unendlich zu nehmen.

Das System (30) liefert mit  $\odot, l$  und  $b$ , dann  $i$  und  $\sigma$ , ferner erhält man aus (29)  $\tau$ , aus (24)  $\lambda, \beta$  und zuletzt auch wieder  $\lambda', \beta'$  und  $v'$ .

Gleichung (29) liefert für jede Ausgangsrichtung  $l, b$  ein zusammengehöriges *Radiantenpaar*. Umgekehrt gibt es daher auch für jede  $\odot$  stets *zwei* zusammengehörige und mit *einem*  $l, b$  konjugierte scheinbare Radianten an weit voneinander entfernten Stellen des scheinbaren Himmelsgewölbes. Man findet beide leicht, wenn man bedenkt, daß  $\cos(2\tau - \sigma)$  auch bei feststehendem Vorzeichen stets zweierlei Werte für  $2\tau - \sigma$ , also für ein bestimmtes  $\sigma$  zweierlei  $\tau$ , entsprechend den in jeder Ebene und für identischen Brennpunkt möglichen Hyperbeln, welche nach einer Seite hin parallele Asymptoten besitzen. Dabei ist die eine Bahn rechtläufig, die andere rückläufig, und ihre Perihele liegen auf entgegengesetzten Seiten des Radiusvektor. Da eine der beiden Periheldistanzen gewöhnlich sehr klein ist, fällt der zugehörige Radiant meist noch in den vom Sonnenlicht beherrschten Himmelsraum. Für die parabolischen Bahnen müßten die *wahren* Orte der

beiden zusammengehörigen Radianten einander diametral gegenüber liegen.

Die im vorstehenden angegebenen Ausdrücke für die Bahnbestimmung gehen bei dem gegenwärtigen Stande der Beobachtungstechnik hinsichtlich der rechnerischen Genauigkeit über das erforderliche Maß hinaus. Sie werden daher zweckmäßig nur dann anzuwenden sein, wenn es sich um die Weiterentwicklung von bestimmten theoretischen Annahmen handelt. Bei der Verwertung von Beobachtungen aber wird man schneller und doch ohne merklichen Genauigkeitsverlust ans Ziel gelangen, wenn man überall hinsichtlich der Erdbahn  $e = 0$ ,  $r = 1$ ,  $\odot' = \odot$  und auch die Geschwindigkeit der Erde durchweg  $= 1$ , kurz die Erdbahn als kreisförmig nimmt.

Es ist leicht, die vorhin angeführten Ausdrücke durch diese Substitutionen zu vereinfachen, nur wäre zu erwähnen, daß es nicht notwendig ist, den wahren Radianten aufzusuchen, wenn man auf dem kürzesten Wege zu den gewöhnlichen Elementen gelangen will.

Man rechnet nämlich

$$(35) \quad \begin{cases} v^2 = v'^2 + 1 - 2v' \cos \beta' \sin (\odot - \lambda'), \\ \cos \tau = -\frac{v'}{v} \cos \beta' \cos (\odot - \lambda'), \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \sin i = -\operatorname{tang} \beta' \operatorname{cotg} \tau \sec (\odot - \lambda'), \\ \cos i = \frac{1 + v \cos \tau \operatorname{tang} (\odot - \lambda')}{v \sin \tau}. \end{cases}$$

Das Weitere ergibt sich durch die angeführte Substitution in die bekannten Formeln.

Für die Bestimmung des siderischen Ausgangspunktes  $l$ ,  $b$  wird

$$(37) \quad \begin{cases} \text{mit } \frac{v}{\sqrt{v^2 - 2}} = m \quad \operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = \frac{m \sin \tau}{1 + m \cos \tau}, \\ \cos (2\tau - \sigma) = \frac{2 + (v^2 - 2) \cos \sigma}{v^2}, \end{cases}$$

worauf man aus System (30)  $l$  und  $b$  findet. Die Geschwindigkeit für  $\varrho = \infty$  wird  $v_0 = \sqrt{v^2 - 2}$ .

Die Vereinfachung der umgekehrten Aufgabe, aus  $l$ ,  $b$  den Radianten  $\lambda'$ ,  $\beta'$  zu finden, bedarf hiernach keiner weiteren Ausführung. Rechnungsergebnisse für die Bahnelemente aus der *den Beobachtungen* entnommenen Geschwindigkeit sind fast wertlos, weil die Grundlage für diesen Zweck zu unsicher ist. Die *möglichst sorgfältige* Ableitung der Geschwindigkeit ist allerdings *sehr wichtig*, um wenigstens den Grad der Wahrscheinlichkeit kenntlich zu machen, daß die betreffende planetarische Bahn von der Parabel nach der einen oder anderen

Seite abweicht. Die Berechnung der Elemente jedoch, wenn man sich damit befassen will, soll mit verschiedenen *angenommenen, zweckmäßig gewählten* Werten für die Geschwindigkeit durchgeführt werden, wodurch die Gesamtergebnisse zur Vergleichung mit anderen Fällen anschaulicher gestaltet werden.

### III. Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse aus Meteorbeobachtungen.

#### 1. Mittlere Genauigkeit der Beobachtungen und der Rechnungsergebnisse.

a) *Am End- oder Hemmungspunkt der Bahn.* Der mittlere Fehler einer Richtung (eines Azimuts) ergab sich im Durchschnitt aus 351 benutzten Beobachtungen zu  $\pm 5.8^\circ$ .

Die Feststellungen erfolgten nur in 12% durch sogleiche Beziehung auf Gestirne, in etwa 20% auf Grund späterer Messungen, in den übrigen Fällen durch Bezeichnung irdischer Objekte der Umgebung nach Plänen und Karten usw.

Der *mittlere Fehler* einer Bezeichnung der *scheinbaren Höhe* oder Zenitdistanz kann aus 235 Angaben zu  $\pm 4.1^\circ$  angenommen werden. Es wurden in der Regel nur Beziehungen auf Gestirne oder doch nachträgliche Messungen berücksichtigt. Rohe „Abschätzungen“ liefern bekanntlich fast immer *viel zu große* scheinbare Höhen. Wo solche ausnahmsweise in Verwendung kamen, wurden sie in der Regel auf  $\frac{2}{3}$  bis  $\frac{3}{5}$  des angegebenen Betrages reduziert.

Die Azimute, bei welchen solche einseitige Fehler minder zu besorgen sind, wurden nicht so streng gesichtet, was auch an dem größeren mittleren Fehler einer Beobachtung zu erkennen ist.

Der *mittlere Fehler* in der Bestimmung der *geographischen Lage* des *Endpunktes* ergab sich aus 42 Fällen zu  $\pm 8.3$  km. Die besten Bestimmungen blieben noch bis  $3\frac{1}{2}$ —4 km ungenau. Der *mittlere Fehler* der abgeleiteten *linearen Höhen* beträgt durchschnittlich  $\pm 3.4$  km.

b) *Am Anfangspunkt der beobachteten Bahn.* Die Umstände der Beobachtungen verursachen es, daß ein Meteor von mehreren Beobachtern an ganz verschiedenen Stellen seiner Bahn zuerst aufgefaßt werden kann. Dies sind Unterschiede, welche ganz und gar nicht den Charakter von Beobachtungsfehlern tragen. Als solche können nur die transversalen Abweichungen von der verbesserten scheinbaren Bahn betrachtet werden.

Diese betragen für den Anfangspunkt aus 217 Angaben im Mittel  $\pm 4.2^{\circ}$ . Sie wurden in ähnlicher Weise wie für den Endpunkt erhalten, jedoch gröbere Angaben häufiger als dort ausgeschlossen.

Bei *Beziehungen auf Gestirne*, wenn sie sogleich nach der Beobachtung hergestellt wurden, ergab sich der mittlere Fehler einer solchen für den Anfangs- oder Endpunkt im Durchschnitt zu  $\pm 3\frac{1}{2}^{\circ}$ .

c) *Schätzungen der scheinbaren Neigung der beobachteten Lichtbahn* wiesen in 250 benutzten Fällen durchschnittlich einen mittleren Fehler von  $\pm 6.5^{\circ}$  auf. Solche Schätzungen bezogen sich gewöhnlich auf den Vertikal des gesehenen Endpunktes oder eines sonst bezeichneten Bahnpunktes und wurden zumeist durch graphische Skizzen geliefert. Radianten, welche nicht weit über dem Horizonte liegen, werden gewöhnlich nur durch einen geringen Teil dieser Unsicherheit beeinflußt.

d) *Erreichte Genauigkeit in der Ableitung der Radianten*. Bei 43 verlässlichen Bestimmungen von Radianten großer, zumeist detonicierender Feuerkugeln aus 537 scheinbaren Bahnen (also durchschnittlich aus 12—13 Beobachtungen für je einen Fall) stellte sich der mittlere Fehler in der Lage dieses Punktes am Himmel im Durchschnitt auf  $\pm 3.3^{\circ}$ .

Die Anzahl der in den einzelnen Fällen verwendbaren Bahnbogen war aber sehr ungleich und betrug manchmal über 40, aber oft auch nur 3—4.

Gegenwärtig sind mehr als 420 Feuerkugel-Radianten nachgewiesen, von welchen jedoch ungefähr 30% mit anderen identisch sein dürften. Viel größer ist die Anzahl der in den letzten Katalogen verzeichneten Radianten von Sternschnuppen. *Denning*<sup>5)</sup> führt aus der betreffenden Literatur, sowie nach eigenen Beobachtungen 4367 solcher Strahlungspunkte an, von denen indessen wahrscheinlich mehr als die Hälfte mit andern zusammenfällt.

Wenn er dabei<sup>6)</sup> bemerkt, daß durchschnittlich in jeder Nacht mehr als 50 Radianten wirksam sind, so ist dies sicher richtig, nur können wegen zu geringer Frequenz an einzelnen Meteoren viele davon nicht jedesmal am selben Ort und in jedem Jahre nachgewiesen werden.

Die reichen Sternschnuppen-Ströme liefern so viel Beobachtungsmaterial, daß ihre Radiationspunkte zumeist genauer als jene der Feuerkugeln bestimmt werden konnten, wie nachstehende Beispiele, in welchen die mittlern Fehler angesetzt sind, zeigen:

5) *W. F. Denning*, General-Catalog (1899).

6) *W. F. Denning*, Ebenda p. 203.

	Ort des scheinb. Radianten:		Maximum
	Rectasc.	Declinat.	
Leoniden	150.1° ( $\pm 0.3^\circ$ )	+ 23.0° ( $\pm 0.2^\circ$ )	November 14
Perseiden	44.0° —	+ 56.9° —	August 10
Lyriden	271.5° ( $\pm 0.7^\circ$ )	+ 33.4° ( $\pm 0.4^\circ$ )	April 20
Andromediden	23.8° ( $\pm 0.9^\circ$ )	+ 44.0° ( $\pm 0.2^\circ$ )	November 26—28
Quadrantiden	230.9° ( $\pm 0.7^\circ$ )	+ 51.3° ( $\pm 0.4^\circ$ )	Jänner 2
Geminiden	108.3° ( $\pm 0.5^\circ$ )	+ 33.6° ( $\pm 0.4^\circ$ )	Dezember 10—12
Orioniden	89.7° ( $\pm 0.5^\circ$ )	+ 15.6° ( $\pm 0.3^\circ$ )	Oktober 10—16
	91.5° ( $\pm 0.3^\circ$ )	+ 15.7° ( $\pm 0.3^\circ$ )	Oktober 16—22

für die „Perseiden“ glaubt *Denning*<sup>7)</sup> die Wirksamkeit von Juli 11 bis August 19 annehmen zu sollen, wobei der Radiant eine Verschiebung von  $\alpha = 11.5^\circ \delta = 47.7^\circ$  bis  $\alpha = 56.6^\circ \delta = 59.1^\circ$  erfährt.

Alle diese Ströme führen längs ihrer ganzen bisher bekannt gewordenen Bahnen mehr oder weniger dicht verbreitete Partikel, aber nur die „Leoniden“ überdies einen in sichergestellter *Periode* von  $33\frac{1}{4}$  Jahren zur Sonnennähe wiederkehrenden besonders reichen Schwarm.

**2. Ergebnisse für die Höhe des Aufleuchtens und der Hemmung, und ihre Beziehungen zu anderen Faktoren.** In dieser Hinsicht muß unterschieden werden zwischen den kleineren Erscheinungen, welche man gewöhnlich als „Sternschnuppen“ bezeichnet, und den großen Meteoriten, die als „Feuerkugeln“ häufig mit außerordentlicher Lichtentwicklung, oft auch bedeutenden Schallimpulsen, zuweilen nachweisbar von Meteoritenfällen gefolgt, ihren Lauf in der Atmosphäre beschließen.

Hinsichtlich der *Sternschnuppen* des sogenannten *Perseidenstroms* im August fand *Weiß*<sup>8)</sup> in Wien aus der Bearbeitung von 49 verlässlichen korrespondierenden Beobachtungen als Mittelwerte für die *Höhen*:

Beim *Aufleuchten*: 115 km,

„ *Erlöschen*: 88 „ .

Unabhängig davon wurden von *H. A. Newton*<sup>9)</sup> ebenfalls für die „*Perseiden*“ aus 39 Beobachtungen durchschnittlich folgende Höhenmittel abgeleitet:

Beim *Aufleuchten*: 112 km,

„ *Erlöschen*: 90 „ .

Eine vortreffliche Übereinstimmung.

7) *W. F. Denning*, Astr. Nachr. 148 (1899) p. 283.

8) *E. Weiß*, Wien. Ber. 1868.

9) *H. A. Newton*, American Journal of Science and Arts. 2. Serie. 40.

Für die Sternschnuppen der „Leoniden“ im November dagegen berechnete *Newton*<sup>10)</sup> aus 78 Bestimmungen die Höhenmittel:

Für das *Aufleuchten*: 155 km,  
 „ „ *Erlöschen*: 98 „ .

Danach liegt für diese durchschnittlich die ganze Lichtbahn *höher* als für die „Perseiden“, was offenbar damit zusammenhängt (s. unten), daß die „Leoniden“ mit rund 70 km und die „Perseiden“ nur mit 60 km relativer Geschwindigkeit in die Atmosphäre eintreten. Übrigens scheinen die Massen des Novemberstroms auch chemisch besonders charakterisiert zu sein.<sup>11)</sup>

159 Höhenbestimmungen von Sternschnuppen (5. bis 1. Größe) der *verschiedensten Radianten*<sup>12)</sup>, wobei also auch geringere Geschwindigkeiten vertreten sind, geben im Durchschnitt

für das *Aufleuchten*: 108.5 km,  
 „ „ *Erlöschen*: 86.3 „ ,

also eine nur geringe Abweichung von den für die „Perseiden“ erlangten Resultaten.

Für die *großen Meteore*, einschließlich jener mit Detonationen und Meteoritenfällen, fand ich aus besonders sichern Bestimmungen *ohne* Auswahl der größten Erscheinungen:

für das *Aufleuchten* (121 Fälle): 138.6 km,  
 „ „ *Erlöschen* (213 „ ): 49.7 „ .

Diese Zusammenstellung zeigt, insbesondere wegen der vergleichsweise geringern Höhe des Hemmungspunktes, also des tieferen Eindringens in die Atmosphäre, den Einfluß größerer Massen. Dieser drückt sich noch deutlicher aus bei weitergehender Unterscheidung. Ich fand<sup>13)</sup> die Höhe des Hemmungspunktes im Durchschnitte:

für 147 Feuerkugeln ohne Detonation: 60 km,  
 „ 57 detonierende Meteore: 31 „ ,  
 „ 16 Meteoritenfälle: 22 „ .

Hiernach dürfte es wohl begründet sein, diese verschiedenen Typen durch graduelle Massenunterschiede zu erklären, da größere Massen einen relativ geringeren Widerstand in der Atmosphäre erfahren und daher tiefer herabsteigen können als die kleineren.

10) *H. A. Newton*, Ebenda.

11) Die „Leoniden“ liefern unter allen Sternschnuppen die meisten lange nachleuchtenden Rückstände in der Atmosphäre.

12) *Memoirs of the British Astronomical Association*. Bd. 9, 12. Part. 1 (1900—1903).

13) *G. v. Niessl*, Über die Periheldistanzen und andere Bahnelemente jener Meteoriten, deren Fallerscheinungen mit einiger Sicherheit beobachtet werden konnten. Brünn 1891.

Noch wichtiger sind die Beziehungen der *Höhen des Endpunktes* zu den Werten der *geozentrischen Geschwindigkeiten*, welche man aus den Beobachtungen erhält. Um einseitige Auffassungen möglichst zu vermeiden, habe ich in dieser Hinsicht sehr verschiedenes Material untersucht und ich führe die wesentlichsten Ergebnisse in den Zusammenstellungen I bis IV mit der Vorbemerkung an, daß die Gruppen unter I und II sich hauptsächlich auf kleinere Erscheinungen (Sternschnuppen), III und IV überwiegend auf Feuerkugeln beziehen.

Höhenlage des Endes	Zahl der Fälle	Mittel der beobachteten geozentrischen Durch- schnittsgeschwindigkeiten	Mittel der Endhöhen
I. <sup>14)</sup>			
Über 100 km	23	67.7 km	106.6 km
80—100 „	48	51.5 „	88.8 „
60—80 „	33	35.5 „	73.0 „
30—60 „	17	30.1 „	46.2 „
unter 30 „	2	23.2 „	28.8 „
II. <sup>15)</sup>			
Über 100 km	10	72.3 km	112.2 km
80—100 „	11	43.0 „	88.3 „
60—80 „	13	40.5 „	74.2 „
50—60 „	6	35.4 „	59.2 „
unter 50 „	14	27.4 „	33.9 „
III. <sup>16)</sup>			
Über 60 km	12 (1 deton.)	51.8 km	86.4 km
50—60 „	19 (3 deton.)	55.0 „	54.2 „
30—50 „	43 (16 deton.)	40.6 „	39.0 „
unter 30 „	28 (13 deton.)	37.6 „	24.0 „

14) Die Fälle unter I sind den vorerwähnten „Memoirs of the Br. Assoc. (Fußnote 12) entnommen. Es sind 78% Sternschnuppen, 11% Meteore von 1 bis 4 facher Venusgröße, 11% Feuerkugeln bis Mondgröße ohne Detonations-Angaben.

15) II bezieht sich auf ältere von *Denning* veröffentlichte Bearbeitungen. (*W. F. Denning*, 107 Real paths of Fireballs and Shooting-Stars observed in England from 1886 to 1896. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 57, p. 161, worunter 74% Sternschnuppen wie oben, 6% Meteore von Venusgröße oder etwas mehr, 20% Feuerkugeln, einschließlich einer detonierenden.

16) III ist entnommen einer Liste von zumeist sehr großen Meteoriten, welche ich selbst im gleichen Hefte der Monthly Notices p. 170 veröffentlicht habe. Von den dort angeführten 100 Fällen konnte jedoch nicht überall die Geschwindigkeit

IV.<sup>17)</sup>

Über 100 km	9	76.8 km	116.8 km
80—100 „	9	72.0 „	89.3 „
60—80 „	16	49.4 „	72.5 „
50—60 „	21	49.1 „	58.9 „
30—50 „	35	42.7 „	39.0 „
unter 30 „	21	36.6 „	22.1 „

Alle vier Zusammenstellungen zeigen völlig deutlich *einen gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen der aus Beobachtungen abgeleiteten geozentrischen Geschwindigkeit und der Höhe des Hemmungspunktes in dem Sinne, daß die eine mit der anderen abnimmt.*

Es liegt nahe, hieraus zu schließen, daß ein Meteor um so tiefer in die Atmosphäre eindringen kann, mit je geringerer Geschwindigkeit es auftritt. Daß dieser Schluß zu Recht besteht, wird noch durch folgende Tatsachen erhärtet.

1) Die rascheren Leoniden erlöschen in größeren Höhen, als die langsameren Perseiden, wie oben erwähnt wurde.

2) Unter Voraussetzung gleicher heliozentrischer Geschwindigkeit müssen Meteore, welche der Erde in ihrem Laufe direkt (vom Apex her) *begegnen*, mit einer relativen Geschwindigkeit in die Atmosphäre eintreten, welche rund 56 km größer ist, als jene der Meteore von der entgegengesetzten Seite (vom Antiapex). Ordnet man die Meteore nach der Elongation ihres Radianten vom Apex, so findet man folgende Ergebnisse:

1. Aus dem Material Fußnote <sup>15)</sup>.

Scheinbare Elongation der Radianten	Anzahl der Fälle	Durchschnittliche Höhe des Endpunktes
zwischen 0° und 40°	12	95.6 km
„ 40 „ 70	12	84.5 „
„ 70 „ 90	12	61.6 „
„ 90 „ 110	10	59.8 „
„ 110 „ 180	10	52.1 „

bestimmt werden; mit den seitherigen Ergänzungen ergaben sich aber 102 zusammengehörige Bestimmungen von Endhöhe und Geschwindigkeit.

Dieses Material enthält nur 8% Sternschnuppen 1. bis über 4. Größe und 27% Meteore von ein- bis mehrfacher Venusgröße. Dagegen sind 65% große Feuerkugeln mit Mond- oder Sonnengröße verglichen, darunter 30% detonierend und 7 Meteoritenfälle.

17) IV entstammt einer Analyse von 111 Fällen, die ich nach Materialien der älteren Literatur bearbeitet habe. Da früher die Größenbezeichnungen minder bestimmt lauteten, kann ich nur sagen, daß diese Daten sich ebenfalls mehr auf große Meteore (darunter 22% detonierende) beziehen.

2. Aus dem Material Fußnote <sup>16)</sup>.

Scheinbare Elongation der Radianen	Anzahl der Fälle	Durchschnittliche Höhe des Endpunktes
zwischen 0° und 80°	13	54.2 km
„ 80 „ 90	9	50.5 „
„ 90 „ 100	10	44.5 „
„ 100 „ 110	11	40.2 „
„ 110 „ 120	7	38.6 „
„ 120 „ 150	13	38.6 „
„ 150 „ 180	7	36.4 „

Abgesehen von Details, welche für diese Feststellung unwesentlich sind, zeigen beide Reihen den erwarteten Zusammenhang zwischen Elongation und Endhöhen. Daß letztere in der ersten Liste überhaupt größer sind als in der zweiten, ist wohl gewiß darin begründet, daß sich jene überwiegend auf kleine, schon in großen Höhen erlöschende, meine dagegen fast nur auf große Meteore bezieht. In dieser Hinsicht bildet daher letztere gewissermaßen eine ergänzende Fortsetzung der ersteren. Zum Teil muß die geringere beobachtete Geschwindigkeit der tieferen Meteore selbstverständlich auch auf der Abnahme der Geschwindigkeit während des Laufes durch die Atmosphäre beruhen. Die schließliche Hemmung ist fast momentan, doch liegen auch einzelne Erfahrungen vor, daß aus Beobachtungen, die sich nur auf die *untersten* Bahnteile in den tieferen atmosphärischen Schichten beziehen, *geringere* Geschwindigkeiten erhalten werden, als die durchschnittliche, welche bei Berücksichtigung der *ganzen* Bahnlänge in *demselben Falle* hervorgeht<sup>18)</sup>. Freilich erschweren die Fehler in der Schätzung kurzer Zeitdauern hier ein abschließendes Urteil.

*Vergleich mit der Theorie des Luftwiderstandes.* Zur Berechnung des Luftwiderstandes, welchen die Meteore in den einzelnen Phasen erleiden, hat man versucht, die Erfahrungen zu benutzen, welche aus Experimenten mit sphärischen Geschossen der Artillerie abgeleitet wurden. Die nachstehenden Zusammenstellungen sind auf die *Robertsche*<sup>19)</sup> Widerstandsformel gegründet. Sie setzen vertikale Bewegung eines 118 Gramm schweren kugelförmigen Körpers von 3.5 Dichte und 2 cm Halbmesser voraus. Die beiden Annahmen über die Geschwindigkeit, mit der jener in die Atmosphäre eintritt, bezeichnen für eine parabolische Bahn die Extreme (vom Apex und Antiapex

18) Vgl. G. v. Niessl, Wien. Ber. 114 (1905), p. 1511.

19) *Schiapparelli* p. 23 und 24 nach S. Robert, *Del moto dei Proiettili nei mezzi resistenti*. Torino 1855. (Memorie dell' Academia delle scienze di Torino, II 9 16.)

her). Wäre bei derselben Dichte der Halbmesser  $2r$  cm und die Neigung der Bahn gegen den Horizont  $h$ , so können in der Spalte für die Geschwindigkeit die Werte ungeändert bleiben, wenn der zugehörige Luftdruck mit  $r \sin h$  multipliziert wird.

I			II		
Eintrittsgeschwindigkeit: 72 km			Eintrittsgeschwindigkeit: 16 km		
Luftdruck	Höhe	Geschwindigkeit	Luftdruck	Höhe	Geschwindigkeit
mm	km	km	mm	km	km
—	—	72	—	—	16
0.00007	129	70	0.006	94	14
0.00014	125	68	0.016	86	12
0.0005	114	60	0.032	80	10
0.0013	106	48	0.062	75	8
0.0031	99	36	0.128	69	6
0.0082	91	24	0.305	62	4
0.036	80	12	1.229	51	2
0.082	73	8	4.299	41	1
0.315	62	4	11.619	33	0.5
1.249	51	2			
4.318	41	1			
11.639	32	0.5			

In beiden Fällen kommt die Höhe (33 km), in welcher die planetarische Geschwindigkeit nahezu aufgebraucht erscheint, der für detonierende Meteore im frühern angeführten durchschnittlichen Hemmungshöhe fast gleich. Die Art der Geschwindigkeits-Abnahme widerspricht jedoch allen sonstigen Erfahrungen. So würde z. B. die durch Abschätzung der Dauer für den Fall I aus 129 km bis 33 km erhaltene Durchschnittsgeschwindigkeit nur  $\frac{1}{18}$  der Eintrittsgeschwindigkeit und bei Meteoriten, welche erst in tieferen Regionen, z. B. zwischen 80 km und 33 km beobachtet wurden, was nicht selten vorkommt, gar nur  $\frac{1}{36}$  derselben betragen. Tatsächlich erhält man für Meteore, welche nur im untersten Bahnteil beobachtet wurden, allerdings fast immer viel geringere Geschwindigkeiten, aber bei weitem nicht in dem hier angeführten Maße.

Für 16 km Eintrittsgeschwindigkeit würde (II) die beobachtete Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen 94 und 33 km Höhe auch nur  $\frac{1}{7}$  der ursprünglichen, also immer noch viel zu wenig betragen. An diesen Umständen ändert sich auch nichts Wesentliches, wenn man andere Annahmen unterlegt.

Die wirkliche geozentrische Geschwindigkeit der „Leoniden“, unter welchen besonders viele helle Sternschnuppen vorkommen, ist uns aus

der bekannten Umlaufszeit sicher gegeben und beträgt nicht viel weniger als 72 km. Für ein Körperchen dieses Stromes von 2 mm Halbmesser und 0.12 Gramm Gewicht, dessen Bahn die Atmosphäre in 30° Neigung gegen den Horizont durchschneidet, hätte man die oben unter I angeführten Luftdrucke durch 20 zu dividieren, woraus sich dann die zugehörigen Höhen wie folgt ergeben:

## III.

Höhe km	Geschwindigkeit km	Höhe km	Geschwindigkeit km
153	70	103	12
147	68	97	8
138	60	86	4
130	48	75	2
123	36	65	1
115	24	57	0.5

Für die ganze Bahn aus 153 km bis 57 km würde sich als Durchschnittsgeschwindigkeit auch hier nur ungefähr 4 km oder  $\frac{1}{18}$  der Eintrittsgeschwindigkeit ergeben. Wie früher mitgeteilt wurde, liegen die Bahnen der Leoniden im Mittel zwischen 155 und 98 km, vermutlich, weil die Partikel durch die bedeutende Wärmesteigerung gänzlich aufgelöst werden, ehe sie tiefer herabkommen können. In der Tat hinterlassen die Körper dieses Stromes unter allen Sternschnuppen die meisten anhaltenden Schweifrückstände. Es scheint daher zweckmäßig, das vorstehende Schema nur innerhalb ähnlicher Grenzen, also zwischen 153 und 97 km zu betrachten. Dabei erhält man dann im Durchschnitt etwa 27 km oder  $\frac{3}{8}$  der ursprünglichen Geschwindigkeit, während aus den Beobachtungen die Differenz gegenüber der theoretischen im Mittel viel geringer ausfällt.

Direkte Beobachtungen, so lückenhaft ihre Ergebnisse auch noch sind, machen es überhaupt wahrscheinlich, daß die Verminderung der Geschwindigkeit in den höheren atmosphärischen Regionen geringer, dagegen in dem letzten, untersten Teil der Bahnen, welche tiefer herabreichen, größer sein müsse, als sie nach den vorstehenden theoretischen Ansätzen erscheint. Auch so manche optische Wahrnehmungen bei der Hemmung von Feuerkugeln sprechen dafür.

Die Abhängigkeit der Höhe des Endpunktes der Lichtbahn von der Eintrittsgeschwindigkeit erfordert noch eine Aufklärung. Es ist unter wahrscheinlicher Annahme nachgewiesen (vergl. *Schiaparelli* 231 u. w.), daß die großen, aber sehr verschiedenen Geschwindigkeiten zweier Körper, welche unter sonst ganz gleichen Umständen in die Atmosphäre eintreten und sie in geradliniger Bahn durchlaufen, durch

den Widerstand derart vermindert werden, daß sie in irgendeiner Höhe fast genau den gleichen Betrag erreichen. In den Beispielen I und II ist dies bei rund 62 km schon der Fall.

Man darf daraus jedoch nicht schließen, daß die Endhöhen von der Eintrittsgeschwindigkeit unabhängig sind. Denn das mit der größeren Geschwindigkeit eintreffende Meteor setzt bis zum Abstieg auf 62 km viel mehr kinetische Energie in Wärme um und wird dadurch viel rascher verbraucht.

**3. Masse der Sternschnuppen.** *A. Herschel* folgerte<sup>20)</sup> aus der Vergleichung der Leuchtkraft von Sternschnuppen in bekannter Entfernung mit jener einer gegebenen Menge Gases, daß die Meteore „1. Größe“ durchschnittlich höchstens wenige Gramme und die kleinern nur Bruchteile eines Gramms wiegen.

Durch ähnliche Vergleichungen mit dem Drummond-Licht gelangte *B. F. Sands*<sup>21)</sup> hinsichtlich der „Leoniden“ von 1867 zu nachstehenden Gewichtsschätzungen für Sternschnuppen verschiedener „Größenklassen“. Scheinb. Helligk.: Jupiters Sirius 1. Gr. 2. Gr. 3. Gr. 4. Gr. 5. Gr. Gewicht (Gramm): 0.67 0.45 0.06 0.02 0.01 0.006 0.004.

Wenn auch derartige Schätzungen nur beiläufige Ergebnisse liefern können, so bekräftigen sie doch die Annahme, daß als Substrat des Sternschnuppen-Phänomens nur sehr geringe Massen in Frage kommen, die vermutlich im ursprünglichen Zusammenhange die Erdoberfläche kaum erreichen können.

Nach *Buchner*<sup>22)</sup> wiegt der kleinste unter den aufgefundenen *Aeroliten*, von denen man vermuten kann, daß sie als *einzelne* Körper herabgekommen sind, noch immer 24 Gramm. Viel geringere Partikel, welche im Lauf unter dem Schutz vorangehender größerer Stücke die Atmosphäre in kleinen Aggregaten durchziehen und „Steinregen“ verursachen, sind in dieser Hinsicht mit den Sternschnuppen nicht vergleichbar. Sie bilden mit den größern *zusammen* eine Feuerkugel. Erfahrene Beobachter der Sternschnuppen sprachen sich wiederholt dahin aus, daß ihr äußerer Anblick notwendig auf große Verschiedenheiten in ihrer Zusammensetzung schließen läßt<sup>23)</sup>. Einiges mögen die beträchtlichen Unterschiede der Geschwindigkeit dazu wohl auch beitragen. Solange man über die physische Natur der Sternschnuppen-Materie nichts Genaueres kennt, wird man beim Vergleiche mit den

20) *A. Herschel*, Proc. Brit. meteor. Soc. II 19.

21) *F. Sands*, Wash. Obs. 1867, p. 19—30.

22) *Schiaparelli* p. 203.

23) *Weiß*, Beiträge p. 303.

Meteoriten hauptsächlich die Massenunterschiede zu berücksichtigen haben.

**4. Durchschnittliche und außergewöhnliche Bahnlängen.** Aus 185 berechneten Bahnen von Sternschnuppen 5. bis 1. Größe der letzten englischen Materialien fand ich im Mittel für die Länge der sichtbar gewordenen Lichtbahn 57 km, dagegen für 120 große und in etwa 30% detonierende Meteore aus meinen eigenen und anderen Bearbeitungen durchschnittlich eine Bahnlänge von 319 km. In einigen Fällen, besonders wenn die betreffenden Radianten sich in der Nähe des Horizontes befinden, kommen noch *weit* längere Bahnen vor. Ein solches Beispiel soll hier angeführt werden.

Das Meteor vom 7. Juli 1892<sup>24)</sup> wurde sichtbar, als es 74 km hoch über der Gegend von *Slobozia* in *Rumänien* sich befand und konnte ununterbrochen verfolgt werden bis 158 km hoch, etwa 70 km WNW der *Tibermündung* über dem tyrrhenischen Meer. Dort entzog es sich der Beobachtung nicht sowohl durch eine „Explosion“, als durch anscheinend allmähliche Entfernung. Bei dieser großen Höhe ist es nicht unwahrscheinlich, daß die noch übrig gebliebenen Massen die Atmosphäre wirklich wieder verlassen haben. Die nachgewiesene Bahnlänge beträgt 1350 km. Es ist der erste und bisher auch einzige mir bekannt gewordene Fall einer zweifellos aufsteigenden Bahn. Da der Punkt in 74 km ungefähr das Perigäum darstellt, so muß weiter gegen Osten hin ein mindestens ebenso langer Bahnteil in der Atmosphäre angenommen werden.

Bemerkenswert ist ein am 18. Oktober 1892 in *Niederösterreich* und *Böhmen* beobachtetes Meteor<sup>25)</sup> besonders durch den ganz ungewöhnlich langen Streifen, in welchem die Residuen zurückblieben. Soweit die Bahnstrecke mit einiger Sicherheit nachgewiesen werden konnte, verlief sie in etwa 1630 km Länge von 257 km über der Gegend 70 km östlich von *Königsberg* in Preußen bis etwa 43 km hoch, etwas südlich der Insel *Elba*. Der Lichtstreifen, „gerade und horizontal wie mit dem Lineal gezogen“, war mindestens 634 km lang und blieb durch etwa 3 Minuten sichtbar, so daß sein Verlauf zwischen den Sternen bequem festgestellt werden konnte.

**5. Die heliozentrische Geschwindigkeit,** welche aus der beobachteten geozentrischen hervorgeht, überschreitet weitaus in den meisten Fällen ganz erheblich den parabolischen Grenzwert und führt

24) *G. v. Niessl*, Wien. Ber. 102 (1893), p. 265.

25) *G. v. Niessl*, Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brunn. Brunn 1901. 39, p. 220.

zur notwendigen Annahme ausgeprägt hyperbolischer Bahnen. Es ist gewiß bemerkenswert, daß dies fast immer gerade bei denjenigen Bahnen am entschiedensten zu Tage tritt, welche für die möglichst genaue Ausmittlung der Geschwindigkeit die günstigste Lage haben, nämlich bei den aus der Umgebung des Antiapex her gerichteten, wie z. B. bei den Meteoriten von *Pultusk*, für deren Bahn *J. G. Galle*<sup>26)</sup> die Exzentrizität  $e = 2.277$  als Minimalwert nachgewiesen hat.

Das Mittel aus 26 der sichersten Bahnbestimmungen, zumeist detonierende große Feuerkugeln betreffend, gibt für die heliozentrische Geschwindigkeit 59.05 km, also sehr nahe  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Bei den wenigen Meteoritenfällen, für welche hinreichende Beobachtungen vorliegen, um einen Schluß auf die Bahnform zu ziehen, ist die hyperbolische außer jedem Zweifel.

Für 154 große Meteore, deren Bahnverhältnisse älterem Material entnommen oder auch von mir erst bearbeitet wurden, ergab sich die heliozentrische Geschwindigkeit im Mittel zu 59.8 km.

*Schiaparelli*<sup>27)</sup> hat schon vor mehr als 36 Jahren erklärt, es sei „in der Tat bemerkenswert, daß man allemal, wenn man mit irgendwelcher Annäherung die Geschwindigkeit, mit welcher ein Meteorit oder eine Gruppe von Meteoriten in die Atmosphäre eingedrungen ist, hat untersuchen können, auch gefunden hat, daß die entsprechende absolute Geschwindigkeit größer als die parabolische war“.

Die großen Meteore sind also zweifellos im allgemeinen interstellaren Ursprungs. Dem steht gegenüber, daß Sternschnuppenströme in denselben Bahnen laufen, wie einige Kometen bekannter Umlaufszeit, also gegenwärtig interplanetar sind. Hiernach würde man zunächst geneigt sein, die großen Meteore für interstellar, die kleineren Sternschnuppen für interplanetar zu halten. Doch muß die unleugbare Tatsache hervorgehoben werden, daß die meisten Radiationspunkte von Meteoriten und detonierenden, sowie auch anderen großen Meteoren, sofern sie sichergestellt werden konnten, mit *bekanntem Sternschnuppenradianten zusammenfallen*. Es ist schwer, in solchen Fällen den zugehörigen kleinen Erscheinungen interplanetarische Bahnen zuzuschreiben, wenn die gestreckten Hyperbeln der großen Meteore aus denselben Radianten in den Weltraum hinaus weisen.

Zur Lösung dieser anscheinenden Widersprüche wird man viel-

---

26) *J. G. Galle*, Über die Bahn des am 30. Januar 1868 beobachteten und bei Pultusk im Königreiche Polen als Steinregen niedergefallenen Meteors. Breslau 1868.

27) *Schiaparelli* p. 207 und 209.

leicht annehmen können, daß unter dem Namen der „Sternschnuppen“ verschiedene, äußerlich ähnliche Erscheinungen zusammengefaßt werden, deren dynamische Grundlagen und kosmische Bedeutung vermutlich nicht gleichartig sind. Aus den vielen Erfahrungen der letzten Jahrzehnte wird man wenigstens zunächst den Schluß ziehen müssen, daß sich in dem Gesamtphänomen neben den begrenzteren *interplanetarischen* auch ausgedehnte *interstellare* Meteorströme durch Partikel verschiedenster Grade geltend machen.



(Abgeschlossen im November 1907.)

## Unter der Presse:

- Band II. Teil 2. Elliptische Funktionen. Von J. Harkness in Montreal (Canada) und W. Wirtz in Wien. — Automorphe Funktionen. Von R. Fricke in Braunschweig.
- III. - 1. Konfigurationen der projektiven Geometrie. Von E. Steinitz in Berlin. — Darstellung Geometrie. Von E. Papperitz in Freiberg (Sa.). — Die verschiedenen Koordinatensysteme. Von E. Müller in Wien.
- IV. - 1. Dynamische Probleme der Maschinentechnik. Von K. Heun in Karlsruhe und R. v. Mises.
- IV. - 2. Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme: Das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von P. u. T. Ehrenfest in Petersburg.
- VI. - 1 B. Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. Von F. R. Helmert in Potsdam.

## Band VI. 2. Teil. Astronomie. Redigiert von K. Schwarzschild in Potsdam.

\* erschienen, † unter der Presse.

Vorwort zu Band VI, Teil 2 von K. Schwarzschild in Potsdam.

Inhaltsverzeichnis von Band VI, Teil 2.

### A. Sphärische Astronomie.

#### I. Theorie der Koordinaten.

- \*1. Über Koordinaten und Zeit: E. Anding in Gotha.
- \*2. Reduktion der astronomischen Beobachtungen (sphärische Astronomie im engeren Sinne): F. Cohn in Berlin.
- \*3. Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie: C. W. Wirtz in Straßburg i. E.

#### II. Theorie der Instrumente.

- \*4. Theorie der Uhren: C. Ed. Caspari in Paris.
- \*5. Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler: F. Cohn in Berlin.

### III. Spezielle Ausführungen u. Anwendungen.

- \*6. Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion): A. Bemporad in Catania.
- \*7. Theorie der Finsternisse: F. K. Ginzler in Berlin u. A. Wilkens in Kiel.
- \*8. Chronologie: F. K. Ginzler in Berlin.

### B. Mechanik des Himmels.

#### I. Bahnbestimmung.

- \*9. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen: G. Herglotz in Leipzig.
- \*10. Die Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem: G. v. Niessl in Wien.
11. Doppelsterne und Trabanten. Visuelle und spektroskopische Doppelsterne: J. v. Hepperger in Wien.

#### II. Störungen der Umlaufbewegungen.

- IIa. Analytische Entwicklung d. Störungen.
12. Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen: E. T. Whittaker in Dublin.
13. Entwicklung der Störungsfunktion: H. v. Zepfel in Pulkowa.

14. Große Planeten: C. V. L. Charlier in Lund.
15. Kleine Planeten: K. Sundman in Helsingfors.
- 15a. Gyldén'sche Theorie: K. Sundman in Helsingfors.
16. Kometen: L. Schulhof in Paris.
17. Erdmond: E. W. Brown in Haverford.
18. Die übrigen Satelliten: K. Laves in Chicago.
19. Die Bestimmung astronomischer Konstanten: J. Bauschinger in Straßburg i. E.

#### IIb. Numerische Berechnung aller Störungen.

20. Spezielle Störungen der Planeten und Kometen. Numerische Behandlung besonderer Fälle des Dreikörperproblems. Mehrfache Fixsternsysteme: E. Strömberg in Kopenhagen.

### III. Gestalt und Rotation der Himmelskörper.

21. Figur der Planeten, des Mondes, des Saturnrings, der Kometen: S. Oppenheim in Prag.
22. Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation für starre Erde. Libration des Mondes: K. Schwarzschild in Potsdam.

#### IV. Allgemeine Fragen.

23. Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes: S. Oppenheim in Prag.

### C. Stellarastronomie.

24. Scheinbare Verteilung der Sterne; Sternkataloge; Sternkarten: H. Kobold in Kiel.
25. Parallaxen und räumliche Verteilung der Sterne; Doppelsterne, vielfache Sterne, Sternhaufen, Nebel: H. Kobold in Kiel.
26. Eigenbewegung der Sterne und der Sonne: E. Anding in Gotha.

### D. Astrophysik.

27. Photometrie und ihre Anwendungen: E. Anding in Gotha.
28. Thermodynamik der Himmelskörper (Sonnentheorie, neue Sterne): R. Emden in München.
29. Kosmogonie (Kant, Laplace, G. Darwin). Widerstehendes Mittel. Spekulative Ausblicke: F. R. Moulton in Chicago.

☞ Bisher erschien:

Heft 1 (1—4). [193 S.] 1905. n. M. 5.80. | Heft 2 (5—6). [140 S.] 1908. n. M. 4.—

:: :: VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN :: ::

## Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische u. meteorologische Probleme.

Von Dr. R. Emden, Professor in München. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln. [IV u. 498 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. . . . . n. M. 13.—

Untersuchungen über den Bau und die fortschreitende Entwicklung gasförmiger Himmelskörper liegen nur in einigen, z. T. schwer zugänglichen Abhandlungen vor, von denen in erster Linie diejenigen von H. Lane, W. Thomson, G. Darwin und A. Ritter zu erwähnen sind. Verfasser hat diese Untersuchungen neu aufgenommen, von möglichst allgemeinen Gesichtspunkten aus durchgeführt und die erhaltenen Resultate in Form eines kurzen Lehrbuches niedergelegt. Die notwendigen mechanischen Quadraturen sind sehr exakt ausgeführt; dadurch ist ein wertvolles Zahlenmaterial als Grundlage weiterer Forschung gewonnen. Der 2. Teil des Buches behandelt die Anwendungen dieser Untersuchungen auf kosmische Staubmassen, Nebelflecke, die Erde nebst ihrer Atmosphäre und die Sonne. Die Strahlenbrechung in einer kugelförmigen Gasmasse, die durch innere Gravitation zusammengehalten wird, ist eingehend behandelt, was mit Hinblick auf einige neuere Ansichten über die Strahlenbrechung auf der Sonne von besonderer Wichtigkeit sein dürfte.

Verlag von B. G. Teubner in

# Populäre Ast

Von Dr. J. Sch

Professor der Astrophysik an der Universität Berlin,  
Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium bei Potsdam.

Mit 30 Tafeln und 210 Figuren. [VI u. 718 S.] gr. 8. 1908. In Leinw. geb. M 12.—

„Scheiners Buch versucht eine in unserer populären Literatur über Astronomie vorhandene Lücke zu füllen, denn es kann nicht geleugnet werden, daß in unseren populären Handbüchern das Kapitel „Astrophysik“ nur sehr stiefmütterlich behandelt zu werden pflegt. Und soweit es überhaupt möglich ist, dem Laien einen Einblick in diese schwierige Materie zu erschließen, dürfte der Verfasser seine Aufgabe mit großer Geschicklichkeit gelöst haben. Mathematische Betrachtungen vermeidet er fast vollständig; wo dies aber nicht möglich war, beschränkt er sie auf Dinge, die jedem Gymnasialabsolventen zugänglich sind. Der Vortrag Scheiners ist populärwissenschaftlich im besten Sinne: klar, eindringlich, frei von allen jetzt üblichen Mätschen der naturwissenschaftlichen Populärschriftsteller. Vortreffliche Abbildungen unterstützen das Verständnis des vortrefflichen Textes.“ (Propyläen.)

„... Das Erscheinen dieses Werkes füllt eine bisher immer unangenehm empfundene Lücke aus, und zwar in einer so vorzüglichen Weise, daß man nur wünschen kann, daß keine Bibliothek und überhaupt niemand, der sich für Physik und Astronomie interessiert, das Buch in seiner Sammlung vermissen möge. Die neuesten Forschungsergebnisse sind berücksichtigt, die Darstellung ist überall einfach, klar und kritisch gewissenhaft. Bilder und Tafeln sind geschickt und glücklich gewählt und vortrefflich wiedergegeben. Dabei ist die gesamte Anlage durchaus übersichtlich und der physikalische Teil ohne Anforderung an mathematische Kenntnisse geschrieben.“ (Monatshfts für Mathematik und Physik.)

„... Verfasser betont zwar im Vorwort ausdrücklich, daß das Buch kein für den Fachmann bestimmtes Handbuch sein will, gleichwohl glauben wir aber, daß eine so handliche Zusammenstellung des wichtigsten Materials und eine so reiche Sammlung astrophotographischer Dokumente auch den Fachgenossen willkommen sein wird.“ (Naturwissenschaftliche Wochenschrift.)

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

Biblioteka Politechniki Kraków



II-348774

L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

## Wissenschaft und Hypothese

Sammlung von Einzeldarstellungen aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen.

Als XI. Band der Sammlung erschien:

**F. Enriques**

## Probleme der Wissenschaft

Übersetzt von Kurt Grelling in Göttingen

In 2 Teilen. 8. 1910. In Leinwand gebunden

I. Teil: Wirklichkeit und Logik. [X, 258 u. 16 S.] . . . . . M 4.—

II. — Die Grundbegriffe der Wissenschaft. [VI u. S. 259—599.] . . . . . M 5.—

Der Plan des Werkes ist ein sehr umfassender. Es handelt sich um eine neue Theorie der Erkenntnis, die der Verfasser durch eine gründliche Analyse der Fragen der Logik und Psychologie entwickelt, wobei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik, der Mechanik, der Physik, der Chemie bis zur Biologie, der Wirtschaftslehre und der Geschichte usw. berührt werden. Man wird nicht überrascht sein, von dem Verfasser selbst in dem Vorwort zu seinem Werke zu erfahren, daß dieses das Ergebnis fünfzehnjähriger Arbeit ist. Es handelt sich in der Tat nicht nur um eine Synthese der wissenschaftlichen Ergebnisse; ein philosophischer Gesichtspunkt beherrscht das Ganze und verleiht ihm seinen besonderen Charakter. Die Philosophen sowohl als die Männer der Wissenschaft, die mit abstrakten Begriffen arbeiten, werden künftig das Werk des Mathematiker-Philosophen der Universität Bologna in den Kreis ihrer Betrachtungen zu ziehen haben.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin





VERLAG VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG UND BERLIN

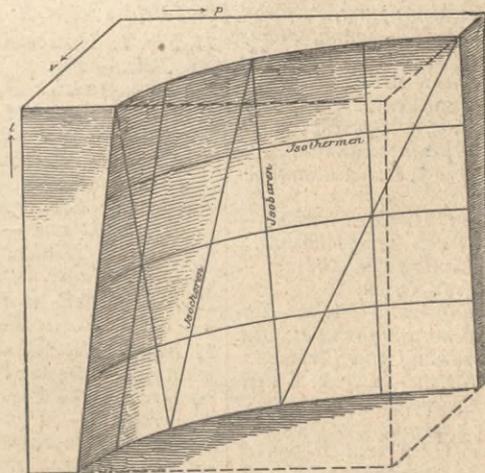
# PHYSIK IN GRAPHISCHEN DARSTELLUNGEN

VON

**DR. FELIX AUERBACH**

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA

1373 Figuren auf 213 Tafeln mit erläuterndem Text  
[X u. 28 S.] gr. 8. 1912. In Leinwand gebunden M. 10.—



*Zustandsfläche eines idealen Gases.*

## Aus der Vorrede.

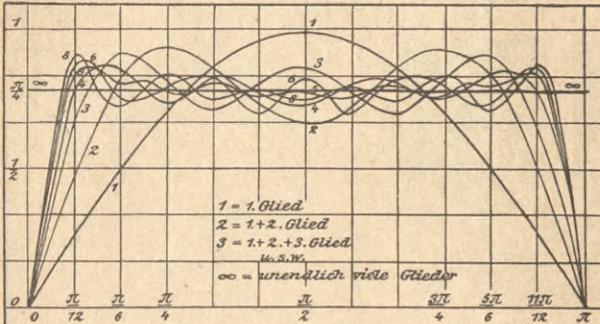
Im vorliegenden Werke ist zum ersten Male die graphische Darstellung als ausschließliche Form gewählt, und es ist versucht worden, das ganze Gebiet der Physik mit ihr zu umspannen, natürlich mit derjenigen Auswahl, auf die eine Beschränkung geboten war mit Rücksicht auf den Umfang, den das Buch nicht überschreiten durfte, wenn es Gemeingut derer werden sollte, die sich für die Gesetze und zahlenmäßigen Verhältnisse der physikalischen Erscheinungen interessieren. Dabei wurde, um die Tafeln möglichst leserlich und vielsagend zu gestalten, Wert darauf gelegt, einerseits das direkt Notwendige an Ort und Stelle zu geben und doch andererseits das Bild nirgends zu überlasten. Aus letzterem Grunde erwies es sich schließlich doch als erforderlich, einen kurzen erläuternden Text beizufügen, besonders auch, um auf die Literatur hinweisen zu können; dieser Anhang soll und kann aber natürlich eine textliche Physik nicht ersetzen.

Bei der Auswahl des Stoffes wurde zwar das Allbekannte und Grundlegende nach Gebühr berücksichtigt, besonderer Wert aber auf die Darstellung der neuesten Fortschritte und des neuesten Standes der Dinge gelegt.

Auerbach.

## Inhaltsverzeichnis.

Allgemeine Physik und Mechanik.	Tafel
1 Dimensionsformeln (Winkel, Strecke, Fläche, Volumen, Zeit, Periode, Geschwindigkeit, Geschwindigkeitspotential, Winkelgeschwindigkeit, Frequenz, Beschleunigung, Potential, Temperatur, Winkelbeschleunigung, Masse, Entropie, Dichte, Impuls, Bewegungsgröße, Kraft, Gewicht, Moment, Arbeit, Energie).	9 Fig. 1: Atomgewichte. — Fig. 2: Periodisches System der Elemente.
2 Fortsetzung (Trägheitsmoment, Druck, Elastizitätsmodul, spezifisches Gewicht, spezifisches Volumen, Oberflächenspannung, Zähigkeit, Effekt, Fernkraft, Gravitationskonstante).	10 Fig. 1: Feld eines Poles. — Fig. 2: Feld zweier gleicher, gleichnamiger Pole. — Fig. 3: Feld zweier gleicher, entgegengesetzter Pole.
3 Fig. 1: Größenordnung typischer Strecken. — Fig. 2: Vergleichung von Längenmaßen.	11 Fig. 1: Feld zweier ungleicher, gleichnamiger Pole. — Fig. 2: Feld zweier ungleicher, entgegengesetzter Pole.
4 Fig. 1: Nördliche Breite von Orten. — Fig. 2: Meereshöhe von Orten.	12 Fig. 1: Potential von Kreislinie und Kreisseibe auf Punkte ihrer Ebene. — Fig. 2: Dasselbe, auf Punkte der Achse. — Fig. 3: Potentialverhältnisse einer Kugelschale. — Fig. 4: Schwerpunkte von Kreisbögen und Kreissektoren. — Fig. 5: Trägheitskreise. — Fig. 6: Mittlere Ordinate und Schwerlinie einer Kurve.
5 Fig. 1: Größenordnung von Geschwindigkeiten. — Fig. 2: Größenordnung von Massen. — Fig. 3: Größenordnung von Perioden.	13 Fig. 1: Seil- und Kräftepolygon. — Fig. 2 bis 4: Ebene Fachwerke.
6 Fig. 1: Arbeit von Kräften. — Fig. 2: Linien gleicher kinetischer Energie.	14 Fig. 1: Kettenlinien. — Fig. 2: Bewegungstypen (Strecken- und Geschwindigkeitsdiagramm). — Fig. 3: Bahnkurve und Hodograph. — Fig. 4: Beschleunigungskurve oder Hodograph des Hodographen.
7 Fig. 1: Dichte fester und flüssiger Stoffe. — Fig. 2: Dichte von Gasen und Dämpfen.	15 Beispiele des Hodographen (gleichförmige Kreisbewegung, Wurfbahn, rotierendes schwingendes Pendel).
8 Fig. 1: Dichte von Legierungen. — Fig. 2: Dichte von Lösungen. — Fig. 3: Dichte trockener Luft.	

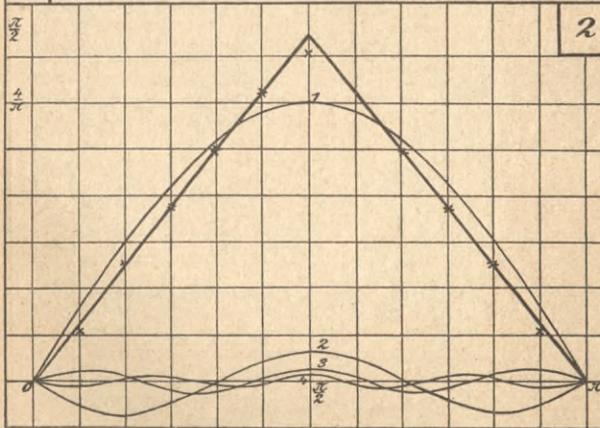


Allmählicher Aufbau der Linie

$y = \frac{x}{\pi}$  aus den Gliedern der Reihe:

$$\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots$$

1

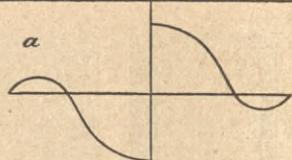


Die gleichförmige Schwingung

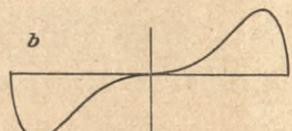
aufgebaut aus Sinusschwingungen

(nach der Reihe  $\frac{1}{2}(\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots)$ )

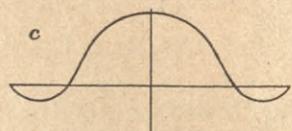
2



Sinusdarstellung einer Kurve



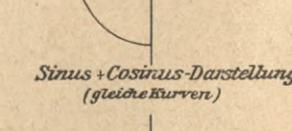
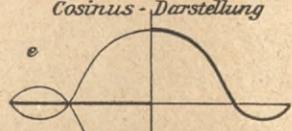
Dieselbe im Nullpunkt stetig



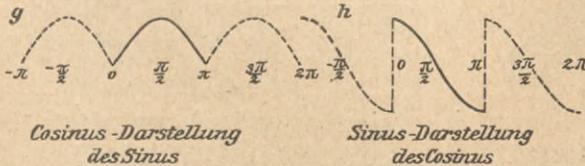
Die beiden Kurven a u. b in Cosinus-Darstellung



Sinus + Cosinus-Darstellung (gleiche Kurven)



Sinus + Cosinusdarstellung (verschiedene Kurven.)



Cosinus-Darstellung des Sinus

Sinus-Darstellung des Cosinus

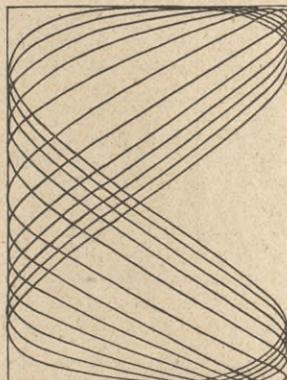
Darstellung durch Fouriersche Reihen

3



1

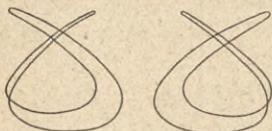
Lissajous - Kurven  
als perspektivische Ansichten von  
Sinuslinien auf dem Zylinder



Veränderliche Lissajous -  
Schwingung

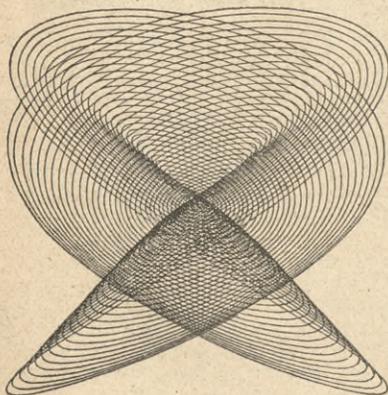
(Periodenverhältnis annähernd  
aber nicht genau 1:2)

3



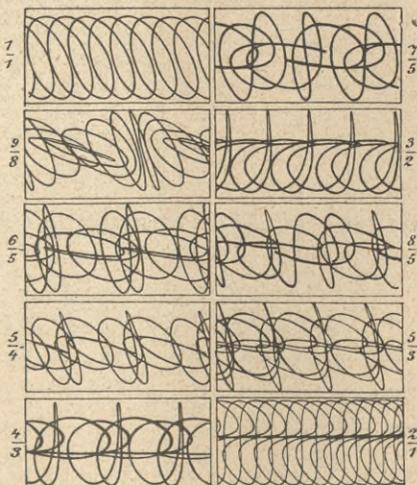
Stereoskopbild einer räumlichen Lissajous -  
Figur aus drei auf einander senkrechten  
Komponenten

(Perioden 3:1:2, Phasen 0, 1/4, 0)  
(nach Right)



Gedämpfte  
Lissajous - Schwingung

(Perioden wie 2:3)  
(nach Melde)



Chronographisch aufgelöste  
Lissajous - Schwingungen

(nach Zambiasi)

4

5

Tafel

- 16 Fig. 1: Zusammensetzung zweier entgegengesetzter gleichförmiger Kreisbewegungen. — Fig. 2: Zykloiden und Trochoiden. — Fig. 3 bis 5: Rollen eines Kreises auf einem anderen. Fig. 6: Achsenflächen oder Zylindroid.
- 17 Fig. 1: Reduktion von Wägungen auf den leeren Raum. — Fig. 2: Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Amplituden. — Fig. 3: Abweichung der Schwerkraft vom Mittelwert.
- 18 Fig. 1: Wurfparabeln mit Enveloppe. — Fig. 2: Theoretische und wahre Schußkurve. — Fig. 3: Luftwiderstand auf Geschosse. — Fig. 4: Gasdruck und Geschwindigkeit im Rohr. — Fig. 5: Schußkurven.
- 19 Fig. 1: Schwingungsdauer einfacher Pendel. — Fig. 2: Zykloidenpendel — Fig. 3: Reguläre Präzession. — Fig. 4: Die Polhoden des kräftefreien Kreisels. — Fig. 5: Tafel der wichtigsten Kreisbewegungen.
- 20 Darstellung von Kreisbewegungen.
- 21 Fig. 1: Typische Deformationen. — Fig. 2: Deformations- und Hilfsellipsoid. — Fig. 3: Tetraeder der Druckkomponenten. — Fig. 4: Druckellipsoid und Hilfsfläche.
- 22 Fig. 1: Dehnungsmodul. — Fig. 2: Temperaturkoeffizient des Dehnungsmoduls. — Fig. 3: Derselbe für Jenaer Gläser. — Fig. 4: Derselbe für Metalle. — Fig. 5: Modul verschiedener Nickeleisen.
- 23 Fig. 1 bis 3: Abweichung vom Hookeschen Gesetze. — Fig. 4: Beziehung zwischen der Elastizitätszahl und dem Verhältnis des Volumen- zum Gestaltsmodul. — Fig. 5: Elastizitätszahlen.
- 24 Fig. 1: Abnahme der Elastizitätszahl mit wachsender Dehnung. — Fig. 2: Elastizitätszahl von Ag-Au-Legierungen. — Fig. 3: Dehnungsmodul und Schmelzpunkt. — Fig. 4: Elastizitätszahl und Schmelzpunkt. — Fig. 5: Elastizitätszahl bei verschiedenen Temperaturen. — Fig. 6: Kompression eines Hohlzylinders.
- 25 Fig. 1: Kompressibilität fester Stoffe. — Fig. 2: Spannungen beim Druck einer Kugel gegen eine Ebene. — Fig. 3: Druckflächen-durchmesser bei verschiedenen Drucken (spröde und plastische Stoffe).
- 26 Fig. 1: Knickbelastung eines Stabes. — Fig. 2: Hauptformen der elastischen Linie.
- 27 Fig. 1: Interferenzhyperbeln einer gebogenen Platte. — Fig. 2: Durchbiegung von Stäben bei verschiedener Befestigung. — Fig. 3: Biegungstypen des Kreisringes. — Fig. 4: Be-

Tafel

- ziehung der Biegung zur Dehnung. — Fig. 5: Durchbiegung von Stäben von gleich großem, aber verschieden geformtem Querschnitt.
- 28 Fig. 1: Torsionsmodul. — Fig. 2: Thermische Abnahme des Torsionsmoduls. — Fig. 3: Beziehung zum Schmelzpunkt. — Fig. 4: Torsionsmodul und Atomgewicht. — Fig. 5: Drillung bei gleich großem Querschnitt.
- 29 Fig. 1: Drillungslinien einer Säule. — Fig. 2: Drillungsformen verschiedener Zylinder. — Fig. 3 u. 4: Querschnittskurven bei der Torsion.
- 30 Fig. 1 und 2: Dehnungs- und Drillungsflächen von Kristallen. — Fig. 3 und 4: Elastizitätskurven des Kalkspats. — Fig. 5: Finsterwaldersche Schnittkurven.
- 31 Schnitte der Elastizitätsflächen von Kristallen.
- 32 Gesetze des Stoßes.
- 33 Graphische Darstellung des Stoßes nach Neumann und St. Venant.
- 34 Gesetze der elastischen Nachwirkung.
- 35 Fig. 1: Zugfestigkeit. — Fig. 2: Elastizität und Festigkeit Jenaer Gläser. — Fig. 3: Festigkeit von Walzeisen. — Fig. 4: Festigkeit verschiedener feuchter Hölzer.
- 36 Fig. 1: Zugfestigkeit verschiedener dicker Eisendrähte. — Fig. 2: Thermische Änderung der Zugfestigkeit. — Fig. 3: Zugfestigkeit des Steinsalzes. — Fig. 4: Grenze und Festigkeit von Bessemerstahl.
- 37 Absolute Härte.
- 38 Härte von Kristallen in verschiedenen Richtungen.
- 39 Fig. 1: Ausfluß des Eises bei verschiedenen Temperaturen. — Fig. 2: Dasselbe für Metalle. — Fig. 3: Adhäsion von Quarzsand verschiedenen Kornes. — Fig. 4: Schichtflächen ausfließenden Tons.
- 40 Gleichgewichtsfiguren pulverförmiger Massen.
- 41 Fig. 1 u. 2: Hydrostatischer Druck. — Fig. 3: Eintauchen schwimmender Körper unter verschiedenen Umständen.
- 42 Fig. 1: Metazentrische Evolvente und Evolute. — Fig. 2: Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit im Gefäße. — Fig. 3: Abplattung gravitierender, rotierender Flüssigkeit. — Fig. 4: Hauptschnitte eines Jacobischen Ellipsoids.
- 43 Kompressibilität der Flüssigkeiten.
- 44 Fig. 1: Strömung in einem Bett. — Fig. 2: Strömung in plötzlich erweiterten Bett. — Fig. 3: Stromfäden beim Stoppen. — Fig. 4: Eindringen einer Luftströmung in den Ozean. — Fig. 5: Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit. —

Tafel

- Fig. 6: Richtung und Stärke des Triftstroms in verschiedenen Tiefen.
- 45 Fig. 1: Ausfließender Strahl. — Fig. 2 und 3: Kontraktion des Strahls. — Fig. 4: Steighöhe von Strahlen. — Fig. 5: Fallen einer Kugel im Vakuum und im Wasser.
- 46 Fig. 1: Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit. — Fig. 2: Zwei parallele, entgegengesetzte Wirbelfäden in einer Flüssigkeit.
- 47 Fig. 1 bis 3: Wirbelfäden. — Fig. 4: Zwei Wirbelringe. — Fig. 5: Strömung und Wirbelbildung bei Durchströmung eines Quadrats.
- 48 Formen und Gesetze von Flüssigkeitswellen.
- 49 Fig. 1: Einzel- und Gruppengeschwindigkeit von Wellen. — Fig. 2 bis 4: Stehende Flüssigkeitswellen.
- 50 Ausbreitung und Formänderung einer Tiefseequelle.
- 51 Fig. 1: Schiffswiderstand. — Fig. 2: Wellenprofile. — Fig. 3: Typische Flutkurve. — Fig. 4: Seiches-Wellen. — Fig. 5: Schaum- und Brandungswelle. — Fig. 6: Länge und Höhe von Windwellen.
- 52 Fig. 1: Thermische Barometerkorrektur für Messing- und Glasskala. — Fig. 2: Luftdruck und Sauerstoffgehalt in verschiedenen Höhen.
- 53 Fig. 1: Füllung und Leerung eines Gasbehälters. — Fig. 2: Schlierenwellen und ihre Wellenlänge im Gasstrahl. — Fig. 3: Strömung eines Gases durch eine konische Röhre.
- 54 Fig. 1: Luftwiderstand auf verschieden geneigte Platten. — Fig. 2: Tragkraft von Luftballons. — Fig. 3: Zylindrische Schale im transversalen Luftstrom.
- 55 Fig. 1: Zähigkeit der Stoffe. — Fig. 2: Ihre thermische Änderung.
- 56 Zähigkeit, Reibung und Ausflußmenge.
- 57 Fig. 1: Oberflächenspannung und spezifische Kohäsion. — Fig. 2: Ihre thermische Änderung. — Fig. 3: Meridiankurve eines Tropfens.
- 58 Steighöhen, Tropfen, Plateausche Figuren.
- 59 Diffusionskoeffizienten von Gasen und Lösungen.
- 60 Absorption und Adsorption.

## Wellenlehre und Akustik.

- 61 Fig. 1: Herstellung einer exakten einfachen Schwingung. — Fig. 2: Tafel der vorkommenden Schwingungszahlen.

Tafel

- 62 Frequenz, Amplitude und Phase einfacher Schwingungen.
- 63 Resultante zweier einfacher Schwingungen.
- 64 Fortsetzung-Resultante dreier Schwingungen.
- 65 Fortsetzung der Resultante zweier einfacher Schwingungen.
- 66 Auswahl von 30 typischen Schwingungsformen.
- 67 Fig. 1: Sinusschwingung als Projektion gleichförmiger Kreisbewegung. — Fig. 2: Parallelogramm der Schwingungen. — Fig. 3: Sinusschwingung als Resultante entgegengesetzter Kreisbewegungen. — Fig. 4: Gedämpfte Schwingung als Projektion der Spirale. — Fig. 5 und 6: Langsame und rasche Schwebungen.
- 68 Darstellung von Schwingungen durch Fouriersche Reihen.
- 69 Lissajous-Schwingungen.
- 70 Fortsetzung (Projektion, gedämpfte, räumliche, fortschreitende Lissajous-Schwingungen).
- 71 Stehende und fortschreitende Wellen und ihre Beziehung zueinander.
- 72 Fig. 1: Ebene, Zylinder- und Kugelwellen. — Fig. 2: Schwächung der Strahlung bei der sphärischen Ausbreitung. — Fig. 3: Interferenz zweier Kugelwellen.
- 73 Reflexion der Wellen an Ellipse, Parabel, Ebene und Kugel.
- 74 Fig. 1: Darstellung von Wellen durch rotierende Scheiben. — Fig. 2: Reflexion einer Welle in einem Knoten.
- 75 Fig. 1 bis 3: Tonhöhe fester Körper in Berührung mit Flüssigkeit. — Fig. 4: Resonanzkurven verschieden stark gedämpfter Systeme. — Fig. 5: Amplitudenquadrat und Energie als Funktion der Periode.
- 76 Resonanz und Dämpfung.
- 77 Fig. 1 und 2: Wellenlänge und Tonhöhe als Funktion der Frequenz. — Fig. 3: Die pythagoräische, temperierte und reine Tonkala. — Fig. 4: Quintenzirkel. — Fig. 5: Die wichtigsten reinen Tonverhältnisse.
- 78 Fig. 1 bis 3: Empfindlichkeit für Tonstärken und Tonhöhen. — Fig. 4: Klangkurven nach Koenig.
- 79 Tonhöhe von Saiten als Funktion von Spannung und Länge. — Fig. 2: Partialtöne einer gezupften Saite. — Fig. 3: Anschlag einer Saite mit dem Hammer.
- 80 Schwingungsgesetz eines Punktes einer gezupften bzw. geschlagenen Saite.
- 81 Schwingungsgesetz einer gestrichenen bzw. einer elektromagnetisch erregten Saite.

- Tafel*
- 82 Fig. 1: Töne von Stäben verschiedener Länge. — Fig. 2: Konstruktion der Transversaltöne eines Stabes. — Fig. 3: Partialtöne eines längs- bzw. querschwingenden Stabes. — Fig. 4: Partialtonformen eines Stabes.
- 83 Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Stimmgabeln.
- 84 Dämpfung, Tonhöhe und Resonanz von Zungen und Stimmgabeln.
- 85 Fig. 1: Töne einer quadratischen Membran. — Fig. 2: Töne einer kreisförmigen Membran. — Fig. 3: Klangfiguren kreisförmiger Membranen. — Fig. 4: Grundton verschieden geformter Membranen. — Fig. 5: Empirische Klangfiguren kreisförmiger Membranen.
- 86 Klangfiguren quadratischer Platten.
- 87 Töne und Klangfiguren kreisförmiger, dreieckiger und sechseckiger Scheiben.
- 88 Fig. 1: Grundton und Obertöne verschieden langer Pfeifen. — Fig. 2: Mündung einer Pfeife ohne Längenkorrektion. — Fig. 3: Kundtsche Staubfigur. — Fig. 4: Koenigsche Flammenbilder.
- 89 Fig. 1: Luftschwingungen in Lippen- und Zungenpfeifen. — Fig. 2: Tonhöhe kubischer Pfeifen. — Fig. 3: Tonverlauf in Zungenpfeifen.
- 90 Fig. 1: Schallgeschwindigkeit. — Fig. 2 u. 4: Schallgeschwindigkeit bei verschiedener Rohrweite und Temperatur. — Fig. 3 u. 5: Einfluß des Windes auf die Schallstrahlen.
- 91 Fig. 1 und 2: Kundtsche Staubfiguren in Luft und Flüssigkeit. — Fig. 3: Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern. — Fig. 4: Verlauf der Tonstärke in einem Zimmer.
- 92 Fig. 1: Beugung des Schalls an einer Kugel. — Fig. 2: Beugung des Schalls an Gittern. — Fig. 3: Höhe und Stärke der beiden Schwebungstöne verschiedener Primärtöne.
- 93 Fig. 1: Rußfiguren von Schwebungen. — Fig. 2: Rauigkeit des Klanges, erzeugt durch Obertöne und ihre Schwebungen.
- 94 Graphische Charakterisierung der Vokale und Konsonanten.
- Kalorik.**
- 95 Fig. 1: Thermischer Ausdehnungskoeffizient fester Körper. — Fig. 2: Dichte des Wassers. — Fig. 3: Ausdehnung der Kristalle.
- 96 Fig. 1: Ausdehnung der Flüssigkeiten. — Fig. 2: Ausdehnung des Wassers oberhalb des Siedepunkts. — Fig. 3: Zusammen-
- Tafel*
- ziehung des Wassers unterhalb des Schmelzpunktes. — Fig. 4: Ausdehnung des Quecksilbers. — Fig. 5: Dichtemaximum von Salzlösungen. — Fig. 6: Ausdehnung von Wasser-Alkoholgemischen.
- 97 Ausdehnungskoeffizient von Flüssigkeiten und Gasen.
- 98 Fig. 1 und 2: Vergleichung von Thermometern. — Fig. 3: Spezifische Wärme des Wassers. — Fig. 4 u. 5: Spezifische Wärme von Gemischen und Lösungen.
- 99 Fig. 1: Spezifische Wärme der Körper. — Fig. 2: Verhältnis der spezifischen Wärmen, Molekularwärme, und Atomwärme.
- 100 Fig. 1: Relative spezifische Wärme bei verschiedenen Temperaturen. — Fig. 2 und 3: Spezifische Wärme von Amalgamen und Jenaer Gläsern.
- 101 Fig. 1: Maxwell'sches Gesetz für die Gasmolekeln. — Fig. 2: Molekulargeschwindigkeit der Gase. — Fig. 3: Verhältnis der spezifischen Wärmen als Funktion der Atomzahl. — Fig. 4: Weglänge der Molekeln.
- 102 Strahlende Wärme in verschiedenen Stoffen.
- 103 Fig. 1: Diathermansie — Fig. 2: Absorption der Wärme. — Fig. 3: Emission des schwarzen Körpers. — Fig. 4: Strahlung des schwarzen Körpers (Stefansches Gesetz).
- 104 Fig. 1 u. 2: Wärmestrahlung der Sonne. — Fig. 3: Strahlung von Wärmequellen verschiedener Temperatur. — Fig. 4: Absolute Wärmeleitfähigkeit.
- 105 Fig. 1: Temperaturgefälle in Stäben. — Fig. 2: Wärmeleitfähigkeit von Wasser-Alkoholgemischen. — Fig. 3: Wärmeleitungsverhältnis von Kristallen. — Fig. 4: Wärmeleitfähigkeit bei verschiedenen Temperaturen.
- 106 Schmelzpunkte.
- 107 Volumenänderung in der Nähe des Schmelzpunktes.
- 108 Erstarrungskurven von Legierungen.
- 109 Fortsetzung.
- 110 Fig. 1: Kurven von Eis und Wasser. — Fig. 2: Jodmethylen in verschiedenen Zuständen.
- 111 Fig. 1: Änderung des Schmelzpunktes mit dem Druck. — Fig. 2: Schmelzwärme von Legierungen. — Fig. 3: Schmelzwärmen verschiedener Stoffe. — Fig. 4 und 5: Schmelztheorien.
- 112 Fig. 1 u. 2: Gefrierpunktniedrigung. — Fig. 3: Kältemischungen. — Fig. 4: Kryoskopische Konstanten.

## Tafel

- 113 Löslichkeitsverhältnisse.  
 114 Fortsetzung.  
 115 Fortsetzung.  
 116 Fig. 1 u. 2: Fortsetzung. — Fig. 3 u. 4: Lösungswärme. — Fig. 5: Verdünnungswärme der Essigsäure.  
 117 Siedepunkte und kritische Temperaturen.  
 118 Dampfspannungen.  
 119 Fig. 1: Fortsetzung. — Fig. 2: Spannung des Wasserdampfes über Wasser und Eis. — Fig. 3: Spannung des Wasserdampfes bei tiefen Temperaturen.  
 120 Fig. 1: Siedepunkte des Wassers. — Fig. 2: Spannkraft von absolutem Alkohol. — Fig. 3: Spannkraft von Quecksilber.  
 121 Fig. 1: Verdampfungswärme. — Fig. 2: Ganze Wärme und Verdampfungswärme als Funktion der Temperatur.  
 122 Fig. 1: Kritischer Druck und kritische Temperatur. — Fig. 2: Werte der Van der Waalschen Konstanten.  
 123 Zustandskurven und Zustandsfläche eines idealen Gases.  
 124 Fig. 1 und 3: Isothermen und Isobaren der Kohlensäure. — Fig. 2: Theoretische Zustandskurven nach Van der Waals und Thomson.  
 125 Zustands- und Drosselkurven von Wasserdampf und Kohlensäure.  
 126 Fig. 1: Polytrope Zustandskurven. — Fig. 2: Isothermisch adiabatische Kreisprozesse.  
 127 Indikatordiagramme kalorischer Maschinen.  
 128 Fig. 1: Wirkungsgrad kalorischer Maschinen. — Fig. 2: Zusammensetzung der Luft während des Verdampfens. — Fig. 3: Siedepunkte und Zusammensetzung von Stickstoff-Sauerstoff-Gemischen. — Fig. 4: Spezifische Wärme des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen und Drucken.  
 129 Fig. 1: Darstellung der Aggregatzustände durch Temperatur und Druck. — Fig. 2: Dieselbe durch spezifisches Volumen und Energie. — Fig. 3 und 4: Ein Stoff bzw. zwei Stoffe in vier Phasen.  
 130 Fig. 1: Gleichgewicht flüssiger Kristalle. — Fig. 2: Darstellung binärer und ternärer Systeme auf verschiedene Weisen.  
 131 Fig. 1: Dampfspannung gemischter Flüssigkeiten. — Fig. 2 und 3: Retrograde Kondensation. — Fig. 4: Van der Waalsche Fläche.  
 132 Fig. 1 bis 4: Ternäre Systeme in verschiedener Darstellung. — Fig. 5: Carnallit-Modell.

## Tafel

## Elektrik und Magnetik.

- 133 Dimensionen elektrischer und magnetischer Größen.  
 134 Verteilung der Elektrizität auf einer Kreisscheibe. — Fig. 3: Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoid. — Fig. 4: Kraft- und Niveaulinien im Kugelschnitt bei harmonischer Verteilung.  
 135 Fig. 1: Verteilung der Elektrizität auf der Kugel unter äußerer Einwirkung. — Fig. 2: Verteilung der Elektrizität auf zwei gleich oder verschieden großen Kugeln.  
 136 Fig. 1: Verteilung der Ladung auf zwei sich berührenden Kugeln. — Fig. 2: Kapazität von Kondensatoren. — Fig. 3: Dielektrizitätskonstanten der Stoffe.  
 137 Fig. 1 und 2: Einfluß von Temperatur und Schwingungszahl auf die Dielektrizitätskonstante. — Fig. 3 und 4: Elektrische Niveaulinien und Blitzbahnen in der Atmosphäre. — Fig. 5: Arten der Entladung.  
 138 Fig. 1: Oberflächenspannung elektrisierten Quecksilbers. — Fig. 2: Absolute Potentiale. — Fig. 3: Wärmetönung und Wirkungsgrad galvanischer Kombinationen. — Fig. 4: Elektromotorische Kraft und Betriebsspannung von Akkumulatoren.  
 139 Fig. 1 und 2: Elektromotorische Kraft galvanischer Elemente und ihre thermische Veränderlichkeit. — Fig. 3 bis 6: Potentialgefälle im elektrischen Stromkreise.  
 140 Fig. 1 bis 3: Spannungsverlauf unter verschiedenen Umständen. — Fig. 4: Anordnung galvanischer Elemente. — Fig. 5 u. 6: Strom- und Niveaulinien in der Ebene.  
 141 Fig. 1: Strom- und Niveaulinien auf der Kugelfläche. — Fig. 2: Radialwiderstand einer Kugel- bzw. Zylinderschale. — Fig. 3: Brechung der Strom- und Niveaulinien.  
 142 Fig. 1: Größenordnung von Widerständen. — Fig. 2: Leitfähigkeit der Metalle. — Fig. 3: Widerstand der Metalle bei verschiedenen Temperaturen.  
 143 Fig. 1: Temperaturkoeffizient des Widerstandes. — Fig. 2 u. 3: Leitfähigkeit von Legierungen. — Fig. 4: Widerstand des Wismuts im Magnetfelde.  
 144 Widerstand von Legierungen, Amalgamen und abnormen Stoffen.

- | <i>Tafel</i>   | <i>Tafel</i>  |
|--|---|
| 145 Fig. 1 und 2: Leitverhältnis. — Fig. 3: Temperaturkoeffizient für tiefe Temperaturen. — Fig. 4 und 5: Widerstand von Magnetit und Silicium bei verschiedenen Temperaturen.   | 161 Fig. 1 u. 2: Magnetfelder. — Fig. 3 u. 4: Spule im Felde. — Fig. 5 u. 6: Para- und diamagnetischer Körper im Felde.   |
| 146 Molekulare und Äquivalent-Leitfähigkeit von Lösungen.  | 162 Erdmagnetismus und Erdstrom.  |
| 147 Verdünnungszahlen und Ionenbeweglichkeiten.  | 163 Magnetisierungskurven verschiedener Art.  |
| 148 Dissoziationsgrad und Leitfähigkeit von Flüssigkeiten.   | 164 Fig. 1 bis 3: Fortsetzung. — Fig. 4: Induktion in einem lokal erregten Ringe. — Fig. 5: Polabstand eines Drahtes.   |
| 149 Fig. 1 und 2: Wärmeerzeugung und Temperatursteigerung in Kupferdrähten. — Fig. 3: Endtemperatur blanker Kupferdrähte. — Fig. 4: Thermoelektrische Kräfte.  | 165 Einfluß der Temperatur auf die magnetische Induktion.   |
| 150 Thermoelektrische Kraft gegen Blei bei verschiedenen Temperaturdifferenzen.  | 166 Fig. 1: Induktion in einem langen Drahte. — Fig. 2: Induktionslinien in geschlitzten Ringe. — Fig. 3: Magnetische Nachwirkung. — Fig. 4 u. 5: Hysteresis Schleifen.   |
| 151 Fig. 1: Thermoelektrizität von Legierungen. — Fig. 2 und 3: Elektromotorische Kraft von Le Chatelier-Elementen. — Fig. 4: Thermoelektrische Kraft von Antimonlegierungen.  | 167 Fig. 1: Hysteresis Schleifen für verschiedene Temperaturen. — Fig. 2: für verschiedene Eisensorten. — Fig. 3: Erwärmung durch Magnetisierung. — Fig. 4: Hysteresis für rasch wechselnde Magnetisierung.             |
| 152 Entladungs-, Sättigungs- und lichtelektrischer Strom in Gasen.   | 168 Fig. 1: Magnetisierung einer Magnetisierungsplatte. — Fig. 2: Magnetisierungskonstanten der Elemente. — Fig. 3: Magnetisierung der ferromagnetischen Stoffe. — Fig. 4: Magnetisierungskonstanten von Flüssigkeiten. |
| 153 Funkenlänge und Funkenpotential.   | 169 Beziehungen der Magnetisierung zur Elastizität.   |
| 154 Fig. 1 und 2: Lichtbogen. — Fig. 3: Spannungskurve im Entladungsrohr. — Fig. 4: Spannungsabfall im Glimmstrom.   | 170 Magnetische Drehung der Polarisations-ebene und Kerreffekt.   |
| 155 Fig. 1: Zerstäubung der Kathode. — Fig. 2: Verhältnis der Ladung zur Masse. — Fig. 3 und 4: Absorption der Kathoden- und Röntgenstrahlen durch verschiedene Stoffe.  | 171 Elektromagnetische Feldbilder.  |
| 156 Fig. 1 und 2: Absorptionskoeffizient verschieden dichter Stoffe für Kathoden- und $\beta$ -Strahlen. — Fig. 3: Abklingen und Regeneration der Emanationsfähigkeit. — Fig. 4: Ablenkung der Radiumstrahlen im Magnetfelde. — Fig. 5: Lebensdauer der radioaktiven Substanzen. | 172 Halleffekt und verwandte Erscheinungen.   |
| 157 Fig. 1: Elektrodynamische Kraft zwischen zwei Stromelementen. — Fig. 2: Induktionskoeffizienten für die Längeneinheit.   | 173 Fig. 1 bis 6: Öffnungs- und Schließungsstrom, Ladung und Entladung. — Fig. 7 u. 8: Deformation einer Stromkurve durch Induktanz und magnetische Hysteresis.   |
| 158 Ablenkende Kraft eines Magneten auf eine Nadel.  | 174 Fig. 1 bis 4: Oszillierende und nichtoszillierende Entladung. — Fig. 5 und 6: Erscheinungen der Induktanz und Kapazität.  |
| 159 Fig. 1: Quergestellter Magnet zwischen zwei Polen. — Fig. 2: Magnetpol im gleichförmigen Felde. — Fig. 3: Abnahme der magnetischen Kraft mit der Entfernung. Fig. 4: Magnetfeld einer Schale.  | 175 Elektrische Schwingungen und ihre Wechselwirkung.   |
| 160 Fig. 1: Magnetisierungsarten. — Fig. 2: Verteilung des ganzen und des freien Magnetismus in einem Stabe. — Fig. 3 bis 5: Magnetfelder.   | 176 Fig. 1: Induktion in einer rotierenden Kugel. — Fig. 2: Feld des Hertzchen Oszillators. Fig. 3: Absorption elektrischer Wellen. — Fig. 4: Stoßerregung mit Löschkunten.   |
|  | 177 Fig. 1 u. 5: Charakteristiken von Dynamomaschinen. — Fig. 2 bis 4: Gleich-, Wechsel- und Drehstrom.   |
|  | Optik.  |
|  | 178 Fig. 1: Brechungsquotienten. — Fig. 2: Öffnung der zur Brechung in Luft gelangenden Büschel. — Fig. 3: Brechungs- und Reflexionswinkel als Funktion des Einfallswinkels.  |

- | <i>Tafel</i>   | <i>Tafel</i>   |
|--|--|
| 179 Brechung und Dispersion Jenaer Gläser.   | 196 Parabolspiegel, Katakaustik und Diakaustik.  |
| 180 Brechungsquotienten als Funktion der Wellenlänge.  | 197 Fig. 1: Sphärische Aberration einer dünnen Linse. — Fig. 2 und 3: Sphärische Aberration und Astigmatismus photographischer Objektive. — Fig. 4: Die beiden Hauptschnitte eines astigmatischen Büschels.  |
| 181 Brechungsquotienten von Flüssigkeiten und Gasen.   | 198 Fig. 1: Chromatische Abweichung bei alten und neuen Fernrohrobjektiven. — Fig. 2: Vergleich optisch und photographisch korrigierter Systeme. — Fig. 3: Kurven gleicher Schnittweiten. — Fig. 4: Verzerrtes Objekt. — Fig. 5: Vergrößerung als Funktion des Objektabstandes von der Brennebene. |
| 182 Brechungsquotient des Wassers, des Schwefelkohlenstoffs, der Schwefelsäure und der Essigsäure in Beziehung zur Temperatur und zur Wellenlänge.   | 199 Lichtwirkung verschiedener Lichtquellen.   |
| 183 Fig. 1 bis 3: Brechungsquotient von Alkohol, Äther und Luft. — Fig. 4: Atmosphärische Strahlenbrechung.  | 200 Interferenzkurven, Newtonsche Ringe und Herschelsche Streifen.   |
| 184 Fig. 1 bis 3: Thermische Änderung des Brechungsquotienten. — Fig. 4: Grenzwinkel für verschiedene Brechungsquotienten.   | 201 Fig. 1: Fraunhofersche Beugung durch einen Spalt. — Fig. 2: Objekte und Bilder bei Verstümmelung der Beugungsfigur. — Fig. 3: Superposition der Beugungskurven zweier Punkte.  |
| 185 Das Spektrum mit seinen Wellenlängen, Schwingungszahlen, entsprechenden Tönen, Linien, Elementen und Farben.   | 202 Helligkeitsverteilung in Gitterbildern.  |
| 186 Fig. 1: Harmonische Serien bei Linienspektren. — Fig. 2: Vergleich des Brechungs- mit dem Beugungsspektrum.  | 203 Fig. 1 und 2: Fresnelsche Beugung und zugehörige Cornusche Spirale. — Fig. 2: Beugungsgrenze für die Leistung von Auge, Fernrohr und Mikroskop.  |
| 187 Fig. 1: Vergleichung verschieden starker Dispersionen. — Fig. 2: Serie der Wasserstofflinien. — Fig. 3: Vergleichung verschieden verteilter Dispersionen. — Fig. 4: Helligkeitsverteilung in der roten Kadmiumlinie. | 204 Doppelbrechung einachsiger Kristalle.  |
| 188 Fig. 1: Darstellung der Spektrallinien nach Breite und Helligkeit. — Fig. 2: Kurze und lange Spektrallinien.   | 205 Doppelbrechung und Achsenwinkel zweiachsiger Kristalle.  |
| 189 Fig. 1: Spektrallinien und Atomgewicht. — Fig. 2: Subjektive Helligkeit im Spektrum. — Fig. 3: Intensitätskurven der drei Grundfarben. — Fig. 4: Durchlässigkeit von Gläsern.  | 206 Fig. 1: Dispersion der optischen Achsen. — Fig. 2: Achsenwinkel zweiachsiger Kristalle. — Fig. 3: Hauptschnitte durch Strahlenflächen.   |
| 190 Farbdreieck, Farbenkegel und Kontrastdiagramm.   | 207 Fig. 1: Strahlenfläche des Kalkspats. — Fig. 2: Hauptschnitte für einen zweiachsigen Kristall. — Fig. 3: Strahlenachsen und optische Achsen. — Fig. 4: Normalenfläche einachsiger Kristalle. — Fig. 5: Isochromatische und achromatische Kurven.   |
| 191 Fig. 1: Amplitude des reflektierten und des gebrochenen Lichtes — Fig. 2: Elliptizität des reflektierten Lichtes. — Fig. 3: Reflexionsintensität für kleine Einfallswinkel.  | 208 Drehung der Polarisationsebene des Lichtes.  |
| 192 Polarisationsgrad und Polarisationswinkel.   | 209 Fortsetzung, insbesondere Dispersion dabei.  |
| 193 Fig. 1 u. 2: Absorptionskoeffizient Jenaer Gläser. — Fig. 3: Elliptizität des total reflektierten Lichtes.   | 210 Fig. 1: Fläche gleichen Gangunterschiedes. — Fig. 2: Quarzfigur. — Fig. 3 und 4: Isochromaten eines bzw. zweier Quarze.  |
| 194 Fig. 1: Optische Eigenschaften der Metalle. — Fig. 2 bis 4: Haupteinfallswinkel, Hauptazimut und selektive Reflexion der Metalle.  | 211 Spektrum und Intensitätskurven der Fluoreszenz.  |
| 195 Anomale Dispersion.  | 212 Erregende und phosphoreszierende Banden verschiedener Stoffe.  |
|  | 213 Zeitlicher Verlauf und spektrale Intensität der Phosphoreszenz.  |



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348774

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301662