



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301669





# ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN  
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN  
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN  
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

- BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, } RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.  
IN 2 TEILEN . . . . .
- II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . . . . { H. BURKHARDT † (1896—1914), W. WIRTINGER  
(1905—1912) IN WIEN UND R. FRICKE IN  
BRAUNSCHWEIG.
- III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . . { W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND  
H. MOHRMANN IN CLAUSTHAL I. H.
- IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN. { F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER  
IN HANNOVER.
- V: PHYSIK, IN 3 TEILEN . . . . . A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
- VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK { PH. FURTWÄGLER IN WIEN UND  
E. WIECHERT (1899—1905) IN GÖTTINGEN.
- VI, 2: ASTRONOMIE . . . . . K. SCHWARZSCHILD IN POTSDAM.
- VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK H. E. TIERDING IN BRAUNSCHWEIG.

BAND V 3. HEFT 3.

W. LAUE IN FRANKFURT A. M.: WELLENOPTIK. MIT EINEM BEITRAG ÜBER SPEZIELLE BEUGUNGSPROBLEME. VON P. S. EPSTEIN IN MÜNCHEN . . . . . 359

AUSGEGEBEN AM 31. AUGUST 1915.

*J. N. 22 802*



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1915.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschienen: Bd. I (vollständig); Bd. II<sub>1</sub>, Heft 1—7; Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1—4; Bd. II<sub>3</sub>, Heft 1 u. 2; Bd. III<sub>1</sub>, Heft 1—5; Bd. III<sub>2</sub>, Heft 1—5; Bd. III<sub>3</sub>, Heft 1—4; Bd. IV<sub>11</sub>, Heft 1—4 (vollständig); Bd. IV<sub>12</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>21</sub>, Heft 1—4 (vollständig); Bd. IV<sub>22</sub>, Heft 1—6 (vollständig); Bd. V<sub>1</sub>, Heft 1—5; Bd. V<sub>2</sub>, Heft 1—3; Bd. V<sub>3</sub>, Heft 1—3; Bd. VI<sub>1A</sub>, Heft 1—3; Bd. VI<sub>1B</sub>, Heft 1—3; Bd. VI<sub>2</sub>, Heft 1—6.

Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

*J. N.*

Aufgabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglicher Vollständigkeit eine Gesamtanstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck - München, O. Hölder - Leipzig, F. Klein - Göttingen, V. v. Lang - Wien, W. Wirtinger - Wien, H. v. Seelger - München, P. Stäckel - Heidelberg

steht der Redaktion, die aus den Herren

R. Fricke - Braunschweig, Ph. Furtwängler - Wien, F. Klein - Göttingen, W. Fr. Meyer - Königsberg, H. Mohrmann - Clausen, C. H. Müller - Hannover, K. Schwarzschild - Potsdam, A. Sommerfeld - München und H. E. Timerding - Braunschweig

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie beteiligen sich ferner die Herren

<b>I. Band:</b>	A. Rosenthal - München	Ph. Furtwängler - Wien	L. Prandtl - Göttingen
W. Ahrens - Rostock	C. Runge - Göttingen	M. Grübler - Dresden	R. Reiff (†)
P. Bachmann - Weimar	A. Sommerfeld - München	M. Grüning - Köln	W. Rogowski - Berlin
J. Bauschinger - Straßburg	O. Teplitz - Kiel	E. Hellinger - Frankfurt a. M.	C. Runge - Göttingen [s. M.]
G. Bohlmann - Berlin [L. E.]	E. Vessiot - Lyon	K. Henneberg - Darmstadt	A. Schoenflies - Frankfurt
L. v. Bortkewitsch - Berlin	A. Voss - München	L. Heun - Karlsruhe	M. Schröter - München
H. Burkhardt (†)	A. Wangerin - Halle	G. Jung - Mailand	A. Sommerfeld - München
E. Czuber - Wien	E. v. Weber - Würzburg	Th. v. Kármán - Aachen	E. Study - Bonn
W. v. Dyck - München	Fr. A. Willers - Charlottenburg	F. Klein - Göttingen	K. W. Wagner - Berlin
D. Hilbert - Göttingen	W. Wirtinger - Wien	A. Kriloff - Petersburg	A. Wangerin - Halle
O. Hölder - Leipzig	E. Zermelo - Zürich	H. Lamb - Manchester	W. Wien - Würzburg
G. Landsberg (†)	L. Zoretti - Grenoble	A. E. H. Love - Oxford	J. Zenneck - München
R. Mehmke - Stuttgart		R. v. Mises - Straßburg i. E.	
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.	<b>III. Band:</b>	C. H. Müller - Hannover	<b>VI, 1. Band:</b>
E. Netto - Gießen	G. Berkhan (†)	L. Prandtl - Göttingen	R. Bourgeois - Paris
V. Pareto - Lausanne	L. Berzolari - Pavia	H. Reiffner - Charlottenburg	G. H. Darwin (†)
A. Pringsheim - München	G. Castelnuovo - Rom	A. Schoenflies - Frankfurt	F. Exner - Innsbruck
C. Runge - Göttingen [s. M.]	M. Dehn - Breslau	P. Stäckel - Heidelberg [s. M.]	S. Finsterwalder - München
A. Schoenflies - Frankfurt	F. Dingeldey - Darmstadt	O. Tedone - Genua	Ph. Furtwängler - Wien
H. Schubert (†)	F. Enriques - Bologna	H. E. Timerding - Braunschweig	F. R. Helmert - Potsdam
D. Seliwanoff - St. Petersburg	G. Fano - Turin	A. Timpe - Münster i. W.	S. Hough - Kapstadt
E. Study - Bonn	C. Guichard - Paris	A. Voss - München	E. v. Schweidler - Innsbruck
K. Th. Vahlen - Greifswald	P. Heegaard - Kopenhagen	G. T. Walker - Simla (Indien)	H. Meldau - Bremen
H. Weber (†)	G. Kohn - Wien	K. Wieghardt - Wien	P. Pizzetti - Pisa
A. Wiman - Upsala	H. Liebmann - München	G. Ziegler - Budapest	C. Reinhardt (†)
	R. v. Lillenthal - Münster i. W.		A. Schmidt - Potsdam
	G. Loria - Genua	<b>V. Band:</b>	Schweydar - Potsdam
<b>II. Band:</b>	H. v. Mangoldt - Danzig	M. Abraham - Mailand	W. Trabant - Wien
P. Appell - Paris	W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.	L. Boltzmann (†)	E. Wiechert - Göttingen
M. Bôcher - Cambridge, Mass.	E. Müller - Wien	M. Born - Berlin	
E. Borel - Paris	E. Papperitz - Freiberg i. S.	G. Bredig - Karlsruhe	<b>VI, 2. Band:</b>
P. Boutroux - Poitiers	K. Rohn - Leipzig	G. H. Bryan - Bangor (Wales)	E. Anding - Gotha
G. Brunel (†)	H. Rothe - Wien	P. Debye - Göttingen	J. Bauschinger - Straßburg i. E.
H. Burkhardt (†)	G. Scheffers - Charlottenburg	H. Diesselhorst - Braunschweig	A. Bemporad - Catania
A. Denjoy - Paris	A. Schoenflies - Frankfurt	A. Einstein - Berlin	E. W. Brown - New-Haven
G. Faber - Straßburg i. E.	C. Segre - Turin [a. M.]	P. S. Epstein - München	C. Ed. Caspari - Paris
M. Fréchet - Poitiers	J. Sommer - Danzig	S. Finsterwalder - München	F. Cohn - Berlin
R. Fricke - Braunschweig	P. Stäckel - Heidelberg	L. Fleischmann - Berlin	R. Emden - München
J. Hadamard - Paris	O. Staude - Rostock	R. Gans - La Plata [burg]	F. K. Ginzler - Berlin
H. Hahn - Czernowitz	E. Steinitz - Breslau	F. W. Hinrichsen - Charlotten-	J. v. Hepperger - Wien
J. Harkness - Montreal	A. Voss - München	E. W. Hobson - Cambridge	G. Herglotz - Leipzig
E. Hellinger - Frankfurt a. M.	M. Zacharias - Berlin	H. Kamerlingh-Onnes - Leiden	H. Kobold - Kiel
K. Hensel - Marburg	H. G. Zeuthen - Kopenhagen	W. H. Keesom - Leiden	K. Laves - Chicago
E. Hilb - Würzburg	K. Zindler - Innsbruck	M. v. Laue - Frankfurt a. M.	F. R. Moulton - Chicago
A. Kneser - Breslau		Th. Liebisch - Berlin	G. v. Niessl - Wien
A. Krazer - Karlsruhe	<b>IV. Band:</b>	H. A. Lorentz - Haarlem	S. Oppenheim - Prag
L. Maurer - Tübingen	M. Abraham - Mailand	L. Mamlock - Berlin	K. Schwarzschild - Potsdam
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.	C. Cranz - Berlin	G. Mie - Greifswald	E. Strömgren - Kopenhagen
P. Montel - Paris [Mass.]	P. n. T. Ehrenfest - Leiden	H. Minkowski (†)	K. Sundman - Helsingfors
W. F. Osgood - Cambridge	S. Finsterwalder - München	O. Mügge - Göttingen	E. T. Whittaker - Edinburgh
P. Painlevé - Paris	O. Fischer - Leipzig	J. Nabl - Wien	A. Wilkens - Kiel
S. Pincherle - Bologna	L. Föppl - Würzburg	F. Pockels (†)	C. W. Wirtz - Straßburg i. E.
A. Pringsheim - München	Ph. Forchheimer - Graz		H. v. Zeipel - Upsala

## Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a/S., Wettinerstraße 17 zu richten, der sich mit den betr. Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften.

11-348766



~~III 16877~~



## V 24. WELLENOPTIK

VON

**M. v. LAUE.**

IN FRANKFURT A. M.

MIT EINEM BEITRAG ÜBER SPEZIELLE BEUGUNGSPROBLEME.

VON

**P. S. EPSTEIN**

IN MÜNCHEN.

### Inhaltsübersicht.

#### I. Einleitung.

1. Die Grundgleichungen.
2. Ebene Wellen.
3. Kugelwellen.
4. Zylinderwellen.
5. Sinusschwingungen.
6. Dispergierende Körper.
7. Die Intensität.
8. Die Wellenoptik und die älteren Lichttheorien.

#### II. Die Superposition von Sinusschwingungen gleicher Frequenz.

9. Das Interferenzprinzip.
10. Zwei senkrecht zueinander polarisierte Schwingungen.
11. Interferenz gleichgerichteter Schwingungen.
12. Interferenzstreifen gleicher Dicke an dünnen Platten.
13. Der *Fresnelsche* Spiegel.
14. Die Streifen gleicher Neigung an planparallelen Platten.
15. Die *Quetelet* schen Ringe.
16. Das *Michelsons*che Interferometer.
17. Das Gitter.
18. Das Stufengitter.
19. Die Ausdehnung der Lichtquelle.
20. Die Gitterfehler.
21. Interferenz vieler gleichgerichteter Schwingungen mit unregelmäßig verteilten Phasen.
22. *Wieners* Versuch. Stehende Wellen.
23. Interferenz elektrischer Wellen.

Akc. Nr. \_\_\_\_\_

~~408/15~~

xx  
408/15

### III. Die Superposition von Sinusschwingungen verschiedener Frequenz; Spektrum; Beziehung zur Thermodynamik.

24. Lichtschwebungen.
25. Das Auflösungsvermögen.
26. Inhomogene Strahlung.
27. Natürliche Strahlung.
28. Spektrale Zerlegung.
29. Die Schwingungsform natürlicher Strahlung.
30. Kohärenz und Inkohärenz. Polarisation.
31. Zusammenhang mit der Thermodynamik.
32. Die Interferenz inhomogener Strahlung; Sichtbarkeitskurve.

### IV. Allgemeine Theorie der Beugung.

33. Das *Huygenssche* Prinzip.
34. Die *Fresnelsche* Zonenkonstruktion.
35. *Kirchhoff's* Formulierung des *Huygenschen* Prinzipes.
36. Einteilung der Beugungserscheinungen in *Kirchhoff's* Theorie; Beobachtungsmethode; *Babinetsches* Prinzip.
37. *Fraunhofer'sche* Beugungserscheinungen:
  - a) Beugung am Rechteck und Spalt.
  - b) Beugung am Kreis.
  - c) Veränderung des Beugungsbildes bei linearer Deformation der beugenden Öffnung.
38. *Talbotsche* Streifen.
39. *Fresnelsche* Beugungserscheinungen.
  - a) Die *Fresnelschen* Integrale.
  - b) Die Beugung am Spalt.
40. Die geometrische Optik als Grenzfall für verschwindende Wellenlänge.
41. Das Verhalten der Lichtwelle in der Nähe eines Brennpunktes.
42. Das Auflösungsvermögen des Prismas.
43. Die optische Abbildung im Lichte der Wellenoptik:
  - a) Die Abbildung selbstleuchtender Körper.
  - b) Die Abbildung durch fremdes Licht.
  - c) Vergleich der Abbildung selbstleuchtender und durchleuchteter Gegenstände.
  - d) Anwendung auf das Mikroskop.
44. Die Freiheitsgrade optischer Vorgänge.
  - a) Die Freiheitsgrade eines streng einfarbigen Strahlenbündels.
  - b) Die Freiheitsgrade eines im physikalischen Sinn einfarbigen Strahlenbündels.
  - c) Die Freiheitsgrade der Hohlraumstrahlung.

### V. Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen.

45. Historische Übersicht.
46. Allgemeine Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen.
47. Allgemeine Folgerungen über die Lage der Interferenzmaxima.
48. *Ewalds* Konstruktion der gebeugten Strahlen.
49. Die scheinbare Spiegelung an den Netzebenen des Raumgitters.

- 50. Die selektive Spiegelung an Kristallen.
- 51. Die allgemeine Spiegelung.
- 52. Die Intensität der Interferenzpunkte.
- 53. Die Frage nach der Funktion  $\psi$ .
- 54. Der Temperatureinfluß.
- 55. Kompliziertere Strukturen.
- 56. Die Struktur des Steinsalzes und des Diamantes.
- 57. Die Form der Interferenzpunkte.

### Zusammenfassende Werke.

- P. Drude*, Lehrbuch der Optik, Leipzig 1906.
- Müller-Pouillet*, Lehrbuch der Physik, Band II herausgegeben von O. Lummer, Braunschweig.
- H. v. Helmholtz*, Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes, Hamburg und Leipzig 1897.
- R. W. Wood*, Physical Optics, New York 1905.
- A. Schuster*, Einführung in die theoretische Optik, deutsch von H. Konen, Leipzig und Berlin 1907.
- G. Kirchhoff*, Vorlesungen über mathematische Optik, herausgegeben von K. Hensel, Leipzig 1891.
- Lord Rayleigh*, Encyclopädia Britannica XXIV 1888 auch Sc. Pap. III, p. 47.
- W. Feussner*, Interferenz des Lichtes, Winkelmanns Handbuch der Physik, Band 6, Leipzig 1906.
- F. Pockels*, Beugung des Lichtes, Winkelmanns Handbuch der Physik, Band 6, Leipzig 1906.
- A. A. Michelson*, Lichtwellen und ihre Anwendungen, deutsch von Ihle, Leipzig 1911.
- E. Gehrcke*, Die Anwendung der Interferenzen in der Spektroskopie und Metrologie, Braunschweig 1906.
- E. Abbe*, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, herausgegeben von O. Lummer und F. Reiche, Braunschweig 1910.

### Bezeichnungen.

$\mathcal{E}$  elektrische Feldstärke;  $\mathcal{H}$  magnetische Feldstärke.

$\mathcal{S} = c[\mathcal{E}\mathcal{H}]$  Poyntingscher Energiestrom.

$W = \frac{1}{2}(\epsilon\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)$  Energiedichte.

$\mathfrak{J}$  Hertzscher Vektor.

$\epsilon$  Dielektrizitätskonstante;  $\nu = \sqrt{\epsilon}$  Brechungsindex.

$a = \frac{c}{\nu}$  Phasengeschwindigkeit;  $g = \frac{c}{\nu + n \frac{d\nu}{dn}}$  Gruppengeschwindigkeit.

Ein Punkt über einem Buchstaben deutet die Differentiation nach der Zeit  $t$  bei konstanten Koordinaten an.

Ein Strich über einem Buchstaben deutet einen Mittelwert an.

$r, R$  die Entfernung zweier Punkte im Raum.

$\varrho$  die Entfernung zweier Punkte in der Ebene.

$n$  Frequenz =  $2\pi$  Schwingungszahl.

$\lambda$  Wellenlänge =  $\frac{2\pi a}{n} = \frac{2\pi c}{n\nu}$ ,  $\lambda_0$  Wellenlänge im leeren Raum =

$$\nu\lambda = \frac{2\pi c}{n}; k = \frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

## I. Einleitung.

1. Die Grundgleichungen. Seit *Maxwell* und *Hertz* ist die Optik ein Zweig der Elektrodynamik. Jede folgerichtige optische Theorie muß daher die *Maxwellschen* Gleichungen an die Spitze stellen. Wir schreiben diese zunächst in der Form, wie sie streng für den leeren Raum, für alle andern Mittel nur unter Vernachlässigung der Dispersion gelten. Wir betrachten ausschließlich ruhende, homogene und isotrope Körper und sehen dabei ab einmal von elektrischen Ladungen, welche in ruhenden Körpern doch nur den Wellen überlagerte statische Felder hervorrufen; sodann von dem elektrischen Leitungsstrom, welcher stets mit Absorption verknüpft ist — wir aber wollen hier fast ausschließlich von nicht absorbierenden Mitteln reden<sup>1)</sup> — schließlich setzen wir die magnetische Permeabilität von vornherein gleich 1.<sup>2)</sup>

Unter diesen Umständen lauten die *Maxwellschen* Gleichungen

$$(1) \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}}, \quad (2) \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathfrak{E}},$$

$$(3) \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \quad (4) \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

An Unstetigkeitsflächen sind stetig 1. die tangentiellen Komponenten der Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , 2. die normalen Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{H}$  und  $\varepsilon \cdot \mathfrak{E}$ . Die Grenzbedingungen unter 2. werden von selbst erfüllt, wenn man die Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der ersteren löst.<sup>3)</sup> An der Grenze eines vollkommen spiegelnden Körpers ist die tangentielle Komponente von  $\mathfrak{E}$  Null; über die von  $\mathfrak{H}$  läßt sich keine allgemeine Angabe machen.

Die für unsere Zwecke wichtigste Folgerung ist, daß die Elimination von  $\mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{H}$  aus den Gleichungen 1) bis 4) zu den Be-

1) Für Sinuswellen können wir die Absorption stets einführen, indem wir die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  komplex wählen. Vgl. Enc. V 22, Nr. 12 und 15, sowie Nr. 6 dieses Artikels.

2) Enc. V 22, p. 109.

3) Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, nach *Riemanns* Vorlesungen bearbeitet von *H. Weber*, Braunschweig 1900, Bd. I, p. 390.

ziehungen

$$(5) \quad \Delta \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathfrak{E}} = 0, \quad \Delta \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathfrak{H}} = 0$$

führt. Für beide Feldstärken gilt also die *Wellengleichung*

$$(6) \quad \Delta \varphi - \frac{1}{a^2} \ddot{\varphi} = 0,$$

wobei die Geschwindigkeit der Wellen den Wert

$$(7) \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

hat.  $\sqrt{\varepsilon}$  ist danach gleich dem Brechungsindex  $\nu$  (*Maxwell*).

Die einzige Änderung der Grundgleichungen für absorbierende Körper besteht darin, daß an die Stelle von 2) tritt:

$$(7a) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} (\varepsilon \dot{\mathfrak{E}} + \sigma \mathfrak{E})$$

wo  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit bedeutet.

**2. Ebene Wellen.** Den Gleichungen (5) in Nr. 1 genügt man, wenn man alle sechs Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  als zunächst willkürliche Funktionen des Argumentes  $(t - \frac{x}{a})$  ansetzt; wir stellen so ebene, in der  $x$  Richtung fortschreitende Wellen dar. Über die longitudinalen Komponenten  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{H}_x$  sagen die Divergenzbedingungen 3) und 4) in Nr. 1 aus, daß sie konstant, also bei zeitlich veränderlichen Vorgängen Null sind. Beide Feldstärken schwingen somit in einer ebenen Welle *transversal*. Spricht man diesen Satz, wie es vielfach geschieht, allgemein für elektromagnetische Wellen aus, so ist die Transversalität nicht geometrisch zu verstehen, sondern nur so, daß die erwähnten Divergenzbedingungen erfüllt sind.

Zwischen den transversalen Komponenten besteht nach 1) oder 2) die Beziehung

$$(8) \quad \mathfrak{E}_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathfrak{H}_z, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathfrak{H}_y.$$

Nach (8) sind  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  und die Wellennormale aufeinander senkrecht und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Eine linear polarisierte Welle erhält man, wenn man von den zwei willkürlichen Funktionen  $\mathfrak{E}_y$  und  $\mathfrak{E}_z$  des Argumentes  $(t - \frac{x}{a})$  die eine, etwa  $\mathfrak{E}_z$  gleich Null setzt. Die Ebene durch die Wellennormale und die magnetische Feldstärke behält dann ihre Lage dauernd bei; man nennt sie *Polarisationsebene*.<sup>3a)</sup>

3<sup>a)</sup> Die ursprüngliche Definition der Polarisationsebene knüpfte an gewisse Erfahrungstatsachen aus der Kristalloptik oder an die Spiegelung des Lichtes an. Daß die so bestimmte Ebene die magnetische und nicht die elektrische

Auf elliptisch und partiell polarisierte Wellen gehen wir in Nr. 10 und 30 ein.<sup>4)</sup>

**3. Kugelwellen.** Zur Darstellung einer linear polarisierten Kugelwelle gelangt man, wenn man die beiden Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  auf den *Hertz*schen Vektor  $\mathfrak{B}$  zurückführt.<sup>5)</sup> Dazu dienen entweder die Gleichungen

$$(9) \quad \mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c} \text{rot } \dot{\mathfrak{B}}$$

oder

$$(10) \quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \text{rot } \dot{\mathfrak{B}}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot rot } \mathfrak{B},$$

während  $\mathfrak{B}$  selbst der Wellengleichung

$$(11) \quad \Delta \mathfrak{B} - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathfrak{B}} = 0$$

genügt. Die Gleichungen 1) bis 4) werden von diesen identisch befriedigt.

Der Gleichung 11) genügt der Ansatz

$$(12) \quad \mathfrak{B}_x = 0, \quad \mathfrak{B}_y = 0, \quad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

überall mit Ausnahme des Punktes  $r = 0$ , von welchem die Welle divergiert. Berechnen wir nach (9)  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$ , so erhalten wir als Näherung für große Entfernungen die folgenden Beziehungen, bei denen  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  räumliche Polarkoordinaten ( $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$ ,  $z = r \cos \vartheta$ ) bedeuten:

$$(12a) \quad \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_\vartheta = 0, \quad -\mathfrak{E}_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathfrak{H}_\varphi = \frac{\varepsilon}{c^2 r} \dot{f}\left(t - \frac{r}{a}\right) \sin \vartheta.$$

In großer Entfernung geht somit die Kugelwelle in eine ebene über, sowohl was die Lage von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  zueinander und zur Wellennormalen als auch das Verhältnis  $|\mathfrak{E}| : |\mathfrak{H}|$  anlangt.

Die entsprechende Näherung für kleine Entfernungen lautet

$$(13) \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f(t)}{r} \right),$$

$$\mathfrak{H} = \varepsilon \text{rot } \mathfrak{A},$$

Feldstärke enthält, was an sich gerade so gut denkbar war, haben erst Wieners Versuche (Nr. 22) gezeigt.

4) Gerippte (Corrugated) ebene Wellen, bei welchen die Amplitude in Ebenen gleicher Phase nach einem Sinusgesetz variiert, untersucht *Lord Rayleigh*, Sc. Pap. III, p. 117.

5) *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. 36 (1888), p. 1; Ges. Abh. 2, p. 147, Leipzig 1894.

wobei

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{\dot{f}(t)}{cr}$$

ist.

Nun ist aber  $\varphi$  das elektrostatisch berechnete Potential eines im Nullpunkt liegenden Dipols von dem Moment  $f(t)$  parallel zu  $z$ , und  $\mathfrak{A}$  ist das Vektorpotential des von dessen Schwingungen repräsentierten Konvektionsstromes. Soweit (13) gilt, herrscht also das quasistationäre Feld eines schwingenden Dipols. Eine Kugelwelle der betrachteten Art wird somit von einem elektrischen Dipol erregt.

Benutzt man die Gleichungen (10) statt (9), so wird man auf einen magnetischen Dipol als Ursache der Kugelwelle geführt. Schwingende elektrische Dipole sind die Atome der Körper mit ihren Polarisationselektronen. Ob auch schwingende magnetische Dipole vorkommen, erscheint zweifelhaft, doch ist die Frage für die Wellenoptik belanglos.

Konvergierende Kugelwellen erhält man durch den Ansatz

$$(14) \quad \mathfrak{B}_x = 0, \quad \mathfrak{B}_y = 0, \quad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{a}\right).$$

Der aus (12) und (14) kombinierte Ansatz

$$(15) \quad \mathfrak{B}_x = 0, \quad \mathfrak{B}_y = 0, \quad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{r} \left\{ f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right) \right\}$$

stellt eine Kugelwelle dar, welche zunächst nach dem Nullpunkt konvergiert, um sodann wieder zu divergieren; der Nullpunkt ist dabei kein Unstetigkeitspunkt mehr.

Schwingt ein Dipol nur während eines bestimmten Zeitintervalls ( $f(t) = 0$ , außer wenn  $t_1 < t < t_2$ ), so schreitet die emittierte Kugelwelle mit der konstanten Breite  $a(t_2 - t_1)$  fort. Auch beim Übergang der Kugelwelle in ebene Wellen bleibt diese erhalten. Überhaupt behält die Welle in diesem letzten Stadium ihre Form unverändert bei; in jedem Punkte erfolgt die Schwingung von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  nach demselben durch die Funktion  $\ddot{f}(t)$  bestimmten Gesetz.

**4. Zylinderwellen.** Wie bei den Kugelwellen ein Punkt so ist bei den Zylinderwellen eine Linie ausgezeichnet. Das Feld ist in diesem Falle von den zur ausgezeichneten Linie parallelen Abmessungen, etwa von  $z$ , unabhängig. Der Hertz'sche Vektor  $\mathfrak{B}$  genügt der Differential-

6) *H. Lamb*, Proc. London Math. Soc. 35 (1902), p. 141; Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907, p. 348; *Vito Volterra*, Acta math. 18 (1894), p. 161; *Tullio Levi-Civita*, Nuovo Cimento (4) 6 (1897), p. 204; *Lord Rayleigh*, Proc. London Math. Soc. 19 (1888), p. 504; Pap. III, p. 47.

gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} = 0,$$

(vgl. (11), welche bei Einführung der komplexen Zeitvariablen

$$(16) \quad l = iat$$

die Form annimmt

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial l^2} = 0.$$

Eine Lösung von ihr ist, wie aus der Potentialtheorie bekannt,

$$\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y = 0, \quad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (l - \lambda)^2}},$$

wobei

$$\varrho^2 = x^2 + y^2$$

und  $\lambda$  ein Parameter ist. Wir erhalten neue Lösungen, wenn wir die angegebene mit einer beliebigen Funktion  $\varphi(\lambda)$  multiplizieren und über einen beliebigen, von  $l$  und  $\varrho$  unabhängigen komplexen Weg in der  $\lambda$ -Ebene integrieren; also

$$(17) \quad \mathfrak{B}_z = \int \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\sqrt{\varrho^2 + (l - \lambda)^2}}.$$

In Fig. 1 sind  $A$  und  $B$  die Verzweigungspunkte  $\lambda = l \pm i\varrho$  der Funktion  $\sqrt{\varrho^2 + (l - \lambda)^2}$ ; die Gerade  $AB$  wählen wir als Verzweigungsschnitt, der Integrationsweg verlaufe wie in der Figur gezeichnet, wobei der Punkt  $P$  beliebig, aber unabhängig von  $l$  und  $\varrho$  auf  $AB$  gewählt ist; die punktierten Wegstrecken liegen im zweiten Blatt. Die Anteile der Strecken  $\overrightarrow{AP}$  im ersten und  $\overrightarrow{PA}$  im zweiten Blatt heben sich auf. Dagegen sind die Anteile der Integration von  $-i\infty$  nach  $A$  im ersten und von  $A$  bis  $-i\infty$  im zweiten Blatt einander gleich, mithin:

$$(18) \quad \mathfrak{B}_z = 2 \int_{-i\infty}^{l-i\varrho} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\sqrt{\varrho^2 + (l - \lambda)^2}}.$$

Die Wurzel ist dabei positiv imaginär. Gleichbedeutend damit ist nach (16):

$$(19) \quad \mathfrak{B}_z = \int_{-\infty}^{t - \frac{\varrho}{a}} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{(t - \tau)^2 - \frac{\varrho^2}{a^2}}}.$$

Die einzige Unstetigkeitsstelle dieser Lösung ist die Gerade  $\varrho = 0$ .

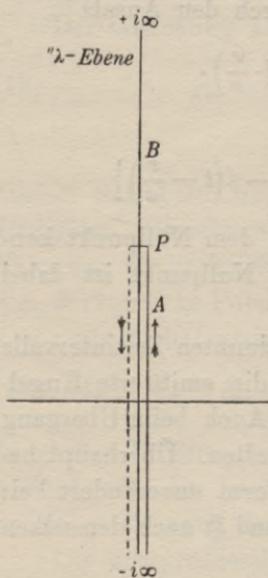


Fig. 1.

Nehmen wir an:  $f(t) = 0$ , außer wenn  $t_1 < t < t_2$ , so ist  $\mathfrak{B}_z = 0$ , solange  $t < t_1 + \frac{\rho}{a}$ . Der Wellenkopf läuft somit mit der Geschwindigkeit  $a$  nach außen; die Lösung stellt eine *divergierende* (auslaufende) Welle dar. Ein bestimmtes Ende hat die Welle hingegen nicht; wenn  $t > t_2 + \frac{\rho}{a}$ , so wird

$$\mathfrak{B}_z = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}}.$$

Die Welle zieht eine langsam abklingende Schleppe nach sich. Ist  $t - t_1 \gg t_2 - t_1$  und  $\gg \frac{\rho}{a}$ , so wird angenähert

$$(20) \quad \mathfrak{B}_z = \frac{1}{t - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau.$$

In allen optischen Fällen ist dies Integral praktisch Null.

Ähnlich wie die Lösung (18) findet man die folgende, welche eine *konvergierende* Zylinderwelle darstellt:

$$(21) \quad \mathfrak{B}_z = \int_{i+\rho}^{i\infty} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{\sqrt{\rho^2 + (l-\lambda)^2}} = \int_{t+\frac{\rho}{a}}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}}.$$

Das Feld berechnet man aus (19) oder (21) nach den Formeln (9) oder (10)

Setzt man in (19) und (21)  $\tau = t \mp \frac{\rho}{a} \mathfrak{C} \operatorname{of} \alpha$ , so wird

$$(22) \quad \mathfrak{B}_z = \int_0^{\infty} f\left(t - \frac{\rho}{a} \mathfrak{C} \operatorname{of} \alpha\right) d\alpha,$$

oder

$$(23) \quad \mathfrak{B}_z = \int_0^{\infty} f\left(t + \frac{\rho}{a} \mathfrak{C} \operatorname{of} \alpha\right) d\alpha.$$

Diese Form der Lösung hat den Vorteil,  $t$  und  $\rho$  nicht mehr in den Grenzen der Integrale zu enthalten.

**5. Sinusschwingungen.** Bisher wurde über die Form der Schwingungen keinerlei beschränkende Voraussetzung gemacht; die Funktion  $f(t)$  in Nr. 3 und 4 blieb unbestimmt. Häufig werden wir uns aber auf Sinusschwingungen beschränken, bei welchen von vornherein alle Feldvektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$  usw. zu  $e^{nt}$  proportional gesetzt werden können,

$n$  ist dabei die *Frequenz* (also  $\frac{n}{2\pi}$  die *Schwingungszahl*)  $\tau = \frac{2\pi}{n}$  die *Periode*,  $\lambda = \frac{2\pi a}{n}$  die *Wellenlänge*. Der physikalische Grund für die Bewegung der Sinusschwingungen liegt in der Fähigkeit vieler molekularer Gebilde, mit großer Annäherung reine Sinusschwingungen auszusenden und infolgedessen nach dem Resonanzprinzip auf Sinusschwingungen der gleichen Frequenz besonders stark anzusprechen und sie so von anderen auszusondern. Nicht nur schnelle und langsame Schwingungen unterscheiden sich deswegen in mancher Beziehung geradezu qualitativ, sondern selbst ganz geringe prozentische Unterschiede in der Frequenz sind manchmal für die Optik von ausschlaggebender Bedeutung. Das Auge empfindet diese Verschiedenheit als Verschiedenheit der Farbe.<sup>7)</sup> Mathematisch sind Sinusschwingungen deshalb einfacher zu behandeln, weil die Art der Abhängigkeit von der Variablen  $t$  von vornherein feststeht. Setzt man

$$(24) \quad \varphi = ue^{int},$$

so wird aus der Wellengleichung (6) die „*Schwingungsgleichung*“

$$(25) \quad \Delta u + k^2 u = 0 \quad \left( k = \frac{n}{a} = \frac{n\sqrt{\varepsilon}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

für die nur noch von  $x, y, z$  abhängige Funktion  $u$ .

Ebene, Kugel- und Zylinderwellen darstellende Integrale der letzteren gewinnt man durch die Substitution (24) aus den in Nr. 2, 3, 4 gegebenen Lösungen der Wellengleichung:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-ikx}, \quad u = \frac{1}{r} e^{\mp ikr}, \\ u = Z_0(\pm k\rho) = \int_0^\infty e^{\mp ik\rho \cos\alpha} d\alpha = K_0(\pm k\rho) - \frac{1}{2}\pi i J_0(\pm k\rho). \end{array} \right.$$

Hier sind

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(z \cos\alpha) d\alpha \quad \text{und} \quad K_0(z) = \int_0^\infty \cos(z \cos\alpha) d\alpha$$

die *Besselschen* Funktionen nullter Ordnung, während  $Z_0$  bis auf den Zahlenfaktor  $\frac{2}{\pi i}$  die sogenannte *Hankelsche* Funktion nullter Ordnung ist; infolgedessen ist für kleine Werte des Argumentes

$$(27) \quad Z_0(z) = -\log z + \text{const.}$$

<sup>7)</sup> Th. Young, Phil. Trans. 1802, p. 19; Lectures on natural philosophy II, London 1807, p. 616; Ann. Phys. Chem. 39 (1811), p. 165.

für sehr große hingegen<sup>8)</sup>

$$(28) \quad Z_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-i\left(z + \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ 1 + \frac{1^2}{1!} \left(\frac{i}{8z}\right) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!} \left(\frac{i}{8z}\right)^2 + \dots \right\}.$$

Das obere Vorzeichen gibt in der Darstellung der Kugel- und Zylinderwellen *auslaufende*, das untere aus dem Unendlichen kommende, nach dem Punkt  $r = 0$  oder der Linie  $\varrho = 0$  *konvergierende* Wellen. Eine physikalische Bedeutung haben sowohl der reelle als der durch  $i$  dividierte imaginäre Anteil derartiger komplexer Lösungen. Sowohl  $I_0(+k\rho)$  als  $K_0(+k\rho)$  sind so Lösungen der Schwingungsgleichung für zwei Dimensionen.

Die Experimentalphysik bestimmt Sinusschwingungen durch ihre Wellenlänge

$$(29) \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{n}$$

im leeren Raum, weil diese unmittelbar und sehr genau, gelegentlich bis auf das  $10^{-7}$ -fache ihres Wertes, gemessen werden kann. Die Frequenz  $n$  wäre daraus leicht zu berechnen. Da aber der Wert der Lichtgeschwindigkeit  $c$  nur bis auf die vierte Ziffer feststeht, so brächte der Übergang zu Frequenzen einen großen Verlust an Genauigkeit mit sich. Für theoretische Zwecke ist dennoch vielfach die Bestimmung durch die Frequenz vorzuziehen, weil sie sich beim Übertritt der Welle von einem Mittel in das andere nicht ändert.

Die langsamsten Schwingungen, welche bisher im Gebiete der Optik nachgewiesen sind, haben eine Wellenlänge  $\lambda_0 = 3,4 \cdot 10^{-2}$  cm<sup>9)</sup>, die schnellsten, für die  $\lambda_0$  gemessen ist,  $\lambda_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  cm.<sup>10)</sup> (Noch kürzere Wellen werden von den glühenden Metaldämpfen des elektrischen Funkens ausgesandt<sup>11)</sup>.) Die entsprechenden Frequenzen sind nach (29), wenn man  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm sec<sup>-1</sup> annimmt,  $n = 2\pi \times 9 \cdot 10^{11}$  sec<sup>-1</sup> und  $n = 2\pi \times 3 \cdot 10^{15}$  sec<sup>-1</sup>. Das Auge empfindet als Licht Schwingungen, deren Wellenlängen zwischen etwa  $4,1 \cdot 10^{-5}$  und  $7,1 \cdot 10^{-5}$  cm liegen.

Die Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Schwingungen, deren Wellenlänge etwa zwischen  $1 \cdot 10^{-9}$  und  $5 \cdot 10^{-8}$  cm, deren Frequenzen somit zwischen  $2\pi \times 6,7 \cdot 10^{17}$  und  $2\pi \times 3 \cdot 10^{19}$  sec<sup>-1</sup> liegen. (Vgl. Abschnitt V dieses Artikels.)

8) Vgl. *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von *J. Friedel*, Leipzig und Berlin 1907, § 192.

9) *H. Rubens* und *O. v. Bayer*, Berliner Ber. 1911, p. 339 u. 666.

10) *O. Schumann*, Wiener Ber. 102 (1893), p. 415, 625.

11) *P. Lenard* und *E. Ramsauer*, Heidelberger Akad. 1910, Abhandlungen Nr. 28, 31, 32.

Das naturgemäße Maß für Längen bildet bei allen Problemen, die auf Sinusschwingungen Bezug haben, deren Wellenlänge in dem in Rede stehenden Mittel; das natürliche Zeitmaß ist ihre Periode. Die Beziehungen „optisch groß“ und „optisch klein“ bezeichnen das Verhältnis zu diesen Maßstäben. Da die Periode stets kleiner als  $10^{-12}$  sec ist, so sind selbst Zeiten optisch groß, welche für den Verlauf vieler anderer physikalischer Vorgänge als sehr klein zu bezeichnen sind. Alle optischen Intensitätsmessungen z. B. dauern lange Zeiten, selbst wenn sie sich etwa photographisch in  $10^{-4}$  sec vollziehen. — Diese Begriffsbestimmung bleibt auch dann in Kraft, wenn man mit mehreren Sinusschwingungen zugleich zu tun hat, solange sich deren Perioden und Wellenlängen nicht in der Größenordnung unterscheiden.

Sinusschwingungen stellen stets einen stationären Zustand mit zeitlich unveränderlichen Intensitäten dar. Über die Erscheinungen beim Eintreffen oder beim Abklingen eines begrenzten Wellenzuges erfährt man dabei unmittelbar nichts. Die Verkennung dieses Sachverhaltes hat gelegentlich zu Fehldeutungen von Beobachtungen geführt.<sup>12)</sup>

**6. Dispergierende und absorbierende Körper.** Bedeutet die Einführung von Sinusschwingungen schon für gewöhnlich eine Erleichterung, so wird sie im Falle der Dispersion zur Notwendigkeit. Denn die Grundgleichungen für dispergierende Körper müssen wir mangels einer auch quantitativ richtigen Dispersionstheorie als vorläufig unbekannt bezeichnen. Für Sinusschwingungen können wir aber die Grundgleichungen (1) bis (4), deswegen auch die Schwingungsgleichung (25), samt den Grenzbedingungen anwenden; mit der einzigen Abänderung, daß wir die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  als eine durch Messung des Brechungsindex  $\nu$  nach (7) zu ermittelnde Funktion der Frequenz  $n$  betrachten.<sup>13)</sup> Muß man auch noch die Absorption berücksichtigen, ist nach (7a) die reelle Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  durch die komplexe Funktion von  $n$

$$(29a) \quad \epsilon' = \epsilon - i \frac{\sigma}{n}$$

zu ersetzen; nach (25) erhält dann  $k$  den komplexen Wert

$$k = \frac{n\sqrt{\epsilon'}}{c}$$

während die Schwingungsgleichung selbst ihre Form nicht ändert. Bei der mathematischen Behandlung von Sinusschwingungen kann man

12) Ein Beispiel wird behandelt bei *M. Laue*, Ann. d. Phys. (4) 13 (1904), p. 163, § 6.

13) Enc. V 22, Nr. 15.

somit ganz von der Absorption absehen, solange man nur komplexe Lösungen der Differentialgleichungen sucht. Erst wenn man deren reelle Teile absondert, treten die Unterschiede gegenüber nicht-absorbierenden Körpern hervor. Mit dem Brechungsindex  $\nu$  und dem Absorptionskoeffizienten  $\kappa$  hängt  $\varepsilon'$  durch die Beziehung

$$(29b) \quad \sqrt{\varepsilon'} = \nu(1 - i\kappa)$$

zusammen. Da bei absorbierenden und dispergierenden Körpern die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  nicht als von  $n$  unabhängig angenommen werden kann, so muß man  $\varepsilon'$  für jedes  $n$  aus den gemessenen Werten von  $\nu$  und  $\kappa$  berechnen.

Bei ebenen Sinuswellen in nicht-dispergierenden und nicht absorbierenden Körpern ist nach Nr. 2 die Geschwindigkeit der Phasen gleich  $a$ , d. h. so groß wie die des Kopfes oder Endes einer Welle von begrenzter Dauer. Bei dispergierenden Mitteln hingegen ist zu unterscheiden zwischen der Phasengeschwindigkeit bei stationären Sinuswellen, welche nach (25) stets den Wert  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\nu} = \frac{n}{k}$  hat, und der Geschwindigkeit des Kopfes einer begrenzten Welle. Nach der Elektronentheorie ist die letztere stets gleich  $c$ .<sup>14)</sup> Bei der *Fizeauschen* und wohl auch bei der *Foucaultschen* Lichtgeschwindigkeitsmessung wird die Gruppengeschwindigkeit

$$(30) \quad g = \frac{c}{\nu + n \frac{d\nu}{dn}} = \frac{dn}{dk}$$

beobachtet.<sup>15)</sup> (Vgl. Nr. 28.)

**7. Die Intensität.**<sup>16)</sup> Wegen der Größe der Frequenzen ist eine Beobachtung der Feldvektoren  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$  ausgeschlossen. Nur die Intensität ist meßbar, und diese ist der Mittelwert einer Energiegröße, gebildet über Zeiten, welche optisch lang sind, aber nur einen kleinen Bruchteil einer Sekunde bilden. Daß die Unbestimmtheit dieser Größenangabe ohne Einfluß auf das Ergebnis der Mittelwertbildung ist, versteht sich keineswegs von selbst. Vielmehr liegt darin eine Eigentümlichkeit der optischen Wellen, welche *Planck* in seine Hypothese der natürlichen Strahlung mit aufnimmt (vgl. Nr. 27).<sup>17)</sup> Im allge-

14) *A. Sommerfeld*, Phys. Z. S. 8 (1907), p. 841; Weber-Festschrift 1912, p. 338; Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 177.

15) Enc. V 22, Nr. 28 und V 23, Nr. 9, vgl. unten Nr. 27; vgl. auch *M. Laue*, Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 523; *L. Brillouin*, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 203.

16) Vgl. Enc. V 23, p. 312.

17) *M. Planck*, Ann. d. Phys. 1 (1900), p. 69.

meinen ist die Intensität zeitlich veränderlich; da sich aber jeder Wert von ihr schon auf eine optisch lange Zeit bezieht, ist sie *langsam* veränderlich gegenüber den *schnell* veränderlichen Feldvektoren.

Welche von den Energiegrößen des elektromagnetischen Feldes zur Definition der Intensität zu benutzen ist, ist schwer zu sagen. Bei nichtdispargierenden Körpern kommen vor allen in Betracht: 1. die Energiedichte  $W = \frac{1}{2}(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ , 2. der Energiestrom  $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$  dem absoluten Wert nach, 3.  $\mathfrak{E}^2$  allein, 4.  $\mathfrak{H}^2$  allein. Wahrscheinlich ist die Wahl zwischen ihnen nach dem Meßinstrument zu treffen. Beim Bolometer und der Thermosäule dürfte die hineinströmende Energie  $|\mathfrak{S}|$ , bei der photographischen Platte der Mittelwert  $\mathfrak{E}^2$  zur Messung gelangen (vgl. Nr. 22). Meist beobachtet man aber unter Umständen, unter welchen die Wellen nahezu eben sind; dann ist im zeitlichen Mittel

$$\overline{W} = |\overline{\mathfrak{S}}| = \varepsilon \overline{\mathfrak{E}^2} = \overline{\mathfrak{H}^2},$$

so daß die Wahl das Ergebnis nicht beeinflusst.

Noch schwieriger liegt die Frage im Fall der Dispersion; dann kommt nämlich noch die Energie der erzwungenen intramolekularen Schwingungen in Betracht. Will man nur die Intensitäten an verschiedenen Stellen desselben Körpers vergleichen und ist die Welle an diesen nahezu eben, so ist jede der angegebenen Größen gleich geeignet. Gelegentlich wird in der Literatur das Quadrat des *Hertz*-schen Vektors verwendet; und auch wir werden uns im Abschnitt IV dieses Artikels im Grunde diesem Brauche anschließen, nur scheint dies in jedem Fall einer besonderen Rechtfertigung zu bedürfen.<sup>18)</sup>

Bei reinen Sinusschwingungen kann man die Mittelwertbildung statt über eine optisch lange Zeit über eine Periode vollziehen. Geht man von einer komplexen Darstellung für die Feldvektoren aus, findet man also etwa

$$\mathfrak{E}_x = u e^{i n t} = |u| e^{i(n t + \varphi)},$$

so haben wir hierin zwei reelle Lösungen, nämlich

$$|u| \cos(n t + \varphi) \quad \text{und} \quad |u| \sin(n t + \varphi).$$

Der Mittelwert  $\overline{\mathfrak{E}_x^2}$  ist für beide gleich  $\frac{1}{2}|u|^2$ , d. h. wenn  $\mathfrak{E}_x'$  zu  $\mathfrak{E}_x$  konjugiert komplex ist,

$$(31) \quad \overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_x'$$

Ist ferner etwa

$$\mathfrak{H}_y = v e^{i n t} = |v| e^{i(n t + \psi)},$$

18) Vgl. hierzu: *E. Abbe*, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, § 9, Braunschweig 1910.

so wird bei Benutzung der reellen Anteile von  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{H}_y$  der Mittelwert  $\overline{\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y} = \frac{1}{2} |u| |v| \cos(\varphi - \psi)$ , also

$$(32) \quad \overline{\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y} = \frac{1}{4} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}'_y + \mathfrak{E}'_x \mathfrak{H}_y).$$

Bei Benutzung der imaginären Anteile findet man dasselbe. Nach den in (31) und (32) angedeuteten Regeln kann man leicht von komplexen Lösungen zu den quadratischen Mittelwerten übergehen, welche die Intensität bestimmen.

**8. Die Wellenoptik und die älteren Lichttheorien.** Nicht unerwähnt darf bleiben, daß manche charakteristischen Züge der elektromagnetischen Lichttheorie gerade für die wichtigsten Probleme der Wellenoptik keine Rolle spielen. Das zeigt am besten die Tatsache, daß lange vor *Maxwell* und *Hertz* die wesentlichsten Interferenz- und Beugungserscheinungen bekannt und durch die elastische Lichttheorie erklärt waren. Vielfach genügt, daß der „Lichtvektor“ (d. h. elastisch: die Verrückung eines Ätherteilchens, elektromagnetisch:  $\mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{H}$ ) der Wellengleichung (5) und der Divergenzbedingung 3) oder 4) (Transversalität) genügt, und daß sein Quadrat gemittelt ein Maß der Intensität abgibt. In diesem Punkt stimmt die elastische Theorie mit der elektromagnetischen vollständig überein. Nur die Überlegenheit der elektromagnetischen Theorie auf andern Gebieten sichert dieser den Sieg.

Die älteste Wellentheorie des Lichtes, wie sie *Huyghens* 1678 begründete<sup>19)</sup>, kannte noch nicht einmal die Transversalität und vermochte dennoch z. B. für die gradlinige Ausbreitung des Lichtes, das Reflexions- und das Brechungsgesetz Erklärungen zu geben, welche ihren Wert bis heute behalten haben.

## II. Die Superposition von Sinusschwingungen gleicher Frequenz.

**9. Das Interferenzprinzip.** Die vielleicht wichtigste Eigenschaft der Grundgleichungen ist ihre Linearität, welche zur Folge hat, daß die Summe von beliebigen Lösungen selbst eine Lösung ist. Physikalisch bedeutet dies, daß sich verschiedene Wellen ohne gegenseitige Störung superponieren können; die resultierenden Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  sind einfach die Vektorsummen aus den Feldstärken der einzelnen Wellen. Aber gerade deswegen summieren sich die Intensitäten im allgemeinen nicht. Dies ist das von *Young*<sup>20)</sup> zuerst ausgesprochene „Interferenzprinzip“.

19) *Christian Huyghens*, *Traité de la lumière*, Leiden 1690. Deutsch von *E. Lommel* (Ostwalds Klassiker Nr. 20, Leipzig 1890), vgl. Nr. 33.

20) *Thomas Young*, *Phil. Trans.* 1802, p. 34; *Lectures on Natural Philosophy* 2 (1807), p. 624; *Ann. Phys. Chem.* 39 (1811), p. 184.

### 10. Zwei senkrecht zueinander polarisierte Schwingungen.<sup>21)</sup>

Stellt man bei den in Nr. 2 bis 4 betrachteten linearpolarisierten Wellen den Lichtvektor (etwa  $\mathfrak{E}$ ) in einem bestimmten Punkt als gerichtete Strecke mit festem Anfangspunkt dar, so beschreibt ihr Endpunkt eine gerade Linie; wir können diese Bewegung darstellen durch

$$\mathfrak{E}_{1x} = x = a \cos nt.$$

Superponiert sich darüber eine andere senkrecht dazu polarisierte Schwingung, welche analog durch

$$\mathfrak{E}_{2y} = y = b \cos (nt - \delta)$$

gegeben ist, so ist die resultierende Schwingung durch eine Bewegung des Endpunktes auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

dargestellt. Man nennt sie deshalb elliptisch polarisiert. Ist die Phasendifferenz  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , so liegen ihre Achsen in der  $x$ - und  $y$ -Richtung; ist außerdem  $a = b$ , so wird die Ellipse zum Kreis (zirkulare Polarisation). Ist  $\delta = 0$  oder  $= \pi$ , so artet die Ellipse zu einer Geraden aus. Eine vorgegebene elliptische Schwingung läßt sich auf unendlich viele Arten in zwei zueinander senkrechte Schwingungen zerlegen; die Phasendifferenz  $\delta$  wechselt mit den Richtungen. Die Achsenrichtungen sind durch die Forderung  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  eindeutig bestimmt. Ausgenommen davon sind nur die Grenzfälle der zirkularen und linearen Schwingung; bei der ersteren ist stets  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , bei der letzteren  $\delta = 0$  oder  $\delta = \pi$ . Bei zirkularer Polarisation unterscheidet man als links und rechts zirkular die Fälle  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , in welcher die Bewegung des Lichtvektors eine Links- bzw. Rechtsdrehung um die dem Strahl entgegengesetzte Richtung darstellt. Man kann diese Unterscheidung natürlich auch auf elliptische Polarisation anwenden.

Die Intensität  $\overline{\mathfrak{E}^2}$  ist unabhängig von  $\delta$  gleich  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ . Sind die beiden linearen Komponenten ebene in der gleichen Richtung fortschreitende Wellen, so setzt sich auch der Strahlvektor  $\mathfrak{S}$  additiv aus den Anteilen der Komponenten zusammen. Man spricht dies gewöhnlich in dem Satz aus: *Senkrecht zueinander polarisierte Schwingungen interferieren nicht miteinander.*

21) A. Fresnel, Oeuvres I, p. 385—799, Paris 1866; François Arago, Oeuvres 10, Paris-Leipzig 1858, p. 132, vgl. A. Wangerin, Enc. V 21, Nr. 6.

**11. Interferenz gleichgerichteter Schwingungen.** Ganz anders gestaltet sich die Erscheinung bei der Superposition gleich gerichteter Schwingungen (bei beliebiger Lage der Schwingungen zueinander kann man das Problem auf die hier und in Nr. 10 behandelten Fälle zurückführen). Aus der Superposition von

$$\mathfrak{E}_{1x} = u e^{i n t} = |u| e^{i(n t + \varphi)}, \quad \mathfrak{E}_{2x} = v e^{i n t} = |v| e^{i(n t + \psi)}$$

resultiert nämlich die Schwingung

$$(33) \quad \mathfrak{E}_x = (u + v) e^{i n t},$$

deren Intensität nach (31)

$$(34) \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| \cos \delta)$$

ist, wenn  $\delta = \varphi - \psi$  die Phasendifferenz bedeutet. Die Intensität der resultierenden linearen Schwingung schwankt also zwischen  $(|u| - |v|)^2$  und  $(|u| + |v|)^2$ , sie nimmt den ersteren Wert für  $\delta = (2h + 1)\pi$ , den letzteren für  $\delta = 2h\pi$  an, wo  $h$  eine ganze Zahl ist. Ist  $|u| = |v|$ , so ist der Minimalwert 0. Die Tatsache, daß bei Superposition verschiedener Lichtwirkungen völlige Dunkelheit entstehen kann, hat endgültig gegen die Newtonsche Emissionstheorie entschieden.

Stellt man die komplexen Größen  $u$  und  $v$  in bekannter Weise durch Vektoren in der Ebene einer komplexen Veränderlichen dar, so sind diese Vektoren Repräsentanten der Schwingungen  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$ . Ihre Längen geben die Amplituden, ihr Richtungsunterschied die Phasendifferenz  $\delta$  an. Die resultierende Schwingung  $\mathfrak{E}$  wird nach (33) durch die Vektorsumme  $u + v$  dargestellt; das Problem der Superposition von Schwingungen läßt sich so auf Vektoradditionen zurückführen. Dies gilt natürlich auch für die Superposition von mehr als zwei Schwingungen.

Eine Reihe von  $p$  Schwingungen, deren Amplituden in geometrischer Progression abnehmen, während die Phasen in arithmetischer Progression wachsen, ist dargestellt durch

$$e^{i n t}, \quad \sigma e^{i n t + \delta}, \quad \sigma^2 e^{i(n t + 2\delta)}, \quad \dots, \quad \sigma^{p-1} e^{i(n t + (p-1)\delta)},$$

$$(0 < \sigma \leq 1);$$

ihre Superposition ergibt die Gleichung

$$(35) \quad e^{i n t} \sum_{m=0}^{p-1} \sigma^m e^{i m \delta} = e^{i n t} \frac{1 - \sigma^p e^{i p \delta}}{1 - \sigma e^{i \delta}},$$

deren Intensität nach (31) den Wert

$$(36) \quad \frac{1 - \sigma^p e^{i p \delta}}{1 - \sigma e^{i \delta}} \cdot \frac{1 - \sigma^p e^{-i p \delta}}{1 - \sigma e^{-i \delta}} = \frac{1 + \sigma^{2p} - 2\sigma^p \cos p\delta}{1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \delta}$$

hat (Airy).<sup>22)</sup> Für  $p = 2$  wird dieser Ausdruck gleich  $1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos \delta$ , für  $p = \infty$

$$(37) \quad \frac{1}{1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \delta} = \frac{1}{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Ist ferner  $\sigma \ll 1$ , so ist ein Näherungswert dafür  $(1 + 2\sigma \cos \delta)$ ; die Abhängigkeit der Intensität von der Phasendifferenz ist dann dieselbe wie bei der Interferenz von nur zwei Wellen; sie schwankt bei variierendem  $\delta$  nach einem Sinusgesetz um den Betrag  $4\sigma$ . Ist umgekehrt  $(1 - \sigma) \ll 1$ , so wird die Intensität für  $\delta = 2h\pi$  ( $h$  eine ganze Zahl) groß wie  $\frac{1}{(1 - \sigma)^2}$ ; und fällt schon auf die Hälfte dieses Betrages, wenn  $\delta = 2h\pi \pm (1 - \sigma)$  ist. Im ersten Fall haben wir somit breite und flache Intensitätsmaxima und -minima, im zweiten hohe und scharfe Maxima getrennt durch sehr breite Minima. Den

Übergang zwischen diesen Grenzfällen veranschaulicht Fig. 2, in der  $\delta$  als Abszisse,  $J(1 - \sigma^2)$  als Ordinate aufgetragen ist.

Für  $\sigma = 1$  wird der Ausdruck (35) gleich

$$(38) \quad e^{i\left(\nu t + \frac{p-1}{2}\delta\right)} \frac{\sin \frac{p}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta},$$

die Intensität daher gleich

$$(39) \quad \frac{\sin^2 \frac{p}{2} \delta}{\sin^2 \frac{1}{2} \delta}$$

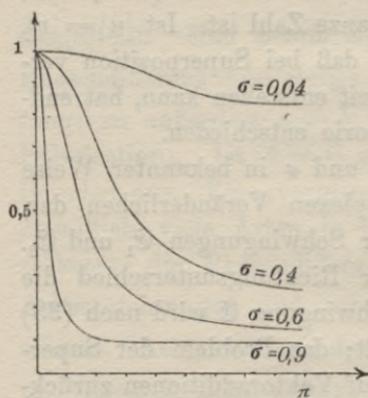


Fig. 2.

Ihr größter, bei  $\delta = 2h\pi$  erreichter Wert ist  $p^2$ . Bei

$$(39a) \quad \delta = 2h\pi \pm \frac{2\pi}{p}$$

wird sie Null. Wie die Höhe, so wächst somit die Schärfe der Intensitätsmaxima zugleich mit der Zahl  $p$  der interferierenden Schwingungen. Daneben bestehen noch viele kleinere Maxima, welche ungefähr dort liegen, wo  $\sin^2 \frac{p}{2} \delta$  den Wert 1 erreicht. Sie kommen bei großen Werten von  $p$  gegen die erstgenannten nicht in Betracht.

In Fig. 3 stellt die ausgezogene Kurve den Bruch (39) als Funktion von  $\delta$ , die gestrichelte analog den Ausdruck (36) mit  $\sigma = 0,883$

22) G. B. Airy, Pogg. Ann. 41 (1837), p. 512; Undulatory Theory of Optics, London 1877, p. 53f.; O. Lummer, Berlin Ber. 1900, p. 504.

dar;  $p$  ist bei beiden gleich 15. Man erkennt den äußerst geringen Unterschied beider Kurven.

### 12. Interferenzstreifen gleicher Dicke an dünnen Platten.<sup>23)</sup>

Diese sind von allen Interferenzerscheinungen am längsten bekannt, sie sind schon von *Newton*<sup>24)</sup> eingehend beschrieben, aber erst von *Young*<sup>25)</sup> im Sinne der Wellentheorie gedeutet worden. Von der punktförmigen Lichtquelle  $L$  (Fig. 4) gehen die Strahlen  $LA$

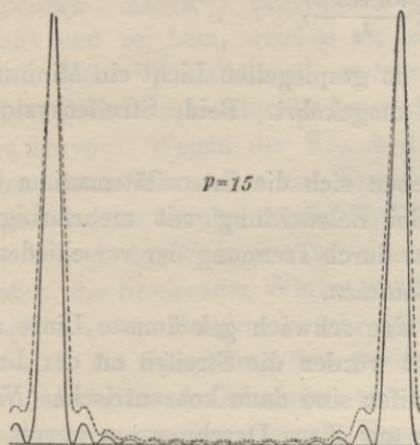


Fig. 3.

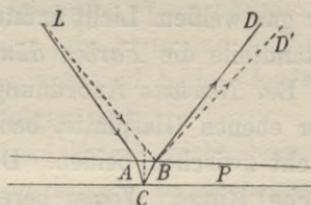


Fig. 4.

und  $LB$  nach der Vorderfläche der Platte  $P$ ; der erstere gelangt durch Brechung bei  $A$  und Spiegelung in  $C$  nach  $B$  und tritt dort in der Richtung nach  $D$  aus, während der letztere in  $B$  unmittelbar nach  $D'$  hingespiegelt wird. Die Phasendifferenz der Strahlen in  $B$  hängt mit der Dicke  $d$  der Platte und dem Neigungswinkel  $\beta$  des Strahles  $AC$  gegen die Plattennormale durch die näherungsweise gültige Beziehung

$$(40) \quad \delta = 4\pi \frac{v d \cos \beta}{\lambda_0} + \pi$$

zusammen. Der Summand  $\pi$  rührt daher, daß entweder mit der Spiegelung in  $B$  oder mit der in  $C$  ein Phasensprung  $\pi$  verknüpft ist, je nachdem der Brechungsindex in der Platte größer oder kleiner ist als im Außenraume. Vereinigt man die Strahlen  $BD$  und  $BD'$  durch optische Mittel (Lupe, Auge), so ist die Phasendifferenz im Bildpunkt von  $B$  ebenso groß. Ist  $L$  von  $B$  weit entfernt, so ist  $\beta$  längs der Platte unveränderlich. Variiert deren Dicke  $d$ , so schwankt  $\delta$  und deshalb gemäß Gleichung (34) die Intensität<sup>26)</sup>, welche in der Bild-

23) Die Literatur über Interferenzerscheinungen und die Apparate zu ihrer Beobachtung ist ungeheuer umfangreich. Wir berücksichtigen im folgenden nur die allerwichtigsten Fälle.

24) *Jsaak Newton*, *Optices*, Lib. I, Partes I et II, Londini 1704.

25) *Th. Young*, *Phil. Trans.* 1802, p. 37; *Lectures on Nat. Philos.* 2 (1807), p. 626; *Ann. Phys. Chem.* 39 (1811), p. 189.

26) Die Berücksichtigung der in der Platte mehrfach reflektierten Strahlen

ebene von  $P$  beobachtet wird. Man sieht dann, auf der Platte  $P$  lokalisiert, die Orte gleicher Dicke verbindenden Streifen.

Ähnliche Streifen beobachtet man im durchgehenden Licht; nur ist hier

$$(41) \quad \delta = 4\pi \frac{v d \cos \beta}{\lambda_0},$$

so daß jedem Helligkeitsmaximum im gespiegelten Licht ein Minimum im durchgehenden entspricht und umgekehrt. Beide Streifensysteme sind zueinander komplementär.

Nach (41) und (42) verschieben sich die Intensitätsmaxima bei Veränderung der Wellenlänge. Bei Beleuchtung mit mehrfarbigem oder gar weißem Licht entstehen so durch Trennung der verschiedenen Bestandteile die *Farben dünner Blättchen*.

Bei *Newtons* Anordnung lag eine schwach gekrümmte Linse auf einer ebenen Glasplatte, beobachtet wurden die Streifen an der Luftschicht zwischen beiden. Die Streifen sind dann konzentrische (*Newtonsche*) Ringe. *Young* berechnete aus ihren Durchmessern zuerst die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes der verschiedenen Farben.

**13. Der Fresnelsche Spiegel.** Durchkreuzen sich zwei ebene Wellen, deren Richtungen um den Winkel  $\vartheta$  differieren, so ist die Phasendifferenz  $\delta$  eine lineare Funktion der Koordinaten. Die Orte gleicher Phasendifferenz und infolgedessen gleicher Intensität sind die auf der Ebene beider Strahlrichtungen senkrechte Ebenen, welche den Winkel  $\vartheta$  halbieren. Der Abstand benachbarter Ebenen größter Helligkeit ist

$$(41a) \quad \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}.$$

Beobachtet man in irgendeiner anderen Ebene die Verteilung der Helligkeit, so sieht man ihre Schnitte mit jener Ebenenschar als Interferenzstreifen.

*Fresnel*<sup>27)</sup> wollte diese Interferenz verwirklichen, um die Emissionstheorie schlagender zu widerlegen, als der Interferenzversuch von *Young*<sup>28)</sup> das konnte. Er ließ dazu das Licht an zwei ebenen, unter einem gewissen Winkel aneinanderstoßenden Spiegeln reflektieren.

erübrigt sich bei dem meist geringen Reflexionsvermögen, da dann das  $\sigma$  in Gl. (36) klein ist.

27) *Augustin Fresnel*, Oeuvres 1, p. 150, 183, 186.

28) *Thomas Young*, Lectures on Natural Philos. 1 (1807), p. 464. Beim „Youngschen Versuch“ geht das Licht durch zwei enge Öffnungen, denen die Anhänger der Emissionstheorie einen Einfluß auf die „Lichtkörperchen“ zuschrieben.

Die interferierenden Wellen gehen dann scheinbar von den beiden Spiegelbildern der Lichtquelle aus. In der Tat beobachtet man ein äquidistantes Streifensystem. Es gibt viele Abänderungen dieses Versuches. *Fresnel*<sup>29)</sup> selbst ersetzte den Doppelspiegel durch ein Biprisma. *Lloyd*<sup>30)</sup> beobachtete die Interferenz zwischen direktem Licht und solchem, welches an einem ebenen Spiegel reflektiert ist. Auch *Billets*<sup>31)</sup> Halblinsen, welche dicht nebeneinander zwei reelle Bilder derselben Lichtquelle entwerfen, bringen Interferenzen derselben Art hervor. Wegen der Kleinheit der Wellenlänge  $\lambda$  kommt es bei allen diesen Versuchen zur Erreichung beobachtbarer Streifenbreiten darauf an, den Winkel  $\vartheta$  möglichst klein zu machen.<sup>32)</sup> Deshalb müssen die *Fresnelschen* Spiegel unter einem sehr stumpfen Winkel zusammenstoßen, die brechenden Winkel des Biprismas sehr klein und die Brennweite bei den Halblinsen sehr groß sein, während beim *Lloydschen* Versuch die Spiegelung fast streifend erfolgen muß.

Alle diese Anordnungen erreichen ihren Zweck nicht ganz rein. Beobachtet man genauer, als *Fresnel* es tun konnte, so erscheinen die Streifen weder alle gleich breit noch gleich hell, wie es doch nach der elementaren Theorie sein sollte. Die Beugung an der Kante, welche die interferierenden Strahlen voneinander trennt, beeinflusst die Erscheinung wesentlich. *H. F. Weber*<sup>33)</sup> und *H. Struve*<sup>34)</sup> haben die *Kirchhoffsche* Beugungstheorie darauf angewandt und die Übereinstimmung mit der Erfahrung festgestellt. Diese Komplikation wird vermieden, wenn man statt nahe benachbarte Strahlen zu trennen, einen Strahl durch Spiegelung und Brechung spaltet und die beiden Teile sich durchkreuzen läßt.

Eine Anordnung, welche dies verwirklicht,<sup>35)</sup> beruht auf der Eigenschaft des Quarzes, längs seiner kristallographischen Achse nur zirkular polarisierten Wellen Durchgang zu gestatten. Je nach dem Sinn seines optischen Drehvermögens ist sein Brechungsindex für eine rechts oder links zirkulare Welle größer als für die entgegengesetzt zirkulare. Setzt man aus einem rechts- und einem linksdrehenden Quarzprisma ein recht-

29) l. c. p. 330.

30) *H. Lloyd*, Ann. Phys. Chem. 45 (1838), p. 95.

31) *Billet*, Ann. d. chimie et phys. 64 (1862), p. 385. Ferner *F. F. Martens*, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 4 (1902), p. 43.

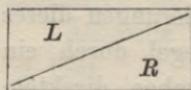
32) Beim kleinem  $\vartheta$  ist es völlig gleichgültig, ob man  $\overline{\mathcal{E}}^2$ ,  $\overline{\mathcal{H}}^2$  oder  $|\overline{\mathcal{E}}|$  als Intensität betrachtet.

33) *H. F. Weber*, Wied. Ann. 8 (1878), p. 407.

34) *H. Struve*, Fresnels Interferenzerscheinungen, Dorpat 1881; Ann. Phys. Chem. 15 (1882), p. 49.

35) *A. Righi*, Journ. de phys. (2) 2 (1883), p. 437.

winkliges Parallelepiped zusammen (Fig. 4a), so werden daher beim Übergange von einem zum anderen zwei entgegengesetzt zirkulare, in der Richtung der Achse zusammenfallende Wellen in zwei Richtungen hinein gebrochen, die einen kleinen Winkel miteinander bilden. Läßt man Licht, welches aus einem *Nicol'schen* Prisma (Polarisator) kommt, in das Parallelepiped eintreten, so wird es dabei in zwei zirkulare Wellen gespalten, welche aus dem



L Linksquarz.  
R Rechtsquarz

Fig. 4a.

Parallelepiped in etwas verschiedenen Richtungen austreten. Bringt man schließlich beide Wellen durch ein zweites *Nicol'sches* Prisma (Analysator) auf eine gemeinsame Polarisationssebene, so zeigen sich in allen von beiden Wellen bestrichenen Räumen Interferenzstreifen vom *Fresnel'schen* Typus, welche durch keine Beugungserscheinungen mehr gestört sind. Die Lage der Maxima hängt u. a. von der Stellung des Polarisators zum Analysator ab; dreht man den ersteren, so wandern die Interferenzstreifen. (Vgl. Nr. 24.)

#### 14. Die Streifen gleicher Neigung an planparallelen Platten.

Theoretisch am einfachsten von allen Interferenzerscheinungen und zugleich von großer praktischer Bedeutung sind die von *Herschel*<sup>35a)</sup> *Haidinger*<sup>36)</sup>, *Michelson*<sup>37)</sup>, *Mascart*<sup>38)</sup> und *Lummer*<sup>39)</sup> unabhängig von einander aufgefundenen Streifen gleicher Neigung an planparallelen Schichten. In dem durch eine solche Schicht hindurchgehenden Licht überlagern sich 1. eine unter zweimaliger Brechung hindurchgehende Welle, 2. eine Welle, welche außer den zwei Brechungen zwei Spiegelungen erlitten hat, 3. eine Welle, welche vier Spiegelungen erlitten hat usw. in infinitum, wenn wir uns die Wellen und die Schicht seitlich unbegrenzt denken. Die  $k$ -te Welle wird dargestellt durch  $\sigma^{k-1} e^{i(\nu t + (k-1)\delta)}$ ; daher ist die Intensität nach Gleichung (37) proportional zu

$$(42) \quad \frac{1}{(1 - \sigma)^2 + 4\sigma \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$\sigma$  wächst zugleich mit dem Reflexionsvermögen der beiden Grenzflächen,  $\delta$  ist (vgl. (40)) exakt durch

$$(43) \quad \delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n d \cos \beta + \varepsilon$$

35a) *J. F. W. Herschel*, Phil. Trans., London Royal Society 1809, p. 274.

36) *W. Haidinger*, Ann. Phys. Chem. 77 (1849), p. 219; 96 (1856), p. 453; *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 12 (1906), p. 489. Pap. V, p. 341.

37) *A. A. Michelson*, Phil. Mag. 13 (1882), p. 236.

38) *E. Mascart*, Ann. de chim. et de phys. 23 (1871), p. 116.

39) *O. Lummer*, Diss. Berlin 1884, Ann. Phys. Chem. 23 (1884) p. 49.

gegeben, wobei  $\varepsilon$  die Summe der Phasensprünge bei den Reflexionen an der Vorder- und der Rückfläche ist. Für gewöhnlich ist  $\varepsilon$  gleich 0 oder  $2\pi$ , sind die Flächen aber versilbert, so hat es andere Werte. Die Beobachtung geschieht mit einem auf Unendlich eingestellten optischen Instrument (Fernrohr, Auge). Jeder ebenen Welle, die hineintritt, entspricht dann ein Punkt der Brennebene. Tritt eine Wellenschar ein, so sieht man wegen der Veränderlichkeit der Phasendifferenz  $\delta$  und der Intensität mit der Richtung Interferenzstreifen; die Orte gleicher Helligkeit haben die Gleichung  $\beta = \text{const.}$  Zu jedem  $\beta$  gehört aber eine bestimmte Neigung des Strahls gegen die Normale nach seinem Austritt aus der Platte. Die Streifen sind daher ihrer Form nach die Schnitte der Brennebene mit Kreis Kegeln, deren Achse die Normale ist; z. B. wenn das Fernrohr die Richtung dieser Normalen hat, Kreise (*Pérot* und *Fabry*)<sup>40</sup>); steht hingegen das Fernrohr fast senkrecht zu ihr, so sieht man nur sehr schwach gekrümmte Stücke von Hyperbeln (*Lummer* und *Gehrcke*).<sup>41</sup>)

In dem von der Platte reflektierten Licht ist die stärkste der sich überlagernden Wellen diejenige, welche sogleich an der Vorderfläche gespiegelt ist. Da keine der anderen Wellen eine Spiegelung unter denselben Umständen durchmacht, sind dabei die Betrachtungen von Nr. 11 nicht ohne weiteres anwendbar. Doch erkennt man aus dem Energieprinzip, daß die Erscheinung im reflektierten Licht zu der im hindurchgehenden komplementär ist.<sup>42</sup>)

Liegt  $\sigma$  nahe beim Wert 1, so haben die Streifen im durchgehenden Licht helle, scharfe Maxima; sie eignen sich dann zu spektroskopischen Zwecken.<sup>43</sup>) Werte von  $\sigma$  bis zu 0,9 erreichen *Pérot* u. *Fabry* bei ihrer zwischen Glasplatten befindlichen Luftschicht durch schwache Versilberung der Grenzflächen. *Lummer* u. *Gehrcke* erzielen bei ihrer planparallelen Glasplatte dasselbe durch Benutzung großer Einfallswinkel; denn nach den *Fresnelschen* Formeln<sup>44</sup>) wächst das Reflexionsvermögen mit dem Einfallswinkel bis schließlich zum Wert 1. (Bei  $88^\circ$  Einfallswinkel ist  $\sigma = 0,88$ .)

40) *Ch. Fabry* und *A. Pérot*, Ann. de chim. et de phys. (7) 12 (1897), p. 459; 16 (1899), p. 115.

41) *O. Lummer* und *E. Gehrcke*, Berlin Ber. 1902, p. 11; Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 457.

42) Eine andersartige Behandlung der Spiegelung und Brechung an planparallelen Platten findet sich bei *W. Voigt*, Komp. der theoret. Physik, Leipzig 1896, Band 2, p. 643 f.

43) *R. Boulouch*, Journ. d. phys. 2 (1893), p. 316.

44) Enc. V 22. Nr. 10.

Um die erste Reflexion der einfallenden Welle an der Vorderfläche zu umgehen, durch welche bei großem  $\sigma$  der Hauptanteil der Energie der Beobachtung im durchgehenden Licht entzogen wird, setzte *Gehrcke* auf die Platte ein aufgekittetes Prisma und ließ die einfallende Welle, durch die Blende  $D$  seitlich begrenzt, ungefähr

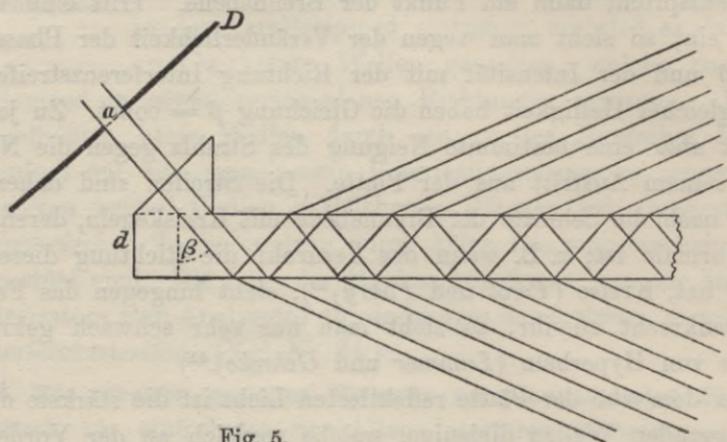


Fig. 5.

senkrecht, also ohne erheblichen Reflexionsverlust dadurch eintreten. Die Interferenzerscheinungen werden dann auf beiden Seiten der Platte gleich, nämlich so wie sonst nur im durchgehenden Licht. Freilich treten dann die Strahlen  $S_1, S_2, S_3, \dots, S'_1, S'_2, \dots$ , welche interferieren sollen, räumlich getrennt aus der Platte aus. Dennoch kommt es zur Interferenz, wenn man sie in der Brennebene eines Fernrohrs vereinigt. Theoretisch ist dieser Fall weniger einfach, weil die Beugung an der Blende  $D$  eine Rolle spielt. Doch ändert sich der Anblick der Streifen nicht, wenn man, wie zumeist geschieht, einigermaßen weit geöffnete Strahlenbündel einfallen läßt.<sup>45)</sup>

*v. Baeyer* bringt dann noch auf die Rückseite der Platte eine Substanz von so kleinem Brechungsindex, daß die Reflexion an der Rückfläche eine totale ist. Dadurch wird einmal die Interferenzerscheinung auf der Vorderseite lichtstärker, zugleich wird  $\sigma$  bis zu 0,94 vergrößert.<sup>46)</sup>

Die Zahl  $p$  der interferierenden Streifen ist nur bei der Anordnung von *Pérot* u. *Fabry* praktisch unendlich, da die Strahlen fast senkrecht auf der Platte stehen. Bei *Lummer* u. *Gehrcke* dagegen wegen der großen Einfallswinkel und der beschränkten Länge der Platte

45) M. Laue, Diss. Berlin 1903, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 280.

46) O. v. Baeyer, Verh. d. deutsch. phys. Gesell. 7 (1909), p. 118.

höchstens etwa 30. Einer weiteren Vergrößerung widersetzen sich die technischen Schwierigkeiten großer, exakt genug planparalleler Platten aus völlig homogenem Material. Dagegen läßt sich bei der Anordnung mit dem aufgesetzten Prisma die Zahl  $p$  leicht durch Ablendung einiger Strahlen verringern und so deren Einfluß auf die Schärfe der Streifen experimentell untersuchen.<sup>47)</sup>

Diese Betrachtungen gelten zunächst nur für Wellen, deren Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt oder dazu senkrecht steht. Beide Fälle unterscheiden sich etwas im Reflexionsvermögen, daher auch im Wert von  $\zeta$ . Im unpolarisierten Licht, das meist benutzt wird, superponieren sich zwei in der Schärfe ein wenig verschiedene Streifensysteme. Dagegen verändert sich die Erscheinung wesentlich, wenn man die Polarisationsebene anders orientiert und die Strahlen nach ihrem Austritt aus der Platte durch einen Polarisationsapparat hindurchgehen läßt. Bei bestimmten Stellungen des letzteren treten Verdoppelungen der Maxima auf.<sup>48)</sup>

Die hier beschriebenen Anordnungen sind zunächst nur für die spektroskopische Untersuchung sichtbaren Lichtes erdacht und angewandt. Eine planparallele Luftplatte von veränderlicher Dicke zur Messung der Wellenlängen der langsamsten optischen Schwingungen beschreiben *Rubens* und *Hollnagel*.<sup>49)</sup>

**15. Die Queteletschen Ringe.** Den Planparallelitätsstreifen ähnlich ist eine an bestäubten Glasspiegeln auftretende Interferenzerscheinung. Jedes Staubteilchen wird nämlich einmal vom einfallenden Licht getroffen und gibt dabei Anlaß zu einer gebeugten Welle, welche an der versilberten Rückseite des Spiegels reflektiert wird und sodann von dem Spiegelbild des Staubteilchens an dieser herzurühren scheint; zweitens löst die an der Rückseite gespiegelte Welle an ihm eine abgebeugte Welle aus. Die beiden durch Beugung entstandenen Wellen interferieren im Unendlichen mit der Phasendifferenz

$$\delta = \frac{2\nu d \cos \beta}{c},$$

wo  $d$  die Dicke der Glasschicht,  $\nu$  ihr Brechungsindex und  $\beta$  der Winkel ist, den das abgebeugte Licht in der Platte mit ihrer Normalen bildet. Die Richtung des einfallenden Lichtes hat keinen Einfluß auf  $\delta$ .

47) *O. Lummer* und *E. Gehrcke*, Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 4 (1902), p. 337.

48) *O. Lummer*, Ann. d. Phys. (4) 22 (1907), p. 49; *H. Schulz*, Ann. d. Phys.

(4) 26 (1908), p. 139.

49) *H. Rubens* und *H. Hollnagel*, Berlin Ber. 1910, p. 26, vgl. auch Anm. 9.

Natürlich wirken nicht nur die beiden Wellen in der Erscheinung zusammen, welche soeben genannt wurden, sondern so viele derartige Paare, als Staubteilchen vorhanden sind. Infolgedessen sind die Ringe „granuliert.“<sup>49a)</sup> (Vgl. Nr. 21.)

**16. Das Michelsonsche Interferometer.**<sup>50)</sup> Ein Strahl  $L$  (Fig. 5a) trifft auf eine sehr dünne, halbdurchlässig versilberte Platte  $P$ ; er wird zum Teil gespiegelt, zum Teil hindurchgelassen. Der gespiegelte Strahl trifft senkrecht auf einen Spiegel  $S_1$ , der andere ebenso auf einen Spiegel  $S_2$ . Beide Strahlen kehren dann auf den Wegen, auf welchen sie gekommen sind, nach  $P$  zurück und erfahren hier wiederum Spiegelung und Brechung. Je ein gespiegelter und gebrochener Strahl überdecken sich jetzt und geben dabei zu Interferenzerscheinungen Anlaß, von denen man die eine bei  $F$  im Fernrohr beobachtet.

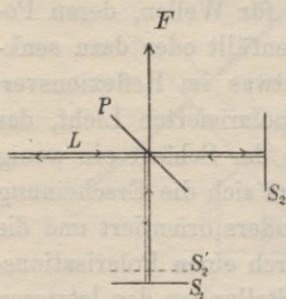


Fig. 5a.

Die Interferenzerscheinung ist so, als wäre der eine der interferierenden Strahlen nicht an  $S_2$ , sondern an dem Spiegelbilde  $S_2'$  reflektiert, welches  $P$  von  $S_2$  entwirft. Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden.

1.  $S_2'$  ist exakt parallel zu  $S_1$ ; fallen ebene Wellen ein, so sieht man in der Brennebene des Fernrohrs die Streifen gleicher Neigung an der Luftschicht zwischen  $S_1$  und  $S_2'$  (Nr. 14).

2.  $S_2'$  bildet einen kleinen Winkel mit  $S_1$ , dann beobachtet man auf  $S_2'$  lokalisiert die Streifen gleicher Dicke an der keilförmigen Schicht zwischen  $S_2'$  und  $S_1$  (Nr. 12). Diese kann natürlich auch ein Doppelkeil sein im Fall, daß die Fläche  $S_2'$  den Spiegel  $S_1$  schneidet.

Mehrfach reflektierte Strahlen spielen keine Rolle; die Intensität ist in den Streifen nach dem Sinusgesetz verteilt. *Michelson* hat seinem Interferometer noch mancherlei andere Formen gegeben, um es dem jeweiligen Zweck anzupassen<sup>52)</sup>; das Prinzip, die Strahlen durch eine planparallele Platte zu trennen und ebenso wieder zu vereinen, ist ihnen allen gemeinsam.

Von den Untersuchungen, welche mit dem Interferometer ausgeführt sind, erwähnen wir hier den Vergleich der Wellenlängen der

49a) *K. Exner*, Ann. d. Phys. 9 (1880), p. 239.

50) *A. A. Michelson*, Phil. Mag. (5) 13 (1882), p. 236.

51) Tatsächlich ist die Platte von erheblicher Dicke, ihr Einfluß wird aber durch eine Kompensationsplatte aufgehoben.

52) Vgl. *A. A. Michelson*, Light waves and their uses, Chicago 1903, deutsch von Iklé, Figur 34.

drei hervorstechendsten Linien im Cadmiumspektrum mit dem Pariser Normalmeter.<sup>53)</sup> *Michelson* ermittelte diese Wellenlänge auf das  $10^{-7}$ -fache ihres Wertes genau. Ferner sind zwei der Fundamentalversuche für die Optik der bewegten Körper, der sogenannte *Michelsonversuch*<sup>54)</sup> und die Bestimmung des *Fresnelschen* Mitführungskoeffizienten<sup>55)</sup> mit dieser Anordnung durchgeführt. *Michelsons* spektroskopische Untersuchungen besprechen wir in Nr. 32.

**17. Das Gitter.** Die Theorie des Gitters und Stufengitters gehört wie die der *Queteletschen* Ringe (Nr. 15) insofern in die Theorie der Beugung, als die interferierenden Wellen durch Beugung entstehen. Aber wenn auch viele der Eigentümlichkeiten, in denen sich die Gitter individuell unterscheiden, nur beugungstheoretisch zu erklären sind, so ist doch das Wesentliche, allen Gittern Gemeinsame, rein eine Folge der Interferenz sehr vieler gleicher Schwingungen.

Bei einem Gitter sind auf der ebenen Oberfläche einer Glasplatte (man läßt das Licht durch diese hindurchgehen) oder einer gut spiegelnden Metallplatte (man läßt das Licht an ihr reflektieren) eine große Zahl gleicher, paralleler, äquidistanter, gerader Striche eingeritzt. Ihren Abstand, gemessen von einem Punkte des  $m^{\text{ten}}$  bis zu dem entsprechenden Punkte des  $(m + 1)^{\text{ten}}$  Striches, nennt man die Gitterkonstante ( $A$ ). Sie ist bei guten Gittern von der Größenordnung  $10^{-4}$  cm, während sich die Zahl der Striche bis zu einigen Hunderttausend steigern läßt.

Die Ebene eines Reflexionsgitters wählen wir als  $xy$ -Ebene, die  $x$ -Achse senkrecht zu den Strichen, die  $z$ -Achse nach außen weisend. Wir beleuchten das Gitter mit einer ebenen Welle

$$(44) \quad e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)} \quad (\gamma_0 < 0).$$

Von einem am Orte  $x = nA$ ,  $y$  gelegenen Linienelement  $dy$  wird nun eine gebeugte Welle ausgehen, welche, wie sie auch beschaffen sein mag, in einer gegen die Gitterdimensionen großen Entfernung  $r$

53) *A. A. Michelson*, Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures 11 (1895).

54) *A. A. Michelson*, Sill. Journ. 22 (1881) p. 120; *H. A. Lorentz*, Arch. Néerl. 1887, p. 103; Ges. Abh. 1, p. 341; *A. A. Michelson* und *E. W. Morley*, Sill. Journ. 34 (1887), p. 333; *E. W. Morley* und *D. C. Miller*, Phil. Mag. 8 (1904), p. 753; 9 (1905), p. 680; *J. Lüroth*, Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss 7 (1909); vgl. Ref. von *P. Debye*, Beibl. d. Ann. d. Phys. 33 (1909); *E. Kohl*, Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 259 u. 662; *M. Laue*, Ebd. 33 (1910), p. 186.

55) *A. A. Michelson* und *E. W. Morley*, Amer. Journ. of science 31 (1886), p. 377, vgl. Enc. V 14, Nr. 60 und 62.

dargestellt werden kann durch<sup>56)</sup>

$$(44a) \quad \frac{1}{r} \psi(\alpha, \beta) e^{-ik(r+x\alpha+y\beta)}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sind dabei die Richtungskosinus des Fahrstrahls  $r$ . Die Funktion  $\psi$  wird von allen geometrischen und physikalischen Eigentümlichkeiten der Gitterstriche sowie von der Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung der einfallenden Welle abhängen. Ist  $R$  der Abstand des Aufpunktes  $P$  vom Gittermittelpunkt ( $x = 0, y = 0$ ), so ist in hinreichender Näherung

$$(44b) \quad r = R - (x\alpha + y\beta).$$

(Vgl. Nr. 36.) Nun dürfen wir unter Vernachlässigung der Randwirkungen alle Elemente  $dy$  als gleichberechtigt betrachten. Durch Summation über das ganze Gitter findet man somit als resultierende Schwingung in  $P$

$$(45) \quad \frac{1}{R} \psi(\alpha, \beta) e^{-ikR} \int e^{iky(\beta - \beta_0)} dy \sum_m e^{imkA(\alpha - \alpha_0)}$$

Die Integration erstreckt sich über die Länge eines Striches. Die Intensität ist somit nach (39) gegeben durch einen Ausdruck von der Form

$$(46) \quad \frac{1}{R^2} \Psi(\alpha, \beta) \frac{\sin^2 \frac{p}{2} kA(\alpha - \alpha_0)}{\sin^2 \frac{1}{2} kA(\alpha - \alpha_0)}$$

Da  $p$  sehr groß ist, ist sie nur merklich in der Nähe der Stellen, an welchen

$$(47) \quad \frac{1}{2} kA(\alpha - \alpha_0) = h\pi \text{ d. h. } \alpha - \alpha_0 = h \frac{\lambda}{A}$$

( $h$  eine ganze Zahl) ist; die Phasendifferenz  $\delta$  zwischen der  $m^{\text{ten}}$  und  $(m + 1)^{\text{ten}}$  interferierenden Welle beträgt dann  $2h\pi$ . Dort liegt „das Spektrum  $h^{\text{ter}}$  Ordnung“. Da  $\alpha^2 < (1 - \beta^2)$  bleiben muß, können bei guten Gittern, bei denen  $A$  nicht viel größer ist als  $\lambda$ , nur niedrige Werte von  $h$  auftreten. Die Funktion  $\Psi(\alpha, \beta)$  in (46) ist wegen des Integrals in (45) nur für  $\beta = \beta_0$  wesentlich von Null verschieden; man beobachtet deshalb nur an gewissen *Punkten* der Linie  $\beta = \beta_0$  in der Brennebene des Beobachtungsfernrohrs Licht, wenn man, wie hier angenommen, eine punktförmige Lichtquelle benutzt. Gewöhnlich ver-

56) Jede Lösung von  $\Delta u + k^2 u = 0$  läßt sich im Unendlichen so annähern, falls sie *auslaufende Wellen* darstellt. Vgl. *H. v. Helmholtz*, Abh. I, p. 331.

wendet man zwecks bequemerer Beobachtung freilich linienhafte, zu den Gitterstrichen, somit zur  $y$ -Achse parallele Lichtquellen (schmale Spalte) und sieht dann im Fernrohr statt jedes der erwähnten Interferenzpunkte eine zum Spalt parallele *Linie* (vgl. Nr. 19). Die Abhängigkeit der Funktion  $\Psi$  von  $\alpha$  regelt die Helligkeitsverteilung über die verschiedenen Spektra.

Die einfallende Welle wird durch einen Kollimator eben gemacht; die im Unendlichen liegenden Spektra beobachtet man in der Brennebene eines Fernrohrs.<sup>57)</sup>

Bei einem ebenen Kreuzgitter, bei welchem das „Elementarparallelogramm“ die Vektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  zu Seiten hat, haben die „Mittelpunkte“ der Gitterelemente die Koordinaten

$$(48) \quad x = m\mathbf{a}_{1x} + n\mathbf{a}_{2x}, \quad y = m\mathbf{a}_{1y} + n\mathbf{a}_{2y};$$

$m$  und  $n$  ganze Zahlen. An die Stelle von (45) für die resultierende Schwingung tritt der Ausdruck

$$(49) \quad \frac{1}{R} \psi(\alpha, \beta) e^{-ikR} \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0)]} \\ = \frac{1}{R} \psi(\alpha, \beta) e^{-ikR} \sum_{-\frac{1}{2}p_1}^{\frac{1}{2}p_1 - 1} e^{ikmA_1} \sum_{-\frac{1}{2}p_2}^{\frac{1}{2}p_2 - 1} e^{iknA_2},$$

wo zur Abkürzung

$$(50) \quad \begin{cases} A_1 = \mathbf{a}_{1x}(\alpha - \alpha_0) + \mathbf{a}_{1y}(\beta - \beta_0) \\ A_2 = \mathbf{a}_{2x}(\alpha - \alpha_0) + \mathbf{a}_{2y}(\beta - \beta_0) \end{cases}$$

gesetzt ist. Die Intensität wird infolgedessen statt durch (46) gegeben durch

$$(51) \quad \frac{1}{R^2} |\psi(\alpha, \beta)|^2 \frac{\sin^2 \frac{p_1}{2} k A_1}{\sin^2 \frac{1}{2} k A_1} \cdot \frac{\sin^2 \frac{p_2}{2} k A_2}{\sin^2 \frac{1}{2} k A_2};$$

sie ist nur für solche Richtungen  $\alpha, \beta$  merklich, für die die beiden Gleichungen

$$(52) \quad kA_1 = 2h_1\pi, \quad kA_2 = 2h_2\pi$$

erfüllt sind. Da jede von ihnen die Gleichung eines Kreis kegels mit dem Vektor  $\mathbf{a}_1$  (Komponenten:  $\mathbf{a}_{1x}, \mathbf{a}_{1y}$ ) oder  $\mathbf{a}_2$  (Komponenten:  $\mathbf{a}_{2x}, \mathbf{a}_{2y}$ )

57) Durch Benutzung von Konkavgittern, welche auf Kugelflächen eingeritzt sind, erspart man Kollimator und Fernrohr. Prinzipiell unterscheiden sie sich nicht von den ebenen Gittern; ihre Theorie ist entwickelt von *H. A. Rowland*, *Sill. Journ.* 26 (1883), p. 87; *Phil. Mag.* 16 (1883), p. 197, 210; *R. H. Glazebrook*, *Phil. Mag.* 15 (1883), p. 414; 16, p. 377; *J. S. Ames*, *Phil. Mag.* 27 (1889), p. 369; *W. Baily*, *Phil. Mag.* 15 (1883), p. 183; *J. Larmor*, *Proc. math. Soc.* 24 (1893), p. 166 und vor allem *C. Runge* (veröffentlicht in *Kaysers Handbuch der Spektroskopie* 1, p. 452 f.).

als Achse ist, liegen die Kreuzgitterspektren auf den Schnittlinien von je zwei solchen Kegeln. Sie erscheinen in der Brennebene des Beobachtungsfernrohres als helle Punkte, welche aber im Gegensatz zum einfachen Gitter nicht mehr an eine bestimmte Linie gebunden sind.

Über die Interferenzerscheinungen an Raumgittern vgl. Abschnitt V dieses Artikels.

Die ersten Beobachtungen über Gitterspektren stammen von *Young*<sup>58)</sup> und *Fraunhofer*<sup>59)</sup>, denen auch die elementare Theorie bekannt war. Diese Theorie findet sich wieder bei *Schwerd*, *Kirchhoff*, *Rayleigh*.<sup>60)</sup> Die technische Vervollkommnung, welche das Gitter eine Zeitlang zu dem wichtigsten Instrumente der Spektroskopie machte — auch jetzt nach der Konstruktion der planparallelen Platte und des Stufengitters ist es unentbehrlich —, ist das Lebenswerk *Rowlands*.<sup>61)</sup>

Die Abhängigkeit der Funktion  $\Psi(\alpha, \beta)$  von der Form der Gitterstriche ist empirisch schwer zu untersuchen, weil dabei Feinheiten in Betracht kommen, die jenseits der Grenze der mikroskopischen Abbildbarkeit liegen.<sup>62)</sup> Was sich in der älteren Literatur an Theorie darüber findet, vermag nicht recht zu befriedigen, obwohl *Rowland*<sup>63)</sup> daraus Schlüsse auf die praktische Erzielung wünschenswerter Helligkeitsverteilungen zu ziehen verstand. Über neuere Arbeiten von *Rayleigh* und *Voigt* vgl. Nr. 70.

Ist die Gitterkonstante klein gegen die Wellenlänge, so tritt nur das ungebeugte Spektrum nullter Ordnung auf. Für diesen Fall integrieren *J. J. Thomson* und *Lamb*<sup>64)</sup> die Schwingungsgleichung.

**18. Die Stufengitter.**<sup>65)</sup> Das Stufengitter besteht aus einer Anzahl planparalleler, gleich dicker, treppenförmig aufeinander gelegter

58) *Thomas Young*, Phil. Trans. London R. Soc. 1882, Ann. d. Phys. (Gilbert) 39 (1811), p. 156.

59) *Joseph Fraunhofer*, Denkschriften der Akad. d. Wiss. München 8 (1821—1822), p. 1. Gilberts Ann. Phys. Chem. 74 (1823), p. 337.

60) *F. M. Schwerd*, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835; *G. Kirchhoff*, Vorlesungen über math. Optik, Leipzig 1891, p. 98; *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 47 (1874), p. 81, 193; Pap. I, p. 199.

61) *H. A. Rowland*, Phil. Mag. 13 (1882), p. 469.

62) Vgl. z. B. *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (6) 14 (1907), p. 60; Pap. V, p. 405; *J. A. Anderson* und *C. M. Sparrow*, Astr. phys. Journ. 33 (1911), p. 338.

63) *H. A. Rowland*, Phil. Mag. 35 (1893), p. 397; Phys. Papers, p. 525, Baltimore 1903; *A. Crowbridge* und *R. W. Wood*, Phil. Mag. 20 (1910), p. 886.

64) *J. J. Thomson*, Recent Researches, § 339. Oxford 1893; *H. Lamb*, Proc. London math. Soc. 29 (1898), p. 523. Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907, § 300 und 301.

65) *A. A. Michelson*, Astrophysical Journ. 8 (1898), p. 36; Journ. d. phys. 8 (1899), p. 305.

Glasplatten (Fig. 6). Ihm liegt die Absicht zugrunde, ein Gitter zu schaffen, bei welchem der Gangunterschied zwischen aufeinanderfolgenden Wellen dadurch wesentlich vergrößert ist, daß die eine die Plattendicke  $D$  (meist zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 cm) in Glas, die andere in Luft zurücklegt. Zugleich wird freilich die Stufenbreite  $A$ , welche an die Stelle der Gitterkonstanten tritt, dem Gitter gegenüber wesentlich vergrößert, nämlich auf etwa  $10^{-1}$  cm und die Zahl der Wellen sehr herabgesetzt, auf höchstens 30 bis 40. Das Licht fällt entweder wie in der Figur angedeutet oder in der umgekehrten Richtung auf; in beiden Fällen ist die Interferenzerscheinung dieselbe.

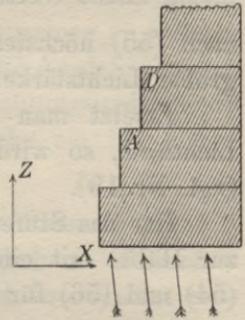


Fig. 6.

In dem ersten dieser Fälle ist die einfallende Welle nach ihrem Eindringen ins Glas (Brechungsindex  $\nu$ ) gegeben durch

$$e^{-ik_0(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)} \quad (k_0 = \nu k).$$

Eine ähnliche Überlegung wie in Nr. 17 führt für die Lichtschwingung in einem weit entfernten Punkt zu dem Ausdruck:

$$(53) \quad \frac{1}{R} \psi(\alpha, \beta) e^{-ikR} \sum_0^{p-1} e^{imk[A(\alpha - \nu\alpha_0) + D(\gamma - \nu\gamma_0)]},$$

deren Intensität deshalb (vgl. (39)) gleich

$$(54) \quad \frac{1}{R^2} \left| \psi(\alpha, \beta) \right|^2 \frac{\sin^2 \left\{ \frac{1}{2} p k [A(\alpha - \nu\alpha_0) + D(\gamma - \nu\gamma_0)] \right\}}{\sin^2 \left\{ \frac{1}{2} k [A(\alpha - \nu\alpha_0) + D(\gamma - \nu\gamma_0)] \right\}}$$

ist. Die Interferenz-Maxima liegen an den Orten, an welchen

$$A(\alpha - \nu\alpha_0) + D(\gamma - \nu\gamma_0) = h\lambda$$

ist. Da  $D \gg \lambda$  ist und  $\gamma, \gamma_0$  nicht wesentlich kleiner als 1 sind, muß hier  $h$  eine große Zahl sein ( $10^5$ ). Tritt das Licht nahezu senkrecht in die Basis des Stufengitters ein, so kann man  $\gamma$  und  $\gamma_0$  beide gleich 1 setzen. Der Winkelabstand des  $h^{\text{ten}}$  vom  $h+1^{\text{ten}}$  Streifen ist dann durch

$$(55) \quad \alpha_{h+1} - \alpha_h = \frac{\lambda}{A}$$

bestimmt.

Die Funktion  $(\psi(\alpha, \beta))^2$  ist nur für  $\beta = \nu\beta_0$  merklich von Null verschieden; ihre Abhängigkeit von  $\alpha$  wird (vgl. Nr. 37a, dort ist aber  $2A$  die Spaltbreite) gut durch die Funktion

$$(56) \quad \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} k A (\alpha - \nu\alpha_0) \right)}{\left( \frac{1}{2} k A (\alpha - \nu\alpha_0) \right)^2}$$

dargestellt, welche vom Wert 1 (für  $\alpha = \nu\alpha_0$ ) rasch auf Null (für

$\alpha = \nu\alpha_0 \pm \frac{\lambda}{A}$ ) abfällt und außerhalb dieses Intervalls nur verhältnismäßig kleine Werte annimmt. In der Breite  $\frac{2\lambda}{A}$  dieses Intervalls haben nach (55) höchstens 2 Interferenzstreifen Platz; mehr sind nur bei großer Lichtstärke der Erscheinung auf einmal sichtbar.

Ersetzt man den Lichtpunkt durch eine zur  $y$ -Achse parallele Lichtlinie, so wird wie beim Gitter die Intensität von  $\beta$  unabhängig (vgl. Nr. 19).

Hat das Stufengitter nur zwei Stufen, d. h. besteht es aus einem zur Hälfte mit einer Glasplatte bedeckten Spalt, so findet man aus (54) und (56) für die Intensität

$$(57) \quad \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kA(\alpha - \alpha_1))}{(\frac{1}{2}kA(\alpha - \alpha_1))^2} \cos^2\{\frac{1}{2}k[A(\alpha - \alpha_1) - D(\nu - 1)]\},$$

wo  $\alpha_1 = \nu\alpha_0$ ,  $\beta_1 = \nu\beta_0$  die Richtung des einfallenden Strahles vor dem Eintritt in das Glas des Stufengitters angeben.

**19. Die Ausdehnung der Lichtquelle.** Bisher setzten wir stets eine einzelne primäre Welle als Ursache für die Entstehung der verschiedenen interferierenden Schwingungen voraus. In praxi ist die Lichtwelle stets räumlich ausgedehnt, und von allen Punkten ihrer Oberfläche treten Wellen aus, welche untereinander nicht kohärent sind (vgl. Nr. 30); d. h. die Intensitäten, welche sie hervorrufen, addieren sich. Bei den meisten Interferenzversuchen ist nun die Lage der Maxima bei gegebener Schwingungszahl nicht nur durch den Interferenzapparat, sondern auch durch die Richtung der einfallenden Welle bestimmt; man sieht dies z. B. an dem Auftreten von  $\alpha_0$  in den Ausdrücken (46) und (54). Infolgedessen wandern die Streifen gegen den Apparat, wenn man die Lichtquelle verschiebt. Und beim gleichzeitigen Auftreten vieler punktförmiger Lichtquellen überlagern sich viele Systeme von Interferenzmaxima, welche sich gegenseitig verwischen und so selbst alle Helligkeitsunterschiede aufheben können.<sup>66)</sup> Meist ist allerdings nur die Ausdehnung der Lichtquelle in einer Richtung schädlich; beim *Fresnel'schen* Spiegel, Gitter und Stufengitter benutzt man deswegen als Lichtquelle einen Spalt, dessen Länge auf die Deutlichkeit keinen Einfluß hat, während die Spaltbreite dafür immer von Schaden ist. Die Streifen gleicher Neigung an planparallelen Platten genießen den Vorzug, von diesem Einfluß ganz frei zu sein. Die Lage ihrer, durch  $\delta = 2h\pi$  gekennzeichneten Maxima ist nach Gleichung (43) allein

<sup>66)</sup> Lord Rayleigh, Phil. Mag. 28 (1889), p. 77 u. 189, Papers III, p. 289; J. Walker, Phil. Mag. 46 (1898), p. 472; A. A. Michelson, Phil. Mag. 30 (1890), p. 1; 31 (1891) p. 256.

durch  $\lambda_0$ ,  $\nu$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$ , also durch Konstante des Apparates und die Wellenlänge bestimmt. Hier vermehrt die Vergrößerung der Lichtquelle allein den für  $\beta$  zur Verfügung stehenden Bereich, also die Zahl der gleichzeitig sichtbaren Maxima, ohne das Aussehen des einzelnen zu ändern. Bei den Streifen gleicher Dicke hingegen bedingen die Ausdehnung der Lichtquelle und die der Eintrittspupille des Beobachtungsinstruments (Auge) eine Verminderung der Sichtbarkeit, welche sie bei hohen Gangunterschieden völlig verschwinden läßt.<sup>67)</sup>

**20. Die Gitterfehler.** Bisher nahmen wir die Phasendifferenz  $\delta$  zweier aufeinanderfolgenden Wellen als unveränderlich an. Bei allen Interferenzapparaten, bei welchen eine größere Zahl von Wellen mitwirkt, kommen aber Konstruktionsfehler vor, welche eine Variation von  $\delta$  bedingen. Die hierdurch hervorgerufenen Komplikationen an den Interferenzstreifen, welche zuerst am Gitter beobachtet wurden, behandelt die Theorie der Gitterfehler.<sup>68)</sup>

Weicht z. B. bei der ersten,  $(q+1)^{\text{ten}}$ , usw.,  $((p-1)q+1)^{\text{ten}}$  von  $pq$  gleichstarken Schwingungen die Phasendifferenz um den kleinen Betrag  $\varepsilon$  von dem normalen Wert  $\delta$  ab, so tritt an die Stelle der Reihe (35)

$$\begin{aligned} e^{int} \sum_0^{p-1} e^{imq\delta} (e^{i\varepsilon} + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \dots + e^{(q-1)i\delta}) \\ = e^{int} \sum_0^{p-1} e^{imq\delta} \left( i\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_0^{q-1} e^{i\nu\delta} \right) \\ = e^{i\left(nt + \frac{p-1}{2}q\delta\right)} \frac{\sin \frac{1}{2}pq\delta}{\sin \frac{1}{2}q\delta} \left\{ i\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + e^{i\frac{q-1}{2}\delta} \frac{\sin \frac{1}{2}q\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \right\}. \end{aligned}$$

Der absolute Wert dieses Ausdrucks ist in der gleichen,  $\varepsilon^3$  usw. vernachlässigenden Näherung:

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2}pq\delta}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta} + 2\varepsilon \frac{\sin^2 \frac{1}{2}pq\delta}{\sin \frac{1}{2}q\delta} \frac{\sin \frac{1}{2}(q-1)\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\sin^2 \frac{1}{2}pq\delta}{\sin^2 \frac{1}{2}q\delta} - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}pq\delta \cos \frac{1}{2}(q-1)\delta}{\sin \frac{1}{2}q\delta \sin \frac{1}{2}\delta} \right\}.$$

Der erste Summand gibt die normalen Streifen mit der Maximalintensität  $p^2q^2$ ; in dem zweiten ist der Faktor von  $\varepsilon$  stets klein gegen  $p^2$ ; im dritten dagegen wird der Bruch  $\sin^2(\frac{1}{2}pq\delta) : \sin^2(\frac{1}{2}q\delta)$  für  $\delta = \frac{2h}{q} \pi$  gleich  $p^2$ , während der zweite Bruch überall dagegen klein ist. Eine neben den normalen Streifen beträchtliche Intensität ergibt so-

67) O. Lummer, Ann. Phys. Chem. 23 (1884), p. 76.

68) H. A. Rowland, Phil. Mag. 35 (1893), p. 397; A. A. Michelson, Astrophys. Journ. 18 (1903), p. 278; Lord Rayleigh, Pap. III, p. 113.

mit nur der Term  $\varepsilon^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} p q \delta}{\sin^2 \frac{1}{2} q \delta}$ , welcher neue, den Abstand der normalen Maxima  $q$ -fach unterteilende, scharfe Streifen anzeigt.

Berechnen sich die Phasen der interferierenden Schwingungen, statt ganze Vielfache von  $\delta$  zu sein, nach dem Gesetz

$$m\delta + \varepsilon \sin m\alpha, \quad (\varepsilon \ll 1)$$

so ist die resultierende Schwingung

$$\sum_0^{p-1} e^{i(m\delta + \varepsilon \sin m\alpha)}.$$

Nun ist aber, wenn  $J_n(z)$  die Besselsche Funktion  $n^{\text{ter}}$  Ordnung bezeichnet,

$$e^{i\varepsilon \sin m\alpha} = J_0(\varepsilon) + 2\{J_2(\varepsilon) \cos 2m\alpha + J_4(\varepsilon) \cos 4m\alpha + \dots\} \\ + 2i\{J_1(\varepsilon) \sin m\alpha + J_3(\varepsilon) \sin 3m\alpha + \dots\}.$$

Vernachlässigt man bei der Bildung des absoluten Wertes alle Glieder, welche Faktoren von der Form

$$\frac{\sin \frac{s}{2}(\delta + q\alpha) \sin \frac{t}{2}(\delta + p\alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\delta + q\alpha) \sin \frac{1}{2}(\delta + p\alpha)} \quad s \geq t$$

enthalten, so findet man dafür den Näherungswert:

$$J_0^2(\varepsilon) \frac{\sin^2 \frac{p}{2} \delta}{\sin^2 \frac{1}{2} \delta} + J_1^2(\varepsilon) \left\{ \frac{\sin^2 \frac{p}{2}(\delta + \alpha)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\delta + \alpha)} + \frac{\sin^2 \frac{p}{2}(\delta - \alpha)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\delta - \alpha)} \right\} \\ + J_2^2(\varepsilon) \left\{ \frac{\sin^2 \frac{p}{2}(\delta + 2\alpha)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\delta + 2\alpha)} + \frac{\sin^2 \frac{p}{2}(\delta - 2\alpha)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\delta - 2\alpha)} \right\} + \dots$$

Der erste Summand gibt das normale Maximum für  $\delta = 2h\pi$ , nur in der Intensität herabgesetzt im Verhältnis  $J_0^2(\varepsilon) : 1 = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) : 1$ . Der zweite, bei kleinem  $\varepsilon$  zu  $\varepsilon^2$  proportionale Term gibt zwei gleich scharfe Maxima für  $\delta = 2h\pi \pm \alpha$ , der dritte zu  $\varepsilon^4$  proportionale zwei ebensolche für  $\delta = 2h\pi \pm 2\alpha$  usw. Der normale Interferenzstreifen ist somit begleitet von einer Reihe schwächer und schwächer werdender „Geister“.

Derartige durch Fehler hervorgerufene Interferenzmaxima haben oft bei der Untersuchung von Spektrallinien zu Irrtümern über deren Struktur Anlaß gegeben. Ein experimentelles Mittel, sie als „Geister“ zu erkennen, gibt die Methode der gekreuzten Spektren (*Interferenzpunkte*), bei welcher sich zwei Apparate gleicher Art gegenseitig kontrollieren.<sup>69)</sup>

69) E. Gehrcke, Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 7 (1905), p. 236; E. Gehrcke und O. v. Baeyer, Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 269.

**21. Interferenz vieler gleichgerichteter Schwingungen mit unregelmäßig verteilten Phasen.** Wir setzen voraus, daß die Phasen in unbekannter Weise, aber gänzlich unregelmäßig verteilt sind. Wäre die Zahl  $p$  der Schwingungen klein, etwa nur zwei, so sieht man unmittelbar, daß keine bestimmte Intensität der resultierenden Schwingung zu erwarten ist, sondern daß vielmehr innerhalb gewisser Grenzen alle Intensitäten vorkommen können. Nur die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Intensität läßt sich angeben. Ist  $p$  hingegen groß, so findet man selbst in sonst vortrefflichen Darstellungen die Behauptung, daß die resultierende Intensität notwendig das  $p$ -fache der Intensität der einzelnen Schwingungen ist. Daß dies nicht zutrifft, haben *Exner*<sup>70)</sup> und *Rayleigh*<sup>71)</sup> bemerkt.

Wir stellen die  $p$  Schwingungen dar als Vektoren mit gemeinsamem Ausgangspunkt und gleicher Länge  $\rho$  in der  $xy$ -Ebene (vgl. Nr. 11). Die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt der Vektorsumme in einem Bereiche  $dx dy$  liegt, sei  $f(x, y; p) dx dy$ . Wir fügen noch eine Schwingung hinzu. Jener Endpunkt gelangt dabei in den genannten Bereich, wenn der hinzukommende Vektor die Richtung  $\vartheta$  hat (Wahrscheinlichkeit dieses Falles:  $\frac{d\vartheta}{2\pi}$ ) und der Endpunkt vorher in einem Bereiche von gleicher Größe lag, dessen Koordinaten

$$x - \rho \cos \vartheta, \quad y - \rho \sin \vartheta$$

sind (Wahrscheinlichkeit dafür:  $f(x - \rho \cos \vartheta, y - \rho \sin \vartheta; p) dx dy$ ). Die Wahrscheinlichkeit, daß er nach der Hinzufügung bei  $xy$  liegt, ist somit

$$(58) \quad f(x, y; p + 1) dx dy = \frac{dx dy}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta f(x - \rho \cos \vartheta, y - \rho \sin \vartheta; p).$$

Ist  $p$  groß, so kann man setzen:

$$(59) \quad f(x, y; p + 1) = f(x, y; p) + \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Entwickelt man rechts nach steigenden Potenzen von  $\rho$  bis zu Gliedern mit  $\rho^2$ , so kann man die Integration ausführen und findet

$$(60) \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\rho^2}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung, welche nur von  $x^2 + y^2$  ab-

70) *K. Exner*, Sitzgsber. d. Wien. Akad. 76 (1877), p. 522; *Wied. Ann.* 4 (1877), p. 525; *Wied. Ann.* 9 (1880), p. 239, bes. p. 257.

71) *Lord Rayleigh*, Pap. III, p. 52; *Theory of sound*, London 1894, Band I, § 42 a.

hängt, außerdem

$$(61) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y; p) = 1$$

und schließlich  $f$  für  $p = 0$  und von Null verschiedene  $x, y$  zu Null macht, ist

$$(62) \quad f(x, y; p) = \frac{1}{\pi p \varrho^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{p \varrho^2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit,  $WdJ$ , daß die Intensität  $J = x^2 + y^2$  in dem Bereiche zwischen  $J$  und  $J + dJ$  liegt, ist somit

$$(63) \quad WdJ = \frac{1}{p \varrho^2} e^{-\frac{J}{p \varrho^2}} dJ.$$

Die Behauptung, daß bei wachsendem  $p$  ein bestimmter Wert von  $J$  immer wahrscheinlicher würde, ist somit falsch. Wohl aber gibt  $p \varrho^2$  die Größenordnung an, innerhalb deren die Intensität zumeist liegt. Nimmt man aus vielen derartigen voneinander unabhängigen Fällen das Mittel der resultierenden Intensität, so wird dies

$$(64) \quad \bar{J} = \int_0^{\infty} J \cdot WdJ = p \varrho^2.$$

Eine solche Interferenzerscheinung tritt auf bei der Beugung ebener Wellen an vielen gleichen unregelmäßig über eine Fläche verteilten Teilchen. Ähnlich wie in Nr. 17 wird die resultierende Schwingung im Unendlichen dargestellt durch

$$(65) \quad \frac{1}{R} \Psi(\alpha, \beta) e^{-ikR} \sum_m e^{ik(x_m(\alpha - \alpha_0) + y_m(\beta - \beta_0))},$$

wo die Koordinaten  $x_m, y_m$  der Teilchen völlig regellos verteilt sind. Der Faktor  $\Psi(\alpha, \beta)$  bestimmt die Beugungsfigur des einzelnen Teilchens; die Summe lehrt, daß die Intensität in einem bestimmten Punkt  $\alpha, \beta$  noch im hohen Maß vom Zufall abhängt. In der Tat teilt *Exner* mit, daß man die Figuren von hellen und dunklen Fasern durchsetzt (granuliert) sieht; diese Fasern sind durchweg radial gerichtet, denn denkt man sich den Aufpunkt einmal radial, das andere Mal tangentiell im Beugungsbild verschoben und berechnet man nach (65) die entsprechenden Differentialquotienten der Wurzel aus der Intensität  $J$ , so findet man bei radialer Verschiebung dafür einen kleineren Wert, als bei tangentieller; und dieser Unterschied verstärkt sich noch, wenn man zu den höheren Differentialquotienten übergeht. Entwickelt man also  $\sqrt{J}$  von einem beliebigen Punkt ausgehend nach steigenden Potenzen des Abstandes vom Ausgangspunkt, so werden

die Koeffizienten der Reihe im allgemeinen größer für den Fall einer tangentiellen, als einer radialen Verrückung. In tangentieller Richtung ändert sich also  $\sqrt{J}$  und damit auch  $J$  selbst im allgemeinen schneller.<sup>71a)</sup> Doch können, wie a. a. O. näher ausgeführt, experimentelle Umstände, wie zu große Winkelausdehnung der Lichtquelle oder zu großer Abstand der beugenden Teilchen vom Beobachtungsfernrohr die radiale Faserung aufheben. Auch dürfen sich die Teilchen nicht bewegen, da sonst die Faserung sich sehr schnell ändert und nur der Mittelwert  $\bar{J}$  zur Beobachtung gelangt.<sup>72)</sup>

Haben die Schwingungen verschiedene Amplituden  $q_m$ , so tritt an Stelle von  $p q^2$  die Summe  $\sum q_m^2$ .

**22. Wieners Versuch. Stehende Wellen.**<sup>73)</sup> Bei den bisher betrachteten Interferenzerscheinungen kreuzen sich die interferierenden Wellen unter dem Winkel 0 oder sehr kleinem Winkel, so daß wenigstens angenähert sowohl ihre elektrischen als auch die magnetischen Schwingungen in ihren Richtungen übereinstimmen. Bei *Wieners* Versuch ist hingegen jener Winkel gleich  $\frac{\pi}{2}$ ; *Wiener* läßt nämlich eine ebene Welle unter dem Einfallswinkel  $\frac{\pi}{4}$  an einer ebenen Metallfläche spiegeln.<sup>74)</sup> Liegt in dieser Welle  $\mathfrak{E}$  in der Einfallsebene, so gilt dies auch für die reflektierte. Beide elektrische Vektoren stehen aufeinander senkrecht, interferieren somit nach Nr. 10 nicht. Dagegen sind die magnetischen von gleicher Richtung und interferieren miteinander. Liegt umgekehrt  $\mathfrak{H}$  in der Einfallsebene, so erfolgt die Interferenz nur bei den elektrischen Feldstärken.

*Wiener* läßt diese Interferenz in einer photographischen Gelatineschicht vor sich gehen. Sind die Wellen senkrecht zur Einfallsebene polarisiert<sup>74a)</sup>, so zeigt diese nach der Entwicklung gleichmäßige Schwärzung; im anderen Fall dagegen periodische Schwärzung in zueinander parallelen Schichten. Somit ist der senkrecht zur Polarisationssebene schwingende Vektor der photochemisch wirksame. Ferner liegt im zweiten Fall an der Spiegelfläche ein Minimum der Schwärzung; hier hat also derselbe Vektor ein Interferenzminimum. Nach der Theorie der Reflexion kann dies nur für  $\mathfrak{E}$  der Fall sein. *Folglich schwingt*

71<sup>a)</sup> *M. Laue*, Berlin Sitzgsber. 1914, p. 1144; dort findet sich auch eine Photographie der Erscheinung.

72) *Lord Rayleigh*, Pap. III, p. 99.

73) Vgl. auch Art. V 22, Nr. 14.

74) *O. Wiener*, Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 203.

74<sup>a)</sup> Vgl. Anm. 3a.

in der Polarisationsenebene die magnetische Feldstärke, senkrecht dazu die elektrische. Die photochemisch gemessene Lichtintensität ist durch  $\overline{\mathfrak{E}^2}$  bestimmt (vgl. Nr. 7).

Bei senkrechter Inzidenz einer ebenen Welle entstehen durch Interferenz mit der reflektierten stehende Wellen, bei welchen sowohl  $\overline{\mathfrak{E}^2}$  als  $\overline{\mathfrak{H}^2}$  periodisch wechselt. Die Maxima von  $\overline{\mathfrak{E}^2}$  liegen in denselben Ebenen wie die Minima von  $\overline{\mathfrak{H}^2}$ . Auch diese Interferenz läßt sich photographisch nachweisen. Der periodische Wechsel in der Dichte der belichteten Körner in der photographischen Schicht gibt zu Interferenzerscheinungen (Kurven gleicher Neigung) Anlaß, welche der *Lippmannschen*<sup>75)</sup> Farbenphotographie zugrunde liegen. Sie dienen dort zur Aussonderung derjenigen Lichtart aus weißem Licht, welche die stehenden Wellen hervorbrachte.

Die Theorie dieser Erscheinung wird dadurch erschwert, daß die Körner Abmessungen wenig kleiner als die Wellenlänge haben<sup>76)</sup>, auch werden die Verhältnisse bei der Reproduktion von Mischfarben verwickelt.<sup>77)</sup>

**23. Interferenz elektrischer Wellen.** Alle beschriebenen Interferenzversuche lassen sich auch mit den langen elektrischen Wellen herstellen, welche zuerst *H. Hertz* durch die Schwingungen von Resonatoren erregte und untersuchte. Die Herstellung stehender Wellen besonders ist der schlagendste unter den Beweisen, welche *Hertz* für die Ausbreitung der elektrischen Schwingungen mit Lichtgeschwindigkeit gab.<sup>78)</sup> Später haben *Boltzmann*, *Righi*, *Sarasin* und *de la Rive*<sup>79)</sup> u. a. Interferenzversuche angestellt. Man erreicht aber bei ihnen nicht annähernd den Grad von Genauigkeit wie bei optischen Beobachtungen.

75) *G. Lippmann*, Paris C. R. 112 (1891), p. 274; 114 (1892), p. 961; Journ. d. Phys. 3 (1894), p. 97. Querschnitte durch die Schicht veröffentlichen: *R. Neuhauss*, Ann. Phys. Chem. 65 (1898), p. 164 und *H. Lehmann*, Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 9 (1907), p. 624. Siehe auch: *H. Lehmann*, Phys. Zeitschr. 10 (1909), p. 784; *W. Zenker*, Lehrbuch der Photochromie 1868, wieder abgedruckt Braunschweig 1900; *F. Schütt*, Ann. Phys. Chem. 57 (1896), p. 533; *O. Wiener*, Ann. Phys. Chem. 55 (1895), p. 225.

76) *F. Schütt*, Anm. 75; *O. Wiener*, Wied. Ann. 69 (1899), p. 488; *R. Neuhauss*, Anm. 75.

77) *L. Pfaundler*, Ann. d. Phys. 15 (1904), p. 371; *H. Lehmann*, Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 723.

78) *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. 34 (1888), p. 610; Phil. Mag. 30 (1890), p. 126; Ges. Abh. II, Leipzig 1894, p. 133.

79) *L. Boltzmann*, Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 399; Ges. Abh. III, Leipzig 1908, p. 384; *A. Righi*, Die Optik der elektr. Schwingungen. Deutsch von *B. Dessau*, Leipzig 1898; *Ed. Sarasin* und *L. de la Rive*, Arch. des sciences phys. nat. 29 (1893), p. 358, 441.

Dies liegt vor allem daran, daß die bisher gemachte Voraussetzung von zeitlich unbegrenzten Sinusschwingungen dabei recht schlecht erfüllt war. Durch neuere Anordnungen (Poulsenlampe, Löschkunten) läßt sich diese Schwierigkeit umgehen.<sup>79a)</sup>

### III. Die Superposition von Sinusschwingungen verschiedener Frequenz; Spektrum, Beziehungen zur Thermodynamik.

**24. Lichtschwebungen.** Von Grund aus verschieden, von den Interferenzen gleich schneller Schwingungen sind die zwischen Schwingungen von verschiedener Frequenz. Überlagern sich etwa zwei gleichgerichtete Schwingungen  $e^{i(n_1 t + \varphi_1)}$  und  $e^{i(n_2 t + \varphi_2)}$ , so resultiert

$$(66) \quad e^{i(n_1 t + \varphi_1)} + e^{i(n_2 t + \varphi_2)} \\ = 2 \cos \frac{1}{2} [(n_1 - n_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)] e^{\frac{i}{2} [(n_1 + n_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)]}$$

Ist  $n_1 - n_2$  von der gleichen Größenordnung wie  $n_1$  und  $n_2$ , so ist die Intensität als zeitliches Mittel des absoluten Wertes dieses Ausdrucks gleich

$$4 \cos^2 \frac{1}{2} [(n_1 - n_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)] = 2,$$

d. h. gleich der Summe der Intensitäten der einzelnen Schwingung. *Schwingungen von wesentlich verschiedener Frequenz interferieren nicht.* Ist hingegen  $n_1 - n_2$  so klein, daß  $2\pi : (n_1 - n_2)$  eine mit der Dauer der Intensitätsmessung vergleichbare oder gar dagegen große Zeit ist, so ist die Intensität gleich  $4 \cos^2 [(n_1 - n_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]$ , also mit der Zeit veränderlich (*Schwebung*).

Fällt eine linear polarisierte Welle von der Frequenz  $n$  auf ein mit der Geschwindigkeit  $\omega$  rotierendes Nicol'sches Prisma, so ist sie hinterher dargestellt durch:

$$\mathfrak{E}_x = \cos(\omega T) e^{i n T} = \frac{1}{2} [e^{i(n-\omega)T} + e^{i(n+\omega)T}],$$

$$\mathfrak{E}_y = \sin(\omega T) e^{i n T} = \frac{i}{2} [e^{i(n-\omega)T} - e^{i(n+\omega)T}],$$

$$T = t - \frac{z}{a}.$$

Man kann dies auffassen<sup>80)</sup> als eine Superposition zweier entgegengesetzt zirkularer Wellen von den Frequenzen  $n - \omega$  und  $n + \omega$ . Trennt man diese durch kristallographische Hilfsmittel in ihrer Richtung, macht sie linear polarisiert und läßt sie sich schließlich unter einem kleinen Winkel durchkreuzen (wie am Schluß von Nr. 13 beschrieben), so beobachtet man Interferenzstreifen, die sich in der Zeit  $2\pi : \omega$  um zwei Streifenbreiten verschieben, so daß an einem festen Punkt die

79a) N. Stschodro, Ann. Phys. 27 (1908), p. 225.

80) E. Verdet, Oeuvres VI, p. 88.

Intensität wie  $\cos^2 \omega t$  schwankt.<sup>81)</sup> Überhaupt werden sich die Streifen bei allen Anordnungen, bei denen ihre Lage von der Stellung eines Polarisationsapparates abhängt, bewegen, sobald man diesen dreht; stets kann dies als Lichtschwebung gedeutet werden.<sup>82)</sup>

**25. Das Auflösungsvermögen.** Als Spektralapparat läßt sich jede Anordnung verwenden, bei welcher eine Sinusschwingung eine Helligkeitsverteilung mit scharfen Maxima liefert, deren Lage Funktion der Frequenz ist; von den besprochenen Interferenzapparaten die planparallele Platte, das Gitter und das Stufengitter (Nr. 14, 16, 17). Den numerischen Wert des Auflösungsvermögens findet man nach *Rayleigh*<sup>83)</sup>, indem man die Differenz zwischen den Frequenzen  $n_1$  und  $n_2$  zweier mit dem Auge im Spektralapparat noch gerade unterscheidbare Sinusschwingungen berechnet. Diese Grenze der Unterscheidbarkeit ist bei gleichstarken Schwingungen erfahrungsgemäß ungefähr erreicht, wenn die Helligkeitsverteilung der einen ihr Maximum an derselben Stelle hat, an welcher in der Helligkeitsverteilung der anderen eine der dem entsprechenden Maximum benachbarten Nullstellen liegt. Ist bei einem auf der Interferenz von  $p$  gleichen Strahlen beruhenden Spektralapparat  $l$  der Gangunterschied zwischen dem  $m^{\text{ten}}$  und  $(m+1)^{\text{ten}}$  Strahl zurückgelegt in einem Medium vom Brechungsindex  $\nu(n)$ , ihr Phasenunterschied somit  $\delta = \frac{l\nu(n)}{c}$ , so ist das  $h^{\text{te}}$  Interferenzmaximum für die Frequenz  $n_1$  durch die Bedingung

$$(67) \quad ln_1\nu(n_1) = 2h\pi c$$

bestimmt. Soll für denselben Wert von  $l$  die Frequenz  $n_2$  eins der genannten Minima ergeben, so muß nach (39a)

$$(68) \quad pln_2\nu(n_2) = pl \left\{ n_1\nu(n_1) + (n_2 - n_1) \left( \frac{d(n\nu)}{dn} \right)_2 \right\} = 2(ph \pm 1)\pi c$$

sein. Als Wert des Auflösungsvermögens wird definiert  $n_1 : |n_2 - n_1|$ ; man findet aus (67) und (68) dafür

$$(69) \quad \frac{n_1}{|n_2 - n_1|} = ph \left[ \frac{\nu + n \frac{d\nu}{dn}}{\nu} \right].$$

Ist  $\frac{d\nu}{dn} = 0$ , so ist dies gleich  $ph$ ; andernfalls ist dieser Wert noch

81) *A. Righi*, Journ. de phys. (2) 2 (1883), p. 437, beschreibt eine ganze Reihe von Versuchsanordnungen, welche alle diesem Zweck dienen.

82) *S. Pokrowski*, Phys. Zeitschr. 12 (1911), p. 1115.

83) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 47 (1874), p. 81 und 133; Pap. I, p. 216 und 424; Phil. Mag. 8 (1879), p. 261, 403, 477; 9 (1880), p. 40; Pap. I, p. 415.

mit dem Verhältnis der Phasen zur Gruppengeschwindigkeit zu multiplizieren (vgl. Nr. 6). Es hängt eng damit zusammen, daß die zugleich mit dem Auflösungsvermögen wachsende Abklingungszeit des Spektralapparates durch die Gruppengeschwindigkeit bestimmt ist (vgl. Nr. 26).

Diese Betrachtung gilt nach dem Schlußabsatz von Nr. 11 fast ebenso, wenn die Amplituden der interferierenden Strahlen Glieder einer langsam abnehmenden geometrischen Reihe bilden. Von den in Abschnitt II besprochenen Interferenzapparaten erreichen zurzeit das höchste Auflösungsvermögen die planparallele Platte (bis zum Wert  $6,4 \cdot 10^5$ ) und das Stufengitter (bis zu  $4,2 \cdot 10^5$ ).<sup>84)</sup> Trotz des viel größeren Wertes der Zahl  $p$  der interferierenden Schwingungen steht ihnen das Gitter nach (obere Grenze wohl  $2 \cdot 10^5$ ), weil die Ordnungszahl  $h$  nur klein ist.

Diese Betrachtung läßt sich im wesentlichen auch auf das Prisma anwenden; sein Auflösungsvermögen ist nach *Rayleigh*<sup>85)</sup> (vgl. Nr. 42)

$$\frac{n_1}{|n_2 - n_1|} = \frac{D n^2}{2 \pi c} \left( \frac{dn}{dn} \right),$$

wo  $D$  die Basisdicke des Prismas oder, bei einem Prismensatz, die Summe der Basisdicken bedeutet. Ein einzelnes Prisma erreicht das Auflösungsvermögen eines guten Gitters nie, ein Prismensatz nur selten.

**26. Inhomogene Strahlung.** Wir haben bisher alle Interferenzerscheinungen für eine einzige, nach Schwingungszahl und Richtung mathematisch genau definierte Sinuswelle diskutiert. Dies ist aber ein im Gebiete der Optik niemals verwirklichter idealer Grenzfall; und darin liegt deren wesentlicher Unterschied gegen die *Hertz*schen Wellen, der auch dann bestehen bleibt, wenn die Lücke in der Stufenleiter der Schwingungszahlen überbrückt werden sollte, die jetzt noch die beiden Gebiete trennt. In der Optik haben wir vielmehr immer mit Wellenscharen zu tun, deren Richtungen einen gewissen räumlichen Winkel bilden. In dem Maße, wie man ihn einengt, verliert die Schar an Energie und wird schließlich physikalisch unwirksam. Eine mathematische Theorie, welche diese Inhomogenität der Richtungen befriedigend berücksichtigt, existiert bisher noch nicht, obwohl sie eigentlich für alle Probleme der Strahlungstheorie gebraucht wird; die Art, wie man dort von einer Welle zum Strahlenbündel übergeht, enthält viel Willkür. Hand in Hand damit geht nun die spektrale Inhomogenität; stets sind alle Schwingungszahlen eines Bereiches  $\Delta n$  gleich-

84) Nach *Gehrcke*, Interferenzen, p. 73.

85) *Lord Rayleigh*, Papers I, p. 426.

zeitig in der Strahlung vorhanden. Zwar kann seine Breite  $\frac{\Delta n}{n}$  klein sein; bei schmalen Spektrallinien<sup>86)</sup> beträgt sie etwa  $10^{-6}$ , und da man diese Linien noch spektral auflösen kann, so bestände die Möglichkeit, noch Teile aus ihnen zu isolieren. Aber verschwinden kann dieser Bereich nie, ohne daß mit ihm die Energie Null wird. Wäre selbst  $\frac{\Delta n}{n} = 10^{-8}$ , so läge  $\Delta n$  immer noch über  $10^4 \text{ sec}^{-1}$ , so einfache Schwebungserscheinungen wie in Nr. 24 betrachtet, treten schon aus diesem Grunde nicht auf.

**27. Natürliche Strahlung.**<sup>87)</sup> Eine mathematisch zulässige Darstellung spektral inhomogener Schwingungen ist die Darstellung durch *Fouriersche Reihen* oder *Fouriersche Integrale*.<sup>88)</sup> Die erstere gilt für ein endliches, aber beliebig groß zu wählendes Zeitintervall, die zweite könnte für alle Zeiten gelten, doch ist die Ausdehnung über gewisse Grenzen hinaus zwecklos. Beide Darstellungen hängen somit von der Wahl des Zeitabschnittes ab, woraus hervorgeht, daß den Sinusschwingungen, in welchen sie die gegebene Schwingung auflösen, keine unmittelbare physikalische Bedeutung zukommt.

Wir stellen durch

$$(70) \quad f(t) = \int dn C_n \cos (nt - \vartheta_n)$$

die Schwingung dar und berechnen ihre Intensität  $J$  als den Mittelwert  $f^2(t)$ , gebildet über eine Zeit  $\tau$ :

$$(71) \quad J = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^\infty \int_0^\infty dn dn' C_n C_{n'} \cos (nt - \vartheta_n) \cos (n't - \vartheta_{n'})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty dn dn' C_n C_{n'} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{n' - n}{2} \tau \right) \cos \left( \frac{n' - n}{2} (2t + \tau) - (\vartheta_{n'} - \vartheta_n) \right)}{\frac{n' - n}{2} \tau} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \left( \frac{n' + n}{2} \tau \right) \cos \left( \frac{n' + n}{2} (2t + \tau) - (\vartheta_{n'} + \vartheta_n) \right)}{\frac{n' + n}{2} \tau} \right\}.$$

Die Zeit  $\tau$  wählen wir möglichst kurz, doch immer noch optisch

86) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 377; O. Schönrock, Ann. d. Phys. (4) 20 (1906), p. 995.

87) M. Planck, Ann. d. Phys. 1 (1900), p. 69; 7 (1902), p. 390; Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1913, 5. Abschnitt. Vgl. W. Wien, Enc. V 23, Nr. 4, III. Über die Bezeichnung „Natürliche Strahlung“ vgl. Anm. 95.

88) A. Gony, Journ. d. Phys. 5 (1886), p. 354.

lang (vgl. Nr. 7). Dann bleibt  $(n' + n)\tau$  von derselben Größenordnung wie  $n\tau$ , also sehr groß.  $J$  wäre daher von  $\tau$  abhängig, wenn nicht der zweite Bruch ohne merklichen Einfluß wäre. Ebensovienig Einfluß dürfen aber im ersten Bruch solche Wertepaare  $n', n$  haben, für welche  $(n' - n)\tau$  keine kleine Zahl ist. Wir nehmen also an, daß wir das Glied mit  $(n' + n)\tau$  im Nenner streichen und

$$\frac{\sin\left(\frac{n' - n}{2}\tau\right)}{\left(\frac{n' - n}{2}\tau\right)} = 1 \quad \text{also auch} \quad \cos\left(\frac{n' - n}{2}\tau\right) = 1$$

setzen dürfen. Berücksichtigen wir dies und setzen wir noch  $n' - n = m$ , so finden wir die Gleichung

$$(72) \quad J = \frac{1}{2} \iint dn dn' C_n C_{n'} \cos((n' - n)t - (\vartheta_{n'} - \vartheta_n)) \\ = \int dm (A_m \sin mt + B_m \cos mt),$$

wenn

$$(73) \quad A_m = \frac{1}{2} \int dn C_{n+m} C_n \sin(\vartheta_{n+m} - \vartheta_n), \\ B_m = \frac{1}{2} \int dn C_{n+m} C_n \cos(\vartheta_{n+m} - \vartheta_n),$$

ist.

Die hier eingeführten Vernachlässigungen wären nicht berechtigt, wenn nicht die Phase  $\vartheta_n$  eine schnell und unregelmäßig veränderliche Funktion von  $n$  wäre. Diese Veränderlichkeit bewirkt nämlich, daß der im zweiten Bruch von (71) auftretende Cosinus schnell und unregelmäßig zwischen  $+1$  und  $-1$  hin- und herschwenkt, und daß sich im Integral diese bald positiven, bald negativen Beträge fortheben. Dasselbe gilt für den im ersten Bruch auftretenden Cosinus, solange  $n' - n$  groß ist; erst wenn  $n' - n = m$  sehr klein ist, wird auch die Phasendifferenz  $\vartheta_{n+m} - \vartheta_n$  so klein, daß  $A_m$  und  $B_m$  von Null verschiedene Werte annehmen können.

**28. Spektrale Zerlegung.** Ein Spektralapparat, gleichgültig welcher Art, sondert aus dem Integrationsbereich der Gleichung (70) ein mehr oder minder schmales Gebiet aus, indem er die Amplitude der Sinuswelle  $C_n \cos(nt - \vartheta_n)$  mit einem Faktor  $\varphi(n)$  versieht, welcher verschwindend klein wird, sobald  $n$  erheblich von einem für den Apparat charakteristischen Wert  $n_0$  abweicht, während er in der Nachbarschaft von  $n_0$  erhebliche Werte annimmt. Je schmaler der Bereich, um so größer ist das Auflösungsvermögen. Beim Gitter z. B. wäre nach (38)

$$(74) \quad \varphi(n) = \left| \frac{\sin \frac{p}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta} \right| = \left| \frac{\sin \left( p h \pi \frac{n - n_0}{n_0} \right)}{\sin \left( h \pi \frac{n - n_0}{n_0} \right)} \right|,$$

wo  $n_0$  die Frequenz bedeutet, für die  $\delta = 2h\pi$ , also  $\varphi(n)$  ein Maximum wird (wo  $h$  eine ganze Zahl ist). Da nämlich  $\delta$  zu  $n$  proportional ist, dürfen wir dann für ein beliebiges  $n$   $\delta = 2h\pi \frac{n}{n_0}$  setzen. Zugleich bewirkt der Apparat eine Phasenverschiebung  $\gamma_n$ ; beim Gitter ist nach (38)

$$(75) \quad \gamma_n = + \frac{p-1}{2} \delta = (p-1)h\pi \frac{n}{n_0}.$$

Die Schwingung wird jetzt statt (70)

$$(76) \quad f(t) = \int dn C_n \varphi_n \cos(nt - \vartheta_n - \gamma_n)$$

und ihre Intensität nach (72) und (73):

$$(77) \quad \begin{cases} J = \int dm (a_m \sin mt + b_m \cos mt), \\ a_m = \frac{1}{2} \int dn C_{n+\mu} C_n \varphi(n+m) \varphi(n) \sin(\vartheta_{n+m} - \vartheta_n + \gamma_{n+m} - \gamma_n), \\ b_m = \frac{1}{2} \int dn C_{n+\mu} C_n \varphi(n+m) \varphi(n) \cos(\vartheta_{n+m} - \vartheta_n + \gamma_{n+m} - \gamma_n). \end{cases}$$

Wird ein Spektralapparat von einem elektromagnetischen Impuls getroffen, so kommt er erst nach einer bestimmten, für ihn charakteristischen Zeit, seiner Abklingungszeit, wieder zur Ruhe; diese ist um so größer, je größer das Auflösungsvermögen. Beim Gitter z. B. ist nach Gleichung (74) die Breite des ausgesonderten Bereiches ungefähr

$$\Delta n = \frac{2n_0}{ph},$$

zugleich würde ein Impuls in eine Reihe von  $p$  Stößen verwandelt, welche sich über die Zeit  $ph \times$  Periode  $\tau_0$ , d. h.  $2ph\pi : n_0$  gleichmäßig verteilen<sup>89)</sup>, so daß dies die Abklingungszeit ist. Analysiert man die Strahlung aber mit einem elektromagnetischen Resonator (*Planck*), so wird mit abnehmendem Dämpfungsdekrement gleichzeitig die Resonanzkurve und der ausgesonderte Bereich  $\Delta n$  schmaler und die Abklingungszeit größer. ( $\gamma_n$  variiert in dem Bereich  $\Delta n$  stets um  $2\pi$ .) Wären nun die Abklingungszeiten von der Größenordnung der Zeit einer Messung, so bezöge sich die Angabe des Spektralapparates nicht auf eine *gleichzeitige* Eigenschaft der Strahlung, sondern stellte eine Integration über meßbar verschiedene Zeiten dar. [Beim Gitter sieht man dies besonders deutlich; denn nach (75) kann man statt (77) schreiben:

89) *A. Schuster*, Phil. Mag. (5) 37 (1894), p. 509; Einführung in die theoretische Optik, deutsch von H. Konen, Leipzig und Berlin 1907, § 186.

$$J = \int dm \left\{ a'_m \sin \left[ m \left( t - \frac{(p-1)h\pi}{n_0} \right) \right] + b'_m \cos \left[ m \left( t - \frac{(p-1)h\pi}{n_0} \right) \right] \right\},$$

$$a'_m = \frac{1}{2} \int dn C_{n+m} C_n \varphi_{n+m} \varphi_n \sin (\vartheta_{n+m} - \vartheta_n),$$

$$b'_m = \frac{1}{2} \int dn C_{n+m} C_n \varphi_{n+m} \varphi_n \cos (\vartheta_{n+m} - \vartheta_n);$$

und in dem Auftreten von  $\left( t - \frac{(p-1)h\pi}{n_0} \right)$  liegt der Hinweis auf *vor* dem Augenblick  $t$  liegende Zeiten.] Soll daher aus inhomogener Strahlung der *im gleichen Moment vorhandene* monochromatische Bestandteil von der Frequenz  $n_0$  ausgesondert werden, so muß sich mit großem Auflösungsvermögen eine kleine Abklingungszeit vereinigen (beim Gitter muß  $ph \gg 1$ , aber  $|m| \ll \frac{n_0}{ph\pi}$  sein). Dann aber darf man

$$\varphi(n+m) = \varphi(n), \quad \gamma_{n+m} = \gamma_n$$

setzen und erhält so für die in der Schwingung  $f(t)$  enthaltene Intensität von der Schwingungszahl  $n_0$  den Wert

$$(78) \quad \begin{cases} J_{n_0} = \int dm (\mathfrak{A}_m^0 \sin mt + \mathfrak{B}_m^0 \cos mt) \\ \mathfrak{A}_m^0 = \left( \int dn C_{n+m} C_n \varphi^2(n) \sin (\vartheta_{n+m} - \vartheta_n) \right) : \int dn \varphi^2(n) \\ \mathfrak{B}_m^0 = \left( \int dn C_{n+m} C_n \varphi^2(n) \cos (\vartheta_{n+m} - \vartheta_n) \right) : \int dn \varphi^2(n). \end{cases}$$

Die Division durch das von  $n_0$  unabhängige Integral  $\int dn \varphi^2(n)$  bewirkt, da  $\varphi$  eine Funktion von  $(n - n_0)$  ist, daß  $\int J_{n_0} dn_0$  die Gesamtintensität ergibt.  $\mathfrak{A}_m^0$  und  $\mathfrak{B}_m^0$  sind die meßbaren Mittelwerte der schnellveränderlichen Größen  $C_{n+m} C_n \frac{\sin}{\cos} (\vartheta_{n+m} - \vartheta_n)$  in der Umgebung von  $n_0$ . Daß sie vom Auflösungsvermögen unabhängige Eigenschaften der Strahlung sind, obwohl  $\varphi(n)$  durch das Auflösungsvermögen bestimmt ist, ist eine weitere Annahme in der Hypothese der natürlichen Strahlung. Diese spricht außerdem noch aus, daß die Absorption von Strahlung durch Körper nur von diesen Mittelwerten, d. h. nur von der augenblicklich herrschenden Intensität der monochromatischen Bestandteile der Strahlung abhängen soll.

Eine weitergehende Zerlegung der Strahlung mit Apparaten von meßbarer Abklingungszeit ist bisher nicht erreicht und müßte zum Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik führen. Man kommt hier an eine ähnliche Grenze wie in der kinetischen Theorie der Gase, wenn man den gleichmäßigen Gasdruck in unregelmäßige Molekularstöße auflöst; es beginnt dann das Spiel der Wahrscheinlichkeiten (*Brownsche* Bewegung). Die so weit analysierte Strahlung

wäre nicht mehr natürliche Strahlung. Weil die Strahlung auch bei der Fortpflanzung in dispergierenden Körpern spektral zerlegt wird, bleibt sie dabei nicht für alle Zeiten natürliche Strahlung. Darin liegt die Lösung des scheinbaren Widerspruches zwischen den beiden Aussagen, daß sich natürliche Strahlung stets mit Gruppengeschwindigkeit fortpflanzt (welche gelegentlich größer als  $c$  werden kann), und daß nach der Elektronen- und erst recht der Relativitätstheorie  $c$  die größtmögliche Geschwindigkeit dafür ist.<sup>89a)</sup>

**29. Die Schwingungsform natürlicher Strahlung.**<sup>89)</sup> Da nur die Mittelwerte  $\mathfrak{A}_m^0$  und  $\mathfrak{B}_m^0$  der Messung zugänglich sind, bleiben die Funktionen  $C_n$  und  $\vartheta_n$ , welche die Form der Schwingung  $f(t)$  in (70) bedingen, in hohem Maße unbekannt. Nur das eine läßt sich sagen, daß diese sich bei fortschreitender spektraler Reinheit der Sinusform nähert. Ist nämlich die Summe

$$f(t) = \sum C_n \cos(nt - \vartheta_n)$$

auf solche Werte von  $n$  beschränkt, für welche  $n - n_0 = \delta n \ll n_0$  ist, so kann man

$$C_n \cos(nt - \vartheta_n) = C_n \cos(n_0 t - (\vartheta_n - t \delta n))$$

als Schwingung von der Frequenz  $n_0$  mit langsam veränderlicher Phase betrachten. Für einen Zeitraum von  $t$  bis  $t + \Delta t$ , für den alle Werte  $\Delta t \delta n \ll 1$  sind, ist dann auch  $f(t)$  eine Sinusschwingung von der Frequenz  $n_0$ . Man erhält sie geometrisch nach Nr. 11, indem man alle Partialschwingungen als Vektoren  $\vec{OP}$  in einer Ebene aufträgt und addiert. Sind die Phasen  $\vartheta_n$  unregelmäßig verteilt, so ist nach Nr. 21 für die Resultante jede Richtung gleich wahrscheinlich, ihre Amplitude ist mit überwiegender Wahrscheinlichkeit von der Größenordnung  $\sqrt{\sum C_n^2}$ . In einer späteren Zeit  $t_1$  werden die Partialschwingungen statt durch  $\vec{OP}$  durch gleichlange Vektoren  $\vec{OQ}$  dargestellt, welche mit den  $\vec{OP}$  den Winkel  $(t_1 - t) \delta n$  bilden. Ist er vergleichbar mit  $\pi$  oder noch größer, so ist das Resultat der Summation von dem für die Zeit  $t$  gültigen unabhängig. D. h. die Phase der Schwingung  $f(t)$  hat sich inzwischen in einer ganz beliebigen Art verändert, während die Amplitude im allgemeinen von derselben Größenordnung geblieben ist, innerhalb dieser Größenordnung aber einen beliebigen anderen Wert angenommen hat. Bei natürlicher Strahlung ist die Zeit einer solchen Änderung noch klein gegen die einer Messung.

89a) Vgl. Nr. 6 und Literatur in Anm. 15.

89) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 11 (1906), p. 127; Pap. V, p. 287.

Über die Schwingungsform bei breiten kontinuierlichen Spektren ist vielfach die Meinung geäußert worden, daß auch in ihr Periodizitäten irgendwelcher Art vertreten sein müßten, weil sich sonst nicht daraus durch Spektralapparate monochromatisches Licht von hoher Regelmäßigkeit gewinnen ließe. Mit Recht machen dagegen *Gouy*, *Schuster*, *Ames*, *Rayleigh*<sup>90)</sup> geltend, daß diese Periodizität in allen Fällen aus dem Apparat stammt; beim Gitter z. B. rührt sie daher, daß ein Impuls in  $p$  periodisch aufeinanderfolgende Stöße verwandelt wird (Nr. 27). *Rayleigh*<sup>91)</sup> zeigt an Figuren, wie unregelmäßige Schwingungsformen schon bei der Superposition von wenigen unharmonischen Sinusschwingungen entstehen.

Zum Verständnis des von englischen Physikern vielfach angewandten Verfahrens, weißes Licht als unregelmäßige Folge von Impulsen aufzufassen, gelangt man wohl am besten, wenn man unter einem Impuls einen Ausschnitt aus der Schwingungskurve ungefähr von der Zeitdauer einer Lichtperiode versteht. Die Unregelmäßigkeit dieser Kurve hebt dann selbst für die Formen benachbarter Impulse jeden Zusammenhang auf.

**30. Kohärenz und Inkohärenz. Polarisation. Zwei Schwingungen**

$$(79) \quad f(t) = \int F_n \cos(nt - \varphi_n) dn, \quad g(t) = \int G_n \cos(nt - \chi_n) dn$$

sollen monochromatische natürliche Strahlung darstellen. Den Mittelwert  $\overline{fg}$  für eine Zeit  $\tau$  bilden wir nach Analogie von Nr. 27 und finden so

$$(80) \quad \overline{fg} = \frac{1}{2} \int dn \int dn' F_n G_n \cos((n' - n)t + (\varphi_{n'} - \chi_n)) \\ = \int dm (\alpha_m \sin mt + \beta_m \cos mt),$$

wenn

$$(81) \quad \alpha_m = \frac{1}{2} \int dn F_{n+m} G_n \sin(\varphi_{n+m} - \chi_n), \\ \beta_m = \frac{1}{2} \int dn F_{n+m} G_n \cos(\varphi_{n+m} - \chi_n)$$

ist.<sup>92)</sup> Hier sind nun drei besonders wichtige Fälle zu unterscheiden:

90) *A. Gouy*, Journ. d. phys. 5 (1886), p. 534; *A. Schuster*, Phil. Mag. (5) 37 (1894), p. 509; (7) 1 (1904). Einführung in die theoretische Optik, deutsch von *H. Koenen*, Leipzig und Berlin 1907, Kap. 14; *J. S. Ames*, Astrophys. Journ. 22 (1905), p. 76; *Lord Rayleigh*, Pap. III, p. 60; Phil. Mag. 27 (1889), p. 460; Pap. III, p. 268. „It would be instructive if some one of the contrary opinion would explain what he means by regular white light. The phrase certainly appears to me to be without meaning — what Clifford would have called *nonsense*.“ Phil. Mag. 10 (1905), p. 401; Pap. V, p. 272.

91) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (6) 11 (1906), p. 127; Pap. V, p. 285.

92) *M. Laue*, Ann. d. Phys. (4) 23 (1907), p. 1.

1. Die Schwingungen haben verschiedene Frequenz; d. h. die Bereiche, in welchen  $F_n$  und  $G_n$  von null wesentlich verschieden sind, schließen sich aus, so daß  $F_{n+m}G_n = 0$  ist.

2. Diese Bereiche stimmen überein, doch stammen beide Schwingungen aus verschiedenen Lichtquellen; sie sind *inkohärent*. Dann sind die Phasen  $\varphi_n$  und  $\chi_n$  unabhängig voneinander; infolgedessen ist in (81)  $\varphi_{n+m} - \chi_n$  trotz kleiner Werte von  $m$  schnell und unregelmäßig veränderlich, so daß  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  Null sind.

3. Sie stammen bei gleicher Frequenz aus der gleichen Lichtquelle und interferieren bei mäßigem Gangunterschied; sie sind *kohärent*; dann unterscheidet sich  $F_n$  von  $G_n$  nur durch einen konstanten Faktor  $\lambda$  und  $\varphi_n$  von  $\chi_n$  um eine Konstante  $\delta$ . Infolgedessen wird nach (80)

$$\overline{fg} = \frac{1}{2}\lambda \int \overline{dn} \int \overline{dn'} G_n G_n \{ \cos \delta \cos [(n' - n)t + (\chi_{n'} - \chi_n)] + \sin \delta \sin [(n' - n)t + (\chi_{n'} - \chi_n)] \}.$$

Die zweite Hälfte dieses Integrals verschwindet, weil der Integrand bei Vertauschung von  $n'$  und  $n$  sein Zeichen wechselt. Daher nach Gleichung (72)

$$(82) \quad \overline{fg} = \lambda \cos \delta \overline{g^2} = \frac{1}{\lambda} \cos \delta \overline{f^2}.$$

Auch in diesem Falle kann  $\overline{fg} = 0$  sein, wenn die Phasendifferenz  $\delta = \pm \pi/2$  ist; eine Veränderung des Gangunterschiedes bringt dann sofort einen anderen Wert hervor. Im Gegensatz dazu ist in den beiden ersten Fällen *stets*  $\overline{fg} = 0$ . Da dann

$$\overline{(f + g)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2}$$

ist, findet keine Interferenz statt. Interferenzfähig sind somit nur kohärente Schwingungen von gleicher Schwingungszahl.

Natürlich gibt es auch bei Schwingungen von verschiedener Frequenz den Unterschied von Kohärenz und Inkohärenz. Wird von zwei kohärenten Strahlen der eine an einem bewegten Körper gespiegelt, so verändert er seine Schwingungszahl unter Beibehaltung der Kohärenz. Schwebungen entstehen, wenn kohärente Strahlen  $f$  und  $g$  mit so wenig verschiedener Frequenz sich treffen, daß die Integrationsgebiete in (79) sich fast völlig überdecken.

Die Schwingungen verschiedener Frequenz, in welche sich beim Zeemaneffekt eine Spektrallinie spaltet, entsprechen verschiedenen Freiheitsgeraden der schwingenden Elektronen und sind deswegen inkohärent<sup>93)</sup>; zu Schwebungen geben sie keinen Anlaß.<sup>94)</sup>

93) Enc. V 22 (H. A. Lorentz).

Den stetigen Übergang zwischen Kohärenz und Inkohärenz vermittelt die partielle Kohärenz, in der zwei Schwingungen  $f(t)$  und  $g(t) = g_f(t) + g_f'(t)$  zueinander stehen, wenn  $g_f$  zu  $f$  vollständig kohärent,  $g_f'$  zu  $f$  inkohärent ist. Ein quantitatives Maß für die Kohärenz findet man, wenn man der Schwingung  $g$  (vgl. (79)) eine Schwingung

$$g^* = \int G_n \sin(nt - x_n)$$

an die Seite stellt. Nach (82) ist nämlich wegen  $g^* = g_f^* + g_f'^*$ , wenn  $\lambda^2$  das Intensitätsverhältnis  $\overline{f^2} : \overline{g_f^2}$  und  $\delta$  die Phasendifferenz dieser Schwingungen angibt,

$$\overline{fg} = \overline{fg_f} = \frac{1}{\lambda} \cos \delta \overline{f^2}, \quad \overline{fg^*} = \overline{fg_f^*} = \frac{1}{\lambda} \sin \delta \overline{f^2}.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{\overline{fg^2} + \overline{fg^{*2}}}{\overline{f^2} \overline{g^2}} = \frac{\overline{g_f^2}}{\overline{g^2}} = i.$$

Dies Verhältnis der Intensität des zu  $f$  kohärenten Anteils von  $g$  zur Gesamtintensität von  $g$  nennt man die „Kohärenz“ der Schwingungen  $f$  und  $g$ . Da  $\overline{fg^{*2}} = \overline{f^{*2} g^2}$ , so kann man hierbei die Rollen von  $f$  und  $g$  miteinander vertauschen. Die Kohärenz ist 1 für vollständig kohärente, 0 für inkohärente Schwingungen.<sup>95)</sup>

Wegen  $\overline{g^2} = \overline{g_f^2} + \overline{g_f'^2}$  ist die „Inkohärenz“

$$j = (1 - i) = \frac{\overline{g_f'^2}}{\overline{g^2}}.$$

Man kann den Unterschied zwischen Kohärenz und Inkohärenz sehr anschaulich an die Betrachtung von Nr. 29 anknüpfen. Kohärente Schwingungen stimmen in der Schwingungsform überein; bei allen Veränderungen ihrer Phase bleibt die Phasendifferenz zeitlich konstant, während sie bei inkohärenten Schwingungen in der Zeit einer Messung oft und unregelmäßig hin und herschwankt. Nähme die spektrale Breite immer mehr ab, so würden die Zeiten einer solchen Phasenveränderung schließlich meßbar. Damit würde der Unterschied zwischen kohärenten und inkohärenten Schwingungen verwischt werden. Der Bereich der natürlichen Strahlung würde aber dabei überschritten (vgl. Nr. 28).

Bemerkenswert ist der Fall, daß zwei linear, aber senkrecht zueinander polarisierte Wellen von gleicher Fortpflanzungsrichtung räum-

94) O. M. Corbino, Nuovo Cim. 9 (1899), p. 351; Rend. Lincei 8 (1899), p. 171.

95) M. Laue, Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 1.

lich zusammenfallen. Sind sie kohärent, so bilden sie eine *vollständig* (im allgemeinen elliptisch, vgl. Nr. 10) *polarisierte*, sind sie inkohärent und in der Intensität gleich, eine *unpolarisierte* Welle<sup>96</sup>). Den stetigen Übergang zwischen diesen Grenzfällen bildet die *partielle* Polarisation. Sie tritt ein, wenn sich eine völlig polarisierte und eine unpolarisierte Welle überlagern, und ist im allgemeinen, entsprechend der Schwingungsform der ersteren, partielle elliptische Polarisation.<sup>97</sup>)

Bei partieller linearer Polarisation gibt es zwei zueinander senkrechte Hauptpolarisationsrichtungen, in denen inkohärente Schwingungen von ungleicher Intensität  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  stattfinden. Durch Drehung um die Strahlrichtung um den Winkel  $\omega$  findet man daraus zwei Achsen, in denen partiell kohärente Schwingungen mit den Intensitäten

$$\mathfrak{R}'_1 = \mathfrak{R}_1 \cos^2 \omega + \mathfrak{R}_2 \sin^2 \omega,$$

$$\mathfrak{R}'_2 = \mathfrak{R}_1 \sin^2 \omega + \mathfrak{R}_2 \cos^2 \omega$$

stattfinden. Stets ist

$$|\mathfrak{R}'_1 - \mathfrak{R}'_2| < |\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2|.$$

Bei partiell elliptischer Polarisation sind alle Paare zueinander senkrechter linearer Schwingungen, in die man die Welle zerlegen kann, partiell kohärent.

**31. Zusammenhang mit der Thermodynamik.** Die Unmöglichkeit der Interferenz zwischen Strahlen verschiedenen Ursprungs ist für Wärmestrahlung eine Forderung der Thermodynamik. Andernfalls ließe sich das *Carnotsche* Prinzip, die Unumkehrbarkeit eines Wärmeüberganges, durch Interferenzerscheinungen umstoßen.

Zum Beweise betrachten wir die Spiegelung und Brechung an der ebenen Grenzfläche  $E$  zweier durchsichtigen Mittel.  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  sollen Stücke von Oberflächen schwarzer Körper sein, ihre Lage und Größe sei derart, daß das von  $S_1$  nach dem Flächenstück  $f$  von  $E$  entsandte Strahlenbündel, soweit es gespiegelt wird, von  $S_2$ , soweit es Brechung erleidet, von  $S_3$  absorbiert wird. Ebenso soll das von  $S_4$  nach  $f$  ausgehende Bündel von  $S_3$  und  $S_2$  absorbiert werden. Das ganze System, dem die erwähnten schwarzen Körper angehören, sei von absolut spiegelnden Wänden umgeben und anfangs im thermischen Gleichgewicht. Nach bekannten *Kirchhoffschen* Sätzen bleibt dies be-

96) Die ersten Versuche über die Inkohärenz der beiden Schwingungen im unpolarisierten Licht stammen von Fresnel und Arago. Vgl. Anm. 21.

97) Unpolarisierte Schwingungen bezeichnet man vielfach als natürliches Licht. Wir vermeiden diesen Ausdruck schon deshalb, weil vollständiger Mangel an Polarisation selten vorkommt.

stehen, wenn keine Interferenzen stattfinden. Könnten aber die von  $S_1$  und  $S_4$  nach  $f$  gehenden Strahlen interferieren, so erhielte entweder  $S_2$  aus der Richtung von  $f$  mehr Energie, als es dorthin entsetet, und  $S_3$  dementsprechend weniger oder umgekehrt. Das Temperaturgleichgewicht würde so *ohne Kompensation* gestört.

Tatsächlich besteht dieselbe Unmöglichkeit auch bei allen Lumineszenzerscheinungen; in der Ungeordnetheit und gegenseitigen Unabhängigkeit in den Phasenverteilungen solcher Schwingungen spiegeln sich sie Ungeordnetheit und die gegenseitige Unabhängigkeit der Elektronenbewegungen in den Lichtquellen. Denn in der Bewegung der Teilchen in verschiedenen Körpern gibt es nichts der Kohärenz Analoges.

Dieser Unterschied hat eine Konsequenz für die Thermodynamik.<sup>98)</sup> Nach Boltzmann ist die Entropie  $S$  mit der Wahrscheinlichkeit  $W$  durch eine Beziehung

$$(83) \quad S = k \log W$$

verbunden. Bei einem aus zwei materiellen Teilen oder zwei inkohärenten Strahlen bestehenden System, ist aber die Wahrscheinlichkeit, wenn  $W_1$  und  $W_2$  die der Teile sind, wegen ihrer statistischen Unabhängigkeit,

$$(84) \quad W = W_1 W_2,$$

also

$$(85) \quad S = S_1 + S_2.$$

Für kohärente Strahlen hingegen gilt dies Additionstheorem der Entropie nicht, da der eine nur in der Amplitude frei, in seiner Schwingungsform hingegen völlig durch den anderen bestimmt wird. Bei vollständiger Kohärenz ist vielmehr, wie a. a. O. gezeigt wird, ihre Gesamtentropie so groß wie die eines Strahles, dessen Intensität unter sonst gleichen Umständen gleich der Summe ihrer Intensitäten ist.

Bei partiell kohärenten Strahlen von den Intensitäten  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$ , sowie der Kohärenz  $i$ , hat man zunächst die Gleichungen

$$(86) \quad \begin{cases} K_1 + K_2 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2, \\ K_1 K_2 = (1 - i) \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \end{cases}$$

zu lösen. Die so bestimmten  $K_1, K_2$  sind die Intensitäten zweier inkohärenten Strahlen, auf welche man das System umkehrbar, z. B. durch Spiegelung und Brechung zurückführen kann. Seine Entropie

98) *M. Laue*, Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 365; 23 (1907), p. 1, 795, Verh. d. deutsch. Physik. Ges. 9 (1907), p. 606; Phys. Zeitschr. 9 (1908), p. 778, vgl. auch V 23, Nr. 11 (*W. Wien*).

ist demnach die Summe der Entropien dieser Strahlen. Bei drei partiell kohärenten Strahlen führt ein analoges Verfahren zum Ziel.

Statistisch bedeutet dies, daß in einem System von ganz oder partiell kohärenten Strahlen die Freiheitsgrade der einzelnen Strahlenbündel (vgl. Nr. 44) nicht die des ganzen Systems sind; vielmehr muß man, um diese zu finden, das System auf die genannten inkohärenten Strahlenbündel zurückführen.

### 32. Die Interferenz inhomogener Strahlung; Sichtbarkeitskurve.

Eine spektral inhomogene Strahlung sei durch die Intensitätsverteilung  $J(n)$  charakterisiert. Zwei kohärente Schwingungen dieser Art interferieren mit dem Gangunterschied  $l$ , welcher in einem Mittel vom Brechungsindex  $\nu$  zurückgelegt sei ( $\delta = \frac{l n \nu}{c}$ ). Die monochromatische Strahlung von der Frequenz  $n$  ruft dabei die Helligkeit

$$J(n) \left(1 + \cos \frac{l n \nu}{c}\right) d n$$

hervor (vgl. 34); die ganze Strahlung, da sich nach Nr. 28 bei natürlicher Strahlung alle Energiegrößen für deren monochromatische Bestandteile addieren, liefert die Helligkeit

$$(87) \quad H = \int d n J(n) \left(1 + \cos \frac{l n \nu}{c}\right).$$

Nun handele es sich um eine schmale Spektrallinie, deren „Schwerpunkt“ bei dem Wert  $n_0$  liege. Wir führen  $n - n_0 = \varepsilon$  als Variable ein und finden so

$$(88) \quad H = \int d \varepsilon J(\varepsilon) \left[1 + \cos \frac{l}{c} \left\{n_0 \nu_0 + \varepsilon \left(\frac{d(n \nu)}{d \nu}\right)_0\right\}\right];$$

oder wenn wir

$$(89) \quad \begin{cases} \int J(\varepsilon) d \varepsilon = P, \\ \int d \varepsilon J(\varepsilon) \cos \left(\frac{l \varepsilon}{c} \left(\frac{d(n \nu)}{d \nu}\right)_0\right) = C, \\ \int d \varepsilon J(\varepsilon) \sin \left(\frac{l \varepsilon}{c} \left(\frac{d(n \nu)}{d \nu}\right)_0\right) = S \end{cases}$$

setzen:

$$(90) \quad H = P + C \cos \frac{l n_0 \nu_0}{c} - S \sin \frac{l n_0 \nu_0}{c}.$$

Hier sind  $C$  und  $S$  Funktionen von  $l$ ; sie sind aber langsam veränderlich gegen  $\frac{\cos \left(\frac{l n_0 \nu_0}{c}\right)}{\sin \left(\frac{l n_0 \nu_0}{c}\right)}$ , weil  $\varepsilon \ll n_0$ . Die Lage der Interferenzmaxima und -minima findet man daher so, daß man  $C$  und  $S$  bei der Differentiation nach  $l$  als unveränderlich betrachtet. Die Größe dieser Extremwerte ist  $P \pm \sqrt{C^2 + S^2}$ . Die Sichtbarkeit, definiert durch die

Gleichung

$$(91) \quad V = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} + H_{\min}}$$

wird somit

$$(92) \quad V = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P}.$$

Nach einem bekannten Satze ist für jede reguläre Funktion  $F(\varepsilon)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \frac{dF}{d\varepsilon} e^{k\varepsilon} d\varepsilon = 0.$$

Folglich verschwinden die Integrale  $C$  und  $S$  für unendlich große  $l$ ; für alle Intensitätsverteilungen  $J(\varepsilon)$ ; die Interferenzfähigkeit inhomogener Strahlung hört bei einer gewissen Grenze des Ganzunterschiedes auf. Für ein kleines  $l$  ist umgekehrt  $C = P$ ,  $S = 0$ , also  $V = 1$ . Den Übergang zwischen diesen beiden Grenzfällen stellt die Sichtbarkeitskurve dar, welche im übrigen Verlaufe wesentlich durch die Intensitätsverteilung  $J(\varepsilon)$  bedingt ist. *Michelson*<sup>99)</sup> hat dies benutzt, um aus der (mit dem Auge geschätzten) Sichtbarkeit auf die Intensitätsverteilung in feinen Spektrallinien zu schließen. Doch sind diese Schlüsse im allgemeinen vieldeutig; denn zur Ermittlung von  $J(\varepsilon)$  gehört nach dem Fourierschen Integralsatz die Kenntnis von  $C$  und  $S$ , während  $V$  nur  $C^2 + S^2$  liefert.<sup>100)</sup> Nur bei symmetrischen Linien ist wegen  $S = 0$  die Eindeutigkeit gewährleistet. Auf jeden Fall ist die Grenze, bis zu welcher die Streifen sichtbar bleiben, ein ungefähres Maß für die Breite der Linie. *Michelson* fand sie bei manchen Linien über  $5 \cdot 10^5$  Wellenlängen Gangunterschied, was einer Breite  $\frac{\Delta n}{n}$  von  $10^{-5}$  bis  $10^{-6}$  entspricht.<sup>101)</sup>

Zu der Energieverteilung

$$J(\varepsilon) = \text{const.} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\alpha}}$$

gehört eine Sichtbarkeitskurve

$$V = e^{-\frac{\alpha}{4} \left( \frac{l}{c} \frac{d(n\nu)}{d\nu} \right)^2},$$

wie sie häufig beobachtet wird. Liegen zwei in der Intensität und

99) *A. A. Michelson*, Phil. Mag. 31 (1891), p. 338; 34 (1892), p. 280; Journ. d. Phys. 3 (1894), p. 5; vgl. auch *H. Ebert*, Wied. Ann. 43 (1891), p. 790. Eine photographisch ermittelte Sichtbarkeitskurve veröffentlicht *P. P. Koch*, Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 377.

100) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 34 (1892), p. 407; Pap. IV, p. 15.

101) *O. Lummer* und *E. Gehrcke*, Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 3 (1902), p. 337 finden auf andere Weise bei einer Quecksilberlinie die Grenze der Interferenzfähigkeit bei mehr als  $1,6 \cdot 10^6$  Wellenlängenunterschied. Vgl. dazu *M. Laue*, Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 163 besonders § 6.

ihrer Verteilung gleiche Linien von der Breite  $2\eta$  im Abstand  $2\varepsilon_0$  voneinander, und wären  $P', C', S'$  die Werte der Integrale (89) für jede allein, so ist für beide zusammen  $P = 2P'$ . Das Integral  $C$  zerfällt nach (89) in zwei Teile, nämlich in ein Integral von  $-(\varepsilon_0 + \eta)$  bis  $-(\varepsilon_0 - \eta)$  und eins von  $\varepsilon_0 - \eta$  bis  $\varepsilon_0 + \eta$ ; führt man für das erstere  $\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_0$ , für das letztere  $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_0$  als Integrationsvariable ein so findet man:

$$C = \int_{-(\varepsilon_0 + \eta)}^{-(\varepsilon_0 - \eta)} d\varepsilon' J(\varepsilon' - \varepsilon_0) \cos\left(\frac{l}{c} \frac{d(nv)}{dv} (\varepsilon' - \varepsilon_0)\right) \\ + \int_{-(\varepsilon_0 - \eta)}^{-(\varepsilon_0 + \eta)} d\varepsilon' J(\varepsilon' + \varepsilon_0) \cos\left(\frac{l}{c} \frac{d(nv)}{dv} (\varepsilon' + \varepsilon_0)\right),$$

oder da nach der vorausgesetzten Gleichheit beider Linien  $J(\varepsilon' - \varepsilon_0) = J(\varepsilon' + \varepsilon_0)$  ist:

$$C = 2 \cos\left(\frac{l\varepsilon_0}{c} \frac{d(nv)}{dv}\right) \int_{-(\varepsilon_0 - \eta)}^{-(\varepsilon_0 + \eta)} d\varepsilon' J(\varepsilon' + \varepsilon_0) \cos\left(\frac{l\varepsilon'}{c} \frac{d(nv)}{dv}\right) = 2 \cos\left(\frac{l\varepsilon_0}{c} \frac{d(nv)}{dv}\right) C'.$$

Ebenso findet man

$$S = 2 \cos\left(\frac{l\varepsilon_0}{c} \frac{d(nv)}{dv}\right) S',$$

somit nach (92)

$$V = V' \cos\left|\left(\frac{l\varepsilon_0}{c} \frac{d(nv)}{dv}\right)\right|.$$

Der Kosinusfaktor bedingt ein abwechselndes Verschwinden und Wiedererscheinen der Interferenzstreifen, wie man es leicht an den  $D$ -Linien des Natriumspektrums beobachtet.

Im Falle der Dispersion ist zu beachten, daß  $C$  und  $S$  von  $\frac{1}{c} l \left(\nu_0 + n_0 \left(\frac{dv}{dn}\right)_0\right)$  abhängen; d. h. von der Zeit, die zur Durchlaufung der Strecke  $l$  mit Gruppengeschwindigkeit notwendig ist. Bei starker anomaler Dispersion kann diese klein sein gegen die Durchlaufungszeit mit Phasengeschwindigkeit  $\frac{l\nu_0}{c}$ , so daß selbst bei Interferenzstreifen von hoher Ordnung noch große Sichtbarkeit auftritt.<sup>102)</sup>

Setzt sich der Gangunterschied aus mehreren in verschiedenen Mitteln zurückgelegten Strecken  $l$  zusammen, so treten an die Stellen von  $l\nu_0$  und  $l\left(\nu_0 + n_0 \left(\frac{dv}{dn}\right)\right)$  die entsprechenden Summen über alle  $l$ ,

102) R. W. Wood, Phil. Mag. 8 (1904), p. 324; Lord Rayleigh, Phil. Mag. 8 (1904), p. 330; Phil. Mag. 15 (1908), p. 345; Pap. V, p. 204, 426; E. Mascart, Phil. Mag. 27 (1889), p. 519; G. B. Airy, Phil. Mag. 2 (1833), p. 161; A. Cornu, Journ. d. Phys. 1 (1882), p. 293; Pap. III, p. 288

in denen die von einem Strahl zurückgelegten Strecken  $l$  positiv, die auf den anderen bezüglichen negativ zu rechnen sind.

Bei Interferenzversuchen mit weißem Licht ist der Streifen am besten sichtbar und farblos, für welchen mit einiger Annäherung  $\sum l \left( \nu + n \frac{d\nu}{dn} \right) = 0$  ist (die Summe ist über alle Strecken  $l$  auszuführen); er ist i. A. zu unterscheiden von dem durch  $\sum l \nu = 0$  gekennzeichneten Streifen 0<sup>ter</sup> Ordnung.<sup>103)</sup> Alle anderen Streifen sind weniger deutlich und farbig, weil die von verschiedenen Farben herrührenden Maxima nicht zusammenfallen. Meist sind dabei überhaupt nur wenige Streifen sichtbar.

Die in Nr. 11 betrachtete Interferenzerscheinung mit  $p$  sich überlagernden Schwingungen ergibt bei inhomogener Strahlung die Helligkeit nach (36) statt (97)

$$H = \int dn J(n) \frac{1 + \sigma^{2p} - 2\sigma^p \cos p \frac{ln\nu}{c}}{1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \frac{ln\nu}{c}} = \frac{2}{1 - \sigma^2}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} (1 - \sigma^{2p}) \int dn J(n) + \sum_1^{p-1} \left[ (\sigma^m - \sigma^{2p-m}) \int dn J(n) \cos \left( m \frac{ln\nu}{c} \right) \right] \right\}^{104)}.$$

Die Schärfe der Interferenzmaxima bleibt durch die Inhomogenität nur bei so kleinem  $l$  unbeeinträchtigt, daß  $\cos(p-1) \frac{ln\nu}{c}$  sich im Integrationsbereich noch nicht merklich ändert. Läßt man  $l$  weiter und weiter wachsen, so werden die in der Summe auftretenden Integrale der Reihe nach unmerklich klein, das  $(p-1)$ te zuerst. Ist nur noch das Integral mit  $m=1$  merklich, so ist die Helligkeitsverteilung, wie wenn nur zwei Schwingungen interferierten; schließlich verschwinden auch hier alle Maxima und Minima in gleichförmiger Helligkeit.

#### IV. Allgemeine Theorie der Beugung.

**33. Das Huyghenssche Prinzip.** Der in den vorhergehenden Teilen dieses Artikels wiederholt benutzte Begriff des Lichtstrahls, welcher der gesamten geometrischen Optik zugrunde liegt, bedarf der Rechtfertigung durch die Wellenoptik. Da deren Grundgleichungen (vgl. den 1. Teil) mathematisch formuliert vorliegen, so ist dies ebenso wie die Untersuchung der Abweichungen von der geometrischen Optik,

103) *J. Newton*, Optices, Lib. II, Pars I, Observatio XXIV, Londini 1704; *Place*, Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 504; *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 28 (1889), p. 77, 189; Pap. III, p. 288.

104) *M. Laue*, Dissert. Berlin 1903; Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 163.

der Beugungserscheinungen, eine rein mathematische Frage. Bei der Schwierigkeit aber, exakte Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu finden, und besonders, da die Wellenoptik weit älter ist als die Aufstellung der Wellengleichung, hat man zunächst versucht, die

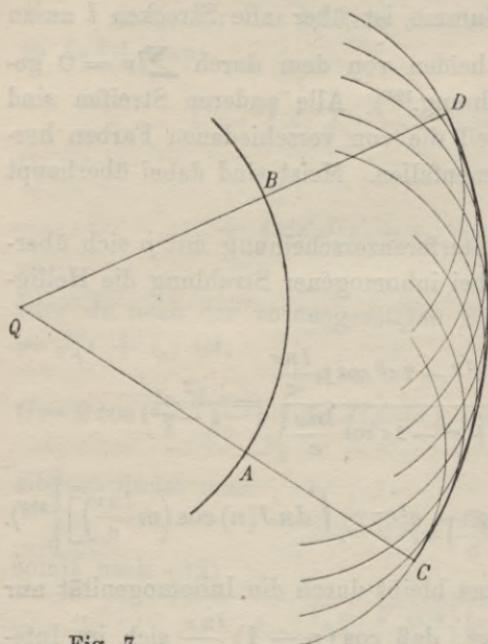


Fig. 7.

mathematische Deduktion durch geistreiche Einfälle zu ersetzen, welche neben einem Kern von Wahrheit stets auch etwas Willkür enthalten. Der älteste Versuch dieser Art ist das *Huyghenssche Prinzip*<sup>105)</sup>, demzufolge jedes von der Wellenbewegung ergriffene Teilchen nicht nur an die zunächst benachbarten, sondern durch deren Vermittlung an alle Teilchen Bewegung abgibt und so selbst Mittelpunkt einer Kugelwelle wird. Geht z. B. (Fig. 7) von der Lichtquelle *Q* eine Welle aus, so gilt dies für alle Teilchen der Kugelfläche *AB*. Jede dieser Wellen ist aber nur unendlich schwach gegen

die Welle *CD*, zu deren Bildung alle übrigen beitragen; geometrisch ist diese als Enveloppe aller Teilwellen bestimmt. Schirmen wir von der Kugelwelle *AB* alles außer der durch den Bogen *AB* begrenzten Kalotte ab, so existiert die Enveloppe offenbar nur zwischen *C* und *D*. Daher die geradlinige Ausbreitung des Lichtes; die in den Schatten eindringenden Elementarwellen sind zu schwach, um dort Licht hervorzubringen. *Grimaldis* 1665 veröffentlichte Beobachtungen<sup>106)</sup> über Beugungserscheinungen waren *Huyghens* offenbar unbekannt.

Die *Huyghenssche* Enveloppenkonstruktion bewährt sich bei den Gesetzen der Spiegelung (auch am bewegten Spiegel<sup>107)</sup>) und der Brechung.

105) *Christian Huyghens*, vgl. Anm. 19.

106) *Grimaldi*, *Physico Mathesis de Lumine*. Die Literatur über die zahlreichen Beugungsbeobachtungen vor *Fresnel* vgl. *Winkelmanns Handbuch VI*, Leipzig 1906, p. 1033.

107) *M. Abraham*, *Ann. d. Phys.* 14 (1904), p. 236.

34. Die Fresnelsche Zonenkonstruktion.<sup>108)</sup> *Fresnels* großes Verdienst besteht in dem Ersatz der Enveloppenkonstruktion durch das Interferenzprinzip.

Eine vom Punkte  $Q$  in Fig. 8 ausgehende Kugelwelle ist dargestellt durch

$$(93) \quad \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}.$$

Jedes Flächenelement  $d\sigma$  einer Wellenfläche<sup>109)</sup>  $r_0 = R$  liefert nach *Fresnels* Hypothese nach außen eine Kugelwelle, deren Amplitude am

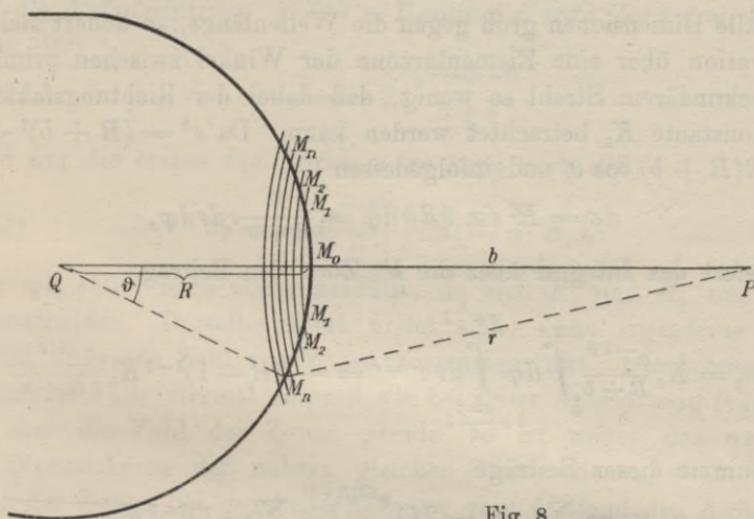


Fig. 8.

größten ist für die Richtung des primären Strahles, während sie um so geringer wird, je weiter die Richtung des sekundären Strahles davon abweicht, und schließlich ganz verschwindet, wenn beide aufeinander senkrecht stehen. Bezeichnen wir mit  $K$  einen in dieser Art von der Richtung abhängigen Faktor, mit  $r$  den Abstand des Aufpunktes  $P$  von  $d\sigma$ , so ist

$$(94) \quad \frac{K}{Rr} e^{-ik(R+r)} d\sigma$$

die Darstellung einer Elementarwelle. Diese Elementarwellen summieren sich im Aufpunkt zu

$$(95) \quad u_P = \frac{e^{-ikR}}{R} \int K \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma,$$

108) *A. Fresnel*, Oeuvres 1, Paris 1866, p. 247.

109) Schon *Schwerd* (1835) (vgl. Anm. 111) wendet die *Fresnelschen* Gedanken auf beliebige Flächen an.

wobei nach *Fresnel* die Integration über den dem Aufpunkt zugewandten Teil der Kugel  $r_0 = R$  bis zum Berührungskreis des vom Aufpunkt ausgehenden Tangentenkegels auszudehnen ist.

Zur Berechnung dieses Integrals bezeichnen wir mit  $b$  den geringsten Abstand des Aufpunktes  $P$  von der Kugel  $r_0 = R$  und zerlegen mit *Fresnel* die Integrationsfläche durch Kugeln um den Aufpunkt mit den Radien

$$b + \frac{1}{2}\lambda, \quad b + \lambda \dots b + \frac{h}{2}\lambda \dots$$

in Elementarzone, deren  $h^{\text{te}}$  in der Figur von  $M_{h-1}$  bis  $M_h$  reicht. Sind alle Dimensionen groß gegen die Wellenlänge, so ändert sich bei Integration über eine Elementarzone der Winkel zwischen primärem und sekundärem Strahl so wenig, daß dabei der Richtungsfaktor  $K$  als Konstante  $K_h$  betrachtet werden kann. Da  $r^2 = (R + b)^2 + R^2 - 2R(R + b) \cos \vartheta$  und infolgedessen

$$d\sigma = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{R}{R+b} r dr d\varphi,$$

ist, liefert das Integral über die  $h^{\text{te}}$  Zone den Beitrag

$$u_h = K_h \frac{e^{-ikR}}{R+b} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{b+\frac{h-1}{2}\lambda}^{b+\frac{h}{2}\lambda} dr e^{-ikr} = -2i(-1)^{h-1} K_h \frac{e^{-ik(R+b)}}{R+b}.$$

Die Summe dieser Beiträge

$$(96) \quad u_P = \sum u_h = -2i\lambda \frac{e^{ik(R+b)}}{R+b} \sum (-1)^{h-1} K_h$$

stellt eine von  $Q$  ausgehende Kugelwelle dar, wie es bei ungestörter Ausbreitung ja auch der Fall sein muß. Die Summe läßt sich für diesen Fall leicht auswerten, da wegen der Kleinheit der Elementarzone

$$(97) \quad K_h = \frac{1}{2}(K_{h-1} + K_{h+1})$$

ist. Denn setzt man

$$(98) \quad \begin{aligned} \sum (-1)^{h-1} K_h &= \frac{1}{2}K_1 + (\frac{1}{2}K_1 - K_2 + \frac{1}{2}K_3) \\ &\quad + (\frac{1}{2}K_3 - K_4 + \frac{1}{2}K_5) + \dots, \end{aligned}$$

so verschwindet wegen (97) rechts jede der Klammern und das letzte nicht in einer Klammer enthaltene Glied, weil für die äußere Zone der Richtungsfaktor  $K = 0$  ist. Somit wird aus (96), wenn man noch

$$(99) \quad K_1 = \frac{1}{\lambda}$$

setzt,

$$(100) \quad u_P = \frac{e^{-i(k(R+b) + \frac{\pi}{2})}}{R+b}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit (93), wenn man dort  $r_0 = R + b$  setzt, überein bis auf die Phasenverzögerung  $\frac{\pi}{2}$ . Sieht man von dieser Unvollkommenheit ab, so zeigt die *Fresnelsche* Überlegung, daß sich eine Kugelwelle bei ungehinderter Ausbreitung als durch Interferenz der Elementarwellen entstehend auffassen läßt.

Ihren eigentlichen Wert zeigt sie aber in der Erklärung der Beugungserscheinungen. Blendet z. B. ein zwischen Lichtquelle und Aufpunkt eingeschobener Schirm mit kreisförmiger Öffnung von den Zonen in Fig. 6 die äußeren ab, so reduziert sich die Summe in (96) auf die Anfangsglieder. Bleibt z. B. nur die erste Zone frei, so wird nach (99)

$$(101) \quad u_P = -2i \frac{e^{-ik(R+b)}}{R+b}.$$

Sind nur die ersten drei wirksam, so wird nach (96)

$$(102) \quad u_P = -i \frac{e^{-ik(R+b)}}{R+b} \lambda (K_1 + K_3),$$

was mit (101) nahe zusammenfällt, da sich  $K_1$  und  $K_3$  nur wenig unterscheiden. Derselbe Wert findet sich, wenn irgendeine relativ kleine, ungerade Zahl von Zonen zusammenwirkt. Die Intensität ist in diesem Falle viermal so groß wie bei freier Ausbreitung (vgl. 100). Ist aber die Zahl der Zonen gerade, so ist wegen des wechselnden Vorzeichnens der nahezu gleichen Summanden  $u_P = 0$ . Da die Zahl der Zonen bei gegebener Öffnung vom Abstand des Aufpunktes vom Schirm abhängt, so finden sich auf der Achse der Schirmöffnung Helligkeitsmaxima und -minima. Blenden wir hingegen durch einen kreisförmigen Schirm die innersten Zonen heraus, so fallen in jener Summe die Anfangsglieder fort, und ihre zu (98) analoge Zerlegung zeigt, daß ihr Wert gleich der Hälfte ihres Anfangsgliedes ist. Auf der Achse eines kreisförmigen Schirmes herrscht somit stets Helligkeit. Beide Voraussagen der *Fresnelschen* Theorie wurden zur Überraschung seiner Zeitgenossen von der Erfahrung bestätigt.

Die Mannigfaltigkeit der von *Fresnel* erklärten Beugungserscheinungen ist aber weit größer. Sie umfaßt das ganze in Nr. 37 und 39 behandelte Gebiet. Sein Werk wurde ganz in seinem Sinne von *Airy*<sup>110)</sup> und von *Schwerd*<sup>111)</sup> fortgesetzt, welche die Theorie der *Fraunhofer*-schen Beugungserscheinungen gaben. Die *Kirchhoffsche* Formulierung

110) *G. B. Airy*, Transact. Cambridge Phil. Soc. 5 (1834), p. 283; Ann. Phys. Chem. 45 (1838), p. 86.

111) *F. M. Schwerd*, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835.

des Huyghensschen Prinzipes vermochte zu diesen Ergebnissen nichts weiter hinzuzufügen, als daß sie auch noch den richtigen Wert für die Phase der Schwingungen gab.

**35. Kirchhoffs Formulierung des Huyghenschen Prinzipes.** Die Zurückführung des Huyghensschen Prinzipes auf die Wellengleichung verdanken wir Stokes<sup>112)</sup> und Kirchhoff<sup>113)</sup>. Stokes' Formulierung ist ein spezieller Fall der Kirchhoffschen; er beschränkt sich auf das senkrechte Auftreffen ebener Wellen auf einen ebenen Schirm. Wir geben im folgenden die allgemeinere Kirchhoffsche Formel im Anschluß an die Darstellung in Lambs Hydrodynamik.<sup>114)</sup>

Für zwei nebst ihren ersten Derivierten stetige Funktionen  $u$  und  $v$  gilt bekanntlich der Greensche Satz

$$(103) \quad \int (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma = - \int \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

( $\nu$  die innere Normale). Genügen beide Funktionen der Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ , so wird daraus

$$(104) \quad \int \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0.$$

Wählen wir aber für  $v$  die Funktion  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  und liegt der Punkt  $P(r=0)$  innerhalb der Integrationsfläche, so muß man, um Gleichung (103) anwenden zu können, diesen Unstetigkeitspunkt durch eine kleine Kugel um ihn ausschließen; in Gleichung (104) ist über die äußere Begrenzung und über die Kugelfläche zu integrieren. Der Anteil der letzteren liefert ganz wie in der Potentialtheorie den Beitrag  $4\pi u_P$ , da sich für  $r=0$  die Funktionen  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  und  $\frac{1}{r}$  gleich verhalten.

So findet man

$$(105) \quad u_P = \frac{1}{4\pi} \int \left( u \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Lichtquelle außerhalb der Integrationsfläche liegt; denn bei punktförmiger Lichtquelle wäre  $u$  nicht mehr stetig, bei einer flächenförmigen wären seine ersten Ableitungen nicht mehr stetig und bei einer räumlich ausgedehnten wäre  $\Delta u + k^2 u$  von 0

112) G. G. Stokes, Transact. Cambridge Phil. Soc. 9 (1849), p. 1; Pap. 2, p. 243.

113) G. Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Berlin Sitzber. 1882, p. 641; Wied. Ann. 18 (1883), p. 663; Vorlesungen über mathem. Optik, Leipzig 1891, p. 22 u. f.; Ges. Abh. Nachtrag p. 22.

114) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig u. Berlin 1907. Deutsch von J. Friedel p. 579 u. f. Enc. IV Art. 26, Nr. 6 bzw. 6c. Eine andere Ableitung W. Voigt, Kompendium d. theoret. Physik II, p. 776, Leipzig 1896.

verschieden. Verlegen wir einen Teil der Integrationsfläche auf eine Kugel vom Radius  $R$  um den Punkt  $P$ , so wird beim Übergang zu  $R = \infty$ , sofern alle Lichtquellen im Endlichen liegen, auf dieser Fläche  $u = \frac{\Psi e^{-ikR}}{R}$  bis auf Glieder mit  $\frac{1}{R^2}$  usw., wo  $\Psi$  eine Funktion der Richtung ist (vgl. Anm. 56). Dann verschwindet der Integrand in Gleichung (105) und damit der Anteil der unendlich fernen Kugel. Ebenso verschwindet nach (104) der Anteil jeder anderen unendlich fernen Fläche, weil man sie mit Teilen einer solchen Kugel zu einer geschlossenen, den Aufpunkt ausschließenden Fläche vereinigen kann. Infolgedessen kann man die Integration in (105) auf jede die Lichtquelle vom Aufpunkt trennende Fläche anwenden; gleichgültig, ob sie geschlossen ist oder ins Unendliche verläuft. Die Normale  $\nu$  weist nach der Seite des Aufpunktes.

Statt der Funktion  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  kann man in Gleichung (105) auch  $\frac{\cos kr}{r}$  setzen; der Ersatz durch  $\frac{\sin kr}{r}$  hingegen macht das Integral zu 0, da letztere Funktion für  $r = 0$  endlich und stetig bleibt.

Die Formel, welche *Kirchhoff* zunächst aus der Wellengleichung bewies und aus welcher er Gleichung (105) ableitete, finden wir umgekehrt aus der letzteren, indem wir eine Lösung der Wellengleichung  $\Phi$  als *Fouriersches* Doppelintegral

$$(106) \quad \Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dn \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \Phi(\tau) e^{in(t-\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_n e^{in t} dn,$$

ansetzen, wobei

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) e^{-in\tau} d\tau$$

eine Lösung der Schwingungsgleichung ist. Wendet man Formel (105) darauf an, so folgt durch Erweiterung mit  $e^{in t}$  und Integration nach  $n$

$$\Phi(t) = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u_n \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{in(t-\frac{r}{a})}}{r} \right) dn - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in(t-\frac{r}{a})}}{r} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} dn \right\}.$$

Daraus folgt

$$(107) \quad \Phi(t) = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\Phi(t-\frac{r}{a})}{r} - \frac{1}{r} f(t-\frac{r}{a}) \right\},$$

wo

$$f = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}.$$

Die erste Differentiation nach  $\nu$  muß dabei nur insofern vorge-

nommen werden, als  $r$  explizit auftritt; die Variabilität von  $\Phi$ , welche sich in  $\frac{\partial u_n}{\partial v}$  kundgibt, wird dabei nicht berücksichtigt, d. h.

$$\frac{\delta}{\delta v} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial v} \quad (x, y \text{ konstant}),$$

während

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Bei fast allen Anwendungen beschränkt man sich auf periodische Schwingungen und damit auf Formel (105).

Für zweidimensionale Probleme tritt an die Stelle von Gleichung (105):

$$(108) \quad u_P = \frac{1}{2\pi} \int (u \frac{\partial}{\partial v} Z_0(k\rho) - Z_0(k\rho) \frac{\partial u}{\partial v}) ds,$$

wo

$$Z_0(k\rho) = \int_0^\infty e^{-ik\rho \cos\alpha} d\alpha$$

nach (26) die einer linienhaften, periodischen Lichtquelle entsprechende Lösung der Schwingungsgleichung ist. Die Integration ist über irgendeine den Punkt  $P$  einschließende, alle Unstetigkeiten von  $u$  und seiner ersten Ableitungen aber ausschließende Linie auszuführen. Für eine beliebige, nichtperiodische Welle findet man daraus, mit Hilfe von (106) auf (22) und (19) rückschließend:<sup>115)</sup>

$$\Phi_P(t) = \frac{1}{2\pi} \int ds \left[ \frac{\delta}{\delta v} \left( \int_{-\infty}^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\Phi(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \int_{-\infty}^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\Phi(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}} \right) \right]$$

Im Gegensatz zur *Fresnelschen* Zonenkonstruktion sind in der Gleichung (105) und (107) die Integrationen über die *ganze*, Lichtquelle und Aufpunkt trennende Fläche auszudehnen; sie spielen die Rolle des *Huyghensschen* Prinzipes, insofern sie die Wirkung in  $P$  zusammensetzen aus sekundären Elementarwellen, welche von einer die Lichtquelle von  $P$  trennenden Fläche ausgehen. Doch sei darauf hingewiesen, daß man dem Faktor von  $d\sigma$  keine physikalische Bedeutung zuschreiben darf. Die Darstellung durch Flächenintegrale wie in diesen Gleichungen ist nämlich unendlich vieldeutig, insofern man jede Lösung von  $\Delta u + k^2 u = 0$ , welche sich in  $P$  wie  $\frac{1}{r}$ , sonst aber in dem von der Lichtquelle abgetrennten Raum regulär verhält, in Gleichung (105) an die Stelle von  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  setzen kann. Mathematisch ist ihre Brauchbarkeit

115) V. Volterra, Acta mathematica 18 (1894). p. 161.

dadurch beschränkt, daß man auf der Integrationsfläche  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  nicht beide willkürlich vorschreiben kann. (Ist der eine von diesen beiden Randwerten gegeben, so bestimmt sich schon daraus  $u$  im ganzen eingeschlossenen Raum eindeutig mit Hilfe von Greenschen Funktionen, sodaß der andere Randwert mitbestimmt ist.<sup>116</sup>) In dem Problem der Beugungstheorie ist ferner von diesen Randwerten meist nicht einmal der eine bekannt, vielmehr kann man beide erst angeben, wenn das Problem gelöst ist. *Kirchhoff* überwindet alle diese Schwierigkeiten durch die Annahme, daß an der Rückseite eines die Lichtquelle abblendenden, undurchsichtigen Schirms  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  beide verschwinden während sie in einer Öffnung dieses Schirmes genau die Werte haben, wie bei einer ungestörten Ausbreitung der Welle. Streng genommen ist mit dieser Annahme die oben vorausgesetzte Stetigkeit verletzt. Dennoch führt dies Verfahren zu weitgehender Übereinstimmung mit der Erfahrung. Eine nachträgliche Rechtfertigung findet es darin, daß, wie alle strengen Lösungen von Beugungsproblemen zeigen, die Bereiche, in denen *Kirchhoff's* Annahme erheblich falsch ist, Abmessungen haben, die nach Wellenlängen zählen. Beschränkt man das angegebene Verfahren auf Fälle, in denen alle Abmessungen groß gegen die Wellenlänge sind, so kann deswegen kein erheblicher Fehler entstehen.

Zuzugeben ist somit, daß die *Kirchhoff'sche* Beugungstheorie nicht den höchsten mathematischen Anforderungen genügt. Ihr Wert liegt in ihrer einfachen Anwendbarkeit auf beliebig gestaltete Öffnungen. Die vorliegenden strengen Lösungen von Beugungsproblemen arbeiten durchweg mit wesentlich schwierigeren Hilfsmitteln und gelten stets nur für eine besondere Form des Hindernisses. Ihre Diskussion hat noch stets zu einer weitgehenden Bestätigung der *Kirchhoff'schen* Theorie geführt (vgl. Nr. 60). Solange es kein allgemeines Verfahren zu ihrer Auffindung gibt, ist die *Kirchhoff'sche* Theorie völlig unentbehrlich.

Für die ungestörte Ausbreitung einer Kugelwelle ergibt Gleichung (105) im Gegensatz zur *Fresnel'schen* Konstruktion auch in der Phase den richtigen Wert von  $u_p$ .

**36. Einteilung der Beugungserscheinungen in Kirchhoffs Theorie; Beobachtungsmethoden, Babinetsches Prinzip.** In *Kirchhoff's* Theorie wird die Lichtquelle zunächst stets punktförmig gedacht. [Zu mehreren oder zu räumlich ausgedehnten Lichtquellen kann man nachträglich nach dem Superpositionsprinzip durch Summation aller Beugungs-

116) Vgl. IV 26, Nr. 6c.

wellen übergehen; sind die Lichtquellen inkohärent, so addieren sich dabei die Intensitäten.] Deshalb setzen wir in Gleichung (105) für die Integrationsfläche

$$u = \frac{e^{-ikr_0}}{r_0},$$

und erhalten

$$(110) \quad u_P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{rr_0} \left\{ ik(\cos(vr) - \cos(vr_0)) + \left( \frac{\cos(vr)}{r} - \frac{\cos(vr_0)}{r_0} \right) \right\} d\sigma.$$

Da eine Vertauschung von Lichtquelle und Aufpunkt (von  $r$  und  $r_0$  sowie der Richtung von  $v$ )  $u_P$  nicht ändert, gilt für beliebige beugende Öffnungen der Reziprozitätssatz: Die Helligkeit, die eine in  $A$  befindliche Lichtquelle in  $B$  hervorruft, findet sich in  $A$ , wenn  $B$  der Ort der Lichtquelle ist.

Ist  $\lambda$  klein gegen  $r$  und  $r_0$ , so findet man unter Vernachlässigung von  $\frac{1}{r}$  und  $\frac{1}{r_0}$  gegen  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$(111) \quad u_P = \frac{ik}{4\pi} \int d\sigma \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{rr_0} (\cos(vr_0) - \cos(vr)).$$

Unzulässig wäre diese Annäherung nur, wenn die beiden Kosinus einander gleich werden könnten; dies ist aber durch die weiteren Beschränkungen ausgeschlossen.

Die beugende Öffnung ist fast stets von einer ebenen Kurve begrenzt<sup>117</sup>), in deren Ebene man die Integrationsfläche verlegt. Dabei dehnt man die Integration nur über die Öffnung aus; nach Nr. 33 braucht man nämlich keine unendlich fernen Flächenstücke und nach der Kirchhoffschen Annahme (Nr. 34) nicht die vom Schirm bedeckten Teile der Trennungsfläche von Aufpunkt und Lichtquelle zu berücksichtigen. Ferner werden die Dimensionen der beugenden Öffnung als groß gegen die Wellenlänge, aber als klein gegen die Entfernungen der Lichtquelle und des Aufpunktes angenommen. Wegen der ersteren Beschränkung liegt das ganze Beugungsphänomen in einem engen Bereich um die Richtung der einfallenden Welle herum, und man kann in Gleichung (111)  $\cos(vr) = -\cos(vr_0)$  setzen. Wegen der zweiten Beschränkung darf man diese Kosinus sowie das Produkt  $rr_0$  im Nenner als konstant ( $\cos(vr) = -\cos(vr_0) = \cos\delta$ ) ansehen und für  $r$  und  $r_0$  im Exponenten Reihenentwickelungen benutzen.

Legt man nämlich in die Ebene der beugenden Öffnung die  $x$ - $y$ -Ebene, wählt man einen Punkt in der Öffnung als Koordinaten-

117) Eine Ausnahme davon siehe bei H. Nagaoka, Journal of the college of science, Imperial University, Japan 4 (1891), p. 301, wo als Beispiel der Spalt auf einem Kreiszyylinder behandelt wird.

anfang und gibt man der  $z$ -Achse die Richtung nach dem Aufpunkt hin, so wird

$$r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2} \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2},$$

wo  $x_0, y_0, z_0$  der Lichtpunkt,  $x, y, z$  der Aufpunkt,  $\xi, \eta$  die Koordinaten von  $d\sigma$  sind. Bis auf Größen von der Ordnung  $(\xi/R)^3$  findet man dann

$$(112) \quad \begin{aligned} r_0 &= R_0 - \frac{\xi x_0 + \eta y_0}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} - \frac{(\xi x + \eta y_0)^2}{2R_0^3} \\ r &= R - \frac{\xi x + \eta y}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(\xi x + \eta y)^2}{2R^3} \\ R_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Man findet so aus (111):

$$(113) \quad u_P = \frac{ik \cos \delta}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ik(R+R_0)}}{R_0 R} \int d\sigma e^{ikf(\xi, \eta)},$$

wo zur Abkürzung

$$(114) \quad f(\xi, \eta) = \xi(\alpha - \alpha_0) + \eta(\beta - \beta_0) - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(\xi \alpha_0 + \eta \beta_0)^2}{R_0} - \frac{(\xi \alpha + \eta \beta)^2}{R} \right\}$$

eingeführt ist und

$$(115) \quad \alpha_0 = -\frac{x_0}{R_0}, \quad \beta_0 = -\frac{y_0}{R_0} \quad \alpha = \frac{x}{R}, \quad \beta = \frac{y}{R},$$

die Richtungskosinus der Fahrstrahlen von der Lichtquelle zur Öffnung und von dieser zum Aufpunkt sind. Muß man hier die quadratischen Glieder beibehalten, so spricht man von *Fresnelschen* Beugungserscheinungen.

Behält man nur die linearen Glieder bei (*Fraunhofersche* Beugungserscheinungen), so heißt dies, daß man im Bereiche der beugenden Öffnung die einfallende Welle als eben ansehen darf, desgleichen eine Welle, die vom Aufpunkt ausginge. Beide Bedingungen werden am besten erfüllt, wenn man Lichtquelle und Aufpunkt in die Brennebenen zweier Linsen verlegt, also mit Kollimator und auf Unendlich eingestelltem Fernrohr beobachtet. Man gewinnt so gegenüber der Beobachtung auf einem weit entfernten Schirm an Schärfe und Lichtstärke.<sup>118)</sup> Die Größen  $\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0$  werden, wenn das Fernrohr senkrecht zur beugenden Öffnung steht, mit hinreichender Annäherung rechtwinklige Koordinaten in der Brennebene, gemessen vom Orte des geometrisch-optischen Bildes aus. Da der Wert von  $|u_P|^2$  nur noch von diesen Differenzen abhängt, so bleibt bei einer Parallelverschie-

118) *J. v. Fraunhofer*, Denkschriften der Münch. Akademie 8 (1822), p. 1; Ges. Abhandl. München 1888, p. 51.

bung der beugenden Öffnung in ihrer Ebene oder senkrecht dazu die Beugungserscheinung unverändert.

Ähnlich benutzt man auch bei den *Fresnelschen* Beugungserscheinungen vielfach optische Vergrößerung, um eng nebeneinanderliegende Intensitätsmaxima oder -minima sichtbar zu machen. In allen diesen Fällen beruft man sich auf den Satz, daß in einem optischen Bildpunkt alle Wellen genau mit der Phasendifferenz interferieren, wie im Objektpunkt, weil die optische Weglänge zwischen beiden konstant ist. Richtig ist dies nur, solange man von der Beugung an den Rändern der Linsen usw. absehen kann. Eine eigentlich wellentheoretische Begründung dieses Satzes ist bis jetzt noch nicht gegeben.

Für beide Arten von Beugungserscheinungen gilt das *Babinetsche Prinzip*.<sup>119)</sup> Wir betrachten drei verschiedene Fälle von Beugung derselben Kugelwelle. Einmal ist die beugende Öffnung so groß, daß die Beugungsfigur sich fast ganz auf das geometrisch-optische Bild zusammenzieht ( $u_1$ ). Sodann blenden wir einen Teil dieser Öffnung durch einen sehr viel kleineren Schirm ab ( $u_2$ ). Drittens lassen wir die Beugung erfolgen an einer Öffnung, welche nach Lage und Größe mit diesem Schirm übereinstimmt ( $u_3$ ). Aus Gleichung (113) folgt

$$u_2 + u_3 = u_1.$$

Da nach Voraussetzung in einiger Entfernung vom geometrisch-optischen Bilde  $u_1$  verschwindet, so ist hier

$$|u_2|^2 = |u_3|^2,$$

d. h. die Beugungsbilder einer Öffnung und eines gleichgestalteten Schirmes stimmen abgesehen von der Umgebung des geometrisch-optischen Bildes der Lichtquelle überein. (Vgl. Nr. 65.)

**37. Fraunhofersche Beugungserscheinungen.** a) *Beugung am Rechteck und Spalt.* Aus (113) und (114) folgt bei Fortlassung der in  $\xi$  und  $\eta$  quadratischen Glieder für  $u_P$ , abgesehen von konstanten, nur die Gesamtintensität und Phase beeinflussende Faktoren:

$$(116) \quad u_P = - \int \int d\xi d\eta e^{ik(\xi(\alpha - \alpha_0) + \eta(\beta - \beta_0))}.$$

Wir legen die Achsen parallel zu den Seiten des Rechtecks, deren Längen  $2A$  und  $2B$  sind. Dann wird

$$(117) \quad u_P = - \int_{-A}^{+A} d\xi e^{ik\xi(\alpha - \alpha_0)} \int_{-B}^{+B} d\eta e^{ik\eta(\beta - \beta_0)} \\ = 4AB \frac{\sin(kA(\alpha - \alpha_0))}{kA(\alpha - \alpha_0)} \frac{\sin(kB(\beta - \beta_0))}{kB(\beta - \beta_0)}.$$

119) A. Babinet, Paris C. R. 4 (1837), p. 638.

Die Funktion  $\sin x/x$  hat für  $x = 0$  ihr absolutes Maximum vom Wert 1; für  $x = h\pi$  verschwindet sie. Linien verschwindender Intensität sind somit die Geraden

$$(117a) \quad \alpha - \alpha_0 = h_\alpha \frac{\lambda}{2A} \quad \beta - \beta_0 = h_\beta \frac{\lambda}{2B}$$

( $h_\alpha, h_\beta$  ganze Zahlen mit Ausnahme von 0). Eine Tabelle für diese Funktion gibt *H. Schwerd*.<sup>120)</sup> Eine gute Abbildung der Beugungsfigur findet sich bei *E. Abbe*.<sup>121)</sup> Die Figur 9 stellt die Kurve  $\frac{\sin^2 x}{x^2}$  dar.

Wird  $B \gg A$ , so wird das Rechteck zum schmalen Spalt, und es zieht sich die Beugungsfigur immer mehr auf die Linie  $\beta = \beta_0$  zusammen.

Eine zur  $y$ -Achse parallele, sehr lange Linie inkohärenter Lichtpunkte (enger Beleuchtungsspalt, glühender Draht) liefert nach (117) die Intensität

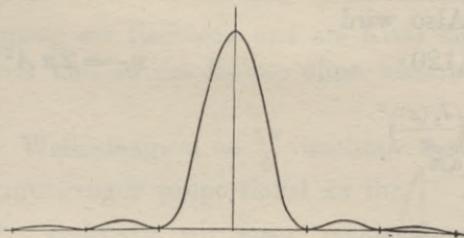


Fig. 9.

$$(118) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_P|^2 d\beta_0 = \left( 4AB \frac{\sin(kA(\alpha - \alpha_0))}{kA(\alpha - \alpha_0)} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 kB(\beta - \beta_0)}{(kB(\beta - \beta_0))^2} d\beta_0$$

$$= \frac{16\pi}{k} A^2 B \frac{\sin^2(kA(\alpha - \alpha_0))}{(kA(\alpha - \alpha_0))^2}.$$

Dem da

$$\int \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = -\frac{\sin^2 \omega}{\omega} + \int \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\omega} d\omega,$$

so ergibt sich, wenn man die Grenzen  $\pm \infty$  einsetzt,

$$(118a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \pi.$$

Hier sind die Linien gleicher Intensität parallel zur  $y$ -Achse.

b) *Beugung am Kreis*.<sup>122)</sup> Man führt in der Ebene des Kreises und im Gesichtsfeld Polarkoordinaten ein:

$$\xi = P \cos \Theta \quad \eta = P \sin \Theta$$

$$\alpha - \alpha_0 = \varrho \cos \vartheta \quad \beta - \beta_0 = \varrho \sin \vartheta.$$

120) *F. M. Schwerd*, vgl. Anm. 111.

121) *E. Abbe*, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop. Braunschweig 1912, p. 42.

122) Vgl. Anm. 110. *Schwerd* (Anm. 111) behandelt statt des Kreises ein reguläres 180-Eck.

Dann wird nach (116)

$$u_P = \int_0^A P dP \int_0^{2\pi} d\Theta e^{ikPQ \cos(\Theta - \vartheta)} = \int_0^A P dP \int_0^{2\pi} d\Theta e^{ikPQ \cos \Theta}.$$

$A$  ist der Radius der Öffnung. Nun ist nach bekannten Formeln aus der Theorie der *Besselschen* Funktionen

$$(119) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta e^{ix \cos \Theta} = J_0(x), \quad \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x).$$

Also wird

$$(120) \quad u_P = 2\pi A^2 \frac{J_1(kA\varrho)}{kA\varrho}.$$

$$\left(\frac{J_1(x)}{x}\right)^2$$

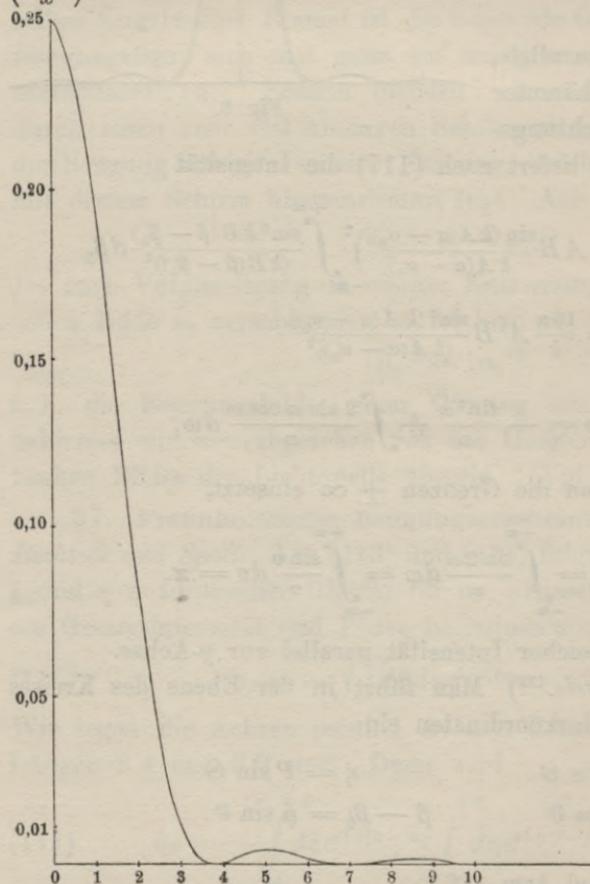


Fig. 10.

Der Quotient  $\frac{J_1(x)}{x}$  hat für  $x=0$  sein absolutes Maximum vom Werte  $\frac{1}{2}$ ; seine Nullstellen liegen bei

$$x = 1,220\pi, 2,233\pi, 3,238\pi \text{ usw.}$$

Die Intensität verschwindet somit längs der konzentrischen Kreise mit den Radien

$$(120a) \quad \varrho = 0,610 \frac{\lambda}{A}, \\ 1,116 \frac{\lambda}{A}, 1,619 \frac{\lambda}{A}.$$

Die Figur 10 stellt einen Querschnitt durch das „Lichtgebirge“ dar. Die Intensität in den Ringen zwischen den Nulllinien ist gegen die im Mittelpunkt herrschende so gering, daß man meist nur bei sehr hellen Lichtquellen diese Ringe wahrnimmt.

Mit denselben mathematischen Hilfsmitteln läßt sich auch die Beugung am Kreisring behandeln (*Airy* Anm. 110).

c) *Veränderung des Beugungsbildes bei linearer Deformation der beugenden Öffnung.* Setzt man in Gleichung (116)  $m\xi$  für  $\xi$ ,  $n\eta$  für  $\eta$ , dafür aber  $\frac{\alpha - \alpha_0}{m}$  für  $\alpha - \alpha_0$  und  $\frac{\beta - \beta_0}{n}$  für  $\beta - \beta_0$ , so behält das Integral, abgesehen von dem Faktor  $mn$ , seinen Wert. Daraus folgt: Vergrößert man alle Abmessungen der beugenden Öffnung auf das  $m$ -fache in der  $x$ -, auf das  $n$ -fache in der  $y$ -Richtung, so verkleinern sich die Abmessungen des Beugungsbildes auf  $\frac{1}{m}$  in der  $x$ -Richtung, auf  $\frac{1}{n}$  in der  $y$ -Richtung. Nach diesem wohl von *Lommel*<sup>123)</sup> herrührenden Satz kann man aus der Beugung am Rechteck und am Kreis die am schiefwinkligen Parallelogramm und an der Ellipse ohne weiteres herleiten.

Bei einer Veränderung der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  wachsen nach (116) alle Abmessungen der Beugungsfigur proportional zu ihr.

**38. Talbotsche Streifen.**<sup>124)</sup> Bedecken wir einen rechteckigen Spalt von der Breite  $2A$  zur Hälfte mit einer Glasplatte von der Dicke  $D$  und dem Brechungsindex  $\nu$ , so erhalten wir infolge Interferenz der an den beiden Spalthälften gebeugten Wellen nach Gleichung (57) bei *Fraunhoferscher* Beugung die Intensität

$$J(\alpha) = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kA(\alpha - \alpha_1))}{(\frac{1}{2}kA(\alpha - \alpha_1))^2} \cos^2 \{ \frac{1}{2}k[A(\alpha - \alpha_1) - D(\nu - 1)] \}.$$

Bei Benutzung einer Lichtlinie  $\alpha_1 = \text{konst.}$  ist die Intensität unabhängig von  $\beta$ . Jetzt soll als Lichtquelle ein kontinuierliches Spektrum dienen, d. h. eine stetige Folge derartiger Lichtlinien mit wechselnder Wellenlänge; so werden  $\lambda$  und  $k$ , deshalb auch  $\nu$ , Funktionen von  $\alpha_1$ , ebenso wie die Helligkeit dieser Linien  $f(\alpha_1)$ . Im Beugungsbilde wird so die Intensität an der durch  $\alpha$  angegebenen Stelle

$$J(\alpha) = \int f(\alpha_1) \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kA(\alpha - \alpha_1))}{(\frac{1}{2}kA(\alpha - \alpha_1))^2} \cos^2 \{ \frac{1}{2}k[A(\alpha - \alpha_1) - D(\nu - 1)] \} d\alpha_1$$

Da  $A \gg \lambda$  sein soll, so fällt der Quotient schnell von seinem Maximalwerte herab bis zu unmerklich kleinen Werten, wenn  $\alpha_1$  sich von  $\alpha$  entfernt. Die Funktion  $f(\alpha_1)$  nehmen wir als so langsam veränderlich an, daß sie in dem Bereiche, in welchem der Quotient noch

123) *G. Kirchhoff* (Vorl. über mathem. Optik, Leipzig 1891, p. 95) schreibt ihm *E. Lommel* zu, ohne das Nähere anzugeben.

124) *H. F. Talbot*, Phil. Mag. 10 (1837), p. 364; *D. Brewster*, Brit. Association Rep. 7 (1837), p. 12; *G. B. Airy*, Ann. Phys. Chem. 53 (1841), p. 459; 58 (1843), p. 535; *James Walker*, Phil. Mag. 11 (1906), p. 531; *R. W. Wood*, Phil. Mag. 18 (1909), p. 758 (mit einem Photographum).

merklich ist, als konstant betrachtet werden kann. Aus demselben Grund können wir die Integration von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ausführen. Ferner sehen wir von der Veränderlichkeit des  $k$  überall ab, wo  $k$  mit  $\alpha - \alpha_1$  multipliziert auftritt, weil die Berücksichtigung seiner Veränderlichkeit nur Glieder mit  $(\alpha - \alpha_1)^2$  usw. hinzufügen würde. Dagegen müssen wir

$$kD(\nu - 1) = D\left[k_0(\nu_0 - 1) - (\alpha - \alpha_1) \frac{d(k(\nu - 1))}{d\alpha_1}\right]$$

setzen. Dabei ist  $2\pi/k_0$  eine mittlere von den Wellenlängen, für die der Sinusquotient einen noch in Betracht kommenden Wert hat; groß ist der so frei bleibende Spielraum nicht, weil  $k$  nach dem Gesagten eine Funktion von  $\alpha_1$  ist und bei gegebenem  $\alpha_1$  jener Quotient nur in einem geringen, den Wert  $\alpha$  umgebenden Bereich von  $\alpha_1$  wesentlich von 0 verschieden ist.  $k_0$  ist somit im folgenden als Funktion von  $\alpha$  zu betrachten (desgleichen der zugehörige Wert  $\nu_0$  des Brechungsindex). Bei einer stetigen Veränderung von  $\alpha$  streicht der zugehörige Bereich von  $\alpha_1$  über alle vorkommenden Werte von  $\alpha_1$  hin, es durchläuft die Wellenlänge  $2\pi/k_0$  somit das ganze Spektrum. Führen wir schließlich

$$(121) \quad \frac{1}{2}k_0 A(\alpha - \alpha_1) = \omega \quad l = 1 + \frac{2D}{k_0 A} \frac{d(k(\nu - 1))}{d\alpha_1}, \quad m = k_0 D(\nu_0 - 1)$$

ein, so finden wir für die Intensität bis auf den konstanten Faktor  $\frac{2}{k_0 A}$ :

$$(122) \quad J(\alpha) = f(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cos^2(l\omega - m) d\omega$$

Zur Berechnung dieses Integrals dient die Formel (118a), aus welcher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 p \omega}{\omega^2} d\omega = |p| \pi$$

folgt. Mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned} & \sin^2 \omega \cos^2(l\omega - m) \\ &= \frac{1}{2}[\sin^2 \omega + \cos 2m \sin^2 \omega \cos 2l\omega + \sin 2m \sin^2 \omega \sin 2l\omega] \end{aligned}$$

verwandelt sich das Integral in (122) in die Summe von drei anderen Integralen, von denen das letzte verschwindet. Setzen wir in dem zweiten

$$\sin^2 \omega \cos 2l\omega = \frac{1}{2}[\sin^2(l+1)\omega + \sin^2(l-1)\omega] - \sin^2 l\omega,$$

so finden wir für (122):

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{2} f(\alpha) \left[ 1 + \frac{|l+1| + |l-1| - 2|l|}{2} \cos 2m \right].$$

Der Faktor des Kosinus ist hier 0, wenn  $|l| > 1$ , er ist  $1 - |l|$ , wenn  $|l| < 1$ . Da hier  $m$  nach (121) wie  $k_0$  als Funktion von  $\alpha$  zu betrachten ist, variiert im letzteren Fall die Intensität mit  $\alpha$  nach einem Kosinusetz; d. h. es treten im Spektrum Interferenzstreifen auf; damit aber  $|l| < 1$  sein kann, muß nach (121)

$$\frac{d(k(\nu-1))}{d\alpha_1} < 0$$

sein. Durchläuft man ein Spektrum vom roten zum violetten Ende, so nehmen  $k$  und  $\nu$  gleichzeitig zu; verschiebt man die Lichtquelle in der positiven  $x$ -Richtung, so nimmt  $\alpha_1$  wie  $\alpha_0$  wegen des negativen Vorzeichens in (115) ab. Bedingung für die Sichtbarkeit von Interferenzstreifen ist infolgedessen, daß das violette Ende des Spektrums auf der Seite der positiven  $x$ , d. h. auf der Seite der mit der Glasplatte bedeckten Spaltseite liegt (vgl. Nr. 18 Figur).

Ist diese Bedingung erfüllt, so nimmt mit von 0 an wachsendem  $D$  und abnehmendem  $l$  der Faktor von  $\cos m$  und damit die Sichtbarkeit der Streifen bei 0 beginnend zunächst zu und erreicht den Maximalwert 1, wenn  $l = 0$ , d. h. nach (121)

$$(123) \quad D = \frac{k_0 A}{2} \cdot \frac{-1}{\frac{d(k(\nu-1))}{d\alpha_1}}$$

wird. Bei weiterem Wachsen nimmt dieser Faktor wieder ab, um gänzlich und für immer zu verschwinden, sowie  $l = -1$ , d. h.

$$(124) \quad D = k_0 A \frac{-1}{\frac{d(k(\nu-1))}{d\alpha_1}}$$

wird. Da der hier auftretende Differentialquotient nicht im ganzen Spektrum konstant ist, werden beide Werte für verschiedene Teile des Spektrums verschieden sein.

Für den Fall einer zur Hälfte bedeckten kreisförmigen Öffnung behandelt *Struve*<sup>125)</sup> das Problem; das Ergebnis ist dasselbe.

Eine anschauliche, dem Wesen nach aber mit der obigen übereinstimmende Deutung dieser Streifen gibt *Schuster*.<sup>126)</sup> Eine Strahlung von kontinuierlichem Spektrum falle senkrecht auf das Gitter  $G$  (Fig. 11); die Linse  $L_1$  mag so gestellt sein, daß in ihrer Brennebene  $F_1 F_1'$  ein Spektrum erster Ordnung liegt. Dessen violettes Ende liegt

125) *H. Struve*, Mém. Acad. sc. St Pétersbourg 31 (1883), p. 1.

126) *A. Schuster*, Phil. Mag. (6) 7 (1904), p. 1.

dann bei  $F_1'$ . Durch eine zweite Linse  $L_2$ , welche am Orte des von  $L_1$  entworfenen Bildes von  $G$  zu denken ist, werde dies auf die Ebene

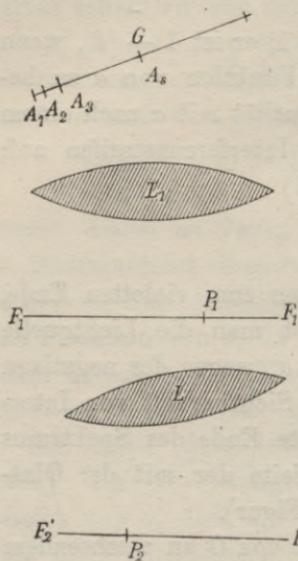


Fig. 11.

$F_2F_2'$  abgebildet. Die Strahlung denken wir uns nun als unregelmäßige Folge kurzer Impulse und fragen, was das Auftreffen einer einzigen ebenen Impulswelle für Folgen hat. Diese gibt nun (vgl. Nr. 28) an jedem Gitterelemente  $A_1A_2\dots$  Anlaß zu einer kugeligen Impulswelle; in einem Punkt  $P_1$  von  $F_1F_1'$  und ebenso im konjugierten Punkt  $P_2$  von  $F_2F_2'$  treffen diese Impulse in dem Zeitabstande voneinander ein, der gleich der Periode der in diesen Punkten vorherrschenden Sinusschwingung ist. Zum Zustandekommen von Interferenzen zwischen den genannten Impulsen in  $P_2$  ist es notwendig, die früher ankommenden aufzuhalten; am besten gerade die Hälfte von allen, und zwar um so viel Zeit, daß die von  $A_1$  und  $A_n$  kommenden gleichzeitig eintreffen. Das kann durch eine

die linke Hälfte des Gitters oder, da dies durch  $L_1$  auf  $L_2$  abgebildet wird, die rechte Hälfte der Linse  $L_2$  bedeckende Glasplatte geschehen; während ein Einschieben dieser Platte vor die linke Hälfte von  $L_2$  offenbar unwirksam wäre. Ebenso wird unmittelbar anschaulich, warum es für deren Dicke  $D$  (vgl. (123)) einen zum Linsenradius proportionalen günstigsten Wert gibt, und warum die Erscheinung wieder verschwindet, wenn man  $D$  (vgl. (124)) mehr wie doppelt so groß wählt.

**39. Die Fresnelschen Beugungserscheinungen.** a) *Die Fresnelschen Integrale.*<sup>127)</sup> Behält man in Gleichung (113) die in  $\xi$  und  $\eta$  quadratischen Glieder der Reihenentwicklung (114) bei, so kann man durch geeignete lineare Substitutionen stets die linearen Glieder fort-schaffen und gelangt so vielfach zu Integralen von der Form

$$(125) \quad F(u) = \int_0^u e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv$$

Den reellen und den imaginären Bestandteil dieses Integrales

127) A. Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumière, Mém. de l'Acad. d. sciences 5 (1818), p. 339; Ann. d. chim. et d. phys. (2) 11, p. 246 u. 337; Oeuvres 1, p. 247; A. Cauchy, C. R. 2 (1836), p. 455; 15 (1842), p. 534 und 578; K. W. Knochenhauer, Pogg. Ann. 41 (1837), p. 103.

$$(126) \quad C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv, \quad S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv,$$

bezeichnet man als die *Fresnelschen* Integrale.

Die Integration ist hier zunächst für reelle Werte von  $v$  auszuführen. Um  $F(\infty)$  zu berechnen, führen wir die Integration aber besser in der Ebene der komplexen Variablen  $v = x + iy$  längs der Geraden  $x = y$  vom Koordinatenanfang bis zu unendlich großen positiven Werten von  $x$ , um dann auf einem Teil des unendlich großen Kreises um den Anfangspunkt zur  $x$ -Achse zurückzukehren. Der zweite Teil dieses Integrationsweges liefert wegen

$$e^{i\frac{\pi}{2}v^2} = e^{\frac{\pi}{2}[i(x^2 - y^2) - 2xy]}$$

den Beitrag 0; denn  $x$  und  $y$  sind auf ihm beide positiv und  $x$  unendlich. Für den ersten Teil ist

$$iv^2 = -2x^2, \quad dv = dx(1 + i)$$

$$\int e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv = (1 + i) \int_0^\infty e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Somit wird

$$(127) \quad F(\infty) = \int_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv = \frac{1}{2}(1 + i), \quad C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{4}.$$

Um uns den Verlauf der Funktionen  $C(u)$  und  $S(u)$  zu veranschaulichen, bestimmen wir die Kurve, welche ein Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten  $C(u)$  und  $S(u)$  mit wachsendem  $u$  durchläuft. Da  $C(-u) = -C(u)$ ,  $S(-u) = -S(u)$ , liegt diese Kurve zum Anfangspunkt symmetrisch; sie geht durch den Nullpunkt. Da ferner

$$dC = du \cos \frac{\pi}{2}u^2, \quad dS = du \sin \frac{\pi}{2}u^2,$$

gelten für die Bogenlänge  $s$  (gerechnet vom Koordinatenanfang), den Neigungswinkel  $\tau$  gegen die  $C$ -Achse und den Krümmungsradius  $R$  die Formeln:

$$(128) \quad ds = \sqrt{dC^2 + dS^2} = du, \text{ also } s = u;$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dS}{dC} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}u^2 \text{ also } \tau = \frac{\pi}{2}s^2; \quad \frac{1}{R} = \frac{d\tau}{ds} = \pi s.$$

Die Kurve hat somit im Koordinatenanfang ( $s = 0$ ) einen Wendepunkt und berührt die  $C$ -Achse, für  $s = 1$  ist sie parallel zur  $S$ -Achse für  $s = \sqrt{2}$  wieder parallel zur  $C$ -Achse usw. Da ihre Krümmung dauernd wächst, besteht sie in einer sich nicht schneidenden, die (für

$s = \pm \infty$  erreichten) Punkte  $C = S = \pm \frac{1}{2}$  unendlich oft umkreisenden Doppelspiralen (*Cornusche Spirale*)<sup>128)</sup> (vgl. Fig. 12). Das komplexe Integral  $F(u)$  ist nach Richtung und Größe durch den Radiusvektor vom Anfangspunkte zum Punkt  $s = u$  dargestellt.

Ähnlich ist das Integral

$$\int_{-\infty}^u e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv = F(u) - F(-\infty)$$

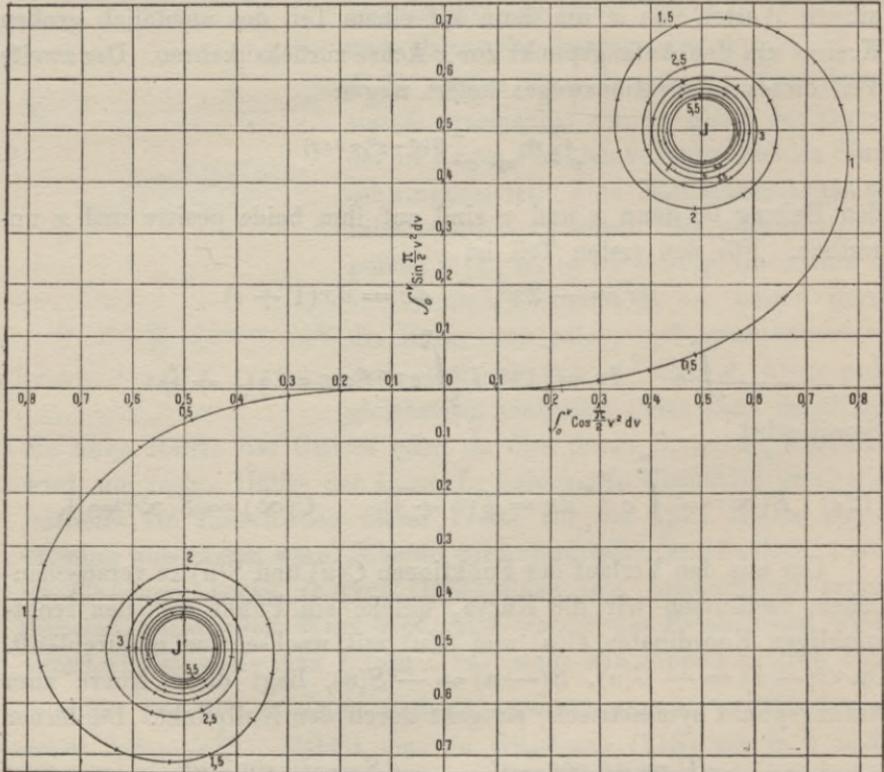


Fig. 12.

als Vektor vom negativen Windungspunkt aus zu deuten. Der absolute Wert hat bei beiden Integralen Maxima nahe bei

$$(129) \quad u = \sqrt{\frac{3}{4}} \pi, \quad \sqrt{\frac{11}{4}} \pi \dots \quad \sqrt{\frac{8h+3}{4}} \pi \varrho,$$

Minima nahe bei

$$(130) \quad u = \sqrt{\frac{7}{4}} \pi, \quad \sqrt{\frac{15}{4}} \pi, \dots \quad \sqrt{\frac{8h-1}{4}} \pi.$$

Das erste dieser Maxima ist das höchste, das erste der Minima das

128) A. Cornu, Journ. d. Phys. 3 (1874), p. 1, 44; Paris C. R. 78 (1874), p. 113.

tiefste; mit fortschreitendem  $h$  flachen Maxima und Minima mehr und mehr ab.

Zur numerischen Berechnung von  $F(u)$  kann einmal die überall konvergente Reihe

$$F(u) = u \left( 1 + \frac{\left(\frac{i\pi}{2}u^2\right)^2}{1 \cdot 3} + \frac{\left(\frac{i\pi}{2}u^2\right)^3}{2! \cdot 5} + \frac{\left(\frac{i\pi}{2}u^2\right)^4}{3! \cdot 7} + \dots + \frac{\left(\frac{i\pi}{2}u^2\right)^n}{n! (2n+1)} + \dots \right)$$

dienen, die sich aus der Potenzentwicklung von  $e^{\frac{i\pi}{2}v^2}$  ergibt; nach ihr berechnet *Lommel*<sup>129)</sup> die Werte für  $0 < u < \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . Da sie außerhalb des angegebenen Bereiches zu langsam konvergiert, ist für große  $u$  eine nach fallenden Potenzen von  $u$  fortschreitende, von *Lommel*, *Gilbert*<sup>130)</sup>, *Ignatowski*<sup>131)</sup> benutzte Reihe zweckmäßiger, die bei *Kirchhoff*<sup>132)</sup> auch zur allgemeinen Diskussion benutzt wird. Ausgehend von der Identität

$$\int \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^n} dv = \int \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^{n+1}} v dv = \frac{1}{i\pi} \left[ \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^{n+1}} + (n+1) \int \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^{n+2}} dv \right],$$

aus der für positive  $u$

$$\int_u^\infty \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^n} dv = \frac{1}{i\pi} \left[ -\frac{e^{\frac{i\pi}{2}u^2}}{u^{n+1}} + (n+1) \int_u^\infty \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^{n+2}} dv \right]$$

folgt, findet man nach (127):

$$(131) \quad F(u) = \frac{1}{2} (1 + i) + \frac{e^{\frac{i\pi}{2}u^2}}{i\pi u} \left\{ 1 + \sum_1^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{(i\pi u^2)^m} \right\} \\ - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(i\pi)^{n+1}} \int_u^\infty \frac{e^{\frac{i\pi}{2}v^2}}{v^{2n+2}} dv.$$

Die hier auftretende Summe wäre, ins Unendliche fortgesetzt, zwar nicht konvergent, da ihre Glieder nur anfangs abnehmen. Da aber

129) *E. Lommel*, Abh. d. Kgl. bayerischen Akad. d. W. 15 (1886), p. 120.

130) *Ph. Gilbert*, Mém. cour. Acad. Bruxelles 31 (1863), p. 1; vgl. auch *A. Winkelmann*, Handbuch der Physik VI, Leipzig 1906, p. 1053.

131) *W. v. Ignatowsky*, Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 875; vgl. auch *E. Jahnke* und *F. Emde*, Funktionstabellen mit Formeln und Kurven, Leipzig und Berlin 1909, p. 23.

132) *G. Kirchhoff*, Vorl. über math. Optik, Leipzig 1891, p. 122 u. f.

der absolute Wert des Restes

$$\left| \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(i\pi)^{n+1}} \int_u^\infty \frac{e^{i\frac{\pi}{2}v^2}}{v^{2n+2}} dv \right| < \left| \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(i\pi u^2)^{n+1}} \right|,$$

also kleiner als der absolute Wert des letzten Summanden ist, wird bei Fortlassung des Integrales in (129) der Fehler kleiner als das letzte Glied, das man noch berücksichtigt. Für mittlere Werte von  $u$  führt Lommel<sup>133)</sup>  $C(u)$  und  $S(u)$  auf Besselsche Funktionen zurück. Da nämlich

$$C(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi u^2} \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi u^2} J_{-\frac{1}{2}}(z) dz,$$

$$S(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi u^2} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi u^2} J_{\frac{1}{2}}(z) dz,$$

so gilt:

$$C = J_{\frac{1}{2}} + J_{\frac{5}{2}} + J_{\frac{9}{2}} + \dots, \quad S = J_{\frac{3}{2}} + J_{\frac{7}{2}} + J_{\frac{11}{2}} + \dots$$

als Argumente von  $C$  und  $J_k$  bzw. von  $S$  und  $J_k$  sind dieselben Werte zu wählen.

b) Die Beugung am Spalt.

In Fig. 13 soll  $Q$  die Lichtquelle,  $P$  der Aufpunkt, die Gerade  $E$  eine Darstellung der Ebene sein, welche die beugende Öffnung enthält. Als Anfangspunkt der Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  in ihr wählen wir den Durchstoßpunkt  $O$  der Geraden  $PQ$ . Dann wird nach (115)  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$ , somit nach (114)

$$f(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) [(\xi^2 + \eta^2) - (\xi\alpha + \eta\beta)^2].$$

Hier ist  $\xi\alpha + \eta\beta$  gleich der Projektion  $MN$  der Strecke  $OM$  auf die Gerade  $PQ$ , vorausgesetzt, daß  $\xi, \eta$  die Koordinaten von  $M$  sind;

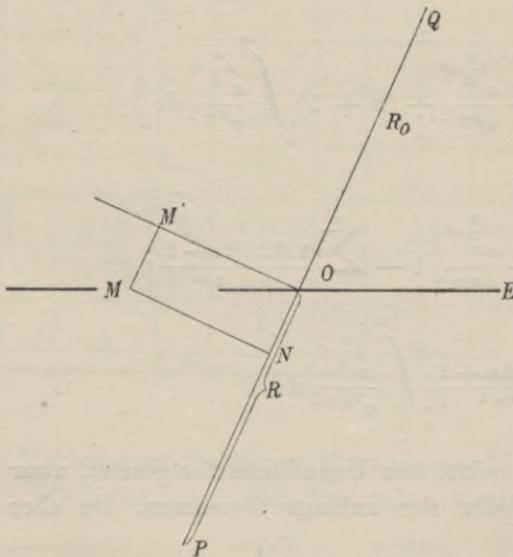


Fig. 13.

somit ist  $(\xi^2 + \eta^2) - (\xi\alpha + \eta\beta)^2 = OM'^2$ , wo  $OM'$  die Projektion derselben Strecke auf die zu  $PP_0$  senkrechte Ebene bedeutet. Führt man in der letzteren die Koordinaten  $\xi', \eta'$  ein, so wird

$$f(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) (\xi'^2 + \eta'^2),$$

und wenn man schließlich von diesen zu den Variablen

$$(132) \quad v = \sqrt{\frac{k}{\pi} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \xi', \quad w = \sqrt{\frac{k}{\pi} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \eta'$$

übergeht, so folgt aus (113) bis auf einen konstanten Faktor:

$$(133) \quad u_P = \iint \bar{d}v \bar{d}w e^{-\frac{i\pi}{2}(v^2 + w^2)}.$$

Wir wenden diese Formel auf eine rechteckige Öffnung an, zu deren Seiten,  $2A$  und  $2B$ , wir die Koordinatenachsen parallel legen.

Die Lichtquelle  $Q$  soll sich mitten über der Öffnung, der Aufpunkt  $P$  in der zum Seitenpaar  $B$  senkrechten Symmetrieebene, der Zeichenebene von Fig. 14 befinden. Die Integration nach  $w$  in (133) ist dann von

$$-\sqrt{\frac{k}{\pi} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} B$$

bis

$$+\sqrt{\frac{k}{\pi} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} B$$

zu erstrecken und lie-

fert einfach einen von der Richtung der Geraden  $PQ$  unabhängigen Faktor, für den man bei einem hinreichend großen Wert von  $B$  (bei einem langen Spalt) nach (127)  $1 + i$  setzen kann. Unterdrückt man ihn, so wird

$$(134) \quad u_P = \int_{v_2}^{v_1} e^{-i\frac{\pi}{2}v^2} dv,$$

wo nach (132) unter Vernachlässigung von  $x^2$  gegen  $(R_0 + R)^2$ , d. h. bei Vertauschung von  $\xi'$  mit  $\xi$

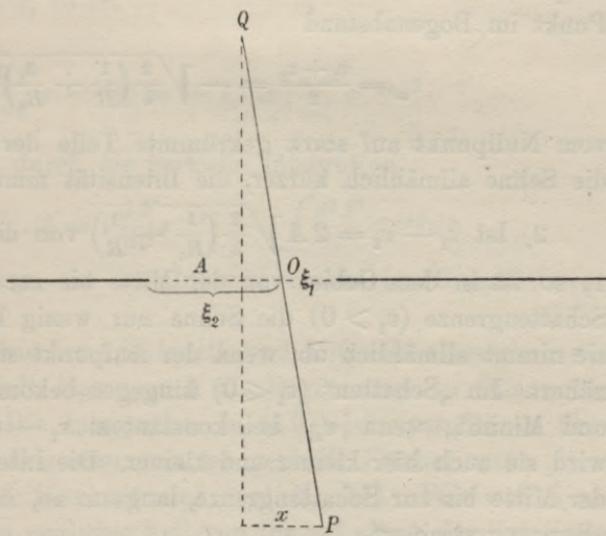


Fig. 14.

$$(135) \quad \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \left( A - \frac{x R_0}{R + R_0} \right) \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \xi_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \left( -A - \frac{x R_0}{R + R_0} \right) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Die Intensität  $|u_P|^2$  ist infolgedessen gleich dem Quadrat der Sehne der Cornuschen Spiralen, welche die um die Bogenlängen  $v_1$  und  $v_2$  vom Nullpunkt abstehenden Punkte auf ihr verbindet.

Die Diskussion, bei welcher wir  $x$  als positiv annehmen wollen, ergibt in Hinblick auf (129) und (130):

1) Ist  $v_1 - v_2 = 2A \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \ll 1$ , so ist die Sehne nahe gleich der Bogenlänge  $v_1 - v_2$  zwischen ihren Endpunkten, die Intensität  $|u_P|^2$  somit von  $x$  unabhängig. Erst, wenn der Abstand  $x$  des Aufpunktes von der Mittelebene des Spaltes so groß wird, daß der Punkt im Bogenabstand

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = - \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \frac{x R_0}{R + R_0}$$

vom Nullpunkt auf stark gekrümmte Teile der Spiralen gerät, wird die Sehne allmählich kürzer, die Intensität nimmt somit ab.

2) Ist  $v_1 - v_2 = 2A \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)}$  von der Größenordnung von 1, so ist in dem Gebiet von der Mitte bis zur geometrisch-optischen Schattengrenze ( $v_1 > 0$ ) die Sehne nur wenig kleiner als der Bogen, sie nimmt allmählich ab, wenn der Aufpunkt sich der Schattengrenze nähert. Im „Schatten“ ( $v_1 < 0$ ) hingegen bekommt die Sehne Maxima und Minima, wenn  $|v_m|$  bei konstantem  $v_1 - v_2$  wächst; schließlich wird sie auch hier kleiner und kleiner. Die Intensität nimmt also von der Mitte bis zur Schattengrenze, langsam ab, im Schatten aber liegen „Beugungstreifen“.

3) Ist  $v_1 - v_2 = 2A \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)} \gg 1$ , so liegen die Punkte  $v_1$  und  $v_2$  schon für  $x = 0$  in den Windungen der Spiralen; es finden sich deshalb schon diesseits der Schattengrenze Maxima und Minima der Intensität. Ob in der Mitte selbst ein Maximum oder Minimum auftritt, hängt von den Umständen ab; bei wachsendem Abstand  $R$  vom Spalt z. B. wechseln helle und gegen die Umgebung dunkle Streifen miteinander ab. Nach Überschreiten der Schattengrenze erfolgt das Abklingen der Intensität weit schneller als in den Fällen 1) und 2).

Ganz ähnlich verläuft die Berechnung der Beugung an einem geradlinig begrenzten schmalen Schirm und an zwei Spalten (Ver-

sich von *Young*<sup>134)</sup>). Etwas schwieriger gestaltet sich die Theorie für eine kreisförmige Öffnung.<sup>135)</sup> Über die Beugungserscheinungen an einer einzelnen Kante vgl. Nr. 60.

**40. Die geometrische Optik als Grenzfall für verschwindende Wellenlänge.** An jedem der Beispiele der vorhergehenden Nummern zeigt sich, daß sich im Grenzfall  $\lambda = 0$ , d. h.  $k = \infty$  die geometrisch-optischen Verhältnisse einstellen; doch ist bei diesen Darstellungen die Annäherungsformel (113) benutzt. Auf Grund der strengen Formel (110) führt *Kirchhoff*<sup>136)</sup> den folgenden allgemeinen Beweis:

Ausgangspunkt sind die aus der Theorie des *Fourierschen* Doppelintegrals stammenden Sätze: ist  $F$  eine stetige Funktion, so ist:

$$(136) \quad \lim_{k=\infty} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF}{d\xi} e^{-ik\xi} d\xi = 0;$$

ist außerdem  $\frac{dF}{d\xi}$  stetig, so ist

$$(137) \quad \lim_{k=\infty} k \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF}{d\xi} e^{-ik\xi} d\xi = + i \lim_{k=\infty} \left[ \frac{dF}{d\xi} e^{-ik\xi} \right]_{\xi_1}^{\xi_2}.$$

Der zweite Satz geht durch die partielle Integration

$$k \int \frac{dF}{d\xi} e^{-ik\xi} d\xi = i \frac{dF}{d\xi} e^{-ik\xi} - i \int \frac{d^2 F}{d\xi^2} e^{-ik\xi} d\xi$$

aus dem ersten hervor, da das Integral rechts im Grenzfall verschwindet.

Wir geben dem zwischen Lichtquelle und Aufpunkt eingeschobenen Schirm beliebige Gestalt, lassen auch die Begrenzung der Öffnung in ihm ganz beliebig. Die Integration in (110) ist auszuführen über irgendeine durch die Begrenzungskurve gehende Fläche, wenn diese nur Lichtquelle und Aufpunkt trennt (vgl. Nr. 35). Wir wollen sie stets so legen, daß kein endlicher Teil von ihr auf einem der Rotationsellipsoide  $r + r_0 = \text{const.}$  liegt, und daß sie auch keins von diesen berührt. Sie wird dann durch ihre Schnitte mit einer Schar solcher Ellipsoide in unendlich schmale Streifen eingeteilt.

Die Formel (110) hat die Gestalt:

$$(138) \quad u_P = \int (G_1 + k G_2) e^{-ik(r+r_0)} d\sigma.$$

134) Vgl. etwa die Darstellung in *Winkelmann*, Handbuch d. Phys. VI, Leipzig 1906, p. 1060 f.

135) *E. Lommel*, Abh. d. Bayerischen Akad. 15 (1884), p. 229.

136) *G. Kirchhoff*, Vorles. über math. Optik, Leipzig 1891, p. 35. Wied. Ann. 18 (1883), p. 663, Ges. Abh. Nachtrag p. 22.

Wir führen

$$r + r_0 = \xi$$

als Integrationsvariable ein, indem wir die Fläche in die genannten Streifen zerlegt denken, und definieren die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  durch die Forderungen:

$$(139) \quad \frac{dF_1}{d\xi} d\xi = \int G_1 d\sigma, \quad \frac{dF_2}{d\xi} d\xi = \int G_2 d\sigma$$

beide Integrale ausgeführt über den dem Intervall  $d\xi$  entsprechenden Streifen. Damit wird aus (138)

$$u_P = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF_1}{d\xi} e^{-ik\xi} d\xi + k \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dF_2}{d\xi} e^{-ik\xi} d\xi,$$

wenn  $\xi_1$  und  $\xi_2$  die äußersten auf der Fläche vorkommenden Werte von  $\xi$  sind.

Das erste dieser Integrale verschwindet nach (136) im Grenzfall  $k = \infty$  stets, da  $F_1$  nach unseren Annahmen stetig ist. Damit auch das zweite Integral verschwindet, muß  $\frac{dF_2}{d\xi} = 1$  im Integrationsbereich endlich und stetig sein, 2) nach (137) für  $\xi_1$  und  $\xi_2$  verschwinden. Damit der ersten Bedingung genügt ist, muß jedem unendlich schmalen, von Linien  $\xi = \text{const.}$  begrenzten Streifen ein von derselben Ordnung unendlich kleines  $d\xi$  entsprechen. Sie wäre verletzt, wenn die Integrationsfläche einer Ellipsoide berührte, was wir oben ausgeschlossen haben. Sie ist aber auch dann verletzt, wenn die gerade Linie von der Lichtquelle zum Aufpunkt durch die Öffnung hindurchführt und somit die Integrationsfläche schneidet. Denn auf dieser Linie hat  $\xi$  den kleinsten überhaupt möglichen Wert. Entfernt man sich von ihr um eine unendlich kleine Strecke, so ist  $d\xi$  unendlich klein zweiter Ordnung. Die zweite der obigen Bedingungen aber ist dann und nur dann erfüllt, wenn kein Teil der Begrenzung mit einer Linie  $\xi = \text{const.}$  zusammenfällt. In diesem Falle hat nämlich der letzte, von der Begrenzung der Fläche und der Linie  $\xi_1 + d\xi$  bzw.  $\xi_2 - d\xi$  begrenzte Streifen einen von höherer Ordnung unendlich kleinen Inhalt, während sonst sein Inhalt von derselben Ordnung wie  $d\xi$  ist.<sup>137)</sup> Im Grenzfall  $\lambda = 0$  wird somit  $u_P = 0$ , wenn weder die gerade Linie Lichtquelle-Aufpunkt durch die Öffnung führt, noch für irgendeinen Teil ihrer Begrenzung  $r + r_0 = \text{const.}$  ist.

Führt umgekehrt jene Gerade durch die Öffnung, während für keinen Teil der Randkurve  $r + r_0 = \text{const.}$  ist, so können wir diesen

137) In diesem Punkte hat Verfasser ein in der *Kirchhoffschen* Darstellung offenbar enthaltenes Versehen verbessert.

Satz anwenden auf das Integral  $\int (G_1 + k G_2) e^{-ik(r+r_0)} d\sigma$ , ausgeführt über die der Lichtquelle zugewandte Seite des Schirmes; es ist danach gleich Null. Die Integration über die Öffnung und über diese Fläche des Schirmes ergibt aber nach dem Schlußsatz von Nr. 35 den der ungehinderten Fortpflanzung entsprechenden Wert

$$u_P = \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}.$$

Denselben Wert ergibt also auch das Integral über die Öffnung allein. *Im geometrischen Schatten haben wir somit im Grenzfall  $\lambda = 0$  vollkommene Dunkelheit, sonst ungestörte Ausbreitung der Welle.*

Daß der Fall, in welchem die Berandung des Schirmes ganz oder zum Teil der Gleichung  $r + r_0 = \text{const.}$  genügt, eine Ausnahme bilden muß, bestätigt man leicht am Beispiel eines kreisförmigen Schirmes, auf dessen Achse die Lichtquelle liegt, (vgl. Nr. 34). In diesem Falle herrscht hinter ihm auf seiner Achse stets Helligkeit, unabhängig von der Wellenlänge.

Den Satz, daß die geometrische Optik nur einen Grenzfall darstellt, spricht *Rayleigh* in der Form aus, daß der Wellenoptik zufolge jeder seitlich begrenzte Strahl in seiner Richtung notwendigerweise bis zu einem gewissen Grade unbestimmt ist.<sup>138)</sup>

Wie man von der Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  zur Differentialgleichung für das geometrisch-optische *Eikonal* gelangt, ist nach einem Gedanken von *Debye* von *Sommerfeld* und *Runge*<sup>139)</sup> gezeigt worden.

**41. Das Verhalten der Lichtwelle in der Umgebung eines Brennpunktes.** Man kann nach *Debye*<sup>140)</sup> von der Gleichung (105) oder (108) zu mathematisch strengen Lösungen der Schwingungsgleichung kommen, wenn man die Blende ins Unendliche verlegt. Insofern der Abstand zwischen ihr und dem Aufpunkt dadurch unendlich groß wird, findet man so Beugungserscheinungen vom *Fraunhoferschen* Typus.

Nimmt man im dreidimensionalen Fall (Gleichung (105)) die unendlich ferne Kugel (Radius  $R$ ) von einem undurchsichtigen Schirm bedeckt an, bis auf den Teil, welcher dem körperlichen Winkel  $\Omega$  entspricht, und denkt man diesen Teil mit einer nach dem Nullpunkt des Koordinatensystems konvergierenden Kugelwelle von außen be-

138) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 8 (1879), p. 261; Pap. I, p. 415.

139) *A. Sommerfeld* und *I. Runge*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 277.

140) *P. Debye*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 755.

leuchtet, so hat man in dieser Formel

$$u = \frac{e^{ikR}}{R}$$

und bis auf Glieder von der Ordnung  $R^{-2}$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial R} = -ik \frac{e^{ikR}}{R}$$

zu setzen. Sind ferner wie bisher  $x, y, z$  die Koordinaten des Aufpunktes  $P$ ,  $\xi, \eta, \zeta$  die des Flächenelementes  $d\sigma$ , so ist (vgl. (112) und (114)) in der genannten Gleichung

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma)$$

zu setzen, wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungskosinus des Fahrstrahles vom Nullpunkt nach  $d\sigma$  sind. Infolgedessen ist auf  $d\sigma$

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)} \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = ik e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)} \frac{e^{-ikR}}{R}.$$

Man findet, indem man schließlich noch  $R^2 d\Omega$  für  $d\sigma$  einführt:

$$(140) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \int e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)} d\Omega.$$

Man bestätigt leicht, daß dies Integral der Schwingungsgleichung mathematisch streng genügt, da dies für die Funktion  $e^{ik(x\alpha + y\beta + z\gamma)}$  gilt, und durch Summation solcher Lösungen wiederum eine Lösung entsteht. Es stellt, wie aus seinem Aufbau und auch aus den weiter unten stehenden Formeln (149), (150), (151) ersichtlich, einen Strahlenkegel vom körperlichen Öffnungswinkel  $\Omega$  dar, für welchen der Koordinatenanfang Brennpunkt ist.

Wir diskutieren die Gleichung (140) für den Fall, daß  $\Omega$  von einem Kreiskegel mit dem Achsenwinkel  $\mathcal{A}$  begrenzt ist. Bei Einführung von Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta & y &= r \sin \vartheta \cos \varphi & z &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \alpha &= \cos \Theta & \beta &= \sin \Theta \cos \Phi & \gamma &= \sin \Theta \sin \Phi \end{aligned}$$

finden wir zunächst

$$(141) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\mathcal{A}} d\Theta \int_0^{2\pi} d\Phi e^{ikr(\cos \vartheta \cos \Theta + \sin \vartheta \sin \Theta \cos(\varphi - \Phi))} \sin \Theta.$$

Die Integration nach  $\Phi$  liefert nach (119)

$$u_P = ik \int_0^{\mathcal{A}} d\Theta \sin \Theta e^{ikr \cos \vartheta \cos \Theta} J_0(kr \sin \vartheta \sin \Theta).$$

Die Formel vereinfacht sich, wenn  $A^2 \ll 1$  und  $krA^2 \ll 1$  ist, da man dann

$$\sin \Theta = \Theta, \quad \cos \Theta = 1$$

setzen kann, nach (119) zu

$$u_P = ik e^{ikr \cos \vartheta} \int_0^A \Theta J_0(kr \sin \vartheta \cdot \Theta) d\Theta$$

$$= ik A^2 e^{ikr \cos \vartheta} \frac{J_1(kr A \sin \vartheta)}{kr A \sin \vartheta}.$$

Für die zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebenen durch den Brennpunkt ( $x = 0$ ) ist  $\sin \vartheta = 1$ . Bedenkt man, daß  $RA = A$  der Radius der kreisförmigen Blendenöffnung ist, daß ferner die in Nr. 37 b. eingeführte Größe  $\rho$  mit  $r$  in dem Zusammenhange  $\rho R = r$  steht, so findet man, abgesehen von einem Faktor von konstantem absolutem Werte, welcher in Nr. 37 b. vernachlässigt ist, volle Übereinstimmung mit Gleichung (120); doch erkennt man hier ohne weiteres den Weg, auf welchem die Annäherung weiter zu treiben wäre.

Im Gegensatz zu dieser für kleine Werte  $kr$  gültigen Näherung setzen wir im folgenden  $kr \gg 1$  voraus. Streng gilt noch nach (141) für Punkte  $P$  auf der Achse des Strahlenkegels

$$(142) \quad u_P = \frac{1}{r} (e^{ikr} - e^{ikr \cos A}), \quad \text{wenn } \vartheta = 0,$$

d. h. wenn  $P$  vor dem Brennpunkt liegt und

$$(143) \quad u_P = -\frac{1}{r} (e^{-ikr} - e^{-ikr \cos A}), \quad \text{wenn } \vartheta = \pi,$$

d. h. wenn  $P$  hinter ihm liegt. Sonst bedürfen wir eines Annäherungsverfahrens, zwecks dessen wir zunächst neue Polarkoordinaten  $\tau, \psi$  einführen;  $\tau$  soll die Poldistanz gemessen von der Richtung  $OP$  aus sein, das Azimut  $\psi$  soll die Neigung einer durch  $OP$  gehenden Ebene gegen die Ebene durch  $OP$  und die Achse des Kegels ( $\vartheta = 0$ ) messen. Die Umrechnungsformeln lauten (vgl. Fig. 15):

$$\cos \tau = \cos \vartheta \cos \Theta$$

$$+ \sin \vartheta \sin \Theta \cos(\varphi - \Phi)$$

$$(144) \quad \cos \psi = \frac{\cos \Theta - \cos \vartheta \cos \tau}{\sin \vartheta \sin \tau},$$

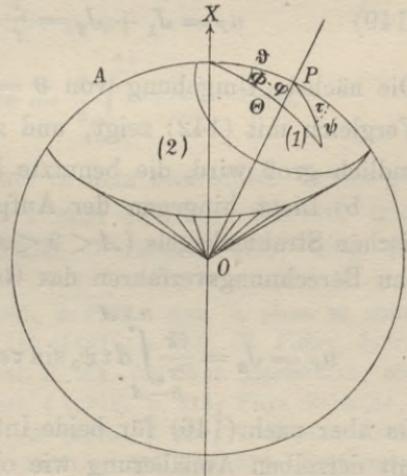


Fig. 15.

so daß nach (141)

$$(145) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \iint d\tau d\psi \sin \tau e^{ikr \cos \tau}.$$

a) Der Aufpunkt  $P$  liege nun im Strahlenkegel vor dem Brennpunkt ( $0 < \vartheta < A$ ). Die Integration führen wir für die Gebiete 1 und 2 in Fig. 15 gesondert aus. Das erstere ergibt als Anteil an  $u_P$ :

$$J_1 = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{A-\vartheta} d\tau \int_0^{2\pi} d\psi \sin \tau e^{ikr \cos \tau} = \frac{1}{r} (e^{ikr} - e^{ikr \cos(A-\vartheta)}).$$

Die Berechnung von  $J_2$  leiten wir so, daß wir zunächst die Integration nach  $\psi$  zwischen den Grenzen  $\pm \psi_0$  ausführen, wobei nach (144) (siehe auch die Figur)

$$(146) \quad \cos \psi_0 = \frac{\cos A - \cos \vartheta \cos \tau}{\sin \vartheta \sin \tau}$$

ist; also:

$$J_2 = \frac{ik}{2\pi} \int_{A-\vartheta}^{A+\vartheta} d\tau \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} d\psi \sin \tau e^{ikr \cos \tau} = \frac{ik}{\pi} \int_{A-\vartheta}^{A+\vartheta} d\tau \psi_0 \sin \tau e^{ikr \cos \tau}.$$

Durch fortgesetzte partielle Integration läßt sich dies in eine nach fallenden Potenzen von  $kr$  fortschreitende Reihe entwickeln, deren erstes Glied lautet:

$$(147) \quad J_2 = -\frac{1}{\pi r} \psi_0 e^{ikr \cos \tau} \Big|_{A-\vartheta}^{A+\vartheta}.$$

Nach (146) aber ist  $\psi_0$  für  $\tau = A \pm \vartheta$  gleich 0 bzw. gleich  $\pi$ ; also

$$(148) \quad J_2 = \frac{1}{r} e^{ikr \cos(A-\vartheta)}$$

und

$$(149) \quad u_P = J_1 + J_2 = \frac{1}{r} e^{ikr}, \quad \text{wenn } 0 < \vartheta < A.$$

Die nächste Umgebung von  $\vartheta = 0$  ist hier ausgeschlossen, wie der Vergleich mit (142) zeigt, und zwar, weil nach (146) dort  $\frac{d\psi_0}{d\tau}$  unendlich groß wird, die benutzte Reihenentwicklung somit versagt.

b) Liegt hingegen der Aufpunkt außerhalb des geometrisch optischen Strahlenkegels ( $A < \vartheta < \pi - A$ ), so fällt bei dem entsprechenden Berechnungsverfahren das Gebiet 1 fort, und es wird

$$u_P = J_2 = \frac{ik}{\pi} \int_{\vartheta-A}^{\vartheta+A} d\tau \psi_0 \sin \tau e^{ikr \cos \tau} = -\frac{1}{\pi r} \psi_0 e^{ikr \cos \tau} \Big|_{\vartheta-A}^{\vartheta+A}.$$

Da aber nach (146) für beide Integrationsgrenzen  $\psi_0 = 0$ , finden wir mit derselben Annäherung wie oben

$$(150) \quad u_P = 0, \quad \text{wenn } A < \vartheta < \pi - A.$$

c) Den Fall, daß  $P$  im Strahlenkegel, aber hinter dem Brennpunkt liegt ( $\pi - A < \vartheta < \pi$ ), können wir auf den ersteren zurückführen, wenn wir statt  $\tau$  den Winkel  $\tau' = \pi - \tau$  als Integrationsvariable benützen. Man findet dann nämlich aus (145)

$$(150a) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \int \int d\tau' d\psi \sin \tau' e^{-ikr \cos \tau'},$$

wo der Integrationsbereich genau wie unter a) zu wählen ist. Da sich die Gleichungen (145) und (150a) somit nur im Vorzeichen von  $r$  unterscheiden, finden wir statt (149)

$$(151) \quad u_P = -\frac{1}{r} e^{-ikr}, \quad \text{wenn } \pi - A < \vartheta < \pi.$$

Der Vorzeichenunterschied zwischen (149) und (150) sowie zwischen (142) und (143) weist auf einen Phasensprung  $\pi$  hin, welchen die Welle beim Durchgang durch einen Brennpunkt erleidet.<sup>141)</sup> Natürlich liegt nicht in diesem selbst eine Unstetigkeit vor, sondern die Phase verändert sich in seiner Umgebung so, daß beim Vergleich von zwei weit entfernten Aufpunkten vor und hinter ihm neben der durch deren Entfernung bedingten Phasendifferenz noch der Unterschied  $\pi$  hinzukommt.

Ähnlich gewinnt man eine strenge Darstellung für eine begrenzte Zylinderwelle, wenn man in Formel (108) die Integration über den dem Winkel  $2\alpha$  entsprechenden Teil des unendlich fernen Kreises ausführt und dabei nach Gleichung (26) und (28)

$$(152) \quad u = Z_0(-k\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}} e^{i(k\rho + \frac{\pi}{4})}$$

setzt. Man findet dann in Analogie zu (140) und (141) für den Aufpunkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y$  oder  $\rho, \varphi$ :

$$(153) \quad u_P = \frac{i}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ik(x \cos \psi + y \sin \psi)} d\psi = \frac{i}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ik\rho \cos(\varphi - \psi)} d\psi.$$

Für einen weit vor der Brennpunktlinie in dem bestrahlten Gebiet gelegenen Aufpunkt, d. h. für  $k\rho \gg 1$  und  $|\varphi| < \alpha$ , gewinnt man daraus natürlich Gleichung (152) zurück. In einem weit hinter der

141) *L. G. Gouy*, Paris C. R. 110 (1890), p. 1251. *Ann. d. phys. et chim.* 24 (1891), p. 145; *P. Joubin*, Paris C. R. 115 (1892), p. 932; *Ch. Fabry*, *Journ. de phys.* 2 (1893), p. 22; *P. Zeeman*, *Versl. K. Ak. van Wet. Amsterdam*, afd. *Natuurk.* 6 (1897/98), p. 11; *Archives Neerl.* 4 (1901), p. 318; *Phys. Zeitschr.* 1 (1900), p. 542; *W. H. Julius*, *Archives Neerl.* 28 (1895), p. 226; *G. Sagnac*, *Journ. de phys.* 2 (1903), p. 721; Paris C. R. 138 (1904), p. 479, 619, 678. *Boltzmann-festschrift* (1904), p. 528; *F. Reiche*, *Ann. d. Phys.* 29 (1909), p. 65 und 401.

Brennlinie gelegenen Punkt  $q$ ,  $\varphi' = \pi + \varphi$  hingegen gilt nach (153):

$$u_P = \frac{i}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ikq \cos(\varphi' - \psi)} d\psi = \frac{i}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-ikq \cos(\varphi - \psi)} d\psi.$$

Da beide Gleichungen sich nur im Vorzeichen von  $q$  unterscheiden, gilt für den letzteren Punkt:

$$u_P = i \sqrt{\frac{\pi}{2kq}} e^{i\left(-kq + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Der Vergleich mit (152) zeigt, daß eine Lichtwelle in der Umgebung einer Brennlinie den Phasensprung  $\frac{\pi}{2}$  erleidet.

**42. Das Auflösungsvermögen des Prismas.**<sup>142)</sup> Das von Luft ( $\nu = 1$ ) umgebene Prisma  $QQ'R$  in Fig. 16 wird von einer ebenen, monochromatischen Welle (Frequenz  $n_1$ ), für die  $PP'$  und  $S_1S_1'$  Wellenebenen sind, in der Symmetriestellung (Minimum der Ablenkung) durchlaufen. Nach dem Satz von der Gleichheit aller optischen Wege zwischen zwei Wellenflächen ist

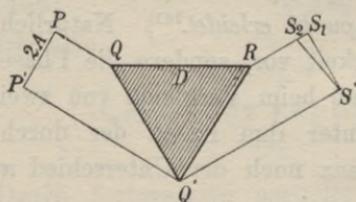


Fig. 16.

$$PQ + \nu_1 D + RS_1 = P'Q' + Q'S'.$$

Für eine Welle von der Frequenz  $n_2$ , für die  $PP'$  ebenfalls eine Wellenfläche ist, sind im Falle der Dispersion diese Flächen ein wenig gegen  $S_1S_1'$  geneigt;  $S_2S_2'$  soll eine davon sein. Dann gilt:

$$PQ + \nu_2 D + RS_2 = P'Q' + Q'S'_1;$$

durch Subtraktion folgt daraus:

$$S_2S_1 = (\nu_2 - \nu_1) D = (n_2 - n_1) \frac{dv}{dn} D$$

$$i = \sphericalangle S_2S_1 = \frac{S_2S_1}{S_1S'_1} = (n_2 - n_1) \frac{dv}{dn} \frac{D}{2A}.$$

Nach der Wellentheorie ist aber die Richtung eines Strahles von begrenzter Breite innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt; nur die Mitte der Richtungenschar gehorcht der geometrischen Optik. Ist  $i$  klein, so verschwimmen deshalb beide Wellen auch nach dem Durchgang durch das Prisma mehr oder minder ineinander. In einem Fernrohr sieht man nicht zwei scharfe Punkte nebeneinander, sondern zwei unscharfe, sich zum Teil überdeckende Striche. Die Helligkeitsverteilung in jedem entspricht der Verteilung im Beugungsbilde eines Spaltes von der Breite  $2A$ . (Vgl. Nr. 37 a.)

142) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 8 (1879), p. 261. Pap. I, p. 415.

Wegen der Ähnlichkeit der Kurven  $\frac{\sin^2 px}{(\frac{1}{2}x)^2}$  und  $\frac{\sin^2 px}{\sin^2 \frac{1}{2}x}$  in der Nähe des höchsten Maximums entspricht es der Annahme in Nr. 25, daß man beide Beugungsbilder als für das Auge noch trennbar ansieht, wenn das Maximum des einen auf die erste Nullstelle der anderen fällt. Da diese nach (117a) den Winkelabstand

$$\varphi = \frac{\lambda}{2A} = \frac{\pi}{kA} = \frac{\pi c}{nA}$$

vom zugehörigen Maximum hat, ist die Grenze durch die Gleichung

$$i = \varphi$$

bestimmt; das Auflösungsvermögen ist somit

$$\frac{n_1}{|n_2 - n_1|} = \frac{D n^2 \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|}{2\pi c} = D \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|,$$

es hängt von keiner anderen Abmessung des Prismas als seiner Basisdicke ab. Doch gilt dies nur, wenn wie in der Fig. 16 ein Strahl das Prisma unmittelbar an der Spitze durchläuft. Bei einem Satz von  $p$  Prismen vergrößert sich  $i$  um den Faktor  $p$ , während  $\varphi$  ungeändert bleibt; das Auflösungsvermögen erhält daher ebenfalls den Faktor  $p$ .

### 43. Die optische Abbildung im Lichte der Wellenoptik.

a) *Die Abbildung selbstleuchtender Körper.* Bei der Abbildung eines weit entfernten Lichtpunktes durch ein Fernrohr wirkt dessen Eintrittspupille, d. h. in praxi die Begrenzung des Objektivs als beugende Öffnung. Da sie meist kreisförmig ist (Radius:  $A$ ), liefert der Lichtpunkt in dessen Brennebene eine Helligkeitsverteilung nach dem Gesetz (vgl. (120))

$$\frac{J_1^2(k \varrho A)}{(k \varrho A)^2}.$$

Zwei Lichtpunkte gelten ähnlich wie bei den Spektroskopen (vgl. Nr. 25 und 42) dann als noch unterscheidbar, wenn das vom einen herrührende „Lichtgebirge“ seine höchste Erhebung an einem Punkte des ersten Nullringes des anderen hat. Da dessen Winkelabstand vom zugehörigen Maximum nach (120a)

$$(154) \quad \varrho_0 = 0,61 \frac{\lambda}{A}$$

beträgt, so muß der Winkelabstand der beiden Lichtpunkte mindestens gleich  $0,61 \frac{\lambda}{A}$  sein, damit sie unterschieden werden können. Es kommt somit für die Leistungsfähigkeit eines von geometrisch-optischen Fehlern freien Fernrohres ausschließlich auf den Objektivdurchmesser

an.<sup>143</sup>) (Der Spiegel des Reflektors auf dem Mount Wilson Observatory, Pasadena in Kalifornien hat 30 Zoll = 76 cm Radius, die Objektivlinse der Yerkes Sternwarte in Chikago 20 Zoll = 51 cm Radius.)

Beim Fernrohr ist der Winkel  $\alpha$ , unter dem die Eintrittspupille vom Objekt aus erscheint, stets äußerst klein. Für Fälle, in denen wie beim Mikroskop dieser Winkel beträchtlich ist, findet man die Grenze der Leistungsfähigkeit nach *Helmholtz*<sup>145</sup>) wie folgt:

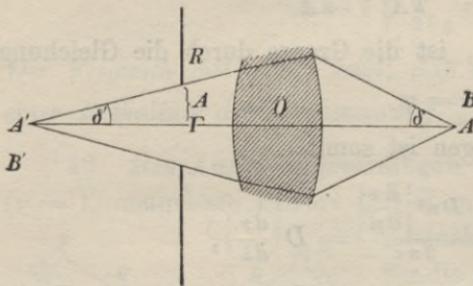


Fig. 17.

Die beiden Lichtpunkte  $A$  und  $B$  (Fig. 17) werden durch das optische System  $O$  in  $A'$  und  $B'$  abgebildet, bei  $A$  und  $B$  ist der Brechungsindex  $\nu$ , bei  $A'$  und  $B'$   $\nu'$ . Die engste Einschnürung liegt hinter  $O$  in der Blende  $R$  vom Radius  $A$ . Es liegen dann die Verhältnisse für die bei  $A'$ , wie wir annehmen

wollen, *schwach* konvergierende Welle ( $\delta'$  klein) ähnlich wie beim Fernrohr (auf große Genauigkeit kommt es bei dieser Abschätzung nicht an); d. h.  $A'$  ist Mittelpunkt eines Lichtgebirges, dessen erster Nullring nach (154) den linearen Abstand

$$\nu' = A' \Gamma \cdot \varrho_0 = 0,6 \frac{\lambda'}{A} A' \Gamma = 0,6 \frac{\lambda'}{\delta'} = 0,6 \frac{\lambda_0}{\nu' \delta'}$$

von  $A'$  hat. Bei Beobachtung des Bildes  $A'B'$  erscheinen somit sowohl  $A$  wie  $B$  umgeben von einem Streifensystem, deren erste Nullringe den linearen Abstand

$$(155) \quad l = \nu' \frac{AB}{A'B'} = 0,6 \frac{\lambda_0 AB}{\nu' \delta' A'B'} = 0,6 \frac{\lambda_0}{\nu' \sin \delta}$$

(da nach dem Sinussatz der geometrischen Optik

$$\nu' \delta' A'B' = \nu' \sin \delta' A'B' = \nu' \sin \delta AB)$$

von den zugehörigen Lichtpunkten haben. Sollen  $A$  und  $B$  deutlich getrennt sein, so muß mindestens  $AB = l$  sein.

143) Von Literatur sei erwähnt: *E. Halley*, Phil. Trans. 31 (1720), p. 3. *W. Herschel*, London Phil. Trans. (1805), p. 5; *J. v. Fraunhofer*, Schumachers astr. Abh. 1 (1823), p. 58; *G. B. Airy*, Ann. Phys. Chem. 45 (1838), p. 86; *R. W. Dawes*, Mem. Roy. Astr. Soc. 35 (1866), p. 158; *L. Foucault*, Ann. de l'observ. de Paris 5 (1858); *H. Bruns*, Astr. Nachr. 104 (1883), p. 1; *H. Struve*, Mem. Acad. St. Petersburg (7) 34 (1886), Nr. 5.

145) *H. Helmholtz*, Pogg. Ann. Jubelband (1874), p. 557; Abh. 2, S. 185. Es steht dort stets  $\frac{1}{2}$  statt 0,6, was für diese Abschätzung dasselbe ist.

Dabei ist  $\nu \sin \delta$  die *numerische Apertur* des Instrumentes; sie ist die Eigenschaft des Instrumentes, welche allein für das erreichbare Auflösungsvermögen maßgebend ist. Ausgedehnte Flächen werden nur dann ähnlich abgebildet, wenn ihre Abmessungen gegen  $l$  groß sind. Man überzeugt sich leicht, daß Gleichung (155) die Formel (154) als Näherung für kleine  $\delta$  enthält.

b) *Die Abbildung durch fremdes Licht.* Bei einem selbstleuchtenden Körper entsenden verschiedene Punkte der Oberfläche inkohärente Wellen, so daß sich die Helligkeiten, welche sie hervorrufen, addieren. Bei Beleuchtung eines dunklen Gegenstandes mit fremdem Licht trifft dies im allgemeinen nicht zu; verwendet man dazu eine einzelne Welle, so sind z. B. alle Teile der abgelenkten Welle völlig kohärent. Nach *Abbe*<sup>146</sup>) hat man dann zunächst das Beugungsbild ins Auge zu fassen, welches der abzubildende Gegenstand am Orte des Bildes der Lichtquelle liefert, und hat sein Bild als Interferenzwirkung der von diesem Beugungsbilde ausgehenden Wellen aufzufassen. Da nach dem *Huyghens*-schen Prinzip die Schwingung in einem Punkte des Bildes durch die Schwingungen auf einer ihn von der Lichtquelle trennenden Fläche bestimmt sind, so bietet dieser Gedanke theoretisch nicht viel Neues; dennoch hat er seinerzeit viel Aufsehen erregt, einmal wohl, weil man früher sich wenig um eine wellentheoretische Begründung der Abbildungslehre gekümmert hatte, vor allem aber, weil *Abbe* aus ihm neue, für den Bau von Mikroskopen grundlegende Gesichtspunkte zu gewinnen wußte.

Am übersichtlichsten gestaltet sich diese Überlegung für die Abbildung eines Gitters, das senkrecht zur Achse des optischen Instrumentes steht. Wird es von einer ebenen Welle senkrecht getroffen, so entstehen in der Brennebene des Objektivs Beugungsspektren, deren Winkelabstand von der gerade hindurchgehenden Welle durch die Gleichung

$$\sin \varphi = h \frac{\lambda}{A}$$

(nach Gleichung (47)) gegeben ist. Von diesen Spektren gehen Wellen weiter in das Instrument; wo sie sich durchkreuzen, entstehen *Fresnel*-sche Interferenzen. Das Bild des Gitters ist nichts als das System derartiger Interferenzstreifen in der Ebene, die nach der geometrischen Optik der Gitterebene konjugiert ist.

146) *E. Abbe*, „Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung“. Archiv für mikroskopische Anatomie 9 (1874), p. 413; Ges. Abh. 1, p. 283. „Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop“, her. von *O. Lummer* und *F. Reiche*, Braunschweig 1910

Natürlich treten aber nur solche Spektren in das Instrument, für welche der Ablenkungswinkel  $\varphi$  kleiner ist als der Winkel  $\delta$ , unter welchem die Eintrittspupille vom Gitter aus gesehen wird. Ist also

$$(156) \quad \sin \delta < \frac{\lambda}{A}, \quad \text{oder} \quad A < \frac{\lambda_0}{\nu \sin \delta},$$

so tritt überhaupt nur das Spektrum nullter Ordnung ins Instrument, und man erblickt an der Stelle des Gitterbildes nur gleichförmige Helligkeit. Gestattet man durch Vergrößerung von  $\delta$  den beiden Spektren erster Ordnung den Zutritt, so sieht man ein Streifensystem, das schärfer wird, wenn man durch weitere Vergrößerung von  $\delta$  die Zahl der interferierenden Wellen vergrößert. — Für das Zustandekommen eines Bildes ist unter Umständen schräge Beleuchtung vorteilhafter, weil bei ihr außer dem gerade hindurchgehenden Licht wenigstens auf der einen Seite noch ein Spektrum erster Ordnung in das Instrument gelangen und so zu einem allerdings (wegen der sinusförmigen Helligkeitsverteilung) recht flauen Bilde der Gitterstruktur Anlaß geben kann. Die in (156) angegebene Grenze läßt sich auf diese Art noch auf die Hälfte herabsetzen, in Übereinstimmung mit (155).

Alle diese Folgerungen lassen sich leicht durch den Versuch prüfen. Noch interessanter sind aber die Veränderungen des Gitterbildes bei Ablendung etwa aller Spektren ungerader Ordnung. Da die übrig bleibenden Spektren gerade mit den Spektren eines Gitters von der halben Gitterkonstante zusammenfallen, müssen im Bild die Streifen auf den halben Abstand zusammenrücken. In der Tat folgt auch aus (41a), daß sich bei den *Fresnelschen* Interferenzen der Streifenabstand auf die Hälfte verkleinert, wenn sich die Winkel verdoppeln, unter denen sich die verschiedenen Wellen durchkreuzen. Blendet man etwa aus der Schar der Kreuzgitterspektren alle ab außer denen einer geraden Linie, so sieht man statt des Kreuzgitters ein einfaches, da diese auch von einem einfachen Gitter herrühren könnten.

c) *Vergleich der Abbildung selbstleuchtender und durchleuchteter Gegenstände.* Nach den Abschnitten a) und b) erscheint vielleicht der Vorgang der Abbildung in den beiden betrachteten Fällen ganz verschieden. Daß der Unterschied tatsächlich nicht so sehr groß ist, haben schon viele Autoren betont. *Rayleigh*<sup>147)</sup> z. B. weist darauf hin, daß bei Beleuchtung von allen Richtungen die Schwingungen in nicht gar zu benachbarten Punkten des abzubildenden Gegenstandes inkohä-

147) *Lord Rayleigh*, *Nature* 54 (1896), p. 332 und 333; Pap. IV, p. 226; *Phil. Mag.* 42 (1896), p. 167; Pap. IV, p. 235 besonders p. 241.

rent sind. Auch sonst ist vielfach ein Beweis dafür versucht worden, daß bei allseitiger Beleuchtung das Bild eines nichtleuchtenden Gegenstandes komplementär ist zum Bilde desselben Körpers, wenn er allein Licht ausstrahlt.<sup>148)</sup> (Daß die Einschränkung auf allseitige Beleuchtung notwendig ist, geht daraus hervor, daß man durch Ablenkungen, wie erwähnt, die Strichzahl im Bilde eines Gitters verdoppeln kann, wenn man aus einer einzigen Richtung beleuchtet, während dies weder beim selbstleuchtenden noch beim von allen Seiten beleuchteten Gitter möglich wäre.) Doch erreicht nach Ansicht des Verfassers keiner dieser Beweise die erforderliche Allgemeinheit.

Zur Stellung des Problem es ist selbstverständlich eine Annahme über die Stärke des von dem selbstleuchtenden Körper ausgehenden Lichtes notwendig. Er soll so strahlen, wie wenn er die Temperatur  $T$  hätte und reine Temperaturstrahlung entsendete.<sup>149)</sup> Die fremde Strahlung, die ihn im anderen Fall trifft, soll so sein, als ob sie von schwarzen Körpern derselben Temperatur  $T$  herrührte. Der Gegenstand  $G$  selbst und die Gesamtheit  $K$  dieser anderen Körper bilden dann die Begrenzung eines vollständig geschlossenen Hohlraums. Strahlen  $G$  und  $K$  gleichzeitig, so entsteht nach dem *Kirchhoffschen* Gesetze die allseitig gleiche Hohlraumstrahlung. Sieht man mit einem beliebigen optischen Instrument in ihn hinein, so erblickt man bekanntlich, wie man auch einstellen mag, gleichförmige Helligkeit. Freilich würde ja der Strahlungszustand zunächst gestört, wenn man die Wandung zum Teil durch das Objektiv des Instrumentes ersetzt, aber man kann leicht (z. B. durch eine dem *Gaußschen* Okular nachgebildete Konstruktion) durch das Objektiv Strahlung von der Temperatur  $T$  in den Hohlraum eintreten lassen, so daß die Störung völlig beseitigt wird. Diese gleichförmige Helligkeit setzt sich nun additiv zusammen aus den Bildern, die  $K$  vermöge seines eigenen und des fremden Lichtes liefert. Somit sind beide Bilder zueinander *komplementär*.

Aus diesem streng gültigen Satze lassen sich in besonderen Fällen Annäherungssätze gewinnen, indem man von dem fremden Licht alle Strahlen fortläßt, welche zu der Abbildung nichts Merkbare s beitragen. Bei einem weder regulär noch diffus spiegelnden Körper  $K$  kann man z. B. die Beleuchtung von der Seite des Beobachtungsinstrumentes fortlassen. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß bei relativ groben Strukturen schon die Beleuchtung aus einem ziemlich kleinen Winkel ge-

148) *L. Mandelstam*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 881; *O. Lummer* und *F. Reiche*, Ann. d. Phys. 37 (1912), p. 839; *M. Wolfke*, Ann. d. Phys. 39 (1912) p. 569.

149) *M. v. Laue*, Ann. d. Phys. 43 (1914), p. 165.

nügt, um ein zum Falle des Selbstleuchtens komplementäres Bild zu erzeugen.

d) *Anwendung auf das Mikroskop.* Die Abschnitte a) und b) ergaben übereinstimmend, daß eine Strecke  $\geq 0,5 \frac{\lambda}{\sin \delta} = 0,5 \frac{\lambda_0}{\nu \sin \delta}$  sein muß, wenn sie noch abgebildet werden soll. Zur Herabsetzung dieser Grenze muß man die numerische Apertur  $\nu \sin \delta$  möglichst groß machen; auf dieser Erkenntnis fußt *Abbes* Verbesserung des Mikroskopbaues. Da man aber  $\sin \delta$  nicht über 1 (praktisch nicht über 0,95) steigern kann, ist  $\frac{1}{2} \lambda$  die absolute Grenze für die Abbildbarkeit. Kein noch so gutes Mikroskop kann mehr leisten. Zur Vergrößerung des Brechungsindex  $\nu$  des Mittels, in dem der Körper sich befindet, bringt man häufig zwischen das Deckglas des Präparates und das Objektiv eine Flüssigkeit, die im Brechungsindex mit Glas übereinstimmt. Doch muß dann der abzubildende Gegenstand auch zwischen den beiden Deckgläsern in einer derartigen Flüssigkeit eingebettet sein. Ein darauf berechnetes Mikroskopobjektiv nennt man ein Immersionssystem; die numerische Apertur läßt sich so bis zum Werte 1,4 steigern. Neuerdings hat man, um  $\lambda_0$  zu verkleinern, Mikroskope für ultraviolettes Licht gebaut, bei denen das Bild entweder auf einem Fluoreszenzschirm sichtbar gemacht oder auch photographisch festgehalten wird. Technische Schwierigkeiten scheinen aber dieser Art, die Leistungsfähigkeit zu steigern, bald eine Grenze zu setzen.

Unter Verzicht auf Ähnlichkeit der Abbildung kann man das Mikroskop freilich zum Nachweis von noch viel kleineren Teilchen benutzen, wenn nur deren Abstand oberhalb der angegebenen Grenze liegt (Ultramikroskop).<sup>150)</sup> Jedes Teilchen wirkt dabei als punktförmige Lichtquelle (vgl. Nr. 67).

#### 44. Die Freiheitsgrade optischer Vorgänge.

a) *Die Freiheitsgrade eines streng einfarbigen Strahlenbündels.*<sup>151)</sup> Wir haben in Nr. 43 betont, daß in allen Angaben über das Auflösungsvermögen ein Zahlenfaktor sachlich unbestimmt bleibt; man setzt diesen Faktor unter Berücksichtigung der heutigen Technik der Helligkeitsmessung mit einer gewissen Willkür fest und müßte ihn bei einem wesentlichen Fortschritt dieser Technik zweifellos abändern. Eine Theorie der Abbildung, welche von diesem Mangel frei ist, findet man, wenn man nach den Freiheitsgraden eines Strahlenbündels fragt. Einen Überblick über die Bedeutung und einen Überschlag über die Zahl dieser Freiheitsgrade liefert die folgende einfache Betrachtung:

150) H. Siedentopf und R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 1.

151) M. Laue, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 1197.

Wird streng monochromatische, linear polarisierte Strahlung zur Konvergenz gebracht und ist  $\vartheta (\ll 1)$  der Achsenwinkel des kreisförmigen Konvergenzkegels, so kann man nach (155) in der Brennebene nicht beliebig kleine Strecken „abbilden“, sondern der kleinste Abstand zweier Bildpunkte, die wahrnehmbar getrennt sein sollen, ist von der Größenordnung  $\frac{\lambda}{\vartheta}$ . Die kleinste unabhängig von ihrer Umgebung beleuchtete Fläche ist somit von der Größenordnung  $\frac{\lambda^2}{\vartheta^2}$ , oder da der räumliche Winkel des Konvergenzkegels  $\Omega = \pi \vartheta^2$  ist, gleich  $\frac{1}{\delta} \frac{\lambda^2}{\Omega}$ , wobei  $\delta$  eine später zu bestimmende, von 1 nicht sehr verschiedene, von  $\lambda$  unabhängige Zahl ist. Ist im ganzen die Fläche  $f$  beleuchtet, so setzt sie sich mithin aus

$$(157) \quad f: \frac{1}{\delta} \frac{\lambda^2}{\Omega} = \frac{\delta n^2 f \Omega}{4\pi^2 a^2}$$

unabhängig voneinander beleuchteten „Elementarflächen“ zusammen. Diese Zahl gibt offenbar die Freiheitsgrade an, welche man bei Beleuchtung der Fläche  $f$  mit einer aus dem Winkel  $\Omega$  kommenden, streng einfarbigen Strahlung hat.

Zwecks einer befriedigenderen Ableitung dieser Zahl knüpfen wir an *Debyes* Darstellung eines Strahlenkegels (Nr. 41) an. Es seien  $\xi, \eta, 0$  die Koordinaten seines Brennpunktes, und es sei der Kegel von den Linien

$$(158) \quad \alpha = \pm A, \quad \beta = \pm A$$

begrenzt; wir setzen

$$(159) \quad A \ll 1$$

voraus, so daß der körperliche Öffnungswinkel

$$(160) \quad \Omega = \iint \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = 4A^2$$

ist. Dann lautet diese Darstellung nach (140)

$$(161) \quad \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} e^{ik[(x-\xi)\alpha + (y-\eta)\beta + z\gamma]} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} \quad \left( k = \frac{2\pi}{\lambda} \right).$$

Um von ihr zum Strahlenbündel zu gelangen, haben wir sie mit einer beliebigen komplexen Funktion  $f(\xi, \eta)$  zu multiplizieren und nach  $\xi$  und  $\eta$  über dessen Brennfläche zu integrieren; geben wir dieser der Einfachheit wegen die Gestalt eines Quadrates von der Seitenlänge  $2\mathcal{E}$ , so daß

$$(162) \quad f = 4\mathcal{E}^2$$

wird, so erhalten wir:

$$\int_{-\Xi}^{+\Xi} \int_{-\Xi}^{+\Xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} e^{ik[(x-\xi)\alpha + (y-\eta)\beta + z\gamma]} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}.$$

In Rücksicht auf (159) und bei Beschränkung auf die Umgebung der Brennfläche  $z = 0$  dürfen wir hier  $\gamma = 1$  setzen; kehren wir ferner die Integrationsfolge um, so finden wir:

$$(163) \quad e^{ikz} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} d\alpha d\beta e^{ik(x\alpha + y\beta)} \int_{-\Xi}^{+\Xi} \int_{-\Xi}^{+\Xi} e^{-ik(\xi\alpha + \eta\beta)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Eine komplexe Funktion  $f(\xi, \eta)$  können wir in dem genannten Quadrat durch die *Fouriersche* Doppelreihe darstellen:

$$(164) \quad f(\xi, \eta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} H_{pq} e^{i\left[\frac{\pi}{\Xi}(p\xi + q\eta) + o_{pq}\right]},$$

in welcher für jedes positive Wertepaar  $|p|, |q|$  acht Konstanten, nämlich vier Amplituden  $H$  und vier Phasen  $o$ , verfügbar sind. Setzen wir die Reihe (164) in (163) ein, so finden wir:

$$(164a) \quad e^{ikz} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} H_{pq} e^{i o_{pq}} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} d\alpha d\beta e^{ik(x\alpha + y\beta)} \cdot \int_{-\Xi}^{+\Xi} d\xi e^{i\xi\left(\frac{p\pi}{\Xi} - k\alpha\right)} \int_{-\Xi}^{+\Xi} d\eta e^{i\eta\left(\frac{q\pi}{\Xi} - k\beta\right)};$$

oder, da

$$\int_{-\Xi}^{+\Xi} d\xi e^{i\xi\left(\frac{p\pi}{\Xi} - k\alpha\right)} = \frac{2\Xi \sin(p\pi - k\Xi\alpha)}{p\pi - k\Xi\alpha}$$

ist:

$$(165) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4\Xi^2 e^{ikz} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} H_{pq} e^{i o_{pq}} \int_{-A}^{+A} d\alpha e^{ikx\alpha} \frac{\sin(p\pi - k\Xi\alpha)}{p\pi - k\Xi\alpha} \\ & \quad \times \int_{-A}^{+A} d\beta e^{iky\beta} \frac{\sin(q\pi - k\Xi\beta)}{q\pi - k\Xi\beta}. \end{aligned} \right.$$

Führen wir in dem Integral nach  $\alpha$  als Integrationsvariable

$$u = p\pi - k\Xi\alpha$$

ein und setzen voraus, daß trotz (159)

$$kA\Xi \gg 1$$

ist, so sind zunächst die beiden Fälle zu unterscheiden

$$(I) \quad |p\pi| > kA\mathfrak{E} \quad \text{und} \quad (II) \quad |p\pi| < kA\mathfrak{E}.$$

Im ersten Falle geht das transformierte Integral von einem großen positiven (bzw. negativen) zu einem großen ebenfalls positiven (bzw. negativen) Wert der Integrationsgrenze, im zweiten Falle von einem großen negativen zu einem großen positiven Werte. Im ersten Fall ist es daher merklich Null, im zweiten Fall gleich

$$\frac{i}{2k\mathfrak{E}} e^{ip\pi \frac{x}{\mathfrak{E}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu \frac{x}{\mathfrak{E}}} (e^{iu} - e^{-iu}) \frac{du}{u}.$$

Führt man die Integration, was erlaubt ist, z. B. etwas unterhalb der reellen Achse, so kann man das Integral in die Differenz zweier Integrale zerlegen. Ist nun

$$a) \quad |x| < \mathfrak{E},$$

so läßt sich das erste Integral in die positiv-imaginäre, das zweite in die negativ-imaginäre Halbebene überführen, wo die betreffenden Exponenten von  $e$  einen negativ-reellen Teil haben. Ist dagegen

$$b) \quad |x| > \mathfrak{E},$$

so sind beide Integrale gleichzeitig in die positive oder negative Halbebene überzuführen, je nachdem  $x$  positiv oder negativ ist. Im Falle a) liefert bei der Deformation des Integrationsweges das erste Integral im Punkte  $u = 0$  das Residuum 1, im Falle b) liefern beide Integrale die Residuen 1, die sich in der Differenz zerstören, oder beide Integrale kein Residuum. Deshalb ist im Falle b) der Gesamtwert unseres Integrals nach  $\alpha$  Null, und nur im Falle a) von Null verschieden. Für die Berechnung des nach  $\beta$  auszuführenden Integrales in (165) gilt das entsprechende.

Die Bedingungen a), b) zeigen nun zunächst, daß es nur auf den Zustand im Innern des Quadrates  $|x| < \mathfrak{E}$ ,  $|y| < \mathfrak{E}$  ankommt, daß also die Konstanten der Reihe (165) die Freiheitsgrade bestimmen, ohne daß eventuelle Nachbarstrahlenbündel stören. Das Verschwinden von (165) außerhalb jenes Quadrates (zufolge der Bedingung b)) entspricht offenbar der Existenz einer Schattengrenze.

Es fragt sich nun, wie viele von den Konstanten der Reihe (165) für die Abzählung der Freiheitsgrade in Betracht kommen. Hierauf antworten die Bedingungen (I), (II). Nach ihnen treten in der Reihe (165) nur solche Glieder auf, für welche

$$|p|\pi < kA\mathfrak{E}, \quad \text{d. h.} \quad |p| < \frac{2}{\lambda} A\mathfrak{E},$$

$$|q|\pi < kA\mathfrak{E}, \quad \text{d. h.} \quad |q| < \frac{2}{\lambda} A\mathfrak{E}$$

ist. Die Zahl der positiven Wertepaare  $|p|$  und  $|q|$ , für welche diese Bedingungen zutreffen, ist aber  $\frac{4}{\lambda^2} A^2 \Xi^2$ , und da zu solchem Wertepaar acht verfügbare Koeffizienten gehören, so ist die Zahl der in (165) verfügbaren Koeffizienten (vgl. (160) und (162))

$$\frac{32}{\lambda^2} A^2 \Xi^2 = \frac{2f\Omega}{\lambda^2}.$$

Nun ist aber zu bedenken, daß die Hälfte der Freiheitsgrade der komplexen Funktion  $f(\xi, \eta)$  auf die Angabe der Phasendifferenzen zwischen den verschiedenen Strahlenkegeln des Bündels entfällt. Wir wollen den Phasen keine eigenen Freiheitsgrade zuschreiben.<sup>152)</sup> Dann müssen wir zur Angabe der Freiheitsgrade für die in (165) angegebene Schwingung den letzten Ausdruck halbieren. Für ein streng monochromatisches, linear polarisiertes Strahlenbündel, welches aus dem körperlichen Winkel  $\Omega$  senkrecht auf die Fläche  $f$  fällt, ist also die Zahl der Freiheitsgrade

$$(166) \quad \frac{f\Omega}{\lambda^2} = \frac{n^2 f \Omega}{4\pi^2 a^2}.$$

Wir finden so den Ausdruck (157) mit  $\delta = 1$  wieder.

b) Die Freiheitsgrade eines im physikalischen Sinn einfarbigen Strahlenbündels. Wie in Nr. 26 und 27 betont, haben wir es tatsächlich stets mit Schwingungen zu tun, welche einem endlichen Spektralbereich  $dn$  angehören. Damit hängt zusammen, daß die Intensität zeitlich schwanken kann, und daß die Schwingung überhaupt nur eine begrenzte Zeit  $T$  währt. In der Fourierschen Reihe für eine die Zeit  $T$  dauernde Schwingung

$$(167) \quad \varphi(t) = \sum_0^{\infty} A_p \cos\left(\frac{2\pi p}{T} t - \vartheta_p\right)$$

gehören dem Spektralbereich  $dn$  aber die Sinusschwingungen an, für welche

$$n < \frac{2\pi p}{T} < n + dn$$

ist; ihre Zahl beträgt:

$$(168) \quad \frac{T dn}{2\pi} = \frac{l dn}{g 2\pi},$$

wenn  $l = gT$  die Länge ist, welche das Licht in der Zeit  $T$  mit der

152) Es gibt in der Literatur zwei Arten, die Freiheitsgrade von periodischen Schwingungen zu zählen. Bei der ersten, der wir im Text folgen, rechnet man bei einer Schwingung (etwa der eines linearen Resonators) nur deren Amplitude als Freiheitsgrad, bei der anderen Art auch deren Phase. Ein sachlicher Unterschied besteht naturgemäß zwischen ihnen nicht.

Gruppengeschwindigkeit  $g$  durchläuft.  $T$  ist dabei als optisch groß gedacht (daher auch  $l$ ).

Dies ist also die Zahl der verfügbaren Amplituden, d. h. der Freiheitsgrade für eine die Zeit  $T$  währende einfache Schwingung vom Spektralbereich  $dn$ . Ein Strahlenbündel, welches dieselbe Zeit dauert und demselben Spektralbereich  $dn$  angehört, stellt man in Anschluß an (164a) und (167) als dreifache *Fouriersche* Reihe dar; die Zahl der verfügbaren Amplituden wird dann offenbar gleich dem Produkt aus den Ausdrücken (166) und (168), also:  $\frac{f l \Omega n^2 dn}{(2\pi)^3 a^2 g}$ . Hier ist die Fläche  $f$  als senkrechter Querschnitt des Bündels gedacht; geben wir ihrem Lote statt dessen die Neigung  $\Theta$  gegen dessen Richtung, so tritt  $f \cos \Theta$  an diese Stelle.

Die Zahl der Freiheitsgrade eines linear polarisierten Strahlenbündels von der Länge  $l$ , der spektralen Breite  $dn$ , der Brennfläche  $f$  und dem körperlichen Winkel  $\Omega$ , welches gegen die Normale von  $f$  die Neigung  $\Theta$  hat, beträgt somit (vgl. (7) und (30)):

$$(169) \quad \frac{f \cos \Theta \cdot l \Omega n^2 dn}{(2\pi)^3 a^2 g} = \frac{f \cos \Theta \cdot l \Omega n^2 dn}{(2\pi)^3 c^3} \nu^2 \left( \nu + n \frac{d\nu}{dn} \right).$$

Dabei sind  $f$  und  $l$  als sehr groß gegen die Wellenlänge vorausgesetzt.

Bei allen geometrisch optischen Vorgängen bleibt diese Zahl unverändert, auch wenn bewegte Körper dabei eine Rolle spielen. Bei allen Beugungserscheinungen hingegen, desgleichen bei jeder diffusen Spiegelung und Zerstreuung des Lichtes in einem trüben Mittel nehmen die Freiheitsgrade der Strahlung an Zahl zu. Da nach der Statistik der Übergang von Energie auf eine größere Zahl von Freiheitsgraden mit Entropievergrößerung verknüpft ist, sind diese Vorgänge im Gegensatz zu den geometrisch-optischen unumkehrbar.<sup>153)</sup>

c) *Die Freiheitsgrade der Hohlraumstrahlung.*<sup>154)</sup> Wir betrachten nun einen Raum von beliebiger Gestalt, aber in allen Abmessungen groß gegen die Wellenlänge, erfüllt von einem durchsichtigen Mittel vom Brechungsindex  $\nu$ , und legen durch ihn irgendeinen ebenen Querschnitt, dessen Ebene wir mit  $E$  bezeichnen. Den ganzen Strahlungsvorgang in ihm können wir dann zerlegen in Strahlenbündel, welche auf Flächenstücke der Ebene  $E$  hin konvergieren. Diese Flächenstücke brauchen nicht notwendigerweise im Hohlraum zu liegen; liegen sie außerhalb; so bedeutet dies, daß die auf sie zueilenden Strahlen-

153) Vgl. Anm. 151.

154) *I. H. Jeans*, Phil. Mag. 10 (1905), p. 91; ferner *H. Weyl*, Math. Ann. 71 (1911), p. 441; und *D. A. Goldhammer*, Phys. Zeitschr. 14 (1913), p. 1188 leiten diese Zahl durch Abzählung der Eigenschwingungen des Hohlraumes ab.

bündel auf eine Wand treffen, bevor sie sie erreichen. Erreicht aber ein Bündel eine Brennfläche auf  $E$ , so geht es durch sie hindurch und setzt sich jenseits weiter fort, bis es auf eine Wand des Hohlraumes trifft. Bei komplizierteren Gestalten des Hohlraumes muß sogar in Betracht gezogen werden, daß ein derartiges Strahlenbündel aus mehreren getrennten, von je einer Wand bis zu einer anderen reichenden Teilen bestehen kann. Alles dies hat auf das Folgende keinen Einfluß. Jedem Strahlenbündel können wir eine bestimmte Länge  $l$  zuschreiben, welche unter Umständen aus verschiedenen getrennten Teilen besteht und von der Gestalt des Hohlraumes, der Lage seiner Brennfläche auf  $E$  sowie seiner Richtung abhängt. Lassen wir für  $l$  auch den Wert 0 zu, welcher bedeutet, daß das in Rede stehende Strahlenbündel nicht auftritt, so können wir im folgenden die sehr bequeme Vorstellung benutzen, daß auf alle Teile der Ebene  $E$  aus allen Richtungen Strahlenbündel konvergieren, und zwar für jede Richtung zwei voneinander unabhängige, senkrecht zueinander schwingende Bündel. Nach unserer Annahme über die Abmessungen des Hohlraumes sind für alle Bündel  $f$  und  $l$  optisch groß.

Alle die genannten Strahlenbündel bestehen unabhängig voneinander. Die Hohlraumstrahlung, welche aus ihnen besteht, hat infolgedessen so viel Freiheitsgrade wie sie alle zusammen. Wir haben somit an dem Ausdruck (169) die Summation über alle Flächenstücke  $f$  der Ebene  $E$  und über alle körperlichen Winkel  $\Omega$  vorzunehmen. Die erstere Summation liefert, da bei ihr  $\Omega$  und  $\Theta$  konstant sind,

$$\frac{\Omega n^2 dn}{(2\pi)^3 a^2 g} \cos \Theta \cdot \sum f l.$$

Projizieren wir das Flächenstück  $f$  auf eine zu der Richtung des Strahlenbündels senkrechte Ebene, so wird  $f \cdot \cos \Theta$  die Größe der Projektion, und man sieht, daß  $\cos \Theta \cdot \sum f l$  gleich dem Volumen  $V$  des Hohlraumes ist. Summieren wir aber den Ausdruck

$$\frac{V \Omega n^2 dn}{(2\pi)^3 a^2 g}$$

zum zweitenmal nach  $\Omega$ , so finden wir statt  $\Omega$  einfach den Faktor  $4\pi$ . Bedenken wir schließlich noch, daß auf dasselbe Flächenstück  $f$  aus demselben Winkel  $\Omega$  zwei unabhängige, zueinander senkrecht schwingende Strahlenbündel zeilen, so haben wir noch den Faktor 2 hinzuzufügen und finden somit für die Zahl der Freiheitsgrade der Hohlraumstrahlung, soweit diese im Spektralbereich  $dn$  liegt,

$$(170) \quad \frac{V n^2 dn}{\pi^2 a^2 g} = \frac{V n^2 dn}{\pi^2 c^3} \nu^2 \left( \nu + n \frac{d\nu}{dn} \right).$$

In der Statistik spielt dieser Ausdruck zur Herleitung des Strahlungsgesetzes eine große Rolle<sup>155</sup>); doch lassen sich die Freiheitsgrade eines einzelnen Strahlenbündels dafür gerade so gut verwenden.

## V. Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen.

45. Historische Übersicht. Nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen im Jahre 1895<sup>156</sup>) stritten sich zunächst wie bei allen Strahlenarten die Emissions- und die Wellentheorie. Die festeste Stütze der ersteren waren gewisse Erscheinungen bei der Auslösung von Elektronen durch Röntgenstrahlen, welche bis heute von der Wellentheorie nicht recht gedeutet werden können; trotzdem gewann allmählich die Wellentheorie an Boden, als durch die Versuche von *Barkla*, *Ham*, *Vegard*, *Baßler*<sup>157</sup>) die Polarisation, durch *Haga* und *Wind* sowie (nach der Auffassung *Sommerfelds*) auch durch die Versuche von *Walter* und *Pohl*<sup>158</sup>) die Beugung an einem Spalte nachgewiesen wurde. Die letzteren Versuche gestatten zugleich eine Schätzung der Wellenlänge<sup>159</sup>); man fand die Größenordnung  $4 \cdot 10^{-9}$  cm. Übereinstimmend damit lauteten die Schätzungen, welche *W. Wien*<sup>160</sup>) an die Art der Entstehung der Röntgenstrahlen anknüpfte. Darin lag auch schon der Grund ausgesprochen, aus welchem die Herstellung von Interferenzerscheinungen so schwierig schien; ein Gitter für Röntgenstrahlen z. B. müßte nach Nr. 17 eine etwas, aber nicht viel größere Gitterkonstante haben als die Wellenlänge, und schon bei den optischen Gittern steht die heutige Technik an der Grenze ihres Könnens.

Seit über 60 Jahren hat nun die Kristallographie die Theorie ausgebildet, daß der wesentliche Unterschied zwischen dem kristallinen und dem amorph-festen Zustand darin bestehe, daß im ersteren die Atome oder die Molekeln nach Raumgittern angeordnet sind. Diese

155) *I. H. Jeans*, vgl. Anm. 155; *P. Debye*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 1427.

156) *W. C. Röntgen*, Sitzgs.-Ber. d. Würzburger Physik.-Mediz. Ges. 1895, Ann. d. Phys. 64 (1898), p. 1 u. 12.

157) *C. G. Barkla*, Phil. Trans. London 204 (1905), p. 467, Proc. Roy. Soc. 77 (1906), p. 247; *W. R. Ham*, Phys. Rev. 30 (1910), p. 96; *L. Vegard*, Proc. Roy. Soc. 83 (1910), p. 379; *E. Baßler*, Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 808.

158) *H. Haga* und *C. H. Wind*, Amsterdam Akademie 1899 u. 1902; Ann. Phys. Chem. 68 (1899), p. 884; Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 305; Zusammenfassung der beiden ersten Arbeiten in Archives Néerlandaises (2) 8 (1903), p. 412; *B. Walter*, Phys. Zeitschr. 3 (1902), p. 137; *B. Walter* und *R. Pohl*, Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 715; 29 (1909), p. 331. Über die Ausmessung der Beugungsbilder s. *P. P. Koch*, Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 507.

159) *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 473; vgl. auch *R. Pohl*, Die Physik der Röntgenstrahlen, Braunsch. 1912, p. 23f.

160) *W. Wien*, Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 919; vgl. auch *R. Pohl* a. a. O. p. 21.

Theorie stützte sich zunächst auf die bekannten Rationalitätseigenschaften der Kristallflächen. Aber an eine unmittelbare Prüfung, etwa unter dem Mikroskop, war nicht zu denken, solange für alle elektromagnetischen Schwingungen, die zur Verfügung standen, die kleinste Wellenlänge von derselben Größenordnung ( $10^{-5}$  cm) wie beim sichtbaren Licht war. Denn wenn auch die Konstanten der Raumgitter der Kristalle bisher in keinem Falle eindeutig festgestellt waren, so ging doch so viel aus ihrer Dichte, ihrem Molekulargewicht und aus der Zahl der Atome im Grammatom hervor, daß ihre Größenordnung  $10^{-8}$  cm ist. Für sichtbares Licht und alle langwelligere Strahlung sind die Kristalle unter diesen Umständen Kontinua, aber für Röntgenstrahlen müssen derartige Gitter gerade geeignet sein; daß man es bei den Kristallen statt mit *einfach* periodischen Gittern (wie in der Optik) mit *dreifach* periodischen *Raumgittern* zu tun hat, muß die Gittererscheinungen zwar wesentlich beeinflussen, kann aber ihr Auftreten nicht verhindern.

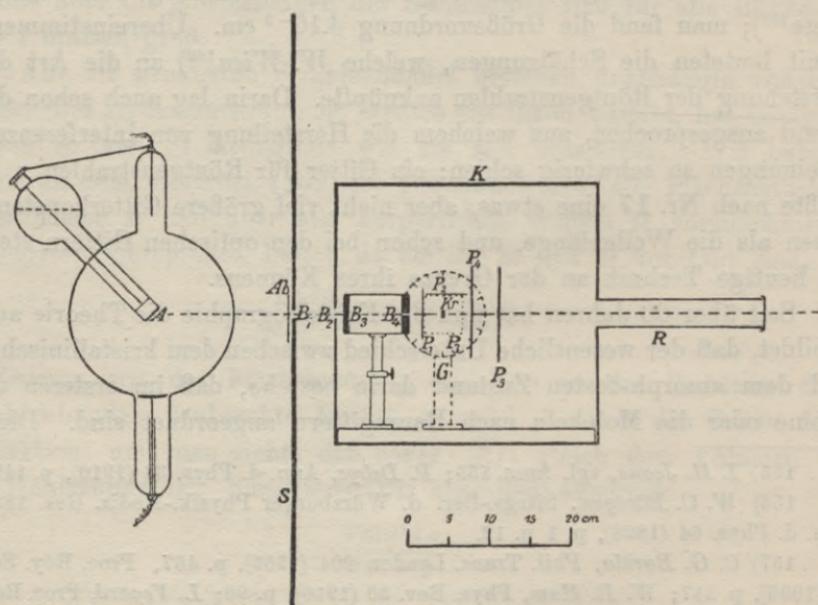


Fig. 18.

Dies waren die Überlegungen, die seinerzeit (April 1912) zu den Versuchen von *Friedrich* und *Knipping* führten<sup>161</sup>, bei welchen ein Röntgenstrahlbündel durch einen Kristall *Kr* in Fig. 18 hindurch ge-

161) *W. Friedrich, P. Knipping* und *M. Laue*, Sitzgs.-Ber. München 1912, p. 303; *Ann. d. Phys.* 41 (1913), p. 971; *M. Laue*, Festschrift der Dozenten der Universität Zürich 1914, und *Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik* 11 (1914) p. 308.

sandt wurde; auf dahinter oder daneben aufgestellten photographischen Platten  $P_1$  bis  $P_5$  wurden die Gitterspektren aufgefangen. An den  $\gamma$ -Strahlen radioaktiver Körper, deren Wesensgleichheit mit den Röntgenstrahlen bald nach der Entdeckung der Radioaktivität erkannt worden war, haben wohl zuerst *Rutherford* und *Andrade*<sup>162)</sup> die entsprechenden Versuche mit Sicherheit durchgeführt (1914).

**46. Allgemeine Theorie.** Den Ort des „Mittelpunktes“ eines Atomes im Raumgitter bestimmen wir durch die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$ , deren Achsenkreuz beliebig gerichtet ist und seinen Anfang im Mittelpunkt eines beliebigen Atoms im durchstrahlten Teil eines Raumgitters hat. Das Raumgitter mag dem allgemeinsten, d. h. dem triklinen Typus angehören, bei welchem die Kanten des Elementarparallelepipedes — dargestellt durch die drei Vektoren  $a_1, a_2, a_3$  — beliebige Längen und Richtungen haben. Die Koordinaten der Mittelpunkte der Atome oder, wie wir kurz sagen wollen, der Atome selbst, sind dann durch drei positive oder negative, das Atom numerierende ganze Zahlen  $m_1, m_2, m_3$  (einschließlich der Null) bestimmt gemäß den Formeln

$$(171) \quad \begin{aligned} x &= m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + m_3 a_{3x}, \\ y &= m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y} + m_3 a_{3y}, \\ z &= m_1 a_{1z} + m_2 a_{2z} + m_3 a_{3z}. \end{aligned}$$

Die einfallende Strahlung wollen wir uns zunächst als ebene Welle und als reine Sinusschwingung denken. Dann wird jedes Atom Ausgangspunkt einer Kugelwelle, welche wir in großer Entfernung  $r$  von ihm durch  $\psi \frac{e^{-ikr}}{r}$  darstellen können (nach Gl. (44a)). Die Funktion  $\psi$  hängt möglicherweise von der Wellenlänge  $\lambda$ , den Richtungskosinus  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  des einfallenden Strahls und den Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  des Fahrstrahls vom Atom zum Aufpunkt, aber nicht mehr von  $r$  ab. Wären die Atome gegen die Wellenlänge der Röntgenstrahlen ebenso klein wie gegen die des Lichtes, so könnten wir das Atom unabhängig von seinem Bau als einfachen Dipol betrachten und hätten  $\psi$ , falls wir mit dem *Hertz*schen Vektor rechnen, konstant, oder wenn man lieber auf die beiden Feldstärken und die mit ihnen eng verbundene Intensität eingehen wollte, gleich einer einfachen Winkel-funktion zu setzen. Da aber der übliche Wert für die Durchmesser der Atome von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge der Röntgenstrahlen ist, halten wir es für vorsichtiger,  $\psi$  als unbestimmte Funktion beizubehalten. Wir wollen sogleich erwähnen, daß unseres

162) *E. Rutherford* und *E. N. da C. Andrade*, *Phil. Mag.* (6) 27 (1914), p. 854; *Phil. Mag.* (6) 28 (1914), p. 263.

Erachtens die Frage nach dieser Funktion zurzeit noch nicht vollständig beantwortet werden kann (vgl. Nr. 53).

Zum Ausdruck  $\psi \frac{e^{-ikr}}{r}$  ist nun aber noch ein Faktor  $e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$  hinzuzufügen, wenn man bedenkt, daß die anregende Schwingung als ebene Welle in der Richtung  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitet. Über die Einzelheiten des Anregungsvorganges brauchen wir dabei keine weitere Voraussetzung zu machen, als daß er, wie wir es auch in der Optik gewohnt sind, bei allen Atomen des Kristalles gleich verläuft. Stets finden wir als Ergebnis der Überlagerung aller von den Atomen ausgehenden Wellen

$$(172) \quad \sum \psi \frac{e^{-ik(r + x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}}{r}.$$

Wir berechnen diese Summe nur für Aufpunkte, deren Abstand vom Kristall gegen alle Abmessungen des durchleuchteten Kristallstückes sehr groß ist, und benutzen die auch sonst in der Gittertheorie übliche Näherung (Nr. 17), indem wir für das  $r$  im Nenner den Betrag  $R$  des Radiusvektors vom Nullpunkt des Achsenkreuzes zum Aufpunkt setzen und der Richtungsfunktion  $\psi$  den Wert geben, welcher dessen Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  entspricht. Für das  $r$  im Exponenten setzen wir aber den Näherungswert

$$r = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma)$$

(vgl. Nr. 44 b und (113)). Im Hinblick auf (171) geht nun die Summe (172) über in

$$(173) \quad \begin{aligned} & \psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0) + z(\gamma - \gamma_0)]} \\ & = \psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} e^{i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3)}, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$(174) \quad A_1 = k(a_{1x}(\alpha - \alpha_0) + a_{1y}(\beta - \beta_0) + a_{1z}(\gamma - \gamma_0))$$

usw.

gesetzt ist. Macht man die für das Folgende unwesentliche Annahme, daß der durchstrahlte Teil des Kristalles ein Parallelepipet von den Kanten  $2M_1 a_1, 2M_2 a_2, 2M_3 a_3$  ist, so ist die Intensität dieser Schwingung, berechnet als der absolute Wert der komplexen Summe (173), gleich

$$(175) \quad J = \frac{|\psi|^2 \sin^2 M_1 A_1}{R^2 \sin^2 \frac{1}{2} A_1} \cdot \frac{\sin^2 M_2 A_2}{\sin^2 \frac{1}{2} A_2} \cdot \frac{\sin^2 M_3 A_3}{\sin^2 \frac{1}{2} A_3}.$$

Unabhängig von dieser Annahme gilt, daß eine merkliche Intensität nur dort zu erwarten ist, wo alle drei Sinusquotienten wenigstens an-

nähernd Hauptmaxima besitzen, d. h. wo die Gleichungen

$$(176) \quad \begin{aligned} A_1 &= 2h_1\pi \text{ oder } a_{1x}(\alpha - \alpha_0) + a_{1y}(\beta - \beta_0) + a_{1z}(\gamma - \gamma_0) = h_1\lambda, \\ A_2 &= 2h_2\pi \text{ oder } a_{2x}(\alpha - \alpha_0) + a_{2y}(\beta - \beta_0) + a_{2z}(\gamma - \gamma_0) = h_2\lambda, \\ A_3 &= 2h_3\pi \text{ oder } a_{3x}(\alpha - \alpha_0) + a_{3y}(\beta - \beta_0) + a_{3z}(\gamma - \gamma_0) = h_3\lambda \end{aligned}$$

mit ganzzahligen  $h_1, h_2, h_3$  erfüllt sind.

**47. Allgemeine Folgerungen über die Lage der Interferenzmaxima.** Wir wollen die Gleichungen (176) umformen, indem wir in den Richtungen  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Einheitsvektoren  $\mathfrak{s}_0$  und  $\mathfrak{s}$  einführen, deren Komponenten durch die entsprechenden Richtungskosinus selbst gegeben sind. So erhalten wir aus (176)

$$(177) \quad (a_1, \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0) = h_1\lambda, \quad (a_2, \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0) = h_2\lambda, \quad (a_3, \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0) = h_3\lambda.$$

Führen wir den Vektor  $\mathfrak{h}$  durch die Definitionen

$$(178) \quad (a_1 \mathfrak{h}) = h_1\lambda, \quad (a_2 \mathfrak{h}) = h_2\lambda, \quad (a_3 \mathfrak{h}) = h_3\lambda$$

ein, so folgt notwendig und eindeutig

$$(179) \quad \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{h}.$$

Da das skalare Produkt  $(a_1 \mathfrak{s}) = a_1 \cos(a_1 \mathfrak{s})$  ist ( $a_1$  ist die Länge von  $a_1$ ), so ist die erste der Gleichungen (177) für bestimmte Werte des Winkels zwischen den Vektoren  $a_1$  und  $\mathfrak{s}$ , d. h. auf einer Schar von Kreis Kegeln mit  $a_1$  als Achse erfüllt. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Gleichungen (177). Ein Interferenzmaximum ist also zu erwarten, wo diese drei Kegelscharen, von demselben Punkt als Spitze aus gezogen, eine Gerade gemeinsam haben. Bei gegebener Wellenlänge würde dies freilich nur ausnahmsweise mit der hinreichenden Genauigkeit zutreffen. Ließe man einfarbige Röntgenstrahlung in beliebiger Richtung den Kristall durchsetzen, so würde man in der großen Mehrzahl der Fälle überhaupt kein Interferenzmaximum bekommen.<sup>163)</sup> Enthält jedoch die einfallende Strahlung, wie das tatsächlich der Fall ist, alle Wellenlängen eines gewissen Spektralbereiches in stetiger Folge, so wird bei diesem Versuch in vielen Fällen eine passende Wellenlänge vorhanden sein; wir kommen darauf später (Nr. 50 und 51) zurück. Wir führen es als eine erste Bestätigung der Theorie an, daß man in der Tat in allen Interferenzaufnahmen die Interferenzpunkte nach Systemen durchbrochener Kegelschnitte anordnen kann. In manchen Fällen, z. B. bei der Durchstrahlung von

163) Nur das Maximum, welches durch  $h_1 = h_2 = h_3 = 0$  bestimmt ist, tritt stets auf, es liegt aber in der Richtung des einfallenden Strahles und wird von diesem verdeckt.

Nickelsulfat längs einer zweizähligen Achse, drängt sich eine solche Anordnung dem Auge förmlich auf.

Die Einteilung des Raumgitters in Elementarparallelepipede kann stets auf unendlich viele Weisen vorgenommen werden. Dem entspricht, daß man statt der drei Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  drei andere

$$(180) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \alpha_1^{(1)} \mathbf{a}_1 + \alpha_1^{(2)} \mathbf{a}_2 + \alpha_1^{(3)} \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{a}'_2 &= \alpha_2^{(1)} \mathbf{a}_1 + \alpha_2^{(2)} \mathbf{a}_2 + \alpha_2^{(3)} \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{a}'_3 &= \alpha_3^{(1)} \mathbf{a}_1 + \alpha_3^{(2)} \mathbf{a}_2 + \alpha_3^{(3)} \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

eingführt; die Koeffizienten  $\alpha_j^{(n)}$  sind ganzzahlig, ihre Determinante  $A$  hat den Wert 1, weil die Größe der Parallelepipede aus  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  und  $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3$  übereinstimmen muß, deren Verhältnis durch  $A$  gegeben ist. Die Gleichberechtigung des gestrichenen Vektorensystems mit dem ungestrichenen zeigt sich auch an unseren Grundgleichungen; denn faßt man die drei Gleichungen (177) mit  $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(3)}$  zusammen, so erhält man nach (180)

$$(181) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}'_1, \mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = h'_1 \lambda, \quad h'_1 = \alpha_1^{(1)} h_1 + \alpha_1^{(2)} h_2 + \alpha_1^{(3)} h_3, \\ \text{und wenn man sie analog mit } \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_2^{(3)} \text{ oder } \alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_3^{(3)} \\ \text{zusammenfaßt} \\ (\mathbf{a}'_2, \mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = h'_2 \lambda, \quad h'_2 = \alpha_2^{(1)} h_1 + \alpha_2^{(2)} h_2 + \alpha_2^{(3)} h_3, \\ (\mathbf{a}'_3, \mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = h'_3 \lambda, \quad h'_3 = \alpha_3^{(1)} h_1 + \alpha_3^{(2)} h_2 + \alpha_3^{(3)} h_3. \end{array} \right.$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen nach den Zahlen  $h$  lauten wegen  $A = 1$ :

$$(182) \quad \begin{aligned} h_1 &= A_1^{(1)} h'_1 + A_2^{(1)} h'_2 + A_3^{(1)} h'_3, \\ h_2 &= A_1^{(2)} h'_1 + A_2^{(2)} h'_2 + A_3^{(2)} h'_3, \\ h_3 &= A_1^{(3)} h'_1 + A_2^{(3)} h'_2 + A_3^{(3)} h'_3 \end{aligned}$$

(die  $A_m^{(n)}$  sind die Unterdeterminanten von  $A$ ), sie haben wie diese Gleichungen selbst ganzzahlige Koeffizienten. Ist  $p$  der größte, gemeinsame, ganzzahlige Teiler der drei Zahlen  $h_1, h_2, h_3$ , so ist nach (181)  $p$  auch ein gemeinsamer Teiler der Zahlen  $h'_1, h'_2, h'_3$ , und zwar der größte, weil andernfalls nach (182) auch die drei Zahlen  $h$  einen noch größeren Teiler hätten. Die Zahl  $p$  behält somit beim Übergang vom ungestrichenen zum gestrichenen Vektorensystem ihre Bedeutung.

Ebenso, wie den drei Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  eine Art entsprach, die Interferenzpunkte zu Kegelschnitten zusammenzufassen, gibt es für die Vektoren  $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3$  eine andere derartige Zusammenfassung. Jeder der unendlich vielen Arten, das Raumgitter in Elementarparallelepipede einzuteilen, entspricht eine solche Zusammenfassung. In das vierzählige symmetrische Photogramm bei regulären Kristallen hat Herr

Wulff derartige Kegelschnitte eingezeichnet (Fig. 19), die ihnen beigefügten Zahlen sind die Indizes derjenigen kristallographischen Richtung, bezogen auf die drei Würfelkanten, welche für den entsprechenden Kreiskegel die Achse ist.

**48. Ewalds Konstruktion der gebeugten Strahlen.**<sup>164)</sup> Man kann die Richtungen, in welchen Interferenzmaxima („gebeugte Strahlen“) aus dem Kristall austreten, leicht auf Grund der Gleichungen (178) und (179) durch Konstruktion finden. Wir ziehen dazu von einem beliebigen Ausgangspunkt  $O$  aus die drei

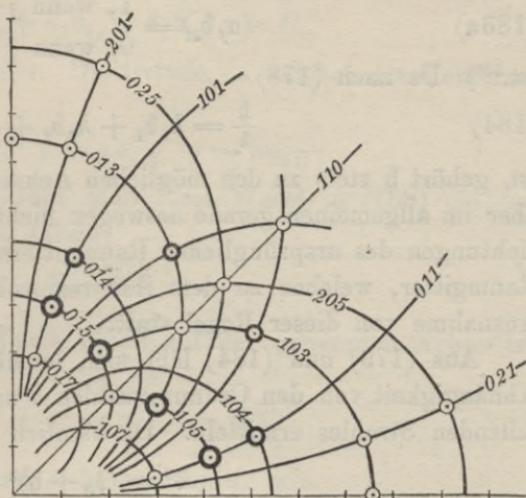


Fig. 19.

Vektoren  $a_1, a_2, a_3$  teilen die Gerade, auf welcher  $a_1$  liegt, in Strecken von der Länge  $1 : a_1$ , und legen durch jeden Teilpunkt die zu ihr senkrechte Ebene. Entsprechend verfahren wir auf den Geraden von  $a_2$  und  $a_3$ . Die so entstehenden drei Scharen äquidistanter paralleler Ebenen bilden das „reziproke“ Raumgitter. Von dem Punkt  $O$  aus ziehen wir nun den Vektor  $\vec{OS}^0 = -\frac{\vec{s}_0}{\lambda}$  und schlagen um seinen Endpunkt  $S^0$  die Kugel mit dem Radius  $S^0O$ . Nach jedem Gitterpunkt  $S$ , welchen die Kugel trifft, ziehen wir einen Vektor  $\vec{S}^0S = \frac{\vec{s}}{\lambda}$ ; er gibt die Richtung eines möglichen Interferenzmaximums an. Beweis: Der Vektor

$$\vec{OS} = \frac{\vec{h}}{\lambda} = \vec{OS}^0 + \vec{S}^0S = \frac{\vec{s} - \vec{s}^0}{\lambda}$$

hat nach Konstruktion die Projektionen  $\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}, \frac{h_3}{a_3}$  nach den Richtungen von  $a_1, a_2, a_3$ , andererseits sind diese Projektionen gleich  $\frac{(a_1 \vec{h})}{\lambda a_1}, \frac{(a_2 \vec{h})}{\lambda a_2}, \frac{(a_3 \vec{h})}{\lambda a_3}$ , so daß die Grundgleichungen (178) erfüllt sind.

Das Elementarparallelepiped des reziproken Raumgitters hat zu Kanten die drei nach Gibbs<sup>165)</sup> zu  $a_1, a_2, a_3$  „reziproken“ Vektoren

$$(183) \quad \vec{b}_1 = \frac{[a_2 a_3]}{(a_1 a_2 a_3)}, \quad \vec{b}_2 = \frac{[a_3 a_1]}{(a_2 a_3 a_1)}, \quad \vec{b}_3 = \frac{[a_1 a_2]}{(a_3 a_1 a_2)},$$

164) P. P. Ewald, Phys. Zeitschr. 14 (1913), p. 465.

165) Vgl. z. B. E. Budde, Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum, Braunschw. 1914, p. 3.

welche entsprechend der beschriebenen Konstruktion den Forderungen genügen, daß

$$(183a) \quad (a_j b_k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k, \\ 0, & \text{wenn } j \neq k \end{cases}$$

ist.<sup>166</sup> Da nach (178)

$$(184) \quad \frac{h}{\lambda} = h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3$$

ist, gehört  $h$  stets zu den möglichen Achsenrichtungen des reziproken, aber im allgemeinen gerade deswegen nicht zu den möglichen Achsenrichtungen des ursprünglichen Raumgitters. Nur bei einem kubischen Raumgitter, welches zu dem ihm reziproken ähnlich ist, findet eine Ausnahme von dieser Regel statt.

Aus (179) und (184) läßt sich leicht die Wellenlänge in ihrer Abhängigkeit von den Ordnungszahlen  $h$  und der Richtung  $\xi_0$  des einfallenden Strahles ermitteln. Da nämlich nach (179)

$$\xi^2 = (\xi_0 + h)^2$$

oder wegen  $\xi^2 = \xi_0^2 = 1$

$$(185) \quad -1 = 2 \frac{(\xi_0 h)}{h^2}$$

ist, folgt aus (184)

$$(186) \quad \lambda = -2 \frac{h_1(\xi_0 b_1) + h_2(\xi_0 b_2) + h_3(\xi_0 b_3)}{(h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3)^2}.$$

Für reguläre Kristalle wählt man passend die Kanten des Elementarwürfels als Grundvektoren  $a$  und als Koordinatenachsen. Nach (183) fallen dann die reziproken Vektoren  $b$  in dieselben Richtungen und erhalten die Länge  $\frac{1}{a}$ . Also vereinfacht sich (186) zu

$$(187) \quad \frac{\lambda}{a} = -2 \frac{h_1 \alpha_0 + h_2 \beta_0 + h_3 \gamma_0}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

**49. Die scheinbare Spiegelung an den Netzebenen des Raumgitters.** Eine sehr einfache Deutung der Grundformeln wird durch die Gleichung (179) nahegelegt, deren Inhalt durch Figur 20 veranschaulicht wird. Da nämlich  $\xi$  und  $\xi_0$  beide Einheitsvektoren sind, liegt  $\xi$  so, als wäre es aus  $\xi_0$  durch Spiegelung an einer zu  $h$  senkrechten Ebene entstanden. Diese Ebene ist nun eine Netzebene des Raumgitters. Beweis: Nach (184)

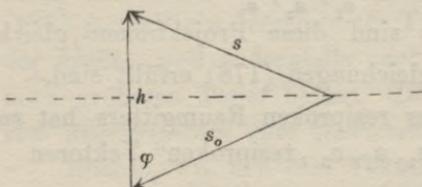


Fig. 20.

166) Wir verstehen unter  $(a_1 a_2 a_3) = (a_2 a_3 a_1) = (a_3 a_1 a_2) = (a_1 [a_2 a_3])$  usw. das skalare Produkt aus  $a_1$  und dem Vektor  $[a_2 a_3]$ ; es gibt abgesehen vom Vorzeichen das Volumen des Parallelepipedes aus  $a_1, a_2, a_3$  an.

hat eine solche Ebene die Gleichung:

$$(188) \quad (h_1 b_{1x} + h_2 b_{2x} + h_3 b_{3x})x + (h_1 b_{1y} + h_2 b_{2y} + h_3 b_{3y})y \\ + (h_1 b_{1z} + h_2 b_{2z} + h_3 b_{3z})z = C,$$

wo  $C$  eine Konstante bedeutet. Die Gerade, in welcher der Vektor  $\mathbf{a}_1$  liegt, hat die Gleichungen

$$(189) \quad x = \mu a_{1x}, \quad y = \mu a_{1y}, \quad z = \mu a_{1z},$$

wo  $\mu$  ein Parameter ist. Trägt man diese Werte in (188) ein, so findet man in Rücksicht auf (183a)

$$\mu = \frac{C}{h_1}.$$

Der Achsenabschnitt der Ebene (188) auf der genannten Achse ist aber nach (189)

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \mu |a_1| = C \frac{|a_1|}{h_1}.$$

Also verhalten sich diese drei Achsenabschnitte wie

$$\frac{|a_1|}{h_1} : \frac{|a_2|}{h_2} : \frac{|a_3|}{h_3}.$$

Die Ebene (188) ist demnach eine Netzebene des Raumgitters, und zwar sind ihre Indizes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  die kleinsten ganzen Zahlen, die sich wie  $h_1 : h_2 : h_3$  verhalten. (Die Ordnungszahlen  $h$  können im Gegensatz zu den Indizes  $\eta$  noch einen ganzzahligen gemeinsamen Faktor  $p$  besitzen.) Also: *Der durch die Ordnungszahlen  $h_1, h_2, h_3$  bestimmte abgelenkte Strahl ist so gerichtet, als wäre er an der Netzebene gespiegelt, deren Indizes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  sich wie  $h_1, h_2, h_3$  verhalten.*<sup>167)</sup>

Nach diesem Satze leuchtet es ein, daß man den Winkel

$$\varphi = \pi - (\mathfrak{s}_0 \mathfrak{h}) = \frac{1}{2}(\pi - (\mathfrak{s} \mathfrak{s}_0))$$

in Figur 20 als Einfallswinkel bezeichnen kann. Aus (179) und (184) folgt außerdem

$$(\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2 = \mathfrak{h}^2$$

oder

$$(190) \quad 2(1 - \cos(\mathfrak{s} \mathfrak{s}_0)) = \lambda^2 (h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3)^2 \\ 4 \cos^2 \varphi = p^2 \lambda^2 (\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 + \eta_3 b_3)^2.$$

Die Klammer auf der rechten Seite hat eine einfache Bedeutung. Die zu  $\mathfrak{h}$  senkrechten Netzebenen des Gitters haben alle nach (188) Gleichung

167) Bei hexagonalen Kristallen gibt man bekanntlich jeder Netzebene vier Indizes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_c$ , von denen sich die drei ersteren, deren Summe Null ist, auf die drei Nebenachsen, der vierte aber auf die Hauptachse beziehen. Ganz entsprechend hat dann ein Interferenzpunkt vier Ordnungszahlen  $h_1, h_2, h_3, h_c$ , welche sich wie die Indizes  $\eta$  verhalten, und es ist  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ .

chungen von der Form

$$(\eta_1 b_{1x} + \eta_2 b_{2x} + \eta_3 b_{3x})x + (\eta_1 b_{1y} + \eta_2 b_{2y} + \eta_3 b_{3y})y \\ (\eta_1 b_{1z} + \eta_2 b_{2z} + \eta_3 b_{3z}) = c.$$

Diejenige von ihnen, welche durch das Atom  $m_1, m_2, m_3$  führt, ist nach (171) und (183a) durch

$$c = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + m_3 \eta_3$$

gekennzeichnet. Bringt man ihre Gleichung auf die Normalform, so erkennt man, daß

$$\frac{|m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + m_3 \eta_3|}{|\eta_1 b_{1z} + \eta_2 b_{2z} + \eta_3 b_{3z}|}$$

ihr Abstand vom Nullpunkt, also auch ihr Abstand von der Netzebene ist, in der das Atom  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$  liegt. Da die Indizes  $\eta$  keinen gemeinsamen Faktor mehr besitzen, lassen sich immer solche ganzzahlige Wertetripel  $m_1, m_2, m_3$  angeben, daß der Zähler hier den Wert 1 erhält; ein kleinerer Wert (außer 0) ist nicht möglich. Also ist

$$(190a) \quad d = \frac{1}{|\eta_1 b_{1z} + \eta_2 b_{2z} + \eta_3 b_{3z}|} \left( = \frac{a}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}} \text{ für kubische Kristalle} \right)$$

der Abstand *benachbarter* Netzebenen ( $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ ). Aus (190) folgt somit die wichtige Formel:

$$(191) \quad p\lambda = 2d \cos \varphi.$$

Sie entspricht ganz der Bedingung dafür, daß bei der Spiegelung von Licht an einer planparallelen Platte von der Dicke  $d$  ein Interferenzmaximum auftritt (vgl. (42) und (43)). Ihr Inhalt ist, daß, wenn unter dem Winkel  $\varphi$  einfallende Strahlung von der Wellenlänge  $\lambda$  ein Interferenzmaximum ergibt, die von zwei benachbarten, parallelen Netzebenen herrührenden Wellen mit *ganzen* Wellenlängen Gangunterschied interferieren. Sie zeigt zugleich, wie auch (186), daß an Orte, an welchem die Wellenlänge  $\lambda$  ein Maximum ergibt, auch Maxima für die Wellenlängen  $\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \dots$  möglich sind. *Die Ordnung  $p$  des betreffenden Interferenzmaximums ist der größte gemeinsame Faktor der Ordnungszahlen  $h_1, h_2, h_3$ .*

Für die Zwecke von Nr. 54 führen wir schließlich noch als Folge aus (184) und (190a) die Gleichung

$$(192) \quad |\mathfrak{h}| = \frac{p\lambda}{d}$$

an.

Daß die Lage der Interferenzpunkte dem Spiegelungsgesetz gehorcht, haben zuerst die Herren *Bragg* bei regulären Kristallen am

vierzählig symmetrischen Photogramm nachgewiesen. Ihnen verdanken wir auch die Gleichung (191) sowie die schönsten Bestätigungen beider Gesetze durch den Versuch; wir wollen sogleich hinzufügen, daß diese Versuche mit noch größerer Genauigkeit von *Moseley* und *Darwin* wiederholt worden sind.<sup>168)</sup>

**50. Die selektive Spiegelung an Kristallen.** Die bisher besprochene Theorie setzt in der einfallenden Strahlung stets eine einzige Wellenlänge voraus. Die Röntgenröhre liefert statt dessen Strahlung von einem breiten, kontinuierlichen Spektrum, dem jedoch, wie man schon länger weiß, meist noch einfarbige, für das Material der Antikathode charakteristische Fluoreszenzstrahlungen beigemischt sind.<sup>169)</sup> Nur von diesen spektral homogenen Bestandteilen soll in dieser Nummer die Rede sein, so daß wir in Formel (191) die Wellenlänge als gegeben zu betrachten haben. Diese Gleichung sagt dann aus, daß Spiegelung mit merklicher Intensität nur bei ganz bestimmten Einfallswinkeln stattfindet, deren Kosinus im Verhältnis der ganzen Zahlen 1, 2, 3 usw. stehen. Dies haben nun die Versuche von *Bragg* sowie *Moseley* und *Darwin* an einer großen Reihe von Kristallen, Steinsalz, Zinkblende, Gips, Ferrocyankalium und anderen dargetan. In Fig. 21 zeigen beide Kurven die Intensität der gespiegelten Röntgenstrahlung (durch Ionisationswirkungen gemessen) in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\varphi$ .

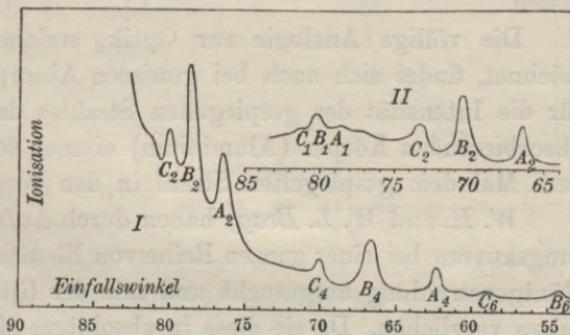


Fig. 21.

Der Kristall ist bei beiden Kurven Steinsalz, doch gibt Kurve I die Spiegelung an einer Würfelfläche (100), Kurve II die an einer Oktaederfläche (111) an. In beiden Kurven überlagern sich über die im allgemeinen mit abnehmendem Einfallswinkel abklingende Kurve Gruppen von je drei scharfen Maxima; sie liegen bei denjenigen Einfallswinkeln  $\varphi$ , bei welchen für die Wellenlänge einer charakteristischen Fluoreszenzstrahlung Gleichung (191) erfüllt ist.

168) *W. L. Bragg*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 17 (1913), p. 43; *W. H.* und *W. L. Bragg*, Proc. Roy. Soc. 1913, p. 88, 428; *H. G. J. Moseley* u. *C. G. Darwin*, Phil. Mag. 26 (1913), p. 210. Alle Arbeiten deutsch in der Z.-S. für anorgan. Chemie 90 (1915), p. 153 u. f.

169) Siehe z. B. *C. B. Barkla*, Phil. Mag. 22 (1911), p. 396, oder *R. Pohl*, Die Physik der Röntgenstrahlen, Braunsch. 1912, Kap. 5.

Da die  $\cos \varphi$  sich für die mit dem gleichen Buchstaben  $A, B$  oder  $C$  bezeichneten Maxima wie  $1:2:3$  verhalten, so gehören sie der gleichen Strahlung an und geben für diese die Interferenzmaxima verschiedener Ordnung. Die Ordnungszahl ist in Fig. 21 im Index der Buchstaben  $A, B$  oder  $C$  angegeben; weshalb in der Kurve I die ungeraden Ordnungen fehlen, werden wir in Nr. 56 besprechen. Eine weitere scharfe Prüfung der Theorie liegt im Vergleich beider Kurven. Die Maxima  $A_2$  liegen bei ihnen bei verschiedenen Einfallswinkeln; die beiden  $\cos \varphi$  verhalten sich wie  $\sqrt{3}:1$ ; dasselbe gilt für die Maxima  $B_2$  und  $C_2$ . Da der Abstand zweier Netzebenen (100) aber gleich der Würfelkante  $a$  des regulären Raumgitters, der Abstand zweier Flächen (111)  $a:\sqrt{3}$  ist, so ergibt sich für entsprechende Maxima in beiden Kurven nach Formel (191) der gleiche Wert von  $\lambda$ . Die Genauigkeit der Versuche mag man daraus entnehmen, daß *Moseley* und *Darwin* die Einfallswinkel bis auf eine Minute bestimmen konnten und daß sich nach ihren Angaben zweifellos noch genauere Messungen erreichen lassen.

Die völlige Analogie zur Optik, welche unsere Theorie kennzeichnet, findet sich auch bei gewissen Absorptionsmessungen. Es ist für die Intensität des gespiegelten Strahles dasselbe, wenn wir einen absorbierenden Körper (Aluminium) einmal dem einfallenden, das andere Mal dem gespiegelten Strahl in den Weg stellen.

*W. H.* und *W. L. Bragg* haben durch Aufnahme derartiger Spiegelungskurven bei einer ganzen Reihe von Elementen die charakteristische Röntgenstrahlung aufgesucht und mit der Gitterkonstanten des Steinsalzes verglichen. Da sie diese in absolutem Maße bestimmen konnten (vgl. Nr. 56), so konnten sie damit die Wellenlängen absolut messen. Die drei besprochenen Linien des Platinspektrums haben z. B. die Wellenlängen ( $A$ )  $1,3 \cdot 10^{-8}$ , ( $B$ )  $1,1 \cdot 10^{-8}$ , ( $C$ )  $9,5 \cdot 10^{-9}$  cm; sowohl ( $B$ ) als ( $C$ ) hat sich in neueren Untersuchungen in zwei benachbarte Linien auflösen lassen.

Die sehr eingehenden Untersuchungen von *Moseley*<sup>170)</sup> haben zu dem sehr bemerkenswerten Gesetz geführt, daß jedes chemische Element zwei Hauptlinien aussendet, eine härtere  $K$ -Linie, deren Frequenz sich aus der Ordnungszahl des Elementes  $N$  im periodischen System, und der universellen Frequenz  $n_0 = 3,291 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$  des *Rydbergschen* Spektralgesetzes nach der Formel

$$(192a) \quad n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(N - 1)^2 n_0 = \frac{3}{4}(N - 1)^2 n_0$$

170) *H. G. J. Moseley*, Phil. Mag. 26 (1913), p. 1024; 27 (1914); p. 703; vgl. auch *J. R. Rydberg*, Phil. Mag. 28 (1914), p. 144.

berechnet, und eine weichere  $L$ -Linie, für deren Frequenz ähnliche Formeln vorgeschlagen sind. Außer diesen Hauptlinien gibt es eine Anzahl Satelliten. Die kürzeste Wellenlänge ( $7,2 \cdot 10^{-10}$  cm) haben bisher *Rutherford* und *Andrade* bei den  $\gamma$ -Strahlen des Radium  $B$  oder  $C$  nachgewiesen.<sup>162)</sup>

51. Die allgemeine Spiegelung. Wie an Fig. 21 zu sehen, findet neben der besprochenen selektiven Spiegelung auch eine allgemeine Spiegelung bei allen Einfallswinkeln

innerhalb eines gewissen Bereiches statt. Fig. 22, die mit einer Platinantikathode an Ferrocyankalium aufgenommen ist, zeigt für die letztere die Abhängigkeit der gespiegelten Intensität von dem Einfallswinkel. Die scharfen Maxima, welche der selektiven Spiegelung entsprechen, sind fortgelassen; nur ihre Stellen sind mit den Buchstaben  $A, B, C$ , welche dieselbe Bedeutung wie in Fig. 21 haben, angegeben. Auf Grund der Formel (191) müssen wir diese allgemeine Spiegelung auf das kontinuierliche Spektrum der einfallenden Röntgenstrahlen zurückführen und können im Anschluß an

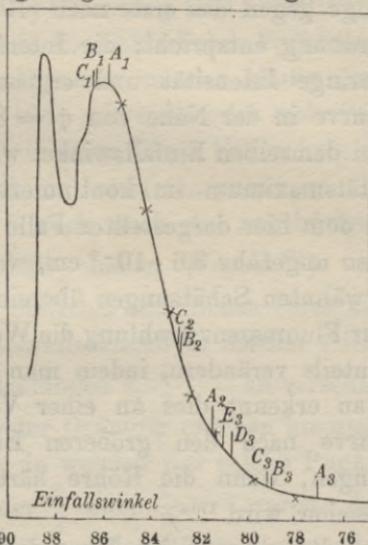


Fig. 22.

*Moseley* und *Darwin* die folgenden Schlüsse über sie ziehen. Aus der Gesamtheit der vorhandenen Wellenlängen werden bei gegebenen  $\varphi$  diejenigen ausgesondert, welche der Formel (191) genügen. Beginnen wir bei streifendem Einfall ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), so erfüllt keine endliche Wellenlänge diese Bedingung, es tritt somit kein gespiegelter Strahl auf. Lassen wir den Einfallswinkel abnehmen und damit seinen Kosinus wachsen, so kommen wir allmählich in einen Bereich, in welchem die kürzesten vorhandenen Wellenlängen mit  $p=1$  dieser Gleichung genügen, also Interferenzen erster Ordnung ergeben. Die zugehörige Intensität in der einfallenden Strahlung wird dabei zunächst gering sein, aber allmählich wachsen, bis ein Maximum erreicht wird, das wenigstens ungefähr dem Intensitätsmaximum im Spektrum der einfallenden Strahlung entspricht. Darüber hinaus setzt ein Abfall der Kurve ein. Doch nun tritt bald die Komplikation ein, daß bei weiterem Anwachsen von  $\varphi$  auch Interferenzen zweiter Ordnung auftreten, so daß wir jetzt bei gleichem  $\varphi$  zwei Wellenlängen in der gespiegelten Strahlung haben. Später tritt sogar noch eine dritte,

vierte usw. Ordnung auf. Könnte man die Interferenzen einer bestimmten Ordnung aussondern, so würden sie eine Spiegelungskurve ergeben, welche der beschriebenen ähnlich verläuft, nur, in der Skala der  $\cos \varphi$  gemessen, einen  $p$ mal größeren Bereich einnimmt. Tatsächlich überlagern sich alle derartigen Kurven, und es ergibt sich im allgemeinen eine Spiegelungskurve, welche mehrere Maxima hat. In Fig. 22 z. B. sieht man noch ein zweites Maximum, welches, wie aus seiner Lage gegen das erste nach (191) hervorgeht, den Interferenzen dritter Ordnung entspricht; die Interferenzen zweiter Ordnung haben relativ geringe Intensität und ergeben infolgedessen nur die Biegung der Kurve in der Nähe von  $\varphi = 87^\circ$ . Da das zweite Maximum ungefähr bei demselben Einfallswinkel wie das Maximum  $B_1$  liegt, hat das Intensitätsmaximum im kontinuierlichen Teil des Röntgenstrahlspektrums in dem hier dargestellten Falle eine dreimal kleinere Wellenlänge als  $B$ , also ungefähr  $3,6 \cdot 10^{-9}$  cm, was vortrefflich mit den in der Einleitung erwähnten Schätzungen übereinstimmt. Doch kann man im Gegensatz zur Fluoreszenzstrahlung die Wellenlängen des spektral kontinuierlichen Anteils verändern, indem man die Härte der Röntgenröhre verändert. Man erkennt dies an einer Verschiebung der gesamten Spiegelungskurve nach den größeren Einfallswinkeln, also kleineren Wellenlängen, wenn die Röhre härter, im umgekehrten Sinne, wenn sie weicher wird.<sup>170a)</sup>

Bei dem in Nr. 50 und hier besprochenen Versuchen ähnelt die Spiegelung der Röntgenstrahlen der des Lichtes, weil aus experimentellen Gründen eine der natürlichen Grenzflächen des Kristalles als Spiegelungsfläche benutzt war. Doch ist die Ähnlichkeit eine rein äußerliche. Die Spiegelung des Lichtes ist ein *Oberflächeneffekt*, sie ist, wenn sie regelmäßig auftreten soll, an die Bedingung der Glattheit der Oberfläche gebunden und findet sich bei Kristallen nicht nur an natürlichen Grenzflächen, welche stets Netzebenen des Raumgitters sind, sondern auch an beliebigen angeschliffenen Flächen. Für die Spiegelung von Röntgenstrahlen hingegen ist es ganz gleichgültig, ob die Spiegelungsfläche als Grenzfläche auftritt oder nicht. Einem Kristall künstlich angeschliffene Flächen, welche nicht Netzebenen sind, spiegeln ebensowenig wie die Begrenzungen amorpher Körper, z. B. Glas. Und schließlich ist es für die Spiegelung an einer natürlichen Grenzfläche völlig gleichgültig, ob man sie glatt läßt oder künstlich aufraut. Die Spiegelung der Röntgenstrahlen ist eben, wie aus allen unseren Ausführungen hervorgeht, ein *Volumeneffekt*. In Einklang damit

170\*) W. Friedrich, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 1169.

steht, daß bei den erwähnten Spiegelungsversuchen mit inhomogener Strahlung außer dem an der Grenzfläche gespiegelten Strahl auch andere, an anderen Netzebenen reflektierte auftreten.

Wir können jetzt, auf eine Bemerkung in Nr. 47 zurückgreifend, sagen: Durchstrahlen wir einen Kristall mit Röntgenstrahlen einer bestimmten Wellenlänge, so müssen wir, um überhaupt ein Interferenzmaximum zu erhalten, in ganz bestimmten Richtungen durchstrahlen, da im allgemeinen für keine Netzebene die Gleichung (191) erfüllt ist. Hat die einfallende Strahlung hingegen ein kontinuierliches Spektrum, so wird sich je nach den Umständen mehr oder minder häufig eine Netzebene finden, für welche Gleichung (191) mit einer oder mehreren der verfügbaren Wellenlängen erfüllt ist; in allen diesen Fällen kommt dann ein Interferenzpunkt zustande. Daß ein Interferenzpunkt im allgemeinen neben der Grundwellenlänge  $\lambda$  auch noch die zugehörigen „harmonischen Obertöne“  $\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \dots$  enthält, haben *Wagner*<sup>171)</sup> und *Glocker*<sup>172)</sup> gezeigt. Sie durchstrahlten Steinsalz und ließen eines der Interferenzmaxima auf einen zweiten Steinsalzkristall in solcher Richtung fallen, daß die verschiedenen Wellenlängen  $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \dots$  an verschiedenen Netzebenen Interferenzmaxima erster Ordnung ergeben konnten. Sie erhielten dann eine Interferenzfigur, in welcher nur solche Punkte auftraten, deren Grundwellenlängen  $\lambda$  oder  $\frac{\lambda}{2}$  oder  $\frac{\lambda}{3}, \dots$  waren. Andere Punkte, welche mit einer unmittelbar von der Röhre kommenden Strahlung unter den gleichen Umständen leicht zu erhalten waren, aber andere Grundwellenlängen enthielten, fanden sich nicht — ein Beweis, daß in dem untersuchten Maximum mehrere zueinander harmonische Wellenlängen und *nur* solche auftraten.

**52. Die Intensität der Interferenzpunkte.**<sup>173)</sup> Der Maximalwert der Funktion  $\frac{\sin^2 M_1 A_1}{\sin^2 \frac{1}{2} A_1}$  ist  $4 M_1^2$ , die Maxima der Intensität sind somit nach (175) für homogene Strahlung einer bestimmten Richtung proportional zum Quadrat der Zahl  $8 M_1 M_2 M_3$  aller bestrahlten Gitterelemente, unabhängig von den Indizes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  der spiegelnden Netzebene. Fragen wir aber für *inhomogene Strahlung* nach der gesamten Intensität eines Interferenzpunktes, so müssen wir bedenken, daß wegen der zwar kleinen, aber endlichen Breite der Maxima der Funktion (175)

171) *E. Wagner*, Phys. Zeitschr. 14 (1913), p. 1232.

172) *R. Glocker*, Phys. Zeitschr. 15 (1914), p. 401.

173) *P. Debye*, Ann. d. Phys. 43 (1914), p. 49 nach brieflicher Mitteilung von *H. A. Lorentz*. Die von *Lorentz* ursprünglich in einem Colleg vorgetragene Ableitung wird mitgeteilt von *J. Kern*, Physikal. Zeitschr. 15 (1914), p. 136; für beliebige Kristallsysteme zuerst bei *Laue*, Festschrift, vgl. Anm. 162.

nicht nur die nach (191) berechnete Wellenlänge zu ihm beiträgt, sondern auch gewisse, ihr benachbarte, daß ferner die einfallende Strahlung nicht nur aus einer bestimmten Richtung  $\mathfrak{s}_0$  kommt, sondern aus einem kleinen, aber endlichen körperlichen Winkel. Beide Umstände machen, da das Element des körperlichen Winkels  $\frac{d\alpha_0 d\beta_0}{\gamma_0}$  ist, die Multiplikation des Ausdrucks (175) mit  $\frac{d\alpha_0 d\beta_0}{\gamma_0} dk$  und die Integration nach  $\alpha_0, \beta_0$  und  $k$  erforderlich. Führt man statt dieser nach (174)  $A_1, A_2, A_3$  als Integrationsvariable ein, so hat man, da

$$\frac{1}{\gamma_0} d\alpha_0 d\beta_0 dk = \frac{1}{\gamma_0} \frac{1}{|D|} dA_1 dA_2 dA_3$$

ist, zunächst die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial A_1}{\partial \beta_0} & \frac{\partial A_1}{\partial k} \\ \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial A_2}{\partial \beta_0} & \frac{\partial A_2}{\partial k} \\ \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial A_3}{\partial \beta_0} & \frac{\partial A_3}{\partial k} \end{vmatrix}$$

zu berechnen. Bedenken wir, daß der Integrationsbereich nur ein kleiner ist, so können wir  $D$  in ihm als konstant betrachten und ihm den Wert beilegen, welcher sich aus den Gleichungen (176) und den aus ihnen folgenden ergibt. Indem wir nach (174)

$$\frac{\partial A_1}{\partial k} = a_{1x}(\alpha - \alpha_0) + a_{1y}(\beta - \beta_0) + a_{1z}(\gamma - \gamma_0) = \frac{2\pi h_1}{k}$$

usw. setzen, finden wir so

$$D = -\frac{2\pi k}{\gamma_0^2} \begin{vmatrix} [a_1 \mathfrak{s}_0]_y [a_1 \mathfrak{s}_0]_x h_1 \\ [a_2 \mathfrak{s}_0]_y [a_2 \mathfrak{s}_0]_x h_2 \\ [a_3 \mathfrak{s}_0]_y [a_3 \mathfrak{s}_0]_x h_3 \end{vmatrix} \\ = \frac{2\pi k}{\gamma_0^2} \{ h_1 [a_2 \mathfrak{s}_0] [a_3 \mathfrak{s}_0]_z + h_2 [a_3 \mathfrak{s}_0] [a_1 \mathfrak{s}_0]_z + h_3 [a_1 \mathfrak{s}_0] [a_2 \mathfrak{s}_0]_z \}.$$

Machen wir sodann von der Vektorregel

$$[\mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{U}] = \mathfrak{N}(\mathfrak{U} \mathfrak{M}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{M} \mathfrak{N})$$

und von den Gleichungen (183), (184) und (185) Gebrauch, so formt sich dies, da  $\mathfrak{s}_{0z} = \gamma_0$  ist, um zu

$$D = \frac{2\pi k}{\gamma_0} \{ h_1 (\mathfrak{s}_0 [a_2 a_3]) + h_2 (\mathfrak{s}_0 [a_3 a_1]) + h_3 (\mathfrak{s}_0 [a_1 a_2]) \} \\ = \frac{2\pi k}{\gamma_0} (a_1 a_2 a_3) \{ h_1 (\mathfrak{s}_0 \mathfrak{b}_1) + h_2 (\mathfrak{s}_0 \mathfrak{b}_2) + h_3 (\mathfrak{s}_0 \mathfrak{b}_3) \} \\ = \frac{2\pi k}{\lambda \gamma_0} (a_1 a_2 a_3) (\mathfrak{s}_0 \mathfrak{b}) = -\frac{\pi k}{\lambda \gamma_0} (a_1 a_2 a_3) \mathfrak{b}^2.$$

Unter nochmaliger Anwendung von (184) und in Rücksicht auf (190a) schließt man daraus

$$\begin{aligned}\gamma_0 |D| &= 2\pi^2 (a_1 a_2 a_3) (h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3)^2 \\ &= 2\pi^2 p^2 (a_1 a_2 a_3) (\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 + \eta_3 b_3)^2 \\ &= 2\pi^2 (a_1 a_2 a_3) \frac{p^2}{d^2}.\end{aligned}$$

Wegen der Schärfe der Maxima der Funktion (175) ist es von geringem Belange, wie man die Integrationsgrenze wählt, wenn nur im Integrationsbereich ein einziges Maximum von ihr liegt. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man  $\pm \pi$  als Grenzen für alle drei Integrationen wählt. Da nach (118a)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 M_1 A_1}{\sin^2 \frac{1}{2} A_1} dA_1 = 4\pi M_1$$

ist, findet man so für die Intensität des Interferenzpunktes  $h_1, h_2, h_3$  bei Anwendung inhomogener Strahlung

$$(193) \quad J = \frac{32\pi M_1 M_2 M_3}{(a_1 a_2 a_3)} \cdot \frac{|\psi|}{(h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3)^2} = \frac{32\pi M_1 M_2 M_3}{(a_1 a_2 a_3)} \cdot \frac{|\psi| d^2}{p^2}$$

( =  $\frac{32\pi M_1 M_2 M_3}{a(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)} \frac{|\psi|}{p^2}$  bei regulären Kristallen ).

Die Zahl der Atome pro Flächeneinheit der Netzebene ( $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ ) ist zum Abstand  $d$  benachbarter Netzebenen proportional. Somit ist das Reflexionsvermögen der Ebene ( $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ ) proportional zum Quadrat ihrer Belegungsichte und umgekehrt proportional zum Quadrat der Ordnungszahl  $p$  der Interferenz; von den in demselben Punkt nach (191) möglichen Wellenlängen wird die Grundwellenlänge bevorzugt. Diese Bevorzugung der dichter belegten Ebenen tritt aber lediglich sekundär bei inhomogener Strahlung auf, weil bei ihnen der Bereich von Wellenlängen und Richtungen, die zum Interferenzpunkt beitragen, größer ist als bei minder dicht belegten.

In den folgenden Erörterungen wollen wir statt an (193) an den einfacheren Ausdruck (175) anknüpfen. Die Ausführung der hier besprochenen Integration würde stets nur die Folge haben, daß man die angegebenen Intensitäten mit

$$\frac{32\pi M_1 M_2 M_3 d^2}{(a_1 a_2 a_3) p^2}$$

zu multiplizieren und durch die drei Sinusquotienten zu dividieren hat.

Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß die Absorption der Röntgenstrahlen, von der wir hier völlig abgesehen haben, diese Ergebnisse beeinflussen muß.

**53. Die Frage nach der Funktion  $\psi$ .** Die Intensität der Interferenzpunkte hängt nach Gleichung (175) auch von dem Faktor

$\psi$  ab, welcher Funktion von  $\lambda$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ist und durch die Interferenztheorie nicht bestimmt werden kann; denn er gibt an, wie das einzelne Gitterelement auf die einfallenden Wellen anspricht. Schon beim optischen Gitter haben wir eine völlig analoge Schwierigkeit (vgl. Nr. 17).

**54. Der Temperatureinfluß.** Die Theorie, wie wir sie bisher entwickelt haben, denkt die Atome fest an ihre Orte im Raumgitter gebunden. Das ist aber nur beim absoluten Nullpunkt der Temperatur richtig. Bei jeder anderen Temperatur haben die Atome ja eine Wärmebewegung, so daß das Raumgitter wohl die Ruhelage, um welche sie schwingen, nicht aber ihren wirklichen Ort bestimmt. Vielmehr wird ein Atom in einem beliebig herausgegriffenen Augenblick gewisse Abweichungen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  von der Ruhelage haben.

Die Vervollständigung der Theorie durch Berücksichtigung der Wärmebewegung verdanken wir *Debye*.<sup>175)</sup> Freilich hat diese Vervollständigung wohl nicht die, man möchte sagen, mathematische Genauigkeit der bisherigen Entwicklungen. Die statistische Theorie der Materie, welche dabei benutzt werden muß, steht gerade gegenwärtig in einer Krise, deren Ende noch nicht abzusehen ist: wir halten uns im folgenden an die alte *Boltzmann-Gibbssche* Statistik, welche bei höheren Temperaturen jedenfalls im wesentlichen richtig ist. Zweitens aber ist die Art, wie die Atome in einem festen Körper an ihre Ruhelagen gebunden sind, nicht so leicht anzugeben. Streng genommen bewirkt die Gesamtheit der Nachbaratome diese Bindung; Kräfte zwischen der Ruhelage und dem Atom kann es nicht geben, weil in der Ruhelage nichts ist, wovon diese ausgeübt werden könnten. Wenn wir dennoch im folgenden einfach eine Kraft  $f\rho$  ( $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ) ansetzen, welche das Atom in die Ruhelage zurücktreibt, so können wir uns darauf berufen, daß dies Verfahren schon sonst in statistischen Problemen zu Folgerungen geführt hat, welche mit der Erfahrung im wesentlichen übereinstimmen. Der Proportionalitätsfaktor  $f$  muß dann so gewählt werden, daß die aus ihm berechnete Eigenfrequenz mit der optischen Eigenfrequenz des Kristalls im Ultraroten (im Gebiete der *Rubensschen* Reststrahlen) übereinstimmt; er hängt auch mit der Kompressibilität des Kristalles aufs engste zusammen.

*Debye* überlegt nun folgendermaßen: Die Geschwindigkeit der Wärmebewegung ist gegen die Lichtgeschwindigkeit so gering, daß es erlaubt sein wird, ihren Einfluß zu vernachlässigen. Es bleibt dann

175) *P. Debye*, Verhandl. d. deutsch. Phys.-Ges. 15 (1913), p. 678, 738, 857; Ann. d. Phys. 43 (1914), p. 49.

nur der Einfluß dieser Bewegung auf die Lage der Atome zu berücksichtigen. Durch eine einfache Erweiterung der Betrachtungen von Nr. 46 berechnen wir nun die Intensität  $J$  für beliebige Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$  der Atome als Funktion der  $\xi, \eta, \zeta$ . Mit deren Veränderung wird im Laufe der Zeit auch die Intensität  $J$  variieren, und zwar so schnell, daß immer nur statt der Momentanwerte  $J$  deren zeitlicher Mittelwert  $J$  zur Beobachtung kommt. Dieser Mittelwert ist identisch mit der sogenannten „mathematischen Hoffnung“ für  $J$ ; man berechnet ihn, indem man  $J$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w$  des zugehörigen Systems der Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$  multipliziert und dann über alle möglichen Werte der  $\xi, \eta, \zeta$  integriert. Für  $w$  liefert die Boltzmann-Gibbssche Statistik<sup>176)</sup>, da nach dem angenommenen Kraftgesetz  $\frac{f}{2} \varrho_{m_1, m_2, m_3}^2$  die potentielle Energie des Atoms  $m_1, m_2, m_3$  ist,

$$w = C e^{-\frac{f}{2\kappa T} \sum \varrho_{m_1, m_2, m_3}^2}, \quad (501)$$

wobei die Summation nach  $m_1, m_2, m_3$  über dieselben Bereiche  $2M_1, 2M_2, 2M_3$  auszuführen ist wie in Nr. 46.  $T$  ist die absolute Temperatur,  $\kappa$  die Konstante des Boltzmannschen Prinzips (sonst meist mit  $k$  bezeichnet). Die Konstante  $C$  aber berechnet sich aus der Forderung, daß der Gesamtwert von  $w$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots w \Pi d\xi_{m_1, m_2, m_3} d\eta_{m_1, m_2, m_3} d\xi_{m_1, m_2, m_3} = 1$$

sein muß (die Produktbildung  $\Pi$  ist hier analog der Summenbildung  $\Sigma$  auszuführen), zu

$$(194) \quad C = \left( \frac{f}{2\pi\kappa T} \right)^{12 M_1 M_2 M_3},$$

da hier  $3 \times 8 M_1 M_2 M_3$  Integrale vom Werte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f}{2\kappa T} u^2} du = \left( \frac{2\pi\kappa T}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

miteinander multipliziert sind.

Liegen die Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$  vor, so werden die Koordinaten des Atoms  $m_1, m_2, m_3$

$$x = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + m_3 a_{3x} + \xi_{m_1, m_2, m_3}$$

$$y = m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y} + m_3 a_{3y} + \eta_{m_1, m_2, m_3}$$

$$z = m_1 a_{1z} + m_2 a_{2z} + m_3 a_{3z} + \zeta_{m_1, m_2, m_3}$$

176) Die in Anm. 175) zuletzt genannte Arbeit von Debye ersetzt die Boltzmann-Gibbssche Statistik durch die Quantentheorie, da aber letztere noch nicht hinreichend feste Formen hat, bleiben wir im Text bei den ersteren Arbeiten stehen.

und wir finden als Ausdruck für die resultierende Schwingung statt (173):

$$\psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0) + z(\gamma - \gamma_0)]}$$

$$= \psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum e^{ik[m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + \xi_{m_1, m_2, m_3}(\alpha - \alpha_0) + \eta_{m_1, m_2, m_3}(\beta - \beta_0) + \zeta_{m_1, m_2, m_3}(\gamma - \gamma_0)]}$$

Multiplizieren wir damit den dazu konjugiert komplexen Ausdruck, so finden wir für die Intensität

$$J = \frac{|\psi|^2}{R^2} \sum_m \sum_{m'} e^{ik[(m_1 - m_1') A_1 + (m_2 - m_2') A_2 + (m_3 - m_3') A_3]}$$

$$\times e^{ik[(\xi_{m_1, m_2, m_3} - \xi_{m_1', m_2', m_3'}) (\alpha - \alpha_0) + (\eta_{m_1, m_2, m_3} - \eta_{m_1', m_2', m_3'}) (\beta - \beta_0) + (\zeta_{m_1, m_2, m_3} - \zeta_{m_1', m_2', m_3'}) (\gamma - \gamma_0)]}$$

Der Mittelwert von  $J$  ist

$$(195) \quad \bar{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} J \omega \prod_n d\xi_{n_1, n_2, n_3} d\eta_{n_1, n_2, n_3} d\zeta_{n_1, n_2, n_3}$$

$$= \frac{|\psi|^2}{R^2} \sum_m \sum_{m'} K_{m_1, m_2, m_3, m_1', m_2', m_3'} e^{ik[(m_1 - m_1') A_1 + (m_2 - m_2') A_2 + (m_3 - m_3') A_3]}$$

wobei

$$K_{m_1, m_2, m_3, m_1', m_2', m_3'} = C \int_{-\infty}^{+\infty} \dots e^{-\frac{f}{2\pi T} \sum_n \xi_{n_1, n_2, n_3}^2}$$

$$\times e^{ik[(\xi_{m_1, m_2, m_3} - \xi_{m_1', m_2', m_3'}) (\alpha - \alpha_0) + (\eta_{m_1, m_2, m_3} - \eta_{m_1', m_2', m_3'}) (\beta - \beta_0) + (\zeta_{m_1, m_2, m_3} - \zeta_{m_1', m_2', m_3'}) (\gamma - \gamma_0)]}$$

$$\times \prod d\xi_{n_1, n_2, n_3} d\eta_{n_1, n_2, n_3} d\zeta_{n_1, n_2, n_3}$$

Dies Integral hat nun verschiedene Werte, je nachdem

a)  $m_1 = m_1', m_2 = m_2', m_3 = m_3'$ ,

oder

b) von den Wertepaaren  $m_1$  und  $m_1', m_2$  und  $m_2', m_3$  und  $m_3'$  wenigstens eins zwei verschiedene Zahlen enthält.

Im Falle *a* berechnet sich  $K$  ganz wie oben die Konstante  $C$ , so daß  $K = 1$  wird. Im Fall *b* hingegen zerfällt  $K$  in drei Faktoren (abgesehen von  $C$ ), von denen der erste

$$(196) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots e^{-\frac{f}{2\pi T} \sum_n \xi_{n_1, n_2, n_3}^2} e^{ik[(\xi_{m_1, m_2, m_3} - \xi_{m_1', m_2', m_3'}) (\alpha - \alpha_0)]} \prod_n d\xi_{n_1, n_2, n_3}$$

lautet, während die beiden anderen aus ihm hervorgehen, wenn man  $\xi$  mit  $\eta$  oder  $\xi$ ,  $\alpha$  mit  $\beta$  oder  $\gamma$  vertauscht. In dem hingeschriebenen Integral liefert nun zunächst jede der  $8M_1M_2M_3 - 2$  Integrationen nach allen  $\xi$  mit Ausnahme von  $\xi_{m_1, m_2, m_3}$  und  $\xi_{m_1', m_2', m_3'}$  den Faktor

$\left(\frac{2\pi\kappa T}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Die beiden noch ausstehenden Integrationen fügen die Faktoren

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f}{2\kappa T} \xi_{m_1, m_2, m_3}^2 + ik(\alpha - \alpha_0) \xi_{m_1, m_2, m_3}} d\xi_{m_1, m_2, m_3}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f}{2\kappa T} \xi_{m_1', m_2', m_3'}^2 - ik(\alpha - \alpha_0) \xi_{m_1', m_2', m_3'}} d\xi_{m_1', m_2', m_3'}$$

hinzu, deren gemeinsamer Wert

$$\left(\frac{2\pi\kappa T}{f}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\kappa T}{2f} k^2 (\alpha - \alpha_0)^2}$$

ist. Somit ist das Integral (196) gleich

$$\left(\frac{2\pi\kappa T}{f}\right)^{4M_1 M_2 M_3} e^{-\frac{\kappa T}{f} k^2 (\alpha - \alpha_0)^2}.$$

Fügt man noch die beiden anderen Faktoren von  $K$  hinzu, in welchen  $\alpha$  mit  $\beta$  oder  $\gamma$  vertauscht ist, so findet man in Hinblick auf (194)

$$K = e^{-\frac{\kappa T}{f} k^2 [(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2]}.$$

Da nach Nr. 47  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  die Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_0$  sind, so ist hier

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 = (\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2$$

zu setzen. Für die mittlere Intensität folgt daraus, daß in (195)  $K = 1$ , wenn  $m_1 = m_1', m_2 = m_2', m_3 = m_3'$ , sonst

$$K = e^{-\frac{\kappa T}{f} k^2 (\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2}$$

zu setzen ist.

Scheiden wir zunächst die Glieder aus der dortigen Summe aus, für welche das Erstere zutrifft, so finden wir  $8M_1 M_2 M_3$  Summanden vom Werte 1. Addieren wir sodann alle diese Glieder, multipliziert

mit  $e^{-\frac{\kappa T}{f} k^2 (\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2}$ , so finden wir eine Summe

$$e^{-\frac{\kappa T}{f} k^2 (\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2} \sum \sum e^{ik[(m_1 - m_1')A_1 + (m_2 - m_2')A_2 + (m_3 - m_3')A_3]},$$

welche gleich

$$e^{-\frac{\kappa T}{f} k^2 (\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)^2} \frac{\sin^2 M_1 A_1 \sin^2 M_2 A_2 \sin^2 M_3 A_3}{\sin^2 \frac{1}{2} A_1 \sin^2 \frac{1}{2} A_2 \sin^2 \frac{1}{2} A_3}$$

ist (vgl. die Formeln (173) und (175)). Schließlich müssen wir noch

die soeben hinzugefügten Summanden abziehen, d. h.

$$8 M_1 M_2 M_3 e^{-\frac{\pi T}{f} k^2 (\bar{s} - \bar{s}_0)^2}$$

subtrahieren, so finden wir

$$(197) \quad J = \frac{|\psi|^2}{R^2} \left\{ 8 M_1 M_2 M_3 \left( 1 - e^{-\frac{\pi T}{f} k^2 (\bar{s} - \bar{s}_0)^2} \right) + e^{-\frac{\pi T}{f} k^2 (\bar{s} - \bar{s}_0)^2} \frac{\sin^2 M_1 A_1 \sin^2 M_2 A_2 \sin^2 M_3 A_3}{\sin^2 \frac{1}{2} A_1 \sin^2 \frac{1}{2} A_2 \sin^2 \frac{1}{2} A_3} \right\}.$$

Nach (179), (184) und (190a) ist dabei

$$(198) \quad \begin{aligned} h^2 (\bar{s} - \bar{s}_0)^2 &= (2\pi)^2 \frac{b^2}{\lambda^2} = (2\pi)^2 (h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3)^2 \\ &= (2\pi)^2 p^2 (\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 + \eta_3 b_3)^2 = \left( \frac{2\pi p}{d} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \quad \text{bei regulären Kristallen.} \end{aligned}$$

Der erste Summand in Gleichung (197) ist proportional zur Zahl  $8 M_1 M_2 M_3$  der bestrahlten Atome; er ist Null in der Richtung des einfallenden Strahles ( $\bar{s} = \bar{s}_0$ ), wächst, da nach Fig. 20

$$(199) \quad (\bar{s} - \bar{s}_0)^2 = \bar{s}^2 + \bar{s}_0^2 - 2(\bar{s}\bar{s}_0) = 2(1 - \cos \vartheta)$$

ist, zugleich mit dem Winkel  $\vartheta$  zwischen  $\bar{s}$  und  $\bar{s}_0$ , bis er für  $\vartheta = \pi$  den Wert

$$(200) \quad 8 M_1 M_2 M_3 \left( 1 - e^{-\frac{4\pi T}{f} k^2} \right)$$

erreicht, ohne irgendwo ein Maximum zu haben. Er gibt offenbar die infolge der Ungeordnetheit der Wärmebewegung ohne regelmäßige Interferenz nach allen Seiten zerstreute Strahlung an.

Der für die Interferenzerscheinung kennzeichnende Summand ist der zweite; er enthält den früher für die Intensität gefundenen Ausdruck (175) als Faktor. Seine scharfen Maxima liegen an den durch die Gleichungen (176) angegebenen Stellen. Es ergibt sich somit als wichtigste Folgerung: (I) *Die Wärmebewegung beeinflusst nicht die Lage und Schärfe der Interferenzpunkte, sondern setzt nur deren Intensität herab.* Wie sie die Intensität beeinflusst, darüber lehrt der Ausdruck (197) im Vergleich mit (198), da  $d$  zur Belegungsdichte der spiegelnden Netzebene proportional ist: (II) *Die Wärmebewegung unterdrückt die Interferenzpunkte mit den höheren Ordnungszahlen  $h$  und setzt das Spiegelungsvermögen der weniger dicht besetzten Netzebenen herab.* In einem und demselben Interferenzpunkte wird die größte Wellenlänge, welche als Interferenz erster Ordnung auftritt ( $p = 1$ ), stärker gespiegelt als die anderen.<sup>177)</sup>

177) Weitere Literatur: E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 15 (1914) p. 79, 497; J. Kern, Phys. Zeitschr. 15 (1914), p. 337.

Es sei hier daran erinnert, daß nach Nr. 52 schon bei ruhenden Atomen das Zusammenwirken verschiedener Wellenlängen und der verschiedenen Richtungen im einfallenden Strahl zu einer Bevorzugung der kleineren Ordnungszahlen oder der stärker belegten Netzebenen und der größeren Wellenlängen führt.

Der Satz (I) wird von der Erfahrung glänzend bestätigt. Die Schärfe der Interferenzpunkte ist bei Untersuchungen bei Zimmertemperatur ( $T=300^{\circ}$ ) so groß, wie sie unter den vorliegenden Umständen nur irgend erwartet werden kann (da man nicht wie in der Optik mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr beobachten kann, beeinflussen der Querschnitt des einfallenden Strahlenbündels und die Dicke des Kristalls die Schärfe ungünstig). Sie ändert sich nicht, wenn man, wie es *de Broglie* mit Turmalin getan hat<sup>178</sup>), den Kristall auf die Temperatur der flüssigen Luft ( $T=80^{\circ}$ ) oder auf Rotglut ( $T$  mindestens  $=900^{\circ}$ ) bringt. Auch die Lage der Interferenzpunkte bleibt bei diesem Versuche unverändert. Dagegen ist die Abnahme ihrer Intensität mit steigender Temperatur so erheblich, daß man z. B. bei Steinsalz von  $320^{\circ}\text{C}$  ( $T=600^{\circ}$ ) bei einer Exposition, die bei Zimmertemperatur zur Photographie der Interferenzpunkte völlig ausreicht, keine Spur davon erhält.<sup>179</sup>

**55. Kompliziertere Strukturen.** Wir haben bisher einfache Raumgitter betrachtet, wie sie nur bei holoedrischen Kristallen auftreten. Aber schon bei diesen kann die Struktur verwickelter sein; bei einem regulären holoedrischen Kristall z. B. brauchen keineswegs nur die Ecken des elementaren Würfels Atome zu tragen, sondern es können auch die Mittelpunkte der Würfel oder die der Würfel­flächen mit Atomen gleicher oder anderer Art besetzt sein. Bei den hemiedrischen Kristallen kann die Struktur noch viel verwickelter werden; nach *Schönflies* kommen für die Struktur der Kristalle im ganzen 230 verschiedene regelmäßige Punktsysteme in Betracht. Wir wollen die Interferenztheorie daraufhin erweitern, wollen uns aber dabei wiederum die Atome ruhend denken, indem wir vorwegnehmen<sup>180</sup>), daß unser Ergebnis durch die Berücksichtigung der Wärmebewegung keine wesentliche Änderung erfährt.

Außer den Atomen, deren Orte durch die Gleichungen (171) bestimmt sind, treten dann andere auf, die in den Punkten

$$(201) \quad \begin{aligned} x' &= (m_1 + \delta_1)a_{1x} + (m_2 + \delta_2)a_{2x} + (m_3 + \delta_3)a_{3x} \\ y' &= (m_1 + \delta_1)a_{1y} + (m_2 + \delta_2)a_{2y} + (m_3 + \delta_3)a_{3y} \\ z' &= (m_1 + \delta_1)a_{1z} + (m_2 + \delta_2)a_{2z} + (m_3 + \delta_3)a_{3z} \end{aligned}$$

178) *de Broglie*, *Le Radium* 10 (1913), p. 186.

179) *M. v. Laue* u. *J. Steph. van der Lingen*, *Phys. Zeitschr.* 15 (1914), p. 75.

180) *M. v. Laue*, *Ann. d. Phys.* 42 (1913), p. 1561.

liegen und im allgemeinen durch eine andere Funktion  $\psi'$  gekennzeichnet sind. Die Zahlen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  sind dabei echte Brüche, deren Werte für das Punktsystem charakteristisch sind. Wir können die Lage eines gestrichenen zu einem ungestrichenen Atom auch durch den Vektor

$$\mathbf{r}' = \delta_1 \mathbf{a}_1 + \delta_2 \mathbf{a}_2 + \delta_3 \mathbf{a}_3$$

angeben. Treten mehrere derartige Atome auf, so haben wir jede Sorte durch einen derartigen Vektor  $\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \dots$  in ihrer Lage zu bestimmen. In diesem Falle tritt an die Stelle der Summe (173)

$$(202) \quad \frac{e^{-ikR}}{R} \left\{ \psi(\alpha, \beta) \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0) + z(\gamma - \gamma_0)]} \right. \\ \left. + \psi'(\alpha, \beta) \sum e^{ik[x'(\alpha - \alpha_0) + y'(\beta - \beta_0) + z'(\gamma - \gamma_0)]} + \dots \right\} \\ = \frac{e^{-ikR}}{R} \left\{ \psi(\alpha, \beta) + \psi'(\alpha, \beta) e^{i\varphi'} + \dots \right\} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} e^{i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3)}$$

wobei zur Abkürzung

$$(203) \quad \varphi' = k[\mathbf{r}'_x(\alpha - \alpha_0) + \mathbf{r}'_y(\beta - \beta_0) + \mathbf{r}'_z(\gamma - \gamma_0)]$$

gesetzt ist. Man sieht, daß in (202) der einzige Unterschied gegen früher in der Ersetzung der Funktion  $\psi$  durch die Klammer besteht. Wir können dies so ausdrücken, daß jetzt nicht mehr ein einzelnes Atom, sondern die Gesamtheit aller Atome eines Elementarparallelepipeds als Gitterelement wirkt. Interferenzmaxima können nur dort auftreten, wo die dreifache Summe in (202) ein Maximum besitzt, wo also die Gleichungen (176) erfüllt sind. Die Lage der Interferenzmaxima gehorcht auch bei verwickelten Strukturen denselben Gesetzen wie beim einfachen Raumgitter. Dagegen wird die Intensität der Interferenzpunkte durch die Klammer in (202), d. h. durch die Struktur, im allgemeinen beeinflußt; nach den Grundgleichungen mögliche Interferenzpunkte können z. B. durch das Verschwinden dieses Struktur factors völlig aufgehoben werden. Hemiedrische Strukturen können sich somit im Interferenzbild äußern, brauchen dies aber nicht zu tun; es wird vielmehr einer besonderen Untersuchung in jedem Fall bedürfen, um diese Frage zu entscheiden. Die Erfahrung bestätigt dies.

Da  $\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0, \gamma - \gamma_0$  nach der Definition der Vektoren  $\mathfrak{s}$  und  $\mathfrak{s}_0$  (Nr. 47) die Komponenten des Vektors  $\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0$  sind, welcher nach (179) am Ort des Interferenzmaximums  $h_1, h_2, h_3$  gleich  $\mathfrak{h}$  ist, so kann man Gleichung (203) nach (184) umformen in:

$$(203a) \quad \varphi' = 2\pi(h_1(\mathbf{r}'_1) + h_2(\mathbf{r}'_2) + h_3(\mathbf{r}'_3)) \\ (= \frac{2\pi}{a}(h_1 \mathbf{r}'_x + h_2 \mathbf{r}'_y + h_3 \mathbf{r}'_z) \quad \text{für reguläre Kristalle}).$$

Dann ist der Strukturfaktor

$$(204) \quad |\psi(\alpha, \beta) + \psi'(\alpha, \beta) e^{2\pi i(h_1(r' \cdot \mathfrak{h}) + h_2(r' \cdot \mathfrak{b}_2) + h_3(r' \cdot \mathfrak{b}_3))} + \dots|^2$$

ausgedrückt durch die Lage der ein-, zwei- usw. gestrichenen Atomarten und durch die Ordnungszahlen  $h$  des Interferenzpunktes. Der Zerlegung des Raumgitters in Netzebenen entspricht mehr die Umformung:

$$\varrho' = \frac{2\pi}{\lambda} r'_\mathfrak{h} |\mathfrak{h}| = 2\pi r'_\mathfrak{h} p |\eta_1 \mathfrak{b}_1 + \eta_2 \mathfrak{b}_2 + \eta_3 \mathfrak{b}_3| = 2\pi r'_\mathfrak{h} \frac{p}{d}$$

(vgl. (184) und (190a)). Setzen wir in ihr

$$(204) \quad r'_\mathfrak{h} = \vartheta' d,$$

so finden wir als Strukturfaktor

$$(205) \quad |\psi(\alpha, \beta) + \psi'(\alpha, \beta) e^{2\vartheta' p \pi i} + \psi''(\alpha, \beta) e^{2\vartheta'' p \pi i} + \dots|^2.$$

Zur Deutung dieses Ausdruckes bedenke man, daß die eingestrichene, zweigestrichene usw. Atomart Raumgitter bilden, welche dem aus den ungestrichenen Atomen bestehenden kongruent sind, nur daß sie gegen letzteres die durch die Vektoren  $r'$ ,  $r'' \dots$  gegebenen Verschiebungen haben. Die Netzebenen ( $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ ) dieser verschiedenen Raumgitter fallen dabei im allgemeinen nicht zusammen, sondern die des eingestrichenen Raumgitters haben von denen des ungestrichenen den Abstand  $r'_\mathfrak{h}$ , da  $\mathfrak{h}$  auf ihnen senkrecht steht. Die Zahl  $\vartheta'$  gibt somit an, wie der Abstand  $d$  der ungestrichenen Netzebenen von den eingestrichenen Netzebenen unterteilt wird. Der Faktor (205) entspricht daher dem Interferenzeffekt aller derjenigen Wellen, welche von je einer ungestrichenen, einer eingestrichenen usw. Netzebene zurückgeworfen werden.

Als einfaches Beispiel wollen wir den Strukturfaktor eines flächenzentrierten Gitters im regulären System berechnen, wie es z. B. in Fig. 23 durch die eine Art von Punkten, etwa die schwarzen vorgestellt wird. Die daselbst mit 4, 5, 6 bezeichneten Punkte gehen aus dem Gitterpunkt  $B$  durch die Verschiebungen hervor:

$$r' = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad r'' = \frac{1}{2}(a_2 + a_3), \quad r''' = \frac{1}{2}(a_3 + a_1).$$

Nach Gl. (203a) wird also

$$\varrho' = \pi(h_1 + h_2), \quad \varrho'' = \pi(h_2 + h_3), \quad \varrho''' = \pi(h_3 + h_1).$$

Wegen völliger Vertauschbarkeit der vier Punkte im flächenzentrierten Gitter müssen auch die zugehörigen  $\psi$  unter sich gleich sein. Der Strukturfaktor wird daher

$$(204a) \quad |\psi|^2 |1 + e^{i\varrho'} + e^{i\varrho''} + e^{i\varrho'''}|^2 \\ = |\psi|^2 |1 + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)}|^2 \\ = \begin{cases} 16 |\psi|^2 & \dots \text{alle } h \text{ gerade oder alle } h \text{ ungerade,} \\ 0 & \dots \text{im entgegengesetzten Fall.} \end{cases}$$

Bei einem einfachen flächenzentrierten Gitter können also Flecke mit „gemischten“ (teils geraden, teils ungeraden) Ordnungszahlen überhaupt nicht auftreten. Eine Fläche mit gemischten Indices kann nur in gerader Ordnung reflektieren. Entsprechendes gilt für alle Gitter, die sich aus mehreren flächenzentrierten zusammensetzen; ihr Strukturfaktor wird gefunden, indem man die durch (204) ausgedrückte Phasenzusammensetzung nur auf die vollständigen flächenzentrierten Gitter anwendet und dann entsprechend (204a) alle Flecke mit gemischten Indices streicht, die übrigen mit dem Gewicht  $16|\psi|^2$  (gegenüber dem einfachen Gitter) bewertet.

**56. Die Struktur des Steinsalzes und des Diamantes.** Wir haben in Nr. 50 und 51 die selektive und die allgemeine Spiegelung an der Netzebene eines Raumgitters unterschieden und gesehen, daß die erstere die einfachere Erscheinung ist, weil man es bei ihr mit einer bestimmten Wellenlänge zu tun hat. Deshalb eignet sie sich auch besser zur Untersuchung von Kristallstrukturen. Von den zahlreichen Ergebnissen, welche die Herren *Bragg* nach dieser Methode erhalten haben, wollen wir nur die auf Steinsalz und Diamant bezüglichen hier genauer diskutieren.

Nach Fig. 21 treten bei der Spiegelung an einer Würfelfläche des Steinsalzes (Kurve I) nur Interferenzmaxima gerader Ordnung auf. Und bei einer Spiegelung an der Oktaederfläche (Kurve II) sind die Maxima erster Ordnung ( $A_1, B_1, C_1$ ) erheblich schwächer als die zweiter Ordnung ( $A_2, B_2, C_2$ ). Hieraus schließen die Herren *Bragg* im Hinblick auf die Symmetrieeigenschaften des Steinsalzes auf die in

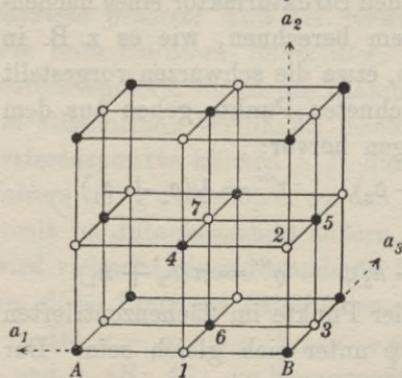


Fig. 23.

Fig. 23 dargestellte Struktur, bei welcher längs der drei Würfelfanten Natrium- und Chloratome abwechseln. Dem in der Figur dargestellten Elementarwürfel gehören danach vier Na- und vier Cl-Atome an, nämlich außer dem in der Ecke rechts unten vorn gelegenen Natriumatome noch die Na-Atome 4, 5, 6 sowie die Cl-Atome 1, 2, 3 und 7; die anderen Atome der Figur müssen schon den anstoßenden Elementarwürfeln zugerechnet werden,

da sie aus einem der erwähnten durch eine Verschiebung  $a_1, a_2$  oder  $a_3$  hervorgehen. Wir haben also zwei flächenzentrierte Gitter: ein Na-Gitter und ein z. B. um die halbe Würfeldiagonale dagegen verschobenes Cl-Gitter. Die phasemäßige Zusammensetzung dieser beiden Gitter

ergibt den Faktor — analog (204) —

$$(204b) \quad |\psi + \psi' e^{i\pi(h_1+h_2+h_3)}|^2 = \begin{cases} |\psi + \psi'|^2 & \text{wenn alle } h \text{ gerade} \\ |\psi - \psi'|^2 & \text{wenn alle } h \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Gemischte Indices  $h$  kommen, wie zum Schluß von Nr. 55 hervorgehoben, nicht in Betracht; wir haben also nur die „geraden“ und „ungeraden“ Flecke mit den vorstehenden Werten des Strukturfaktors zu unterscheiden.

Man ersieht aus der Unmöglichkeit gemischter Indices (Gl 204a), daß in der Tat an der Würfelfläche (100) keine Maxima ungerader Ordnung auftreten können, während sie wegen der Verschiedenheit der Na- und Cl-Atome bei der Oktaederfläche (111) entsprechend Gl. (204b) wohl noch vorhanden sind, aber mit der relativen Intensität  $|\psi - \psi'|^2$ , welche geringer ist als die relative Intensität  $|\psi + \psi'|^2$  der geraden Ordnungen. Wir wollen sogleich bemerken, daß beim Sylvin (KCl), dessen Konstitution genau dieselbe ist, auch bei der Oktaederfläche die Maxima ungerader Ordnung wegfallen, weil wegen des geringen Gewichtsunterschiedes der K- und der Cl-Atome auch die Funktionen  $\psi$  und  $\psi'$ , welche deren Wirksamkeit messen, einander fast gleich sind (vgl. Nr. 53).

Man kann das Ergebnis für NaCl so aussprechen: *Bei der Spiegelung an einer Netzebene (100) löschen die äquidistant angeordneten, in der gleichen Art mit Na- und Cl-Atomen belegten Netzebenen die Interferenzen der ungeraden Ordnungen aus; bei der Spiegelung an (111) hingegen wechseln Netzebenen, welche nur Na-Atome tragen, ab mit solchen, die nur mit Cl-Atomen besetzt sind; dieser Unterschied läßt keine vollständige Auslöschung der ungeraden Ordnungen zu.*

Auch an den mit spektral inhomogener Strahlung an Steinsalz gewonnenen Interferenzbildern haben die Herren *Bragg* diese Anordnung der Atome geprüft; wenn gleich dies Verfahren keine so gute Probe auf die Richtigkeit ergibt wie das zuerst beschriebene, so kommt man dabei doch auf keinen Widerspruch gegen die besprochene Anordnung.

Ist nun der Bau des Steinsalzes genau bekannt, so fallen damit auch alle Zweifel über den genauen Wert der Gitterkonstanten fort, welche bisher nur der Größenordnung nach bekannt war. Da auf den Elementarwürfel mit der Seitenlänge  $a = AB$  (in Fig. 23) 4 Na- und 4 Cl-Atome, also 4 Moleküle NaCl kommen, ist das Volumen eines Grammmoleküls NaCl, wenn  $N$  die Zahl der Molekeln im Grammmolekül bezeichnet,  $\frac{N}{4} a^3$ . Andererseits berechnet sich dies Volumen als der Quotient aus dem Molekulargewicht  $m$  und der Dichte  $\delta$ . Setzt man

nun in der Gleichung

$$(206) \quad \frac{N}{4} a^3 = \frac{m}{\delta}$$

$$m = 23 + 35,5 = 58,5 \quad \delta = 2,15 \quad N = 6,2 \cdot 10^{23},$$

so folgt

$$a = 5,60 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Mit Hilfe dieses Wertes sind die in Nr. 50 angegebenen Wellenlängen der charakteristischen Linien von Platin usw. berechnet. Die am wenigsten sichere der hier benutzten Zahlen ist  $N$ , das man nur auf etwa 8 Proz. genau kennt. Infolgedessen beträgt die Genauigkeit aller dieser Zahlenangaben ungefähr 2 Proz.

Eine scharfe Prüfung dieser Messung liegt in dem Vergleich zwischen den Gitterkonstanten verschiedener Kristalle, den man ziehen kann, indem man dieselbe homogene Röntgenstrahlung an ihnen spiegelt. Das Interferenzmaximum  $B_2$  in Fig. 21, Kurve I z. B. liegt beim Steinsalz, auf welches sich die Figur bezieht, bei  $\varphi = 78^\circ 48'$ , beim Sylvins hingegen bei  $\varphi = 79^\circ 48'$ . Nach (191) müssen sich die Gitterkonstanten beider Kristalle umgekehrt wie die Kosinus der zugehörigen Winkel verhalten; man findet für dies Verhältnis den Wert 0,896. Berechnet man hingegen die Gitterkonstante  $a$  des Sylvins nach (206) mit  $m = 74,5$  und  $\delta = 1,97$ , so findet man dafür  $6,25 \cdot 10^{-8}$ , also wiederum für das Verhältnis dieser Gitterkonstanten 0,896.

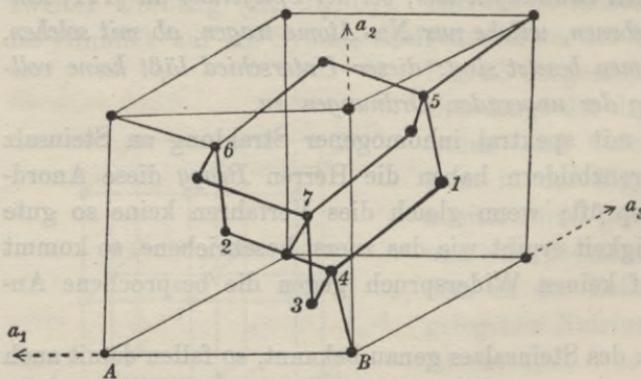


Fig. 24.

Der Diamant ist nach den Herren Bragg aus zwei flächenzentrierten Gittern aufgebaut, die durch Verschiebung um  $\frac{1}{4}$  der Würfeldiagonale auseinander erzeugt werden können. In der Fig. 24 sind  $B, 1, 2, 3$  der Eckpunkt und die flächenzentrierenden Punkte des einen Gitters, dessen Grundwürfel gezeichnet ist. Die Punkte 4, 5, 6, 7 sind die entsprechenden Punkte des zweiten Gitters, die durch die Verschiebung  $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3)$  aus den ersteren hervorgehen.

Setzen wir die Amplitude  $\psi$  für alle Punkte gleich, so ergibt sich für das Zusammenwirken der beiden flächenzentrierten Gitter der

Intensitätsfaktor

$$(204c) \quad |\psi|^2 |1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)}|^2 = \begin{cases} 4 & \text{wenn alle } h \text{ gerade und} \\ & \sum h \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & \text{wenn alle } h \text{ gerade und} \\ & \sum h \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Natürlich bleibt bestehen, vgl. Gl. (204a), daß Flecke mit gemischten Indices die Intensität Null haben.

Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die Spiegelung an den Netzebenen (100), (110) und (111) ergibt volle Übereinstimmung mit der Erfahrung, insbesondere an der letzten Fläche das Ausfallen des Spektrums zweiter Ordnung (Indices 222,  $\sum h \equiv 2 \pmod{4}$ ).

Daß die in der Figur als Punkte gezeichneten Gebilde wirklich einzelne Atome und nicht etwa Komplexe mehrerer Atome darstellen, ergibt der Vergleich der Gitterkonstanten des Diamantes mit der des Steinsalzes aus dem Spiegelungswinkel einer homogenen Röntgenstrahlung; demnach ist für Diamant  $a = 3,53 \cdot 10^{-8}$  cm. Genau denselben Wert findet man aber aus der Gleichung

$$\frac{N}{8} a^3 = \frac{m}{\delta} \quad (m = 12, \delta = 3,51),$$

in welcher beide Seiten das Volumen eines Grammatoms ausdrücken, die linke unter der Voraussetzung, daß auf jeden Elementarwürfel 8 Atome Kohlenstoff kommen.

Fig. 25 ist eine Abbildung des räumlich ausgeführten Diamantmodelles. Die Flächen (111) liegen horizontal; die Strecke  $AB$  ist eine Diagonale einer Würfelfläche und entspricht somit einer Länge von  $3,53 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{2} = 5,00 \cdot 10^{-8}$  cm. Man erkennt hier besonders gut als Grund für das Verschwinden der Interferenzen zweiter Ordnung bei (111) die Aufeinanderfolge horizontaler Ebenen in Abständen, die sich wie 1:3 verhalten, was einem Wert  $\vartheta = \frac{1}{4}$  entspricht.

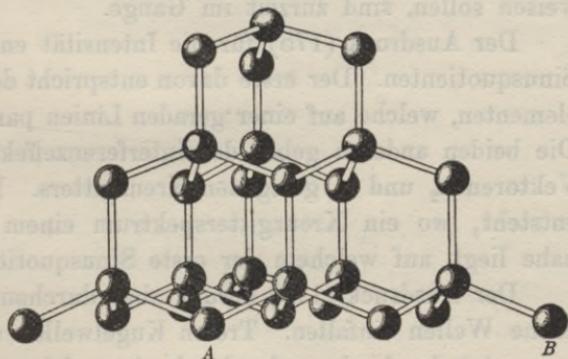


Fig. 25.

Modelle, wie wir sie hier für NaCl, KCl

und Diamant kennen gelernt haben, sind chemische Konstitutionsformeln im vollkommensten Sinne des Wortes. Man erkennt hieran

die große Bedeutung dieser Ergebnisse nicht nur für die Mineralogie, sondern auch für die Chemie.

**57. Die Form der Interferenzpunkte.** Zum Schluß sei noch der Hinweis auf eine Eigentümlichkeit gestattet, welche man fast immer bei den Interferenzbildern beobachtet, wenn man einen dünnen Kristallschliff mit einem sehr eng abgeblendeten Röntgenstrahlbündel durchleuchtet. Man beobachtet dann statt der Interferenzpunkte meist *Striche*, welche, wenn die photographische Platte zum einfallenden Strahl senkrecht stand, tangentiell, d. h. senkrecht zum Fahrstrahl vom Mittelpunkt der Figur nach ihrem Orte, gerichtet sind.

W. L. Bragg<sup>181)</sup> schlägt eine geometrisch-optische Erklärung für diese Erscheinung vor; wenn jeder Strahl der einfallenden, etwas divergierenden Welle in dem Teil des Kristalles, den er trifft, an einer bestimmten Netzebene gespiegelt wird, so bildet nach der Spiegelung die Gesamtheit dieser Strahlen ein astigmatisches Bündel, dessen eine Brennlinie ungefähr im gleichen Abstände hinter dem Kristall liegt, wie die Blende, welche das einfallende Bündel begrenzt, davor. In diesem Abstände ist daher die Länglichkeit ein Optimum; in größerem Abstände schwindet sie wieder, und zwar vollständig, wenn man ins Unendliche geht oder wenn man mit einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr beobachten könnte. Hingegen zeigt die Theorie von Laue und Tank<sup>182)</sup>, welche den Vorgang wegen des endlichen Abstandes der Strahlungsquelle als *Fresnelsche* Beugungserscheinung auffassen (im Gegensatz zum bisherigen, wo immer nach *Fraunhofer* gerechnet wurde), daß die Länglichkeit auch im Unendlichen erhalten bleiben muß, weil eben das in Nr. 45 abgeleitete Spiegelungsgesetz nur im *Fraunhoferschen* Fall gilt. Versuche, welche diesen Sachverhalt erweisen sollen, sind zurzeit im Gange.

Der Ausdruck (175) für die Intensität enthält das Produkt dreier Sinusquotienten. Der erste davon entspricht der Interferenz von Gitterelementen, welche auf einer geraden Linien parallel  $a_1$  angeordnet sind. Die beiden anderen geben den Interferenzeffekt eines in der Ebene der Vektoren  $a_2$  und  $a_3$  gelegenen Kreuzgitters. Ein sichtbares Maximum entsteht, wo ein Kreuzgitterspektrum einem der Kreise hinreichend nahe liegt, auf welchem der erste Sinusquotient seine Maxima hat.

Der Ausdruck (175) beruht aber durchaus auf der Annahme, daß ebene Wellen einfallen. Treten Kugelwellen an deren Stelle, so wird er ersetzt durch einen Ausdruck, in welchem wiederum als Faktoren

181) W. L. Bragg, Proc. Cambr. Phil. Soc. 17 (1913), p. 43.

182) M. v. Laue u. F. Tank, Ann. d. Phys. 41 (1913), p. 1003.

aufzutreten erstens ein Term, herrührend von parallel zu  $a_1$  angeordneten Gitterelementen, zweitens ein Term, der den Kreuzgittereffekt angibt. Aber die Maxima des letzten Termes sind nicht mehr so scharf wie früher; die Kreuzgitterspektren haben sich verbreitert. Ihre ursprüngliche Schärfe war ja dadurch bedingt, daß zwischen je zwei interferierenden Wellen in einem unendlich weit entfernten Aufpunkte genau die gleiche Phasendifferenz bestand; dies ist aber jetzt nicht mehr der Fall. Dagegen bleiben die Interferenzmaxima, welche von parallel zu  $a_1$ , d. h. parallel zur Fortpflanzungsrichtung der Welle angeordneten Gitterelementen herrühren, so scharf wie zuvor. Auf sie hat die Krümmung offenbar keinen Einfluß. Sichtbare Helligkeit wird nun dort auftreten, wo die Kreise, welche die scharfen Maxima des ersten Terms enthalten, die verbreiterten Kreuzgitterspektren schneiden. Es leuchtet ein, daß dabei die beobachtete Länglichkeit der Flecke herauskommt.

# SPEZIELLE BEUGUNGSPROBLEME

VON

PAUL S. EPSTEIN

IN MÜNCHEN.

## Inhaltsübersicht.

58. Einleitung.

### I. Methode der mehrwertigen Lösungen.

59. Die Sommerfeldsche Methode zur Gewinnung mehrwertiger Lösungen der Schwingungsgleichung.  
60. Beugung an der Halbebene.  
61. Der Keil und der Fresnelsche Spiegel.  
62. Der Spalt.

### II. Methode der krummlinigen Koordinaten.

63. Die Grundgleichungen in krummlinigen Koordinaten.  
64. Der Kreiszyylinder.  
65. Der elliptische Zylinder.  
66. Der parabolische Zylinder.  
67. Die Kugel. Farben kolloidaler Metallösungen.  
68. Theorie des Himmelsblau. Opaleszenz im kritischen Zustande.  
69. Ellipsoid, Kreisloch (Näherungsmethoden).  
70. Gitterbeugung.

## Spezielle Beugungsprobleme.

58. **Einleitung.** Die von *Kirchhoff* gegebene klassische Theorie der Beugungserscheinungen zeichnet sich durch ihre Allgemeinheit sowie durch Einfachheit und Eleganz ihrer Anwendung auf beliebig geformte Öffnungen aus; in Nr. 34 wurde indessen bereits hervorgehoben, daß sie strengeren physikalischen und mathematischen Forderungen nicht gerecht wird. Um die Beugung nach Gleichung (105) bzw. (108) berechnen zu können, nimmt *Kirchhoff* an, daß die Funktionen  $u$  und  $\frac{du}{dv}$  auf der ganzen Rückseite des das Licht abblendenden Schirmes

verschwinden, während ihr Wert in der Öffnung der ungestörten Ausbreitung der Welle entsprechen soll. Er gibt indessen selbst zu, daß dies nur in größeren (verglichen mit der Wellenlänge) Entfernungen vom Schirmrande näherungsweise zutrifft, nicht aber in der unmittelbaren Nachbarschaft desselben; die Methode kann daher nur bei großen Dimensionen der beugenden Öffnung (bzw. des Schirmes) und für kleine Beugungswinkel richtige Resultate liefern, da nur unter diesen Bedingungen die Wirkung der Randzone zurücktritt. Andererseits verzichtet sie von vornherein auf die Beschreibung gewisser Feinheiten der Erscheinung, wie z. B. des Polarisationszustandes des abgelenkten Lichtes<sup>183</sup>), des Einflusses des Schirmprofils, seiner Materialeigenschaften usw. *Poincaré*<sup>184</sup>) war der erste, der dieses Verfahren verlassen und das Beugungsproblem als Randwertaufgabe aufgefaßt hat.<sup>185</sup>) Seitdem bildete die Theorie der *Maxwellschen* Gleichungen unter Berücksichtigung der an der Oberfläche eines beugenden Körpers geltenden Grenzbedingungen den Gegenstand einer ganzen Reihe von Arbeiten. Die mathematischen Schwierigkeiten der so verstandenen Beugungsaufgabe bringen es indessen mit sich, daß sie bis jetzt nur für eine sehr beschränkte Anzahl von speziellen Formen der beugenden Begrenzung durchgeführt werden konnte.

Den Ausgangspunkt der Analyse bilden die *Maxwellschen* Gleichungen (1), (3), (4), (7a), welche im Spezialfall durchsichtiger Medien ( $\sigma = 0$ ) auf die Wellengleichungen (5) führen. Andererseits ergibt der Ansatz

$$(206) \quad \mathfrak{E} = \Re e (E e^{i n t}), \quad \mathfrak{H} = \Re e (H e^{i n t}),$$

für absorbierende Medien bei Beschränkung auf zeitlich periodische Zustände von der Periode  $\frac{2\pi}{n}$

$$(207) \quad \left(\frac{i n \varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E = \text{rot } H, \quad \frac{i n}{c} H = - \text{rot } E,$$

$$\text{div } E = 0, \quad \text{div } H = 0.$$

183) Bei Behandlung der Beugung an einer Halbebene nach der *Kirchhoffschen* Methode vom Standpunkt der elastischen Lichttheorie hat *E. Maey* (Ann. d. Phys. 49 (1893), p. 69) einen Einfluß der Polarisation der einfallenden Wellen gefunden, in der elektromagnetischen Theorie ergibt sich jedoch, wenn man nach der Vorschrift von *Maey* verfährt, für die verschiedenen Polarisationszustände kein Unterschied.

184) *Poincaré*, Acta Math. 16 (1892), p. 297 und 20 (1897), p. 313. (Vergleich mit der Theorie von *Sommerfeld*.)

185) Allerdings wurde es nur mit Beschränkung auf sehr kurze Wellenlängen für die unendliche Halbebene durchgeführt.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$k^2 = \frac{n^2 \varepsilon}{c^2} - \frac{i n \sigma}{c^2}$$

und bezeichnen  $k$  als die „komplexe Wellenzahl“, da sie im Falle durchsichtiger Medien in die gewöhnliche Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n}{a}$  ( $a =$  Phasengeschwindigkeit  $= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ ; vgl. p. 363) übergeht. Auch in diesem allgemeineren Falle liefert die Elimination von  $H$  (bzw.  $E$ ) die Schwingungsgleichungen

$$(208) \quad \Delta E + k^2 E = 0, \quad \Delta H + k^2 H = 0.$$

Einer besonderen Erörterung bedarf noch der Fall zweidimensionaler Probleme, zu welchen die Mehrzahl der zu behandelnden Beispiele gehört. Ist der Schwingungsvorgang von einer der cartesischen Koordinaten, z. B.  $z$ , unabhängig, so kann man ihn stets als Überlagerung zweier unabhängiger Vorgänge auffassen, in deren einem die Komponente  $\mathfrak{H}_z$ , im anderen die Komponente  $\mathfrak{E}_z$  verschwindet. In der Tat zerfällt dann das Gleichungssystem (1) bis (4) in die beiden unabhängigen Gruppen

$$(209 \text{ a, b}) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, & \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, & \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (186)$$

Man kann daher die beiden durch die Gleichungen (209a) und (209b) dargestellten Vorgänge getrennt betrachten; im ersten sind die Schwingungen senkrecht zur  $z$ -Achse polarisiert, im zweiten parallel zu derselben; wir werden sie im folgenden stets als den Fall  $\perp$  und den Fall  $\parallel$  bezeichnen.

Die Grenzbedingungen, welche an der Oberfläche des beugenden Körpers bei endlicher Leitfähigkeit desselben gelten, sind <sup>187</sup>): Die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  verhalten sich an der Grenzfläche stetig

$$(210) \quad (\mathfrak{E}_{\text{tang}})_i = (\mathfrak{E}_{\text{tang}})_a, \quad (\mathfrak{H}_{\text{tang}})_i = (\mathfrak{H}_{\text{tang}})_a,$$

wo sich die Indizes  $i$  und  $a$  auf das Innere und Äußere des Körpers beziehen.

186) Analoge Gleichungen erhält man auch für absorbierende Medien und krummlinige Koordinaten (vgl. Nr. 63).

187) Vgl. diesen Artikel Nr. 1 oder V 22, Nr. 5 (W. Wien).

Dementsprechend muß bei unendlich guter Leitfähigkeit die elektrische Feldstärke zur Grenzfläche normal stehen:

$$(211) \quad (\mathcal{E}_{\text{tang}}) = 0.$$

Außer diesen beiden Fällen wird uns noch der „vollkommen absorbierende“ oder „absolut schwarze“ beugende Schirm beschäftigen. Darunter soll verstanden sein, daß der aus dem Schirm austretende mittlere Energiestrom verschwindet, was allerdings noch keine eindeutige Definition ist. Wie sich der Begriff des schwarzen Körpers in eleganter Weise mathematisch fassen läßt, werden wir in Nr. 60 sehen.

Um neue Lösungen der Grundgleichungen zu gewinnen, welche der speziellen Form der Grenzflächen angepaßt sind, hat man bis jetzt im wesentlichen zwei Wege beschritten: *A. Sommerfeld* hat eine Methode angegeben, um auf funktionentheoretischem Wege verzweigte Lösungen der Schwingungsgleichung zu finden. Sein weiteres Vorgehen, mittelst solcher Lösungen die Grenzbedingungen zu befriedigen, ist eine Verallgemeinerung der *Thomson'schen* Spiegelungsmethode (Nr. 59—62). Ein anderer Weg, der mit Erfolg angewandt wurde, ist, die Grundgleichungen auf solche krummlinige Koordinaten zu transformieren, daß den Unstetigkeitsflächen konstante Werte des Parameters entsprechen (Nr. 63—67). Leider ist die Anwendbarkeit beider Methoden eine beschränkte, und die Zahl der Fälle, deren Behandlung bisher gelungen ist, gering.

## I. Methode der mehrwertigen Lösungen.

**59. Die Sommerfeldsche Methode zur Gewinnung mehrwertiger Lösungen der Schwingungsgleichung.** Im Falle zweidimensionaler Probleme kann man in der Behandlung mehrwertiger Lösungen ohne weiteres an die Funktionentheorie anknüpfen. Wir konstruieren eine *Riemann'sche* Fläche, welche im Nullpunkte und nur in diesem einen  $(p - 1)$ -fachen Verzweigungspunkt besitzt. Zu diesem Zwecke denken wir uns die schlichte Ebene der Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  in  $p$  Exemplaren vorhanden, und jedes längs eines Halbstrahles  $\varphi = \varphi' \pm \pi$  aufgeschnitten. Die  $p$  Exemplare schichten wir übereinander und verbinden in üblicher Weise das linke Ufer des Einschnittes im  $q$ -ten Blatte mit dem rechten des Einschnittes im  $(q + 1)$ -ten Blatt und schließlich die beiden übrigbleibenden Ufer des  $p$ -ten und des ersten Blattes untereinander. Wir bezeichnen also als erstes Blatt die Werte des Winkels  $\varphi$

$$\varphi' - \pi < \varphi < \varphi' + \pi,$$

als zweites Blatt  $\varphi' + \pi < \varphi < \varphi' + 3\pi,$

. . . . .

als  $p$ tes Blatt  $\varphi' + (2p - 3)\pi < \varphi < \varphi' + (2p - 1)\pi.$

Als  $p$ -wertige Lösung der Wellengleichung (6), welche sich im zweidimensionalen Fall auf

$$(212) \quad \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

reduziert, bezeichnen wir eine Lösung (in Polarkoordinaten geschrieben)  $f(r, \varphi - \varphi', t)$ , welche auf der eben konstruierten Riemannschen Fläche eindeutig ist oder mit anderen Worten in  $\varphi$  die Periodizität  $2p\pi$  besitzt.

Zum erstenmal wurde von A. Sommerfeld<sup>188)</sup> eine mehrwertige (und zwar eine zweiwertige) Lösung der Gleichung (212) im Jahre 1894 gewonnen, jedoch als Resultat eines ziemlich speziellen Verfahrens. Einen allgemeinen, aber zunächst noch nicht ganz einfachen Weg zur Aufstellung solcher Lösungen brachten seine nächsten Arbeiten<sup>189) 190)</sup>. Hier bilden mehrwertige Lösungen der Potentialgleichung in zwei Dimensionen den Ausgangspunkt und werden durch einen unendlichen Differentiationsprozeß in Integrale der Schwingungsgleichung verwandelt. Später gab Sommerfeld<sup>191)</sup> eine kürzere Methode zur Herstellung verzweigter räumlicher Potentiale, welche von H. S. Carslaw<sup>192)</sup> und von ihm selbst<sup>193)</sup> auch auf die Behandlung von Beugungsproblemen übertragen wurde. Dieser letztere heuristische Weg hat neben dem Vorteil der Einfachheit den der größeren Allgemeinheit und führt ebenso leicht zur Lösung zwei- wie dreidimensionaler Probleme.<sup>194)</sup> Aus diesem Grunde wollen wir uns in unserer Darstellung diesen späteren Arbeiten anschließen.

Um die verzweigten Lösungen herzustellen, gehen wir von einem Integral der Wellengleichung in der schlichten Ebene aus

$$(213) \quad u_0 = f(z, r, \varphi - \varphi', t).$$

Wegen der Willkürlichkeit der Richtung  $\varphi'$  ist offenbar auch jeder Ausdruck von der Form

$$\int f(z, r, \varphi - \alpha, t) \cdot F(\alpha) d\alpha$$

188) A. Sommerfeld, Math. Ann. 45 (1894), p. 263.

189) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1895, p. 267.

190) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47 (1896), p. 317.

191) A. Sommerfeld, Proc. London Math. Soc. 28 (1897), p. 395.

192) H. S. Carslaw, Proc. London Math. Soc. 30 (1899), p. 121.

193) A. Sommerfeld, Z. für Math. und Phys. 46 (1901), p. 11.

194) Bei letzteren kommen „Riemannsche Räume“ zur Verwendung.

eine Lösung der Differentialgleichung (212). Dabei kann die Integrationsvariable  $\alpha$  auch auf komplexem Wege in einer  $\alpha$ -Ebene geführt werden, falls  $f$  und  $F$  für komplexe Werte des Arguments definiert sind, wie wir es voraussetzen wollen. Im speziellen erhalten wir nach dem Satze von *Cauchy* die frühere Lösung  $u_0$  wieder, wenn wir als Integrationsweg eine Umkreisung des Punktes  $\alpha = \varphi'$  wählen und  $F(\alpha)$  gleich

$$\frac{1}{2\pi i} F_1(\alpha, \varphi')$$

nehmen, wo  $F_1(\alpha, \varphi')$  für  $\alpha = \varphi'$  mit dem Residuum 1 unendlich wird. Z. B. können wir setzen, indem wir  $F_1$  hinsichtlich der beiden Variablen  $\alpha$  und  $\varphi'$  die Periode  $2\pi$  beilegen

$$(214) \quad F_1(\alpha, \varphi') = \frac{i e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}}$$

dann erhalten wir

$$(215) \quad u_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(z, r, \varphi - \alpha, t) \frac{e^{i\alpha} d\alpha}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}}$$

Den Integrationsweg kann man zu einer beliebigen den Punkt  $\alpha = \varphi'$  umkreisenden Schleife deformieren, nur ist darauf zu achten, daß er über keine Singularitäten des Integranden herübergezogen wird, und daß, falls er ins Unendliche auslaufen soll, die Funktion  $f$  daselbst in einer für die Konvergenz des Integrals hinreichenden Weise verschwindet.

Wir wollen den Fall näher ins Auge fassen, daß  $u_0$  eine ebene Welle darstellt (siehe Nr. 2)

$$(216) \quad u_0 = e^{i[kr \cos(\varphi - \varphi') + nt]}$$

oder nach (215)

$$(217) \quad u_0 = \frac{e^{int}}{2\pi} \int e^{ikr \cos(\alpha - \varphi)} \frac{e^{i\alpha} d\alpha}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}}$$

Die Pole des Integranden liegen bei  $\alpha = \varphi' + 2q\pi$ , wenn  $q$  eine ganze Zahl bedeutet; der Integrationsweg muß also aus der Umkreisung eines dieser Punkte (und nur eines) durch Verzerrung hervorgehen. Der Exponent  $ikr \cos(\alpha - \varphi)$  hat nur in den in Fig. 26 gestrichelten Streifen der  $\alpha$ -Ebene einen negativen reellen Teil. Man darf ihn also

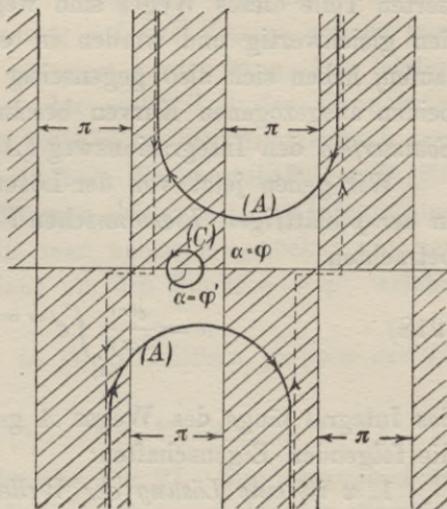


Fig. 26.

nur innerhalb dieser Streifen ins Unendliche führen. Wir deformieren die Kurve ( $C$ ) in der in der Figur angegebenen Weise. Die punktierten Teile dieses Weges sind wegen der Periodizität des Integranden gleichwertig und werden in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, heben sich also gegenseitig auf. Man kann sich also auf die beiden ausgezogenen Kurven beschränken, deren Gesamtheit wir mit *Sommerfeld* den Integrationsweg ( $A$ ) nennen wollen.

Wir gehen jetzt von der Lösung in der schlichten Ebene zu der in der  $p$ -blättrigen *Riemannschen* Fläche über, indem wir die Funktion betrachten

$$(218) \quad u = \frac{e^{int}}{2\pi p} \int_{(A)} e^{ikr \cos(\alpha - \varphi)} \frac{e^{\frac{i\alpha}{p}} d\alpha}{e^{\frac{i\alpha}{p}} - e^{\frac{i\varphi'}{p}}},$$

das Integral längs des Weges  $A$  genommen. Dieser Ausdruck besitzt die folgenden Eigenschaften:

1.  $u$  ist eine Lösung der Wellengleichung.
2.  $u$  ist eindeutig auf der  $p$ -blättrigen *Riemannschen* Fläche.

Beweis: Wenn wir  $\varphi$  um  $2p\pi$  ändern, verschiebt sich der Integrationsweg in der  $\alpha$ -Ebene um die Strecke  $2p\pi$  längs der reellen Achse; da aber der Integrand die Periode  $2p\pi$  besitzt, bleibt der Wert des Integrals ungeändert.

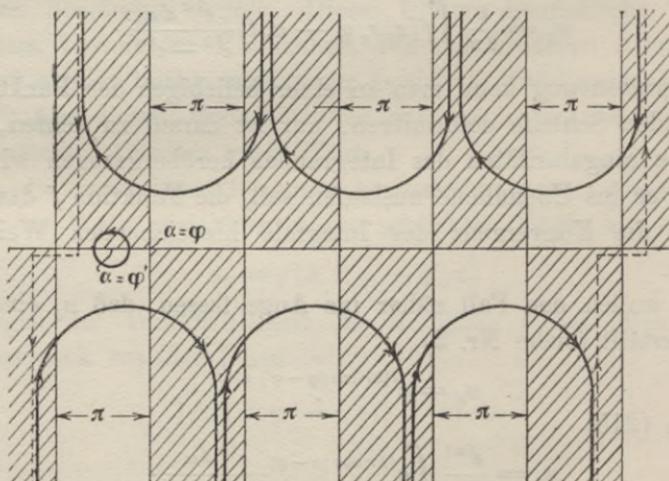


Fig. 27.

3.  $u$  ist endlich und stetig für alle reellen Werte von  $r$  vermöge der Wahl des Integrationsweges.

4. Für  $r = \infty$  ist  $u$  gleich  $u_0$  im ersten Blatt, d. h. wenn  $|\varphi - \varphi'| < \pi$ , und verschwindet in allen übrigen Blättern.

Beweis: Der Bestimmtheit wegen haben wir in Fig. 27 die drei Integrationswege eingezeichnet, welche den drei Lösungen  $u_1, u_2, u_3$  des dreiwertigen Integrals (218) entsprechen. Man sieht, daß im zweiten und dritten Blatte der Integrationsweg auf zwei Zweige, welche ganz im schraffierten Gebiet verlaufen, reduziert werden kann. Das letztere ist aber so gewählt, daß in ihm der reelle Teil des Exponenten  $ikr \cos(\alpha - \varphi)$  stets negativ, also für  $r = \infty$  negativ unendlich groß ist. Auszuschließen ist die unmittelbare Nachbarschaft des Wertes  $\varphi = \varphi' \pm \pi$  (vgl. Nr. 60). Verfährt man ebenso mit dem Integrationsweg für das erste Blatt, so erhält man neben Wegstücken von verschwindendem Beitrag einen Umlauf um den Punkt  $\alpha = \varphi'$ , welcher den Beitrag  $u_0$  liefert.

5. Die  $p$  Werte der Lösung in den  $p$  Blättern genügen der Bedingung

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p = u_0.$$

Der Beweis ergibt sich wieder aus Fig. 27. Zur Gesamtheit der Integrationswege kann man noch die beiden punktierten Strecken hinzunehmen, die sich ja wegen der Periodizität des Integranden aufheben, und so den Integrationsweg in einen geschlossenen verwandeln. Das Zusammenziehen dieses geschlossenen Weges auf die Umkreisung des singulären Punktes  $\alpha = \varphi'$  liefert in der Tat den Wert  $u_0$ .

In den zitierten Abhandlungen von *A. Sommerfeld*<sup>188)</sup> und *H. S. Carslaw*<sup>192)</sup> werden noch andere mehrwertige Lösungen der Schwingungsgleichung aufgestellt, welche einem ebenen Impuls, einer Zylinderwelle und einer Kugelwelle entsprechen. Man gewinnt dieselben durch das soeben geschilderte Verfahren, indem man von den entsprechenden Lösungen für die schlichte Ebene (bzw. für den schlichten Raum) ausgeht. Im Interesse der Nr. 61 wollen wir einige Worte über die verzweigte Zylinderwelle sagen. Der Ausdruck für dieselbe ist

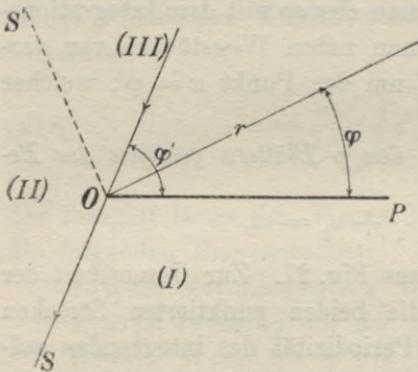
$$(219) \quad u = \frac{1}{2\pi p} \int H_0^{(2)}(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)}) \frac{e^{i\frac{\alpha}{p}} d\alpha}{e^{i\frac{\alpha}{p}} - e^{i\frac{\varphi'}{p}}},$$

wo  $H_0^{(2)}$  die *Hankelsche* Zylinderfunktion nullter Ordnung und zweiter Art<sup>195)</sup> bedeutet. Der Integrationsweg ist dabei mit Rücksicht auf die Verzweigung der Quadratwurzel in geeigneter Weise in der komplexen  $\alpha$ -Ebene zu führen. Außer den fünf Eigenschaften, welche diese Funktion mit (218) gemeinsam hat, besitzt sie noch die folgende:

195) Vgl. Nr. 5 und Nr. 64.

6.  $u$  wird im ersten Blatt im Punkte  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi'$  logarithmisch unendlich. Dementsprechend gilt die Aussage 3 nur mit Ausschluß des Punktes  $r = r'$ ,  $\varphi = \varphi'$  im ersten Blatte.

**60. Beugung an der Halbebene.** Um einen mathematisch möglichst einfachen Fall zu erhalten, hat *A. Sommerfeld*<sup>188)</sup> im Anschluß an *H. Poincaré*<sup>184)</sup> den beugenden Schirm durch eine vollkommen leitende Halbebene approximiert. Wir wählen die Projektion  $OP$  des Schirmes als Achse eines Polarkoordinatensystems (Fig. 28), dann haben wir vermöge (209) und (211)



die Gleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right)$$

nebst den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Schirmes

$$s = 0 \quad \text{im Falle } \perp,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \nu} = 0 \quad \text{im Falle } \parallel$$

zu befriedigen.

Die Lösung, welche diesen Forderungen genügt, kann man durch das folgende „Spiegelungsverfahren“ aus den zweiwertigen ( $p = 2$ ) Integralen der letzten Nummer aufbauen. Man setzt als Lösung an

$$v = u(\varphi') \mp u(-\varphi'),$$

wo das obere Vorzeichen dem Falle  $\perp$ , das untere dem Falle  $\parallel$  entspricht.

Die numerische Diskussion wurde von *A. Sommerfeld* für das Integral (218) bereits in seiner Arbeit von 1896 durchgeführt<sup>188)</sup>, für Impulsstrahlung in der späteren Abhandlung von 1901.<sup>193)</sup> Wir wollen nur auf den Fall der periodischen ebenen Welle eingehen. Es ist nach (218)

$$(220) \quad u_2 = \frac{e^{int}}{4\pi} \int e^{ikr \cos(\alpha - \varphi)} \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} d\alpha}{\frac{i\alpha}{2} - e^{\frac{i\varphi'}{2}}}.$$

Der Integrationsweg ist gegen den der Fig. 26 um  $2\pi$  nach rechts verschoben. Man kann diesen Weg auf die Integration längs der beiden unendlichen Geraden  $\alpha = \varphi + \pi + ib$  und  $\alpha = \varphi + 3\pi + ib$  reduzieren und erhält nach Auswertung der Integrale

$$(221) \quad u_2 = e^{i[kr \cos(\varphi - \varphi') + nt]} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi e}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau,$$

wo

$$T = \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} < 0.$$

Nach Seite 495 (5. Eigenschaft) ist aber auch

$$u_1 = u_0 - u_2 = e^{i[kr \cos(\varphi - \varphi') + n t]} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^T e^{-i\tau^2} d\tau,$$

wo nunmehr  $T > 0$  ist. Somit erhält man als Lösung des Problems

$$(222) \quad s = \frac{e^{i\left(nt + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{i kr \cos(\varphi - \varphi')} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} e^{-i\tau^2} d\tau + e^{i kr \cos(\varphi + \varphi')} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} e^{-i\tau^2} d\tau \right\}.$$

Die auf S. 494 betonte Eigenschaft 4 der verzweigten Lösungen lautet, auf den vorliegenden Fall angewandt und ins Physikalische übersetzt, daß die Beugungserscheinung, welche sich dem nach der geometrischen Optik zu erwartenden Strahlengang überlagert, nur in zwei schmalen Gebieten längs der beiden Schattengrenzen  $S$  und  $S'$ ,  $\varphi = \varphi' + \pi$  und  $\varphi = \pi - \varphi'$ , eine mit der einfallenden vergleichbare Intensität besitzt. In diesen „Übergangsgebieten“, wie sie *Sommerfeld* nennt, kann man das eine der Integrale (222) gegenüber dem anderen vernachlässigen. Z. B. wird die Lösung in der Nähe des Halbstrahls  $\varphi = \varphi' + \pi$  (falls  $\varphi' < \pi$ ) mit sehr guter Annäherung für (gegen die Wellenlänge  $\lambda$ ) große  $r$

$$(223) \quad s = \frac{e^{i kr \cos(\varphi - \varphi')}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} e^{-i\tau^2} d\tau \cdot e^{i\left(nt + \frac{\pi}{4}\right)},$$

und die Intensität

$$J = \frac{n}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{n}} (\operatorname{Re} s)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \cos \tau^2 d\tau \right]^2 + \left[ \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \sin \tau^2 d\tau \right]^2 \right\}$$

oder mit Benutzung der durch Formeln (126) als *Fresnelsche* Integrale eingeführten Funktionen.

$$(224) \quad \left\{ \begin{aligned} J = \frac{1}{4} \left\{ \left[ C \left( 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) - C(-\infty) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[ S \left( 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) - S(-\infty) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Intensitätsverteilung wird also durch die *Cornusche Spirale* (Fig. 12) graphisch veranschaulicht, die Intensität ist nämlich gleich dem Quadrat des aus dem Punkte  $u = -\infty$  zum Punkte der Spirale

$$u = 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}$$

gezogenen Radiusvektors. Für  $\varphi < \varphi' + \pi$  ergeben sich die charakteristischen Maxima und Minima, für  $\varphi > \varphi' + \pi$  ein kontinuierlicher Abfall der Intensität. Die Linien konstanter Intensität schließen sich für große  $r$  den Parabeln  $\sqrt{r} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \text{const.}$  mit dem Halbstrahl  $\varphi = \varphi' + \pi$  als Achse an. Eine dieser Parabeln muß man auch als Begrenzung des Übergangsgebietes wählen; ist nämlich  $\sqrt{r} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}$  genügend groß, so ist die in (223) gemachte Vernachlässigung nicht mehr erlaubt, da die in dem diskutierten Integral enthaltene Beugungswelle selbst sehr schwach wird.

Es ist interessant, dieses Ergebnis mit dem Resultat zu vergleichen, welches die Näherungsrechnung nach dem *Huyghensschen* Prinzip für denselben Fall liefert. Durch Spezialisierung der in Nr. 39b gegebenen Formeln erhält man einen Wert der Intensität, der sich von (224) nur dadurch unterscheidet, daß hier als Argument der *Fresnelschen* Integrale an Stelle von  $2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}$  der Ausdruck  $\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \frac{\sin(\varphi - \varphi' + \pi)}{\sqrt{\cos(\varphi - \varphi' + \pi)}}$  tritt. Im Übergangsgebiet, in dem der „Beugungswinkel“  $\delta = \varphi - \varphi' + \pi$  klein ist, haben beide Argumente in erster Näherung den übereinstimmenden Wert  $\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cdot \delta$ .

So weit liefert also die exakte Theorie in allen wesentlichen Punkten eine Bestätigung der Resultate, welche man auch nach der *Kirchhoffschen* Rechnung erhält. Das wesentlich Neue, das die *Sommerfeldsche* Lösung bringt, ergibt sich erst bei Betrachtung der außerhalb der Übergangsgebiete, bei größeren Beugungswinkeln eintretenden Erscheinungen.

Die Bedingung  $T \gg 1$  gestattet hier die semikonvergente Entwicklung zu benutzen (vgl. auch Gl. (131))

$$\int_{-\infty}^{-|T|} e^{-i\tau^2} d\tau = e^{-i|T|^2} \left\{ \frac{1}{2i|T|} + \frac{1}{4|T|^3} + \dots \right\},$$

welche auf die folgenden sehr übersichtlichen Näherungsformeln führt.

Im Gebiet I der Fig. 28 (Schatten,  $\varphi > \varphi' + \pi$ , wobei wir der Fig. 28 entsprechend  $0 < \varphi' < \pi$  voraussetzen)

$$(225) \quad \Re s = \frac{1}{4\pi} \cos \left( kr - nt + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \left\{ \pm \frac{1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\},$$

im Gebiet II ( $\pi - \varphi' < \varphi < \pi + \varphi'$ )

$$\Re s = \cos [kr \cos(\varphi - \varphi') + nt] \\ + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \left( kr - nt + \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \pm \frac{1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\},$$

im Gebiet III (geometrisch-optisches Reflexionsgebiet,  $\varphi < \pi - \varphi'$ )

$$\Re s = \cos [kr \cos(\varphi - \varphi') + nt] \mp \cos [kr \cos(\varphi + \varphi') + nt] \\ + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \left( kr - nt + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left\{ \pm \frac{1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\}.$$

Man ersieht aus diesen Formeln, daß außer dem Strahlengang der geometrischen Optik noch eine „Beugungswelle“ auftritt, deren Phase durch den Faktor  $\cos \left( kr - nt + \frac{\pi}{4} \right)$  bestimmt ist. Die Linien gleicher Phase sind Kreise um den Nullpunkt: *Von dem Windungspunkt  $r = 0$  aus pflanzen sich nach allen Seiten Strahlen in der Richtung des Radiusvektors fort, gerade so, als ob der Windungspunkt ein leuchtender Punkt wäre.* Dies entspricht dem experimentellen Befund bei der Beugung an dünnen Schneiden: bereits von *Gouy* und *Wien*<sup>196)</sup> wurde hervorgehoben, daß dem aus dem geometrischen Schatten visierenden Beobachter die beugende Kante als leuchtende Linie erscheint.<sup>196)</sup>

Der Faktor

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \left[ \pm \frac{1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right]$$

bestimmt die Amplitude der Beugungswelle, dieselbe ist infolge des Auftretens von  $\sqrt{\lambda}$  sehr klein und nimmt mit wachsender Entfernung ab wie  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ . Das Verhältnis der Amplituden als Funktion des Winkels im Falle  $\parallel$  und im Falle  $\perp$  (unteres und oberes Vorzeichen) ist absolut genommen  $\cotg \frac{\varphi'}{2} \cotg \frac{\varphi}{2}$  und bei senkrechter Inzidenz ( $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ )

$$\cotg \frac{\varphi}{2} = \tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right),$$

wenn  $\delta$  den Beugungswinkel bezeichnet. Die von *W. Wien* an sehr dünnen Stahlschneiden ausgeführten Messungen zeigen ein etwas

196) Eine elegante Methode der objektiven Beobachtung wandte *A. Kalaschnikow* (Anm. 220) an, indem er das abgebeugte Licht im Gebiet des geometrischen Schattens eine photographische Platte bestreichen ließ, auf welcher parallel zur beugenden Kante Nadeln aufgesteckt waren. Die Schatten der Nadeln verlaufen (von der Kante aus betrachtet) radial.

stärkeres Anwachsen dieses Verhältnisses, was wohl in der endlichen Dicke derselben seinen Grund hat (vgl. Nr. 66).

Daß die *Sommerfelds*che Methode sich auch auf den Fall eines vollkommen schwarzen Schirms anwenden läßt, wurde zuerst von *W. Voigt*<sup>197)</sup> hervorgehoben. Die Funktion  $u$  (218), ohne Spiegelung für sich gesondert betrachtet, liefert nämlich die Darstellung eines Vorgangs, welcher dem eben erwähnten Fall nahekommt. Der Beugungsschirm gleicht dann einer offenen Tür, durch welche die Energie der Lichtbewegung aus dem physikalischen Blatte in die angehängten Blätter der *Riemanns*chen Fläche austritt. Die Rückwirkung der letzteren ist um so geringer, je größer ihre Anzahl ist, so daß die unendlich gewundene Fläche dem Begriff des schwarzen Körpers am besten entspricht.

Es ist bemerkenswert, daß diese Auffassung der besten experimentellen Realisierung des schwarzen Körpers durch *W. Wien* und *O. Lummer*<sup>198)</sup> sehr nahe steht. Sie ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich, insofern als es nicht unbedingt nötig scheint, den Zustand auf den fingierten Blättern den *Maxwells*chen Gleichungen zu unterwerfen. Die Rechnung zeigt indessen, daß die Vorgänge auf den letzteren von untergeordneter Bedeutung sind; man erhält im wesentlichen das gleiche Bild, ob man eine einfach- ( $p = 2$ ) oder eine unendlichfach gewundene ( $p = \infty$ ) *Riemanns*che Fläche zugrunde legt.

In diesem Sinne lautet die Lösung für den absolut schwarzen Schirm, wie sie von *Sommerfeld* angegeben wurde bei auffallender periodischer Welle nach (218)

$$(226) \quad u = \frac{1}{2\pi i} \int e^{ikr \cos(\alpha - \varphi)} \frac{d\alpha}{\alpha - \varphi}.$$

*A. Sommerfeld*<sup>199)</sup> selbst hat auch den Fall ebener Impulsstrahlung diskutiert, mit Rücksicht auf die Versuche von *Haga* und *Wind*<sup>199)</sup> über Beugung von Röntgenstrahlen, und in der Tat wurde später die Wellenlänge (bzw Impulsbreite) der Röntgenstrahlen zum erstenmal auf Grund von Beugungsbildern bestimmt, welche im Anschluß an *Haga* und *Wind* von *Walter* und *Pohl* hergestellt waren (vgl. auch Nr. 45).<sup>200)</sup> Für eine andere spezielle Form des Impulses wurden die

197) *W. Voigt*, Comp. d. theor. Phys. 2, p. 768, Leipzig 1895; Gött. Nachr. (1899), p. 1.

198) *W. Wien* und *O. Lummer*, Ann. d. Phys. 56 (1895), p. 451.

199) *H. Haga* und *C. H. Wind*, Amsterdamer Akademie 1899 und 1902. Ann. d. Phys. 68 (1899), p. 884; 10 (1903), p. 305. Vgl. auch *B. Walter* und *R. Pohl*, Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 715; 29 (1909), p. 331.

200) *A. Sommerfeld*, Ann. de Phys. 38 (1912), p. 473; *P. P. Koch*, Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 507.

numerischen Rechnungen von *W. Rybczynski*<sup>201)</sup> durchgeführt, für Wellenstrahlung von *A. Wiegrefe*.<sup>202)</sup>

**61. Der Keil und der Fresnelsche Doppelspiegel.** Mit Hilfe der in Nummer 59 gegebenen  $p$ -wertigen Funktionen ist auch das Problem der Beugung am vollkommen reflektierenden Keil lösbar. Wir wählen die Kante des Keils als  $z$ -Achse und beschränken uns wieder auf den Fall eines zweidimensionalen von  $z$  unabhängigen Strahlungszustandes. Der außerhalb des Keils liegende Teil der zur  $z$ -Achse senkrechten Ebene stellt das „physikalische“ Gebiet  $G$  dar, in welchem wir den Beugungsvorgang studieren wollen. Dies Gebiet ist ein unendlicher Sektor, dessen Winkelöffnung zunächst mit  $\pi$  kommensurabel, nämlich  $\frac{p\pi}{m}$  sein möge.

Wenn man nun an den beiden den Keil begrenzenden Ebenen abwechselnd Spiegelungen vornimmt, schließt sich das so entstandene Gebiet zu einer Windungsfläche vom Winkel  $2p\pi$  zusammen, so daß es die Ebene  $p$ -fach überdeckt. Beherrscht man nun die auf dieser  $p$ -blättrigen *Riemannschen* Fläche geltenden  $p$ -wertigen Lösungen (Nr. 59), so kann man die Grenzbedingungen an der Oberfläche des vollkommen spiegelnden Keils durch Spiegelung genau so erfüllen, wie man dies nach der *Thomsonschen* Methode für den Spezialfall  $p = 1$  in der schlichten Ebene tut. Die Lösung lautet, wie von *A. Sommerfeld*<sup>193)</sup> angegeben wurde, wenn  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \frac{p\pi}{m}$  die Grenzen des physikalischen Gebietes  $G$  sind, und wenn  $u(\varphi')$  eine  $p$ -wertige Lösung der Wellengleichung von der ausgezeichneten Richtung  $\varphi'$  bedeutet

$$(227) \quad s = u(\varphi') \mp u(-\varphi') + u\left(\frac{2p\pi}{m} + \varphi'\right) \mp u\left(\frac{2p\pi}{m} - \varphi'\right) \\ + \dots + u\left(\frac{2(m-1)p\pi}{m} + \varphi'\right) \mp u\left(\frac{2(m-1)p\pi}{m} - \varphi'\right),$$

wo sich das obere Vorzeichen auf den Fall  $\perp$ , das untere auf den Fall  $\parallel$  bezieht.

In ähnlicher Weise wird die Lösung, wenn der Winkel des Keils mit  $\pi$  inkommensurabel ist, durch eine unendliche Reihe der Funktionen (226) der unendlich-vielblättrigen Windungsfläche dargestellt.

Für den Fall eines rechteckigen vollkommen spiegelnden Keils und einer ebenen periodischen Welle (siehe oben) wurde die Rechnung von *F. Reiche*<sup>203)</sup> durchgeführt. Hier ist die *Riemannsche* Fläche

201) *W. Rybczynski*, Phys. Z. 13 (1912), p. 708.

202) *A. Wiegrefe*, Ann. d. Phys. 39 (1912), p. 449; Gött. Dissertation 1912.

203) *F. Reiche*, Ann. d. Phys. 37 (1912), p. 131.

der  $u$ -Funktionen dreiblättrig, und die Lösung ist nach (227)

$$s = u(\varphi') \mp u(-\varphi') + u(3\pi + \varphi') \mp u(3\pi - \varphi'),$$

unter  $u(\varphi')$  das Integral (218) mit  $p = 3$  verstanden. Für kleine Beugungswinkel ist das Resultat von dem für die vollkommen leitende Halbebene nicht wesentlich verschieden in Übereinstimmung mit der Rechnung nach dem *Huyghensschen* Prinzip, welche ja überhaupt keinen Einfluß der Schirmdicke ergibt. Für größere Beugungswinkel ist der Abfall der Intensität im Falle  $\perp$  schneller als an der Halbebene, da ja hier die Oberfläche des Keils, an welcher die elektrische Kraft verschwindet, um  $\frac{\pi}{2}$  näher an der Schattengrenze liegt als dort die Oberfläche der Ebene. Dagegen ist im Falle  $\parallel$  der Abfall langsamer.

Einen Fall, in welchem das physikalische Gebiet im allgemeinen mit  $\pi$  inkommensurabel ist, liefert der in Nr. 13 beschriebene *Fresnel'sche* Spiegel. Die *Sommerfeld'sche* Methode wurde auf denselben von *A. Wiegrefe*<sup>202)</sup> angewendet. Nach obigem ergibt sich die Lösung in Form einer unendlichen Reihe unendlich-vielwertiger Funktionen (226), welche sich jedoch in einfacher Weise zu einem geschlossenen Ausdruck summieren läßt, der auch die in Nr. 13 erwähnten von der Kante herrührenden Beugungserscheinungen enthält.

**62. Der Spalt.** Eine Behandlung der Beugung am Spalt nach der Methode der mehrwertigen Lösungen würde die Integration der Schwingungsgleichung für *Riemann'sche* Flächen mit zwei Verzweigungspunkten erfordern, eine Aufgabe, deren Bewältigung bisher nicht gelungen ist. Deshalb hat *K. Schwarzschild*<sup>204)</sup> das Problem des Spaltes auf einem anderen Wege in Angriff genommen. Er denkt sich zu-

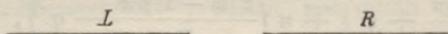


Fig. 29.

nächst die eine (rechte) Hälfte (Fig. 29) des vollkommen leitenden Spaltes weg und beginnt mit

der *Sommerfeld'schen* Lösung (222), welche die Grenzbedingungen an der anderen (linken) Hälfte des Spaltes befriedigt<sup>205)</sup>, nicht aber an der rechten Hälfte ( $R$ ). Diese erste Lösung heiße  $v_0$ . Man fragt jetzt nach einer Funktion  $v_1$ , welche der Schwingungsgleichung genügt und so beschaffen ist, daß  $v_0 + v_1$  an der Oberfläche von  $R$  Null wird. Um  $v_1$  aufzufinden, setzt *Schwarzschild* in die *Kirchhoff'sche* Formel (105) eine dem Problem angepaßte *Greene'sche* Funktion  $G$  ein, nämlich die Differenz der zweiwertigen Lösung (219) der Nr. 59 und ihres Spiegel-

204) *K. Schwarzschild*, Math. Ann. 55 (1902), p. 177.

205) Wir wollen den Gedankengang am Fall  $\perp$  illustrieren.

bildes an der Halbebene  $R$ . Die so konstruierte Funktion  $G$  wird in einem Punkte der Ebene logarithmisch unendlich, wodurch sie für eine zweidimensionale Greensche Funktion qualifiziert ist, und verschwindet ferner an der ganzen Fläche  $R$ ; daher nach (105)

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \int_R dr \cdot v_0 \frac{dG_R}{dv},$$

die Integration erstreckt sich über die rechte Spalthälfte  $R$ . Nun wird aber von der Summe  $v_0 + v_1$  die Grenzbedingung an der linken Hälfte ( $L$ ) nicht mehr erfüllt, man bildet daher

$$v_2 = \frac{1}{2\pi} \int_L dr v_1 \frac{dG_L}{dv},$$

und so alternierend weiter. Schwarzschild hat nun gezeigt, daß die Summe

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

wirklich für beliebige Spaltbreite konvergiert, womit die Frage vom mathematischen Standpunkt erledigt ist. Weniger befriedigend sind die physikalischen Resultate; denn die hier auftretenden Integrale sind nicht allgemein ausführbar. Nur wenn die Konvergenz so gut ist, daß man sich auf die allerersten Glieder beschränken kann, ist es möglich, Folgerungen über das Beugungsbild zu machen. Dieses ist dann der Fall, wenn der Spalt genügend breit gegen  $\lambda$  ist, dann werden die Erscheinungen an der einen Spalthälfte nicht merklich von der anderen beeinflußt, und  $v_1$  ist im wesentlichen die zur rechten Spalthälfte gehörende Sommerfeldsche Lösung. Der andere Grenzfall der Beugung an schmalen Spalten wird in Nr. 65 und Nr. 69 behandelt.

## II. Methode der krummlinigen Koordinaten.

63. Die Grundgleichungen in krummlinigen Koordinaten. Der zweite der in Nr. 58 erwähnten Wege, der zur Lösung von Beugungsproblemen führt, besteht darin, die mathematische Analyse der Gestalt des beugenden Körpers durch Benutzung geeigneter krummliniger Koordinaten anzupassen. Diese Methode ist auch insofern allgemeiner, als sie gestattet, Körper mit endlicher Leitfähigkeit zu behandeln, d. h. den Materialeinfluß bei der Beugung zu berücksichtigen.

Es seien  $u, v, w$  die krummlinigen Koordinaten und

$$\left(\frac{du}{U}\right)^2 + \left(\frac{dv}{V}\right)^2 + \left(\frac{dw}{W}\right)^2$$

das Quadrat des Linienelementes<sup>206)</sup>; wenn wir uns auf periodische

206) Vgl. IV 14, Nr. 20 (Abraham).

Vorgänge beschränken, lauten die *Maxwellschen* Gleichungen (207) für diese Koordinaten transformiert<sup>207)</sup>:

$$(229) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E_u = V \cdot W \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H_w}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{H_v}{V}\right) \right], \\ \left(\frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E_v = W \cdot U \left[ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{H_u}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H_w}{W}\right) \right], \\ \left(\frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E_w = U \cdot V \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H_v}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H_u}{U}\right) \right], \\ -\frac{in}{c} H_u = V \cdot W \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_w}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{E_v}{V}\right) \right], \\ -\frac{in}{c} H_v = W \cdot U \left[ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{E_u}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_w}{W}\right) \right], \\ -\frac{in}{c} H_w = U \cdot V \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_v}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_u}{U}\right) \right]. \end{array} \right.$$

Die Anwendbarkeit dieser Methode hängt davon ab, ob es möglich ist, dieses simultane Gleichungssystem auf Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen zurückzuführen. Das letztere gelingt immer, wenn es sich um zweidimensionale Probleme handelt. In der Tat kann man in diesen Fällen setzen  $w = z$ ,  $W = 1$ , wobei die Feldstärken von der Variablen  $z$  unabhängig sind. Wie schon in Nr. 58 hervorgehoben, kann man dann den Schwingungsvorgang als Überlagerung zweier Zustände betrachten, welche durch das Verschwinden von  $H_z$  (Fall  $\perp$ ) und  $E_z$  (Fall  $\parallel$ ) charakterisiert sind, denn die Gleichungen (229) zerfallen in die beiden unabhängigen Gruppen:

Für den Fall  $\perp$ :

$$(229a) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{in}{c} H_u = V \frac{\partial E_z}{\partial v}, \\ -\frac{in}{c} H_v = -U \frac{\partial E_z}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{U}{V} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{V}{U} \frac{\partial E_z}{\partial v} \right) + \frac{k^2}{U \cdot V} E_z = 0. \end{array} \right.$$

Fall  $\parallel$ :

$$(229b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E_u = V \frac{\partial H_z}{\partial v}, \\ \left(\frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c}\right) E_v = -U \frac{\partial H_z}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{U}{V} \frac{\partial H_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{V}{U} \frac{\partial H_z}{\partial v} \right) + \frac{k^2}{UV} H_z = 0. \end{array} \right.$$

Daneben sind nach (210) die folgenden Grenzbedingungen an der Oberfläche des beugenden Körpers zu erfüllen, dem der Parameter-

207) Vgl. V 18, Nr. 66 (Abraham).

wert  $u = u_0$  entsprechen möge: im Falle  $\perp$

$$(230a) \quad (E_z)_a = (E_z)_i; \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial u}\right)_a = \left(\frac{\partial E_z}{\partial u}\right)_i,$$

im Fall  $\parallel$

$$(230b) \quad (H_z)_a = (H_z)_i; \quad \left(\frac{1}{k} \frac{\partial H_z}{\partial u}\right)_a = \left(\frac{1}{k} \frac{\partial H_z}{\partial u}\right)_i.$$

Für vollkommene Leitfähigkeit des beugenden Objektes reduzieren sich die Bedingungen nach (213) auf

$$(231) \quad \left. \begin{array}{l} E_z = 0 \text{ im Falle } \perp \\ \frac{\partial H_z}{\partial u} = 0 \text{ im Falle } \parallel \end{array} \right\} \text{ für } u = u_0.$$

Für die rechnerische Durchführbarkeit des Problems ist es sodann von entscheidender Bedeutung, ob es gelingt, die partielle Differentialgleichung für  $E_z$  bzw.  $H_z$  in zwei gewöhnliche mit den unabhängigen Variablen  $u$  und  $v$  zu zerfallen. Ist dies möglich, so kann man die allgemeine Lösung in Form einer unendlichen Reihe von Produkten der Eigenfunktionen dieser beiden Differentialgleichungen ansetzen, und die Untersuchung läuft mathematisch auf eine Theorie dieser Eigenfunktionen hinaus (vgl. Nr. 64—66). Sind die krummlinigen Koordinaten durch eine Abbildung in der komplexen Ebene gegeben

$$x + iy = f(u + iv),$$

so gewinnen die letzten der Gleichungen (229a, b) die Gestalt

$$(229c) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} + k^2 f'(u + iv) \varphi'(u - iv) s = 0,$$

wo  $\varphi$  die zu  $f$  konjugiert-komplexe Funktion ist. Damit sich diese Gleichung zerfallen läßt, muß man  $f'(u + iv) \cdot \varphi'(u - iv)$  in zwei Summanden zerlegen können, von denen der erste nur von  $u$ , der zweite nur von  $v$  abhängt. Dies ist jedoch dann und nur dann möglich, wenn  $f$  der Bedingung genügt  $f'''(w) = cf'(w)$ . Bei verschiedener Wahl der konstanten  $c$  erhält man hieraus nur die Funktionen  $e^{x+iy}$ ,  $\text{Cos}(x + iy)$  (bzw.  $\text{Sin}(x + iy)$ ),  $(x + iy)^2$ , welche den Polarkoordinaten, den elliptischen und parabolischen Koordinaten der Ebene entsprechen.<sup>208)</sup> Der Behandlung dieser drei Fälle sind Nr. 64, 65, 66 gewidmet.

Außer dieser Klasse von Problemen gibt es noch einige Spezialfälle (z. B. Nr. 67), in denen es gelingt, das Gleichungssystem (229) auf eine einzelne partielle Differentialgleichung zurückzuführen.

**64. Der Kreiszyylinder.** Die Beugung am Kreiszyylinder wurde von *J. J. Thomson*<sup>209)</sup> mit Rücksicht auf die Eigenschwingungen des

208) *H. Weber*, Math. Ann. 1 (1869), p. 1.

selben behandelt. Das eigentliche Beugungsproblem einer ebenen Welle, welche auf einen Kreiszyylinder senkrecht zu dessen Achse einfällt, bietet hiernach keine Schwierigkeiten für Zylinder, deren Halbmesser klein gegen  $\lambda$  ist<sup>210</sup>). Man benutzt Polarkoordinaten ( $u = r$ ,  $v = \varphi$ ,  $U = 1$ ,  $V = \frac{1}{r}$ ) und erhält im Falle  $\perp$  nach (229a), (230a)

$$(232) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + k^2 E_z = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$(233a) \quad (E_z)_a = (E_z)_i; \quad \left( \frac{\partial E_z}{\partial r} \right)_a = \left( \frac{\partial E_z}{\partial r} \right)_i$$

für  $r = R$ , wenn  $R$  der Radius des Zylinders ist.

Im Falle  $\parallel$  gilt für  $H_z$  dieselbe Gleichung (232), die Grenzbedingungen aber lauten:

$$(233b) \quad (H_z)_a = (H_z)_i; \quad \left( \frac{1}{k} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)_a = \left( \frac{1}{k} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)_i.$$

Durch den Ansatz

$$\begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = P(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

erhält man aus (232) für  $P(r)$

$$(234) \quad \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) P = 0.$$

Es ist also  $P(r) = Z_n(kr)$  gleich der  $n$ -ten Zylinderfunktion des Argumentes  $kr$ , wobei nur ganzzahlige Werte von  $n$  in Betracht kommen, da die Lösung ihrem physikalischen Sinne nach in  $\varphi$  die Periode  $2\pi$  haben muß. Wir wollen die weitere Rechnung für den Fall  $\perp$  durchführen. Die Erscheinung ist dann in bezug auf die Einfallrichtung  $\varphi = 0$  symmetrisch, so daß nur Glieder mit  $\cos n\varphi$  auftreten. Von den Zylinderfunktionen darf für das Innere des Zylinders nur die Besselsche Funktion  $J_n(kr)$  angesetzt werden, da die anderen im Nullpunkt unendlich werden; der Schwingungszustand im Innern ist also gegeben durch die Reihe

$$(235) \quad (E_z)_i = \sum_0^{\infty} b_n \cdot J_n(k_i r) \cos n\varphi.$$

Dagegen kommt für die Störung im Äußeren neben der einfallenden Welle nur die Hankelsche Funktion zweiter Art

$$H_n^{(2)}(kr) = i^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikr \cos \psi} \cos \psi p \psi d\psi$$

209) J. J. Thomson, Rec. researches, p. 428. London 1893.

210) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16 (1905), p. 746; 19, p. 554; 21 (1906), p. 1013; W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 495; 23 (1907), p. 905.

(vgl. Nr. 5) in Betracht als einzige, welche eine vom Zylinder divergierende Welle darstellt.<sup>211)</sup> Im Äußeren ist also das optische Feld

$$(236) \quad (E_z)_a = e^{ik_a r \cos \varphi} + \sum_0^{\infty} a_n H_n^{(2)}(k_a r) \cos n \varphi,$$

wobei für die einfallende Welle die Entwicklung gilt<sup>212)</sup>

$$(237) \quad e^{ik_a r \cos \varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_a r) \cos n \varphi = J_0(k_a r) + 2 \sum_1^{\infty} i^n J_n(k_a r) \cos n \varphi.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (233a) erhält man die Werte der in (236) eingeführten Koeffizienten  $a$

$$(238) \quad a_n = -2 i^n \frac{k_i J_n'(k_i R) \cdot J_n(k_a R) - k_a J_n(k_i R) \cdot J_n'(k_a R)}{k_i J_n'(k_i R) \cdot H_n^{(2)}(k_a R) - k_a J_n(k_i R) \cdot H_n^{(2)'}(k_a R)}.$$

Der Koeffizient  $a_0$  ist noch mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  zu versehen. Ganz analog gestaltet sich die Rechnung auch im Falle  $\parallel$ . Wenn der Durchmesser gegen  $\lambda$  klein ist, konvergiert die Reihe schnell, und man kann sich mit wenigen Gliedern derselben begnügen. Bei sehr dünnen Zylindern, wo  $a_0$  maßgebend ist, ist die Amplitude des abgelenkten Lichtes proportional zu  $\frac{R^2}{\lambda^2}$ ; eine Ausnahme bildet nur der vollkommen leitende Zylinder im Falle  $\perp$ , hier steigt die Amplitude zunächst an wie  $\frac{1}{\log \frac{R}{\lambda}}$ . Die Verhältnisse an etwas dickeren Zylindern (bis  $R = \frac{\lambda}{2}$ )

sind durch verschiedene Beispiele in den zitierten Arbeiten illustriert.<sup>213)</sup>

Eine Methode, um Zylinder von beliebigem Radius zu behandeln, gab *P. Debye*,<sup>214)</sup> womit auch das eigentliche optische Problem in Angriff genommen wurde.

**65. Der elliptische Zylinder.** Die Beugung am elliptischen Zylinder wurde von *B. Sieger*<sup>215)</sup> unter Überwindung von erheblichen Schwierigkeiten behandelt. Das Koordinatensystem, welches hier an-

211) In seiner ersten Abhandlung<sup>210)</sup> hat *W. Seitz* irrtümlicherweise die *Neumannsche* Zylinderfunktion verwendet, so daß die Resultate derselben nicht ganz korrekt sind; durch *v. Ignatowsky* aufmerksam gemacht, hat er sie in der zweiten Arbeit richtiggestellt.

212) *E. Heine*, Handbuch der Theorie d. Kugelfunkt. I p. 82. Berlin 1878.

213) Siehe 210); die Erscheinungen an *dielektrischen* Stäben hat *Cl. Schäfer* (Berl. Ber. 11 (1909), p. 225) studiert.

214) *P. Debye*, Phys. Zeitschr. 9 (1908), p. 775.

215) *B. Sieger*, Ann. d. Phys. 27 (1908), p. 626; vgl. auch *K. Aichi*, Proc. Tokyo, Math. Phys. Soc. (2) 4 (1908), p. 966.

zuwenden ist, wird durch die Abbildung

$$(239) \quad x + iy = ia \operatorname{Sin}(u + iv),$$

bestimmt, aus der sich ergibt

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{V} = a \sqrt{|\operatorname{Cos}|^2 u - \sin^2 v}.$$

Wegen der erforderlichen Eindeutigkeit setzen wir fest

$$0 < u < \infty, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Die Kurven  $u = \text{const}$  sind konfokale Ellipsen,  $v = \text{const}$  konfokale Hyperbeläste, wie durch Fig. 30 veranschaulicht wird. Nach (229) ist damit das Problem auf die Behandlung der partiellen Differentialgleichung

$$(240) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} + \kappa^2 (|\operatorname{Cos}|^2 u - \sin^2 v) s = 0, \quad (\kappa = ak)$$

zurückgeführt. Dieselbe läßt sich durch den Ansatz

$$s = \Xi(u) \cdot H(v)$$

in zwei gewöhnliche zerfallen:

$$(241) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \Xi}{du^2} + (\kappa^2 |\operatorname{Cos}|^2 u + \alpha) \Xi = 0, \\ \frac{d^2 H}{dv^2} - (\kappa^2 \sin^2 v + \alpha) H = 0, \end{cases}$$

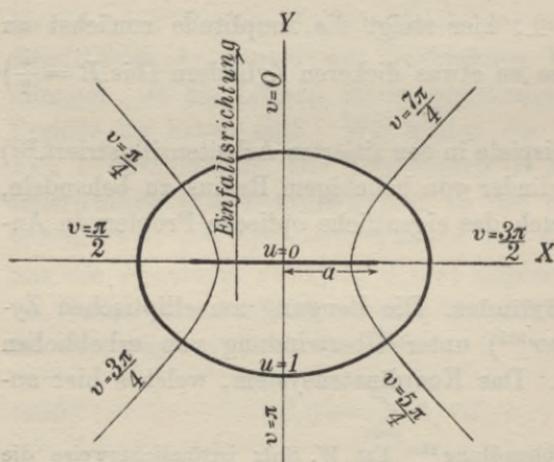


Fig. 30.

die als *Differentialgleichungen des elliptischen Zylinders* bezeichnet werden. Bei einer Umkreisung der Ellipse ändert sich der Parameter  $v$  um  $2\pi$ ; daher muß die Funktion  $H(v)$ , welche ihrem physikalischen Sinn nach zum Anfangswert zurückkehren muß, in  $v$  die Periode  $2\pi$  besitzen. Die Auswahl der zunächst willkürlichen Parameter  $\alpha$  ist damit auf diejenigen

beschränkt, welche die Funktion  $H_\alpha(v)$  periodisch machen, und die Lösungen von (240) erscheinen in Form von Reihen

$$\sum A_\alpha H_\alpha(v) \cdot \Xi_\alpha(u),$$

wo die Summe über alle Werte von  $\alpha$  zu erstrecken ist, welche dieser Bedingung genügen.

Bereits *E. Heine*<sup>216)</sup> hat bewiesen, daß es wirklich abzählbar unendlich viel solcher Werte von  $\alpha$  gibt, nämlich die Wurzeln einer von ihm aufgestellten transzendenten Gleichung; aber es gab kein praktisch brauchbares Verfahren, um dieselben wirklich numerisch zu berechnen, und erst *B. Sieger* hat unter Benutzung eines von *Mathieu*<sup>217)</sup> stammenden Gedankenganges eine Methode gegeben, welche gestattet, die  $\alpha$  und die zugehörigen Funktionen des elliptischen Zylinders wenigstens für kleine Werte von  $\kappa^2$  aufzufinden.<sup>218)</sup>

Während also die Funktionen  $H_\alpha(v)$  den trigonometrischen analog sind und auch die Orthogonalitätsbedingungen

$$(242) \quad \int_0^{2\pi} H_{\alpha_1}(v) \cdot H_{\alpha_2}(v) dv = 0, \quad \text{wenn } \alpha_1 \neq \alpha_2$$

$$\int_0^{2\pi} [H_\alpha(v)]^2 dv = p_\alpha$$

erfüllen, besitzen die Funktionen von  $u$  („Funktionen zweiter Art“) eine weitgehende Ähnlichkeit mit den Funktionen des Kreiszylinders (vom Argument  $\kappa \text{Cof } u$  bzw.  $\kappa \text{Sin } u$ ), in die sie ja auch bei verschwindendem  $a$  übergehen. Für unsere Zwecke kommen die beiden partikulären Integrale in Betracht:  $\Xi_\alpha(u)$ , welche den *Besselschen* Funktionen entsprechen<sup>219)</sup>, und die den *Hankelschen* analogen Integrale  $\Phi_\alpha(u)$ , welche eine vom Zylinder divergierende Welle darstellen. Wir haben also ganz wie in Nr. 64 für den Schwingungszustand im Innern des Zylinders anzusetzen

$$(243) \quad s_i = \sum B_\alpha \Xi_\alpha^i(u) \cdot H_\alpha^i(v)$$

und für das optische Feld im Äußern, wenn wir uns mit *Sieger* auf Wellen beschränken, welche parallel der kürzeren Halbachse des Zy-

216) *E. Heine*, Handbuch der Theorie der Kugelfunktionen I, p. 402—415. Berlin 1878. Der Beweis setzt reelle Werte von  $\kappa^2$  voraus, eine Lücke in demselben ist von *S. Dannacher* (Züricher Diss. 1906) ausgefüllt worden.

217) *E. Mathieu*, Liouville Journ. II. Série 1. XIII (1868).

218) Über die Berechnung der Parameter  $\alpha$  für größere Werte von  $\kappa^2$  siehe: *E. Reinstein*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 109.

219) Die Funktionen  $\Xi_\alpha(u)$  sind wegen ihres Verhaltens beim Durchgang durch die Verzweigungslinie  $u=0$  die einzigen für das Innere des Zylinders geeigneten. Der erwähnte Grenzübergang zu verschwindendem  $a$  ist so auszuführen, daß gleichzeitig  $\text{Cof } u$  (bzw.  $\text{Sin } u$ ) unendlich wird, so daß das Produkt  $a \text{Cof } u$  einen endlichen Wert  $r$  behält. Unter  $H_\alpha(v)$  verstehen wir im folgenden die Lösung, welche sich nach  $\cos nv$  entwickeln läßt, also in der Bezeichnung von *Heine* die periodischen Funktionen erster und zweiter Klasse.

linders einfallen

$$(244) \quad s_a = \sum A_\alpha \Phi_\alpha^a(u) \cdot H_\alpha^a(v).$$

Die Koeffizienten der Entwicklung der einfallenden Welle

$$(245) \quad e^{-iky} = \sum M_\alpha \Xi_\alpha^a(u) \cdot H_\alpha^a(v)$$

können mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingungen (242) berechnet werden und sind als bekannt zu betrachten.

Sucht man jetzt die Grenzbedingungen

$$\left( \text{z. B. } s_i = s_a, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_i = \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_a \text{ im Falle } \perp \right)$$

zu erfüllen, so tritt im Vergleich mit dem Falle des Kreiszyinders eine große Komplikation zutage. Dort traten in allen Reihen die gleichen periodischen Funktionen auf (nämlich die trigonometrischen), man konnte die Faktoren derselben zusammenfassen und gleich Null setzen, was einfache Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten ergab. Anders hier, die Funktionen  $H_\alpha(v)$  hängen vom Parameter  $\alpha$  ab, sind also in (243) und (244) verschieden. Man müßte sie zuerst nach trigonometrischen Funktionen entwickeln und bekäme dann die Bedingungen für die Koeffizienten in Form eines unendlichen Gleichungssystems. Dieser Umstand erschwert die Rechnungen ganz außerordentlich und veranlaßte *Sieger*, sich auf die Betrachtung eines vollkommen leitenden elliptischen Zylinders zu beschränken. Nach (233) sind dann die Grenzbedingungen für  $u = u_0$

$$s = 0 \quad \text{im Falle } \perp,$$

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 0 \quad \text{im Falle } \parallel.$$

Für die Koeffizienten der Reihen (246) ergibt sich daher

$$(246a) \quad A_\alpha \perp = - M_\alpha \left[ \frac{\Xi(u)}{\Phi(u)} \right]_{u=u_0},$$

$$(246b) \quad A_\alpha \parallel = - M_\alpha \left[ \frac{\frac{\partial \Xi(u)}{\partial u}}{\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}} \right]_{u=u_0}.$$

Numerisch hat *Sieger* die Erscheinungen an einem (gegen  $\lambda$ ) schmalen Streifen diskutiert ( $u_0 = 0$ ), und zwar im Falle  $\perp$ , wo man für die Koeffizienten (246a) gut konvergente Ausdrücke hat. Dagegen scheint die Diskussion des Falles  $\parallel$  auf große Schwierigkeiten zu stoßen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Reihe (244) mit genau denselben Koeffizienten wie bei dem vollkommen leitenden Streifen, abgesehen von der einfallenden Welle, auch die Lösung des Beugungsproblems für einen vollkommen leitenden Spalt von derselben Breite

darstellt. Nur sind die Ausdrücke (246a) und (246b) zu vertauschen: (246a) entspricht jetzt dem Falle  $\parallel$ , (246b) dem Falle  $\perp$ . Das in Nr. 36 erwähnte *Babinetsche* Prinzip bleibt also auch in der exakten Theorie mit einer kleinen Modifikation bestehen.

Das Problem des schmalen Spaltes beansprucht einiges Interesse, weil Versuche eine merkwürdige polarisierende Wirkung desselben gezeigt haben. Ein Spalt mit blanken Metallbacken, der gegen die Wellenlänge des durchgehenden Lichtes sehr schmal ist, gibt  $\parallel$ -Polarisation. Bei Verbreiterung des Spaltes kehrt die Polarisation zunächst ihren Sinn um ( $\perp$ ), um bei noch breiterem Spalt überhaupt zu verschwinden.<sup>219a)</sup> Diese Erscheinung hat viel Ähnlichkeit mit der polarisierenden Wirkung von Beugungsgittern, vgl. Nr. 70.

**66. Der parabolische Zylinder.** Die Beugung am parabolischen Zylinder bietet aus dem Grunde einiges Interesse, weil man durch einen solchen die wirklichen Verhältnisse an einem dünnen Schirm gut approximieren kann. Es waren gerade Beobachtungen an dünnen Metallschirmen<sup>220)</sup>, durch welche zum erstenmal ein Einfluß des Profils des beugenden Körpers und seiner Materialeigenschaften auf die Beugungserscheinungen festgestellt wurde, und die *Sommerfeldsche* Theorie (Nr. 59, 60), welche sich auf vollkommen leitende und absolut schwarze Schirme beschränkt, konnte diese Beobachtungen naturgemäß nicht umfassen.

Man benutzt<sup>221)</sup> das System krummliniger Koordinaten, welches durch die komplexe Funktion

$$(247) \quad x + iy = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2$$

oder

$$x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \quad y = \xi\eta$$

vermittelt wird, wobei  $\xi$  und  $\eta$  zwischen den Grenzen

$$-\infty < \xi < +\infty, \quad 0 < \eta < \infty$$

variieren (Fig. 31). Dies ergibt

$$u = \xi, \quad v = \eta, \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{V} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

219\*) *H. Fizeau*, Ann. chim. phys. (3) 63 (1861), p. 385; *H. Ambronn*, Ann. Phys. Chem. 48 (1893), p. 717; *P. Zeemann*, Amsterdam Acad., October 1912; Researches in Magneto-Optics, p. 96, London 1913.

220) *W. Wien*, Ann. Phys. Chem. 28 (1886), p. 117; *G. Gouy*, Ann. d. chim. et phys. (6) 8 (1886), p. 145; *A. Kalaschnikoff*, Journ. russ. phys. Ges. 44 (1912), Heft 3.

221) *P. Epstein*, Über die Beugung an einem dünnen Schirm unter Berücksichtigung des Materialeinflusses. Münchener Diss. 1914.

und führt nach (229) auf die Differentialgleichung

$$(248) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + k^2(\xi^2 + \eta^2) u = 0,$$

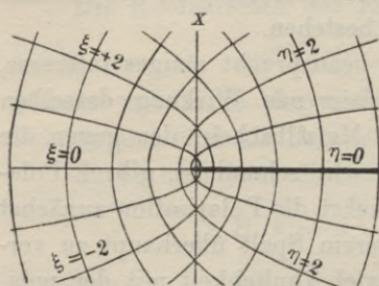


Fig. 31.

welche sich durch den Ansatz

$$s = U(\eta) \cdot V(\xi)$$

in die beiden *Differentialgleichungen des parabolischen Zylinders* zerfallen läßt:

$$(249a, b) \quad \begin{cases} \frac{d^2 U}{d\eta^2} + (k^2 \eta^2 - \beta) U = 0, \\ \frac{d^2 V}{d\xi^2} + (k^2 \xi^2 + \beta) V = 0. \end{cases}$$

Bereits bei *Euler*<sup>222)</sup> findet sich eine Darstellung dieser Funktionen durch bestimmte Integrale, ziemlich weitgehend wurde ihre Theorie von *K. Baer*<sup>223)</sup> entwickelt.

Es bietet hier keine Schwierigkeiten, die geeigneten Werte des Parameters  $\beta$  auszuwählen (vgl. Nr. 65), denn man kann zeigen, daß der Ansatz

$$(250) \quad \beta = 2ik(n + \frac{1}{2}), \quad \text{wo } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ein Funktionensystem  $U_n(\eta)$  und  $V_n(\xi)$  liefert, welches allen Anforderungen genügt<sup>224)</sup> und mit den sogenannten *Hermiteischen Polynomen* identisch ist

$$(251) \quad U_n(\eta) = \frac{e^{-\frac{ik\eta^2}{2}}}{(2ik)^{\frac{n}{2}} n!} \frac{d^n e^{ik\eta^2}}{d\eta^n}, \quad V_n(\xi) = \frac{e^{\frac{ik\xi^2}{2}}}{(2ik)^{\frac{n}{2}} n!} \frac{d^n e^{-ik\xi^2}}{d\xi^n}.$$

Die *Funktionen des parabolischen Zylinders zweiter Art*  $Y_n(\eta)$ , das zweite partikuläre Integral der Gleichung (249a), erhält man in bekannter Weise nach der *Abelschen Methode*. Eine asymptotische Darstellung derselben für  $\eta \gg n$  lautet:

$$(252) \quad Y_n(\eta) = \frac{ie^{-\frac{ik\eta^2}{2}}}{(\sqrt{-2iku})^{n+1}}.$$

Man hat nun für das Innere des Zylinders, der durch die Parabel  $\eta = \eta_0$  begrenzt sein möge, anzusetzen

$$(253) \quad s_i = \sum_0^{\infty} b_n U_n^i(\eta) \cdot V_n^i(\xi),$$

222) *L. Euler*, Inst. calc. integr. Vol. II, cap. X, p. 296. Petropoli 1769.

223) *K. Baer*, Küstriner Programm 1883; vgl. II A 10, Nr. 63 (*Wangerin*).

224) „Vollständige Orthogonalsysteme“ im *Hilbertschen* Sinne.

für das optische Feld im Äußern

$$(254) \quad s_a = e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} + \sum_0^{\infty} a_n Y_n^a(\eta) V_n^a(\xi),$$

während sich die einfallende Welle so darstellt

$$(255) \quad e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} = \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sum_0^{\infty} n! \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} U_n^a(\eta) \cdot V_n^a(\xi).$$

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  sind aus den an der Fläche  $\eta = \eta_0$  geltenden Grenzbedingungen (232) zu berechnen. Die Hauptschwierigkeit macht das Summieren der Reihen, welche so langsam konvergieren, daß es nicht möglich ist, nach einer beschränkten Anzahl von Gliedern abzubrechen. Bei endlicher Leitfähigkeit treten dieselben Komplikationen auf, die in Nr. 65 erwähnt wurden, trotzdem gelingt es, die Verhältnisse auch in diesem Fall qualitativ zu überblicken.

Zunächst gewinnt man auf diesem Wege die *Sommerfeldsche* Lösung (224) für die unendlich dünne vollkommen leitende Halbebene wieder. Die nächste Verallgemeinerung ist ein vollkommen spiegelnder parabolischer Zylinder von sehr geringer endlicher Dicke. Das Zusatzglied, welches in diesem Fall zu (220) hinzukommt, verringert die Amplitude im Falle  $\perp$  und vergrößert sie im Falle  $\parallel$ , so daß das Verhältnis  $\frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}}$  gegen den Ausdruck  $\operatorname{tg} \left( \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$  der Nr. 60 größer wird, in qualitativer Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Schließlich ergibt sich bei endlicher Leitfähigkeit des parabolischen Schirms ein selektiver Effekt. Dieselben Wellenlängen sind bevorzugt, welche von einem Planspiegel aus demselben Material stärker reflektiert werden; diese Selektion ist jedoch äußerst schwach im Falle  $\perp$  und sehr viel stärker im Falle  $\parallel$ . Auch diese Forderungen der Theorie stimmen mit der Beobachtung überein.

**67. Die Kugel. Farben kolloidaler Metallösungen.** Die Berechnung der Beugung an einer Kugel aus beliebigem Material<sup>225)</sup> haben *G. Mie*<sup>226)</sup> und *P. Debye*<sup>227)</sup> durchgeführt. Während der letztere hauptsächlich den Strahlungsdruck auf eine Kugel im Auge hatte, ist in der Arbeit von *Mie* eine eingehende Beschreibung des Beugungsbildes an kleinen Kugeln und der Vergleich der Theorie

225) Von den Arbeiten über vollkommen leitende Kugeln sind die von *J. J. Thomson* (Rec. Res. p 437, 1893, Eigenschwingungen einer Kugel) und *K. Schwarzschild* (München Ber. 1901, p. 293, Strahlungsdruck) hervorzuheben.

226) *G. Mie*, Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 377.

227) *P. Debye*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 57.

mit den an kolloidalen Goldlösungen beobachteten Erscheinungen enthalten.<sup>228) 232)</sup>

Man benutzt räumliche Polarkoordinaten

$$(256) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

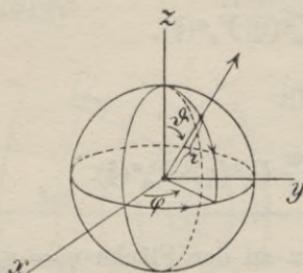


Fig. 32.

und erhält aus (230), da

$$u = r, \quad v = \theta, \quad w = \varphi, \quad U = 1,$$

$$V = \frac{1}{r}, \quad W = \frac{1}{r \sin \theta}$$

$$(257) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) E_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial \sin \theta H_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ \left( \frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right], \\ \left( \frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) E_\theta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right], \\ -\frac{in}{c} H_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial \sin \theta E_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ -\frac{in}{c} H_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right], \\ -\frac{in}{c} H_\varphi &= \frac{1}{r} \cdot \left[ \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right.$$

Mit *P. Debye* können wir die Komponenten von  $E$  und  $H$  aus zwei Potentialen ableiten, welche durch das Verschwinden von  $H_r$  bzw.  $E_r$  charakterisiert sind und deshalb als das *elektrische* Potential  $\Pi_1$  und das *magnetische*  $\Pi_2$  bezeichnet seien. Man kann nämlich den Gleichungen (257) durch den Ansatz genügen

$$(258) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r^2} + k^2 \Pi_1, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{in}{c} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{in}{c} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta}, \\ H_r &= \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r^2} + k^2 \Pi_2, \\ H_\theta &= \left( \frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial \theta}, \\ H_\varphi &= - \left( \frac{in\varepsilon}{c} + \frac{\sigma}{c} \right) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial \varphi}, \end{aligned} \right.$$

228) U. a. *R. Zsigmondy*, Liebigs Ann. 301 (1898), p. 361; Verh. d. deutsch. phys. Ges. 5 (1903), p. 209; Ann. d. Phys. 15 (1904), p. 573; *G. Bredig*, Anorganische Fermente, Leipzig 1901; *F. Kirchner*, Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 239.

wobei sich für  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  die Gleichung ergibt

$$(259) \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi = \Delta \Pi + k^2 \Pi = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist die Doppelreihe

$$(260) \quad \Pi = \sum_0^\infty \sum_0^n r K_n(kr) \cdot P_n^s(\cos \theta) \cdot [A_{n,s} \cos s \varphi + B_{n,s} \sin s \varphi],$$

wo unter  $K_n$  eine von *Heine* eingeführte Funktion verstanden ist<sup>216)</sup>, welche mit den Zylinderfunktionen auf folgende Weise zusammenhängt

$$K_n(kr) = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr);$$

und zwar ist es üblich, die der *Besselschen* proportionale Funktion mit  $\psi_n(kr)$ , die der *Hankelschen* zweiter Art proportionale mit  $\xi_n(kr)$  zu bezeichnen. Die ersteren haben die Eigenschaft, für  $r=0$  endlich zu bleiben (oder zu verschwinden), die letzteren stellen divergente Kugelwellen dar.  $P_n^s(\cos \theta)$  bedeutet die *zugeordnete Kugelfunktion* erster Art<sup>229)</sup> des Argumentes  $\cos \theta$ .  $A_{n,s}$  und  $B_{n,s}$  sind Konstanten. Die Reihe (260) ist so anzusetzen, daß die Grenzbedingungen nach (230)

$$(261) \quad \begin{aligned} (E_\vartheta^e + E_\vartheta)_a &= (E_\vartheta)_i, & (E_\varphi^e + E_\varphi)_a &= (E_\varphi)_i, \\ (H_\vartheta^e + H_\vartheta)_a &= (H_\vartheta)_i, & (H_\varphi^e + H_\varphi)_a &= (H_\varphi)_i \end{aligned}$$

an der Oberfläche der Kugel ( $r=R$ ) befriedigt werden. Durch den Index  $e$  sind die Komponenten der einfallenden Welle gekennzeichnet, welche wir eben, in der negativen  $z$ -Richtung fortschreitend und in der  $yz$ -Ebene polarisiert voraussetzen ( $E_x^e = e^{ik_a z}$ ,  $H_y^e = -e^{ik_a z}$ ). Die beiden Potentiale, welche eine solche Welle darstellen, ergeben sich zu

$$(262) \quad \begin{cases} \Pi_1^e = \frac{1}{2k_a} \sum_1^\infty i^{h-1} \frac{2h+1}{h(h+1)} r \cdot \psi_h(k_a r) \cdot P_h^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ \Pi_2^e = -\frac{1}{2k_a} \sum_1^\infty i^{h-1} \frac{2h+1}{h(h+1)} r \cdot \psi_h(k_a r) \cdot P_h^1(\cos \theta) \sin \varphi. \end{cases}$$

Infolgedessen hat man auch für die Störungspotentiale im Äußern und im Innern der Kugel anzusetzen

$$(263) \quad \begin{aligned} \Pi_1^a &= \sum_1^\infty a_h r \cdot \xi_h(k_a r) \cdot P_h^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi, \\ \Pi_2^a &= \sum_1^\infty p_h r \cdot \xi_h(k_a r) \cdot P_h^1(\cos \theta) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

229) Vgl. II A 10, Nr. 8 (*Wangerin*).

und

$$(264) \quad \begin{aligned} \Pi_1^i &= \sum_1^{\infty} b_h r \cdot \psi_h(k_i r) \cdot P_h^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi, \\ \Pi_2^i &= \sum_1^{\infty} q_h r \cdot \psi_h(k_i r) \cdot P_h^1(\cos \theta) \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Grenzbedingungen (261) gewinnt man getrennte Formeln zur Berechnung der beiden Koeffizientenserien  $a_h$  und  $p_h$ , welche in der obigen (*Mieschen*) Bezeichnungsweise den *elektrischen* und *magnetischen* Anteil des Störungsfeldes charakterisieren. In (gegen  $\lambda$ ) großer Entfernung kann man für  $\xi_h(k_a r)$  den asymptotischen Wert  $\frac{2}{k_a r} e^{i \frac{\pi}{2}(h+1) - i k_a r}$  setzen, woraus für die im Verhältnis zur Intensität der einfallenden Welle gemessenen Intensitäten der beiden Bestandteile des abgebeugten Lichtes, deren elektrische Komponenten in den Richtungen  $\varphi$  bzw.  $\theta$  schwingen, folgt

$$(265) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{J_\theta}{J_e} &= \frac{4 \cos^2 \varphi}{r^2} \left| \sum_1^{\infty} a_h \frac{dP_h^1(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{n}{ck_a} p_h \frac{P_h^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right|^2 \\ \frac{J_\varphi}{J_e} &= \frac{4 \sin^2 \varphi}{r^2} \left| \sum_1^{\infty} a_h \frac{P_h^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{n}{ck_a} p_h \frac{dP_h^1(\cos \theta)}{d\theta} \right|^2 \end{aligned} \right.$$

Die Koeffizienten dieser Reihen nehmen mit der Ordnungszahl um so schneller ab, je kleiner das Verhältnis  $\frac{R}{\lambda}$  ist; auch bei den größeren Kugeln, die in kolloidalen Metallösungen vorkommen (bis zu  $180 \mu\mu$ ), braucht man nur die beiden ersten elektrischen Partialschwingungen ( $a_1, a_2$ ) und die erste magnetische ( $p_1$ ) zu berücksichtigen. Bei sehr feinen Teilchen kommt man dagegen mit der durch  $a_1$  gegebenen ersten elektrischen Partialwelle aus, welche als „*Rayleighsche Strahlung*“ bezeichnet wird, da *Rayleigh* ihre Existenz zuerst theoretisch nachwies (vgl. Nr. 68). Eine Ausnahme bildet die vollkommen leitende Kugel, bei der man auch für kleinste Dimensionen die erste magnetische Schwingung berücksichtigen muß.

Die Strahlungsverhältnisse bei natürlichem einfallenden Licht werden von *Mie* durch Diagramme veranschaulicht. Fig. 33 bezieht sich auf ein unendlich kleines Goldkügelchen; die äußere Kurve schneidet von den Radien Stücke ab, die der Intensität der gesamten Strahlung proportional sind, die inneren Kurven geben ebenso die unpolarisierte Strahlung, das Zwischenstück des Radiusvektors ist

also der polarisierten Strahlung proportional. Die Richtung der einfallenden Welle wird durch die Pfeile angedeutet. Fig. 34 gibt das Strahlungsdiagramm eines sehr groben Goldkügelchens, Symmetrie in bezug auf die  $xy$ -Ebene ist hier nicht mehr vorhanden und das Maximum der Polarisation von  $\theta = 90^\circ$  im Sinne wachsender  $\theta$  verschoben; der Hauptteil der Energie wird in Richtung der einfallenden Welle ausgestrahlt. Die umgekehrte Vorzugsrichtung hat die Energie im Falle einer unendlich kleinen vollkommen leitenden Kugel (Fig. 35), während das Polarisationsmaximum im selben Sinne verschoben ist, und zwar tritt hier bei  $\theta = 120^\circ$  vollkommene Polarisation ein (Thomson'scher Winkel).<sup>225)</sup>

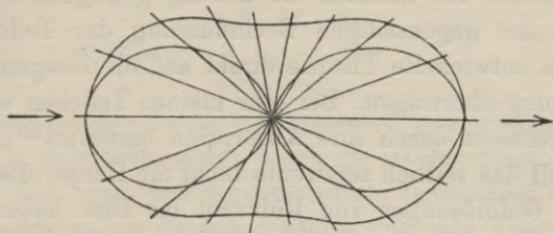


Fig. 33.

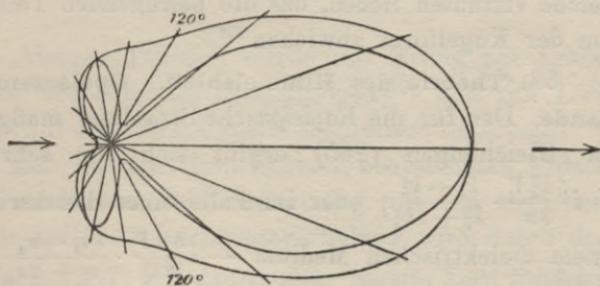


Fig. 34.

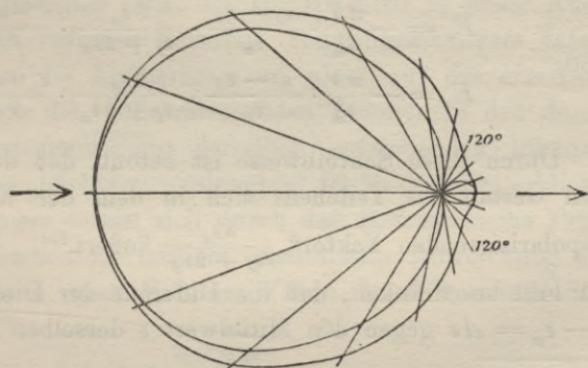


Fig. 35.

Von den übrigen Resultaten sei folgendes hervorgehoben. Mit wachsender Teilchengröße wächst die Gesamtmenge des abgebeugten Lichtes von der Wellenlänge  $\lambda$  zunächst proportional dem Quadrat des Volumens, erreicht aber ein Maximum für einen Wert von  $R$  zwischen  $\frac{\lambda}{8}$  und  $\frac{\lambda}{6}$ , also wenn  $\lambda$  in der Nähe der ersten Eigenschwingung der Kugel<sup>225)</sup> liegt. Infolgedessen wird dieser Vorgang der Lichtzerstreuung vielfach als *optische Resonanz* bezeichnet. Indessen genügt die optische Resonanz bei *vollkommen leitenden* Kugeln nicht, um im

durchgehenden Licht eine bestimmte Farbe kräftig hervorzuheben<sup>230</sup>), und die lebhaften Farben kolloidaler Metallösungen sind nur unter Berücksichtigung der optischen Konstanten der betreffenden Metalle zu erklären. Ist nämlich die Lösung genügend verdünnt, so kann man von der gegenseitigen Beeinflussung der Teilchen absehen und die eben entwickelte Theorie direkt auf die Beugungserscheinungen in der Lösung übertragen. Bei sehr kleinen Teilchen wird die Färbung in der Durchsicht durch ihre Absorption bestimmt<sup>231</sup>), und erst bei größeren spielt das seitlich zerstreute Licht die Hauptrolle, so daß sich die Farbe der Goldlösungen von Rubinrot bis Blau ändert.

Die *Miesche* Theorie wurde von *W. Steubing*<sup>232</sup>) geprüft, es ergab sich eine schöne Übereinstimmung, bis auf einige Erscheinungen, welche vermuten ließen, das die betreffenden Teilchen in Wirklichkeit von der Kugelform abwichen.<sup>233</sup>)

**68. Theorie des Himmelsblau. Opaleszens im kritischen Zustande.** Der für die *Rayleighsche* Strahlung maßgebende Koeffizient  $a_1$  der Gleichungen (265) ergibt sich für sehr kleine Kugeln zu  $-i \frac{3k_a^2 V}{8\pi} \cdot \frac{k_i^2 - k_a^2}{k_i^2 + 2k_a^2}$ , oder im Falle eines dielektrischen Kügelchens in einem dielektrischen Medium  $-i \frac{3\pi V}{2\lambda_a^2} \cdot \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}$ , unter  $V$  das Volumen verstanden. Daher wird das optische Feld der *Rayleighschen* Strahlung

$$(266) \quad \begin{aligned} E_\theta &= -\frac{\pi V}{\lambda_a^2} \cdot \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_a} \cdot \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \cdot \frac{e^{-ik_a r}}{r} \cos \theta \cos \varphi, \\ E_\varphi &= -\frac{\pi V}{\lambda_a^2} \cdot \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_a} \cdot \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \cdot \frac{e^{-ik_a r}}{r} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Durch diese Schreibweise ist betont, daß der Einfluß der speziellen Gestalt des Teilchens sich in dem der Kugel eigentümlichen „depolarisierenden Faktor“  $\frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}$  äußert.<sup>234</sup>) Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß die Differenz der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i - \varepsilon_a = \Delta\varepsilon$  gegen den Mittelwert  $\varepsilon$  derselben sehr klein ist, dann

230) Die entgegengesetzte Anschauung wurde von *F. Ehrenhaft* (Wien Ber. IIa 112 (1903), p. 181; 114 (1905), p. 1115) vertreten.

231) Die Theorie für extrem kleine Teilchen findet sich bereits bei *J. C. Maxwell-Garnett*, Phil. Trans. 203 (1904), p. 385; 205 (1906), p. 237, wobei auch Überlegungen über die gegenseitige Beeinflussung der Teilchen angestellt werden. Vgl. dazu die Versuche von *F. Kirchner* (Anm. 228).

232) *W. Steubing*, Greifswalder Dissertation 1908.

233) Für Silberkügelchen hat *E. Müller* (Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 500) diese Theorie numerisch durchgeführt.

234) Vgl. V 15, Nr. 16 (*Gans*).

wird der depolarisierende Faktor für jede Gestalt nahezu gleich 1, und man erhält für die von beliebig geformten Korpuskeln zerstreuten Intensitäten

$$(267) \quad \begin{aligned} \frac{J_{\theta}}{J_e} &= \frac{\pi^2 V^2 (\Delta \varepsilon)^2}{2 \lambda^4} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \\ \frac{J_{\varphi}}{J_e} &= \frac{\pi^2 V^2 (\Delta \varepsilon)^2}{2 \lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist natürliches einfallendes Licht vorausgesetzt und über alle möglichen Werte von  $\varphi$  gemittelt; unter  $\lambda$  ist die Wellenlänge im *Vakuum* zu verstehen. Man sieht, daß der polarisierte Bestandteil des abgebeugten Lichtes senkrecht zur Einfallrichtung und zum Visionsradius schwingt; vollständige Polarisation tritt für  $\theta = 90^\circ$  ein, im übrigen sind die Strahlungsverhältnisse graphisch durch Fig. 33 auf Seite 517 gegeben.

Die Beugung an kleinen Teilchen wurde mit Erfolg zur Erklärung der blauen Farbe des Himmels herangezogen<sup>235</sup>) und von *Lord Rayleigh* mit Rücksicht auf diese Frage zuerst theoretisch untersucht.<sup>236</sup>) In der Tat befinden sich die am Himmelslicht beobachteten Polarisationsverhältnisse in ziemlicher Übereinstimmung mit den eben dargelegten, und auch die spektrale Intensitätsverteilung wird durch den Faktor  $\frac{1}{\lambda^4}$  der Gleichungen (267) gut dargestellt. Bereits *Lord Rayleigh* hatte es plausibel<sup>237</sup>) gemacht, daß im wesentlichen von den Luftmolekülen selbst abgebeugtes Licht als Himmelsblau in unser Auge gelangt; man gewinnt indessen Resultate von allgemeinerem Interesse<sup>238</sup>)<sup>239</sup>), wenn man die Aufmerksamkeit nicht auf die einzelnen Moleküle lenkt, sondern die lichtzerstreuenden Teilchen in den durch zufällige lokale Zusammenballung derselben entstehenden Inhomogenitäten der Luft, den „Dichteschwankungen“ der Gastheorie, erblickt.

Diese Schwankungen lassen sich durch das *Boltzmannsche* Prinzip<sup>240</sup>) quantitativ erfassen: die mittlere quadratische Abweichung der Dichte eines Mediums in einem Volumen  $V$  von ihrem Durchschnittswert  $\rho_0$  ist nämlich<sup>238</sup>)

$$(268) \quad (\Delta \rho)^2 = \frac{R T \rho_0 \varepsilon_0^2}{N V},$$

235) Vgl. *Tyndalls* Versuche über Lichtzerstreuung an kondensierten Dämpfen (Phil. Mag. 37 (1870), p. 388; 38 (1870), p. 156).

236) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 41 (1871), p. 107, 274, 447; 12 (1881), p. 81; 44 (1897), p. 28.

237) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 47 (1899), p. 375.

238) *M. v. Smoluchowski*, Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 205.

239) *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 1275.

240) *L. Boltzmann*, Wien. Ber. 63 (1871), p. 397; *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 19 (1906), p. 373.

wo  $R$  die Gaskonstante,  $N$  die Molekühlzahl ist, beide auf das Grammolekül bezogen,  $\beta_0$  die der Dichte  $\rho_0$  entsprechende Kompressibilität

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p}.$$

Wir fragen nach der von einem größeren Volumen  $\Phi$  zerstreuten Lichtintensität. Die Lagen der einzelnen Inhomogenitäten (von den Volumina  $V$ ), welche dasselbe erfüllen, sind vollständig regellos verteilt, ebenso wie die Phasen des von ihnen zerstreuten Lichtes. Daher haben wir die Intensitäten (267) einfach über das Volumen  $\Phi$  zu summieren. Es ergibt sich der Faktor  $\sum (\Delta \varepsilon)^2 V^2$ , nach dem *Mosotti-Lorentz*schen Gesetz gilt aber<sup>241)</sup>

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \text{const} \cdot \rho, \quad (\Delta \varepsilon)^2 = \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{9} \cdot \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)^2.$$

Greift man aus der Summe eine Anzahl von Gliedern heraus, welche Inhomogenitäten vom gleichen Volumen entsprechen, so kann man in dieselben den Mittelwert (268) einführen

$$(269) \quad \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{9} \cdot \frac{RT\beta_0}{N} \sum V = \frac{RT\beta_0}{N} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{9} \Phi.$$

Die Kompressibilität  $\beta_0$  wird in der Nähe des kritischen Punktes außerordentlich groß, weshalb auch die in diesem Zustande befindlichen Substanzen eine sehr lebhaft Lichtzerstreuung (Opaleszenz) und und starke Absorption zeigen. Die Absorption in der Schichtdicke  $l$  erfolgt nach dem Gesetz  $J = J_0 e^{-\alpha l}$ , wobei sich der Koeffizient  $\alpha$  aus (267) und (269) zu dem folgenden Ausdruck berechnet<sup>239)</sup>

$$(270) \quad \alpha = \frac{8\pi^3}{27} \frac{RT\beta_0}{N} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{\lambda^4}.$$

Im Spezialfalle der atmosphärischen Luft kann man  $\beta_0 = \frac{1}{p}$  und  $\varepsilon + 2 = 3$  setzen und erhält für die Lichtzerstreuung in derselben<sup>237) 239)</sup>, wenn man unter  $\mathfrak{N}$  die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit versteht,

$$(271) \quad \begin{aligned} \frac{J_\theta}{J_e} &= \frac{\pi^2 \Phi}{2 \mathfrak{N} p} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\lambda^4} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \\ \frac{J_\varphi}{J_c} &= \frac{\pi^2 \Phi}{2 \mathfrak{N} p} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \alpha &= \frac{8\pi^3}{3 \mathfrak{N}} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\lambda^4}. \end{aligned}$$

Die auf Grund dieser Formeln berechnete Luftdurchlässigkeit ist in vorzüglicher Übereinstimmung mit den Resultaten der neuesten atmosphärischen Absorptionsmessungen, soweit sie sich auf *trockene*

241) Vgl. V 14, Nr. 47 (Lorentz).

Luft beziehen<sup>241a)</sup>: einerseits bestätigt sich das Anwachsen der Extinktion mit  $\lambda^{-4}$  bis weit ins Ultraviolette hinein ( $\lambda = 325 \mu\mu$ ), wo die selektive Absorption der Ozonbanden einsetzt; andererseits ergibt die Rechnung unter Zugrundelegung von  $\mathfrak{N} = 2,76 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-8}$  (Planck),  $\varepsilon = 1,000586$  (Klemenčič),  $\frac{8\pi^3}{3\mathfrak{N}}(\varepsilon - 1)^2 = 1,04 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^{-1}$  bei 760 mm und 0° C., während aus den Beobachtungen der Faktor  $1,00 \cdot 10^{-24}$  folgt.

**69. Das Ellipsoid, die kreisrunde Öffnung.** Mit den in Nr. 60 bis 67 aufgezählten Fällen ist die Zahl der Körper, welche bis jetzt exakt auf Grund der *Maxwellschen* Gleichungen behandelt werden konnten, erschöpft. Schon die nächste Verallgemeinerung, das Rotationsellipsoid, bietet sehr große Schwierigkeiten.<sup>242)</sup> Sind jedoch die Dimensionen des beugenden Körpers (oder der Öffnung) klein gegen die Wellenlänge, so kann man durch Anwendung eines von *Lord Rayleigh* eingeführten Kunstgriffs Näherungslösungen erhalten. Seine Methode besteht darin, das Feld in unmittelbarer Umgebung des Körpers als quasistatisch anzusehen und dementsprechend zu berechnen. Handelt es sich z. B. um ein Ellipsoid, so berechnet man dessen elektrische Momente ( $f_x, f_y, f_z$ ) nach den drei Achsen wie in der Elektrostatik, das optische Streuungsfeld in großen Entfernungen ergibt sich dann aus der Superposition der Felder *Hertzscher* Dipole mit den Momenten  $f_x, f_y, f_z$ . Von *Lord Rayleigh*<sup>243)</sup> wurden in dieser Weise die Beugung am Ellipsoid, elliptischen Zylinder und an der kreisrunden Öffnung in einem dünnen vollkommen leitenden Schirm behandelt.<sup>244)</sup> *R. Gans*<sup>245)</sup> hat die Lösungen für rotationsellipsoidische Goldteilchen ausführlich diskutiert. Es ergab sich, daß die Erscheinung schon bei mäßigen Exzentrizitäten erheblich von der für die Kugel berechneten abweicht, so daß die Teilchen in den kolloidalen

241\*) *H. Dember*, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 64 (1912), p. 239; *F. E. Fowle*, Astrophys. Journ. 38 (1913), p. 392; *C. G. Abbot*, Annals of the Astrophys. Observ. of the Smithsonian Inst. Vol. III, Washington 1914; *E. Kron*, Ann. d. Phys. 45 (1914), p. 377. Namentlich die letzte Arbeit hat die Verhältnisse im Ultraviolett geklärt.

242) Ein Versuch, das Rotationsellipsoid zu behandeln, wurde von *K. F. Herzfeld* (Wien. Ber. (IIa) 120 (1911), p. 1587) unternommen.

243) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 43, p. 259; 44 (1897), p. 28; Scientif. Papers, Vol. IV p. 283, 305.

244) *Lord Rayleigh* setzt dabei das Feld eines Dipols als homogene Kugelwelle ( $\frac{e^{ikr}}{r}$ ) an, man gelangt aber zu besserem Anschluß an die exakte Lösung der Nr. 65, wenn man die Schwingungsrichtung der Dipole berücksichtigt.

245) *R. Gans*, Ann. d. Phys. 37 (1912), p. 881; 47 (1915), p. 270.

Goldlösungen von *Mie-Steubing* nicht wesentlich von Kugeln verschieden sein könnten.

70. Das Beugungsgitter. Schon die in Nr. 17 dargestellte elementare Theorie liefert die wichtigsten Züge der Gitterbeugung: die Lage der Maxima und Minima und die Abhängigkeit der Intensität von der Zahl der Gitterstriche. Noch etwas weiter kommt man mit dem *Huyghensschen* Prinzip<sup>246</sup>), welches gestattet, den Einfluß der relativen Breite der leuchtenden Streifen und der Stege zwischen denselben zu berücksichtigen; dieses ist jedoch nur dann anwendbar, wenn die Gitterkonstante gegen die Wellenlänge groß ist (vgl. Nr. 35 und 58). Um aber die Unterschiede der Erscheinungen bei verschiedener Polarisation und die Abhängigkeit der Richtungsfunktion  $\Psi$  (Nr. 17) von der Gestalt und physikalischen Beschaffenheit der Gitterelemente zu erkennen, was für die praktische Konstruktion der Gitter wichtig ist, muß man die wirkliche Verteilung der elektrischen Kräfte an der Gitteroberfläche kennen und berücksichtigen.

Ist die Gitterkonstante klein gegen  $\lambda$ , so ist diese Verteilung näherungsweise die des statischen Feldes (*J. J. Thomson*, *H. Lamb*<sup>64</sup>), vgl. Nr. 69), es tritt dann im durchgehenden und reflektierten Licht nur die ungebeugte Welle nullter Ordnung auf mit einer von der Polarisation stark abhängenden Intensität; bei elektrischen Schwingungen parallel den Streifen wird schon bei geringer Breite derselben beinahe alles reflektiert, bei dazu senkrechter Polarisation nahezu alles durchgelassen. Diese Erscheinung ist als „*Hertz-Effekt*“ von den elektromagnetischen Wellen her bekannt.

Den anderen Grenzfall bildet eine gegen  $\lambda$  große Gitterkonstante; betrachtet man z. B. ein ebenes Gitter, das aus einer Anzahl paralleler zylindrischer Stäbe besteht, so kann man unter den genannten Voraussetzungen das von einem jeden Zylinder herrührende Feld so ansetzen, als ob die anderen nicht vorhanden wären (Nr. 64), und braucht nur über sämtliche Zylinder zu summieren. Für eine endliche Anzahl von Stäben haben *Schäfer und Reiche*<sup>247</sup>) die Erscheinungen in (gegen dessen Abmessungen) großen Entfernungen vom Gitter diskutiert, für ein unendliches Stabgitter *W. v. Ignatowsky*.<sup>248</sup>) Er findet bei dünnen dielektrischen Stäben im Spektrum nullter Ordnung ein Überwiegen des senkrecht zu den Stäben polarisierten Lichtes (*Du-Bois-Effekt*),

246) Außer der in Nr. 17 zitierten Literatur seien die Arbeiten erwähnt: *A. Winkelmann*, Ann. d. Phys. 27 (1908), p. 905; *H. Weisel*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 995; *H. Siedentopf*, Berlin Ber. 1902, p. 711 (Stufenfilmgitter).

247) *Cl. Schäfer und F. Reiche*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 817.

248) *W. v. Ignatowsky*, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 369.

dagegen bei dünnen leitenden Drähten den *Hertzeffekt*. Rechnerisch besitzt die Annahme unendlich vieler Elemente den Vorzug, daß die Erscheinung periodisch sein muß und man sie von vornherein in Form einer *Fourierschen* Reihe ansetzen kann. Daher ist es *v. Ignatowsky* gelungen, weiterzukommen und die gegenseitige Beeinflussung der Gitterstäbe näherungsweise zu berücksichtigen. Er wendet seine Formeln an, um die Erscheinungen an Kupfergittern, wie sie *Rubens* und *Du-Bois*<sup>249)</sup> benutzten, zu diskutieren, und findet, daß mit zunehmender Wellenlänge der *Hertz-Effekt* immer ausgesprochener wird. Die Beobachtung zeigt qualitativ dieselbe Erscheinung, jedoch geht hier das Anwachsen des *Hertzeffektes* erheblich schneller.

Den praktischen Bedürfnissen der Gitterkonstruktion angepaßt sind die Arbeiten von *Lord Rayleigh*.<sup>250)</sup> Es wird die Reflexion und Brechung von ebenen Wellen studiert, welche auf eine regelmäßig gewellte oder gerippte Trennungsfäche zweier Medien einfallen. Für den Ansatz des reflektierten ( $u_r$ ) und gebrochenen ( $u_b$ ) Beugungsbildes benutzt *Rayleigh* die Ergebnisse der elementaren Theorie und fragt nach der Verteilung der Intensität auf die Spektra verschiedener Ordnung, mit anderen Worten, er bestimmt die Richtungsfunktionen  $\Psi$  der Nr. 17 in ihrer Abhängigkeit von der Form der Oberfläche. Die Gleichung der letzteren sei  $z = \xi$ , wo  $\xi$  eine periodische Funktion von  $x$  mit der Periode  $a = \frac{2\pi}{p}$  und von  $y$  unabhängig ist.

Nach dem *Fourierschen* Satze ist

$$(271) \quad \xi = \sum_1^{\infty} j (c_j \cdot \cos jpx + s_j \cdot \sin jpx) = \sum \xi_j e^{ijpx}.$$

Hier bedeutet  $\xi_j = \frac{1}{2}(c_j - is_j)$ ;  $\xi_{-j} = \frac{1}{2}(c_j + is_j)$ , und die Summe  $S$  ist über alle  $j$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  mit Ausnahme von  $j = 0$  erstreckt.

Die einfallende Welle  $u_e$  denken wir uns gleichfalls unabhängig von  $y$  und unter dem Winkel  $\theta_0$  zur Normalen

$$u_e = e^{ik(x \cos \theta_0 + z \sin \theta_0)}.$$

Dann ist nach Nr. 17

$$(272) \quad u_r = e^{ikx \sin \theta_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_h e^{ihpx} e^{-ikz \cos \theta_h},$$

wo

$$a \sin \theta_h - a \sin \theta_0 = h\lambda \quad \text{oder} \quad \sin \theta_h - \sin \theta_0 = \frac{hp}{k},$$

249) *H. Du-Bois* und *H. Rubens*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 243.

250) *Lord Rayleigh*, Theory of Sound II, § 262a. London 1896; Proc. Roy. Soc. A. 79 (1907), p. 399; Scientif. Papers V, p. 388.

und die Welle im zweiten Medium, dessen Brechungsindex  
 $n = \frac{k'}{k}$  sei,

$$u_b = e^{ikx \sin \varphi_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} B_h e^{ihpx} \cdot e^{ik'z \cos \varphi_h}.$$

Es ist  $\varphi_0$  die Richtung der regulär gebrochenen Welle:

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \theta_0} = \frac{1}{n}, \quad \text{und} \quad \sin \varphi_h - \sin \varphi_0 = \frac{hp}{k'}.$$

An der Grenzfläche  $z = \xi$  sind nach (230) die Bedingungen zu erfüllen

$$\text{im Fall } \perp: u_e + u_r = u_b \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} (u_e + u_r) = \frac{\partial u_b}{\partial v},$$

$$\text{im Fall } \parallel: u_e + u_r = u_b \quad \text{und} \quad \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial v} (u_e + u_r) = \frac{1}{k'} \frac{\partial u_b}{\partial v},$$

aus denen sich die Koeffizienten  $A_h$  und  $B_h$  berechnen. Die Rechnung läßt sich durchführen, wenn  $\xi$  klein gegen 1 ist, d. h. wenn die Rinnen der Trennungsfäche eine gegen die Wellenlänge geringe Tiefe haben. Man kann dann die  $u(\xi)$  nach  $\xi$  entwickeln und sukzessive die Glieder von  $A_h$  und  $B_h$  jeder Ordnung in den Koeffizienten  $c$  und  $s$  ermitteln.

Für eine vollkommen leitende gewellte Grenzfläche erhält *Lord Rayleigh* sehr übersichtliche Resultate. Bis auf Glieder zweiter Ordnung in  $\xi_h$  ist nämlich

$$(273) \quad \begin{cases} \text{im Falle } \perp & A_h = -ik\xi_h, \\ \text{im Falle } \parallel & A_h \cos \theta_h = i\xi_h \cdot (k \cos^2 \theta_0 - hp \sin \theta_0). \end{cases}$$

Wenn also in der Reihe (271) ein Glied über die anderen dominiert, so herrscht auch im Beugungsbild das Spektrum der betreffenden Ordnung vor. Im Spezialfall, wenn das Profil der Trennungsfäche eine flache Sinuskurve darstellt ( $\xi = c \cos px$ ), ist das erste Spektrum am kräftigsten und die Amplitude des  $h$ ten Spektrums mit dem Faktor  $c^h$  versehen. Bemerkenswert ist, daß im Falle  $\parallel$  nach (273) für  $\cos \theta_h = 0$ , d. h. bei streifendem Austritt des Spektrums  $h$ ter Ordnung, die Amplitude  $A_h$  nach dieser Theorie unendlich, jedenfalls aber groß wird. Die Diskussion der Glieder höherer Ordnung in  $\xi_h$  zeigt, daß diese Verstärkung der Amplitude  $A_h$  auch dann eintritt, wenn das  $(h+1)$ te Spektrum tangential austritt. *Lord Rayleigh* führte die Diskussion auch für durchsichtige Glasgitter durch und erhielt in bezug auf den Winkel der vollständigen Polarisation der reflektierten Spektren eine gute quantitative Übereinstimmung mit bereits von *Fraunhofer*<sup>251</sup>) veröffentlichten Beobachtungen.

Den Fall endlicher Leitfähigkeit, wie man sie bei den gebräuchlichen *Rowlandschen* Gittern hat, hat *W. Voigt*<sup>252)</sup> sowohl für den Fall einer zu den Gitterfurchen senkrechten als auch einer beliebig geneigten Wellennormalen bis auf Glieder zweiter Ordnung (inklusive) in  $\xi_h$  diskutiert. Es wird von ihm der Umstand hervorgehoben, daß dabei nur so viele der ersten Koeffizienten  $\xi_h$  der Entwicklung (271) in die Resultate eingehen, als aus dem Gitter Spektren austreten, während die höheren Koeffizienten vollständig belanglos sind.<sup>253)</sup> In der Tat entspricht jedes der höheren Glieder der Reihe (271) der Überlagerung eines Sinusgitters von (gegen die Wellenlänge) kleiner Konstante, solche Gitter aber wirken wie eine ebene Fläche. (Vgl. hiermit das entsprechende Resultat von *M. v. Laue* über die Anzahl der Fourier-Koeffizienten in Nr. 44b.) Die Ergebnisse der *Voigtschen* Theorie wurden auf seine Veranlassung durch Beobachtungen an einem *Rowlandschen* Gitter geprüft<sup>254)</sup> und fanden eine zum Teil sehr gute quantitative Bestätigung.

251) *J. Fraunhofer*, Ann. d. Phys. 74 (1823), p. 364; Gesammelte Abhandlungen p. 134, München 1888.

252) *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1911, p. 41; 1912, p. 385.

253) Dies gilt auch für vollkommen leitende und dielektrische Gitter.

254) *B. Pogany*, Ann. d. Phys. 37 (1912), p. 257; *Paule Collet*, Gött. Nachr. (1912), p. 401. Experimentelle Daten über die polarisierende Wirkung von Gittern findet man ferner in den Büchern: *J. Fröhlich*, Polarisation des gebeugten Lichtes, Leipzig 1907 (Glasgitter); *P. Zeemann*, Researches in Magneto-Optics, Kap. VI, London 1913.



(Abgeschlossen im Juli 1915.)



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348766

L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

G. Teubner in

...entwicklungen nach oszill  
...differentialgleichungen der  
...deutschen Mathematiker-Vereinigu  
...den geh. je  $\mathcal{M}$  30.—

...optische Untersuchungen über  
...Beugungserscheinungen. Ein Beit  
...e von Randwertaufgaben. [ca. 100 S.] gr. 8. geb. [Unter der Presse.]

...J., experimentelle Erforschung und theoretische Deutung der all  
...einen Gesetzmäßigkeiten der Polarisation des von Glasgittern ge  
...ugten Lichtes. Sonderabdruck aus den mathematischen und naturwissenschaft  
...chen Berichten aus Ungarn, XXII. Band. Mit 35 Figuren im Text. [XVI u. 438 S.]  
gr. 8. 1907. In Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  18.—

...leichen, A., Lehrbuch der geometrischen Optik. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902.  
geb.  $\mathcal{M}$  20.—

Goldhammer, D., Dispersion und Absorption des Lichtes in ruhenden iso  
tropen Körpern, Theorie und ihre Folgerungen. Mit 28 Figuren. [VI u. 144 S.]  
8. 1913. geb.  $\mathcal{M}$  3.60, in Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  4.—

Kelvin, Lord, Vorlesungen über Molekulardynamik und die Theorie des  
Lichts. Deutsch herausgegeben von B. Weinstein. Mit 132 Figuren. [XVIII u.  
590 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  18.—

Lorentz, H. A., Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena  
of Light and Radiant Heat. A course of lectures delivered in Columbia University,  
New York, in March and April 1906. [IV u. 332 S.] gr. 8. 1909. geh.  $\mathcal{M}$  8.—,  
in Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  9.—

— Theory of Electrons. Deutsche Ausgabe, die Elektronentheorie und  
ihre Anwendung auf die Erscheinungen des Lichtes und der strahlenden Wärme.  
Vorlesungen, gehalten an der Columbia Universität in New York im März und April 1906.  
Übersetzt vom Verfasser. gr. 8. geb. [In Vorbereitung.]

Neumann, Fr., Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeben von E. Dorn.  
Mit Figuren im Text und einem Bildnis Neumanns in Lichtdruck. [VIII u. 310 S.]  
gr. 8. 1885. geh.  $\mathcal{M}$  9.60.

v. Oettingen, A., Elemente der projektiven Dioptrik. Mit 9 Figuren auf 2 Tafeln.  
[27 S.] Lex-8. 1909. geh.  $\mathcal{M}$  2.—

Pockels, Fr., Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln.  
[X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  16.—

v. Rohr, Moritz, die optischen Instrumente. 2., vermehrte und verbesserte Auflage.  
Mit 88 Abbildungen. [VI u. 140 S.] 8. 1911. geh.  $\mathcal{M}$  1.—, in Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  1.25.

Scheffer, W., Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops und seiner Hilfs-  
apparate. Mit 89 Figuren und 3 Blendenblättern. [VII u. 116 S.] gr. 8. 1911.  
geh.  $\mathcal{M}$  2.40, in Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  3.—

Schuster, A., Einführung in die theoretische Optik. Autor. deutsche Ausgabe.  
Übersetzt von H. Koenen. Mit 2 Tafeln und 185 Figuren. [XIV u. 413 S.] gr. 8.  
1907. geh.  $\mathcal{M}$  12.—, in Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  13.—

Steinheil, A., u. E. Voit, Handbuch der angewandten Optik. 3 Bände. I. Band.  
Voraussetzung für die Berechnung optischer Systeme und Anwendung auf einfache  
und achromatische Linsen. Mit Figuren und 7 Tafeln. [VI u. 314 S.] gr. 8. 1891.  
geh.  $\mathcal{M}$  12.— Hierzu besonders: Beilagen. [109 S.] geh.  $\mathcal{M}$  3.— [Fortsetzung  
erscheint nicht.]

Voigt, Woldemar, Magneto- und Elektrooptik. Mit 75 Figuren. [XIV u. 396 S.]  
gr. 8. 1908. In Leinwand geb.  $\mathcal{M}$  14.—

Volkman, P., Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf  
die elastische und die elektromagnetische Anschauung. Mit Figuren im Text. [XVI  
u. 432 S.] gr. 8. 1891. geh.  $\mathcal{M}$  11.20.

Wood, R. W., physikalische Optik. Deutsch von E. Prümm. [ca. 400 S.] gr. 8.  
[U. d. Pr.]

## Erschienene Bände bzw. Hefte

- Band I. Arithmetik und Algebra, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. Analysis, in 3 Teilen. Teil I, in 9 Heften, davon 7 erschienen. Teil II, in Teil III, in 6-7 Heften, davon 2 erschienen.
  - III. Geometrie, in 3 Teilen. Teil I, in 7 Heften, davon 5 erschienen. Teil II, erschienen. Teil III, in 6-7 Heften, davon 4 erschienen.
  - IV. Mechanik, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV II. Teilband in 4-5 Heften, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft in Vor.
  - V. Physik, in 3 Teilen. Teil I, in 6 Heften, davon 5 erschienen. Teil II, in 5 Heften, Teil III, in 6-7 Heften, davon 3 erschienen.
  - VI.1. Geodäsie und Geophysik, in 1 Teilband. I. Hälfte, in 3 Heften, davon 3 erschienen. 6 Heften, davon 3 erschienen.
  - VI.2. Astronomie, in 1 Teilband, in 10-11 Heften, davon 6 erschienen.
  - VII. Geschichte, Philosophie, Didaktik, in Vorbereitung.

## Unter der Presse:

- Band II. Teil 1. Trigonometrische Reihen und Integrale bis 1850. (Schluß.) Von H. Burkhardt (†).
- II. - 3. Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlicher. Redigiert unter Leitung von E. Borel in Paris, bearbeitet von A. Rosenthal in München.
  - III. - 1. Elementar-Geometrie und elementare nichteuklidische Geometrie. (Schluß.) Von M. Zacharias in Berlin. — Dreiecksgeometrie. Von G. Berkhan (†).
  - III. - 2. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. Von G. Castelnuovo in Rom und F. Enriques in Bologna. — Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus. Von G. Castelnuovo in Rom und F. Enriques in Bologna.
  - VI. - 1B. Erdmagnetismus. Von Ad. Schmidt in Potsdam.

## Band V: Physik, in 3 Teilen. Red. von A. Sommerfeld in München.

\* erschienen.

### I. Teil.

Vorwort zu Band V von A. Sommerfeld in München.  
Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 1.

#### A. Einleitung.

- \*1. Maß und Messen: C. Runge in Göttingen.
- \*2. Gravitation: J. Zenneck in München.

#### B. Thermodynamik.

- \*3. Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik: G. H. Bryan in Bangor, Wales.
- \*4. Dissipation der Energie, insbesondere Wärmeleitung: E. W. Hobson in Cambridge und H. Diebelhorst in Branschweig.
- \*5. Technische Wärmetheorie: M. Schröter in München und L. Prandtl in Göttingen.

#### C. Molekularphysik.

- \*6. Chemische Atomistik: F. W. Hinrichsen (†) und L. Mamlock in Berlin nebst zwei Beiträgen von E. Study in Bonn.
- \*7. Kristallographie: Th. Liebisch in Berlin, A. Schoenflies in Frankfurt und O. Mügge in Göttingen.
- \*8. Kinetische Theorie der Materie: L. Boltzmann (†) und J. Nabl in Wien.
- \*9. Kapillarität: H. Minkowski (†)
- \*10. Die Zustandsgleichung: H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom in Leiden.
- 11. Physikalische und Elektrochemie: G. Bredig in Karlsruhe.

### II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 2.

#### D. Elektrizität und Optik.

Physikalische Grundlegung der Elektrizitätslehre.

- \*12. Standpunkt d. Fernwirkung, die Elementargesetze: R. Reiff (†) und A. Sommerfeld in München.
- \*13. Maxwells elektromagnetische Theorie: H. A. Lorentz in Haarlem.

- \*14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie: H. A. Lorentz in Haarlem.

Mathematische Spezialausführungen zur Elektrizitätslehre

- \*15. Elektrostatik u. Magnetostatik: E. Gans in La Plata.
- \*16. Beziehungen zwischen elektrostatischen u. magnetostatischen Zustandsänderungen einerseits und elastischen u. thermischen andererseits: F. Poekels (†).
- \*17. Stationäre und quasi-stationäre Felder: P. Debye in Göttingen.
- \*18. Elektromagnetische Wellen: M. Abraham in Mailand.
- 19. Elektrotechnik: L. Fleischmann in Berlin unter Mitwirkung von K. W. Wagner in Berlin, W. Rogowski in Berlin u. a.
- 20. Relativitätstheorie von A. Sommerfeld in München und A. Einstein in Berlin.

### III. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil 3.

Physikalische Grundlegung der Optik.

- \*21. Ältere Theorie: A. Wangerin in Halle a. S.
- \*22. Elektromagnetische Lichttheorie: W. Wien in Würzburg. Mit einem Beitrag von H. A. Lorentz in Haarlem über magnetooptische Phänomene.
- \*23. Theorie der Strahlung: W. Wien in Würzburg.
- Mathematische Spezialausführungen zur Optik.
- \*24. Wellenoptik: M. v. Laue in Frankfurt a. M. Mit einem Beitrag über spezielle Beugungsprobleme. Von P. S. Epstein in München.
- 25. Kristallophysik auf Grund der Gittertheorie von M. Born in Berlin.
- 26. Strahlenoptik und optische Instrumente: S. Finsterwalder in München.

#### Nachträge

- z. B. Elektronentheorie der Metalle und des Magnetismus, Quantentheorie, Spektralgesetze u. a.

Register zu Band V.

Bisher erschienen:

Teil I Heft 1 (1-3). [160 S.] 1903. n. M. 4.80.	Teil II Heft 1 (12-14). [280 S.] 1904. n. M. 8.—
— I — 2 (4. 5). [159 S.] 1905. n. M. 4.80.	— II — 2 (15. 16). [104 S.] 1907. n. M. 3.—
— I — 3 (6. 7). [170 S.] 1906. n. M. 5.20.	— II — 3 (17. 18). [146 S.] 1910. n. M. 4.60
— I — 4 (8. 9). [121 S.] 1907. n. M. 3.60.	— III — 1 (21. 22). [192 S.] 1909. n. M. 6.—
— I — 5 (10). [332 S.] 1912. n. M. 10.40.	— III — 2 (22. [Schluß] 23) [165 S.] 1909. n. M. 5.—







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**II-348766**

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**10000301669**