Formeln und Lehrsätze

zum Gebrauche

der elliptischen Functionen.

Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor

K. Weierstrass

bearbeitet und herausgegeben

von

H. A. Schwarz.

Vierte Lieferung, enthaltend Bogen 7 und 8.

Göttingen.
Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).
1882.

In der Gleichung [B. 4] hat

für $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 0)$, $(0, 2, 3)$, $(3, 2, 0)$ das obere Zeichen,

für $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(3, 0, 2)$ das untere Zeichen

Geltung. In der Gleichung [B. 6] gilt für $\alpha = 2$ und für $\alpha = 0$ das obere, für $\alpha = 3$ das untere Zeichen.

Bei dem Uebergange von den Functionen $\Theta(u)$ zu den Functionen $\vartheta(v)$ ergibt sich aus den Gleichungen der Tabelle [B.] nach Abtrennung eines Exponentialfactors mit dem Exponenten $\frac{\eta}{2\bar{\omega}}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.*) ein System ganz analoger auf die Functionen $\vartheta(v)$ sich beziehender Gleichungen, welche dieselbe Form haben, wie die Gleichungen der Tabelle [B.].

Die Argumente der in den Gleichungen der Tabelle [A.] auftretenden σ-Functionen hängen ab von vier von einander unabhängigen veränderlichen Grössen. Diese Zahl erniedrigt sich, wenn einem oder zweien der erwähnten Argumente der Werth Null beigelegt wird. Aus den auf diese Weise sich ergebenden speciellen Fällen der in der Tabelle [A.] enthaltenen Formeln, in welchen die Indices λ, μ, ν beliebig permutirt werden können, sind die in den Tabellen [C.] und [D.] zusammengestellten Formeln hergeleitet. Die Argumente der hierbei in Betracht kommenden σ-Functionen sind durch drei von einander unabhängige unbeschränkt veränderliche Grössen u, v, w ausgedrückt, während die Indices λ, μ, ν in irgend einer Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten.

Aus [A. 2]	sind hergeleitet	[C. 1, 16, 19]	und	[D. 1],
„ [A. 3]	„ „	[C. 7, 8, 13, 14, 17, 18]	„	[D. 7, 8],
„ [A. 4]	„ „	[C. 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 20]	„	[D. 2, 5, 6, 9],
„ [A. 5]	„ „	[C. 4]	„	[D. 4],
„ [A. 6]	„ „	[C. 3]	„	[D. 3].

Die Substitutionen, durch welche der Uebergang von einer Gleichung der Tabelle [A.] zu einer Gleichung der Tabelle [C.] oder [D.] vermittelt wird, und die eventuell anzuwendende Permutation der Indices ergeben sich in jedem einzelnen Falle ohne Schwierigkeit aus der Vergleichung der einander entsprechenden Glieder beider Gleichungen.

Die rechten Seiten der Gleichungen [C. 7] und [C. 8] enthalten, vom Vorzeichen abgesehen, dieselben Glieder, wie die rechten Seiten der Gleichungen [C. 13] und [C. 14] und wie die rechten Seiten der Gleichungen [C. 17] und [C. 18].

[C.]

[1] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

[2] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma_\lambda(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\mu(v)$$

[3] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda-e_\nu)(e_\lambda-e_\mu)\,\sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

[4] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = (e_\lambda-e_\mu)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - (e_\lambda-e_\nu)\,\sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\mu(v)$$

[5] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda-e_\mu)\,\sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[6] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - (e_\lambda-e_\mu)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

[7] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[8] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v)$$

[9] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma(v)$$

[10] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\mu(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[11] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[12] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\mu(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma(v)$$

[13] $$\sigma_\nu(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v) + \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v)$$

[14] $$\sigma_\nu(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) + \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[15] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[16] $$\sigma(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[17] $$\sigma(w)\,\sigma_\nu(u+v+w)\,\sigma_\mu(u-v) = \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[18] $$\sigma(w)\,\sigma_\nu(u+v+w)\,\sigma_\mu(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[19] $$\sigma(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[20] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v).$$

Wenn der Grösse w in den Formeln [1—14] der vorstehenden Tabelle der Werth Null beigelegt wird, so ergeben sich die in der Tabelle [D.] zusammengestellten Formeln.

[D.]

[1] $$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma^2 u\,\sigma_\lambda^2 v - \sigma_\lambda^2 u\,\sigma^2 v$$

[2] $$(e_\nu - e_\mu)\,\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma_\mu^2 u\,\sigma_\nu^2 v - \sigma_\nu^2 u\,\sigma_\mu^2 v$$

[3] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda^2 u\,\sigma_\lambda^2 v - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v$$

[4] $$(e_\nu - e_\mu)\,\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma_\nu^2 u\,\sigma_\nu^2 v - (e_\lambda - e_\nu)\,\sigma_\mu^2 u\,\sigma_\mu^2 v$$

[5] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu^2 u\,\sigma_\lambda^2 v - (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma^2 u\,\sigma_\nu^2 v$$

[6] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda^2 u\,\sigma_\mu^2 v - (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma_\nu^2 u\,\sigma^2 v$$

[7] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma_\lambda u\,\sigma u\,\sigma_\mu v\,\sigma_\nu v - \sigma_\mu u\,\sigma_\nu u\,\sigma_\lambda v\,\sigma v$$

[8] $$\sigma(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda u\,\sigma u\,\sigma_\mu v\,\sigma_\nu v + \sigma_\mu u\,\sigma_\nu u\,\sigma_\lambda v\,\sigma v$$

[9] $$\sigma_\mu(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda u\,\sigma_\mu u\,\sigma_\lambda v\,\sigma_\mu v - (e_\mu - e_\lambda)\,\sigma u\,\sigma_\nu u\,\sigma v\,\sigma_\nu v.$$

Aus den in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Formeln ergeben sich auf sehr einfache Weise die für die Quotienten zweier σ-Functionen geltenden Additionstheoreme.

Man erhält beispielsweise durch Verbindung von [D. 8] mit [D. 3], indem der Factor $\sigma_\lambda(u-v)$ bei der Division fortfällt, $\frac{\sigma(u+v)}{\sigma_\lambda(u+v)}$ rational ausgedrückt durch

$$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u},\ \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u},\ \frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u},\ \frac{\sigma v}{\sigma_\lambda v},\ \frac{\sigma_\mu v}{\sigma_\lambda v},\ \frac{\sigma_\nu v}{\sigma_\lambda v}.$$

Andere Ausdrücke für die Grösse $\frac{\sigma(u+v)}{\sigma_\lambda(u+v)}$ erhält man durch Verbindung von [D. 8] mit [D. 4], [D. 5] und [D. 6], von [D. 8] mit [D. 9] und nachfolgende Vertauschung von λ und μ, endlich durch Verbindung von [D. 1] und [D. 2] mit [D. 7].

Analogerweise erhält man verschiedene Ausdrücke für die Grösse $\frac{\sigma_\mu(u+v)}{\sigma_\lambda(u+v)}$ durch Verbindung von [D. 9] mit [D. 3], [D. 4], [D. 5] und [D. 6], oder indem man mittelst [D. 7] $\sigma_\mu(u+v)\,\sigma(u-v)$ und $\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma(u-v)$ berechnet und aus den erhaltenen Grössen den Quotienten bildet, oder endlich, indem man mittelst [D. 9] $\sigma_\mu(u+v)\,\sigma_\nu(u-v)$ und $\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\nu(u-v)$ berechnet und aus den erhaltenen Grössen den Quotienten bildet.

Die Functionen $E(u)$, $Z(u)$, $\Omega(u)$, $\Theta(u)$, $H(u)$, $\Pi(u,a)$ Jacobi's.

39.

Die Functionen, welche Jacobi mit $E(u)$, $Z(u)$, $\Omega(u)$, $\Theta(u)$, $H(u)$, $\Pi(u, a)$ bezeichnet hat, sind erklärt durch folgende Gleichungen:

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du, \qquad \text{Jacobi's Gesammelte Werke Bd. I. S. 299.}$$

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} u, \qquad \text{S. 187.}$$

$$\Omega(u) = e^{\int_0^u E(u)\,du}, \qquad \text{S. 300.}$$

$$\Theta(u) = \Theta(0) e^{\int_0^u Z(u)\,du}, \quad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \qquad \begin{cases}\text{S. 198.}\\ \text{S. 231.}\end{cases}$$

$$H(u) = \frac{1}{i} e^{\frac{(2u+K'i)}{4K}\pi i}\, \Theta(u+K'i), \qquad \begin{cases}\text{S. 224.}\\ \text{S. 226.}\end{cases}$$

$$\Pi(u, a) = k^2 \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + E(a)\cdot u. \qquad \begin{cases}\text{S. 197.}\\ \text{S. 305.}\end{cases}$$

Zur Vereinfachung der nachstehenden Formeln, sowie zur Erzielung grösserer Uebereinstimmung derselben mit den Formeln des Art. 26 empfiehlt es sich, die von Jacobi mit u, beziehungsweise mit a, bezeichneten Argumente der vorstehend erklärten Functionen mit $\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u$, $\sqrt{e_1 - e_3}\cdot a$ zu bezeichnen. Es ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$E(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} + e_1 u\right),$$

$$Z(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} - \frac{\eta}{\omega} u\right),$$

$$\Omega(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} \sigma_3 u,$$

$$\Theta(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_1-e_2}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_3 u = \vartheta_0(v|\tau),$$

$$H(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\, \sqrt[8]{G}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma u = \vartheta_1(v|\tau),$$

$$\Pi(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, \sqrt{e_1-e_3}\cdot a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma_3(u-a)}{\sigma_3(u+a)} + \frac{\sigma_3' a}{\sigma_3 a} u.$$

Hierbei ist Folgendes zu bemerken:

Bei der Definition der betrachteten sechs Functionen können die von Jacobi mit K, K' bezeichneten Grössen als bekannt angenommen werden. Der reelle Bestandtheil des Quotienten $\frac{K'}{K}$ hat stets einen positiven Werth. Der Werth der mit $\sqrt{e_1-e_3}$ bezeichneten Grösse kann beliebig gewählt werden.

Die Grössen ω, ω', v, τ, h sind durch die Gleichungen

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}},\quad \omega' = \frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}},\quad v = \frac{u}{2\omega},\quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{K'i}{K},\quad h = e^{\tau\pi i}$$

bestimmt. Zur Bestimmung der Grössen

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[8]{G},\qquad \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2},\qquad \eta$$

dienen die Gleichungen (1.), (4.), (13.) des Art. 35, in welchen $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\tilde{\omega} = \omega$, $\tilde{\eta} = \eta$ zu setzen ist.

Nach Potenzen des Moduls k fortschreitende Reihenentwickelungen für die Grössen K, K', h.

40.

Unter Zugrundelegung der im Art. 27 getroffenen Festsetzungen möge jetzt angenommen werden, dass der Modul k dem absoluten Betrage nach kleiner ist als 1.

Unter dieser Voraussetzung gelten, wenn der Werth der unendlichen Reihe

$$(1.)\qquad 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6+\cdots$$

mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet und zur Abkürzung

$$(2.)\qquad 1 = \mathfrak{K}_0,\quad 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 = \mathfrak{K}_1,\quad 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 = \mathfrak{K}_2,\ \ldots$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$(3.)\quad K = \frac{\pi}{2}\mathfrak{K},\quad K' = \mathfrak{K}\log\mathrm{nat}\frac{4}{k} - 2\left[\frac{1}{1.2}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_0)+\frac{1}{3.4}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1)+\frac{1}{5.6}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2)+\cdots\right].$$

Dem natürlichen Logarithmus ist hierbei sein Hauptwerth*) beizulegen.

---

*) Unter dem Hauptwerthe des natürlichen Logarithmus einer Grösse x, welche mit Ausnahme der reellen negativen Werthe jeden complexen Werth annehmen kann, wird hier und im Folgenden

Weil die Grösse K nicht gleich Null werden kann, da der reelle Bestandtheil derselben stets einen positiven Werth hat, so ist auch die Grösse $2\log\operatorname{nat}\frac{4}{k} - \frac{K'\pi}{K}$ für alle Werthe von k, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1, durch eine nach Potenzen der Grösse k mit ganzzahligen positiven Exponenten fortschreitende Reihenentwickelung darstellbar. Die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Potenzreihe sind rationale positive Zahlen.

Es ergibt sich

$$(4.)\qquad -\frac{K'\pi}{K} = 2\log\operatorname{nat}\frac{k}{4} + \frac{1}{2}k^2 + \frac{13}{2^6}k^4 + \frac{23}{2^6.3}k^6 + \cdots$$

In Folge dieser Reihenentwickelung ist auch die Grösse $h = e^{-\frac{K'\pi}{K}}$ und jede Potenz derselben, deren Exponent eine positive Zahl ist, für alle Werthe des Moduls k, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als 1, durch eine nach Potenzen der Grösse k fortschreitende Reihe darstellbar; die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Reihen sind positive Zahlen und die Summe derselben ist für jede dieser Reihen gleich 1.

Insbesondere ergeben sich folgende Reihenentwickelungen:

$$(5.)\qquad h = \frac{1}{16}k^2 + \frac{1}{32}k^4 + \frac{21}{1024}k^6 + \frac{31}{2048}k^8 + \cdots,$$

$$(6.)\qquad h^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{k}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{13} + \cdots$$

Der Wurzelgrösse $\sqrt{k}$ ist derjenige ihrer beiden Werthe beizulegen, dessen reeller Bestandtheil positiv ist.

Wenn von der Reihe für die Grösse $h^{\frac{1}{4}}$ das Anfangsglied allein, oder nur die zwei, drei, vier ersten Glieder in Rechnung gezogen werden, so ist der begangene Fehler dem absoluten Betrage nach beziehlich kleiner als

$$(1-\tfrac{1}{2})(\sqrt{k})^5,\quad (1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{2^5})(\sqrt{k})^9,\quad (1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{2^5}-\tfrac{15}{2^9})(\sqrt{k})^{13},\quad (1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{2^5}-\tfrac{15}{2^9}-\tfrac{150}{2^{13}})(\sqrt{k})^{17},$$

mithin kleiner als

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{k})^5,\qquad \tfrac{7}{16}(\sqrt{k})^9,\qquad \tfrac{209}{512}(\sqrt{k})^{13},\qquad \tfrac{1597}{4096}(\sqrt{k})^{17}.$$

---

derjenige Werth des natürlichen Logarithmus der Grösse x verstanden, dessen imaginärer Bestandtheil dem absoluten Betrage nach kleiner ist als π.

Unter derselben auf die Veränderlichkeit der Grösse x sich beziehenden Einschränkung soll für beliebige Werthe des Exponenten m unter dem Hauptwerthe der Potenz x^m der Werth $e^{m\log\operatorname{nat}x}$ verstanden werden, vorausgesetzt dass dem natürlichen Logarithmus sein Hauptwerth beigelegt wird.

Entwickelung der Grösse h nach Potenzen der Grösse l.

41.

Die in dem Art. 27 enthaltenen Definitionen und Lehrsätze bleiben bestehen, wenn an die Stelle von e_1, e_2, e_3 beziehlich e_λ, e_μ, e_ν gesetzt wird, wobei die Indices λ, μ, ν in irgend einer Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Hierbei muss indess die Bedingung aufrecht erhalten bleiben, dass, falls die den drei Grössen e_λ, e_μ, e_ν bei der geometrischen Darstellung der complexen Grössen entsprechenden Punkte in gerader Linie liegen, e_μ dem mittleren dieser drei Punkte entspricht.

Für jede unter der angegebenen Bedingung zulässige Permutation der Indices sind daher dem Inhalte des Art. 27 zufolge zwei Grössen k, k', folglich auch zwei Grössen K, K' eindeutig bestimmt. Aus den letzteren Grössen ergibt sich, sobald über den der Quadratwurzel $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$ beizulegenden Werth eine Entscheidung getroffen ist, ein bestimmtes primitives Periodenpaar $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ des Argumentes der Function $\wp u$, für welches die Gleichungen

$$(1.) \qquad \wp(\omega_\lambda) = e_\lambda, \qquad \wp(\omega_\lambda + \omega_\nu) = e_\mu, \qquad \wp(\omega_\nu) = e_\nu$$

bestehen. Hierbei ist zu bemerken, dass die Gesammtheit der drei Grössen ω_λ, $\omega_\mu = \omega_\lambda + \omega_\nu$, ω_ν für jede der zulässigen Permutationen der Indices eine andere ist.

Nachdem eine bestimmte Permutation λ, μ, ν der Indices 1, 2, 3 ausgewählt worden ist, möge ein Werth der Wurzelgrösse $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}$ beliebig fixirt und das Quadrat desselben mit $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$ bezeichnet werden.

Es mögen ferner $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$ diejenigen Werthe dieser Wurzelgrössen bezeichnen, welche unter der Voraussetzung, dass den beiden Potenzen mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ ihr Hauptwerth beigelegt wird, durch die Gleichungen

$$(2.) \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} = \sqrt{k} = \left(\frac{e_\mu - e_\nu}{e_\lambda - e_\nu}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} = \sqrt{k'} = \left(\frac{e_\lambda - e_\mu}{e_\lambda - e_\nu}\right)^{\frac{1}{4}}$$

erklärt sind.

Die Grössen ω_λ und ω_ν seien durch die Gleichungen

$$(3.) \qquad \omega_\lambda = \frac{K}{\sqrt{e_\lambda - e_\nu}}, \qquad \omega_\nu = \frac{K'i}{\sqrt{e_\lambda - e_\nu}}$$

bestimmt.

Wird hierauf

$$\tilde{\omega} = \omega_\lambda, \qquad \tilde{\omega}' = \omega_\nu, \qquad \tau = \frac{\omega_\nu}{\omega_\lambda}, \qquad h = e^{\tau\pi i}$$

gesetzt, so gelten für die erklärten Wurzelgrössen die Gleichungen des Art. 35.

Für die in diesen Gleichungen vorkommende Grösse $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ ergibt sich hierbei der Werth $\frac{1}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ und zwar ist der Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ derjenige ihrer beiden Werthe beizulegen, dessen reeller Bestandtheil positiv ist.

Die Grössen e_λ, e_μ, e_ν können als veränderlich betrachtet werden, mit der Einschränkung, dass keine der beiden Grössen k^2, k'^2 negativ werden darf. Wenn nun ferner die Veränderlichkeit der Grössen e_λ, e_μ, e_ν vorübergehend in der Weise beschränkt wird, dass der absolute Betrag der Grösse k^2 kleiner bleibt als 1, so finden die im vorhergehenden Art. enthaltenen Entwickelungen Anwendung. Die rechte Seite der Gleichung (9.) des Art. 35 wird daher, wenn man für $h^{\frac{1}{4}}$ die Reihe

$$(4.)\qquad h^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{k}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{13} + \cdots \qquad \text{vergl. Art. 40 (6.)}$$

und für die Potenzen von $h^{\frac{1}{4}}$ die aus dieser Reihe durch Potenzerhebung sich ergebenden Reihen setzt, identisch in $\sqrt{k}$ übergehen.

Hieraus folgt, dass die der Gleichung (9.) des Art. 35 analoge Gleichung (11.) desselben Art.

$$l = \frac{2h + 2h^9 + \cdots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots}$$

identisch befriedigt wird, wenn für h die Reihe

$$(5.)\qquad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots$$

gesetzt wird, vorausgesetzt dass diese Reihe convergirt. Diese Folgerung ist von der Voraussetzung, dass die Grösse k^2 dem absoluten Betrage nach kleiner sei als 1, nicht abhängig, denn die Convergenz der Reihe (5.) ist allein an die Bedingung geknüpft, dass die Grösse

$$(6.)\qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

dem absoluten Betrage nach den Werth 1 nicht überschreitet. Diese Bedingung aber ist den getroffenen Festsetzungen zufolge stets erfüllt und zwar stimmt der aus den Gleichungen (5.) und (6.) sich ergebende Werth der Grösse h, wenn die Werthe der Wurzelgrössen in der angegebenen Weise bestimmt werden, mit dem Werthe $h = e^{\tau\pi i}$ überein.

Ist die Wahl der Indices λ, μ, ν so getroffen, dass von den drei Grössen $e_\lambda - e_\nu$, $e_\lambda - e_\mu$, $e_\mu - e_\nu$ die erste den grössten, die letzte den kleinsten absoluten Betrag hat, so ist die Grösse l dem absoluten Betrage nach nicht grösser als $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$, also kleiner als $\frac{2}{15}$, während die Grösse h dem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als $e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\pi}$. Unter dieser Voraussetzung ist, wenn die drei ersten Glieder der nach Potenzen der Grösse l fortschreitenden Reihenentwickelung für die Grösse h in Rechnung gezogen werden, der absolute Betrag des begangenen Fehlers kleiner als eine Einheit der dreizehnten Decimalstelle.

In den meisten Fällen der Anwendung wird es daher, wenn die Indices λ, μ, ν passend gewählt sind, ausreichend sein, die zwei oder drei ersten Glieder der angegebenen Reihenentwickelung allein zu berücksichtigen.

Die Reihenentwickelung (5.) kann indess für numerische Rechnungen in vielen Fällen auch dann noch mit grossem Nutzen angewendet werden, wenn die Grösse l dem absoluten Betrage nach nicht den in jedem einzelnen Falle erreichbaren kleinstmöglichen Werth hat.

Wenn nämlich der absolute Betrag der Grösse l nicht grösser ist als $\frac{1}{2}$, so ist der absolute Betrag der Summe aller auf die zwei ersten, beziehungsweise auf die drei ersten Glieder der Reihenentwickelung für die Grösse h noch folgenden Glieder bereits kleiner als

$$\tfrac{1}{30}\,l^9, \quad \text{beziehungsweise} \quad \tfrac{1}{50}\,l^{13},$$

und hieraus folgt die Richtigkeit der vorhergehenden Behauptung.

Wenn der Werth der Grösse h gefunden ist, so ergibt sich der Werth der Grösse $\sqrt{\frac{2\omega_\lambda}{\pi}}$ durch die Gleichung (8.) des Art. 35 und der Werth von ω_ν mittelst der Gleichung

$$\omega_\nu = \frac{\omega_\lambda i}{\pi} \log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h}\right). \tag{7.}$$

Dem natürlichen Logarithmus ist sein Hauptwerth beizulegen.

Uebergang von dem primitiven Periodenpaare $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ zu dem Periodenpaare $(2\omega_\nu, -2\omega_\lambda)$.

42.

Die Entwickelungen des vorhergehenden Art. ergeben sich aus den Gleichungen des Art. 35 unter der Voraussetzung, dass $\tilde{\omega} = \omega_\lambda$, $\tilde{\omega}' = \omega_\nu$ gesetzt wird. Analoge Entwickelungen ergeben sich mittelst analoger Schlüsse, wenn $\tilde{\omega} = \omega_\nu$, $\tilde{\omega}' = -\omega_\lambda$ gesetzt wird.

Bei dem Uebergange von dem primitiven Periodenpaare $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ zu dem primitiven Periodenpaare $(2\omega_\nu, -2\omega_\lambda)$ bleiben nämlich die beiden Invarianten g_2, g_3 und die Grösse e_μ ungeändert, während an die Stelle der Grössen

$$e_\lambda, \; e_\nu, \; k, \; k', \; K, \; K', \quad \tau$$

beziehlich die Grössen

$$e_\nu, \; e_\lambda, \; k', \; k, \; K', \; K, \; -\frac{1}{\tau}$$

treten. Diejenigen Grössen, welche bei diesem Uebergange an die Stelle der Grössen h, l zu setzen sind, sollen mit h', l' bezeichnet werden.

Wenn nun die Wurzelgrössen $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$, $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}$ in der Weise fixirt werden, wie im vorhergehenden Art. angegeben ist, so können die Wurzelgrössen, welche aus diesen durch die Vertauschung von e_λ und e_ν sich ergeben, durch die Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{aligned} \sqrt{e_\nu - e_\lambda} &= -i\sqrt{e_\lambda - e_\nu}, & \sqrt[4]{e_\nu - e_\lambda} &= \sqrt{-i}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}, \\ \sqrt[4]{e_\nu - e_\mu} &= \sqrt{-i}\,\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}, & \sqrt[4]{e_\mu - e_\lambda} &= \sqrt{-i}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} \end{aligned}$$

erklärt werden. Der Wurzelgrösse $\sqrt{-i}$ ist hierbei irgend einer ihrer beiden Werthe, aber jedesmal derselbe, beizulegen.

Es bestehen hiernach die Gleichungen

$$(2.) \quad l' = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}, \qquad h' = \frac{l'}{2} + 2\left(\frac{l'}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l'}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l'}{2}\right)^{13} + \cdots,$$

welche zur Berechnung der Grösse h' angewendet werden können. Aus der Gleichung (8.) des Art. 35 ergibt sich

$$(3.) \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}} = \frac{1+2h'+2h'^4+2h'^9+\cdots}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}(1+2h'^4+2h'^{16}+\cdots) = \frac{1}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}}\sqrt{\frac{2K'}{\pi}}.$$

Hierbei ist der Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{2K'}{\pi}}$ derjenige ihrer beiden Werthe beizulegen, dessen reeller Bestandtheil positiv ist.

Die Gleichung (3.) kann zur Berechnung der Grösse ω_ν angewendet werden; zur Berechnung der Grösse ω_λ ergibt sich dann die Gleichung

$$(4.)\qquad \omega_\lambda = \frac{\omega_\nu}{\pi i}\log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h'}\right).$$

Dem natürlichen Logarithmus ist sein Hauptwerth beizulegen. Die beiden Grössen h und h' sind durch die Gleichung

$$(5.)\qquad \log\operatorname{nat} h\cdot\log\operatorname{nat} h' = \pi^2$$

mit einander verbunden.

Aus den Gleichungen (1—4.) und (13—16.) des Art. 35 erhält man, wenn $\frac{\sigma'\omega_\nu}{\sigma\omega_\nu} = \eta_\nu$ gesetzt wird, die folgenden:

$$(6.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[8]{G} = \frac{i}{2\omega_\nu}\vartheta_1'\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\pi i}{\omega_\nu}h'^{\frac{1}{4}}(1-3h'^{1.2}+5h'^{2.3}-7h'^{3.4}+\cdots),$$

$$(7.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu} = \vartheta_2\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = 2h'^{\frac{1}{4}}(1+h'^{1.2}+h'^{2.3}+h'^{3.4}+\cdots),$$

$$(8.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu} = \vartheta_3\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = 1+2h'+2h'^4+2h'^9+\cdots,$$

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu} = \vartheta_0\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = 1-2h'+2h'^4-2h'^9+\cdots,$$

$$(10.)\qquad 2\eta_\nu\omega_\nu = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_1'\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)} = -2e_\lambda\omega_\nu^2-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_0''\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_0\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)},$$

$$(11.)\qquad 2\eta_\nu\omega_\nu = -2e_\mu\omega_\nu^2-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)} = -2e_\nu\omega_\nu^2-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_2\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Aus den Gleichungen (15—18.) des Art. 34 ergeben sich in Uebereinstimmung mit den bezüglichen Formeln des Art. 37 folgende Gleichungen:

$$v = \frac{u}{2\omega_\nu},\qquad \tau = \frac{\omega_\nu}{\omega_\lambda},\qquad h' = e^{-\frac{\pi i}{\tau}},$$

$$(12.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\, i\vartheta_1\left(v\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = i\Theta_1(u\,|\,\omega_\nu,\ -\omega_\lambda),$$

$$(13.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,\vartheta_0\left(v\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = \Theta_0(u\,|\,\omega_\nu,\ -\omega_\lambda),$$

$$(14.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,\vartheta_3\left(v\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = \Theta_3(u\,|\,\omega_\nu,\ -\omega_\lambda),$$

$$(15.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,\vartheta_2\left(v\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = \Theta_2(u\,|\,\omega_\nu,\ -\omega_\lambda).$$

Uebergang von dem primitiven Periodenpaare $(2\omega_\lambda,\ 2\omega_\nu)$ zu dem Periodenpaare $(2\omega_\lambda,\ 2\omega_\nu \pm 2\omega_\lambda)$.

43.

Bei der Vertauschung der beiden Grössen e_μ und e_ν gehen die Grössen l und h beziehlich in $-l$ und $-h$ über, während die Grösse $\tilde{\omega} = \omega_\lambda$ den Gleichungen (7.) und (8.) des Art. 35 zufolge unverändert bleibt. An die Stelle des primitiven Periodenpaares $(2\omega_\lambda,\ 2\omega_\nu)$ tritt hierbei das primitive Periodenpaar $(2\omega_\lambda,\ 2\omega_\nu \pm 2\omega_\lambda)$ und zwar gilt das obere oder das untere Zeichen, jenachdem die Grösse k'^2 eine complexe Grösse mit positiv oder negativ imaginärem Bestandtheile ist.

Formeln zur Berechnung der Perioden und Ausdrücke der σ-Functionen durch ϑ-Reihen für den Fall reeller Invarianten.

44.

Wenn die Grössen e_λ, e_μ, e_ν bekannt sind, so sind die in den Artikeln 34, 35, 41 und 42 enthaltenen Formeln ausreichend sowohl um ein primitives Periodenpaar $(2\omega_\lambda,\ 2\omega_\nu)$ des Argumentes der Function $\wp u$ und die Grössen $\eta_\lambda = \frac{\sigma'\omega_\lambda}{\sigma\omega_\lambda}$, $\eta_\nu = \frac{\sigma'\omega_\nu}{\sigma\omega_\nu}$ zu berechnen, als auch um die vier σ-Functionen durch solche ϑ-Reihen auszudrücken, bei denen die Grösse h, beziehungsweise die Grösse h', dem absoluten Betrage nach einen möglichst kleinen Werth hat.

Zur Erleichterung des Gebrauchs dieser Formeln sollen dieselben für diejenigen Fälle, in welchen die Invarianten g_2, g_3 reelle Werthe haben, mit den durch diese Specialisirung herbeigeführten Modificationen in den Artikeln 45 und 46 nochmals zusammengestellt werden.

45.

Haben die beiden Invarianten g_2 und g_3 reelle Werthe und ist die Discriminante $G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$ der kubischen Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ positiv, so sind alle drei Wurzeln derselben reell.

Es bezeichne e_1 die im algebraischen Sinne grösste Wurzel dieser Gleichung, e_2 die mittlere, e_3 die kleinste Wurzel derselben. Den Wurzelgrössen $\sqrt{e_1-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_2}$, $\sqrt[4]{e_2-e_3}$ lege man ihre positiven Werthe bei.

Man setze

$$(1.)\quad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\ k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3};\quad \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}},\ \omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}};\quad \frac{\sigma'\omega_1}{\sigma\omega_1} = \eta_1,\ \frac{\sigma'\omega_3}{\sigma\omega_3} = \eta_3.$$

$$(2.)\quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1},\quad h = e^{\tau\pi i},\quad h_1 = h' = e^{-\frac{\pi i}{\tau}};\quad v = \frac{u}{2\omega_1},\quad v_1 = \frac{ui}{2\omega_3}.$$

Die Grössen ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$, $\frac{\tau}{i}$, h, h_1 haben positive Werthe.

Nach diesen Festsetzungen ergibt sich, wenn $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 3$, $\tilde{\omega} = \omega_1$, $\tilde{\omega}' = \omega_3$ gesetzt wird, dem Inhalte der Artikel 34, 35 und 41 entsprechend das System von Gleichungen

$$(3.)\quad l = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}},\quad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots,$$

$$(4.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots),\quad \omega_3 = \frac{\omega_1 i}{\pi}\log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h}\right),$$

$$(5.)\quad 2\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - 7^3h^{12} + \cdots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots},\quad \eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \tfrac{1}{2}\pi i,$$

$$(6.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = 2h^{\frac{1}{4}}(1 + h^2 + h^6 + h^{12} + \cdots),$$

$$(7.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots,$$

$$(8.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots,$$

$$(9.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{G} = \frac{\pi}{\omega_1}h^{\frac{1}{4}}(1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^9 + \cdots).$$

$$(10.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_1(v\,|\,\tau),$$

$$(11.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_2(v\,|\,\tau),$$

$$(12.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_3(v\,|\,\tau),$$

$$(13.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_0(v\,|\,\tau).$$

$$(14.)\qquad \vartheta_0(v\,|\,\tau) = 1-2h\cos 2v\pi+2h^4\cos 4v\pi-2h^9\cos 6v\pi+\cdots,$$

$$(15.)\qquad \vartheta_1(v\,|\,\tau) = 2h^{\frac{1}{4}}\sin v\pi-2h^{\frac{9}{4}}\sin 3v\pi+2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi-\cdots,$$

$$(16.)\qquad \vartheta_2(v\,|\,\tau) = 2h^{\frac{1}{4}}\cos v\pi+2h^{\frac{9}{4}}\cos 3v\pi+2h^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi+\cdots,$$

$$(17.)\qquad \vartheta_3(v\,|\,\tau) = 1+2h\cos 2v\pi+2h^4\cos 4v\pi+2h^9\cos 6v\pi+\cdots$$

Wenn $e_2-e_3 \lesseqgtr e_1-e_2$, also $e_2 \lesseqgtr 0$ ist, so ist $l \lesseqgtr \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}$, $h \lesseqgtr e^{-\pi}$.

Wird dagegen $\lambda=3$, $\mu=2$, $\nu=1$, $\tilde{\omega}=\omega_3$, $\tilde{\omega}'=-\omega_1$ gesetzt, so ergibt sich entsprechend dem Inhalte des Art. 42 folgendes System von Gleichungen

$$(18.)\qquad l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}},\qquad h_1 = \frac{l_1}{2}+2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5+15\left(\frac{l_1}{2}\right)^9+150\left(\frac{l_1}{2}\right)^{13}+\cdots,$$

$$(19.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}}(1+2h_1^4+2h_1^{16}+\cdots),\qquad \omega_1 = \frac{\omega_3}{\pi i}\log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right),$$

$$(20.)\qquad 2\eta_3\omega_3 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h_1^2+5^3h_1^6-7^3h_1^{12}+\cdots}{1-3h_1^2+5h_1^6-7h_1^{12}+\cdots},\qquad \eta_1\omega_3-\omega_1\eta_3 = \tfrac{1}{2}\pi i,$$

$$(21.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = 2h_1^{\frac{1}{4}}(1+h_1^2+h_1^6+h_1^{12}+\cdots),$$

$$(22.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = 1+2h_1+2h_1^4+2h_1^9+\cdots,$$

$$(23.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = 1-2h_1+2h_1^4-2h_1^9+\cdots,$$

$$(24.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[8]{G} = \frac{\pi i}{\omega_3}h_1^{\frac{1}{4}}(1-3h_1^2+5h_1^6-7h_1^{12}+\cdots).$$

$$(25.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = \frac{1}{i}e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\vartheta_1\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right),$$

$$(26.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\vartheta_0\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right),$$

$$(27.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\vartheta_3\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right),$$

$$(28.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\vartheta_2\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right).$$

$$(29.)\qquad \vartheta_0\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = 1-h_1(e^{2v_1\pi}+e^{-2v_1\pi})+h_1^4(e^{4v_1\pi}+e^{-4v_1\pi})-h_1^9(e^{6v_1\pi}+e^{-6v_1\pi})+\cdots,$$

$$(30.)\qquad \frac{1}{i}\vartheta_1\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = h_1^{\frac{1}{4}}(e^{v_1\pi}-e^{-v_1\pi})-h_1^{\frac{9}{4}}(e^{3v_1\pi}-e^{-3v_1\pi})+h_1^{\frac{25}{4}}(e^{5v_1\pi}-e^{-5v_1\pi})-\cdots,$$

$$(31.)\qquad \vartheta_2\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = h_1^{\frac{1}{4}}(e^{v_1\pi}+e^{-v_1\pi})+h_1^{\frac{9}{4}}(e^{3v_1\pi}+e^{-3v_1\pi})+h_1^{\frac{25}{4}}(e^{5v_1\pi}+e^{-5v_1\pi})+\cdots;$$

$$(32.)\qquad \vartheta_3\left(v_1 i\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = 1+h_1(e^{2v_1\pi}+e^{-2v_1\pi})+h_1^4(e^{4v_1\pi}+e^{-4v_1\pi})+h_1^9(e^{6v_1\pi}+e^{-6v_1\pi})+\cdots$$

Wenn $e_2-e_3 \lesseqgtr e_1-e_2$, also $e_2 \lesseqgtr 0$ ist, so ist $l_1 \gtreqless \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}$, $h_1 \gtreqless e^{-\pi}$.

Die Grösse $e^{-\pi} = 0{,}04321\,..$ ist kleiner als $\frac{1}{23}$.

Wenn g_3 positiv, also e_2 negativ ist, so empfiehlt sich der Gebrauch der Gleichungen (3—17.), ist aber g_3 negativ, also e_2 positiv, so empfiehlt sich der Gebrauch der Gleichungen (18—32.), weil in dem ersten Falle h kleiner ist als h_1, während im zweiten Falle h_1 kleiner ist als h.

46.

Haben die beiden Invarianten g_2 und g_3 reelle Werthe und ist die Discriminante $G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$ der kubischen Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ negativ, so ist nur eine Wurzel derselben reell, während die beiden anderen Wurzeln conjugirte complexe Werthe haben.

Es bezeichne e_2 die reelle Wurzel dieser Gleichung; die beiden complexen Wurzeln derselben seien in der Weise mit e_1 und e_3 bezeichnet, dass die Differenz $e_1 - e_3$ positiv imaginär ist.

Es seien ρ und ψ zwei positive Grössen, für welche die Gleichungen

$$e_2-e_3 = \rho e^{\psi i}, \qquad e_2-e_1 = \rho e^{-\psi i}, \qquad (0<\psi<\pi)$$

bestehen. Allen in den folgenden Gleichungen vorkommenden Wurzelgrössen ist ihr Hauptwerth beizulegen.

Man setze

$$(1.)\quad \begin{cases} k^2 = \dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad k'^2 = \dfrac{e_2-e_1}{e_3-e_1}; \quad \omega_1 = \dfrac{e^{-\frac{1}{4}\pi i} K}{\sqrt{i(e_3-e_1)}}, \quad \omega_3 = \dfrac{e^{\frac{1}{4}\pi i} K'}{\sqrt{i(e_3-e_1)}}, \\ \omega_2 = \omega_3 + \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_3 - \omega_1; \quad \dfrac{\sigma' \omega_2}{\sigma \omega_2} = \eta_2, \quad \dfrac{\sigma' \omega_2'}{\sigma \omega_2'} = \eta_2'. \end{cases}$$

$$(2.)\quad \tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_2}; \quad h_2 = e^{\frac{1}{2}\tau'\pi i}, \quad h_3 = e^{-\frac{\pi i}{2\tau'}}; \quad v_2 = \frac{u}{2\omega_2}, \quad v_3 = \frac{ui}{2\omega_2'}.$$

Die Grössen ω_2, $\frac{\omega_2'}{i}$, $\frac{\tau'}{i}$, h_2, h_3 haben positive Werthe.

Nach diesen Festsetzungen ergibt sich, wenn $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 3$, $\tilde{\omega} = \omega_2$, $\tilde{\omega}' = \omega_3 = \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_2'$, $l = il_2$, $h = ih_2$ gesetzt wird, dem Inhalte der Artikel 34, 35 und 41 entsprechend das System von Gleichungen

$$(3.)\quad l_2 = \frac{1}{i}\,\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3} - \sqrt[4]{e_2-e_1}}{\sqrt[4]{e_2-e_3} + \sqrt[4]{e_2-e_1}} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{4}, \qquad h_2 = \frac{l_2}{2} + 2\left(\frac{l_2}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_2}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_2}{2}\right)^{13} + \cdots,$$

$$(4.)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\omega_2}{\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{e_2-e_3} + \sqrt[4]{e_2-e_1}}\,(1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \cdots), \qquad \omega_2' = \dfrac{2\omega_2 i}{\pi} \log\operatorname{nat}\left(\dfrac{1}{h_2}\right), \\ \omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_2', \qquad \omega_3 = \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_2', \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} 2\eta_2\omega_2 = \dfrac{\pi^2}{6}\,\dfrac{1 + 3^3 h_2^2 - 5^3 h_2^6 - 7^3 h_2^{12} + \cdots}{1 + 3h_2^2 - 5h_2^6 - 7h_2^{12} + \cdots}, \qquad \eta_2\omega_2' - \omega_2\eta_2' = \pi i, \\ \eta_1 = \frac{1}{2}\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_2', \qquad \eta_3 = \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_2', \end{cases}$$

$$(6.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{i(e_3-e_1)} = 2h_2^{\frac{1}{4}}(1 - h_2^2 - h_2^6 + h_2^{12} + \cdots),$$

$$(7.)\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\left(\sqrt[4]{e_2-e_3} + \sqrt[4]{e_2-e_1}\right) = 1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \cdots,$$

$$(8.)\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\left(\sqrt[4]{e_2-e_3} - \sqrt[4]{e_2-e_1}\right) = 2i(h_2 + h_2^9 + h_2^{25} + \cdots),$$

$$(9.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[8]{-G} = \frac{\pi}{\omega_2}\,h_2^{\frac{1}{4}}(1 + 3h_2^2 - 5h_2^6 - 7h_2^{12} + \cdots).$$

C. F. GAUSS W

HERAUSGEGEBEN VON DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT

AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band:

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis 12 Mark.

II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.

Die Besitzer des ersten Abdruckes von Band II. können die beim zweiten Abdrucke hinzugekommenen Zusätze als „Nachtrag zum ersten Abdrucke des zweiten Bandes" zum Preise von 1 Mark beziehen.

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.

IV. WAHRSCHEINLICHKEITS - RECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis 15 Mark.

V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis 15 Mark.

VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN. 1874. Preis 20 Mark.

Die Entnahme von einzelnen Bänden bezw. des vollständigen Werkes erfolgt gegen Baarzahlung von der K. Universitäts-Casse in Göttingen, welche nach wie vor den Vertrieb besorgt.

Versendungen nach auswärts erfolgen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn die Preiszahlung durch Postnachnahme gewünscht wird und zulässig ist; sonst sind wegen der für Werthsendungen erforderlichen festeren Verpackung pro Band 60 Pfennig Emballagekosten mehr zu zahlen.

Göttingen im Mai 1881.

GAUSS-DENKMÜNZE.

Die K. Gesellschaft hat zur Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von C. F. Gauss durch Herrn Münzmedailleur H. F. Brehmer in Hannover eine Denkmünze von 70 Millimeter Durchmesser in bronzirtem Kupfer herstellen lassen. Sie enthält den Kopf von Gauss und die auf ihn sowie auf die Feier sich beziehende Inschrift. Um dieses Kunstwerk allgemeiner zugänglich zu machen, hat die Gesellschaft verfügt, dass es zu dem Preise von fünf Mark von der K. Universitäts-Casse zu Göttingen bezogen werden kann, von Auswärtigen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn Postnachnahme des Preises erfolgen kann.