Formeln und Lehrsätze

zum Gebrauche

der elliptischen Functionen.

Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor

K. Weierstrass

bearbeitet und herausgegeben

von

H. A. Schwarz.

Erste Lieferung, enthaltend Bogen 1 und 2.

Göttingen.
Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).
1881.

Allgemeine Lehrsätze betreffend diejenigen analytischen Functionen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen.

1.

Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ des Argumentes u die Eigenschaft besitzt, dass zwischen den zu je drei Werthen des Argumentes

$$u, \qquad v, \qquad u+v$$

gehörenden Functionswerthen

$$\varphi(u), \qquad \varphi(v), \qquad \varphi(u+v)$$

eine algebraische Gleichung besteht, deren Coefficienten von u und v unabhängig sind, so sagt man, dass für diese Function ein algebraisches Additionstheorem besteht, oder dass diese Function ein algebraisches Additionstheorem besitzt.

Jede analytische Function $\varphi(u)$, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, hat die Eigenschaft, dass zwischen der Function und ihrer in Bezug auf u genommenen ersten Ableitung $\varphi'(u)$ eine algebraische Gleichung besteht, deren Coefficienten von dem Argumente u unabhängig sind.

Der Bereich des Argumentes einer solchen Function kann in jedem Falle auf alle endlichen Werthe ausgedehnt werden, ohne dass die Function aufhört, den Charakter einer algebraischen Function zu besitzen; denn jede analytische Function $\varphi(u)$, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, ist Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen des Argumentes u sind und für alle endlichen Werthe desselben den Charakter rationaler Functionen besitzen. Es kann also das Argument dieser Functionen nur eine im Unendlichen liegende Grenzstelle haben.

Eine analytische Function $\varphi(u)$, für welche ein algebraisches Additionstheorem besteht, ist

entweder I., eine algebraische Function von u,

oder II., wenn mit ω eine passend gewählte Constante bezeichnet wird, eine algebraische Function der Exponentialfunction $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$,

oder III., eine algebraische Function einer Function $\wp u = s$, welche, wenn mit g_2 und g_3 zwei passend gewählte Constanten bezeichnet werden, durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

und die Bedingung $\wp(0) = \infty$ bestimmt werden kann.

Die beiden ersten Fälle sind als specielle Fälle im dritten enthalten: der erste, wenn g_2 und g_3 einzeln den Werth Null haben, der zweite, wenn $g_2^3 - 27 g_3^2$ gleich Null ist.

2.

Unter den analytischen Functionen eines Argumentes u, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, sind diejenigen ausgezeichnet, welche für alle endlichen Werthe des Argumentes den Charakter ganzer oder gebrochener rationaler Functionen haben, welche daher eindeutige Functionen ihres unbeschränkt veränderlichen Argumentes sind.

Alle eindeutigen analytischen Functionen $\varphi(u)$, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, haben die Eigenschaft, dass $\varphi(u+v)$ rational ausdrückbar ist durch die Werthe $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und die Werthe der ersten Ableitungen $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$.

Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ die Eigenschaft besitzt, dass $\varphi(u+v)$ rational ausdrückbar ist durch $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$, so ist diese Function eine eindeutige Function ihres unbeschränkt veränderlichen Argumentes, welche für alle endlichen Werthe desselben den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen Function hat.

Es gilt auch der Satz: Wenn eine eindeutige analytische Function $\varphi(u)$ die Eigenschaft hat, dass zwischen der Function und ihrer ersten Ableitung $\varphi'(u)$ eine algebraische Gleichung besteht, deren Coefficienten von dem Argumente nicht abhängen, so besitzt diese Function ein algebraisches Additionstheorem.

Eine eindeutige analytische Function $\varphi(u)$, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, ist

entweder I., eine rationale Function von u,

oder II., eine rationale Function einer Exponentialfunction $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$,

oder III., eine rationale Function einer Function $\wp u$ und ihrer ersten Ableitung $\wp' u$.

Die beiden ersten Fälle sind wiederum als specielle Fälle im dritten enthalten.

3.

Jede transcendente eindeutige analytische Function, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, ist nothwendig eine periodische, und zwar entweder eine einfach periodische oder eine doppelt periodische Function.

1. Wenn alle Perioden des Argumentes der Function als positive oder negative ganzzahlige Vielfache einer und derselben Periode 2ω dargestellt werden können, so heisst die Function einfach periodisch. Die Grösse 2ω heisst primitive Periode.

2. Wenn eine periodische eindeutige analytische Function nicht im erklärten Sinne einfach periodisch ist und wenn dieselbe sich nicht auf eine Constante reducirt, so ist es auf unendlich mannigfaltige Weise möglich, zwei Perioden 2ω und $2\omega'$ des Argumentes der Function derart auszuwählen, dass alle übrigen Perioden durch Addition und Subtraction aus diesen beiden zusammengesetzt werden können. In diesem Falle wird die Function doppelt periodisch genannt und jedes System von zwei Perioden 2ω, $2\omega'$, welche die angegebene Eigenschaft haben, heisst ein primitives Periodenpaar.

Der imaginäre Bestandtheil des aus den zwei Perioden $2\omega'$ und 2ω eines primitiven Periodenpaares $(2\omega, 2\omega')$ gebildeten Quotienten $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ ist stets von Null verschieden und zwar kann vorausgesetzt werden, ohne dass die Allgemeinheit der Untersuchung hierdurch wesentlich beschränkt wird, dass der reelle Bestandtheil des Quotienten $\frac{\omega'}{\omega i}$, welcher in der Folge mit $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ bezeichnet werden soll, einen positiven Werth hat.

Zwei Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ sollen aequivalent genannt werden, wenn die Gesammtheit aller derjenigen Grössen, welche durch Addition und Subtraction ganzzahlig aus den Perioden des einen Paares gebildet sind, übereinstimmt mit der Gesammtheit aller auf analoge Weise aus den Perioden des anderen Paares gebildeten Grössen.

Damit zwei Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ aequivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass zwischen den Perioden beider Paare Gleichungen von der Form

$$2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\tilde{\omega}' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

bestehen, in welchen p, q, p', q' ganze positive oder negative der Bedingung

$$pq' - qp' = \pm 1$$

genügende Zahlen, einschliesslich der Null, bedeuten.

Die beiden Grössen

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\right) \quad \text{und} \quad (pq'-qp')\,\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

haben dasselbe Vorzeichen.

Durch geeignete Bestimmung der Zahlen p, q, p', q' kann stets erreicht werden, dass

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\right) \geqq \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

4.

Der allgemeinste Fall der eindeutigen analytischen Functionen, für welche ein algebraisches Additionstheorem besteht, wird gebildet von den eindeutigen doppelt periodischen Functionen, welche für alle endlichen Werthe des Argumentes den Charakter rationaler Functionen besitzen, deren Argument also nur *eine* im Unendlichen liegende *wesentlich singuläre Stelle* hat. Diese Functionen werden im weiteren Sinne *elliptische Functionen* genannt.

Wenn in dem Folgenden von einer elliptischen Function die Rede ist, so ist stillschweigend immer eine *eindeutige* elliptische Function gemeint.

Es sei $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar, so sind alle Perioden in der Formel $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ enthalten, in welcher jeder der beiden Zahlen μ und μ' alle ganzzahligen positiven und negativen Werthe, Null eingeschlossen, beizulegen sind.

Zwei Werthe des Argumentes heissen congruent oder incongruent, jenachdem die Differenz derselben eine Periode ist oder nicht.

Ein Periodenparallelogramm des Argumentes u einer elliptischen Function, für welches $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar ist, wird analytisch definirt durch die Gesammtheit aller Werthe, welche in der Formel

$$u = u_0 + 2t\omega + 2t'\omega'$$

enthalten sind, falls jeder der beiden veränderlichen Grössen t, t' alle reellen Werthe zwischen 0 und 1 (0 eingeschlossen, 1 ausgeschlossen) beigelegt werden.

Unter dem Grade einer elliptischen Function versteht man die Zahl, welche angibt, wie oft diese Function innerhalb eines Periodenparallelogramms unendlich gross wird; hierbei ist jede Stelle, an welcher die Function unendlich gross wird, so oft zu zählen, als die Ordnungszahl des Unendlichgrosswerdens an dieser Stelle anzeigt.

Es gibt keine elliptische Function ersten Grades.

Die Function σu.

5.

Die einfachste analytische Function, welche für alle endlichen Werthe des Argumentes u den Charakter einer ganzen Function besitzt und die Eigenschaft hat, für $u = 0$ sowie für alle diesem Werthe congruenten Werthe $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ von der ersten Ordnung unendlich klein zu werden, wird gegeben durch die Formel

$$(1.)\qquad \sigma u = u \prod_w{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \qquad \begin{pmatrix} \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \infty \\ w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \text{ausgenommen } w = 0 \end{pmatrix}$$

in welcher der Grösse w alle in dem Ausdrucke $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ enthaltenen Werthe, mit Ausnahme*) des Werthes $w = 0$, beizulegen sind. Hierbei wird vorausgesetzt, dass der reelle Bestandtheil der Grösse $\frac{\omega'}{\omega i}$ einen von Null verschiedenen und zwar positiven Werth hat.

Aus der obigen Definition ergibt sich, dass $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ ist.

---

*) An diese Ausnahme wird in den bezüglichen Formeln durch einen dem Product- oder Summenzeichen folgenden Accent (′) erinnert.

Es bestehen ferner die Gleichungen

$$\sigma(0) = 0,\ \sigma'(0) = 1,\ \sigma''(0) = 0,\ \sigma'''(0) = 0. \tag{2.}$$

Die Function σu ist durch eine nach Potenzen der Grösse u mit ganzzahligen positiven Exponenten fortschreitende Reihe darstellbar, welche für alle endlichen Werthe von u convergent ist.

Die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Reihe sind ganze Functionen zweier Grössen g_2 und g_3, welche durch die Gleichungen

$$g_2 = 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot \sum_w' \frac{1}{w^4},\quad g_3 = 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot \sum_w' \frac{1}{w^6} \tag{3.}$$

bestimmt sind. Auch in diesen Gleichungen sind der Grösse w alle in dem Ausdrucke $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ enthaltenen Werthe, mit Ausnahme des Werthes $w = 0$, beizulegen.

Die Grössen g_2, g_3 heissen die zu der betrachteten σ-Function

$$\sigma u = \sigma(u|\omega,\omega') = \sigma(u; g_2, g_3) \tag{4.}$$

gehörenden Invarianten.

Wird mit m irgend eine von Null verschiedene reelle oder complexe Grösse bezeichnet, so besteht die Gleichung

$$\sigma(u|\omega,\omega') = \sigma(u; g_2, g_3) = m\sigma\left(\frac{u}{m}\middle|\frac{\omega}{m},\frac{\omega'}{m}\right) = m\sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right). \tag{5.}$$

Für alle endlichen Werthe des Argumentes u und der Invarianten g_2 und g_3 besitzt die Function $\sigma(u; g_2, g_3)$ als Function der drei unbeschränkt veränderlichen Grössen u, g_2, g_3 betrachtet den Charakter einer ganzen Function.

Es ergibt sich

$$\sigma u = u + * - \frac{g_2 u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7.3^2.5^2.7.11} - \cdots \tag{6.}$$

Die Function $\sigma(u; g_2, g_3)$ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} = 12 g_3 \frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma, \tag{7.}$$

aus welcher sich, wenn

$$\sigma u = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\cdot\left(\frac{g_2}{2}\right)^{\mathfrak{m}}\left(2g_3\right)^{\mathfrak{n}}\cdot\frac{u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}}{(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1)!} \qquad (\mathfrak{m},\mathfrak{n} = 0,1,2,3\cdots\infty) \tag{8.}$$

gesetzt wird, zur Berechnung der ganzzahligen Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ die Recursionsformel

(9.) $$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = 3(\mathfrak{m}+1)a_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1} + \frac{16}{3}(\mathfrak{n}+1)a_{\mathfrak{m}-2,\mathfrak{n}+1} - \frac{1}{3}(2\mathfrak{m}+3\mathfrak{n}-1)(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}-1)a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}$$

ergibt. Dem Coefficienten $a_{0,0}$ ist der Werth 1, dagegen denjenigen Coefficienten, für welche einer der beiden Indices einen negativen Werth erhält, der Werth 0 beizulegen.

Die Werthe der Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, für welche die Summe $4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1$ die Zahl 35 nicht überschreitet, sind in folgender Tabelle enthalten.

(10.)

$u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{n}$	$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$
u^1	0	0	+1
u^5	1	0	−1
u^7	0	1	−3
u^9	2	0	−9
u^{11}	1	1	−18
u^{13}	0	2	−54
	3	0	+69
u^{15}	2	1	+513
u^{17}	4	0	+321
	1	2	+4968
u^{19}	0	3	+14904
	3	1	+33588
u^{21}	2	2	+257580
	5	0	+160839
u^{23}	1	3	+502200
	4	1	+2808945
u^{25}	0	4	+1506600
	3	2	+20019960
	6	0	+1416951
u^{27}	2	3	+162100440
	5	1	−41843142
u^{29}	1	4	+796330440
	4	2	−376375410
	7	0	−388946691
u^{31}	0	5	+2388991320
	3	3	−9465715080
	6	1	−6519779667
u^{33}	2	4	−144916218720
	5	2	−210469286736
	8	0	+25514578881
u^{35}	1	5	−1289959784640
	4	3	−4582619446320
	7	1	−485174610648

Darstellung der Function $\mathfrak{S}u$ durch einfach unendliche Producte.

6.

Für unendlich grosse Werthe von $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ ergibt sich

(1.) $$\mathfrak{S}u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \cdot \frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega},$$

denn es besteht, wenn bei der Bildung der unendlichen Producte der Zahl n alle ganzzahligen positiven Werthe beigelegt werden, die Gleichung

(2.) $$\sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) = \frac{\pi}{2\omega}u\prod_n\left(1-\frac{u}{2n\omega}\right)e^{\frac{u}{2n\omega}}\prod_n\left(1+\frac{u}{2n\omega}\right)e^{-\frac{u}{2n\omega}}.$$

Mittelst der Function sinus kann die Function σu auf verschiedene Weise als ein einfach unendliches Product dargestellt werden.

Es ergibt sich nämlich

$$(3.)\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\cdot e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\prod_n\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega'-u)\cdot\sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega'+u)}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)}\cdot e^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)}\cdot\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\right\}$$

und, wenn mit η die Grösse

$$(4.)\qquad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6}+\sum_n\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)}\right\}$$

bezeichnet wird,

$$(5.)\qquad \sigma u = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega}\prod_n\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)}\right).$$

Zur Abkürzung soll

$$(6.)\qquad \frac{u}{2\omega}=v,\quad e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}=e^{v\pi i}=z;\qquad \frac{\omega'}{\omega}=\tau,\quad e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}=e^{\tau\pi i}=h$$

gesetzt werden. Der reelle Bestandtheil der Grösse $\tau\pi i$ ist in Folge der bezüglich des Vorzeichens der Grösse $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ getroffenen Festsetzung negativ; der absolute Betrag der Grösse h ist also kleiner als 1.

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen ergeben sich die Gleichungen

$$(7.)\qquad \sigma u = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\frac{\sin(n\tau-v)\pi}{\sin n\tau\pi}e^{-v\pi i}\prod_n\frac{\sin(n\tau+v)\pi}{\sin n\tau\pi}e^{v\pi i}$$

$$(8.)\qquad = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_n\frac{1-h^{2n}z^{-2}}{1-h^{2n}}\prod_n\frac{1-h^{2n}z^2}{1-h^{2n}}$$

$$(9.)\qquad = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\cdot\sin v\pi\prod_n\frac{1-2h^{2n}\cos 2v\pi+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}.$$

$$(10.)\qquad 2\eta\omega = \pi^2\left[\frac{1}{6}-\sum_n\frac{4h^{2n}}{(1-h^{2n})^2}\right].$$

Vermehrung des Argumentes der Function σu um eine Periode.

7.

Zwischen $\sigma(u)$ und $\sigma(u+2\omega)$ besteht die Gleichung

(1.) $\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$, aus welcher sich $\eta = \dfrac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$

ergibt. Bei der Vertauschung des Periodenpaares $(2\omega, 2\omega')$ mit dem Periodenpaar $(2\omega', -2\omega)$ bleibt die Function σu ungeändert und es ergibt sich in Folge dessen analog den obigen Gleichungen

(2.) $$\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u), \qquad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Für die Aenderung des Argumentes um eine beliebige Periode gilt die Gleichung

(3.) $$\sigma(u+2p\omega+2q\omega') = (-1)^{pq+p+q}e^{2(p\eta+q\eta')(u+p\omega+q\omega')}\sigma(u),$$

oder, wenn $p\omega+q\omega' = \tilde{\omega}$, $p\eta+q\eta' = \tilde{\eta}$ gesetzt wird,

(4.) $$\sigma(u+2\tilde{\omega}) = \mp e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma(u),$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, jenachdem die Grösse $\sigma(\tilde{\omega})$ einen von Null verschiedenen Werth hat oder gleich Null ist.

Zwischen den vier Grössen $\omega, \omega', \eta, \eta'$ besteht die Relation

(5.) $\eta\omega' - \omega\eta' = +\dfrac{\pi i}{2}$, wenn $\mathfrak{R}\left(\dfrac{\omega'}{\omega i}\right)$ einen positiven Werth hat;

dagegen ist

(5*.) $\eta\omega' - \omega\eta' = -\dfrac{\pi i}{2}$, wenn, entgegen der getroffenen Voraussetzung,

$\mathfrak{R}\left(\dfrac{\omega'}{\omega i}\right)$ einen negativen Werth hat.

Die Function $\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}$.

8.

Für die Function $\dfrac{d}{du}\log\sigma(u) = \dfrac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ gelten die Gleichungen

(1.) $$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta, \qquad \frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta',$$
$$\frac{\sigma'(u+2\tilde{\omega})}{\sigma(u+2\tilde{\omega})} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\tilde{\eta}.$$

Wenn $\omega+\omega'=\omega''$, $\eta+\eta'=\eta''$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$(2.)\qquad \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')}=\eta''.$$

Für die Umgebung des Werthes $u=0$ gilt die Reihenentwickelung

$$(3.)\quad \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+*-\frac{g_2}{2^2.3.5}u^3-\frac{g_3}{2^2.5.7}u^5-\frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7}u^7-\frac{g_2g_3}{2^4.3.5.7.11}u^9-\cdots,$$

während die Ausdrücke

$$(4.)\qquad \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum_w'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right)\qquad \left(\begin{matrix} w=2\mu\omega+2\mu'\omega' \\ \text{ausgenommen } w=0\end{matrix}\right)$$

$$(5.)\qquad =\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\sum_n\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')-i\right)+\sum_n\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')+i\right)\right\}$$
$$(n=1,2,3\ldots\infty)$$

für alle endlichen Werthe des Argumentes Geltung haben.

Die Function $\wp u$.

9.

Mit der Function σu ist die Function $\wp u=\wp(u|\omega,\omega')=\wp(u;g_2,g_3)$ durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \wp u=-\frac{d^2}{du^2}\log\sigma u$$

verbunden. Es bestehen daher die Gleichungen

$$(2.)\qquad \wp u=\frac{1}{u^2}+\sum_w'\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)\qquad \left(\begin{matrix} w=2\mu\omega+2\mu'\omega' \\ \text{ausgenommen } w=0\end{matrix}\right)$$

$$(3.)\qquad =-\frac{\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+\sum_n\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')}+\sum_n\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}\right\},$$

$$(4.)\qquad \wp(-u)=\wp(u),$$

$$(5.)\qquad \wp(u|\omega,\omega')=\wp(u;g_2,g_3)=\frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}\middle|\frac{\omega}{m},\frac{\omega'}{m}\right)=\frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m};m^4g_2,m^6g_3\right).$$

Für die Umgebung des Werthes $u=0$ gilt die Reihenentwickelung

$$(6.)\qquad \wp u=\frac{1}{u^2}+*+\frac{g_2}{2^2.5}u^2+\frac{g_3}{2^2.7}u^4+\frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}u^6+\frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11}u^8+\cdots$$

und zwar besteht, wenn

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \cdots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \cdots \tag{7.}$$

gesetzt wird und λ grösser als 3 ist, die Recursionsformel

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum\nolimits_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu}, \qquad (\nu = 2, 3 \cdots (\lambda-2)). \tag{8.}$$

Die Function $\wp u$ ist eine doppelt periodische Function, für deren Argument $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar ist; dieselbe wird innerhalb jedes Periodenparallelogramms nur an der Stelle, welche dem Nullwerthe des Argumentes congruent ist, unendlich gross und zwar ist die Ordnungszahl des Unendlichgrosswerdens gleich 2.

Die Function $\wp u$ ist also eine elliptische Function zweiten Grades. In der für die Umgebung des Werthes $u = 0$ geltenden nach Potenzen des Argumentes fortschreitenden Reihenentwickelung der Function

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots \tag{9.}$$

ist $\frac{1}{u^2}$ das einzige Glied mit negativem Exponenten, während das constante Glied dieser Entwickelung den Werth Null hat.

Durch die angegebenen Eigenschaften ist die Function $\wp u$ unzweideutig bestimmt. Unter allen doppelt periodischen Functionen überhaupt ist daher die Function $\wp u$ die möglichst einfache.

Die erste Ableitung $\wp' u$ der Function $\wp u$ ist eine elliptische Function dritten Grades, welche nur für die dem Nullwerthe congruenten Werthe des Argumentes unendlich gross wird.

Es ergibt sich

$$\wp'(-u) = -\wp'(u), \tag{10.}$$

$$\wp' u = -2 \sum\nolimits_w \frac{1}{(u-w)^3}, \qquad (w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'). \tag{11.}$$

Aus der letzten Gleichung wird für $u = \omega, \omega', \omega''$ gefolgert

$$\wp'(\omega) = 0, \quad \wp'(\omega') = 0, \quad \wp'(\omega'') = 0. \tag{12.}$$

Für die Umgebung des Werthes $u = 0$ gilt die Reihenentwickelung

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + * + \frac{g_2}{2.5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \frac{g_2^2}{2^3.5^2} u^5 + \frac{3 g_2 g_3}{2.5.7.11} u^7 + \cdots \tag{13.}$$

Zwischen der Function $\wp u$ und ihrer ersten Ableitung $\wp' u$ besteht die Gleichung

$$(14.)\qquad (\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

aus welcher sich

$$(15.)\qquad \wp'' u = 6\wp^2 u - \tfrac{1}{2} g_2, \quad \wp''' u = 12 \wp u \cdot \wp' u$$

ergibt. Alle Ableitungen der Function $\wp u$, deren Ordnungszahl grade ist, sind ganze Functionen von $\wp u$.

Die drei Grössen

$$(16.)\qquad \wp\omega = e_1, \quad \wp\omega'' = e_2, \quad \wp\omega' = e_3$$

sind von einander verschieden, wenn beide Perioden 2ω, $2\omega'$ des primitiven Periodenpaares endliche Werthe haben, und es ergibt sich

$$(17.)\qquad (\wp' u)^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega'')(\wp u - \wp\omega') = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3).$$

Es bestehen daher die Gleichungen

$$(18.)\qquad \begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 &= -\tfrac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -\tfrac{1}{4} g_2, \\ e_1 e_2 e_3 &= \tfrac{1}{4} g_3. \end{aligned}$$

Die Grösse $(e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2)$ möge mit G bezeichnet werden.

10.

Für den besonderen Fall, in welchem der reelle Bestandtheil der Grösse $\frac{\omega'}{\omega i}$ unendlich gross wird, während 2ω einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, werden die beiden Grössen e_2 und e_3 einander gleich. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(1.)\qquad \wp u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}} \cdot u\right)} - \frac{3g_3}{2g_2},$$

$$(2.)\qquad \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \quad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \quad e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2}, \quad g_2^3 - 27 g_3^2 = 0,$$

$$(3.)\qquad \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{cotg} \frac{u\pi}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u, \quad 2\eta\omega = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{u\pi}{2\omega}.$$

Wenn endlich sowohl 2ω, als auch $2\omega'$ unendlich grosse Werthe annimmt, während $\lim \Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ von Null verschieden ist, so werden alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich und es ergibt sich

$$(4.)\quad \wp u = \frac{1}{u^2},\ \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u},\ \sigma u = u;\ e_1 = e_2 = e_3 = 0,\ g_2 = 0,\ g_3 = 0.$$

Additionstheorem der Function $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$.

11.

Zwischen der Function $\wp u$ und der Function σu besteht die Gleichung

$$(1.)\quad \wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

Aus derselben ergibt sich durch logarithmische Differentiation

$$(2.)\quad \frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} + \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - 2\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v},$$

$$(3.)\quad \frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} - \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - 2\frac{\sigma' v}{\sigma v} = \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Folglich besteht das Additionstheorem

$$(4.)\quad \frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{\sigma' v}{\sigma v} + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

$$(5.)\quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma' v}{\sigma v} + \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Additionstheorem der Function $\wp u$.

12.

Durch Differentiation ergibt sich aus dem Additionstheorem der Function $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ das Additionstheorem der Function $\wp u$

$$(1.)\quad \wp(u \pm v) = \wp u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right) = \wp v - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)$$

$$(2.)\quad = \wp u + \frac{(6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2)(\wp v - \wp u) + 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 \mp \wp' u\,\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}$$

$$(3.)\quad = \wp v + \frac{(6\wp^2 v - \frac{1}{2}g_2)(\wp u - \wp v) + 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3 \mp \wp' u\,\wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2},$$

$$(4.)\qquad \wp(u \pm v) = \frac{2(\wp u \wp v - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3 \mp \wp' u \wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}$$

$$(5.)\qquad = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right]^2 - \wp u - \wp v.$$

Aus diesen Formeln erhält man die folgenden

$$(6.)\qquad \frac{1}{\wp(u \pm v)} = \frac{2(\wp u \wp v - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3 \pm \wp' u \wp' v}{2(\wp u \wp v + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3(\wp u + \wp v)},$$

$$(7.)\qquad \wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{2(\wp u \wp v - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2}$$

$$(8.)\qquad = 2\wp u - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\log(\wp u - \wp v) = 2\wp v - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\log(\wp u - \wp v),$$

$$(9.)\qquad \wp(u+v) - \wp(u-v) = -\frac{\wp' u \wp' v}{(\wp u - \wp v)^2} = -\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log(\wp u - \wp v),$$

$$(10.)\qquad \wp(u+v)\cdot\wp(u-v) = \frac{(\wp u \wp v + \frac{1}{4}g_2)^2 + g_3(\wp u + \wp v)}{(\wp u - \wp v)^2},$$

$$(11.)\qquad \wp'(u \pm v) = \left(\frac{(\wp' v)^2}{(\wp v - \wp u)^3} - \frac{1}{2}\frac{\wp'' v}{(\wp v - \wp u)^2}\right)\wp' u \pm \left(\frac{(\wp' u)^2}{(\wp u - \wp v)^3} - \frac{1}{2}\frac{\wp'' u}{(\wp u - \wp v)^2}\right)\wp' v,$$

$$(12.)\qquad 4(\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v)) = \left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 = \left(\frac{\wp'(u+v) + \wp'(v)}{\wp(u+v) - \wp(v)}\right)^2,$$

$$(13.)\qquad \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{-\wp'(u+v) - \wp'(v)}{\wp(u+v) - \wp(v)},$$

$$(14.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp v & \wp' v \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{vmatrix} = 0.$$

$$(15.)\qquad \wp(2u) = \frac{(\wp^2 u + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3\wp u}{4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3} = \wp u - \frac{1}{4}\frac{d^2}{du^2}\log\wp' u.$$

Durch Integration ergibt sich aus der letzten der vorstehenden Formeln

$$(16.)\qquad \begin{aligned} &\frac{\sigma'(2u)}{\sigma(2u)} = 2\frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'' u}{\wp' u}, \qquad \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u} = -\wp' u, \\ &\sigma(2u) = \sigma^4 u\,\frac{d^3\log\sigma u}{du^3} = 2\sigma u(\sigma' u)^3 - 3\sigma^2 u\,\sigma' u\,\sigma'' u + \sigma^3 u\,\sigma''' u. \end{aligned}$$

Darstellung einer elliptischen Function beliebigen Grades durch die Functionen $\sigma(u\,|\,\omega, \omega')$ und $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$.

13.

Wenn $\varphi(u)$ eine elliptische Function r^{ten} Grades, $(2\omega, 2\omega')$ ein Periodenpaar des Argumentes derselben und $\sigma(u)$ die zu diesem Periodenpaare gehörende Function $\sigma(u\,|\,\omega, \omega')$ bezeichnet, so ist es stets möglich, $2r+1$ Grössen

$$u_1, u_2, \dots u_r;\ \ v_1, v_2, \dots v_r;\ \ C$$

derart zu bestimmen, dass die Gleichung besteht

$$\varphi(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\dots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\dots\sigma(u-v_r)}. \tag{1.}$$

Zwischen den Grössen $u_1, u_2, \dots u_r;\ v_1, v_2, \dots v_r$ findet hierbei die Beziehung statt

$$u_1+u_2+\dots+u_r = v_1+v_2+\dots+v_r. \tag{2.}$$

Dieser Satz lässt sich folgendermassen umkehren.

Wenn die Grössen $u_1, u_2, \dots u_r;\ v_1, v_2, \dots v_r$ die Gleichung (2.) befriedigen und wenn keine der Differenzen

$$u_\lambda - v_\mu \qquad (\lambda \lesseqgtr \mu,\ \ \lambda, \mu = 1, 2, 3 \cdots r)$$

der Null congruent ist, so ist die durch die Gleichung (1.) bestimmte Function $\varphi(u)$ eine zu dem Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ gehörende elliptische Function r^{ten} Grades.

Wenn von den r Grössen $u_1, u_2, \dots u_r$, beziehungsweise $v_1, v_2, \dots v_r$, keine zwei einander congruent sind, so sind alle Wurzeln der Gleichung $\varphi(u) = 0$, beziehungsweise $\varphi(u) = \infty$, einfache Wurzeln. Sind hingegen einige der Grössen $u_1, u_2, \dots u_r$, oder einige der Grössen $v_1, v_2, \dots v_r$ einander congruent, so sind die entsprechenden Wurzeln der Gleichung $\varphi(u) = 0$, beziehungsweise $\varphi(u) = \infty$, mehrfache Wurzeln.

14.

Wenn

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots\ u_n$$

$(n+1)$ von einander unabhängige und unbeschränkt veränderliche Grössen bezeichnen, so ist die Function

$$(1.)\qquad \varphi(u_0, u_1, u_2, \cdots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_0) & \wp'(u_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_2) \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

in Bezug auf jedes ihrer Argumente eine elliptische Function $(n+1)^{ten}$ Grades. Als Function von u_0 betrachtet wird dieselbe nur an der Stelle $u_0 = 0$ und den congruenten Stellen unendlich gross, dagegen für

$$u_0 = u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_n,\ -(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$

und die congruenten Stellen unendlich klein.

Es möge vorausgesetzt werden, dass von den Grössen

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\ u_n,\quad u_1+u_2+\cdots+u_n$$

keine der Null congruent ist, ferner dass von den Grössen

$$u_1,\ u_2,\ \dots\ u_n$$

keine zwei einander congruent sind.

Es ergibt sich zunächst

$$(2.)\ \varphi(u_0, u_1, u_2, \cdots u_n) = C_n \cdot \frac{\sigma(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)\,\sigma(u_0-u_1)\,\sigma(u_0-u_2)\cdots\sigma(u_0-u_n)}{\sigma^{n+1}(u_0)},$$

wo der Factor C_n nur von den Grössen $u_1,\ u_2,\ \dots\ u_n$ abhängt.

Zur Bestimmung dieses Factors dient die Gleichung

$$-C_n = (-1)^n n! \frac{\varphi(u_1, u_2, \cdots u_n)}{\sigma(u_1+u_2+\cdots+u_n)\,\sigma(u_1)\,\sigma(u_2)\cdots\sigma(u_n)}.$$

Wenn nun vorausgesetzt wird, dass keine der Summen

$$u_2+u_3+\cdots+u_n,\quad u_3+u_4+\cdots+u_n,\quad \cdots,\quad u_{n-1}+u_n$$

C. F. GAUSS WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band:

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis 12 Mark.

II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.
Die Besitzer des ersten Abdruckes von Band II. können die beim zweiten Abdrucke hinzugekommenen Zusätze als „Nachtrag zum ersten Abdrucke des zweiten Bandes" zum Preise von 1 Mark beziehen.

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.

IV. WAHRSCHEINLICHKEITS - RECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis 15 Mark.

V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis 15 Mark.

VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN. 1874. Preis 20 Mark.

Die Entnahme von einzelnen Bänden bezw. des vollständigen Werkes erfolgt gegen Baarzahlung von der K. Universitäts-Casse in Göttingen, welche nach wie vor den Vertrieb besorgt.

Versendungen nach auswärts erfolgen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn die Preiszahlung durch Postnachnahme gewünscht wird und zulässig ist; sonst sind wegen der für Werthsendungen erforderlichen festeren Verpackung pro Band 60 Pfennig Emballagekosten mehr zu zahlen.

Göttingen im Mai 1881.

GAUSS-DENKMÜNZE.

Die K. Gesellschaft hat zur Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von C. F. Gauss durch Herrn Münzmedailleur H. F. Brehmer in Hannover eine Denkmünze von 70 Millimeter Durchmesser in bronzirtem Kupfer herstellen lassen. Sie enthält den Kopf von Gauss und die auf ihn sowie auf die Feier sich beziehende Inschrift. Um dieses Kunstwerk allgemeiner zugänglich zu machen, hat die Gesellschaft verfügt, dass es zu dem Preise von fünf Mark von der K. Universitäts-Casse zu Göttingen bezogen werden kann, von Auswärtigen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn Postnachnahme des Preises erfolgen kann.