Formeln und Lehrsätze

zum Gebrauche

der elliptischen Functionen.

Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor

K. Weierstrass

bearbeitet und herausgegeben

von

H. A. Schwarz.

Zweite Lieferung, enthaltend Bogen 3 und 4.

Göttingen.
Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).
1881.

der Null congruent ist, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung der angegebenen Formel

$$(3.)\quad \varphi(u_0, u_1, u_2, \ldots u_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, 1!2!3!\ldots n!\, \frac{\sigma(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)\prod_{\lambda,\mu}\sigma(u_\lambda - u_\mu)}{\sigma^{n+1}(u_0)\sigma^{n+1}(u_1)\sigma^{n+1}(u_2)\ldots\sigma^{n+1}(u_n)},$$

$$(\lambda < \mu,\quad \lambda, \mu = 0, 1, 2 \ldots n).$$

Die Geltung dieser Formel ist, wie sich aus Stetigkeitsbetrachtungen ergibt, nur an die Bedingung geknüpft, dass keine der Grössen u_λ ($\lambda = 0, 1, 2 \ldots n$) der Null congruent ist.

Für die im Art. 13 betrachtete elliptische Function $\varphi(u)$ ergibt sich hiernach die Darstellung

$$(4.)\quad \varphi(u) = C' \cdot \frac{\varphi(u, u_1, u_2, \ldots u_r)}{\varphi(u, v_1, v_2, \ldots v_r)},$$

wo der Factor C' nur von den Grössen $u_1, u_2, \ldots u_r$; $v_1, v_2, \ldots v_r$ abhängt. Hierbei ist vorausgesetzt, dass von diesen $2r$ Grössen keine der Null congruent ist und dass keine zwei derselben einander congruent sind. Es bietet keine Schwierigkeit, aus dieser Formel durch einen angemessenen Grenzübergang andere Formeln herzuleiten, welche sich auf die angegebenen Ausnahmefälle beziehen.

Es gelten überhaupt folgende Sätze:

Jede zu dem Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ gehörende (eindeutige) elliptische Function $\varphi(u)$ ist rational ausdrückbar durch die zu demselben Periodenpaare gehörende Function $\wp u$ und deren in Bezug auf die Grösse u genommene erste Ableitung $\wp' u$. Umgekehrt sind diese Functionen $\wp u$ und $\wp' u$ durch die Function $\varphi(u)$ und deren erste Ableitung $\varphi'(u)$ rational ausdrückbar, wenn $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar des Argumentes der Function $\varphi(u)$ ist.

Wenn die betrachtete Function $\varphi(u)$ eine grade Function ihres Argumentes ist, so ist dieselbe eine rationale Function von $\wp u$; wenn die Function $\varphi(u)$ dagegen eine ungrade Function ihres Argumentes ist, so ist $\frac{\varphi(u)}{\wp' u}$ eine rationale Function von $\wp u$.

Wenn die betrachtete Function $\varphi(u)$ nur für $u = 0$ und die congruenten Werthe unendlich gross wird, so ist dieselbe eine ganze Function von $\wp u$ und $\wp' u$.

Die Function $\dfrac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)}$.

15.

Unter der Voraussetzung, dass n grösser als 1 ist, ergibt sich für den Grenzfall

$$u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_n = v,$$

wenn

$$(1.)\qquad \varphi(u) = (-1)^n \frac{\mathfrak{S}^n(u-v)\,\mathfrak{S}(u+nv)}{\mathfrak{S}^{n+1}(u)\,\mathfrak{S}^n(v)\,\mathfrak{S}(nv)}, \qquad \mathrm{P}_n(v) = \begin{vmatrix} \wp' v & \wp'' v & \cdot\cdot & \wp^{(n-1)} v \\ \wp'' v & \wp''' v & \cdot\cdot & \wp^{(n)} v \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)} v & \wp^{(n)} v & \cdot\cdot & \wp^{(2n-3)} v \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$(2.)\qquad \mathrm{P}_n(v)\,.\,\varphi(u) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \wp u - \wp v & \wp' u - \wp' v & \cdot\cdot & \wp^{(n-1)} u - \wp^{(n-1)} v \\ \wp' v & \wp'' v & \cdot\cdot & \wp^{(n)} v \\ \wp'' v & \wp''' v & \cdot\cdot & \wp^{(n+1)} v \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)} v & \wp^{(n)} v & \cdot\cdot & \wp^{(2n-2)} v \end{vmatrix}$$

Wird nun beiderseits nach Potenzen der Grösse $u-v$ entwickelt, so folgt aus der Vergleichung der Coefficienten der mit $(u-v)^n$ multiplicirten Glieder

$$(3.)\qquad \frac{\mathfrak{S}((n+1)v)}{\mathfrak{S}(nv)\,\mathfrak{S}^{2n+1}(v)} = -\frac{1}{n!\,n!}\cdot\frac{\mathrm{P}_{n+1}(v)}{\mathrm{P}_n(v)}.$$

Andererseits ergibt sich, wenn die Grösse c_n durch die Gleichung

$$(4.)\qquad \mathfrak{S}(nv) = \frac{(-1)^{n-1}.\,c_n}{(1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!)^2}\,\mathrm{P}_n(v)\,.\,\mathfrak{S}^{nn}(v)$$

definirt wird,

$$(5.)\qquad \frac{\mathfrak{S}((n+1)v)}{\mathfrak{S}(nv)\,\mathfrak{S}^{2n+1}(v)} = -\frac{1}{n!\;n!}\cdot\frac{c_{n+1}}{c_n}\cdot\frac{\mathrm{P}_{n+1}(v)}{\mathrm{P}_n(v)}.$$

Für jeden hier in Betracht kommenden Werth von n hat demnach der Quotient $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ den Werth 1.

Für $n = 2$ ergibt sich

$$\mathfrak{S}(2v) = -c_2.\wp' v.\mathfrak{S}^4(v);$$

in Folge der Gleichung (16.) des Art. 12 ist also $c_2 = 1$.

Mithin ist auch $c_n = 1$ und es besteht daher, wenn u statt v eingeführt wird, die Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1!2!3!\ldots(n-1)!)^2}\begin{vmatrix} \wp'u & \wp''u & .. & \wp^{(n-1)}u \\ \wp''u & \wp'''u & .. & \wp^{(n)}u \\ . & . & .. & . \\ \wp^{(n-1)}u & \wp^{(n)}u & .. & \wp^{(2n-3)}u \end{vmatrix}.$$

Den Gleichungen (14.) und (15.) des Art. 9 zufolge sind sämmtliche Ableitungen der Function $\wp u$ als ganze Functionen von $\wp u$, $\wp' u$, $\frac{1}{4}g_2$, g_3 mit ganzzahligen Zahlencoefficienten darstellbar. Die Determinante $\mathrm{P}_n(u)$, durch welche die Function $\frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)}$ ausgedrückt ist, ist daher ebenfalls eine ganze Function dieser Grössen.

Wenn nun n ungrade ist, so ist $\frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)}$ eine grade Function von u, es ist daher $\frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)}$ eine ganze Function von $\wp u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3; wenn dagegen n grade ist, so ist $\frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)}$ eine ungrade Function von u und es ist $\frac{1}{\wp' u}\cdot\frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)}$ eine ganze Function von $\wp u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3.

Es besteht daher für alle ungraden Werthe von n eine Gleichung von der Form

$$(7.)\qquad \frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)} = \frac{1}{(1!2!3!\ldots(n-1)!)^2}\,\mathrm{G}(\wp u, \tfrac{1}{2}g_2, g_3)_{\frac{n^2-1}{2}}$$

und für alle graden Werthe von n eine Gleichung von der Form

$$(8.)\qquad \frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)} = \frac{-\wp' u}{(1!2!3!\ldots(n-1)!)^2}\,\mathrm{G}(\wp u, \tfrac{1}{2}g_2, g_3)_{\frac{n^2-4}{2}}.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $\mathrm{G}(\wp u, \frac{1}{2}g_2, g_3)_N$ eine ganze Function der drei Grössen $\wp u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3 mit ganzzahligen Zahlencoefficienten und der Index N den Grad dieser Function in Bezug auf das Argument $\wp u$.

Da

$$(9.)\qquad \frac{d^2}{du^2}\log\frac{\mathfrak{S}(nu)}{\mathfrak{S}^{nn}(u)} = n^2(\wp u - \wp(nu)),$$

so können die angegebenen Gleichungen dazu benutzt werden, um $\wp(nu)$ rational durch $\wp u$ auszudrücken.

Darstellung einer elliptischen Function beliebigen Grades durch die Function $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ und deren Ableitungen.

16.

Aus der Gesammtheit derjenigen Werthe des Argumentes u, für welche eine elliptische Function r^{ten} Grades

$$\varphi(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\ldots\sigma(u-v_r)} \tag{1.}$$

unendlich gross wird, sei ein vollständiges System einander nicht congruenter Werthe

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m$$

herausgehoben und es sei für $\mu = 1, 2, \ldots m$

$$C_\mu(u-v_\mu)^{-1} + C'_\mu(u-v_\mu)^{-2} + C''_\mu(u-v_\mu)^{-3} + \cdots + C_\mu^{(r_\mu-1)}(u-v_\mu)^{-r_\mu}$$

die Summe aller Glieder mit negativem Exponenten, welche in der für die Umgebung des Werthes v_μ geltenden nach Potenzen der Grösse $u - v_\mu$ fortschreitenden Reihenentwickelung der Function $\varphi(u)$ enthalten sind.

Unter diesen Voraussetzungen bestehen die Gleichungen

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r, \qquad C_1 + C_2 + \cdots + C_m = 0, \tag{2.}$$

$$\varphi(u) = C_0 + \sum_\mu C_\mu \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)} + \sum_\mu \sum_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} C_\mu^{(\lambda)} \frac{d^\lambda}{du^\lambda} \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)}, \tag{3.}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots (r_\mu - 1); \quad \mu = 1, 2, \ldots m).$$

Die Constante C_0 kann bestimmt werden, wenn der Werth der Function $\varphi(u)$ für einen nicht singulären, d. h. keinem der Werthe $v_1, v_2, \ldots v_m$ congruenten Werth des Argumentes u bekannt ist, oder wenn in der für die Umgebung irgend eines der Werthe v_μ geltenden nach Potenzen von $u - v_\mu$ fortschreitenden Reihenentwickelung der Function $\varphi(u)$ ausser den Gliedern mit negativem Exponenten noch das constante Glied gegeben ist.

Integration einer elliptischen Function beliebigen Grades.

17.

Aus dem in dem vorhergehenden Art. enthaltenen Ausdrucke für die Function $\varphi(u)$ ergibt sich für die zu derselben gehörende Integralfunction, wenn mit C_0' die Constante der Integration bezeichnet wird, folgender Ausdruck:

$$\int \varphi(u)\,du = \sum_\mu C_\mu \log \sigma(u-v_\mu) + C_0 u + C_0'$$

$$-\sum_\mu C'_\mu \frac{\sigma'(u-v_\mu)}{\sigma(u-v_\mu)} + \sum_\mu \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} \frac{1}{\lambda!}\, C_\mu^{(\lambda)} \wp^{(\lambda-2)}(u-v_\mu),$$

$$(\lambda = 2, 3, \ldots (r_\mu - 1); \quad \mu = 1, 2, \ldots m).$$

Die Functionen $\sigma_1 u,\ \sigma_2 u,\ \sigma_3 u$.

18.

Durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{aligned}
\sigma_1 u &= \frac{e^{-\eta u}\,\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} = \frac{e^{\eta u}\,\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega} = \sigma_1(u\,|\,\omega, \omega'),\\
\sigma_2 u &= \frac{e^{-\eta'' u}\,\sigma(\omega''+u)}{\sigma\omega''} = \frac{e^{\eta'' u}\,\sigma(\omega''-u)}{\sigma\omega''} = \sigma_2(u\,|\,\omega, \omega'),\\
\sigma_3 u &= \frac{e^{-\eta' u}\,\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} = \frac{e^{\eta' u}\,\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'} = \sigma_3(u\,|\,\omega, \omega')
\end{aligned}$$

werden drei Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ als eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen complexen Grösse u erklärt. Für alle endlichen Werthe des Argumentes u besitzen dieselben den Charakter ganzer Functionen.

Jede der drei Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ ist eine g r a d e Function des Argumentes u. Dem Werthe $u = 0$ entspricht der Functionswerth 1.

Wenn in der Formel (1.) des Art. 11 für v beziehlich die Werthe ω, ω'', ω' gesetzt werden, so ergeben sich die Gleichungen

$$(2.)\qquad \wp u - e_1 = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad \wp u - e_2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad \wp u - e_3 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2,$$

aus welchen hervorgeht, dass jede der drei Differenzen $\wp u - e_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ das Quadrat einer eindeutigen Function des Argumentes u ist.

Es bestehen die Gleichungen

$$\wp' u = -2\frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma u\, \sigma u}, \qquad \sigma(2u) = 2\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u. \tag{3.}$$

Bezeichnen λ, μ, ν die drei Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge, so gilt die Reihenentwickelung

$$\sigma_\lambda u = 1 - \tfrac{1}{2} e_\lambda u^2 - \tfrac{1}{48}(6e_\lambda^2 - g_2)u^4 - \cdots \tag{4.}$$

Die Grösse g_2 hat zufolge Art. 9 (18.) den Werth

$$g_2 = -4(e_\mu e_\nu + e_\nu e_\lambda + e_\lambda e_\mu) = -4((e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) - 3e_\lambda^2). \tag{5.}$$

Für die Vermehrung des Argumentes um eine ganze Periode gelten die Formeln

$$\begin{array}{l|l|l}
\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u & \sigma(u+2\omega'') = -e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma u & \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u \\
\sigma_1(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_1 u & \sigma_1(u+2\omega'') = +e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma_1 u & \sigma_1(u+2\omega') = +e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_1 u \\
\sigma_2(u+2\omega) = +e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_2 u & \sigma_2(u+2\omega'') = -e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma_2 u & \sigma_2(u+2\omega') = +e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_2 u \\
\sigma_3(u+2\omega) = +e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_3 u & \sigma_3(u+2\omega'') = +e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma_3 u & \sigma_3(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_3 u.
\end{array} \tag{6.}$$

Diese Formeln sind specielle Fälle der folgenden, in welchen p, q irgend welche ganze positive oder negative Zahlen, einschliesslich der Null, bedeuten:

$$2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\tilde{\eta} = 2p\eta + 2q\eta',$$

$$\begin{aligned}
\sigma(u + 2\tilde{\omega}) &= (-1)^{pq+p+q}\, e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma u, \\
\sigma_1(u + 2\tilde{\omega}) &= (-1)^{pq+p}\, e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma_1 u, \\
\sigma_2(u + 2\tilde{\omega}) &= (-1)^{pq}\, e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma_2 u, \\
\sigma_3(u + 2\tilde{\omega}) &= (-1)^{pq+q}\, e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma_3 u.
\end{aligned} \tag{7.}$$

19.

Es bezeichne jetzt

$$\tilde{\omega} = p\omega + q\omega'$$

eine halbe Periode, mit anderen Worten, es werde vorausgesetzt, dass die beiden ganzen Zahlen p und q nicht beide zugleich grade sind.

Wird entsprechend der im Art. 7 erklärten Bezeichnungsweise

$$\tilde{\eta} = p\eta + q\eta' = \frac{\sigma'\tilde{\omega}}{\sigma\tilde{\omega}}$$

gesetzt, so stimmt die Function

$$\frac{e^{-\tilde{\eta}u}\,\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \frac{e^{\tilde{\eta}u}\,\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma\tilde{\omega}}$$

mit der Function $\sigma_\lambda u$ überein, wobei der Index λ den Werth 1, 2 oder 3 hat, jenachdem $\wp\tilde{\omega}$ gleich e_1, e_2 oder e_3 ist.

Es ist nun

$$\begin{aligned} &\wp\tilde{\omega} = e_1, \text{ also } \lambda = 1, \text{ wenn } p \equiv 1,\ q \equiv 0 \pmod{2}; \\ (1.)\quad &\wp\tilde{\omega} = e_2, \text{ also } \lambda = 2, \text{ wenn } p \equiv 1,\ q \equiv 1 \pmod{2}; \\ &\wp\tilde{\omega} = e_3, \text{ also } \lambda = 3, \text{ wenn } p \equiv 0,\ q \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass der Werth von λ den vorstehenden Bedingungen gemäss bestimmt wird, bestehen die Gleichungen:

$$(2.)\qquad \wp\tilde{\omega} = e_\lambda,$$

$$(3.)\qquad \frac{e^{-\tilde{\eta}u}\,\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \frac{e^{\tilde{\eta}u}\,\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \sigma_\lambda u,$$

$$(4.)\qquad \frac{\sigma'(u\pm\tilde{\omega})}{\sigma(u\pm\tilde{\omega})} \mp \tilde{\eta} = \frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u}, \qquad \frac{\sigma'_\lambda(u\pm\tilde{\omega})}{\sigma_\lambda(u\pm\tilde{\omega})} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} \pm \tilde{\eta}.$$

Wird in den Ausdrücken für $\wp(u\pm v)$ der Grösse v der Werth $\tilde{\omega}$ beigelegt, so ergibt sich

$$(5.)\qquad \wp(u\pm\tilde{\omega}) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda}.$$

20.

Für den ersten im Art. 10 betrachteten Grenzfall $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) = \infty$ erhält man

$$(1.)\qquad \sigma_1 u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \cos\frac{u\pi}{2\omega}, \quad \sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}.$$

Wenn aber sowohl 2ω, als auch $2\omega'$ unendlich gross wird, während $\lim \Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist

$$(2.)\qquad \sigma_1 u = \sigma_2 u = \sigma_3 u = 1$$

zu setzen.

21.

Durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \sqrt{\wp u - e_1} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \qquad \sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}, \qquad \sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

sind die Werthe der drei Quadratwurzeln als eindeutige Functionen des Argumentes u definirt.

Wenn dem Argumente u der Reihe nach die Werthe

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \omega' = \omega'', \quad \omega_3 = \omega'$$

beigelegt werden, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{aligned}
\sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\sigma_2\omega}{\sigma\omega} = \frac{e^{\eta''\omega}\,\sigma\omega'}{\sigma\omega\,\sigma\omega''}, & \sqrt{e_1 - e_3} &= \frac{\sigma_3\omega}{\sigma\omega} = \frac{e^{-\eta'\omega}\,\sigma\omega''}{\sigma\omega\,\sigma\omega'},\\
\sqrt{e_2 - e_1} &= \frac{\sigma_1\omega''}{\sigma\omega''} = -\frac{e^{\eta\omega''}\,\sigma\omega'}{\sigma\omega\,\sigma\omega''}, & \sqrt{e_2 - e_3} &= \frac{\sigma_3\omega''}{\sigma\omega''} = -\frac{e^{\eta'\omega''}\,\sigma\omega}{\sigma\omega'\,\sigma\omega''},\\
\sqrt{e_3 - e_1} &= \frac{\sigma_1\omega'}{\sigma\omega'} = \frac{e^{-\eta\omega'}\,\sigma\omega''}{\sigma\omega\,\sigma\omega'}, & \sqrt{e_3 - e_2} &= \frac{\sigma_2\omega'}{\sigma\omega'} = \frac{e^{\eta''\omega'}\,\sigma\omega}{\sigma\omega'\,\sigma\omega''},
\end{aligned}$$

durch welche die Werthe der sechs Quadratwurzeln in eindeutiger Weise bestimmt werden.

Zwischen diesen Wurzelgrössen bestehen in Folge der Voraussetzung $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ die Beziehungen

$$(3.)\qquad \sqrt{e_3 - e_2} = -i\sqrt{e_2 - e_3}, \qquad \sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_2 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_2}.$$

Verwandlungsformeln für die Functionen σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

22.

Aus den Gleichungen (2.) des Art. 21 ergeben sich für die Grössen $\sigma\omega$, $\sigma\omega''$, $\sigma\omega'$ folgende Ausdrücke

$$(1.)\qquad \sigma\omega = \frac{e^{\frac{1}{2}\eta\omega}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}}, \qquad \sigma\omega'' = \frac{\sqrt{i}\,e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}}, \qquad \sigma\omega' = \frac{i\,e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die drei Wurzelgrössen

$$\sqrt[4]{e_2-e_3}, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_3}, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_2}$$

nur solche Werthe annehmen können, deren Quadrate den durch die Gleichungen (2.) des Art. 21 bereits eindeutig bestimmten Grössen

$$\sqrt{e_2-e_3}, \qquad \sqrt{e_1-e_3}, \qquad \sqrt{e_1-e_2}$$

beziehlich gleich sind. Jede der drei vierten Wurzeln kann demnach nicht vier, sondern nur zwei Werthe annehmen; sobald aber über den Werth einer dieser drei Grössen entschieden ist, sind die Werthe der beiden andern eindeutig bestimmt.

Der Grösse $\sqrt{i}$ ist der Werth $e^{\frac{1}{4}\pi i}$ beizulegen.

Für die Vermehrung und Verminderung des Argumentes der vier σ-Functionen um eine halbe Periode gelten unter der Voraussetzung, dass den zweiten und vierten Wurzeln die im Vorhergehenden bestimmten Werthe beigelegt werden, die in der Tabelle auf der folgenden Seite enthaltenen Verwandlungsformeln:

$$\begin{aligned}
\sigma(u\pm\omega) &= \pm e^{\pm\eta u}\sigma\omega\,\sigma_1 u = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_1-e_3}}e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma_1 u\\
\sigma_1(u\pm\omega) &= \mp\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,e^{\pm\eta u}\sigma\omega\,\sigma u = \mp\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma u\\
\sigma_2(u\pm\omega) &= \sqrt{e_1-e_2}\cdot e^{\pm\eta u}\sigma\omega\,\sigma_3 u = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\cdot e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma_3 u\\
\sigma_3(u\pm\omega) &= \sqrt{e_1-e_3}\cdot e^{\pm\eta u}\sigma\omega\,\sigma_2 u = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}\cdot e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma_2 u
\end{aligned}\tag{2.}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(u\pm\omega'') &= \pm e^{\pm\eta'' u}\sigma\omega''\sigma_2 u = \pm\frac{\sqrt{i}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_2-e_3}}e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma_2 u\\
\sigma_1(u\pm\omega'') &= \sqrt{e_2-e_1}\cdot e^{\pm\eta'' u}\sigma\omega''\sigma_3 u = \frac{1}{\sqrt{i}}\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}\,e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma_3 u\\
\sigma_2(u\pm\omega'') &= \mp\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}\,e^{\pm\eta'' u}\sigma\omega''\sigma u = \mp\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt{i}}e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma u\\
\sigma_3(u\pm\omega'') &= \sqrt{e_2-e_3}\cdot e^{\pm\eta'' u}\sigma\omega''\sigma_1 u = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}\cdot e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma_1 u
\end{aligned}\tag{3.}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(u\pm\omega') &= \pm e^{\pm\eta' u}\sigma\omega'\sigma_3 u = \pm\frac{i}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}}e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma_3 u\\
\sigma_1(u\pm\omega') &= \sqrt{e_3-e_1}\cdot e^{\pm\eta' u}\sigma\omega'\sigma_2 u = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}\cdot e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma_2 u\\
\sigma_2(u\pm\omega') &= \sqrt{e_3-e_2}\cdot e^{\pm\eta' u}\sigma\omega'\sigma_1 u = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\cdot e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma_1 u\\
\sigma_3(u\pm\omega') &= \mp\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}\,e^{\pm\eta' u}\sigma\omega'\sigma u = \pm i\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma u.
\end{aligned}\tag{4.}$$

Verwandlungsformeln für die Quotienten zweier σ-Functionen.

23.

Für die Quotienten zweier σ-Functionen gelten folgende Verwandlungsformeln:

(1.)

$$\frac{\sigma(u\pm\omega)}{\sigma_1(u\pm\omega)} = \frac{-1}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \qquad \frac{\sigma_1(u\pm\omega)}{\sigma_2(u\pm\omega)} = \mp\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega'')}{\sigma_1(u\pm\omega'')} = \pm\frac{i}{\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \qquad \frac{\sigma_1(u\pm\omega'')}{\sigma_2(u\pm\omega'')} = \mp\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega')}{\sigma_1(u\pm\omega')} = \pm\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} \qquad \frac{\sigma_1(u\pm\omega')}{\sigma_2(u\pm\omega')} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega)}{\sigma_2(u\pm\omega)} = \pm\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \qquad \frac{\sigma_1(u\pm\omega)}{\sigma_3(u\pm\omega)} = \mp\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega'')}{\sigma_2(u\pm\omega'')} = \frac{-i}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \qquad \frac{\sigma_1(u\pm\omega'')}{\sigma_3(u\pm\omega'')} = -i\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega')}{\sigma_2(u\pm\omega')} = \pm\frac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} \qquad \frac{\sigma_1(u\pm\omega')}{\sigma_3(u\pm\omega')} = \mp\frac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega)}{\sigma_3(u\pm\omega)} = \pm\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} \qquad \frac{\sigma_2(u\pm\omega)}{\sigma_3(u\pm\omega)} = \frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega'')}{\sigma_3(u\pm\omega'')} = \pm\frac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u} \qquad \frac{\sigma_2(u\pm\omega'')}{\sigma_3(u\pm\omega'')} = \pm i\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma u}{\sigma_1 u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm\omega')}{\sigma_3(u\pm\omega')} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma u} \qquad \frac{\sigma_2(u\pm\omega')}{\sigma_3(u\pm\omega')} = \mp\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}.$$

(2.)

$$\frac{\sigma(u\pm 2\omega_\lambda)}{\sigma_\lambda(u\pm 2\omega_\lambda)} = \frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} \qquad \frac{\sigma_\mu(u\pm 2\omega_\lambda)}{\sigma_\nu(u\pm 2\omega_\lambda)} = \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$$

$$\frac{\sigma(u\pm 2\omega_\mu)}{\sigma_\lambda(u\pm 2\omega_\mu)} = -\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} \qquad \frac{\sigma_\mu(u\pm 2\omega_\mu)}{\sigma_\nu(u\pm 2\omega_\mu)} = -\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass die Functionen $\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}$ und $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ eindeutige doppelt periodische Functionen sind, für deren Argument $(2\omega_\lambda, 4\omega_\mu)$ ein primitives Periodenpaar ist.

Gleichungen zwischen den Quadraten von je drei σ-Functionen.

24.

Aus den Gleichungen

$$\wp u - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

ergeben sich durch Elimination von $\wp u$ die folgenden Gleichungen zwischen den Quadraten von je drei σ-Functionen

$$\sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\sigma^2 u = 0,$$

$$\sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\sigma^2 u = 0,$$

$$\sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u = 0,$$

$$(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 u = 0.$$

Differentialgleichungen der σ-Quotienten.

25.

Die Gleichung

$$\wp' u = -2\frac{\sigma_\lambda u . \sigma_\mu u . \sigma_\nu u}{\sigma u . \sigma u . \sigma u} \tag{1.}$$

geht durch Einführung der Bezeichnungen

$$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = \xi_{0\lambda}, \qquad \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = \xi_{\mu\nu}, \qquad \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = \xi_{\lambda 0} \tag{2.}$$

über in die Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_{0\lambda}}{du} = \xi_{\mu\lambda}\xi_{\nu\lambda}, \qquad \frac{d\xi_{\mu\nu}}{du} = -(e_\mu - e_\nu)\,\xi_{\lambda\nu}\,\xi_{0\nu}, \qquad \frac{d\xi_{\lambda 0}}{du} = -\xi_{\mu 0}\,\xi_{\nu 0}. \tag{3.}$$

Die Functionen $\xi_{0\lambda}$, $\xi_{\mu\nu}$, $\xi_{\lambda 0}$ genügen hierbei der Bedingung, dass für den Werth $u=0$

$$(4.)\quad \xi_{0\lambda}=0,\quad \frac{d\xi_{0\lambda}}{du}=1;\qquad \xi_{\mu\nu}=1;\qquad \xi_{\lambda 0}=\infty,\quad \lim\frac{1}{\xi_{\lambda 0}^2}\cdot\frac{d\xi_{\lambda 0}}{du}=-1.$$

Die angegebenen Differentialgleichungen nehmen in Folge der zwischen den Quadraten von je drei σ-Functionen bestehenden Gleichungen (Art. 24) folgende Formen an:

$$(5.)\quad \left(\frac{d\xi_{0\lambda}}{du}\right)^2=(1-(e_\mu-e_\lambda)\xi_{0\lambda}^2)(1-(e_\nu-e_\lambda)\xi_{0\lambda}^2),$$

$$(6.)\quad \left(\frac{d\xi_{\mu\nu}}{du}\right)^2=(1-\xi_{\mu\nu}^2)(e_\mu-e_\lambda+(e_\lambda-e_\nu)\xi_{\mu\nu}^2),$$

$$(7.)\quad \left(\frac{d\xi_{\lambda 0}}{du}\right)^2=(\xi_{\lambda 0}^2+e_\lambda-e_\mu)(\xi_{\lambda 0}^2+e_\lambda-e_\nu).$$

Es genügen daher die vier Functionen

$$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u},\qquad \frac{1}{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u},\qquad \frac{1}{\sqrt{e_\nu-e_\lambda}}\frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\mu u},\qquad \frac{1}{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}\sqrt{e_\nu-e_\lambda}}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}$$

derselben Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2=(1-(e_\mu-e_\lambda)\xi^2)(1-(e_\nu-e_\lambda)\xi^2).$$

Zu bemerken sind noch die Gleichungen:

$$(8.)\quad \frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u}-\frac{\sigma' u}{\sigma u}=\frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}=\frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u-e_\lambda}=-\frac{\sigma_\mu u\,.\,\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u\,.\,\sigma u},$$

$$(9.)\quad \frac{\sigma_\mu' u}{\sigma_\mu u}-\frac{\sigma_\nu' u}{\sigma_\nu u}=\frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}=\frac{1}{2}\frac{(e_\mu-e_\nu)\,\wp' u}{(\wp u-e_\mu)(\wp u-e_\nu)}=-(e_\mu-e_\nu)\frac{\sigma_\lambda u\,.\,\sigma u}{\sigma_\mu u\,.\,\sigma_\nu u},$$

$$(10.)\quad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u}=\frac{d^2}{du^2}\log\sigma_\lambda u=-\frac{(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}{\wp u-e_\lambda}-e_\lambda=-(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}-e_\lambda$$

$$=-(e_\lambda-e_\nu)\frac{\sigma_\mu^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}-e_\nu=-(e_\lambda-e_\mu)\frac{\sigma_\nu^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}-e_\mu.$$

Vergleichung der σ-Quotienten mit den Jacobi'schen elliptischen Functionen.

26.

Wenn der Modul k der Jacobi'schen elliptischen Functionen durch die Gleichung

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \tag{1.}$$

bestimmt wird, so ergeben sich für die σ-Quotienten folgende Ausdrücke durch die Jacobi'schen elliptischen Functionen:

$$\begin{array}{ll|ll}
\dfrac{\sigma u}{\sigma_3 u} = & \dfrac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \sin\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} = & \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)}{\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} = & \cos\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} = & \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\Delta\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)}{\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} = & \Delta\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} = & \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{1}{\sin\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\hline
\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} = & \sin\operatorname{coam}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u} = & \dfrac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\operatorname{tg}\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) \\[2ex]
\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u} = & \dfrac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \cos\operatorname{coam}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u} = & \dfrac{1}{\sin\operatorname{coam}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = & \dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2}}\,\Delta\operatorname{coam}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} = & \dfrac{1}{\cos\operatorname{am}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)}
\end{array} \tag{2.}$$

$$\operatorname{coam}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k) = \operatorname{am}(K - \sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k).$$

Der Quadratwurzel $\sqrt{e_1 - e_3}$ kann hierbei jeder ihrer beiden Werthe beigelegt werden, die Entscheidung über den der Quadratwurzel $\sqrt{e_1 - e_2}$ beizulegenden Werth hängt hingegen von der Uebereinkunft über die Bestimmung der Grösse $\boldsymbol{K}$ ab, welche der Definition von $\operatorname{coam}(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u, k)$ zu Grunde liegt.

Die von Jacobi mit K bezeichnete Grösse kann nämlich jeden in dem Ausdrucke

$$\sqrt{e_1 - e_3}\,(\omega + 4p\omega + 2q\omega')$$

enthaltenen Werth annehmen, wobei p und q beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Der in den vorstehenden Formeln vorkommenden Wurzelgrösse $\sqrt{e_1 - e_2}$ ist nun derselbe Werth wie im Art. 21, oder der entgegengesetzte Werth beizulegen, jenachdem die Zahl q grade oder ungrade ist.

Bestimmung eines primitiven Periodenpaares für das Argument der Function $\wp u$ mittelst zweier eindeutig bestimmter Grössen K und K'.

27.

Die Wurzeln der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ mögen, — unter der Voraussetzung, dass $g_2^3 - 27 g_3^2$ nicht gleich Null ist, — in irgend einer Reihenfolge mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet werden, mit der Bedingung, dass, falls die bei der geometrischen Darstellung den drei reellen oder complexen Grössen e_1, e_2, e_3 entsprechenden Punkte in gerader Linie liegen, e_2 dem mittleren dieser drei Punkte entspricht.

Unter dieser Voraussetzung sind die Grössen

$$(1.)\qquad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2, \qquad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2$$

so beschaffen, dass keine von beiden einen reellen negativen Werth hat und dass auch keine von beiden einen reellen positiven Werth hat, welcher grösser als 1 oder gleich 1 ist.

Mit k und k' sollen diejenigen Werthe der Quadratwurzeln aus $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ und $\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$ bezeichnet werden, deren reelle Bestandtheile positiv sind. Es hat dann auch der reelle Bestandtheil des Quotienten $\frac{k'}{k}$ einen positiven Werth.

Die Grössen K und K' sollen die Werthe der bestimmten Integrale

$$(2.)\qquad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k^2t^2}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k'^2t^2}}$$

bezeichnen, vorausgesetzt, dass die Integration auf directem Wege ausgeführt und den Quadratwurzeln diejenigen Werthe beigelegt werden, deren reelle Bestandtheile positiv sind.

Werden nun zwei Grössen ω_1 und ω_3 durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

bestimmt, in welchen der Werth von $\sqrt{e_1 - e_3}$ beliebig fixirt ist, so ist $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ein primitives Periodenpaar des Argumentes der zu den Invarianten g_2 und g_3 gehörenden Function $\wp(u; g_2, g_3)$ und es bestehen, wenn

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3.$$

Die reellen Bestandtheile der beiden Grössen K, K' und der reelle Bestandtheil des Quotienten

$$\frac{\omega_3}{\omega_1 i} = \frac{K'}{K}$$

haben positive Werthe.

Wenn die Grösse $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2$ einen reellen Werth hat, so haben K und K' positive Werthe. In diesem Falle ist das Dreieck, dessen Ecken bei der geometrischen Darstellung den Grössen 0, $2\omega_1$, $2\omega_3$ entsprechen, ein rechtwinkliges und zwar entspricht dem Werthe 0 der Scheitel des rechten Winkels.

Das erwähnte Dreieck ist jedoch ein spitzwinkliges, wenn die Grösse k^2 eine complexe Grösse mit positiv imaginärem Bestandtheile ist; es ist ein stumpfwinkliges, wenn k^2 eine complexe Grösse mit negativ imaginärem Bestandtheile ist, und zwar entspricht dem Werthe 0 der Scheitel des stumpfen Winkels. In dem letzteren Falle sind die bei der geometrischen Darstellung den Grössen 0, $2\omega_3$, $-2\omega_1$ entsprechenden Punkte die Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks.

Das Periodenparallelogramm, dessen Seiten bei der geometrischen Darstellung beziehlich den beiden durch die obigen Formeln bestimmten Perioden

C. F. GAUSS W

HERAUSGEGEBEN VON DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT D

AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band:

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis 12 Mark.

II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.
Die Besitzer des ersten Abdruckes von Band II. können die beim zweiten Abdrucke hinzugekommenen Zusätze als „Nachtrag zum ersten Abdrucke des zweiten Bandes" zum Preise von 1 Mark beziehen.

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.

IV. WAHRSCHEINLICHKEITS - RECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis 15 Mark.

V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis 15 Mark.

VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN. 1874. Preis 20 Mark.

Die Entnahme von einzelnen Bänden bezw. des vollständigen Werkes erfolgt gegen Baarzahlung von der K. Universitäts-Casse in Göttingen, welche nach wie vor den Vertrieb besorgt.

Versendungen nach auswärts erfolgen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn die Preiszahlung durch Postnachnahme gewünscht wird und zulässig ist; sonst sind wegen der für Werthsendungen erforderlichen festeren Verpackung pro Band 60 Pfennig Emballagekosten mehr zu zahlen.

Göttingen im Mai 1881.

GAUSS-DENKMÜNZE.

Die K. Gesellschaft hat zur Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von C. F. Gauss durch Herrn Münzmedailleur H. F. Brehmer in Hannover eine Denkmünze von 70 Millimeter Durchmesser in bronzirtem Kupfer herstellen lassen. Sie enthält den Kopf von Gauss und die auf ihn sowie auf die Feier sich beziehende Inschrift. Um dieses Kunstwerk allgemeiner zugänglich zu machen, hat die Gesellschaft verfügt, dass es zu dem Preise von fünf Mark von der K. Universitäts-Casse zu Göttingen bezogen werden kann, von Auswärtigen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn Postnachnahme des Preises erfolgen kann.

0,00