



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301663





# ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,  
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . .	} RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . .	
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . .	
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . .	
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN . . . . .	
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . .	
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . .	
— VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK	} F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.

BAND VI<sub>1</sub>. HEFT 2.

P. PIZZETTI IN PISA: HÖHERE GEODÄSIE . . . . . S. 117

AUSGEGEBEN AM 25. JULI 1907.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907.

Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II<sub>1</sub>, Heft 1—6; Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1; Bd. III<sub>1</sub>, Heft 1; Bd. III<sub>2</sub>, Heft 1—3; Bd. III<sub>3</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>1I</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>1II</sub>, Heft 1; Bd. IV<sub>2I</sub>, Heft 1—3; Bd. IV<sub>2II</sub>, Heft 1; Bd. V<sub>1</sub>, Heft 1—4; Bd. V<sub>2</sub>, Heft 1 und 2; Bd. VI<sub>1</sub>, Heft 1 und 2; Bd. VI<sub>2</sub>, Heft 1.

Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Angabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglicher Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronom, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyok-München, O. Hölder-Leipzig, F. Klein-Göttingen, V. v. Lang-Wien, W. Wirtlinger-Wien, H. v. Seeliger-München, H. Weber-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-Zürich, Ph. Furtwängler-Aachen, F. Klein-Göttingen, W. Fr. Meyer-Königsberg, C. H. Müller-Göttingen, K. Schwarzschild-Göttingen, A. Sommerfeld-München, E. Wiechert-Göttingen und W. Wirtlinger-Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie betheiligen sich ferner die Herren

#### I. Band:

W. Ahrens-Magdeburg  
P. Bachmann-Weimar  
J. Bauschinger-Berlin  
G. Bohlmann-Berlin  
L. v. Bortkewitsch-Berlin  
H. Burkhardt-Zürich  
E. Czuber-Wien  
W. v. Dyok-München  
D. Hilbert-Göttingen  
O. Hölder-Leipzig  
G. Landsberg-Kiel  
R. Mehmke-Stuttgart  
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.  
E. Netto-Gießen  
V. Pareto-Lausanne  
A. Pringsheim-München  
K. Runge-Göttingen  
A. Schoenflies-Königsberg i. P.  
H. Schubert-Hamburg  
D. Selivanoff-St. Petersburg  
E. Study-Bonn  
K. Th. Vahlen-Greifswald  
H. Weber-Straßburg i. E.  
A. Wiman-Lund.

#### II. Band:

M. Böcher-Cambridge, Mass.  
G. Brunel (†)  
H. Burkhardt-Zürich  
G. Faber-Karlsruhe  
R. Fröcke-Braunschweig  
H. Hahn-Wien  
J. Harkness-Montreal  
K. Hensel-Marburg  
G. Herglotz-Göttingen  
A. Kneser-Breslau  
A. Krazer-Karlsruhe  
L. Maurer-Tübingen  
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.  
W. F. Osgood-Cambridge  
P. Painlevé-Paris [Mass.  
S. Pincherle-Bologna  
A. Pringsheim-München  
A. Sommerfeld-München  
E. Vessiot-Lyon

A. Voss-München  
A. Wangerin-Halle  
E. v. Weber-Würzburg  
W. Wirtlinger-Wien  
E. Zermelo-Göttingen.

#### III. Band:

L. Berzolari-Pavia  
H. Burkhardt-Zürich  
G. Castelnuovo-Rom  
M. Dehn-Münster i. W.  
F. Dingeldey-Darmstadt  
F. Enriques-Bologna  
G. Fano-Turin [rand  
C. Guichard-Clarmont-Fer-  
P. Heegaard-Vedbaek bei  
Kopenhagen  
K. Heun-Karlsruhe  
G. Kohn-Wien  
H. Liebmann-Leipzig  
G. Loria-Genua  
R. v. Lillenthal-Münster i. W.  
H. v. Mangoldt-Danzig  
W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.  
E. Müller-Wien  
J. Neuberger-Lüttich  
E. Papperitz-Freiburg i. S.  
K. Rohn-Leipzig  
G. Scheffers-Charlottenburg  
A. Schoenflies-Königsberg  
C. Segre-Turin [i. P.  
M. Simon-Straßburg i. E.  
J. Sommer-Danzig  
P. Stäckel-Hannover  
O. Staude-Bostock  
H. Steinitz-Charlottenburg  
A. Voss-München  
E. Wälsch-Brünn  
H. G. Zeuthen-Kopenhagen  
K. Zindler-Innsbruck.

#### IV. Band:

M. Abraham-Göttingen  
C. Brauer-Berlin  
P. u. T. Ehrenfest-Göttingen  
S. Finsterwalder-München  
O. Fischer-Leipzig

Ph. Forchheimer-Graz  
Ph. Furtwängler-Aachen  
M. Grübler-Dresden  
L. Henneberg-Darmstadt  
K. Heun-Karlsruhe  
G. Jung-Malland  
F. Klein-Göttingen  
A. Kriloff-Petersburg  
H. Lamb-Manchester  
A. E. H. Love-Oxford  
C. H. Müller-Göttingen  
J. Petersen-Kopenhagen  
L. Prandtl-Göttingen  
H. Reisser-Aachen  
A. Schoenflies-Königsberg  
P. Stäckel-Hannover  
O. Tedone-Genua  
A. Timpe-Danzig  
E. Timerding-Straßburg i. E.  
A. Voss-München  
G. T. Walker-Simla (Indien)  
G. Zemplén-Budapest.

#### V. Band:

M. Abraham-Göttingen  
L. Boltzmann (†)  
G. H. Bryan-Bangor (Wales)  
P. Debye-München  
H. Duhou-Berlin  
H. Dieselhorst-Berlin  
S. Finsterwalder-München  
R. Gans-Tübingen  
F. W. Hinrichsen-Aachen  
E. W. Hobson-Cambridge  
J. H. van 't Hoff-Berlin  
H. Kamelings-Onnes-Leiden  
Th. Liebisch-Göttingen  
H. A. Lorentz-Leiden  
L. Mamlock-Berlin  
G. Mie-Greifswald  
H. Minkowski-Göttingen  
O. Mügge-Königsberg i. P.  
J. Nabl-Wien  
F. Pockels-Heidelberg  
L. Prandtl-Göttingen  
R. Reiff-Stuttgart

K. Runge-Göttingen  
A. Schoenflies-Königsberg  
M. Schröter-München  
A. Sommerfeld-München  
E. Study-Bonn  
A. Wangerin-Halle  
W. Wien-Würzburg  
J. Zenneck-Braunschweig

#### VI. 1. Band:

R. Bourgeois-Paris  
G. H. Darwin-Cambridge  
S. Finsterwalder-München  
H. Hergesell-Straßburg  
S. Hough-Kapstadt  
H. Meldau-Bremen  
J. M. Pernter-Wien  
P. Pizzetti-Pisa  
C. Reinhardt (†)  
A. Schmidt-Potsdam  
W. Trabert-Wien  
E. Wiechert-Göttingen.

#### VI. 2. Band:

E. Anding-Götha  
J. Bauschinger-Berlin  
A. Bemporad-Catania  
E. W. Brown-Haverford  
C. Ed. Caspari-Paris  
C. v. L. Charlier-Lund  
F. Cohn-Königsberg i. P.  
R. Emden-München  
F. K. Ginzler-Berlin  
J. v. Hepperger-Wien  
G. Herglotz-Göttingen  
H. Kobold-Kiel  
F. R. Moulton-Chicago  
G. v. Niessl-Brünn  
S. Oppenheim-Prag  
L. Schulhof-Paris  
K. Schwarzschild-Göttingen  
E. Strömgren-Kiel  
K. Sundmann-Helsingfors  
E. T. Whittaker-Cambridge  
G. W. Wirtz-Straßburg i. E.  
H. v. Zeipel-Pulkowa.

## Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abtheilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a/S.) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beige-steuert die Herren W. Ahrens, M. Böcher, A. v. Braunmühl, T. J. PA. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, L. Henneberg, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause, Josef Křičák, E. Lampe, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, Otto Meißner, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, K. Petr, S. Pincherle, C. Runge, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, F. Schur, E. Study, Th. Vahlen, A. Wangerin, K. v. Wesendonck, W. Wirtlinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr. — Maraunenhof, Herzog Albrechtallee 27.



11-348770



## VI 1, 3. HÖHERE GEODÄSIE.

VON

P. PIZZETTI

IN PISA.

### Inhaltsübersicht.

#### I. Allgemeine Grundlagen.

1. Aufgabe der höheren Geodäsie.
2. Lotrichtung, Schwerkraft.
3. Beobachtungstatsachen und Sätze der Potentialtheorie.
4. Weitere Folgerungen aus der Potentialtheorie. Theorem von *G. G. Stokes*.
5. Beobachtungen zur Bestimmung des Geoids. Reduktion der Schwerkraftsmessungen.
6. Geodätische Bestimmung des Geoids. Referenzellipsoid.
7. Lotabweichungen.
8. Reduktion der beobachteten Lotrichtungen.
9. *Bessels* Rotationsellipsoid.

#### II. Rechnungs- und Messungsmethoden.

##### A. Geodätische Rechnungen auf dem Rotationsellipsoid.

10. Fundamentalformeln.
11. Normalschnitte.
12. Geodätische Linien.
13. Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts.
14. Fortsetzung. Fall kleiner Bogen.
15. Bestimmung der Länge und des Azimuts eines geodätischen Bogens aus den geographischen Koordinaten der Endpunkte.
16. Geodätische Polarkoordinaten.
17. Vergleichung der geodätischen Linie mit einem Normalschnitt.
18. Das geodätische Dreieck.
19. Auflösung des geodätischen Dreiecks durch Reduktion auf das ebene Dreieck. Sphäroidischer Exzeß.
20. Sehnen und Normalschnitte.
21. Reduktion ellipsoidischer Figuren auf sphärische durch konforme Abbildung.
22. Rechtwinklige geodätische oder *Soldnersche* Koordinaten.
23. Übertragung der geographischen Koordinaten vermittels rechtwinkliger geodätischer.
24. Projektionen auf die Ebene.

**B. Landesvermessung.**

25. Basismessungen.
26. Basisapparat.
27. Winkel; ihre Reduktion auf das Ellipsoid.
28. Triangulation.
29. Basisnetze oder Vergrößerungsnetze.
30. Berechnung einer Triangulation und der geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte.
31. Ausgleichung.
32. Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.
33. Genauigkeit der Basis- und Winkelmessungen.

**C. Höhenmessung.**

34. Trigonometrisches Nivellement.
35. Der Refraktionskoeffizient als Funktion der atmosphärischen Verhältnisse.
36. Empirische Untersuchungen über den Refraktionskoeffizienten.
37. Geometrisches Nivellement.
38. Einfluß der Schwerestörungen auf Nivellements.
39. Das Mittelwasser der Meere und der Nullpunkt für die Höhen.
40. Genauigkeit eines Nivellements. Ausgleichung.

**D. Erdmessung.**

41. Ableitung der Konstanten des Erdellipsoids aus zwei oder mehr Meridianbogen.
42. Bestimmung von  $a$  und  $e$  durch Parallelkreisbogen.
43. Stücke des Ellipsoids. Lotabweichungen.
44. Fortsetzung. Bestimmung der Lotabweichungen.
45. Fortsetzung. Angenäherte Bestimmung von Geoidstücken.
46. Die Schwerestörungen und die Abweichungen zwischen Geoid und Ellipsoid.

**III. Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse.**

47. Anfänge der geodätischen Messungen, bei denen die Erde als Kugel betrachtet wird.
48. Physikalische Untersuchungen über die Gestalt der Erde.
49. Die wichtigsten geodätischen Messungen bis 1860.
50. Die hauptsächlichsten Berechnungen der Erdkonstanten.
51. Bestimmung der Abplattung aus Pendelmessungen.
52. Benutzung einiger astronomischer Daten zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids.
53. Moderne geodätische Arbeiten. Lotabweichungen.

**Literatur.****A. Bibliographisches.**

- O. Börsch*, Geodätische Literatur, auf Wunsch der Permanenten Kommission im Zentralbureau zusammengestellt, Berlin 1889.
- J. H. Gore*, A bibliography of geodesy. 2. ed. Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey 1901/02, Washington 1903, p 429.

- J. Herschel*, A bibliographical list of works relatives to pendulum operations in connection with the problem of the figure of the earth. Operations of the great trigonometrical survey of India 5 (1879), Appendix 5.
- B. A. M. Sadebeck*, Literatur der praktischen und theoretischen Gradmessungsarbeiten, Berlin 1880 (auch im Generalbericht der Europäischen Gradmessung 1880).

Man vergleiche auch die jährlichen Literaturübersichten in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart.

### B. Historisches.

- J. J. Baeyer*, Über die Größe und Figur der Erde, Berlin 1861.
- J. S. Bailly*, Histoire de l'astronomie ancienne depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie, Paris 1781.
- , Histoire de l'astronomie moderne depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'à l'époque de 1730, Paris 1785.
- A. Börsch*, Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt, 3. intern. Math.-Kongr., Heidelberg 1904.
- J. H. Gore*, Geodesy, London 1891.
- P. S. Laplace*, Mécanique céleste, 5, livre XI, Paris 1825.
- J. B. Listing*, Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde, Göttingen 1872.
- , Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers, Göttingen 1878.
- L. Posch*, Geschichte und System der Breitengradmessungen, Freysing 1860 (Diss.).
- B. A. M. Sadebeck*, Entwicklungsgang der Gradmessungsarbeiten, Berlin 1876.
- J. Todhunter*, A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace, 2 vol., London 1873 (*Todhunter*, History 1, 2).
- A. Westphal*, Basisapparate und Basismessungen, Berlin 1885—88.
- F. X. von Zach*, Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Gotha 1800—13.
- , Correspondance astronomique, géograph., hydrograph. et statistique, Gênes 1818—26.

### C. Die hauptsächlichsten Publikationsorgane staatlicher geodätischer Behörden.

- Mémorial du Dépôt général de la guerre, Paris.
- Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Wien 1871—1906 (Mitt. mil.-geogr. Inst. Wien).
- Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858.
- Procès verbaux des séances du Comité international des poids et mesures, Paris 1875—1906.
- Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey, Washington 1845—1906 (R. C. G. S.).
- Verhandlungen der Allgemeinen Konferenzen der Europäischen Gradmessung, von 1886 ab der Internationalen Erdmessung, Berlin 1865—1906 (Int. Erdm.).
- Verhandlungen der Permanenten Kommission der Europäischen Gradmessung, Berlin 1865—1896.

Veröffentlichungen des kgl. Preußischen Geodätischen Instituts, Potsdam 1868 bis 1906.

Veröffentlichungen des Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung 1861—1906.

(Außer diesen sind die Publikationen der geodätischen Behörden von Holland, Indien, Italien, Norwegen, Rußland, Schweden, Schweiz, Spanien usw. zu nennen.)

#### D. Lehrbücher.

*A. R. Clarke*, Geodesy, Oxford 1880.

*L. B. Francoeur*, Géodésie, 8. Aufl., Paris 1903.

*F. R. Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, 2 Bde., Leipzig 1880—84 (*Helmert*, H. G. 1, 2).

*W. Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart. Bd. 1, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 5. Aufl. 1904; Bd. 2, Feld- und Landmessung, 6. Aufl. 1904; Bd. 3, Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung, 4. Aufl. 1896 (*Jordan*, Handbuch 1, 2, 3).

*P. Pizzetti*, Trattato di geodesia teoretica, Bologna 1895.

*E. Pucci*, Fondamenti di geodesia, vol. 2, Milano 1883—87.

*L. Puissant*, Traité de géodésie usw., 3. éd., Paris 1840.

#### E. Monographien theoretischen Charakters.

*G. B. Airy*, On the figure of the earth, Lond. Phil. Trans. 116 (1826).

*C. C. G. Andrae*, Problèmes de haute géodésie, Copenhague 1881—83.

*J. J. Baeyer*, Über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre, Petersb. Mém. (7) 3 (1860).

—, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862.

—, Über den Einfluß lokaler Lotablenkungen auf das Nivellement, Astr. Nachr. 84 (1874).

*C. M. v. Bauernfeind*, Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre, Astr. Nachr. 67 (1866).

*F. W. Bessel*, Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astr. Nachr. 4 (1826).

—, Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht, Astr. Nachr. 14 (1837).

—, Über den Einfluß der Unregelmäßigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen, Astr. Nachr. 14 (1837).

*G. O. Bonnet*, Mémoire sur la figure de la terre considérée comme peu différente d'une sphère, Ann. di mat. 2 (1859).

*O. Börsch*, Die Lotablenkung und ihr Einfluß auf ein geometrisches Nivellement, Zeitschr. f. Vermess. 4 (1875).

—, Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten, 2. Aufl., Cassel 1885.

*C. Bremiker*, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869.

*H. Bruns*, Die Figur der Erde, Berlin 1878.

—, Über die Umkehrung der *Besselschen* Methode der sphäroidischen Übertragung, Astr. Nachr. 97 (1880).

- E. B. Christoffel*, Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben, *J. f. Math.* 64 (1864).
- , Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke, Berlin Abh. 1868.
- A. C. Clairaut*, La théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743.
- G. De Berardinis*, Alcune formole per calcolare un arco di parallelo terrestre, Messina 1890.
- J. B. J. Delambre*, Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien précédé d'un Mémoire sur le même sujet par *A. M. Legendre*, Paris 1798.
- H. A. Faye*, Réduction au niveau de la mer de la pesanteur observée à la surface de la terre (Coast and geodetical survey), par *M. G. R. Putnam*, Paris C. R. 120 (1895).
- C. F. Gauß*, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Göttingen 1827.
- , Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844—47.
- , Werke, Bd. 9, Göttingen 1903.
- P. A. Hansen*, Geodätische Untersuchungen, Leipzig 1865.
- F. R. Helmert*, Studien über rationelle Vermessung im Gebiete der höheren Geodäsie, Leipzig 1868.
- , Zur Theorie des geometrischen Nivellierens, *Astr. Nachr.* 81 (1873).
- , Entwicklung der ersten Glieder für die Reduktion eines sphäroidischen Dreiecks auf ein sphärisches mit denselben Seiten, *Zeitschr. f. Vermess.* 18 (1889).
- , Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung, Berlin Ber. 1900 und 1901.
- H. Hergesell*, Über die Formel von *G. G. Stokes* zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid, Straßburg 1891.
- K. G. J. Jacobi*, Über die Figur des Gleichgewichts, *Ann. Phys. Chem.* 33 (1834).
- , Nouvelles formules de géodésie communiquées par M. le prof. *E. Luther* à Königsberg, *Astr. Nachr.* 41 (1835).
- N. Jadanza*, Guida al calcolo delle coordinate geodetiche, Torino 1891.
- W. Jordan*, Ein Beitrag zur Theorie der terrestrischen Refraktion, *Astr. Nachr.* 88 (1876).
- , Sphäroidische Koordinatenumformung, *Zeitschr. f. Vermess.* 20 (1891).
- L. Krüger*, Zur Theorie rechtwinkliger geodätischer Koordinaten, *Zeitschr. f. Vermess.* 26 (1897).
- P. S. Laplace*, Théorie de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes, Paris Mém. pour 1782 (1785).
- , Mémoire sur la figure de la terre, Paris Mém. pour 1783 (1786).
- A. M. Legendre*, Recherches sur la figure des planètes, Paris Mém. pour 1784 (1787).
- , Suite des recherches sur la figure de la terre, *ibid.* 1789 (1795).
- , Analyse des triangles sur la surface d'un sphéroïde, *ibid.* 7 (1806).
- J. Liouville*, Note sur la figure d'une masse fluide homogène en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation, *J. éc. polytechn.* 14 (1834).
- , Note sur un passage de la Méc. cél. relatif à la théorie de la figure des planètes, *J. de math.* 2 (1837).
- C. Maclaurin*, A treatise on fluxions, Edinburgh 1742.
- C. O. Meyer*, De aequilibrii formis ellipsoidicis, *J. f. Math.* 24 (1842).
- E. F. A. Minding*, Über einige Grundformeln der Geodäsie, *J. f. Math.* 44 (1852).
- P. Pizzetti*, Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico, *Rend. Acc. Linc.* (5) 3 (1894).

- J. H. Pratt*, A treatise on attractions, *Laplaces* functions and the figure of the earth, London 1871.
- E. Pucci*, Sulle formole fondamentali della geodesia geoidica, Milano Ann. d. mat. (2) 14 (1886).
- B. A. M. Sadebeck*, Über den Einfluß der Lotablenkungen auf Winkelmessungen, Astr. Nachr. 90 (1877).
- Ch. M. Schols*, Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, Delft Ann. éc. polyt. 1 (1885).
- O. Schreiber*, Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der kgl. Preußischen Landesaufnahme, Berlin 1895.
- Th. Simpson*, A mathematical dissertation on the figure of the earth, London 1743.
- A. Sonderhof*, Die geodätischen Korrektionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel, Arch. Math. Phys. 15 (1870).
- , Ein Beitrag zu höheren Geodäsie, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872).
- J. Stirling*, On the figure of the earth and the variation of gravity on the surface, London Phil. Trans. 39 (1735).
- G. G. Stokes*, On attractions and on Clairauts theorem, Cambr. Dubl. math. J. 4 (1849) = Papers 2, Cambridge 1883.
- , On the variation of gravity at the earth, Cambridge Phil. Trans. 8 (1849) = Papers, *ibid*.
- J. L. Tiarks*, On Mr. Dalbys method of finding the difference of longitude between two points of a geodetical line etc., Phil. Mag. (2) 4 (1828).
- A. J. Yvon Villarceau*, De l'effet des attractions locales sur les longitudes et les azimuts etc., Paris C. R. 62 (1866).
- , Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la terre, J. de math. (2) 18 (1873).
- J. Weingarten*, Allgemeine Untersuchungen über die geodätischen Linien und die vertikalen Schnitte auf krummen Oberflächen (Anhang zu *Baeyer*, Das Messen usw.), Berlin 1862.
- , Über eine geodätische Aufgabe, Astr. Nachr. 73 (1869).
- G. Zachariae*, Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten (aus dem Dänischen übersetzt von *E. Lamp*), Berlin 1878.
- O. Zanotti-Bianco*, Il problema meccanico della terra, Torino 1880—85.

## F. Monographien über die geodätischen Messungen und ihre Reduktion.

- J. J. Baeyer*, Bestimmung der Höhe von Berlin, Astr. Nachr. 14 (1837).
- , Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840.
- , Über Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements, Astr. Nachr. 86 (1875).
- R. Benoît et Ch. Guillaume*, Les nouveaux appareils pour la mesure des bases géodésiques, Paris 1905 (Procès verb. Comité Poids et mesures).
- F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer*, Gradmessung in Ostpreußen und ihre Verbindung mit preußischen und russischen Dreiecksketten, Berlin 1838.
- J. C. Borda*, Expériences sur les règles qui ont servi à la mesure des bases, Paris 1810 (Anhang zu: *Méchain et Delambre*, Base du système métrique etc., Paris 1810).
- A. Börsch*, Über den Einfluß der Wahl verschiedener Nullrichtungen auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen, Astr. Nachr. 97 (1880).

- A. Börsch und L. Krüger, Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau, Heft 2, Berlin 1896.
- A. Börsch und F. Kühnen, Vergleichung der Mittelwasser der Ostsee und Nordsee, des Atlantischen Ozeans und des Mittelmeeres usw., Berlin 1891.
- O. Börsch, Über die Ausgleichung einer um ein Polygon gelegten geodätischen Dreieckskette, Astr. Nachr. 71 (1868).
- , Ausgleichungen von Präzisionsnivellements, Zeitschr. f. Vermess. 7 (1878).
- R. G. Boscovich, De expeditione ad dimetiendos duos meridiani gradus, Romae 1755.
- P. Bouguer, La figure de la terre déterminée par les observations de M. M. Bouguer et De la Condamine usw., Paris 1749.
- C. F. Cassini de Thury, La méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifiée dans toute l'étendue du royaume, Paris 1744.
- J. D. Cassini de Thury, P. F. A. Méchain et A. M. Legendre, Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et Greenwich, Paris 1791.
- A. R. Clarke (under the direction of Sir H. James), Account of the observations and calculations of the principal triangulation; and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived therefrom, London 1858.
- W. Eimbeck, The duplex base apparatus and directions for its use in field, R. C. G. S. 1897.
- A. Ferrero, Note sur la possibilité de calculer à priori les poids et la précision d'une triangulation par la simple connaissance de son canevas. Int. Erdm. 1880.
- A. Fischer, Der Einfluß der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln, Berlin 1882.
- C. F. Gauß, Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, Göttingen 1828 (Werke 9).
- Ch. L. Gerling, Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben, Hamburg 1843.
- P. A. Hansen, Von der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen und in ihren Anwendungen auf die Geodäsie, Leipzig 1861.
- K. K. Hartl, Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung, Wien 1883.
- , Über den Zusammenhang der terrestrischen Strahlenbrechung und der meteorologischen Elemente, Zeitschr. öst. Ges. Meteor. 16 (1881).
- C. Haupt, Die Ausgleichung großer geodätischer Dreiecke, Astr. Nachr. 107 (1884).
- O. Hecker, Bestimmung der Schwerkraft auf dem atlantischen Ozean sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid, Berlin 1903.
- F. R. Helmert, Lotabweichungen, Heft 1, Berlin 1886.
- , Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbes. in den Tyroler Alpen, in geodätischer und geologischer Beziehung, Berlin 1890.
- , Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau, Heft 1, Berlin 1893.
- , Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau, Berlin Ber. 1901.
- P. Hossard, Note sur la mesure des bases (Anhang zu Francoeur, Géodésie), Paris 1855.

- C. *Ibañez et Saavedra Meneses*, Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la Carte d'Espagne, Paris 1860.
- C. *Ibañez et Perrier*, Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, exécutée en 1879 etc., Paris 1886.
- E. *Jäderin*, Geodätische Längenmessung mit Stahlbändern und Metalldrähten, Stockholm 1885.
- W. *Jordan*, Die Grundformeln der terrestrischen Refraktion, Zeitschr. f. Vermess. 18 (1889).
- C. *Koppe*, Der Basisapparat des Generals Ibañez und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881.
- L. *Krüger*, Über ein Verfahren, die Ergebnisse mehrfacher Beobachtungen eines Dreiecksnetzes miteinander zu verbinden, Astr. Nachr. 133 (1893).
- , Über den Anschluß eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896).
- , Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen, Potsdam 1898.
- , Zur Ausgleichung von Polygonen und von Dreiecksketten und über die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902).
- F. *Kühnen und R. Schumann*, Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn, Berlin 1897.
- Ch. *Lallemand*, Nivellement de haute précision, Paris 1889.
- , Le niveau moyen des mers en Europe et l'unification des altitudes, Revue Scientifique 1890.
- P. L. M. *de Maupertuis*, La figure de la terre déterminée par les observations faites par ordre du Roy au cercle polaire, Paris 1738.
- P. J. *Méchain et J. B. Delambre*, Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque à Barcelone, 3 vol., Paris 1806—10.
- J. B. *Messerschmitt*, Das schweizerische Dreiecksnetz, 9, Zürich 1901.
- E. *Pechmann*, Die Abweichungen der Lotlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erfordernis einer Gradmessung, Wien Denkschr. 22 (1864).
- J. *Picard*, La mesure de la terre, Paris 1671 und Paris Mém. 1720.
- Pomerantzeff*, Sur la figure du géoïde, Abhandl. der topographischen Abteilung des Generalstabes, 54, St. Pétersbourg 1897 (russisch).
- J. *Porro*, Nouvel appareil destiné à la mesure des bases trigonométriques, Paris C. R. 29 (1849).
- J. H. *Pratt*, On the attraction of the Himalaya mountains and of the elevated regions beyond them, upon the plumb-line in India, London Phil. Trans. 165 (1855).
- B. *von Prodzynski*, Über die Aufstellung bisher noch nicht angewandter Bedingungsgleichungen bei Ausgleichungen geodätischer Dreiecksketten, Astr. Nachr. 71 (1868).
- L. *Puissant*, Sur les opérations géodésiques et astronomiques qui servent de fondement à la nouvelle carte de la France, Paris Mém. 16 (1838).
- L. *Puissant et E. Peytier*, Nouvelle description géométrique de la France etc., Paris 1832—53.
- V. *Reina e G. Cicconetti*, Ricerche sul coefficiente di refrazione terrestre in Roma sul 1895. Mem. Soc. Italiana dei XL (3) 10 (1896).

- V. Reina*, Determinazioni astronomiche di latitudine e d'azimut eseguite lungo il meridiano di Roma, Firenze 1903.
- W. Roy*, An account of the trigon. operation, by which the distance between the meridians of the R. Observatories of Greenwich and Paris has been determined, London Phil. Trans. 80 (1790).
- G. V. Schiaparelli*, Sulla compensazione delle reti trigonom. di grande estensione, Milano Ist. Lombardo 2 (1865) e 3 (1866).
- C. A. Schott*, Description and construction of a new compensation base apparatus etc., Washington, R. C. G. S. 1882.
- , The transcontinental triangulation and the American arc of the parallel, Washington 1900.
- , The Eastern oblique arc of the U. S., and osculating spheroid, Washington 1902.
- O. Schreiber*, Über die Anordnung von Horizontal-Winkelbeobachtungen auf der Station, Zeitschr. f. Vermess. 7 (1878).
- F. M. Schward*, Die kleine Speierer Basis usw., Speier 1822.
- A. Secchi*, Misura della base trigonom. eseguita sulla Via Appia, Roma 1858.
- P. Simon*, Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen, Berlin 1889.
- W. Snellius van Roijen*, Erathostenes Batavus, seu de terrae ambitus vera quantitate suscitatus, Leyden 1617.
- R. von Sterneck*, Über die Änderung der Refraktionskonstanten und Störungen der Lotlinie im Gebirge, Wien 1879.
- , Untersuchungen über den Einfluß der Schwerstörungen auf die Ergebnisse des Nivellements, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien 8 (1888), 9 (1889).
- , Die Schwerkraft in den Alpen und Bestimmung ihres Wertes für Wien, ibid. 11 (1892).
- J. G. W. Struve*, Arc du méridien de 25° 20' entre le Danube et la Mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1850 etc., St. Pétersbourg 1857—60.
- A. Venturi e E. Soler*, Prime ricerche sul coefficiente di refrazione in Sicilia, Palermo 1893.
- Ch. A. Vogler*, Über Stationsbeobachtungen in symmetrischer Anordnung, Zeitschr. f. Vermess. 14 (1885).
- J. T. Walker*, India's contribution to geodesy, London Phil. Trans. 186, Part II, (1896).

## I. Allgemeine Grundlagen.<sup>1)</sup>

**1. Aufgabe der höheren Geodäsie.** Um die Ziele der höheren Geodäsie in Kürze bezeichnen zu können, definieren wir als eine Niveaufläche der Erde<sup>2)</sup> eine solche Fläche, deren Normale in jedem

1) Einen großen Teil der Literaturnachweise über die fundamentalen Fragen der Geodäsie findet man in Teil III (Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse).

2) *C. Maclaurin* (A treatise on fluxions, Edinburgh 1742) benutzte zuerst (nach *Todhunter*, History, chapt. IX) die Bezeichnung Niveaufläche bei Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen.

Punkte mit der Vertikalen oder Lotrichtung dieses Punktes zusammenfällt. Die Hauptaufgabe der höheren Geodäsie ist dann das Studium dieser Niveauflächen und die Lösung der damit zusammenhängenden Probleme. Die praktische Geodäsie zieht aus diesen Studien insofern Nutzen, als die Niveauflächen die besten Bezugsflächen für die Vermessungsoperationen abgeben, soweit man dabei wie in der niederen Geodäsie nicht überhaupt von der Krümmung der Erdoberfläche absehen kann.

**2. Lotrichtung, Schwerkraft.** Überläßt man einen materiellen Punkt an der Stelle  $M$ , der in bezug auf ein mit dem starren Teil der Erde fest verbundenes Koordinatensystem keine relative Anfangsgeschwindigkeit hat, der Wirkung der Schwere, so bewegt er sich in einer Richtung  $MV$  und erhält nach der unendlich kleinen Zeit  $dt$  die Geschwindigkeit  $g dt$ . Die Richtung  $MV$  nennt man die Vertikale oder die Lotrichtung und  $g$  die Schwerkraftsbeschleunigung oder kurz Schwerkraft<sup>3)</sup> im Punkte  $M$ . Nach den Sätzen über die relative Bewegung gilt für den Vektor  $\bar{g}$ <sup>4)</sup>

$$(1) \quad \bar{g} = \bar{A}_a - \bar{A}_s,$$

wo  $\bar{A}_a$  den Beschleunigungsvektor der absoluten Bewegung des Punktes  $M$  und  $\bar{A}_s$  den des beweglichen Raumes (moto di strascimento) in demselben Punkte bedeutet, d. h. den Beschleunigungsvektor für den Punkt  $M$ , wenn er mit dem angenommenen Koordinatensystem fest verbunden gedacht wird. Die Beschleunigung  $A_a$  hat ihre Ursache in der Anziehungskraft der Masse der Erde und der Gestirne auf  $M$ ,  $A_s$  in der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Achse und in ihrer Translation im Raume.

Wir nehmen jetzt als Koordinatenanfangspunkt den Schwerpunkt der Erde an und als  $z$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Achse der täglichen Umdrehung, deren Winkelgeschwindigkeit wir  $\omega$  nennen. Bezeichnen wir dann mit  $V$  das Potential der Erdmasse in bezug auf  $M(x, y, z)$ , mit  $X_i, Y_i, Z_i$  die Koordinaten eines punktförmig gedachten Gestirns von der Masse  $\mu_i$ , mit  $R_i, \rho_i$  die Entfernungen des Gestirns vom Koordinatenanfangspunkt und von  $M$  und

3) Die einfache Anziehungskraft der Erde auf einen Massenpunkt 1 bezeichnen *P. L. M. de Maupertuis* und *A. C. Clairaut* mit *gravité*, *C. Maclaurin* mit *gravity* und *R. G. Boscovich* mit *gravitas primitiva*. Die zusammengesetzte Wirkung der Anziehungskraft der Erde und der durch die tägliche Bewegung verursachten Zentrifugalkraft bezeichnen die genannten Autoren der Reihe nach mit *pesanteur*, *gravitation* und *gravitas residua* (vgl. *Todhunter*, *History*, § 25).

4) Da in dem betrachteten Augenblicke die relative Geschwindigkeit Null ist, ist auch die sog. „zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung“ gleich Null.

mit  $f$  die Gravitationskonstante, so ergeben sich als Komponenten des Vektors  $\bar{g}$  nach (1):

$$g_x = f \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x + \xi$$

$$g_y = f \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y + \eta$$

$$g_z = f \frac{\partial V}{\partial z} + \zeta,$$

wo

$$\xi = f \sum_i \mu_i \left( \frac{X_i - x}{e_i^3} - \frac{X_i}{R_i^3} \right)$$

ist und ähnliche Ausdrücke für  $\eta$  und  $\zeta$  gelten; die Summation ist über die verschiedenen Sterne zu erstrecken.

Bei einer ersten Definition der Vertikalen, und soweit man die Figur der Erde als unveränderlich betrachtet, können die Glieder  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  vernachlässigt werden. Denn es ist die Länge des Vektors, dessen erste Komponente

$$f\mu \left( \frac{X-x}{e^3} - \frac{X}{R^3} \right)$$

ist, immer kleiner als

$$f\mu \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2} \right),$$

wo  $d$  die größte Entfernung des Punktes  $M$  vom Koordinatenanfangspunkt bedeutet. Die letzte Größe kann man aber angenähert durch  $2f\mu \cdot \frac{d}{R^3}$  oder auch durch  $\Delta g = 2g \cdot \frac{\mu}{m} \frac{d^3}{R^3}$  ersetzen, wo  $m$  die Masse der Erde bezeichnet. Für die Sonne ist  $\frac{\mu}{m} = 324400$ ,  $\frac{R}{d} > 23000$ , daher  $\Delta g < \frac{1}{18770000} g$ ; für den Mond gilt  $\frac{\mu}{m} < 0,0126$ ,  $\frac{R}{d} > 56,9$ ,  $\Delta g < \frac{1}{7310000} g$ .<sup>5)</sup> Für die Planeten ergibt sich  $\Delta g$  noch viel kleiner. In Anbetracht der Beobachtungsungenauigkeit bei der Bestimmung von  $g$  sind aber solche Werte von  $\Delta g$  für die Geodäsie ganz ohne Bedeutung.

Wir reduzieren deshalb die Komponenten der Schwerebeschleunigung auf die Ausdrücke:

$$(2) \quad g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

wo

$$(3) \quad W = fV + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

5) Solchen Änderungen der Größe von  $g$  entsprechen Änderungen der Lotrichtung, die nicht größer sind als  $\frac{\Delta g}{g \cdot \text{arc } 1''} = 0'',028$ .

ist. Auf Grund der Sätze über die Kräfte, die ein Potential (vgl. II A 7b (*H. Burkhardt* und *W. F. Meyer*)) besitzen, findet man dann, daß:

$$W = \text{konst.}$$

die Gleichung einer Niveaulfläche ist und daß die Schwerkraft im Punkte  $M$  durch

$$(4) \quad g = - \frac{\partial W}{\partial n}$$

gegeben ist, wo  $dn$  ein Element der auf der Niveaulfläche in  $M$  nach außen hin errichteten Normalen ist.

Wenn man von den Meeresbewegungen, die aus astronomischen oder meteorologischen Ursachen entstehen, absieht, so wird die Wasseroberfläche des Meeres zu einer Niveaulfläche gehören, und wenn man noch annimmt, daß die Oberflächen der verschiedenen Meere in einer einzigen Niveaulfläche liegen, so wird man diese als Bezugsfläche wählen und ihre Bestimmung als das Endziel der geodätischen Operationen ansehen können<sup>6)</sup>. Nach einer von *J. B. Listing*<sup>7)</sup> eingeführten Bezeichnung hat man ihr den Namen Geoid gegeben. Da es aber erstens zweifelhaft ist, ob das Mittelwasser der Meere, wie es von den Pegeln aufgezeichnet wird, genügend genau mit demjenigen übereinstimmt, das sich bei Abwesenheit der störenden Ursachen einstellen würde, und zweitens, ob die Mittelwasser verschiedener Pegel derselben Niveaulfläche angehören, so ist es präziser, durch Übereinkunft diejenige Niveaulfläche, die durch den Stand des Mittelwassers an einem bestimmten Pegel gegeben ist, als Geoid anzusprechen<sup>8)</sup>.

6) Daß das Studium der Figur der Erde an eine Niveaulfläche anknüpfen muß, ist explizite zuerst von *C. F. Gauß* ausgesprochen in „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona usw.“, Werke 9, p. 49. Stillschweigend ist man allerdings immer von diesem Gedanken ausgegangen, sobald man begonnen hatte, sich systematisch mit dem Problem der Figur der Erde zu beschäftigen. So stellt *J. Newton* in t. III, prop. XVIII der Principia, wo er das Verhältnis der polaren Halbachse eines Planeten zur äquatorealen bestimmen will, die Bedingung auf, daß die Meere sich im Gleichgewicht befinden sollen. Man vergleiche ferner *A. C. Clairaut*, Théorie de la figure de la terre, Paris 1743, Einleitung. *F. W. Bessel* (Gradmessung in Ostpreußen, Abhandlungen 3, p. 128) definiert als *mathematische Figur der Erde* diejenige Fläche, in der die Oberflächen eines Netzes von Kanälen liegen würden, die mit dem Meere kommunizieren usw.

7) Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde, Göttingen 1873, p. 41. Man benutzt auch nach *F. W. Bessel* die Bezeichnung „*mathematische Figur der Erde*“ (*F. R. Helmert*, *H. Bruns* u. a.).

8) Die genannten Zweifel sind speziell ausgesprochen von *H. Bruns*, Die Figur der Erde, Berlin 1878, § 1. Die Frage der präzisen Definition des Geoids

**3. Beobachtungstatsachen und Sätze der Potentialtheorie.** Wir können als gegebene Tatsachen annehmen:

1) daß die physische Erdoberfläche wenig von einer Kugel verschieden ist, deren Mittelpunkt auf der Rotationsachse der Erde liegt oder daß, nachdem man einen Punkt  $C$  auf der Rotationsachse und einen Radius  $R$  geeignet gewählt hat, die Differenz zwischen  $R$  und dem Radiusvektor  $r$  von  $C$  nach einem Punkte  $P$  der Erdoberfläche eine kleine Größe im Vergleich zu  $R$  ist, genauer, daß

$$\left| \frac{R-r}{R} \right| < \frac{1}{100} \text{ )}$$

ist;

2) daß das Verhältnis

$$\frac{\omega^2 R^3}{fM},$$

wo  $M$  die Masse der Erde bezeichnet, ungefähr gleich  $\frac{1}{288,4}$  ist<sup>10)</sup>.

*Folgerungen.* Wenn man von den vorstehenden Daten ausgeht, so kann man beweisen, daß

1) die Richtung der Schwerkraft in einem Punkte  $P$  der Erdoberfläche oder außerhalb derselben mit dem Radiusvektor  $CP$  einen *stumpfen* Winkel bildet, wenigstens so lange dieser Radiusvektor rundgerechnet weniger als sechsmal so groß ist als der mittlere Radius  $R$ . Außerhalb der Erdoberfläche und innerhalb dieser Grenze kann man deshalb sicher sein, daß die Funktion  $W$  nach oben hin abnimmt.

2) Innerhalb der genannten Grenze sind die Niveauflächen geschlossen und schneiden je den von  $C$  ausgehenden Radius nur einmal<sup>11)</sup>.

*Sätze der Potentialtheorie.* Aus den Eigenschaften der Potentialfunktionen und aus einfachen Rechnungen mit Benutzung von (2), (3), (4) findet man:

a) Die Niveauflächen  $W = \text{konst.}$  sind stetige Flächen ohne Kanten und Ecken.

hängt mit der Wahl des Nullpunktes für die Höhen zusammen, worüber man Nr. 37 vergleiche.

9) Wenn man von den geographischen Beweisen absieht, so wird die annähernde Kugelgestalt der Erde noch durch verschiedene astronomische Tatsachen, speziell durch die Mondparallaxen, bewiesen.

10) *Helmert*, H. G. 2, p. 82; *J. Tisserand*, *Traité de mécanique céleste* 2, p. 91. Den Wert dieses Verhältnisses kann man aus der Theorie der Mondbewegung ableiten.

11) Daß die Niveauflächen der Erde geschlossen sind, wird gewöhnlich ohne Beweis angenommen. Der Beweis ergibt sich leicht aus den angeführten Tatsachen, vgl. *P. Pizzetti*, *Acc. Linc. Rendic.* (5) 10 (1901), p. 9 u. 35.

b) Die Richtung der Schwerkraft ändert sich stetig von einem Raumpunkt zum andern. (Diese beiden Tatsachen gelten sowohl innerhalb wie außerhalb der Erdoberfläche.)

c) Die Krümmung der Niveauflächen (d. h. die Hauptkrümmungsradien und die Richtung der Krümmungslinien) ändert sich im Innern der Erde nur dann stetig, wenn die Dichte sich stetig ändert. Erleidet diese an einer Stelle eine sprungweise Änderung, so treten auch Krümmungsdiskontinuitäten in den Niveauflächen auf<sup>12)</sup>.

d) Wenn  $x$  eine Tangente in einem Punkte  $P$  einer Niveaufläche ist und wenn man auf der Vertikalen von  $P$  einen unendlich benachbarten Punkt  $P_1$  im Abstände  $dz$  annimmt, so bildet die Vertikale  $P_1V_1$  von  $P_1$  mit der Geraden  $x$  einen Winkel, dessen Kosinus bis auf Glieder zweiter Ordnung den Wert hat<sup>13)</sup>:

$$(5) \quad \cos(v_1x) = \frac{dz}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x},$$

wo die Werte von  $g$  und der Ableitung von  $g$  sich auf den Punkt  $P$  beziehen.

e) Wenn das Potential der anziehenden Masse aus irgend einem Grunde eine unendlich kleine Änderung  $\delta V$  erfährt, so erleidet die Niveaufläche (die einem bestimmten Werte der Funktion  $W$  entspricht) die Verschiebung  $\delta h = \frac{\delta V^{14)}}{g}$  ( $h$  positiv nach oben gerechnet).

**4. Weitere Folgerungen aus der Potentialtheorie. Theorem von G. G. Stokes.** Wenn man eine Niveaufläche  $S$  außerhalb der Erdmasse als bekannt voraussetzt und wenn die Gesamtmasse  $M$  der Erde gegeben ist, so ist die Funktion  $W$  und deshalb auch der Wert der Schwerkraft für alle Punkte auf  $S$  und außerhalb von  $S$  bestimmt<sup>15)</sup>. Denn macht man zwei verschiedene Annahmen  $V, V'$  über den Aus-

12) Diese diskontinuierlichen Änderungen sind berechnet von *H. Bruns*, Figur der Erde, § 2. Vgl. auch *Helmert*, H. G. 2, p. 35.

13) Diese Formel ist leicht abzuleiten nach *Brunns*, Figur der Erde, § 2. Vgl. auch *P. Pizzetti*, Astr. Nachr. 138 (1895), p. 353.

14) Dies Theorem ist von *H. Bruns* bewiesen (Figur der Erde, p. 20). *O. Zanotti-Bianco* (Torino Atti 31 (1896), p. 1022) hat bemerkt, daß die genannte Relation bereits von *J. H. Pratt* (A treatise on attractions etc., 4. edit. Cambridge 1871) angegeben ist; aber die Ausführungen von *Pratt* sind kaum ein Beweis zu nennen.

15) *G. G. Stokes*, On attractions and on *Clairauts* theorem, Cambr. and Dubl. math. J. 4 (1849), p. 194. In der Fassung des Theorems bei *Stokes* fehlt die Bedingung, daß die gesamte Masse bekannt sein muß, und infolgedessen ist der Beweis unvollständig. Der Satz und Beweis wurden vervollständigt von *H. Poincaré* (vgl. *Tisserand*, Méc. céle. 2, p. 324).

druck des Potentials der Anziehungskraft der Erde, so muß die Funktion  $V - V'$  sich auf  $S$  auf eine (unbekannte) Konstante  $C$  reduzieren und überdies außerhalb von  $S$  der Gleichung  $\Delta = 0$  genügen. Andererseits ist  $V - V'$  die Potentialfunktion der Gesamtmasse Null. Die Konstante  $C$  muß deshalb Null sein<sup>16)</sup> und daher auch  $V - V'$  sowohl auf  $S$  wie außerhalb von  $S$  verschwinden.

Setzt man speziell voraus, daß  $S$  ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei, dessen kleine Achse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt, so erhält man für einen beliebigen Punkt  $P$ :

$$(6) \quad V = (M + \frac{2}{3} \pi \rho a^2 b) \frac{\text{arc tg } E}{(a^2 - b^2)^{1/2}} - \frac{2 \pi \rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} (E - \text{arc tg } E) \varepsilon^2 \\ - \frac{\pi \rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left( \text{arc tg } E - \frac{E}{1 + E^2} \right) (x^2 + y^2).$$

Darin bedeuten  $x, y, z$  die Cartesischen Koordinaten von  $P$ , der Mittelpunkt des Ellipsoids ist Anfangspunkt des Koordinatensystems und die  $z$ -Achse fällt mit der Rotationsachse zusammen;  $a, a, b$  sind die Halbachsen des Ellipsoids. Außerdem ist gesetzt:

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}$$

unter  $\lambda$  die größere Wurzel der Gleichung:

$$\frac{z^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} = 1$$

verstanden. Die Größe  $\rho$  ist ferner definiert durch die Formel:

$$\frac{\omega^2}{2 \pi f \rho} = \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon^3} \text{arc tg } \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}, \text{ wo } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \text{ ist.}$$

In dem praktisch wichtigen Falle, daß  $\varepsilon$  sehr klein ist, ist es zweckmäßig, die Ausdrücke für  $V, E$  und  $\lambda$  in Reihen zu entwickeln, wobei alle höheren Potenzen von  $\varepsilon$  als die dritte und das Produkt von  $\varepsilon^2$  mit  $\omega^2$  vernachlässigt werden können.

Die Formeln (3) und (6) geben dann:

$$(7) \quad W = \frac{Mf}{r} + \frac{a^2 Mf}{6r^3} (3 \sin^2 \theta - 2) \left( \varepsilon^2 - \frac{a^2 \omega^2}{Mf} \right) + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2},$$

wenn man mit  $r$  den Radiusvektor und mit  $\theta$  das Komplement der geozentrischen Breite von  $P$  bezeichnet. Mit demselben Grade der Annäherung ergibt sich für die Schwerkraft im Punkte  $P$ :<sup>15)</sup><sup>17)</sup>

16) Beweis durch Anwendung der Formeln (16), (17) in II A 7 b (*H. Burkhardt* und *W. F. Meyer*) auf die Funktion  $V - V'$ .

17) *Helmert*, H. G. 2, p. 75. Der vollständige Ausdruck von  $V$  für ein Ellipsoid ist 1890 von *M. Hamy* mit Hilfe *Laméscher* Funktionen gegeben [*J. de*

$$(8) \quad g = \frac{Mf}{r^2} + \frac{a^2 Mf}{6r^4} (3 \sin^2 \theta - 2) \left( \varepsilon^2 - \frac{a \omega^2}{g_a} \right) - \omega^2 r \sin^2 \theta,$$

wo  $g_a$  die Schwerkraft auf dem Äquator bezeichnet. Durch Anwendung der letzten Formel ergibt sich, indem man nacheinander  $\theta = 0$  und  $\theta = 90^\circ$  setzt:

$$\frac{g_b - g_a}{g_a} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_a} - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

oder auch mit derselben Annäherung:

$$(9) \quad \frac{g_b - g_a}{g_a} + a = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_a}.$$

Hier bezeichnet  $g_b$  die Schwerkraft am Pol und  $a$  die Abplattung  $\frac{a-b}{a}$  des Ellipsoids. Die Gleichung (9) heißt das *Clairautsche Theorem*.

Der Bruch  $\frac{\omega^2 a}{g_a}$  (Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator) ist merklich identisch mit dem Ausdruck  $\frac{\omega^2 R^3}{fM}$  aus Nr. 3 und hat deshalb den numerischen Wert  $\frac{1}{288,4}$ ; wir werden ihn mit  $\gamma$  bezeichnen.

Mit demselben Grade der Annäherung können wir Formel (8) die Gestalt geben:

$$(8') \quad g = g_a (1 + \beta \sin^2 \varphi) = g_{45} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi \right),$$

in der man gewöhnlich die Schwerkraft im Meeresniveau ausdrückt;  $\varphi$  bedeutet die geographische Breite und  $g_{45}$  die Schwerkraft unter der Breite  $45^\circ$ .

Die Formel (8') ist von *J. Newton*<sup>18)</sup> für den Fall eines homogenen Planeten gegeben und von *A. C. Clairaut* unter der allgemeineren Voraussetzung bewiesen, daß die Dichte im Erdinnern sich in gewisser regelmäßiger Weise ändere; unter derselben Voraussetzung hat *Clairaut* auch zum ersten Male die Formel (9) bewiesen<sup>19)</sup>. *G. B. Airy*<sup>20)</sup> behauptete dann und *G. G. Stokes*<sup>21)</sup> bewies, daß die Relation (9) ledig-

math. (4) 6 (1890), p. 69]. Ohne Benutzung jener Funktionen hat *P. Pizzetti* den expliziten Ausdruck für  $V$  (Formel (6)) entwickelt [Acc. Linc. Rend. (5) 3 (1894), p. 166]. Es ist leicht zu sehen, daß der angenäherte Wert (7) von  $W$  mit dem durch Formel (1) bei *Helmert*, H. G. 2, p. 75 gegebenen übereinstimmt, wenn man die Formeln (10), (11), (12) (p. 75) berücksichtigt. Mit derselben Annäherung stimmt unsere Gleichung (8) mit (3) bei *Helmert* überein.

18) Phil. nat. principia 3, prop. XX.

19) Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743, 2. partie, § 49.

20) London Phil. Trans. 116 (1826), p. 562—578.

21) Vgl. Fußnote 15.

lich daraus folgt, daß die Niveaufläche im Meeresniveau ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Die Benutzung der Schwerkraftsmessungen zur Bestimmung der Abplattung ist deshalb *völlig unabhängig von der Annahme über die Verteilung der Dichte im Erdinnern.*

Setzt man voraus, daß die Niveaufläche  $S$  ein wenig von einem Ellipsoid verschieden sei und daß in jedem Punkte die Differenz  $\Delta g$  zwischen dem wirklichen Wert der Schwerkraft mit dem durch Formel (8') gegebenen bekannt sei, so kann man nach *Stokes* in jedem Punkte den Abstand  $\Delta n$  der Fläche  $S$  von dem Ellipsoid  $E$ , auf das (8') sich bezieht, ermitteln. Mißt man den genannten Abstand  $\Delta n$  längs des Radiusvektor vom Zentrum  $C$  des Ellipsoids nach irgendeinem Punkte  $P$  von  $S$  (oder mit derselben Annäherung längs des Lotes in  $P$ ), so ergibt sich:<sup>22)</sup>

$$(10) \quad \Delta n = \frac{a}{4\pi G} \int_S \Delta g \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + \right. \\ \left. + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \lg \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right\} d\Omega,$$

wobei die Integration über  $S$  oder mit derselben Annäherung auch über eine Kugel zu erstrecken ist;  $d\Omega$  bedeutet das Flächenelement auf einer Kugel um  $C$  mit dem Radius 1,  $\Delta g$  ist die Schwerestörung im Punkte  $M$ , auf den sich das Element  $d\Omega$  bezieht und  $\psi$  der Winkel, unter dem die Entfernung  $PM$  von  $C$  aus erscheint;  $G$  bezeichnet einen Mittelwert von  $g$ .

Die *Stokes'sche* Formel wird einen praktischen Wert haben, wenn von zahlreichen gleichmäßig über die Erde verteilten Orten Schwerkraftsmessungen vorliegen. *H. Hergesell*<sup>23)</sup> glaubt sogar, daß man auch aus einer beschränkten Zahl von Schwerkraftsmessungen um einen Ort herum, wenn auch nicht auf den Betrag, so doch auf das Vorzeichen der Abweichung des Geoids vom Ellipsoid an jenem Orte schließen kann.

Sowohl bei dem Beweise des *Clairaut'schen* Satzes wie bei dem der Formel (10) macht *Stokes* von der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen<sup>24)</sup> Gebrauch, indem er mit den Kugelfunktionen

22) Cambridge Phil. Trans. 8 (1849), p. 672; *Helmert*, H. G. 2, p. 253.

23) Über die Formel von *G. G. Stokes* zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid, Diss. Straßburg 1891 (vgl. dazu die Bemerkungen von *A. Börsch* in Fortschr. d. Math. 22 (1893), p. 1194).

24) Die Entwicklung der Potentialfunktion schreitet nach ganzen positiven Potenzen des Verhältnisses  $\frac{r'}{r}$  des Radiusvektors nach dem Massenelement und nach dem „Aufpunkt“ fort. Da dies Verhältnis nicht immer kleiner als 1 ist, so

zweiter Ordnung abbricht. *Helmert*<sup>25)</sup> berücksichtigt auch noch Kugelfunktionen vierter Ordnung und erhält, indem er die Darstellung der Schwerkraft durch die Formel:

$$g = g_a(1 + \beta_2 \sin^2 \varphi + \beta_4 \sin^4 \varphi)$$

als gegeben ansieht, als Gleichung des Meridians der Niveaufläche die folgende Beziehung zwischen dem Radiusvektor  $r$  und der Breite  $\varphi$ :

$$(11) \quad r = a \{ 1 - \alpha(1 + \beta - \alpha) \sin^2 \varphi - \delta \sin^2 \varphi + (\alpha\beta - \alpha^2 + \delta) \sin^4 \varphi \},$$

wo

$$\beta = \beta_2 + \beta_4, \quad \alpha = \frac{5}{2} \gamma - \beta - \alpha \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{2}{7} \delta,$$

$$\delta = \frac{1}{3} (7 \alpha^2 - 4 \alpha \beta + \beta_4)$$

ist.

### 5. Beobachtungen zur Bestimmung des Geoids. Reduktion der Schwerkraftsmessungen.

a) *Astronomisch-geodätische Beobachtungen.* Die Lotrichtung  $V$  eines Punktes  $P$  wird charakterisiert durch die beiden Elemente: *astronomische Breite und Länge*, von denen die erste das Komplement des Winkels ist, den die Richtung  $V$  (nach oben hin) mit der Nordrichtung der Erdachse macht und die zweite derjenige Winkel, den die durch die Vertikale parallel zur Erdachse gelegte Ebene (astronomische Meridianebene in  $P$ ) mit einer festen Ebene durch die Erdachse (Nullmeridian) macht. Wir werden die Länge positiv von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  nach Osten rechnen; den Ort der Punkte mit der Breite Null werden wir Äquator nennen und allen Punkten nördlich vom Äquator positive und südlich vom Äquator negative Breite beilegen. Durch Vergleichung der Zenitrichtung mit den Richtungen nach den Gestirnen an der Himmelskugel liefert die sphärische Astronomie (vgl. VI 2, 2, *F. Cohn*) die Mittel, um für jeden Erdort Länge und Breite zu ermitteln. Es gibt noch ein drittes astronomisch-geodätisches Element, „das astronomische Azimut“, das folgendermaßen definiert ist. Ist  $A$  irgend ein von  $P$  aus sichtbarer Punkt, so heißt astronomisches Azimut des Punktes  $A$  in bezug auf  $P$  der Winkel, den die durch  $A$

bestehen Konvergenzbedenken gegen eine solche Entwicklung (vgl. *Helmert*, H. G. 2, p. 135 und *Tisserand*, Méc. céle. 2, p. 317). Um solchen Bedenken aus dem Wege zu gehen, hat *Helmert* die „Methode der Kondensation“ ersonnen, von der in der nächsten Nummer die Rede sein wird. Eine Ableitung der Formel (10), die von den genannten Bedenken frei ist, hat *Pizzetti* gegeben, Torino Acc. Atti 31 (1896), p. 859.

25) H. G. 2, p. 77—85.

gehende Vertikalebene in  $P$  mit der Meridianebene von  $P$  bildet; es wird positiv von Norden über Osten-Süden-Westen von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  gerechnet.

b) *Die eigentlichen geodätischen Messungen.* Als solche kommen in Betracht:

1. der Winkel, welchen der Visierstrahl von  $P$  nach einem Punkte  $A$  mit der Lotrichtung in  $P$  bildet (*Zenitdistanz* von  $A$  in bezug auf  $P$ );

2. der Winkel  $BZA$  zwischen den Vertikalebenen in  $P$ , die durch zwei von  $P$  aus sichtbare Punkte  $A$  und  $B$  gehen (*Horizontalwinkel* zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  von  $P$  aus oder Differenz der Azimute);

3. die Länge gewisser, im nächsten Abschnitt zu definierender Linien zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche;

4. die Höhen der Punkte über dem Meeresniveau.

c) *Andere astronomische Daten* außer den unter a) genannten, wie die *Mondparallaxe*, die *Ungleichheiten der Mondbewegung*, die *Präzession* und *Nutation*, können nur in geringerem Grade zur Kenntnis der Erdgestalt beitragen wie die vorher angeführten; wir berichten darüber in Nr. 53.

d) *Schwerkraftsmessungen.* Indem wir wegen der Theorie des Pendels und der Messung der Schwerkraft mit demselben auf IV 7 (*Ph. Furtwängler*) verweisen, sei hier nur erwähnt, daß man die Schwerkraftsmessungen in absolute und relative Messungen einteilt. Die ersten haben den Zweck, direkt den Wert von  $g$  an einem Orte zu ermitteln und erfordern viel Zeit, Sorgfalt und komplizierte Apparate; bei den relativen Messungen will man dagegen nur die Differenz der Schwerkraftswerte für zwei Orte ermitteln, was sich in kürzerer Zeit und mit verhältnismäßig einfacheren Apparaten erreichen läßt<sup>26)</sup>.

Indem wir die Auseinandersetzungen über die Reduktion der eigentlichen geodätischen Messungen (welche die Hauptaufgabe der Geodäsie bilden) auf den folgenden Abschnitt verschieben, seien hier nur einige Worte über die *Reduktion der Schwerkraftsmessungen* gesagt.

Die beobachteten Schwerkraftswerte müssen reduziert werden, um sie sämtlich auf eine Niveaufläche (gewöhnlich das Meeresniveau) zu beziehen. Sei  $Q$  der Ort, an dem die Schwerkraft  $g_q$  gemessen ist, und  $P$  der Punkt, in dem die Vertikale von  $Q$  das Geoid trifft, und setzen wir für den Augenblick voraus, daß sich zwischen  $Q$  und

26) *R. v. Sterneck*, Milit.-geogr. Inst. Wien 7 (1887), p. 83; *G. Defforges*, Paris C. R. 106 (1888), p. 126, 191.

$P$  keine Masse befindet, so kann die Differenz  $g_p - g_q$  mit genügender Genauigkeit nach der Formel<sup>27)</sup>:

$$(12) \quad g_p - g_q = \frac{2H}{R} g_q$$

berechnet werden, wo  $H = PQ$  ist und  $R$  einen mittleren Erdradius bedeutet. Befindet sich zwischen  $A$  und  $B$  Masse, so hat man lange Zeit die Attraktion der gesamten Schicht von der beobachteten Schwerkraft abgezogen. Wird der Einfachheit halber das Terrain um  $Q$  als horizontal vorausgesetzt, so kann man diese Attraktion mit

$$(13) \quad \frac{3}{2} \frac{H}{R} \cdot \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot g_q$$

ansetzen, wo  $\Theta_m$  die mittlere Erddichte und  $\Theta$  die Dichte der Massenschicht zwischen  $Q$  und  $P$  bedeutet. Die vollständige Korrektur würde also sein<sup>28)</sup>:

$$(14) \quad g_p - g_q = \frac{2H}{R} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m}\right) g_q.$$

Will man auf die Abweichung des Terrains von der Horizontalität Rücksicht nehmen, so muß man noch die Attraktion  $T$  der Masse, die sich zwischen der horizontalen Ebene von  $Q$  und der wirklichen Erdoberfläche befindet oder dort fehlt, in (14) rechts hinzufügen. Man hat dann:

$$(14') \quad g_p - g_q = \frac{2H}{R} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m}\right) g_q + T;$$

$T$  heißt die *Reduktion auf horizontales Terrain*<sup>29)</sup>.

Diese Reduktionsart der beobachteten Schwerkraft stützt sich auf ein Prinzip, dessen Richtigkeit die Erfahrung im allgemeinen nicht bestätigt hat, nämlich, daß die Abweichungen des Geoids von einem Ellipsoid ausschließlich der Wirkung der *sichtbaren Störungsmassen*

27) Diese Formel kann man aus (8) ableiten, vgl. *Helmert*, H. G. 2, p. 98, 166.

28) Diese Reduktionsmethode ist nach *Todhunter* (*History*, chapt. XII) zuerst von *P. Bouguer* (*La figure de la terre déterminée etc. aux environs de l'équateur*, Paris 1749) angegeben. Die Formel (14) geht gewöhnlich unter dem Namen der *Th. Youngschen Regel*, der sie ohne Beweis in *London Phil. Trans.* 109 (1819), p. 89 (*Todhunter*, *History* letztes Kapitel) gab. Vgl. auch *P. S. Laplace*, *Méc. cél.* 5, livre XI, 6.

29) *R. G. Boscovich* scheint zuerst 1755 an die Möglichkeit einer solchen Kompensation gedacht zu haben (vgl. *Todhunter*, *History*, § 476). Wegen weiterer Notizen betreffs einer solchen Idee vgl. *J. J. Saigey*, *Petite physique du globe*; *J. H. Pratt*, *London Phil. Trans.* 161 (1871), p. 335; *Clarke*, *Geodesy*, p. 351; *H. Faye*, *Paris C. R.* 90 (1880), p. 1185; 102 (1886), p. 651 und 786; 112 (1891), p. 69; *Helmert*, H. G. 2, p. 364—368; *Pucci*, *Fondamenti* 2, cap. XII.

zuzuschreiben seien, also den Massen über dem Meeresniveau und dem Massendefekt, der durch die geringere Dichte des Meerwassers im Vergleich mit den oberflächlichen Erdschichten hervorgerufen wird. In Wirklichkeit liegen die Dinge in der Mehrzahl der Fälle so, daß irgend eine Ursache (Massendefekte unter den Gebirgen und die erhöhte Dichte der Massen, die den Meeresboden bilden) die Wirkung der sichtbaren Störungsmassen zu kompensieren strebt, so dass wenigstens auf kontinentalen Stationen mit größerer Wahrscheinlichkeit die nach Formel (14) oder (14') reduzierten Schwerkraftswerte mehr von den normalen (auf dem Ellipsoid) abweichen als die nach der einfachen Formel (12) reduzierten<sup>30)</sup>.

In jedem Falle ist es sicher, daß die nach Formel (14) oder (14') reduzierte Schwerkraft sich nicht auf das wirkliche, sondern auf ein fingiertes Geoid bezieht.

*Helmert*<sup>31)</sup> hat vorgeschlagen, hauptsächlich um Konvergenzbedenken bei der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen zu beseitigen<sup>24)</sup>, der wirklichen Massenverteilung der Oberflächenschichten der Erde eine fingierte Massenverteilung zu substituieren, die dadurch erhalten wird, daß man auf eine Fläche  $S'$ , parallel zum Geoid in der Entfernung  $aR$  ( $a$  Abplattung), alle Masse zwischen  $S'$  und der Erdoberfläche kondensiert. *Helmert* beweist — und das ist von besonderer Wichtigkeit —, daß bei dieser Kondensation die Niveauflächen nicht merklich geändert werden<sup>32)</sup>.

Auch die Änderungen der Schwerkraft bei der Kondensation sind im allgemeinen ziemlich klein, wenigstens im Innern der Kontinente<sup>33)</sup>,

30) *J. L. d'Alembert* (nach *Todhunter*, History, § 593) gibt den Ausdruck von  $T$  für verschiedene Annahme über die Gestalt der Berge. Erschöpfende Methoden und Formeln findet man bei *Helmert*, H. G. 2, Kap. 3. Vgl. auch *R. v. Sterneck*, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien 11 (1892), p. 214.

31) H. G. 2, Kap. III und IV.

32) H. G. 2, p. 155.

33) *F. R. Helmert*, Die Schwerkraft im Hochgebirge, Berlin 1890, p. 38. Bei kontinentalen Stationen kann man die Korrektion wegen Höhe einfach nach Formel (12) (wie in freier Luft) ausführen. *R. v. Sterneck* (Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien 17 (1898), p. 109) hat auf Grund von 508 Schwerkraftsmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden:

$$g_q - g_p = 0,3023 H$$

( $H$  in m und  $g_q - g_p$  in Einheiten der 5<sup>ten</sup> Dezimale), was sehr nahe mit Formel (12) übereinstimmt; *H. Faye*, [Paris C. R. 90 (1880), p. 1185, 1462] nimmt an, daß die äußeren kontinentalen Erhebungen und marinen Senkungen ohne Einfluß auf die Schwerkraft seien und schlägt deshalb vor, nur die Anziehung isolierter Massen, welche sich über das mittlere Niveau einer Gegend erheben, zu

sie sind etwas erheblicher für kleine Inseln und die Meeresküsten. Die Kondensationsmethode hat außer dem schon erwähnten theoretischen Vorteil noch den, daß sie die Wirkung lediglich lokaler Störungen auf die beobachteten Schwerkraftswerte herabmindert, ohne doch den allgemeinen Gang der Niveaufläche erheblich zu ändern<sup>34)</sup>.

Wir übergehen die Probleme und Formeln, welche sich auf den Zusammenhang zwischen den Schwerkraftswerten und der Dichte der Oberflächenschichten der Erde beziehen und verweisen dieserhalb auf VI 1, 7.

#### 6. Geodätische Bestimmung des Geoids. — Referenzellipsoid.

Die im vorigen Paragraphen aufgezählten Beobachtungsdaten genügen, um die Richtung und die räumliche Lage einer Anzahl von Vertikalen oder Normalen zum Geoid festzulegen, und diese Fläche kann dann (wenigstens für begrenzte Gebiete) mit der praktisch erreichbaren Annäherung durch die beiden Bedingungen bestimmt werden, daß sie erstens durch einen festen Punkt geht (Mittelwasser eines gewissen Pegels) und zweitens das System der beobachteten Vertikalen orthogonal schneidet. Praktisch schlägt man zur Lösung des Problems einen indirekten Weg ein, indem man zunächst eine einfache Hypothese über die allgemeine Gestalt des Geoids macht und die Fläche in dieser vereinfachten Gestalt als Referenzfläche für die geodätischen Rechnungen zugrunde legt. Indem man die Beobachtungen dieser Fläche anzupassen versucht, ergeben sich dann die systematischen Abweichungen des gesuchten Geoids von der Referenzfläche.

Als hervorragend geeignet hat sich die Annahme eines Rotationsellipsoides, dessen Rotationsachse mit der Erdachse zusammenfällt, erwiesen, eine Annahme, zu der man vor allen Dingen auf Grund hydrostatischer Erwägungen geführt wird. Auf Grund der genannten Hypothese werden wir dann im nächsten Abschnitt sehen, wie man die Konstanten des Ellipsoides in der Weise bestimmen kann, daß seine Normalen möglichst wenig von den beobachteten Vertikalen abweichen, und wie man, wenigstens für bestimmte Gegenden der Erdoberfläche, die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid ermitteln kann.

Wie die Schwerkraftsmessungen zur Kenntnis des Geoids beitragen, geht zur Genüge aus Nr. 4 hervor.

---

berücksichtigen, und bei Inselstationen auf hoher See nur die Masse des Inselpeilers in Rechnung zu ziehen.

34) Wegen der Reduktion der Schwerkraft auf eine gemeinsame Niveaufläche vgl. auch *F. R. Helmert*, Berlin Ber. 1902, p. 843; 1903, p. 650.

7. Lotabweichungen. Eine geodätische Bestimmung der Gestalt des Geoids kann man nur in begrenzten Gebieten der Erde ausführen, nämlich nur dort, wo es möglich ist, eine Anzahl von Punkten durch geodätische Messungen zu verbinden. Aber auch in dieser Beschränkung kann man das Problem nur durch sukzessive Annäherungen lösen. Um sich die zur Berechnung der geographischen Positionen auf dem Referenzellipsoid nötigen Daten zu verschaffen oder um die Winkel, Längen und die beobachteten astronomischen Elemente auf das Ellipsoid reduzieren zu können, muß man in erster Annäherung Ellipsoid und Geoid identifizieren. Erst wenn die Abweichungen zwischen beiden Flächen näherungsweise bekannt sind, kann man die Beobachtungsdaten mit größerer Genauigkeit auf das Ellipsoid reduzieren.

Wenn  $P$  (mit der astron. Breite  $\lambda$  und der astron. Länge  $l$ ) ein Punkt des Geoids ist und  $P'$  seine Projektion auf das Ellipsoid, so bezeichnet man mit „totaler Lotabweichung“ (*déviaton, attraction locale*)<sup>35</sup> in  $P$  den Winkel  $\Theta$ , den die Vertikale  $v$  in  $P$  mit der Normalen  $n$  des Ellipsoides in  $P'$  bildet; ellipsoidische Breite  $\varphi$  und Länge  $\omega$  heißen (entsprechend  $\lambda$  und  $l$ ) die Winkel, welche die Richtung der Normalen  $n$  bestimmen. Die Differenzen  $\lambda - \varphi$ ,  $l - \omega$  nennt man Lotabweichungen in Breite und Länge.

Bezeichnet man mit  $\gamma$  den Winkel, den die Ebene  $vP'n$  mit dem ellipsoidischen Meridian von  $P'$  macht (Azimut der Abweichungsebene), so hat man:

$$(15) \quad \delta\varphi = \lambda - \varphi = \Theta \cos \gamma,$$

$$(16) \quad \delta\omega = l - \omega = \Theta \sin \gamma \sec \varphi.$$

Die Korrekturen  $\delta A$ ,  $\delta \xi$ , die man an dem astronomischen Azimut  $A$  und der Zenitdistanz  $Z$  eines zweiten Punktes  $B$  auf dem Geoid in bezug auf den Punkt  $P$  anbringen muß, um die analogen Größen  $\alpha$ ,  $\xi$  für das Ellipsoid zu erhalten, haben die Werte<sup>36</sup>):

35) Der Ausdruck „*attraction locale*“ kommt daher, dass man zuerst und lange Zeit hindurch der Ansicht war, daß die Lotabweichungen hauptsächlich durch lokale Unregelmäßigkeiten in der Erdkruste verursacht würden. Die ersten Studien über Lotabweichungen von diesem Gesichtspunkt aus sind von *P. Bouguer* und *C. M. La Condamine* (1730) in Peru und von *N. Maskelyne* (1775) in Schottland (*Todhunter*, *History* 1, § 363, p. 724—727) ausgeführt. Der erste, der vermutete, daß die Lotabweichungen eher durch ausgedehnte Kontinente oder Meere hervorgerufen werden könnten als durch einzelne Berge und daß sie deshalb systematischen Charakter haben könnten, war *R. G. Boscovich* (1750), vgl. *Todhunter*, *History*, 1, § 472—475. Im 18. Jahrhundert wurden verschiedene geodätische Untersuchungen zum Studium der Lotabweichungen in den Alpen ausgeführt

$$(17) \quad A - \alpha = \delta A = \sin \varphi \cdot \delta \omega - \Theta \cotg \xi \sin (\gamma - \alpha),$$

$$(18) \quad Z - \xi = \delta \xi = -\cos A \cdot \delta \varphi - \sin A \cos \varphi \delta \omega.$$

In (17) ist das zweite Glied wegen der Kleinheit von  $\cotg \xi$  im allgemeinen zu vernachlässigen und man hat dann

$$(17') \quad \delta A = \sin \varphi \cdot \delta \omega,$$

was von *P. S. Laplace* (*Méc. céleste*, 2, livre III, § 38) zuerst angegeben ist.

Beschränkt man sich auf die Genauigkeit, mit der (17') gilt, so haben die Lotabweichungen auf die Messung der Horizontalwinkel keinen Einfluß.

**8. Reduktion der beobachteten Lotrichtungen.** Bei einer endgültigen Bestimmung von Geoidteilen muß man noch eine andere theoretische Korrektur berücksichtigen. Ist  $A$  ein Beobachtungspunkt,  $Av$  die Vertikale von  $A$ , ferner  $A'$  der Punkt, in dem  $Av$  das Geoid trifft und  $A'v'$  die Vertikale in  $A'$ , so müßte man zur Bestimmung des Geoids die Richtung  $A'v'$  kennen, während die astronomischen Beobachtungen nur  $Av$  liefern. Der Richtungsunterschied zwischen beiden Geraden ist aber im allgemeinen nicht zu vernachlässigen, wenn nicht die Höhe  $AA' = H$  des Punktes  $A$  über dem Meeresniveau sehr klein ist.

Nimmt man die Meeresoberfläche als Rotationsellipsoid an, so fällt die Länge von  $A$  mit der von  $A'$  zusammen, während die Breite  $\lambda$  von  $A$  um den Betrag<sup>37)</sup>:

$$\delta \lambda = \lambda' - \lambda = -\frac{H}{5820} \sin 2\lambda \quad (H \text{ in m, } \delta \lambda \text{ in Sek.)}$$

zu korrigieren ist, um die Breite  $\lambda'$  von  $A'$  zu erhalten.

Aber bei einer hypothesenfreien Bestimmung des Geoids kann man den Übergang von  $Av$  auf  $A'v'$  nicht in dieser Weise ausführen. Das einzige nicht willkürliche Mittel wird hier durch Schwerkrafts-

36) *F. W. Bessel*, *Astr. Nachr.* 14 (1837), p. 333; *Y. Villarceau*, *J. de math.* (2) 18 (1873), p. 393; *Helmert*, *H. G.* 1, Kap. 12.

37) In dieser Gestalt wird die Korrektur von *Helmert*, *H. G.* 2, p. 98 gegeben; auch *C. F. Gauß* hat sie bereits berechnet, indem er von der *Clairaut'schen* Formel:

$$g = g_{45} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi\right)$$

ausging. *Gauß* setzt

$$\Delta \lambda = -1070'' \cdot \frac{H}{a} \sin 2\varphi.$$

Man findet diesen Ausdruck in einem Briefe an *J. J. Baeyer*, vgl. *Astr. Nachr.* 84 (1874), p. 1.

messungen auf Grund von Formel (5) geliefert, aus der sich ergibt:

$$(18') \quad \delta\lambda = \frac{H}{ag} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right), \quad \delta l = -\frac{H}{ag} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right) \sec^2 \lambda,$$

wo sich die Quotienten  $\left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)$  und  $\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)$  auf den Punkt  $A$  beziehen. Es ist indessen zu bemerken, daß die eben angegebenen Formeln eine stetige Änderung der zweiten Ableitung von  $W$  zwischen  $A$  und  $A'$  und deshalb auch eine stetige Dichteänderung zwischen den genannten Punkten zur Voraussetzung haben, was in Wirklichkeit im allgemeinen nicht zutrifft. Der Einfluß unvorhergesehener Dichteänderungen kann aber von derselben Größenordnung sein, wie die aus (18') resultierenden Werte von  $\delta\lambda$ ,  $\delta l$ .<sup>38)</sup> Die Formeln (18') werden am besten benutzt, wenn man darauf verzichtet, die Gestalt der Meeresniveaufläche direkt zu bestimmen und statt dessen eine höhere Niveaufläche bestimmen will, die gänzlich außerhalb der festen Erdrinde verläuft.

*Helmert*<sup>39)</sup> hat gezeigt, wie man kleine Flächenstücke des Geoids bestimmen kann, ohne daß dabei die Reduktion von Länge und Breite auf das Meeresniveau nötig wird. Statt dessen braucht man einen Mittelwert  $g_m$  der Schwerkraft längs des Lotabschnitts zwischen dem Beobachtungsort und dem Geoid.

**9. Bessels Rotationsellipsoid.** Wir werden als Referenzfläche das von *F. W. Bessel*<sup>40)</sup> berechnete Rotationsellipsoid annehmen, dessen Konstanten folgende Werte haben:

$$\begin{aligned} \text{Halbe große Achse } a &= 6\,377\,397,16 \text{ m,} \\ \text{„ kleine „ } b &= 6\,356\,078,96 \text{ m,} \\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} &= 0,006\,674\,372, \quad \frac{a-b}{a} = 0,003\,342\,773 = \frac{1}{299,15}. \end{aligned}$$

Die Rechnungen von *A. R. Clarke*<sup>41)</sup> und die ersten Resultate der Nordamerikanischen Gradmessung scheinen allerdings bewiesen zu haben, daß es zweckmäßig ist, die große Halbachse des *Besselschen* Ellipsoides um 800 bis 900 m und die Abplattung um  $\frac{1}{70}$  bis  $\frac{1}{50}$  ihres Wertes zu vergrößern. Aber andererseits ist zu bedenken, daß der aus den Schwerkraftsmessungen abgeleitete Abplattungswert weit besser mit dem *Besselschen* als dem *Clarkeschen* Werte stimmt und daß auch neuere europäische Triangulierungen sich besser dem *Besselschen*

38) *P. Pizzetti*, Astr. Nachr. 138 (1895), p. 353; ferner *Helmert*, Arch. Néerl. (2) 6 (1901), p. 442.

39) Berlin Ber. 1900, p. 964; 1901, p. 958.

40) Astr. Nachr. 14 (1837), p. 333 und 19 (1842), p. 97.

41) Geodesy, p. 319; vgl. Nr. 50.

Ellipsoide anzupassen scheinen<sup>42)</sup>. Nun genügt für die praktischen Zwecke der Geodäsie die Ersetzung des Geoids durch das *Besselsche* Ellipsoid vollkommen; für die theoretischen Studien soll es aber nur als Referenzfläche dienen, es hat also nur die Bedingung zu erfüllen, daß seine Abweichungen vom Geoid so klein sind, daß die sogenannten Differentialformeln auf sie angewandt werden können. Da das *Besselsche* Ellipsoid diese Bedingung erfüllt, kann man stets auf dasselbe Bezug nehmen<sup>43)</sup>.

Wenn man für Näherungsrechnungen das Ellipsoid durch eine Kugel ersetzen will, so kann man als Radius:

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{6}\right) = 6370,3 \text{ km}$$

nehmen. Diese Kugel hat dann bis auf Glieder von der Ordnung  $e^4$  in  $R$  die folgenden Größen mit dem *Besselschen* Ellipsoid gemeinsam: 1) den mittleren Krümmungsradius der Fläche (unter Krümmungsradius einer Fläche in einem Punkte das Reziproke der *Gaußschen* Krümmung verstanden), 2) den mittleren Halbmesser (die Mittelbildung erfolgt in beiden Fällen durch Integration über die Fläche), 3) die Oberfläche, 4) das Volumen<sup>44)</sup>.

## II. Rechnungs- und Messungsmethoden.

### A. Geodätische Rechnungen auf dem Rotationsellipsoid.

**10. Fundamentalformeln** (Fig. 1). Es seien  $a$  und  $b$  die beiden Halbachsen des Rotationsellipsoids ( $a = OE = OF$ ,  $b = OP$ ),  $e$  die numerische Exzentrizität  $\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $\alpha$  die Abplattung  $\frac{a-b}{a}$ ,  $\varphi$  die *geographische* Breite eines Punktes  $A$  ( $90^\circ - \sphericalangle ARP$ ),  $\varphi'$  die *geozentrische* Breite ( $\sphericalangle AOF$ ),  $r'$  der Radiusvektor  $OA$ ,  $r$  der Radius des Parallelkreises ( $AH$ ) durch den Punkt  $A$  und  $z$  die Entfernung von  $A$  von der Äquatorebene. Es folgt dann aus elementaren Formeln der Differentialgeometrie<sup>45)</sup>:

42) Literaturangaben zu den neueren Triangulierungen in Nr. 53.

43) *F. R. Helmert*, Lotabweichungen 1, Berlin 1886, p. 3.

44) *Helmert*, H. G. 1, p. 65–68.

45) *Helmert*, H. G. 1 gibt die numerischen Werte von  $\log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$  für die Werte  $\varphi$  von  $10'$  zu  $10'$ . Die vollständigsten numerischen Tabellen findet man bei *Th. Albrecht*, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, 3. Aufl., Leipzig 1894. Vgl. auch *W. Jordan*, Math. und geodätische Hilfstafeln, 9. Aufl., Hannover 1895.



In einem Normalschnitt im Azimut  $\alpha$  ist der Krümmungsradius  $R_\alpha$  gegeben durch <sup>47)</sup>:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{R_\alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \\ &= \frac{1}{\rho} - \frac{e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha}{N(1-e^2)} = \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \right). \end{aligned}$$

Der Meridianbogen  $\sigma$  zwischen den Breiten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  wird durch das Integral:

$$\sigma = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = a(1-e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi$$

dargestellt. Auf die bequemste Weise erhält man das Integral, indem man die Funktion unter dem Integralzeichen nach dem Kosinus der Vielfachen von  $2\varphi$  entwickelt<sup>48)</sup>. Setzt man:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \text{ (Amplitude des Bogens),}$$

$$n = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad p = \frac{1 + \sqrt{1-e^2}}{2}, \quad m_r = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{r!},$$

$$A_r = m_0 m_r n^r + m_1 m_{r+1} n^{r+2} + m_2 m_{r+2} n^{r+4} + \dots,$$

so ergibt sich:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^m d\varphi \\ &= p^{2m} \left\{ A_0 \Delta\varphi + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_r}{r} \sin(r \Delta\varphi) \cos(2r\varphi_0) \right\} \end{aligned}$$

und speziell<sup>49)</sup>

47) *Helmert*, H. G. 1, p. 58; *Bremiker*<sup>46)</sup> gibt die numerischen Werte von  $\log R_\alpha$  für die Werte von  $\varphi$  zwischen  $36^\circ$  und  $64^\circ$  von Grad zu Grad und für die Werte von  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  von Grad zu Grad. Vgl. auch *Albrecht*<sup>45)</sup>.

48) Der Gedanke einer solchen Entwicklung stammt von *A. M. Legendre* (*J. B. Delambre*, Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, précédées d'un mémoire sur le même sujet par *Legendre*, Paris, An 7, 1798–99). — *Legendre* nimmt an, daß die Meridiankurve durch die folgende Gleichung zwischen dem Radiusvektor  $r'$  und der geozentrischen Breite  $\psi$  dargestellt sei:

$$r' = R(1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi).$$

*Delambre* (p. 72) gibt die Entwicklung für den elliptischen Meridian; die Koeffizienten werden nach Potenzen von  $e^2$  entwickelt. *L. Puissant* (Traité de géodésie, Paris 1805, 5. Aufl. 1849) gibt die Entwicklung mit Koeffizienten, die nach Potenzen von  $\frac{e^2}{1-e^2}$  fortschreiten. Die im Text gegebene Entwicklung stammt von *F. W. Bessel* (Abhandl. 3, p. 46).

49) *Helmert* schreibt den ersten Faktor in der Gestalt:  $a(1-n)(1-n^2)$ .

$$(4) \quad \sigma = \frac{8a(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} \left\{ \alpha_0 \Delta\varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin(r\Delta\varphi) \cos(2r\varphi_0) \right\},$$

wo

$$\alpha_0 = 1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \dots, \quad \alpha_1 = -3n - \frac{45}{8}n^3 \dots,$$

$$\alpha_2 = \frac{15}{8}n^2 + \frac{105}{32}n^4 + \dots, \quad \alpha_3 = -\frac{35}{24}n^3 \dots, \quad \alpha_4 = \frac{315}{256}n^4 + \dots$$

ist.

Die nicht angegebenen Glieder sind von der Ordnung  $e^{10}$  und deshalb stets zu vernachlässigen. Aus (4) erhält man:

$$\text{Meridianquadrant: } \frac{4a\alpha_0\pi(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3},$$

Länge des Meridiangrades unter der Breite  $\varphi$ :

$$G_\varphi = \frac{8a(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} \left\{ \frac{\alpha_0\pi}{180} + \alpha_1 \sin 1^\circ \cos 2\varphi + \alpha_2 \sin 2^\circ \cos 4\varphi + \dots \right\}$$

oder bis auf Glieder der Ordnung  $e^4$ :

$$G_\varphi = G_0 + \frac{3}{2}ae^2 \sin 1^\circ \sin^2 \varphi.$$

Eine für kleine Meridianbogen (höchstens  $2^\circ$ ) sehr passende Entwicklung ist die von *C. G. Andrae*<sup>50)</sup>

$$(5) \quad \sigma = \varrho_0 \Delta\varphi + \frac{e^2}{8}\varrho_0 \cos 2\varphi_0 (\Delta\varphi)^3 + \dots,$$

wo  $\varrho_0$  der Wert von  $\varrho$  für die mittlere Breite  $\varphi_0$  ist. In der angegebenen Entwicklung sind die Größen von der Ordnung  $e^3 \cdot (\Delta\varphi)^3$ ,  $e^2 \cdot (\Delta\varphi)^5$  vernachlässigt.

Der Parallelkreisbogen zwischen den Längengraden  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und unter der Breite  $\varphi$  ist durch:

$$\theta = r(\omega_2 - \omega_1) = \frac{a(\omega_2 - \omega_1) \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

gegeben. Die Oberfläche eines ellipsoidischen Trapezes zwischen den Breiten  $0^\circ$  und  $\varphi$  und den Längengraden  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ist<sup>51)</sup>:

$$S = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^\varphi r \varrho d\varphi d\omega = \frac{a^2}{2}(1-e^2)(\omega_2 - \omega_1) \left\{ \frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \cdot \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right\}$$

$$= a^2(1-e^2)(\omega_2 - \omega_1) \sin \varphi \left\{ 1 + \sum_2^\infty \frac{n}{2n-1} e^{2n-2} \sin^{2n-2} \varphi \right\}.$$

50) Problèmes de haute géodésie, 2. cah., p. 3. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, sind die Winkel immer im Bogenmaß oder analytischem Maß zu rechnen.

51) Vgl. z. B. *Helmert*, H. G. 1, p. 61.

**11. Normalschnitte.** Es seien  $A(\varphi_1, \omega_1)$  und  $B(\varphi, \omega)$  zwei Ellipsoidpunkte;  $\overline{AB}$  sei der Normalschnitt in  $A$ , der durch  $B$  geht, und  $\overline{BA}$  der Normalschnitt in  $B$ , der durch  $A$  geht (reziproker Normalschnitt). Das Azimut  $A$  von  $\overline{AB}$  in  $A$  ist dann durch die Formel:

$$(6) \quad \cotg A = \frac{\cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi (1 - e^2 \gamma) - \sin \varphi_1 \cos(\omega - \omega_1)}{\sin(\omega - \omega_1)}$$

gegeben, wo

$$\gamma = 1 - \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

ist. Wir nehmen nun auf der Normalen in  $B$  ein Segment  $BB' = h$  an, das so klein ist, daß man die Größen  $e^2 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2$ ,  $e^4 \cdot \frac{h}{a}$ , ... vernachlässigen kann. Nennt man dann  $A'$  das Azimut von  $B'$  in bezug auf  $A$ , so hat man annähernd:

$$\cotg A' - \cotg A = e^2 \cdot \frac{\gamma h}{a} \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_1 \operatorname{cosec}(\omega - \omega_1).$$

Ist die Entfernung  $s$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  so klein, daß das Produkt  $e^2 \cdot \frac{hs}{a}$  zu vernachlässigen ist, so folgt aus der vorstehenden Formel<sup>52)</sup>:

$$(6') \quad A - A' = \frac{e^2 h}{2a} \cos^2 \varphi_1 \sin 2A;$$

diese Gleichung gibt die Reduktion eines beobachteten Azimuts wegen der Höhe des Beobachtungsortes.

*Theorem von Dalby.* Es sei  $A$  das Azimut des Normalschnitts  $\overline{AB}$  in  $A$  und  $B$  das Azimut des Normalschnitts  $\overline{BA}$  in  $B$ . Man betrachte dann auf einer Kugel vom Radius 1 das sphärische Dreieck  $P_1 A_1 B_1$ , dessen Seiten  $P_1 A_1$ ,  $P_1 B_1$  resp. gleich  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ ,  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  sind und dessen Winkel in  $P_1$  gleich  $\omega - \omega_1$  ist. Betrachtet man dann die Bogen  $P_1 A_1$ ,  $P_1 B_1$  als sphärische Meridiane und sind  $A_1$ ,  $B_1$  die Azimute von  $B_1$  bezüglich  $A_1$  und von  $A_1$  bezüglich  $B_1$  (in derselben Weise wie für das Ellipsoid gerechnet), so hat man bis auf Größen von der Ordnung  $e^4 \cdot \frac{s^5}{a^5}$  ( $s = AB$ ):<sup>53)</sup>

52) H. James and A. R. Clarke, Ordnance trigonometrical survey. — Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived therefrom, London 1858, p. 231; Helmert, H. G. 1, p. 190 gibt einen genaueren Ausdruck für  $A - A'$ . Die genannte Reduktion ist schon von C. F. Gauß angewandt worden, vgl Werke 9, p. 95 und p. 320—321 (Brief an Olbers vom 14. Mai 1826).

53) W. Roy, London Phil. Trans. 80 (1790), p. 111. Dort ist der geometrische Beweis der von J. Dalby angegebenen Formel (7) mitgeteilt und gezeigt, wie sie

$$(7) \quad A - B = A_1 - B_1$$

oder mit größerer Annäherung:

$$A - B = A_1 - B_1 + \frac{e^4}{4} \sin(\omega - \omega_1) \sin^2(\varphi - \varphi_1) \cos^4 \varphi_0 \sin \varphi_0,$$

wenn  $\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \varphi_0$  gesetzt wird.

Die Differenz zwischen den beiden Seiten von (7) beträgt bis zu Entfernungen von 1200 km einige tausendstel Sekunden; sie ist im allgemeinen zu vernachlässigen.

Aus (6) und dem analogen Ausdruck für  $B$  findet man durch geeignete Entwicklungen:

$$(8) \quad \frac{A+B}{2} = \frac{A_1+B_1}{2} + \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{1 - e^2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a')} + T_6,$$

wenn man  $\frac{A_1+B_1-\pi}{2} = a'$  setzt und mit  $\sigma'$  den sphärischen Bogen

$A_1B_1$  bezeichnet;  $T_6$  ist eine kleine Größe von der Ordnung  $e^4 \cdot \frac{s^2}{a^2}$  und  $e^6$ . Die Formeln (7), (8) liefern das bequemste Mittel zur Berechnung der reziproken Azimute  $A, B$ , wenn die geographischen Koordinaten der beiden Punkte gegeben sind. Die sphärischen Azimute  $A_1, B_1$  erhält man mit Hilfe der *Delambreschen* Gleichungen aus dem sphärischen Dreieck  $P_1A_1B_1$ . — Es sei noch die Formel für die Länge  $K$  der Sehne  $AB$  hinzugefügt<sup>54)</sup>:

$$(9) \quad \log K = \log \left( 2R \sin \frac{\sigma'}{2} \right) + \frac{1}{8} M \{ 3e^4 \cos^4 \varphi_m \sin^2 2a' + e^2 (\Delta\varphi)^2 (\cos 2\varphi - 2 \sin^2 a') + \dots \},$$

wo  $R$  der Krümmungsradius des Normalschnittes in der Breite  $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$  und im Azimut  $a'$  ist. Die Formeln (7), (8), (9) bilden die Grundlage für diejenigen geodätischen Rechnungsmethoden, die sich auf die Benutzung der Sehnen und der astronomischen Azimute stützen<sup>55)</sup>.

zur Berechnung der Längendifferenz dienen kann, wenn die astronomischen Azimute und die Breiten zweier Punkte gegeben sind. Vgl. in dieser Hinsicht *J. L. Tiarks*, Phil. Mag. 4 (1828), p. 364. Genaue Beweise von (8) findet man bei *Helmert*, H. G. 1, p. 150 (dort wird  $e^6$  noch berücksichtigt) und bei *Pucci*, Fondamenti 2, p. 178.

54) *Helmert*, H. G. 1, p. 144—158.

55) Wegen weiterer Untersuchungen über die Normalschnitte vgl. *J. J. Baeyer*, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862 (Gleichung des Normalschnittes in seiner Ebene, Achsen, Exzentrizität), *Bremiker*<sup>46)</sup> (Winkel des

**12. Geodätische Linien.** Unter der geodätischen Linie zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  einer Fläche versteht man die kürzeste Verbindungslinie auf der Fläche zwischen den beiden Punkten. — Es seien nun  $A(\varphi, \omega)$ ,  $B(\varphi + d\varphi, \omega + d\omega)$  zwei unendlich benachbarte Punkte auf dem Rotationsellipsoid,  $r$  der Radius des Parallelkreises durch  $A$ , ferner  $ds$  die Länge und  $\alpha$  das Azimut des Elementes  $AB$  in  $A$ . Aus elementaren Überlegungen der Differentialgeometrie folgt dann:

$$(9') \quad \rho d\varphi = \cos \alpha ds, \quad r d\omega = \sin \alpha ds, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\rho} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}$$

und, wenn man mit  $r + dr$  den Radius des Parallelkreises durch  $B$  bezeichnet:

$$(10) \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\sin \varphi \cos \alpha.$$

Aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linien für eine beliebige Rotationsfläche, deren Achse als  $z$ -Achse eines Cartesischen Koordinatensystems genommen wird, folgt:

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \text{konst.}$$

und hieraus

$$(11) \quad r \sin \alpha = c \quad (c \text{ Konstante}),$$

wie ein Satz von *Clairaut*<sup>56)</sup> ausspricht.

Differentiiert man (11) und beachtet (10), so ergibt sich:

$$(12) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin \alpha}{r} = \sin \varphi \cdot \frac{d\omega}{ds}.$$

Die Relation  $d\alpha = \sin \varphi \cdot d\omega$  gilt in Wirklichkeit für eine geodätische Linie auf einer beliebigen Fläche<sup>57)</sup>, wenn die *astronomische* Bedeutung von  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$  unverändert bleibt.

Eliminiert man  $\alpha$  aus (9') und (11), so bekommt man:

$$(13) \quad d\omega = \pm \frac{c \rho d\varphi}{r \sqrt{r^2 - c^2}}, \quad ds = \pm \frac{r \rho d\varphi}{\sqrt{r^2 - c^2}}$$

(das Zeichen  $\pm$  gilt, wenn  $\alpha$  im ersten oder vierten Quadranten liegt).

Sehendreiecks, Übertragung der geographischen Koordinaten vermittelt der Sehnen usw.).

56) Nach *Todhunter*, *History* 1, § 160 kommt diese Formel zum erstenmal vor bei *Clairaut*, *Détermin. géométrique de la perpendiculaire à la méridienne* (*Mém. Paris* 1733). Der Gedanke, die geodätischen Linien bei den geodätischen Rechnungen zu benutzen, wurde auch von *L. Euler* ausgesprochen (*Todhunter*, *History*, *chapt. XV*).

57) Vgl. *Bessel*<sup>56)</sup>.

Der Krümmungsradius in einem Punkte einer geodätischen Linie folgt aus (2). Eliminiert man  $\alpha$  aus (2) und (11), so folgt:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{e^2 c^2}{a^2} \right)$$

oder: Längs einer geodätischen Linie ändert sich  $R_\alpha$  proportional mit  $\rho$  (Satz von *Ch. Gudermann*)<sup>58</sup>). Man erhält endlich:

$$\frac{1}{R_\alpha} \cdot \frac{dR_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{ds} = \frac{3}{2} \frac{e^2 \sin 2\varphi \cos \alpha}{\rho (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}$$

**13. Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts** (Fig. 2). Gegeben sind die geographischen Koordinaten

$\varphi_1, \omega_1$  von  $A$  und das Azimut  $\alpha_1$  und die Länge  $s$  der geodätischen Linie  $AB$ ; gesucht die geographischen Koordinaten  $\varphi, \omega$  von  $B$  und das Azimut der geodätischen Linie  $AB$  in  $B$  (mit  $\alpha$  werde das Azimut der Verlängerung von

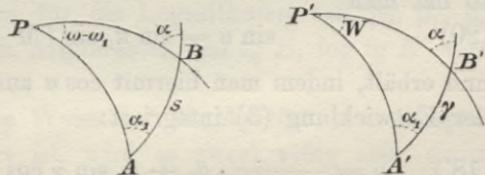


Fig. 2.

$AB$  über  $B$  hinaus bezeichnet; das sogenannte reziproke Azimut zu  $\alpha_1$  ist  $\alpha \pm 180^\circ$ ). Man löst das Problem, indem man (13) durch Reihenentwicklung integriert. Die folgende Methode stammt in ihrer speziellen Form von *Bessel*<sup>59</sup>). Führt man die durch die Gleichungen:

$$(14') \quad \text{tg } u_1 = \sqrt{1 - e^2} \text{ tg } \varphi_1,$$

$$(14'') \quad \text{tg } u = \sqrt{1 - e^2} \text{ tg } \varphi$$

definierten reduzierten Breiten ein, so kann man (11) die Gestalt geben:

$$(15) \quad \cos u \sin \alpha = \cos u_1 \sin \alpha_1$$

und aus (13) wird:

$$(16) \quad \begin{cases} ds = \pm \frac{a \cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - \cos^2 u_1 \cos^2 \alpha_1}} du, \\ d\omega = \pm \frac{\cos u_1 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \cos^2 u_1 \cos^2 \alpha_1}} du. \end{cases}$$

58) J. f. Math. 43 (1852), p. 284.

59) Die Methode verdankt man im wesentlichen *Legendre* <sup>46)</sup>, der den Gedanken hatte, die geodätische Linie auf dem Ellipsoid mit der auf der Kugel zu vergleichen. *F. W. Bessel* gab für die numerische Rechnung bequeme Formeln (Abh. 3, p. 5). *Helmert*, H. G. 1, p. 226 gibt die Formel (18') nach  $\gamma$  aufgelöst.

Man betrachtet nun auf einer Kugel vom Radius 1 das Dreieck  $P'A'B'$ , dessen Seiten  $P'A'$ ,  $P'B'$  resp. gleich  $\frac{\pi}{2} - u_1$ ,  $\frac{\pi}{2} - u$  sind und dessen Winkel  $A'$ ,  $B'$  mit den Winkeln  $A$ ,  $B$  des ellipsoidischen Dreiecks übereinstimmen (was wegen (15) möglich ist). Bezeichnet man den Winkel bei  $P'$  mit  $W$ , die Seite  $A'B'$  mit  $\gamma$ , so geben die Gleichungen (16), verglichen mit den entsprechenden Formeln für die Kugel:

$$(17) \quad ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\gamma,$$

$$(18) \quad d\omega = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} dW.$$

Setzt man

$$(19) \quad \cotg M = \text{ctg } u_1 \cos \alpha_1,$$

so hat man

$$(20) \quad \sin u = \sin u_1 \sin (M + \gamma) \text{cosec } M$$

und erhält, indem man hiermit  $\cos u$  aus (17) eliminiert und mit Hilfe der Entwicklung (3) integriert:

$$(18') \quad \gamma = \frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} \cdot \beta_0 + \beta_1 \sin \gamma \cos (2M + \gamma) + \beta_2 \sin 4\gamma \cos (4M + 2\gamma) + \dots,$$

wo die  $\beta$  in folgender Weise zu berechnen sind. Man setze:

$$(19') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e \sin u_1}{\sqrt{1-e^2} \sin M} = \text{tg } E, \\ A_0 = 1 + \frac{1}{4} \text{tg}^4 \frac{E}{2} + \frac{1}{64} \text{tg}^8 \frac{E}{2} + \dots, \\ A_1 = -\frac{1}{2} \text{tg}^2 \frac{E}{2} + \frac{1}{16} \text{tg}^6 \frac{E}{2} + \dots, \\ A_2 = -\frac{1}{8} \text{tg}^4 \frac{E}{2} + \frac{1}{32} \text{tg}^8 \frac{E}{2} + \dots, \quad A_3 = -\frac{1}{16} \text{tg}^6 \frac{E}{2} + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

und hat dann:

$$(20') \quad \beta_0 = \frac{\cos E}{A_0 \cos^2 \frac{E}{2} \text{arc } 1''}, \quad \beta_n = \frac{-2A_n}{n A_0 \text{arc } 1''}.$$

Der Winkel  $\gamma$  in (18') wird dann in Sekunden erhalten.

Die Formeln (14'), (19), (19'), (20'), (18'), (20), (14''), (15) dienen zur Bestimmung von  $\varphi$  und  $\alpha$ . Zur Berechnung der Länge substituieren wir näherungsweise für (12) die folgende Gleichung:

$$d\omega = dW - \frac{e^2}{2} \cos u_1 \sin \alpha_1 \left(1 - \frac{3}{4} e^2 \cos^2 u\right)^{-1/2} d\gamma,$$

die sich von (12) nur durch Glieder der Ordnung  $e^8$  unterscheidet<sup>60)</sup>.

60) Der auf diese Weise bei der Berechnung von  $\omega$  begangene Fehler ist

Indem man dann in analoger Weise wie vorher integriert und setzt:

$$\operatorname{tg} E' = \frac{\sin u_1}{\sin M} \sqrt{\frac{3e^2}{4-3e^2}}, \quad P = \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \left( \frac{\cos E'}{\cos^2 \frac{E'}{2}} \right)^{2/3},$$

$$\beta_0' = \frac{P \cdot \operatorname{arc} 1''}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 \frac{E'}{2} + \dots \right\},$$

$$\beta_1' = P \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{E'}{2} + \frac{2}{27} \operatorname{tg}^6 \frac{E'}{2} + \dots \right\}, \quad \beta_2' = P \left\{ \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 \frac{E'}{2} + \dots \right\},$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \omega - \omega_1 = W - \frac{e^2 \sin u_1 \sin \alpha_1}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}e^2}} \{ & \beta_0' \gamma + \beta_1' \sin \gamma \cos (2M + \gamma) \\ & + \beta_2' \sin 2\gamma \cos (4M + 2\gamma) + \dots \}. \end{aligned}$$

Den Winkel  $W$  erhält man aus dem sphärischen Dreieck  $P A' B$ . *Bessel* hat numerische Tabellen für die Logarithmen von  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0', \beta_1'$  gegeben, die nach den Argumenten  $\log \operatorname{tg} E, \log \operatorname{tg} E'$  fortschreiten<sup>61)</sup>.

Da das Problem auf diese Weise auf die Auflösung eines sphärischen Dreiecks zurückgeführt ist, wird es zweckmäßig sein, einige der hierzu geeigneten Formeln anzugeben.

Die *Delambreschen* Gleichungen liefern:

$$\cos \left( 45^\circ + \frac{u}{2} \right) \sin \frac{\alpha + W}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \left( 45^\circ + \frac{u_1 - \gamma}{2} \right),$$

$$\cos \left( 45^\circ + \frac{u}{2} \right) \cos \frac{\alpha + W}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \left( 45^\circ + \frac{u_1 + \gamma}{2} \right),$$

$$\sin \left( 45^\circ + \frac{u}{2} \right) \sin \frac{\alpha - W}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \left( 45^\circ + \frac{u_1 - \gamma}{2} \right),$$

$$\sin \left( 45^\circ + \frac{u}{2} \right) \cos \frac{\alpha - W}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \left( 45^\circ + \frac{u_1 + \gamma}{2} \right).$$

Nach *Gauß*<sup>62)</sup> führt man die Berechnung von  $u, \alpha, W$  am bequemsten mit den Formeln aus:

$$\operatorname{tg} s = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma,$$

$$\operatorname{tg} W = \operatorname{tg} \alpha_1 \sin s \sec (u_1 + s),$$

$$\operatorname{tg} t = \sin \alpha_1 \sin \gamma \operatorname{tg} (u_1 + s),$$

$$\sin \tau = \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin s,$$

$$\sin \sigma = \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \frac{W}{2} \cos (u_1 + s),$$

$$u = u_1 + s - \sigma,$$

$$\alpha = \alpha_1 + t - \tau.$$

kleiner als  $\frac{1}{384} e^8 \gamma$  und deshalb kleiner als 0'',000007 für eine geodätische Linie, die einmal um die ganze Erde herumgeht ( $\gamma = 2\pi$ ). Genauere Entwicklungen siehe bei *Bessel*<sup>59)</sup>.

61) Vgl. auch *Albrecht*<sup>45)</sup>.

62) Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844, p. 30 = Werke 4, p. 259. Unsere Formeln unterscheiden sich ein wenig von den *Gaußschen*, weil das Azimut anders gerechnet wird.

Sind  $u_1$ ,  $u$ ,  $W$  gegeben und sucht man  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\gamma$ , so geben die *Delambreschen* Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} &= \sin \frac{W}{2} \cos \frac{u + u_1}{2}, & \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2} &= \sin \frac{W}{2} \sin \frac{u + u_1}{2}, \\ \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} &= \cos \frac{W}{2} \sin \frac{u - u_1}{2}, & \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha_1}{2} &= \cos \frac{W}{2} \cos \frac{u - u_1}{2}. \end{aligned}$$

**14. Fortsetzung. Fall kleiner Bogen.** Betrachtet man  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  als Funktionen des Bogens  $s$  und entwickelt diese Funktionen nach *Maclaurin*, so erhält man mit Berücksichtigung von (9), (10), (12):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \frac{s}{\varrho_1} \cos \alpha_1 - \frac{s^2}{2\varrho_1 N_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \sin^2 \alpha_1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{s^2}{2\varrho_1 N_1} \\ &\quad \cdot \sin 2\varphi \cos^2 \alpha_1 - \frac{s^3}{6\varrho_1 N_1^2} \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) + \dots, \\ \omega &= \omega_1 + \frac{s}{N_1} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \varphi_1} + \frac{s^2}{N_1^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\cos \varphi_1} \\ &\quad + \frac{s^3}{3N_1^3} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \varphi_1} \{ (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \cos^2 \alpha_1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha_1 \} + \dots, \\ \alpha &= \alpha_1 + \frac{s}{N_1} \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{s^2}{2N_1^2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \\ &\quad + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{s^2}{2N_1^2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos^2 \varphi_1 + \dots \end{aligned}$$

Es sind dabei in dem Ausdruck für  $\varphi$  und für  $\omega$  Glieder mit  $e^2 s^3$  und  $s^4$ , in dem von  $\alpha$  Glieder mit  $s^3$  vernachlässigt;  $\varrho_1$ ,  $N_1$  sind die Werte von  $\varrho$ ,  $N$  aus (1) für die Breite  $\varphi_1$ .<sup>63)</sup>

*Gauß*<sup>64)</sup> hat mit Hilfe der konformen Abbildung, die wir in Nr. 21 behandeln werden, Formeln für die Übertragung der geographischen Koordinaten abgeleitet, die die *mittlere* Breite und das *mittlere* Azimut enthalten; außerdem hat er noch eine direkte Ableitung derselben Formeln gegeben. *O. Schreiber*<sup>64a)</sup> hat die *Gauß*-schen Formeln so abgeändert, daß alles indirekte Rechnen vermieden wird.

63) Entwicklungen dieser Art sind von *Legendre* gegeben (Paris Mém. Acad. pour 1787 (1789), p. 352). *Legendre* berücksichtigt Glieder mit  $e^4 s$ ,  $e^2 s^2$ ,  $s^3$ . Die im Texte gegebenen Entwicklungen sind genügend genau, so lange  $s$  nicht 100 km übersteigt. Für weitere Annäherungen vgl. *Helmert*, H. G. 1, p. 298, wo die vernachlässigten Glieder von der Ordnung  $e^2 s^4$  und  $s^6$  sind, oder *N. Jandana* (Guida al calcolo delle coordinate geodetiche, Torino 1891), der Glieder von der Ordnung  $e^2 s^5$  und  $s^6$  vernachlässigt.

64) Vgl. Zitat in Fußnote 62, II. Abt.

64a) Rechnungsvorschriften f. d. trig. Abt. d. Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten, Berlin 1878.

*Andrae*<sup>65)</sup> hat das Problem dadurch gelöst, daß er die geodätische Linie  $BF$  durch  $B$  senkrecht zum Meridian von  $A$  konstruiert, das Dreieck  $BAF$  auflöst und die Breite von  $F$  berechnet. Zwei einfache Entwicklungen geben die Differenzen zwischen den Koordinaten von  $B$  und  $F$ . — Die *Andraesche* Lösung ist nicht wesentlich von der verschieden, die rechtwinklige geodätische Koordinaten benutzt (vgl. Nr. 23).

Die Lösung von *K. G. J. Jacobi* stützt sich auf elliptische Funktionen<sup>66)</sup>. *P. A. Hansen*<sup>67)</sup> hat eine Methode angegeben, die sich von der des vorigen Paragraphen nur dadurch unterscheidet, daß er als Anfangspunkt der Bogen auf dem Ellipsoid und der Kugel den Punkt wählt, in dem die geodätische Linie  $AB$  einen Meridian rechtwinklig schneidet.

Die Differenz der Azimute  $\alpha_1 - \alpha$  nennt man gewöhnlich *Meridiankonvergenz*<sup>68)</sup>.

**15. Bestimmung der Länge und des Azimuts eines geodätischen Bogens aus den geographischen Koordinaten der Endpunkte.** Das vorstehende Problem, das die Umkehrung der in den vorhergehenden Nummern behandelten Aufgabe ist, löst man durch sukzessive Annäherungen. Es möge auf die folgenden Lösungen hingewiesen sein: für Bogen von beliebiger Länge: 1. Umkehrung der *Legendre-Besselschen* Methode<sup>69)</sup> (Nr. 13); 2. Lösung von *Hansen*<sup>70)</sup> (benutzt

65) Vgl. Zitat in Fußnote 50, 2. cahier.

66) *E. Luther*, Astr. Nachr. 41 (1855), p. 209 und 42 (1856), p. 337; *J. f. Math.* 53 (1857), p. 342; *C. Winterberg*, Astr. Nachr. 89 (1877), p. 103, 113 und 91 (1878), p. 113.

67) Geodätische Untersuchungen, Leipzig 1865, Erster Abschnitt. Man sehe auch wegen der Übertragung der geographischen Koordinaten die Lösung von *J. J. Baeyer*<sup>65)</sup>, der die Gleichung (13) transformiert, indem er den Radius  $r$  des Parallelkreises als Variable einführt, dann nach Potenzen von  $e^2$  entwickelt, integriert und  $\varphi$  durch sukzessive Annäherung berechnet.

68) In diesem Sinne wird der Ausdruck gewöhnlich in den Lehrbüchern gebraucht (*Francoeur, Jordan, Pucci, Puissant* usw.). *Gauß* legt ihm einen anderen Sinn bei. In der konformen Abbildung der Hannoverschen Landesvermessung (vgl. Nr. 24) nennt er Meridiankonvergenz den Winkel, den der Meridian in  $B$  mit der Parallelen macht, die man in  $B$  zu der den Anfangsmeridian repräsentierenden Geraden ziehen kann. *Helmert* (H. G. 1, p. 426) und *Clarke* (Geodesy, p. 272) brauchen den genannten Ausdruck nur in dem Falle, daß die geodätische Linie  $AB$  den Meridian in  $A$  rechtwinklig schneidet. Die beschränktere Definition stimmt mit derjenigen von *Gauß* überein, wenn man die Abplattung der Erde vernachlässigt. Vgl. *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde 3, p. 464—65.

69) *Helmert*, H. G. 1, p. 247.

die Beziehung zwischen der geodätischen Linie und den Normal-schnitten); 3. Benutzung der elliptischen Funktionen<sup>71)</sup>;

für Bogen von begrenzter Länge: 1. Lösung auf Grund der konformen Abbildung von *Gauß* (vgl. Nr. 21); 2. Umkehrung der Entwicklungen von *Legendre* (Nr. 14), indem als Anfangspunkt der Mittelpunkt des Bogens angenommen wird<sup>72)</sup>; 3. Lösung mit Hilfe des Theorems von *J. Dalby*<sup>73)</sup>. Durch Anwendung des genannten Theorems und unter Benutzung der Formel (27) der nächsten Nummer kann man die Differenz  $\alpha_1 - \alpha$  berechnen. Mit Hilfe der Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \alpha_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{u - u_1}{2} \operatorname{tg} \frac{u + u_1}{2},$$

die man aus (15) ableitet, bekommt man dann  $\alpha$  und  $\alpha_1$ . Ist  $\alpha_1$  bekannt, so findet man nach Nr. 13 ohne Schwierigkeit  $\gamma$  und  $s$ ; 4. Formeln von *Ch. M. Schols*<sup>74)</sup>, die die astronomischen Azimute und die Sehnen benutzen; 5. Formeln von *W. Jordan*<sup>74a)</sup>. Wie bei der Umkehrung der *Legendre-Besselschen* Methode wird zunächst die in Nr. 13 erwähnte Hilfskugel benutzt. Dann aber entwickelt *Jordan* aus (18) den sphärischen Längenunterschied  $W$  in eine Reihe nach Potenzen von  $\omega$  und ebenso aus (17)  $\gamma$  in eine Reihe nach Potenzen von  $s$ . Durch Einführung der Mittelbreite erhält man  $\frac{W}{\omega}$  und  $\frac{\gamma}{s}$  als Funktionen der ellipsoidischen Längen- und Breitenunterschiede. Indem man nun zunächst  $W$  berechnet (das sich bei einem Breiten- und Längenunterschied von je  $10^0$  unter Beschränkung auf die Glieder bis zur 3. Ordnung noch bis auf etwa 0,001 genau ergibt), kann man dann das Kugeldreieck  $A'P'B'$  auflösen. Die Winkel  $A'$  und  $B'$  sind gleich den ellipsoidischen Azimuten; aus  $\gamma$  wird  $s$  berechnet; 6. Formeln von *Helmert*<sup>75)</sup>, die aus denen von *Gauß*<sup>62)</sup> abgeleitet sind, in denen die mittlere Breite und das mittlere Azimut auftreten. Im *Gaußschen* Nachlasse haben sich allgemein für Rotationsflächen geltende Formeln gefunden, aus denen sich die *Helmertsche* Umkehrung sofort ergibt<sup>75a)</sup>.

70) Vgl. Zitat in Fußnote 67, 2. Abschnitt.

71) *G. H. Halphen*, Fonctions elliptiques, 2<sup>e</sup> éd., Paris 1888, p. 286; vgl. auch *G. Ciscato*, Venet. Ist. Atti (7) 3 (1892), p. 1087.

72) *J. Guarducci*, Sopra due problemi di trigonometria sferoidia, Torino 1882; *Pucci*, Fondamenti 2, p. 168.

73) *H. Bruns*, Astr. Nachr. 97 (1880), p. 73; *Pucci*, Fondamenti 2, p. 177.

74) *Ch. M. Schols*, Arch. néerland. 17 (1882), p. 101; *Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 11 (1882), p. 555 und 589; *Th. Albrecht*, Astr. Nachr. 96 (1880), p. 209.

74<sup>a</sup>) Zeitschr. f. Vermess. 12 (1883), p. 65.

75) Lotabweichungen, Heft 1, Berlin 1886.

75<sup>a</sup>) Werke 9, p. 89.

Die *Helmertschen* Formeln mögen schließlich angegeben werden, da sie eine bequeme Lösung des Problems liefern.

Wir bezeichnen das reziproke Azimut von  $\alpha_1$  mit  $\alpha_2$ , so daß  $\alpha_2 = \alpha \pm 180^\circ$ . Setzt man dann:

$$t = \alpha_2 - \alpha_1 \pm 180^\circ, \quad T = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1 \pm 180^\circ),$$

$$B = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad b = \varphi_2 - \varphi_1,$$

$$l = \omega_2 - \omega_1, \quad m = l \sin B,$$

$$n = l \cos B, \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B},$$

so bekommt man (indem man als Einheit die 7. Dezimale des Logarithmus nimmt)

$$\log t = \log \left( m \sec \frac{b}{2} \right) + [3]n^2 + [6]b^2,$$

$$\log (s \sin T) = \log (n[1]) - km^2 + [7]b^2,$$

$$\log (s \cos T) = \log \left( b[2] \cos \frac{l}{2} \right) + [5]n^2 + [8]b^2.$$

Die Koeffizienten [ ] haben die folgenden Werte:

$$[1] = \frac{a}{W} \text{ arc } 1'', \quad [2] = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \text{ arc } 1'',$$

$$[3] = k \cdot \frac{2W^2}{1-e^2}, \quad [5] = k(1 - \frac{2e^2}{1-e^2} \cos^2 B),$$

$$[6] = k \cdot \frac{2e^2}{W^2} \cos^2 B, \quad [7] = k \frac{(1-e^2)(1-10e^2 \sin^2 B)}{W^4},$$

$$[8] = \frac{3e^2 k}{W^4} \left\{ \cos 2B + e^2 \sin^2 B(4 - 3 \sin^2 B) \right\},$$

$$\log k = 4,6287228 - 10.$$

**16. Geodätische Polarkoordinaten.** Wenn man die Punkte einer Fläche auf ein System von orthogonalen Koordinaten  $\alpha, \sigma$  bezieht und wenn die Linien  $\alpha = \text{konst.}$  geodätische Linien sind, so kann man dem Linienelement die Gestalt geben:

$$(21) \quad ds = \sqrt{d\sigma^2 + Gd\alpha^2}.$$

Der Winkel  $\theta$ , den das Element  $ds$  mit der Linie  $\alpha = \text{konst.}$ , natürlich im Sinne wachsender  $\sigma$ , bildet, ist durch die beiden Relationen definiert:

$$(21') \quad \cos \theta = \frac{d\sigma}{ds}, \quad \sin \theta = \sqrt{G} \cdot \frac{d\alpha}{ds}.$$

Der geodätische Bogen  $s$ , der von einem festen Punkte zu einem beliebigen Punkte mit den Koordinaten  $\sigma, \alpha$  geht, genügt den partiellen Differentialgleichungen:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial s}{\partial \alpha}, \quad \cos \theta = \frac{\partial s}{\partial \sigma}, \quad d\theta = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \sigma} d\alpha.$$

Der Koeffizient  $G$  ist mit der absoluten Krümmung  $k$  der Fläche im Punkte  $(\alpha, \sigma)$  durch die Gleichung verbunden<sup>76)</sup>:

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \sigma^2} + k \sqrt{G} = 0.$$

In der Geodäsie ist speziell die Benutzung der *geodätischen Polarkoordinaten* von Vorteil. Nennt man den Winkel, den eine von dem festen Punkte  $O$  ausgehende geodätische Linie  $OA$  mit einer festen Richtung in der Tangentialebene von  $O$  macht,  $\alpha$  und  $\sigma$  den Bogen  $OA$ , so ergibt sich, wenn man beachtet, daß für  $\sigma = 0$  auch  $\sqrt{G} = 0$  und  $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \sigma} = 1$  ist, durch Entwicklung nach *Maclaurin*, indem man  $\sqrt{G}$  als Funktion von  $\sigma$  betrachtet und (23) beachtet:

$$(24) \quad \sqrt{G} = \sigma - \frac{k}{6} \sigma^3 - \frac{\sigma^4}{12} \left( \frac{\partial k}{\partial \sigma} \right)_0 - \frac{\sigma^5}{120} \left( 3 \frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} - k^2 \right)_0 + \dots$$

Speziell für das Rotationsellipsoid wird ( $k = \frac{1}{\rho N}$ ):

$$(25) \quad \sqrt{G} = \sigma - \frac{\sigma^3}{6 \rho_0 N_0} + \frac{e^2 \sigma^4}{6} \cdot \frac{\sin 2 \varphi_0 \cos \alpha}{N_0^2 \rho_0 (1 - e^2)} + \dots,$$

wo  $\varphi_0$  die Breite von  $O$  bedeutet.

*Helmert*<sup>77)</sup> hat (23) integriert mit Vernachlässigung von Größen der Ordnung  $e^4$ ; er erhält:

$$(25') \quad \begin{aligned} \sqrt{G} &= a \sqrt{\rho N} \sin \frac{\sigma}{a \sqrt{\rho N}} \\ &+ \frac{a c_1}{4} \left( -\frac{\sigma}{a} \sin \frac{\sigma}{a} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\sigma}{a} + \frac{1}{4} \cos \frac{\sigma}{a} \right) \\ &+ \frac{a c_2}{4} \left( \frac{3}{2} \cos \frac{\sigma}{a} - \frac{1}{8} \sin \frac{3\sigma}{a} - \frac{9}{8} \sin \frac{\sigma}{a} \right), \end{aligned}$$

wo

$$c_1 = -e^2 \sin 2 \varphi_0 \cos \alpha \quad \text{und} \quad c_2 = 2e^2 (\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha).$$

Vernachlässigt man Größen von der Ordnung  $e^2 \left( \frac{\sigma}{a} \right)^5$ , so hat man:

$$(25'') \quad \sqrt{G} = \sqrt{\rho_0 N_0} \sin \frac{\sigma}{\rho_0 N_0} + \frac{e^2 \sigma^4 \sin 2 \varphi_0 \cos \alpha}{6 a^3}.$$

*E. B. Christoffel*<sup>78)</sup> hat  $\sqrt{G}$  die „reduzierte Länge“ des Bogens  $\sigma$  genannt und gezeigt, daß diese Größe ungeändert bleibt, wenn man die Endpunkte  $O, A$  des Bogens vertauscht, indem man  $A$  als Anfangspunkt,  $O$  als Endpunkt annimmt.

76) *C. F. Gauß*, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Göttingen 1828, Art. 19 = Werke 4, p. 217.

77) *H. G.* 1, p. 278.

78) Über die allgemeine Theorie des geodätischen Dreiecks, Berlin Abh. 1868.

**17. Vergleichung der geodätischen Linie mit einem Normalschnitt.** Es sei  $A$  ein Flächenpunkt,  $R_1$  und  $R_2$  die Hauptkrümmungsradien in  $A$  und  $AB$  ein geodätischer Bogen von der Länge  $\sigma$ , der in  $A$  den Winkel  $\alpha$  mit dem zum Radius  $R_1$  gehörigen Normalschnitt bildet. Ist dann  $x, y, z$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen  $x$ - und  $y$ -Achse mit den Haupttangente in  $A$  zusammenfallen, so erhält man für die Koordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $B$ , wenn man sie als Funktionen von  $\sigma$  betrachtet, durch Entwicklung nach *Maclaurin*<sup>79)</sup>:

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^3 \cos \alpha}{6 R_1 R_2} + \dots, \\ y &= \sigma \sin \alpha - \frac{\sigma^3 \sin \alpha}{6 R_1 R_2} + \dots, \\ z &= \pm \frac{\sigma^2}{2 R_\alpha}, \end{aligned}$$

wo  $R_\alpha$  der Krümmungsradius der geodätischen Linie in  $A$  ist. Nennt man den Winkel, den der Normalschnitt  $\overline{AB}$  mit der  $x$ -Achse macht,  $A$  (in demselben Sinne wie  $\alpha$  gezählt) und beachtet, daß dieser Winkel durch die Relation  $y = x \operatorname{tg} A$  definiert ist, so folgt aus (26) bis auf Glieder der Ordnung  $\sigma^4$ :

$$A - \alpha = \frac{\sigma^2}{12 R_\alpha} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2A,$$

ein angenäherter Ausdruck für die Abweichung der geodätischen Linie im Punkte  $A$  von dem Normalschnitt  $\overline{AB}$ . Für das Rotationsellipsoid ergibt sich speziell:

$$(27) \quad A - \alpha = \frac{e^2 \sigma^2}{12 a^2} \cos^2 \varphi \sin 2A,$$

wenn man die Glieder  $e^4 \sigma^2$  und  $e^2 \sigma^4$  vernachlässigt.

Die stärkste lineare Abweichung zwischen beiden Linien ist annähernd:

$$(28) \quad \delta = \frac{e^2 \sigma^3}{18 \sqrt{3} a^2} \cos^2 \varphi \sin 2A.$$

Die Längendifferenz zwischen den Bogen  $s, \sigma$  des Normalschnittes und der geodätischen Linie findet man durch Integration von (21),

79) Diese Entwicklungen gehen unter dem Namen von *J. Weingarten*, der sie 1862 in einer Note zu einer Abhandlung von *Baeyer*<sup>55)</sup> entwickelt hat. Dieselben Entwicklungen findet man aber schon in einer Note von *V. A. Puiseux* zu: *G. Monge*, Application de l'analyse à la géométrie, Ausgabe von *J. Liouville*, 1851. Man findet sie auch bei *E. F. Minding*, *J. f. Math.* 44 (1852), p. 66. Ebenso waren sie schon *C. F. Gauß* bekannt, Werke 9, p. 94. Wegen weiterer Glieder der Reihenentwicklung (26) vgl. *Weingarten*.

indem man  $d\alpha$  durch  $d\sigma$  mittelst (27) ausdrückt und für  $\sqrt{G}$  den angenäherten Wert (25) setzt; man erhält:

$$(29) \quad s - \sigma = \frac{e^4 \sigma^5}{90 a^4} \cos^4 \varphi \sin^2 A \cos^3 A + \dots$$

Setzt man

$\sigma = 100$  km in (27), so folgt  $A - \alpha < 0',014$ ,

$\sigma = 20$  km in (28), so folgt  $\delta < 0,000042$  m,  $s - \sigma < 0,0024 \cdot 10^{-10}$  m,

$\sigma = 1000$  km in (29), so folgt  $s - \sigma < 0,000075$  m.

Die Differenz (27) zwischen dem Azimut des Normalschnitts und der geodätischen Linie ist im *allgemeinen* gegenüber den Beobachtungsfehlern zu vernachlässigen; die Abweichung  $\delta$  und die Differenz  $s - \sigma$  sind bei direkten Messungen *immer* zu vernachlässigen.

Der Ausdruck von  $A - \alpha$  für Bogen von beliebiger Länge ist schon von *Bessel*<sup>80)</sup> angegeben, der von seiner in Nr. 13 gegebenen sphärischen Darstellung und von dem in Nr. 11 angeführten Ausdruck für das Azimut des Normalschnitts ausgeht. Man erhält bis auf Glieder der Ordnung  $e^4$ :

$$A - \alpha = \frac{e^2}{4} \left( 1 - \frac{s}{a} \cotg \frac{s}{a} \right) \cos^2 u_1 \sin 2\alpha - \frac{e^2}{2} \left( \tg \frac{s}{a} - \frac{s}{a} \right) \sin 2u_1 \sin \alpha,$$

wo  $u_1$  die reduzierte Breite von  $A$  ist.

*C. G. Andrae*<sup>81)</sup> hat zum Vergleich der geodätischen Linie mit dem Normalschnitt auch von Reihenentwicklungen der Cartesischen Koordinaten Gebrauch gemacht, hat aber als  $x$ -Achse die Tangente an die geodätische Linie in  $A$  genommen.

Es folgt aus den Rechnungen von *Andrae*, daß mit derselben Annäherung, mit der (27) gilt, der Winkel, den die geodätische Linie  $AB$  im Punkte  $A$  mit dem Normalschnitt  $AB$  bildet, die Hälfte von demjenigen ist, den sie mit dem reziproken Normalschnitt  $BA$  bildet.

**18. Das geodätische Dreieck.** Der Ausdruck (24) für  $\sqrt{G}$  (Nr. 16) zeigt, daß ein begrenztes Stück  $R$  einer Fläche um einen Punkt  $O$  herum, so lange die Glieder von der Ordnung  $\sigma^4$  gegenüber  $\sigma$  vernachlässigt werden können, als ein Stück einer Kugel aufgefaßt werden kann, deren Radius gleich dem geometrischen Mittel  $\sqrt{R_1 R_2}$  der Hauptkrümmungsradien in  $O$  ist. Für das Erdellipsoid kann man zu dem Gebiet  $R$  die Umgegend von  $O$  bis zu einer Entfernung von

80) Abhandlgn. 3, p. 1 und 29; siehe auch *Baeyer*<sup>55)</sup> [Korrektion in Astr. Nachr. 60 (1863), p. 133].

81) Vgl. *Andrae*<sup>59)</sup>, 1. cahier, p. 5 ff.; siehe auch *J. De Berardinis*, Torino Mem. (2) 36 (1885), p. 159.

200 km rechnen, da der prozentuale Fehler von (25), bei der angegebenen Vernachlässigung, kleiner als  $\frac{e^2 \sigma^3}{6 a^3}$  oder  $\frac{1}{29 \cdot 10^6}$  für  $\sigma = 200$  km ist. — Innerhalb eines solchen Gebietes kann deshalb ein geodätisches Dreieck nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie berechnet werden, indem man als Kugelradius das geometrische Mittel der Hauptkrümmungsradien im Zentrum des Gebietes  $R$  nimmt oder allgemeiner in einem Punkte, der von den Ecken des Dreiecks nicht mehr als 200 km entfernt ist.

Wir kommen jetzt zu weiteren Annäherungen.

Die verschiedenen Methoden zur näherungsweise Auflösung eines geodätischen Dreiecks lassen sich zum größten Teil aus der schon erwähnten Abhandlung von Gauß<sup>76)</sup> ableiten. Gauß<sup>82)</sup> nimmt ein System rechtwinkliger geodätischer Koordinaten  $(\sigma, \alpha)$  an; die Linie  $\sigma = 0$  und die Linien  $\alpha = \text{konst.}$  sind geodätische, der Parameter  $\alpha$  mißt den Bogen der Linie  $\sigma = 0$  von einem willkürlichen Anfangspunkte aus. Betrachtet man ein rechtwinkliges geodätisches Dreieck, das die Punkte  $(0, 0)$   $(0, \alpha)$   $(\sigma, \alpha)$  zu Ecken und  $\sigma, s, \alpha$  zu gegenüberliegenden Seiten hat und nennt den Winkel  $(s, \sigma)$   $\theta$ , so entwickelt Gauß die Größen  $s \cos \theta, s \sin \theta, s^2$  in Reihen nach Potenzen von  $\sigma$  und  $\alpha$ , so daß sie den Differentialgleichungen:

$$(30) \quad s \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial s^2}{\partial \theta}, \quad s \sin \theta = \frac{1}{2 \sqrt{G}} \cdot \frac{\partial s^2}{\partial \alpha}, \quad G = \left( G \cdot \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right)^2,$$

die aus (22) folgen, genügen. Nimmt man  $\sqrt{G}$  in eine Reihe:

$$\sqrt{G} = 1 + f_0 \sigma^2 + f_1 \alpha \sigma^2 + \dots + g_0 \sigma^3 + g_1 \alpha \sigma^3 + \dots + h \sigma^4 + \dots$$

entwickelt an, so lassen sich die Entwicklungskoeffizienten von  $s \cos \theta, s \sin \theta$  und  $s^2$  durch die  $f, g, h, \dots$  ausdrücken. Gauß betrachtet dann ein beliebiges geodätisches Dreieck als Summe oder Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke und bestimmt die Differenzen zwischen den Winkeln  $A, B, C$  dieses Dreiecks und den Winkeln  $A^*, B^*, C^*$  eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten; diese Differenzen ergeben sich als Funktionen der  $f, g, h, \dots$ . Eliminiert man drei dieser Koeffizienten durch Einführung der Krümmungen  $k_a, k_b, k_c$  in den drei Ecken, die mit dem Ausdruck von  $\sqrt{G}$  durch (23) zusammenhängen, und vernachlässigt kleine Größen vierter Ordnung in bezug auf die Seiten, so ergibt sich:

$$(31) \quad A - A^* = \frac{S}{12} (2k_a + k_b + k_c)$$

82) Die von uns mit  $s, \sigma, \alpha, \theta, G$  bezeichneten Größen nennt Gauß  $r, p, q, \psi, n^2$ .

und analoge Ausdrücke für  $B - B^*$ ,  $C - C^*$ ;  $S$  ist der Inhalt des ebenen Dreiecks.

*Hansen*<sup>83)</sup> hat die Methode von *Gauß* weiter entwickelt, indem er sich geodätischer Polarkoordinaten bediente. Er erhält die Differenzen zwischen den Winkeln des geodätischen Dreiecks und denen des sphärischen Dreiecks mit denselben Seiten bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich und wendet die Resultate vermittelt einer sehr komplizierten Rechnung auf das Rotationsellipsoid an, indem er Glieder von der Ordnung  $e^2 s^6$ ,  $e^4 s^4$  vernachlässigt. Aber die Entwicklungen *Hansens* enthalten Größen, die von der Gestalt  $z = \varphi(x, y)$  der Flächengleichung in Cartesischen Koordinaten abhängen, was die Rechnung unnötig kompliziert, da die Beziehungen zwischen den sechs Stücken eines geodätischen Dreiecks von der speziellen Gestalt, die die Fläche durch Verbiegung annehmen kann, unabhängig sind und nur von der Form des Linienelements der Fläche abhängen.

Unter Vermeidung dieser Komplikation hat *J. Weingarten*<sup>84)</sup> in einfacher Weise für eine beliebige Fläche und bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich die Differenzen  $A - A^*$ ,  $B - B^*$ ,  $C - C^*$  ermittelt, indem er die Krümmungen und die Werte des *Differentialparameters erster Ordnung von  $k$  (Inflektent)* in den drei Ecken einführt. Er hat seine Formeln auch auf das Rotationsellipsoid mit derselben Annäherung wie *Hansen*<sup>85)</sup> angewandt.

Auf einfachere Weise erhält man den Vergleich zwischen den Winkeln des geodätischen Dreiecks und denen eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten, wenn man Polarkoordinaten benutzt und nach *G. Darboux*<sup>86)</sup> die Differentialgleichung:

$$(32) \quad G \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right)^2 = G$$

nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu integrieren versucht. *Darboux* betrachtet das Dreieck, das den Koordinatenanfangspunkt und die Punkte  $(\sigma_0, \alpha_0)$   $(\sigma, \alpha)$  zu Ecken und  $s, \sigma, \sigma_0$  zu Seiten hat und setzt auf Grund einfacher geometrischer Überlegungen:

$$(33) \quad s^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma\sigma_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \sigma^2\sigma_0^2 \sin^2(\alpha - \alpha_0) P,$$

wo  $P$  eine Entwicklung nach Potenzen von  $\sigma_0, \sigma$  ist, deren Koeffi-

83) Vgl. Zitat in Fußnote 67, III. Abschnitt.

84) Astr. Nachr. 73 (1869), p. 65; 75 (1870), p. 91.

85) Einen analytischen und numerischen Vergleich der Formeln von *Hansen* und *Weingarten* findet man bei *Helmert*, H. G. 1, p. 375—386.

86) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris 1890, 3, livre VI, chap. VIII.

zienten als Funktionen von  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  mittelst (32) zu bestimmen sind. Für  $G$  führt man die Entwicklung (24) ein. Nach Bestimmung der ersten drei Glieder von  $P$  und durch Vergleich von (33) mit dem Kosinussatz:  $s^2 = \sigma_0^2 + \sigma^2 - 2\sigma\sigma_0 \cos A^*$  der ebenen Trigonometrie findet man leicht die Differenz  $\alpha - \alpha_0 - A^*$  oder Formel (31) von *Gauß*. *Darboux* treibt dann die Annäherung bis zu den Größen vierter Ordnung einschließlich, indem er die Krümmungen in den Seitenmitten einführt.

Nennt man die Winkel des sphärischen Dreiecks, das die gleichen Seiten wie das geodätische hat und auf einer Kugel mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  liegt, wo  $k = \frac{1}{3}(k_a + k_b + k_c)$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , so hat man mit derselben Genauigkeit wie in (31):

$$(34) \quad A - A' = \frac{S}{36}(2k_a - k_b - k_c)$$

und analog  $B - B'$ ,  $C - C'$ . Beschränkt man sich auf den speziellen Fall des Rotationsellipsoids, so hat *Bessel*<sup>87)</sup> ohne Beweis die Ausdrücke für  $A - A'$ , usw. bis auf Glieder  $e^2 s^4$  oder mit entsprechender Annäherung wie (34) gegeben.

*Helmert*<sup>88)</sup> hat eine vollständige Entwicklung der sphäroidischen Trigonometrie für den Fall des Rotationsellipsoides auf Grund der Differentialformeln von *E. B. Christoffel*<sup>89)</sup> gegeben, welche die unendlich kleinen Änderungen der Stücke eines geodätischen Dreiecks bei einer infinitesimalen Verlängerung oder Drehung einer Seite liefern. Für  $\sqrt{G}$  setzt *Helmert* die Entwicklung (25''). Die *Helmertsche* Methode unterscheidet sich in ihren Grundlagen nicht von der *Hansenschen*, aber sie bietet im Vergleich mit dieser den Vorteil größerer Einfachheit und überdies enthalten die in dem Ausdruck für  $\sqrt{G}$  vernachlässigten Terme sämtlich  $e^2$  als Faktor und sind deshalb sehr klein, auch wenn die Dreiecksseiten ziemlich lang sind<sup>90)</sup>.

**19. Auflösung des geodätischen Dreiecks durch Reduktion auf das ebene Dreieck. Sphäroidischer Exzeß.** *Legendre*<sup>91)</sup> verdankt man die Idee, zur Berechnung des sphärischen Dreiecks das ebene

87) Astr. Nachr. 1 (1822), p. 85 = Abh. 3, p. 3.

88) H. G. 1, Kap. VIII.

89) Über die allgemeine Theorie des geodät. Dreiecks, Berlin Abh. 1868.

90) Über das Problem der geodätischen Dreiecke vgl. auch: *H. James* und *A. R. Clarke*<sup>52)</sup>, p. 240 ff.; *J. J. Baeyer*, Astr. Nachr. 61 (1864), p. 225; *Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 18 (1889), p. 257.

91) Paris Mém. Acad. pour 1787 (1789), p. 352 oder auch *Delambre*<sup>48)</sup>, Note III.

Dreieck mit denselben Seiten zu benutzen. Er hat bewiesen, daß bis auf Größen vierter Ordnung die Differenzen  $A' - A^*$ , usw. ( $A', B', C'$  sphärische,  $A^*, B^*, C^*$  ebene Winkel) durch die Formeln:

$$(35) \quad A' - A^* = B' - B^* = C' - C^* = \frac{S}{3R^2}$$

gegeben sind, wo  $S$  der Inhalt des ebenen Dreiecks und  $R$  der Kugelradius ist. Treibt man die Annäherung weiter, so erhält man bis auf Glieder sechster Ordnung:

$$A' - A^* = \frac{S}{3R^2} \left( 1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120R^2} \right)$$

und analog für  $B' - B^*$ ,  $C' - C^*$ . Hieraus und mit Hilfe von (34) erhält man bis auf Glieder mit  $s^6$  und  $e^2s^4$ , wenn

$$R = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k_a + k_b + k_c}}$$

gesetzt wird<sup>92)</sup>:

$$(36) \quad A - A^* = \frac{S}{12} \left( 2k_a + k_b + k_c + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{30} k^2 \right).$$

Diese Annäherung genügt in praxi immer.

Meistens ist es sogar schon ausreichend, das geodätische Dreieck durch ein sphärisches zu ersetzen, indem man als Kugelradius  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  annimmt und vom sphärischen Dreieck zum ebenen mit Hilfe der einfachen Formeln (35) übergeht. Man vernachlässigt dann in den Ausdrücken für die Winkel Glieder mit  $s^4$  und  $e^2s^3$ , was bei Seiten unter 127 km Länge nicht mehr als 0'',0001 bzw. 0'',0005 ausmacht<sup>93)</sup>. Mit dieser Genauigkeit wird *der sphäroidische Exzeß*

$$\Delta = A + B + C - 180^0$$

des geodätischen Dreiecks in Sekunden durch die Formel:

$$\Delta = \frac{kS}{\text{arc } 1''}$$

gegeben und man hat:

$$A - A^* = B - B^* = C - C^* = \frac{\Delta}{3}.$$

Wir wollen die durch diese einfachen Formeln erhaltene Annäherung als *übliche Annäherung* bezeichnen. Mit derselben Genauigkeit kann man für  $k$  den Wert  $\frac{1}{\rho N}$  der Krümmung unter der Breite  $\varphi_0$

92) Bis auf die Bezeichnung stimmen diese Ausdrücke mit *Helmert*, H. G. 1, p. 359, Formel (6) überein.

93) *Helmert*, H. G. 1, p. 96 u. 361.

des *mittleren Parallels*<sup>94)</sup> des Dreiecks nehmen. — Den Exzeß  $\Delta$  kann man durch folgende Formeln berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{S}{\varrho N \text{ arc } 1''} = \frac{b \cdot c \sin A^*}{2 \varrho N \text{ arc } 1''} = \frac{c^2 \sin A^* \sin B^*}{2 \varrho N \sin (A^* + B^*) \text{ arc } 1''} \\ &= \frac{c^2 \sin A^* \sin (A^* + C^*)}{2 \varrho N \sin C^* \text{ arc } 1''} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\varrho N \text{ arc } 1''},\end{aligned}$$

wo  $p = \frac{a+b+c}{2}$  ist. Man ändert den Grad der Annäherung nicht, wenn man in diesen Ausdrücken  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  durch  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ersetzt. Soll  $\Delta$  mit derjenigen Genauigkeit berechnet werden, die (36) entspricht, so ist zu setzen:

$$\Delta = \frac{Sk}{\text{arc } 1''} \left( 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24} k \right).$$

**20. Sehnen und Normalschnitte.** Sowohl bei der Übertragung der Koordinaten und des Azimuts wie bei der Auflösung der geodätischen Dreiecke ist die Benutzung der geodätischen Linien natürlich nicht unumgänglich notwendig. Man kann auch die Sehnen oder Normalschnitte benutzen. So löst *Delambre*<sup>95)</sup> das Problem der Übertragung der geographischen Koordinaten, wenn die Sehne und das astronomische Azimut (oder Azimut des Normalschnitts) gegeben sind. *C. Bremiker*<sup>96)</sup> löst dasselbe Problem mit größerer Annäherung und behandelt auch die Aufgabe, die Länge der Sehne und das astronomische Azimut zu bestimmen, wenn die geographischen Koordinaten der Endpunkte gegeben sind. Wir haben in Nr. 11 die auf dies Problem bezüglichen Formeln von *Helmert* gegeben. *Bremiker* gibt auch Methoden zur Berechnung der Dreiecke mit Hilfe der Sehnendreiecke, deren Winkel er aus den Horizontalwinkeln berechnet. *Helmert*<sup>97)</sup> hat bemerkt, daß man bequem die *Sehnen* benutzen kann, ohne die Winkel zwischen den Sehnen in die Rechnung einzuführen, da zwischen den Sehnen  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  und den Horizontalwinkeln einfache Relationen von

94) Wenn die Seiten nicht länger als 120 km sind, so hat ein Fehler von zwei Einheiten der fünften Stelle des Logarithmus auf  $\Delta$  keinen größeren Einfluß als  $0'',0015$ . Andererseits ist die Änderung von  $\log \frac{1}{\varrho N}$  nicht größer als  $0'',00011$ , wenn  $\varphi$  sich um  $1^\circ$  ändert. Es genügt deshalb, die Mittelbreite bis auf  $10'$  genau zu berechnen, um in  $\frac{\Delta}{3}$  sicher keinen größeren Fehler als  $0'',0005$  zu erhalten.

95) Vgl. Zitat in Fußn. 48, p. 77f.

96) Vgl. Zitat in Fußn. 46, § 6 u. f.

97) H. G. 1, p. 105, 190. Wegen der Übertragung der geographischen Koordinaten unter Benutzung der Sehnen vgl. *ibid.*, p. 142; es interessieren besonders die Formeln für den Fall kleiner Entfernungen.

genügender Annäherung bestehen. Es verdient in dieser Beziehung für den Fall eines sphärischen Dreiecks die Sinusformel von *J. A. Grunert*<sup>98)</sup> erwähnt zu werden, die bezüglich der Seiten bis auf Glieder vierter Ordnung ausschließlich genau ist:

$$a' : b' : c' = \sin \left( A - \frac{\Delta}{4} \right) : \sin \left( B - \frac{\Delta}{4} \right) : \sin \left( C - \frac{\Delta}{4} \right).$$

*Helmert*<sup>99)</sup> hat eine analoge Formel für das Rotationsellipsoid aufgestellt, indem er auch noch die kleinen Größen vierter Ordnung und die Exzentrizität  $e$  berücksichtigte.

Berechnungen aus der sphäroidischen Trigonometrie mit Hilfe der astronomischen Azimute und der Normalschnitte findet man bei *James und Clarke*<sup>100)</sup>. Die Normalschnitte haben indes den Nachteil, für jedes Punktpaar doppelt vorhanden zu sein und weniger einfache Rechnungen zu liefern als die geodätischen Linien.

**21. Reduktion ellipsoidischer Figuren auf sphärische durch konforme Abbildung.** *Gauß*<sup>101)</sup> hat von den Hauptproblemen der höheren Geodäsie eine Auflösung gegeben, die sich auf eine konforme Abbildung des Rotationsellipsoids auf die Kugel stützt. Die Parallelkreise und Meridiane des Ellipsoids entsprechen den Parallelkreisen und Meridianen auf der Kugel nach den Formeln:

$$(37) \quad \begin{aligned} \Omega &= \alpha \omega, \\ \operatorname{tg} \frac{V}{2} &= k \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^\alpha \left( \frac{1+e \cos v}{1-e \cos v} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}, \quad (\alpha, k \text{ Konstante}), \end{aligned}$$

$\omega$  ist die Länge,  $v$  das Komplement der Breite  $\left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$  für einen Ellipsoidpunkt,  $\Omega$ ,  $V$  sind die analogen Größen für den entsprechenden Kugelpunkt. Der lineare Modul oder das Verhältnis zwischen einem Linienelement auf der Kugel und dem entsprechenden auf dem Ellipsoid ist:

$$(38) \quad m = \frac{\alpha R \sin V (1 - e^2 \cos^2 v)}{a \sin v},$$

wenn  $R$  den Kugelradius und  $a$  den Äquatroradius des Ellipsoids bezeichnet. Die Größen  $R$ ,  $\alpha$ ,  $k$  sind so zu bestimmen, daß auf einem ausgewählten Parallel mit der Breite  $P$  (Normalbreite)

98) Arch. Math. Phys. 25 (1855), p. 197; bezüglich des Sehnendreiecks vgl. auch *A. Nagel*, Zeitschr. Math. Phys. 1 (1856), p. 257.

99) H. G. 1, p. 197.

100) Vgl. Zitat in Fußn. 52, p. 232 f.

101) Vgl. Zitat in Fußn. 62. In dieser Hinsicht siehe auch: *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1881), p. 609 u. 641.

$$(39) \quad m = 1, \quad \frac{\partial m}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 m}{\partial v^2} = 0$$

Bezeichnet man die  $P$  entsprechende sphärische Breite mit  $Q$ , so lauten die Bedingungen:

$$R = \frac{a \cos P}{\alpha \cos Q \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}, \quad \alpha \sin Q = \sin P,$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 P}{1 - e^2}, \quad k = \frac{\operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{P}{2}\right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{Q}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}.$$

Aus den ersten dreien ergibt sich durch Elimination von  $\alpha, P$ :

$$R = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 P},$$

d. h. der Kugelradius ist das geometrische Mittel der Hauptkrümmungsradien unter der Breite  $P$ . Wenn man eine ellipsoidische Zone betrachtet, die nur wenig von dem Parallel abweicht, und mit  $s$  die größte Entfernung eines Zonenpunktes vom Parallel bezeichnet, so können die Ellipsoidbogen innerhalb jenes Gebietes den entsprechenden auf der Kugel mit einem relativen Fehler von der Ordnung  $e^2 \cdot \frac{s^3}{a^3}$  gleichgesetzt werden. In dieser Annäherung können daher die ellipsoidischen Dreiecke als sphärische aufgelöst werden, was die Resultate der Nr. 18 bestätigt.

Zur Übertragung der geographischen Koordinaten von einem Punkte  $A(v, \omega)$  nach einem anderen  $B(v', \omega')$  bei gegebenem geodätischem Bogen  $AB = s$  und Azimut  $t$  in  $A$ , verfährt man so:

1) Man berechnet aus (37) das dem ellipsoidischen  $v$  entsprechende sphärische  $V$ ;

2) man löst ein sphärisches Dreieck aus zwei Seiten  $\left(V, \frac{s}{R}\right)$  und dem eingeschlossenen Winkel  $t$  auf und berechnet dadurch das  $v'$  entsprechende  $V'$  und die sphärische Längendifferenz  $\Omega'$ ;

3) aus (37) leitet man  $v'$  und  $\omega - \omega' = \frac{\Omega}{\alpha}$  ab. Bei dem Übergang von den ellipsoidischen Breiten zu den sphärischen ist es zweckmäßig, an Stelle von (37) Reihenentwicklungen zu benutzen. Ist  $P + p$  die Breite eines Ellipsoidpunktes und  $Q + q$  die Breite des entsprechenden Kugelpunktes, so findet man durch Entwicklung von (37):

$$q = p \frac{h}{\cos \theta} + \frac{3}{2} \frac{e^2 h}{\cos^3 \theta} s p^2 + \frac{e^2 h}{6 \cos^5 \theta} (3c^2 - 3s^2 + 12e^2 c^2 s^2 + 3e^2 s^4) p^3 + \dots$$

Durch Umkehrung der Reihe ergibt sich:

$$p = \frac{q}{h} \cos \theta - \frac{3e^2 cs q^2}{2h^2} + \frac{e^2 q^3}{2h^3 \cos \theta} (-c^2 + s^2 + 5e^2 c^2 s^2 - e^2 s^4) + \dots,$$

wenn für den Augenblick gesetzt wird:

$$s = \sin P, \quad c = \cos P, \quad h = \sqrt{1 - e^2}, \quad e \sin P = \sin \theta.$$

*Gauß* hat die Annäherung noch weiter getrieben. — Will man Größen von der Ordnung  $e^2 \frac{s^3}{a^3}$ , wo  $s$  den Bogen bedeutet, berücksichtigen, so kann der Bogen  $A'C'B'$  auf der Kugel, der dem geodätischen Bogen  $AB$  auf dem Ellipsoid entspricht, nicht mit dem Bogen des größten Kreises  $A'C''B'$  identifiziert werden, und an den Azimuten der geodätischen Linie  $AB$  muß man gewisse Korrekturen  $\psi_1, \psi_2$  anbringen, um die Azimute  $t'_1, t'_2$  des Bogens  $A'C'B'$  abzuleiten. Setzt man:

$$\text{arc}(AB) = S, \quad k = \frac{1}{2} \frac{d \log m}{dV} = -\frac{1}{2} \frac{d \log m}{d(Q+q)},$$

so ergibt sich<sup>102)</sup>:

$$t_1 - t'_1 = \psi_1 = \frac{S}{3A} (-k_2 \sin \alpha_2 + 2k_1 \sin \alpha_1),$$

$$t_2 - t'_2 = \psi_2 = \frac{S}{3A} (-k_1 \sin \alpha_1 + 2k_2 \sin \alpha_2),$$

bis auf Größen der Ordnung  $e^2 s^4$ . Mit derselben Annäherung erhält man für das Verhältnis von  $S$  zum Bogen  $S' = A'C'B'$  des größten Kreises:

$$\frac{S}{S'} = \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

$k_1, m_1$  sind die Werte von  $k, m$  im Punkte  $A$ ,  $k_2, m_2$  im Punkte  $B$ . Weitergehende Formeln sind von *O. Schreiber* entwickelt worden<sup>102a)</sup>.

## 22. Rechtwinklige geodätische oder Soldnersche Koordinaten<sup>103)</sup>.

Von besonderem Interesse sowohl für theoretische Zwecke wie für die praktische Geodäsie ist die Bestimmung der Ellipsoidpunkte durch das

102) Bei dem Vergleich dieser Formeln mit denen von *Gauß* beachte man, daß *Gauß* das Azimut von Süden statt von Norden aus rechnet. Die von *Gauß* mit  $L$  bezeichnete Größe ist bei uns  $\frac{S'}{a}$ .

102a) Die konforme Doppelprojektion usw., Berlin 1897.

103) In der Karte von Frankreich, die von *C.F. Cassini de Thury* und seinem Sohne ausgeführt ist (vollendet 1815), sind die ebenen rechtwinkligen Koordinaten genau gleich den hier definierten rechtwinkligen geodätischen Koordinaten, wobei das Observatorium von Paris als Anfangspunkt genommen ist. Der rationelle Gebrauch dieser Koordinaten zu geodätischen Rechnungen wurde von *J.v. Soldner* 1809 für die bayerische Landesvermessung eingeführt (vgl. *C.v. Orff* und *C.M. v. Bauernfeind*, Die Bayer. Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grund-

folgende System geodätischer Koordinaten. Für einen beliebigen Punkt  $A$  (Fig. 3) nennen wir die Länge der geodätischen Linie  $AA'$ , die von  $A$  senkrecht zu einem Hauptmeridian gezogen ist,  $Y$  und den Bogen dieses Meridians zwischen  $A'$  und einem festen Punkte  $O$  (Anfangspunkt der Koordinaten)  $X$ . Wir werden  $Y$  positiv vom Meridian nach Osten und  $X$  positiv nach Norden rechnen.

Sind die geodätischen Polarkoordinaten des Punktes  $A$  in bezug auf  $O$ :  $s, \alpha_1$ , so erhält man die Koordinaten  $X_1, Y_1$  von  $A$  in der üblichen Annäherung (Nr. 19) aus dem geodätischen Dreieck  $AA'O$ ,<sup>104</sup>) dessen sphärischer Exzeß aus der Gleichung:

$$3 \varepsilon = \frac{s^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2 \varrho_1 N_1 \text{arc } 1''}$$

folgt ( $\varrho_1, N_1$  sind die Werte von  $\varrho, N$  für  $O$ ). Man bekommt:

$$(40) \quad X_1 = s \cos(\alpha_1 - 2\varepsilon), \quad Y_1 = s \sin(\alpha_1 - \varepsilon).$$

Für die umgekehrte Rechnung hat man mit derselben Genauigkeit:

$$3 \varepsilon = \frac{X_1 Y_1}{2 \varrho_1 N_1 \text{arc } 1''}, \quad s \sin \alpha_1 = Y_1 \left(1 + \frac{X_1^2}{6 \varrho_1 N_1}\right),$$

$$s \cos \alpha_1 = X_1 \left(1 - \frac{Y_1^2}{3 \varrho_1 N_1}\right).$$

Der Winkel des Dreiecks  $A'AO$  in  $A$  ist  $90^\circ - \alpha_1 + 3\varepsilon$ .

Es sei jetzt die Länge  $s'$  des geodätischen Bogens  $AB$  und der Winkel  $A'AB = M$  gegeben; gesucht sind die Koordinaten  $X_2, Y_2$  von  $B$ . Macht man auf  $BB'$  (Ordinate von  $B$ )  $B'H = A'A = Y_1$ , so bekommt man aus dem Viereck  $AA'B'H$ , wenn man den sphäroidischen Exzeß mit  $E$  bezeichnet, in der üblichen Annäherung:

lage, München 1873) und unabhängig von ihm von *J. Bohnenberger* bei der württemberg. Landesvermessung (De computandis dimensionibus trigonometricis etc. Tübingen 1826, deutsch bearbeitet von *E. Hammer*, Stuttgart 1885).

104) Die hier befolgte Methode stammt von *G. Zachariae*, Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten, Berlin 1878, und von *N. Jadanza*<sup>65)</sup>. *O. Schreiber* hat Formeln für geodätische Koordinaten im II. Teile der Hauptdreiecke der K. Preuß. Landestriangulation, Berlin 1874, p. 605 gegeben. Ihre Entwicklung findet sich bei *W. Jordan* und *K. Steppes*, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882; Bd. 1, Höhere Geodäsie und Topographie des deutschen Reiches von *W. Jordan*, p. 103. Vgl. ferner *O. Börsch*, Anleitung zur Berechnung geodät. Koordinaten, Kassel 1885; *W. Jordan*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1891), p. 213; *L. Krüger*, ibid. 26 (1897), p. 441.

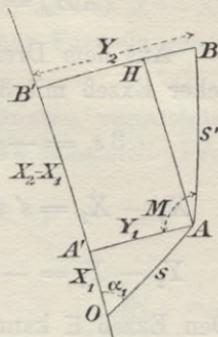


Fig. 3.

$$\sphericalangle(A'AH) = \sphericalangle(AHB') = 90^\circ + \frac{E}{2},$$

$$(AH) = (A'B) - \frac{\text{arc } 1''}{2} E (AA') \quad (E \text{ in Sekunden}).$$

Aus dem Dreieck  $ABH$  findet man dann, wenn sein sphäroidischer Exzeß mit  $3 \varepsilon_1$  bezeichnet wird:

$$3 \varepsilon_1 = -\frac{s'^2 \sin M \cos M}{2 \varrho N \text{arc } 1''}, \quad (\varrho, N \text{ beziehen sich auf } A),$$

$$X_2 - X_1 = s' \sin(M - E - 2 \varepsilon_1) + \frac{\text{arc } 1''}{2} E Y_1$$

$$Y_2 - Y_1 = -s' \cos\left(M - \frac{E}{2} - \varepsilon_1\right).$$

Den Exzeß  $E$  kann man nach der Formel berechnen:

$$E = \frac{Y_1 s' \sin M}{\varrho N \text{arc } 1''}.$$

Zur Ausführung der umgekehrten Rechnung (gegeben  $X_1, Y_1, X_2, Y_2$ , gesucht  $s', M$ ) setzen wir:

$$X_2 - X_1 = \Delta X, \quad Y_2 - Y_1 = \Delta Y$$

und erhalten dann:

$$E = \frac{Y_1 \Delta X}{\varrho N \text{arc } 1''}, \quad 3 \varepsilon_1 = \frac{\Delta X \Delta Y}{2 \varrho N \text{arc } 1''},$$

$$-s' \cos M = \Delta Y + \frac{\text{arc } 1''}{2} (E + 2 \varepsilon_1) \Delta X,$$

$$s' \sin M = \Delta X - \text{arc } 1'' (E + 2 \varepsilon_1) \Delta Y - \frac{\text{arc } 1''}{2} E Y_1.$$

Auf direkterem Wege löst *Helmert*<sup>105)</sup> die Probleme für die rechtwinkligen geodätischen Koordinaten, indem er von den Differentialgleichungen (analog mit (21) in Nr. 16)<sup>106)</sup>:

$$(42) \quad s \cos a = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial(s^2)}{\partial X}, \quad s \sin a = \frac{1}{2} \frac{\partial(s^2)}{\partial Y}$$

ausgeht, denen der geodätische Bogen  $s$  genügt, der einen festen Punkt  $A(X_1 Y_1)$  mit einem beliebigen Punkt  $(XY)$  verbindet;  $a$  ist der Winkel, den das Element  $ds$  im Punkte  $B$  mit der Kurve  $Y = \text{konst.}$ , natürlich im Sinne der wachsenden  $X$ , macht (*Richtungswinkel*), und  $G$  der Koeffizient im Ausdruck für das Linienelement:

$$ds = \sqrt{dY^2 + G dX^2}.$$

105) H. G. 1, p. 412—420.

106) Diese Gleichungen erhält man am einfachsten auf geometrischem Wege, wenn man den Satz berücksichtigt, daß das eine Ende eines geodätischen Bogens von konstanter Länge, das um das andere Ende rotiert, eine zum Bogen selbst rechtwinklige Linie erzeugt.

Indem man (42) nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten integriert, erhält man für  $s \cos a$ ,  $s \sin a$  Reihen nach Potenzen von  $X - X_1$ ,  $Y - Y_1$ . Durch Umkehrung der Reihen lassen sich  $X - X_1$ ,  $Y - Y_1$  durch  $s$  und  $a$  ausdrücken. Die *Helmertschen* Formeln gehen bis zu Gliedern mit  $s^5$  und  $e^2 s^4$  einschließlich.

**23. Übertragung der geographischen Koordinaten vermitteltst rechtwinkliger geodätischer.** Das in Nr. 13 und 14 behandelte Problem kann man auch mit Hilfe der rechtwinkligen geodätischen Koordinaten  $X_1 Y_1$  des Punktes  $B$  in bezug auf  $A$  als Anfangspunkt lösen; denn nach Berechnung von  $XY$  kann man die Breite von  $F$  (Fig. 4), des Fußpunktes der geodätischen Linie, die durch  $B$  senkrecht zum Meridian von  $A$  geht, finden und hierauf die geographischen Koordinaten von  $F$  nach  $B$  übertragen. Wir geben die *Helmertschen* Formeln<sup>107)</sup> unter Benutzung der in der Figur angegebenen Bezeichnungen, wo  $BP$  der Meridian von  $B$  und  $BP'$  die durch  $B$  gehende Linie  $Y = \text{konst.}$  ist. Der Winkel  $PBP' = t$  ist die *Meridiankonvergenz* zwischen  $F$  und  $B$  (Nr. 13).

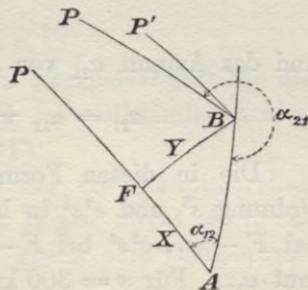


Fig. 4.

Setzt man:

$$u = s \cos \alpha_{12}, \quad v = s \sin \alpha_{12},$$

so hat man

$$\log X = \log u + \frac{1}{3} \frac{Mv^2}{a^2(1-e^2)} W_0^4$$

$$\log Y = \log v - \frac{1}{6} \frac{Mu^2}{a^2(1-e^2)} W_0^4 \quad (M = 0,4342945 \dots),$$

$$\log(F - \varphi_1) = \log \left( \frac{X}{\rho_m \text{arc } 1''} \right) - \frac{Me^2}{8} \left( \frac{X}{\rho_m} \right)^2 \cos(\varphi_1 + F)$$

( $F - \varphi_1$  in Sekunden),

$$\eta = \frac{Y}{N \text{ arc } 1''}, \quad \text{tg } \omega_{12} = \text{tg } \eta \cdot \sec F,$$

$$\sin(F - \varphi_2) = \sin \eta \text{ tg } F \text{ tg } \frac{\omega_{12}}{2} \cdot \frac{W^2}{1-e^2};$$

107) H. G. 1, p. 456. Dort ist aber die  $X$ -Achse positiv nach Süden, die  $Y$ -Achse positiv nach Westen und das Azimut von Süden aus gerechnet. *O. Schreiber* (Rechnungsvorschriften für die Trigon. Abt. der Landesaufnahme, Berlin 1878) hat das Problem der sphäroidischen Übertragung nach demselben Prinzip gelöst. Seine Formeln sind etwas weitläufiger, vermeiden aber indirektes Rechnen. In den *Albrechtschen* Tafeln<sup>46)</sup> findet man numerische Tabellen zum Gebrauch der *Schreiberschen* Formeln.

$\varphi_1, F, \varphi_2$  sind die Breiten von  $A, F, B$ ;  $\omega_{12}$  ist die Längendifferenz zwischen  $B$  und  $A$ ,  $W_0$  der Wert von  $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$  für die Breite  $\varphi_1 + \frac{2}{3}(F - \varphi_1)$  [in erster Annäherung findet man  $F$  aus:  $\log(F - \varphi_1)'' = \log u + 8,511$ ];  $\varrho_m$  ist der Krümmungsradius im Meridian unter der Breite  $\frac{1}{2}(F + \varphi_1)$ ,  $W$  der Wert von  $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$  für die Breite  $F - \frac{1}{3}(F - \varphi_2)$ ,  $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}}$ . Den Winkel  $t$  findet man aus der Formel:

$$\operatorname{tg} t = \sin \eta \operatorname{tg} F$$

und das Azimut  $\alpha_{21}$  von  $BA$  in  $B$  ist gegeben durch:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} \pm 180^\circ + t - \frac{XYW_0^4}{2a^2(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''}$$

Die in diesen Formeln vernachlässigten Größen sind von der Ordnung  $s^5$  und  $e^2 s^4$  in bezug auf  $X, Y$ , von der Ordnung  $e^4 s^3, e^2 s^5$  bei  $F - \varphi_1, e^2 s^4$  bei  $F - \varphi_2, e^2 s^5$  bei  $\omega_{12}, e^2 s^3$  und  $s^4$  bei dem Azimut  $\alpha_{21}$ . Für  $s = 300$  km sind diese Fehler kleiner als  $0'',0002$  in  $\varphi_1 - F, 0'',0004$  in  $F - \varphi_2, 0'',0003$  in  $\omega_{12}$  und  $0'',014$  in  $\alpha_{21}$  (vgl. *Helmert*, H. G. 1, p. 452—454).

**24. Projektionen auf die Ebene.** Wir haben in Nr. 21 auseinandergesetzt, wie *Gauß* mit Hülfe einer konformen Abbildung die Probleme der sphäroidischen Trigonometrie auf die der sphärischen zurückgeführt hat. In analoger Weise (und mit größerem Nutzen für die Anwendungen in der praktischen Geodäsie) kann man Projektionen auf die Ebene benutzen, um die geodätischen Rechnungen auf solche der ebenen Trigonometrie zurückzuführen<sup>108</sup>). Es seien einige Haupt-systeme dieser Projektionen genannt.

*Projektion von Soldner.* Die Cartesischen Koordinaten eines Punktes der Ebene werden den rechtwinkligen geodätischen Koordinaten des entsprechenden Punktes auf dem Ellipsoid gleich gemacht<sup>109</sup>).

*Konforme Kegelprojektion*<sup>110</sup>), bei der die Meridiane durch ein Strahlenbüschel und die Parallelkreise durch konzentrische Kreise ab-

108) Eine vollständige Behandlung der ebenen Projektionen findet man bei *Jordan*, Handbuch 3, p. 255—291 und 404—487; Bemerkungen dazu von *A. Börsch* in Fortschr. der Mathem. 27 (1896), p. 785. Man sehe auch *C. F. Gauß* Werke 9, p. 137 und vergleiche im übrigen VI 1, 4 (*R. Bourgeois*).

109) Vgl. Fußnote 103.

110) Diese Projektion ist von *F. Paschen* bei der mecklenburg. Landesvermessung benutzt, vgl. *W. Jordan*, Großherzogl. Mecklenb. Landesverm., 5. Teil, Schwerin 1895. Für die geodätischen Rechnungen in der Äquatorgegend ist die *Merkatorprojektion* von *Ch. M. Schols* vorgeschlagen und studiert [Delft J. éc. polyt. 1 (1885), p. 1].

gebildet werden. Entspricht dem Flächenpunkte  $\varphi$ ,  $\omega$  ein Punkt in der Ebene mit den Polarkoordinaten  $R$ ,  $\theta$ , so ist

$$R = k\Phi, \quad \theta = k\omega,$$

wo

$$\Phi = \cotg^h \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{eh}{2}} \quad (h, k \text{ Konstanten}).$$

Wenn man eine Erdzone mit der Mittelbreite  $\varphi_0$  abbilden will, so sind die passendsten Werte der Konstanten:

$$h = \sin \varphi_0, \quad k = \frac{r_0}{\Phi_0 \sin \varphi_0};$$

$\Phi_0$ ,  $r_0$  sind die Werte von  $\Phi$ ,  $r$  (Radius des Parallelkreises) für die Breite  $\varphi_0$ . — Die Theorie dieser Projektion ist vollständig analog der sphärischen Abbildung von *Gauß* (Nr. 21).

*Konforme Projektion von Gauß*<sup>111)</sup>, bei der der Hauptmeridian durch eine Gerade dargestellt wird und die Bogen dieses Meridians den entsprechenden Strecken in der Ebene gleich sind (längentreue Abbildung des Hauptmeridians). Setzt man:

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{e}{r} d\varphi = \log \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right],$$

so kann man das Linienelement der Fläche in der Gestalt

$$ds = r \sqrt{dq^2 + d\omega^2}$$

ansetzen und jede konforme Abbildung auf die Ebene wird durch eine Relation der Form:

$$X + iY = f(q + i\omega) \quad (i = \sqrt{-1})$$

vermittelt. Wenn die  $X$ -Achse den Hauptmeridian darstellt, so muß sich für  $\omega = 0$  die Gleichung  $X = \sigma$  ergeben, wo  $\sigma$  den Meridianbogen zwischen dem Äquator und der Breite  $\varphi$  bedeutet. Dies bestimmt die Gestalt der Funktion  $f$  und für kleine Werte  $\omega$  erhält man durch Reihenentwicklung:

$$X = \sigma + \frac{\omega^2}{2} N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\omega^4}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots,$$

$$Y = \omega N \cos \varphi + \frac{\omega^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \dots,$$

111) Diese Projektion ist von *Gauß* für die Rechnungen der Hannoverschen Gradmessung und ihrer Fortsetzung nach Jever (1821—1825) sowie für die Hannoversche Landesvermessung (1828—1844) benutzt. Die Theorie ist von *O. Schreiber* auseinandergesetzt, Theorie der Projektionsmethode in der Hannov. Landesvermess., Hannover 1866. Die in *Gauß* Nachlaß gefundenen Formeln sind Werke 9, p. 141—204 von *L. Krüger* zusammengestellt; vgl. dazu auch den Briefwechsel mit *Schumacher*, *ibid.*, p. 205—218.

wo zur Abkürzung:

$$t = \operatorname{tg} \varphi, \quad \eta^2 = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$$

gesetzt ist. Um die umgekehrten Formeln hinzuschreiben, bezeichnen wir mit  $\varphi_1$  die Breite des Parallelkreises, der vom Äquator den Abstand  $X$  hat. Man hat dann mit derselben Genauigkeit:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{Y^2}{2 e_1 N_1} t_1 + \frac{Y^4}{24 e_1 N_1^3} (5 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 - 4 \eta_1^4) + \dots$$

$$\omega = \frac{Y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{Y^3}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) + \dots,$$

wo  $e_1, N_1, \eta_1, t_1$  sich auf die Breite  $\varphi_1$  beziehen. — Das Verhältnis zwischen einem geodätischen Bogen  $AB = s$  und der Strecke  $A'B' = S$

(Fig. 5) in der Ebene, die die  $A$  und  $B$  entsprechenden Punkte verbindet, ist bis auf Größen der Ordnung  $e^2 s^3$  und  $s^4$

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{1}{6 e_1 N_1} (Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_2^2) + \dots$$

Die Winkel, welche das ebene Bild  $A'C'B'$  der geodätischen Linie  $AB$  mit der Strecke  $A'B'$  macht, sind mit derselben Genauigkeit:

$$\delta_1 = \frac{(X_2 - X_1)(2 Y_1 + Y_2)}{6 e_1 N_1},$$

$$\delta_2 = \frac{(X_2 - X_1)(2 Y_2 + Y_1)}{6 e_1 N_1}.$$

Der Bogen  $A'C'B'$  kehrt immer die konkave Seite zur  $X$ -Achse, was als Regel zur Bestimmung der Vorzeichen von  $\delta_1, \delta_2$  dient. Die Ordinate  $Y_1$  macht mit dem Bilde des Parallels im Punkte  $(X_1, Y_1)$  einen Winkel:

$$\gamma = \frac{Y_1}{N_1} t_1 - \frac{Y_1^3}{3 N_1^3} t_1 (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2 \eta_1^4) + \dots$$

$$= \omega \sin \varphi + \frac{\omega^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \dots,$$

dies sind die fundamentalen Formeln der konformen Projektion von *Gauß*. Wegen weiterer Entwicklungen vgl. man *Schreiber*<sup>111)</sup> und *Jordan*, Handbuch 3. In neuerer Zeit hat die *Gaußsche* Projektion bei der Landesvermessung von Frankreich durch *Ch. Lallemand* Verwendung gefunden; man beabsichtigt Frankreich in 7 Meridianstreifen von je  $2^\circ$  Breite zu teilen<sup>111a)</sup>.

In der Praxis hat sich die „konforme Doppelprojektion“, die von *O. Schreiber* bei der preußischen Landesaufnahme eingeführt ist, als

111a) Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 42, 138.

sehr zweckmäßig erwiesen. Man erhält sie durch 1) eine konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach *Gauß* (Nr. 21) und 2) eine konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene, bei der ein Mittelmeridian längentreu abgebildet wird<sup>111b)</sup>.

## B. Landesvermessung.

**25. Basismessungen.** Um die gegenseitige Lage von Punkten auf der Erde zu bestimmen, muß man wenigstens die Länge einer Strecke direkt messen; eine solche gemessene Strecke nennt man *Basis*. Die Einrichtung der Basis, d. h. der Linie  $AB$ , längs der die Träger der Meßstangen aufgestellt werden, erfolgt durch Aufstellung eines Alignementsfernrohrs (d. h. eines um eine horizontale Achse drehbaren Fernrohrs) in einem Ende  $A$ , mit dessen Hilfe man auf dem Boden die Punkte des Vertikalschnitts  $\overline{AB}$  festlegen kann; umgekehrt kann man von  $B$  aus den Vertikalschnitt  $\overline{BA}$  festlegen. Endlich kann man auch durch sukzessive Aufstellung des Instruments in Zwischenpunkten  $P$  zwischen  $A$  und  $B$  diese Punkte  $P$  so bestimmen, daß die Azimutdifferenzen zwischen den Vertikalschnitten  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  180° betragen. Man erhält in diesem Falle die sog. *Feldlinie*<sup>112)</sup> (courbe d'alignement), die als Ort der Punkte definiert werden kann, in denen die Normalen von den Punkten der Geraden  $AB$  aus auf die Fläche diese schneiden. Eine solche Linie berührt die Normalschnitte  $\overline{AB}$  und  $\overline{BA}$  in  $A$  und  $B$  resp.<sup>113)</sup>, und ihre Abweichungen von diesen sind von derselben Ordnung wie die zwischen den geodätischen Linien und den Normalschnitten (Nr. 17), d. h. in praxi völlig zu vernachlässigen<sup>114)</sup>.

Bei dem Gesagten ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Einrichtung der Basislinie auf dem Ellipsoid erfolgt. In Wirklichkeit geht sie aber auf der physischen Erdoberfläche vor sich und die Abweichung dieser vom Referenzellipsoid ist nicht zu vernachlässigen<sup>115)</sup>.

111<sup>b)</sup> O. *Schreiber*, Die konforme Doppelprojektion der Trigonometrie. Abt. der Kgl. Preuß. Landesaufnahme, Berlin 1897; Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 491, 593; 29 (1900), p. 257, 289.

112) Über die Feldlinie vgl. *James* und *Clarke*<sup>52)</sup>, p. 237; *Bremiker*<sup>46)</sup>, p. 62—67; *Helmert*, H. G. 1, p. 400.

113) Über den Vergleich der Feldlinie mit den Normalschnitten vgl. *Clarke*, Geodesy, p. 113—116 und *Pizzetti*, Giorn. di mat. 21 (1882), p. 1.

114) Für eine Basis von 10 km Länge beträgt die größte lineare Abweichung zwischen den beiden Normalschnitten nicht mehr als 0,005 mm, während man bei der Einflechtung auch mit einem sehr guten Alignementsfernrohr seitliche Abweichungen von mehreren Millimetern für eine Stangenlage kaum vermeiden kann.

115) Wegen der Reduktion einer Basis auf eine gegebene Niveaufäche vgl.

Es sei  $ANB$  (Fig. 6) die Basislinie; fällt man dann von  $A, B$  Normalen auf das Ellipsoid bis  $A', B'$ , so ist aus der gemessenen

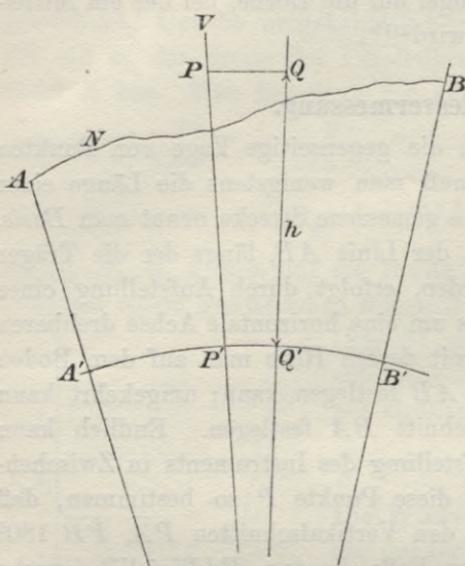


Fig. 6.

Länge  $ANB$  die Länge der geodätischen Linie oder des Vertikalschnitts  $A'B'$  abzuleiten. Der Winkel zwischen den beiden Vertikalebene  $AA'B, AA'B'$  (Nr. 11) ist so klein, daß sie, was die Einrichtung und Messung der Basis angeht, als identisch betrachtet werden können. Mit dieser Annäherung kann die Projektion  $P'Q'$  einer Stangenlage  $PQ$  auf das Ellipsoid als ein Element von  $A'B'$  betrachtet werden. Die beiden Normalen  $PP', QQ'$  bilden einen so kleinen Winkel miteinander, daß der Bogen  $P'Q'$  mit dem Bogen des oskulierenden Kreises in  $P'$  identifiziert werden kann. Aus dem Dreieck  $PCQ$  ( $C$  ist der Krümmungsmittelpunkt von  $P'$  auf  $A'B'$ ) erhält man dann:

$$P'Q' = \frac{R}{R+h} b \cos i,$$

wo  $b = PQ$ ,  $h$  die Höhe  $QQ'$  der Stange über dem Ellipsoid und  $i = 90^\circ - \sphericalangle VPQ$  ihre Neigung gegen den Horizont ist;  $R$  ist der Krümmungsradius von  $A'B'$  in  $P'$ . Bis auf zu vernachlässigende Größen wird deshalb die Länge von  $A'B'$ :

$$(44) \quad L = \Sigma(P'Q') = \Sigma b - \frac{1}{2} \Sigma b i^2 - \Sigma \frac{b h}{R}.$$

Der Ausdruck  $\frac{1}{2} \Sigma b i^2$  heißt *Reduktion auf den Horizont*<sup>116)</sup> (die Neigung  $i$  wird an einer mit der Meßstange verbundenen Libelle ab-

Helmert, H. G. 1, p. 487 und E. Pucci, Sulla teoria delle base geodetiche, Neapel 1880. Es ist mir nicht bekannt, wann zum ersten Mal die Reduktion einer Basis auf das Meeresniveau ausgeführt ist. — Lacondamine und Bouguer haben diese Reduktion bei dem Peruanischen Bogen angebracht (siehe Todhunter, History, § 358).

116) Diese Korrektur scheint zuerst von Bouguer bei der Basis von Quito eingeführt zu sein (Gore, Geodesy, p. 99).

gelesen) und  $\Sigma \frac{b h}{R}$  Reduktion auf das Meeresniveau. Diese kann mit genügender Genauigkeit auch in der Gestalt:  $L \frac{H_m}{R_0}$  geschrieben werden, wo  $R_0$  der Krümmungsradius von  $A'B'$  in  $A'$ <sup>117)</sup> und  $H_m$  die mittlere Höhe der Basis über dem Meere<sup>118)</sup> ist, die durch ein geometrisches Nivellement bestimmt wird. Es ist nicht notwendig, daß das Nivellement die Höhe jeder Stangenlage gibt, es genügt das Mittel aus den Höhen einer Anzahl passend verteilter Stangenlagen oder sogar der Enden  $A, B$ . Ein Fehler von 64 cm in  $H_m$  würde  $\frac{1}{10^7}$  von  $L$  ausmachen.

**26. Basisapparate**<sup>119)</sup>. Bei den metallischen Basisapparaten, die heutzutage fast ausschließlich benutzt werden, muß man die Änderung der Stangenlänge mit der Temperatur berücksichtigen. Wird diese direkt mit einem Quecksilberthermometer gemessen, so erhält man die Stangenlänge bei der Temperatur  $t^0$  durch die Formel:

$$b = b_0(1 + \beta t),$$

wo  $b_0$  die Stangenlänge bei  $0^0$  und  $\beta$  der Ausdehnungskoeffizient<sup>120)</sup> ist. Aber meistens verzichtet man auf die direkte Messung der Temperatur und stellt nach dem Prinzip des *Metallthermometers von Borda*<sup>121)</sup>

117) Der Krümmungsradius in einem Punkte  $P'$  von  $A'B'$  unterscheidet sich von  $R_0$  sehr nahe um:

$$s \left( \frac{dR}{ds} \right)_0 = \frac{3}{2} \frac{e^2 s}{\rho} R_0 \sin 2\varphi \cos \alpha$$

(Nr. 12), wo  $s = \text{arc}(A'P')$ . Für  $s = 10$  km ist diese Differenz kleiner als  $0,000016 R_0$ , d. h. wenn man in dem letzten Gliede von (44)  $R_0$  für  $R$  setzt, so begeht man einen prozentualen Fehler, der kleiner ist als  $0,000016 \frac{H}{R_0}$  (oder kleiner als  $\frac{1}{200 \cdot 10^5}$  für  $H = 2000$  m).

118) Genau genommen müßte man die Höhe der Stangen über dem Referenzellipsoid benutzen, aber in erster Annäherung identifizieren wir dies mit dem Geoid (Nr. 7).

119) Vgl. *A. Westphal*, Zeitschr. f. Instr. 5 (1885), p. 257, 333, 373, 420; 8 (1888), p. 189 und 337.

120) Das Thermometerquecksilber muß in möglichst direkter Berührung mit dem Stangenmetall sein. Deshalb bringt man in der Stangenoberfläche Hohlräume an, die mit Quecksilber oder Eisenfeilspänen gefüllt werden; in diese tauchen die Thermometerkugeln ein.

121) *J. C. Borda*, Expériences sur les règles qui ont servi à la mesure des bases (Anhang zu: *Delambre*, Base du système métrique etc., Paris 1806—1810). Neuerdings sind Zweifel an der Genauigkeit der bimetalischen Apparate aufgetaucht, weil die beiden Stangen verschiedene Trägheit gegenüber Temperaturänderungen besitzen. Vgl. *O. Schreiber*, Zeitschr. f. Vermess. 11 (1882), p. 1; *A. Fischer*, Astr. Nachr. 103 (1882), p. 33.

den Apparat aus zwei Stangen von verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten, die an einem Ende verbunden sind, her (Fig. 7). Die Länge  $b$  einer der beiden Stangen ist dann eine lineare Funktion der Differenz  $k$  der Längen beider (Angabe des Metallthermometers), deren Konstanten durch Vergleich der Stangen mit einem Prototyp bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen sind.

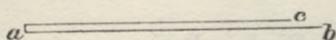


Fig. 7.

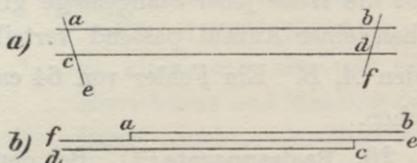


Fig. 8.

Man hat auch *Kompensationsapparate* konstruiert, bei denen zwei Metallstangen mit verschiedenem Ausdehnungskoeffizienten so verbunden sind, daß zwei bestimmte Punkte eine von der Temperatur unabhängige Entfernung besitzen. Die beiden benutzten Apparatypen sind in Fig. 8 schematisch dargestellt. Bei dem ersten (englischer Apparat von *Th. Colby*) gehen die Querstäbe  $ace$  und  $bdf$  (Fig. 8a) in Scharnieren und die Entfernungen  $ce$  und  $df$  sind so gewählt, daß die Strecke  $ef$  von der Temperatur unabhängig ist. In Fig. 8b (nord-amerikanischer Apparat von *C. A. Schott*) sind  $ab$  und  $cd$  zwei gleich lange Stäbe aus gleichem Material und  $fe$  ein Stab aus anderem Material, der mit den beiden ersten bei  $a$  und  $c$  resp. verbunden ist. Das Verhältnis  $ab : ac$  läßt sich so wählen, daß die Entfernung  $bd$  konstant ist.

Die Basismessung selbst wurde ursprünglich so ausgeführt, daß die Stangen unmittelbar aneinander geschoben wurden; die Länge der Stange wurde dann durch die Entfernung der beiden Endflächen oder Kanten definiert (*Endmaß*). Später hat man diese Methode verbessert, indem ein kleiner Zwischenraum zwischen den Stangen gelassen wurde, der mit Hilfe eines Keils (*Bessel*) oder Fühlhebels (*F. G. W. Struve*) oder Schiebers (*J. C. Borda*) (slide-contact, *linguetta*) bestimmt wurde, wie Fig. 9 zeigt. Neuerdings ist das dritte System noch durch Anbringung von Feder und Schraube verbessert worden.

Der erste, der Striche auf den Maßstäben anbrachte und ihre Länge durch Entfernung der Striche definierte (*Strichmaß*), war *R. G. Boscovich*<sup>122)</sup> (Basis auf der Via Appia und bei Rimini, 1751). Er schob dann die Maßstäbe mit kleinem Zwischenraum aneinander (Fig. 10) und

122) Vgl. *A. Westphal*, Zeitschr. f. Instr. 5 (1885), p. 333.

bestimmte die Entfernung  $ab'$  mit Hilfe des Zirkels und einer geteilten Skala. *G. B. Beccaria* in Turin<sup>123</sup> (1774) und die Mailänder Astronomen (Basis von Somma, 1788) legten die Maßstäbe so, wie es Fig. 11 zeigt (Seitenkontakt). Bei dem Apparate von *Colby* wurde

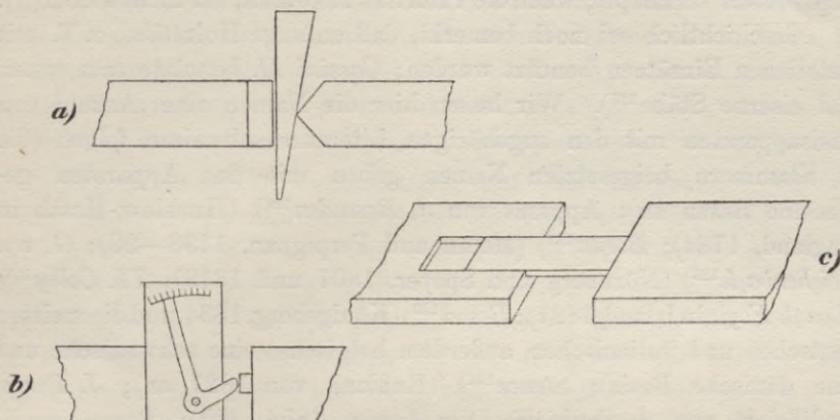


Fig. 9.

ebenfalls ein kleiner Zwischenraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stangenlagen gelassen, der mit Hilfe eines Systems von zwei Mikroskopen mit vertikalen Achsen gemessen wurde. Die Nachteile der

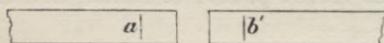


Fig. 10.

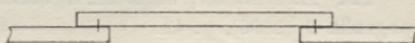


Fig. 11.

direkten oder indirekten Berührung der Stangen werden am besten vermieden bei dem modernen *optischen System*, das kurz folgendes ist (Fig. 12): Eine *einzig*e Meßstange trägt an jedem Ende eine Teilung,

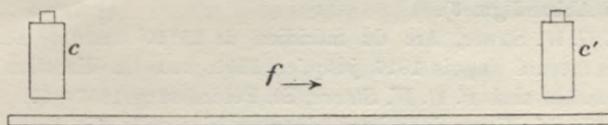


Fig. 12.

auf die, wenn die Stange in der Basis liegt, zwei Mikroskope mit vertikalen Achsen gerichtet werden. Die Mikroskope werden fest auf Böcken, die von denen für die Stange unabhängig sind, aufgestellt, und die mit Hilfe der Stange ermittelte *Entfernung ihrer Achsen*

123) Ibid., p. 336.

bildet ein Element  $b$  der Basis (Formel (44)). Indem man dann das Mikroskop  $c$  und die Stange im Sinne des Pfeils vorwärts bewegt, mißt man von  $c'$  aus ein neues Element der Basis usw. Mit der Erfindung dieser Methode sind die Namen *J. Porro*, *F. R. Haßler*, *J. F. d'Aubuisson* verknüpft; wem die Priorität zukommt, ist nicht sicher<sup>124</sup>).

Geschichtlich sei noch bemerkt, daß anfangs Holzstäbe, z. T. mit metallenen Einsätzen benutzt wurden; *Cassini II.* benutzte zum ersten Mal eiserne Stäbe<sup>125</sup>). Wir lassen hier die Namen einer Anzahl von Basisapparaten mit den zugehörigen Literaturnachweisen folgen (die in Klammern beigetzten Namen geben mit den Apparaten gemessene Basen an): Apparat von *J. Ramsden*<sup>126</sup>) (Hunslow-Heath in England, 1784); *Borda*<sup>127</sup>) (Melun und Perpignan, 1798—99); *G. von Reichenbach*<sup>128</sup>) (Nürnberg und Speyer, 1807 und 1819); *Th. Colby*<sup>129</sup>) (*Lough-Foyle* in Irland, 1827); *Bessel*<sup>130</sup>) (Königsberg, 1834, und die meisten deutschen und italienischen, außerdem belgische, eine schwedische und eine dänische Basis); *Struve*<sup>131</sup>) (Rußland von 1827 an); *J. Porro*, modifiziert von *A. Secchi*<sup>132</sup>) (Via Appia, 1854—55); *Porro*, modifiziert von *P. Hossard*<sup>133</sup>) (Algier, 1854—67); *C. Ibañez*, konstruiert von *Brunner*<sup>134</sup>) (Madrid, 1858); *Preuß. geodät. Institut*<sup>135</sup>), dem vorigen fast gleich, (Strehlen, 1879, Berlin, 1880, Bonn, 1892); *Ibañez* vereinfacht<sup>136</sup>) (Spanien, 1865—79, Schweiz, 1880—81); *Repsold-Com-*

124) *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1891), p. 446; *C. Daviso*, Riv. di topografia 9 (1896), p. 49.

125) *A. Westphal*, Zeitschr. f. Instr. 1885, p. 265.

126) *W. Røy*, London Phil. Trans. 15 (1785), p. 385.

127) Vgl. *Delambre et Méchain* in Fußnote 121.

128) *C. M. von Bauernfeind* und *C. von Orff*, Die Bayerische Landesvermessung, München 1873.

129) *James and Clarke* <sup>52</sup>), p. 200 ff.

130) *F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer*, Gradmessung in Ostpreußen usw., Berlin 1838 (*Bessels* Abhandlgn. 3).

131) *F. G. W. Struve*, Arc du méridien de 25° 20' entre le Danube et la mer glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1850, sous la direction de *Tenner*, *Selander*, *Hansteen* und *F. G. W. Struve*, St. Pétersbourg 1857—60.

132) *A. Secchi*, Misura della base trigonometrica della Via Appia, Rom 1858.

133) *P. Hossard*, Note sur la mesure des bases (in *L. Francoeur*, Géodésie, 4. éd., Paris 1865).

134) *C. Ibañez et Saavedra*, Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la commission de la carte d'Espagne (Traduction par *A. Laussedat*, Paris 1860).

135) Generalbericht der Europ. Gradmessung 1878—79. Vgl. auch *F. Kühnen* und *R. Schumann*, Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn, Berlin 1897. In dieser Abhandlung findet man einen interessanten Vergleich zwischen den Basisapparaten von *Bessel* und *Brunner*.

*stock*<sup>137</sup>) (Chicago, 1877); *Schott*<sup>138</sup>) (Yolo und Los Angeles in Kalifornien); *Eimbeck*<sup>139</sup>) „Duplex“ (Salt-Lake, 1896)<sup>140</sup>); *Woodward*<sup>141</sup>) in Eis (Holton, 1890).

Wir nennen endlich noch den *Jäderinschen* Apparat<sup>142</sup>), der zwei Drähte von 25 m (oder 50 m) Länge, einen aus Phosphorbronze und einen aus Stahl, enthält, die durch eine Federwage oder durch ein System von Gewichten gespannt werden. Der Apparat ist neuerdings unter Verwendung von Nickelstahldrähten abgeändert worden und scheint in dieser Form eine große Zukunft zu haben<sup>143</sup>).

**27. Winkel; ihre Reduktion auf das Ellipsoid.** Auf die Messung der Horizontalwinkel gehen wir hier nicht ein, sondern verweisen, soweit ihre Darstellung überhaupt in den Rahmen der Encyclopädie gehört, auf den Artikel über „Niedere Geodäsie“ (VI 1, 1 (*C. Reinherz*)). — Es sei hier nur bemerkt, daß die Kreisablesung an den Winkelmeßinstrumenten bei den Aufgaben der höheren Geodäsie heutzutage immer mit Hilfe von Mikroskopen erfolgt<sup>144</sup>).

Ist an einem Beobachtungsort  $A'$  der Horizontalwinkel  $\mathcal{W}'$  zwischen  $B'$  und  $C'$  oder die Differenz der astronomischen Azimute von  $B'$  und  $C'$  in bezug auf  $A'$  gemessen (vgl. Nr. 5), so muß man daraus den Winkel  $\mathcal{W}$  zwischen den geodätischen Linien  $AB$  und  $AC$  auf

136) Zeitschr. f. Instr. 1885, p. 173. Vgl. auch *C. Koppe*, Der Basisapparat des Generals *Ibañez* und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881.

137) *Jordan*, Handbuch 3, p. 90—93.

138) *C. A. Schott*, Description and construction of a new compensation base-apparatus, R. C. G. S. 1882, App. 7. Vgl. auch Zeitschr. f. Inst. 1885, p. 315.

139) *W. Eimbeck*, The duplex base-apparatus etc., R. C. G. S. 1897, App. 11.

140) Das Prinzip des Metallthermometers wird hier nicht auf die einzelne Stangenlage, sondern auf die ganze Basis angewandt (wie in dem später erwähnten *Jäderinschen* Apparate); die Differenz der Messungen mit zwei Metallen dient zur Elimination der Temperatur.

141) *S. Woodward*, On the measurement of the Holton Base etc., R. C. G. S. 1892, App. 8, Teil 2.

142) *E. Jäderin*, Svenska Akad. 9 (1895), Anhang, p. 57; vgl. auch *Int. Erdm.* 1898, p. 277. Wichtige Versuche über die Verwendung von Nickelstahldraht (Invar) zur Basismessung sind im Internationalen Bureau für Maße und Gewichte in Breteuil gemacht. Vgl. *R. Benoît et Ch. Guillaume*, Les nouveaux appareils pour la mesure des bases géodésiques, Paris 1905. Über neuere Versuche zur Basismessung vgl. auch *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 186; II. T., p. 84, 90, 293; ferner *A. L. Baldwin*, R. C. G. S. 1901, App. Nr. 3.

143) Um nicht zu sehr auf technische Details bei Basismessungen einzugehen, sprechen wir nicht weiter von der Einflechtung, der Fixierung der Basisenden usw. Über viele Einzelheiten findet man bei *Kühnen* und *Schumann*<sup>195</sup>) Auskunft.

144) Nach *Gore*, *Geodesy*, p. 139 ist das Mikroskop zur Kreisablesung zum ersten Male von *J. Ramsden* (ungefähr 1787) benutzt.

dem Ellipsoid berechnen<sup>145</sup>). Die Punkte  $A, B, C$  sind die Schnittpunkte der Vertikalen von  $A', B', C'$  mit dem Ellipsoid. — Berücksichtigt man die Formeln (6') in Nr. 11 und (27) in Nr. 17, so ergibt sich:

$$(45) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{2a \operatorname{arc} 1''} \{ h_c \sin 2A_c - h_b \sin 2A_b \} \\ - \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{12a^2 \operatorname{arc} 1''} \{ s_c^2 \sin 2A_c - s_b^2 \sin 2A_b \},$$

wenn  $h_b, h_c, A_b, A_c$  die Höhen resp. die Azimute von  $B$  und  $C$ ,  $s_b, s_c$  die Entfernungen  $AB, AC$  bedeuten. Der zweite Teil dieser Korrektion ist fast immer zu vernachlässigen, der erste wird nur dann merklich, wenn die Meereshöhe der Beobachtungspunkte 500 m übersteigt<sup>146</sup>).

**28. Triangulation.** Einen Punkt  $B$  mit einem anderen  $A$  geodätisch verbinden heißt: diejenigen geodätischen Messungen ausführen, die notwendig sind, um aus den gegebenen Koordinaten von  $A$  (ellipsoidische Länge und Breite) und der Meridianrichtung in  $A$  die Koordinaten von  $B$  und die Meridianrichtung in  $B$  zu bestimmen. Um

die direkte Messung der Entfernung  $AB$  zu umgehen, die nur für zehn bis zwanzig Kilometer praktisch ausführbar ist<sup>147</sup>), hat *Willebrord Snellius van Roijen* um 1615 die Methode der *Triangulation* erfunden und angewandt. Man wählt bei dieser Methode in der Gegend zwischen  $A$  und  $B$  eine Anzahl wohl definierter Punkte  $C, D, E, \dots$

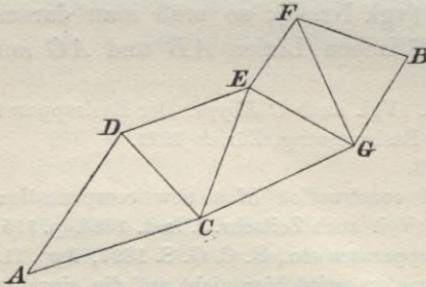


Fig. 13.

(die wir der Einfachheit halber

auf dem Ellipsoid gelegen annehmen) und denkt sie sich durch geodätische Linien in der Weise verbunden, daß sie eine *Dreieckskette*

145) Bezüglich der Reduktion der beobachteten Winkel auf das Ellipsoid vgl. u. a. *A. Sonderhof*, Arch. Math. Phys. (*Grunerts Archiv*) 51 (1870), p. 20 und 42.

146) Man müßte noch zweierlei berücksichtigen: 1. die Lotabweichung in  $A'$  oder die Abweichung der Ellipsoidnormale von der Lotrichtung in  $A'$ ; 2. die Tatsache, daß die Vertikalen von  $A$  und  $A'$  nicht zusammenfallen. Es ist aber in Nr. 7 gezeigt, daß die Abweichung des Ellipsoids vom Geoid ohne merklichen Einfluß auf die Messung der Horizontalwinkel ist; um so mehr ist der Einfluß der Verschiedenheit der Vertikalen von  $A$  und  $A'$  zu vernachlässigen.

147) Die längste in neuerer Zeit gemessene Basis ist 14,6 km lang (*Madri-dejos*); im allgemeinen sind die Basislinien nicht über 10 km lang. Nach *Jordan*, Handbuch 3, p. 103 ist die mittlere Länge der gemessenen Basislinien 6 km.

bilden (Fig. 13). Man mißt nun *eine Seite* und eine genügende Anzahl von Winkeln, um von dem Dreieck aus, dem die gemessene Seite angehört, sämtliche Dreiecke nacheinander auflösen zu können; die Punkte  $A, C, D, \dots, B$  sind dann geodätisch unter sich verbunden. Kann man in verschiedener Weise von  $A$  nach  $B$  übergehen, so nennt man die Gesamtheit der Dreiecke ein *Netz*.

Bei der Auswahl der Dreieckspunkte spielen vor allen Dingen praktische Erwägungen, die sich auf die örtlichen Verhältnisse beziehen, eine Rolle; indessen sind auch einige theoretische Forderungen in bezug auf die beste Gestalt und Dimension der Dreiecke so weit als möglich zu berücksichtigen. Das Problem der besten Gestalt der Dreiecke, d. h. derjenigen Gestalt, bei der die Winkelmeßfehler den geringsten Einfluß auf die geodätische Verbindung haben, kann man nicht allgemein lösen; man kann nur in speziellen Fällen und mit vielen Beschränkungen Lösungen geben<sup>148</sup>). Ohne hier auf detaillierte Rechnungen, die von geringer theoretischer und praktischer Bedeutung sind, einzugehen, beschränken wir uns auf die Bemerkung, daß in einem Dreieck, in dem eine Seite und zwei Winkel bekannt sind, der Einfluß der Winkelfehler auf die beiden anderen Seiten (relativ zu diesen Seiten) ungefähr den Kotangenten der gemessenen Winkel proportional ist. Ein kleiner Winkel bedeutet deshalb, wenn er zur Seitenübertragung notwendig ist, eine schwache Stelle in einem Netze und ist darum in einem solchen Falle möglichst zu vermeiden. Von diesem Gesichtspunkt aus ist es vorteilhaft, sich nicht allzusehr von der Gestalt gleichseitiger Dreiecke zu entfernen.

Was die Größe der Dreiecke betrifft, so würde es einerseits zweckmäßig sein, die Netze erster Ordnung aus möglichst wenigen Dreiecken aufzubauen, damit eine möglichst geringe Zahl von beobachteten Winkeln in die Rechnung eingeht; aber andererseits muß man beachten, daß der mittlere Fehler der Winkelmessungen mit der Entfernung der Dreieckspunkte wächst. Speziell kommt hier die sogenannte *Lateralrefraktion* zur Geltung, d. h. die azimutale Ablenkung, welche die Sehstrahlen durch die atmosphärische Refraktion erleiden<sup>150</sup>).

*F. Pfaff*<sup>151</sup>) in Erlangen hat während eines Jahres eine Reihe

148) Rechnungen dieser Art findet man bei *Jordan*, Handbuch 3, § 19, 20 und *Pucci*, Fondamenti 2, cap. VII.

150) Historische Notizen s. bei *A. Fischer*, Der Einfluß der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln, Berlin 1882; *Jordan*, Handbuch 3, p. 135—141.

151) *A. Fischer*<sup>150</sup>); die von *C. M. von Bauernfeind* (Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, 1. Mitteilung, München 1880) ange-

von Winkelmessungen ausgeführt, indem er die Horizontalwinkel zwischen zwei in einer Entfernung von 11 und 19 km gelegenen Punkten und einer benachbarten Mire beobachtete; die gemessenen Winkel ändern sich periodisch und die größte Abweichung beträgt resp. 19'' und 18''.

A. Fischer hat nach dem Beispiel von W. Struve<sup>152)</sup> das Problem der Änderung des Einflusses der Lateralrefraktion mit der Länge der Visuren praktisch dadurch zu lösen versucht<sup>153)</sup>, daß er die Schlußfehler der Dreiecke des „Rheinischen Netzes“ mit der mittleren Länge der Dreiecksseiten verglich. Er kommt zu dem Schluß<sup>154)</sup>, daß die Entfernung des Objektes an sich nur geringen Einfluß auf die Lateralrefraktion hat. Hiernach und nach anderen statistischen Zusammenstellungen Fischers scheint der Schluß erlaubt, daß die langen Visierstrahlen (länger als 100 km) in bezug auf Genauigkeit<sup>155)</sup> keine merklichen Nachteile haben, wenn der Beobachter für das Einschneiden günstige Luft- und Beleuchtungsverhältnisse wählt.

**29. Basisnetze oder Vergrößerungnetze.** Das im vorstehenden über die Gestalt der geodätischen Dreiecke Gesagte gilt nicht für diejenigen Netzteile, die zur Vergrößerung der Basis bis zur Länge der gewöhnlichen Dreiecksseiten dienen. Da die Basen selten länger als 10 km und die Dreiecksseiten im allgemeinen länger als 30 km bis zu 100 km hin sind, so muß zunächst ein Dreieckssystem mit wachsenden Seiten an die Basis angeschlossen werden. Der gewöhnlichste Typus der Basisnetze ist der *rhombische* (Fig. 14a). Nach Helmert<sup>156)</sup>

stellten Beobachtungen haben nicht mit Sicherheit einen Einfluß der Lateralrefraktion erkennen lassen.

152) Astr. Nachr. 7 (1829), p. 389.

153) Eine theoretische Untersuchung muß sich immer mit der Annahme begnügen, daß die Atmosphäre aus homogenen, durch regelmäßige Flächen (etwa konzentrische Ellipsoide) getrennten Schichten bestehe. Solche Untersuchungen führen zu unmerklichen Resultaten; vgl. *Sonderhof*<sup>145)</sup>; *Helmert*, H. G. 2, p. 564—565; *Pizzetti*, Torino Acc. Atti 25 (1889), p. 101. In Wirklichkeit ist die Verteilung der Luftschichten in der Nähe des Bodens weit davon entfernt, sich durch eine einfache mathematische Formel darstellen zu lassen.

154) *Fischer*<sup>150)</sup>, p. 40.

155) Der Grund, daß der Einfluß der Lateralrefraktion nicht sehr mit der Entfernung wächst, scheint darin zu liegen, daß die Gesichtslinien nach sehr entfernten Objekten meistens hoch über dem Boden hinwegziehen und infolgedessen durch gleichmäßig gelagerte Luftschichten hindurchgehen, welche eine seitliche Verschiebung des Lichtstrahls nicht bewirken; vgl. auch W. Struve, Gradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands 1, Dorpat 1831, p. 149; *Jordan*, Handbuch 1, p. 550.

156) Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 163.

bekommt man in bezug auf Genauigkeit die günstigste Entwicklung, wenn die Diagonale jedes Rhombus ca. 1,5 mal so groß als die des vorhergehenden ist.

Ein anderer Typus von Basisnetzen (Gitternetz, Fig. 14b) ist der, bei dem die Basis vermittelt eines Systems von annähernd gleichseitigen Dreiecken verlängert wird. Nach *Jordan*<sup>157)</sup> erfordert das zweite System eine größere Arbeit an Winkelmessungen, ist aber auch genauer als das rhombische.

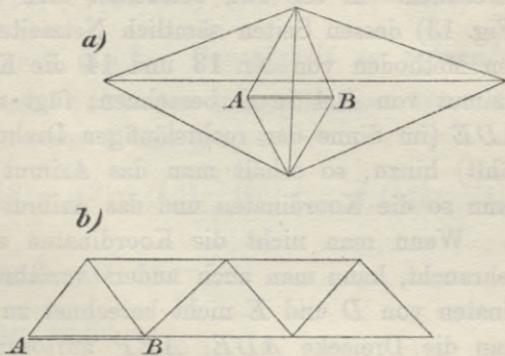


Fig. 14.

**30. Berechnung einer Triangulation und der geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte.** Für eine erste angenäherte Berechnung eines Dreiecksnetzes kann man von allen Korrekturen absehen<sup>158)</sup> und die Dreiecke als ebene berechnen. Diese Rechnung liefert angenäherte Werte der Dreiecksseiten. Setzt man dann, wie es notwendig ist, die Breite eines Dreieckspunktes und das Azimut einer Dreiecksseite als bekannt voraus, so kann man rohe Werte für die Breiten sämtlicher Dreieckspunkte und die Azimute der Seiten ermitteln. Am einfachsten verschafft man sich eine angenäherte graphische Darstellung des Netzes. Man bekommt so die notwendigen Daten, um die Korrektionsglieder und die sphäroidischen Exzesse für die einzelnen Dreiecke berechnen zu können.

Nachdem dies erledigt ist, kann man zur *Ausgleichung des Netzes nach der Methode der kleinsten Quadrate* (I D 2, *J. Bauschinger*) übergehen, d. h. zur Berechnung der im Sinne dieser Methode besten Werte der Winkel, die sich aus den Beobachtungen unter Berücksichtigung der geometrischen Bedingungen des Netzes ergeben. Davon wird im folgenden Paragraphen die Rede sein.

Sind die Dreiecksseiten definitiv berechnet, so hat es keine Schwierigkeit mehr, vom Punkte *A* aus, in dem die Koordinaten und

157) Handbuch 3, p. 121.

158) Solche Korrekturen sind z. B. durch die Formel (45) gegeben. Ferner kommt die Reduktion der gemessenen Winkel auf das Zentrum der Station oder des Signals (Zentrierung) in Betracht, wegen der wir auf die niedere Geodäsie verweisen.

das Azimut einer Seite bekannt sind, die geographischen Koordinaten (in bezug auf das Referenzellipsoid) der übrigen Dreieckspunkte zu berechnen. In der Tat, betrachtet man das Polygon  $ADEFB\dots$ , (Fig. 13) dessen Seiten sämtlich Netzseiten sind, so kann man nach den Methoden von Nr. 13 und 14 die Koordinaten von  $D$  und das Azimut von  $DA$  in  $D$  berechnen; fügt man zu diesem den Winkel  $ADE$  (im Sinne der rechtsläufigen Drehung von  $DA$  nach  $DE$  gezählt) hinzu, so erhält man das Azimut von  $DE$  in  $D$  usw. Man kann so die Koordinaten und das Azimut schrittweise übertragen.

Wenn man nicht die Koordinaten eines jeden Dreieckspunktes gebraucht, kann man auch anders verfahren. Wenn z. B. die Koordinaten von  $D$  und  $E$  nicht berechnet zu werden brauchen, so kann man die Dreiecke  $ADE$ ,  $AEF$  auflösen, Seite  $AF$  und  $\sphericalangle DAF$  berechnen und so direkt die geographischen Koordinaten und das Azimut von  $A$  nach  $F$  übertragen.

Man kann auch auf das Polygon  $ADEF\dots$  die Methoden von Nr. 22 anwenden und die *Soldnerschen* Koordinaten der verschiedenen Dreieckspunkte berechnen, mit deren Hilfe man dann die geographischen Koordinaten ableitet.

**31. Ausgleichung.** Die Horizontalwinkelmessungen, die auf jeder Station ausgeführt sind, werden zunächst für sich ausgeglichen (*Stationsausgleichung*), d. h. es werden die plausibelsten Werte der Winkel (oder Richtungen) ermittelt, wenn man die auf einer Station ausgeführten Beobachtungen für sich betrachtet. Die so erhaltenen Werte müssen dann der *Netzausgleichung* unterworfen werden, um die Bedingungsgleichungen, welche die Winkel der verschiedenen Stationen verknüpfen, zu befriedigen. Die Ausgleichung geschieht nach der Methode der *vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen*<sup>159</sup>).

Über die Ausgleichung selbst sei noch folgendes bemerkt:

a) *Stationsausgleichung.* Gegenwärtig betrachtet man als beste Methode zur Erledigung einer geodätischen Station die *Winkelmessung in allen Kombinationen*<sup>160</sup>, d. h. man mißt für sich sämtliche Winkel,

159) Das allgemeine Problem der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen wurde in seinen Hauptteilen (mit Ausnahme der Berechnung des mittleren Fehlers) von *Bessel*<sup>139</sup>) gelöst. Die Anwendungen auf die Geodäsie wurden vollständig von *C. G. Andrae* (Den Danske Gradmaaling 1, Kopenhagen 1867) und *P. A. Hansen* [Leipzig Abhandlgn. 13 (1865), p. 573] behandelt.

160) In die Praxis ist diese Methode von General *Schreiber* eingeführt worden, dem es außerdem gelang, die Winkelmessungen so auf verschiedene Kreisstände zu verteilen, daß die Mittel möglichst frei von Teilungsfehlern des

die zwei beliebig von der Station ausgehende Richtungen miteinander bilden. Nennt man die Richtungen 1, 2, 3, ..., s, so sind

$$(12)(13) \dots (1s)(23)(24) \dots (2s)(34) \dots (3s) \dots (s-1, s)$$

die  $\frac{s(s-1)}{2}$  für sich und mit gleicher Genauigkeit zu messenden Winkel. Bezeichnet man mit  $\{1t\}$  den ausgeglichenen Wert des Winkels zwischen den Richtungen 1 und t, so ist:

$$\{1t\} = \frac{1}{s} \{ (11) - (t1) + (12) - (t2) + (13) - (t3) + \dots + (1s) - (ts) \},$$

wobei

$$(rr) = 0, \quad (rt) = - (tr)$$

ist.

Die Gewichtskoeffizienten sind:

$$[\alpha\alpha] = \frac{2}{s}, \quad [\alpha\beta] = [\alpha\gamma] = \dots = 0,$$

$$[\beta\beta] = \frac{2}{s}, \quad [\beta\gamma] = 0, \text{ usw.}$$

Den mittleren Fehler der Gewichtseinheit kann man nach der Formel:

$$m = \sqrt{\frac{2[vv]}{(s-1)(s-2)}}$$

berechnen, wo v die Verbesserungen der  $\frac{s(s-1)}{2}$  gemessenen Winkel sind.

Hansen nimmt an Stelle der Winkel die Richtungen<sup>161)</sup> als Unbekannte an, d. h. die Winkel, welche die Gesichtslinien mit einer willkürlich fixierten Richtung auf jeder Station bilden. Nennt man [1], [2], ..., [s] die ausgeglichenen Werte der Richtungen, so ist:

$$[r] = - \frac{1}{s} \{ (r1) + (r2) + \dots + (rs) \}$$

und die Gewichtskoeffizienten sind:

Kreises erhalten werden. Vgl. O. Schreiber, Die Kgl. Preussische Landestriangulation, 2. Teil, Berlin 1874; Zeitschr. f. Vermess. 7 (1878), p. 209 und 8 (1879), p. 97. Er sagt, daß nach der Erfahrung die größere Schnelligkeit, welche die Methode der Beobachtung von Sätzen bietet, illusorisch ist und daß bei gleicher Mühe die Methode der Winkelbeobachtungen genauer ist. Vgl. auch P. A. Hansen, Fortgesetzte geodät. Untersuchungen, Leipzig 1868-69; Jordan, Handbuch 1, p. 259 ff.; N. Jadanza, Torino Acc. Atti 33 (1898), p. 883; mit Verbesserung ibid. 34 (1899), p. 698; C. Bremiker, Astr. Nachr. 89 (1877), p. 65; L. D. Bache, R. C. G. S. 1854, App. 33.

161) Wegen des Vergleichs von Winkel- und Richtungsmessungen s. auch Jordan, Handbuch 1, p. 230 u. 276.

$$\frac{1}{s}, 0, 0, \dots$$

$$0, \frac{1}{s}, 0, \dots$$

.....

Wenn man an Stelle der Winkelbeobachtungen die Methode der *Satzbeobachtungen* befolgt, so geht die Stationsausgleichung anders vor sich. — Bei einer bestimmten Stellung des Horizontalkreises schneidet man nacheinander die Punkte 1, 2, ...,  $s$  ein und liest die entsprechenden Kreisstellungen  $l_1, l_2, \dots, l_s$  ab; man hat so einen Beobachtungssatz erhalten. Bezeichnet man mit  $k$  den Winkel, den die Richtung 1 mit der der Ableseung  $0^\circ$  entsprechenden Richtung macht und mit  $X, Y, Z, \dots$  die Winkel, welche die Richtungen 2, 3, 4, ... mit 1 bilden, so hat man die Fehlergleichungen:

$$k - l_1 = v_1, \quad k + X - l_2 = v_2, \quad k + Y - l_3 = v_3 \text{ usw.}$$

Jeder neue Satz mit einer neuen Limbusstellung gibt ein neues System analoger Gleichungen, in denen an Stelle von  $k$  eine neue Unbekannte  $k'$  auftritt. So liefern  $r$  Sätze  $sr$  Gleichungen (wenn jeder Satz vollständig ist, was im allgemeinen nicht zutrifft) zwischen  $r + s - 1$  Unbekannten, aus denen man mit Hilfe der Normalgleichungen die Werte  $X, Y, Z, \dots$  und die Gewichtskoeffizienten ableitet. Diese Methode stammt von *Bessel*<sup>162</sup>).

b) *Netzausgleichung*. Wieviel Bedingungsgleichungen bestehen zwischen den Elementen eines Netzes? Um die *relative* Lage von  $n$  Punkten auf einer Fläche zu bestimmen, muß man  $2n - 3$  Stücke (Entfernungen oder Winkel, *eine* Entfernung mindestens) messen; jedes weitere gemessene Stück läßt sich als Funktion dieser  $2n - 3$  Stücke darstellen und liefert so eine Bedingungsgleichung. Sind  $B$  Basislinien und  $M$  Winkel in einem Netz von  $n$  Punkten gemessen, so ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen deshalb:

$$(48) \quad M + B - 2n + 3.$$

Man teilt diese Bedingungsgleichungen in drei Kategorien<sup>163</sup>):

162) Gradmessung in Ostpreußen, Abhandl. 3, p. 89. \* Wegen der Ausgleichung von Sätzen vgl. auch *James and Clarke*<sup>62</sup>), p. 62; *Ch. A. Vogler*, Zeitschr. f. Vermess. 14 (1885), p. 49; *F. R. Helmert*, *ibid.*, p. 263.

163) Die Zahl der Polygon- und Seitengleichungen ist von *C. F. Gauß* bestimmt; vgl. die Briefe an *Gerling* vom 5. Juni 1838 und 14. Nov. 1838, Werke 9, p. 323; s. a. p. 297. Die bezüglichen Formeln von *Gauß* sind von *Ch. L. Gerling* publiziert und bewiesen in: Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg 1843. *Gauß* macht keinen Unterschied zwischen

1. *Winkelgleichungen*; diese sagen aus, daß die Winkelsumme eines geodätischen Polygons von  $r$  Seiten gleich  $2(r-2)R$  ist, vermehrt um den sphäroidischen Exzeß. Ist die Zahl der Stationen  $n'$  und  $l'$  die Zahl der von beiden Seiten beobachteten Linien, so ist die Zahl der Winkelgleichungen:

$$(49) \quad l' - n' + 1.$$

2. *Seitengleichungen*. Um  $n$  Punkte miteinander zu verbinden, muß man außer einer direkten Längenmessung die relativen Richtungen von  $2n - 3$  Linien zwischen diesen Punkten bestimmen; die Richtung jeder anderen Linie, die zwei von diesen Punkten verbindet, ist dann bestimmt. Wenn deshalb die Richtungen von  $l$  Linien beachtet sind, so hat man

$$(50) \quad l - 2n + 3$$

Bedingungsgleichungen, die man Seitengleichungen nennt.

3. *Basisgleichungen*<sup>164</sup>). Da eine Basismessung genügt, so ergeben sich, wenn  $B$  Basislinien gemessen sind:

$$(51) \quad B - 1$$

Bedingungsgleichungen, die *Basisgleichungen* heißen.

Man verifiziert leicht, daß die Summe von (49), (50), (51) gleich (48) ist, da  $M = l + l' - n'$ .

Die Aufstellung der Winkel- und Basisgleichungen bietet keine Schwierigkeit. — Bei den Seitengleichungen kann man drei Typen unterscheiden:

1. *Viereck mit seinen beiden Diagonalen*. Man hat (Fig. 15a):

$$(52) \quad \begin{aligned} & \sin(CBA) \sin(DCA) \sin(ADB) \\ & = \sin(ACB) \sin(ADC) \sin(DBA). \end{aligned}$$

Nennt man  $l_1, l_2, \dots, l_6$  die beobachteten Werte der sechs in der vorstehenden Formel auftretenden Winkel und (1), (2), (3),  $\dots$ , (6) die unbekanntenen Korrekturen (in Sekunden), so kann man Gleichung

---

den nur von einer und den von beiden Seiten beobachteten Linien; *Jordan*, Handbuch 1, gibt die Formeln mit Berücksichtigung dieses Unterschiedes. Vgl. auch *James and Clarke*<sup>62</sup>), p. 277 f.; *F. R. Helmert*, Die Ausgleichsrechnung usw., Leipzig 1872, p. 325; *B. v. Prodzynski*, Astr. Nachr. 75 (1869), p. 81.

164) Um die Rechnungen nicht zu komplizieren, geht man bei der Ausgleichung eines Netzes gewöhnlich von einer Basis aus, ohne die Basisgleichungen zu berücksichtigen. Eine angenäherte Methode, um dann den Grundlinienanschlüssen Rechnung zu tragen, ist angegeben und angewandt in: *A. Börsch* und *L. Krüger*, Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite 2, Berlin 1896, p. 21—30.

(52) (mit Vernachlässigung der Quadrate der Korrekturen) schreiben:

$$(1)\Delta_1 + (2)\Delta_2 + (3)\Delta_3 - (4)\Delta_4 - (5)\Delta_5 - (6)\Delta_6 + W = 0,$$

wo

$$W = \log \sin l_1 + \log \sin l_2 + \log \sin l_3 \\ - \log \sin l_4 - \log \sin l_5 - \log \sin l_6$$

ist und  $\Delta_r$  die Änderung von  $\log \sin l_r$  bei der Änderung von  $l_r$  um  $1''$  bedeutet. Sind in einem Viereck mit den Diagonalen je zwei Winkel an allen 4 Ecken gemessen, so kann man der Seitengleichung

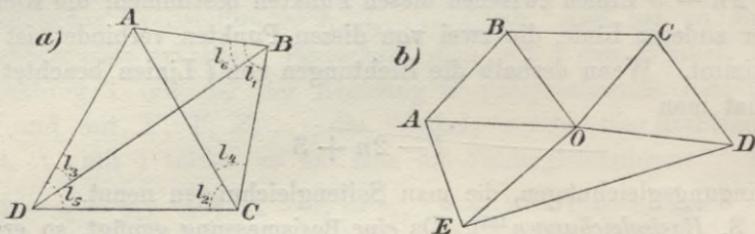


Fig. 15.

4 gleichberechtigte Formen geben. Für die Rechnung ist es am vorteilhaftesten, bei der Aufstellung der Seitengleichung diejenige Ecke des Vierecks auszuzeichnen, der die größte Dreiecksfläche gegenüber liegt<sup>164 a)</sup>.

2. Geschlossenes von einem Punkte projiziertes Polygon (Zentral-system) (Fig. 15b). Man hat im System der Dreiecke  $OAB$ ,  $OBC$ , ...,  $OEA$  die Gleichung:

$$\sin OBA \sin OCB \sin ODC \sin OED \sin OAE \\ = \sin BAO \sin CBO \sin DCO \sin EDO \sin AEO,$$

die man in ähnlicher Weise wie (52) transformieren kann<sup>165)</sup>.

3. Außer diesen beiden gewöhnlichen Fällen von Bedingungsgleichungen hat man noch einen weniger einfachen Fall, der bei der Betrachtung eines Netzes, das sich um ein geschlossenes Polygon hinzieht (Fig. 16) (Kranzsystem)<sup>166)</sup>, auftritt. — Wir nennen ein Netz,

164<sup>a)</sup> G. Zachariae, Die geodätischen Hauptpunkte usw., Berlin 1878, p. 152; Jordan, Handbuch 1, p. 299; C. F. Gauß, Werke 9, p. 245, 249, 325.

165) Bei dieser und der Formel des vorhergehenden Falles nimmt man an, daß die Winkel bereits um  $\frac{1}{3}$  des sphäroidischen Exzesses korrigiert seien. Strengere Formeln, bei denen die Krümmungsdifferenz in den drei Eckpunkten des Dreiecks berücksichtigt wird, sind von C. H. Kummell gegeben [Astr. Nachr. 89 (1877), p. 49].

166) Die Bedingungsgleichungen für ein Kranzsystem sind bereits von C. F. Gauß aufgestellt, wie aus seinem Nachlaß hervorgeht, Werke 9, p. 329

in dem nur Seitengleichungen des ersten oder zweiten Typus auftreten, ein *gewöhnliches* Netz. Deformiert man ein solches Netz in der Weise, daß *zwei* äußere Dreieckspunkte mit zwei anderen zusammenfallen, so entsteht ein Kranzsystem. Die Zahl der Linien im deformierten Netz ist um 1 geringer als im ursprünglichen Netz, die Zahl der Dreieckspunkte um 2. Erinuert man sich an (48) und (50), so sieht man, daß im Kranzsystem, wenn die Zahl der gemessenen Stücke unverändert bleibt, vier Bedingungsgleichungen mehr als im gewöhnlichen Netz auftreten; von diesen sind drei Seitengleichungen und eine Winkelgleichung.

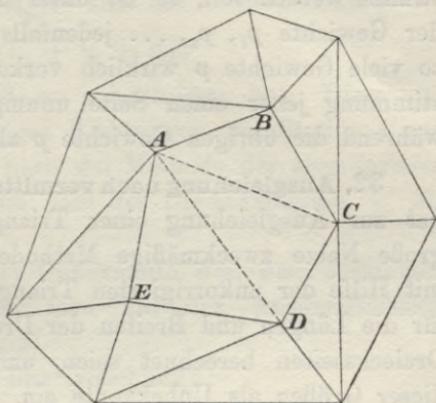


Fig. 16.

Die letzte bezieht sich auf die Winkelsumme in dem inneren Polygon  $ABCDE$ . Um die anderen drei zu erhalten, stellt *C. F. Gauß* erstens die Bedingung auf, daß die Länge einer Netzseite, wenn man durch das Netz hindurch rechnet, sich unverändert ergibt, und zweitens die Bedingungen, daß die Koordinaten eines Netzpunktes denselben Wert erhalten, wenn man auf irgend einem von den Seiten des Kranzsystems gebildeten Linienzuge zu ihm zurückkehrt.

Bezüglich der Netzausgleichung ist noch der folgende Satz von *O. Schreiber* erwähnenswert<sup>167)</sup>: Wenn in einem Dreiecksnetze mit

—339 (s. a. die Bemerkungen von *L. Krüger* dazu). Der Publikationszeit nach stammt die erste Methode zur Ausgleichung der Kranzsysteme von *B. v. Prodzyński*, *Astr. Nachr.* 71 (1868), p. 145. Ferner hat *O. Börsch*, *Astr. Nachr.* 71 (1868), p. 266, eine Methode angegeben. Ein anderer Weg zur Behandlung des Problems ist von *O. Schreiber* eingeschlagen, der rechtwinklige geodätische Koordinaten benutzte (Kgl. Preuß. Landestriangulation, Hauptdreiecke, 1. Teil, Berlin 1870). Vgl. auch *L. Krüger*, *Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen*, Potsdam 1898, p. 29—30.

167) *O. Schreiber*, *Zeitschr. f. Vermess.* 11 (1882), p. 129. Es sei  $n$  die Zahl der Unbekannten und  $r$  die Zahl der Bedingungsgleichungen. Das Theorem von *Schreiber* läuft dann in Wirklichkeit auf die Beschränkung der Beobachtung auf die  $n - r$  unumgänglich notwendigen Unbekannten hinaus, d. h. auf die Abschaffung der Ausgleichung. Aber es ist zu bemerken, daß zur Bestimmung einer Funktion  $F$  die eine oder andere Wahl der zu messenden Unbekannten keineswegs gleichgültig ist. Wählt man die  $n - r$  Unbekannten beliebig, was auf  $\binom{n}{r}$  verschiedene Arten möglich ist, so wird der mittlere Fehler von  $F$  im

Bedingungsgleichungen eine Seite mit möglichst großem Gewicht, bei konstanter Summe  $[p]$  der Winkelmessungsgewichte  $p_1, p_2, \dots$  bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte  $p_1, p_2, \dots$  jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte  $p$  wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel beträgt, während die übrigen Gewichte  $p$  alle gleich Null zu setzen sind.

### 32. Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. *Helmert*<sup>168)</sup>

hat zur Ausgleichung einer Triangulation eine andere speziell für große Netze zweckmäßige Methode angegeben. Er nimmt an, daß mit Hilfe der unkorrigierten Triangulationsdaten provisorische Werte für die Längen und Breiten der Dreieckspunkte und die Azimute der Dreiecksseiten berechnet seien, und führt dann die Verbesserungen dieser Größen als Unbekannte ein.

Wenn die Enden  $i$  und  $k$  eines geodätischen Bogens die infinitesimalen Änderungen  $\delta\varphi_i, \delta\varphi_k$  in Breite und  $\delta\omega_i, \delta\omega_k$  in Länge erleiden, so erfährt das Azimut  $\alpha_{ik}$  der geodätischen Linie im Punkte  $i$  die Änderung<sup>169)</sup>:

$$(53) \quad \delta\alpha_{ik} = \frac{a}{m_{ik}} \left\{ -\frac{1-e^2}{W_i^3} \left( \frac{dm}{ds} \right)_{ki} \sin\alpha_{ik} \delta\varphi_i - \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin\alpha_{ki} \delta\varphi_k \right. \\ \left. + (\delta\omega_i - \delta\omega_k) \frac{\cos\varphi_k}{W_k} \cos\alpha_{ki} \right\}, \\ (W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}),$$

wo  $m_{ik}$  die reduzierte Länge des Bogens ( $ik$ ) nach *Christoffel* (Nr. 16) ist.

Es sei nun  $\bar{\alpha}_{ik}$  das provisorisch berechnete Azimut der Richtung ( $ik$ ) im Punkte  $i$ , ferner  $u_i$  der Orientierungsfehler der Beobachtungen einer Station (bei Beobachtungen mehrerer Sätze auf einer Station

allgemeinen beträchtlich größer sein, als wenn man die Beobachtungen auf sämtliche Unbekannte verteilt und ausgleicht. Über die Regeln für eine geeignete Auswahl, die praktisch zu großen Komplikationen führt, vgl. *Jordan*, Handbuch 1, p. 144. Aber auch unabhängig von dieser Schwierigkeit ist zu beachten, daß ein System von Winkelmessungen im allgemeinen nicht zur Bestimmung einer, sondern mehrerer Funktionen dient. Eine für die Bestimmung einer Funktion passende Wahl der Unbekannten wird dann aber im allgemeinen für die anderen Funktionen nicht passen. Es wird daher trotz des Satzes von *Schreiber* im allgemeinen die Messung überschüssiger Größen und nachfolgende Ausgleichung von Nutzen sein. Allgemeinere Untersuchungen hierüber findet man bei *H. Bruns*, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, Leipzig 1886.

168) H. G. 1, p. 495—512.

169) *Helmert*, H. G. 1, p. 282. Man erhält diese Formel aus den Differentialformeln von *E. B. Christoffel* (vgl. Ende von Nr. 18).

ist für jeden Satz ein besonderes  $u$  einzuführen). Bezeichnet man dann mit  $l_{ik}$  den beobachteten Wert der Richtung ( $ik$ ) und mit  $v_{ik}$  die plausibelste Verbesserung, so ergibt sich die Fehlergleichung:

$$(54) \quad \bar{\alpha}_{ik} + \delta\alpha_{ik} = l_{ik} + u_i + v_{ik},$$

in der man für  $\delta\alpha_{ik}$  den Wert (53) zu substituieren hat. Diese und analoge Gleichungen für die übrigen Richtungen der Station  $i$  und für die anderen Stationen werden nach der Methode der *vermittelnden Beobachtungen* behandelt. Ist  $n$  die Zahl der Dreieckspunkte,  $n'$  die Zahl der Stationen, so hat man:

$n' - 1$  Unbekannte  $u$  und  $2(n - 1)$  Unbekannte  $\delta\varphi$ ,  $\delta\omega$ , zusammen also  $n' + 2n - 3$  Unbekannte (da man auf der Ausgangsstation  $\delta\varphi = \delta\omega = u = 0$  annehmen kann).

Jede gemessene Basis liefert eine Gleichung:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ik} - s_{ik} + \alpha \left\{ \frac{1 - e^2}{W_i^3} \cos \alpha_{ik} \delta\varphi_i + \frac{1 - e^2}{W_k^3} \cos \alpha_{ki} \delta\varphi_k \right. \\ \left. + (\delta\omega_i - \delta\omega_k) \frac{\cos \varphi_k}{W_k} \sin \alpha_{ki} \right\} = 0, \end{aligned}$$

in der  $\bar{s}_{ik}$  die mit den provisorischen Werten  $\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_k, \bar{\omega}_i, \bar{\omega}_k$  berechnete Länge des Bogens ( $ik$ ) bedeutet. Die vorstehende Gleichung wird wegen der geringen Messungsfehler der Basismessungen nicht als Fehlergleichung, sondern als Bedingungsgleichung (rechte Seite Null) behandelt; die Basismessungen werden also streng befriedigt.

Nimmt man  $B$  Basislinien und  $R$  Richtungen als gemessen an (und wie üblich die Koordinaten und das astronomische Azimut in einem Punkte als bekannt), so hat man  $R + B$  Gleichungen und folglich

$$R + B - (n' + 2n - 3)$$

Bedingungen, was mit (48) stimmt, da  $M = R - n'$  ist<sup>170)</sup>.

170) Ausser den bereits zitierten Werken vgl. über Netzausgleichung noch: *A. M. Nell, Schliermachers Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetze*, Z. f. Vermess. 10 (1881), p. 1 und 109 (ehe die Normalgleichungen gebildet werden, werden aus den Korrelatengleichungen soviel Korrelaten eliminiert als Winkelgleichungen vorhanden sind); Z. f. Vermess. 12 (1883), p. 313; *C. Haupt*, Astr. Nachr. 109 (1884), p. 7; *P. Simon*, Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse usw. Berlin 1889; *L. Krüger*, Astr. Nachr. 133 (1893), p. 153; *F. R. Helmert*, ibid. 134 (1894), p. 281 und in: Die Europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite, Heft 1, Berlin 1893, p. 33—50; *L. Krüger*, Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen, Potsdam 1898; Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen, Potsdam 1905; Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze, Potsdam 1906.

**33. Genauigkeit der Basis- und Winkelmessungen.** Wir werden hier einige summarische Notizen und Literaturnachweise über die Genauigkeit der Triangulationen geben.

*Basismessungen.* Den zusammengesetzten mittleren Fehler bei der Messung einer Basis von der Länge  $l$  km kann man durch

$$\sqrt{A^2 l^2 + B^2 l}$$

darstellen, wo  $A$  der mittlere *systematische* und  $B$  der mittlere *zufällige* Fehler (für 1 km) ist. Der mittlere Fehler  $A$  hängt hauptsächlich von den benutzten Instrumenten<sup>171)</sup> und von den Mängeln der Vergleichung der Stange mit dem Normalmaß ab. Um  $B$  zu bestimmen, teile man die Basis in  $n$  Abschnitte von der Länge  $l_1, l_2, \dots, l_n$  und messe jeden Abschnitt zweimal. Sind  $d_1, d_2, \dots, d_n$  die Differenzen zwischen den Hin- und Rückmessungen, so kann man setzen<sup>172)</sup>:

$$B = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum \frac{d^2}{l}}$$

Der eigene Fehler der Basismessung ist aber immer viel kleiner als der, der aus dem Vergrößerungsnetz entspringt (Nr. 29), so daß es nach *A. Ferrero*<sup>173)</sup> zweckmäßig ist, den mittleren Fehler der *berechneten Basis* anzugeben, d. h. der ersten Seite im Dreiecksnetz erster Ordnung, die mit Hilfe des Vergrößerungsnetzes aus der gemessenen Basis abgeleitet ist. Der mittlere Fehler der *berechneten Basis* liegt im allgemeinen zwischen  $\frac{1}{200\,000}$  und  $\frac{1}{100\,000}$  und ist vier- bis fünfmal so groß wie der mittlere Fehler der direkten Messung<sup>174)</sup>.

*Winkelmessungen.* Eine erste Genauigkeitsschätzung für die Winkelmessungen gewinnt man aus den *mittleren Fehlern der Stationsausgleichungen*. Dabei bleiben aber gewisse systematische Fehler (wie z. B. Lateralrefraktion), die man durch Vergleich der auf den verschiedenen Stationen gemessenen Winkel erhält, verborgen. Deshalb leitet man auf die einfachste Weise den mittleren Winkelfehler nach der *Ferreroschen Formel*<sup>175)</sup>

$$(A) \quad m = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{3n}}$$

ab, wo  $n$  die Zahl der Dreiecke, in denen alle drei Winkel gemessen sind, bedeutet und  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  ihre *Schlussfehler*. Die Formel (A)

171) Bezüglich der Fehler bei Basismessungen vgl. *Kühnen* und *Schumann*.<sup>135)</sup>

172) S. z. B. *Jordan*, Handbuch 2, p. 55.

173) Intern. Erdm. 1892, Rapport sur les triangulations, p. 7.

174) Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, p. XXVI—XXXV; 1903, II. Teil, p. 294.

175) Intern. Erdm. 1887.

berücksichtigt die Netzbedingungen nicht und ist deshalb nur als Näherungsformel aufzufassen; sie empfiehlt sich aber durch ihre Einfachheit<sup>176)</sup>. *L. Krüger*<sup>176a)</sup> hat sich mit einem Vergleich der Formel (A) und der aus der Ausgleichung hervorgehenden in folgenden Fällen beschäftigt:

a) Zentralsystem (vgl. Nr. 31) mit unabhängigen Winkelbeobachtungen der drei Winkel eines jeden Dreiecks.

b) Zwei Zentralsysteme, die durch zwei gemeinsame Dreiecke zusammenhängen, mit Winkelbeobachtungen.

c) Einfache Kette mit unabhängigen Richtungsbeobachtungen.

d) Fälle a) und b) mit unabhängigen Richtungsbeobachtungen von gleichem Gewicht.

e) Polygon, in dem die Richtungen aller Seiten und Diagonalen beobachtet sind (Richtungsbeobachtungen von gleichem Gewicht).

f) Doppelkette, die von einer Reihe vollständiger Vierecke gebildet ist.

Aus den beigebrachten Beispielen geht hervor, daß in den meisten Fällen die Formel (A) einen zu kleinen mittleren Fehler liefert. Nur im Falle e), wenn man nur die *Winkelgleichungen* berücksichtigt, führt die Ausgleichung zu demselben Wert von  $m$  wie (A).

Man kann im Mittel  $m$  gleich 1'' setzen. Die beste Bestimmung des mittleren Winkelfehlers erhält man aus der gesamten Ausgleichung des Netzes und der Stationen<sup>177)</sup>; der auf diese Weise gefundene mittlere Fehler ist im allgemeinen etwas größer als aus Formel (A) folgt.

*Genauigkeit der geodätischen Verbindung.* Ein Mittel zur Schätzung des Einflusses der Winkelfehler auf die geodätische Verbindung besteht in dem Vergleich zweier direkt gemessener Basislinien, die durch eine Triangulation verbunden sind. Sind  $b_1, b_2$  die gemessenen Längen der durch  $n$  Dreiecke verbundenen Basislinien und nennt man

$$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$$

geeignet gewählte Winkel, so müßte man haben:

$$(55) \quad \log b_2 - \log b_1 = \sum \log \sin A_r - \sum \log \sin B_r.$$

Wir nennen nun die beobachtete Differenz zwischen den beiden Seiten von (55), wobei  $A_r, B_r$  die aus der Netzausgleichung abgeleiteten Werte sind, kurz Mißstimmigkeit der beiden Basislinien. Diese kann

176) Vgl. die Tabelle der nach Formel (A) berechneten mittleren Fehler für die verschiedenen Triangulationen in Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, p. VI.

176\*) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 157.

177) Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, p. XIII.

1) von den Fehlern der Basismessung selbst, 2) von den Fehlern in den Vergrößerungsnetzen und 3) von den Fehlern des Verbindungsnetzes verursacht werden. Im folgenden sind einige Mißstimmigkeiten von Basispaaren in Einheiten der siebenten Dezimale des Logarithmus zusammengestellt<sup>178)</sup>.

	$\delta$	$M$		$\delta$	$M$
Ostende—Lommel	+ 32	+ 46	Berlin—Königsberg	- 23	+ 32
Lommel—Bonn	+ 38	+ 31	Königsberg—Strehlen	- 23	+ 35
Bonn—Göttingen	- 12	+ 14	Strehlen—Czenstochau	+ 4	+ 34

$\delta$  ist die beobachtete Mißstimmigkeit und  $M$  die a priori aus den mittleren Fehlern der berechneten Basislinien gefundene mittlere Mißstimmigkeit; in  $M$  gehen die Fehler des Verbindungsnetzes also nicht ein. Daß  $\delta$  größtenteils kleiner als  $M$  herauskommt, ist wohl Zufall<sup>179)</sup>; aber es beweist doch, daß in den betrachteten Beispielen das Verbindungsnetz die Ungenauigkeit der geodätischen Verbindung kaum vergrößert<sup>180)</sup>.

Es ist bis jetzt nicht möglich, numerisch den Genauigkeitsgrad einer geodätischen Verbindung anzugeben. Nur soviel kann man sagen, daß 1) die Hauptfehlerquelle das Vergrößerungsnetz ist und daß 2) der aus dem Verbindungsnetz herrührende Fehler kleiner ist als man ihn nach den aus der Netzausgleichung resultierenden mittleren Fehlern erwarten sollte<sup>181)</sup>. Diese Ausgleichung trägt deshalb wahrscheinlich zur Elimination gewisser systematischer Fehler bei, deren Wirkung sich in den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen zeigt.

### C. Höhenmessung.

**34. Trigonometrisches Nivellement.** Es mögen  $A$  und  $B$  (Fig. 17) zwei Punkte der Erdoberfläche sein,  $h_a$  und  $h_b$  ihre Höhen über dem Referenzellipsoid. Die Differenz  $h_b - h_a$  kann dann annäherungsweise mit Hilfe der Messung einer oder der beiden scheinbaren Zenitdistanzen  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  bestimmt werden. Die durch  $B$  gehende Normalebene in  $A$  möge die Ellipsoidoberfläche längs  $A'B$  schneiden;

178) Ibid. Tableau II und III. Man bemerke, daß 10 Einheiten der siebenten Stelle des Logarithmus ungefähr einem prozentualen Fehler von  $\frac{1}{494000}$  entsprechen.

179) Ganz anders ist es bei der russischen Triangulation, wo  $M$  noch nicht  $\pm 50$  erreicht, während die beobachtete Mißstimmigkeit bis zu 2609 Einheiten geht.

180) Das folgt in anderer Weise auch aus den Rechnungen von *Helmert*<sup>170)</sup>, p. 244.

181) Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, Tableau III.

bei dem gegenwärtigen Problem kann man dann ohne merklichen Fehler die Linie  $A'B'$  durch den Kreisbogen ersetzen, der sie in  $A'$  oskuliert. In der Tat, wenn der Radius dieses Kreises  $R_0$  ist und  $s$  die Entfernung  $A'B'$ , so ist der Abstand des Punktes  $B'$  von dem genannten Kreise sehr nahe gleich

$$\frac{s^3}{6R_0^2} \cdot \left(\frac{dR}{ds}\right)_0.$$

Setzt man für die Ableitung  $\frac{dR}{ds}$  den in Nr. 12 gegebenen Ausdruck, so erkennt man leicht, daß die genannte Abweichung kleiner als 0,006 m ist, für  $s = 50$  km. Ist  $C$  der Krümmungsmittelpunkt für  $A'$ , so kann man mit derselben Annäherung die Normalen in den Punkten des Bogens  $A'B'$  sich in  $C$  schneiden lassen. Den Gang des Visierstrahles zwischen  $A$  und  $B$  berechnet man, indem man die atmosphärische Refraktion auf Grund derselben Hypothese berücksichtigt, die man in der Astronomie gebraucht, d. h. man setzt voraus, daß die Atmosphäre aus homogenen sphärischen Schichten mit dem Mittelpunkt  $C$  zusammengesetzt sei. Ist  $i$  der Winkel, welchen der Visierstrahl in einem Punkte  $M$  mit dem Radius  $CM$  bildet,  $\gamma$  der Winkel  $A'CM$ ,  $t$  der Radius  $CM$  und  $v$  der Brechungsindex in  $M$ , so hat man:

$vt \sin i = \text{konst.}$  (aus der Refraktionstheorie),

$$(56) \quad \frac{dt}{d\gamma} = t \cotg i \quad (\text{nach den Formeln für die Polarkoordinaten}).$$

Wir setzen weiter

$$\frac{t}{v} \cdot \frac{dv}{dt} = -n, \quad \frac{dn}{dt} = n'$$

und bezeichnen mit dem Index 1 die Größen, die sich auf den Punkt  $A$  beziehen. Betrachtet man dann  $t$  als Funktion von  $\gamma$ , so findet man mit Hilfe der Taylorschen Entwicklung

$$(57) \quad h_b - h_a = r_1 \Gamma \cotg \xi_1 + \frac{r_1 \Gamma^2}{2} \left\{ \cotg^2 \xi_1 + \frac{1 - n_1}{\sin^2 \xi_1} \right\} \\ + \frac{r_1 \cotg \xi_1}{\sin^2 \xi_1} \cdot \frac{\Gamma^3}{6} \{ \cos^2 \xi_1 + 5 - 7n_1 + 2n_1^2 - n_1' r_1 \},$$

wo  $\Gamma$  der Winkel  $ACB$  ist und  $r_1 = CA$ .

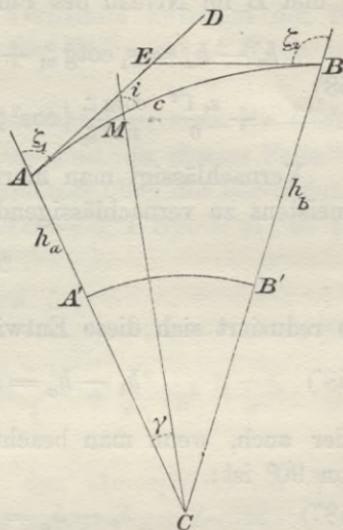


Fig. 17.

Setzt man  $r_1 \Gamma = s_1 =$  der horizontalen Entfernung<sup>182)</sup> zwischen  $A$  und  $B$  im Niveau des Punktes  $A$  gemessen, so wird:

$$(58) \quad h_b - h_a = s_1 \cotg \xi_1 + \frac{s_1 \Gamma}{2} \left\{ \cotg^2 \xi_1 + \frac{1 - n_1}{\sin^2 \xi_1} \right\} \\ + \frac{s_1 \Gamma^2}{6} \cdot \frac{\cotg \xi_1}{\sin^2 \xi_1} \left\{ \cos^2 \xi_1 + (1 - n_1)(5 - 2n_1) - n_1' r_1 \right\}.$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder dritter Ordnung und das (meistens zu vernachlässigende) Glied

$$\frac{s_1 \Gamma}{2} \cotg^2 \xi_1,$$

so reduziert sich diese Entwicklung auf die einfache Form

$$(58') \quad h_b - h_a = s_1 \cotg \left( \xi_1 - \frac{1 - n_1}{2 r_1} s_1 \right),$$

oder auch, wenn man beachtet, daß  $\xi_1$  in praxi wenig verschieden von  $90^\circ$  ist:

$$(58'') \quad h_b - h_a = s_1 \cotg \xi_1 + \frac{1 - n_1}{2 r_1} s_1^2.$$

Diese Formeln<sup>183)</sup> werden gewöhnlich bei dem trigonometrischen Nivellement gebraucht.

Man sieht leicht, daß man zu derselben Formel gelangen würde, wenn man den Visierstrahl als geradlinig voraussetzt und die Zenithdistanz in  $A$  gleich  $\xi_1 + \frac{n}{2} \Gamma$ , wenn man also annimmt, daß der Lichtstrahl in  $A$  den Winkel  $\frac{n}{2} \Gamma$  mit der Sehne  $AB$  bildet.

Betrachtet man  $i$  als Funktion von  $\gamma$  und entwickelt nach *Taylor*, so ergibt sich:

$$(59) \quad 180^\circ - \xi_2 = \xi_1 + \Gamma(n_1 - 1) + \frac{\Gamma^2}{2} n_1' r_1 \cotg \xi_1 + \dots$$

Wenn man in (58) die Glieder dritter Ordnung vernachlässigt, was darauf hinausläuft, daß man die Kurve  $AB$  durch den Berührungskreis in  $A$  oder  $B$  ersetzt, so kann man auch in (59) die Glieder mit  $\Gamma^2$  vernachlässigen, und es ergibt sich

$$(60) \quad n_1 \Gamma = 180^\circ - \xi_1 - \xi_2 + \Gamma,$$

182) *Helmert* (H. G. 2, p. 555) gibt die Entwicklung bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschl. Vergl. auch: *Pucci*, Fondamenti, cap. VI.

183) Abgesehen von kleinen Unterschieden in der Form, findet man Formel (58'') bei *Laplace*, Méc. céle. 4, p. 279. Für die Größe  $n_1$  ist dort ihr Ausdruck als Funktion der meteorologischen Daten gesetzt. Dieselbe Formel findet man in alten und neuen Lehrbüchern der Geodäsie, z. B. *L. Puissant*, Traité de géodésie 1, chap. XX.

womit gezeigt ist, daß  $n\Gamma$  in dieser Annäherung die totale Refraktion  $DEB$  ist. Die Größe  $n$  (das Verhältnis zwischen der totalen Refraktion und der Winkelgröße des Erdbogens  $A'B'$ ) nennt man den *Refraktionskoeffizienten*.

Die Formel (60) zeigt, wie  $n_1$  zu berechnen ist, wenn die beiden gegenseitigen Zenitdistanzen  $\xi_1, \xi_2$  gemessen sind. In diesem Falle<sup>184</sup>) kann man indessen die Niveaudifferenz bequemer ohne die Berechnung von  $n_1$  erhalten. Denn setzt man  $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA = \Delta$ , so ergibt sich aus dem Dreieck  $ACB$ :

$$\xi_1 + \xi_2 + 2\Delta = 180^\circ + \Gamma,$$

$$h_b - h_a = \frac{2r_1 \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}} = s_1 \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} + \frac{s_1^2}{2r_1} \operatorname{tg}^2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}.$$

Da der Refraktionskoeffizient mit den atmosphärischen Verhältnissen sich ändert, müssen die beiden gegenseitigen Zenitdistanzen gleichzeitig gemessen werden. Die aus den klassischen Arbeiten über Höhenmessung abgeleiteten Werte des Koeffizienten  $n$  sind<sup>185</sup>):

(1736) <i>P. L. M. de Maupertuis</i> (Lappland)	$n = 0,1053$
(1751) <i>T. Mayer</i> (Frankreich)	1250
(1792) <i>J. B. J. Delambre</i> (ebenda)	1678
(1821—25) <i>C. F. Gauß</i> (Hannover)	1306
(1831) <i>F. G. W. Struve</i> (Russ. Ostseeprovinzen)	1237
(1834) <i>F. W. Bessel</i> (Ostproußen)	1370
(1849) <i>J. J. Baeyer</i> (Küstenvermessung)	1300
(1858) <i>H. James</i> und <i>A. R. Clarke</i> (England)	1587
(1870—75) Preußische Landesaufnahme	1180

Mittel 0,1322

Wenn man die Annäherung, die Formel (60) entspricht, nicht für genügend hält, so muß man die Glieder berücksichtigen, die von den Ableitungen  $n', n'', \dots$  von  $n$  abhängen. Man vergleiche in dieser Beziehung die Arbeiten von *Jordan* und *Helmert*<sup>186</sup>).

**35. Der Refraktionskoeffizient als Funktion der atmosphärischen Verhältnisse.** Man verdankt *J. J. Baeyer*<sup>187</sup>) den Gedanken, daß

184) *J. B. J. Delambre*, Méthodes analytiques, p. 98 ff.

185) *Jordan*, Handbuch 2, p. 509.

186) *W. Jordan*, Astr. Nachr. 88 (1876), p. 99 oder Handbuch 2, p. 537.

187) Astr. Nachr. 14 (1837), p. 65; 17 (1840), p. 205; Trigonometrisches Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840; Petersb. Mém. Akad. (7) 3 (1860), Nr. 5. In der letzten Abhandlung gibt *Baeyer* die Resultate einer

die Refraktion um Mittag kleiner ist als am Morgen und Abend, weil um Mittag die Abnahme der Temperatur mit der Höhe eine größere ist und darum die Verminderung der Luftdichte bei wachsender Höhe eine geringere.

*Baeyer* setzt  $n = ab$ , wo  $b$  der absolute Wert der Zeit, von Mittag aus gerechnet, ist, der als Bruch des halbtägigen Sonnenbogens auszudrücken ist;  $a$  ist eine Konstante, der *Baeyer* auf Grund seiner eigenen Beobachtungen den Wert 0,2132 gibt. Eine solche Formel hat den Nachteil, daß die Refraktion um Mittag Null wird; es ist indessen immerhin das Verdienst von *Baeyer*, die Abhängigkeit des  $n$  von der Tageszeit erkannt zu haben.

Das Gesetz der Veränderung der atmosphärischen Dichte mit der Höhe ist bekannt, wenn zwischen zweien der vier Größen  $\Theta$  (Dichte),  $p$  (Druck),  $\vartheta$  (Temperatur) und  $t$  (Höhe) eine empirische oder hypothetische Relation angenommen wird (außer derjenigen, welche die Gesetze von *Boyle* und *Gay-Lussac* liefern). Wird nun  $\Theta$  als bekannte Funktion von  $t$  ausgedrückt und wird die eine der beiden folgenden Beziehungen:

$$v - 1 = c\Theta, \quad v^2 - 1 = 2c\Theta, \quad (c = 0,000293),$$

die in der astronomischen Theorie gebraucht werden, benutzt, so hat man  $v$  und deshalb  $n$  als Funktion von  $t$  und den meteorologischen Daten ausgedrückt.

*Bauernfeind*<sup>188)</sup> hat zwischen dem Druck  $p$  und der absoluten Temperatur  $T = 273 + \vartheta$  die Beziehung

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{T'}{T}\right)^6$$

angenommen, und für die Dichte die Formel

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^5$$

abgeleitet, wo die Höhe  $h$  des Punktes in der Weise zu berechnen ist, daß man im Meeresniveau  $h_0 = 51400$  m hat. In geeigneterer Weise hat sich *Jordan*<sup>189)</sup>, ohne eine willkürliche Formel für die Konstitution der Atmosphäre einzuführen, damit begnügt,  $n$  mit Hilfe des Druckes, der Temperatur und der Wärmeabnahme auszudrücken,

Beobachtungsserie von reziproken Zenitdistanzen für die verschiedenen Tagesstunden zwischen Kupferkuhle und Brocken (Entfernung 48 km, Niveauunterschied 971 m).

188) *C. M. von Bauernfeind*, Astr. Nachr. 67 (1866), p. 33. Kritische Notizen zur Theorie von *Bauernfeind* findet man in *Helmert*, H. G. 2, p. 587.

189) Zit. v. 186, oder Handb. 2, p. 536.

wobei er findet<sup>190)</sup>

$$(63) \quad n = 0,2325 \frac{B}{760} \left( \frac{273}{T} \right)^2 (1 - 29,39 x),$$

wo  $B$  der Druck in mm ist,  $T$  die absolute Temperatur,  $x$  die Wärmeabnahme in Graden für 1 m Höhe [im Mittel nach *J. Hann*<sup>191)</sup>  $x = 0,0057$ ].

**36. Empirische Untersuchungen über den Refraktionskoeffizienten.** Außer den erwähnten Beobachtungen von *Baeyer* sind die Beobachtungen von *Bauernfeind*<sup>192)</sup> in Bayern zu nennen zur Bestimmung der täglichen Variation der Zenitdistanzen zwischen zwei Punktpaaren. Die von *Baeyer* beobachtete tägliche Periode hat sich dabei gut bestätigt.

*Hartl*<sup>193)</sup> hat später auf Grund der Beobachtungsergebnisse, die in sechs Gegenden Deutschlands und der russischen Ostseeprovinzen gefunden sind, die folgende Tabelle über den Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten  $n$  und der Tageszeit  $b$ , letztere, wie schon erwähnt, als Bruch des täglichen Sonnenbogens ausgedrückt, aufgestellt.

$b = 0,0$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	$1,0$
$n = 0,10$	$0,10$	$0,11$	$0,11$	$0,12$	$0,13$	$0,13$	$0,15$	$0,16$	$0,17$	$0,19$

Nimmt man zwischen  $n$  und  $b$  eine Relation  $n = x + yb^2$  an, so bestimmt er die Werte von  $x$  und  $y$  für jedes der sechs Nivellementsnetze und erhält im Mittel

$$n = 0,1041 + 0,0840 b^2.$$

Indem er dann in (63) die aus dieser Formel erhaltenen Werte für  $n$  einführt, sucht *Hartl* die den verschiedenen Tageszeiten entsprechenden Werte der Wärmeabnahme abzuleiten und vergleicht sie mit den aus den Luftballonbeobachtungen *Glai-shers* folgenden Werten. Der Vergleich ist einigermaßen befriedigend.

190) *Laplace* (Méc. cél. 4, p. 279) hat zum ersten Mal den Refraktionskoeffizienten als Funktion der meteorologischen Daten gegeben, indem er für die Konstitution der Atmosphäre dieselbe Formel anwandte, die von ihm auch zur Berechnung der astronomischen Refraktion benutzt worden war. Vgl. *Fearnley* in der Beilage VII zum Generalbericht der Europ. Gradmessung, 1883.

191) Handbuch der Klimatologie 1, p. 241, 2. Aufl., Stuttgart 1897.

192) Ergebnisse aus Beob. der terrestrischen Refraktion, München 1880—90. Vgl. die Diskussion dieser Beobachtungen bei *Jordan*, Handb. 2, p. 539, und in *O. Eggert*, Vergleichungen der Ergebnisse des geometr. und trigonometrischen Nivellements usw., Diss. Berlin 1898.

193) *H. Hartl*, Mitt. mil.-geogr. Institut Wien 1883, p. 110—136 und in der Zeitschr. d. österreich. Gesellschaft für Meteorologie 16 (1881), p. 12. *Hartl* hat auch den mittleren Refraktionskoeffizienten mit der mittleren Höhe  $h$  des Visierstrahles über dem Meeresniveau in Beziehung zu setzen gesucht, vgl. Mitt. mil.-geogr. Institut Wien 4 (1884), p. 15.

V. Reina und G. Cicconetti<sup>194</sup>) haben zwischen Rom und Monte-Cavo (Entfernung 30 km, Höhenunterschied 900 m) eine Beobachtungsreihe von gegenseitigen Zenitdistanzen an 11 Tagen ausgeführt, und haben eine Tabelle für den Zusammenhang zwischen  $n$  und  $b$  gegeben. Der Gang der Zahlen ist regelmäßig, aber nicht symmetrisch zum Mittag ( $n$  variiert am Nachmittag weniger stark).

Reina hat auch vermittelst der Formel von Jordan die Werte von  $n$  berechnet, indem er die Wärmeabnahme aus gleichzeitigen Thermometerbeobachtungen auf beiden Stationen bestimmte. Die beobachteten Koeffizienten  $n$  ergeben sich im allgemeinen kleiner als die nach (63) berechneten; aber die Differenzen übersteigen (von wenigen Ausnahmen abgesehen) nicht 0,02, was als eine gute Bestätigung der Jordanschen Theorie angesehen werden kann.

Abschließend kann man sagen, daß der sogenannte Refraktionskoeffizient eine nicht gut bestimmte Größe ist, und zwar aus zwei Gründen: 1) weil er von der Schnelligkeit der Wärmeabnahme mit der Höhe abhängt, die sehr veränderlich ist mit der Tageszeit, mit der Örtlichkeit und mit der Beschaffenheit des Bodens, über den der Visierstrahl hingeht, und 2) weil die Definition dieses Koeffizienten, wenn man ihn als unabhängig von der Entfernung betrachtet, nur in den Fällen gilt, in denen die Formel (58'') als genügend genau betrachtet werden kann<sup>195</sup>).

Bei kleinen Entfernungen hat übrigens die Unsicherheit im Werte von  $n$  wenig Einfluß auf die Berechnung der Höhendifferenz, wie aus einer instruktiven Tabelle Jordans (Handbuch 2, p. 542) hervorgeht. So ändert sich bei einer Entfernung von 5 km, wenn  $n$  zwischen 0,10 und 0,16 variiert, die berechnete Höhendifferenz um nicht mehr als 11 cm; bei einer Entfernung von 10 km beträgt die entsprechende Änderung 47 cm<sup>196</sup>).

**37. Geometrisches Nivellement.** Wenn man von der größeren Präzision sowohl bezüglich der Instrumente als der Messungen ab-

194) Mem. Soc. Ital. XL (3) 10 (1896), p. 14; Rezension von Jordan in Zeitschr. f. Verm. 26 (1897), p. 17. Siehe ferner A. Venturi und E. Soler, Prime ricerche sul coeff. di refrazione in Sicilia, Palermo 1893; ferner A. Venturi und Loperfido in Riv. topog. e catasto 10 (1897), p. 10; C. A. Schott, R. C. G. S. 26 (1883), App. Nr. 12.

195) Versuche, eine Beziehung zwischen den Koeffizienten  $n$  und der Entfernung der beiden Stationen aufzustellen, sind von E. Pucci gemacht: Sulla livellaz. trig., Firenze 1879; vgl. auch M. Dietze in Zeitschr. f. Vermess. 13 (1884), p. 245.

196) In demselben Kap. von Jordan findet man auch ausgedehnte Literaturnachweise zu diesem Gegenstand.

sieht, so unterscheidet sich die Beobachtungsmethode des geometrischen Nivellements nicht in der höheren und niederen Geodäsie. Wir werden uns deshalb darauf beschränken, den Umstand, der die Berechnung des Präzisionsnivellements von der der topographischen Nivellements unterscheidet, zu behandeln, nämlich die Berücksichtigung der Abweichung der Niveauflächen vom Parallelismus<sup>197</sup>).

Es mögen  $A$  und  $B$  (Fig. 18) zwei Punkte der Erdoberfläche sein,  $S_a$  und  $S_b$  die zugehörigen Niveauflächen und  $S_0$  die Niveaunullfläche, auf die die Höhen bezogen werden. So lange diese Flächen als parallel betrachtet werden, hat die Definition des Höhenunterschiedes zwischen  $A$  und  $B$  keine Schwierigkeit; aber wenn man auf ihre Abweichung vom Parallelismus Rücksicht nimmt, so ergibt sich die Höhendifferenz verschieden, je nachdem man sie definiert 1) als das Stück

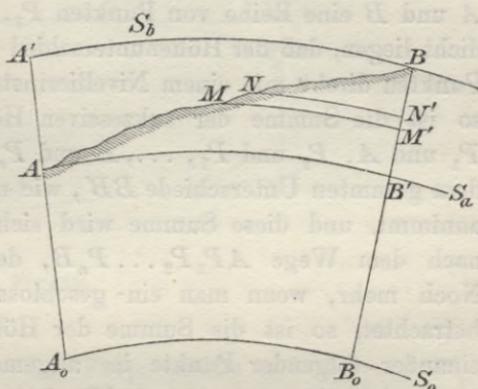


Fig. 18.

197) Nach *S. Günther* (Handb. d. math. Geographie, Stuttgart 1890) verdankt man *W. Fuchs* (1843) den ersten Gedanken, den Nichtparallelismus der Niveauflächen bei der Berechnung der Nivellements in Rechnung zu ziehen. Die Anwendung der Potentialtheorie auf diesen Gegenstand wurde zum ersten Male (nach *Bruns*) von *Th. Wand* (Prinzipien der math. Physik und Potentialtheorie, 1871) angegeben. *Th. Wittstein* [Astr. Nachr. 81 (1873), p. 292] und *G. Zachariae* [ibid. 80 (1873), p. 305] berechneten, indem sie von einer ungenügenden Voraussetzung über die Krümmung der Lotlinien ausgingen, die sphäroidische orthometrische Korrektur. Der letztere verbesserte dann die eigentliche Formel [ibid. 82 (1873), p. 73], indem er die Formel von *Gauß* benutzte (vgl. Fußn. 37). *Helmert* [Astr. Nachr. 81 (1873), p. 297] führte die „reduzierte Niveaudifferenz“ ein (welche später von *Lallemand* „dynamische“ genannt wurde), indem er zeigte, daß es bei diesen Rechnungen zweckmäßiger sei, die Werte der Schwerkraft einzuführen anstatt die Krümmung der Lotlinien zu benutzen. *J. J. Baeyer* [ibid. 84 (1874), p. 1] handelt von den Wirkungen der Krümmung der Lotlinien (nach *Gauß*) und der lokalen Lotabweichungen auf die trigon. und geom. Nivellements. Eine zusammenfassende Darstellung der orthometrischen und dynamischen Theorie findet man bei *E. Czuber*, Techn. Blätt. Prag 23 (1891), p. 86, 152. Ferner sei verwiesen auf *R. v. Sterneck* in den Mitt. mil.-geogr. Inst. Wien 8 (1888), p. 69; *F. R. Helmert*, Die Schwerkraft im Hochgebirge, Berlin 1890; *C. M. Goulier* in Paris C. R. 105 (1887), p. 270; *Ch. L. Durand-Claye*, *A. Pelletan et Ch. Lallemand*, Lever des plans et nivellement, III. partie par *Ch. Lallemand*, Paris 1889.

$AA'$  der Vertikalen von  $A$  zwischen  $S_a$  und  $S_b$ , oder 2) als das Stück  $BB'$  der Vertikalen von  $B$  zwischen  $S_a$  und  $S_b$ , oder endlich 3) als die Differenz  $BB_0 - AA_0$  zwischen den Höhen der Punkte  $B$  und  $A$  in bezug auf die Fläche  $S_0$ . Es macht sich noch eine andere Schwierigkeit hier geltend. Wenn man, um die Ideen zu fixieren, die zweite Definition annimmt, d. h. die Niveaudifferenz zwischen  $A$  und  $B$  gleich  $BB'$  setzt, und man im Gelände zwischen  $A$  und  $B$  eine Reihe von Punkten  $P_1, P_2, \dots, P_n$  einschaltet, die so dicht liegen, daß der Höhenunterschied zwischen aufeinander folgenden Punkten direkt mit einem Nivellierinstrument bestimmt werden kann, so ist die Summe der sukzessiven Höhenunterschiede  $\delta z$  (zwischen  $P_1$  und  $A, P_2$  und  $P_1, \dots, B$  und  $P_n$ ) im allgemeinen nicht gleich dem gesamten Unterschiede  $BB'$ , wie man es in der niederen Geodäsie annimmt, und diese Summe wird sich auch verschieden ergeben, je nach dem Wege  $AP_1P_2 \dots P_nB$ , den das Nivellement einschlägt. Noch mehr, wenn man ein geschlossenes Polygon  $AP_1P_2 \dots P_nA$  betrachtet, so ist die Summe der Höhenunterschiede je zweier aufeinander folgender Punkte im allgemeinen nicht Null, sondern hat einen nicht immer zu vernachlässigenden Wert (*theoretischer Schlußfehler* des Nivellementspolygons). Man hat zwei Wege, um diese Schwierigkeit zu überwinden.

1) Die *orthometrische Theorie*. Man definiert als Höhenunterschied zwischen  $A$  und  $B$  das Stück  $BB'$  der Vertikalen in  $B$ , das zwischen  $B$  und  $S_a$  liegt, und sucht die Korrektion, die man an der Summe der sukzessiven Höhenunterschiede zwischen den Punkten  $P_1$  und  $A, P_2$  und  $P_1, \dots, B$  und  $P_n$  anbringen muß; man nennt sie die *orthometrische Korrektion*.

2. Die *dynamische Theorie*. Man sucht die Differenz zwischen den Werten  $W_b$  und  $W_a$  des Erdpotentials (2) für  $S_b$  und  $S_a$  zu ermitteln; diese Differenz, geteilt durch die mittlere Schwere  $G$  (für  $45^\circ$  Breite und im Meeresniveau) liefert den sogenannten dynamischen Höhenunterschied zwischen  $B$  und  $A$ . — Der angegebene Gedankengang stammt von *F. R. Helmert*<sup>198</sup>). Das Verhältnis  $(W_a - W_b) : G$ , wo  $W_b$  den Wert von  $W$  auf  $S_b$  bedeutet, nennt man dynamische Kote des Punktes  $A$ . Die an der Summe der  $\delta z$  anzubringende Korrektion, um die oben erwähnte Differenz  $(W_b - W_a) : G$  zu erhalten, nennt man die *dynamische Korrektion*<sup>199</sup>).

Es seien (Fig. 19)  $M$  und  $N$  zwei aufeinander folgende Punkte

198) Vgl. Fußn. 197.

199) Vgl. das in Fußn. 197 (Ende ders.) zitierte Werk von *Lallemand*.

einer Nivellementsschleife. Das Nivellierinstrument sei in der Linie  $MN$  aufgestellt, in der Mitte zwischen den Vertikalen  $MM_1$  und  $NN_1$  und es seien  $z_1 = MM_1$ ,  $z_2 = NN_1$  die Lattenablesungen; es sei ferner  $M_2N_2$  die durch das Zentrum des Fadennetzes des Fernrohrs gehende Niveaufläche;  $d_1 = M_1M_2$ ,  $d_2 = N_1N_2$  seien die Depressionen dieser Niveaufläche unter dem Visierstrahl  $M_1N_1$ . Sind

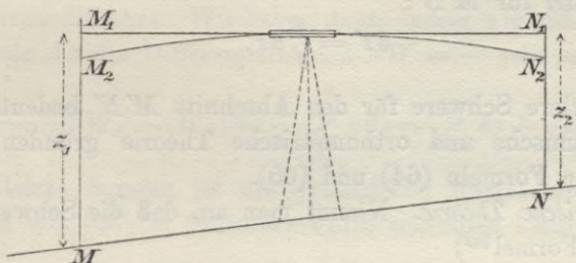


Fig. 19.

dann  $W$ ,  $W_m$ ,  $W_n$  die Werte des Erdpotentials in  $M_2$  (und  $N_2$ ),  $M$  und  $N$ ,  $g_1$  und  $g_2$  die Werte der Schwerebeschleunigung in  $M$  und  $N$  und behandelt man die Abschnitte  $MM_2$  und  $NN_2$  als unendlich klein, so ergibt sich

$$W_n - W_m = (z_2 - d_2)g_2 - (z_1 - d_1)g_1.$$

Die beiden Depressionen können als merklich gleich angesehen werden<sup>200</sup>), und man kann auch das Produkt der Depression und der Differenz  $g_1 - g_2$  vernachlässigen, so daß die vorhergehende Formel in die folgende übergeht:

$$W_n - W_m = (z_2 - z_1) \frac{g_1 + g_2}{2} + (g_2 - g_1) \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Vernachlässigt man auch noch den zweiten Term der rechten Seite<sup>201</sup>) und setzt

200) Daß diese Hypothese allgemein zulässig ist, wenn das Nivellierinstrument in der mittleren Entfernung zwischen den Vertikalen von  $M$  und  $N$  aufgestellt wird, ist von *Helmert* (H. G. 2, p. 503–511, 539) bewiesen. Mit dem Einfluß der Differenz der beiden Depressionen in Folge der Gestalt der Niveauflächen beschäftigt sich *J. A. Oudemans* [Astr. Nachr. 83 (1876), p. 22]. Mit dem Einfluß der normalen Refraktion beschäftigt sich *Lallemand* in dem in Fußn. 197 zitierten Werke, p. 396.

201) Vgl. *Helmert*, H. G. 2, p. 503. Setzt man  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 3$  m, so liefert die Gesamtheit der Ausdrücke, die  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)(g_2 - g_1)$  entsprechen, zu einem Nivellement, das sich über einen ganzen Meridianquadranten erstreckt, einen Bei-

so erhält man

$$(64) \quad W_n - W_m = -g \delta z.$$

Wenn man mit  $\delta z'$  den Abstand der beiden Punkte  $M'N'$  (Fig. 18), in denen die durch  $M$  und  $N$  gehenden Niveauflächen die Vertikale von  $B$  treffen, bezeichnet, so ergibt sich nach (64) und nach der analogen Formel für  $M'N'$ :

$$(65) \quad \delta z' = \frac{g}{g'} \delta z,$$

wo  $g'$  die mittlere Schwere für den Abschnitt  $M'N'$  bedeutet.

Die dynamische und orthometrische Theorie gründen sich bezüglich auf die Formeln (64) und (65).

*Orthometrische Theorie.* Nimmt man an, daß die Schwerkraft der theoretischen Formel<sup>202)</sup>

$$(66) \quad g = G(1 - \beta \cos 2\varphi)(1 - kH) \quad (k = \frac{2}{R}, \quad \beta = 0,00265)$$

folgt, wo  $H$  die Meereshöhe und  $R$  den mittleren Erdradius bedeutet, so kann man das Verhältnis  $\frac{g}{g'}$  in (65) in folgender Weise schreiben:

$$\frac{g}{g'} = 1 + 0,0053 \frac{\sin(\varphi + \varphi_b) \sin(\varphi - \varphi_b)}{1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b},$$

wo  $\varphi$ ,  $\varphi_b$  die Breiten von  $N$  und  $B$  bedeuten. Hieraus ergibt sich mit genügender Annäherung, wenn man die mittlere Breite zwischen  $A$  und  $B$  mit  $\varphi_m$  bezeichnet, für die Niveaudifferenz  $(BB')$  der Ausdruck:

$$(67) \quad (BB') = \sum (\delta z) - \frac{0,0053 \sin(\varphi_m + \varphi_b)}{1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b} \cdot \sum_A^B (\varphi_b - \varphi) \delta z.$$

Will man dann die Höhe  $(BB_0) = H_B$  des Punktes  $B$  über  $S_0$  haben, so muss man zu  $(BB')$  die Größe  $H_A + (BB_0) - (AA_0)$  (vgl. Fig. 18) hinzufügen, welche näherungsweise durch

$$(68) \quad H_A - 0,0053 \frac{\sin(\varphi_a + \varphi_b) \sin(\varphi_b - \varphi_a)}{1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b} \cdot H_A$$

ausgedrückt wird.

Die Summe (67) + (68) gibt die gesuchte Höhe  $H_B$  des Punktes  $B$ ; dies ist in Kürze das Verfahren von *Helmert* (H. G. 2, p. 505). *Lallemand* in dem (Fußn. 197 Ende) zitierten Werke, p. 366, gibt die

trag von 16 mm (die Schwereänderung als normal vorausgesetzt.) Setzt man  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 2$  m, so würde bei einer Messung im Gebirge der entsprechende Beitrag ca. 3 mm sein, wenn der Höhenunterschied 8000 m beträgt.

202) Vgl. Nr. 4 und 5.

Formel ein wenig verschieden<sup>203</sup>):

$$(69) \quad H_B = H_A + \sum (\delta z) - 0,0053 \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} H \sin 2\varphi d\varphi,$$

wo  $H$  und  $\varphi$  die Höhe und Breite irgend eines Punktes des Nivellements-zuges sind<sup>204</sup>).

*Dynamische Theorie.* Wir nennen  $\Delta_{AB}$  die schon definierte dynamische Niveaudifferenz. Wir haben dann, indem wir auf kleine Niveauunterschiede  $\delta z$  die Differentialformel  $dW = -g dz$  anwenden:

$$(70) \quad \Delta_{AB} = \frac{1}{G}(W_A - W_B) = \frac{1}{G} \sum_A^B g \delta z = \sum \delta z + \frac{1}{G} \sum (g - G) \delta z.$$

Die letzte Summe ist die dynamische Korrektur, welche man auf Grund von (66) in folgender Form schreiben kann:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2,$$

wo

$$\eta_1 = -\beta \int_A^B \cos 2\varphi \delta z$$

und

$$\eta_2 = -k \int_A^B H \delta z \text{ oder angenähert } \eta_2 = -\frac{k}{2} (H_A + H_B) (H_B - H_A)$$

( $\eta_1$  heißt dyn. Breiten-,  $\eta_2$  dyn. Höhenkorrektur).

*Fall eines geschlossenen Polygons*  $AP_1P_2 \dots P_nA$ . Die linke Seite von (70) ist 0, und man hat deshalb

$$(71) \quad \sum \delta z = - \sum \frac{g - G}{G} \delta z.$$

Die letzte Summe (in welcher man für  $G$  einen konstanten Wert  $g_0$  setzen kann) ist der *theoretische Schlußfehler* des Polygons. Nimmt

203) Das letzte Glied stellt die sogenannte „orthometrische“ Korrektur dar (ein von *C. M. Goulier* eingeführter Name, siehe *Zit. der Fußn.* 197, Ende ders.).

204) Um Gleichung (69) mit (67) und (68) zu vergleichen, muß man 1) in der letzteren die Einheit an Stelle von  $(1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b)$  setzen; 2) näherungsweise die Summe durch ein Integral ersetzen und 3) beachten, daß  $\int_A^B H \cdot \sin 2\varphi d\varphi$  durch partielle Integration

$$= -\frac{1}{2} H_A (\cos 2\varphi_b - \cos 2\varphi_a) - \frac{1}{2} \int_A^B (\cos 2\varphi_b - \cos 2\varphi) dH$$

oder näherungsweise

$$= -\frac{1}{2} H_A (\cos 2\varphi_b - \cos 2\varphi_a) + \sin(\varphi_m + \varphi_b) \int_A^B (\varphi_b - \varphi) dH$$

ist.

man den normalen Ausdruck (66) für die Schwere an und beachtet, daß das von  $kH$  abhängende Glied in der Summe verschwindet, so ergibt sich der folgende angenäherte Ausdruck für den Schlußfehler<sup>205)</sup>:

$$\sum \delta z = \beta \sin 2\varphi_m \sum H \Delta \varphi.$$

**38. Einfluß der Schwerestörungen auf Nivellements.** Wir haben bisher die Schwerkraft unter der Voraussetzung berücksichtigt, daß sie durch Formel (66) dargestellt sei, wobei indessen zu beachten ist, daß die *Schwerestörungen* einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Nivellements haben. *Helmert*<sup>206)</sup> hat eine Nivellements-schleife in den Tiroler Alpen (Innsbruck, Brenner, Brixen, Bozen, Innsbruck), längs der in 37 Punkten von *R. v. Sterneck* die relative Schwere bestimmt war, daraufhin geprüft und hat gefunden, daß der wirkliche theoretische Schlußfehler auf Grund der beobachteten Schwerkraftswerte nach Formel (71) berechnet — 0,024 m<sup>207)</sup> beträgt, während der mit der normalen Schwere berechnete Schlußfehler (sphäroidischer Schlußfehler) — 0,007 m beträgt. Der sphäroidische Schlußfehler kann also unter Umständen nur ein kleiner Bruchteil des wichtigen theoretischen Schlußfehlers sein. Der Einfluß der wirklichen Schwereänderungen auf die Berechnung der Niveaudifferenzen<sup>208)</sup> ist sehr schwer auszuwerten, besonders wenn es sich um größere Niveaudifferenzen handelt. In der Tat würde eine solche Rechnung die Kenntnis der wirklichen Schwerewerte [ $g'$  in Formel (65)] in verschiedenen Punkten eines vertikalen Abschnitts im Inneren der Erde erfordern und die Annahmen, die man in dieser Hinsicht machen kann, sind immer etwas willkürlich. Es wird deshalb, auch wenn längs der Nivellementslinien relative Schweremessungen ausgeführt sind, bei großen Niveaudifferenzen immerhin eine beträchtliche Unsicherheit bestehen bleiben<sup>209)</sup>.

205) *Helmert*, Die Schwerkraft im Hochgebirge, p. 20.

206) *Ibid.* p. 19 und Tafel II.

207) Der mittlere Fehler dieses Resultes ist von *Helmert* zu  $\pm 0,013$  m ausgerechnet worden, indem er die zufälligen Fehler der Schwerkraftsmessungen und die zufälligen Änderungen berücksichtigt, denen die Schwerkraft von Ort zu Ort unterworfen ist.

208) Eine theoretische Untersuchung über den Einfluß der Schwereänderungen auf die Resultate der Nivellements unter der Voraussetzung, daß diese Störungen auf Grund der Attraktion der sichtbaren Massen sich berechnen lassen, ist von *Helmert* (H. G. 2, p. 517—533) angestellt.

209) Für ein Nivellement von der Nordsee bis zum Adriatischen Meere durch die Alpen hindurch findet *Helmert* (Die Schwerkraft im Hochgebirge, p. 26—29), daß die Differenz zwischen der wirklichen und der sphäroidischen

**39. Das Mittelwasser der Meere und der Nullpunkt für die Höhen.** Die Höhen der Nivellementsbolzen beziehen sich in den verschiedenen Ländern auf einen mehr oder weniger willkürlich angenommenen Nullpunkt. Größtenteils dient zu diesem Zweck das Mittelwasser eines bestimmten Pegels. In seiner einfachsten Gestalt ist ein Pegel ein mit Skala versehener Apparat, der in jedem Augenblick die Höhe der Wasseroberfläche über einem bestimmten Nullpunkt angibt. Das Mittel aus den während mehrerer Jahre stündlich abgelesenen Werten der Wasserhöhe kann, wenigstens für den Zeitraum eines Jahrhunderts, als konstant angesehen werden. Die auf ein solches Mittel bezogenen Höhen nennt man kurz Meereshöhen.

Gehören nun die Mittelwasser der verschiedenen Pegel alle derselben Niveaufläche an, oder bestehen systematische Unterschiede zwischen den Höhen der verschiedenen Meere? Die Antwort auf diese Frage hat praktische Wichtigkeit, insofern es sich um die Übereinstimmung der Nivellements der verschiedenen Länder handelt, die sich auf verschiedene Pegel beziehen; sie hat auch theoretisches Interesse, insofern mit ihr die Definition des Geoids verknüpft ist, die wir in Nr. 2 angenommen haben.

Die Frage ist bis jetzt nicht gelöst, und es haben sich, wenigstens in bezug auf die europäischen Meere, in den letzten Jahren die Ansichten geändert. Bis 1890 schien es nach den Messungen, daß zwischen dem Atlantischen Ozean und dem Mittelmeer, zwischen diesem und der Nord- und Ostsee beträchtliche Niveauunterschiede (bis zu 1,10 m) beständen. Die wachsende Genauigkeit der Nivellements und die strengere Berechnung<sup>210)</sup> und Ausgleichung der Resultate hat diese Differenzen zum Teil verschwinden lassen, zum Teil beträchtlich vermindert.

*Ch. Lallemand*<sup>211)</sup> (1890) hat, indem er sich speziell auf die Resultate der neuen französischen Nivellements stützt, zuerst den Gedanken ausgesprochen, daß die erwähnten Differenzen ihre Ursache zum größten Teil in Beobachtungsfehlern haben. Wir geben aus der *Lallemand*-schen Tabelle einige Zahlen an, wobei zu bemerken ist, daß seine Daten

orthometrischen Korrektion höchstens ein paar Zentimeter betragen kann. Dagegen findet er bei der Bestimmung der Höhe des Stilsfer Jochs, indem er eine spezielle Hypothese über die Schwereänderung mit der Höhe einführt, eine Differenz von ca. 30 cm zwischen der wirklichen und der sphäroidischen Korrektion.

210) So würde z. B. die orthometrische Korrektion den Höhenunterschied zwischen den Nord- und Südküsten von Zentraleuropa um 15 cm vermindern (Verh. der Intern. Erdm. 1891, p. 150).

211) *Revue scientifique* 46 (1890), p. 1—6 und *Int. Erdm.* 1890, p. 181—187.

noch nicht die definitiven waren; wir fügen deshalb in der letzten Kolonne die durch die Rechnungen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung, die wir gleich noch erwähnen werden, gelieferten Zahlen bei.

Mittlere Meereshöhe einiger Häfen in bezug auf Marseille (in cm):

	Nach den alten Beobachtungen:	Rechnung von <i>Lallemand</i>	Rechnung des Zentralbureaus
Triest . . . . .	42	2	8
Cette . . . . .	11	3	3
Brest . . . . .	110	7	13
Cherbourg . . . . .	90	9	17
Amsterdam . . . . .	74	—1	17
Swinemünde . . . . .	86	—2	27

Auf Grund dieser Rechnungen spricht *Lallemand* den folgenden Satz aus: „L'ancienne hypothèse de l'uniformité de niveau des mers, primitivement admise d'après les lois de la mécanique des fluides, puis abandonnée sur la foi de mesures inexactes, paraît en voie de se réhabiliter dans l'ensemble et abstraction faite peut-être de quelque anomalie locale“<sup>212</sup>).

Die schon erwähnten Resultate des Zentralbureaus<sup>213</sup>), die auf der Ausgleichung von 48 Polygonen in Zentral- und Westeuropa beruhen, bestätigen im allgemeinen das Vorhergehende. Die erwähnten Differenzen verschwinden zwar nicht, aber sie werden von der Ordnung der Beobachtungsfehler. So findet man z. B. eine mittlere Depression von 13 cm des Mittelmeeres und des Adriatischen Meeres gegenüber der Nord- und Ostsee und dem Ärmelkanal, aber der mittlere Fehler dieser Niveaudifferenz ist 18 cm vor und 9 cm nach der Ausgleichung<sup>214</sup>).

Außerdem führen verschiedene Rechnungen zu verschiedenen Resultaten. Aus drei Ausgleichungen des Zentralbureaus und einer von *Lallemand* ergibt sich die Höhe der nördlichen Meere über der der südlichen:

212) Derselbe Gedanke wurde (1890) von *A. von Kalmár* wenigstens in bezug auf die europäischen Meere ausgesprochen (Int. Erdm. 1890, p. 102—103); vgl. ferner *Bouquet de la Gryes* Bericht in Int. Erdm. 1898, p. 363.

213) *A. Börsch* und *F. Kühnen*, Vergleichung der Mittelwasser der Ostsee und Nordsee usw., Berlin 1891.

214) *Helmert* in Int. Erdm. 1891, p. 251. Neuere Bestätigungen hat man in den Resultaten der neuen französischen Nivellements und der russischen längs der Ostsee (Int. Erdm. 1898, p. 153—154 und p. 412—431). Vgl. ferner den Artikel von *A. Börsch* in Int. Erdm. 1892, p. 547.

I. Ausgleichung	13,4 cm
II. „	26,5 cm
III. „	4,6 cm
<i>Lallemand</i>	2,0 cm.

Diese Resultate sind zu verschieden, als daß man einem unter ihnen genügendes Vertrauen schenken könnte<sup>215</sup>).

Bedenkt man, mit welcher Unsicherheit die erwähnten Niveaudifferenzen sich ergeben, so verbietet jedenfalls nichts, sie als rein lokale Erscheinungen aufzufassen, weil man Unterschiede von derselben Größenordnung zwischen Pegeln derselben Küste findet, die nur wenig von einander entfernt sind (z. B. 22 cm zwischen Ostende und Boulogne, 29 cm zwischen Biarritz und Sables d'Olonne, 13 cm zwischen Pola und Fiume<sup>216</sup>).

Die Frage nach dem internationalen Nullpunkt für die Höhen, die wir hier erwähnen müssen, obgleich sie von mehr technischem als theoretischem Charakter ist, ist um 1864 aufgeworfen worden und bis heute noch nicht definitiv entschieden<sup>217</sup>).

**40. Genauigkeit einer Nivellementsausgleichung.** Wenn man, wie es üblich ist, ein Nivellement mit konstanter oder ungefähr konstanter Zielweite ausführt, so ist der mittlere Fehler eines Höhenunterschiedes der Quadratwurzel aus der Entfernung proportional<sup>218</sup>):

$$(72) \quad m = \mu_1 \cdot \sqrt{L}.$$

Nimmt man  $L$  in km an, so nennt man  $\mu_1$  den mittleren Kilometerfehler eines einfachen Nivellements. Abgesehen von anderen Umständen hängt  $\mu_1$  von der Zielweite  $s$  ab. Wenn der mittlere Fehler  $M$  einer einfachen Stationsbeobachtung (Rückblick—Vorblick) proportional mit  $s$  angenommen wird, so ergibt sich  $\mu_1$  proportional mit  $\sqrt{s}$  und daher hat man<sup>219</sup>)

$$(72') \quad m = k \cdot \sqrt{L \cdot s}.$$

215) Vgl. Zit. der Fußn. 213, p. 89.

216) Int. Erdm. 1892, p. 551.

217) Eine zusammenfassende Geschichte dieser Diskussionen findet man in einem Artikel von *Ch. Lallemand* in Int. Erdm. 1893, p. 124. Vgl. auch den diesbezüglichen Meinungs-austausch in den Sitzungen der Int. Erdm. 1891, p. 44, 94; 1892, p. 53—57 und 113—117.

218) Vgl. den Art. von *O. Börsch* in der Zeitsch. f. Verm. 7 (1878), p. 455 und 495. Die Formel (72) wird meistens gebraucht. Indessen hat *O. Börsch* [Astr. Nachr. 96 (1880), p. 33 und 81] versucht,  $m$  als Funktion von  $L$  durch einen komplizierteren Ausdruck darzustellen.

219) *Jordan*, Handb 2, p. 466 ff. *O. Börsch* (Fußn. 218, erstes Zitat) hat auf Grund des Präzisionsnivellements der Elbe untersucht, welche der drei Formeln

Die Konstante  $\mu_1$  in Formel (72) kann man in der Weise bestimmen, daß man die Nivellementsline in mehrere Abschnitte abteilt und die Höhenunterschiede jedes Abschnitts hin und zurück misst. Sind  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  die Längen der verschiedenen Abschnitte,  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  die Differenzen der Doppelmessungen, so kann man  $\mu_1$  nach der Formel berechnen<sup>220</sup>):

$$(73) \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum \frac{d^2}{l}}.$$

Der mittlere Kilometerfehler eines Doppelnivellements ist dann

$$(74) \quad \mu = \frac{\mu_1}{\sqrt{2}}.$$

Hat man  $n$  geschlossene Polygone, von denen jedes doppelt nivelliert ist, und sind  $w_1, w_2, \dots, w_n$  die Schlußfehler der Polygone, so kann man  $\mu$  in folgender Weise berechnen.

$$(75) \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \frac{w^2}{l}},$$

wo  $l_1, l_2, \dots, l_n$  die Längen der verschiedenen Polygone sind. Man vergleiche in dem Bericht über das Präzisionsnivellement in Europa von *v. Kalmár*<sup>221</sup>) die numerischen Werte von  $\mu$  für die Nivellements der verschiedenen Staaten; sie variieren etwa von 0,1 bis 5 mm. — Aus 48 Polygonen der erwähnten *Vergleichung der Mittelwasser*<sup>222</sup>) ergibt sich  $\mu$  aus den Polygonschlußfehlern zu 4,42 mm und aus der allgemeinen Ausgleichung zu 4,48 mm. Für das nivellement général de la France<sup>223</sup>) (1897—1898) ist  $\mu = 2,45$  mm.

Die Ausgleichung eines Nivellementsnetzes kann auf zwei Arten erfolgen:

$$M = h, \quad M = h\sqrt{s}, \quad M = hs$$

( $h$  konstant) am meisten geeignet ist, die Beziehung zwischen  $M$  und  $s$  auszudrücken und hat sich für die zweite der drei Formeln entschieden. Danach würde sich  $m = h\sqrt{L}$  ergeben, d. h. der mittlere Kilometerfehler würde unabhängig von der Zielweite  $s$  sein. In Wirklichkeit hängt  $m$  stark von der lokalen Bodenbeschaffenheit und andern Umständen ab, die man theoretisch nicht in Rechnung ziehen kann.

220) *J. J. Baeyer* in Astr. Nachr. 86 (1875), p. 177. Allgemeiner Formeln für den Fall, daß die verschiedenen Züge beliebig oft gemessen sind, gibt *O. Börsch* in seinem am Anf. der Fußn. 218 zit. Aufsatz.

221) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 31 ff.

222) *ibid.* p. 75—76.

223) Bericht von *Ch. Lallemand* in Int. Erdm. 1898. Die Zahl 2,45 ist von uns mit Hilfe der Formel (75) berechnet auf Grund der Angaben der Kolonnen 2, 7 und 8 in der Tabelle p. 419 des genannten Berichtes.

1) Es seien  $1, 2, \dots, n$  die Seiten des Netzes und es sei allgemein ( $r$ ) die dynamische Höhendifferenz der beiden Endpunkte von  $r$ , wobei ein bestimmter Durchlaufungssinn als positiver von vornherein festgesetzt wird. Das geschlossene Polygon  $a, b, c, \dots, p$  gibt den Schlußfehler

$$\pm (a) \pm (b) \pm \dots \pm (p) = W,$$

wo man für eine bestimmte Seite das Zeichen  $+$  oder  $-$  zu nehmen hat, je nachdem die Seite, wenn das Polygon im Sinne  $a, b, c, \dots, p$  durchlaufen wird, im positiven oder negativen Sinne durchlaufen wird. Bezeichnet man mit  $[a], [b], \dots, [p]$  die an den beobachteten Höhenunterschieden anzubringenden Korrekturen, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\pm [a] \pm [b] \pm \dots \pm [p] + W = 0.$$

Die Zahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der voneinander unabhängigen geschlossenen Polygone im Netz; das Gewicht jeder Beobachtung ( $r$ ) ist umgekehrt proportional der Länge der Seite  $r$ . Ein solches System von Bedingungsgleichungen kann entweder nach der Methode der bedingten oder der vermittelnden Beobachtungen behandelt werden<sup>224</sup>).

2) Die Ausgleichung eines Nivellementsnetzes kann auch nach der Methode der *vermittelnden Beobachtungen* erfolgen, ohne daß man die Polygonegleichungen benutzt. Es seien  $F_0, F_1, \dots, F_q$  diejenigen Netzpunkte, in denen mehr als zwei Seiten zusammenstoßen und es sei  $H_{rs}$  die beobachtete Höhendifferenz zwischen zwei Punkten  $F_r, F_s$ , die direkt durch eine Nivellementslinie verbunden sind. Bezeichnet man die Höhe des Punktes  $F_r$  über dem Niveau des Punktes  $F_0$  mit  $x_r$ , so ergibt sich die Fehlergleichung

$$x_r - x_s - H_{rs} = v_{rs}.$$

Wenn die Punkte  $F$  durch  $L$  Linien verbunden sind, so wird man  $L$  Fehlergleichungen der angegebenen Art haben, aus denen man die plausibelsten Werte der  $x$  ableiten kann.

## D. Erdmessung.

**41. Ableitung der Konstanten des Erdellipsoids aus zwei oder mehr Meridianbogen<sup>225</sup>.** Wenn man von vornherein das Geoid als Rotationsellipsoid annimmt, so genügen zwei Messungen von

224) Es ist die erste oder die zweite dieser Methoden passend, je nachdem die Anzahl der Polygone  $\leq \frac{n}{2}$ .

225) Die elementaren Formeln für die Ableitung von  $a$  und  $e$  aus Erdbogen

Meridianbogen in verschiedenen Breiten theoretisch zur Bestimmung der Konstanten  $a$  und  $e$  dieses Ellipsoids. Zur Berechnung des Meridianbogens zwischen den beiden Endpunkten einer Triangulation, die sich längs eines Meridians erstreckt, kann man in folgender

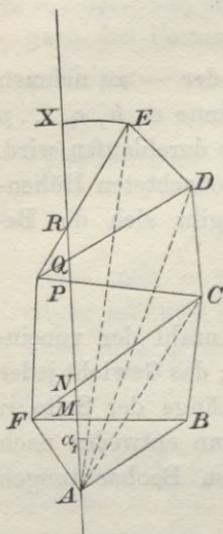


Fig. 20.

Weise verfahren. Ausgehend vom Punkte  $A$  (Figur 20), in welchem die astronomische Breite und das Azimut als bekannt vorausgesetzt werden, kann man durch Auflösung der Dreiecke  $ABM$ ,  $MFN$ ,  $\dots$  die Stücke  $AM$ ,  $MN$ ,  $\dots$   $QR$  des Meridianbogens berechnen. Legt man dann durch den Endpunkt  $E$  des Netzes die geodätische Linie  $EX$  senkrecht zum Meridian von  $A$  und löst das Dreieck  $REX$  auf, so bekommt man den ganzen Bogen  $AX$ . Ist die Breite  $\varphi$  des Punktes  $E$  astronomisch bestimmt, so erhält man die des Punktes  $X$  mit genügender Annäherung aus der Formel

$$\varphi_X = \varphi + \frac{1}{2} \frac{S^2 \tan \varphi}{N \rho \text{ arc } 1''},$$

wo  $S = (EX)$  ist. Man hat so die Länge eines Meridianbogens zwischen zwei Punkten von bekannter Breite. Es ist dies die Methode von *A. M. Legendre*<sup>226</sup>).

Oder man verfährt auf folgende Weise. Durch Berechnung der Dreiecke  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $\dots$  bekommt man die Länge  $s$  und das Azimut  $\alpha_1$  der geodätischen Linie, welche die Endpunkte der Triangulation verbindet und aus diesen Elementen kann man leicht den Meridianbogen zwischen den Breitenkreisen von  $A$  und  $E$  erhalten. Damit diese Rechnung soweit als möglich unabhängig von den benutzten provisorischen Werten von  $a$  und  $e$  ausfällt, ist es zweckmäßig, auch in dem Endpunkt  $E$  das astronomische Azimut zu bestimmen; die Länge des Meridianbogens  $\sigma$  ist dann durch die Formel von *Bessel*<sup>227</sup>) gegeben:

(Meridian- und Parallelbogen) findet man in: *P. L. M. de Maupertuis*, La figure de la terre, Paris 1738, p. 127; *R. G. Boscovich*, De litteraria expeditione per pontificiam ditionem, 5, Romae 1755; *J. L. d'Alembert*, Recherches sur différents points du système du monde 2, Paris 1754. Wegen der neueren Untersuchungen und speziellen Wege der bis heute ausgeführten numerischen Rechnungen vgl. *J. B. Listing*, Über unsere jetzige Kenntnis der Größe und Figur der Erde, Göttingen 1872.

226) *J. B. J. Delambre*, Méthodes analytiques etc., p. 3.227) *F. W. Bessel* in Astr. Nachr. 14 (1837), p. 338; vgl. auch *Helmert*, H. G.,

$$(76) \quad \sigma = \frac{s \cos \alpha}{\cos \frac{\Delta \alpha}{2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{12 a^2} [1 + e^2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)] + \dots \right\},$$

wo  $\alpha = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ)$ ,  $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 - 180^\circ$  ist und  $\alpha_1, \alpha_2$  die reziproken Azimute des Bogens  $s$  bedeuten und  $\varphi_1, \varphi_2$  die Breiten der Endpunkte.

Nach Berechnung von  $\sigma$  kann man mit genügender Genauigkeit (wenn der Bogen nicht mehr als  $2^\circ$  Amplitude hat, vgl. Nr. 10) schreiben:

$$(77) \quad \sigma = \rho (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ arc } 1'',$$

wo

$$(78) \quad \rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \varphi = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

ist und die Breitendifferenz in Sekunden auszudrücken ist.

Die Formeln (77) und (78) liefern eine Gleichung zwischen  $a, e$  und Beobachtungsgrößen. Wenn man wie gewöhnlich mehr als zwei Meridianbogen zur Verfügung hat, wird man die Methode der kleinsten Quadrate in folgender Weise anwenden. Es seien  $a_0, e_0$  Näherungswerte von  $a, e$ , mit denen der vorläufige Wert  $\rho'$  von  $\rho$  in Formel (78) berechnet ist. Wir setzen dann

$$a = a_0 + \delta a, \quad e^2 = e_0^2 + \delta(e^2)$$

und nennen  $v_1, v_2$  die Verbesserungen der astronomischen Bestimmung von  $\varphi_1, \varphi_2$ . Die Formeln (77), (78) geben dann die Fehlergleichung:

$$(79) \quad \frac{\sigma}{\text{arc } 1''} \left\{ \frac{1}{\rho'} - \frac{\delta a}{a^2} + \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \frac{\delta(e^2)}{a} \right\} - \varphi_2 + \varphi_1 = v_2 - v_1,$$

in der die Glieder mit  $e^2 \delta a, e^2 \delta e^{228}$  vernachlässigt sind. Die Fehlergleichungen werden dann mit Hilfe der Bedingung  $[v^2] = \text{Minimum}$  aufgelöst.

**42. Bestimmung von  $a$  und  $e$  durch Parallelkreisbogen.** Wenn die Triangulation längs eines Parallelkreisbogens erfolgt ist, und wenn in den Endpunkten  $A$  und  $B$  die astronomischen Azimute und die Längendifferenz  $\Delta \omega$  beobachtet ist, so kann man, unter  $\Theta N$  den Parallelkreisbogen in der Mittelbreite  $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ , zwischen den Meridianen von  $A$  und  $B$  verstanden, für  $\Theta$  die folgende Formel aufstellen:

1, p. 304—308. Andere Methoden für die Berechnung von  $\sigma$  haben *F. G. W. Struve* und *J. J. Baeyer* gegeben. Vgl. *N. Jadanza*, *Metodi per la misura di un arco di meridiano*, Firenze 1881.

228) Genauere Formeln findet man in einem Aufsatz von *F. W. Bessel*, *Abhdlg.* 3, p. 41.

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} \omega = \Delta \omega \cos \varphi = \frac{s}{N} \sin \alpha \left\{ 1 - \frac{s^2}{24N^2} (1 - \sec^2 \varphi \sin^2 \alpha) \right\} \\ \left( N = \text{Querkrümmungsradius für die Mittelbreite} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right), \end{array} \right.$$

wo  $s$  die Länge der geodätischen Linie  $AB$  bedeutet und die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung haben bezüglich der Punkte  $A$  und  $B$  wie in der vorigen Nr. Die Formel (80) gibt eine Beziehung zwischen gemessenen Größen und den Unbekannten  $a$ ,  $e^2$ .<sup>229)</sup>

**43. Stücke des Ellipsoids. Lotabweichungen.** Das Problem, aus einem System von Erdbogen die plausibelsten Werte von  $a$  und  $e$  abzuleiten, hat an Wichtigkeit verloren, seitdem die Geodäten sich überzeugt haben, daß die Resultate der verschiedenen Gradmessungen nicht mit genügender Genauigkeit einem einzigen Ellipsoid angepaßt werden können. Gibt man einmal zu, daß systematische Unterschiede zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid vorhanden sind, so hat die Ausgleichung der Resultate von unabhängigen Gradmessungen keinen anderen Zweck, als für  $a$  und  $e$  Mittelwerte  $a_m$  und  $e_m$  zwischen den Werten  $(a_1, e_1), (a_2, e_2), \dots$  zu liefern, die sich auf die verschiedenen Ellipsoide  $E_1, E_2, \dots$  beziehen, welche sich jeweils den verschiedenen Gradmessungen am besten anpassen. Aber dies ist nicht gleichbedeutend mit der Bestimmung eines Ellipsoids, das am besten den gesamten Gradmessungen entspricht. Denn so lange diese nicht untereinander verbunden sind, haben wir keine Kenntnis bezüglich der Lage, welche die verschiedenen Ellipsoidstücke  $E_1, E_2, \dots$  zueinander haben, und deshalb haben wir keine Garantie, daß das mittlere Ellipsoid  $(a_m, e_m)$  nicht nur bezüglich der Krümmung seiner Teile, sondern auch bezüglich seiner Lage zum Erdkörper sich sämtlichen studierten Teilen des Geoids anpasse.

Da die Ermittlung der absoluten Abweichungen des Geoids von einem einzigen Ellipsoid bis jetzt nicht möglich ist, müssen wir uns darauf beschränken, einzeln jede Erdgegend zu untersuchen, die mit geodätisch und astronomisch untereinander verbundenen Triangulationen überdeckt ist, indem wir die Dimensionen und die Lage eines Ellipsoids<sup>229a)</sup> zu bestimmen suchen, welches sich möglichst gut den Daten dieser Triangulationen anpaßt, und die Abweichungen er-

229) Siehe: *N. Jadanza* in *Torino Atti Accad.* 19 (1887), p. 990; *G. de Berardinis*, *Alcune formole per calcolare un arco di parallelo terrestre*, Messina 1890.

229a) Schon zu Beginn des vorigen Jahrhunderts beschäftigte sich *W. Lambton* mit der Bestimmung eines *lokalen* Ellipsoids, das am besten geeignet wäre, die Resultate der englischen Messungen darzustellen [An account of the measurement of an arc of the meridian etc., *Asiatic Researches* 8 (1805), p. 137].

mitteln, welche in der betreffenden Gegend das Geoid vom Ellipsoid aufweist.

Die Bestimmung eines Ellipsoidstückes verbindet sich unter diesem Gesichtspunkt mit der Bestimmung der Lotabweichungen<sup>230)</sup> und ebenso mit dem Problem der Ausgleichung verschiedener, miteinander verbundener Triangulationen. Wir wollen hier in Kürze die Methode und die Formeln von *Helmert* angeben<sup>231)</sup>. Es mögen  $i, k$  zwei geodätisch miteinander verbundene Punkte sein. In bezug auf ein vorläufiges Ellipsoid  $E_0$  (z. B. das *Besselsche*) mögen  $\bar{B}_i, \bar{L}_i, \bar{B}_k, \bar{L}_k$  angenommene Werte<sup>232)</sup> für die geodätischen Längen und Breiten der Punkte  $i$  und  $k$  sein. Indem man von diesen Daten ausgeht und die Elemente  $a, e$  des Ellipsoids  $E_0$  benutzt, berechnet man (Nr. 15) vorläufige, aber streng zu  $\bar{B}_i, \bar{L}_i, \bar{B}_k, \bar{L}_k$  gehörige Werte der Länge  $\bar{S}_{ik}$  und der Azimute  $\bar{T}_{ik}, \bar{T}_{ki}$  der geodätischen Linie  $ik$  in ihren Endpunkten. Es seien dann weiter:

$$\bar{B} + dB, \bar{L} + dL, \bar{T} + dT, \bar{S} + dS$$

die analogen Größen für das gesuchte, sich am besten anschließende Ellipsoid  $E$ . Die Relationen zwischen den Differenzen  $dB, dL, dS, dT$  erhält man dann (abgesehen von kleinen Größen 2. Ordnung), indem man die Formeln, welche zur Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimutes dienen, differenziert und dabei die Breite, die Länge und das Anfangsazimut  $B_i, L_i, T_{ik}$  und die Größen  $a$  und  $e$  als Veränderliche ansieht<sup>233)</sup>.

Bezeichnet man mit  $\alpha$  die Abplattung  $1 - \sqrt{1 - e^2}$  und mit  $da, da$  die Korrekturen von  $a, \alpha$ , wenn man vom Ellipsoid  $E_0$  zu  $E$  übergeht, so ergeben sich Relationen folgender Art:

230) Der Gedanke, die Lotabw. an den beiden Enden eines geodätischen Bogens mit den wahrscheinlichsten Verbesserungen der Konstanten  $a$  und  $e$  des Ellipsoids in Einklang zu bringen, ist von *Bessel* analytisch entwickelt, *Astr. Nachr.* 14 (1837), p. 269, §§ 8 und 9; vgl. auch *C. G. Andrae*, *Problèmes de haute géodésie*, 3<sup>e</sup> cah.

231) Lotabw. Heft 1, Berlin 1886. Wegen der weiteren Behandlung des Problems vgl. *Helmert*, *H. G.* 1, p. 533—562. Vgl. ferner: Die Europ. Längengradmessung in 52 Grad usw., Heft 1 und 2, 1893—96; *L. Krüger*, *Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen*, Potsdam 1898; *A. Börsch* und *L. Krüger*, *Lotabweichungen*, Heft 2, Berlin 1902; *A. Börsch*, *Lotabweichungen*, Heft 3, Berlin 1906.

232) Diese vorläufigen Werte können innerhalb gewisser Grenzen noch beliebig angenommen werden; wenn sie sich ändern, ändern sich  $\bar{S}, \bar{T}$  und die Schlußformeln (83) bleiben dieselben.

233) Diese Beziehungen sind von *Helmert* in *H. G.* 1, p. 282—294 angegeben, indem er die reduzierte Länge von *E. B. Christoffel* benutzte.

$$(81) \left\{ \begin{array}{l} -dB_k = p_1 dB_i + p_3 dS_{ik} + p_4 dT_{ik} + p_5 \frac{da}{a} + p_6 da, \\ -\cos B_k dL_k = -\cos B_k dL_i + q_1 dB_i + q_3 dS_{ik} + q_4 dT_{ik} \\ \quad + q_5 \frac{da}{a} + q_6 da \\ -\cotg B_k dT_{ik} = r_1 dB_i + r_3 dS_{ik} + r_4 dT_{ik} + r_5 \frac{da}{a} + r_6 da. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir mit  $B'$ ,  $L'$ ,  $T'$  die Koordinaten und die astronomisch bestimmten Azimute, mit  $\delta B'$ ,  $\delta L'$ ,  $\delta T'$  die Fehler dieser Bestimmungen; ferner mit  $\xi_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\xi_k$ ,  $\lambda_k$  die Lotabweichungen in Breite und Länge der Punkte  $i$  resp.  $k$ , bezogen auf das Ellipsoid  $E_0$ , so haben wir

$$(82) \left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_i + dB_i = B'_i + \delta B'_i - \xi_i, \\ \bar{L}_i + dL_i = L'_i + \delta L'_i - \lambda_i, \\ \bar{T}_{ik} + dT_{ik} = T'_{ik} + \delta T'_{ik} - \lambda_i \sin B_i, \end{array} \right.$$

und drei andere von entsprechender Bauart für den Punkt  $k$ .

Wir nennen dann  $S'_{ik}$  die Länge der Seite  $ik$ , die direkt durch Triangulation gefunden ist,  $\delta S'_{ik}$  die entsprechende Korrektur, so daß

$$S'_{ik} + \delta S'_{ik} = \bar{S}_{ik} + dS_{ik}.$$

Vermittelst dieser letzten Gleichung und (82) eliminieren wir die  $dB$ ,  $dL$ ,  $dT$ ,  $dS$  aus (81). Auf diese Weise kommen wir zu den drei Gleichungen:

$$(83) \left\{ \begin{array}{l} \xi_k = B_k - \bar{B}_k + \delta B_k + p_1(B'_i - \bar{B}_i + \delta B'_i - \xi_i) - p_2 \lambda_i \\ \quad + p_3(S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + \delta S'_{ik}) + p_4(T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + \delta T'_{ik}) \\ \quad + p_5 \frac{da}{a} + p_6 da, \\ \lambda_k = L'_k - \bar{L}_k + \delta L'_k - \delta L'_i \\ \quad + q_1(B'_i - \bar{B}_i + \delta B'_i - \xi_i) - q_2 \lambda_i + q_3(S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + \delta S'_{ik}) \\ \quad + q_4(T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + \delta T'_{ik}) + q_5 \frac{da}{a} + q_6 da, \\ \lambda_k = \operatorname{cosec} B_k(T'_{ki} - \bar{T}_{ki} + \delta T'_{ki}) + r_1(B'_i - \bar{B}_i + \delta B'_i - \xi_i) - r_2 \lambda_i \\ \quad + r_3(S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + \delta S'_{ik}) + r_4(T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + \delta T'_{ik}) \\ \quad + r_5 \frac{da}{a} + r_6 da. \end{array} \right.$$

Für die Koeffizienten dieser Gleichungen gibt Helmert<sup>234)</sup> die folgenden Näherungswerte an.

234) Lotabweichungen, Heft 1, p. 10, 11, 13. Für die Koeffizienten mit den Indizes 1 bis 5 sind die vernachlässigten Größen von der 4. Ordnung bezüglich  $e$  und  $\frac{\bar{S}}{a}$ , für die Koeffizienten mit dem Index 6 von 3. Ordnung.

Setzt man

$$l = L_k - L_i, \quad b = B_k - B_i, \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad B = \frac{B_i + B_k}{2},$$

so wird:

$$p_1 = -\frac{W_k^3}{W_i^3} \cos l, \quad q_1 = -\frac{(1 - e^2) W_k}{W_i^3} \sin l \operatorname{tg} B_k,$$

$$r_1 = -\frac{\sin l}{\sin B_k \cos B_k} (1 - e^2 \sin^2 B \cos^2 B),$$

$$p_2 = p_4 \sin B_i, \quad q_2 = q_4 \sin B_i - 1, \quad r_2 = r_4 \sin B_i,$$

$$p_3 = W_k^3 \frac{\cos T_{ki}}{a(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''}, \quad q_3 = r_3 = \frac{W_k \sin T_{ki}}{a \cdot \operatorname{arc} 1''} \sec B_k,$$

$$p_4 = -\frac{W_k^3 \sin T_{ki}}{a(1 - e^2)} m, \quad q_4 = \frac{W_k}{a} \cos T_{ki} \sec B_k m,$$

$$r_4 = q_4 - \frac{dm}{dS} \cdot \frac{1}{\sin B_k},$$

$$p_5 = -p_3 S_{ik}, \quad q_5 = r_5 = -q_3 S_{ik},$$

$$p_6 = -2b + \left(3b - \frac{l^2}{2} \sin B \cos B \operatorname{arc} 1''\right) \sin^2 B,$$

$$q_6 = l \sin^2 B_i \cos B_i \sec B_k, \quad r_6 = q_6 - b \Gamma \frac{\cos^3 B}{\sin B} \operatorname{arc} 1''.$$

$m$  ist die reduzierte Länge des Bogens  $S_{ik}$  und zwar gilt mit genügender Annäherung:

$$\log \frac{m}{S} = -\frac{MS^2}{6a^2}, \quad \log \left(\frac{dm}{dS}\right) = -\frac{MS^2}{2a^2}, \quad M = 0,43429.$$

**44. Fortsetzung. Bestimmung der Lotabweichungen. Ausgleichung.** Es sei eine Gegend der Erde mit Triangulationen überdeckt, die in einem oder mehreren Punkten zusammenhängen. Die Triangulationen seien an unabhängige Basismessungen angeschlossen und jede für sich ausgeglichen<sup>235</sup>). Betrachten wir zunächst nur die *astronomischen Punkte*, so wird es unter diesen einige geben, in denen sowohl die Länge wie das astronomische Azimut bestimmt sind; diese nennen wir *Laplacesche Punkte*. In anderen Punkten wird außer der Breite entweder nur das Azimut oder nur die Länge bestimmt sein. Wir gehen nun von einem Zentralpunkt aus und ziehen Polygone, die durch die astronomischen Punkte hindurch zu den ent-

235) Wir werden nur voraussetzen, daß, wenn zwei Triangulationen eine Seite gemeinsam haben, die Länge der Dreiecksseiten derart geändert wird, daß ein event. Unterschied zwischen den beiden Werten der Seiten, die aus den beiden Triangulationen erhalten sind, beseitigt wird. Vgl. *Helmert*, Lotabw. § 3.

fernten Punkten hinführen. (Es kann vorkommen, daß ein und derselbe Punkt mit dem Zentralpunkt durch mehrere Polygonzüge verbunden ist.) Für jede Polygonseite schreiben wir dann die Gleichungen vom Typus (83); es ist klar, daß diese sich in der Weise kombinieren lassen, daß man Gleichungen erhält, in denen die  $\xi, \lambda$  irgend eines Punktes  $k$  auftreten und solche für den Zentralpunkt 1.<sup>236</sup>) Die Lotabweichungen in Länge ergeben sich für die *Laplaceschen* Punkte aus (83) auf zwei Arten, aber der Vergleich zwischen dem astronomischen Azimut und dem aus der *Triangulation* abgeleiteten ist für Punkte, die vom Zentralpunkt weit entfernt sind, bedeutend ungenauer, als der Vergleich der Längen. Es ist deshalb zweckmäßig (wenigstens für eine erste Annäherung), nur die Längen zur Bestimmung der  $\lambda$  zu benutzen und sich der Azimute nur bei der Ausgleichung zu bedienen. Dies läuft darauf hinaus, daß man die Verbesserungen  $\delta L'$  der astronomischen Längen gleich Null setzt. Es bleiben dann (abgesehen von den Verbesserungen  $\delta B'$ , welche offenbar nicht von den entsprechenden  $\xi$  getrennt werden können) in den Gleichungen (83) die Verbesserungen  $\delta S'_{ik}$  und  $\delta T'_{ik}$ . Jede der Verbesserungen  $\delta T$  kann als Summe zweier Verbesserungen  $u_i + v_{ik}$  betrachtet werden, von denen die erste (die für alle vom Punkte  $i$  ausgehenden Richtungen die gleiche ist) die Verbesserung der astronomischen Orientierung ist, während die zweite die Verbesserung der geodätischen Bestimmung der Richtung  $ik$  ist. Die Ausgleichung kann man dann auf Grund der Minimumsbedingung:

$$\sum \frac{(\delta S)^2}{m^2 S} + \sum \frac{u^2}{m_u^2} + \sum \frac{v^2}{m_v^2} = \text{Minimum}$$

ausführen, wo  $m$  der mittlere Kilometerfehler der geodätischen Bestimmung von  $S$ ,  $m_u$  der mittlere Fehler der astronomischen Azimutbestimmung,  $m_v$  der einer geodätischen Richtungsbestimmung ist. — Die Bedingungsgleichungen können so in folgender Weise erhalten werden:

1) für jeden *Laplaceschen* Punkt liefert die Elimination von  $\lambda$  zwischen der zweiten und dritten Relation (83) eine Gleichung (erweiterte *Laplacesche* Gleichung);

2) für jedes geschlossene Polygon, das sich ergibt, wenn zwei Punkte  $i, k$  durch zwei verschiedene Polygonzüge ( $irk$ ), ( $isk$ ) verbunden sind, hat man drei Gleichungen, welche ausdrücken, daß die Werte

236) Indem man  $\xi_i, \lambda_i$  in den Gleichungen (83) bezüglich der Seite  $ik$  und den analogen bezüglich der Seite  $1i$  eliminiert, hat man drei Gleichungen zwischen  $\xi_1, \lambda_1, \xi_k, \lambda_k$ .

$\xi_k, \lambda_k$  des Punktes  $k$  aus (83) sich in derselben Weise ergeben, wenn man ( $irk$ ) oder wenn man ( $isk$ ) durchläuft, oder, was dasselbe ist: man erhält zwei Gleichungen, indem man die Identität der Werte von  $\xi_k, \lambda_k$  für die beiden Wege aus den ersten beiden Gleichungen (83) ausdrückt. Die dritte ergibt sich aus den *Laplaceschen* Gleichungen für die beiden Wege. In Wirklichkeit ist diese Gleichung nichts anderes als die Polygonwinkelgleichung (vgl. Netzausgleichung in Nr. 31) für das Polygon ( $irksi$ )<sup>237</sup>). Wenn man deshalb  $A$  *Laplacesche* Punkte hat, die mit einem *Laplaceschen* Zentralpunkt verbunden sind, und  $p$  geschlossene Polygone, so ergeben sich im ganzen  $A + 3p$  Bedingungsgleichungen. Die praktischen Regeln für die numerische Aufstellung der Bedingungsgleichungen und für die Annahme der mittleren Fehler  $m, m_u, m_o$  können hier nicht auseinandergesetzt werden; wir verweisen in dieser Beziehung auf die genannten Arbeiten von *Helmert* und *A. Börsch* und *L. Krüger*, wo zahlreiche Beispiele zur Illustration der Theorie vorhanden sind<sup>238</sup>). Als Resultat der Ausgleichung ergeben sich schließlich die Lotabweichungen der verschiedenen Punkte mit Ausnahme des Zentralpunktes als lineare Funktionen (mit numerisch bekannten Koeffizienten) der Größen:

$$\xi_1, \lambda_1, \frac{da}{a}, da$$

(vgl. *Helmert*, Lotabw., Heft 1, § 31), wenn man absieht von den Fehlern  $\delta B', \delta L'$  der astronomischen Längen- und Breitenbestimmung. Setzt man der Bequemlichkeit wegen  $\eta_i$  anstelle von  $\lambda_i \cos B_i$ , so ergeben sich Beziehungen folgender Art:

$$(84) \quad \begin{cases} \xi_i = a_i \xi_1 + b_i \eta_1 + c_i \frac{da}{a} + d_i da + l_i, \\ \eta_i = a'_i \xi_1 + b'_i \eta_1 + c'_i \frac{da}{a} + d'_i da + l'_i, \end{cases}$$

wo  $a, b, \dots, a', b', \dots$  bekannte Zahlenwerte haben.

Will man ein Ellipsoid bestimmen, das sich demjenigen Teile der Erdoberfläche, auf den sich die Triangulationen erstrecken, anschließt, so kann man als Bedingung nehmen<sup>239</sup>):

$$(85) \quad \Sigma(\xi^2 + \eta^2) = \text{Minim.},$$

237) Die sogenannte *Laplacesche* Gleichung ist nichts anderes als die Winkelgleichung für das Dreieck, welches den Nordpol und die beiden Punkte  $i$  und  $k$  zu Ecken hat.

238) *Helmert*, Lotabw., Heft 1, §§ 22–26; *A. Börsch* und *L. Krüger*, Die europ. Gradm. usw. Heft 2, Kap. 5, §§ 4–8.

239) Es ist klar, daß man dabei die verschiedene Genauigkeit, mit der  $\xi$  und  $\eta$  bestimmt sind, nicht berücksichtigt. Diese können nicht einfach wie

wodurch das Problem auf die Formeln der Methode der kleinsten Quadrate zurückgeführt ist. Die Fehlergleichungen sind die Gleichungen (84), zu denen man hinzufügen muß:

$$\xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \eta.$$

**45. Fortsetzung. Angenäherte Bestimmung von Geoidstücken.** Bestimmt man die Komponenten  $\xi, \eta$  der Lotabweichung für eine große Zahl von Punkten, so kann man dadurch näherungsweise eine Niveaufläche in der betrachteten Gegend konstruieren. Wir betrachten eine Reihe von Punkten, die ungefähr längs einer geodätischen Linie  $l$  liegen; für einen beliebigen Punkt derselben  $P_i$  seien  $\xi_i, \eta_i$  die Werte von  $\xi, \eta$ . Ist  $\alpha_i$  das Azimut von  $l$  in  $P_i$ , so ist die Komponente der Lotabweichung in der Richtung  $l$  und im Punkte  $P_i$  <sup>240</sup>):

$$(86) \quad \gamma_i = \xi_i \cos \alpha_i + \eta_i \sin \alpha_i.$$

Nennen wir  $H_i, H_k$  die Erhebungen des Geoids über dem Ellipsoid in den Punkten  $P_i, P_k$ , so hat man mit genügender Genauigkeit:

$$(87) \quad H_k - H_i = \int_i^k \gamma \, dl,$$

wo  $dl$  ein Element der Linie  $l$  ist. Die Integration kann man näherungsweise durch mechanische Quadratur ausführen, indem man die Entfernungen  $l$  als Abszissen und die durch (86) gegebenen Werte  $\gamma$  als Ordinaten nimmt. Man muß natürlich den Wert von  $H$  in einem Punkte kennen, oder a priori annehmen. Die Frage hängt mit der *Reduktion der Basislinien auf das Meeresniveau* zusammen (Nr. 25). Die Basislinien müßten streng genommen auf das Referenzellipsoid reduziert werden, während wir sie auf das Meeresniveau reduzieren, was darauf hinausläuft, willkürlich in einem bestimmten Punkte des Triangulationsgebietes  $H = 0$  zu setzen. Solange man indessen nur begrenzte Gebiete der Erde betrachtet, interessieren nur die relativen Werte der Höhen, und es kann deshalb die Willkür bei der Wahl des Nullpunktes für die Höhen nicht als ein Mangel der oben angegebenen Methode angesehen werden.

Beobachtungsfehler behandelt werden; die Formel (85) muß deshalb nur für den Ausdruck eines konventionellen Verfahrens angesehen werden, um dasjenige Ellipsoid zu bestimmen, das sich in der betrachteten Gegend dem Geoid am besten anschließt.

240) Man findet dies leicht aus den Entwicklungen in Nr. 7. Die Grundlage für das analytische Studium des Geoids wurde von *Bessel* geliefert (vgl. Zit. unter Fußn. 228).

Wenn die Werte von  $H$  für verschiedene Serien von Punkten in verschiedenen Richtungen<sup>241)</sup> bestimmt sind, so kann man die Gestalt und Lage des Geoids zum Ellipsoid in der betrachteten Gegend graphisch nach topographischer Methode oder mit Hilfe von Niveau-kurven ( $H = \text{konst.}$ ), wie man sie in der niederen Geodäsie zur Darstellung der Höhenverhältnisse benutzt, darstellen<sup>242)</sup>.

Man kann auch analytische Hilfsmittel zur Bestimmung des Geoids, wenigstens in der betrachteten Gegend, heranziehen. Setzt man in einem Punkte  $P$ :

$$H = A_1 \Delta_\varphi + A_2 \Delta_\omega + B_1 \Delta_\varphi^2 + 2 B_2 \Delta_\varphi \Delta_\omega + B_3 \Delta_\omega^2 + \dots,$$

wo  $\Delta_\varphi, \Delta_\omega$  die Breiten- und Längendifferenzen zwischen dem Punkt  $P$  und dem Zentralpunkte mit  $H = 0$  sind, so ergibt sich mit genügender Genauigkeit:

$$(88) \quad \xi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{1}{\varrho} (A_1 + 2 B_1 \Delta_\varphi + 2 B_2 \Delta_\omega + \dots),$$

$$\eta = \frac{1}{N \cos \varphi} \frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{1}{N \cos \varphi} (A_2 + 2 B_2 \Delta_\varphi + 2 B_3 \Delta_\omega + \dots)$$

( $\varrho, N$  Hauptkrümmungsradien in  $P$ )<sup>242 a)</sup>.

Wendet man diese Relationen auf Punkte an, in denen  $\xi, \eta$  bestimmt sind, so können sie zur Bestimmung einer gewissen Zahl der Koeffizienten  $A, B$  dienen. Man benutzt auch trigonometrische Entwicklungen<sup>243)</sup>:

$$H = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots,$$

wo

241) Es ist natürlich notwendig, daß eine Linie vorhanden ist, welche alle anderen kreuzt, damit man alle  $H$  von einem einzigen Ausgangspunkte ( $H = 0$ ) ableiten kann.

242) Als Beispiel einer Bestimmung von Profilen oder von ebenen Schnitten des Geoids vgl. bei *Helmert* (H. G. 1, p. 568) die Bestimmung eines Meridianprofils in der Harzgegend; ferner vgl. *Int. Erdm.* 1888, p. 19 (und die beigegebene Karte). Die topographische Darstellung des Geoids ist von *C. G. Andrae* (Problèmes de haute géodésie, 3<sup>me</sup> cahier, p. 53) für die Gegend des Harzes und des Thüringer Waldes auf Grund der Lotstörungen  $\xi$  und unter Annahme einer willkürlichen Hypothese bezüglich der Werte  $\lambda$  längs eines Parallels versucht worden. *Pomerantzeff* hat eine solche Darstellung für das Gebiet zwischen den Flüssen Kara- und Syr-Darja in Zentralasien (zw. den Br.  $40^\circ 15'$  und  $41^\circ 15'$  und d. L.  $39^\circ 30'$  und  $42^\circ 25'$  östl. von Pulkowa) angegeben. Die Abhandlung von *Pomerantzeff* findet sich in russischer Sprache in den Denkschr. der Milit.-topogr. Abteilg. des Generalstabs, St. Petersburg 1897, p. 76; ein Auszug aus ihr in: *Bull. astr.* 14 (1897), p. 479. Bezüglich der Bestimmung begrenzter Teile des Geoids vgl. *Helmert*, *Zit. der Fußnote 39*, ferner die Zitate zu Nr. 53.

242 a) Beispiel hierzu *James and Clarke*<sup>52)</sup>.

243) *Bessel*, *Zit. der Fußn.* 228, § 10.

$$b_i = b_{i0} + b_{i1} \sin y + b_{i2} \sin 2y + \dots,$$

$$a_i = a_{i0} + a_{i1} \sin y + a_{i2} \sin 2y + \dots$$

ist, und wo  $x, y$  geeignet gewählte Vielfache der  $\Delta_\varphi, \Delta_\omega$  sind. Aber im allgemeinen ist zu erwarten, daß diese analytischen Hilfsmittel keine besseren Resultate liefern als die oben erwähnte topographische Methode. Die lokalen Geoidstörungen sind zu sehr mit den geologischen Oberflächenverhältnissen der Erdkruste verknüpft, als daß man hoffen könnte, daß sich die Änderungen von  $H$  in einer nur einigermaßen ausgedehnten Gegend genügend durch eine einfache Formel darstellen ließen.

A. J. Yvon Villarceau<sup>244</sup>) hat vorgeschlagen, die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid durch ein doppeltes Nivellement, ein trigonometrisches und ein geometrisches, zu bestimmen; das erste gibt die Höhen der Punkte in bezug auf das Ellipsoid, das zweite in bezug auf das Geoid. Die Methode hat augenblicklich gar keine praktische Bedeutung wegen der großen Ungenauigkeit der trigonometrischen Nivellementsresultate, die durch die Refraktion verursacht wird. Außerdem ist zu bemerken, daß die in die Rechnung eingeführten Zenitdistanzen auf das Ellipsoid und nicht auf das Geoid bezogen sind, und deshalb ist an die beobachteten Zenitdistanzen die in Nr. 7 angegebene Korrektur anzubringen, wozu bereits eine wenigstens angenäherte Kenntnis der Lotabweichungen notwendig ist.

Von theoretischem Interesse ist auch die Methode von E. B. Christoffel<sup>245</sup>) zur Bestimmung einer Fläche, wenn die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte gegeben sind.

Von den theoretischen Untersuchungen über das Geoid nennen wir noch das Theorem von Villarceau<sup>246</sup>), das die geometrische Bedingung ausdrückt, der ein orthogonales Strahlensystem genügen muß; in unserer Bezeichnungsweise kann man es schreiben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{\partial(\eta \cos \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Diese Bedingung müßte man berücksichtigen, wenn man die  $\xi, \eta$  nach Potenzen von  $\Delta_\varphi, \Delta_\omega$  entwickeln wollte. Aber sie ist schon mit genügender Annäherung berücksichtigt, wenn man bei der Bestimmung der  $\xi, \eta$  die in Nr. 43, 44, angegebenen Methoden anwendet, oder

244) J. de math. 18 (1873), p. 393.

245) J. f. Math. 64 (1864), p. 193; V. Reina [Rom. Accad. Lincei (5) 2 (1893), p. 287] hat eine Methode zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien angegeben.

246) Vgl. Fußnote 244, p. 412.

wenn man von einem analytischen Ausdruck für  $H$ , wie oben angegeben ist, ausgeht<sup>247</sup>).

**46. Die Schwerestörungen und die Abweichungen zwischen Geoid und Ellipsoid.** Wie die Schwerkraftsmessungen, wenn sie sich auf die ganze Erdoberfläche erstrecken, zur Bestimmung der Abweichungen  $H$  dienen können, haben wir schon in Nr. 4 bei Gelegenheit der Formel von *Stokes* erwähnt; aber eine solche Formel kann augenblicklich noch nicht mit Sicherheit angewandt werden. Bestimmungen von  $H$  durch lokale Schwerestörungen sind unmöglich, wenn man nicht a priori Voraussetzungen über die geologischen Verhältnisse der Oberflächenschichten der Erde macht, da die Schwerestörung in jedem Punkte sowohl von dem lokalen Werte von  $H$  als auch von lokalen Unregelmäßigkeiten in der Konstitution der Erdrinde abhängt<sup>248</sup>). Daß diese Unregelmäßigkeiten durchaus nicht zu vernachlässigen sind, kann heutzutage als sicher bewiesen angenommen werden. Indessen sei in dieser Beziehung, was den Zusammenhang zwischen der Schwerkraft und der Erddichte betrifft, auf die Geophysik verwiesen.

### III. Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse.

**47. Anfänge der geodätischen Messungen, bei denen die Erde als Kugel betrachtet wird.** — Die Kugelgestalt der Erde wurde von den alten Griechen (*Aristoteles*, *Archimedes*, *Pythagoras*) aus rein metaphysischen Gründen angenommen und vor ihnen noch von den Chaldäern (vgl. *Bailly*, *Astron. ancienne*). Der erste Versuch, den Erdumfang wirklich auszumessen, ist, soweit wir sichere Nachrichten haben, von *Eratosthenes* aus Cyrene (geb. 276 v. Chr.) unternommen worden. Dieser bestimmte durch Meridianbeobachtungen der Sonne den Breitenunterschied zwischen Alexandria und Syene in Ägypten zu  $7^{\circ} 30'$ ; indem er dann die Entfernung der beiden Orte nach der Marschdauer zu 5000 Stadien ermittelte, fand er den Erdumfang  $E = 2500\ 000$  Stadien. *Posidonius* (geb. 135 v. Chr.) leitete aus dem Bogen Rhodus-Alexandria, dessen Breitendifferenz er mit Hilfe der

247) Bezüglich der geodätischen Rechnungen auf einer Oberfläche, die sich wenig vom Ellipsoid unterscheidet, vgl. *P. S. Laplace*, *Méc. céleste*, 2, 3. Buch, § 38; *Bessel*<sup>228</sup>); *L. Puissant*, *Traité de géodésie*; *E. F. Minding*, *J. f. Math.* 44 (1852), p. 66; *James and Clarke*, *Ordn. trigon. survey etc.*, p. 609 ff.; *O. Bonnet*, *Ann. di mat.* 2 (1859), p. 46, 113, 180; *E. Pucci*, *Ann. di mat.* (2) 14 (1886), p. 199.

248) *Helmert*, *H. G.* 2, p. 261, Formel (10).

Höhen von Kanopus bestimmte,  $E = 2\,400\,000$  Stadien ab. Das von beiden benutzte Stadion ist sehr wahrscheinlich das olympische, dessen Länge von *Uckert* zu 570 Pariser Fuß<sup>249</sup>) (entsprechend 185 m) bestimmt ist. Es würde deshalb nach *Eratosthenes* der Erdquadrant sich zu 11 562 km, nach *Posidonius* zu 11 100 km ergeben. Über diese Messungen des *Eratosthenes* und des *Posidonius* hat uns *Kleomedes*<sup>250</sup>) Nachrichten hinterlassen. Eine Messung eines Meridianbogens von 2 Grad mit Hilfe von Stäben wurde von den Arabern im Jahre 827 auf Befehl des Khalifen Almamun in der Ebene von Sandjar in Mesopotamien ausgeführt. Das Messungsergebnis ist in arabischen Ellen angegeben. Setzt man eine Elle<sup>251</sup>) = 0,540 m, so erhält man den Erdquadranten  $Q = 11\,016$  km.

Von der Zeit der Griechen bis 1525 liegt keine Nachricht über irgend eine in Europa ausgeführte Messung vor<sup>252</sup>). In diesem Jahre maß *Fernel*, ein französischer Arzt, die Entfernung Paris-Amiens, indem er die Anzahl der Umläufe eines Wagenrades zählte, und erhielt  $Q = 10\,011$  km, wobei er die Breitendifferenz durch Sonnenbeobachtungen bestimmte.

Die modernen geodätischen Operationen wurden von *Willebrord Snellius* (1580—1626) eingeleitet, der zum ersten Mal sich der Triangulation bediente<sup>253</sup>). Er berechnete den Meridianbogen zwischen den Breitenkreisen von Alkmaar und Bergen-op-Zoom in Holland (Amplitude ca.  $1^{\circ}11'$ ) durch eine Kette von 33 Dreiecken, indem er die Winkel mit Hilfe eines geteilten Halbkreises von ungefähr  $3\frac{1}{2}$  Fuß Durchmesser maß. Die Basis von ca. 1230 m Länge wurde zweimal mit einer Kette und dann mit einem Holzstab gemessen; die Breiten der beiden Endpunkte wurden mit einem Quadranten von  $5\frac{1}{2}$  Fuß Durchmesser bestimmt. Nachdem *Snellius* ein astronomisches Azimut

249) *L. Posch*, Breitengradmessungen, p. 26. Vgl. darin auch den Anhang: Über die französische Stadienhypothese.

250) *De motu circulari corporum coelestium*, Leipzig 1891, lib. I, cap. X. *Kleomedes* spricht noch von einer anderen Messung, die von *Posidonius* ausgeführt wurde, aber *J. S. Bailly* (*Astron. moderne*, p. 163) bezweifelt ihre Echtheit.

251) Die Länge der arabischen Elle wurde auf Grund hydrometrischer Messungen am Nil bei Kairo bestimmt (*Jordan*, Handbuch 3, p. 4).

252) Bezüglich der Anschauungen, die im Mittelalter über die Gestalt der Erde Geltung hatten, vgl. *Bailly*, *Astron. ancienne*; *Gore*, *Geodesy*; ferner *G. Marinelli*, *La geografia e i padri della Chiesa*, Roma 1882 (aus dem Italienischen übersetzt, Leipzig 1884); *S. Günther*, *Studien zur Geschichte der math. und phys. Geographie*, Halle 1877.

253) *W. Snellius van Roijen*, *Eratosthenes Batavus, seu de terrae ambitus quantitate vera suscitatus*, Lugduni Batavorum 1617.

in Leiden gemessen hatte, erhielt er die Länge des Meridianbogens, indem er eine Reihe von Dreiecksseiten auf den Meridian projizierte und dabei *wie in der Ebene rechnete*. Die Messungen wurden 1622 von *Snellius* wiederholt, und die neuen von *Musschenbroek*<sup>254)</sup> veröffentlichten Resultate ergaben  $Q = 10\,004$  km.

Es sind dann die beiden folgenden Messungen zu erwähnen: Bogen von London bis York, von *R. Norwood* direkt mit der Kette gemessen (1635); Bogen bei Modena, im Jahre 1645 von *G. B. Riccioli* und *F. M. Grimaldi*<sup>255)</sup> durch eine Triangulation gemessen. Die Amplitude des Bogens wurde durch Beobachtung reziproker Zenitdistanzen erhalten, eine Methode, die zweifellos sehr bequem wäre, wenn nicht die Unsicherheit der atmosphärischen Refraktion die Resultate fast illusorisch machte<sup>256)</sup>.

Auf Betreiben *Ludwigs XIV.* beschäftigte sich die französische Akademie in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts mit dem Studium der Erdgestalt und beauftragte *J. Picard*, in Frankreich den Bogen zwischen Amiens und Malvoisine (36 km südlich von Paris) zu messen. *Picard*<sup>257)</sup> bildete eine Kette von 13 Dreiecken, indem er von einer Basis von 5622 Toisen ausging, die in der Nähe des Südendes gemessen war. Eine Kontrollbasis von 3900 Toisen wurde bei Amiens<sup>258)</sup> gemessen. Die Breiten wurden in Malvoisine, in Amiens und in Sourdon (bei Amiens) bestimmt. Auf diese Weise wurden zwei Meridianbogen erhalten: Malvoisine-Sourdon (Ampl.  $1^{\circ}12'$ ) und Malvoisine-Amiens ( $1^{\circ}23'$ ), aus denen im Mittel die Länge eines Grades zu 57060 Toisen folgte.

Bei diesen Messungen wurden zum ersten Mal die Winkel mit Hilfe eines Fernrohrs mit Fadenkreuz gemessen<sup>259)</sup> und zum ersten Mal

254) *Physicae, experimentales et geometricae dissertationes*, Leyden 1729.

255) *F. X. von Zach*, *Corresp. astron.* 2 (1819), p. 115.

256) *F. Maurolico* schlägt 1543 vor, den Erddurchmesser aus der Länge der Tangente abzuleiten, die von einem Punkte in bekannter Höhe an die sichtbare Erdkugel gezogen ist; *T. W. Wright* (ungef. 1595) führte in England eine Messung aus, die sich auf eine etwas verschiedene Methode gründet, indem er nämlich die Horizontaldepression eines Punktes von bekannter Höhe beobachtete (vgl. *O. Zanotti-Bianco*, *Sopra una vecchia e poco nota misura del semidiametro terrestre*, Turin 1894).

257) *J. Picard*, *La mesure de la terre*, Paris 1671; später aufgenommen in: *Paris Mém. Acad.* 1718 (1720), 2<sup>e</sup> partie, p. 1.

258) Mit Unrecht schreibt man der peruanischen Expedition von 1735 das Verdienst zu, zum ersten Mal eine Kontrollbasis gemessen zu haben.

259) Der Quadrant von *Picard* war in Wirklichkeit mit 2 Fernrohren versehen, von denen das eine gegen das andere *beweglich* war wie bei den späteren *Repetitionsinstrumenten* von *J. C. Borda*.

zur Messung der Grundlinien vier Maßstäbe (*Endmaße*) benutzt. Dem sphärischen Exzeß wurde keine Rechnung getragen, indem die Dreiecke als eben behandelt wurden.

Die Fortsetzung der *Picardschen* Messungen durch ganz Frankreich von Dunkerque bis Collioure wurde nacheinander von *J. D. Cassini*, *J. Cassini* (Sohn des Vorhergehenden), *Ph. de Lahire*, *G. F. Maraldi*, *C. A. Couplet* und *J. M. de Chazelles* von 1683 bis 1718 ausgeführt und lieferte einen Meridianbogen von ungefähr  $8\frac{1}{3}^{\circ}$ .<sup>260</sup>) Es ergab sich aus diesen Messungen die folgende Länge für einen Meridiangrad:

Aus dem Südbogen . . . . .	$1^{\circ} = 57\,098$	Toisen
aus dem Bogen Paris-Amiens	$1^{\circ} = 57\,060$	„
aus dem Nordbogen . . . . .	$1^{\circ} = 56\,960$	„

Die Gradlängen schienen also nach Norden abzunehmen. Dies veranlaßte die französischen Astronomen zu der Annahme, daß die Erde sich nach den Polen zu verlängere. So wurde die Abplattung der Erde durch die Resultate ungenauer geodätischer Beobachtungen in Zweifel gezogen<sup>261</sup>).

#### 48. Physikalische Untersuchungen über die Gestalt der Erde<sup>262</sup>).

Wichtige Einwürfe gegen die Kugelgestalt der Erde waren schon vom *mechanischen* Standpunkte aus erhoben worden. *J. Richer* beobachtete in Cayenne ( $5^{\circ}$  nördl. Br.) im Jahre 1672, daß das Pendel einer Uhr, welche von Frankreich nach dort transportiert war, langsamer als in Paris schwang und daß es um  $1\frac{1}{4}$  Pariser Linie verkürzt werden mußte, um normalen Gang zu erhalten; die Schwere nahm also mit der Breite ab<sup>263</sup>). *J. Newton* und *Ch. Huygens* behaupteten, daß die

260) *J. Cassini*, *Traité de la grandeur de la terre et de sa figure*, Paris Mém. Acad. 1718 (1720), p. 1. Die Messungen wurden von *C. F. Cassini de Thury* und *N. L. de Lacaille* (1739–40) wiederholt. Vgl. *C. F. Cassini de Thury*, Paris Mém. Acad. 1740 (1742), p. 276.

261) Nach *Todhunter*, *History* § 76 erscheint die Hypothese des verlängerten Erdsphäroids, aus Gradmessungen abgeleitet, zum ersten Male bei *J. Eisenschmidt*, *Diatriba de figura telluris*, Straßburg 1691. *J. Cassini* stellte diese Hypothese auf in: *De la figure de la terre*, Paris Mém. Acad. 1713 (1739), p. 187. Auch die Messungen von Parallelkreisbogen durch *J.* und *C. F. Cassini* (1733–35) schienen die Verlängerung der Erde an den Polen zu bestätigen (*Todhunter*, *History* §§ 215, 224, 226).

262) Wir beschränken uns darauf, einige mathematisch-physikalische Untersuchungen anzuführen, die mit dem Problem der Erdgestalt in direkter Beziehung stehen. Vgl. dazu: *Todhunter*, *History* und *O. Zanotti-Bianco*, *Il problema meccanico della figura della terra*, Turin 1880–85.

263) Bezüglich weiterer Pendelbeobachtungen in jener Zeit vgl. *Todhunter*, *History* 1, Kap. 3.

Zentrifugalkraft nicht genüge, um die beobachtete Verminderung zu erklären und daß man deshalb der Erde eine sphäroidische Gestalt mit Abplattung an den Polen zuschreiben müsse. In den Prop. 18 und 19 des dritten Buches der „Principia“<sup>264</sup>) von *Newton*, die seine Theorie der Erdgestalt auf Grund der allgemeinen Anziehung enthalten, stellt er sich die Aufgabe, zu berechnen, wieviel der flüssige Teil der Erde am Äquator höher sein müsse als an den Polen, damit die Meere im Gleichgewichte seien (Prop. 18). Von diesem Gesichtspunkte aus denkt er sich zwei Kanäle, welche von der Oberfläche zum Erdmittelpunkt gehen, der eine längs eines Äquatorradius, der andere längs einer polaren Halbachse, und stellt dann unter der Voraussetzung, daß die Erde homogen sei und ellipsoidische Gestalt habe, die Bedingung auf, daß das Gesamtgewicht der beiden Kanäle dasselbe sei. In moderner Sprache kann man den Gedankengang *Newtons* so wiedergeben: Die Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoids von der Abplattung  $\varepsilon$  auf das eine Ende der kleinen Achse steht zur Anziehung auf einen Äquatorpunkt<sup>265</sup>) in dem Verhältnis  $(1 + \frac{\varepsilon}{5}) : 1$  und deshalb verhält sich die Schwere am Pol zu der am Äquator wie  $(1 + \frac{\varepsilon}{5}) : (1 - \frac{1}{289})$ , wobei  $\frac{1}{289}$  das Verhältnis zwischen der Zentrifugalkraft und der Schwere am Äquator ausdrückt.

Wenn man sich den polaren und den äquatorialen Radius in die gleiche Anzahl gleicher Teile zerlegt denkt, so ist das Verhältnis der Schwerkraft in zwei entsprechenden Punkten dasselbe, weil für zwei ähnliche homogene Ellipsoide die Anziehungen auf homologe Punkte sich wie die linearen Dimensionen verhalten und weil andererseits die Zentrifugalkraft der Entfernung vom Mittelpunkte proportional ist. Deshalb verhalten sich die totalen Drucke der beiden Kanäle auf ihren Schnittpunkt wie  $(1 + \frac{\varepsilon}{5}) : (1 - \frac{1}{289}) \cdot (1 + \varepsilon)$ . Damit dieses Verhältnis = 1 sei, muß  $\varepsilon = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{289} = \text{ca. } \frac{1}{230}$  sein<sup>266</sup>). In Prop. 20 berechnet *Newton* das Gesetz für die Änderung der Schwerkraft vom Pol zum Äquator unter der Bedingung, daß man  $gr = \text{konst.}$  habe,

264) Prop. 18 lautet: Axes planetarum diametris quae ad eisdem axes normaliter ducentur minores esse. Prop. 19: Invenire proportionem axis planetae ad diametros eisdem perpendiculares.

265) Die höheren Potenzen von  $\varepsilon$  außer der ersten sind vernachlässigt.

266) *Newton* (Principia, liber III, prop. 20) behauptet zu unrecht, daß die Abplattung, wenn die Erddichte nach innen wachse, größer sein müsse als im Falle einer homogenen Erde. *A. C. Clairaut* hat auf den Fehler *Newtons* aufmerksam gemacht (De la figure de la terre etc. Paris 1743, 2. Teil, §§ 35 u. 50).

wenn  $g$  die Schwerkraft am Ende des Halbmessers  $r$  bedeutet. Aus dieser Bedingung, die theoretisch ungenügend ist, leitet er ein wenigstens bis auf Größen zweiter Ordnung richtiges Resultat ab, nämlich  $g = g_0(1 + \varepsilon \cdot \sin^2 \varphi)$ , eine Näherungsformel, durch welche die Schwerkraft unter der Annahme eines homogenen Ellipsoides ausgedrückt ist. *Ch. Huygens*<sup>267)</sup> fand unter der Voraussetzung, daß die Anziehungskraft nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet sei, die Abplattung zu  $\frac{1}{578}$ . Er benutzt bei seinen Überlegungen zwei Kanäle, von denen der eine äquatorial, der andere beliebig gelegen ist, und nimmt an, daß die Anziehungskraft konstant sei, bemerkt aber dann, daß man zu demselben Gesetze gelange, wenn man annähme, sie ändere sich dem *Newtonschen* Gesetze entsprechend.

*A. C. Clairaut* hat gezeigt, daß die Rechnung von *Huygens* darauf hinauslaufe, die Erdmasse im Mittelpunkt sich kondensiert zu denken.

*Newton* hat *a priori* das Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur angenommen, *J. Stirling*<sup>268)</sup> dagegen ging lediglich von einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse aus. Er stellte als Gleichgewichtsbedingung die Forderung auf, daß die Resultante der Anziehungskraft und der Zentrifugalkraft in Punkten der freien Oberfläche normal zu ihr stehen müsse<sup>269)</sup>, und bewies so, daß in erster Annäherung das abgeplattete Rotationsellipsoid in der Tat Gleichgewichtsfigur sein kann<sup>270)</sup>. Ferner bestimmte er das Verhältnis zwischen der Abplattung und der Winkelgeschwindigkeit.

*C. Mac Laurin*<sup>271)</sup> konnte auf Grund seiner Entdeckungen über die Anziehung von Ellipsoiden die genaue Beziehung zwischen der Exzentrizität und der Rotationsgeschwindigkeit für eine homogene rotierende Flüssigkeitsmasse feststellen. *T. Simpson*<sup>272)</sup> zeigte dann, daß für jede gegebene Winkelgeschwindigkeit nicht nur ein, sondern zwei Rotationsellipsoide den Gleichgewichtsbedingungen genügen<sup>273)</sup>.

267) *Traité de la lumière avec un discours sur la cause de la pesanteur*, Leyden 1690.

268) *On the figure of the earth and the variation of gravity on the surface*, Lond. Phil. Trans. 39 (1735), p. 98.

269) *Huygens* hatte eben dieses Prinzip aufgestellt, zog es aber dann vor, die Methode der Kanäle zu benutzen.

270) *Clairaut* bewies dasselbe unabhängig von *Stirling*, Lond. Phil. Trans. 40 (1737), p. 19.

271) *A treatise on fluxions etc.*, London 1742.

272) *A mathematical dissertation on the figure of the earth*, London 1743.

273) Dasselbe wurde von *J. L. d'Alembert* bewiesen (*Opusc. math.* 46), der in allgemeinerer Weise zeigte, daß eins der beiden Ellipsoide instabil ist. *P. S. Laplace* (*Méc. céleste*, liv. 3, chap. 3) bewies, daß in Wirklichkeit nicht mehr als

*Clairaut*<sup>274)</sup> studierte außer dem Fall eines homogenen Planeten auch den eines solchen, der aus festen, homogenen, von Kugelschalen wenig abweichenden Schichten von verschiedener Dichte zusammengesetzt und von einer homogenen Flüssigkeit umgeben ist. Ferner betrachtete er einen flüssigen Planeten, der von homogenen, annähernd sphärischen Schichten von verschiedener Dichte gebildet wird. Für beide Fälle zeigte er, daß das Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein kann und gab die Differentialgleichung an, welche die Änderung der Elliptizität der verschiedenen Schichten bestimmt, wenn das Gesetz der Änderung der Dichte bekannt ist. In der Abhandlung „An inquiry concerning the figure of such planets etc.“ stellte er zum ersten Male das berühmte *Clairautsche* Theorem auf (vgl. 4, § 5 dieser Abhandlung)<sup>275)</sup>.

*A. M. Legendre*<sup>276)</sup> zeigte durch Benutzung der von ihm erfundenen Koeffizienten  $P_n$  (Kugelfunktionen), daß die *einzigste* Gleichgewichtsfigur für eine homogene, um eine Achse rotierende Flüssigkeitsmasse das Rotationsellipsoid ist, wenn man annimmt, daß die Oberfläche wenig von einer Kugel verschieden ist. Aber der Beweis von *Legendre* setzt *a priori* voraus, daß die Oberfläche eine Rotationsfläche ist; diese willkürliche Beschränkung wurde von *P. S. Laplace*<sup>277)</sup> aufgehoben. Es ist indes zu

zwei Rotationsellipsoide als Gleichgewichtsfiguren existieren können und daß diese Ellipsoide reell sind, falls die Größe  $v = \frac{\omega^2}{2k\pi\rho} < 0,2246$  ( $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit,  $\rho$  = Dichte,  $k$  = Attraktionskonstante). Schließlich behauptete *K. G. J. Jacobi* (Ann. Phys. Chem. 33 (1834), p. 229), daß auch ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen Gleichgewichtsfigur sein kann und daß die dritte Achse und die Winkelgeschw. bestimmt sind, wenn man zwei Achsen willkürlich annimmt. *J. Liouville* (J. écol. polyt. 23 (1834), p. 289) gab den Beweis dafür und *C. O. Meyer* (J. f. Math. 24 (1842), p. 44) zeigte, daß für jeden gegebenen Wert der Winkelgeschwindigkeit außer den beiden bekannten Rotationsellipsoiden als Gleichgewichtsfigur ein einziges dreiaxsiges Ellipsoid existiert, wenn das Verhältnis  $v$  kleiner als 0,1871 ist. Im Falle der Erde ist  $v = 0,0023$  und die drei Achsen des *Jacobischen* Ellipsoides stehen im Verhältnis 1:1,02:19,57, wobei die kleinste Achse die Rotationsachse ist. Vgl. auch *Liouville*, J. de math. 16 (1851), p. 241.

274) *Théorie de la figure de la terre etc.*, Paris 1743.

275) London Phil. Trans. 40 (1738), p. 277. In Wirklichkeit gibt der Satz von *Clairaut* eine Beziehung zwischen dem relativen Anwachsen der Schwere vom Äquator zum Pol, der wahren Abplattung und derjenigen Abplattung, welche der Hypothese einer homogenen Erde entsprechen würde. Setzt man für die letztere  $\frac{5}{4}$  des Verhältnisses zwischen Schwerkraft und Zentrifugalkraft, so hat man den Satz von *Clairaut* in der bekannten Form.

276) Paris Mém. Acad. 1784 (1787), p. 370. Nach *Todhunter* geht diese Abhandlung der von *Laplace* von 1782 voraus.

277) Paris Mém. Acad. 1782 (1785), p. 113; vgl. auch *Méc. cél.*, t. 2, livr. 3,

bemerken, daß die Rechnung von *Legendre* sich nicht wie die von *Laplace* auf Glieder beschränkt, welche die erste Potenz der Abplattung enthalten. *Legendre*<sup>278)</sup> dehnte dann den Beweis auf den Fall eines festen Planeten aus, der aus homogenen, *ähnlichen* Schichten zusammengesetzt ist und auf den eines flüssigen, aus ellipsoidischen Schichten aufgebauten Planeten. *Laplace* bewies in der *Méc. cé.*<sup>279)</sup>, daß das Rotationsellipsoid in zwei Fällen Gleichgewichtsfigur ist:

1. für einen homogenen,
2. für einen flüssigen, nicht homogenen Planeten, wenn die Dichte von innen nach außen abnimmt und die Flächen gleicher Dichte wenig von Kugeln sich unterscheiden<sup>280)</sup>.

**49. Die wichtigsten geodätischen Messungen bis 1860.** Nach dieser Abschweifung wenden wir uns jetzt dazu, die hauptsächlichsten Gradmessungen aufzuzählen.

Die Resultate der französischen Messungen, die von *J. Cassini* von 1716 bis 1733 veröffentlicht wurden, und die theoretischen Untersuchungen von *Newton* teilten die wissenschaftliche Welt in zwei Lager, von denen das eine für ein verlängertes, das andere für ein abgeplattetes Ellipsoid eintrat<sup>281)</sup>. Die Frage wurde auf Veranlassung der französischen Akademie durch eine geodätische Doppelexpedition nach Peru und Lappland gelöst. *P. L. M. Maupertuis*<sup>282)</sup>, *A. C. Clairaut* und andere maßen in Lappland (1736—37) den Meridianbogen zwischen Kittis und Torneå (Ampl. ca. 57,5'), während *P. Bouguer*, *C. M. de la Condamine* und *L. Godin*<sup>283)</sup> in der Gegend der heutigen Republik Ecuador den Bogen zwischen Cotchesqui und Tarqui (Ampl. 3° 7') maßen (1735—41). Wertvolle Fortschritte bei diesen Messungen waren:

chap. 4. Zu denselben Resultaten im Falle einer rotierenden Flüssigkeitsmasse gelangten auch *J. L. d'Alembert* und *J. Ivory*, aber auf unbefriedigendem Wege (vgl. *Todhunter*, History §§ 75, 1422, 1430).

278) Paris Mém. Acad. 1789 (1795), p. 372.

279) Vol. 2, livre 3, chap. 4.

280) Für den ersten Fall gab *Laplace* außer dem Beweise mit Hilfe der Kugelfunktionen noch einen anderen, wenig befriedigenden, welcher dann von *J. Liouville* und *S. D. Poisson* so umgeformt wurde, daß er einwandfrei war (*J. de math.* 2 (1837), p. 286).

281) Über die Geschichte dieses Streites vgl. *Todhunter*, History 1, cap. 3, 4, 7.

282) *P. L. M. Maupertuis*, La figure de la terre déterminée par les observations au cercle polaire, Amsterdam 1738.

283) *P. Bouguer*, La figure de la terre dét. par les observ. aux environs de l'équateur, Paris 1749; *C. M. de La Condamine*, Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral, Paris 1751.

der Gebrauch von Mikrometern für die Ablesung der Kreisteilungen, eine genauere Kenntnis der Sternpositionen und eine größere Genauigkeit bei den Basismessungen. Die beiden Expeditionen stellten die Abplattung der Erde außer Zweifel, obgleich der aus ihren Messungen abgeleitete Abplattungswert<sup>284</sup>) =  $\frac{1}{215}$  ziemlich stark von dem wirklichen abweicht.

Wir erwähnen dann in Italien ausgeführte Messungen, wo *R. G. Boscovich* und *C. A. Lemaire* einen Bogen zwischen Rom und Rimini<sup>285</sup>) (1751—53), *G. B. Beccaria*<sup>286</sup>) einen solchen zwischen Mondovi und Andrate (in der Nähe von Ivrea) (1762—64), mailändische Astronomen in der Lombardei maßen (1788). Später wurden die Triangulationen von Piemont und der Lombardei zugleich mit den französischen (1821—23) und denen des Kirchenstaates in Angriff genommen und im Osten bis nach Dalmatien und im Süden bis nach Genua ausgedehnt<sup>287</sup>).

*Lacaille*<sup>288</sup>) maß 1750 einen Meridianbogen von ca. 1° 13' Ampl. am Kap der guten Hoffnung (die Messung wurde erweitert und revidiert von *Maclear* 1836—48). — *Ch. Mason* und *J. Dixon*<sup>289</sup>) maßen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika direkt (ohne Triangulierung) im Jahre 1764 einen Bogen von 1° 29' längs der Grenze zwischen Maryland und Delaware. Eine systematische Aufnahme der Atlantischen Küste in den Vereinigten Staaten wurde 1816 von *F. R. Hassler* begonnen.

Im Jahre 1790 schlug *Talleyrand* der gesetzgebenden Versammlung vor, daß ein Maßstabprototyp<sup>290</sup>) studiert würde, welches aus der

284) *La Condamine*, Zitat der vorigen Fußnote, p. 260.

285) *C. A. Lemaire* und *R. G. Boscovich*, *De litterariae expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus, Romae 1755.*

286) *Beccaria*, *Gradus Taurinensis, Aug. Taurinorum 1774.*

287) *J. Reggio*, *De mensione basis habita anno 1788 etc., Effem. astr. di Milano 1794*; *F. Carlini*, *G. A. A. Plana* und *Campana*, *Opérations géodésiques et astr. pour la mesure d'un arc du parallèle moyen en Piemont et Savoye, Milan 1825.* Wegen anderer italienischer Gradmessungen vgl. man *v. Zach*, *Corr. astr.* 1 (1818), p. 17; 2 (1819), p. 240.

288) *N. L. de Lacaille*, *Journal historique du voyage fait au Cap de Bonne Espérance, Paris 1763*; vgl. auch *Paris Acad. Mém. pour 1751 (1755)*, p. 398; *T. Maclear*, *Verification and extension of Lacailles arc of the meridian at the Cap of G. H., London 1866.*

289) *Lond. Phil. Trans.* 58 (1768), p. 270.

290) Der Gedanke, als Einheit des Längenmaßes einen aliquoten Teil des Meridians zu benutzen und der, das Sekundenpendel als Prototyp zu nehmen, scheinen von *G. Mouton* (1660) ausgegangen zu sein (vgl. *Gore*, *Geodesy*, p. 47).

Länge des Sekundenpendels abzuleiten sei. Eine aus *J. C. Borda*, *J. L. Lagrange*, *P. S. Laplace*, *G. Monge* und *M. de Condorcet* bestehende Kommission beschäftigte sich mit dem Vorschlage und zog als Längeneinheit den 10 000 000<sup>sten</sup> Teil des Meridianquadranten vor<sup>291</sup>), dessen Länge aus der eines Meridiangrades unter 45° Breite abgeleitet werden sollte<sup>292</sup>). Sie beauftragte dann *J. B. J. Delambre* und *P. F. A. Méchain*, einen Bogen von ungefähr 9½°, von Dünkirchen bis Barcelona, zu messen. Umgeben von vielen Schwierigkeiten, die durch die französische Revolution verursacht wurden, führten die beiden Astronomen von 1792 bis 1798 die angegebene Messung aus<sup>293</sup>), indem sie die Triangulationen auf zwei Grundlinien aufbauten (Melun bei Paris und Perpignan). Sie benutzten für die Basismessungen den bimetalischen Apparat von *J. C. Borda* und für die Winkelmessungen den Repetitionstheodoliten von *E. Lenoir*<sup>294</sup>). Die Kommission, welche die Ergebnisse dieser Messung mit denen der peruanischen Expedition kombinierte, fand für die Abplattung den Wert  $\frac{1}{334}$  und setzte die Länge des Meters zu 443,296 Pariser Linien fest<sup>295</sup>). Im Jahre 1803 wurde *Méchain* beauftragt, den französischen Bogen bis zu den Balearen zu verlängern. Diese Messungen wurden dann von 1807—08 von *J. B. Biot* und *D. F. J. Arago* berechnet, die auch zahlreiche Schwerkraftsmessungen in Spanien, Frankreich und Schottland ausführten<sup>296</sup>).

In England waren bereits seit Mitte des Jahrhunderts Vermessungsarbeiten unter General *Roy* im Gange, als 1783 *C. F. Cassini*

---

*J. Picard* konstruierte einige Jahre nachher (vgl. *Gore*, Geodesy, p. 53) ein Sekundenpendel, das er „rayon astronomique“ nannte und dessen 4. Teil er als Längeneinheit vorschlug. *J. Cassini* (1718) empfahl als Längeneinheit den 10 000 000<sup>sten</sup> Teil des Erdradius.

291) Paris Mém. Acad. pour 1788 (1798), p. 7; das Datum des Berichtes ist in Wirklichkeit der 19. März 1791.

292) Der Meridiangrad unter 45° Breite unterscheidet sich sehr wenig von dem 90. Teile des Quadranten; die Differenz kann auch mit einem angenäherten Abplattungswert genügend genau berechnet werden.

293) *Méchain et Delambre*, Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelona, Paris 1806—10. Es interessiert besonders in historischer Beziehung der „discours préliminaire“.

294) Der erste Theodolit mit vollständigem Kreise ist 1770 von *J. Ramsden*, und der erste Repetitionstheodolit 1785 von *J. C. Borda* gebaut worden (*Gore*, Geodesy, p. 139).

295) Zitat von Fußnote 294, p. 94.

296) *Biot et Arago*, Recueil d'observations géodésiques et astron. et phys. etc., Paris 1821; vgl. ferner: *L. Puissant*, Paris Mém. Acad. 14 (1833), p. 1 (veröffentlicht 1838).

*de Thury* die geodätische Verbindung der beiden Observatorien von Greenwich und Paris vorschlug, die von ihm 1787—90 ausgeführt wurde<sup>297</sup>). In den Jahren 1800—02 maß *W. Mudge* den Bogen von Dunnose ( $50^{\circ} 37'$  n. Br.) bis Clifton ( $53^{\circ} 27'$  n. Br.). Die gesamte Zwischentriangulation von Dunnose bis Saxavord (Shetlands-Inseln) wurde unter der Leitung von *H. James* in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wiederholt und die Resultate 1858 publiziert<sup>298</sup>). Besonders erwähnenswert sind die von den Engländern in Ostindien ausgeführten Arbeiten; *W. Lambton* von 1800—1823 und *G. Everest* von 1823—1842 beendigten den großen Meridianbogen von  $21^{\circ}$ , welcher vom Kap Comorin bis zum Himalaya reicht. Danach wurde unter der Leitung von *Waugt* und nach ihm von *J. T. Walker* eine große Triangulation längs vier Meridianen und drei Parallelkreisen ausgeführt. Die Hauptketten der Triangulation hatten eine Länge von ca. 17 300 km<sup>299</sup>).

In Preußen wurde die Triangulation im Jahre 1805 begonnen. Ein Parallelkreisbogen Seeberg-Dünkirchen wurde 1817 von *F. F. K. v. Müffling* berechnet; 1820 begann *C. F. Gauß* die Verbindung von Göttingen mit Altona (Ampl.  $2^{\circ} 1'$ ), wobei er das *Heliotrop* benutzte und die Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate ausglich<sup>300</sup>).

Etwas vor *Gauß* wurde eine Gradmessung von  $1^{\circ} 32'$  Ausdehnung von *H. C. Schumacher*<sup>301</sup>) im Süden Schleswig-Holsteins ausgeführt. Gegen die Mitte des Jahrhunderts wurde die dänische Triangulation von *C. G. Andrae* erweitert und berechnet<sup>302</sup>). Im Jahre 1820 zeigte *J. M. Schward*<sup>303</sup>) auf praktischem Wege durch eine kleine Triangulation in der Pfalz bei Speier, wie man in zweckmäßiger Weise kleine Grundlinien benutzen kann.

Im Jahre 1831 wurden von *Bessel* und *Baeyer* die klassischen Arbeiten in Ostpreußen begonnen<sup>304</sup>). Bei ihnen wurde die Methode der Richtungsmessung von *F. G. W. Struve* und der bekannte Basisapparat von *Bessel* benutzt.

297) *W. Roy*, Lond. Phil. Trans. 80 (1790), p. 111.

298) *H. James* and *A. R. Clarke*, Ordnance trig. survey etc., London 1858.

299) *J. T. Walker*, Account of the operations of the great trigon. survey of India, Dehra-Dun 1870—83, 1—9. Eine gute Übersicht der Resultate dieser Arbeiten findet man in *Walker*, Lond. Phil. Trans. 186 (1895), p. 745.

300) *Gauß*, Werke 9, p. 5.

301) *v. Zachs* Corresp. astr. 1 (1818), p. 266.

302) *C. G. Andrae*, Den Danske Gradmaaling, Kopenhagen 1867—78.

303) *J. M. Schward*, Die kleine Speierer Basis usw., Speier 1822.

304) *F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer*, Gradmessung in Ostpreußen und ihre Verbindung mit preußischen und russischen Dreiecksketten, Berlin 1838 (= *Bessel*, Abh. 3).

Auf der skandinavischen Halbinsel wiederholte und erweiterte *J. Svanberg*<sup>305)</sup> im Jahre 1801 die Triangulation von *P. L. M. de Maupertuis*. In Rußland begannen systematische Vermessungsarbeiten im Jahre 1726 unter der Leitung von *J. N. Delisle*, der von *Peter dem Großen* berufen war. Der große russisch-skandinavische Bogen<sup>306)</sup> von der Donaumündung bis zum Eismeer (Hammerfest) von ca.  $25^{\circ} 20'$  Ampl. wurde von 1816—50 gemessen; zum größten Teile unter der Leitung von *F. G. W. Struve* und *C. Tenner*, auf der norwegischen Seite unter *Hansteen* und *Selander*. Die Triangulation besteht aus 259 Dreiecken und stützt sich auf zehn Grundlinien. Im Jahre 1860 wurde in Rußland die Messung des großen Parallelkreisbogens unter  $52^{\circ}$  Breite begonnen. Ein Parallelkreisbogen in der Breite von  $45^{\circ}$  wurde 1811 von den Franzosen begonnen und in der Folge mit den Arbeiten in Piemont und in der Lombardei verbunden, so daß ein durchgehender Bogen von der Mündung der Gironde bis nach Fiume entstand<sup>307)</sup>.

**50. Die hauptsächlichsten Berechnungen der Konstanten des Erdellipsoids.** *J. B. Listing*<sup>308)</sup> hat die numerischen Resultate der hauptsächlichsten Berechnungen der Konstanten des Erdellipsoids, die von 1800 bis auf seine Zeit ausgeführt waren, zusammengestellt. Er gibt die Resultate von *J. B. J. Delambre*<sup>309)</sup> (1810), *H. J. Walbeck* (1819; die Rechnung stützt sich auf die Methode der kleinsten Quadrate<sup>310)</sup>), *J. K. E. Schmidt* (1830), *G. B. Airy* (1830), *F. W. Bessel* (1841), *G. Everest*

305) Vgl. *Gore*, Geodesy, p. 168.

306) *F. G. W. Struve*, Arc du méridien de  $25^{\circ} 20'$  entre le Danube et la Mer glaciaire mesuré depuis 1816 jusqu'en 1850 etc., St. Pétersbourg 1857—60.

307) *Carlini*, *Plana* usw. siehe Fußnote 287. Vgl. ferner: *L. Puissant*, Nouvelle description géométrique de la France, Paris 1832.

308) Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde, Göttingen 1873.

309) Base du système métrique 3, p. 135.

310) Man kann nicht sagen, daß die Rechnung von *Walbeck* den ersten Versuch gebildet hätte, die Gradmessungen rationell zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids zu kombinieren. *R. G. Boscovich* hat schon Ende 1760 (*De recentissimis graduum dimensionibus etc. in Philosophia recentior, Romae 1760*) vorgeschlagen, die genannten Konstanten unter folgenden Bedingungen zu berechnen: 1) die Summe der *positiven* Fehler in den Längen der gemessenen Grade soll gleich der Summe der *negativen* Fehler sein und 2) jede der beiden Summen soll möglichst klein sein. *P. S. Laplace* (*Méc. cél.* 3, § 40 u. 41) wendete dasselbe Prinzip zur Berechnung der Meridianellipse an. Was die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids betrifft, so scheint der erste Versuch von *A. M. Legendre* ausgegangen zu sein, vgl. *Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, Paris 1806, p. 76.

(1847), *H. James* und *A. R. Clarke* (1858). *Bessel* benutzte den peruanischen, den ersten und zweiten Meridianbogen in Ostindien, den französischen, englischen, hannoverschen, dänischen, preußischen, russischen und schwedischen Bogen (Summe der Amplituden der Meridianbogen  $50^{\circ} 34'$ , Zahl der beobachteten Breiten 38). *James* und *Clarke* benutzten neun Meridianbogen: den englischen mit  $10^{\circ} 56'$  Ausdehnung (mit Einschluß der Verbindung mit Frankreich), den französisch-spanischen (von Formentera bis Dünkirchen), den russisch-skandinavischen, zwei indische Bogen, den peruanischen, den preußischen, hannoverschen und dänischen (Summe der Amplituden  $78^{\circ} 36'$ , Anzahl der astronomischen Stationen 67). Bei einer ersten Rechnung benutzte *Clarke* einen *nicht elliptischen* Meridian<sup>311</sup>), dessen Krümmungsradius als Funktion der Breite  $\varphi$  er durch die Formel<sup>312</sup>) darstellte:

$$\varphi = A + 2B \cos 2\varphi + 2C \cos 4\varphi.$$

Bei einer zweiten Rechnung setzte er den Meridian elliptisch voraus<sup>313</sup>).

*T. F. v. Schubert*<sup>314</sup>) hat 1859 zum ersten Male die Rechnung unter Voraussetzung eines dreiachsigen Ellipsoids ausgeführt; die Abplattungen der beiden Hauptmeridiane ergaben sich zu 1:292,109 und 1:302,004. *Clarke* hat 1866 die Rechnung ebenfalls für ein dreiachsiges Ellipsoid durchgeführt. *Ph. Fischer* leitete 1868 die Abplattung nur aus Schwerekräftsmessungen ab und die große Achse aus dem englisch-französischen Bogen. Von neueren Rechnungen auf Grund der Hypothese des Rotationsellipsoides sind die von *A. R. Clarke*<sup>315</sup>) (1880), *A. Borsdorff*<sup>316</sup>) (1890) und *A. Shdanow*<sup>317</sup>) (1894) zu nennen.

---

311) Schon *N. Bowditch* hat 1832 in einer Note zur Übersetzung der *Méc. céleste* von *Laplace* (Boston 1832) die Berechnung eines nicht elliptischen Meridians versucht. *M. G. v. Paucker* (vgl. *Helmert*, H. G. 1, p. 17, 18) führte eine analoge Rechnung durch, indem er für den Krümmungsradius die Formel

$$\rho = a(1 + \alpha \sin^2 \varphi + \beta \sin^4 \varphi + \gamma \sin^6 \varphi + \delta \sin^8 \varphi)$$

annahm.

312) *Ordnance trigon. survey*, p. 765.

313) *Ibid.*, p. 771.

314) *Petersb. Mém. Acad.* 1 (1859), p. 32. Wegen theoretischer Rechnungen bezüglich des dreiachsigen Ellipsoids vgl. auch *Clarke*, *Geodesy*, p. 305; *A. Sonderrhof*, *Zeitschr. Math. Phys.* 17 (1872), p. 89, 177; *H. Levret*, *Paris C. R.* 76 (1873), p. 410, 700.

315) *Geodesy*, p. 319.

316) *Jahrb. d. Astron. u. Geophys.* 1 (1890).

317) *Ibid.* 5 (1894).

*E. Fergola*<sup>318)</sup> hat 1874—75 ein Rotationsellipsoid unter der Voraussetzung bestimmt, daß die Achse der täglichen Umdrehung durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehe, aber nicht mit der Figurenachse zusammenfalle. Indessen verbessert die Einführung einer solchen Hypothese die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung nicht wesentlich, und die mittleren Fehler in der Bestimmung der beiden Koordinaten, welche die Lage des Rotationspols bezüglich des Pols der Figurenachse festlegen, sind so beträchtlich, daß man eine wirkliche Verschiedenheit der beiden Achsen nicht als erwiesen ansehen kann<sup>319)</sup>.

Am meisten benutzt werden das *Besselsche* und das *Clarkesche* Ellipsoid von 1880, deren Konstanten zum Vergleich hier nebeneinander gestellt seien:

	Besselsches Ellipsoid	Clarkesches Ellipsoid (1880)
Halbe große Achse	6 377 397 m	6 378 180 m
Reziproke Abplattung	299,153	293,465
Meridianquadrant	10 000 856 m	10 001 871 m

**51. Bestimmung der Abplattung aus Pendelmessungen.** *Jér. de Lalande*<sup>320)</sup> leitete 1785 unter Benutzung des *Clairautschen* Theorems die Abplattung aus den bis dahin bekannten Schwerkraftsmessungen zu  $\frac{1}{320}$  ab. Aus einer Tabelle von *W. Harkness*<sup>321)</sup> leiten wir die folgenden Ausdrücke für die Länge des Sekundenpendels (in Metern) ab, die sich aus den hauptsächlichsten bis dahin bekannten Rechnungen ergeben. Hinzugefügt sind die Werte der reziproken Abplattung  $\frac{1}{a}$ , welche aus der Anwendung des *Clairautschen* Theorems folgen.

	$L = 0,990631 + 0,005637 \sin \varphi$	$\frac{1}{a} = 336$
<i>Laplace</i> (1799)		
<i>Mathieu</i> (1816)	0743	5466
<i>Biot</i> (1821)	0880	5340
<i>Sabine</i> (1825)	0977	5142
<i>Saige</i> y (1827)	1026	5072
<i>Pontécoulant</i> (1829)	0555	5679
<i>Airy</i> (1830)	1017	5087
<i>Poisson</i> (1833)	0941	5142
<i>Unferdinger</i> (1869)	0970	5185
<i>Helmert</i> (1884)	0918	5262

318) Napoli Acc. sci. fis. mat. 6 (1875), n° 10; 7 (1878), n° 7.

319) Ibid., p. 25 u. 26.

320) Paris Mém. Acad. pour 1785 (1788), p. 1.

321) The solar parallax and its related constants, Washington 1891, p. 8.

Auf Grund von ungefähr 1400 Schwerkräftsmessungen gibt *Helmert*<sup>322)</sup> in einer seiner neuesten Publikationen für die normale Schwerkräft die folgende Formel (in cm) an:

$$\gamma = 978,046 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^4 \varphi),$$

woraus mit Hilfe der in Nr. 4 erwähnten Formeln, welche die Kugelfunktionen vierter Ordnung berücksichtigen,  $\alpha = 1 : 298,3$  folgt.

*Iwanoff*<sup>323)</sup> leitete aus den Resultaten von 300 Schwerkräftsmessungen für die Länge des Sekundenpendels folgende Formel (in cm) ab:

$$l = 99,0997 + 0,5240 \sin^2 \varphi - 0,0016 (\sin \varphi' - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi'),$$

wo  $\varphi'$  die geozentrische Breite bedeutet. Der entsprechende Wert von  $\alpha$  ist  $1 : 296,6$ .<sup>324)</sup>

**52. Benutzung einiger astronomischer Daten zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids.** a) *Ableitung der Abplattung aus der Mondparallaxe.* Die Differenz zwischen den geozentrischen Positionen des Mondes, die sich aus der Mondtheorie ergeben, und den an einem Erdorte beobachteten Positionen, oder mit anderen Worten die Mondparallaxe in Rektaszension und Deklination, sind einfache Funktionen des Verhältnisses der Mondentfernung zum äquatorialen Radius  $a$  und der Exzentrizität  $e$ . Solche Parallaxenbestimmungen können deshalb zur Kenntnis von  $e$  beitragen. Wir nennen in dieser Beziehung die Namen: *E. Manfredi*<sup>325)</sup>, *P. Bouguer*<sup>326)</sup>, *Jér. de Lalande*<sup>327)</sup>, *J. A. Euler*<sup>328)</sup>, *A. Cagnoli*<sup>329)</sup>. *Laplace* handelt davon auch in dem 3. Buche der *Méc. cél.* Indessen entspricht die Genauigkeit der erwähnten Methode nicht den Anforderungen der modernen Geodäsie.

b) *Ableitung der äquatorialen Halbachse  $a$  aus Messungen der Mondparallaxe und der Schwerkräft.* Zwischen der mittleren Schwere  $g$ , dem mittleren Erdradius  $R$ , der mittleren äquatorialen Mondparallaxe  $p$  und der mittleren Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Mond-

322) Berlin Ber. 1901, p. 328. Der Koeffizient  $-0,000007$  von  $\sin^4 \varphi$  ist nicht aus den Schwerkräftsbeobachtungen abgeleitet, sondern von *E. Wiechert* und *G. H. Darwin* auf Grund spezieller Annahmen über die Dichte des Erdinneren berechnet.

323) Bulletin Acad. St. Pétersbourg 8 (1898), p. 219.

324) Zitat in Fußn. 323, p. 8.

325) Mém. Acad. Paris pour 1734 (1736), p. 1.

326) Mém. Acad. Paris pour 1751 (1755), p. 64.

327) Mém. Acad. Paris pour 1752 (1756), p. 78.

328) München Abh. 5 (1763), p. 197.

329) Verona Mem. di mat. Soc. Ital. 6 (1792), p. 227.

bewegung besteht näherungsweise folgende Beziehung<sup>330)</sup> (aus der elementaren Theorie der Planetenbewegung abgeleitet):

$$(A) \quad R = g(1 + \mu) \frac{\sin^2 p}{\omega^2},$$

wo  $\mu$  das Verhältnis zwischen Mond- und Erdmasse ist. *J. H. Lambert*<sup>331)</sup> kam auf den Gedanken, die Mondparallaxe vermittels dieser Formel abzuleiten, indem er  $R$  und  $g$  als bekannt voraussetzte, und *Laplace* führte die Rechnung aus (*Méc. céleste* 1). *Helmert* schlug vor, indem er an Stelle von (A) eine genauere Formel setzte, bei der die Exzentrizität der Erd- und Mondbahn berücksichtigt ist, umgekehrt die äquatoriale Halbachse  $a$  aus beobachteten Werten von  $g$  und  $p$  abzuleiten. Er fand<sup>332)</sup>

$a = 6\,378\,830$ , die Abplattung zu  $1 : 299,15$  vorausgesetzt.

$a = 6\,381\,460$ , „ „ „  $1 : 289,76$  „ „

c) Die Ungleichheiten der Mondbewegung in Breite und Länge sind a priori auszurechnen, wenn der Ausdruck des Erdpotentials für Punkte außerhalb der Erde bekannt ist. Wenn diese Ungleichheiten beobachtet sind, so liefern sie deshalb ihrerseits ebenso wie die Schwerekräftsmessungen ein Mittel zur Bestimmung der Erdabplattung. Überdies ist diese Methode unabhängig<sup>333)</sup> von jeder Hypothese über die Änderung der Dichte im Innern der Erde. — *Helmert*<sup>334)</sup> leitete aus einer Diskussion der *Hansenschen* Arbeiten die Abplattung zu  $1 : 297,8 \pm 2,2$  ab.

d) Die Erscheinungen der Präzession und Nutation sind, wie bereits erwähnt, geeignet, numerische Daten für die Berechnung der Abplattung zu liefern. Aber die theoretische Auswertung dieser Erscheinung erfordert außer der Kenntnis des Erdpotentials für äußere Punkte auch die des Trägheitsradius der Erdmasse in bezug auf die Rotationsachse. Die Benutzung der Präzession und Nutation zur Berechnung der Abplattung kann deshalb nicht gänzlich auf eine besondere Hypothese über die innere Erddichte verzichten. Man kann indessen beweisen, daß die beobachteten Werte der Präzession und

330) *Helmert*, Höhere Geodäsie 2, p. 461.

331) Vgl. *Seidel*, Astron. Nachr. 50 (1859), p. 261.

332) *Helmert*, Höhere Geod. 2, p. 465.

333) Diese Unabhängigkeit wurde von *Stokes* hervorgehoben (*On attractions and on Clairaut's theorem*, Cambridge 1849). Die Zitate der hauptsächlichsten Arbeiten, die sich auf die Berechnung der Mondungleichheiten beziehen, findet man in dem in Fußn. 321 zit. Werke, p. 101.

334) Höhere Geod. 2, p. 473.

Nutation notwendig zu einer kleineren Abplattung als  $\frac{1}{297,8}$  führen, wenn man annimmt, daß die Erddichte beständig von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte hin wächst<sup>335</sup>).

e) *W. Harkness*<sup>336</sup>) bemerkt, indem er eine genaue Diskussion der numerischen Werte verschiedener terrestrischer und astronomischer Konstanten vornahm, daß zwischen zwölf von ihnen sieben Bedingungs-gleichungen aufgestellt werden können, die man benutzen kann, um in geeigneter Weise die beobachteten Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate zu verbessern. Unter diesen Konstanten befindet sich die Abplattung, für welche aus der Rechnung von *Harkness* der Wert von  $1 : (300 \pm 3)$  folgt.

**53. Moderne geodätische Arbeiten. Lotabweichungen.** Im Jahre 1861 publizierte *J. J. Baeyer* eine Abhandlung, welche den Zweck verfolgte, für den Gedanken einer *geodätischen Vereinigung* der Staaten Mitteleuropas Stimmung zu machen. Er setzte den augenscheinlichen Nutzen auseinander, den das Studium der Krümmung des zentralen Meridians von Europa haben würde, und schlug daher vor, durch Meridian- und Parallelkreisbogen eine Zone von  $12^\circ$  Länge mit dem Mittelmeridian Berlin und den Parallelkreisen von Christiania und Palermo als Grenzen geodätisch zu studieren. *Baeyer* brachte seine Gedanken schließlich in einem bestimmten Vorschlag<sup>337</sup>) zum Ausdruck, den er dem preußischen Kriegsministerium einreichte und der von der preußischen Regierung durch Kabinetsorder vom 20. Januar 1861 angenommen wurde. 15 Staaten traten der Vereinigung bei, die „*Mitteleuropäische Gradmessung*“ genannt wurde; der erste Generalbericht wurde 1862 veröffentlicht, und 1864 fand die erste allgemeine Konferenz statt. 1867 wurde der Name der Vereinigung in „*Europäische Gradmessung*“ und schließlich 1886 in „*Internationale Erdmessung*“ umgewandelt. Eine Erneuerung dieser Vereinigung mit teilweiser Neuordnung fand 1895 statt; gegenwärtig sind folgende Staaten an

335) Vgl. *Tisserand*, *Mécanique céleste* 2, p. 224. Solche Untersuchungen verdankt man *H. Poincaré*.

336) Vgl. Zitat der Fußnote 321, p. 121—133. Die 12 der Rechnung von *Harkness* zugrunde gelegten Konstanten sind: die mittlere Mond- und Sonnenparallaxe, die Erdabplattung, das Verhältnis der Erdmasse zu der der Sonne, das Verhältnis der Mondmasse zu der der Erde, die Mondgeschwindigkeit, die Aberrationskonstante, die vom Licht gebrauchte Zeit, um die mittlere Entfernung Sonne—Erde zu durchlaufen (aus der Beobachtung der Jupitertrabanten abgeleitet), die Konstanten der Präzession und Nutation, die beiden Ungleichheiten der Mondbewegung.

337) Vgl.: Zur Entstehungsgeschichte der Europäischen Gradmessung (im Generalbericht der Mitteleurop. Gradmessung 1862).

ihr beteiligt: Argentinien, Belgien, Dänemark, Deutschland, Frankreich, Griechenland, Großbritannien, Italien, Japan, Mexiko, Niederlande, Norwegen, Österreich, Rumänien, Rußland, Schweden, Schweiz, Portugal, Spanien, Ungarn, Vereinigte Staaten von Nordamerika. Die Vereinigung verfolgt hauptsächlich folgende Ziele: darauf hinzuwirken, daß die geodätischen Arbeiten soweit als möglich nach übereinstimmenden Regeln ausgeführt werden; die Resultate der einzelnen Arbeiten in einer Hand zu sammeln, damit sie einer zusammenfassenden Diskussion unterworfen werden können; spezielle Studien, welche die Geodäsie interessieren, zu begünstigen, und durch Vermittlung der bestehenden Kommissionen sowie durch Anweisung der Mittel diejenigen Untersuchungen von allgemeinerem Interesse zu fördern, welche die Mitarbeit verschiedener Staaten erfordern. Die wichtigste dieser internationalen Untersuchungen ist augenblicklich die über die Veränderlichkeit der Breite oder die Polhöschwankungen. Über diesen Gegenstand werden wir hier nicht sprechen, obgleich er von großer Bedeutung in der theoretischen Geodäsie ist, weil in der Geophysik davon die Rede sein wird.

Gegenwärtig ist Europa fast ganz mit Triangulationen überdeckt<sup>338</sup>), die zum Teil gänzlich erneuert worden sind. Außer dem schon erwähnten großen russisch-skandinavischen Bogen und den in Österreich, Dalmatien und Griechenland ausgeführten Arbeiten haben wir: den mitteleuropäischen Bogen, der von den Lofoten bis nach Malta in einer Ausdehnung von ca. 33° reicht; den englisch-französisch-spanisch-algerischen Bogen<sup>339</sup>) von den Shetlands-Inseln bis nach Laghouat in Algier (ca. 27° Ampl.); den Parallelkreisbogen in 52° Breite vom atlantischen Ozean bis Orsk (Sibirien); den Parallelkreisbogen in 47½° Breite vom Atlantischen Ozean bis Astrachan. Das zusammenhängende Netz, das sich durch Italien, Frankreich, Spanien, Algier und Sizilien hinzieht, umgibt fast den ganzen westlichen Teil des mittelländischen Meeres. Die Russen und Schweden haben auf Spitzbergen zwischen 76,7° und 81,7° Breite geodätische und astronomische Arbeiten ausgeführt<sup>340</sup>).

338) Vgl. die Karte von Europa, welche dem Rapport sur les triangulations in Intern. Erdm. 1903, II. T., p. 292 beigegeben ist.

339) Die geodätisch-astronomische Verbindung von Spanien mit Algier und die von Malta mit Sizilien hat für die europäischen Arbeiten eine besondere Bedeutung wegen der ungewöhnlichen Länge der Sichten. Vgl. *J. Perrier et C. Ibañez*, Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, Paris 1880 und R. Comm. geod. italiana, Collegamento delle isole Maltesi colla Sicilia, Firenze 1902.

340) Int. Erdm. 1900, I. T., p. 159; 1903, II. T., p. 127.

In den Vereinigten Staaten von Nordamerika haben wir hauptsächlich die Triangulation längs des 39. Parallels vom atlantischen bis zum pazifischen Ozean<sup>341</sup>) und den schiefen Bogen längs der atlantischen Küste von der Grenze Kanadas bis New Orleans<sup>342</sup>). Man mißt dort auch einen zentralen Meridianbogen<sup>343</sup>) (längs 98° östl. L. von Greenwich), dessen Verlängerung durch Mexiko<sup>344</sup>) bis zum pazifischen Ozean ebenfalls in Angriff genommen ist. — In Australien ist seit längeren Jahren die Triangulation von Victoria vollendet und die von New South Wales so gut wie vollendet<sup>345</sup>); in Japan ist die Triangulation der Hauptinsel vollständig<sup>346</sup>). Wichtige geodätische Arbeiten sind an der Westküste von Sumatra ausgeführt<sup>347</sup>). — In Südafrika ist außer den verschiedenen Dreiecksnetzen in der Kapkolonie und dem benachbarten Deutsch-Südwestafrika eine Triangulation längs des Meridians in 30° östl. L. im Gange, welche die Kapkolonie mit den bereits bestehenden Netzen in Natal verbinden und bis zum Tanganjika-See durchgehen soll<sup>348</sup>). Man hofft, in nicht zu ferner Zeit durch Rhodesien, der Küste des Tanganjika entlang, durch Uganda bis zum Nil hin eine Dreieckskette legen zu können, die dann vom Kap bis Kairo reichen würde. — Der sogenannte peruanische Bogen wird mit 6° Amplitude neu gemessen von der Nordgrenze Ecuadors am pazifischen Ozean bis zur Nordgrenze Perus<sup>349</sup>). Die große Indische Triangulation<sup>350</sup>) hat jetzt schon eine Ausdehnung von 22° in Breite und 25° in Länge, und soll durch einen Meridian- und einen Parallelbogen in Birma fortgesetzt werden.

Bezüglich der Schwerkraftsmessungen, von denen im Jahre 1903 etwa 1900, über ganz Europa und die Küsten eines großen Teils der übrigen Erdteile verteilt, vorhanden waren, verweisen wir auf die

341) *A. Schott*, The transcontinental triangulation and the American arc of the parallel, Washington 1900 (R. C. G. S., Special public. Nr. 4).

342) *A. Schott*, The eastern oblique arc of the U. S. and osculating spheroid, Washington 1902 (R. C. G. S., Special public. Nr. 7).

343) *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 185.

344) *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 141.

345) *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 242.

346) *Int. Erdm.* 1895, II. T., p. 287; 1900, I. T., p. 215.

347) *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 155.

348) Vgl. die Karte in *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 292.

349) *H. Poincaré*, *Ann. du Bur. d. longitudes* 1901 und *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 113.

350) *J. T. Walker*, *London Phil. Trans.* 186 (1895), p. 199; *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 219, 228.

Berichte von *Helmert* und *E. Borrass*<sup>351</sup>). Besondere Erwähnung verdienen die Schwerkraftsmessungen auf dem atlantischen Ozean<sup>352</sup>).

Die Schwerkraftsmessungen zusammen mit astronomisch-geodätischen Bestimmungen führen zu einem Abplattungswert, der nur wenig von dem *Besselschen* verschieden ist, so daß von diesem Gesichtspunkt aus das *Besselsche* dem *Clarkeschen* Ellipsoid vorzuziehen wäre. Die Frage nach dem best anschließenden Ellipsoid steht indessen, wie bereits früher (vgl. Nr. 43) hervorgehoben ist, nicht mehr im Mittelpunkt des geodätischen Interesses, weil man nicht alle Gradmessungen durch ein Ellipsoid befriedigend darzustellen vermag. Man strebt vielmehr heute danach, die Krümmungsverhältnisse der Niveauflächen in den von den Gradmessungen bedeckten Gebieten zu erforschen, was durch Berechnung der Lotabweichungen gegen ein in gewissen Grenzen willkürlich zu wählendes Referenzellipsoid geschieht.

Ein Verzeichnis der bis 1887 bekannten Lotabweichungen gibt *Helmert* in den Verhandlungen der Internationalen Erdmessung von 1887. Fortgesetzt ist dasselbe 1889, 1892 und 1895 von *Helmert* und 1898 und 1903 von *A. Börsch*. Wir machen in den folgenden Fußnoten einige Literaturangaben bezüglich der Untersuchungen über Lotabweichungen in den Ländern: Deutschland<sup>353</sup>), Österreich-Ungarn<sup>354</sup>), Frankreich<sup>355</sup>), Großbritannien<sup>356</sup>), Italien<sup>357</sup>), Schweiz<sup>358</sup>), Englisch-

351) Int. Erdm. 1900, II. T., p. 139; 1903, II. T., p. 133.

352) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 15 und *O. Hecker*, Bestimmung der Schwerkraft auf dem atlantischen Ozean, sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid, Veröffentl. d. preuß. Geod. Inst., Berlin 1903.

353) Int. Erdm. 1887, p. 16; 1898, p. 258; 1903, II. T., p. 400. Ferner die Veröffentlichungen d. preuß. Geod. Inst.: Lotabweichungen, Heft 1, 1886; Heft 2, 1902; Polhöhenbestimmungen aus dem Jahre 1886 usw., 1889; Das Märkisch-Thüringische Dreiecksnetz, 1889; Lotabweichungen in der Umgebung von Berlin, 1889; Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen usw., 1896; Bestimmung von Azimuten im Harzgebirge, 1898; Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft in der Nähe des Berliner Meridians, 1902. *E. Hammer*, Astronom. Nivellement durch Württemberg usw., Stuttgart 1902.

354) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 404; Die Ergebnisse der Triangulierung des milit.-geogr. Inst., Wien 1901/02; *J. Netuschill*, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien, 21 (1902), p. 44.

355) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 14; 1898, p. 263; 1903, II. T., p. 411; Mémorial du dépôt général de la guerre 12 (1902).

356) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 11.

357) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 26; 1898, p. 262; 1903, II. T., p. 409; *P. L. Cattolica*, Differenza di longitudine tra Livorno e Genova, Genova 1899; *G. Ciscato*, Astr. Nachr. 149 (1899), p. 385; *V. Reina*, Rend. Acc. Linc. (5) 9 (1900), p. 189; 10 (1901), p. 284, 346; 11 (1902), p. 431; *V. Reina*, Determ. astron. di

Indien<sup>359</sup>), Südafrika<sup>360</sup>), Vereinigte Staaten von Nordamerika<sup>361</sup>), Rußland<sup>362</sup>), Schweden<sup>363</sup>), Norwegen<sup>364</sup>), Dänemark<sup>365</sup>), Australien<sup>366</sup>), Java<sup>367</sup>) und den Sandwich-Inseln<sup>368</sup>).

latitud. e d'azimut lungo il meridiano di Roma, Firenze 1903; *A. Riccò*, Rend. Acc. Linc. (5) 7 (1898), p. 11; *A. Riccò*, *T. Zona*, *G. Saija*, Mem. Soc. Spettroscopisti 28 (1899), p. 12; *A. Venturi*, Rend. Acc. Linc. (5) 6 (1897), p. 327; *A. Venturi*, Azimut di Monte Alfano etc., Palermo 1892; *R. v. Sterneck*, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien. 11 (1892), p. 212.

358) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 25; 1895, II. T., p. 181; 1898, p. 260; 1903, II. T., p. 406; *J. Messerschmitt*, Das Schweizerische Dreiecksnetz 6 (1894), 8 (1898), 9 (1901), Zürich; *A. Beck*, Astr. Nachr. 159 (1902), p. 133; 163 (1903), p. 190.

359) Int. Erdm. 1892, p. 516; 1898, p. 273; 1903, p. 415; *J. T. Walker*, London Phil. Trans. 186 (1895), p. 770; *S. G. Burrard*, The attraction of the Himalaya M. upon the plumbline, Dehra-Dun 1901.

360) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 188; 1898, p. 270; *D. Gill*, Report of the geod. survey of South-Africa, 1, Capetown 1895, 2, Capetown 1901.

361) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 38; 1895, II. T., p. 185; 1903, I. T., p. 208; II. T., p. 424; *Ch. A. Schott*, R. C. G. S. 1869, p. 113 und Fußn. 341 u. 342).

362) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 35; 1893, p. 183; 1895, II. T., p. 184; 1898, p. 265; 1903, II. T., p. 412; *K. G. Schweizer*, Moscou Bull. Soc. Nat. 37 (1864), p. 96; *J. A. Iweronow*, Mém. Topogr. Abt. d. Generalstabs, Petersburg 51 (1894), p. 324; *Lebedeff*, ibid. 48 (1896), p. 1; *Pomerantzeff*, ibid. 54 (1897), p. 75; *Venukoff*, Paris C. R. 123 (1896), p. 40.

363) Int. Erdm. 1892, p. 620; 1898, p. 263; *P. G. Rosén*, Die astr.-geodät. Arbeiten der Topogr. Abt. des Schwed. Generalstabes, 2, Stockholm 1903.

364) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 183 u. 184.

365) Int. Erdm. 1887, p. 17, 27; 1903, II. T., p. 412; Den Danske Gradmaaling 3 (1878), 4 (1886), Kopenhagen.

366) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 419; *T. F. Furber*, The trigon. survey of New South Wales, Sydney 1898.

367) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 421; *J. A. C. Oudemans*, Die Triangulation von Java, Haag 1900.

368) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 186; *E. D. Preston*, R. C. G. S. 1888, app. 14; 1893, app. 12.

(Abgeschlossen im April 1906.)





Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Gino Loria:  
Vorlesungen über darstellende Geometrie

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript von Gino Loria

Fritz Schütte,

Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Düren.

Erster Teil: Die Darstellungsmethoden.

Mit 163 Figuren im Texte. [XI u. 219 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 6. 80.

Das vorliegende Werk, aus mehrjährigen Vorlesungen des Verf. hervorgegangen, setzt nur elementare Kenntnisse der projektiven und analytischen Geometrie voraus. Dieser erste Band, der die Darstellungsmethoden behandelt, beginnt mit einem kurzen Abriss der Geometrie des Zirkels und der Geometrie der Ebene und geht dann im 1. Buche zur Methode der Orthogonalprojektion über. Das 2. behandelt in gleicher Weise die Zentralprojektion, während das 3. der Methode der kotierten Ebenen gewidmet ist. Jede dieser Darstellungsmethoden — andere werden nur gestreift — wird in umfangreicher Weise zur Lösung der wichtigsten Aufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen herangezogen und hierbei gründlich auf alle Einzelheiten eingegangen, während weiter gehende Anwendungen vorerst unterbleiben. Die Grundaufgaben der Stereometrie, die man in der elementaren Geometrie nur in Gedanken löst, sind durch die darstellende Geometrie zeichnerisch behandelt, so daß hier dem Übelstande, daß man im Raume nicht zeichnen kann, soweit dies geht, abgeholfen wird. Das 4. Buch betrifft die Axonometrie, das 5., zum erstenmal in einem Schulbuche, einen theoretisch und praktisch wichtigen Zweig der „darstellenden“ Geometrie, der augenblicklich in rechter Blüte steht, die Photogrammetrie. Reichlicher Übungsstoff dient dem Leser zur Vertiefung und Befestigung der aus diesem Werke geschöpften Kenntnisse; viele Zeichnungen erleichtern das Verständnis in hohem Maße.

K. Zöppritz:

Leitfaden der Kartenentwurfslehre.

Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer.

In zweiter, erweiterter Auflage herausgegeben von Dr. Alois Bludau.

I. Teil: Die Projektionslehre. Mit 100 Fig. i. Text u. zahlr. Tabellen. [X u. 178 S.] gr. 8. 1899. geh. M. 4. 80, geb. M. 5. 80. II. Teil: [6 Bogen] ca. M. 2. 80. [In Vorber.]

Inhalt des I. Teiles: Einleitung. 1. Ortsbestimmung. 2. Kartographische Vorbegriffe. I. Allgemeines über Abbildungen. II. Projektionen auf die Ebene. 1. Azimutale (zenitale) Projektionen ( $n=1$ ). 2. Perspektivische Projektionen. 3. Die Konstruktion azimutaler Projektionen aus einer bereits gegebenen. 4. Konventionelle Projektionen auf die Ebene. — Projektionen auf abwickelbare Flächen. I. Projektionen auf den Kegelmantel. 5. Die geometrisch einfach definierten oder wahren Kegelprojektionen. 6. Modifizierte Kegelprojektionen. II. Projektionen auf den Zylindermantel. 7. Die geometrisch einfach definierten oder wahren Zylinderprojektionen ( $n=0$ ). 8. Konventionelle oder unechte Zylinderprojektionen. 9. Über die Auswahl der Projektion mit geringster Verzerrung. Anhang I. Einige Grundregeln für das Zeichnen mit Zirkel und Lineal. Anhang II. Tabellen.

„Jeder Kartograph, welcher eine Projektion zu entwerfen hat, wird nunmehr zum neuen Zöppritz greifen; hat er aber diesen durchstudiert, so kann er gar keine andre als die richtige Projektion wählen.“ (Peternanns Mitteilungen.)

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348770

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

# Einführung in die Geodäsie

von

**Dr. O. Eggert,**

Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig.

Mit 237 Figuren im Text. [X u. 437 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 10.—

Aus dem Vorwort: Den Anlaß zur Herausgabe des vorliegenden Buches gaben Vorlesungen, die der Verfasser im Jahre 1904 an der Universität Berlin hielt, und deren Veröffentlichung der Verlagsbuchhandlung wünschenswert erschien. Auf Grund seiner jetzigen Lehrtätigkeit hielt es der Verfasser jedoch für zweckmäßig, den Inhalt über den Rahmen der früheren Vorlesungen hinausgehen zu lassen und auch einen kurzen Abriß der Ausgleichsrechnung hinzuzufügen, um einzelne Messungsmethoden gründlicher behandeln zu können. Da der Umfang des Buches dennoch in engen Grenzen bleiben sollte, so wurde von den üblichen Methoden und Hilfsmitteln nur eine Auswahl zur Darstellung gebracht, die sich indessen auf fast alle Gebiete der niederen Geodäsie erstreckt. Dabei konnte der Besprechung der Instrumente mit wenigen Ausnahmen die hiesige geodätische Sammlung zugrunde gelegt werden. Für weitere Studien wurden den einzelnen Kapiteln Literaturnachweise beigelegt, in denen aber nur spezielle Lehrbücher genannt sind.

---

## Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente von

**F. R. Helmert,**

Direktor des Königlich Preussischen Geodätischen Instituts und Zentralbureaus der internationalen Erdmessung.

Zweite Auflage. [XVIII u. 578 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 16.—

Die Entwicklungen sind mit Absicht in den ersten Abschnitten etwas breit gehalten, ebenso ist die Kenntnis der Determinantentheorie nicht vorausgesetzt. Die weniger entwickelten Lösungen sind nicht übergangen, um den vereinzelt Anwendungen zu entsprechen, für welche ein Studium der eleganten und meist rationelleren Lösungen nicht am Platze ist. Von Wichtigkeit erschien es, die Untersuchung der plausibelsten Beobachtungsfehler mehr zu betonen. Die Unterscheidung wahrer und plausibler Fehler ist allenthalben möglichst streng durchgeführt und demgemäß auch bei der Untersuchung des Verteilungsgesetzes der plausibelsten Fehler zur Vergleichung nicht ein wahrer Fehler benutzt (etwa der mittlere oder wahrscheinliche), sondern ebenfalls ein plausibelster Fehler.

Um recht ersichtlich zu machen, welcher erhebliche Unterschied zwischen zwei Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate stattfinden kann bezüglich der Bedeutung der Resultate, ist auch die Anwendung derselben zu interpolatorischen Zwecken mit aufgenommen.







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**II-348770**

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**10000301663**