



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301668





# ENCYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN

IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU  
BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN  
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . .	}	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . . . .		H. BURKHARDT † (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE † (1914–1930) UND E. HILB † (1919–1929)
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . .	}	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN DARMSTADT.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN . . . . .		F. KLEIN † (1896–1925) UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN . . . . .	}	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK, IN 2 TEILBÄNDEN . . . . .		PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT † (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE, IN 2 TEILBÄNDEN	}	K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916) UND S. OPPENHEIM † (1919–1928).

BAND III 1. HEFT 10.

H. TIETZSCHE IN MÜNCHEN UND L. VIETORIS IN WIEN, III A B 13: BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN VERSCHIEDENEN ZWEIGEN DER TOPOLOGIE . . . . .	S. 141
TITEL UND INHALTSVERZEICHNIS ZU BAND III 1, 2. HÄLFTE . . . . .	S. I–XIII
REGISTER ZU BAND III 1 . . . . .	S. 299

AUSGEGEBEN AM 31. JANUAR 1931.



*Y. No. 35390*

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1931.

Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II (vollständig); Bd. III<sub>11</sub> (vollständig); Bd. III<sub>1II</sub>  
(vollständig); Bd. III<sub>21</sub> (vollständig); Bd. III<sub>2II</sub>, Heft 7–10; Bd. III<sub>3</sub> (vollständig); Bd. IV<sub>11</sub>  
(vollständig); Bd. IV<sub>1II</sub>, Heft 1–3; Bd. IV<sub>21</sub> (vollständig); Bd. IV<sub>2II</sub> (vollständig); Bd. V  
(vollständig); Bd. VI<sub>1A</sub> (vollständig); Bd. VI<sub>1B</sub> (vollständig); Bd. VI<sub>2A</sub> (vollständig);  
Bd. VI<sub>2B</sub>, Heft 1–3.

Jeder Band ist einzeln käuflich, dagegen werden einzelne Hefte nicht abgegeben. Der  
Besug der ersten Lieferung eines Bandes verpflichtet zu seiner vollständigen Abnahme.

XXX  
247

Aufgabe der Encyclopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglicher Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 6 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, O. Hölder-Leipzig, M. Planck-Berlin, W. Wirtinger-Wien,

steht der Redaktion, die aus den Herren

Ph. Furtwängler-Wien, W. Fr. Meyer-Königsberg, H. Mohrmann-Darmstadt, C. H. Müller-Hannover, A. Sommerfeld-München

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyclopädie beteiligen sich ferner die Herren

<b>I. Band:</b>		<b>C. Runge</b> (†)	<b>L. Föppl-München</b>	<b>A. Schoenflies</b> (†)
<b>W. Ahrens</b> (†)	<b>A. Sommerfeld-München</b>	<b>O. Szász-Frankfurt a. M.</b>	<b>Ph. Forchheimer-Wien</b>	<b>M. Schröter</b> (†)
<b>P. Bachmann</b> (†)	<b>O. Toeplitz-Bonn</b>	<b>E. Vessiot-Paris</b>	<b>Ph. Furtwängler-Wien</b>	<b>R. Seelliger-Greifswald</b>
<b>J. Bauschinger-Leipzig</b>	<b>E. Voss-München</b>	<b>A. Wangerin-Halle</b>	<b>M. Grübler-Dresden</b>	<b>A. Smekal-Halle</b>
<b>G. Bohlmann</b> (†)	<b>A. Wangerin-Halle</b>	<b>E. v. Weber-Würzburg</b>	<b>M. Grüning-Hannover</b>	<b>A. Sommerfeld-München</b>
<b>L. v. Borkewitsch-Berlin</b>	<b>Fr. A. Willers-Charlottenburg</b>	<b>W. Wirtinger-Wien</b>	<b>E. Hellinger-Frankfurt a. M.</b>	<b>E. Study</b> (†)
<b>B. Burkhardt</b> (†)	<b>W. Zermelo-Freiburg</b>	<b>L. Zoretti-Caen</b>	<b>L. Henneberg-Darmstadt</b>	<b>E. Wangerin-Halle</b>
<b>E. Czuber</b> (†)			<b>K. Heun</b> (†)	<b>W. Wien</b> (†)
<b>W. v. Dyck-München</b>			<b>G. Jung-Mailand</b>	<b>J. Zeunek-München</b>
<b>D. Hilbert-Göttingen</b>			<b>Th. v. Kármán-Aachen</b>	
<b>O. Hölder-Leipzig</b>			<b>F. Klein</b> (†)	<b>VI, 1. Band:</b>
<b>G. Landsberg</b> (†)			<b>A. Kriloff-Petersburg</b>	<b>R. Bourgeois-Paris</b>
<b>R. Mehnke-Stuttgart</b>			<b>H. Lamb-Manchester</b>	<b>V. Conrad-Wien</b>
<b>W. Fr. Meyer-Königsberg i. P.</b>			<b>A. E. H. Love-Oxford</b>	<b>G. H. Darwin</b> (†)
<b>E. Netto</b> (†)			<b>R. v. Mises-Berlin</b>	<b>F. Exner-Wien</b>
<b>V. Pareto-Lausanne</b>			<b>C. H. Müller-Hannover</b>	<b>S. Finsterwalder-München</b>
<b>A. Pringsheim-München</b>			<b>L. Prandtl-Göttingen</b>	<b>Ph. Furtwängler-Wien</b>
<b>C. Runge</b> (†)			<b>G. Prange-Hannover</b>	<b>F. R. Helmert</b> (†)
<b>A. Schoenflies</b> (†)			<b>H. Reißner-Charlottenburg</b>	<b>S. Hough-Kapstadt</b>
<b>M. Schubert</b> (†)			<b>A. Schoenflies</b> (†)	<b>H. Meißner-Bremen</b>
<b>D. Seilwanoff</b> (†)			<b>P. Stäckel</b> (†)	<b>W. Moebius-Leipzig</b>
<b>E. Study</b> (†)			<b>O. Todone-Genoa</b>	<b>P. Pizzetti-Pisa</b>
<b>K. Th. Vahlen-Wien</b>			<b>H. E. Timerding-Braunschwg.</b>	<b>C. Rehner</b> (†)
<b>H. Weber</b> (†)			<b>A. Timpe-Berlin</b>	<b>A. Schmidt-Potsdam</b>
<b>A. Wiman-Upsala</b>			<b>A. Voss-München</b>	<b>E. v. Schweißler-Innsbruck</b>
			<b>G. T. Walker-Simla (Indien)</b>	<b>W. Trabert</b> (†)
			<b>K. Wieghardt</b> (†)	
			<b>G. Zemplén</b> (†)	<b>VI, 2. Band:</b>
				<b>E. Anding-Gotha</b>
				<b>J. Bauschinger-Leipzig</b>
				<b>A. Bemporad-Catania</b>
				<b>E. W. Brown-New-Haven</b>
				<b>C. Ed. Caspari-Paris</b>
				<b>F. Cohn-Berlin</b>
				<b>R. Emden-München</b>
				<b>F. K. Ginzler-Berlin</b>
				<b>P. Guthnik-Neubabelsberg</b>
				<b>F. Hayn-Leipzig</b>
				<b>J. v. Hepperger-Wien</b>
				<b>G. Herglotz-Göttingen</b>
				<b>A. Hnatek-Wien</b>
				<b>I. Hopmann-Bonn</b>
				<b>K. Hoffmeister-Sonneberg</b>
				<b>H. Kienle-Göttingen</b>
				<b>H. Kobold-Kiel</b>
				<b>F. Kottler-Wien</b>
				<b>K. Laves-Chicago</b>
				<b>G. v. Niessl-Wien</b>
				<b>S. Oppenheim</b> (†)
				<b>H. Samter-Berlin</b>
				<b>K. Schwarzschild</b> (†)
				<b>K. Sundman-Helsingfors</b>
				<b>E. T. Whittaker-Edinburgh</b>
				<b>A. Wilkens-München</b>
				<b>C. W. Wirtz-Kiel</b>
				<b>H. v. Zeipel-Upsala</b>

## Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyclopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Prof. Dr. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten, der sich mit den betr. Bandedakteuren wegen Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften.

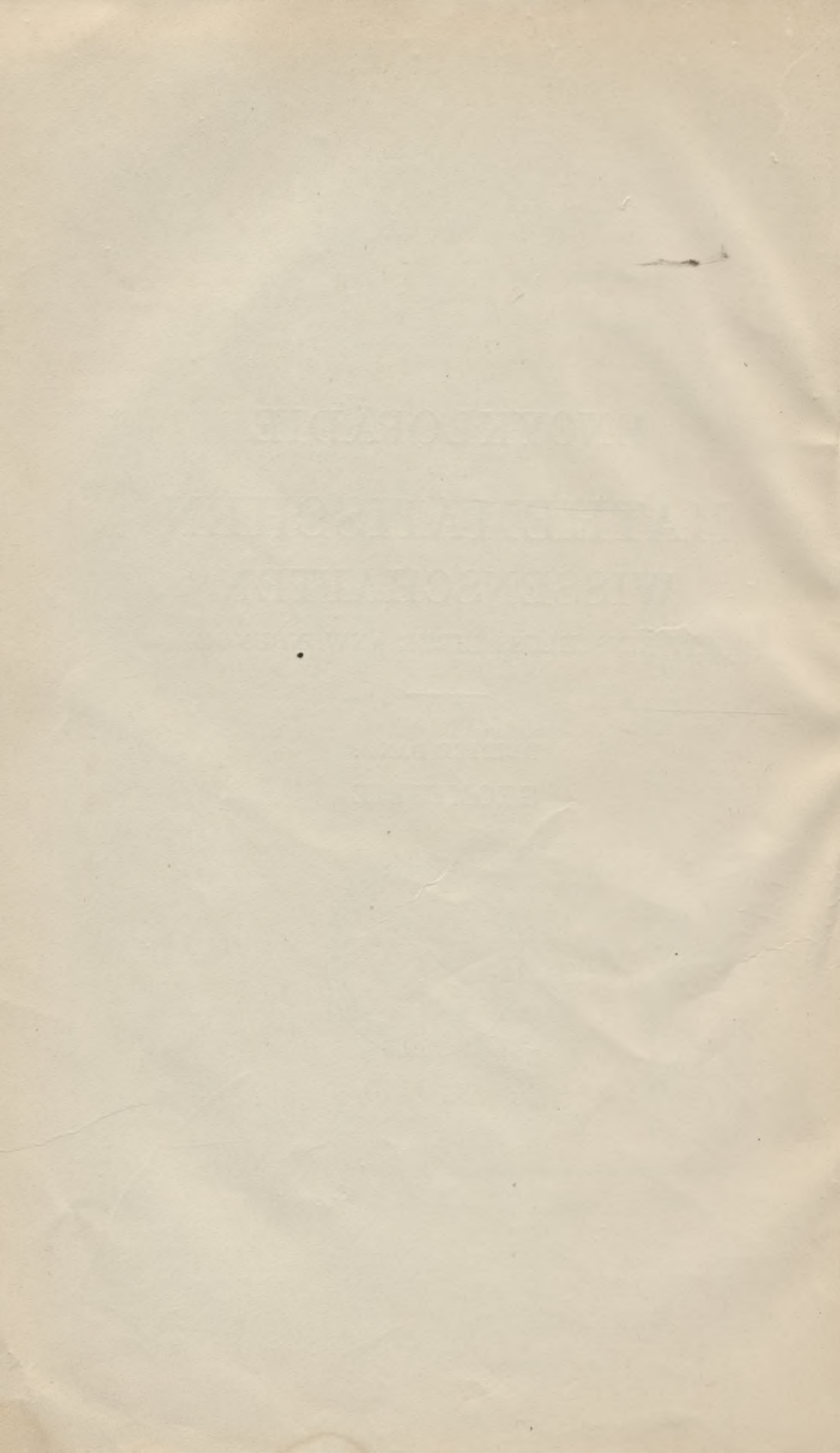
ENCYKLOPÄDIE  
DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN  
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

---

DRITTER BAND:  
GEOMETRIE



xxx  
24 1/2





ENCYKLOPÄDIE  
DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN  
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

---

DRITTER BAND IN DREI TEILEN

GEOMETRIE

REDIGIERT VON

**W. FR. MEYER** UND **H. MOHRMANN**  
IN KÖNIGSBERG IN DARMSTADT

ERSTER TEIL

ZWEITE HÄLFTE



*J. - Nr. 35390*

LEIPZIG  
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER  
1914—1931

XXX  
247/2

11-348760



~~III 16077~~

Akc. Nr.

~~3007~~ / 50

3PCU-3-117/2017

# Inhaltsverzeichnis zu Band III, 1. Teil, 2. Hälfte.

## A. Rein geometrische Theorien.

## B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

(Fortsetzung.)

### 8. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus. Von J. SOMMER in Danzig.

	Seite
1. Einleitung. Begrenzung des Stoffes . . . . .	773

#### I. Geometrie im engeren Sinne.

2. Analytische Behandlung der Elementargeometrie. Vorbereitung. Orientierte und imaginäre Elemente . . . . .	774
3. Algebraische Behandlung der Geometrie, besonders der Dreiecksgeometrie . . . . .	778
4. Analytische Behandlung im engeren Sinne . . . . .	779
5. Vektorielle Behandlung (insbesondere der Dreiecksgeometrie). . . . .	785

#### Ia. Konstruktionen.

6. Geometrische Konstruktionen. Allgemeines . . . . .	789
7. Konstruktionen mit dem Lineal . . . . .	790
8. Konstruktionen mit Lineal und Zirkel . . . . .	792
9. Konstruktionen mit Lineal und Streckenübertrager . . . . .	794
10. Existenzfragen und Näherungskonstruktionen . . . . .	795
11. Vergleichung der Hilfsmittel . . . . .	799
12. Allgemeine Methoden zur Lösung von Aufgaben. . . . .	800
13. Praxis der Konstruktionen und Fehlertheorie . . . . .	805
14. Nichtelementare Konstruktionen . . . . .	806

#### Ib. Anwendung der Gruppentheorie.

15. Die Geometrie vom Standpunkt der Gruppentheorie. Hauptgruppe und die zugehörigen Invarianten . . . . .	808
16. Die Unterordnung der Elementargeometrie unter die projektive Geometrie. Bedeutung des Kugelkreises . . . . .	811
17. Gruppe der reziproken Radien (Inversionen). Das Apollonische Problem . . . . .	816
18. Anwendung spezieller Transformationen . . . . .	825
19. Polyeder und Polyedergruppen . . . . .	827

#### II. Sphärische Trigonometrie.

20. Verschiedene Definitionen des sphärischen Dreiecks. Einteilung der Trigonometrie . . . . .	833
21. Kleins Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie . . . . .	836

	Seite
22. Nachbardreiecke und die zugehörigen Substitutionsgruppen . . . . .	839
23. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie . . . . .	842
24. Die Grundformeln für komplexe Argumente, die Figur von Schilling . . . . .	847
25. Die Abbildung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke. . . . .	848
26. Orthogonale Substitution. Die Studysche Abbildung der Dreiecksmannigfaltigkeit . . . . .	851
27. Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit den elliptischen Funktionen . . . . .	854

(Abgeschlossen Neujahr 1914.)

## 9. Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Von M. ZACHARIAS in Berlin.

### A. Einleitung.

1. Der Begriff der Elementargeometrie. . . . .	862
2. Das Parallelenaxiom. Euklidische und nicht-euklidische Geometrie . . . . .	863

### B. Elementare euklidische Geometrie.

#### I. Allgemeiner Teil.

3. Einleitende Bemerkungen über Grundbegriffe und Grundsätze . . . . .	874
4. Die Kongruenz . . . . .	881
5. Die Lehre von den Proportionen und der Ähnlichkeit . . . . .	888
6. Einfluß der projektiven Geometrie auf die Elementargeometrie . . . . .	899
7. Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz als besondere Fälle der Kollineation. Eigenschaften ähnlicher und kongruenter Systeme . . . . .	907
8. Der Flächeninhalt der Vielecke. Zerlegungsbeweise . . . . .	915
9. Die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises . . . . .	924
10. Umfang und Inhalt des Kreises. Quadrierbare Kreisbogenzweiecke . . . . .	928
11. Der Rauminhalt der Vielfache. Endlichgleichheit. Exhaustion . . . . .	939
12. Einfluß der analytischen Geometrie auf die Elementargeometrie: Das Vorzeichen der Strecken. Der Möbiussche Inhaltsbegriff für die Ebene und den Raum . . . . .	952
13. Rauminhalt und Oberfläche krummflächig begrenzter Körper . . . . .	958

#### II. Besonderer Teil.

14. Dreieck. . . . .	967
15. Viereck und andere besondere Vielecke . . . . .	990
16. Polygonometrie, Polyedrometrie, Transversalentheorie, Lehre vom Schwerpunkt . . . . .	1013
17. Kreis und Kugel. Schließungsaufgaben, Inversion, Pol und Polare . . . . .	1023
18. Sphärik. Stereographische Projektion . . . . .	1036
19. Sphärische Trigonometrie. . . . .	1044
20. Der Eulersche Polyedersatz. . . . .	1051
21. Besondere Arten von Vielfachen . . . . .	1054
22. Kegelschnitte in elementarer Behandlung . . . . .	1072
23. Konstruktionen mit Lineal und Zirkel . . . . .	1085
24. Die Kreisteilung, die Aufgaben von Malfatti und Apollonius . . . . .	1094
25. Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln und unter besonderen Bedingungen . . . . .	1104
26. Einfachheit und Genauigkeit der Konstruktionen. Geometrographie . . . . .	1109
27. Näherungsverfahren. Würfelverdoppelung, Dreiteilung des Winkels, Teilung, Quadratur und Rektifikation des Kreises . . . . .	1113
28. Maxima und Minima. Die isoperimetrische Aufgabe . . . . .	1118

**C. Elementare nicht-euklidische Geometrie.**

Seite

29. Vorläufer . . . . .	1137
30. Gauß, Schweikart, Taurinus, Lobatschewskij, Joh. Bolyai . . . . .	1141
31. Weiterer Ausbau der hyperbolischen Geometrie . . . . .	1152
32. Elliptische und sphärische Geometrie . . . . .	1162

(Abgeschlossen Ende 1913.)

**10. Neuere Dreiecksgeometrie.** Von G. BERKHAN† in Hamburg  
und W. FR. MEYER in Königsberg.

**Einleitung.**

1. Der Begriff der neueren Dreiecksgeometrie. . . . .	1177
2. Geschichtlicher Überblick . . . . .	1179
3. Bibliographische Übersicht . . . . .	1180
4. Charakterisierung der Dreiecksgeometrie. . . . .	1182
5. Abgrenzung und Gliederung des Artikels . . . . .	1183

**I. Der Begriff: Merkwürdig.**

6. Symmetriepunkte . . . . .	1184
7. Überbestimmung. . . . .	1184
8. Symmetriedreiecke. . . . .	1185
9. Extreme Werte . . . . .	1185
10. Merkwürdige Koordinaten . . . . .	1186
11. Geometrische Örter . . . . .	1186
12. Geometrische Verwandtschaften. . . . .	1187
13. Permutationen. . . . .	1188
14. Alte Sätze in neuer Form . . . . .	1188

**II. Koordinaten und Verwandtschaften.**

15. Vorbemerkung . . . . .	1189
16. Kartesische Koordinaten . . . . .	1189
17. Komplexe Koordinaten . . . . .	1190
18. Dreieckskoordinaten . . . . .	1190
19. Harmonische Zuordnung . . . . .	1196
20. Weitere harmonische Beziehungen . . . . .	1198
21. Komplement- und Supplementpunkte. Nagelsche Punktepaare. . . . .	1201
22. Quadratische Verwandtschaften. Allgemeines. . . . .	1203
23. Die isogonale Verwandtschaft. Winkelgegenpunkte. . . . .	1207
24. Die isotome Verwandtschaft. Seitengegenpunkte . . . . .	1210
25. Dreipolkoordinaten. Tripolar zugeordnete Punkte. . . . .	1212
26. Winkelkoordinaten nach Uhlich, Zwillingpunkte. Die Figur von Torricelli . . . . .	1216

**III. Urdreieck und abgeleitete Dreiecke.**

27. Allgemeine Vorbemerkungen . . . . .	1219
28. Perspektive Dreiecke. . . . .	1220
29. Orthologe Dreiecke . . . . .	1222
30. Der Lotpunkt einer Geraden . . . . .	1224
31. Umdreiecke . . . . .	1226
32. Indreiecke . . . . .	1227
33. Fußpunktdreiecke . . . . .	1229
34. Die Wallacegerade. . . . .	1234
35. Die Steinersche Hypozykloide. . . . .	1237

**IV. Dreieck und Kegelschnitte.****A. Umkegelschnitte.**

36. Umkegelschnitte im allgemeinen . . . . .	1239
37. Der Umkreis . . . . .	1241
28. Die gleichseitigen Umhyperbeln. . . . .	1242

**B. Inkegelschnitte.**

39. Inkegelschnitte im allgemeinen . . . . .	1245
40. Die Inkreise. . . . .	1247
41. Die Inparabeln . . . . .	1249

**C. Polkegelschnitte.**

42. Polkegelschnitte im allgemeinen . . . . .	1250
43. Besondere Polkegelschnitte . . . . .	1251

**D. Verschiedene Kreise und Kreissysteme.**

44. Vorbemerkung. . . . .	1252
45. Die Kreise von Tucker, Lemoine und Taylor. . . . .	1253
46. Die Schouteschen Kreise. Der Brocardsche Kreis und die Lemoinesche Gerade . . . . .	1255
47. Die Beikreise . . . . .	1256
48. Die Apollonischen Kreise. . . . .	1257
49. Der Feuerbachsche Kreis. . . . .	1258

**V. Drei gleichsinnig ähnliche Felder.**

50. Vorbemerkung. . . . .	1265
51. Drei gleichsinnig ähnliche Felder in allgemeiner Lage . . . . .	1266
52. Drei ähnliche Felder über den Seiten des Urdreiecks. . . . .	1268

**Schluß.**

53. Ergänzungen, besonders metrischer Art . . . . .	1272
54. Viereck und Vielecke . . . . .	1272
55. Projektive Verallgemeinerungen mit Hilfe der Kreispunkte . . . . .	1274

(Abgeschlossen im Herbst 1914.)

**11. Systeme geometrischer Analyse. I. Teil von HERMANN ROTHE†; II. Teil von ALFRED LOTZE in Stuttgart und CHR. BETSCH in Cannstatt.**

**Erster Teil.**

VON HERMANN ROTHE †.

**Einleitung.**

1. Begriff der geometrischen Analyse. Die „Characteristica geometrica“ von G. W. Leibniz . . . . .	1282
2. Die geometrische Addition von Strecken. . . . .	1284

**I. Der baryzentrische Kalkül und die Methode der Äquipollenzen.**

3. Der baryzentrische Kalkül von A. F. Möbius . . . . .	1289
4. Die Methode der Äquipollenzen von G. Bellavitis. . . . .	1293

**II. Die Hamiltonschen Quaternionen und ihre Verallgemeinerungen.**

5. Historisches . . . . .	1300
6. Algebraische Theorie der Quaternionen . . . . .	1302
7. Die Vektoren. Geometrische Theorie der Quaternionen . . . . .	1316
8. Lineare Vektorfunktionen und lineare Vektorgleichungen. Dyaden und Tensoren . . . . .	1324
9. Lineare Quaternionenfunktionen. Lineare und höhere Quaternionengleichungen . . . . .	1333
10. Differential- und Integralrechnung der Quaternionen . . . . .	1337
11. Geometrische Anwendungen der Quaternionen . . . . .	1346
a) Punkt, Gerade, Ebene; Liniengeometrie . . . . .	1346
b) Flächen zweiter Ordnung und andere algebraische Flächen; ebene, kubische und sphärische Kegelschnitte . . . . .	1354
c) Differentialgeometrie der Kurven und Flächen; Strahlensysteme . . . . .	1358
12. Ternäre orthogonale Transformationen; Drehungen des Euklidischen Raumes um einen festen Punkt. Quaternionen und binäre projektive Transformationen. Sphärische Trigonometrie. . . . .	1368
13. Quaternäre orthogonale Transformationen. Drehungen des vierdimensionalen Raumes um einen festen Punkt; automorphe projektive Transformationen einer Fläche zweiter Ordnung; Bewegungen und Umlegungen des elliptischen Raumes. Studys Abbildung der Speere des elliptischen Raumes . . . . .	1386
14. Die Biquaternionen von W. R. Hamilton und W. K. Clifford. Euklidische und nicht-euklidische Bewegungen und Umlegungen . . . . .	1396
15. Die Triquaternionen und Quadriquaternionen von G. Combebiac. Die Ähnlichkeitstransformationen und die konformen Transformationen des Euklidischen Raumes . . . . .	1406
16. Die komplexen Zahlensysteme von W. K. Clifford und R. Lipschitz. Die orthogonalen Transformationen von $n$ Veränderlichen. Die Bewegungen und Umlegungen im $n$ -dimensionalen Euklidischen oder nicht-euklidischen Raume . . . . .	1417
17. Sonstige Verallgemeinerungen des Quaternionenbegriffes. Die Oktaven von J. T. Graves und A. Cayley und die Pluquaternionen von Th. P. Kirkmann. Die Nonionen und $m^2$ -ionen von J. J. Sylvester. Die Quaternionensysteme von G. Scheffers . . . . .	1417
18. Die longimetrischen Quaternionen von K. W. Unverzagt. Die hyperbolischen Quaternionen von A. Macfarlane . . . . .	1421

(Abgeschlossen im Oktober 1916.)

Zweiter Teil.

**III. Die Grassmannsche Ausdehnungslehre.**

VON ALFRED LOTZE in Stuttgart.

19. Zur Einleitung und Geschichte . . . . .	1426
20. Extensive Größen, insbesondere solche 1. Stufe . . . . .	1429
21. Die Produktbildungen der Ausdehnungslehre im allgemeinen . . . . .	1432
22/23. Das kombinatorische oder äußere Produkt . . . . .	1435
24. Begriff der Ergänzung in bezug auf ein Hauptgebiet . . . . .	1440
25. Produkte in bezug auf ein Hauptgebiet. Progressive und regressive Produkte. Reine und gemischte Produkte. . . . .	1442
26. Extensive Größen höherer Stufe. Einfache und zusammengesetzte Größen (Komplexgrößen) . . . . .	1447
27. Das innere Produkt . . . . .	1448
28. Das algebraische Produkt . . . . .	1451
29. Lückenausdrücke . . . . .	1453
30. Quotienten, extensive Brüche, Matrizen . . . . .	1456
31. Funktionen . . . . .	1466
32. Differential- und Integralrechnung . . . . .	1468

	Seite
33. Algebraische Anwendungen: Determinanten, lineare Gleichungen, Elimination, (Invariantentheorie) . . . . .	1479
34. Geometrische Anwendungen . . . . .	1485
Einleitung (insbesondere Größen und Verknüpfungen der <i>Punktrechnung</i> ) . . . . .	1485
a) Elementargeometrie . . . . .	1493
b) Projektive Geometrie. Lineare Verwandtschaften . . . . .	1497
c) Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung . . . . .	1508
d) Algebraische Kurven und Flächen; lineale Erzeugung . . . . .	1511
e) Linien- und Schraubengeometrie; Kugel- (und Kreis-)geometrie . . . . .	1514
f) Differentialgeometrie . . . . .	1517
g) Nicht-euklidische Geometrie . . . . .	1536
h) Mechanik . . . . .	1539
35. Begründung der Punktrechnung durch G. Peano . . . . .	1543
36. Beziehungen der Ausdehnungslehre zur Quaternionentheorie und Vektoranalysis . . . . .	1546

#### IV. Sonstige Systeme geometrischer Analyse.

Von CHR. BETSCH in Cannstatt.

37. Der Situationskalkül von H. Scheffler . . . . .	1552
38. Die dualen Zahlen von E. Study . . . . .	1556
39. Die Binäranalyse von E. Waelsch . . . . .	1563
40. Die geometrischen Differentiationen von Knoblauch, Ricci, Levi-Civita und Hessenberg . . . . .	1576
41. Die Systeme direkter Analyse von J. A. Schouten . . . . .	1589

(Abgeschlossen im März 1923.)

## 12. Polyeder und Raumeinteilungen. Von ERNST STEINITZ †.

### I. Die Polygone.

1. Die ebenen Polygone. Historisches . . . . .	3
2. Die Art eines ebenen Polygons . . . . .	4
3. Der Flächeninhalt ebener Polygone . . . . .	6
4. Die Doppelpunkte ebener Polygone . . . . .	7
5. Die Formen der Vielecke . . . . .	9
6. Die sphärischen Polygone . . . . .	10
7. Art und Inhalt sphärischer Polygone . . . . .	11

### II. Die Entwicklung der Polyedertheorie.

8. Die Polyeder; allgemeine Definitionen . . . . .	14
9. Eulers Begründung einer allgemeinen Polyedertheorie . . . . .	15
10. Zur Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes . . . . .	19
11. Der verallgemeinerte Eulersche Satz. Elemente der Analysis situs . . . . .	21
12. Einseitige Polyeder . . . . .	26
13. Volumen und Artbestimmung bei Polyedern . . . . .	29
14. Legendres Bestimmung der Konstantenzahl eines Polyeders . . . . .	34
15. Cauchys Satz über konvexe Polyeder. Bewegliche Polyeder . . . . .	35
16. Die isoperimetrischen Probleme . . . . .	38
16*. Anwendungen auf die Theorie der ebenen Fachwerke . . . . .	43

### III. Morphologie der Polyeder.

17. Schematische Darstellungen der Polyedertypen . . . . .	47
18. Konstruktive Ableitung konvexer $(f+1)$ -Fläche aus $f$ -Flächen . . . . .	49
19. Dreikants- und Dreiecks-(Trigonal-)Polyeder . . . . .	50
20. Anzahlbestimmungen bei Polyedern . . . . .	54



	Seite
21. Das allgemeine Problem der kombinatorischen Aufstellung der Typen konvexer Polyeder . . . . .	55
22. Geordnete Komplexe . . . . .	57
23. Kantenkomplexe . . . . .	59
24. Polyedrische Komplexe . . . . .	60
25. Endliche polyedrische Komplexe von vollkommenem Zusammenhange . . . . .	61
26. Eulersche Komplexe und Elementarkomplexe . . . . .	63
27. Mehrstufiger Isomorphismus, Spaltungsprozesse . . . . .	64
28. Polyeder im engeren Sinne . . . . .	66
29. Einige Prozesse, durch die aus gegebenen Polyedertypen andere hergeleitet werden . . . . .	69
30. Polyeder ohne übergreifende Elemente . . . . .	70
31. Eulersche Polyeder ohne übergreifende Elemente ( $K$ -Polyeder) . . . . .	71
32. Kritische Vergleichung der schematischen Darstellungsmethoden der Polyedertypen . . . . .	72
33. Realisierung der Polyeder ohne übergreifende Elemente . . . . .	75
34. Der Fundamentalsatz der konvexen Typen . . . . .	77
35. Einteilung der konvexen Dreikantspolyeder in Stämme und Bereiche . . . . .	81

#### IV. Polyeder in mehrdimensionalen Räumen.

36. Allgemeine Begriffsbildungen . . . . .	83
37. Konvexe Polytope: Elementare und topologische Untersuchungen . . . . .	88
38. Konvexe Körper . . . . .	89
39. Strahlensysteme . . . . .	92
40. Konvexe Polyeder mit gegebenen Normalenrichtungen . . . . .	94
41. Polyederscharen . . . . .	98

#### V. Die durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichneten Polyeder und die Raumeinteilungen.

42. Die regulären Polyeder. Allgemeine Übersicht der weiteren Untersuchungen . . . . .	101
43. Reguläre Polygone und Polyeder höherer Art . . . . .	102
44. Der Symmetriebegriff. Historisches . . . . .	105
45. Die endlichen Bewegungsgruppen . . . . .	107
46. Die Fundamentalbereiche und die gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder und Kugelnetze . . . . .	110
47. Möbiussche Netze und kristallographische Gruppen . . . . .	114
48. Gruppen aus Isomorphismen . . . . .	116
49. Reziproke Beziehungen . . . . .	118
50. Die regulären Polytope . . . . .	120
51. Die endlichen Bewegungsgruppen im $R_n$ und die zugehörigen Raumeinteilungen . . . . .	122
52. Bewegungsgruppen und Raumeinteilungen bei Euklidischer und hyperbolischer Maßbestimmung . . . . .	127
53. Weitere Ausführungen für den Fall des Euklidischen $R_n$ . . . . .	129
54. Weitere Ausführungen für den Fall des hyperbolischen $H_n$ . . . . .	132
55. Verschiedenartige Untersuchungen . . . . .	138

(Abgeschlossen am 31. August 1916.)

### 13. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Von H. TIETZE in München und L. VIETORIS in Wien.

1. Einleitung . . . . .	144
-------------------------	-----

#### I. Punktmengen in $n$ -dimensionalen Zahlenräumen.

2. Limiten in Punktmengen eines $\mathfrak{R}^n$ . . . . .	146
3. Umgebungen, Abstände und Häufungspunkte in Punktmengen eines $\mathfrak{R}^n$ . . . . .	148

	Seite
4. Allgemeinere topologische Gebilde . . . . .	148
5. Übergang zur allgemeinen Topologie . . . . .	150

## II. Allgemeine Topologie.

6. Limesräume . . . . .	152
7. Räume mit Festsetzungen über Häufungspunkte . . . . .	154
8. Räume mit Umgebungsbeziehungen . . . . .	155
9. Fundamentalsysteme von Umgebungen . . . . .	158
10. Andere Fassungen des Begriffs des topologischen Raumes . . . . .	159
11. Teilräume . . . . .	160
12. Abzählbarkeitsaxiome . . . . .	161
13. Trennbarkeitsaxiome . . . . .	162
14. Vollständigkeitseigenschaften topologischer Räume . . . . .	163
15. Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten allgemeiner Räume . . . . .	165
16. Metrische Räume. Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	166
17. Metrisation . . . . .	169
18. Metrische Vollständigkeit . . . . .	171
19. Topologie im Kleinen. Überlagerungsräume . . . . .	173
20. Herstellung neuer topologischer Räume aus gegebenen . . . . .	175
21. Zerlegungsräume . . . . .	178
22. Heftung topologischer Räume . . . . .	180

## III. $n$ -dimensionale Topologie.

23. Vorbemerkungen. Homogene $n$ -dimensionale Gebilde . . . . .	181
24. Homogene 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten . . . . .	183
25. Beschreibung des Zellaufbaus einer $\mathbb{M}^2$ . . . . .	186
26. Homogene $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten . . . . .	187
27. Beschreibung des Zellaufbaus einer $\mathbb{M}^n$ . . . . .	189
28. Entstehung des besprochenen Mannigfaltigkeitsbegriffes . . . . .	191
29. Allgemeinere Zellen und Zellaufbauten . . . . .	193
30. Berandete Mannigfaltigkeiten. $n$ -dimensionale Komplexe . . . . .	194
31. Topologische Invarianz der Dimensionszahl . . . . .	195
32. Homöomorphie der Flächen . . . . .	196
33. Weitere Untersuchungen der $n$ -dimensionalen Topologie . . . . .	200

## IV. Kombinatorische Topologie.

34. Problem einer kombinatorischen Topologie . . . . .	207
35. Kombinatorische Zellsysteme . . . . .	209
36. Verwandtschaft von Zellsystemen . . . . .	213
37. Eine Hypothese . . . . .	214
38. Neuere kombinatorische Theorien . . . . .	216
39. Kombinatorische und $n$ -dimensionale Topologie . . . . .	218
40. Anwendung der kombinatorischen auf die allgemeine Topologie. Punktmengen . . . . .	222

## V. Der Dimensionsbegriff.

41. Allgemeines . . . . .	225
42. Kurven . . . . .	234

(Abgeschlossen 15. Oktober 1929.)

Register zu Band III, 1. Teil . . . . .	238
---	-----

## Übersicht

über die im vorliegenden Bande III, 1. Teil, 2. Hälfte  
zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

A. Rein geometrische Theorien.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis  
auf die Geometrie.

(Fortsetzung.)

- |                            |   |   |
|----------------------------|---|---|
| Heft 5.<br>8. VI. 1914.    | { | 8. SOMMER: Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus.   |
|                            |   | 9. ZACHARIAS: Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. I. Teil.   |
| Heft 6.<br>3. I. 1921.     | { | 9. ZACHARIAS: Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Mit Zusätzen von W. Fr. Meyer. II. Teil.   |
| Heft 7.<br>3. I. 1921.     | { | 10. BERKHAN† und MEYER: Neuere Dreiecksgeometrie.   |
|                            |   | 11. ROTHE†: Systeme geometrischer Analyse. I. Teil.   |
| Heft 8.<br>10. VII. 1924.  | } | 11. LOTZE und BETSCH: Systeme geometrischer Analyse. II. Teil.  |
| Heft 9.<br>15. V. 1922.    | } | 12. STEINITZ†: Polyeder und Raumeinteilungen.   |
| Heft 10.<br>10. XII. 1930. | } | 13. TIETZE und VIETORIS: Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie.<br>Titel und Inhaltsverzeichnis zu Band III, 1. Teil, 2. Hälfte.<br>Register zu Band III, 1. Teil. |
-



# III AB 13. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN VERSCHIEDENEN ZWEIGEN DER TOPOLOGIE.

VON

**H. TIETZE**

UND

**L. VIETORIS**

IN MÜNCHEN

IN WIEN.

Bei den Vorarbeiten für den Artikel hat Herr *Hellmuth Kneser-Greifswald* (damals in Göttingen) durch Berichte über ausländische Publikationen, die dem ersten Ref. nicht zugänglich waren, wertvolle Mitarbeit geleistet. Besonderes Interesse hat Herr *L. E. J. Brouwer* an dem Artikel genommen, vor allem an der Ausgestaltung der Abschnitte II und V über allgemeine Räume. Von ihm stammt die Anregung zur Mitarbeit des zweiten Ref. und er hat in vielen mündlichen Besprechungen mit diesem wichtige Teile des Artikels wesentlich gefördert. Zahlreiche wertvolle Bemerkungen erhielten wir außer von dem bereits genannten Herrn *H. Kneser* noch von den Herren *P. Alexandroff*, *S. Bochner*, *W. Hurewicz*, *B. v. Kerékjártó*, *K. Menger* und *A. Rosenthal*. Für alles sei auch an dieser Stelle besonders gedankt.

Wenn die Encyclopädie sich im allgemeinen zum Ziel setzte, den Stand der mathematischen Wissenschaften um das Ende des 19. Jahrhunderts darzustellen, so konnte diese Zeitgrenze nicht maßgeblich sein für das vorliegende Gebiet, wo erst in letzter Zeit eine gewisse Klärung der Begriffe sich durchsetzte. Im übrigen vgl. wegen der Gesichtspunkte, nach denen auf die Literatur eingegangen wurde, die Einleitung (Nr. 1).

Von den Nummern des Artikels stammen die erstmals 1925 gedruckten älteren Nummern **1—9, 11, 16, 19, 22—37** im wesentlichen von dem ersten, die später dazugekommenen Nr. **10, 13, 14, 17, 18, 21, 40—42** von dem zweiten Ref., soweit bei den wiederholten Besprechungen über den ganzen Artikel eine solche Aufteilung angebbbar ist.

## Inhaltsübersicht.

### 1. Einleitung.

#### I. Punktmengen in $n$ -dimensionalen Zahlenräumen.

2. Limiten in Punktmengen eines  $\mathfrak{R}^n$ .
3. Umgebungen, Abstände und Häufungspunkte in Punktmengen eines  $\mathfrak{R}^n$ .
4. Allgemeinere topologische Gebilde.
5. Übergang zur allgemeinen Topologie.

#### II. Allgemeine Topologie.

6. Limesräume.
7. Räume mit Festsetzungen über Häufungspunkte.
8. Räume mit Umgebungsbeziehungen.

9. Fundamentalsysteme von Umgebungen.
10. Andere Fassungen des Begriffs des topologischen Raumes.
11. Teilräume.
12. Abzählbarkeitsaxiome.
13. Trennbarkeitsaxiome.
14. Vollständigkeitseigenschaften topologischer Räume.
15. Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten allgemeiner Räume.
16. Metrische Räume. Gleichmäßige Stetigkeit.
17. Metrisation.
18. Metrische Vollständigkeit.
19. Topologie im Kleinen. Überlagerungsräume.
20. Herstellung neuer topologischer Räume aus gegebenen.
21. Zerlegungsräume.
22. Heftung topologischer Räume.

### III. $n$ -dimensionale Topologie.

23. Vorbemerkungen. Homogene  $n$ -dimensionale Gebilde.
24. Homogene 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten.
25. Beschreibung des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{M}^2$ .
26. Homogene  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.
27. Beschreibung des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{M}^n$ .
28. Entstehung des besprochenen Mannigfaltigkeitsbegriffes.
29. Allgemeinere Zellen und Zellenaufbauten.
30. Berandete Mannigfaltigkeiten.  $n$ -dimensionale Komplexe.
31. Topologische Invarianz der Dimensionszahl.
32. Homöomorphie der Flächen.
33. Weitere Untersuchungen der  $n$ -dimensionalen Topologie.

### IV. Kombinatorische Topologie.

34. Problem einer kombinatorischen Topologie.
35. Kombinatorische Zellsysteme.
36. Verwandtschaft von Zellsystemen.
37. Eine Hypothese.
38. Neuere kombinatorische Theorien.
39. Kombinatorische und  $n$ -dimensionale Topologie.
40. Anwendung der kombinatorischen auf die allgemeine Topologie.

### V. Der Dimensionsbegriff.

41. Allgemeines.
42. Kurven.

---

### Literatur.

- M. Fréchet*, Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, Paris 1928 [abgekürzt: *Fréchet*, Esp. abstr.].
- J. Hadamard*, Sur quelques applications de l'indice de Kronecker. Note zu *J. Tan- nery*, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, t. 2, Paris 1910 [abgekürzt: *Hadamard*, L'ind. de Kr.].
- H. Hahn*, Theorie der reellen Funktionen, I. Bd., Berlin 1921, Kap. 1, 2 [abge- kürzt: *Hahn*, Reelle F. I].

- F. Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914 [abgekürzt: *Hausdorff*, Grundz.]; 2. Aufl.: Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1927 [abgekürzt: *Hausdorff*, Mengenl. 1927].
- B. v. Kerékjártó*, Vorlesungen über Topologie, 1. Bd., Berlin 1923 [abgekürzt: *Kerékjártó*, Vorl. 1].
- D. König*, Az analysis situs elemei, I, Budapest 1918.
- S. Lefschetz*, L'analysis situs et la géométrie algébrique, Paris 1924 [abgekürzt: *Lefschetz*, L'an. situs etc.].
- K. Menger*, Dimensionstheorie, Leipzig 1928 [abgekürzt: *Menger*, Dim.].
- É. Picard-G. Simart*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes, t. 1, Paris 1897, Chap. 2 [abgekürzt: *Picard-Simart*, Fonct. alg.].
- A. Sainte-Laguë*, Les réseaux (ou graphes), Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 18, Paris 1926 [abgekürzt: *Sainte-Laguë*, Réseaux].
- A. Schoenflies*, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Ergänzungsband II, zweiter Teil, Leipzig 1908 [abgekürzt: *Schoenflies*, Ber. II].
- H. Tietze*, Über Analysis situs, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 2. Heft, Hamburg 1923, p. 1/32 [= Abhdlgn. a. d. Math. Seminar d. Hamburg. Universität, 2, p. 37/68] [abgekürzt: *Tietze*, Hambg. Sem., p. 1/32 [37/68]].
- O. Veblen*, Analysis situs, New York 1922 (Amer. Math. Society, Colloquium Lectures, vol. 5; The Cambridge Colloquium 1916, part II) [abgekürzt: *Veblen*, Cambr. Coll.].
- H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1. Aufl., Leipzig 1913, 2. Aufl. (anastat. Neudruck mit Zusätzen) 1923 [abgekürzt: *Weyl*, R. Fl.].
- Mit „II C 9“ bzw. „III AB 3“ werden abgekürzt die Encyklopädieartikel von *L. Zoratti-A. Rosenthal*, II C 9 a, bzw. von *M. Dehn-P. Heegaard*, III AB 3, zitiert.

## Verwendete Bezeichnungen.

- $A, B, P, Q, X, \dots$  Punkte;  $\overline{PQ}$  Abstand (Nr. 3, 16).
- $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \dots$  Punktmengen und Räume;  $\overline{\mathfrak{A}}$  abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{A}$  (Nr. 10);  $\mathfrak{E}_i^2$  Dreiecke,  $\mathfrak{E}_i^n$   $n$ -dimensionale Simplexe (Nr. 26),  $\mathfrak{E}^n$   $n$ -dimensionales Elementarraumstück (Nr. 30);  $\mathfrak{F}$  Fläche;  $\mathfrak{R}$  Raum mit Festsetzungen über Häufungspunkte (Nr. 7);  $\mathfrak{R}^n$   $n$ -dimensionaler Komplex (Nr. 30);  $\mathfrak{L}$  Limesraum (Nr. 6);  $\mathfrak{M}^n$  (kontinuierliche)  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (Nr. 24, 26);  $\mathfrak{R}^1$  die (Zahlen-)Gerade,  $\mathfrak{R}^2$  die Ebene,  $\mathfrak{R}^n$  der  $n$ -dimensionale (reelle) Zahlenraum (Nr. 2);  $\mathfrak{S}^n$   $n$ -dimensionale sphärische Mannigfaltigkeit (Nr. 26);  $\mathfrak{U}$  Umgebungsraum (topologischer Raum im engeren Sinn, Nr. 8);  $\mathfrak{U}(P)$ ,  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{P})$  Umgebungen (Nr. 3, 8),  $\mathfrak{U}_P$  Umgebung aus einem Fundamentalsystem (Nr. 9);  $\mathfrak{Z}_i^n$   $n$ -dimensionale Zellen (Nr. 24, 26).
- $a, g, m, r, \dots$  Mengen von Mengen.
- $\xi_1, \dots, \xi_n$  Koordinaten des  $\mathfrak{R}^n$  (Nr. 2);  $\zeta, \zeta_1^n, \dots$  Zellaufbauten (Nr. 32, 35).
- $A, H, \dots$  Abbildungen;  $Z, Z^n, \dots$  besondere als (kombinatorische) „Zellsysteme“ bezeichnete Zellaufbauten (Nr. 35);  $\Sigma_0^n, \Sigma^n$  besondere die  $\mathfrak{E}^n$  definierende Zellsysteme (Nr. 35).
- $\mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$  usw. (Nr. 10).

**1. Einleitung.** Über Dinge, die zur Analysis situs oder Topologie (beide Bezeichnungen werden synonym verwendet) gehören, wird an ganz verschiedenen Stellen der Encyclopädie berichtet. Die *kombinatorische Topologie* hat bereits 1908 im Artikel III AB 3 (*Dehn-Heegaard*) ihre Darstellung gefunden — zugleich die erste Veröffentlichung überhaupt auf dem Gebiet einer rein kombinatorisch ausgeprägten Analysis situs —, während über die *allgemeine Topologie* in Nr. 25, 26, über die Topologie (kontinuierlicher)  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die wir kurz  *$n$ -dimensionale Topologie* nennen werden, innerhalb der Nrn. 1—17 b (insbesondere in 16—17 b) des Artikels II C 9 a (*Zoretti-Rosenthal*) berichtet wird.<sup>1)1a)</sup> Zwischen den genannten Gebieten soll der folgende Artikel die notwendige *Brücke und gegenseitige Abgrenzung* herstellen. Insbesondere ist darum über neuere Arbeiten, die zur Klärung allgemeiner Raum Begriffe und ihrer verschiedenen Tragweiten geführt haben, sowie (in Abschnitt V) über die Einführung eines Dimensionsbegriffs in der allgemeinen Topologie berichtet worden. Im übrigen wird (abgesehen von einer Erörterung des Begriffs der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und einer kurzen Besprechung der Flächentopologie) auf die einzelnen Gebiete selbst nur so weit eingegangen, als zur Besprechung ihrer wechselseitigen Beziehungen erforderlich ist. Daher ist auch eine Übersicht über die Literatur der einzelnen Gebiete, die man in den genannten Artikeln findet, hier nicht beabsichtigt und nur gelegentlich ein Hinweis auf neuere Erscheinungen gebracht. Diese durch die ursprüngliche Zielsetzung ebenso wie durch äußere Gründe bedingte Einschränkung bringt es mit sich, daß manche, an sich besonders wichtige Arbeiten (z. B. über neue topologische Invarianten) unbesprochen bleiben.

Da fast alle Bezeichnungen (wie: Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, einseitig, abgeschlossen, offen, kompakt, stetig, Rand, Jordan-

1) Bei einer Reihe topologischer Arbeiten, in denen von anschaulichen Überlegungen ausgedehnter Gebrauch gemacht wird, blieb es zunächst dahingestellt, ob die endgültige Sicherung der Ergebnisse früher auf dem Boden der kombinatorischen oder auf dem der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Topologie gelingen wird. Jedenfalls hatten die älteren topologischen Arbeiten, über die in III AB 3 berichtet wird, Sätze der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Topologie im Auge. Nach *E. Study*, *Mathematik und Physik*, Braunschweig 1923, p. 6 möchte man die Topologie überhaupt noch nicht zur Mathematik, sondern eher zur Experimentalphysik zählen.

1 a) Zur Entwicklung der Topologie vgl. ferner Artikel III AB 1 (*F. Enriques*) Abschnitt II (Prinzipien der Theorie des Kontinuums) und die dort genannten Arbeiten von *F. Enriques* u. a., sowie den die neuere Entwicklung berücksichtigenden Überblick von *G. Feigl*, *Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver.* 37 (1928) p. 273—286.



kurve, kombinatorische Topologie usw.<sup>1b)</sup>) in der Literatur in verschiedenen Bedeutungen auftreten, mußte bei ihrer Verwendung die Entscheidung für einen bestimmten Begriff und auch die eine oder andere Neubenennung vorgenommen werden. Auch die Bezeichnung „Analysis situs“ oder „Topologie“ findet sich nicht immer übereinstimmend und bisweilen auf Dinge angewendet, die nicht in unserem Sinne „topologischen“, d. h. gegenüber eindeutigen, umkehrbar stetigen Transformationen invarianten Charakter haben. Diese Dinge bleiben, ebenso wie die Anwendungen der Topologie auf Nicht-topologisches, vom folgenden Bericht ausgeschlossen.<sup>2)</sup>

1b) Vgl. bezüglich der einzelnen Ausdrücke die folgenden Stellen dieses Artikels: bezüglich Mannigfaltigkeit: Nr. 23 ff. <sup>118</sup> <sup>119</sup> <sup>155</sup> <sup>155</sup> <sup>204</sup>); Schema einer Mannigfaltigkeit: <sup>203</sup>); zusammenhängend: <sup>29</sup> <sup>204a</sup>) Nr. 40; einfach zusammenhängend: <sup>167</sup> <sup>230a</sup>); zweiseitig, einseitig: <sup>168</sup> <sup>182a</sup> <sup>226a</sup>), vgl. auch <sup>5</sup>); offen: <sup>27a</sup> <sup>129</sup>); abgeschlossen: Nr. 6, 8, <sup>16</sup> <sup>129</sup>); fermé: <sup>129</sup>); kompakt: <sup>13</sup> <sup>16</sup> <sup>16b</sup> <sup>47</sup> <sup>129</sup>); stetig: Nr. 2, 6, <sup>27</sup> <sup>58</sup> <sup>266</sup> <sup>29</sup>); homogen: <sup>89</sup> <sup>135</sup>); homöomorph: <sup>4</sup> <sup>204</sup>); verwandt: <sup>204</sup> <sup>206</sup>); innerer Punkt: Nr. 8, <sup>26</sup> <sup>91</sup>); mittlerer Punkt: Nr. 19, 30, <sup>91</sup>); Begrenzung: <sup>28</sup>, <sup>91</sup>); Randpunkt: Nr. 19, 30, <sup>28</sup> <sup>91</sup>); Umgebung: Nr. 8, 9, <sup>31</sup>); classe (D), (E), (V): <sup>55</sup> <sup>66</sup>); Elementarraumstück (Elementarmannigfaltigkeit): <sup>156</sup>); Polyederfläche: <sup>157</sup>); Verkettung: <sup>19</sup> <sup>182</sup>); Kurve: Nr. 42, <sup>283</sup> <sup>285</sup> <sup>188</sup>); stetige Kurve: <sup>290</sup>); Jordankurve: <sup>179</sup>); kombinatorische Topologie: <sup>198a</sup> <sup>198b</sup> <sup>222d</sup>). — Über die Verwendung des Wortes „Dimension“ siehe Nr. 41, <sup>201</sup> <sup>233d</sup>). — Über die folgenden bedauerlicherweise sehr ähnlich lautenden, aber auf ganz verschiedene Dinge sich beziehenden Ausdrücke vgl.: bezüglich Trennbarkeits-(Trennungs-)axiome: Nr. 13; separabel: <sup>41</sup>); getrennt: <sup>44</sup> <sup>242</sup>); Zerlegungsräume: Nr. 21; Zerlegungssätze: <sup>180</sup> <sup>227b</sup>).

2) Speziell für die funktionentheoretischen Anwendungen, die der Analysis situs die Hauptimpulse gegeben haben, vgl. die Artikel von *W. F. Osgood*, *W. Wirtinger* und *R. Fricke* in Bd. II, 2. Anwendungen der Analysis situs auf Gebilde der algebraischen Geometrie bei *Picard-Simart*, *Fonct. alg.*, und *S. Lefschetz*, *L'an. situs etc.*, ferner *J. W. Alexander II*, *Rend. della R. Accad. dei Linc.* (5) 23 (1914), p. 55; *S. Lefschetz*, *Ann. of math.* (2) 21 (1919/20), p. 225, 28 (1927), p. 342, *Trans. Am. Math. Soc.* 28 (1926), p. 49, No. 72; *A. Comessatti*, *Ann. di mat.* (4) 5 (1928), p. 299 und die dort zitierten Arbeiten von *F. Severi*; *O. Zariski*, *Am. J. of Math.* 51 (1929), p. 305, *Proc. Nat. Acad.* 14 (1929), p. 494 und dort genannte Literatur. — Über Verwertung topologischer Begriffsbildungen und Sätze für eine allgemeine Theorie kontinuierlicher Gruppen s. *O. Schreier*, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 4 (1925), p. 15, 5 (1927), p. 233; *F. Leja*, *Ann. Soc. Polon. de math.* 3, Jg. 1924 (1925), p. 153, *Fund. math.* 9 (1927), p. 37—44; *H. Weyl*, *Math. Ztschr.* 24 (1926), p. 380; *E. Cartan*, *Acta math.* 48 (1926), p. 41, *Ann. di mat.* (4) 4 (1927), p. 209—256, *J. de Math.* (9) 6 (1927), p. 1—120; *H. Weyl-F. Peter*, *Math. Ann.* 97 (1927), p. 737—755; *H. Kneser*, *Math. Ztschr.* 25 (1926), p. 362—372; *Reinh. Baer*, *J. f. Math.* 160 (1929), p. 208—226. Wegen Anwendungen der Topologie vgl. auch *G. D. Birkhoff*<sup>174</sup>); *E. Cartan*, *Paris C. R.* 187 (1928<sup>3</sup>), p. 196; *G. de Rham*, *ib.* 188 (1929<sup>1</sup>), p. 1651.

Im obigen Sinne nicht-topologisch sind insbesondere auch Untersuchungen, bei denen Differenzierbarkeit der auftretenden Abbildungsfunktionen vorausgesetzt

Der Besprechung der drei Gebiete der Topologie: allgemeine,  $n$ -dimensionale und kombinatorische Topologie, ist im folgenden, um nicht mit dem abstraktesten zu beginnen, zur Einführung ein I. Abschnitt über Punktmenge in  $n$ -dimensionalen Zahlenräumen vorausgeschickt. Bei streng systematischer Anordnung müßte ein solcher Abschnitt hinter den über allgemeine Topologie gestellt werden.

## I. Punktmenge in $n$ -dimensionalen Zahlenräumen.

**2. Limiten in Punktmenge eines  $\mathfrak{R}^n$ .** Eine eindeutige Abbildung  $A$  einer Menge  $\mathfrak{P}$  von „Punkten des reellen  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathfrak{R}^n$ “ — d. h. von reellen Zahlen- $n$ -tupeln  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  — auf eine Menge  $\mathfrak{Q}$  des  $\mathfrak{R}^n$  heißt *stetig im Punkte  $P_0$*  von  $\mathfrak{P}$ , wenn für jede der Beziehung

$$(1) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} P_v = P_0$$

genügende Punktfolge  $P_1, P_2, \dots, P_v, \dots$  aus  $\mathfrak{P}$  auch die entsprechende Beziehung  $\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v = P'_0$  zwischen den Bildpunkten aus  $\mathfrak{Q}$  besteht.  $A$

heißt *stetig* (schlechtweg), wenn  $A$  in *allen* Punkten von  $\mathfrak{P}$  stetig ist. Dabei ist (1) gleichbedeutend mit  $\lim_{v \rightarrow \infty} \xi_{v,h} = \xi_{0,h}$ , wo  $\xi_{i,h}$  ( $h = 1, \dots, n$ )

die Koordinaten von  $P_i$  sind; damit sind die Limesbeziehungen für Punkte auf jene für reelle Zahlen zurückgeführt. Hat die eindeutige stetige Abbildung  $A$  eine eindeutige stetige Umkehrung  $A^{-1}$ , so heißt  $A$  eine *topologische*<sup>3)</sup> Abbildung. Zwei Punktmenge  $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$  heißen *homöomorph*<sup>4)</sup> (es besteht „*Homöomorphie*“ von  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$ ), wenn es eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{Q}$  gibt. Ist  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{Q}$  mit  $\mathfrak{R}$  homöomorph, so auch  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{R}$ . Die einer Gesamtheit untereinander homöomorpher Mengen gemeinsamen Eigenschaften heißen (*absolute*) *topologische* oder *topologisch invariante* Eigenschaften. Zu ihnen gehört die Mächtigkeit der Mengen [IA 5 (*A. Schoenflies*)] als die  $L$ -invariante gegenüber beliebigen eineindeutigen Abbildungen, ferner auch jede bei beliebigen eindeutigen stetigen, nicht notwendig eindeutig umkehrbaren Abbildungen invariante Eigenschaft (vgl. Nr. 33). Zu den wichtigsten Aufgaben der Analysis situs gehört es, in der Gesamtheit aller Punktmenge (oder innerhalb einer bestimmt abgegrenzten Teilgesamtheit) *die einzelne Punktmenge durch ein geeignetes System topologischer*

wird, wie in der „*topologie restreinte du premier ordre*“, worüber man vgl.: *G. Bouligand*, Bull. Soc. Math. de Fr. 56 (1928), p. 26 und dort zitierte Literatur; *M. Morse*, Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 813.

3) *L. E. J. Brouwer*, Paris C. R. 168 (1919), p. 845.

4) *H. Poincaré*<sup>154</sup>, p. 9.

Eigenschaften derart *vollständig zu kennzeichnen*, daß die Übereinstimmung in diesen Eigenschaften für die Homöomorphie zweier Mengen der betrachteten Gesamtheit nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Die Lösung dieser Aufgabe ist erst in wenigen Fällen gelungen (vgl. Nr. 31, 32). In anderen Fällen ist sogar die einfachere Aufgabe ungelöst, ein Verfahren anzugeben, das für irgend zwei Punktmengen einer bestimmten Gesamtheit zu entscheiden gestattet, ob sie homöomorph sind oder nicht (*Homöomorphieproblem*).

Außer diesen absoluten topologischen Eigenschaften betrachtet man auch relative. Hat man nämlich eine Teilmenge  $\mathfrak{A}_1$  einer Menge  $\mathfrak{P}$  (oder mehrere Teilmengen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ ), dann werden *relative topologische*<sup>5)</sup> Eigenschaften von  $\mathfrak{A}_1$  (bzw. des Systems der  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ ) bezüglich  $\mathfrak{P}$  solche Beziehungen zwischen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{A}_1$  (bzw.  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ ) genannt, die bei jeder topologischen Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auch zwischen der Bildmenge  $\mathfrak{Q}$  von  $\mathfrak{P}$  und den in ihr enthaltenen Bildmengen  $\mathfrak{B}_i$  der  $\mathfrak{A}_i$  bestehen.

Beispiele: Die Eigenschaft einer einfachen geschlossenen Kurve  $\mathfrak{A}_1$  auf einer Fläche  $\mathfrak{P}$ , diese zu zerstückeln oder nicht zu zerstückeln; die Eigenschaft einer einfachen geschlossenen Kurve  $\mathfrak{A}_1$ , im Raume  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}^3$  unverknotet oder verknotet zu liegen (analog: Verkettung mehrerer Kurven  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ ). Die Beispiele zeigen, daß in derselben Menge  $\mathfrak{P}$  zwei Teilmengen homöomorph, also für sich allein betrachtet von den gleichen absoluten topologischen Eigenschaften sein können, ohne doch die gleichen relativen Eigenschaften bezüglich  $\mathfrak{P}$  aufzuweisen. (Analog können zwei Systeme von Teilmengen aus  $\mathfrak{P}$ :  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  und  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ , so beschaffen sein, daß ihre Vereinigungsmengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  homöomorph und so aufeinander topologisch abbildbar sind, daß dabei  $\mathfrak{A}_i$  und  $\mathfrak{B}_i$  einander entsprechen ( $i = 1, 2, \dots$ ), ohne daß die beiden Systeme in ihren relativen Eigenschaften bezüglich  $\mathfrak{P}$  übereinstimmen müßten). Für die Gesamtheit aller Teilmengen von  $\mathfrak{P}$ , die zu einer gegebenen Teilmenge  $\mathfrak{A}_1$  von  $\mathfrak{P}$  homöomorph sind, ergibt sich daraus die Einteilung in die Klassen derjenigen, die in den relativen Eigenschaften bezüglich  $\mathfrak{P}$  übereinstimmen. Es entsteht die Aufgabe der Kennzeichnung jeder dieser Klassen durch ein geeignetes System rela-

5) Die Unterscheidung zwischen absoluten und relativen topologischen Eigenschaften betont (im Hinblick auf verschiedene Bedeutungen von „zweiseitig“ und „einseitig“) *F. Klein*, Math. Ann. 9 (1876), p. 478 = Ges. math. Abh. 2, p. 67. Vgl. hierzu *W. Dyck*, Math. Ann. 32 (1888), p. 457 u. 474, Anm.; ferner *L. Antoine*, Diss. Straßburg 1921 = J. de math. (8) 4 (1921), p. 221, Fund. math. 5 (1924), p. 265—287. Über absolute und relative topologische Eigenschaften s. ferner *F. Enriques*<sup>1a)</sup>, p. 69 (innere und äußere Eigenschaften); *B. v. Kerékjártó*, l. c. <sup>20a)</sup>.

tiver topologischer Eigenschaften, sowie die Aufgabe, für zwei gegebene homöomorphe Teilmengen von  $\mathfrak{P}$  zu entscheiden, ob sie zur selben Klasse gehören.

**3. Umgebungen, Abstände und Häufungspunkte in Punktmengen eines  $\mathfrak{R}^n$ .** Ist  $P_0 = (\xi_{01}, \dots, \xi_{0n})$  ein Punkt der Menge  $\mathfrak{P}$  des  $\mathfrak{R}^n$ , so werde eine Teilmenge von  $\mathfrak{P}$  dann als eine „Umgebung  $\mathfrak{U}(P_0)$  von  $P_0$ “, genauer als „Umgebung  $\mathfrak{U}(P_0 | \mathfrak{P})$  von  $P_0$  in  $\mathfrak{P}$ “ bezeichnet, wenn sie für ein geeignetes  $\eta > 0$  alle Punkte  $P = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  aus  $\mathfrak{P}$  enthält, für welche die Ungleichungen  $|\xi_h - \xi_{0h}| < \eta$  ( $h = 1, \dots, n$ ) gelten. Die nicht-negative Zahl

$$\overline{P_0 P_1} = \sqrt{\sum_{h=1}^n (\xi_{1h} - \xi_{0h})^2}$$

heißt der „Abstand“ oder die „Entfernung“ der Punkte  $P_0$  und  $P_1$ .

Bezeichnet man die Menge aller Punkte  $P$  aus  $\mathfrak{P}$ , für welche  $\overline{P_0 P} < \varrho$  (wo  $\varrho > 0$ ), als eine „sphärische Umgebung von  $P_0$ “, so kann man die Umgebungen  $\mathfrak{U}(P_0)$  auch definieren als Mengen mit einer sphärischen Umgebung von  $P_0$  als Teilmenge; und die obige Definition der Limesbeziehung (1) läßt sich ersetzen durch jede der folgenden: in jeder  $\mathfrak{U}(P_0)$  liegen fast alle  $P_v$ , d. h. alle  $P_v$  bis auf endlich viele; bzw.: es gilt  $\lim_{v \rightarrow \infty} \overline{P_0 P_v} = 0$ . Es läßt sich also für unsere Punkt-

mengen  $\mathfrak{P}$  des  $\mathfrak{R}^n$  der Begriff der Umgebung aus dem Abstand herleiten, der Limesbegriff aber aus jedem dieser beiden Begriffe.

Sei ferner  $\mathfrak{A}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{P}$ , so heißt ein Punkt  $P_0$  von  $\mathfrak{P}$  Häufungspunkt von  $\mathfrak{A}$ , wenn zu jedem  $\varrho > 0$  unendlich viele Punkte  $P$  aus  $\mathfrak{A}$  mit  $\overline{P_0 P} < \varrho$  existieren; wofür man auch sagen kann: in jeder  $\mathfrak{U}(P_0)$  existieren unendlich viele Punkte aus  $\mathfrak{A}$ ; oder: in  $\mathfrak{A}$  existiert eine Folge von (von  $P_0$  verschiedenen) Punkten mit dem Limes  $P_0$ . Der Begriff des Häufungspunktes läßt sich also für unsere Punktmengen  $\mathfrak{P}$  des  $\mathfrak{R}^n$  aus jedem der Begriffe Abstand, Umgebung, Limes herleiten.

Da sich aber auch mittels des Begriffs des Häufungspunktes die Umgebung  $\mathfrak{U}(P_0 | \mathfrak{P})$  definieren läßt als eine Menge, deren Komplementärmenge bezüglich  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{P} - \mathfrak{U}(P_0 | \mathfrak{P})$  den Punkt  $P_0$  nicht zum Häufungspunkt hat, so läßt sich schließlich für unsere Punktmengen  $\mathfrak{P}$  des  $\mathfrak{R}^n$  jeder der drei Begriffe Limes, Häufungspunkt, Umgebung aus jedem der anderen herleiten.

**4. Allgemeinere topologische Gebilde.** Der in Nr. 2 umschriebene Fragenkreis der Analysis situs bedarf jedoch, um ihren Anwendungen angepaßt zu sein, der Verallgemeinerung. Von den Gebieten, in denen die Analysis situs zunächst zur Geltung gekommen ist, bezogen sich nämlich

insbesondere die hierhergehörigen Betrachtungen der Funktionentheorie auf Gebilde, die nicht unmittelbar unter den Begriff der in Nr. 2 besprochenen Punktmengen fallen [z. B. über einer Ebene oder Kugel ausgebreitete *Riemannsche* Flächen; Fundamentalbereiche doppelperiodischer bzw. automorpher Funktionen, aufgefaßt als in abstracto geschlossene Flächen; vgl. Encykl. II B, insbes. II B 2 (*Wirtinger*), p. 130f.; II B 4 (*Fricke*), p. 358; ferner III AB 1 (*Enriques*), p. 115 ff.]. Das gleiche gilt von den Gebilden, die man durch jedwede Erweiterung eines Raumes mittelst uneigentlicher (unendlich ferner) Punkte erhält [vgl. Encykl. III AB 1 (*Enriques*), p. 72; II B 1 (*Osgood*), p. 26]. In allen angeführten Beispielen handelt es sich um Spezialfälle des später zu besprechenden Begriffs der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit (Nr. 24 ff.). Dabei sei zunächst folgendes hervorgehoben. In allen genannten Beispielen allgemeinerer Gebilde treten zu der Angabe, was als „Punkt“ eines Gebildes  $\mathfrak{P}$  anzusehen ist, bekannte Festsetzungen, die für jeden Punkt  $P_0$  angeben, welche Punktfolgen aus  $\mathfrak{P}$  als solche mit dem *Limes*  $P_0$  anzusehen sind. Man kann z. B. für jeden Punkt  $P_0$  festsetzen, welche Teilmengen von  $\mathfrak{P}$  als seine Umgebungen  $\mathfrak{U}(P_0)$  anzusehen sind, und daraus wie in Nr. 3 die Limesbeziehungen ableiten. Ein Beispiel für solche Festsetzungen ist es, wenn man die euklidische  $(\xi_1, \xi_2)$ -Ebene zu einem Gebilde  $\mathfrak{P}$  durch Hinzunahme eines einzigen uneigentlichen Punktes  $P_\infty$  erweitert und als  $\mathfrak{U}(P_\infty)$  jede Menge aus  $\mathfrak{P}$  bezeichnet, die  $P_\infty$  und für ein geeignetes  $\varrho > 0$  alle Punkte  $\xi_1^2 + \xi_2^2 > \varrho^2$  umfaßt; oder wenn man für eine *Riemannsche* Fläche über der  $(\xi_1 + i\xi_2)$ -Ebene festsetzt,  $\lim P_\nu = P_0$  solle dann und nur dann gelten, wenn für die Projektionen  $Q$  der Punkte  $P$  auf die  $(\xi_1 + i\xi_2)$ -Ebene  $\lim Q_\nu = Q_0$  gilt und außerdem fast alle  $Q_\nu$  im gleichen Blatt wie  $Q_0$  liegen (bzw. in den in  $Q_0$  zusammentreffenden Blättern, falls  $Q_0$  Verzweigungspunkt ist).

Sind derart Limesbeziehungen innerhalb eines Gebildes  $\mathfrak{P}$  festgesetzt, so läßt sich der Begriff der stetigen, und damit auch der der topologischen Abbildung von  $\mathfrak{P}$  auf irgend ein anderes mit Limesbeziehungen ausgestattetes Gebilde  $\mathfrak{Q}$  ganz wie in Nr. 2 erklären. Auch Mengen  $\mathfrak{M}$  von ganz beliebigen Elementen (z. B. von Geraden<sup>6)</sup>) konnten solcherart vom topologischen Standpunkt aus untersucht werden, sobald Festsetzungen über Limesbeziehungen zwischen ihren Elementen aufgestellt waren. Ein spezieller Fall solcher Festsetzungen ist es, wenn  $\mathfrak{M}$  eineindeutig auf eine Punktmenge  $\mathfrak{A}$  eines  $\mathfrak{R}^n$  bezogen

6) Vgl. II C 9, p. 1014. Analog können z. B. Mengen von Bewegungszuständen eines mechanischen Systems oder Mengen von Elementen einer kontinuierlichen Gruppe in topologischer Hinsicht untersucht werden.

und bestimmt wird, daß in  $\mathfrak{M}$  zwischen den Elementen jene Limesbeziehungen gelten sollen, die in  $\mathfrak{A}$  zwischen den Bildpunkten bestehen. Im wesentlichen dasselbe ist die Einführung von solchen *Koordinaten* für die Elemente von  $\mathfrak{M}$ , daß ihre Anzahl  $n$  endlich ist und durch sie eine *eindeutige* Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf den  $\mathfrak{R}^n$  oder allgemeiner (bei Relationen zwischen den Koordinaten) auf eine Teilmenge  $\mathfrak{A}$  des  $\mathfrak{R}^n$  geliefert wird.<sup>7)</sup>

5. **Übergang zur allgemeinen Topologie.** Wenn in der zuletzt besprochenen speziellen Weise (durch Koordinaten) die Limesbeziehungen in einer Menge  $\mathfrak{M}$  auf jene in einer Punktmenge  $\mathfrak{A}$  eines  $\mathfrak{R}^n$  zurückgeführt werden, tritt man nicht wesentlich aus dem in Nr. 2 abgegrenzten Rahmen heraus. In den anderen besprochenen Fällen aber hat man es mit einer grundsätzlichen Erweiterung zu tun, insofern *allgemeinere* Limes- oder Umgebungsbeziehungen auftreten, die nicht oder nicht unmittelbar den in Nr. 2, 3 betrachteten zugezählt werden können, sondern auf besonderen Festsetzungen beruhen. In den als Beispielen genannten oder in verwandten Fällen (*Riemannsche* Flächen, *Periodenparallelogramm*, durch Einführung *uneigentlicher* Punkte gewonnene projektive Ebene, Menge der Geraden des  $\mathfrak{R}^n$  usw.) ergab sich nun die Art, wie die Festsetzungen über Limes- (oder Umgebungs-)beziehungen zu treffen sind, jeweils aus den inneren Bedürfnissen des betrachteten Falles. Insofern erschienen diese Festsetzungen nicht als willkürliche, sondern als naturgemäße. Gewisse allgemeine, allen diesen Festsetzungen gemeinsame Eigenschaften wurden verwertet, ohne als solche besonders aufgestellt und formuliert zu sein. Die Frage war nicht aktuell, welche Schranken man sich hinsichtlich der Willkür bei solchen Festsetzungen über Limiten oder Umgebungen ziehen, welche Eigenschaften man von den festzusetzenden Beziehungen fordern wolle, um sie noch als Limes- oder Umgebungsbeziehungen zu bezeichnen. Die Verallgemeinerungen der Begriffe Limes bzw. Umgebung waren in naiver Weise, ohne eine scharfe Abgrenzung dieser Begriffe, erfolgt.

7) Sind jedoch in einer Menge  $\mathfrak{M}$  die Limesbeziehungen schon auf andere Weise festgesetzt, so gelten als geeignet zur Darstellung der ganzen Menge  $\mathfrak{M}$  nur solche Koordinaten, für welche die gegebenen Limesbeziehungen mit den aus den Koordinaten abzulesenden übereinstimmen [vgl. Art. III AB 7 (*E. Müller*), Anm. 6]. In den meisten Fällen werden aber in einer Menge  $\mathfrak{M}$ , deren Elemente geometrische Gebilde (z. B. gerade Linien, Kreise, Kugeln) sind, die Festsetzungen über die Limes- und Stetigkeitsbeziehungen (ausgesprochen oder stillschweigend) gerade erst vermöge eines eingeführten Systems von Koordinaten für die Elemente getroffen (unter Umständen vermöge verschiedener Koordinatensysteme in einzelnen Teilbereichen von  $\mathfrak{M}$ ).

Eine genauere Durcharbeitung ergab sich aber, als Stetigkeitsbetrachtungen auf Mengen von Elementen ausgedehnt wurden<sup>8)</sup>, für welche je nach der Untersuchungsrichtung wesentlich verschiedene Festsetzungen über Limes- oder Umgebungsbeziehungen in Frage kamen. Sei z. B.  $\mathfrak{P}$  die Menge aller in  $0 \leq x \leq 1$  definierten stetig differenzierbaren Funktionen  $f(x)$  mit  $f(0) = f(1) = 0$ ; jedes  $f(x)$  heiße ein Punkt  $P$  im Funktionenraum  $\mathfrak{P}$ . Man kann festsetzen

$$(2) \quad \lim P_\nu = P_0$$

solle gleichbedeutend sein mit „ $\lim f_\nu(x) = f_0(x)$  für jedes einzelne  $x$ “; oder man kann festsetzen, (2) solle gleichmäßige Konvergenz bedeuten: „ $|f_\nu(x) - f_0(x)| < \varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$  für  $\nu \geq \nu(\varepsilon)$  und alle  $x$ “; oder man kann festsetzen, (2) solle bedeuten, daß „überdies  $|f'_\nu(x) - f'_0(x)| < \varepsilon$  für jedes  $\varepsilon$  für  $\nu \geq \nu(\varepsilon)$  und alle  $x$ “. Je nach Bedarf ist die eine oder die andere dieser Festsetzungen vorteilhafter. Bildet man z. B.  $\mathfrak{P}$  eindeutig auf die Menge  $\mathfrak{R}^1$  der Punkte  $P' = (\xi)$  der Zahlenlinie ab

vermöge  $\xi = \int_0^1 f(x) dx$ , so ist diese Abbildung nur für die zweite

und dritte der obigen Festsetzungen stetig (im Sinn von Nr. 2). Diese beiden Festsetzungen lassen sich übrigens — im Sinn von Nr. 3 — aus Abstandsbeziehungen herleiten, wenn als Abstand von  $f(x)$  und  $f_0(x)$  in  $0 \leq x \leq 1$  die Zahl  $\text{Max. } |f(x) - f_0(x)|$  bzw. die größere der Zahlen  $\text{Max. } |f(x) - f_0(x)|$ ,  $\text{Max. } |f'(x) - f'_0(x)|$  erklärt wird. Die diesen beiden Abstandsfestsetzungen im Sinn von Nr. 3 entsprechenden Festsetzungen des Umgebungsbegriffes sind aus der Variationsrechnung bei Untersuchung des starken, bzw. schwachen Extremum bekannt; vgl. Artikel II A 8 (*A. Kneser*) Nr. 19, II A 8a (*Zermelo-Hahn*) Nr. 2.<sup>8a)</sup>

Werden derartige allgemeine Mengen (Funktionenräume, Kurvenräume<sup>8)</sup>) aufeinander oder auf Punktmengen im Sinn von Nr. 2 ab-

gebildet, wovon wir eben in  $\xi = \int_0^1 f(x) dx$  ein Beispiel hatten, so be-

stätigt man in den verschiedensten Fällen eine Reihe allgemeiner Sätze, die auch für Abbildungen von Punktmengen aufeinander gelten, und zwar darum, weil ihre Quelle unabhängig von den Besonderheiten der Einzelfälle in gewissen allgemeinen Eigenschaften der eingeführten Limes- bzw. Umgebungsbeziehungen liegt. Die Erkenntnis dieses Um-

8) Vgl. II C 9, Nr. 25 ff.

8a) Eine neuere instruktive Auseinandersetzung über die Möglichkeit verschiedener (je nach der Untersuchungsrichtung gewählter) Limes-Festsetzungen findet man bei *M. Fréchet*, *Fund. math.* 9 (1927), p. 25.

standes führte zu selbständigen Theorien dieser Beziehungen, gegründet auf feste axiomatische Abgrenzungen irgendeines dazu brauchbaren Begriffs, wie des Limes (Nr. 6), des Häufungspunktes (Nr. 7), der Umgebung (Nr. 8), der abgeschlossenen Hülle, der offenen Menge, der abgeschlossenen Menge (Nr. 10), des inneren Punktes (Nr. 8). Auf alle derart definierten allgemeinen „Räume“ (Mengen mit Limes-, Umgebungs- oder Häufungsbeziehungen usw.) läßt sich der Begriff der topologischen Abbildung (Nr. 2) übertragen, und das Studium der gegenüber solchen Abbildungen invarianten Eigenschaften dieser Räume, einschließlich der relativen Eigenschaften ihrer Teilmengen, bildet den Gegenstand der „allgemeinen Topologie“ (Nr. 6—22). Sie stellt zugleich die Begriffsbildungen zurecht für eine geeignete Einführung der „ $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten“ (Nr. 23—30), unter die, wie erwähnt, auch alle Beispiele in Nr. 4 fallen und deren topologische Untersuchung den Gegenstand der „ $n$ -dimensionalen Topologie“ ausmacht.

## II. Allgemeine Topologie.

**6. Limesräume.** Wir besprechen zunächst die Theorie des allgemeinen Limesbegriffes, wie sie von *M. Fréchet* in Angriff genommen und von ihm selbst und anderen weitergeführt wurde.<sup>9)</sup> Eine Menge  $\mathfrak{M}$  von Elementen werde ein *Limesraum* oder ein Raum  $\mathfrak{L}$  genannt<sup>10)</sup> — die Elemente von  $\mathfrak{M}$  werden Einfachheit halber „Punkte“ des Limesraums genannt —, wenn für alle aus Elementen von  $\mathfrak{M}$  gebildeten Folgen  $P_1, P_2, \dots, P_\nu, \dots$  Festsetzungen getroffen sind von folgender Art:

I. Jede Folge wird entweder als Folge ohne Limes oder als Folge mit Limes bezeichnet, in letzterem Falle wird ihr ein durch die Folge eindeutig bestimmtes Element  $P_0$  als Limes zugeordnet und geschrieben:  $\lim_{\nu=\infty} P_\nu = P_0$ .

II. Dabei sind die folgenden Forderungen („Limesaxiome“) erfüllt:

1. Wenn alle  $P_\nu$  gleich  $P_1$  sind, so ist  $\lim_{\nu=\infty} P_\nu = P_1$ .

2. Wenn  $\lim_{\nu=\infty} P_\nu = P_0$ , so ist  $\lim_{\nu=\infty} P_{n_\nu} = P_0$  für jede Teilfolge

( $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ ).<sup>10a)</sup>

9) *M. Fréchet*, Palermo Rend. 22 (1906), p. 1—74. Vgl. im übrigen, auch wegen Literatur, II C 9, Nr. 26.

10) *Fréchet* sagt dafür „classe ( $L$ )“.

10a) *H. Kneser*, Math. Ztschr. 25 (1926), p. 362 nennt einen Limesraum „Konvergenzraum“, wenn er noch dem folgenden Axiom genügt: aus  $\lim P_\nu = P_0$  folgt  $\lim Q_\nu = P_0$ , falls  $Q_1$  beliebig und  $Q_{\nu+1} = P_\nu$ .



Jede Punktmenge  $\mathfrak{P}$  eines  $\mathfrak{R}^n$  ist ein solcher Limesraum (vgl. Nr. 2).<sup>10b)</sup> Unter den eindeutigen Abbildungen eines Limesraumes  $\mathfrak{L}$  auf einen anderen  $\mathfrak{L}'$  wurde in erster Linie der besondere Fall studiert — und als „Funktionalrechnung“ bezeichnet —, daß man für  $\mathfrak{L}$  den Raum  $\mathfrak{R}^1$  (Zahlengerade) nimmt, was mit der Betrachtung in  $\mathfrak{L}$  definierter reeller Funktionen („Operationen“ genannt) zusammenfällt.<sup>11)</sup>

Eine eindeutige Abbildung  $A$  eines Limesraumes  $\mathfrak{L}$  auf einen anderen  $\mathfrak{L}'$  heiße wie in Nr. 2 stetig, genauer: „limesstetig“, wenn zugleich mit jeder in  $\mathfrak{L}$  gültigen Beziehung  $\lim P_v = P_0$  auch für die Bildelemente gilt:  $\lim P'_v = P'_0$ . Es heißt  $A$  topologisch („limestopologisch“), wenn  $A$  eindeutig umkehrbar und  $A$  sowie  $A^{-1}$  stetig ist.<sup>12)</sup>

Eine Menge  $\mathfrak{M}$  in einem Raum  $\mathfrak{L}$  heißt abgeschlossen (in  $\mathfrak{L}$ ), wenn sie alle (in  $\mathfrak{L}$  liegenden) Limiten der in ihr liegenden Punktfolgen enthält, sie heißt kompakt (in  $\mathfrak{L}$ ), wenn jede unendliche Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  eine Folge verschiedener Punkte mit einem (nicht notwendig zu  $\mathfrak{M}$  gehörenden) Limes umfaßt (Fréchet<sup>13)</sup>). Beides sind gegenüber beliebigen stetigen (somit speziell gegenüber topologischen) Abbildungen invariante relative Eigenschaften (vgl. Nr. 2) von  $\mathfrak{M}$  zu  $\mathfrak{L}$ . Wichtiger<sup>13a)</sup> noch ist die folgende absolute topologische Eigenschaft: Ein Raum  $\mathfrak{L}$  heißt in sich kompakt<sup>14)</sup> oder absolut-kompakt<sup>15)</sup>, wenn jede unendliche Menge aus  $\mathfrak{L}$  eine Folge verschiedener Punkte mit einem in  $\mathfrak{L}$  liegen-

10b) Auch jede Menge  $\mathfrak{M}$  von Punkten eines Limesraumes  $\mathfrak{L}$  kann selbst als ein Limesraum aufgefaßt werden, wenn man für die Punkte aus  $\mathfrak{M}$  festsetzt, es solle für sie  $\lim P_v = P_0$  dann und nur dann gelten, wenn diese Gleichung für dieselben Punkte in  $\mathfrak{L}$  gilt. Daß ein so gewonnener „Ausschnitt unserer ursprünglichen Limesrelation auf einen Teil  $\mathfrak{M}$ “ [vgl. zu dieser Ausdrucksweise *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 175] stets ebenfalls die Limesaxiome erfüllt, können wir kurz so ausdrücken: das System der Limesaxiome ist „ausschnittinvariant“ (vgl. noch *F. Hausdorff*<sup>26a)</sup>). Daraus folgt, daß jede für Limesräume erklärte topologische Eigenschaft auch stets einen Sinn hat für Mengen eines Limesraumes.

11) Vgl. II C 9, p. 1015. Ebendort p. 1014 und bei Fréchet, l. c. <sup>9)</sup>, p. 1 siehe über die ersten Arbeiten zur Funktionalrechnung von Ascoli, Volterra, Arzelà und Hadamard.

12) Über die Beziehungen zwischen dem Begriffe limesstetig (bzw. limestopologisch) und dem später genannten Begriffe umgebungsstetig (bzw. umgebungstopologisch) vgl. Nr. 15.

13) Vgl. II C 9, p. 1016.

13a) Hierzu beachte man, daß von den kompakten Mengen vor allem die abgeschlossenen Bedeutung erlangt haben und daß die wichtigsten Eigenschaften der abgeschlossenen kompakten Mengen darauf beruhen, daß sie absolut-kompakte Mengen (vgl. im Text nach Anm. 16) sind.

14) Vgl. <sup>22)</sup> p. 243, 264.

15) *H. Tietze*, Math. Ann. 91 (1924). p. 211.

den Limes umfaßt, anders gesagt, wenn jede Menge aus  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}$  kompakt ist.<sup>16)</sup> Da jede Menge  $\mathcal{A}$  eines Limesraumes  $\mathcal{Q}$  selbst als Limesraum angesehen werden kann (vgl. <sup>10b)</sup>), so ist durch unsere Definition auch erklärt, wann eine in einem Raum  $\mathcal{Q}$  gelegene Menge  $\mathcal{A}$  absolut-kompakt genannt werden soll: wenn nämlich jede unendliche Teilmenge  $\mathcal{A}_1$  von  $\mathcal{A}$  eine Folge verschiedener Punkte mit einem Limes in  $\mathcal{A}$  umfaßt. Man kann dafür auch sagen: Eine Menge  $\mathcal{A}$  heißt absolut-kompakt, wenn  $\mathcal{A}$  in dem Limesraum  $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ , der durch  $\mathcal{A}$  gemäß <sup>10b)</sup> gegeben ist, kompakt ist.<sup>16a) 16b)</sup>

Die ganz wenigen Forderungen, die vermöge II. 1., 2. an die Limesbeziehungen gestellt sind, bedingen eine solche Allgemeinheit des Begriffes Limesraum, daß unter diesen Begriff noch sehr seltsame Gebilde fallen.<sup>17)</sup> Trotzdem fließt eine Reihe allgemeiner Sätze allein aus den Forderungen 1., 2. Wir verweisen diesbezüglich auf II C 9. Um eine stärkere Annäherung an die für Punktmengen in Räumen  $\mathcal{R}^n$  geltenden Verhältnisse zu erhalten, kann man in verschiedener Weise zu 1., 2. noch weitere Forderungen hinzunehmen.<sup>18)</sup>

**7. Räume mit Festsetzungen über Häufungspunkte.** Wie eine vom Grundbegriff des Häufungspunktes ausgehende Theorie aufgebaut

16) Bisweilen findet man das Wort „abgeschlossen“ im Sinn von absolut-kompakt verwendet (vgl. die Bemerkungen l. c. <sup>15)</sup> p. 219), neuerdings im gleichen Sinn (z. B. von *S. Saks*, l. c. <sup>17a)</sup> p. 289, 291) auch das Wort „kompakt“ (vgl. insbesondere <sup>16b)</sup> über den Ausdruck „kompakter Raum“).

16a) Man kann die Definition des absolut-kompakten Raumes auch auf den Begriff der in einem Raume  $\mathcal{Q}$  kompakten Menge  $\mathcal{A}$  zurückführen und definieren: ein Raum  $\mathcal{Q}$  heiße dann absolut-kompakt, wenn die aus allen Punkten von  $\mathcal{Q}$  bestehende Menge  $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$  in  $\mathcal{Q}$  kompakt ist. Die im Text befolgte Anordnung entspricht der Auffassung des einen der beiden Referenten (*T.*), daß es wünschenswert ist, möglichst nur bei Erklärung von *relativen* topologischen Eigenschaften von Mengen in einem Raum, bei Erklärung von *absoluten* topologischen Eigenschaften aber von Räumen zu sprechen.

16b) Da man die in <sup>16a)</sup> gegebene Definition des absolut-kompakten Raumes etwas weniger genau auch so ausdrücken kann:  $\mathcal{Q}$  heißt absolut-kompakt, wenn  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}$  kompakt ist, so ist erklärlich, wenn neuerdings häufig kurz von „*kompakten Räumen*“ im Sinne von „*absolut-kompakten Räumen*“ gesprochen wird. Auch der vorliegende Artikel hat diese Wandlung in der Terminologie mitgemacht. Die (an sich nicht erfreuliche) doppelte Verwendung des Wortes „kompakt“ ist übrigens dann unbedenklich, wenn (wie im folgenden geschehen soll) genau zwischen den in einem Raum kompakten Mengen und den kompakten Räumen unterschieden wird.

17) Vgl. z. B. II C 9, p. 1024, Anm. 534.

18) Durch solche weitere Forderungen werden z. B. die von *Fréchet* als „classes (*S*)“ bezeichneten Limesräume gewonnen; vgl. II C 9, Anm. 509, und in diesem Artikel Anm. <sup>71)</sup> und <sup>10a)</sup>.

werden kann, hat *Fr. Riesz*<sup>19)</sup> skizziert.<sup>20)</sup> Für die Elemente („Punkte“) einer Menge  $\mathfrak{M}$  seien Festsetzungen getroffen von folgender Art:

I. Zu jeder in  $\mathfrak{M}$  enthaltenen Menge  $\mathfrak{A}$  und zu jedem Punkt  $P$  von  $\mathfrak{M}$  wird angegeben, ob  $P$  als Häufungspunkt von  $\mathfrak{A}$  zu bezeichnen ist oder nicht.

II. Dabei sind die folgenden Forderungen („Axiome des Häufungspunktes“) erfüllt<sup>20a)</sup>:

1. Ein Häufungspunkt von  $\mathfrak{A}$  ist auch Häufungspunkt jeder  $\mathfrak{A}$  enthaltenden Menge aus  $\mathfrak{M}$ .

2. Für jede Zerlegung von  $\mathfrak{A}$  in zwei Teilmengen;  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$  ist jeder Häufungspunkt von  $\mathfrak{A}$  zugleich Häufungspunkt wenigstens einer der Mengen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ .

3. Eine nur aus einem Punkte bestehende Menge  $\mathfrak{A}$  hat keinen Häufungspunkt.

4. Jeder Häufungspunkt von Häufungspunkten einer Menge ist selbst Häufungspunkt derselben.

Wir nennen dann  $\mathfrak{M}$  einen Raum  $\mathfrak{H}$  (*Raum mit Festsetzungen über Häufungspunkte*). Gemäß 2. und 3. ist dabei jede endliche Menge  $\mathfrak{A}$  ohne Häufungspunkt. — Wegen der Beziehungen der Theorie der Räume  $\mathfrak{H}$  zu der der Limesräume vgl. Nr. 15.

**8. Räume mit Umgebungsbeziehungen.** Außer den Begriffen des Limes bzw. des Häufungspunktes ist vor allem der Umgebungsbegriff zum Ausgangspunkt für eine Theorie allgemeiner Räume gemacht

19) *F. Riesz*, l. c. <sup>20)</sup> und *Atti IV. Congr. internaz. mat.*, Roma 1908, II (1909), p. 18/24. Wir sagen „Häufungspunkt“ statt wie *Riesz* „Verdichtungsstelle“, da das Wort „Verdichtungspunkt“ und das damit sprachlich gleichwertige „Kondensationspunkt“ eine besondere Bedeutung erhalten haben. Vgl. z. B. II C 9, p. 870. — *F. Riesz* gibt l. c., p. 22 auch Axiome für „Verkettung“, d. i. eine gewisse Verallgemeinerung der Beziehung zwischen einer Menge und einem ihrer Häufungspunkte. Wegen weiterer Literatur vgl. II C 9, Anm. 506; ferner *M. Fréchet*, *Fund. math.* 12 (1928), p. 298—310 und *Fréchet*, *Esp. abstr.*, p. 185 ff.

20) *F. Riesz* hat erstmals in seiner Arbeit „Die Genesis des Raumbegriffs“, *Math. naturw. Berichte aus Ungarn* 24, Jg. 1906, p. 309—352, diese Theorie dargestellt und außer drei mit II. 1, 2, 3 gleichwertigen Axiomen als viertes ein Trennbarkeitsaxiom (vgl. Nr. 13) aufgestellt (l. c. p. 318). Das im folgenden unter II. 4 angeführte Axiom wurde als Ergänzung von 1, 2, 3 von *W. Groß* (1913) eingeführt [vgl. *L. Vietoris*, *Monatsh. Math. Phys.* 31 (1921), p. 175]; davon unabhängig von *M. Fréchet*, vgl. *Bull. sc. math.* (2) 42 (1918), p. 138—156, *Sir Asutosh Mookerjee's Commemor.* Vol. 2, *Calcutta* (1922), p. 333—394 und *Fréchet*, *Esp. abstr.*, p. 181—188.

20a) Ein anderes System von Forderungen bei *B. v. Keréjártó*, *Acta litt. ac. scient. Szeged* 2 (1925), p. 157.

worden, und zwar von *R. E. Root*<sup>21)</sup> und in besonders umfassender Weise von *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, während bereits vorher *D. Hilbert*<sup>23)</sup> und *H. Weyl*<sup>24)</sup> für spezielle Fälle entsprechende Kennzeichnungen des Umgebungsbegriffes angegeben haben. Unter einem „Umgebungsraum“ oder „topologischen Raum“ (im engeren Sinne)<sup>25)</sup> oder „Raum  $\mathfrak{R}$ “ werde eine Menge  $\mathfrak{M}$  verstanden, für deren Elemente — die wieder „Punkte“ heißen — Festsetzungen folgender Art getroffen sind:

I. Den Punkten  $P$  von  $\mathfrak{M}$  sind gewisse Teilmengen von  $\mathfrak{M}$  zugewiesen, „Umgebungen von  $P$ “ genannt und mit  $\mathfrak{U}(P)$  bezeichnet [im Bedarfsfalle ausführlicher: „Umgebungen von  $P$  in  $\mathfrak{M}$ “:  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ ].

II. Dabei sind die folgenden Forderungen („Umgebungsaxiome“) erfüllt<sup>26)</sup>:

( $\bar{A}$ ) a) Zu jedem  $P$  von  $\mathfrak{M}$  gibt es mindestens eine  $\mathfrak{U}(P)$ ; b) jede  $\mathfrak{U}(P)$  enthält  $P$ .

( $\bar{B}$ ) a) Jede eine  $\mathfrak{U}(P)$  enthaltende Menge  $\mathfrak{B}$  ist selbst eine Umgebung von  $P$ ; b) desgleichen der Durchschnitt  $\mathfrak{U}_1(P) \cdot \mathfrak{U}_2(P)$  zweier Umgebungen von  $P$ .

( $\bar{C}$ ) Ist die Menge  $\mathfrak{U}$  eine Umgebung von  $P$ , so ist es auch die Menge aller „inneren“ Punkte von  $\mathfrak{U}$ , d. h. aller jener Punkte  $X$ , für welche  $\mathfrak{U}$  eine Umgebung von  $X$  ist.

( $\bar{D}$ ) Ist  $P \neq Q$ , so gibt es Umgebungen  $\mathfrak{U}(P)$ ,  $\mathfrak{B}(Q)$  ohne gemeinsamen Punkt.

Gemäß Nr. 3 ist jede Punktmenge  $\mathfrak{P}$  eines  $\mathfrak{R}^n$  ein topologischer

21) *R. E. Root*, Amer. J. of math. 36 (1914), p. 79/104. Vorher eine kurze Mitteilung in Bull. Am. Math. Soc. 17 (1910/11), p. 538/9. Vgl. auch II C 9, p. 1020.

22) *F. Hausdorff*, Grundz., Kap. 7, 8.

23) *D. Hilbert*, Math. Ann. 56 (1902), p. 383 = Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. (1909), p. 179 f.

24) *Weyl*, R. Fl., p. 17 f.

25) *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 213; im weiteren Sinne sollen als topologische Räume alle in Nr. 6, 7, 8, 10 eingeführten allgemeinen Räume bezeichnet werden. Im folgenden wird die Bezeichnung „topologischer Raum“ schlechtweg stets im engeren Sinne gemeint.

Verzichtet man von den folgenden Forderungen auf ( $\bar{B}$ ), ( $\bar{C}$ ), ( $\bar{D}$ ), so erhält man die von *M. Fréchet* neuerdings als „Räume  $V$ “ bezeichneten und untersuchten Räume; vgl. Fund. math. 10 (1927), p. 328, 14 (1929), p. 118. Zur Terminologie vgl. II C 9, l. c.<sup>66)</sup>.

26) Vgl. *H. Tietze*<sup>30)</sup>, p. 295 sowie <sup>122)</sup>, p. 2 [38]; ( $\bar{A}$ ) bis ( $\bar{D}$ ) stellen eine das Wesentliche nicht berührende Modifikation der *Hausdorff*schen Einführung des Umgebungsbegriffs dar (vgl. Nr. 9, speziell <sup>81)</sup>, sowie II C 9, p. 1020/21); sie können auch als Axiome des Begriffs „innerer Punkt“ aufgefaßt werden, wenn man statt „ $\mathfrak{U}$  ist Umgebung von  $P$ “ sagt: „ $P$  ist innerer Punkt von  $\mathfrak{U}$ “.

Raum.<sup>26a)</sup> Wird jedem Punkt  $P$  eines topologischen Raumes  $\mathfrak{X}$  eindeutig ein bestimmter Punkt  $P'$  eines topologischen Raumes  $\mathfrak{X}'$  zugeordnet, so heißt eine solche Abbildung stetig<sup>27)</sup>, genauer: „*umgebungsstetig*“, wenn es zu jeder  $\mathfrak{U}(P' | \mathfrak{X}')$  eine  $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{X})$  gibt, deren sämtliche Punkte auf Punkte von  $\mathfrak{U}(P' | \mathfrak{X}')$  abgebildet werden. Eine 1-1-deutige Abbildung  $A$  zweier topologischer Räume  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}'$  heißt topologisch (genauer: „*umgebungstopologisch*“), wenn  $A$  und  $A^{-1}$  stetig sind, was, wie man leicht sieht, soviel besagt, als daß jede  $\mathfrak{U}(P' | \mathfrak{X}')$  Bild einer  $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{X})$  ist und umgekehrt.

Wird (wie in Nr. 3) als Häufungspunkt einer Menge  $\mathfrak{M}$  eines Raumes  $\mathfrak{X}$  (einer Teilmenge  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{X}$ ) ein Punkt  $P$  bezeichnet, wenn jede  $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{X})$  unendlich viele Punkte von  $\mathfrak{M}$  enthält (wodurch dann ein Raum  $\mathfrak{H}$  definiert wird (vgl. Nr. 7)), so heißt  $\mathfrak{M}$  *abgeschlossen* (in  $\mathfrak{X}$ ), wenn  $\mathfrak{M}$  jeden seiner Häufungspunkte enthält;  $\mathfrak{M}$  heißt *offen* (in  $\mathfrak{X}$ )<sup>27a)</sup>, wenn  $\mathfrak{M}$  Umgebung jedes seiner Punkte ist. Die *Begrenzung*<sup>28)</sup> einer Menge  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{X}$  bilden jene Punkte von  $\mathfrak{X}$ , die weder innere Punkte (s. o.) von  $\mathfrak{M}$  noch von  $\mathfrak{X} - \mathfrak{M}$  (der Komplementärmenge) sind. Ein Raum  $\mathfrak{X}$  heißt *zusammenhängend*<sup>29)</sup>, wenn er nicht in zwei punkt-

26a) Auch jede Punktmenge eines topologischen Raumes kann selbst als ein topologischer Raum aufgefaßt werden (*Hausdorff*, Grundz., p. 241): die Umgebungsaxiome sind „*ausschnittinvariant*“ (vgl. 10<sup>b)</sup>).

27) Vgl. *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 359.

27a) Über eine andere Verwendung des Wortes „*offen*“ siehe 12<sup>9)</sup>.

28) Nach *C. Jordan* (Definition von „*frontière*“), vgl. II C 9, p. 880; das vielfach synonym mit Begrenzung verwendete Wort „*Rand*“ brauchen wir in anderem Sinne, vgl. Nr. 19, 30.

29) Diese — von *N. J. Lennes* (1911) und *F. Hausdorff* (1914) unabhängig eingeführte — Definition (vgl. II C 9, p. 897) hat bereits 1906 *F. Riesz*, I. c. 20), p. 321 gegeben; vgl. auch ebenda p. 315 die Definition eines zusammenhängenden physikalischen Kontinuums. Für diesen Begriff „*zusammenhängend*“ wird in Artikel II C 9 die Bezeichnung „*lückenlos zusammenhängend*“ gebraucht, die Bezeichnung „*zusammenhängend*“ aber im Sinne der Definition von *G. Cantor* (I. c., p. 896). Da aber der letztere Begriff, im Gegensatz zum ersteren, nicht topologisch invariant (vgl. I. c., p. 950) und überhaupt viel weniger weittragend ist (die *Cantorsche* Definition ist nur auf spezielle topologische, nämlich metrische Räume [Nr. 16] übertragbar), so entscheiden wir uns dafür, die einfachere Bezeichnung „*zusammenhängend*“ dem wichtigeren *Riesz-Lennes-Hausdorffschen* Begriffen zu geben. — Für diese Verwendung des Wortes „*zusammenhängend*“ spricht auch der Umstand, daß man allgemein sagt: eine Gerade wird durch einen ihrer Punkte  $\xi = \alpha$  in zwei Halbgerade  $\xi > \alpha$  und  $\xi < \alpha$  „*zerlegt*“, ebenso eine Ebene  $\mathfrak{R}^2$  durch eine Jordankurve  $\mathfrak{K}$  (z. B. eine Kreislinie) in zwei „*getrennte*“ Gebiete; nach *Riesz-Lennes-Hausdorff* ist die Restmenge (die Menge der Punkte  $\xi \neq \alpha$  bzw. die Menge  $\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{K}$ ) *nicht* zusammenhängend; nach der *Cantorsche* Definition aber wäre diese nach der „*Zerlegung*“ übrig bleibende Restmenge als

fremde, nicht leere, in  $\mathfrak{X}$  abgeschlossene Mengen zerlegbar ist, d. h. wenn von je zwei komplementären, nicht leeren Teilen mindestens einer einen Häufungspunkt des andern enthält.

**9. Fundamentalsysteme von Umgebungen.** Wird jedem Punkte  $P$  eines topologischen Raumes  $\mathfrak{X}$  eine gewisse Teilmenge aus der Menge seiner Umgebungen zugewiesen — die in die Teilmenge aufgenommenen mögen mit  $\mathfrak{U}_P$  bezeichnet werden, — dann werde von einem *Fundamentalsystem von Umgebungen* gesprochen, wenn es für jeden Punkt  $P$  zu jeder  $\mathfrak{U}(P)$  eine in  $\mathfrak{U}(P)$  enthaltene  $\mathfrak{U}_P$  gibt. Nimmt man z. B. für  $\mathfrak{X}$  den  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathfrak{R}^n$ , so stellen alle sphärischen Umgebungen (Nr. 3) ein Fundamentalsystem vor, desgleichen bereits alle sphärischen Umgebungen mit rationalem Radius  $\rho$ . Aus einem Fundamentalsystem gewinnt man die Gesamtheit aller  $\mathfrak{U}(P)$ , indem man alle Mengen nimmt, die eine  $\mathfrak{U}_P$  als Teilmenge enthalten. Da zufolge (*C*) in jeder  $\mathfrak{U}(P)$  eine offene Umgebung von  $P$  enthalten ist, so gibt es stets aus lauter offenen Umgebungen gebildete Fundamentalsysteme.

Hier mag eine Bemerkung Platz finden über den Unterschied zwischen der *Hausdorff'schen* Theorie der topologischen Räume und der modifizierten Fassung, in der sie im vorstehenden wiedergegeben wurde. In unserer Terminologie gesprochen, betrachtet *Hausdorff* überhaupt keine anderen als offene Umgebungen, und zwar für jeden topologischen Raum nur diejenigen eines bestimmten Fundamentalsystems. Nun erfüllt jedes solche Fundamentalsystem besondere Forderungen (von *Hausdorff* als Umgebungsaxiome (*A*), (*B*), (*C*), (*D*) bezeichnet, vgl. II C 9, p. 1021), und nach *Hausdorff's* Definition ist ein topologischer Raum eine Menge, deren Elementen Umgebungen zugewiesen sind, die *diesen* Forderungen genügen; da aber umgekehrt jedes System von — den Elementen  $P$  einer Menge  $\mathfrak{M}$  zugeordneten — Teil-

„zusammenhängend“ zu bezeichnen, was eine kaum erträgliche sprachliche Härte darstellt.

Für den *Riesz-Lennes-Hausdorff'schen* Begriff „zusammenhängend“ gebraucht *L. Vietoris* in seinen früheren Arbeiten, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921) und 32 (1922), die Bezeichnung „stetig“, was allerdings dem naiven Sprachgebrauch, sowie den Ausdrücken „Stetigkeit der Geraden“, „Stetigkeitsaxiom“ entspricht, aber wegen der nun einmal für Funktionen und Abbildungen festgelegten Bedeutung des Wortes stetig nicht übernommen werden soll. Eine andere Definition als im Text für „zusammenhängend“ gibt für Konvergenzräume *H. Kneser*, l. c. <sup>10a</sup>). Vgl. noch die Definition für „getrennt“ <sup>44</sup>), <sup>242</sup>), die mit der Textdefinition für „zusammenhängend“ aufs engste zusammenhängt. Vgl. ferner <sup>34c</sup>).

Wegen des in der kombinatorischen Topologie eingeführten Begriffes „zusammenhängend“ vgl. <sup>204a</sup>).

mengen  $\mathcal{U}_P$ , das diesen Forderungen genügt, stets<sup>30)</sup> (in unserem Sinne) ein Fundamentalsystem von Umgebungen eines aus den Elementen von  $\mathcal{M}$  gebildeten topologischen Raumes ist, so deckt sich unsere Darstellung mit der *Hausdorff'schen* hinsichtlich der Abgrenzung des Begriffs „topologischer (Umgebungs-)Raum“ (wenn auch nicht hinsichtlich des Begriffs „Umgebung“<sup>31)</sup>). Zwei Fundamentalsysteme desselben topologischen Raumes nennt *Hausdorff* „gleichwertige Umgebungssysteme“.

**10. Andere Fassungen des Begriffs des topologischen Raumes.** In vielen Überlegungen ist  $(\bar{D})$  ersetzbar durch das schwächere Axiom:

$(\bar{D}_0)$ . Zu irgend zwei Punkten  $x$  und  $y$  gibt es mindestens eine Umgebung von  $x$ , welche  $y$  nicht enthält.

Dadurch erhält man in  $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C}), (\bar{D}_0)$  ein zu den obigen Axiomen (1), (2), (3), (4) der Räume  $\mathfrak{S}$  äquivalentes System.<sup>31a)</sup>  $(\bar{D})$  geht über  $(\bar{D}_0)$  dadurch hinaus, daß es die Einzigkeit des auf Grund der Umgebungen definierten Limes fordert; auf Grund von  $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C}), (\bar{D}_0)$  allein kann eine Folge von Punkten immer noch mehrere Limiten haben, d. h. Punkte, in deren beliebig kleinen Umgebungen fast alle Punkte der Folge (d. h. alle bis auf endlich viele) liegen.<sup>32)</sup>

Mit  $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C}), (\bar{D})$  äquivalent sind auch (für alle aus mehr als einem Punkte bestehenden Räume) die folgenden *Axiome der offenen Menge*<sup>33)</sup>: 1. Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen. 2. Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es zwei fremde offene Mengen, von denen die eine den einen, die andere den anderen enthält. — Als Umgebung eines Punktes  $P$  wird dann jede Obermenge einer  $P$  enthaltenden offenen Menge erklärt. Dual dazu kann man natürlich auch den Begriff der abgeschlossenen Menge axiomatisieren.

Mit  $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C})$  äquivalent sind die Forderungen an den Begriff der

30) *H. Tietze*, Math. Ann. 88 (1923), p. 296.

31) Für den Begriff „Umgebung“ in der in diesem Artikel (im Einklang mit <sup>123)</sup>, p. 2 [38]) gegebenen Abgrenzung benützt *H. Tietze*, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 288, ebenso <sup>30)</sup>, p. 295 den Ausdruck „umgebende Menge“, während er das Wort Umgebung dort noch im *Hausdorff'schen* Sinne verwendet.

31a) *M. Fréchet*, Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921), p. 366; *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 176.

32) *E. W. Chittenden* und *A. D. Pitcher*, Trans. Amer. 20 (1919), p. 228.

33) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 94 (1925), p. 296—308, 298. Ein anderes Axiomensystem der offenen Menge, das mit  $(\bar{A})$  bis  $(\bar{D})$  äquivalent ist, l. c. <sup>30)</sup>, p. 294.

abgeschlossenen Hülle  $\bar{A}$  von  $A$  (d. i. Menge  $\dot{+}$  Ableitung)<sup>33a)</sup> bei *C. Kuratowski*<sup>34)</sup>: I.  $A \dot{+} B = \bar{A} \dot{+} \bar{B}$ , II.  $A \subseteq \bar{A}$ , III.  $\bar{\emptyset} = \emptyset$  (wobei  $\emptyset$  die leere Menge ist), IV.  $\bar{A} = \bar{A}$ . Sie gestatten die Definition der abgeschlossenen Menge ( $A = \bar{A}$ ), der offenen Menge (als Komplement einer abgeschlossenen) und damit die Entwicklung eines großen Teils der Topologie, obwohl sie z. B. nichts darüber aussagen, ob eine endliche Menge abgeschlossen ist. Besonders bemerkenswert erscheint die auf dieser Basis gegebene Einteilung der durch die zwei Operationen der Bildung des Komplements und der Abschließung erzeugbaren Mengenfunktionen in 14 Klassen.

*W. Sierpiński*<sup>34a)</sup> hat eine auf den Begriff der *abgeleiteten Menge*, sowie eine auf den Begriff der *abgeschlossenen Menge* gegründete Theorie topologischer Räume aufgestellt.

In bemerkenswerter Weise verwertet *E. W. Chittenden*<sup>34b)</sup> in einer kürzlich erschienenen Abhandlung über allgemeine topologische Räume den Begriff der *Mengenfunktion*, deren „Wert“ selbst wieder eine Menge ist.<sup>34c)</sup>

**11. Teilräume.** In dieser Nummer beschränken wir uns auf (Umgebungs-)Räume  $\mathfrak{X}$  und übergehen die analogen Überlegungen für Räume  $\mathfrak{Y}$  und  $\mathfrak{Z}$ . Ist  $\mathfrak{M}_1$  Teilmenge einer Menge  $\mathfrak{M}$ , und ist aus  $\mathfrak{M}$  durch Umgebungsfestsetzungen ein topologischer Raum  $\mathfrak{X}$  hergestellt, so erhält man den aus den Elementen von  $\mathfrak{M}_1$  gebildeten „Teilraum“  $\mathfrak{X}_1$  von  $\mathfrak{X}$ , wenn man als  $\mathfrak{U}(P_0 | \mathfrak{M}_1)$  eines Punktes  $P_0$  aus

33a) Sind  $A, B$  zwei Mengen desselben Raumes, so bedeutet (nach *C. Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, p. 23)  $A \dot{+} B$  ihre Vereinigung; es bedeutet (nach *Hausdorff*, Grundz., p. 3 und 4)  $A \supseteq B$  (oder  $B \subseteq A$ ), daß  $B$  Teilmenge von  $A$  ist, und  $A > B$  (oder  $B < A$ ), daß  $B$  echte (d. h. von  $A$  verschiedene) Teilmenge von  $A$  ist.

Abweichend von dieser (die Analogie mit  $\supseteq$  und  $>$  wahren) Bezeichnung wird neuerdings von manchen Autoren „ $>$ “ im Sinne von „ $\supseteq$ “ geschrieben, wobei dann jedesmal, wenn eine Teilmenge als echte Teilmenge gekennzeichnet werden soll, ein besonderer Zusatz nötig wird.

34) *C. Kuratowski*, Fund. Math. 3 (1922), p. 182—199. Vgl. auch *O. Nikodym*, ib. 7 (1925), p. 149—154. Weitere, mit dem genannten äquivalente Axiomensysteme für andere Grundbegriffe gibt neuerdings *M. Zarycki*, Fund. math. 9 (1927), p. 3—15; s. ferner Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), p. 498—506.

34a) *W. Sierpiński*, Math. Ann. 97 (1927), p. 321.

34b) *E. W. Chittenden*, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 290. Im besonderen wird der Begriff des Häufungspunktes zugrunde gelegt.

34c) Über verschiedene Arten allgemeiner Räume vgl. noch II C 9, Nr. 26, p. 1015 ff. Ein Kriterium dafür, daß ein Raum „ $(V)$ “ (im Sinne der neueren Bezeichnung von *M. Fréchet*) bzw. eine Menge eines Raumes ( $V$ ) *zusammenhängend* sei, gibt *W. Sierpiński*, Fund. math. 9 (1927), p. 186.



$\mathfrak{M}_1$  jeden Durchschnitt einer  $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{M})$  mit  $\mathfrak{M}_1$  bezeichnet.<sup>35)</sup> Zugleich mit  $\mathfrak{X}$  genügt nämlich dann auch  $\mathfrak{X}_1$  den Axiomen  $(\bar{A})$  bis  $(\bar{D})$  (das gleiche gilt übrigens auch von jedem der in Nr. 12 eingeführten Axiome  $(\bar{E})$ ,  $(\bar{F})$ ). Ist weiter  $\mathfrak{M}_2$  Teilmenge von  $\mathfrak{M}_1$ , so erhält man, ob man nun den aus den Elementen von  $\mathfrak{M}_2$  bestehenden Teilraum von  $\mathfrak{X}$ , oder aber den aus diesen Elementen bestehenden Teilraum von  $\mathfrak{X}_1$  bildet, stets den gleichen topologischen Raum  $\mathfrak{X}_2$ .

**12. Abzählbarkeitsaxiome.** Obwohl sich bereits aus den angeführten Axiomen für topologische Räume weitreichende Folgerungen ziehen lassen, so ist doch auch hier — analog wie in der Theorie der Limesräume (Nr. 6) — eine Einengung durch weitere Forderungen geboten, wenn eine stärkere Annäherung der Theorie an die bei den Punktmengen in  $n$ -dimensionalen Räumen geltenden Verhältnisse erreicht werden soll. Solche Einengungen hat *Hausdorff* vorgenommen durch Hinzunahme von „Abzählbarkeitsaxiomen“<sup>36)</sup>, die sich so aussprechen lassen:

$(\bar{E})$  Es gibt ein Fundamentalsystem von Umgebungen, in dem jedem Punkt des Raumes nur abzählbar viele Umgebungen zugewiesen sind (*erstes Abzählbarkeitsaxiom*). — Wie die oben erwähnten sphärischen Umgebungen mit rationalem  $\rho$  zeigen, erfüllt z. B. jeder Raum  $\mathfrak{R}^n$  dieses Axiom (desgl. jede Punktmenge  $\mathfrak{P}$  eines  $\mathfrak{R}^n$ ).

$(\bar{F})$  Es gibt ein abzählbares Fundamentalsystem von Umgebungen, d. h. es gibt eine abzählbare Menge  $\alpha$  von Teilmengen des Raumes  $\mathfrak{X}$ , so daß man ein Fundamentalsystem von Umgebungen erhält, wenn man jedem Punkt  $P$  als Umgebungen  $\mathfrak{U}_P$  des Systems alle jene Umgebungen von  $P$  zuweist, die zugleich Mengen aus  $\alpha$  sind (*zweites Abzählbarkeitsaxiom*). — Auch dieses Axiom — das  $(\bar{E})$  zur Folge hat (aber nicht umgekehrt) — gilt für jeden  $\mathfrak{R}^n$  sowie für jede Punktmenge eines  $\mathfrak{R}^n$ ; für jeden  $\mathfrak{R}^n$  erkennt man das, wenn man für  $\alpha$  die Menge aller Kugeln  $\overline{MX} < \rho$  nimmt, für die  $\rho$  und die Koordinaten des Mittelpunktes  $M$  rational sind.<sup>37)</sup>

Wir nennen im folgenden einen topologischen Raum, der dem zweiten (mithin auch dem ersten) Abzählbarkeitsaxiom genügt, *rational*.

Die Abzählbarkeitsaxiome erscheinen gegenüber den übrigen mehr gestaltlichen Axiomen als rein quantitative Aussagen und haben, auch wenn man die übrigen Umgebungsaxiome auf ein Minimum, nämlich  $(\bar{A})$  (das *Hausdorffsche*  $(A)$ ) beschränkt, eine Reihe wich-

35) Vgl. *F. Hausdorff*<sup>23)</sup>, p. 242.

36) Vgl. II C 9, p. 1021.

37) Vgl. *F. Hausdorff*<sup>23)</sup>, p. 262.

tiger Folgerungen.<sup>38)</sup> So dient das erste Abzählbarkeitsaxiom vor allem dazu, alle nicht isolierten Punkte des Raumes zu Limiten von konvergenten Folgen untereinander verschiedener Punkte zu machen. Aus dem zweiten folgt unter anderem, daß jede Vereinigung beliebig vieler offener Mengen auch Vereinigung abzählbar vieler unter ihnen ist; daß es nur abzählbare Mengen von paarweise fremden offenen Mengen gibt; daß jede auf- oder absteigende wohlgeordnete Menge von abgeschlossenen oder von offenen Mengen eine abzählbare Mächtigkeit hat; daß die Mächtigkeit der Menge aller abgeschlossenen Mengen nicht größer als die Mächtigkeit  $c$  des Kontinuums ist; daß jede nicht abzählbare Menge mindestens eine in ihr liegende Verdichtungsstelle enthält<sup>39)</sup>; daß jede abgeschlossene Menge Vereinigung einer abzählbaren und einer (eventuell leeren) perfekten Menge ist<sup>40)</sup>; daß der Raum *separabel*, d. h. abgeschlossene Hülle einer abzählbaren Menge ist.<sup>41)</sup>

Es kann aber umgekehrt ein topologischer (jedoch nicht ein metrischer) Raum *separabel* sein, ja sogar aus nur abzählbar vielen Punkten bestehen, ohne auch nur dem ersten, geschweige dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom zu genügen.<sup>42) 43)</sup>

**13. Trennbarkeitsaxiome.** Sie bestehen in folgenden allmählichen Verschärfungen der schon eingeführten Trennungsaxiome ( $\bar{D}_0$ ) und ( $\bar{D}$ ):

( $\bar{D}_2$ ). In jeder Umgebung  $U$  jedes Punktes  $P$  gibt es eine abgeschlossene Umgebung  $\mathfrak{B}$  von  $P$ ; anders gesagt: Zu jedem Punkt  $P$  und jeder  $P$  nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge  $\mathfrak{A}$  gibt es zwei fremde offene Mengen  $\mathfrak{D}_P$  und  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}$ , für welche  $P$  in  $\mathfrak{D}_P$  liegt und  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}} \supseteq \mathfrak{A}$  ist (*Regularität*).

( $\bar{D}_3$ ). Zu irgend zwei fremden abgeschlossenen Mengen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  gibt es zwei fremde offene Mengen  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}$ ,  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}$ , für welche  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}} \supseteq \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}} \supseteq \mathfrak{B}$  ist (*Normalität*).

( $\bar{D}_4$ ). Zu irgend zwei getrennten<sup>44)</sup> Mengen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  gibt es zwei fremde offene Mengen  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}} \supseteq \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}} \supseteq \mathfrak{B}$ .<sup>45)</sup>

38) A. Tychonoff und N. Vedenisoff, Bull. scienc. math. 50 (1926), p. 15—27

39) E. Lindelöf, vgl. II C 9 a, p. 869.

40) Cantor-Bendixsonscher Satz, vgl. II C 9 a, p. 866.

41) Dies ist die neuere von den durch Fréchet eingeführten Bedeutungen des Wortes „separabel“. Vgl. II C 9, Anm. 515 a.

42) P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 288—290.

43) Über die Tragweite des zweiten Abzählbarkeitsaxioms, bes. im metrischen Räumen, vgl. P. Alexandroff, Math. Ann. 92 (1924), p. 294—301.

44) Zwei Mengen heißen *getrennt*, wenn sie fremd sind und keine einen Häufungspunkt der anderen enthält; F. Riesz, l. c. <sup>20)</sup> p. 321 (die Bezeichnung ist dort: *in bezug aufeinander isoliert*).

45) ( $\bar{D}_2$ ) zuerst eingeführt bei L. Vietoris, Monatsh. Math. Phys 31 (1921),

Von den Eigenschaften  $(\bar{D}_0)$ ,  $(\bar{D})$ ,  $(\bar{D}_2)$ ,  $(\bar{D}_3)$ ,  $(\bar{D}_4)$  geht jede, solange man daneben nicht mehr als  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$ ,  $(\bar{C})$  voraussetzt, über die vorhergehende hinaus.

$(\bar{D}_2)$  ist nichts anderes als „Abgeschlossenheit im Kleinen“ und schließt unter anderen die Möglichkeit eines zusammenhängenden abzählbaren rationalen Raumes<sup>46)</sup> aus.

**14. Vollständigkeitseigenschaften topologischer Räume.** Für viele Untersuchungen ist eine Einengung des Raumbegriffs durch Forderung der Existenz bestimmter Limiten zweckmäßig. In topologischen Räumen ohne Gültigkeit der Abzählbarkeitsaxiome hat sich die Annahme einer der drei folgenden untereinander äquivalenten Eigenschaften  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) als brauchbar erwiesen<sup>47)</sup>:

p. 173;  $(\bar{D}_3)$ ,  $(\bar{D}_4)$  bei *H. Tietze*, Math. Ann. 88 (1923), p. 301ff., sowie *Alexandroff* und *Urysohn*, Math. Ann. 92 (1924), p. 258—266, und *P. Urysohn*, Math. Ann. 94 (1925), p. 262—295, von welch letzteren beiden die Namen regulär und normal stammen. Sie nennen übrigens einen  $(\bar{D}_4)$  genügenden Raum „vollständig normal“. —  $(\bar{D}_2)$  ergibt sich auch unmittelbar aus dem ersten der Axiome der euklidischen Ebene von *R. L. Moore*, Trans. Am. Math. Soc. 17 (1916), p. 132 und 133 (Theorem 5). Axiomatische Untersuchungen, die an die letztgenannte Arbeit anschließen: *R. L. Moore*, ib. 20 (1919), p. 169—178, *J. R. Kline*, ib. 18 (1917), p. 177—184, *P. M. Swingle*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 110—111, *D. W. Woodard*, Fund. math. 13 (1929), p. 121—145.

46) *P. Urysohn*, Math. Ann. 94 (1925), p. 274—283.

47) *R. L. Moore*, Proc. Nat. Ac. 5 (1919), p. 206—210, nennt eine Klasse  $\mathfrak{S}$  (d. i. eine Limesklasse mit lauter abgeschlossenen Ableitungen), in der  $\alpha$  gilt, „compact in the new sense“, *M. Fréchet* anschließend [Ann. Éc. Norm. (3) 38 (1921), p. 346] „parfaitement compact en soi“. *L. Vietoris* [Monatsh. Math. Phys. 31 (1921), p. 187] nennt einen topologischen Raum mit der Eigenschaft  $\alpha$  lückenlos, *P. Alexandroff* und *P. Urysohn* [Math. Ann. 92 (1924), p. 258—266 und Bull. Ac. Pol. (A) (5. III. 1923)] bikompakt. Von letzteren beiden stammt auch der Name „vollständiger Häufungspunkt“.

Den Beweis der Äquivalenz von  $\alpha$ ) und  $\gamma$ ) in Klassen  $\mathfrak{S}$  siehe bei *R. L. Moore*, l. c., und *M. Fréchet*, l. c., den von  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) in topologischen Räumen bei *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31, p. 187; 32, p. 261, sowie *Alexandroff* und *Urysohn*, Math. Ann. 92, p. 259f. *M. Fréchet*, Bull. Soc. Math. France 45 (1917), p. 1—8, *W. Sierpiński*, Fund. Math. 2 (1921), p. 179—188, *Kuratowski-Sierpiński*, Fund. Math. 2, p. 172—178 und *C. Kuratowski*, Fund. Math. 3 (1922), p. 41—53, behandeln ähnliche Fragen bezüglich des verallgemeinerten Borelschen Überdeckungssatzes. Vgl. II C 9a, p. 1023. Verallgemeinerungen in anderen Richtungen bei *K. Menger*, Sitzungsber. Ak. Wien 133 (1924), p. 421—444; *W. Hurewicz*, Math. Ztschr. 24 (1925), p. 401—421; *L. Tumarkin*, Proc. Ac. Amsterdam 28 (1925), p. 994; *J. Słowica-Neyman*, Fund. math. 5 (1924), p. 328; *R. L. Moore*, Proc. Nat. Ac. 10 (1924), p. 464—467, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 275.

Weitere Literatur: *M. Fréchet*, Ann. Éc. Norm. (3) 41 (1924), p. 143—144; *W. Sierpiński*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 649, Fund. math. 8 (1926), p. 223;

$\alpha$ ) Jede monotone Menge  $m$  von nicht leeren, abgeschlossenen Mengen hat einen nicht leeren Durchschnitt. Dabei heißt  $m$  *monoton*, wenn von irgend zweien ihrer Elemente  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  entweder  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  oder  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$  gilt.

$\beta$ ) Jede unendliche Menge hat einen vollständigen Häufungspunkt. Dabei heißt ein Punkt  $P$  *vollständiger Häufungspunkt* einer Menge  $\mathfrak{N}$ , wenn der Durchschnitt jeder Umgebung von  $P$  mit  $\mathfrak{N}$  dieselbe Mächtigkeit wie  $\mathfrak{N}$  hat.

$\gamma$ ) Ist die abgeschlossene Menge  $\mathfrak{A}$  in der Vereinigungsmenge einer Menge  $\mathfrak{g}$  von offenen Mengen enthalten, so hat  $\mathfrak{g}$  eine endliche Teilmenge, in deren Vereinigung  $\mathfrak{A}$  enthalten ist (Gültigkeit des *Heine-Borel-Lebesgueschen* Überdeckungssatzes).

Ein topologischer Raum hat die Eigenschaften  $\alpha = \beta = \gamma$  dann und nur dann, wenn er *absolut abgeschlossen*<sup>48)</sup> (d. h. in jedem ihn umfassenden Raum abgeschlossen) und *regulär* ist.

Ein topologischer Raum läßt sich dann und nur dann durch Hinzufügung eines einzigen Punktes zu einem „bikompakten“ (vgl. <sup>47)</sup>) bzw. kompakten Raum ergänzen, wenn er „im Kleinen bikompakt“ bzw. „im Kleinen in sich kompakt“ ist, d. h. wenn jeder seiner Punkte eine bikompakte bzw. in sich kompakte Umgebung hat.<sup>49)</sup> In  $\beta$ ) und damit in  $\alpha$ ) und  $\gamma$ ) ist die „Kompaktheit in sich“ enthalten. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, wohl aber für rationale Räume. Wegen des singulären Charakters aller nicht rationalen Räume gehen wir daher auf  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) nicht näher ein.<sup>50)</sup>

Bezüglich der Abhängigkeiten von  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$ ,  $(\bar{C})$ ,  $(\bar{D}_0)$ ,  $(\bar{D})$ ,  $(\bar{D}_2)$ ,  $(\bar{D}_3)$ ,  $(\bar{D}_4)$ ,  $(\bar{E})$ ,  $(\bar{F})$ ,  $\alpha$  beschränken wir uns auf die wichtigsten. Jeder lückenlose (= bikompakte), also insbesondere jeder kompakte rationale topologische Raum ist normal, also erst recht regulär, aber nicht immer „vollständig normal“ (vgl. <sup>45)</sup>). Dagegen ist jeder rationale reguläre

*W. Hurewicz*, Fund. math. 9 (1927), p. 193—204; *R. L. Moore*, Fund. math. 8 (1926), p. 189—192, p. 374; Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 168—170; *T. H. Hildebrandt*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 423—474; *R. G. Lubben*, Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), p. 668—685; *E. W. Chittenden*, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 299.

48) Diese Bezeichnung wurde l. c. <sup>15)</sup>, p. 215 eingeführt.

49) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 92 (1924), p. 296. Siehe ferner *M. Fréchet*, Fund. math. 10 (1927), p. 343—355. Die Ergänzbarkeit jedes normalen Raumes zu einem absolut-abgeschlossenen normalen Raum zeigt *Wilfr. Wilson*, Proc. Amsterdam Ak. 29 (1926), p. 462—464.

50) Näheres siehe außer l. c. <sup>47)</sup> bei *P. Alexandroff*, Math. Ann. 92 (1924), p. 267—274 und besonders ausführlich bei *Alexandroff* und *Urysohn*, Verhandlungen Amsterdam Ak. Deel XIV, No. 1 (1929).

topologische Raum normal<sup>51)</sup> und wegen seiner Metrisierbarkeit (siehe Nr. 17) auch vollständig normal.

Die Bedeutung der Normalität liegt in ihrer engen Beziehung zur Existenz stetiger Funktionen und der damit zusammenhängenden Metrisierbarkeit (vgl. Nr. 17).

**15. Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten allgemeiner Räume.** Zwischen den in den Nrn. 6—8 erklärten Begriffen des Limes-, Häufungs- und Umgebungsraumes bestehen enge Beziehungen, derart, daß viele Räume der einen Art zugleich als Räume einer anderen Art angesehen werden können. So kann man in jedem topologischen Raum  $\mathfrak{X}$  Limesbeziehungen erklären durch folgende Festsetzung<sup>52)</sup>:  $\lim P_\nu = P_0$  soll dann und nur dann gelten, wenn in jeder  $\mathfrak{U}(P_0)$  fast alle Elemente  $P_\nu$  liegen (d. h. alle von einem geeigneten  $\nu$  an). Diese Festsetzung erfüllt offenbar die Forderungen I., II. von Nr. 6, es ist also damit dem topologischen Raum  $\mathfrak{X}$  ein bestimmter Limesraum  $\mathfrak{L}$  zugeordnet. Umgekehrt aber kann, allgemein gesprochen, aus  $\mathfrak{L}$  und seinen Limesbeziehungen nicht eindeutig auf  $\mathfrak{X}$  und seine Umgebungsbeziehungen rückgeschlossen werden. (Erklärt man z. B. in einer Menge  $\mathfrak{M}$  als  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$  jede  $P$  enthaltende Teilmenge von  $\mathfrak{M}$ , so gilt  $\lim P_\nu = P$  nur, wenn  $P_\nu = P$  für  $\nu > \nu_0$ . Dieselben Limesbeziehungen können aber auch ganz anderen Umgebungsbeziehungen in  $\mathfrak{M}$  entspringen; vgl. etwa das Beispiel bei Hausdorff<sup>22)</sup>, p. 264.) Ist die eindeutige Abbildung  $A$  eines topologischen Raumes  $\mathfrak{X}$  auf eine Punktmenge eines anderen topologischen Raumes  $\mathfrak{X}'$  umgebungsstetig, so ist sie auch limesstetig im Hinblick auf die aus den Umgebungsbeziehungen fließenden Limesbeziehungen: das Umgekehrte braucht nicht zu gelten. Ist  $A$  eine umgebungstopologische Abbildung, so ist sie auch eine limestopologische.

Einfacher liegen die Dinge in dem wichtigen Falle eines das Axiom ( $\bar{E}$ ) erfüllenden topologischen Raumes  $\mathfrak{X}$ . Ist nämlich aus einem solchen Raum  $\mathfrak{X}$  in der obigen Weise der Limesraum  $\mathfrak{L}$  entsprungen, so gibt es außer  $\mathfrak{X}$  keinen anderen das Axiom ( $\bar{E}$ ) erfüllenden topologischen Raum, dem gleichfalls der Limesraum  $\mathfrak{L}$  entspringen könnte. Es ist nämlich  $\mathfrak{X}$  eindeutig aus dem durch  $\mathfrak{L}$  bestimmten Limesraum  $\mathfrak{L}$  bestimmbar; denn die Umgebungen  $\mathfrak{U}(P_0)$  eines Punktes  $P_0$  lassen

51) A. Tychonoff, Math. Ann. 95 (1925), p. 139—142.

Es gibt reguläre, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügende, nicht-normale topologische Räume. Dagegen scheint es eine ungelöste Frage, ob ein kompakter, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügender (also regulärer) topologischer Raum normal sein muß.

52) Vgl. F. Hausdorff<sup>22)</sup>, p. 233.

sich mit Hilfe der Folgen  $P_1, P_2, \dots, P_\nu, \dots$  mit dem Limes  $P_0$  kennzeichnen als diejenigen Mengen, die man erhält, wenn man von jeder solchen Folge eine Restfolge  $P_{\nu+1}, P_{\nu+2}, \dots$  und die Menge *aller* in diesen Restfolgen auftretenden Punkte bildet. Für solche Räume  $\mathfrak{X}$  fallen die umgebungsstetigen Abbildungen von  $\mathfrak{X}$  mit den limesstetigen zusammen, desgleichen die umgebungstopologischen mit den limestopologischen.

Es gibt Limesräume, die nicht aus Umgebungsräumen in der oben angegebenen Weise herleitbar sind.<sup>53)</sup> — Definiert man, ausgehend von einem Umgebungsraum  $\mathfrak{X}$  so wie in Nr. 3 Häufungspunkte, so erhält man einen Raum  $\mathfrak{H}$  (Nr. 7); der Ausgangsraum  $\mathfrak{X}$  ist eindeutig aus dem Raum  $\mathfrak{H}$  bestimmbar. Denn die Umgebungen  $\mathfrak{U}(P_0)$  eines Punktes  $P_0$  lassen sich als jene Mengen kennzeichnen, deren Komplementärmengen den Punkt  $P_0$  weder enthalten noch zum Häufungspunkt haben. Die so aus Umgebungsräumen herleitbaren Räume  $\mathfrak{H}$  sind aber nicht die allgemeinsten. — Definiert man, ausgehend von einem Limesraum so wie in Nr. 3 Häufungspunkte, so erhält man einen den Axiomen II 1, 2, 3 [nicht allemal<sup>54)</sup> auch 4] von Nr. 7 genügenden Raum. Wieder sind die so herleitbaren Räume  $\mathfrak{H}$  nicht die allgemeinsten.<sup>54a)</sup> Zusammengefaßt gilt: *Von den drei Begriffen allgemeiner Räume aus Nr. 6, 7, 8 umfaßt keiner völlig den anderen.*<sup>54)</sup><sup>54a)</sup>

**16. Metrische Räume. Gleichmäßige Stetigkeit.** Ein besonders wichtiger Fall von Räumen, welche zugleich Limes- und Umgebungsräume sowie Räume  $\mathfrak{H}$  sind, ist der der „metrischen Räume“.<sup>55)</sup> So heißt nach *Hausdorff* eine Menge  $\mathfrak{M}$ , wenn in ihr Abstandsbeziehungen gegeben sind durch Festsetzungen folgender Art:

I. Jedem Paar  $P, Q$  von Elementen („Punkten“) aus  $\mathfrak{M}$  ist eindeutig eine nicht-negative reelle Zahl zugeordnet, die ihr „Abstand“ oder ihre „Entfernung“ heißt und mit  $\overline{PQ}$  bezeichnet wird.

53) Über Untersuchungen von *M. Fréchet* über gewisse Umgebungsbeziehungen in Limesräumen vgl. II C 9, Anm. 516 b.

54) *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 266.

54a) Vgl. *F. Riesz*<sup>19)</sup>, p. 20.

55) Der Begriff wurde zuerst von *M. Fréchet*<sup>9)</sup> unter der Bezeichnung „classe (E)“ eingeführt. Über die Theorie dieser Räume vgl. noch *F. Hausdorff*, Grundz., p. 290 ff., Mengenlehre 1927, p. 94 ff. und *H. Hahn*, Reelle F., Kap. 1, 2. — Statt „classe (E)“ hat *M. Fréchet* später „classe (D)“ gesagt. Über sonstige Bezeichnungen für verschiedene Arten von Räumen vgl. II C 9, p. 1018/20. Vgl. ferner *D. Pompeju*, Tôhoku Math. J. 11 (1917), p. 229. — Als ein Beispiel für die Bildung eines metrischen Raumes sei die Einführung von Abständen zwischen den Flächen des dreidimensionalen Raumes erwähnt: *M. Fréchet*, Ann. Soc. Math. Pol. 3 (1924), p. 4—19. Über Abstände zwischen meßbaren Mengen s. *T. Ważewski*, Paris C. R. 176 (1923<sup>1)</sup>, p. 69—70.

II. Dabei sind folgende Forderungen („Abstandsaxiome“) erfüllt:

1.  $\overline{PQ} = \overline{QP}$ ;
2.  $\overline{PQ}$  ist gleich 0, dann und nur dann, wenn  $P = Q$ ;
3. für irgend drei Punkte  $P, Q, R$  gilt stets  $\overline{PQ} + \overline{QR} \geq \overline{PR}$  („Dreiecksungleichung“).<sup>55a)</sup>

Jeder metrische Raum  $\mathfrak{D}$  ist zugleich ein Umgebungsraum vermöge der Festsetzung (vgl. Nr. 3): Umgebung eines Punktes  $P$  heißt jede Menge aus  $\mathfrak{D}$ , in der eine sphärische Umgebung von  $P$  enthalten ist, d. h. die Menge aller Punkte  $X$  mit  $\overline{PX} < \varrho$  (wo  $\varrho > 0$ ). Man sieht leicht, daß  $(A), (B), (C), (D)$  für die so definierten Umgebungen erfüllt sind, desgleichen auch  $(E)$ , wie die Betrachtung der sphärischen Umgebungen von  $P$  mit rationalem  $\varrho$  zeigt.<sup>56)</sup> Leitet man aus diesen Umgebungsbeziehungen eines metrischen Raumes gemäß Nr. 15 Limesbeziehungen ab, so ist dies gleichbedeutend mit der Festsetzung:

$$(3) \quad \lim_{\nu = \infty} P_\nu = P_0, \quad \text{wenn} \quad \lim_{\nu = \infty} \overline{P_0 P_\nu} = 0,$$

durch welche *Fréchet* die metrischen Räume der Theorie der Limesräume einordnet.<sup>57)</sup> — Gemäß der Abstandsdefinition in Nr. 3 ist jede Punktmenge eines  $\mathfrak{R}^n$  ein metrischer Raum.

Eine eindeutige Abbildung  $A$  eines metrischen Raumes  $\mathfrak{D}$  auf einen anderen  $\mathfrak{D}'$  oder auf eine Teilmenge von  $\mathfrak{D}'$  (ist speziell  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{R}^1$ , so handelt es sich um eine „reelle Funktion“  $f(P)$  in  $\mathfrak{D}$ ) ist stetig (und zwar sowohl limes- als umgebungsstetig) dann und nur dann, wenn es zu jedem Punkt  $P_0$  von  $\mathfrak{D}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$  gibt, so daß  $\overline{P_0' P'} < \varepsilon$  gilt für die Bildpunkte  $P'$  aller jener Punkte  $P$ , für welche  $\overline{P_0 P} < \delta$ . Wenn es im besonderen zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein für alle  $P_0$  (bzw. für alle  $P_0$  einer Teilmenge  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{D}$ ) gemeinsam brauchbares  $\delta = \delta(\varepsilon)$  gibt, so heißt  $A$  *gleichmäßig stetig*<sup>58)</sup> in  $\mathfrak{D}$  (bzw.  $\mathfrak{P}$ ).

Werden in einer Menge  $\mathfrak{M}$  auf zwei verschiedene Weisen Abstandsbeziehungen festgesetzt, so kann es sein, daß die daraus fließenden Umgebungs- und Limesbeziehungen die gleichen sind, also der-

55a) Nach *A. Lindenbaum*, Fund. math. 8 (1926), p. 211 wird Axiom 1 überflüssig, wenn man  $\overline{QP} + \overline{QR} \geq \overline{PR}$  an Stelle von 3 fordert.

56) Vgl. die analogen Betrachtungen bei *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 213/14, 262.

57) Vgl. II C 9, p. 1018.

58) Es wird hier also der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit nur bei Zugrundelegung von Abstandsbeziehungen erklärt. Vgl. dazu auch *F. Klein*, Gesammelte math. Abhandlungen, I (1921), p. 243 und *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 290, § 6). Neuerdings wurde die gleichmäßige Stetigkeit, ebenso die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen-(Abbildungs-)Folgen auch ohne Zugrundelegung einer Metrik von *W. Sierpiński*, Wektor 2 (1913), p. 353—355, und *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 267 ff. betrachtet.

selbe allgemeine Raum definiert wird. Wir sprechen dann von *topologisch äquivalenten* Abstandsbeziehungen. Sie liegen dann und nur dann vor, wenn die beiderlei sphärischen Umgebungen gleichwertige Umgebungssysteme (im Sinne Hausdorffs, vgl. Nr. 9) darstellen. Das aber ist, unter  $\overline{PQ}$  und  $\widehat{PQ}$  die beiden Abstände verstanden, gleichbedeutend damit, daß sowohl in dem durch die Abstände  $\overline{PQ}$  definierten metrischen Raum für jedes  $P_0$  der Abstand  $\widehat{P_0P}$  eine stetige Funktion von  $P$  ist, als auch umgekehrt  $\overline{P_0P}$  im Raum der  $\widehat{PQ}$ .<sup>59)</sup> Wenn es im besonderen zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein von  $P_0$  unabhängiges  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so daß  $\widehat{P_0P} < \varepsilon$  für  $\overline{P_0P} < \delta$  und  $\overline{P_0P} < \varepsilon$  für  $\widehat{P_0P} < \delta$ , dann sprechen wir von *gleichmäßig äquivalenten* Abstandsbeziehungen. Nimmt man z. B.  $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}^n$  und setzt  $\varrho = \varrho(P_0, P_1)$  gleich dem in Nr. 3 erklärten gewöhnlichen Abstand, so stellen (unter  $O$  den Ursprung verstanden)  $\frac{\varrho(P_0, P_1)}{1 + \varrho(OP_0) + \varrho(OP_1)}$ ,  $\sum_h |\xi_{1h} - \xi_{0h}|$  (der „écart“<sup>60)</sup>),  $\text{Max.} |\xi_{1h} - \xi_{0h}|$  (die „Spanne“<sup>61)</sup>) drei mit  $\varrho$  topologisch äquivalente Abstandsbeziehungen vor, von denen aber nur die beiden letzten mit  $\varrho$  gleichmäßig äquivalent sind. Zwei Abstandsbeziehungen, die einer dritten äquivalent (bzw. gleichmäßig äquivalent) sind, sind es auch untereinander. Ist die Abbildung eines metrischen Raumes  $\mathfrak{D}$  auf einen anderen  $\mathfrak{D}'$  (oder auf eine Teilmenge von  $\mathfrak{D}'$ ) gleichmäßig stetig, so ist sie es auch, wenn die Abstandsbeziehungen in  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  durch gleichmäßig äquivalente ersetzt werden.

Wird in einem metrischen Raum für je zwei Punkte der Abstand  $\varrho$  ersetzt durch den topologisch äquivalenten  $\varrho' = \frac{\varrho}{1 + \varrho}$ , so bleiben alle Abstände  $\varrho'$  unter der festen Schranke 1. Es ist also jeder metrische Raum einem „beschränkten“ metrischen Raum homöomorph.<sup>62)</sup>

Über Abstandsbeziehungen, die etwas allgemeiner gehaltenen Forderungen genügen, als die in II. 1.—3. genannten, vgl. II C 9.<sup>62a)</sup><sup>62b)</sup>

59) Und zwar ergibt die Gleichwertigkeit der sphärischen Umgebungen zunächst, daß die beiden Abstände in der Umgebung der Null stetige Funktionen voneinander sind. Die übrige Stetigkeit folgt dann aus der Dreiecksungleichung.

60) C. Jordan, Cours d'analyse, t. 1, 2. éd. (1893), p. 18.

61) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, p. 2.

62) F. Hausdorff<sup>22)</sup>, p. 312.

62a) II C 9, p. 1017; ferner V. W. Niemytzki, Trans. Amer. 29 (1927), p. 507—514.

62b) Weitere Literatur über metrische Räume: K. Menger, Proceed. Amsterdam 29 (1926), p. 166—169; 30 (1927), p. 710—714; Math. Ann. 100 (1928), p. 75—163; Wien. Ak. Anz. 26. I., 3. V., 10. V. 1928; W. L. Ayres, Fund. math. 14 (1929), p. 334—338.



**17. Metrisation.** Von großer Bedeutung ist es, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu kennen, daß ein topologischer Raum „metrisierbar“, d. h. einem metrischen Raum homöomorph ist.

*M. Fréchet*, bei dem die Frage<sup>63)</sup> zuerst auftaucht, vermutete auf Grund von *H. Hahns* Konstruktion<sup>64)</sup> einer nicht konstanten stetigen Funktion in allgemeinen  $V$ -Klassen (vgl. <sup>65)</sup>), daß die Antwort in weitem Umfang bejahend sein werde. Tatsächlich wurde daran anschließend von *E. W. Chittenden*<sup>65)</sup> die Metrisation der Klassen  $V$ <sup>66)</sup> durchgeführt.

Eine besonders einfache Metrisation der rationalen regulären topologischen Räume gab auf dem Weg über die stetigen Funktionen *P. Urysohn*.

Er zeigte<sup>67)</sup>, daß die Normalität (Nr. 13) notwendig und hinreichend ist, damit in einem topologischen Raum zu je zwei fremden abgeschlossenen Mengen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  eine stetige Funktion  $f(P)$  existiert, welche in allen Punkten von  $\mathfrak{A}$  den Wert 0, in allen Punkten von  $\mathfrak{B}$  den Wert 1 und in allen übrigen Punkten nur Zwischenwerte, 0 und 1 eingerechnet, annimmt.

Nun definiert man<sup>68)</sup>, wenn noch das zweite Abzählbarkeitsaxiom ( $\bar{F}$ ) vorausgesetzt wird (Nr. 12), in folgender Weise einen die gegebenen Limesbeziehungen liefernden Abstand.  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots$  seien sämtliche als offen vorausgesetzten Umgebungen eines abzählbaren Fundamentalsystems. Zu irgend zwei Umgebungen  $\mathfrak{U}_i, \mathfrak{U}_k$ , für welche  $\bar{\mathfrak{U}}_i \subseteq \mathfrak{U}_k$  gilt, wählen wir zufolge des eben ausgesprochenen Satzes eine stetige Funktion  $f_{ik}(x)$ , welche in  $\bar{\mathfrak{U}}_i$  überall = 0, außerhalb von  $\mathfrak{U}_k$  überall = 1 ist und in  $\bar{\mathfrak{U}}_k - \mathfrak{U}_i$  überall  $\geq 0$  und  $\leq 1$  ist. Diese  $f_{ik}$  seien, in eine Folge geordnet, die Funktionen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . Die Funktion des Punktepaars  $(P, Q)$

$$\rho(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(P) - f_n(Q)|$$

ist dann ein Abstand der verlangten Art.

63) *M. Fréchet*, Palermo Rend. 30 (1910), p. 23; Trans. Am. Math. Soc. 19 (1918), p. 53. Vgl. ferner *E. W. Chittenden*, Palermo Rend 45 (1921), p. 265. Ein einfaches Beispiel einer explizit durchgeführten Metrisierung findet sich bei *H. Tietze*, Math. Ann. 87 (1922), p. 150.

64) *H. Hahn*, Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), p. 247—257. Über  $V$ -Klassen siehe II C 9, p. 1017.

65) *E. W. Chittenden*, Trans. Am. Math. Soc. 18 (1917), p. 161—166.

66) Anstatt „Klassen  $V$ “ sagt *Fréchet* in seinen späteren Arbeiten „Räume  $E$ “; vgl. II C 9, Anm. 516b. Über *Fréchet's* neue „Räume  $V$ “ vgl. <sup>25)</sup>.

67) *P. Urysohn*, Math. Ann. 94 (1925), p. 290. Hierzu vgl. *E. W. Chittenden*, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 17, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 309—321.

68) *P. Urysohn*, Math. Ann. 94 (1925), p. 309—315; siehe auch Bull. Acad. Polon. 1923, p. 13—16.

Weil nun jeder rationale reguläre topologische Raum normal ist (vgl. <sup>51</sup>), kann man also sagen: *Jeder rationale reguläre Raum ist metrisierbar*. Eine teilweise Umkehrung besteht darin, daß jeder metrische (und damit jeder metrisierbare) Raum regulär ist (sogar  $(\bar{D}_4)$  befriedigt) und dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Man kann auch sagen: Ein rationaler Raum ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er regulär ist.

Da jeder kompakte rationale Raum regulär ist <sup>69</sup>), gilt auch: *Jeder kompakte rationale topologische Raum ist metrisierbar*.<sup>70</sup>) Umgekehrt ist jeder kompakte metrische Raum rational.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisation eines beliebigen topologischen Raumes haben *P. Alexandroff* und *P. Urysohn*<sup>71</sup>) die Möglichkeit der Einführung eines Systems von in bestimmter Weise gleichmäßig beliebig fein werdenden Überdeckungen erkannt. Sie besteht in folgendem:

Es läßt sich eine Folge von Überdeckungen  $\{U_A^{(1)}, U_B^{(1)}, \dots\}$ ,  $\{U_A^{(2)}, U_B^{(2)}, \dots\}$ , ... angeben, in denen die  $U_X^{(n)}$  alle offen sind, so daß a) zu je zwei Mengen  $U_A^{(n)}, U_B^{(n)}$ , deren Durchschnitt nicht leer ist, ein  $U_C^{(n-1)}$  existiert, so daß  $U_A^{(n)} \cap U_B^{(n)} \subseteq U_C^{(n-1)}$  ist, b) jede Folge  $U_A^{(1)}, U_B^{(2)}, U_C^{(3)}, \dots$  entweder einen leeren Durchschnitt hat oder mit der Folge der Umgebungen eines Punktes  $X$  gleichwertig ist.<sup>72</sup>)

Eine der geschilderten Entwicklung analoge findet sich in Arbeiten von *E. W. Chittenden* und *A. D. Pitcher*.<sup>73</sup>)<sup>76</sup>) Sie gehen zur Gewinnung eines Raumbegriffes von dem Begriff des „development“ im Sinn von *E. H. Moore*<sup>74</sup>) aus. Ein development  $\Delta$  ist ein System von Teilmengen  $\mathfrak{P}^{m,l}$  einer Menge  $\mathfrak{M}$ , wo  $m$  und  $l$  natürliche Zahlen sind.<sup>75</sup>) Alle  $\mathfrak{P}^{m,l}$  mit festem  $m$  bilden den  $m^{\text{ten}}$  Staffel (stage); der

69) Vgl. Nr. 14.

70) Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus älteren Arbeiten [*E. W. Chittenden*, Trans. Amer. 18 (1917), p. 161—166, und *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 271 f.], wurde aber von *Urysohn* zuerst ausgesprochen und eigens bewiesen [Math. Ann. 92 (1924), p. 275—293]. Zu *Vietoris*, l. c. p. 271 vgl. die Berichtigung Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 163.

71) *P. Alexandroff-P. Urysohn*, Paris C. R. 177 (1923), p. 1274. Hier finden sich auch notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Limesraum einem metrischen Raum homöomorph ist.

72) a) und b) sind voneinander unabhängig; vgl. *V. W. Niemytzki*, l. c. <sup>76</sup>).

73) *E. W. Chittenden* und *A. D. Pitcher*, Trans. Amer. 20 (1919), p. 213. Vgl. C II 9a, Anm. 512, 516.

74) *E. H. Moore*, New Haven Math. Colloquium 1910, p. 1—150.

75) Von belanglosen Fällen abgesehen treten dabei unendlich viele Zahlenpaare  $m, l$  auf.

zweite Zeiger unterscheidet die Elemente eines Staffels voneinander. Für ein beliebiges Element  $P$  von  $\mathfrak{M}$  sei nun  $\mathfrak{B}_P^m = \sum_{m' \geq m, P \in \mathfrak{B}^{m'}}$ , d. h. die Vereinigung aller  $P$  enthaltenden Mengen  $\mathfrak{B}^{m'}$  aller Staffel vom  $m^{\text{ten}}$  an. Diese  $\mathfrak{B}_P^m$  spielen die Rolle von Umgebungen des „Punktes  $P$ “ in dem zu definierenden Raum und geben Anlaß zur Einführung eines Distanzbegriffes. Die beiden Autoren stellen und beantworten nun Fragen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welchen ein development genügen muß, damit der dadurch definierte Raum gewisse Eigenschaften hat (Einzigkeit des Limes, Gültigkeit des *Heine-Borel-Lebesgueschen* Überdeckungssatzes, Existenz stetiger Funktionen, Existenz eines bezüglich der Limesbeziehungen äquivalenten Abstandes). Unter anderen steht hier bereits der folgende allgemeine Satz über die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes: Damit ein topologischer Raum einem kompakten metrischen Raum homöomorph sei, ist notwendig und hinreichend, daß a) im Raum der *Heine-Borelsche* Satz gilt, b) zu jedem  $P$  eine Folge von Umgebungen  $\mathfrak{U}_1(P), \mathfrak{U}_2(P), \dots$  existiert, so daß für jede Folge  $P_1, P_2, \dots$  die Folge  $\mathfrak{U}_1(P_1), \mathfrak{U}_2(P_2), \dots$  höchstens einen Punkt als Durchschnitt hat. Ferner untersuchen *Chittenden* und *Pitcher*<sup>76)</sup> die Tragweite verschiedener Abschwächungen des Dreiecksaxioms und zeigen unter anderem, daß aus dem Vorhandensein eines „Abstandes“, der, statt dem Dreiecksaxiom zu genügen, bloß „coherent“ ist (aus  $\lim_{i=\infty} AB_i = 0 = \lim_{i=\infty} B_i C_i$  folgt  $\lim_{i=\infty} AC_i = 0$ ), auf einen metrischen Abstand geschlossen werden kann, der dieselben Limesbeziehungen liefert.<sup>77)</sup>

**18. Metrische Vollständigkeit.** Ein metrischer Raum heißt *vollständig*<sup>78)</sup>, wenn in ihm jede dem *Cauchyschen* Konvergenzkriterium genügende Punktfolge einen Limes hat. Jeder metrische Raum ist überall dichter Teilraum eines metrisch vollständigen Raumes und zwar nur auf eine Weise.<sup>79)</sup>

Metrische Vollständigkeit ist keine topologische Eigenschaft, d. h. von zwei zueinander homöomorphen metrischen Räumen kann der eine vollständig sein, der andere nicht, z. B. die Euklidische Ebene und die punktierte Kugel. Wohl aber ist es eine topologische Eigenschaft eines topologischen Raumes, wenn es einen zu ihm homöo-

76) *E. W. Chittenden - A. D. Pitcher*, Trans. Amer. 19 (1918), p. 66—78. Vgl. ferner *V. W. Niemytzki*, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 507—513.

77) Weitere Literatur zur Metrisation: *D. v. Dantzig - B. L. v. d. Waerden*, Abh. Hamb. Math. Sem. 6 (1928), p. 367—376.

78) Begriff von *M. Fréchet*, Palermo Rend. 22 (1906), p. 23.

79) *Hausdorff*, Grundz., p. 315.

morphen vollständigen Raum gibt, ebenso wenn jeder zu ihm homöomorphe metrische Raum vollständig ist. Letzteres ist die Kompaktheit<sup>79a)</sup>, ersteres die Eigenschaft ein „absolutes  $G_\delta$ “<sup>80)</sup> zu sein, d. h. eine Menge, derart daß jede in einem vollständigen Raum gelegene zu ihr homöomorphe Menge ein  $G_\delta$  dieses Raumes ist.<sup>81)</sup>

Jede Homöomorphie zwischen zwei Punktmengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  läßt sich zu einer Homöomorphie zwischen zwei absoluten  $G_\delta$ -Mengen erweitern<sup>81a)</sup>, d. h. es gibt zwei vollständige Räume  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  und eine topologische Abbildung  $T$  von  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{Q}$ , ferner eine zu  $\mathfrak{A}$  homöomorphe Menge  $\mathfrak{A}'$  in  $\mathfrak{P}$ , eine zu  $\mathfrak{B}$  homöomorphe Menge  $\mathfrak{B}'$  in  $\mathfrak{Q}$ , derart daß  $\mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{B}'$  einander in der Abbildung  $T$  entsprechen.

In separablen, metrisch vollständigen Räumen ist jede perfekte nicht leere Menge (Cantor) und jedes  $G_\delta$  mit in sich dichtem Teil (Young)<sup>82)</sup>, allgemeiner jede nicht abzählbare Borelsche Menge<sup>82a)</sup>, weil sie einen nicht leeren perfekten Teil enthält, von der Mächtigkeit des Kontinuums.<sup>83)</sup>

Jeder separable metrische Raum ist zu einer Teilmenge des durch  $|x_i| \leq \frac{1}{i}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) definierten in sich kompakten Teiles des

79 a) V. Niemytzki-A. Tychonoff, Fund. math. 12 (1928), p. 118—120.

80)  $G_\delta$  in einem allgemeinen Raum  $\mathfrak{R} =$  Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen von  $\mathfrak{R}$ , analog  $F_\sigma =$  Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, Hausdorff, Grundz., p. 305.  $G_\delta$  zu sein, ist an sich natürlich keine absolute topologische Eigenschaft. Über die Invarianz in Euklidischen Räumen vgl. S. Mazurkiewicz, Bull. Ac. Cracovie, sér. A 1916 (1917), p. 490—494; W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924), p. 21—30, 24—29 und 106—110, wo auch allgemeinere Sätze bewiesen werden, ferner ib. 8 (1926), p. 135 und M. Lavrentieff, ib. 6 (1924), p. 151. Vgl. M. Souslin, Fund. math. 5 (1924), p. 155, den Bericht von W. Sierpiński, Über Funktionen und Mengen, Rivista Hispan. Amer. 1925, und F. Hausdorff, Mengenl. 1927, p. 82 ff.

81) Dieses Zusammenfallen der absoluten  $G_\delta$  mit den vollständigen Räumen wurde zuerst von P. Alexandroff, Paris C. R. 178 (1924), p. 185, für separable Mengen, im Anschluß daran von F. Hausdorff, Fund. math. 6 (1924), p. 146—148, allgemein bewiesen. Vgl. auch M. Fréchet, Paris C. R. 176 (1923<sup>1</sup>), p. 977—978, Bull. scienc. math. (2) 49 (1925) 1. part., p. 100—103; Hausdorff, Mengenl. 1927, p. 214; W. Sierpiński, Fund. math. 11 (1928), p. 203.

81a) M. Lavrentieff, Paris C. R. 178 (1924<sup>1</sup>), p. 187, Fund. math. 6 (1924), p. 149; vgl. auch Hausdorff, Mengenl. 1927, p. 216 und W. Sierpiński, Paris C. R. 178 (1924<sup>1</sup>), p. 545.

82) Vgl. Hausdorff, Grundz., p. 318.

82a) Über Borelsche Mengen s. II C 9, p. 890.

83) P. Alexandroff, Paris C. R. 162 (1916), p. 323—325; F. Hausdorff, Math. Ann. 77 (1916), p. 430—437. Vgl. ferner W. Hurewicz, Fund. math. 12 (1928), p. 78—109.

*Hilbertsches* Raumes<sup>84)</sup> homöomorph.<sup>85)</sup> Es gilt aber noch mehr: Es gibt einen vollständigen, metrischen, separablen Raum  $\mathfrak{U}$  (Universalraum), derart, daß jeder separable metrische Raum zu einem Teil von  $\mathfrak{U}$  sogar kongruent, d. i. entfernungsstreu homöomorph ist.<sup>86)</sup>  $\mathfrak{U}$  wird durch Vervollständigung eines abzählbaren metrischen Raumes  $\mathfrak{U}_0$  konstruiert, dessen Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  der Reihe nach eingeführt und gegenseitig durch solche Entfernungen verbunden werden, daß zu irgendwelchen endlich vielen Punkten  $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_s}$  von  $\mathfrak{U}_0$  und ebenso vielen rationalen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ein Punkt  $A_{n_0}$  in  $\mathfrak{U}_0$  mit den Entfernungen  $\overline{A_{n_0}A_{n_1}} = \alpha_1, \overline{A_{n_0}A_{n_2}} = \alpha_2, \dots, \overline{A_{n_0}A_{n_s}} = \alpha_s$  existiert, sobald diese Entfernungen mit den Entfernungen  $\overline{A_{n_i}A_{n_k}}$  ( $i, k \leq s$ ) und dem Dreiecksaxiom überhaupt verträglich sind. Der durch Vervollständigung von  $\mathfrak{U}_0$  entstehende Raum  $\mathfrak{U}$  ist in der Weise homogen, daß es zu irgend zwei kongruenten Teilmengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{U}$  eine entfernungsstreu Abbildung von  $\mathfrak{U}$  auf sich selbst gibt, die  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$  überführt. Ferner ist  $\mathfrak{U}$  der einzige metrische Raum, der die obige Eigenschaft eines metrischen Universalraumes hat und zugleich vollständig, separabel und homogen (im besprochenen Sinn) ist.

**19. Topologie im Kleinen. Überlagerungsräume.** Analog entsprechenden Unterscheidungen in anderen Gebieten (z. B. Differentialgeometrie im Großen und Kleinen) kann man auch neben der bisher besprochenen „Topologie im Großen“, die die Räume als Ganzes ins Auge faßt, eine „Topologie im Kleinen“ treiben, die sich — wie wir vorläufig sagen mögen — mit dem Charakter eines Raumes in beliebig kleiner Umgebung der einzelnen Punkte befaßt. Seien  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  zwei topologische (Umgebungs-)Räume,  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{M}$ ,  $Q$  einer von  $\mathfrak{N}$ . Dabei kann nach Nr. 11 jede Umgebung von  $P$  bzw.  $Q$  selbst als topologischer Raum betrachtet werden (Teilraum von  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{N}$ ). Dann wollen wir sagen,  $\mathfrak{M}$  habe in  $P$  denselben Umgebungscharakter oder Umgebungstypus<sup>87)</sup> wie  $\mathfrak{N}$  in  $Q$ , wenn es Umgebungen  $\mathfrak{U}(P) = \mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$  und  $\mathfrak{B}(Q) = \mathfrak{B}(Q|\mathfrak{N})$  gibt, die so aufeinander topo-

84) Über den *Hilbertschen* Raum vgl. II C 9, p. 1026.

85) *P. Urysohn*, Paris C. R. 178 (1924), p. 65 und Math. Ann. 92 (1924), p. 302—304. Ein analoges Resultat für einen anderen als den *Hilbertschen* Raum gibt *M. Fréchet*, Paris C. R. 178 (1924), p. 1782—1785. Vgl. ferner *P. Urysohn*, C. R. Congrès Soc. sav. Dijon 1924; *M. Fréchet*, Paris C. R. 180 (1925), p. 419—421, Bull. scienc. math. (2) 49 (1925) 1. part., p. 297—301; *A. Tychonoff*, Paris C. R. 182 (1926), p. 1519—1520.

86) *P. Urysohn*, Paris C. R. 180 (1925), p. 803; Bull. Sc. Math. (2) 51 (1927), p. 43—64, 74—90.

87) *Tietze*, Hambg. Sem., p. 7 [43], Anm. 4.

logisch abbildbar sind, daß dabei  $P$  und  $Q$  einander entsprechen.<sup>88)</sup> Seien  $\mathcal{U}_0(P)$ ,  $\mathcal{B}_0(Q)$  derartig homöomorph,  $A$  die bezügliche Abbildung. Wie man sofort sieht, gibt es dann zu jeder Umgebung  $\mathcal{U}_* = \mathcal{U}_*(P)$  und jeder  $\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_*(Q)$  eine in  $\mathcal{U}_*$  enthaltene  $\mathcal{U}(P)$ , sowie eine in  $\mathcal{B}_*$  enthaltene  $\mathcal{B}(Q)$ , die in der angegebenen Weise (d. i. mit Entsprechen von  $P$  und  $Q$ ) homöomorph sind (beispielsweise:  $\mathcal{U}(P) =$  Durchschnitt von  $\mathcal{U}_*$  mit dem Bild vermöge  $A^{-1}$  des Durchschnittes  $\mathcal{B}_0 \cdot \mathcal{B}_*$ ;  $\mathcal{B}(Q) =$  Durchschnitt von  $\mathcal{B}_*$  mit dem Bild vermöge  $A$  des Durchschnittes  $\mathcal{U}_0 \cdot \mathcal{U}_*$ ). Dies zeigt, daß die Kenntnis einer einzigen beliebigen Umgebung von  $P$  unabhängig von dem übrigen Raum  $\mathfrak{M}$  hinreicht, um den Umgebungscharakter von  $\mathfrak{M}$  in  $P$  festzustellen.

Ein Raum  $\mathfrak{X}$ , welcher in sämtlichen Punkten denselben Umgebungstypus hat, heißt *topologisch-homogen*.<sup>89)</sup> Beispiele: die Kugelfläche; jeder  $\mathfrak{R}^n$ . — Hingegen ist, wie aus dem *Brouwerschen* Satz von der Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebietes<sup>90)</sup> folgt, der durch die Punktmenge  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \leq 1$  des  $\mathfrak{R}^n$  dargestellte Raum  $\mathfrak{B}$  nicht homogen, da ein „Randpunkt“  $Q$  ( $\sum \xi_i^2 = 1$ ) in  $\mathfrak{B}$  einen anderen Umgebungstypus hat, wie ein „mittlerer Punkt“  $P$  ( $\sum \xi_i^2 < 1$ ); man beachte, daß es sich mit dieser Unterscheidung um eine absolute topologische Eigenschaft (Nr. 2) von  $\mathfrak{B}$  handelt, nicht um eine relative von  $\mathfrak{B}$  bezüglich des  $\mathfrak{R}^n$  (daß die Punkte  $P$  bzw.  $Q$  zugleich auch mit den inneren bzw. Begrenzungspunkten (Nr. 8) von  $\mathfrak{B}$  im  $\mathfrak{R}^n$  zusammenfallen, bleibt nämlich dabei außer Betracht, weil die nicht zu  $\mathfrak{B}$  gehörigen Punkte des  $\mathfrak{R}^n$  für die Umgebungen  $\mathcal{U}(P|\mathfrak{B})$  und  $\mathcal{U}(Q|\mathfrak{B})$  keine Rolle spielen).<sup>91)</sup>

88) Hierzu ist notwendig (nicht hinreichend), daß  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  gleichen *Mächtigungsgrad in der Umgebung* von  $P$  bzw. von  $Q$  im Sinne von *G. Cantor* haben (vgl. hierüber und über *Cantors* Definition „homogener“ Punkt mengen: II C 9, p. 870, 873; die Definitionen beziehen sich dort auf den Fall von Punkt mengen in einem  $\mathfrak{R}^n$ ).

89) Die Homogenität in dem von *G. Cantor* (vgl. <sup>88)</sup>) erklärten Sinn ist dazu notwendig (nicht hinreichend). Andere Arten von Homogenität betrachten *F. Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 173; *L. E. J. Brouwer*, Proc. Ac. Amsterdam 20 (1917), p. 1194, Versl. 25 (1917), p. 1426 und *B. P. Haalmejer*, Versl. Amsterdam Akad. 28 (1919), p. 376, Math. Ztschr. 16 (1923), p. 92—102; *C. Kuratowski*, Fund. math. 3 (1922), p. 14—19; *E. B. van Vleck*, Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908), p. 237; *E. Jacobsthal* und *K. Knopp*, Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges. 14 (1915), p. 121; *K. Knopp*, Math. Ann. 95 (1925), p. 411; *P. Urysohn*, Fund. math. 9 (1927), p. 121; *P. Urysohn*, *K. Menger*<sup>267)</sup>, *D. v. Dantzig-B. L. v. d. Waerden*<sup>77)</sup>. Über „homogen  $n$ -dimensional“ vgl. <sup>265)</sup>.

90) Vgl. II C 9, p. 954.

91) Der übliche Sprachgebrauch unterschied nicht zwischen den Begriffen des mittleren und des (im Sinn von Nr. 8 verstandenen) inneren Punktes und

Eine Art Rangordnung der verschiedenen Umgebungstypen gewinnt man, wenn man höhere, niedrigere und gleichhohe Umgebungstypen zweier Punkte  $P, Q$  definiert<sup>92)</sup>, und zwar im Anschluß an analoge von *Fréchet* für die Topologie im Großen aufgestellte Gesichtspunkte.<sup>93)</sup>

Eine eindeutige stetige Abbildung  $A$  eines Raumes  $\overline{\mathfrak{X}}$  auf einem anderen  $\mathfrak{X}$  heiße „topologisch im Kleinen“, wenn es zu jedem Punkt  $\overline{P}$  von  $\overline{\mathfrak{X}}$  eine Umgebung  $\overline{U} = U(\overline{P} | \overline{\mathfrak{X}})$  gibt, so daß die Abbildung von  $\overline{U}$  auf ihre Bildmenge in  $\mathfrak{X}$  topologisch (1-1-deutig und umkehrbar stetig) ist.  $\overline{\mathfrak{X}}$  heißt dann ein *Überlagerungsraum* von  $\mathfrak{X}$ . Von besonderer Bedeutung ist dieser Begriff, der als Spezialfall ( $m = 1$ ) in dem der topologischen  $(m, n)$ -*Involution* enthalten ist, für die Theorie der Flächen und ihre funktionentheoretischen Anwendungen geworden („Überlagerungsflächen“).<sup>94)</sup>

**20. Herstellung neuer topologischer Räume aus gegebenen.** Nach Nr. 11 stellt jede Teilmenge eines topologischen Raumes selbst einen solchen dar. Ein Gegenstück zu diesem Verfahren zur Gewinnung neuer topologischer Räume hat man beispielsweise vor sich bei jeder Ergänzung eines gegebenen Raumes durch Hinzunahme uneigentlicher (unendlich ferner) Elemente, wobei meist angestrebt wird, daß der ergänzte Raum absolutkompakt (Nr. 6) und homogen (Nr. 19) ausfalle.<sup>95)</sup>

Weitere Mittel zur Herstellung neuer Räume (Bildung von Summen-, Produkt- und Potenzraum) sind bekannten Verfahren der allgemeinen Mengenlehre zur Bildung neuer Mengen aus gegebenen analog.

verwendete „innerer Punkt“ in beiderlei Sinn. Auch das Wort „Rand“ wurde oft synonym mit „Begrenzung“ gebraucht; über andere Bedeutungen des Wortes Rand vgl. Nr. 32 („Randstück“) und II C 9, p. 881, 927.

92) Vgl. *H. Tietze*<sup>87)</sup>, p. 4 [40] sowie auch Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 103 und 112 (Anm. 21) und *T. Waewski*, Ann. Soc. Math. Polon. 2 (1923), p. 54 (Definition einer Dimension „in micro“).

93) Vgl. II C 9, p. 952 und Anm. 234a des vorliegenden Artikels. Die Frage des Vergleichs von Umgebungstypen (Vergleich von „lokalen Dimensionen“) hat *M. Fréchet* neuerdings behandelt in Fund. math. 11 (1928), p. 287—290.

94) Vgl. die funktionentheoretischen Artikel (siehe \*) sowie *H. Weyl*, R. Fl., p. 47. Die obige Definition betrifft die „unverzweigten“ Überlagerungsflächen (-räume). Über Involutionen vgl. <sup>189)</sup>.

95) Vgl. die allgemeinen Bemerkungen über solche Einführungen bei *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, Abschn. III, § 27; ferner hinsichtlich der Erweiterung der topologischen Räume: *F. Riesz*<sup>19)</sup>, p. 23; *H. Tietze*, Math. Ann. 91 (1924), p. 210/24; *P. Alexandroff*, ib. 92 (1924), p. 296; *M. Fréchet*, Fund. math. 10 (1927), p. 343, 14 (1929), p. 120; vgl. auch <sup>183a)</sup> über die hiermit verwandten Einbettungsprobleme.

Ist eine beliebige Menge paarweise punktfremder topologischer Räume  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{X}''$ , ... gegeben, so wird als ihr *Summenraum*<sup>96)</sup>  $\mathfrak{X}$  derjenige Raum bezeichnet, zu dessen Punkten jeder Punkt  $P$  eines jeden der Räume  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{X}''$ , ... gezählt wird, wobei, wenn  $P$  etwa zu  $\mathfrak{X}'$  gehört, als  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{X})$  jede eine  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{X}')$  enthaltende Teilmenge von  $\mathfrak{X}$  erklärt wird.

Sind  $\mathfrak{X}_1$ ,  $\mathfrak{X}_2$  zwei topologische Räume, so versteht man unter dem *Produktraum*<sup>97)</sup> die Menge aller Paare von Punkten  $(X_1, X_2)$ , von denen  $X_1$  in  $\mathfrak{X}_1$  und  $X_2$  in  $\mathfrak{X}_2$  liegt, wobei als Umgebung eines Paares  $(X_1^0, X_2^0)$  jede Produktmenge<sup>98)</sup> einer Umgebung  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(X_1^0|\mathfrak{X}_1)$  mit einer Umgebung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X_2^0|\mathfrak{X}_2)$  erklärt wird, sowie jede eine solche Produktmenge umfassende Menge von Paaren  $(X_1, X_2)$ . Ist in  $\mathfrak{X}_1$  ein Abstand  $d_1(X_1, Y_1)$ , in  $\mathfrak{X}_2$  ein Abstand  $d_2(X_2, Y_2)$  erklärt, so ist z. B.  $d((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = \sqrt{d_1(X_1, Y_1)^2 + d_2(X_2, Y_2)^2}$  ein Abstand im Produktraum. Sind  $\mathfrak{X}_1$ ,  $\mathfrak{X}_2$  etwa Kreise, so ist ihr Produkt ein Torus. Ist  $\mathfrak{X}_1$  mit  $\mathfrak{X}_1'$ ,  $\mathfrak{X}_2$  mit  $\mathfrak{X}_2'$  homöomorph, so ist auch das Produkt von  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  mit dem von  $\mathfrak{X}_1'$  und  $\mathfrak{X}_2'$  homöomorph. Diese Multiplikation kann daher als eine Multiplikation von Homöomorphie-typen aufgefaßt werden. Als solche ist sie kommutativ und zur Summenbildung distributiv. Die wichtigste Anwendung des Begriffs des Produktraumes ist die Definition des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^n$  als der  $n^{\text{ten}}$  Potenz des eindimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^1$ . Da dieser rein topologisch definiert worden ist<sup>99)</sup>, hat man damit eine rein topologische Definition des  $\mathfrak{R}^n$ .<sup>100)</sup> Allerdings sind in einem so definierten  $\mathfrak{R}^n$  zunächst gewisse Mengen („achsenparallele Gerade“) ausgezeichnet.

Der *Potenzraum* eines Raumes  $\mathfrak{X}$ , ein Analogon zur Potenzmenge (Menge aller Untermengen) in der allgemeinen Mengenlehre, wird als ein Raum  $\mathfrak{r}$  definiert, dessen Elemente die *abgeschlossenen* Mengen

96) Vgl. <sup>96)</sup> p. 298.

97) Vgl. für zwei und damit für endlich viele Faktoren: *E. Steinitz*, Sitzber. Berlin. Math. Ges. 7 (1907), p. 42; *M. Fréchet*, Math. Ann. 68 (1910), p. 146; *R. E. Root*, Amer. Math. J. 36 (1914), p. 90; *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 53; für eine beliebige Menge von Faktoren: *H. Tietze*<sup>96)</sup>. Man kann auch Produkte von Umgebungstypen (Nr. 19) bilden. Vgl. l. c. <sup>87)</sup>, p. 5 [41], p. 7 [43].

98) Produktmenge  $\mathfrak{U}\mathfrak{B} =$  Menge von Paaren  $(X_1, X_2)$ , wo  $X_1$  in  $\mathfrak{U}$ ,  $X_2$  in  $\mathfrak{B}$  liegt.

99) Vgl. II C 9 a, p. 910; *A. Fraenkel*, Mengenlehre 1923, p. 119, 120. Vgl. auch <sup>282)</sup>.

100) *H. Tietze*, Hamb. Sem., p. 5 [41]. Eine andere Charakterisierung des  $\mathfrak{R}^n$  gab *P. Alexandroff*, Math. Ann. 94 (1925), p. 296–308. Über den  $\mathfrak{R}^2$  vgl. noch *R. L. Moore*, Trans. Am. Math. Soc. 17 (1916), p. 131–164; 20 (1919), p. 169–178; *D. W. Woodard*<sup>46)</sup>. Vgl. ferner <sup>148)</sup>.



von  $\mathfrak{X}$  sind. Wir begnügen uns, die Definition für einen *beschränkten metrischen* Raum anzugeben. Der Potenzraum  $r$  wird dann selbst als ein (beschränkter) metrischer Raum erklärt, indem unter dem Abstand  $\varrho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  zweier abgeschlossener<sup>101)</sup> Mengen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  (*Mengenabstand*) die untere Grenze aller Zahlen  $\varrho$  verstanden wird, für welche es zu jedem Punkt  $P$  von  $\mathfrak{A}$  einen Punkt  $Q$  von  $\mathfrak{B}$  gibt, so daß der Abstand zwischen  $P$  und  $Q$  nicht größer als  $\varrho$  ist, und zu jedem Punkt  $Q'$  von  $\mathfrak{B}$  einen Punkt  $P'$  von  $\mathfrak{A}$ , so daß der Abstand zwischen  $P'$  und  $Q'$  nicht größer als  $\varrho$  ist.<sup>102)</sup>

Die auf Grund dieses Abstandes definierten Limes- und Häufungsbeziehungen zwischen Mengen eignen sich wegen der bekannten Eigenschaften dieser Beziehungen besser zum Studium von Folgen von Mengen und Mengen von Mengen als die älteren Begriffe der oberen und unteren Näherungsgrenze (II C 9 a, Anm. 272, 272 a), die sich übrigens nur auf Folgen von Mengen beziehen und nicht einmal *Fréchet's* Limesaxiome erfüllen. Ist  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$  eine Folge abgeschlossener Mengen eines kompakten metrischen Raumes  $\mathfrak{X}$ , d. h. eine Punktfolge im Potenzraum  $r$  von  $\mathfrak{X}$ , und bildet man in  $r$  die Menge aller konvergenten Teilfolgen dieser Punktfolge und die Menge  $m$  aller Limiten dieser Teilfolgen (diese Limiten sind also selbst abgeschlossene Mengen in  $\mathfrak{X}$ ), dann ist der Durchschnitt dieser Limiten die untere Näherungsgrenze, ihre Vereinigung die obere Näherungsgrenze der Folge der  $\mathfrak{A}_n$ . In nicht kompakten Räumen ist der Zusammenhang schwächer.<sup>103)</sup>

Der Potenzraum eines allgemeinen topologischen Raumes  $\mathfrak{X}$  ist regulär und lückenlos, ist kompakt und separabel, genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, ist zusammenhängend, ist im Kleinen zusammenhängend (vgl. <sup>193)</sup>), wenn

101) Würde man diese Abstandsdefinition auch auf nicht abgeschlossene Mengen anwenden, so erhielten zwei verschiedene Mengen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  mit derselben abgeschlossenen Hülle den Abstand Null voneinander. Axiom 2) des Abstandsbegriffs wäre dann nicht erfüllt. Die leere Menge faßt man am besten als isolierten Punkt des Potenzraumes auf.

102) Die Bildung des Potenzraumes (ohne Verwendung dieses Namens) findet sich zuerst bei *D. Pompeju*, Ann. Fac. Toulouse (2) 7 (1905), p. 281, 282 für Mengen im  $\mathbb{R}^2$ . Für beliebige metrische Räume hat *Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 293—298 diesen Raum untersucht, für kompakte metrische Räume sehr eingehend *T. Ważewski*, Fund. math. 4 (1923), p. 214—245. Den Potenzraum eines lückenlosen (vgl. <sup>47)</sup>) topologischen Raumes hat (ohne Verwendung eines Abstandes) *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), p. 258—280 und 33 (Jg. 1923, erschienen 1924), p. 49—62 definiert und untersucht, mit ungefähr denselben Ergebnissen wie *Ważewski*.

103) Vgl. *Hausdorff*<sup>22)</sup>, p. 294.

$\mathfrak{X}$  die betreffende Eigenschaft hat. Die Kontinua des Raumes bilden einen abgeschlossenen Teilraum des Potenzraumes, der diese Eigenschaften ebenfalls vom gegebenen Raum erbt.

Ganz allgemein läßt sich hier die Frage stellen: Welche topologischen Eigenschaften haben die Vereinigung, der Durchschnitt, die äußere, innere Näherungsgrenze, kurz irgendeine Funktion einer Menge  $\mathfrak{M}$  von abgeschlossenen Mengen  $\mathfrak{A}$ , wenn man entweder von  $\mathfrak{M}$  oder von seinen Elementen oder von beiden bestimmte topologische Eigenschaften voraussetzt; z. B. ist die Vereinigungsmenge einer abgeschlossenen Menge von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen, die einer zusammenhängenden Menge von abgeschlossenen Mengen, unter denen wenigstens eine zusammenhängend ist, wieder zusammenhängend.

*W. Hurewicz*<sup>103a)</sup> hat einen aus „Schnitten“ eines topologischen Raumes gebildeten „Schnittraum“ eingeführt.

**21. Zerlegungsräume.** Zu einer Herstellung eines neuen topologischen Raumes  $\mathfrak{R}^*$  aus einem gegebenen  $\mathfrak{R}$  führt auch jede eindeutige stetige Abbildung von  $\mathfrak{R}$  auf einen Raum  $\mathfrak{S}$ . Wegen der Eindeutigkeit der Abbildung sind die „Gesamtbilder“  $\mathfrak{Y}_1$  und  $\mathfrak{Y}_2$  je zweier Punkte  $Y_1, Y_2$  von  $\mathfrak{S}$  zueinander fremd. Ist  $\mathfrak{R}$  lückenlos, so ist für irgendwelche Bilder  $\lim Y_i = Y$  gleichbedeutend mit  $\overline{\lim \sup} \mathfrak{Y}_i \subseteq \mathfrak{Y}$ . Nennt man eine Zerlegung eines Raumes in zueinander fremde abgeschlossene Teile (die „Elemente“ der Zerlegung) oberhalb stetig<sup>104)</sup>, wenn es zu jedem Element  $\mathfrak{Y}$  der Zerlegung und jeder  $\mathfrak{Y}$  enthaltenden offenen Menge  $\mathfrak{U}$  eine zu  $\mathfrak{Y}$  nicht fremde offene Menge  $\mathfrak{B}$  gibt, für welche jedes zu  $\mathfrak{B}$  nicht fremde Element  $\mathfrak{Y}'$  der Zerlegung ganz in  $\mathfrak{U}$  liegt, dann gilt: Die von einer eindeutigen stetigen Abbildung eines lückenlosen Raumes erzeugte Zerlegung derselben ist oberhalb stetig. Wird umgekehrt als Umgebung eines Elements  $\mathfrak{Y}_0$  einer oberhalb stetigen Zerlegung die Menge aller Elemente derselben erklärt, welche in einer  $\mathfrak{Y}_0$  enthaltenden offenen Menge  $\mathfrak{U}$  liegen<sup>104a)</sup>, dann erhält man den Zerlegungsraum  $\mathfrak{R}^*$  als eindeutig-

103a) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 163—165.

104) Im Anschluß an *R. L. Moore*, Proc. Nat. Ac. 10 (1924), p. 356—360; Trans. Amer. 27 (1925), p. 416—428 und *P. Alexandroff*, Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 997—999 und Math. Ann. 96 (1926), p. 555—571. Bezüglich unterhalb stetiger, bzw. (schlechtweg) stetiger Zerlegungen vgl. *L. Vietoris*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 443—453. Vgl. ferner *C. Kuratowski*, Fund. math. 11 (1928), p. 169—185, *W. L. Ayres*, ib. 14 (1929), p. 334—338.

104a) Diese Umgebungen befriedigen die Axiome  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$ ,  $(\bar{C})$ ,  $(\bar{D}_0)$  (vgl. Nr. 10), dagegen ist das schärfere Trennungsaxiom  $(\bar{D})$  im allgemeinen nicht erfüllt, auch wenn dies für den zerlegten Raum  $\mathfrak{R}$  der Fall ist.

stetiges Bild des zerlegten Raumes  $\mathfrak{R}$ , wenn man einen beliebigen Punkt  $X$  aus  $\mathfrak{R}$  und ein Element  $\mathfrak{Y}$  aus  $\mathfrak{R}^*$  einander in einer Abbildung  $\mathfrak{Y} = f(X)$  zuordnet, sobald  $X$  in  $\mathfrak{Y}$  liegt. Haben die Elemente der Zerlegung einfache Eigenschaften, so kann man aus Eigenschaften des zerlegten Raumes auf solche des Zerlegungsraumes schließen. So gilt unter anderem: Wird die Kugelfläche oberhalb stetig in lauter einfach zusammenhängende Kontinua zerlegt, dann ist der Zerlegungsraum mit der Kugelfläche homöomorph.<sup>105)</sup> So liefert eine eindimensionale oberhalb stetige Zerlegung (d. h. eine solche, durch welche ein eindimensionaler<sup>106)</sup> Zerlegungsraum entsteht) der Kugelfläche in lauter Kontinua als Zerlegungsraum einen Baum.<sup>107)</sup> So läßt eine eindeutige stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes  $\mathfrak{R}$ , bei der alle Gesamtbilder die ersten  $n$  Zusammenhangszahlen 0 haben, die ersten  $n$  Zusammenhangszahlen von  $\mathfrak{R}$  ungeändert.<sup>108)</sup> Umgekehrt läßt sich vom Zerlegungsraum und den Elementen der Zerlegung auch auf den zerlegten Raum schließen. So ist ein kompakter metrischer Raum höchstens  $(n + m)$ -dimensional, wenn er in lauter höchstens  $n$ -dimensionale Mengen so zerlegt werden kann, daß der Zerlegungsraum  $m$ -dimensional ist.<sup>109)</sup> Da die (von selbst oberhalb stetige) Zerlegung eines kompakten metrischen Raumes in seine Komponenten<sup>109a)</sup> einen 0-dimensionalen Zerlegungsraum liefert<sup>110)</sup>, hat jeder  $n$ -dimensionale kompakte metrische Raum mindestens eine  $n$ -dimensionale Komponente.

Jeder kompakte metrische Raum  $\mathfrak{R}$  ist stetiges Bild jeder perfekten 0-dimensionalen Menge, insbesondere der Cantorschen Dreiteilungsmenge<sup>254)</sup>, d. h. kann als Zerlegungsraum derselben gemäß einer oberhalb stetigen Zerlegung erhalten werden, insbesondere hat  $\mathfrak{R}$  eine Dimension  $\leq n$ , wenn jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  höchstens  $(n + 1)$  Urbilder

105) *R. L. Moore*, l. c.<sup>104)</sup>. Er spricht den Satz als Satz über die Euklidische Ebene aus. Vgl. noch *R. L. Moore*, *Monatsh. Math. Phys.* 36 (1929), p. 81—88, *C. Kuratowski*, *Fund. math.* 14 (1929), p. 143.

106) Dieser Begriff, sowie die sogleich folgenden des Baumes und der  $n$ -dimensionalen Menge ( $n \geq -1$ ) werden in Nr. 41, 42 erklärt.

107) *L. Vietoris*, l. c.<sup>104)</sup>.

108) *L. Vietoris*, *Proc. Amsterdam* 29 (1926), p. 1008—1013; *Math. Ann.* 97 (1927), p. 454—472.

109) Für  $m = 0$  bei *L. Tumarkin*, *Proc. Amsterdam* 28 (1925), p. 1000—1001, allgemein bei *W. Hurewicz*<sup>111a)</sup>, p. 163.

109a) Komponenten = umfassendste zusammenhängende Teile, s. *Hausdorff*, *Grundz.*, p. 245. Über „Quasikomponenten“ siehe ib. p. 248 und *S. Pointner*, *Monatsh. Math. Phys.* 35 (1928), p. 235—238.

110) *P. Alexandroff*, *Proc. Amsterdam* 28 (1925), p. 999; *Math. Ann.* 96 (1926), p. 570.

hat.<sup>111)</sup> Allgemeiner hat ein stetiges Bild eines  $m$ -dimensionalen kompakten Raumes  $\mathfrak{R}$  eine Dimension  $\leq m + n$ , wenn jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  höchstens  $n + 1$  Urbilder besitzt.<sup>111a)</sup>

**22. Heftung topologischer Räume.**<sup>111b)</sup> Von Bedeutung für das Spätere ist noch folgender Prozeß: Seien  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  zwei abgeschlossene, punktfremde, zueinander homöomorphe Mengen eines topologischen Raumes  $\mathfrak{X}$ , und  $H$  eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{A}_1$  auf  $\mathfrak{A}_2$ . Wir bilden einen Raum  $\mathfrak{X}'$ , indem wir jedem Paar vermöge  $H$  entsprechender Punkte  $X, Y$  von  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$ , desgleichen jedem außerhalb  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  liegenden Punkt  $Z$  von  $\mathfrak{X}$  je einen Punkt  $X' = Y'$  bzw.  $Z'$  von  $\mathfrak{X}'$  zuordnen (wodurch eine eindeutige Abbildung  $A$  von  $\mathfrak{X}$  auf  $\mathfrak{X}'$  entsteht), und indem wir als  $U(Z')$  bzw.  $U(X')$  jede Menge aus  $\mathfrak{X}'$  erklären, die Bildmenge einer  $U(Z)$  bzw. Bildmenge der Vereinigung einer  $U(X)$  und einer  $U(Y)$  ist. Dieser Prozeß der „Verschmelzung“ oder „Heftung“ (wie er im Anschluß an einen in III AB 3, p. 194 gebrauchten Ausdruck genannt werde) „längs  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  gemäß  $H$ “ ist besonders bekannt bei Herstellung einer „im idealen Sinne“ geschlossenen Fläche durch „Ränderzuordnung“ aus einem Fundamentalpolygon (oder aus mehreren Polygonen, von denen vorerst der „Summenraum“ (Nr. 20) zu bilden ist; vgl. Nr. 25), analog bei Herstellung einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch Zuordnung von Randpolygone eines 3-dimensionalen Fundamentalpolyeders (Nr. 29,<sup>154)</sup>). Bei diesem Prozeß können an Stelle zweier  $\mathfrak{A}_i$  auch endlich viele, paarweise punktfremde, treten, wenn zwischen je zweien  $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k$  eine topologische Abbildung  $H_{ik}$  gegeben ist, derart daß stets die zusammengesetzte Abbildung  $H_{ik}H_{ki} = H_{ii}$  ist. Es können auch mehrere solche Heftungen gleichzeitig vorgenommen werden (etwa längs  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_2$  gemäß einem System von Abbildungen  $H_{ik}$ ; sowie längs  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_\mu$  gemäß den Abbildungen  $K_{ik}$ ; sowie längs  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_\nu$  gemäß den Abbildungen  $L_{ik}$ ; usw.), wenn gewisse *Verträglichkeitsbedingungen* erfüllt sind (so daß z. B. wenn  $\mathfrak{C}_1$  Teilmenge sowohl von  $\mathfrak{A}_1$  wie von  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_2$  von  $\mathfrak{A}_2$  wie von  $\mathfrak{B}_2$  ist, dann die topologische Abbildung  $L_{12}$  von  $\mathfrak{C}_1$  auf  $\mathfrak{C}_2$  übereinstimmt mit jeder der topologischen

111) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1014—1017. Vgl. <sup>266)</sup>.

111a) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 159—165. Spezielle Fälle dieses Satzes für  $m = 1$  sind bekannte Sätze über *Peano-Kurven*, vgl. II C 9, p. 945/7.

111b) Der Heftungsprozeß läßt sich der Lehre von den Zerlegungsräumen (Nr. 21) einordnen; vgl. hierzu die (in Vorbereitung befindliche) Münchener Dissertation von *G. Aumann*. Die (unabhängig von der in Nr. 21 genannten Literatur entstandenen) Betrachtungen von Nr. 22 sollen eine allgemein-topologische Grundlage für die Heftungen in Nr. 25, 27 geben.

Abbildungen von  $\mathfrak{C}_1$ , die sich aus der Abbildung  $H_{12}$  von  $\mathfrak{A}_1$  auf  $\mathfrak{A}_2$  bzw. aus der Abbildung  $K_{12}$  von  $\mathfrak{B}_1$  auf  $\mathfrak{B}_2$  ergibt). Beispiele liefert (vgl. Nr. 25, 27) die gleichzeitige Ränderzuordnung längs *mehrerer* Kantenpaare (bzw. Randpolygonpaare)  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2; \dots$  eines Fundamentalpolygons (bzw. Fundamentalpolyeders) unter Beachtung der damit verbundenen Verschmelzung ganzer Systeme von zugeordneten Ecken (bzw. von Kanten und von Ecken). — Die Anbringung von Schnitten derart, daß z. B. auf einer Fläche aus jedem Punkt einer Schnittlinie auf jeder ihrer beiden Seiten je ein (zur zerschnittenen Fläche hinzugerechneter) Randpunkt entsteht, kann als Beispiel eines zu einer Heftung inversen Prozesses angesehen werden.

### III. $n$ -dimensionale Topologie.

23. Vorbemerkungen. Homogene  $n$ -dimensionale Gebilde. Entsprechend der Art, wie wir die Erscheinungen der Erfahrungswelt mit Hilfe einer geeigneten Anzahl reeller Parameter mathematisch beschreiben, sind unter allen topologischen Räumen die  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, denen wir uns jetzt zuwenden, am wichtigsten. Ihr Studium in topologischer Hinsicht bildet den Gegenstand der  $n$ -dimensionalen Topologie. Obgleich für die niedrigsten Dimensionszahlen  $n$  derartige Räume ( $n = 1$ : Kurven,  $n = 2$ : Flächen) seit altersher in der Mathematik betrachtet wurden, geschah dies meist ohne feste Definitionen dieser Gebilde.<sup>112)</sup> Nun hat seit *B. Riemanns* Arbeiten die  $n$ -dimensionale Topologie, insbesondere für  $n = 2$ , eine hervorragende Anwendung in der Funktionentheorie gefunden, und *Riemann* selbst hat eine Topologie der Flächen (unter Benutzung ihrer Zerschneidung durch Querschnitte) entwickelt und sich auch mit  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten beschäftigt.<sup>113)</sup> Aber eine bestimmte Definition des Begriffes Fläche (bzw.  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit) fehlt auch bei *Riemann*, ebenso wie in den an ihn anschließenden Darstellungen (und es wird nur etwa gelegentlich bemerkt<sup>114)</sup>, daß nirgends eine Spaltung eines Blattes längs einer Linie in mehrere vorkommen soll), so daß für jene Anwendungen der Topologie lange eine ausreichende

112) Vgl. hierzu Artikel III AB 2 (*v. Mangoldt*). Über das Problem einer allgemeinen Definition  $n$ -dimensionaler Gebilde (Bereiche) vgl. auch *F. Enriques*, l. c. <sup>1a)</sup>, *F. Riesz*, l. c. <sup>20)</sup>, p. 345, *Math. Ann.* 61 (1905), p. 406. S. ferner die Bemerkungen über den Begriff „Fläche“ bei *M. Fréchet*, *Ann. Soc. Mat. Polon.* 3 (1924), p. 4; *B. v. Kerékjártó*, *Acta litt. ac. scient. Szeged* 3 (1927), p. 49.

113) *B. Riemann*, *Gesammelte Werke*, 2. Aufl., p. 9/12, 91/96, sowie p. 479/82 (nachgelassenes Fragment über  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten).

114) l. c. <sup>113)</sup>, p. 9 (in Nr. 5), p. 28.

Unterlage fehlte. Erst in neuerer Zeit hat sich eine präzise, topologisch brauchbare Charakterisierung der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten herausgebildet, die in die Definition das aufnimmt, was sich bei *Riemann* erst nach den Zerschneidungen einstellt: die Zusammensetzbarkeit aus elementaren Stücken (Flächenstücken,  $n$ -dimensionalen Zellen).<sup>115)</sup> Es hat dann *H. Weyl*<sup>116)</sup> eine solche Charakterisierung des Flächenbegriffes einer Darstellung des *Riemannsches* funktionentheoretischen Ideenkreises zugrunde gelegt und zugleich eine diesem Zwecke angepaßte Topologie der Flächen (insbesondere der geschlossenen<sup>117)</sup>) entwickelt.

Wie bei *Weyl* soll auch hier die Abgrenzung des Begriffs Fläche in zwei Schritten vorgenommen werden, gekennzeichnet durch die Begriffe: a) „2-dimensionales Gebilde“ und b) „2-dimensionale Mannigfaltigkeit“ = „Fläche“<sup>118)</sup> (analog für  $n \neq 2$ ). Wir beschränken uns dabei zunächst auf die (s. u.) als „homogen“ bezeichneten Gebilde bzw. Mannigfaltigkeiten, welche letztere bisher am meisten studiert wurden, während bezüglich nicht-homogener Mannigfaltigkeiten eine einheitlich angenommene Begriffsabgrenzung und Terminologie nicht vorliegt.<sup>119)</sup>

Die folgenden Bemerkungen sollen zur fraglichen Abgrenzung des Mannigfaltigkeits-Begriffes, und zwar an Hand des Falles  $n = 2$ , hinüberleiten.

Bei der allmählichen Entwicklung des Begriffes Fläche war vormals die Beschränkung auf Flächen  $\mathfrak{F}$  des euklidischen  $\mathcal{R}^3$  vorherrschend (was u. a. zur Folge hatte, daß die geschlossenen nicht-orientierbaren<sup>120)</sup> Flächen lange Zeit außer Betracht blieben), und hier wiederum auf solche Flächen, die, bezogen auf ein System cartesischer Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , einer analytischen Darstellung mit Hilfe (eventuell mehrmals) differenzierbarer oder analytischer Funktionen fähig sind. Das Typische für den Flächenbegriff ist aber dabei stets folgendes: Entweder es besteht für die Umgebung einer *jeden* Stelle  $P$  der Fläche  $\mathfrak{F}$  die Möglichkeit einer Parameterdarstellung  $\xi_i = \xi_i(\tau_1, \tau_2)$

115) Wegen der einschlägigen Arbeiten vgl. Nr. 28.

116) *H. Weyl*, R. Fl., §§ 4—11.

117) Mit den ungeschlossenen Flächen hat sich dann insbesondere *B. v. Kerékjártó*<sup>172)</sup> beschäftigt.

118) *Weyl* sagt dafür: a) „2-dimensionale Mannigfaltigkeit“, b) „Fläche“. Die im Text gewählte Verwendung des Wortes „Mannigfaltigkeit“ steht im Einklang mit *Brouwers* Definition der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.<sup>144)</sup>

119) Vgl. noch <sup>155)</sup>. So versteht *Brouwer* unter Mannigfaltigkeit schlechtweg soviel wie homogene Mannigfaltigkeit (desgleichen *Weyl* für seine Definition der Mannigfaltigkeiten).

120) Vgl. <sup>168)</sup>.

derart, daß ein Bereich  $|\tau_1| < \varrho$ ,  $|\tau_2| < \varrho$  eindeutig und umkehrbar stetig auf eine Umgebung von  $P$  abgebildet wird; oder es ist diese Darstellung zwar nur für eine gewisse Gesamtheit von Stellen (die regulären Stellen) gesichert, derart aber, daß die übrigen (singulären) Stellen stets Häufungspunkte von regulären sind, so daß  $\mathfrak{F}$  aus der Menge der regulären Stellen durch Hinzunahme ihrer Häufungspunkte entsteht. Die Möglichkeit der genannten Parameterdarstellung ist beispielsweise, wenn  $\mathfrak{F}$  durch eine Gleichung  $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$  mit stetig differenzierbarem  $\varphi$  gegeben ist, für alle  $P$  gesichert, für die in einer gewissen Umgebung von  $P$  wenigstens eine der drei Ableitungen  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \neq 0$  ist. Während aber bei einer 1-1-deutigen, umkehrbar stetigen Abbildung von  $\mathfrak{F}$  die Möglichkeit einer Darstellung durch eine solche Gleichung  $\varphi = 0$  für die Bildfläche verloren gehen kann (sofern eben die abbildenden Funktionen wohl stetig, nicht aber auch differenzierbar zu sein brauchen), bleibt die Möglichkeit der 1-1-deutigen, umkehrbar stetigen (= topologischen) Abbildung der Umgebung einer Stelle auf den ebenen Bereich  $|\tau_1|, |\tau_2| < \varrho$  bestehen. An diese letztere Eigenschaft war daher zur Gewinnung einer topologischen Definition der Flächen anzuknüpfen. Wenn man sich vorerst auf Flächen mit nur regulären Stellen beschränkt<sup>121)</sup> (das sind dann solche, die im Sinn von Nr. 19 topologisch homogen sind), so gelangt man dazu, die folgendermaßen definierten Gebilde zu betrachten: unter einem „homogenen 2-dimensionalen (bzw.  $n$ -dimensionalen) Gebilde“<sup>122)</sup> werde ein topologischer Raum verstanden, welcher in jedem seiner Punkte denselben Umgebungscharakter (Nr. 19) wie die Ebene (bzw. der  $\mathbb{R}^n$ ) hat. Die vorerwähnten Flächen (mit nur regulären Stellen) gehören nach dem Gesagten zu den homogenen 2-dimensionalen Gebilden.

**24. Homogene 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten.** Den Flächen  $\mathfrak{F}$  im  $\mathbb{R}^3$  kommt aber noch eine weitere Eigenschaft zu, die sie mit den allgemeinen in der Funktionentheorie betrachteten, gleichfalls als „Flächen“ bezeichneten Gebilden (*Riemannsche Flächen*; durch Fundamentalpolygone definierte in abstracto geschlossene Flächen, u. a.) gemein haben, und die als die „Möglichkeit eines Zellenaufbaus“<sup>123)</sup> von  $\mathfrak{F}$  bezeichnet wird. Beispielsweise denke man an die Oktaederteilung

121) Mit andern Worten: wenn man, etwaige nicht-reguläre Punkte weglassend, zur Fläche nur die Gesamtheit der regulären Punkte rechnet.

122) Nach der Bezeichnung von *Tietze*, Hambg. Sem., p. 8 [44].

123) Statt „Zellenaufbau“ hat *Weyl*, R. Fl., p. 21 für den vorliegenden Fall (Dreieckszerlegung einer Fläche) das ausdrucksvolle Wort „Triangulation“ eingeführt.

der Kugelfläche: Die 8 sphärischen Dreiecksflächen  $\mathfrak{B}_1^2, \dots, \mathfrak{B}_8^2$  (denen ihre Randpunkte zugerechnet werden sollen) liefern als Vereinigung die ganze Fläche, die als topologischer Raum aufgefaßt mit  $\mathfrak{R}$  bezeichnet werde; jede „zweidimensionale Zelle“  $\mathfrak{B}_i^2$  ist topologisches Abbild einer ebenen Dreiecksfläche  $\mathfrak{G}_i^2$ , und es gibt topologische Abbildungen  $A_i$  von  $\mathfrak{G}_i^2$  auf  $\mathfrak{B}_i^2$ , die die Seiten bzw. Ecken von  $\mathfrak{G}_i^2$  auf Seiten bzw. Ecken von  $\mathfrak{B}_i^2$  abbilden. Wenn man in jeder Dreiecksfläche  $\mathfrak{G}_i^2$  1. die mittleren<sup>124)</sup> Punkte, 2. die mittleren Punkte jeder Seite, 3. die Ecken unterscheidet, so läßt sich genauer folgendes sagen:

A 1) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Dreiecksfläche  $\mathfrak{G}_h^2$  gehört der *einen* Zelle  $\mathfrak{B}_h^2$  an und hat sonst mit keiner Zelle  $\mathfrak{B}_i^2$  ( $i \neq h$ ) einen Punkt gemein.

A 2) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Seite eines Dreiecks  $\mathfrak{G}_h^2$  gehört *zwei* Zellen an (nämlich der Zelle  $\mathfrak{B}_h^2$  und einer zweiten, etwa  $\mathfrak{B}_k^2$ ) und hat sonst mit keiner  $\mathfrak{B}_i^2$  ( $i \neq h, k$ ) einen Punkt gemein; — und zwar ist diese Menge, analog wie sie in  $\mathfrak{B}_h^2$  die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Seite von  $\mathfrak{G}_h^2$  ist, ebenso auch in  $\mathfrak{B}_k^2$  die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer Seite von  $\mathfrak{G}_k^2$ .

A 3) Jeder Bildpunkt einer Ecke eines Dreiecks  $\mathfrak{G}_h^2$  gehört *endlich vielen* [in unserem Beispiel sind es allemal vier] Zellen  $\mathfrak{B}_h^2, \mathfrak{B}_k^2, \mathfrak{B}_i^2, \dots$  an; — und zwar ist er, analog wie in  $\mathfrak{B}_h^2$ , ebenso auch in jeder der Zellen  $\mathfrak{B}_k^2, \mathfrak{B}_i^2, \dots$  der Bildpunkt einer Ecke des entsprechenden Dreiecks  $\mathfrak{G}_k^2$  bzw.  $\mathfrak{G}_i^2, \dots$

B) Jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  hat in  $\mathfrak{R}$  Umgebungen, bestehend aus Punkten nur derjenigen Zellen  $\mathfrak{B}_h^2$ , denen er angehört.<sup>125)</sup>

Um ein anderes Beispiel zu nennen: Wird die  $(\xi_1, \xi_2)$ -Ebene durch alle Geraden  $\xi_1 = m, \xi_2 = m, \xi_2 - \xi_1 = m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) in abzählbar unendlich viele Dreiecke  $\mathfrak{B}_i^2$  zerlegt, so sind wieder die eben ausgesprochenen Bedingungen A 1) 2) 3), B) erfüllt.

Wenn ein topologischer Raum  $\mathfrak{X}$  a) ein homogenes 2-dimensionales Gebilde ist und b) sich als Vereinigung endlich oder unendlich vieler<sup>126)</sup> seiner Teilmengen so darstellen läßt, daß jede dieser Teilmengen  $\mathfrak{B}_i^2$  das topologische Bild einer ebenen Dreiecksfläche  $\mathfrak{G}_i^2$  ist und dabei die Bedingungen A 1) 2) 3), B) erfüllt sind, dann sagen wir,  $\mathfrak{X}$  sei eine „homogene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit“ (oder eine „homogene Fläche“)  $\mathfrak{M}^2$ . Die Eigenschaft b) eines homogenen 2-dimen-

124) Vgl. Nr. 19.

125) Vgl. <sup>131)</sup>.

126) Bereits *W. Dyck*, *Math. Ann.* 32 (1888), p. 473, betrachtet auch den letzteren Fall.



sionalen Gebildes wird als „Triangulierbarkeit“<sup>123)</sup> oder „Möglichkeit eines Zellaufbaus“ bezeichnet. Bei einem solchen Zellaufbau von  $\mathfrak{M}^2$  heißen die  $\mathfrak{Z}_i^2$  die 2-dimensionalen Zellen, ferner werden die Bilder der Seiten der  $\mathfrak{E}_i^2$  (jede Seite einschließlich ihrer Endpunkte) als 1-dimensionale Zellen ( $\mathfrak{Z}_i^1$ ), und die Bilder der Ecken der  $\mathfrak{E}_i^2$  als 0-dimensionale Zellen ( $\mathfrak{Z}_i^0$ ) bezeichnet.<sup>127)</sup>

Ist eine  $\mathfrak{M}^2$  durch einen Zellaufbau definiert, so ist sie ein absolut-kompakter (Nr. 6) topologischer Raum oder nicht, je nachdem der Zellaufbau endlich oder unendlich viele Zellen umfaßt (so daß die letztere Unterscheidung unabhängig vom gewählten Zellaufbau der betrachteten  $\mathfrak{M}^2$  eine topologische Eigenschaft der  $\mathfrak{M}^2$  darstellt).<sup>128)</sup> Die absolut-kompakten bzw. nicht-absolut-kompakten homogenen  $\mathfrak{M}^2$  werden häufig als *geschlossene* bzw. *ungeschlossene* Flächen bezeichnet.<sup>129)</sup> Eine  $\mathfrak{M}^2$ , die als topologischer Raum zusammenhängend (Nr. 8) ist, kann nur aus endlich oder *abzählbar* unendlich vielen Zellen aufgebaut sein.<sup>128)</sup>

Jede *Riemannsche* Fläche ist eine homogene  $\mathfrak{M}^2$  im eben genannten Sinn<sup>130)</sup> (wenn man darauf verzichtet, die *Riemannsche* Fläche just als eine *Fläche im*  $\mathfrak{R}^3$  aufzufassen und sich mit den Durchdringungen der Blätter längs Verzweigungsschnitten herumzuschlagen).

Man kann — und es ist dies auch geschehen (vgl. Anm. <sup>146)</sup> und Nr. 29) — die Bedingungen A 1) 2) 3) auch durch andere (sei es engere, sei es weitere) ersetzen, ferner auch allgemeinere Zellen (Poly-

127) Zur Frage der Triangulierbarkeit vgl. <sup>147)</sup>, <sup>148)</sup>. Daß es nicht-triangulierbare 2-dimensionale Gebilde gibt, zeigt ein von *H. Prüfer* herrührendes Beispiel bei *T. Radó*, Acta litt. ac. scient. Szeged 2 (1925), p. 107. Man erkennt dies auch nach *P. Alexandroff*, Math. Ann. 92 (1924), p. 295 an einem Beispiel, das zu anderem Zwecke von *L. Vietoris*, Monatsh. Math. Phys. 31 (1912), p. 183 gebildet wurde. (Entgegen einer Bemerkung von *P. Alexandroff*, l. c., stellen diese Gebilde, weil nicht triangulierbar, *keine* Flächen im Sinne *Weyls* dar.)

128) Vgl. *H. Weyl*, R. Fl., p. 24.

129) Letztere auch als „offene Flächen“ (z. B. *Weyl*, R. Fl., p. 24; v. *Kerékjártó*, Vorl. I, p. 132), was wir vermeiden wegen der abweichenden Bedeutung, in der das Wort „offen“ in der Literatur (vgl. II C 9, p. 881, Anm. 85d) sich rasch eingebürgert hat und auch von uns verwendet wird (nämlich „offen in einem umfassenden Raum“, vgl. Nr. 8). Analog: Wenn eine Fläche — in einem umfassenden Raum liegend gedacht — in diesem (als Punktmenge) *abgeschlossen* ist, so ist das natürlich nicht gleichbedeutend damit, daß sie im obigen Sinne eine *geschlossene* Fläche ist. Vgl. ebenso die verschiedenen Bedeutungen von „fermé“ in „ensemble fermé“ und „surface fermée“. — Sei noch angeführt, daß *S. Saks*, l. c. <sup>172)</sup> „surfaces compactes“ (vgl. <sup>16)</sup>) die absolut-kompakten  $\mathfrak{M}^2$  nennt und „surfaces compactifiables“ jene nicht-absolut-kompakten, die einem zusammenhängenden offenen Teil einer absolut-kompakten  $\mathfrak{M}^2$  homöomorph sind.

130) *H. Weyl*, R. Fl., § 6.

gone statt speziell Dreiecke) verwenden, ohne daß mit dieser Änderung der zugelassenen Darstellungsformen eine Änderung in der Abgrenzung des Begriffs der homogenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit verbunden wäre.

**25. Beschreibung des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{M}^2$ .** Wichtiger für das Ziel dieses Berichtes ist aber die Feststellung, daß sich aus dem oben Gesagten die Möglichkeit ergibt, den Aufbau einer  $\mathfrak{M}^2$  aus ihren Zellen nach dem Prinzip der *Ränderzuordnung* in einer letzten Endes rein *kombinatorischen* Weise zu *beschreiben*. Seien beispielsweise bei einer Tetraederteilung der Kugelfläche die vier Zellen (Kugeldreiecke)  $\mathfrak{Z}_i^2$  derart auf vier ebene Dreiecke  $\mathfrak{E}_i^2$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) mit den Ecken  $A_i, B_i, C_i$  abgebildet, daß dabei die Dreiecksseiten  $A_1B_1$  von  $\mathfrak{E}_1^2$  und  $B_2C_2$  von  $\mathfrak{E}_2^2$  derselben 1-dimensionalen Zelle (sphärischen Dreiecksseite)  $\mathfrak{Z}_j^1$  entsprechen; damit liegt dann auch eine topologische Abbildung  $H_j^1$  von  $A_1B_1$  auf  $B_2C_2$  vor, wobei die Endpunkte einander in der angegebenen Reihenfolge entsprechen sollen:  $A_1$  dem  $B_2$ ,  $B_1$  dem  $C_2$ ; wir schreiben dafür „ $A_1B_1$  zugeordnet  $B_2C_2$ “; alle Seitenzuordnungen, so geschrieben, seien die folgenden (die Indizes mod. 4 genommen):

$$(4) \quad A_iB_i \text{ zugeordnet } B_{i+1}C_{i+1}; \quad C_iA_i \text{ zugeordnet } A_{i+2}C_{i+2}.$$

Das wesentliche ist nun aber, daß durch die in (4) enthaltenen Angaben der topologische Charakter der betrachteten  $\mathfrak{M}^2$  (Kugelfläche) und ihres betrachteten Zellaufbaues (Tetraederteilung) bereits vollständig gegeben ist. Sei nämlich jedes der vier (zueinander punktfremd vorausgesetzten) ebenen Dreiecke  $\mathfrak{E}_i^2$  (seine Randpunkte mitgerechnet) als ein topologischer Raum angesehen (als Teilraum der Ebene  $\mathfrak{R}^2$ ) und der Summenraum (Nr. 20) der  $\mathfrak{E}_i^2$  gebildet; er heiße  $\mathfrak{B}$ ; für jedes in (4) auftretende Seitenpaar werde dann eine topologische Abbildung  $H^1$  gewählt (bei der die Endpunkte der beiden Seiten einander richtig entsprechen, sonst beliebig). Sei etwa  $\mathfrak{A}_1$  bzw.  $\mathfrak{A}_2$  die Menge der Punkte der Dreiecksseite  $A_1B_1$  bzw.  $B_2C_2$  und  $H_j^1$  die zugehörige topologische Abbildung von  $\mathfrak{A}_1$  auf  $\mathfrak{A}_2$ . Das Verfahren, um aus  $\mathfrak{B}$  einen der Kugelfläche homöomorphen Raum  $\mathfrak{R}$  zu erhalten, besteht nun, kurz gesagt, darin, daß wir Heftung (Nr. 22) längs  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  gemäß  $H_j^1$  vornehmen und ebenso gleichzeitig Heftungen längs aller anderen Seitenpaare. Denn der so aus  $\mathfrak{B}$  entstehende topologische Raum  $\mathfrak{R}$  ist von der speziellen Wahl der Abbildungen  $H_j^1$  unabhängig (m. a. W.: wie immer diese topologischen Abbildungen abgeändert werden — sofern nur die Randpunktezuordnung dieselbe bleibt —, die entstehenden topologischen Räume  $\mathfrak{R}$  sind allemal untereinander homöo-

morph) und  $\mathfrak{R}$  ist stets (mit seinem Zellaufbau) homöomorph der Kugel­fläche (mit ihrer Tetraederteilung). — Wie für dieses Beispiel erkennt man ganz allgemein die Möglichkeit, eine  $\mathfrak{M}^2$  mit einem bestimmten Zellaufbau durch Zuordnungen vom Typus (4) zu beschreiben.

Die besprochene Darstellung des Herstellungsverfahrens unserer Mannigfaltigkeit aus dem Summenraum  $\mathfrak{B}$  der Dreiecke  $\mathfrak{G}_i^2$  ist insofern noch zu ergänzen, als für eine systematische Darstellung dieser simultanen Heftungen im Sinne von Nr. 22 noch auf die Ecken der Dreiecke zu achten ist. In unserem Beispiel etwa gehört jeder Eckpunkt eines Dreiecks  $\mathfrak{G}_i^2$  zwei Dreiecksseiten an und ist daher an zwei Heftungen von Seitenpaaren beteiligt. Es ergeben sich so Systeme zugeordneter Ecken, derart, daß alle Ecken eines Systems in einen Punkt von  $\mathfrak{R}$  verschmolzen werden, in unserem Beispiel die vier Systeme:

$$(5) \quad A_i \text{ zugeordnet } B_{i+1} \text{ zugeordnet } C_{i+2}.$$

Man kann jede der Zuordnungen (5) für sich als eine Heftung ansehen längs dreier in  $\mathfrak{B}$  enthaltener Punkt­mengen  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ , deren jede nur aus einem einzigen Punkt  $A_i$  bzw.  $B_{i+1}$  bzw.  $C_{i+2}$  besteht. Als zugehörige topologische Abbildung etwa von  $\mathfrak{C}_1$  auf  $\mathfrak{C}_2$  hat man dann einfach die Abbildung  $H_{12}^0$  von  $A_i$  auf  $B_{i+1}$  zu betrachten, und die in Nr. 22 aufgestellte Bedingung  $H_{12}^0 H_{23}^0 = H_{13}^0$  ist natürlich erfüllt. *Man kann dann  $\mathfrak{R}$  ansehen als aus  $\mathfrak{B}$  entstanden durch die Gesamtheit aller der Heftungen, die man erhält, wenn man zu den durch (4) dargestellten Heftungen noch die durch (5) dargestellten dazunimmt* — hierbei für die Zuordnungen (4) geeignete topologische Abbildungen  $H^1$  zugeordneter Seitenpaare, für die Zuordnungen (5) die eben genannten Abbildungen  $H^0$  zugrundegelegt; und die Verträglichkeitsbedingungen (Nr. 22) für alle diese Heftungen bestehen hier in nichts anderem, als daß die Abbildungen  $H^0$ , d. h. die Zuordnungen (5), eben genau jene seien, die sich aus den Abbildungen  $H^1$ , d. h. aus den Zuordnungen (4) ablesen lassen.

**26. Homogene  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.** Bei Ausdehnung der Begriffsbildungen von Nr. 24 auf  $n$  Dimensionen treten an Stelle der in einem  $\mathfrak{R}^2$  liegenden Dreiecke  $\mathfrak{G}_i^2$  „ $n$ -dimensionale Simplexe“, d. h. Punkt­mengen des  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ -Raumes  $\mathfrak{R}^n$ , die sich aus  $n+1$  Punkten  $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$  mit einer Determinante  $|1, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}| \neq 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) durch  $\xi_k = \tau_0 \xi_{0k} + \tau_1 \xi_{1k} + \dots + \tau_n \xi_{nk}$  darstellen lassen, wobei die Parameter  $\tau_i$  alle Wertsysteme annehmen, für die  $\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_n = 1$ ,  $\tau_i \geq 0$ . Die gegebenen  $n+1$  Punkte heißen die „Ecken“ (oder „0-dimensionalen Seiten“) des Simplex, ferner (für  $1 \leq \nu < n$ ) die Teilmengen  $\xi_k = \tau_{i_0} \xi_{i_0 k} + \dots + \tau_{i_\nu} \xi_{i_\nu k}$  (wo  $i_0, \dots, i_\nu$

Zahlen der Reihe  $0, 1, \dots, n$ ) seine „ $\nu$ -dimensionalen Seiten“ (auch „ $\nu$ -dimensionalen Randsimplexe“). Die „mittleren Punkte“ des Simplex bzw. einer  $\nu$ -dimensionalen Seite sind dadurch gekennzeichnet, daß alle  $\tau_i$  bzw. alle  $\tau_{i_h}$  positiv sind; die „Randpunkte“ dadurch, daß wenigstens ein  $\tau_i$  bzw.  $\tau_{i_h}$  null ist. (Unter dem „mittleren Punkt einer 0-dimensionalen Seite“ ist die betreffende Ecke selbst zu verstehen.) Es wird dann die *homogene  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit*  $\mathfrak{M}^n$  ( $n \geq 1$ ) definiert als ein topologischer Raum  $\mathfrak{R}$ , der a) ein homogenes  $n$ -dimensionales Gebilde ist (im Sinn von Nr. 23, vgl. <sup>122</sup>) und b) sich als Vereinigung von endlich oder unendlich vielen seiner Teilmengen so darstellen läßt, daß jede dieser Teilmengen  $\mathfrak{Z}_i^n$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) topologisches Abbild eines  $n$ -dimensionalen Simplex  $\mathfrak{E}_i^n$  ist und dabei die folgenden Bedingungen A 1) bis 4), B) erfüllt sind:

A 1) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte eines Simplex  $\mathfrak{E}_h^n$  gehört der *einen* Zelle  $\mathfrak{Z}_h^n$  an und hat sonst mit keiner Zelle  $\mathfrak{Z}_i^n$  ( $i \neq h$ ) einen Punkt gemein.

A 2) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Seite eines Simplex  $\mathfrak{E}_h^n$  hat mit nur *zwei* Zellen Punkte gemein (der Zelle  $\mathfrak{Z}_h^n$  und einer zweiten, etwa  $\mathfrak{Z}_k^n$ ) und gehört jeder von ihnen vollständig an; — und zwar ist diese Menge, analog wie in  $\mathfrak{Z}_h^n$ , ebenso auch in  $\mathfrak{Z}_k^n$  die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Seite von  $\mathfrak{E}_k^n$ . (Im Falle  $n = 1$  tritt an Stelle der Menge der mittleren Punkte einer 0-dimensionalen Seite [Ecke] von  $\mathfrak{E}_k^n$  die aus nur einem Punkte, nämlich dieser Ecke selbst, bestehende Punktmenge.)

A 3) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer  $\nu$ -dimensionalen Seite eines Simplex  $\mathfrak{E}_h^n$  ( $1 \leq \nu < n - 1$ ) hat nur mit *endlich* vielen Zellen (außer  $\mathfrak{Z}_h^n$  etwa noch  $\mathfrak{Z}_k^n, \mathfrak{Z}_i^n, \dots$ ) Punkte gemein, gehört jeder von ihnen vollständig an, — und zwar, analog wie der Zelle  $\mathfrak{Z}_h^n$ , ebenso auch jeder der Zellen  $\mathfrak{Z}_k^n, \mathfrak{Z}_i^n, \dots$  als Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer  $\nu$ -dimensionalen Seite von  $\mathfrak{E}_k^n$ , bzw.  $\mathfrak{E}_i^n, \dots$

A 4) Jeder Bildpunkt einer Ecke eines Simplex  $\mathfrak{E}_h^n$  gehört nur *endlich* vielen Zellen an (außer  $\mathfrak{Z}_h^n$  etwa noch  $\mathfrak{Z}_k^n, \mathfrak{Z}_i^n, \dots$ ), — und zwar jeder von ihnen als Bildpunkt einer Ecke des entsprechenden Simplex.

B) Jeder Punkt von  $\mathfrak{R}$  hat in  $\mathfrak{R}$  eine Umgebung, bestehend nur aus Punkten derjenigen  $\mathfrak{Z}_i^n$ , denen er angehört.<sup>131</sup>)

131) Bedingung B) findet sich für  $n = 2$  implizite bei *Weyl*, R. Fl., p. 22; explizite bei *Tietze*, Hambg. Sem., p. 9 [45], Anm. 8.

Bei einem solchen Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$  heißen die Bilder der Ecken bzw.  $\nu$ -dimensionalen Seiten der Simplexe  $\mathfrak{E}_i^n$  „0-dimensionale“ bzw. „ $\nu$ -dimensionale Zellen“ ( $\mathfrak{Z}_h^0$  bzw.  $\mathfrak{Z}_h^\nu$ ).

Beispiele homogener  $\mathfrak{M}^n$  sind: die „sphärischen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten“  $\mathfrak{S}^n$ , das sind<sup>132)</sup> die mit der Punktmenge  $\xi_1^2 + \dots + \xi_{n+1}^2 = 1$  des  $\mathfrak{R}^{n+1}$  (und demnach mit der Menge der Randpunkte eines Simplex  $\mathfrak{E}^{n+1}$ ) homöomorphen topologischen Räume; ferner der  $n$ -dimensionale Zahlenraum  $\mathfrak{R}^n$  (der mit der Punktmenge  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 < 1$  des  $\mathfrak{R}^n$  homöomorph ist). — Das (in Nr. 24) über absolut-kompakte und nicht-absolut-kompakte  $\mathfrak{M}^2$  Gesagte gilt analog für  $\mathfrak{M}^n$ .

Der Zellaufbau einer *zusammenhängenden* homogenen  $\mathfrak{M}^n$  umfaßt stets nur *endlich* oder *abzählbar* unendlich viele Zellen, und für eine solche  $\mathfrak{M}^n$  gelten die folgenden, mit dem Abzählbarkeitsaxiom ( $\bar{F}$ ) (Nr. 12) und bekannten Überdeckungssätzen von *É. Borel*, *E. Lindelöf* und *W. H. Young*<sup>133)</sup> verwandten Aussagen: Jede zusammenhängende homogene  $\mathfrak{M}^n$  läßt sich durch endlich bzw. abzählbar unendlich viele offene Teilmengen, deren jede dem  $\mathfrak{R}^n$  homöomorph ist, überdecken. In jedem System von Mengen, die in einer zusammenhängenden homogenen  $\mathfrak{M}^n$  offen sind und eine abgeschlossene Teilmenge  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{M}^n$  überdecken, gibt es ein die Menge  $\mathfrak{A}$  überdeckendes endliches bzw. abzählbares Teilsystem. Das gilt insbesondere, wenn für  $\mathfrak{A}$  die  $\mathfrak{M}^n$  selbst genommen wird.

**27. Beschreibung des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{M}^n$ .**<sup>133a)</sup> Wie im Falle  $n = 2$  läßt sich feststellen, daß der Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$  in rein kombinatorischer Weise beschrieben werden kann. Zunächst erkennt man nämlich die Möglichkeit, die  $\mathfrak{M}^n$  aus dem Summenraum  $\mathfrak{B}$  einer Menge von Simplexen  $\mathfrak{E}_i^n$  durch Heftungen (Nr. 22) zu erhalten; die einzelne Heftung betrifft (unter  $\nu$  eine Zahl  $< n$  und  $\geq 0$  verstanden) ein System  $\mathfrak{r}$  endlich vieler zugeordneter  $\nu$ -dimensionaler Randsimplexe  $\mathfrak{A}_k^\nu$  der Simplexe  $\mathfrak{E}_i^n$ , nämlich aller jener, die auf dieselbe Zelle  $\mathfrak{Z}_j^\nu$  der  $\mathfrak{M}^n$  abgebildet werden; zwischen irgend zweien dieser Randsimplexe  $\mathfrak{A}_k^\nu, \mathfrak{A}_l^\nu$  hat man dabei eine topologische Abbildung  $H_{kl}^\nu$  (wobei  $H_{kl}^\nu H_{lm}^\nu = H_{km}^\nu$ ), und zwar eine solche, welche die einzelnen Ecken und  $\mu$ -dimensionalen Seiten von  $\mathfrak{A}_k^\nu$  auf Ecken bzw.  $\mu$ -dimensionale Seiten von  $\mathfrak{A}_l^\nu$

132) *W. Dyck*, *Math. Ann.* 37 (1890), p. 278.

133) *Vgl. II C 9*, Nr. 9.

133a) In anderer Weise, als hier dargestellt, gelangt *J. W. Alexander*, *Trans. Am. Math. Soc.* 23 (1922), p. 333, zum Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$ , die er von vornherein als aus den Zellen einer sphärischen Mannigfaltigkeit (Nr. 26)  $\mathfrak{S}^q$  ( $q > n$ ) zusammengesetzt annimmt. Dabei werden die Zellen der  $\mathfrak{S}^q$  ( $\xi_1^2 + \dots + \xi_{q+1}^2 = 1$ ) durch lineare Gleichungen und Ungleichungen zwischen den  $\xi_j$  bestimmt.

abbildet ( $\mu = 1, \dots, \nu - 1$ ); im Falle  $\nu = n - 1$  enthält jedes System  $\mathfrak{f}^{n-1}$  nur *zwei* einander zugeordnete  $(n - 1)$ -dimensionale Randsimplexe  $\mathfrak{A}^{n-1}$  der  $\mathfrak{E}_i^n$ . Die Verträglichkeitsbedingungen (Nr. 22) für die Gesamtheit aller Abbildungen  $H_{kl}^\nu$  für alle Systeme  $\mathfrak{f}^\nu$  ( $0 \leq \nu \leq n - 1$ ) bestehen hier darin, daß alle Abbildungen  $H_{kl}^\nu$  ( $\nu < n - 1$ ) übereinstimmen müssen mit denjenigen Abbildungen, die sich aus den Abbildungen  $H_{kl}^{n-1}$  der paarweise einander zugeordneten  $(n - 1)$ -dimensionalen Randsimplexe  $\mathfrak{A}^{n-1}$  ableiten. Wie für  $n = 2$  ist dabei von diesen Abbildungen  $H_{kl}^{n-1}$  für den topologischen Charakter der entstehenden  $\mathfrak{M}^n$  nur wesentlich, wie die einzelnen  $\mu$ -dimensionalen Randsimplexe ( $0 \leq \mu < n - 1$ ) von  $\mathfrak{A}_k^{n-1}$  vermöge  $H_{kl}^{n-1}$  jenen von  $\mathfrak{A}_l^{n-1}$  zugeordnet werden, während sonstige beliebige Abänderungen der topologischen Abbildungen  $H_{kl}^{n-1}$  allemal auf untereinander homöomorphe Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}^n$  führen, — und hierin liegt wieder die Möglichkeit einer Beschreibung des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{M}^n$  durch kombinatorische Zuordnungsvorschriften. Es ist aber für  $n > 2$  zu beachten, daß zwar jeder Zellaufbau einer homogenen  $\mathfrak{M}^n$  durch die *paarweisen Zuordnungen der  $(n - 1)$ -dimensionalen Randsimplexe  $\mathfrak{A}^{n-1}$*  der  $\mathfrak{E}_i^n$  [nebst Angabe über die dabei einander entsprechenden  $\mu$ -dimensionalen Randsimplexe der  $\mathfrak{A}^{n-1}$  ( $\mu < n - 1$ )] topologisch vollständig bestimmt ist, daß aber nicht jedem beliebigen, willkürlich vorgeschriebenen System solcher paarweiser Zuordnungen stets eine homogene  $\mathfrak{M}^n$  entsprechen muß. Vielmehr kann es vorkommen, daß sich aus den Zuordnungen der  $\mathfrak{A}^{n-1}$  überhaupt keine, den Verträglichkeitsbedingungen entsprechenden Abbildungen  $H^\nu$  der  $\nu$ -dimensionalen Randsimplexe der  $\mathfrak{E}_i^n$  ( $\nu < n - 1$ ) ableiten lassen<sup>134</sup>), daß also die vorgeschriebenen Heftungen überhaupt nicht ausführbar, durch die Zuordnungsvorschriften also überhaupt kein topologischer Raum bestimmt ist; oder aber, es ist dies zwar noch der Fall, der entstehende topologische Raum aber ist kein *homogenes*  $n$ -dimensionales Gebilde<sup>135</sup>) (man hat dann eine  $\mathfrak{M}^n$  mit Singularitäten vor sich).

134) Vgl. *H. Tietze*<sup>153</sup>), p. 18, 24; <sup>122</sup>) p. 16/17 [52/53].

135) Als Bedingung für die Homogenität der  $\mathfrak{M}^n$  ergibt sich, daß die aus den Zuordnungsvorschriften ableitbaren  $(n - \nu)$ -dimensionalen „Umgebungs-Mannigfaltigkeiten“ der  $\nu$ -dimensionalen Zellen  $\mathfrak{Z}_h^\nu$  sämtlich sphärische Mannigfaltigkeiten sind; III A B 3 (*Dehn-Heegaard*), p. 161/2; *H. Tietze*<sup>153</sup>), p. 18/19, 24 und <sup>122</sup>), p. 17/18 [53/54]. Hierin ist die Bedingung, daß jede  $\mathfrak{Z}_h^\nu$  nur *endlich* vielen  $\mathfrak{Z}_i^\mu$  ( $\mu > \nu$ ) als Teilmenge angehört (wie sich aus der Endlichkeit der Zellenanzahl im Aufbau einer  $\mathfrak{E}^\nu$  erkennen läßt), bereits enthalten. (Beispielsweise fallen also Gebietseinteilungen, wie sie sich aus Kreisbogenpolygonen — als Diskontinuitätsbereichen automorpher Funktionen [vgl. II B 3 und 4 (*R. Fricke*)] — durch fortgesetzte Spiegelungen ergeben, bei Auftreten von Polygonwinkeln der Größe

28. Entstehung des besprochenen Mannigfaltigkeitsbegriffes. Die in Nr. 24, 25 besprochene Definition des Begriffs der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit (durch Homogenität und Zellaufbau) ist aus den Bedürfnissen der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen erwachsen; diesen Begriff der  $\mathfrak{M}^2$  (und analog der  $\mathfrak{M}^n$ , Nr. 26, 27) hat bereits *W. Dyck* seinen topologischen Untersuchungen<sup>136)</sup> zugrunde gelegt.<sup>137)</sup> Der (von funktionentheoretischen Fundamentaltbereichen geläufige) Prozeß der Verschmelzung von Flächenstücken längs Teilen des Randes kommt bei *Dyck*<sup>138)</sup> bereits entscheidend zur Geltung (zugleich in Verbindung mit der Herleitung der „Charakteristik“<sup>139)</sup> der  $\mathfrak{M}^2$  bzw.  $\mathfrak{M}^n$ ), und *Dyck* betont, daß diese „Vereinigung“ zu betrachten sei als nicht notwendig „wirklich (geometrisch) auszuführen“, sondern als nur durch die Zuordnung selbst in abstracto hergestellt<sup>140)</sup>, daß es sich also, wie wir heute sagen, um allgemeine topologische Räume (nicht notwendig um Punktengen eines  $\mathfrak{R}^m$ ) handelt<sup>141)</sup>; ebenso daß diese Herstellung einer kontinuierlichen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit aus einer Menge von polygonalen Zellen sich rein kombinatorisch beschreiben läßt.<sup>142)</sup> Diese Zellen stellen dabei noch ein kontinuierliches Gegebenes dar, nur ihr Gefüge ist kombinatorischer Art<sup>143)</sup>: Die zitierten Darstellungen haben die *Herstellung*

null, d. h. bei Zusammenstoßen unendlich vieler Polygone in einer Ecke nicht mehr unter die hier betrachteten Zellaufbauten einer  $\mathfrak{M}^2$ .)

136) *W. Dyck*<sup>126)</sup>, p. 457—512; <sup>132)</sup> p. 273—316. Den gleichen Problemkreis betreffen die vorausgegangenen Arbeiten in *Ber. Ges. d. Wiss.* 1885, p. 314, 1886, p. 53, 1887, p. 40. Vgl. ferner *W. Dyck*, l. c. <sup>224\*)</sup>.

137) Bei *H. Poincaré* (vgl. die in III A B 3, Anm. 72, 76, 85 angeführten Arbeiten), der in besonders erfolgreicher Weise von der Zerlegung einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  in Zellen bei Aufstellung neuer topologischer Invarianten Gebrauch gemacht hat, wird diese Zerlegung nicht zur *Definition* der  $\mathfrak{M}^n$  herangezogen, vielmehr (analog wie bei *Riemann*, vgl. Nr. 23) nur ausgeführt an Mannigfaltigkeiten, die auf andere Weise (durch Gleichungen und Ungleichungen) definiert zu denken sind.

138) *W. Dyck*<sup>126)</sup>, p. 473; vgl. dort und bei *Weyl*, *R. Fl.*, p. 35, den Hinweis auf die Arbeiten von *Riemann*, *Schwarz*, *Dedekind*, *Klein* und *Poincaré*.

139) *W. Dyck*<sup>126)</sup>, p. 474, <sup>132)</sup> p. 729 ff. Vgl. <sup>224)</sup>.

140) Vgl. *F. Klein*, *Math. Ann.* 21 (1883), p. 141.

141) Vgl. auch bei *H. Tietze*<sup>153)</sup>, p. 6 den Hinweis auf allgemeine abstrakt definierte Festlegungen von Nachbarschafts- oder Abstandsbeziehungen, ferner *Veblen*, *Cambr. Coll.*, p. 1, 3, 6, 34.

142) Durch eine „Tabelle“ nach dem Ausdruck von *Dyck*<sup>126)</sup>, p. 473, oder ein „Register“ nach dem Ausdruck von *W. Wirtinger* (vgl. *H. Tietze*<sup>153)</sup>, p. 7; <sup>122)</sup> p. 19 [55]).

143) Die Weiterentwicklung (vgl. *Dehn-Heegaard*, III A B 3 und *H. Tietze*<sup>153)</sup>, p. 2, 24), bei der auch dieses Kontinuierliche fortfällt, wird noch in Abschnitt IV

der einzelnen  $\mathfrak{M}^2$  (bzw.  $\mathfrak{M}^n$ ) durch Beschreibung der Ränderzuordnungen elementarer Raumstücke im Auge. Demgegenüber hat für  $n$  Dimensionen L. E. J. Brouwer<sup>144</sup>) und für 2 Dimensionen ausführlicher H. Weyl<sup>145</sup>) die allgemeine Kennzeichnung des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{M}^n$  durch Bedingungen ähnlich denen gegeben, die wir in Nr. 24 bzw. 26 unter A) B) angeführt haben.<sup>146</sup>)

Es ist vielfach als ein Notbehelf empfunden worden<sup>147</sup>), daß die angegebene Definition des Begriffs der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit an eine bestimmte Herstellungsweise und Darstellungsform (durch einen Zellaufbau) anknüpft, statt aus der Gesamtheit aller topologischen Räume durch einzelne charakteristische topologische Eigenschaften die  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten herauszuheben. Es ist die Frage am Platze, inwieweit etwa eine der am Schluß von Nr. 26 ausgesprochenen Abzählbarkeits-(Überdeckungs-)aussagen geeignet ist, ein homogenes  $n$ -dimensionales Gebilde als homogene  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit zu kennzeichnen, derart daß die Möglichkeit eines unseren Bedingungen A), B) genügenden Zellaufbaus daraus gefolgert werden könnte. In diesem Falle<sup>148</sup>) wäre es nicht unangebracht, eine solche

zu besprechen sein. Vorerst handelt es sich nur um die kombinatorische Beschreibung des Zellaufbaus kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten; vgl. die Darstellung bei H. Tietze, I. c., §§ 2—4; O. Veblen, *Cambr. Coll.*, p. 1 ff., 34 ff., 73 ff.

144) L. E. J. Brouwer, *Math. Ann.* 71 (1912), p. 97.

145) H. Weyl, *R. Fl.*

146) Über eine gewisse Einschränkung der betrachteten Zellaufbauten gegenüber obiger Darstellung durch eine Forderung über „Simplexsterne“ bzw. „Dreiecksterne“ vgl. Brouwer<sup>144</sup>) und Weyl, *R. Fl.*, p. 64 „Zusatz“. Die Gesamtheit der betrachteten  $\mathfrak{M}^n$  erfährt dabei aber keine Einschränkung. In anderer Weise spezialisierte Zellaufbauten legt J. W. Alexander seiner Darstellung, I. c. <sup>133a</sup>), zugrunde.

147) Vgl. H. Tietze<sup>153</sup>), p. 5; L. E. J. Brouwer<sup>144</sup>), p. 98 Anm. — Eine andere Bewertung hingegen bei H. Weyl, *Math. Ztschr.* 10 (1921), p. 78. — Wie er dem Ref. Tietze freundlicherweise mitteilte, ist unabhängig Herr A. Rosenthal von der gleichen Auffassung wie im Text ausgegangen, als er die Anregung zu der Arbeit von Fr. J. Gawehn<sup>148</sup>) gab, die nach Abschluß ihrer Untersuchungen Einsicht in die ersten Fahnen dieses Artikels erhielt und dann, I. c. p. 322, die gleiche Auffassung wie oben zum Ausdruck brachte.

148) Vgl. hierzu B. v. Kerékjártó, *Vorl.* I, p. 5; ferner H. Kneser<sup>185</sup>), p. 137, <sup>198b</sup>) p. 3. Neuerdings ist im Falle  $n = 2$  tatsächlich die Triangulierbarkeit eines homogenen Gebildes als Folge des Abzählbarkeitsaxioms ( $\bar{F}$ ) festgestellt worden; vgl. die unabhängig voneinander ausgeführten Untersuchungen von T. Radó, *Acta litt. ac scient. Szeged* 2 (1925), p. 101 (vorher *Math. Ann.* 90 [1923], p. 35) und die (auf eine Anregung von A. Rosenthal aus dem Winter 1923/24 zurückgehenden) von J. Gawehn, *Math. Ann.* 98 (1928), p. 321—354.

Über topologisch charakterisierende Eigenschaften der Kugelfläche vgl. C. Kuratowski, *Fund. math.* 13 (1929), p. 307—318.



Abzählbarkeitseigenschaft (zusammen mit der  $n$ -dimensionalen Homogenität) zur *Definition* der zusammenhängenden homogenen  $\mathfrak{M}^n$  zu benutzen.

**29. Allgemeine Zellen und Zellaufbauten.** Von den Aufbauten einer  $\mathfrak{M}^2$  bzw.  $\mathfrak{M}^n$  aus dreieckigen bzw. simplizialen Zellen, mit denen *Brouwer*<sup>144)</sup> arbeitet, sind die schon vorher<sup>149)</sup> verwendeten Zellaufbauten aus allgemeineren polygonalen bzw. polyedrischen Zellen grundsätzlich nicht verschieden, nur die vollständigen Auseinandersetzungen umständlicher, weshalb wir uns mit einigen Andeutungen begnügen. Für  $n = 2$  tritt an Stelle jedes Dreieckes  $\mathfrak{G}_i^2$  eine Kreisscheibe wie z. B.  $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1$ , deren Peripherie durch  $m \geq 2$  Punkte in  $m$  Teile („Polygonseiten“<sup>144)</sup>) zerlegt ist. Die Zellen  $\mathfrak{Z}_i^2$  der  $\mathfrak{M}^2$  sind die topologischen Bilder solcher Polygone, die  $\mathfrak{Z}_h^1$  sind die Bilder von Polygonseiten, die  $\mathfrak{Z}_h^0$  von Polygonecken, — im übrigen ist alles ganz analog wie in Nr. 24, wo nichts anderes als ein Spezialfall vorliegt: nämlich  $m = 3$  für jedes Polygon. Für  $n > 2$  tritt an Stelle eines jeden Simplex  $\mathfrak{G}_i^n$  eine Kugel wie z. B.  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \leq 1$ , für deren Oberfläche  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$  (die eine  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist; vgl. Nr. 26) ein bestimmter Zellaufbau aus  $\nu$ -dimensionalen Zellen ( $0 \leq \nu \leq n - 1$ ) gegeben ist. — Man kann von jedem Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$  mit solchen allgemeinen Zellen zu einem mit simplizialen Zellen gelangen (z. B. durch eine sog. „reguläre Unterteilung“<sup>150)</sup>); der Begriff der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit erfährt also mit der besprochenen Verallgemeinerung keine Erweiterung, und das gleiche gilt von einer anderen, sogleich zu besprechenden Verallgemeinerung.

Wir haben bisher die als „Zellen“  $\mathfrak{Z}_i^v$  bezeichneten Teilmengen einer  $\mathfrak{M}^n$  als durchweg 1-1-deutige stetige Bilder der (simplizialen oder kugelartigen) Elementarraumstücke<sup>151)</sup>  $\mathfrak{G}_i^v$  vorausgesetzt.<sup>152)</sup> Für manche Zwecke ist es nützlich, noch allgemeinere Zellaufbauten unserer  $\mathfrak{M}^n$  zuzulassen. Ein Beispiel hierfür ist das folgende. Eine Torusfläche im  $\mathfrak{R}^3$ , etwa die Punktmenge  $\xi_1 = (2 + \cos \varphi) \cos \vartheta$ ,  $\xi_2 = (2 + \cos \varphi) \sin \vartheta$ ,  $\xi_3 = \sin \varphi$  (wo  $\varphi, \vartheta$  von 0 bis  $2\pi$ ) werde durch einen Längenkreis ( $\vartheta = \vartheta_0$ ) und einen Breitenkreis ( $\varphi = \varphi_0$ ) zerschnitten zu einer einzigen rechteckigen Zelle; diese ist eindeutiges — am Rand aber nicht mehr 1-1-deutiges — stetiges Bild eines

149) III A B 3 (*Dehn-Heegaard*); *H. Tietze*<sup>153)</sup>.

150) *Veblen*, *Cambr. Coll.*, p. 41, 85.

151) Wegen der Definition des „Elementarraumstücks“ vgl. Nr. 30.

152) Diesen Standpunkt (in die kombinatorische Topologie übertragen) nimmt auch III A B 3 (*Dehn-Heegaard*) ein.

ebenen Viereckes (oder einer Kreisscheibe)  $\mathfrak{G}^2$ . Der Kürze halber verzichten wir auf eine allgemeine Auseinandersetzung der solcher Art zulassenden Zellaufbauten<sup>153)</sup> (für welche die Fundamentalpolyeder  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten<sup>154)</sup> Beispiele bilden, für  $n = 2$  speziell auch die Fundamentalpolygone automorpher Funktionen).

### 30. Berandete Mannigfaltigkeiten. $n$ -dimensionale Komplexe.

Die durch  $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1$  gegebene Menge des  $\mathfrak{R}^2$  kann für sich selbst als ein topologischer Raum  $\mathfrak{G}^2$  betrachtet werden, der jedoch nicht homogen ist (Nr. 19); denn die Umgebung  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{G}^2)$  eines Punktes  $P$  auf der Peripherie ist nicht gleichartig der Umgebung eines Punktes im Inneren des Kreises (dabei ist  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{G}^2)$  der Durchschnitt von  $\mathfrak{G}^2$  mit einer  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{R}^2)$ ; vgl. Nr. 11). Eine Erweiterung des Mannigfaltigkeitsbegriffes, die auch topologische Räume wie  $\mathfrak{G}^2$  bzw. allgemein  $\mathfrak{G}^n$  (definiert durch  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \leq 1$ ) umfaßt, erhält man folgendermaßen. Man betrachtet topologische Räume  $\mathfrak{R}$ , deren sämtliche Punkte Umgebungen von einer der Arten haben, wie sie die Umgebungen  $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{G}^n)$  der Punkte von  $\mathfrak{G}^n$  aufweisen, also entweder wie die Punkte  $P$  im Inneren von  $\mathfrak{G}^n$  oder wie die Punkte  $P$  auf  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$ ; die ersteren Punkte sollen mittlere Punkte, die letzteren Randpunkte von  $\mathfrak{R}$  heißen (vgl. Nr. 19). Ein solcher topologischer Raum heiße ein berandetes topologisches Gebilde (soferne überhaupt Randpunkte da sind), und im besonderen eine *berandete  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit*<sup>155)</sup>, wenn  $\mathfrak{R}$  einen Zellaufbau aus  $n$ -dimensionalen Zellen gestattet. Dieser Zellaufbau soll dabei noch gewissen Bedingungen, analog denen von Nr. 26, genügen, nämlich allen dortigen Bedingungen A) 1) bis 4) B) mit Ausnahme von A) 2), an Stelle von A) 2) aber der milderer Bedingung:

A 2\*) Die Menge der Bildpunkte der mittleren Punkte einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Seite eines Simplex  $\mathfrak{G}_h^n$  hat entweder mit nur zwei Zellen oder nur mit der einen Zelle  $\mathfrak{Z}_h^n$  Punkte gemein; im ersteren Falle so, wie in A) 2) näher ausgeführt. (Im letzteren Falle besteht die genannte Menge aus lauter Randpunkten der  $\mathfrak{M}^n$ .)

Der „Rand“ einer berandeten  $\mathfrak{M}^n$  (d. h. die Menge ihrer Rand-

153) Vgl. *H. Tietze*, Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), §§ 2—4.

154) Vgl. (speziell für  $n = 3$ ) *H. Poincaré*, J. Éc. Polyt. (2) 1 (1895), p. 49 ff.

155) Das Wort „ $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit“ (bei *H. Poincaré*<sup>154)</sup> „variété à  $n$  dimensions“) erhält in der hiermit gegebenen Abgrenzung — als entweder homogene oder berandete  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit — eine ganz andere Bedeutung als bei *G. Cantor*, der „ $n$ -dimensionale Punktmannigfaltigkeit“ im Sinne von Punktmenge in einem  $n$ -dimensionalen Zahlenraum gebraucht. Über noch andere Verwendungen des Wortes Mannigfaltigkeit vgl. <sup>118)</sup> und <sup>204)</sup>.

punkte) bildet eine homogene (nicht notwendig zusammenhängende)  $\mathfrak{M}^{n-1}$ . Das einfachste Beispiel einer berandeten  $\mathfrak{M}^n$  ist ein  $n$ -dimensionaler Simplex (aus einer einzigen  $n$ -dimensionalen Zelle bestehend) und jeder ihm homöomorphe topologische Raum (als „elementare“  $\mathfrak{M}^n$  oder „ $n$ -dimensionales Elementarraumstück“  $\mathfrak{E}^n$  bezeichnet).<sup>156</sup>) Bisher untersucht wurden vorwiegend aus endlich vielen Zellen aufgebaute berandete  $\mathfrak{M}^n$  (für  $n = 2$  zusammen mit den „geschlossenen“ Flächen (Nr. 24) auch Polyederflächen genannt).<sup>157</sup>)

Bei Beschreibung eines bestimmten Zellaufbaus einer berandeten  $\mathfrak{M}^n$  durch *Ränderzuordnungen* werden nicht, wie bei einer homogenen  $\mathfrak{M}^n$  (vgl. Nr. 27) alle  $(n - 1)$ -dimensionalen Randsimplexe oder  $n$ -dimensionalen Simplexe  $\mathfrak{E}_i^n$  je einem zweiten  $(n - 1)$ -dimensionalen Randsimplex zugeordnet sein, sondern es werden auch freie  $(n - 1)$ -dimensionale Randsimplexe auftreten, die keinem zweiten zugeordnet sind. (Analoges gilt für einen Aufbau aus allgemeineren Zellen als Simplexen, vgl. Nr. 29). Andererseits erhält man sogenannte  *$n$ -dimensionale Komplexe*<sup>158</sup>)  $\mathfrak{K}^n$ , wenn man zuläßt, daß beim Aufbau eines topologischen Raumes aus  $n$ -dimensionalen Simplexen auch mehr als zwei  $(n - 1)$ -dimensionale Randsimplexe einander zugeordnet und durch Heftung (Nr. 22) miteinander verschmolzen werden. Noch allgemeinere topologische Räume erhält man, wenn man an einem System von Zellen verschiedener Dimension Heftungen ausführt. Einen solchen allgemeineren *mehrdimensionalen Komplex* stellt z. B. jede Teilmenge einer  $\mathfrak{M}^n$  (oder  $\mathfrak{R}^n$ ) dar, die aus allen jenen Punkten besteht, die irgend einer Menge von Zellen  $\mathfrak{Z}^\nu$  ( $0 \leq \nu \leq n$ ) der  $\mathfrak{M}^n$  angehören.

Der Bereich jener topologischen Räume, die bisher in Untersuchungen der  $n$ -dimensionalen Topologie aufgetreten sind, ist damit umschrieben.

**31. Topologische Invarianz der Dimensionszahl.** Die wichtigste Grundlage für die Einteilung der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten

156) Andererseits hat *W. Dyck*, Math. Ann. 37 (1890), p. 277 die Bezeichnung „Elementarmannigfaltigkeit  $n^{\text{ter}}$  Dimension“ für die Punktmenge  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 < 1$  (und jede ihr homöomorphe) verwendet, die nicht berandet sondern homogen (und dem  $\mathfrak{R}^n$  homöomorph) ist.

157) *B. v. Kerékjártó*, Vorl. I, p. 133; *Weyl*, R. Fl. p. 52 nennt „Polyeder“ das, was man aus einer solchen Fläche erhält, wenn man alle etwa vorhandenen Randpunkte wegläßt.

158) Vgl. III A B 3, Nr. 1, 5. Dabei werden Punkte mit komplizierterem Umgebungscharakter vorkommen, als ihn die mittleren Punkte und Randpunkte haben. Vgl. die „verallgemeinerten Mannigfaltigkeiten“ („generalized manifolds“) bei *Veblen*, Camb. Coll., p. 92. Sie treten z. B. auf (in Fragen der topologischen Klassifikation von Mannigfaltigkeiten von Bewegungszuständen) bei *H. Hotelling*, Trans. Am. Math. Soc. 27 (1924), p. 341.

$n$  Klassen homöomorpher bildet der für beliebiges  $m$  und  $n$  zuerst von *L. E. J. Brouwer* bewiesene Satz, daß eine  $\mathfrak{M}^m$  für  $m \neq n$  niemals einer  $\mathfrak{M}^n$  homöomorph sein kann<sup>159</sup>); das gleiche gilt für Komplexe  $\mathfrak{R}^m$  und  $\mathfrak{R}^n$ ; und ein mehrdimensionaler Komplex, unter dessen (unendlich vielen) Zellen solche von beliebig hoher Dimension vorkommen, kann nur einem ebensolchen Komplex homöomorph sein.

Innerhalb der Gesamtheit aller Mannigfaltigkeiten gleicher Dimensionen ist aber für  $n \geq 3$  das Homöomorphieproblem (Nr. 2) noch völlig ungelöst.<sup>160</sup> Für  $n = 1$  ist leicht zu sehen, daß es keine anderen zusammenhängenden  $\mathfrak{M}^1$  gibt als die vier durch  $\mathfrak{S}^1$ ,  $\mathfrak{R}^1$ ,  $\mathfrak{C}^1$  und durch die Punktmenge  $\xi \geq 0$  des  $\mathfrak{R}^1$  (Halbgerade) dargestellten. Mit  $n = 2$  beschäftigen wir uns in Nr. 32.

**32. Homöomorphie der Flächen.** Wie es lange an einer strengen Abgrenzung des Begriffs der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit fehlte, so waren auch mancherlei Resultate, die man über die Topologie der Flächen und  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten besaß, zunächst noch nicht streng begründet und sind es z. T. auch heute noch nicht. Auf einige Fragen, die mit der Entwicklung einer selbständigen kombinatorischen Topologie zusammenhängen, ist im Abschnitt IV einzugehen. Indessen ist für die Topologie der homogenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die für die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen eine so große Bedeutung erlangt hat, von *H. Weyl*<sup>161</sup>) eine strenge (nicht bloß auf anschauliche Betrachtungen gestützte) Begründung und im besonderen für die schon lange bekannten Tatsachen der Topologie „geschlossener“ Flächen ein strenger Nachweis gegeben worden.<sup>162</sup>)

Nach eingehender Erläuterung des Begriffs der „Fläche“  $\mathfrak{F}$  (= „homogene  $\mathfrak{M}^2$ “ nach unserer Terminologie — hingegen sagt *Weyl* „2-dimensionale Mannigfaltigkeit“ für unsere „homogenen 2-dimensionalen Gebilde“<sup>118</sup>)) wird in dem *Weylschen* Buche der Begriff „(geschlossenes) Polygon auf  $\mathfrak{F}$ “ (in einem bestimmten Zellaufbau  $\xi$  der Fläche  $\mathfrak{F}$ )

159) Vgl. II C 9, Nr. 17 und diesen Art. Nr. 41, Anm. <sup>162</sup>). Wegen des Satzes von der Invarianz des Gebiets (s. II C 9, p. 954) für  $n = 2$  vgl. *Kerékjártó*, Vorl. I, p. 77 und *A. Winternitz*, Math. Ztschr. 26 (1927), p. 165. Einen neuen Beweis für die Dimensionsinvarianz hat *E. Sperner*, Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), p. 265—272 gegeben; desgleichen *W. Hurewicz*<sup>162</sup>); vgl. dazu noch *B. Knaster-C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 14 (1929), p. 132—135, § 4.

160) Auf gewisse Ausblicke weist *v. Kerékjártó*, Vorl. I, p. 12/14 hin.

161) *H. Weyl*, R. Fl., §§ 4ff., Math. Ann. 77 (1916), p. 349, Anm. \*\* und <sup>160</sup>).

162) Bezüglich der älteren Literatur vgl. III A B 3.

definiert; ferner nach *Koebe*<sup>163</sup>) eine  $\mathfrak{F}$  „schlichtartig“ genannt<sup>164</sup>), wenn  $\mathfrak{F}$  zerlegt wird durch jedes Polygon in  $\xi$  — und dann (wie bewiesen wird) auch durch jedes Polygon in jedem anderen Zellaufbau  $\xi_1$ . Auf Grund des Begriffes (vgl. Nr. 19) der „unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsflächen  $\mathfrak{F}$ “ einer Fläche wird  $\mathfrak{F}$  „einfach zusammenhängend“ genannt, wenn es keine andere  $\mathfrak{F}$  gibt als die einblättrige (mit  $\mathfrak{F}$  übereinstimmende). Gestützt auf einen Beweis, daß die Fläche  $\mathfrak{R}$ :  $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$  in diesem Sinne einfach zusammenhängend ist, wird gezeigt, daß zu entsprechenden Punkten  $P, \bar{P}$  und jeder zu  $\mathfrak{R}$  homöomorphen Umgebung von  $P$  eine auf sie topologisch abgebildete Umgebung von  $\bar{P}$  gehört, worauf zu jeder  $\mathfrak{F}$  ihre „universelle Überlagerungsfläche“  $\tilde{\mathfrak{F}}$  eingeführt wird.<sup>165</sup>) Bezeichnen wir mit  $\bar{A}$  (bzw.  $\tilde{A}$ ) die eindeutige stetige Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  (bzw.  $\tilde{\mathfrak{F}}$ ) auf  $\mathfrak{F}$ , gemäß welcher (nach Nr. 19)  $\tilde{\mathfrak{F}}$  ( $\tilde{\mathfrak{F}}$ ) eine Überlagerungsfläche von  $\mathfrak{F}$  ist, so ist  $\tilde{\mathfrak{F}}$  charakterisierbar dadurch, daß jeder auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  liegenden geschlossenen Kurve  $\tilde{\gamma}$  vermöge  $\bar{A}$  eine solche Bildkurve  $\gamma$  auf  $\mathfrak{F}$  entspricht, daß auf jeder  $\tilde{\mathfrak{F}}$  von  $\mathfrak{F}$  jede Kurve  $\tilde{\gamma}$ , welche  $\gamma$  zur Bildkurve vermöge  $\bar{A}$  hat, gleichfalls geschlossen ist. Ist  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{F}$  und sind  $\bar{P}, \bar{P}'$  zwei beliebige Punkte von  $\tilde{\mathfrak{F}}$ , die beide  $P$  zum Bild haben, dann gibt es eine und nur eine  $\tilde{P}$  in  $\bar{P}'$  überführende „Decktransformation von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  in sich“, d. h. eine solche topologische Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  auf sich selbst, bei der nur Punkte mit gleichem Bildpunkt auf  $\mathfrak{F}$  einander entsprechen. Die Gruppe  $\Gamma$  aller Decktransformationen von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  in sich ist eine topologische Invariante von  $\mathfrak{F}$ .<sup>166</sup>) Für die im genannten Sinn „einfach zusammenhängenden“ Flächen ist kennzeichnend, daß  $\Gamma$  sich auf die Identität reduziert. In diesem Sinne einfach zusammenhängend sind, ebenso wie die Fläche  $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$ , auch alle jene und nur jene berandeten, absolut-kompakten (d. h. aus endlich vielen Zellen aufzubauenden) Flächen („Polyederflächen“), die durch jeden Querschnitt zerlegt werden.<sup>167</sup>)

163) *P. Koebe*, Nachr. Gött. Ges. 1908, p. 11. Des Einflusses, den *Koebes* Gedanken auf die Gestaltung des Buches hatten, gedenkt *Weyl*, R. Fl., p. IX.

164) Vgl. den Begriff der „developpabelen“ (= in einem  $\mathbb{C}^n$  ausbreitbaren)  $\mathfrak{M}^n$  bei *H. Poincare*, Rend. Circ. mat. Pal. 18 (1904), § 5, p. 90.

165) Vgl. II B 4 (*R. Fricke*), p. 455 ff.

166)  $\Gamma$  ist (als abstrakte Gruppe aufgefaßt, d. h. wenn man vom Wesen ihrer Elemente absieht), die *Poincaresche* Fundamentalgruppe (III A B 3, p. 207) von  $\mathfrak{F}$ , für deren topologische Invarianz hier ein strenger Nachweis für den 2-dimensionalen Fall gegeben wird. — Über unverzweigte Überlagerungen (einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit) in Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe s. noch *K. Reidemeister*<sup>224</sup>).

167) Dadurch erhält man Übereinstimmung mit der sonst üblichen Definition der „einfach zusammenhängenden Fläche“ (für die auch die *Bettische* Zu-

Die Eigenschaft der Orientierbarkeit oder Nicht-Orientierbarkeit<sup>168)</sup> einer Fläche  $\mathfrak{F}$  wird als topologisch invariant nachgewiesen; desgleichen für Polyederflächen die Zusammenhangszahl (der „Zusammenhangsgrad“) mit Hilfe von „Integralfunktionen“ auf  $\mathfrak{F}$ , deren Betrachtung im Wesen mit der Betrachtung der durch  $\Gamma$  bestimmten kommutativen Gruppe  $\hat{\Gamma}$  parallel läuft. Daran schließt sich: Besprechung von Rückkehrschnitten, kanonischer Zerschneidung und Geschlecht  $p$  geschlossener orientierbarer Flächen, sowie eine strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf orientierbaren Flächen.<sup>169)</sup>

Die Gleichheit des Geschlechts  $p$  ist für Homöomorphie geschlossener orientierbarer Flächen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, für jene von berandeten außerdem Gleichheit der Randkurvenzahl; und für nicht-orientierbare Flächen gilt ein analoger Satz.<sup>170)</sup>

Nicht nur die absolut-kompakten (besonders für die Theorie der algebraischen Funktionen wichtigen) sondern auch die nicht-absolut-kompakten homogenen Flächen haben in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen besondere Bedeutung erlangt.<sup>171)171a)</sup>

sammenhangszahl  $P_1$  [III AB 3, p. 180] gleich 1 wird). Da für  $n > 2$  die Übereinstimmung der analogen Definitionen vermöge Fundamentalgruppe bzw. Zerschneidungen aufhört und überdies durch das Vorhandensein mehrerer „Zusammenhangszahlen“ (*Bettischer Zahlen*)  $P_1, \dots, P_{n-1}$  der Ausdruck „einfach zusammenhängend“ eine gewisse Unsicherheit bekommt, ist er im vorliegenden Bericht im allgemeinen vermieden. Vgl. noch Nr. 40 bei <sup>280a)</sup>, ferner die Begriffe: „Kontinuum ohne Henkel“ bei *L. Vietoris*, Proc. Amsterdam Ak. 29 (1926), p. 445 f., „unicohérent“ bei *C. Kuratowski*, Fund. math. 14 (1929), p. 304, „zweigradiger Zusammenhang“ bei *H. Hornich*, Akad. Anzeiger, Wien 1929, Nr. 17.

168) Über diese Ausdrücke, die *H. Tietze* an Stelle der (meist im selben, bisweilen — korrekter — in einem anderen Sinne gebrauchten) Ausdrücke „Zweiseitigkeit“ und „Einseitigkeit“ vorgeschlagen hat, und die Begründung hierfür nebst zugehöriger Literatur (*Dyck*, *Steinitz*) vgl. etwa Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 106, 114, 118. S. ferner <sup>280a)</sup>.

169) *H. Weyl*, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 265.

170) Vgl. III AB 3, p. 196; vgl. auch *J. W. Alexander*, Ann. of math. (2) 16 (1915), p. 158; *Kérékjártó*, Vorl. I, p. 143/58.

171) In dieser Hinsicht genüge es, auf die Theorie der Uniformisierung algebraischer und allgemeiner analytischer Kurven und die Arbeiten von *Koebe* hinzuweisen, in denen die bezüglichen topologischen Fragen für orientierbare, sowie für nicht-orientierbare Flächen bereits wesentlich zur Geltung kommen. Vgl. *P. Koebe*, Acta math. 50 (1927), p. 32, Anm. sowie <sup>171a)</sup>, Preuß. Sitz.-Ber. 1928, p. 345, 385.

171a) Über die Darstellung (orientierbarer und nicht-orientierbarer) nicht-absolut-kompakter Flächen durch Normalformen, die denen für absolut-kompakte in III AB 3, p. 197 analog sind, vgl. *Kérékjártó*, Vorl. I, p. 171 ff., und die neuerdings in Preuß. Sitz.-Ber. 1927, p. 164, Kap. I veröffentlichten, z. T. schon

Das Homöomorphieproblem für diese Flächen hat *B. v. Kerékjártó* erledigt.<sup>172)</sup> Sei  $\mathfrak{F}$  eine solche Fläche. Eine unendliche Folge  $\pi_1, \pi_2, \dots$  von (paarweise punktfremden, aus 1-dimensionalen Seiten einer Dreiecksteilung von  $\mathfrak{F}$  bestehenden) Rückkehrerschnitten heißt eine Fundamentalfolge, wenn stets  $\pi_{k-1}$  und  $\pi_{k+1}$  durch  $\pi_k$  getrennt werden; zwei Fundamentalfolgen  $\pi_1, \pi_2, \dots$  und  $\pi'_1, \pi'_2, \dots$  heißen äquivalent, wenn es zu jedem  $\pi_k$  ein  $\pi'_k$  gibt, das durch  $\pi_k$  von  $\pi_1$  getrennt wird und umgekehrt zu jedem  $\pi'_i$  ein  $\pi_m$ , das durch  $\pi'_i$  von  $\pi'_1$  getrennt wird. Jeder Klasse äquivalenter Fundamentalfolgen wird ein „Randstück“ von  $\mathfrak{F}$  zugeordnet, das durch jede der Fundamentalfolgen dieser Klasse repräsentiert erscheint. Das Randstück heißt von 1. Art, wenn für hinlänglich großes  $k$  der  $\pi_{k+1}$  enthaltende durch  $\pi_k$  bestimmte Teil  $\mathfrak{X}_k$  von  $\mathfrak{F}$  schlichtartig ist; von 2. Art, wenn  $\mathfrak{X}_k$  für kein  $k$  schlichtartig, für hinlänglich großes  $k$  aber orientierbar ist; von 3. Art, wenn  $\mathfrak{X}_k$  für jedes  $k$  nicht-orientierbar ist. Durch Einführung von Limesbeziehungen zwischen den Randstücken (m. a. W. durch Einführung eines aus ihnen gebildeten Limesraumes) und damit des Begriffes: Homöomorphie der Randstückmengen zweier Flächen gelangt *Kerékjártó* zu dem Satz: Für die Homöomorphie von zwei nicht-absolut-kompakten homogenen Flächen  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  ist notwendig und hinreichend: 1) daß Homöomorphie der Randstückmengen  $r, r'$  von  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  besteht, derart, daß zwischen  $r$  und  $r'$  eine topologische Abbildung existiert, die die Randstückmengen 1., 2. und 3. Art von  $\mathfrak{F}$  auf jene derselben Art von  $\mathfrak{F}'$  abbildet; 2) wenn keine Randstücke 3. Art auftreten, daß außerdem  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  beide orientierbar oder beide nicht-orientierbar sind; und im letzteren Falle ein (und dann jeder) in eine orientierbare Fläche verwandelnder Rückkehrerschnitt auf beiden Flächen  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  ein Ufer oder auf beiden zwei Ufer hat; 3) wenn keine Randstücke 2. und 3. Art auftreten<sup>172a)</sup>, daß  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  gleiches Geschlecht haben. — Es ergibt sich, daß die Menge der topologisch verschiedenen homogenen Flächen die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Eine konstruktive Herstellung der homogenen Flächen aus 5 Typen berandeter

längere Zeit zurückliegenden Untersuchungen von *P. Koebe* (vgl. die historischen Bemerkungen, l. c. p. 165).

172) *B. v. Kerékjártó*, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 31 (1922), II. Teil, p. 98 und Vorl. I, 5. Abschnitt. Vgl. ferner die unabhängigen Untersuchungen von *S. Saks*, Fund. math. 5 (1923), p. 288—320 [= I. Teil der Thèse, Varsovie 1922] sowie *de Possel*, Paris C. R. 188 (1929<sup>1</sup>), p. 1589. Bezüglich der folgenden Begriffsbildungen (Theorie der Randstücke) vgl. die Analogie mit der Theorie der Primenden von *C. Carathéodory*, Math. Ann. 73 (1913), p. 323, II C 9, p. 926/29.

172a) Diesen letzteren Typus von Flächen, die er „surfaces compactifiables“ (vgl. <sup>129</sup>) nennt, behandelt *S. Saks*, l. c. <sup>172</sup>).

Flächen (mit 1, 2 oder 3 Randlinien) durch Zusammensetzen längs der Randlinien rührt von *Koebe*<sup>173)</sup> her.

### 33. Weitere Untersuchungen der $n$ -dimensionalen Topologie.

Ein Teil der neueren topologischen Untersuchungen über  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten betrifft absolute topologische Eigenschaften einer  $\mathfrak{M}^n$  (über absolut- und relativ-topologisch vgl. Nr. 2)<sup>173a)</sup> — hierher gehören: Fixpunkt-<sup>174)</sup>, Translations-<sup>175)</sup> und Deformationsätze<sup>176)</sup>;

173) *Kerékjártó*, Vorl. I, p. 172, *P. Koebe*, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. 1927, p. 164.

173a) Hierher gehören auch neuere Beweise dafür, daß die *Bettischen* Zahlen, die *Eulersche* Charakteristik und andere aus einem Zellsystem einer Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  (oder eines Komplexes  $\mathfrak{K}$ ) ableitbare Merkmale gegenüber topologischen Abbildungen der  $\mathfrak{M}^n$  (von  $\mathfrak{R}$ ) invariant sind, während dies vorher auf Grund von Betrachtungen der kombinatorischen Topologie nur vermutet werden konnte. Vgl. *J. W. Alexander*<sup>211) 216)</sup>; *H. Hopf*, Math. Ann. 96 (1926), p. 245; *H. Kneser*, Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 12, Anm. 2.

174) Vgl. II C 9, p. 961. Ferner *L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 82 (1921), p. 280, *Proceed. Amsterdam Ak.* 29 (1926), p. 864; *J. W. Alexander*, *Trans. Am. Math. Soc.* 25 (1923), p. 173; *Kerékjártó*, Vorl. I, p. 191 ff.; *J. Nielsen*, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 3 (1924), p. 246, *Matemat. Tidsskr. (B)* 1924, p. 1—22, 1928, p. 39—46, *VI. Skandinav. Mat. Kongr. Beretn. København* 1926, p. 263, *Acta math.* 50 (1927), p. 189, 53 (1929), p. 1—76; *T. Radó*, *Acta litt. ac scient. Szeged* 2 (1924), p. 57; *G. Birkhoff*, *Acta math.* 47 (1926), p. 297 (Anwendungen auf dynamische Probleme ib. 43 [1922], p. 1—119; 50 [1927], p. 359—379); *S. Lefschetz*, l. c.<sup>177)</sup>; *G. Feigl*, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* 34 (1925), 2. Teil, p. 124, *Math. Ann.* 98 (1927), p. 355; *H. Hopf*, *Math. Ann.* 95 (1925), p. 340—367, 96 (1926), p. 225—250, *Proc. Nat. Acad.* 14 (1928), p. 149—153, *Math. Ztschr.* 26 (1927), p. 762, 29 (1929), p. 493—524, *Gött. Nachr.* 1928, p. 127—136; *B. Knaster-C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz*, *Fund. math.* 14 (1929), p. 132—137. Über die Beziehung von Fixpunktsätzen zur Eigenschaft eines geeignet definierten (vgl. <sup>167)</sup>) „einfachen Zusammenhangs“ siehe *C. Kuratowski*, *Fund. math.* 14 (1929), p. 304—310. Für die Einführung des „Index“ eines Fixpunktes werden auch Maßverhältnisse herangezogen (Einbettung einer  $\mathfrak{M}^n$  in einen euklidischen  $\mathfrak{R}^{n+p}$ , speziell für  $p = 1$ ; Vektorfelder, speziell tangentiale). Vgl. *Hadamard*, *L'ind. de Kronecker*, p. 437—477, und Literaturangaben bei *G. Feigl*, l. c. Weitgehende Beziehungen topologischer zu nicht-topologischen (differentialgeometrischen) Eigenschaften ergeben auch die Untersuchungen über das *Clifford-Kleinsche* Raumproblem und die *Curvatura integra*, s. *H. Hopf*, *Nachr. Gött. Ges.* 1925, p. 131—141, *Math. Ann.* 95 (1925), p. 313—339, 340—367, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* 34 (1925), zweiter Teil, p. 130—133; *M. Morse*, *Proc. Nat. Acad.* 14 (1928), p. 428—430.

175) *L. J. E. Brouwer* (s. II C 9, p. 962); vgl. ferner *B. v. Kerékjártó*, *Ann. of math.* (2) 27 (1925), p. 105, *Paris C. R.* 186 (1928<sup>1)</sup>, p. 1699—1701, 187 (1928<sup>2</sup>), p. 20—23; *W. Scherrer*, *Vierteljahrssch. Naturf. Ges. Zürich* 70 (1925), p. 77.

176) Vgl. II C 9, p. 959 ff.; *J. W. Alexander*, *Proc. Nat. Acad. of Sc.* 9 (1923), p. 406—407; *B. v. Kerékjártó*, *Paris C. R.* 180 (1925), p. 1565, *Acta litt. ac scient. Szeged* 2 (1925), p. 162; *W. Süß*, *Tôhoku Math. J.* 26 (1926), p. 90; *H. Kneser*, *Math. Ztschr.* 25 (1926), p. 362 (ib. p. 364 wird der Begriff der Fundamentalgruppe eines Konvergenzraumes<sup>10a)</sup> entwickelt); *Reinh. Baer*, *J. f. Math.* 156 (1927),



Untersuchung und Klassifikation der Gruppen topologischer Abbildungen einer  $\mathcal{M}^n$  auf sich selbst<sup>177</sup>); Orientierbarkeit oder Nicht-Orientierbarkeit einer  $\mathcal{M}^n$ .<sup>178</sup>) Ein anderer Teil betrifft *relative* topologische Eigenschaften einer  $\mathcal{M}^m$  ( $m \leq n$ ), die als Teilmenge in einer  $\mathcal{M}^n$  enthalten ist, z. B. geschlossener Linien  $\mathbb{S}^1$  (Abbilder der Kreislinie) in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  bzw. im Raume  $\mathbb{R}^3$ ; sphärischer oder allgemeiner beliebiger „geschlossener“ d. h. absolut-kompakter (homogener)  $\mathcal{M}^n$  im Raume  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; der Kreisscheibe  $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$  homöomorpher Gebiete in  $\mathbb{R}^2$ . Hierher gehören: der *Jordansche Kurvensatz*<sup>179</sup>) und allgemeinere Zer-

p. 231—246, 159 (1928), p. 101—116. Vgl. ferner *L. Lusternik-L. Schnirelmann*, Paris C. R. 188 (1929<sup>1</sup>), p. 295—297.

177) Vgl. II C 9, p. 959 ff.; ferner *H. Gieseking*, Diss. Münster 1912; *J. Nielsen*, Diss. Kiel 1913, p. 40 ff., Math. Ann. 78 (1918), p. 396 f., Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1924), p. 246, Mat. Tidskr. (B) 1923, p. 53—61 und 1924, p. 1—22, sowie l. c. <sup>174</sup>); *L. E. J. Brouwer*, Paris C. R. 168 (1919<sup>1</sup>), p. 845, Versl. Amsterdam Akad. 27 (1919), p. 609, 1363, 28 (1920), p. 1186, 29 (1920), p. 610 = Proc. Amsterdam Akad. 21 (1918/19), p. 707, 1352, 22 (1920), p. 811, ferner Proc. Amsterdam Akad. 29 (1926), p. 864; *B. v. Kerékjártó*, ibid. (Versl.) 28 (1919), p. 555, sowie l. c. <sup>175</sup>) und Ann. of math. (2) 29 (1927/28), p. 169—179; *W. Scherrer*, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 70 (1925), p. 278; *S. Lefschetz*, Proc. Nat. Ac. 11 (1925), p. 290—292, 12 (1926), p. 737—739, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 1—49, 29 (1927), p. 429—462, 848; *Reinh. Baer*, J. f. Math. 160 (1928), p. 1—25. Vgl. auch *H. Hopf*, Math. Ann. 96 (1926), p. 209—224, Gött. Nachr. 1928, p. 127—136; *M. Morse*, Am. J. of Math. 51 (1929), p. 165—178. Auch die eindeutigen (nicht notwendig eineindeutigen) stetigen Abbildungen einer  $\mathcal{M}^n$  auf sich selbst sind studiert worden (und liefern absolute topologische Eigenschaften der betreffenden  $\mathcal{M}^n$ ): vgl. <sup>180</sup>). Eine als „transformations intérieure“ bezeichnete Kategorie stetiger Abbildungen untersucht *S. Stoilow*, Fund. math. 13 (1929), p. 186—194, sowie Ann. Éc. Norm. (3) 45 (1928), p. 347—382. Über analytische Approximationen topologischer Abbildungen vgl. *P. Franklin-N. Wiener*, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), p. 762.

178) Vgl. II C 9, p. 956, Anm. 332, 332 a; *R. Furch*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), p. 210; *J. Lense*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 243. Zur Terminologie vgl. <sup>168</sup>); über den Sinn von Kurven in der Ebene s. *J. R. Kline*, Ann. of math. (2) 19 (1917/18), p. 185, 21 (1919/20), p. 113.

179) Vgl. II C 9, p. 916, *B. v. Kerékjártó*, Math. naturw. Berichte der Ungar. Akad. d. Wiss. 38 (1919), p. 194 und Vorl. 1, p. 59; *Erhardt Schmidt*, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. 1923, p. 318; *A. Schoenflies*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 33 (1924), p. 147, 160; *F. Hartogs*, Math. Ztschr. 22 (1925), p. 62; *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 527; *C. Zarankiewicz*, Fund. math. 13 (1929), p. 264—268. Vgl. auch *D. W. Woodard*<sup>45</sup>). Über *Jordansche Kurven* und *Kurvenbogen* s. ferner *Kerékjártó*, Vorl. I, p. 103; *G. Feigl*, Math. Ztschr. 27 (1927), p. 161. — Als *Jordansche Kurve* (= einfache geschlossene Kurve) bzw. *Jordanscher* (= einfacher) *Kurvenbogen* soll dabei das in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  (eventuell allgemeiner in einem  $\mathbb{R}^{1+p}$ , wo  $p \geq 1$ ) gelegene topologische Bild von  $\mathbb{S}^1$  (Kreislinie) bzw. einer Strecke verstanden werden; analog als *Jordansche Fläche* (oder *Jordansche Mannigfaltigkeit*) das im  $\mathbb{R}^{n+1}$  (eventuell  $\mathbb{R}^{n+p}$ ) gelegene topologische Bild der sphärischen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{S}^n$ . Bisweilen wird „*Jordansche Fläche*“ auch für

legungssätze<sup>180</sup>), Sätze über „Erreichbarkeit“ und „Unbewalltheit“<sup>181</sup>), Verknotungs- und Verkettungsprobleme<sup>182</sup>) (letztere vom kontinuier-

das im  $\mathfrak{N}^{n+1}$  gelegene topologische Bild irgendeiner orientierbaren geschlossenen  $\mathfrak{M}^n$  gesagt (wobei zu beachten ist, daß nicht zu jeder orientierbaren geschlossenen  $\mathfrak{M}^n$  topologische Bilder im  $\mathfrak{N}^{n+1}$  existieren (wohl aber in geeigneten  $\mathfrak{N}^{n+p}$  gemäß einer Bemerkung von *J. W. Alexander*).

In vorstehender Bedeutung war das Wort „Jordansche Kurve“ bis vor kurzem allgemein gebraucht — im Einklang damit, daß der „Jordansche Kurvensatz“ von eben diesen Kurven handelt, und im Einklang mit dem besonderen Verdienst von *C. Jordan* gerade um diesen wichtigen Satz. Vor einiger Zeit sind manche Autoren hiervon abgewichen und haben beliebige stetige Bilder einer Strecke (das sind die „im kleinen zusammenhängenden Kontinua“) als *Jordansche Kurven* bezeichnet. Wir glauben an der alten Bedeutung festhalten zu sollen.

180) Vgl. II C 9, p. 917 ff., 930/31, ferner *A. M. Mullikin*, Trans. Am. Math. Soc. 24 (1922), p. 144 (p. 148—154); *E. Stenfors*, Soc. Scient. Fenn. 1923; *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 6 (1924), p. 37/38; *C. Zarankiewicz*, Fund. math. 11 (1928), p. 19. Verwandte Fragen behandeln *W. Sierpiński*, Tôhoku Math. J. 13 (1918), p. 300, Monatsh. Math. Phys. 35 (1928), p. 239—242; *R. L. Moore*, Math. Ztschr. 15 (1922), p. 254—260, Trans. Am. Math. Soc. 24 (1922), p. 145, 27 (1925), p. 416—428, Fund. math. 6 (1924), p. 189—202, 12 (1928), p. 295—297, 13 (1929), p. 261—263, Proc. Nat. Acad. 11 (1925), p. 469—476, 13 (1927), p. 711—716, 14 (1928), p. 85—88; *J. Pál*, Matemat. Tidskrift 1923, p. 66; *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 5 (1924), p. 188—205, 10 (1927), p. 305; *S. Straszewicz*, Fund. math. 7 (1925), p. 159; *P. Knaster*, Fund. math. 7 (1925), p. 264, 10 (1927), p. 276; *C. Kuratowski*, Fund. math. 6 (1924), p. 130—146, 8 (1926), p. 137, 14 (1929), p. 304—310, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 77—80, sowie <sup>148</sup>); *B. Knaster-C. Kuratowski*, Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 647—649; *C. Zarankiewicz*, Fund. math. 9 (1927), p. 124—171, 12 (1928), p. 121—125, Bull. Acad. Polon. 1926, p. 361—371, 1927, p. 193, Ann. Soc. Polon. de Math. 5, 1926 (1927), p. 103, vgl. auch l. c. <sup>292</sup>); *C. Kuratowski-C. Zarankiewicz*, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 571—575; *J. R. Kline*, Math. Ztschr. 26 (1927), p. 687—690; *P. Urysohn*, Fund. math. 10 (1927), p. 175—176; *G. T. Whyburn*, Fund. math. 10 (1927), p. 180, 13 (1929), p. 42—57, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 659, 35 (1929), p. 87—104, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 746, 30 (1927), p. 597—609, Monatsh. Math. Phys. 36 (1921), p. 305—314; *P. Alexandroff*, Paris C. R. 183 (1926<sup>3</sup>), p. 722—724; *R. G. Lubben*<sup>188</sup>), Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 503; *Wall. A. Wilson*, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 733—744, Ann. of math. (2) 29 (1927/28), p. 382—388, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 552—562, Am. J. of Math. 51 (1929), p. 19—30; *W. L. Ayres*, Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 201—206, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 135—148; *E. Kamke*, Preuß. Sitz.-Ber. 1928, p. 283—299; *P. Szymański*, Fund. math. 10 (1927), p. 363—374, 11 (1928), p. 1—15; *C. Kuratowski-S. Straszewicz*, Fund. math. 12 (1928), p. 152—157; *A. Tarski*, Fund. math. 12 (1928), p. 188—205; *J. H. Roberts-J. L. Dorroh*, Fund. math. 13 (1929), p. 58—61; *J. H. Roberts*, ib. 14 (1929), p. 96—102. Vgl. auch <sup>227b</sup>), ferner: *R. Furch*, Math. Ztschr. 28 (1928), p. 556—566. Mit der Theorie der die Ebene bzw. den  $\mathfrak{N}^n$  zerlegenden Mengen hängt auch die Theorie der „Hauptpunkte“, *F. Hartogs-A. Rosenthal*, Math. Ann. 100 (1928), p. 212—263, III. Kap., zusammen.

Die Zerlegung des sphärischen  $\mathfrak{S}^n$  durch eingebettete  $\mathfrak{M}^{n-1}$  erscheint als

lichen Standpunkt in strenger Weise bis vor kurzem noch wenig in Angriff genommen), zweiseitige oder einseitige Lagerung einer (orientierbaren oder nichtorientierbaren)  $\mathfrak{M}^n$  in einer  $\mathfrak{M}^{n+p}$  <sup>182a</sup>), Fragen der Erweiterung von topologischen Abbildungen von Teilräumen auf die umfassenden Räume <sup>183</sup><sup>183a</sup>), Theorie der Primenden (auch Randelemente genannt) für Gebiete im  $\mathfrak{R}^2$  <sup>184</sup>), das topologische Studium von Kurven-

spezieller Fall eines allgemeinen Dualitätstheorems von *J. W. Alexander* über die Zusammenhangszahlen einer in  $\mathfrak{C}^n$  eingebetteten  $\mathfrak{M}^m$  und jene des Restraumes  $\mathfrak{C}^n - \mathfrak{M}^m$ , *Trans. Am. Math. Soc.* 23 (1922), p. 333; vgl. hierzu auch eine ältere Arbeit von *G. Mannoury*, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Amsterdam (2) 3 (1898), p. 126—152. Weitere Verallgemeinerungen geben *P. Alexandroff*, *Paris C. R.* 184 (1927), p. 425—427, *Gött. Nachr.* 1927, p. 323—329 und <sup>182</sup>); *L. Pontrjagin*, *Gött. Nachr.* 1927, p. 315—322, 446—456; *E. R. van Kampen*, *Proc. Amsterdam Akad.* 31 (1928), p. 899—905 und *Diss. Leiden* 1929; *S. Lefschetz*, *Proc. Nat. Acad. of Sc.* 13 (1927), p. 614—622, 805—807, 14 (1928), p. 367—369; *Felix Frankl*, *Wien. Ber.* 136 (1927), p. 689—699.

181) II C 9, p. 920/22, 923/24, 931, 955, *B. v. Kerékjártó*, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 4 (1925), p. 164—171; *S. Mazurkiewicz*, *Fund. math.* 13 (1929), p. 146—150, 14 (1929), p. 107—115, 271—276; *C. Kuratowski*, *ib.* p. 116—117; *G. T. Whyburn*, *Proc. Nat. Ac.* 14 (1928), p. 657—666, *Bull. Am. Math. Soc.* 34 (1928), p. 429 und p. 504—510, *Monatsh. Math. Phys.* 35 (1928), p. 289—304; *R. G. Lubben*, *Bull. Am. Math. Soc.* 32 (1926), p. 14 und l. c. <sup>180</sup>). Vgl. ferner *R. L. Wilder* <sup>255a</sup>), *G. T. Whyburn*, *Fund. math.* 14 (1929), p. 311—326. Weitere Fragen über Randpunktmengen bei *R. L. Moore*, *Fund. math.* 6 (1924), p. 203—213, *Trans. Am. Math. Soc.* 27 (1925), p. 329.

182) Vgl. III A B 3, p. 207—216. *L. E. J. Brouwer*, *Amsterdam Akad. Versl.* 20<sub>2</sub> (1912), p. 1049 = *Proc. Amst.* 14 (1911), p. 300—310; *J. W. Alexander*, *Proc. Nat. Acad. of Sc.* 9 (1923), p. 93—95; *S. Mazurkiewicz-S. Straszewicz*, *Fund. math.* 9 (1927), p. 205—211; *P. Alexandroff*, *Fund. math.* 11 (1928), p. 222—227. Vgl. auch die damit verwandten in Anm. 224 (zweiter Absatz) genannten Arbeiten sowie <sup>227</sup>). — Verknottete und verkettete Flächen im  $\mathfrak{R}^4$  betrachtet *E. Artin*, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 4 (1926), p. 174; *E. R. van Kampen*, *ib.* 6 (1928), p. 216.

182a) Vgl. <sup>168</sup> <sup>226a</sup>).

183) Vgl. II C 9, p. 958f., ferner *S. Saks* <sup>172</sup>), p. 307ff.; *R. L. Moore*, *Am. J. of Math.* 48 (1926), p. 67; *H. M. Gehman*, *Trans. Am. Math. Soc.* 28 (1926), p. 252—265, 31 (1929), p. 241—252; *Am. J. of Math.* 51 (1929), p. 385. Vgl. ferner eine demnächst erscheinende Münchener Dissertation von *H. Wolkenstörfer*.

183a) Auch Fragen wie die, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit ein (singularitätenfreies) Bild hat in einer anderen von bestimmten Eigenschaften, z. B. einer sphärischen der nächsthöheren Dimension (Einbettungsprobleme) können als hierher gehörig angesehen werden. Vgl. hierzu *H. Hopf*, *Math. Ann.* 95 (1925), p. 362 und die l. c. <sup>169</sup>) p. 15, Anm. 13 aufgeworfene allgemeine Frage; ferner die in Nr. 41 (bei <sup>271</sup>)ff.) angeführten Einbettungssätze. Vgl. auch <sup>95</sup>) und <sup>224b</sup>).

184) Vgl. II C 9, p. 926/9, 958, ferner *P. Urysohn*, *Fund. math.* 6 (1924), p. 229; *R. L. Moore*, *Proc. Nat. Acad.* 10 (1924), p. 170—175, *Math. Ztschr.* 22 (1925), p. 307, *Trans. Am. Math. Soc.* 27 (1925), p. 425. Analoge Fragen für Ge-

systemen<sup>185</sup>) (neuerdings von irgendwelchen abgeschlossenen Mengen<sup>185a</sup>) in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, speziell auf Flächen. Dabei stellt die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Auftretens von Kurvensystemen mit bestimmten Eigenschaften (z. B. Erfülltsein von Verknüpfungsbeziehungen, Auftreten von Singularitäten) auf einer Fläche eine absolute topologische Eigenschaft dieser Fläche dar und es entsteht die Frage, ob sie zur vollen topologischen Kennzeichnung der betreffenden Fläche hinreichen.<sup>186</sup>) Geeignete Systeme geschlossener Kurven oder allgemeinerer Punktmengen auf einer Fläche führen zur Definition einer („zyklo-matischen“) Zusammenhangszahl bzw. einer „Basis der Zyklöse“.<sup>187</sup>)

Im besonderen ist die Topologie von Punktmengen (speziell „Kurven“) in  $n$ -dimensionalen Zahlenräumen (vgl. Abschnitt I) studiert worden.<sup>188</sup>)

biete im  $\mathbb{R}^3$  behandelt die Heidelberger Diss. von *B. Kaufmann* (erscheint dem-nächst in *Math. Ann.*).

185) *J. Nielsen*, Diss. Kiel 1913, *Matemat. Tidsskr. (B)* 1924, p. 1—24; *R. L. Moore*, *Trans. Am. Math. Soc.* 22 (1921), p. 41, *Fund. math.* 4 (1923), p. 106—117; *H. Hamburger*, *Sitz.-Ber. Preuß. Akad.* 1922, p. 285, *Math. Ztschr.* 19 (1923), p. 50; *F. Levi*, *Math. Ztschr.* 16 (1923), p. 148, 22 (1925), p. 45, *Ber. Sächs. Ges.* 75 (1923), p. 62 u. 127, 78 (1926), p. 256; *H. Kneser*, *Math. Ann.* 91 (1924), p. 135; *H. R. Bra-hana*, l. c. <sup>224a</sup>); *Reinhold Baer*, *J. f. Math.* 156 (1927), p. 231—246; *B. v. Kerék-jártó*, *Gött. Nachr.* 1922, p. 71 (behandelt insbesondere auch Systeme von Flächen im dreidimensionalen Raum), *Paris C. R.* 180 (1925), p. 1565, *Acta litt. ac scient. Szeged* 2 (1925), p. 162—166; über topologisch-differentialgeometrische Probleme siehe *W. Blaschke*, *Math. Ztschr.* 28 (1928), p. 150, 158, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 7 (1929), p. 37—45, 67—69; *K. Mayrhofer*, *ib.* p. 1—10, *Math. Ztschr.* 28 (1928), p. 728, 30 (1929), p. 131, 144; *K. Reidemeister*, *Math. Ztschr.* 29 (1929), p. 427—435. Vgl. auch <sup>186</sup>). Ältere Literatur s. III AB 3, p. 204—205 sowie *W. Dyck*, *Sächs. Ber.* 1885, p. 314f., *Math. Ann.* 32 (1888), p. 463; *Hamburger*, l. c. p. 54.

185a) *P. Alexandroff*, *Paris C. R.* 184 (1927), p. 317—319, 425—427; *S. Lef-schetz*, *Ann. of math. (2)* 29 (1928), p. 232—254.

186) Über die topologische Kennzeichnung der Ebene vgl. *R. L. Moore*, *Trans. Am. Math. Soc.* 17 (1916), p. 131—164; *W. Süß*, *Proc. Imper. Acad. Tōkyō* 2 (1926), p. 368.

187) *L. E. J. Brouwer*, *Paris C. R.* 154 (1912<sup>1</sup>), p. 862; 169 (1919<sup>2</sup>), p. 953. Speziell für Gebiete (= zusammenhängende offene Mengen) in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  vgl. II C 9, p. 906 und 955, Anm. 329. Vgl. ferner *L. E. J. Brouwer*, *Amsterdam Akad. Versl.* 28 (1919/20), p. 373 = *Proceed.* 22 (1919), p. 471. Siehe auch Nr. 40 bei <sup>250b</sup>). Über den Zusammenhang ebener Gebiete siehe *P. Urysohn*, *Math. Ztschr.* 21 (1924), p. 133—150.

188) Vgl. außer den mannigfachen einschlägigen Untersuchungen, über die in Artikel II C 9 (Nr. 11—13a und 16—17b) berichtet wird, *A. Denjoy*, *Amster-dam Akad. Versl.* 28 (1919/20), p. 1100 = *Proceed.* 21 (1919), p. 125—130; *L. An-toine* <sup>5</sup>); *R. L. Wilder*, *Fund. math.* 6 (1924), p. 214—228, 7 (1925), p. 311; *R. L. Moore*, *Trans. Am. Math. Soc.* 27 (1925), p. 416; *W. A. Wilson*, *Trans. Am. Math. Soc.* 27 (1925), p. 429, *Bull. Am. Math. Soc.* 34 (1928), p. 599—606; *B. Knaster*,

Zu den topologisch invarianten Eigenschaften gehören natürlich alle jene, die bei *beliebigen eindeutigen stetigen* (nicht notwendig ein-

Fund. math. 7 (1925), p. 191—197; *J. R. Kline*, Fund. math. 7 (1925), p. 314; *C. Kuratowski*, Fund. math. 8 (1926), p. 201, 10 (1927), p. 225—275, 12 (1928), p. 20—42 u. 214—239, 14 (1929), p. 116—117; *P. Urysohn*, Fund. math. 10 (1927), p. 175—176; *W. Sierpiński*, ib. 13 (1919), p. 230, 14 (1929), p. 234; *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 14 (1929), p. 107—115; *H. M. Gehman*, Proc. Nat. Acad. of Sc. 12 (1926), p. 544; *R. G. Lubben*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 114; *G. T. Whyburn-C. M. Cleveland*, ib. p. 109; *G. T. Whyburn*, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 369; Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 685, Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 399—411. Vgl. auch (nicht rein topologisch): *C. Carathéodory*, l. c. <sup>193</sup>, p. 17 ff.

Über Kurven (insbesondere in der Ebene) sowie allgemeinere Kontinua s. Nr. 42, ferner II C 9, Nr. 12, 13, 17 a und l. c. <sup>181</sup>); einen Bericht über Kurven gibt *R. L. Moore*, Bull. Am. Math. Soc. 29 (1923), p. 289, einen Überblick über verschiedene Kurvenbegriffe *A. Rosenthal*, Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturwiss. 1924, Nr. 7/8. Siehe ferner *R. L. Moore*, Math. Ztschr. 15 (1922), p. 254, Bull. Am. Math. Soc. 29 (1923), p. 438, Fund. math. 7 (1925), p. 302, Proc. Nat. Acad. of Sc. 9 (1923), p. 101, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 331; *G. T. Whyburn-W. L. Ayres*, Bull. Am. Math. Soc. 34 (1928), p. 349—360; *W. A. Wilson*, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 536, Amer. J. 48 (1926), p. 147—168, Bull. Am. Math. Soc. 34 (1928), p. 81; *J. R. Kline*, Bull. Am. Math. Soc. 23 (1917), p. 753, 27 (1921), p. 399; 28 (1922), p. 8, Proc. Nat. Acad. 6 (1920), p. 529—531, Fund. math. 10 (1927), p. 298; *J. R. Kline-R. L. Moore*, Bull. Am. Math. Soc. 28 (1922), p. 380; *B. v. Kerékjártó*, l. c. <sup>181</sup>); *W. Scherrer*, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 69 (1924), p. 251, Math. Ztschr. 24 (1925), p. 125—130; *H. M. Gehman*, Ann. of math. (2) 27 (1925), p. 29 = Thesis Philadelphia 1925, Am. J. of Math. 49 (1927), p. 189, Ann. of math. (2) 27 (1926), p. 381, 28 (1927), p. 103, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 218, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 553, 30 (1928), p. 63, Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 431—433, 433—435 und l. c. <sup>183</sup>); *G. T. Whyburn*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 659—663, 33 (1927), p. 185—188, 305—308, Proc. Nat. Acad. 12 (1926), p. 761—767, 13 (1927), p. 31—38, 650—657, Am. J. of Math. 50 (1928), p. 167—194, Fund. math. 11 (1928), p. 296—301, 14 (1929), p. 103—106, Ann. of math. (2) 29 (1928), p. 399—411; *C. M. Cleveland*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 311 u. 420, Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 275; *R. L. Wilder*, Fund. math. 6 (1924), p. 214—228, 7 (1925), p. 340—377, 11 (1928), p. 127—131, Proc. Nat. Acad. 11 (1925), p. 725—728, 14 (1929), p. 614—621, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 217; *W. L. Ayres*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1926), p. 37 u. 307, 33 (1927), p. 201 u. 565, Ann. of math. 28 (1927), p. 396 = Thesis Philadelphia 1927, Ann. of math., ib. p. 501, Proc. Nat. Acad. of Sc. 13 (1927), p. 749, 15 (1929), p. 91 u. 94, Fund. math. 11 (1928), p. 132—140 u. 661, ib. 14 (1929), p. 92—95, Am. J. of Math. 50 (1928), p. 521—534; Trans. Am. Math. Soc. 30 (1927), p. 567—578; 31 (1928), p. 595—612, Bull. Acad. Polon. 1928, p. 127—142, Math. Ann. 101 (1929), p. 194—209, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 301; *B. Knaster-C. Kuratowski*, Bull. Am. Math. Soc. 33 (1927), p. 106; *M. H. A. Newman*, J. of London Math. Soc. 2 (1926), p. 100—102; *St. Nikodym*, Fund. math. 12 (1928), p. 160—187, 240—243; *P. Urysohn*, Math. Ann. 98 (1928), p. 296—308; *N. E. Rutt*, Am. J. of Math. 51 (1929), p. 217—246; *T. C. Benton*, Fund. math. 13 (1929), p. 151—177. — Vgl. auch *G. Landsberg*, *J. v. Sz. Nagy*, l. c. <sup>224</sup>); *C. Kuratowski*,

eindeutigen) Abbildungen erhalten bleiben<sup>189</sup>), z. B. die (absoluten<sup>190</sup>) Eigenschaften (eines topologischen Raumes): absolut-kompakt<sup>191</sup>), zusammenhängend<sup>192</sup>), zusammenhängend im kleinen<sup>193</sup>); ferner gehören hierher die Untersuchungen von *L. E. J. Brouwer*<sup>194</sup>) über den *Abbildungsgrad* einer eindeutigen stetigen Abbildung einer  $\mathfrak{M}^n$ , die in gewissem Sinne eine Weiterbildung der in Nr. 31 genannten Untersuchungen darstellen.

Bei einer von unserer Darstellung abweichenden Auffassungsweise wird von der Gesamtheit der genannten (eindeutigen stetigen) Abbildungen nach *A. Schoenflies* als von der „weiteren Gruppe“ gesprochen, im Gegensatz zu der „engeren Gruppe“ der eineindeutigen stetigen Abbildungen<sup>195</sup>) (letztere wird auch als „Gruppe der Analysis situs“ schlechtweg bezeichnet). Diese Ausdrucksweise setzt voraus, daß die betrachteten Gebilde (Punktmengen) alle in einem und demselben um-

---

Fund. math. 14 (1929), p. 138—144; *R. L. Moore*, Bull. Am. Math. Soc. 35 (1929), p. 185.

Über Flächen in euklidischen Räumen s. *B. v. Kerékjártó*, Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 267, Acta litt. ac scient. Szeged 3 (1927), p. 49. Vgl. auch *J. W. Alexander*, Bull. Am. Math. Soc. 28 (1922), p. 10; *R. L. Moore*, ib. 29 (1923), p. 302; *M. Fréchet*, Ann. Soc. math. Polon. 1924.

189) Diese Bemerkung gilt natürlich bereits in der allgemeinen Topologie. Über die genannten Abbildungen vgl. II C 9, p. 954, 959, Anm. 325, 341, 342, 346; ferner *L. E. J. Brouwer*, Amsterdam Akad. Proceed. 29 (1926), p. 864; *W. Wilson*, Amsterdam Proc. Akad. 29 (1926), p. 1129, Diss. Amsterdam 1928, Math. Ann. 100 (1928), p. 552; *H. Hopf*, Proc. Nat. Acad. 14 (1928), p. 206—214, Math. Ann. 100 (1928), p. 579—608; *H. Kneser*, Math. Ann. 100 (1928), p. 609—617. Über gewisse als „topologische Involutionen“ bezeichnete (nicht eineindeutige) Abbildungen s. *L. E. J. Brouwer*, Amsterdam Ak. Versl. 27 (1918/19), p. 1201 = Proceed. 21 (1919), p. 1143; *B. v. Kerékjártó*, Math. Ztschr. 8 (1920), p. 310, Acta litt. ac scient. Szeged 3 (1927), p. 49; *W. Scherrer*, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich 70 (1925), p. 268; vgl. ferner *T. Radó*, Acta litt. ac scient. Szeged 1 (1922), p. 55 (speziell nur konforme Abbildungen behandelnd).

190) Wegen absoluter und relativer Eigenschaften vgl. Nr. 2.

191) Vgl. Nr. 6, <sup>18</sup>).

192) Vgl. Nr. 8, <sup>29</sup>) und II C 9, p. 949.

193) Vgl. II C 9, p. 947 sowie *C. Kuratowski*, Fund. math. 4 (1923), p. 155; *H. Tietze*, Monatsh. Math. Phys. 32 (1923), p. 15. Ferner stellt die Eigenschaft eines topologischen Raumes  $\mathfrak{R}$ , „im Punkte  $P$ “ zusammenhängend im kleinen zu sein, eine gegenüber den genannten Abbildungen invariante, relative Eigenschaft der aus dem einzigen Punkt  $P$  bestehenden Menge bezüglich  $\mathfrak{R}$  dar. Den Begriff „zusammenhängend im kleinen“ (in anderer Bezeichnung) führt auch *C. Carathéodory*, Bull. Soc. Math. de Grèce 5 (1924), p. 13, bei einer Untersuchung über die eindeutige Umkehrbarkeit stetig differenzierbarer Abbildungen des  $\mathfrak{R}^n$  ein.

194) Vgl. II C 9, p. 956/7.

195) Vgl. II C 9, p. 948/59.

fassenden (Über-) Raum  $\mathfrak{R}$  (gewöhnlich in einem  $n$ -dimensionalen Zahlenraum  $\mathfrak{R}^n$ ) liegen und den Abbildungen dieses Überraumes auf sich selbst unterworfen werden.<sup>196)</sup> Die eineindeutigen stetigen unter diesen Selbstabbildungen von  $\mathfrak{R}$  bilden dann tatsächlich eine (und zwar die „engere“) Gruppe.<sup>197)</sup> Legt man aber diese Gruppe dem Studium einer in  $\mathfrak{R}$  gelegenen Punktmenge  $\mathfrak{M}$  zugrunde, so erscheinen die absoluten topologischen Eigenschaften<sup>190)</sup> von  $\mathfrak{M}$  stets in unlösbarer Verknüpfung mit den relativen von  $\mathfrak{M}$  bezüglich  $\mathfrak{R}$ . Will man die grundlegenden absoluten Eigenschaften herausarbeiten, so ist man genötigt, die Gebilde (Punktmengen) losgelöst von einem sie etwa umfassenden Überraum zu betrachten, wie es dem Standpunkt des vorliegenden Artikels entspricht (vgl. Nr. 2 ff.). Dann aber bilden die eineindeutigen stetigen (topologischen) Abbildungen dieser Gebilde aufeinander *keine Gruppe* mehr.<sup>198)</sup>

Von unserem Standpunkt aus kann also *nicht* von einer „Gruppe der topologischen Abbildungen“ oder „Gruppe der Analysis situs“ gesprochen werden.

#### IV. Kombinatorische Topologie.

**34. Problem einer kombinatorischen Topologie.**<sup>198a)</sup><sup>198aα)</sup> Wie in Nr. 25, 27, 28 besprochen, hat die Untersuchung des Aufbaus  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}^n$  aus Zellen zu der Erkenntnis geführt, daß

196) Analog wie z. B. in der projektiven Geometrie die in einem projektiven Raum  $\mathfrak{R}$  liegenden Figuren den projektiven Selbstabbildungen von  $\mathfrak{R}$  unterworfen werden.

197) Man muß dazu natürlich von diesen Abbildungen noch voraussetzen, daß auch ihre inversen Abbildungen stetig, die Abbildungen selbst also topologisch sind. Die sogenannte „weitere Gruppe“ ist überhaupt *keine* Gruppe (vgl. A. Schoenflies, Ber. II, p. 152, Anm. 1), weil sie nicht zu jeder ihrer Abbildungen die inverse enthält.

198) Denn wenn  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$  vier topologisch äquivalente (homöomorphe) Mengen sind, ferner  $A$  eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{N}$ ,  $B$  eine von  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{Q}$ , so läßt sich  $A$  mit  $B$  nur zusammensetzen, wenn  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{P}$  dieselbe Menge sind.

198a) Auf die Rolle der kombinatorischen Topologie in einer Reihe neuerer Arbeiten kommen wir in Nr. 39 und 40 kurz zu sprechen. In den Nrn. 34—37 soll die Rolle auseinandergesetzt werden, die man der kombinatorischen Topologie zur Zeit ihrer Entstehung zugewiesen hat.

198aα) *Vorbemerkung.* Unter „kombinatorischer Topologie“ verstehen wir hier *nicht* einen Zweig der in den Abschnitten I—III dargestellten Topologie, sondern jenen in III A B 3, p. 156—168 dargestellten „Teil der Kombinatorik“ (III A B 3, p. 170, Nr. 10), in welchem überhaupt nicht von Limes-, Häufungs- oder Umgebungsbeziehungen die Rede ist. In dieser kombinatorischen Topologie bedeutet z. B. das Wort „Strecke“ (oder „Linienstück“, „eindimensionale

ein solcher Zellaufbau beschrieben und damit die  $\mathfrak{M}^n$  in topologischer Hinsicht festgelegt werden kann durch bloße kombinatorische Zuordnungsvorschriften zwischen den Randzellen eines Systems  $n$ -dimensionaler Zellen. Für jede  $n$ -dimensionale Zelle, deren Rand eine  $\mathfrak{S}^{n-1}$  (d. h. sphärische  $\mathfrak{M}^{n-1}$ ) ist, wird dabei ein Zellaufbau dieser  $\mathfrak{S}^{n-1}$  als vorgegeben angenommen. Dieser Zellaufbau ist seinerseits wieder durch kombinatorische Zuordnungsvorschriften zwischen den Randzellen  $(n-1)$ -dimensionaler Zellen beschreibbar. Das analoge gilt für den Zellaufbau (aus  $(n-2)$ -dimensionalen Zellen) aller jener  $\mathfrak{S}^{n-2}$ , die den Rand dieser  $(n-1)$ -dimensionalen Zellen bilden u. s. f. Hieran knüpft sich nun die Frage, inwieweit es möglich ist, 1. *vollständig kombinatorische Gebilde an Stelle der  $\mathfrak{M}^n$  bzw. ihrer Zellaufbauten der Untersuchung zugrunde zu legen* (während bei der bisher entwickelten Auffassung die Zellen selbst Bausteine von kontinuierlicher Beschaffenheit darstellen und kombinatorisch nur die Beschreibung ihres Gefüges war) und 2. *den Problemen der die (kontinuierlichen)  $\mathfrak{M}^n$  betreffenden  $n$ -dimensionalen Topologie — oder wenigstens einem Teil dieser Probleme — äquivalente Probleme betreffs der genannten kombinatorischen Gebilde an die Seite zu stellen, so daß die Erledigung der letzteren Probleme zugleich die (wenigstens teilweise) Erledigung der ersteren*

Zelle“, „eindimensionaler Simplex“) gar nicht eine Menge von Punkten; sondern „Punkte“ („nulldimensionale Zellen“) einerseits und „Strecken“ („eindimensionale Zellen“) andererseits sind nur Namen für zwei Kategorien von (nicht weiter erklärten) Gedankendingen, aus denen — zusammen mit (ebenfalls nicht weiter erklärten) „zweidimensionalen“ und „mehrdimensionalen Zellen“ — durch gewisse Verknüpfungsregeln kombinatorische Gebilde — „Mannigfaltigkeiten“ bzw. „Komplexe“ (in unserer Darstellung „Zellsysteme“) genannt — hergestellt werden. In dieser kombinatorischen Topologie stellt z. B. die als „Zellteilung“ oder „interne Transformation“ (III AB 3, p. 159) bezeichnete Operation nur ein Verfahren dar, aus *einem* solchen kombinatorischen Gebilde ein anderes zu gewinnen; dabei ist aber, wenn es sich etwa um die „Teilung einer Strecke  $S = (P'P'')$ “ in zwei Teile  $(P'Q)$ ,  $(QP'')$ “ handelt, da  $S$  ja gar nicht als eine Punktmenge aufgefaßt wird, auch der eingeführte „Teilungspunkt“  $Q$  nicht als ein schon vorher vorhandener Punkt einer solchen Punktmenge anzusehen, sondern als ein bei dieser Operation neu eingeführtes Ding der Kategorie „Punkte“.

Diese Vorbemerkung über den Sinn des Wortes „kombinatorische Topologie“ ist vielleicht deshalb nicht überflüssig, weil neuerdings, und zwar in sehr wichtigen Arbeiten, die Bezeichnung „kombinatorische Topologie“ (combinatorial analysis situs) für denjenigen mit (kontinuierlichen) Zellen arbeitenden Teil der  $n$ -dimensionalen Topologie benützt worden ist, den wir oben (Nr. 25—30) beschrieben haben.

Auf den Namen „kombinatorische Topologie“ kann aber doch wohl kaum eine andere Disziplin einen größeren Anspruch erheben als diejenige bereits 1908 in III AB 3 dargestellte Theorie, die wirklich rein kombinatorisch ist.



*Probleme in sich schließt.* Vor allem handelt es sich offenbar, soll eine solche kombinatorische Topologie von größerem Wert sein<sup>198b)</sup>, um die Übertragbarkeit des *Homöomorphieproblems*<sup>198c)</sup> der kontinuierlichen  $\mathfrak{M}^n$  auf ein kombinatorisches Problem.

**35. Kombinatorische Zellsysteme.** Was die eben genannte Frage 1. betrifft, so entnimmt man dem in Nr. 34 gesagten, daß die Rolle einer jeden  $n$ -dimensionalen Zelle im Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$  wesentlich durch ihren Rand und im besonderen dadurch bestimmt ist, wie dieser Rand, der eine  $\mathfrak{S}^{n-1}$  ist, aus  $(n-1)$ -dimensionalen Zellen aufgebaut ist. Der Begriff „Zellaufbau einer  $\mathfrak{S}^v$ “ ist dabei zunächst in kontinuierlicher Weise definiert als Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^v$ , die mit der Punktmenge  $\xi_1^2 + \dots + \xi_{v+1}^2 = 1$  des  $\mathfrak{R}^{v+1}$  homöomorph ist. Nehmen wir aber einmal an, es sei möglich, diese Definition des Zellaufbaus einer  $\mathfrak{S}^v$  durch eine *rein kombinatorische* Definition zu ersetzen und damit diese Zellaufbauten innerhalb der Gesamtheit aller Zellaufbauten  $v$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten rein kombinatorisch zu kennzeichnen, so ergibt sich damit folgendermaßen die Möglichkeit einer stufenweisen Gewinnung des Begriffes „Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$ “.

Als „Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^0$ “ wird eine Menge von Elementen („Punkten“) erklärt, die entweder aus einem Punkt oder aus zwei Punkten besteht (der eine Punkt bzw. jeder der beiden Punkte heißt eine 0-dimensionale Zelle  $\mathfrak{Z}^0$  der  $\mathfrak{M}^0$ ); im Falle zweier Punkte sprechen wir im besonderen vom „Zellaufbau einer  $\mathfrak{S}^0$  (sphärischen 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit)“. — Angenommen es sei bereits für alle  $v < n$  erklärt, was unter „Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^v$ “ und unter „ $v$ -dimensionaler Zelle“  $\mathfrak{Z}^v$  eines solchen Zellaufbaus zu verstehen ist, und

198b) Das hiermit formulierte Problem einer kombinatorischen Topologie hat neuerdings *H. Kneser*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 34 (1925), p. 1 auseinandergesetzt. Vgl. auch *H. Weyl*, L'Enseignement mathématique 19 (1917), p. 95. *H. Lebesgue*, Bull. Soc. math. de France 52 (1924), p. 315, gebraucht (p. 319) den Ausdruck „*Analysis situs énumérative*“.

198c) Bei diesem Problem (vgl. Nr. 2) handelt es sich um die Auffindung einer Methode, zu entscheiden, ob zwei vorgegebene  $\mathfrak{M}^n$  homöomorph sind oder nicht, allgemeiner um die Klassifikation der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch ein vollständiges (für die Homöomorphie hinreichendes) System topologischer Invarianten (vgl. für  $n=2$  Nr. 32). Die im Text gestellte Frage sucht eine solche Methode bzw. ein solches Invariantensystem durch Übertragung des Problems auf ein rein kombinatorisches Gebiet. (Natürlich könnte man die Lösung von Homöomorphiefragen auch in anderer Richtung suchen. Wenn man z. B. zeigt, daß die orientierbaren geschlossenen Flächen durch die Maximalzahl der gegenseitig punktfremden, in ihrer Gesamtheit die Fläche nicht zerlegenden *Jordankurven* [Rückkehrsnitte] topologisch vollständig charakterisiert sind, so hat man damit eine nicht-kombinatorische Lösung einer Homöomorphiefrage.)

wann im besonderen von einem „Zellaufbau einer  $\mathfrak{S}^n$  (sphärischen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit)“ zu sprechen ist. Es liege dann ein System von Zellaufbauten sphärischer  $(n-1)$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten vor (vom kontinuierlichen Standpunkt aus könnten wir die entsprechenden  $\mathfrak{S}^{n-1}$  als Ränder  $n$ -dimensionaler Zellen auffassen; z. B. im Falle  $n=1$  als Randpunktpaare von Strecken); durch paarweise Zuordnungen zwischen den  $\mathfrak{B}^{n-1}$  dieser Zellaufbauten<sup>199)</sup> gewinnen wir hieraus einen „Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$ “; unter diesem ist also nichts anderes zu verstehen als das System der Zellaufbauten der  $\mathfrak{S}^{n-1}$  zusammen mit den Zuordnungsvorschriften.

Man sieht hieraus tatsächlich: Will man zu einer rein kombinatorischen Topologie gelangen, so wird man vor allem vor die Frage gestellt: Läßt sich eine Definition des „Zellaufbaus einer  $\mathfrak{S}^n$ “ geben, die sich nur auf die kombinatorischen Zuordnungsvorschriften des Zellaufbaus bezieht? Hierzu ist zu sagen: Es ist leicht, für jedes  $n$  einen speziellen Zellaufbau der  $\mathfrak{S}^n$  anzugeben, — z. B. (vgl. Nr. 26) den durch die  $n+2$  Randsimplexe eines  $(n+1)$ -dimensionalen Simplex dargestellten Zellaufbau oder etwa den durch die  $2n+2$  Seiten eines  $(n+1)$ -dimensionalen Würfels dargestellten Zellaufbau — er heiße  $\Sigma_0^n$ . Jeder beliebige Zellaufbau der  $\mathfrak{S}^n$  ist dann gekennzeichnet als ein solcher „Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$ “, daß die durch ihn definierte kontinuierliche  $\mathfrak{M}^n$  homöomorph ist mit der durch den eben genannten speziellen Zellaufbau  $\Sigma_0^n$  definierten  $\mathfrak{M}^n$ . Die aufgeworfene Frage ist also nichts anderes als ein spezieller Fall der folgenden Frage (nämlich diese Frage gestellt für den Fall:  $\xi_1^n = \Sigma_0^n$ ): Läßt sich eine nur auf die kombinatorischen Merkmale der Zellaufbauten  $\xi_1^n, \xi_2^n$  zweier  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten bezügliche Beziehung angeben, notwendig und hinreichend dafür, daß die durch diese Zellaufbauten definierten Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}_1^n$  und  $\mathfrak{M}_2^n$  homöomorph sind? (Wir verlangen hier nur eine Definition für eine der Homöomorphiebeziehung äquivalente kombinatorische Beziehung, wir verlangen kein Kriterium, das in jedem konkreten Einzelfall von dem Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$  zu entscheiden gestattet, ob er eine Mannigfaltigkeit liefert, die einer durch einen anderen Zellaufbau definierten  $\mathfrak{M}^n$  homöomorph ist, im besonderen ob er eine  $\mathfrak{S}^n$  liefert oder nicht; ein solches Kriterium ist übrigens für  $n \geq 3$  auch nicht bekannt.)

Tatsächlich läßt sich nun eine rein kombinatorische Beziehung zweier Zellaufbauten angeben — wir bezeichnen sie im folgenden (Nr. 36) als „Verwandtschaft“ — die jedenfalls hinreichend für die

199) Wir übergehen Einzelheiten und bemerken nur, daß diese Zuordnungen den Verträglichkeitsbedingungen von Nr. 27 genügen müssen.

Homöomorphie der entsprechenden Mannigfaltigkeiten ist, wengleich — wenigstens für beliebiges  $n$  — noch nicht feststeht, ob sie auch notwendig ist (doch wird auch dies vielfach für wahrscheinlich gehalten). Nehmen wir einmal an, dieser Begriff „Verwandtschaft“ sei bereits definiert. Dann können wir zwecks Gewinnung kombinatorisch definierter Zellaufbauten folgendermaßen vorgehen.

Wir greifen für jedes  $n$  einen speziellen Zellaufbau der  $\mathfrak{S}^n$  heraus (man pflegt dabei einen noch einfacheren Zellaufbau zu wählen als den oben genannten für den Rand eines  $(n+1)$ -dimensionalen Simplex<sup>200</sup>); bezeichnen wir mit  $\Sigma^n$  jeden damit „verwandten“ Zellaufbau, so ist jedes  $\Sigma^n$  ein Zellaufbau von  $\mathfrak{S}^n$ . Solange die Frage nicht völlig geklärt ist, ob auch umgekehrt jeder Zellaufbau von  $\mathfrak{S}^n$  ein  $\Sigma^n$  ist, müssen wir nun allerdings mit der Möglichkeit rechnen, daß der Begriff „Zellaufbau  $\Sigma^n$ “ enger sei als der Begriff „Zellaufbau einer  $\mathfrak{S}^n$ “. Immerhin können wir, wie sogleich skizziert werden soll, für die Grundlegung einer rein kombinatorischen Analysis situs von diesen beiden Begriffen den ersteren an Stelle des letzteren treten lassen; und damit ergibt sich die Möglichkeit, den Begriff „Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$ “ — vielleicht wieder mit einer gewissen Einengung seines Umfanges — in einer *rein kombinatorischen* stufenweisen Entwicklung zu gewinnen. Jeder unter den *solcher Art* erhaltenen Zellaufbauten einer  $\mathfrak{M}^n$  — der also ein rein kombinatorisches Gedankending darstellt — soll als ein „Zellsystem“  $Z^n$  bezeichnet werden (jedem  $Z^n$  entspricht ein Zellaufbau einer  $\mathfrak{M}^n$ , das umgekehrte ist wie gesagt noch fraglich); und für die stufenweise Entwicklung des Begriffes „Zellsystem“ ergibt sich sonach, wenn wir unsere Überlegungen zusammenfassen, folgendes Bild:

Eine Menge von Elementen, die „0-dimensionale Zellen“ oder „Punkte“ heißen mögen, werde als „0-dimensionales Zellsystem“ und mit  $Z^0$  bezeichnet; zwei  $Z^0$  heißen „verwandt“, wenn sie gleich viele Punkte haben (gleich mächtig sind); jede aus zwei Punkten bestehende  $Z^0$  werde als ein Zellsystem  $\Sigma^0$  (sphärisches  $Z^0$ ) bezeichnet. — Sei nun für alle  $\nu < n$  das „ $\nu$ -dimensionale Zellsystem  $Z^\nu$ “, die Verwandtschaft zweier  $Z^\nu$  und die Gesamtheit der als sphärische Zellsysteme  $\Sigma^\nu$  bezeichneten  $Z^\nu$  erklärt (als die zu einem speziellen Zellsystem  $\Sigma_0^\nu$  verwandten); ferner sei für jede  $Z^\nu$  erklärt, was unter ihren  $\mu$ -dimensionalen Zellen ( $0 \leq \mu \leq \nu$ ) zu verstehen ist. Es liege dann ein System von  $\Sigma^{n-1}$  vor. Ein solches System, zusammen mit (wieder an gewisse Verträglichkeitsbedingungen gebundenen) paarweisen Zuordnungen der  $(n-1)$ -dimensionalen Zellen dieser  $\Sigma^{n-1}$  bildet dann das,

200) Vgl. III A B 3, p. 160/161, 163 und I. c. <sup>153</sup>), p. 15, 24.

was wir ein „ $n$ -dimensionales  $Z^n$ “ nennen.<sup>201)</sup> Es bleibt noch übrig, durch besondere Festsetzungen (vgl. Nr. 36) die „Verwandtschaft“ zweier  $Z^n$  zu erklären, ein spezielles  $Z^n$  als „ $\Sigma_0^n$ “ und die „sphärischen“ Systeme  $\Sigma^n$  (als die zu  $\Sigma_0^n$  verwandten) zu kennzeichnen und den Begriff  $\mu$ -dimensionale Zelle eines Zellsystems  $Z^n$  für  $0 \leq \mu \leq n$  zu erklären.

Damit haben wir — abgesehen von der Einzelausführung<sup>202)</sup> bezüglich der Zuordnungen, der Verwandtschaftsdefinition usw. — die „Zellsysteme“<sup>203)</sup> gekennzeichnet, d. h. die Gedankendinge, mit denen sich die kombinatorische Analysis situs beschäftigt. Sie sind nichts anderes als Register zur Beschreibung der Lagerung von Zellen. *Durch jedes Zellsystem  $Z^n$  wird also eine bestimmte kontinuierliche  $\mathcal{M}^n$  definiert, nämlich jene, deren Zellaufbau mit  $Z^n$  übereinstimmt.* Zufolge dieser Tatsache wird das Studium der Zellsysteme nur insoweit etwas für die kontinuierliche  $n$ -dimensionale Analysis situs zu leisten vermögen, als es gelingt, zu den Problemen der kontinuierlichen Analysis situs Probleme der kombinatorischen Analysis situs zu finden, die jenen — im Sinn der Frage 2. von Nr. 34 — äquivalent sind.<sup>204)</sup><sup>204a)</sup>

201) Wenn hierbei, wie bisher üblich, von einer *Dimensionszahl* der Zellsysteme gesprochen wird, so ist damit nichts anderes gemeint als eine bestimmte *Stufenzahl* im Aufbau dieser kombinatorischen Gebilde. Eine  $n$ -fache *Ausdehnung* kommt nur den kontinuierlichen in der  *$n$ -dimensionalen Topologie* betrachteten Gebilden zu.

202) Vgl. *Dehn-Heegaard*, III AB 3, Nr. 1—5; *H. Tietze*<sup>153)</sup>, §§ 2—4; *E. Steinitz*, Sitz.-Ber. d. Berlin. Math. Ges. 7, p. 29 [im Arch. d. Math. u. Phys. (3) 13 (1908)]; eine besonders eingehende und sorgfältige Darstellung neuerdings bei *E. Bils*<sup>207)</sup>, p. 3/24; siehe ferner *H. Kneser*, l. c.<sup>198b)</sup>.

203) Sie wurden auch als „ $(n$ -dimensionale) Schemata“ bezeichnet, vgl. *H. Tietze*<sup>153)</sup>, p. 7 ff. Das Wort „Schema“ (einer Mannigfaltigkeit) in ähnlicher Bedeutung bei *H. Weyl*, R. Fl., p. 29. Zuerst hatte *Poincaré*, Rend. Circ. mat. Palermo 13 (1899), p. 290, das Wort Schema zur Bezeichnung eines (die Mannigfaltigkeit im allgemeinen nicht vollständig kennzeichnenden) Systems von gewissen Berandungrelationen („Kongruenzen“ genannt) bzw. Matrizen gebraucht.

204) Im Hinblick auf eine solche (zumindest vermutete) Äquivalenz wurden von *Dehn-Heegaard*, III AB 3, die kombinatorischen Zellsysteme selbst als „Mannigfaltigkeiten“ (bzw. „Komplexe“) bezeichnet. *Dehn-Heegaard* sagen ferner „homöomorph“ (oder „elementarverwandt“) für „verwandt“. Es werden also verwandte Zellsysteme von *Dehn-Heegaard* als homöomorphe Mannigfaltigkeiten bezeichnet, was natürlich bei Verbleiben ganz im Rahmen der kombinatorischen Topologie zulässig ist. Bei Betrachtungen, die gleichzeitig die kontinuierliche  $n$ -dimensionale Topologie betreffen, sind unterschiedliche Bezeichnungen nötig. *H. Tietze*, der l. c.<sup>203)</sup> das Wort „homöomorph“ gleichfalls im Sinn von verwandt verwendet, unterscheidet dort „homöomorphe Mannigfaltigkeiten“ (im kontinuierlichen Sinn) und „homöomorphe Schemata“ (im kombinatorischen Sinn).

204a) So läßt sich z. B. leicht einsehen, daß der Begriff „zusammenhängend“, wie ihn *E. Bils*<sup>207)</sup>, p. 6, 18, 23 für kombinatorische Zellsysteme definiert hat,

**36. Verwandtschaft von Zellsystemen.** Die wichtigste Frage in dieser Hinsicht ist die (in einem speziellen Fall schon aufgetauchte) nach einem dem *Homöomorphieproblem* kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten äquivalenten Problem für Zellsysteme. Nun gibt es einen Prozeß, um aus einem Zellsystem  $Z^n$  andere abzuleiten, von denen man unmittelbar einsieht, daß die durch sie definierten Mannigfaltigkeiten zu der durch  $Z^n$  definierten Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}^n$  homöomorph sind: es ist der (allein mit Hilfe der kombinatorischen Merkmale eines Zellsystems definierbare) Prozeß der *Zweiteilung einer  $\mu$ -dimensionalen Zelle*  $a^\mu$  ( $1 \leq \mu \leq n$ ) von  $Z^n$ , bewirkt durch Einführung einer neuen ( $\mu - 1$ )-dimensionalen Zelle  $b^{\mu-1}$  und Ersatz von  $a^\mu$  durch die beiden längs  $b^{\mu-1}$  aneinanderstoßenden Teilzellen  $a_1^\mu$  und  $a_2^\mu$ . Das gleiche gilt von jeder durch eine endliche Anzahl sukzessiver Zweiteilungen herstellbaren *Unterteilung einer Zelle*  $a^\mu$  in endlich viele Teilzellen (wobei einzelne der sukzessiven Zweiteilungen auch an Zellen vorgenommen werden können, die erst bei den vorhergehenden Zweiteilungen neu eingeführt wurden, wie oben  $b^{\mu-1}$ ), sowie auch von jeder *Zellteilung des Zellsystems*  $Z^n$ , die durch solche, simultan an einer Gesamtheit von Zellen von  $Z^n$  ausgeführten Unterteilungen erhalten werden kann: Jedes aus  $Z^n$  durch eine solche Zellteilung gewonnene „abgeleitete“ Zellsystem  $Z'$  definiert eine Mannigfaltigkeit, die der durch  $Z^n$  definierten homöomorph ist. (Zu den „aus  $Z^n$  abgeleiteten“ Zellsystemen soll auch  $Z^n$  selbst gezählt werden.) Ist  $Z'$  aus  $Z$  und  $Z''$  aus  $Z'$  abgeleitet, so auch  $Z''$  aus  $Z$ . (Falls ein Zellsystem  $Z$  nur endlich viele Zellen hat, können die aus  $Z$  abgeleiteten Zellsysteme auch definiert werden als solche, die durch endlich viele sukzessive Zell-Zweiteilungen aus  $Z$  entstehen.<sup>205</sup>) Nennen wir zwei Zellsysteme  $Z_0, Z$  *verwandt*<sup>206</sup>, wenn es eine endliche Folge von Zellsystemen gibt:  $Z_0, Z_1', Z_1, \dots, Z_k', Z_k = Z$ , so daß jedes  $Z_i'$  sowohl ein aus  $Z_{i-1}$  als auch ein aus  $Z_i$  abgeleitetes Zellsystem ist, so definieren je zwei in dieser Folge benachbarte Zellsysteme und daher auch  $Z_0$  und  $Z$  homöomorphe Mannigfaltigkeiten: *Verwandtschaft zweier Zellsysteme ist hinreichend für die Homöomorphie der entsprechenden Mannigfaltigkeiten.* Zwei einem dritten Zellsystem

im obigen Sinne völlig äquivalent ist dem Begriff „zusammenhängend“ (im Sinne von Nr. 8) für die zugehörigen kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten bzw. Komplexe. Vgl. hierzu *M. Fréchet*, *Fund. math.* 8 (1926), p. 154 und die dort zitierte Thèse von *B. Z. Linfield*.

205) So *Dehn-Heegaard*, III A B 3, p. 159, 163 (Ausführung sukzessiver „interner Transformationen“) und *H. Tietze*<sup>163</sup>, p. 13.

206) Von *Dehn-Heegaard*, III A B 3, l. c.<sup>205</sup> und *H. Tietze*, l. c.<sup>205</sup>, wird (für die dort allein betrachteten Zellsysteme mit endlich vielen Zellen) ein etwas engerer Verwandtschaftsbegriff zugrunde gelegt. Zur Terminologie vgl. dabei <sup>204</sup>.

verwandte Zellsysteme sind untereinander verwandt, die Zellsysteme verteilen sich also auf Klassen untereinander verwandter.<sup>207)</sup> Zugehörigkeit zur selben *Verwandtschaftsklasse* bedeutet, anders gesagt, Übereinstimmung in allen Eigenschaften, die sich bei Zellteilungen nicht ändern („zellteilungsinvariant“ sind).

Rechnet man andererseits in eine *Homöomorphieklasse* zwei Zellsysteme, wenn die durch sie definierten Mannigfaltigkeiten homöomorph sind, so sieht man; jede Verwandtschaftsklasse ist ganz in einer Homöomorphieklasse enthalten. Man ersieht hieraus die Bedeutung der (für  $n > 2$  noch völlig ungelösten) Frage nach einem vollen System von Zellteilungsinvarianten, derart, daß die Übereinstimmung in ihnen für die Zugehörigkeit zweier Zellsysteme zur selben Verwandtschaftsklasse nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Zusammengefaßt gilt nach dem bisherigen: Wenn von zwei  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten je ein Zellaufbau vorliegt, der einem *Zellsystem* im Sinn von Nr. 35 entspricht (man beachte, daß wir dort mit der Möglichkeit anderer Zellaufbauten, die keine Zellsysteme sind, rechnen mußten), dann ist die Verwandtschaft dieser Zellsysteme für die Homöomorphie der beiden  $\mathfrak{M}^n$  *hinreichend*.

**37. Eine Hypothese.** Viel weiter tragende Beziehungen zwischen kombinatorischer und kontinuierlicher  $n$ -dimensionaler Analysis situs ergeben sich aber, wenn die Richtigkeit des folgenden Satzes zugrundegelegt werden kann (die erst für die niedrigsten Fälle bestätigt, für die höheren ( $n > 2$ ) vorerst nur als *Arbeitshypothese* anzusehen ist), daß nämlich für die Homöomorphie zweier durch Zellsysteme definierten  $\mathfrak{M}^n$  die Verwandtschaft der Zellsysteme (nicht nur hinreichend sondern auch) *notwendig* ist. Denn als Folge dieses Satzes hätte man: 1. die Unterscheidung (die wir in Nr. 35 machen mußten) zwischen den Zellsystemen  $\Sigma^n$  und beliebigen Zellsystemen  $Z^n$ , denen die Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{S}^n$  entspricht, fällt fort; demzufolge fallen desgleichen fort 2. die Unterscheidung (die wir ebenda wegen der vorigen Unterscheidung machen mußten) zwischen den durch Zellsysteme  $Z^n$  dargestellten Zellaufbauten und beliebigen Zellaufbauten einer  $\mathfrak{M}^n$ ; sowie 3. die Unterscheidung zwischen Verwandtschaftsklassen und Homöomorphieklassen. Anders gesagt:

*Insoweit der Nachweis des genannten (in voller Allgemeinheit hypothetischen) Satzes erbracht wird, wird durch ihn die Äquivalenz zwischen dem Homöomorphieproblem mehrdimensionaler kontinuierlicher Mannig-*

207) Mit der Frage, ob dieser Satz auch für den <sup>206)</sup> erwähnten engeren Verwandtschaftsbegriff gilt, beschäftigt sich E. Bilz, Math. Ztschr. 18 (1923), p. 1/41, und erledigt sie bejahend für  $n \leq 4$ .

faltigkeiten und dem rein kombinatorischen Problem der Verwandtschaft von Zellsystemen gesichert.

Die Vermutungen von der Richtigkeit des genannten Satzes stützen sich auf eine schon von *Riemann*<sup>208)</sup> im Falle  $n=2$  angestellte Überlegung: Sind die durch die Zellsysteme  $Z_1^n, Z_2^n$  definierten  $\mathfrak{M}_1^n, \mathfrak{M}_2^n$  homöomorph, so ergibt eine topologische Abbildung von  $\mathfrak{M}_2^n$  auf  $\mathfrak{M}_1^n$  in letzterer Mannigfaltigkeit ein Bild des Zellaufbaus  $Z_2^n$ , der sich dem Zellaufbau  $Z_1^n$  überlagert (bei *Riemann* die Überlagerung zweier Querschnittssysteme einer  $\mathfrak{M}^2$ ). Die Vorstellung einer aus der Durchdringungsfigur zu gewinnenden engeren Zellzerlegung der  $\mathfrak{M}_1^n$  führt zu der Annahme der Existenz eines Zellsystems  $Z'$ , das sowohl aus  $Z_1^n$  wie aus  $Z_2^n$  ableitbar ist (und damit zur Verwandtschaft von  $Z_1^n$  und  $Z_2^n$ ). Doch trägt diese heuristische Überlegung noch nicht den Komplikationen Rechnung, die die Durchdringungsfigur darbieten kann (Zerlegung einer Zelle des einen Systems durch die Zellwände des anderen in unendlich viele eventuell recht komplizierte Teile).<sup>209)</sup>

Eine Reihe von Untersuchungen, in denen die Zellteilungsvarianten eines Zellsystems unmittelbar als topologische Invarianten der durch das Zellsystem definierten Mannigfaltigkeit angesprochen werden, stützt sich (ausgesprochen oder stillschweigend) auf den angeführten hypothetischen Satz.<sup>210)</sup> Wäre dieser Satz bewiesen, so würden damit alle Zellteilungsvarianten der Zellsysteme als topologische Invarianten der durch sie definierten Mannigfaltigkeiten nachgewiesen sein.

Einen wichtigen Beitrag zu dieser Fragestellung hat *J. W. Alexander*<sup>211)</sup> geliefert. Er hat nämlich speziell für die (als Zellteilungsvarianten von Zellsystemen mit endlich vielen Zellen leicht nachweisbaren) *Betti'schen Zahlen*<sup>212)</sup>, sowie für die *Torsionszahlen*<sup>213)</sup> und gewisse andere von *O. Veblen* und *J. W. Alexander*<sup>214)</sup> eingeführte Zahlen bewiesen, daß diese Zahlen topologische Invarianten der durch die Zellsysteme defi-

208) *B. Riemann*, l. c. <sup>113)</sup>, p. 10.

209) Vgl. *H. Tietze*<sup>155)</sup>, p. 14, Anm.; *Weyl*, R. Fl., p. 71, Anm. 1. Im Falle  $n=2$  hat *Kérékjártó*, Vorl. 1, p. 134f. diese heuristische Überlegung zu einem strengen Beweis ausgestaltet.

210) Dem entspricht, daß innerhalb der kombinatorischen Analysis situs die Worte „Mannigfaltigkeit“ bzw. „homöomorph“ vielfach in der Bedeutung „Zellsystem“ bzw. „verwandt“ gebraucht wurden. Vgl. <sup>204)</sup>.

211) *J. W. Alexander*, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 324—330.

212) Vgl. III A B 3, p. 182.

213) Vgl. III A B 3, p. 184.

214) *O. Veblen-J. W. Alexander*, Ann. of math. 14 (1913), p. 169 und *J. W. Alexander*, l. c. <sup>211)</sup>, p. 301—324.

nierten Mannigfaltigkeiten sind.<sup>215</sup>) Das Verfahren bedient sich, wenn wir wie oben aus der Homöomorphie der durch  $Z_1^n$  und  $Z_2^n$  definierten Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}_1^n$ ,  $\mathfrak{M}_2^n$  eine Überlagerungsfigur zweier Zellaufbauten von  $\mathfrak{M}_1^n$  herleiten, — einer hinlänglich verfeinerten Zellteilung des einen Zellaufbaus, um mit Hilfe der Zellen des verfeinerten Zellaufbaus die Bilder der Zellen des anderen Zellaufbaus zu approximieren. In der Flächentopologie hat bereits *H. Weyl*<sup>216</sup>) mit derartigen Approximationen gearbeitet.

Es ist noch auf die Möglichkeit hinzuweisen, daß der genannte hypothetische Satz zwar für den hier (im Anschluß an *Dehn-Heegaard* und *Tietze*) auseinandergesetzten Verwandtschaftsbegriff *nicht* richtig ist<sup>217</sup>), jedoch richtig wäre bei einer geeignet abgeänderten umfassenderen Definition der Verwandtschaft kombinatorischer Zellsysteme.<sup>218</sup>)

**38. Neuere kombinatorische Theorien.** In Nr. 34—37 haben wir von demjenigen Aufbau einer kombinatorischen Topologie (und seinen Beziehungen zur kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Topologie) gesprochen, wie er von *Dehn* in Encykl. III AB 3<sup>219</sup>) entwickelt wurde. Andere Wege für den Aufbau einer kombinatorischen Topologie haben neuerdings *H. Weyl*<sup>220</sup>) und *M. H. A. Newman*<sup>221</sup>) angegeben.

215) Vgl. auch *J. W. Alexander*, Trans. Am. Math. Soc. 16 (1915), p. 148. Auf diese Arbeit beruft sich auch *O. Veblen* in seinem Buch (Cambr. Coll., p. III), um die behandelten Zellteilungsinvarianten als topologische Invarianten von kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten anzusprechen.

216) *H. Weyl*, R. Fl., p. 44 und Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 265 = R. Fl., 2. Aufl. 1923, p. 167.

217) Vgl. eine skeptische Bemerkung von *E. Steinitz*<sup>203</sup>), p. 32, Anm.

218) Vgl. hierzu zwei, die Fragen der Beziehung zwischen kombinatorischer und kontinuierlicher Analysis situs (für  $n = 3$ ) behandelnde Arbeiten von *R. Furch*, Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1924), p. 69 u. 237. Außerdem sei auf die Frage hingewiesen, die (wie Ref. von Herrn *E. Bilz* erfuhr) kürzlich Herr *H. Kneser* aufwarf (vgl. den inzwischen erschienenen Bericht *H. Kneser*, l. c.<sup>198b</sup>), p. 11, Anm. 2), ob jede reguläre Zellteilung (vgl. etwa *Veblen*, Cambr. Coll., p. 41, 86) auf Zell-Zweiteilungen zurückführbar sei (für jede Dimension). Insbesondere, wenn die Antwort auf diese Frage negativ lauten sollte, käme eine allgemeinere Verwandtschaftsdefinition in Betracht, die beispielsweise außer Zell-Zweiteilungen noch reguläre Zellteilungen zugrundelegt. (Nach einer neueren Mitteilung von Herrn *H. Kneser* an den zweiten Ref. ist die genannte Frage zu bejahen.)

219) Auf Grund unabhängiger Untersuchungen im Wesen gleichartig in der später veröffentlichten Arbeit von *H. Tietze*, Monatsh. Math. Phys. 19 (1908); vgl. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 29 (1920), p. 110.

220) *H. Weyl*, Revista hispano-americana, 1923. Zur Einführung behandelt *Weyl* (ebenda) in einer vorhergehenden Arbeit den Fall  $n = 1$  an Hand der Frage nach der Stromverteilung in einem beliebig verzweigten Leitungsnetz.

221) *M. H. A. Newman*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 611—626, 627—641. Berichtigende Ergänzungen ib. 30 (1927), p. 670. Siehe ferner Math. Ann. 99



So wie in dem Aufbau nach III AB 3 ist auch bei *Weyl* die Definition des  $n$ -dimensionalen Zellsystems eine rekursorische. Die Definition für  $n - 1$  als erledigt angesehen, werden zunächst gewisse Zellsysteme durch eine Reihe von Forderungen als sphärische eingeführt. Der Begriff der Zellteilung wird nicht wie in III AB 3 auf Zweiteilungen zurückgeführt, sondern es werden sogleich, gestützt auf den Begriff des sphärischen  $n$ -dimensionalen Zellsystems allgemeine Zellteilungen einer  $n$ -dimensionalen Zelle definiert. Auf dieser Grundlage läßt sich außer der Lehre von den *Bettischen* Zahlen und Torsionszahlen auch eine Charakteristikentheorie (für den Fall  $n = 2$  vgl. *Weyl*, l. c.<sup>169</sup>) entwickeln. Der Begriff der Indikatrix wird verallgemeinert.

Auch für die solcherart aufgebaute kombinatorische Topologie spielt eine noch unbewiesene Hypothese eine Rolle<sup>222</sup>) — ähnlich der in Nr. 37 für den Aufbau nach *Dehn* —, wenn man begründen will, daß den Klassen der als gleichwertig (verwandt) angesehenen Zellsysteme beim Übergang zu *kontinuierlichen* aus Zellen aufgebauten Mannigfaltigkeiten genau die Homöomorphieklassen dieser Mannigfaltigkeiten entsprechen. Während aber, solange die Hypothese in Nr. 37 noch unbewiesen ist, die Möglichkeit besteht, daß jeder Homöomorphieklasse mehrere der dort betrachteten Verwandtschaftsklassen entsprechen, so liegt bei dem *Weylschen* Aufbau der Fall umgekehrt so, daß die Möglichkeit noch nicht ausgeschlossen ist, daß eine seiner Verwandtschaftsklassen mehreren Homöomorphieklassen entspricht.

Neuerdings hat *M. H. A. Newman*<sup>221</sup>) einen von III AB 3 abweichenden Aufbau einer kombinatorischen Topologie angegeben, wobei als Zellen nur Simplexe verwendet werden. Der Übergang von einem Zellsystem zu einem als verwandt („equivalent“) erklärten geschieht bei *Newman* nicht mittels Zweiteilungen und aus solchen zusammengesetzten Zellunterteilungen, sondern durch gewisse Heftungs- und Ersetzungsprozesse, die als „moves“ bezeichnet werden. Analog wie für die kombinatorische Topologie nach III AB 3 gilt auch hier, daß je zwei verwandten Zellsystemen beim Übergang zu kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten allemal notwendig zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten entsprechen. Darüber hinaus zeigt *Newman*<sup>222a</sup>), daß es zu zwei in diesem Sinne verwandten Zellsystemen stets ein drittes aus jedem von ihnen durch Unterteilung erhältliches gibt.

(1928), p. 399; Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1401; Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), p. 339—346.

222) Vgl. hierzu l. c.<sup>220</sup>), § 6 (p. 29 der Arbeit).

222a) *M. H. A. Newman*, J. of London Math. Soc. 2 (1926), p. 56—64; vgl. auch ib. 1 (1926), p. 162—163.

Wichtige Teile der kombinatorischen Topologie (z. B. Sätze über *Betti*ische Zahlen u. a.) lassen sich nach *W. Mayer*<sup>222b)</sup> auf Grund einiger weniger Axiome entwickeln.

**39. Kombinatorische und  $n$ -dimensionale Topologie.** Wie schon in Nr. 34 gesagt, ist der Wert einer rein kombinatorischen Topologie in hohem Maße davon abhängig, daß in ihr zu Begriffen und Sätzen der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Topologie parallellaufende Begriffe und Sätze existieren. Speziell beschäftigten wir uns mit der Frage nach der Auffindung von rein kombinatorischen Begriffen, die zu den Begriffen „homöomorph“, „Mannigfaltigkeit“ und „sphärische Mannigfaltigkeit“ in diesem Sinne parallellaufen, und wir haben gesehen, daß man dabei z. Z. allgemein (für jedes  $n$ ) nicht ohne Hypothese auskommt. Schon für das fundamentale Homöomorphieproblem der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist also ein glattes Hinüberschieben auf ein reines Problem kombinatorischer Topologie z. Z. nicht gelungen. Andere Probleme der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Topologie (man denke etwa an Fixpunktprobleme) sehen so aus, daß die Aufstellung paralleler kombinatorisch-topologischer Probleme überhaupt nicht oder nur sehr gekünstelt möglich erscheint. Diese Umstände haben es bewirkt, daß in einem großen Teil der neuesten topologischen Produktion, und darunter gerade in Arbeiten von besonderer Wichtigkeit, die kombinatorische Topologie nicht selbstständig auftritt, sondern in fortgesetzter Verbindung mit kontinuierlich-topologischen Untersuchungen. Nicht nur daß die kombinatorischen Zellsysteme sogleich zu dem Zwecke eingeführt werden, um den Zellaufbau kontinuierlicher  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten zu beschreiben<sup>222c)</sup>, auch alle weiteren kombinatorisch-topologischen Entwicklungen (z. B. über Homologien, Zusammenhangszahlen u. dgl.) werden sogleich benützt, um Sätze der kontinuierlichen  $n$ -dimensionalen Topologie herzuleiten. Auf diese in vollem Fluß befindlichen Entwicklungen soll hier nicht näher eingegangen<sup>222d)</sup> und nur die Gelegenheit benützt werden, einige Literaturangaben über neuere topo-

222b) *Walther Mayer*, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 1—42, 219—258.

222c) Man vgl. hierzu die Darstellung bei *Veblen*, *Cambr. Coll.*, oder *J. W. Alexander*, *Trans. Am. Math. Soc.* 28 (1926), p. 301.

222d) Als Beispiele von Untersuchungen, die nach dieser Methode — von *H. Kneser*, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* 34 (1925), p. 12 als „methode mixte“ bezeichnet — geführt werden, seien die Arbeiten von *J. W. Alexander*, l. c. <sup>180)</sup> (über seinen Dualitätssatz) und <sup>222c)</sup> angeführt. In der letzteren Arbeit gibt *J. W. Alexander* eine systematische Darstellung der Grundzüge dieser Theorie (sie wird dort als „combinatorial analysis situs“ bezeichnet, was aber nicht der Bezeichnung „kombinatorische Topologie“ in diesem Artikel entspricht; vgl. <sup>198a<sup>c</sup>)</sup>).

logische Arbeiten beizufügen, und zwar speziell auch über die in Artikel III AB 3 referierten Gegenstände<sup>223</sup>) und anschließende Fragen. (Daß die Verteilung topologischer Arbeiten auf kombinatorische und kontinuierliche  $n$ -dimensionale Topologie nicht immer möglich ist, wurde bereits erwähnt; vgl. 1)). Hierher gehören Arbeiten über topologische Invarianten<sup>224</sup>), spezielle Darstellungen und Normalformen

223) Von der III AB 3, Anm. 17 und 72 zitierten, wenig zugänglichen Diss. von *P. Heegard* erschien inzwischen eine französische Übersetzung in *Bull. Soc. Math. de France* 44 (1916), p. 161.

Über die *Poincaréschen* Homologien s. *G. Dumas-J. Chuard*, *Paris C. R.* 171 (1920<sup>a</sup>), p. 1113; *J. Chuard*, *Palermo Rend.* 46 (1922), p. 185.

224) Die „*Listing-Dycksche* Charakteristik“ behandelt *H. Brunn*, *Arch. Math. Phys.* (3) 22 (1914), p. 43 (vgl. auch *L. Münch*, *Chr. Huygens [Internat. Math. Tijdschrift]* 4 (1925/26), p. 9); es ist das, bis auf das Vorzeichen, die im verallgemeinerten *Eulerschen* Polyedersatz (III AB 3, p. 182) auftretende, aus den Zahlen  $\alpha_\nu$  (= Anzahl der  $\nu$ -dimensionalen Zellen eines Zellsystems) gebildete topologische Invariante  $\Sigma(-1)^\nu \alpha_\nu$ , die dementsprechend auch als „*Eulersche* Charakteristik“ (so bei *H. Hopf*, *Gött. Nachr.* 1925, p. 131, *Math. Ann.* 96 (1926), p. 226) oder als „*Eulersche* topologische Invariante“ (l. c. <sup>123</sup>), p. 27 [63]) bezeichnet wurde. (Wegen ihrer Beziehungen zur *Kroneckerschen* Charakteristik eines Funktionensystems sowie zur *Curvatura integra* vgl. *W. Dyck* <sup>136</sup>), *H. Hopf*, l. c. und *Math. Ann.* 95 (1925), p. 340—367, sowie die dort p. 341 und von *Dyck* in *Sächs. Ber.* 1885, p. 315 genannte ältere Literatur.) Geschlossene Kurven in der Ebene bzw. auf einer Kugel (z. T. im Anschluß an *Gauß*) behandeln *G. Landsberg*, *Math. Ann.* 70 (1911), p. 563, *J. v. Sz. Nagy*, *Math. Ztschr.* 26 (1927), p. 579. Zum *Poincaréschen* Dualitätssatz für die *Bettischen* Zahlen vgl. *L. Vietoris*, *Monatsh. Math. Phys.* 35 (1928), p. 165; *E. R. v. Kampen*, *Diss. Leiden* 1929. Sätze über Homologiegruppen bzw. *Bettische* Zahlen entwickeln *W. Mayer*, l. c. <sup>222b</sup>) und *L. Vietoris* in einer demnächst in *Monatsh. Math. Phys.* erscheinenden Arbeit. Über die Herleitbarkeit der ersten *Bettischen* Zahl und der *Torsionszahlen* niederster Ordnung aus der *Poincaréschen* Fundamentalgruppe siehe *H. Tietze* <sup>153</sup>), p. 77. Weitgehende Untersuchungen über unendliche diskrete Gruppen im Zusammenhang mit topologischen Problemen, speziell über das topologische Gruppenbild und über Kurven auf Flächen gab *M. Dehn*, l. c. <sup>227</sup>) sowie *Math. Ann.* 72 (1912), p. 413; s. ferner *H. Gieseking* <sup>177</sup>); *J. Nielsen*, *Acta math.*, l. c. <sup>174</sup>); *Hopf*, *Math. Ann.* 95 (1925), p. 313; vgl. auch opalographierte Vorträge (Breslau, *Math. Kolloquium*) von *M. Dehn*, (Dez. 1920, Febr. 1922) und *J. Nielsen* (März 1921) über Gruppentheorie und Topologie; *Dehn*, *Leipziger Vortrag* [s. *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* 31 (1922), II. Teil, p. 97]; *O. Veblen*, *Bull. Am. Math. Soc.* 30 (1924), p. 405. Über den Zusammenhang der Fundamentalgruppe einer  $\mathfrak{M}^n$  mit unverzweigten Überlagerungen s. *K. Reidemeister*, *Gött. Nachr.* 1928, p. 69—76; vgl. auch *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* 38 (1929), II. Teil, p. 71—72. Über verschiedene, den *Bettischen* Zahlen verwandte (aus ihnen und den *Torsionszahlen* herleitbare) Invarianten s. *H. Tietze*, l. c. <sup>153</sup>), p. 49; *J. W. Alexander-O. Veblen*, *Ann. of math.* (2) 14 (1913), p. 163; *J. W. Alexander*, *Trans. Am. Math. Soc.* 23 (1922), p. 333, 28 (1926), p. 301. Über Flächenkomplexe in einer  $\mathfrak{M}^n$  s. *M. Dehn*, *Math. Ann.* 69 (1910), p. 147; über „*Poincarésche* Räume“ *M. Dehn*, *ib.* p. 159; speziell

von Mannigfaltigkeiten<sup>224a)</sup> <sup>224b)</sup>, Vierfarbensatz und Verwandtes<sup>225)</sup>, Abbildungen von Mannigfaltigkeiten auf sich<sup>226)</sup>, zweiseitige oder einseitige

über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten s. *M. Dehn*, Math. Ann. 69 (1910), p. 137; *H. Kneser*, Gött. Nachr. 1925, p. 128. Nicht orientierbare (vgl. <sup>168)</sup>  $\mathfrak{M}^n$  bei *D. König*, Arch. Math. Phys. (3) 19 (1912), p. 214, Camb. Congr. 1912, t. 2 (1913), p. 129, Acta litt. ac scient. Szeged 2 (1924), p. 34. Topologische Invarianten von Produktmannigfaltigkeiten (d. h. Produkträume [Nr. 20] von Mannigfaltigkeiten) untersucht *H. Künneth*, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. 1922, p. 213, Math. Ann. 90 (1923), p. 65, 91 (1924), p. 125, Sitz.-Ber. Erlang. Phys. med. Soc. 54/55 (1922/23), p. 190. *J. W. Alexander*, Trans. Am. Math. Soc. 20 (1919), p. 339 gibt zwei nicht homöomorphe orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit gleicher Fundamentalgruppe, womit zugleich eine von *H. Tietze*, l. c. <sup>169)</sup>, p. 116 für eben diese Mannigfaltigkeiten aufgeworfene Frage beantwortet wird.

Eine Reihe von Untersuchungen betrifft die Durchsetzungen zweier geschlossener orientierter Linien auf einer Fläche  $\mathfrak{M}^2$  bzw. die Durchsetzungen von  $n$  Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n - 1$  in einer  $\mathfrak{M}^n$ ; ferner die Durchsetzungen einer  $k$ - und einer  $(n - k)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in einer  $\mathfrak{M}^n$ , bzw. von  $r$  Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $k_1, k_2, \dots, k_r$  in einer  $\mathfrak{M}^n$  (wobei  $k_1 + \dots + k_r = n$ , oder auch  $> n$ ). Diese Untersuchungen gehen zurück auf die Arbeiten von *Kronecker* über die Charakteristik eines Funktionensystems (Monatsber. Akad. Berlin, 1869, p. 159, 688; 1878, p. 145 = Werke I, p. 175, 213, II, p. 71) und *Poincaré*, J. de math. (4) 1 (1885), p. 167, 2 (1886), p. 151. Diese Betrachtungen führen auf die *Eulersche* Charakteristik der  $\mathfrak{M}^2$  (s. o.) bzw. auf Invarianten der  $\mathfrak{M}^n$ ; vgl. für  $n = 2$  *H. Weyl*<sup>169)</sup>, für  $n$  beliebig *H. Weyl*, Rev. de Mat. Hisp. Amer. 1923 und *O. Veblen*, Trans. Am. Math. Soc. 25 (1923), p. 540 (Ausdehnung auf nicht-orientierte Mannigfaltigkeiten), ferner *G. de Rahm*, Paris C. R. 186 (1928<sup>1)</sup>, p. 670—672; vgl. auch *S. Lefschetz*, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 431, Anm. †. In dieser Richtung weitergehende Untersuchungen, bei denen auch Anregungen von *O. Veblen* mitgewirkt haben (vgl. eine Bemerkung von *J. W. Alexander*, Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 103) ergaben weitere wichtige neue topologische Invarianten, wobei auch Durchsetzungen allgemeiner Komplexe in einer  $\mathfrak{M}^n$  betrachtet werden; *J. W. Alexander*, Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 99, 101, 493; 11 (1925), p. 143; *S. Lefschetz*, ib. 11 (1925), p. 287, l. c. <sup>177)</sup>, Ann. of math. 29 (1928), p. 232—254.

224a) Vgl. außer den in Nr. 32 zitierten Arbeiten: *H. R. Brahana*, Ann. of math. (2) 23 (1922), p. 144. Die Darstellbarkeit jeder geschlossenen orientierbaren  $\mathfrak{M}^n$  als endlichblättriger *Riemannscher* Raum über dem sphärischen  $\mathfrak{S}^n$  beweist *J. W. Alexander*, Bull. Am. Math. Soc. 26 (1920), p. 370. Vgl. auch *H. Hotelling*, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), p. 479. In einer wenig bekannten älteren Arbeit, British Assoc. Report 1884 (Montreal) bespricht *W. Dyck* ein Erzeugungsverfahren gewisser spezieller dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (vgl. dazu auch *H. Tietze*<sup>165)</sup>, § 17).

224b) Über nicht-orientierbare, in gewissem Sinne singularitätenfreie Flächen im  $\mathfrak{R}^3$  siehe außer *W. Boy*, l. c. III AB 3, Anm. 153: *F. Schilling*, Math. Ann. 92 (1924), p. 69—79, *J. A. de Séguier*, Bull. Soc. Math. de Fr. 55 (1927), p. 80—88.

225) *G. D. Birkhoff*, Ann. of math. (2) 14 (1912—13), p. 42, Amer. J. of math. 35 (1913), p. 115; *O. Veblen*, ib. p. 88; *P. Franklin*, Amer. J. of math. 44 (1922), p. 225; *H. R. Brahana*, Bull. Am. Math. Soc. 29 (1923), p. 198; *J. Chuard*, L'ens.

Lagerung einer  $\mathfrak{M}^n$  in eine  $\mathfrak{M}^{n+p}$  <sup>226a</sup>), Knoten im  $\mathfrak{R}^3$  <sup>227</sup>), Liniensysteme (Graphe) <sup>227a</sup>), Zerlegungssätze <sup>227b</sup>).

math. 22 (1923), p. 373; *C. N. Reynolds*, Ann. of math. (2) 28 (1926/27), p. 1—5, 477—492 (mit Bibliographie), C. R. Assoc. Franç. p. Avanc. des Sciences (1926), p. 88—91, Proceed. West Virginia Acad. of Sc. 1 (1927), p. 91. Vgl. auch *D. König*, l. c. <sup>227a</sup>), p. 456 und zwei dort (p. 457, Anm.) zitierte Arbeiten in *Mathematikai és természeti Andományi Értesítő* 29 (1911), p. 112, 345; *F. Levi*, Math. Ztschr., l. c. <sup>227a</sup>); *A. Errera*, Thèse Bruxelles (Paris, Gauthier-Villars, 1921) (mit Bibliographie), L'ens. Math. 23 (1923), p. 95—96. Paris C. R. 177 (1923), p. 489—491, C. R. de l'Assoc. Franç. p. l'Avanc. des Sciences (1924), p. 95—96, Congress Toronto, Abstracts (1924), p. 57, Bull. Soc. Math. de France 53 (1925), p. 42—55; *H. Lebesgue* <sup>198b</sup>); *T. Kubota*, Tôhoku Math. J. 24 (1925), p. 273—276; *H. R. Brahana*—*A. B. Coble*, Amer. J. 48 (1926), p. 1; *H. R. Brahana*, ib. p. 225; *A. Sainte Laguë*, Paris C. R. 182 (1926), p. 747. Weitere Literatur bei *A. Errera* und *C. N. Reynolds*, l. c.

226) Vgl. <sup>174</sup>) bis <sup>178</sup>), ferner *S. Lefschetz*, Proc. Nat. Acad. 9 (1923), p. 90, 11 (1925), p. 290, 12 (1926), p. 737. Hiermit verwandt sind Untersuchungen über mehrdeutige Abbildungen von Mannigfaltigkeiten aufeinander bzw. über mehrblättrige Überlagerungsräume (-flächen). Vgl. <sup>177</sup>), ferner *L. E. J. Brouwer*, Paris C. R. 168 (1919), p. 677.

226a) Vgl. *W. Dyck*, *E. Steinitz*, l. c. <sup>168</sup>), *W. Ephrämowitsch*, Math. Ztschr. 29 (1929), p. 55—59.

227) Vgl. <sup>182</sup>), ferner *H. Tietze* <sup>163</sup>), § 18 und den dortigen Hinweis auf *W. Wirtinger*; *M. Dehn*, Math. Ann. 69 (1910), p. 137, 71 (1911), p. 116, 75 (1914), p. 1; *O. Schreier*, Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1927), p. 167—169; *E. Artin*, ib. 4 (1926), p. 47—72; *K. Reidemeister*, ib. 5 (1926), p. 7, 24, 33, 6 (1928), p. 46, Math. Ztschr. 29 (1929), p. 713—729; *J. W. Alexander*—*G. B. Briggs*, Ann. of math. (2) 28 (1927), p. 562—586; *J. W. Alexander*, Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), p. 275—306. Spezielle Entwicklungen im Hinblick auf funktionentheoretische Anwendungen bei *K. Brauner*, Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), p. 1. An *O. Simonys* Untersuchungen (III A B 3, p. 215) knüpft an: *Ernst Müller*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 113. An dieser Stelle sei auch auf die ältere Arbeit: *F. Dingeldey*, Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde, Leipzig 1890, hingewiesen.

227a) *D. König*, Math. Ann. 77 (1916), p. 453, Acta litt. sc. Szeged 2 (1924), p. 32 und l. c. <sup>226</sup>); *D. König*—*St. Valkó*, Math. Ann. 95 (1925), p. 135 (vgl. hierzu *B. L. v. d. Waerden*, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), p. 185—188); *H. R. Brahana*, Ann. of math. (2) 19 (1917), p. 59; *P. Heegaard*, Beretn. 3. Skand. Mat. Kongr. 1913, Nyt Tidsskr. Mat. 29 (1919), p. 81; *F. Levi*, Chr. Huygens (Internat. Math. Tijdschrift) 2 (1922/23), p. 307; *H. Weyl* <sup>220</sup>); *A. Sainte Laguë*, Paris C. R. 176 (1923), p. 1202; *Sainte Laguë*, Réseaux (mit vielen Literaturangaben); *O. Frink*, Ann. of math. (2) 27 (1926), p. 491; *F. Fitting*, Nieuw Archief (2) 13 (1921), p. 348—360. Vgl. auch *F. Levi*, Math. Ztschr. 16 (1923), p. 148, 22 (1925), p. 45. Sei hier auch noch die Arbeit von *G. Kirchhoff*, Poggendorf Ann. d. Phys. 72 (1847), p. 497 über lineare Verteilung galvanischer Ströme genannt, nach *Veblen*, Cambr. Coll., p. 25 wohl die älteste wichtige Arbeit über Graphe.

227b) *H. Kneser*, Amsterdam Akad. Proc. 27 (1924), p. 601; ein spezieller Fall wurde vorher von *E. Biltz*, erledigt (vgl. l. c. <sup>207</sup>), p. 19); vgl. auch *H. Kneser*, Gött. Nachr. 1925, p. 128. Im übrigen vgl. <sup>179</sup>) <sup>180</sup>).

**40. Anwendung der kombinatorischen auf die allgemeine Topologie.** Jeder kompakte metrische Raum  $\mathfrak{R}$  ist für beliebiges  $\varepsilon > 0$  Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen<sup>227c)</sup> Teilmengen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_s$ , deren Durchmesser  $< \varepsilon$  sind. Wählt man in jedem dieser Teile  $\mathfrak{A}_i$  einen Punkt  $P_i$ , so liegt in jeder Umgebung  $\varepsilon$  jedes Punktes  $X$  von  $\mathfrak{R}$  mindestens ein Punkt  $P_i$ . Der Mengenabstand (Nr. 20) zwischen  $\mathfrak{R}$  und der Menge  $\mathfrak{P}$  aller  $P_i$  ist  $< \varepsilon$ . Diese Aussage läßt sich auf folgende Weise noch erheblich verschärfen. Wir verstehen unter einem (abstrakten)  $n$ -dimensionalen Simplex (im Gegensatz zu den gewöhnlich betrachteten geometrischen Simplexen) jede Menge  $\mathfrak{S}$  von  $(n+1)$  Punkten. Die in  $\mathfrak{S}$  enthaltenen Punkte- $(k+1)$ -tupel mögen für  $k = 0, 1, \dots, n$  die  $k$ -dimensionalen Seiten von  $\mathfrak{S}$  heißen. Unter einem simplizialen Komplex verstehen wir eine Gesamtheit  $\mathfrak{K}$  von Simplexen (sie heißen die „Seiten“ von  $\mathfrak{K}$ ), in welcher mit jedem Simplex  $\mathfrak{S}$  auch alle Seiten von  $\mathfrak{S}$  vorkommen. Auf Grund dieser Definition läßt sich die ganze kombinatorische Topologie der simplizialen Komplexe (die nunmehr aus abstrakten Simplexen bestehen) ebenso entwickeln, wie mit Hilfe der geometrischen Simplexe.<sup>228)</sup> Wir sagen, ein (abstrakter) Komplex liege in einer Menge  $\mathfrak{M}$ , wenn seine Ecken in  $\mathfrak{M}$  liegen. Aus  $\mathfrak{P}$  können wir nun einen in  $\mathfrak{R}$  liegenden Komplex  $\mathfrak{K}$  machen, indem wir festsetzen: Der Simplex  $[P_{i_0} P_{i_1} \dots P_{i_k}]$  sei dann und nur dann Seite von  $\mathfrak{K}$ , wenn der Durchschnitt der zugehörigen Mengen  $\mathfrak{A}_{i_0} \mathfrak{A}_{i_1} \dots \mathfrak{A}_{i_k}$  nicht leer ist. Damit ist jede Seite jeder Seite von  $\mathfrak{K}$  von selbst wieder eine Seite von  $\mathfrak{K}$ , also  $\mathfrak{K}$  tatsächlich ein Komplex. Nun können wir sagen, der Komplex  $\mathfrak{K}$  approximiere  $\mathfrak{R}$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$ , wenn wir folgende Definition zugrunde legen: Ein Komplex  $\mathfrak{K}$  approximiert eine Menge  $\mathfrak{M}$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$ , wenn 1) jeder Ecke  $P_i$  von  $\mathfrak{K}$  ein in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossener Teil  $\mathfrak{A}_i$  zugeordnet werden kann, dessen sämtliche Punkte von  $P_i$  einen Abstand  $< \varepsilon$  haben, wenn 2)  $\mathfrak{M}$  die Vereinigung dieser  $\mathfrak{A}_i$  ist und wenn 3) der Durchschnitt  $\mathfrak{A}_{i_0} \mathfrak{A}_{i_1} \dots \mathfrak{A}_{i_k}$  dann und nur dann nicht leer ist, sobald  $[P_{i_0} P_{i_1} \dots P_{i_k}]$  eine Seite von  $\mathfrak{K}$  ist.<sup>229)</sup> Der in Nr. 41

227 c) Diese Aussage bleibt richtig, wenn man das Wort „abgeschlossenen“ durch „offenen“ ersetzt.

228) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 489—511, 101 (1929), p. 452—456; *L. Vietoris*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1008—1013; Math. Ann. 97 (1927), p. 454—472. Vgl. auch den Begriff des „ $n$ -dimensionalen Gerüsts“ bei *Alexandroff*, Math. Ann. 94 (1925), p. 296, der sich im wesentlichen mit unserem abstrakten  $n$ -dimensionalen Simplex deckt. Die  $n$ -dimensionalen Simplexe im Sinn von *Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 490, 495 sind  $(n+1)$ -tupel von Elementen einer Hilfsmenge, insbesondere von natürlichen Zahlen.

229) Die approximierenden Komplexe *Alexandroff's*, l. c., bestehen aus seinen Simplexen, d. i. Zahlen- $(n+1)$ -tupeln. Er definiert durch eine unendliche Folge

erwähnte Satz von der  $(\varepsilon, n + 1)$ -Überdeckbarkeit der  $n$ -dimensionalen Mengen nimmt dann folgende Form an: Eine kompakte abgeschlossene Menge ist dann und nur dann  $n$ -dimensional, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$   $n$ -dimensionale, nicht aber zu jedem  $\varepsilon > 0$   $(n - 1)$ -dimensionale,  $\mathfrak{R}$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$  approximierende Komplexe gibt. In ähnlicher Weise spiegeln sich auch andere topologische Eigenschaften von  $\mathfrak{R}$  — wie höherer Zusammenhang (*Betti'sche Zahlen*), Zusammenhang im Kleinen — in kombinatorischen Eigenschaften der approximierenden Komplexe, bzw. der Folgen approximierender Komplexe.<sup>230)</sup>

Die Anwendung der kombinatorischen Topologie auf Punktmenge läßt sich aber auf eine noch allgemeinere Art durchführen. Das einfachste und älteste Beispiel einer solchen Anwendung ist *Cantors* Zusammenhangsbegriff. Eine Menge heißt nach *Cantor* zusammenhängend zwischen  $A$  und  $B$ , wenn sie  $A$  und  $B$  enthält und für jedes  $\varepsilon > 0$  auch eine  $\varepsilon$ -Kette von endlich vielen Punkten von  $A$  nach  $B$ , anders ausgedrückt, wenn sie zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen zwischen  $A$  und  $B$  zusammenhängenden Komplex enthält, dessen Kanten (= eindimensionale Seiten) eine Länge  $< \varepsilon$  haben. Ganz analog hat *L. E. J. Brouwer*<sup>237)</sup> den einfachen Zusammenhang einer Menge  $\mathfrak{M}$  definiert. Er versteht unter einer „ $\varepsilon$ -Abänderung“ in  $\mathfrak{M}$  einer geschlossenen  $\varepsilon$ -Kette  $\mathfrak{R} = A_0 A_1 \dots A_{i-1} A_0$  von Punkten aus  $\mathfrak{M}$  die Zwischenschaltung eines Punktes  $A'_i$  von  $\mathfrak{M}$  zwischen zwei aufeinanderfolgende Punkte  $A_i, A_{i+1}$  der Kette, wenn dadurch aus  $\mathfrak{R}$  eine  $\varepsilon$ -Kette wird, desgl. die Umkehrung dieser Operation. *Brouwer* nennt dann  $\mathfrak{M}$  einfach zusammenhängend<sup>230a)</sup>, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so daß jede geschlossene in  $\mathfrak{M}$  liegende  $\delta$ -Kette durch  $\varepsilon$ -Abänderungen in  $\mathfrak{M}$  auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Im Anschluß an *Brouwer* schreiben wir  $\mathfrak{M}$  eine  $h$ -fache Basis der Zyklosis zu, wenn  $h$  die kleinste<sup>230b)</sup> ganze

solcher Komplexe, bzw. durch Auswahlfolgen von Seiten derselben einen topologischen Raum  $\mathfrak{W}$ , welcher mit einem vorgegebenen Raum, dem obigen  $\mathfrak{R}$ , homöomorph ist. Daher rechtfertigen diese Komplexe den Namen approximierend zunächst in bezug auf  $\mathfrak{W}$  und dann auf  $\mathfrak{R}$ . — Approximationen in weitergehendem Ausmaß nicht durch abstrakte, sondern durch geometrische Komplexe behandelt *P. Alexandroff*, Paris C. R. 183 (1926), p. 640/2.

230) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 94 (1925), p. 296—308, 96 (1926), p. 489—511, 512—554, 98 (1928), p. 617—636, 101 (1929), p. 452—456, Paris C. R. 184 (1927), p. 317—319, 425—427, 575—579, 186 (1928<sup>1</sup>), p. 1340—1342, 1696—1698, Ann. of math. (2) 30 (1928), p. 101—187, Fund. math. 13 (1929), p. 34—41; *S. Lefschetz*, Proc. Nat. Acad. 13 (1927), p. 614, 805, Ann. of math. 29 (1928), p. 232—254; *Felix Frankl*<sup>180)</sup>, p. 691.

230a) Über den Ausdruck „einfach zusammenhängend“ vgl. <sup>167)</sup>.

230b) Wir weichen insofern von *Brouwers* Ausdrucksweise, l. c. <sup>287)</sup> ab, als

Zahl ist, für welche es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  und  $h$  von einem gemeinsamen Anfangspunkt  $O$  ausgehende und nach  $O$  zurückkehrende in  $\mathfrak{M}$  liegende  $\delta$ -Ketten  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_h$  gibt, so daß jede in  $\mathfrak{M}$  von  $O$  nach  $O$  laufende  $\delta$ -Kette durch  $\varepsilon$ -Abänderungen in eine Kette<sup>230c)</sup>  $\varkappa_1 \mathfrak{R}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{R}_2 + \dots + \varkappa_h \mathfrak{R}_h$  übergeführt werden kann. Diese Zahl  $h$  ist, wenn  $\mathfrak{M}$  kompakt und abgeschlossen ist, eine topologische Invariante. Damit ist ein Merkmal der *Poincaréschen* Fundamentalgruppe für kompakte abgeschlossene Mengen definiert. In analoger Weise gelingt eine Definition beliebig hoher *Bettischer Zahlen*<sup>231)</sup> für kompakte abgeschlossene Mengen. Man kann aber auch eine Definition der Fundamentalgruppe sowie der Homologiegruppen beliebiger Dimension (Gruppe der Addition von  $n$ -dimensionalen Zykeln im Sinne von *Poincaré*) auf ähnlichem Wege aus der kombinatorischen Topologie in die Mengenlehre übertragen, indem man als Elemente dieser Gruppen in geeigneter Weise Fundamentalfolgen von Ketten bzw.  $n$ -dimensionalen Zykeln definiert.<sup>232)</sup> Diese Gruppen sind für kompakte abgeschlossene Mengen topologische Invarianten; d. h. homöomorphe kompakte abgeschlossene Mengen haben (im Sinn der abstrakten Gruppentheorie) dieselben Fundamentalgruppen und Homologiegruppen.<sup>233) 233a)</sup>

*Brouwer* auch dann  $\mathfrak{M}$  eine  $h$ -fache Basis der Zyklosis zuschreibt, wenn  $h$  nicht die kleinste, sondern irgendeine derartige Zahl ist.

230 c)  $\varkappa_1, \dots, \varkappa_h$  bedeuten ganze Zahlen. Ist  $\mathfrak{R}_1 = A_0 A_1 \dots A_{l-1} A_0$ ,  $\mathfrak{R}_2 = A_0 B_1 \dots B_{m-1} A_0$ , so soll sein: —  $\mathfrak{R}_1 = A_0 A_{l-1} \dots A_1 A_0$ ,  $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = A_0 A_1 \dots A_{l-1} A_0 B_1 \dots B_{m-1} A_0$ ,  $2\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_1$  usw.

231) Auf eine mündliche Anregung von *L. E. J. Brouwer* bei *L. Vietoris*, *Math. Ann.* 97 (1927), p. 464.

232) *L. Vietoris*, *Proc. Amsterdam* 29 (1926), p. 1008—1013; *Math. Ann.* 97 (1927), p. 454—472; 101 (1929), p. 219—225; 102 (1929), p. 176; *S. Lefschetz*<sup>230)</sup>; *P. Alexandroff*<sup>230)</sup>.

233) Diese Invarianz ist — wie die des *Cantorschen* Zusammenhangs und der *Brouwerschen* Basis der Zyklosis — eine fast triviale Folge der gleichmäßigen Stetigkeit der topologischen Abbildungen kompakter abgeschlossener Mengen. *Vietoris*, *Math. Ann.* 97 (1927), p. 465—472, beweist die Invarianz dieser Gruppen gegenüber einer viel allgemeineren Klasse von mehr-mehrdeutigen stetigen Abbildungen.

233 a) Über den hieraus sich ergebenden Beweis dafür, daß die entsprechenden kombinatorisch definierten Gruppen kontinuierlicher  $n$ -dimensionaler Komplexe topologisch invariant sind, vgl. *L. Vietoris*, *Math. Ann.* 101, p. 220. Über den ersten Beweis hierfür vgl. *J. W. Alexander*, l. c.<sup>211)</sup>, p. 324—330.



## V. Der Dimensionsbegriff.

41. Allgemeines.<sup>233b)</sup> Im Abschnitt I, wo wir Punktmenge im reellen  $n$ -dimensionalen Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$  betrachteten, bedeutete „Dimension“ nichts anderes als die Anzahl der Koordinaten eines Punktes. Im Abschnitt III haben wir allgemeinere topologische Räume betrachtet — die homogenen  $n$ -dimensionalen Gebilde — von denen nur verlangt war, daß sie sich in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte so verhalten, wie sich der  $\mathbb{R}^n$  (oder eine offene Menge des  $\mathbb{R}^n$ ) in der Umgebung eines jeden Punktes verhält; und das gleiche forderten wir im besonderen von den homogenen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}^n$  (Nr. 26).<sup>233c)</sup> Auch da bedeutete die Dimensionszahl  $n$  des Gebildes bzw. der  $\mathcal{M}^n$  zunächst eine Anzahl von Koordinaten, nämlich derjenigen, die zur Kennzeichnung des Umgebungscharakters verwendet werden, wobei der Satz von der Invarianz der Dimension und des  $n$ -dimensionalen Gebiets (Nr. 31) zeigt, daß zu verschiedenen Werten des  $n$  stets topologisch verschiedene Umgebungstypen gehören.<sup>233d)</sup> Die fragliche Anzahl  $n$  war damit als topologische Invariante erkannt.

Mit der Aufgabe, das Wesen der Dimension mit Hilfe der Punktmengelehre zu erfassen, hat sich schon *G. Cantor* beschäftigt. Er schuf beim Suchen nach einer Lösung die Lehre von den Mächtigkeiten<sup>234)</sup>, beseitigte aber zugleich das naheliegende Vorurteil, daß die Dimension eine Art Elementenzahl sei, indem er zeigte, daß die cartesischen Räume  $\mathbb{R}^n$  beliebig hoher Dimensionen alle dieselbe Mächtigkeit  $c$  haben.

Einen anderen Versuch zur Lösung des Problems einer mengen-

233b) Für die in Nr. 41, 42 behandelten Gegenstände sei noch besonders hingewiesen auf die zusammenfassenden Darstellungen von *P. Urysohn*, *Fund. math.* 7 (1925), p. 30—137, 8 (1926), p. 225—359, *Verhandelingen Amsterdam*, I. sect. 13 (1928), Nr. 4; *K. Menger*, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.* 35 (1926), p. 113—150; *W. Hurewicz*, *Math. Ann.* 98 (1927), p. 64—88; *P. Alexandroff*, *Math. Ann.* 98 (1927), p. 31—63 und *Menger*, *Dim.* — Zur Geschichte der Entstehung der Theorie s. außerdem *K. Menger*, *Proc. Amsterdam* 29 (1926), p. 1122—1124; *L. E. J. Brouwer*, *ib.* 31 (1928), p. 953—957; *K. Menger*, *Monatsh. Math. Phys.* 36 (1929), p. 411—432.

233c) Ebenso von den berandeten Mannigfaltigkeiten (Nr. 30) in der Umgebung eines jeden „mittleren Punktes“.

233d) Für die aus diskreten Elementen und Zuordnungen bestehenden kombinatorischen Zellensysteme des Abschnittes IV bedeutet das Wort „Dimension“ überhaupt nur eine Stufenzahl (vgl. <sup>201)</sup>), die im folgenden außer Betracht bleibt.

234) *G. Cantor*, *J. f. Math.* 84 (1877), p. 242—258.

theoretischen Kennzeichnung der Dimensionszahlen hat *M. Fréchet*<sup>234a)</sup> gemacht. Bereits in II C 9<sup>234a)</sup> ist über diese Untersuchungen berichtet worden, die übrigens in anderer Richtung liegen als die im folgenden nach *K. Menger* und *P. Urysohn* dargestellte Dimensionstheorie. Hier sei nur hervorgehoben, daß die *Fréchetsche* Theorie miteinander unvergleichbare Dimensionstypen kennt und andererseits auch gebrochene Dimensionszahlen einführt, während im folgenden jeder Menge eine ganze Zahl  $\geq -1$  oder  $\infty$  als Dimensionszahl zugewiesen wird.<sup>234a)</sup><sup>234b)</sup>

*Poincaré*<sup>235)</sup>, dem es vor allem um eine Analyse der  $n$ -Dimensionalität des  $\mathfrak{R}^n$  zu tun war, schlug auf Grund der Tatsache, daß die Dimension einer Menge um 1 größer ist, als die gewisser Begrenzungen in ihr, eine rekurrente Definition vor, welche durch *Brouwer*<sup>236)</sup> die strenge Fassung erhielt. Eine eingehende Untersuchung der Punktmengen<sup>236a)</sup> hinsichtlich ihrer Dimension kam aber erst

234a) *M. Fréchet*, Math. Ann. 68 (1910), p. 145—168; vgl. II C 9, p. 952. *Fréchets* Dimensionsdefinition ist der *Cantorschen* Mächtigkeitsdefinition analog. Gewisse gegen *Fréchets* Definition gemachte Einwände (daß z. B. ihr zufolge eine Strecke eine kleinere Dimension erhält wie eine Kreislinie; oder daß die Dimension einer Kugelfläche und einer Torusfläche miteinander nicht vergleichbar sind; vgl. II C 9, l. c.) fallen fort, wenn das *Fréchetsche* Klassifikationsprinzip angewendet wird auf „Umgebungstypen“ statt auf „Raumtypen“, wie es die ursprünglichen *Fréchetschen* Dimensionstypen sind. Vgl. hierzu *Fréchet*, Esp. abstr., p. 111—113 und 93). Angesichts der neueren dimensionstheoretischen Untersuchungen von *Menger* und *Urysohn* sind die Meinungen darüber geteilt, ob die Beibehaltung des Wortes „Dimension“ zur Bezeichnung der *Fréchetschen* „Dimensions“typen empfehlenswert ist. Die *symbolischen* Bezeichnungen sind in der bisherigen Literatur insofern unterschieden, als  $d\mathfrak{M}$  den *Fréchetschen* Dimensionstypus einer Menge  $\mathfrak{M}$  und  $\dim \mathfrak{M}$  ihre *Menger-Urysohnsche* Dimensionszahl bedeutet (analog  $d_P \mathfrak{M}$  bzw.  $\dim_P \mathfrak{M}$  den lokalen Dimensionstypus bzw. die lokale Dimension im Punkte  $P$ ). Einen Vergleich zwischen seiner Auffassung von dem Wesen der Dimension und der *Poincaré-Brouwerschen* zieht *M. Fréchet*, Paris C. R. 178 (1924), p. 1782 und Esp. abstr., p. 28, 110. Über den durch *Fréchets* Typentheorie geschaffenen Problemkreis vgl. ferner *Fréchet*, Esp. abstr., p. 23—60; *C. Kuratowski-W. Sierpiński*, Fund. math. 8 (1926), p. 193; *C. Kuratowski*, ib. p. 201; *M. Fréchet*, Paris C. R. 178 (1924<sup>1</sup>), p. 1511—1513, 180 (1925), p. 419—421; *K. Kunugui*, Paris C. R. 187 (1928<sup>2</sup>), p. 876—878, 188 (1929<sup>1</sup>), p. 297—299; *W. Sierpiński*, Fund. math. 13 (1929), p. 117—120, 277—280, 14 (1929), p. 122.

234b) Dimensionsdefinitionen nicht-topologischer Art wurden gegeben von *F. Hausdorff*, Math. Ann. 79 (1918), p. 157—179, *G. Bouligand*, Paris C. R. 180 (1925<sup>1</sup>), p. 246—248, 187 (1928<sup>2</sup>), p. 524—525, 593—594.

235) Revue Metaph. Mor. 1912, p. 486—487.

236) J. f. Math. 142 (1913), p. 146—152; Proc. Amsterdam 26 (1923), p. 795—800; J. f. Math. 153 (1924), p. 253; Math. Ztschr. 21 (1924), p. 312—314; Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 861, Anm. 3.

236a) In dieser und der folgenden Nr. kommen Punktmengen in allgemeineren als separablen metrischen Räumen nicht in Betracht.

mit der Auffassung der Dimension als einer *lokalen*<sup>236b)</sup> Eigenschaft bei *Menger* und *Urysohn*.

Die leere Menge und nur sie heißt  $(-1)$ -dimensional. Eine Menge  $\mathfrak{M}$  heißt für  $n \geq 0$  im Punkt  $P$  *n-dimensional*<sup>237)</sup> ( $\dim_P \mathfrak{M} = n$ ), wenn  $n$  die kleinste ganze Zahl ist, für welche es beliebig kleine Umgebungen von  $P$  gibt, deren Begrenzungen mit  $\mathfrak{M}$  einen Durchschnitt von niedrigerer als der  $n^{\text{ten}}$  Dimension haben. Eine Menge  $\mathfrak{M}$  heißt *n-dimensional (schlechtweg)* ( $\dim \mathfrak{M} = n$ ), wenn ihre Dimension in allen Punkten  $\leq n$ , in mindestens einem Punkt gleich  $n$  ist. Kommt einer Menge in einem Punkt  $P$  nach dieser Definition keine Dimension zu, so heißt sie in  $P$  *unendlich-dimensional* ( $\dim_P \mathfrak{M} = \infty$ ).<sup>238)</sup><sup>238a)</sup>

Durch vollständige Induktion<sup>239)</sup> zeigt man, daß für  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$  immer  $\dim_X \mathfrak{M} \leq \dim_X \mathfrak{N}$  und damit  $\dim \mathfrak{M} \leq \dim \mathfrak{N}$  ist, daß die Dimension eine topologische Invariante ist und daß  $\dim(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \leq 1 + \dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B}$  ist.

In separablen Räumen gilt ferner: Ist  $\dim \mathfrak{A} \leq n$  und  $\dim \mathfrak{B} \leq n$  und ist  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  abgeschlossen, dann ist  $\dim(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) \leq n$ <sup>240)</sup>; allgemeiner: Ist jede der abzählbar vielen Mengen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ , deren Dimensionen  $\leq n$  seien, in der Vereinigung  $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots$  abgeschlossen, dann hat diese eine Dimension  $\leq n$  („Summensatz“).<sup>241)</sup>

236 b) Zu diesem Gesichtspunkt vgl. auch <sup>93)</sup>.

237) *K. Menger*, Hinterlegung bei der Ak. Wiss. Wien 1921, abgedruckt in Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1122—1124; Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 148—160; *P. Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922), p. 440—442. Die gewählte Fassung ist diejenige *Mengers*. Die Definition *Urysohns* ist (nicht wesentlich) metrisch und mit ihr in allen metrischen Räumen äquivalent. Über Nicht-Äquivalenz in allgemeineren Räumen siehe *L. W. Cohen*, Paris C. R. 184 (1927<sup>4</sup>) p. 1368—1370. Bezüglich einer axiomatischen Einführung des Dimensionsbegriffs s. *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929), p. 193—218.

238) Diese Definition weist einer Menge  $\mathfrak{M}$  auch in Punkten, die nicht in  $\mathfrak{M}$  liegen, eine Dimension zu, wenn man noch festsetzt, daß die Dimension von  $\mathfrak{M}$  in  $P$  gleich  $(-1)$  ist, dann und nur dann, wenn  $P$  nicht in  $\mathfrak{M}$  liegt. Die Dimension von  $\mathfrak{M}$  in den Punkten von  $\mathfrak{M}$  ist, soweit es sich um separable metrische Räume handelt, von dem Raum, in dem  $\mathfrak{M}$  liegend gedacht ist, unabhängig; s. *W. Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 761.

238 a) Über abzählbar-dimensionale Räume siehe *W. Hurewicz*, Proceed. Amsterdam Acad. 31 (1928), p. 916—922.

239) Entsprechend der Induktion in der Definition der Dimension.

240) Dies ist eine Verallgemeinerung des „lemme fondamental“<sup>268)</sup> von *Urysohn*, Fund. math. 8 (1926), p. 225—359, 260.

241) Für kompakte abgeschlossene  $\sum A_i$  bei *Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922), p. 440—442 ausgesprochen, bewiesen Fund. math. 8, l. c. <sup>240)</sup>, Kap. II, und *Menger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 152; 34 (1926), p. 147, 153, in der obigen Allgemeinheit bei *W. Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 736—764 und

Dieser Satz hat eine Reihe wichtiger Folgen:

In jeder Menge  $\mathfrak{M}$  einer Dimension  $\leq n$  gibt es zu irgend zwei fremden in  $\mathfrak{M}$  relativ abgeschlossenen Mengen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  eine nicht mehr als  $(n - 1)$ -dimensionale Menge  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ , welche  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{M}$  trennt.<sup>242)</sup><sup>243)</sup> Da umgekehrt aus dieser Eigenschaft unmittelbar<sup>244)</sup>  $\dim \mathfrak{M} \leq n$  folgt, ist eine Menge  $\mathfrak{M}$  dann und nur dann  $n$ -dimensional, wenn  $n$  die kleinste ganze Zahl ist, für welche je zwei in  $\mathfrak{M}$  relativ abgeschlossene Mengen durch eine Menge von einer Dimension  $< n$  in  $\mathfrak{M}$  getrennt werden können, was eine zweite Kennzeichnung der  $n$ -dimensionalen Mengen darstellt (Dimension im Großen).<sup>245)</sup>

Ist  $\dim \mathfrak{M} \leq n$ , so gibt es in  $\mathfrak{M}$  ein dem System aller Relativumgebungen in  $\mathfrak{M}$  gleichwertiges System von abzählbar vielen Umgebungen, deren Begrenzungen nicht mehr als  $(n - 1)$ -dimensional sind. Nach dem Summensatz ist die Vereinigung  $\mathfrak{B}$  dieser Begrenzungen nicht mehr als  $(n - 1)$ -dimensional. Der Rest  $\mathfrak{M} - \mathfrak{B}$  hat die Dimension 0, d. h.: Jede nicht mehr als  $n$ -dimensionale Menge ist Summe einer nicht mehr als  $(n - 1)$ -dimensionalen und einer null-dimensionalen Menge. Ist  $\mathfrak{M}$   $n$ -dimensional, so ist  $\mathfrak{B}$   $(n - 1)$ -dimensional wegen  $\dim(\mathfrak{A} \dagger \mathfrak{B}) \leq 1 + \dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B}$ . Jede  $n$ -dimensionale Menge ist daher Summe von  $n + 1$ , aber nicht von weniger als  $n + 1$  nulldimensionalen Mengen. Das ergibt eine dritte Kennzeichnung der  $n$ -dimensionalen Mengen.<sup>246)</sup><sup>247)</sup><sup>248)</sup>

*L. Tumarkin*, Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 994—996, Math. Ann. 98 (1928), p. 637—656.

242) Zwei fremde Mengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen in  $\mathfrak{M}$  durch  $\mathfrak{C}$  getrennt, wenn es zwei komplementäre Teile  $\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}_1 \supseteq \mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{M} - \mathfrak{C}$  gibt, von denen keine einen Häufungspunkt der andern enthält. (Vgl. 44.)

243) Die Zurückführung auf den Summensatz geschieht durch den *Heine-Borel-Lebesgueschen* Satz. *Brouwer*, Proc. Amsterdam 27 (1924), p. 636; *Menger*, Monatsh. Math. Phys. 34, l. c. Satz VI; *Hurewicz*<sup>241)</sup>, p. 763; *Tumarkin*<sup>241)</sup>.

244) Man nehme  $\mathfrak{A}$  als aus einem Punkt  $P$  bestehend und  $\mathfrak{B}$  als Komplement einer Umgebung von  $P$  an.

245) Vgl. *Brouwers* Dimensionsdefinition<sup>236)</sup>.

246) Bei *Urysohn*, Fund. math. 8, l. c. Kap. VI, für abgeschlossene kompakte Mengen, allgemein bei *Hurewicz* und *Tumarkin*, l. c.<sup>241)</sup>. — Unabhängig von der Dimensionstheorie hat *W. Sierpiński*, Fund. math. 4 (1923), p. 1—6 eine Zerlegung der Ebene in drei nulldimensionale Mengen angegeben.

247) Aus ihr schließt *Tumarkin*, Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 996 mit Hilfe des in Nr. 18 mitgeteilten Satzes von *Lawrentieff*<sup>81a)</sup>: Jede in einem separablen vollständigen Raum  $\mathfrak{R}$  liegende Menge  $\mathfrak{M}$  ist in einem  $G_\delta$  von  $\mathfrak{R}$  derselben Dimension wie  $\mathfrak{M}$  enthalten.

248) Aus dem Ergebnis von *Tumarkin*<sup>247)</sup> folgt nach einem Satz von *Alexandroff* (vgl. 81): Jeder separable metrische Raum  $\mathfrak{R}$  ist einer Teilmenge eines die-

Die nulldimensionalen Mengen sind jene, in denen je zwei fremde relativ abgeschlossene Teile schon durch die leere Menge getrennt sind. Daher sind alle nulldimensionalen Mengen *total zusammenhanglos*, d. h. in ihnen sind je zwei Punkte durch die leere Menge getrennt, oder, was dasselbe bedeutet, alle ihre Quasikomponenten<sup>249</sup>) bestehen aus je einem Punkt; dagegen ist nicht jede total zusammenhanglose Menge nulldimensional. Eine noch weitere Klasse sind die *zusammenhanglosen* Mengen (*ensembles dispersés*), d. h. jene, in denen keine mehr als einen Punkt enthaltenden zusammenhängenden Teile enthalten sind, oder, was dasselbe ist, deren sämtliche Komponenten aus je einem Punkt bestehen; noch allgemeiner sind die *diskontinuierlichen* Mengen (*ensembles punctiformes*), das sind jene, die kein aus mehr als einem Punkt bestehendes kompaktes Teilkontinuum enthalten.<sup>250</sup>) Im Bereich der halbkompakten<sup>250a</sup>) abgeschlossenen Mengen decken sich diese vier Klassen<sup>251</sup>); ebenso in der geraden Linie.<sup>252</sup>) Eine Menge ist dann und nur dann nulldimensional, wenn sie einer Menge von Irrationalzahlen, oder, was dasselbe ist, einem Teil des Baireschen Nullraumes<sup>253</sup>), oder auch, wenn sie einem Teil der Cantorsche Drei-teilungsmenge<sup>254</sup>) homöomorph ist (nulldimensionale Universräume, von denen der letzte auch kompakt ist). Jede abgeschlossene null-dimensionale Teilmenge eines kompakten im Kleinen zusammenhän-

selbe Dimension wie  $\mathfrak{R}$  besitzenden vollständigen metrischen Raumes homöomorph. Siehe ferner *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 8 (1926), p. 311.

249) *Hausdorff*, Grundz., p. 248.

250) Daß diese vier Klassen verschieden sind, zeigen Beispiele von *Sierpiński*, Fund. math. 1 (1920), p. 7; Fund. math. 2 (1921), p. 81; *Knaster* und *Kuratowski*, Fund. math. 2 (1921), p. 206. Nach *Mazurkiewicz*, Fund. math. 2 (1921), p. 201, kann eine total zusammenhanglose Menge sogar in jedem ihrer Punkte eine Dimension  $> 0$  haben. Siehe ferner *R. L. Wilder*, Trans. Am. Math. Soc. 29 (1927), p. 332; *P. Alexandroff*-*P. Urysohn*, Math. Ann. 98 (1928), p. 89—106; *K. Menger*, Akad. Anzeig. Wien 12. I. 1928, Dim., p. 138—150, 309—310; *S. Mazurkiewicz*, Fund. math. 12 (1928), p. 111—117, 13 (1929), p. 210—217.

250a) *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 34 (1926), p. 144.

251) *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 149, 159; *P. Urysohn*, Fund. math. 7 (1925), p. 75.

252) Zufolge eines Satzes von *W. Sierpiński*, Fund. math. 2 (1921), p. 89. Vgl. hierzu *L. W. Cohen*, Fund. math. 14 (1929), p. 281—303; *W. Sierpiński*, ib. p. 345—349.

253) Auf Grund zweier Sätze von *Sierpiński*, der auf die 0-dimensionalen Mengen vor Entwicklung der Dimensionstheorie aufmerksam geworden war, Fund. math. 2 (1921), p. 81—95 und *Fréchet*, Math. Ann. 68 (1910), p. 154. Vgl. noch *W. Sierpiński*, Fund. math. 1 (1920), p. 16; *M. Fréchet*, Bull. Acad. Polon. 1920, p. 107.

254) = dyadisches Diskontinuum im Sinne von *Hausdorff*, Mengenlehre 1927, p. 134.

genden Kontinuums liegt auf einem einfachen Bogen, d. i. dem topologischen Bild einer abgeschlossenen Strecke.<sup>255)</sup><sup>255 a)</sup>

Eine vierte Charakterisierung der  $n$ -dimensionalen Mengen besteht in der Möglichkeit gewisser Überdeckungen derselben. Wir verstehen unter einer  $(\varepsilon, n)$ -Überdeckung<sup>256)</sup> einer Menge  $\mathfrak{M}$  eines metrischen Raumes  $\mathfrak{R}$  eine Menge von Mengen, deren Durchmesser kleiner als  $\varepsilon$  sind ( $\varepsilon > 0$ ), so daß jeder Punkt von  $\mathfrak{M}$  innerer Punkt mindestens einer derselben ist und der Durchschnitt von  $(n + 1)$  dieser Mengen leer ist.

Jede nicht mehr als  $n$ -dimensionale Menge  $\mathfrak{M}$  (eines separablen metrischen Raumes) hat für jedes  $\varepsilon > 0$  eine  $(\varepsilon, n + 1)$ -Überdeckung. Das ist für  $n = 0$  einfach zu zeigen und folgt für  $n > 0$  unmittelbar daraus, daß  $\mathfrak{M}$  Summe von  $(n + 1)$  nulldimensionalen Mengen ist. Jeder nicht mehr als  $n$ -dimensionale separable metrische Raum ist sogar für jedes  $\varepsilon > 0$  Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Hüllen offener Mengen, von denen jede einen Durchmesser  $< \varepsilon$  hat und von denen je  $k$  ( $1 \leq k \leq n + 1$ ) einen Durchschnitt haben, dessen Dimension  $\leq n + 1 - k$  ist.<sup>257)</sup>

Ist  $\mathfrak{M}$  total beschränkt<sup>258)</sup>, bzw. außerdem im Kleinen zusammenhängend, so können, wenigstens für  $k = n + 1$ <sup>259)</sup>, alle diese Teile in endlicher Anzahl, bzw. außerdem zusammenhängend angenommen werden.

Daß diese „Überdeckbarkeiten“ für die  $n$ -dimensionalen Mengen, die  $n$ -dimensionalen totalbeschränkten, die  $n$ -dimensionalen totalbeschränkten im Kleinen zusammenhängenden Mengen auch charakte-

255) *F. Riesz*, Paris C. R. 141 (1905), p. 650—653; *Schoenflies*, Ber. II (1908), p. 257 (Satz XVII); *L. Antoine*<sup>5)</sup>, p. 82 ff.

255 a) Über nulldimensionale Mengen in euklidischen Räumen s. *R. L. Wilder*, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929), p. 345—359.

256) Bei *Tumarkin*, l. c.<sup>109)</sup>, findet sich der Ausdruck  $(\varepsilon, n)$ -Überdeckung von  $\mathfrak{M}$  in etwas umfassenderer Bedeutung, indem dort nicht verlangt wird, daß jeder Punkt von  $\mathfrak{M}$  innerer Punkt einer der überdeckenden Mengen ist.

257) Für kompakte abgeschlossene Mengen: Für  $k = n + 1$  bei *P. Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922<sup>2)</sup>, p. 441; *Fund. math.* 8 (1926), p. 292—301; *K. Menger*, *Monatsh. Math. Phys.* 33 (1923), p. 153; für separable metrische Räume und  $k = 2$ : *W. Hurewicz*, *Math. Ann.* 96 (1927), p. 763; für separable metrische Räume und beliebiges  $k$ : *K. Menger*, *Math. Ann.* 98 (1927), p. 81.

258) Eine Menge heißt *total beschränkt*, wenn sie für jedes  $\varepsilon > 0$  Vereinigung endlich vieler Teilmengen mit Durchmessern  $< \varepsilon$  ist (*Hausdorff*, *Grundz.*, p. 311).

259) *Urysohn*, *Fund. math.* 8 (1926), p. 301. Siehe ferner *P. Urysohn*, *Math. Ann.* 98 (1928), p. 296—308.

ristisch<sup>259a</sup>) sind (vierte Charakterisierung), steht zur Zeit (außer für  $k = 2$ ) nur für die kompakten abgeschlossenen Mengen fest.<sup>259a</sup>)

Da für  $m > n$  das abgeschlossene Intervall<sup>260</sup>) des  $m$ -dimensionalen Cartesischen Raumes  $\mathfrak{R}^m$  nach *Lebesgue*<sup>261</sup>) die Eigenschaft, für jedes  $\varepsilon > 0$  eine  $(\varepsilon, n + 1)$ -Überdeckung zuzulassen, nicht hat, ist für  $m > n$   $\dim \mathfrak{R}^m > n$ , somit  $\dim \mathfrak{R}^{n+1} \geq n + 1$ . Umgekehrt folgt aus der Existenz beliebig kleiner würfelförmiger Umgebungen leicht  $\dim \mathfrak{R}^{n+1} \leq n + 1$ ; also ist<sup>262</sup>)  $\dim \mathfrak{R}^n = n$ , wie es für einen vernünftigen Dimensionsbegriff sein muß. Jede Menge des  $\mathfrak{R}^n$ , welche einen inneren Punkt enthält, ist daher  $n$ -dimensional. Aber auch umgekehrt<sup>263</sup>): Jede Menge des  $\mathfrak{R}^n$  ohne inneren Punkt hat eine Dimension  $< n$ . Daher hat im  $\mathfrak{R}^n$  jede Begrenzung eine Dimension  $\leq n - 1$ . Da nach *Lebesgue*<sup>264</sup>) die Begrenzung einer beschränkten offenen Menge des  $\mathfrak{R}^n$  für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  nur für  $n' \geq n$  ( $\varepsilon, n'$ )-Überdeckungen hat, ist eine solche Begrenzung genau  $(n - 1)$ -dimensional. Daher ist auch das Komplement jeder nicht mehr als  $(n - 2)$ -dimensionalen Menge zum  $\mathfrak{R}^n$ , ebenso zu jedem Gebiet des  $\mathfrak{R}^n$ , zusammenhängend.<sup>265</sup>)

259a) Eine für allgemeine separable Mengen gültige Charakterisierung der Dimension durch andere Überdeckbarkeitseigenschaften haben neuerdings *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 425, 429 und *K. Menger*, Dim. p. 155 ff. angegeben.

260) Intervall des  $\mathfrak{R}^n =$  Menge aller Punkte  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , für welche  $\xi_i' \leq \xi_i \leq \xi_i''$  ist.

261) Dieser Satz wurde von *H. Lebesgue*, Math. Ann. 70 (1911), p. 166—168 ausgesprochen. Den ersten richtigen Beweis gab *L. E. J. Brouwer*, J. f. Math. 142 (1913), p. 146—152. Vgl. ferner *H. Lebesgue*, Fund. math. 2 (1921), p. 256—285, 6 (1924), p. 96—99 und <sup>262</sup>).

262) Der älteste Beweis ist der von *Brouwer*. Er arbeitet mit der Dimension im Großen, J. f. Math. 142 (1913), p. 146—152, Math. Ztschr. 21 (1924), p. 313. Vgl. auch Proc. Amsterdam 27 (1924), p. 635—638 und die intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffs in Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 855—863. Der oben angedeutete Gedankengang bei *Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922<sup>2</sup>), p. 440; Fund. math. 8 (1926), p. 307; *Menger*, Monatsh. Math. Phys. 34 (1924), p. 153; eine Zurückführung des Satzes auf zwei andere allerdings noch zu beweisende Annahmen bei *Menger*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 648—649. Einen sehr einfachen Beweis gab *E. Sperner*<sup>159</sup>), fast gleichzeitig *W. Hurewicz*, Math. Ann. 101 (1929), p. 210—218. Vgl. dazu noch *B. Knaster-C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz*<sup>159</sup>).

263) *Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922<sup>2</sup>), p. 440—442; Fund. math. 8 (1926), p. 309; *Menger*, Monatsh. Math. Phys. 34 (1924), p. 157.

264) *H. Lebesgue*, Fund. math. 2 (1921), p. 274.

265) *Urysohn* versteht (Fund. math. 7 (1925), p. 124) unter einer „multiplicité Cantorienne de dimension  $n$ “ ein kompaktes Kontinuum, welches nach Weglassen irgendeiner abgeschlossenen, nicht mehr als  $(n - 2)$ -dimensionalen Menge immer noch zusammenhängend ist, allgemeiner unter einer „multiplicité

Eine fünfte Charakterisierung der  $n$ -dimensionalen kompakten metrischen Räume ist die folgende: Ein kompakter metrischer Raum ist dann und nur dann  $n$ -dimensional, wenn er eindeutig-stetiges Bild einer nulldimensionalen Menge derart ist, daß jeder seiner Punkte höchstens  $(n + 1)$  Urbilder hat, wenn er aber nicht eindeutig-stetiges Bild einer nulldimensionalen Menge derart sein kann, daß jeder seiner Punkte höchstens  $n$  Urbilder hat.<sup>266)</sup>

Für jedes ganzzahlige  $k \geq 0$  ist die Menge aller Punkte, in denen ein separabler metrischer Raum  $\mathfrak{R}$  nicht mehr als  $k$ -dimensional ist, nach Menger<sup>266a)</sup> ein  $G_\delta$ -<sup>80)</sup>, die Menge  $N_k(\mathfrak{R})$  aller Punkte von  $\mathfrak{R}$ , in denen  $\mathfrak{R}$  mindestens  $k$ -dimensional ist, also ein  $\mathfrak{F}_\sigma$ , die Menge aller Punkte von  $\mathfrak{R}$ , in denen  $\mathfrak{R}$   $k$ -dimensional, mithin eine Differenz zweier  $G_\delta$  oder, was dasselbe ist, zweier  $F_\sigma$ . Ist  $\mathfrak{R}$   $n$ -dimensional, so heißt  $\overline{N_n(\mathfrak{R})}$  (die abgeschlossene Hülle von  $N_n(\mathfrak{R})$ ) der Dimensionskern von  $\mathfrak{R}$ . Alle  $\overline{N_k(\mathfrak{R})}$  für  $k \leq n$  haben in jedem Punkte von  $N_k(\mathfrak{R})$  dieselbe Dimension, wie  $\mathfrak{R}$  selbst. Die Punkte  $k^{\text{ter}}$  Dimension von  $N_k(\mathfrak{R})$  liegen daher für  $k > 0$  in  $N_k(\mathfrak{R})$  dicht.  $N_n(\mathfrak{R})$  ist mithin homogen  $n$ -dimensional.<sup>267)</sup> Die  $N_k(\mathfrak{R})$  sind in sich dicht.<sup>268)</sup> Ferner ist  $\dim N_k(\mathfrak{R}) \geq k - 1$ .<sup>268a)</sup> Ist  $\mathfrak{R}$  *halbkompakt*<sup>269)</sup>, so hat  $N_k(\mathfrak{R})$  für  $k > 0$  in

Cantorienne généralisée de dimension  $n$ “ ein beliebiges homogen  $n$ -dimensionales kompaktes Kontinuum, d. h. ein solches  $n$ -dimensionales kompaktes Kontinuum, in dem die Punkte  $n^{\text{ter}}$  Dimension dicht liegen. Vgl. auch *P. Alexandroff*, Paris C. R. 183 (1926), p. 722—724; *K. Menger*, Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 705—709; *Hurewicz-Menger*, Math. Ann. 100 (1928), p. 618—633.

266) *W. Hurewicz*, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 1014—1017. *Hurewicz* verallgemeinert diese Charakterisierung auf beliebige separable metrische Räume mit Hilfe einer hierzu eigens definierten Stetigkeit mehrdeutiger Abbildungen.

266a) *K. Menger*, l. c. <sup>267)</sup>, p. 141, 142.

267) *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 34 (1924), p. 144; *P. Urysohn*, Fund. math. 8 (1926), p. 269 ff. Über „homogen  $n$ -dimensional“ siehe <sup>265)</sup>.

268) *P. Urysohn* spricht diese Sätze nur für „Mengen  $F^u$ “, d. h. für kompakte abgeschlossene Mengen aus. Da aber sein Fundamentallema (vgl. <sup>240)</sup>) „aus  $\dim(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) < n$  und  $\dim_X \mathfrak{F}_2 < n$  (wobei  $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ ) folgt  $\dim_X \mathfrak{F}_1 < n$ “ schon gilt, wenn  $\mathfrak{F}_1$  ein separabler metrischer Raum ist und  $\mathfrak{F}_2$  in  $\mathfrak{F}_1$  abgeschlossen ist, gelten auch seine Folgerungen in weiterem Umfang. Vgl. *Hurewicz*, Math. Ann. 96 (1927), p. 762; *Tumarkin*, Proc. Amsterdam 28 (1925), p. 995, Paris C. R. 186 (1928<sup>1)</sup>), p. 420. Für die  $N_k$  anstatt der  $\overline{N_k}$  gelten ähnliche Sätze nicht: *Urysohn*, Fund. math. 8 (1926), p. 282.

268a) *K. Menger*, Proc. Amsterdam 30 (1927), p. 141.

269) Die Definition von halbkompakt siehe *K. Menger*, Wiener Ber. 133 (1924), p. 432. Für beliebige  $\mathfrak{R}$  gilt der Satz nicht, wie *P. Urysohn* (Fund. math. 8 (1926), p. 276) an einem Beispiel von *W. Sierpiński* (Fund. math. 2 (1921), p. 82—83) zeigt. Eine nähere Untersuchung dieses Falles gibt *Menger*, l. c., p. 442.



jedem seiner Punkte eine Dimension  $\geq k$ .<sup>270)</sup> Ist  $\mathfrak{R}$  kompakt, so ist jeder Punkt von  $N_k(\mathfrak{R})$  für  $k > 0$  in einem Teilkontinuum von  $N_k(\mathfrak{R})$  enthalten.<sup>270a)</sup> Jeder  $n$ -dimensionale kompakte Raum hat mindestens eine  $n$ -dimensionale Komponente.<sup>109)110)</sup>

Wie schon erwähnt<sup>271)</sup> ist jede separable nulldimensionale Menge homöomorph mit einem Teil des eindimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^1$ , ja sogar mit einem Teil der Cantorsche Dreiteilungsmenge.<sup>254)</sup> *Menger*<sup>272)</sup> hat auch bewiesen: Jeder kompakte eindimensionale metrische Raum  $\mathfrak{M}$  ist homöomorph mit einer Menge des dreidimensionalen Zahlenraumes  $\mathfrak{R}^3$ , ja sogar mit einer Teilmenge eines festen (für alle  $\mathfrak{M}$  gemeinsamen) kompakten eindimensionalen Kontinuum des  $\mathfrak{R}^3$ , d. h. mit einer Teilmenge einer festen kompakten Kurve<sup>273)</sup> des  $\mathfrak{R}^3$  (Universalkurve). Ferner ist nach *Menger*<sup>273a)</sup> jeder  $n$ -dimensionale kompakte Raum homöomorph mit einer Teilmenge des  $\mathfrak{R}^{2n+1}$ . Nach *Sierpiński*<sup>274)</sup> gibt es eine kompakte ebene Kurve (kompaktes ebenes eindimensionales Kontinuum), welche zu jeder kompakten ebenen Kurve ein topologisches Bild enthält. Nach *Menger*<sup>275)</sup> gibt es im  $\mathfrak{R}^n$  ein  $(n - 1)$ -dimensionales kompaktes im Kleinen zusammenhängendes Kontinuum, welches zu jeder nicht mehr als  $(n - 1)$ -dimensionalen Menge des  $\mathfrak{R}^n$  ein topologisches Bild enthält. Nach *W. Hurewicz*<sup>275a)</sup> ist jeder  $n$ -dimensionale separable Raum mit einer Teilmenge eines  $n$ -dimensionalen kompakten Raumes homöomorph. Nach *Alexandroff* und *Tumarkin*<sup>275a $\alpha$ )</sup> ist jede abgeschlossene Menge positiver Dimension einer Teilmenge eines im Kleinen zusammenhängenden Kontinuums derselben Dimension homöomorph.

Auf Grund der in kompakten metrischen Räumen definierten *Betti*-schen Zahlen (Nr. 40) hat *P. Alexandroff*<sup>275a $\beta$ )</sup> einen Dimensionsbegriff gegeben und in weitem Ausmaß dessen Äquivalenz mit dem hier besprochenen Dimensionsbegriff festgestellt.

270) *K. Menger*, *Proceed. Amsterdam* 30 (1927), p. 138—144.

270a) *W. Hurewicz*, *Math. Ann.* 96 (1927), p. 762.

271) Vgl. *W. Sierpiński*, *Fund. math.* 2 (1921), p. 89.

272) *K. Menger*, *Proc. Amsterdam* 29 (1926), p. 476—482 und *Menger*, *Dim.*, p. 287—301.

273) Über den Begriff der Kurve vgl. Nr. 42.

273a) *Menger*, *Dim.*, p. 301—303.

274) *W. Sierpiński*, *Paris C. R.* 162, p. 629; eine Verschärfung dieses Satzes bei *Menger*, *Fund. math.* 10 (1926), p. 106.

275) *K. Menger*, *Proc. Amsterdam* 29 (1926), p. 1125—1128.

275a) *W. Hurewicz*, *Proc. Amsterdam* 30 (1927), p. 425—430.

275a $\alpha$ ) *P. Alexandroff-L. Tumarkin*, *Fund. math.* 11 (1928), p. 141—144.

275a $\beta$ ) *P. Alexandroff*, *Gött. Nachr.* 1928, p. 25—44.

**42. Kurven.**<sup>275b)</sup> Unter Kurve verstehen wir eine zusammenhängende, im Sinn von Nr. 41 eindimensionale Punktmenge.<sup>276)</sup>

Zufolge dieser Erklärung gibt es um jeden Punkt  $P$  jeder Kurve  $\mathfrak{K}$  beliebig kleine Relativumgebungen in  $\mathfrak{R}$ , deren in  $\mathfrak{R}$  genommene Relativbegrenzungen nulldimensional sind, hingegen nicht beliebig kleine Relativumgebungen mit leeren Relativbegrenzungen.  $P$  heißt von der Ordnung  $\alpha$  (indice  $\alpha$ ), wenn  $\alpha$  die kleinste Kardinalzahl ist, für welche es beliebig kleine Relativumgebungen von  $P$  in  $\mathfrak{R}$  gibt, deren Relativbegrenzungen aus höchstens  $\alpha$  Punkten bestehen. Ein Punkt heißt regulär, wenn es in jeder Umgebung von  $P$  Relativumgebungen von  $P$  mit endlichen (d. h. aus endlich vielen Punkten bestehenden) Relativbegrenzungen gibt. Die regulären Punkte der Ordnung  $\aleph_0$  heißen kurz Punkte *wachsender* Ordnung (Ordnung  $w$ ).<sup>277)</sup> Punkte der Ordnung 1 heißen *Endpunkte*, Punkte der Ordnung 2 *gewöhnliche Punkte*, alle Punkte höherer als zweiter Ordnung *Verzweigungspunkte*. Kurven mit lauter regulären Punkten heißen regulär. Da bei topologischen Abbildungen Umgebungen in Umgebungen und Begrenzungen in Begrenzungen derselben Dimension und Mächtigkeit übergehen, sind die Begriffe „Kurve“, „Ordnung“, „regulär“ topologische Invarianten.

Die Menge  $\mathfrak{K}^\alpha$  aller Punkte der Ordnungen  $< \alpha$  ist ein  $G_\delta$  in  $\mathfrak{K}$  für jedes  $\alpha$ . Auf jeder total vollständigen<sup>278)</sup> Kurve  $\mathfrak{K}$  liegen die Punkte von höherer als der ersten Ordnung dicht und bilden eine eindimensionale Menge  $F_\sigma$  in  $\mathfrak{K}$ , während die Menge der Endpunkte höchstens nulldimensional ist.<sup>278a)</sup>

Ein in sich kompaktes Kontinuum ist a) eine Kurve, b) eine Kurve ohne Punkte der Ordnung  $c$ , c) eine reguläre Kurve, je nachdem in ihm irgend zwei fremde abgeschlossene Teile a) durch eine dis-

275 b) Vgl. auch <sup>188)</sup>.

276) *K. Menger*, Hinterlegung Nr. 778 (1921) bei der Wien. Ak. d. Wiss.; *Monatsh. Math. Phys.* 33 (1923), p. 148—160; *Math. Ann.* 95 (1925), p. 277—306; *Proceed. Amsterdam* 28 (1925), p. 67—71; *P. Urysohn*, *Paris C. R.* 175 (1922), p. 481—483; *Fund. math.* 7 (1925), p. 93.

277) *Menger* und *Urysohn* rechnen durch besondere Festsetzung die Punkte wachsender Ordnung nicht zu den Punkten der Ordnung  $\aleph_0$ .

278) Nach *Menger* heißt eine in einem metrischen Raum gelegene Menge  $\mathfrak{M}$  total vollständig, wenn jede beschränkte Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{M}$  kompakt ist.

278a) *W. Sierpiński*, *Paris C. R.* 160 (1915<sup>1</sup>), p. 302 hat eine ebene Kurve konstruiert, die nur Punkte der Ordnungen 3 und 4 hat. Über die Ordnung von Punkten einer Kurve s. ferner *H. Künnet*, *Monatsh. Math. Phys.* 36 (1929), p. 149—152; *G. T. Whyburn*, *Bull. Am. Math. Soc.* 35 (1929), p. 218—224; *C. Zarankiewicz*, *Bull. Acad. Pollon.* 1928, p. 445—453; *C. Kuratowski-S. Mazurkiewicz*, *Fund. math.* 11 (1928), p. 29—34.

kontinuierliche (vgl. Nr. 41, <sup>250</sup>), b) durch eine abzählbare, c) durch eine endliche Menge getrennt werden, oder je nachdem es für jedes  $\varepsilon > 0$  mit endlich vielen Umgebungen  $< \varepsilon$  überdeckbar ist, deren Begrenzungen a) diskontinuierlich, b) abzählbar, c) endlich sind; oder je nachdem es für jedes  $\varepsilon > 0$  Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Umgebungen ist, die zu je zweien a) diskontinuierliche, b) abzählbare, c) endliche Durchschnitte haben. Ein kompaktes Kontinuum ist dann und nur dann eine im Kleinen zusammenhängende Kurve, d. h. ein eindimensionales stetiges Bild der Strecke  $[0, 1]$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  Vereinigung von endlich vielen Kontinuen  $< \varepsilon$  ist, die zu je zweien einen diskontinuierlichen Durchschnitt haben.<sup>279)</sup>

Ein in sich kompaktes Kontinuum ist dann und nur dann eine reguläre Kurve, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  Vereinigung endlich vieler Kontinuen  $< \varepsilon$  ist, die zu je zweien höchstens endliche Durchschnitte haben. Daher ist jede in sich kompakte Kurve, die regulär ist, stets im Kleinen zusammenhängend; aber nicht umgekehrt.<sup>280)</sup> Ist ferner  $P$  ein Punkt  $n^{\text{ter}}$  Ordnung der regulären in sich kompakten Kurve  $\mathfrak{K}$ , so enthält  $\mathfrak{K}$   $n$  einfache Bögen, welche in  $P$  enden und sonst fremd sind.<sup>281)</sup><sup>281a)</sup>

Eine in sich kompakte Kurve ist dann und nur dann eine topologische Strecke bzw. ein topologischer Kreis, wenn sie außer zwei Punkten erster Ordnung lauter Punkte zweiter Ordnung bzw. wenn sie lauter Punkte zweiter Ordnung besitzt.<sup>281b)</sup>

Ein kompakter metrischer Raum ist dann und nur dann topologisches Bild einer Kreislinie, wenn er für jedes  $\varepsilon > 0$  Vereinigung endlich vieler Kontinua eines Durchmessers  $< \varepsilon$  ist, von denen jedes mit genau zwei anderen unter ihnen gemeinsame Punkte hat.<sup>282)</sup>

Auch das Verhältnis der älteren Kurvenbegriffe zum neuen ist geklärt. Nach *Painlevé* und *Zoretti*<sup>283)</sup> verstand man unter einer ebenen Kurve ein ebenes Kontinuum ohne inneren Punkt. Diese „ebenen Kurven“ haben, da im  $\mathfrak{R}^n$  jede Menge ohne inneren Punkt eine Dimension  $< n$  hat, eine Dimension  $< 2$ , und da sie Kontinua sind, eine

279) *Menger*, Math. Ann. 95, p. 296.

280) *Menger*, l. c. <sup>279)</sup>, p. 300—301.

281) *K. Menger*, Fund. math. 10 (1926), p. 96—115.

281a) Über reguläre Kurven s. noch *G. T. Whyburn*, Fund. math. 12 (1928), p. 264—294; *J. H. Roberts*, Fund. math. 14 (1929), p. 327—333.

281b) *P. Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922), p. 481; *K. Menger*, l. c. <sup>279)</sup>, p. 303; *P. Alexandroff*<sup>282)</sup>, p. 552. Vgl. ferner *Felix Frankl*, Fund. math. 11 (1928), p. 96—104.

282) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 552.

283) Vgl. II C 9a, p. 907.

Dimension  $> 0$ , sind also die eindimensionalen ebenen Kontinua, d. i. die ebenen Kurven im neuen Sinn.<sup>284)</sup>

*Schoenflies*<sup>285)</sup> verstand unter einer *geschlossenen* ebenen Kurve eine beschränkte Punktmenge  $\mathfrak{K}$ , welche in der Ebene  $\mathfrak{E}$  genau zwei Gebiete bestimmt (als Komponenten von  $\mathfrak{E} - \mathfrak{K}$ ), deren jedes  $\mathfrak{R}$  zur Begrenzung hat. *Brouwer* zeigte, daß es auch ebene beschränkte Kontinua  $\mathfrak{K}$  gibt, welche gemeinsame Begrenzung aller von ihnen in der Ebene bestimmten Gebiete sind, deren Anzahl beliebig hoch endlich und abzählbar unendlich sein kann, ferner, daß diese Anzahl  $m$  gleich der Vielfachheit der Basis der Zyklisis von  $\mathfrak{K}$  ist.<sup>286)</sup> Da diese für in sich kompakte Mengen eine topologische Invariante ist, war damit gezeigt, daß jedes mit  $\mathfrak{K}$  homöomorphe ebene Kontinuum  $\mathfrak{K}'$  in seiner Ebene genau so viele Gebiete bestimmt wie  $\mathfrak{K}$ . Für  $m = 2$  bedeutet das die „Invarianz der *Schoenflies*schen geschlossenen Kurve“.<sup>287)</sup> *Alexandroff*<sup>288)</sup> zeigte, daß jedes echte Teilkontinuum einer solchen *Brouwerschen* Begrenzung mehrerer von ihr bestimmten Gebiete einer Ebene eine einfache Basis der Zyklisis<sup>286)</sup> hat. Er erhält deshalb eine auch die genannten *Brouwerschen* Gebietsgrenzen enthaltende Verallgemeinerung der *Schoenflies*schen geschlossenen Kurve, indem er eine Kurve *geschlossen* nennt, wenn alle ihre echten Teilkontinua eine einfache Basis der Zyklisis haben. Er nennt sie regelmäßig oder unregelmäßig geschlossen, je nachdem sie eine zwei- oder mehrfache Basis der Zyklisis haben, und beweist unter anderem: Jede unregelmäßig geschlossene Kurve ist entweder ein unzerlegbares Kontinuum oder Vereinigung zweier unzerlegbarer Kontinuen, ein Satz, der eine direkte Verallgemeinerung des analogen von *C. Kuratowski*<sup>289)</sup> für ebene Kontinuen bewiesenen Satzes ist. Bei im Kleinen zusammenhängenden Kurven<sup>290)</sup> können solche merkwürdige Erscheinungen nicht auftreten. Unter ihnen sind die von endlich vielfacher Basis der

284) *P. Urysohn*, Paris C. R. 175 (1922<sup>2</sup>), p. 441; Fund. math. 7 (1925), p. 93; *K. Menger*, Monatsh. Math. Phys. 33 (1923), p. 159. *Urysohns* „multiplicité Cantorienne“ (vgl. <sup>265)</sup>) ist eine Verallgemeinerung.

285) *A. Schoenflies*, Math. Ann. 59 (1904), p. 147; vgl. II C 9 a, p. 919 f.

286) Vgl. Nr. 40.

287) *L. E. J. Brouwer*, Math. Ann. 72 (1912), p. 422—425.

288) *P. Alexandroff*, Math. Ann. 96 (1926), p. 534.

289) *C. Kuratowski*, Fund. math. 6 (1924), p. 136—139. S. ferner *C. Kuratowski*, Math. Ann. 98 (1928), p. 399—405.

290) Die „stetigen Kurven (Bahnkurven)“ im Sinne *Jordans* (II C 9 a, p. 908), das sind die „im Kleinen zusammenhängenden Kontinua“, sind natürlich nicht immer Kurven im obigen Sinne, weshalb sich für sie die Bezeichnung „stetige Kurve“ nicht empfiehlt. Über die Bezeichnung „*Jordankurve*“ siehe <sup>179)</sup>.

Zyklosis ausgezeichnet.<sup>291)</sup> Diese sind regulär und überdies im Kleinen homöomorph<sup>291)</sup> mit den im Kleinen zusammenhängenden kompakten Kurven von einfacher Basis der Zyklosis, den *Bäumen*.<sup>292)</sup> Jeder Baum ist regulär<sup>293)</sup> und homöomorph mit einem ebenen Baum.<sup>294)</sup> Es gibt ebene Bäume, die zu jedem Baum ein topologisches Bild enthalten.<sup>295)</sup>

291) Eingehend untersucht von *P. Alexandroff*, *Math. Ann.* 96 (1926), p. 541—554.

292) Der Begriff des Baumes als Punktmenge zuerst bei *S. Mazurkiewicz*, *Fund. math.* 2 (1921), p. 119—130. [Bezüglich des viel älteren Begriffes „Baum“ unter den Graphen vgl. III AB 3, p. 174 und Anm. 47.] Vgl. ferner *T. Ważewski*, *Ann. de la Soc. Polon. de Math.* 2 (1923), p. 49—170; *J. R. Kline*, *Fund. math.* 5 (1924), p. 3—10; *C. Zarankiewicz*, *ib.* p. 11—13, *Fund. math.* 9 (1927), p. 124—171, 13 (1929), p. 264—268; *C. Kuratowski*, *Fund. math.* 5 (1924), p. 112—122; *St. Mazurkiewicz*, *ib.* p. 137—146; *W. Scherrer*, *Math. Ztschr.* 24 (1925), p. 125.

293) *K. Menger*, *Math. Ann.* 96 (1926), p. 573.

294) *K. Menger*, *Math. Ann.* 96 (1926), p. 579—582.

295) *K. Menger*, *Fund. Math.* 10 (1926), p. 108.

---

(Abgeschlossen 15. Oktober 1929.)

# Register zu Band III, 1. Teil.

Von A. Boy in Treuburg.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichworts ist durch einen Strich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes. Unter dem einzelnen Stichworte sind die Nachweise im allgemeinen nach steigender Seitenzahl geordnet; dabei ist zu beachten, daß die Seiten mit schrägstehenden Zahlen (1—237) hinter den Seiten mit aufrechtstehender Zahl (1—1595) angeordnet sind.

## A

- Abbildung 291; — einer Umgebung auf ein Jordansches Gebiet 67; — einer  $F_2$  auf eine Ebene 92; — einer  $M_2$  115; konforme — 594; —en der  $M_3$  aller sphärischen Dreiecke 848, nach Study 853; —en des hyperbolischen Raumes auf den Euklidischen 1155, auf eine Kugel im Euklidischen 134; — der Drehungen des Raumes 1383; Stephanossche — 1384; — der Speere des elliptischen Raumes 1393; — orientierter Kugeln in ebensolche 1399; sphärische — einer Fläche auf die Einheitskugel 1529; stetige — 146; topologische — 146, — eines Limesraumes 153; limes- und häufungsstetige — 156; umgebungsstetige — 157; umgebungstopologische — 157; — eines metrischen Raumes 167; topologische — im Kleinen 175; —sgrad 206.
- Abgeschlossen 153, 157; —e Hülle 160; absolut — 164; — im Kleinen 163.
- Ableitung einer Quaternionenfunktion 1337; kovariante — 1580; kontravariante — 1584; Feld— 1586.
- Ableitzzahl einer Kugel 664.
- Abschattung 1446.
- Abstand zweier Elemente eines euklidischen Raumes 148, des metrischen Raumes 166.
- Abstandsfehler 534.
- Abstandsvektor 1351.
- Abzählbarkeitsaxiome 161.
- Achse, Sylvestersche — 176; — der ternären Konfiguration 509; — der krummlinigen Koordinaten 631; — der Strahlkoordinaten 736; Symmetrie— 830; — der Perspektivität 909; Schoute'sche — 1201; — einer Quaternion 1308; — einer Biquaternion 1398.
- Achsenkoordinaten im  $R_n$  628, tetraedrische — 727.
- Addition, geometrische — von Strecken 1284; — von Quaternionen 1304; —stheorem der  $\sigma$ -Funktionen 855.
- Adjunktion 296.
- Ähnlichkeit von Punktreihen 415; — als Verwandtschaft 569; — in der Elementargeometrie 888; — von Streckensystemen 896; — als spezielle Affinität 909; — von Kegelschnitten 1084.
- Ähnlichkeitspol 422.
- Ähnlichkeitspunkte und -achsen von Kreisen 496, Beweis ihrer Existenz 1027.
- Ähnlichkeitstransformation 297; Darstellung der — durch Triquaternionen 1407.
- Änderung, zirkuläre 1450.
- Äquipollenzen, Methode der — 1293.
- Äquivalenz zweier Komplexe auf einer Mannigfaltigkeit 160; — im Sinne der Analysis situs 165; — graphischer Operationen 531.
- Affinität 415; — als Verwandtschaft 570; Tangential— 755; — als spezielle Kollineation 909.
- Affinitätspol 422.
- Affinor 1331.
- Aplexum 208.
- Amplitude der Polarkoordinaten 656; — einer Quaternion 1309.
- Analyse, geometrische — 1282, direkte von Schouten 1589.
- Anomalie 656.

- Antiinvolution 461.  
 Antikollineation 460.  
 Antikorrelation 329.  
 Antiparallelen 1210.  
 Antiprojektivität 460.  
 Antireziprozität 460.  
 Apolarität zweier Formen 361; —  
 zweier Flächen 719.  
 Apollonische Kreise 1213, ihre Eigen-  
 schaften 1257.  
 Apollonisches Problem 386; seine  
 Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal 795;  
 seine zyklographische Lösung 803;  
 seine Übertragung auf den Raum 804;  
 seine Behandlung durch Study 818;  
 seine Geschichte 1102.  
 Approximierende Komplexe 222.  
 Arbelos 939.  
 Archimedisches Postulat 34; — Axiom  
 888; — Polyeder 1070.  
 Argument der Polarkoordinaten 656;  
 — einer Quaternion 1308.  
 Art eines Vielecks 6; — eines Viel-  
 flachs 32; — eines Kugelnetzes 33.  
 Aufgabe der beschreibenden Geometrie  
 560; Malfattische — 795; —  $n$  dritten  
 und vierten Grades 1106; Torricelli-  
 sche — 1129.  
 Ausartung einer Projektivität 437;  
 —en der quadratischen Verwandt-  
 schaft 480.  
 Ausdehnungslehre, Historisches zur  
 — 1426; algebraische Anwendungen  
 der — 1479; geometrische Anwen-  
 dungen der — 1485; Beziehungen der  
 — zur Quaternionentheorie 1546.  
 Ausdruck, Pfaffscher — 346; kom-  
 plexer —  $n^{\text{ter}}$  Ordnung 1413.  
 Ausführbarkeit geometrischer Kon-  
 struktionen 528.  
 Ausmessung von Flächen 922.  
 Außendreieck 1197.  
 Axiom; —e bei Euklid 7; —e der  
 Analysis situs 168; Deformations-  
 e 169; Neumannsches — 196; Cantor-  
 sches — 605, 890; Lorenzsches — 872;  
 Kongruenz-  
 e 882; Winkel-  
 e 885; Archimedisches — 888; — des Eudo-  
 xus 888, 940; Limes-  
 e 152; —e des  
 Häufungspunktes 155; Umgebungs-  
 e 156; —e der offenen Menge 159; Ab-  
 zählbarkeits-  
 e 161; Trennbarkeits-  
 e 162; Abstands-  
 e des metrischen Rau-  
 mes 167.  
 Axonometrie 573.  
 Azimut 656, 745.
- B**
- Band der Analysis situs 193; Moebius-  
 sches — 216; — nach Study 333.  
 Basis der Koordinaten 602; — der  
 Parallelkoordinaten 608; — der line-  
 aren Punktkoordinaten 638; — der  
 Polarkoordinaten 657; — der linearen  
 Ebenenkoordinaten 697; — der Zy-  
 klosis 236.  
 Baum 157, 174; 237.  
 Begrenzung einer Menge 157.  
 Begriffe, primitive — 10.  
 Beknottedness 210.  
 Beleuchtungstheorie 582.  
 Bereich von Polyedern 82.  
 Berührungstransformation bei Lie  
 284; Stellung der — in der Gruppen-  
 theorie 292; Definition der — 320;  
 Gruppen von —en 347.  
 Bettische Zahlen, ihre Definition  
 182; reduzierte — — 185; topologische  
 Invarianz der —  $n$  — 212.  
 Bewegungen des Raumes 107; Grup-  
 peneigenschaft der — 111; Hermite-  
 sche — 252; Geometrie der — 587;  
 analytische Darstellung der — 768;  
 — bei Euklid 876; — des elliptischen  
 Raumes 1392; — des Euklidischen  $R_n$   
 1403; — der Euklidischen Ebene 1405;  
 — des  $R_n$  1416.  
 Bewegungsgruppen, endliche — 107;  
 im  $R_4$  122; im elliptischen  $R_3$  124;  
 im sphärischen  $S_3$  125; im  $R_n$  127;  
 im  $H_n$  132.  
 Bewegungsinvariante, Definition der  
 — nach Study 381; —  $n$  der ebenen  
 Geometrie 809; — für den  $R_n$  810.  
 Bezeichnung, Methode der abgekürz-  
 ten — 240.  
 Beziehung, antiprojektive — 250; —  
 zwischen orthogonalen Substitutionen  
 und sphärischer Trigonometrie 857.  
 Bikompakt 163; — im kleinen 164.  
 Binäranalyse 1563; Anwendung der  
 — auf den  $R_3$  1564, auf die Theorie  
 der Kugelfunktionen 1572, auf den  
 $R_4$  1574.  
 Biquaternionen 1396; spezielle —  
 1398; geometrische Anwendungen der  
 — 1399; elliptische — 1412.  
 Biradial 1322.

- Biskalar 1397.  
 Bivektor, entstanden aus Biquaternionen 1397, als äußeres Produkt zweier Pfeile 1439.  
 Blatt, Moebiusssches 159; Definition des —es durch eine Koordinatengleichung 625, als Produkt dreier Punkte 1440.  
 Block 1440.  
 Bogenelement 95; Riemannsche Form für das — 98; — in parabolischen Koordinaten 681; — in der Schreibweise der Quaternionen 1359.  
 Bogenlänge 931.  
 Breite 659.  
 Brennpunkt 1078.  
 Brianschonscher Satz 182; — Punkt 1248.  
 Brocardscher Kreis 1255.  
 Brocardsche Punkte 1269.  
 Brüche, extensive — 1457, ihre Addition 1458, Multiplikation 1459, geometrische Bedeutung 1466; symmetrische — extensiver Größen 1465.  
 Brückenproblem, Koenigsberger — 173.  
 Büschel 470.
- C**
- Cantorsches Axiom 890, als Grundlage für die Definition der Koordinaten 890.  
 Cantorsches Stetigkeitspostulat 36.  
 Carnotsches Korrelationsprinzip 561.  
 Carnotsche Relation der fünf Punkte 1015, ihre Ableitung und räumlichen Deutungen 1212.  
 Carnotscher Transversalensatz 393.  
 Cavalierisches Prinzip 945.  
 Cayleys allgemeine projektive Maßbestimmung 86.  
 Cayleysche Linien 494.  
 Cayleyscher Parameter 1391.  
 Charakteristik, Leibnizsche — 1282; Kroneckersche — einer  $M_1$  189, einer  $M_2$  195; — einer Fläche  $\varphi(x, y, z) = 0$  205; — einer Projektivität 445; — eines Polyeders 22, als Funktion der Zusammenhangszahl 24; — eines Kantenkomplexes 60; Zusammenhang der —entheorie mit der kombinatorischen Topologie 217.  
 Chordale 925.  
 Christoffelsche Formeln 1579; — Kovarianz 1580.  
 Cissoide 807.  
 Clebschsches Sechseck 427.  
 Cliffordsche Fläche 115; Eigenschaften der —n — 1169.  
 Cliffordsche Parallelen 1168.  
 Clifford-Kleinsche Gebilde 115; — Raumformen 116.  
 Complexus 170.  
 Connexus 205.  
 Curl 1341.  
 Curvatura integra 205, 219.  
 Cyklide, Entstehung der — 385; Klassifikation der —n 386; Gleichung der — in polysphärischen Koordinaten 669.  
 Cyklose 171.
- D**
- d'Alembertsches Prinzip 1541.  
 Deckoperation 829.  
 Decktransformation 197.  
 Dedekindsches Stetigkeitspostulat 36; — Stetigkeit bei Veronesischen Zahlen 120; —r Schnitt 889.  
 Defekt 1159.  
 Deferente 670.  
 Definition, Euklidische —en 7; Unterscheidung von impliziten und expliziten —en 11; — des Punktes bei Euklid 7, deren Kritik 17; — der Geraden bei Euklid 17, bei Archimedes 18, neuere 21; —en der Ebene 20; —en des Winkels 25; — der Fläche eines Polygons 26; — des Polyeders 27, durch Moebius 957; — der elementaren Mannigfaltigkeiten 61, mehrerer Dimensionen 64; analytische — der ebenen Kurve 286.  
 Deformationssätze 200.  
 Delambresche Formeln der sphärischen Trigonometrie 843, — — als Charakteristikum der algebraischen Trigonometrie zweiter Stufe 850; Zusammenhang der —n — mit den übrigen Formeln der sphärischen Trigonometrie 1050.  
 Desarguessche Konfiguration 495, ihre Verwendung für die sphärische Trigonometrie 1046; ihre Bedeutung für die Dreiecksgeometrie 1220.  
 Desarguesscher Satz, Stellung des —n —es in der Theorie der Propor-



- tionen 55; Bedeutung des  $n$  — es in der projektiven Geometrie 76; sein Zusammenhang mit Carnots Transversalensatz 394; seine Stellung in der Geometrie 450; seine Übertragung auf die Kugel 1046.
- Determinante der orthogonalen Substitution 765; —  $n$  extensiver Größen 1480; Laplacescher — satz 1481.
- Development 170.
- Diagonalen einer Konfiguration 482.
- Dialyse 171.
- Dieder 108.
- Differential einer Quaternion 1337; — extensiver Größen 1468, höherer Ordnung 1471; kogrediente — e 1587.
- Differentialform, erste — der Flächentheorie, dargestellt mit Punktrechnung 1525, zweite 1526.
- Differentialgeometrie der Kurven und Flächen 281, dargestellt durch Quaternionen 1358; — in der Punktrechnung 1577.
- Differentialgleichungen, geometrische Theorie der — 285; — extensiver Größen 1474.
- Differentialoperator, Hamiltonscher — 1340.
- Differentialparameter, erster — einer Quaternion 1341, zweiter 1342; Laméscher — 1360.
- Differentiation, geometrische — nach Knoblauch 1576, nach Ricci und Levi-Civita 1581, nach Hessenberg 1587.
- Dimension, Invarianz der — szahl 195; Geschichtliches zum Begriff der — 225; — stypen 226; — im Großen 228; — einer Menge des  $R_n$  231.
- Diskontinuierliche Menge 229.
- Distanzpunkt 550; — ebene 575; — funktion 91.
- Divergenz einer Vektorfunktion 1341.
- Division von Quaternionen 1310.
- Domäne 166.
- Doppelemente vereinigter Punkt-reihen 420; — kollinearere Ebenen 421; — kollinearere Räume 422; — spezieller Kollineationen 422; — affiner, ähnlicher und kongruenter Systeme 423; Approximation der — 423; — reziproker Systeme 424; — einer Involution 430; gemeinsame — zweier auf demselben Träger liegenden Involu-tionen 432; — zyklischer Kollinea-tionen 436; Bestimmung der — einer Verwandtschaft mittels extensiver Brüche 1463.
- Doppelpunkte ebener Vielecke 7, ihre mögliche Anzahl 8.
- Doppelverhältnis, deskriptive Defi-nitionen des — ses 75; Studysche Defi-nition des — ses 382; — von vier Punkten einer Geraden 403; die sechs verschiedenen Werte des — ses 403; harmonisches — 404; äquianharmo-nisches — 404; Ausdehnung des Begriffs des — ses auf Elementarge-bilde höherer Stufe 405; — der vier Punktepaare 433; komplexes — 652, seine Invarianz gegenüber Kreisver-wandtschaften ohne Umlegung der Winkel 653; — koordinaten 698; — von vier Punkten einer Ebene 821; geometrische Deutungen des — ses 822; — von vier Punkten auf der Kugel 848.
- Doppelwinkel 822.
- Drall 1533.
- Drehung der Einheitskugel um ihren Mittelpunkt 767; — des Raumes um einen festen Punkt 1368; Zerlegung einer solchen — in zwei Anwendungen 1369; — um eine feste Gerade 1373; Zusammensetzung und Vertauschbar-keit von — en 1374; Darstellung der — durch die Eulerschen Parameter 1375, durch die Eulerschen unsym-metrischen Winkel 1378; — des  $R_4$  um einen festen Punkt 1387; Gruppe der — en des Euklidischen  $R_n$  um seinen Ursprung 1415.
- Drehungspol kongruenter Systeme 422.
- Dreieck, Haupt— vereinigter kollinea-rer Ebenen 421; perspektive — e 427; —, das einem andern ein- oder um-beschrieben ist 429; sphärisches — siehe unter  $S$ ; Kreisbogen— 838; Nachbar— 840; rechtwinkliges — 967; pythagoreische — e 971; heronische — e 972; gleichschenkliges und gleichsei-tiges — 973; trigonometrische Grenz-formeln des — s 974; Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des — s 975, trigonometrische 976; Umkreis des — s 978; Berührungskreise des — s 978; Höhen des — s 981; — der drei Höhenfußpunkte des — s 983; Schwer-punkt des — s 983; Schwerpunkt des — umfanga 984; Ecktransversalen des

- s 985; beliebige Transversalen des —s 989; Flächeninhalt des —s 989; Produkt zweier —sinhalte 990; das ebene — als Grenzfall des sphärischen 1051; Inhalt des —s in der hyperbolischen Geometrie 1161; Aufsatz—e 1217; perspektive —e in der neueren —sgeometrie 1220; mehrfach perspektive —e 1221; orthologe —e 1222; metaparallele —e 1224; Um—e 1226; In—e 1227; ähnliche 1228; Fußpunkts—e 1229; metaharmonische —e 1230; Brocardsche —e 1269; Kiepertsche —e 1269; Neubergsche —e 1270.
- Dreiecksband 28.
- Dreiecksungleichung 167.
- Dreikant 840; —spolyeder 50, deren Einteilung in Stämme und Bereiche 81.
- Dreiteilung des Winkels, Unmöglichkeit der — — mit Zirkel und Lineal 796; — — als kubische Konstruktion 806; — — mittels der Quadratrix 1089; Mechanismen zur — — 1109; Näherungskonstruktionen zur — — 1114; Literatur zur — — 1115.
- Dualität, Geltungsbereich des Gesetzes der — 93; Entdeckung des —sprinzips durch Poncelet und Gergonne 232; Aufstellung des —sprinzips in allgemeiner Fassung durch Moebius 234; analytische Fassung der — durch Plückers Ebenenkoordinaten 694; — sphärischer Sätze 1037; topologische —sätze 186, 203.
- Durchdringung, Behandlung der —skurven krummer Flächen durch Monge 563; Bedeutung der — zweier Flächen für die Schattentheorie 581; —skurven zweier  $F_2$  586, zweier Regelflächen zweiter Ordnung 587.
- Dyade 1330; allgemeine — 1331.
- E**
- Ebene, Definitionen der — mit Hilfe der Kongruenz und der Bewegung 21; Definition der — durch die Postulate der Verknüpfung 22; Flächeneigenschaften der — 24; vollständige — im projektiven Raum 73; imaginäre — 455; Koordinaten— 616; Gleichung der — in Parallelkoordinaten 623; orientierte — 626; Einheits— 697; Harmonikal— 699; Gaußsche — 782; absolute — 903; — einer Quaternion 1317.
- Ebenenkoordinaten, Plückersche — 692; Gleichung eines Punktes in — 693; allgemeine — 695; lineare — 696; tetrametrische — 697, ihre Deutung als Doppelverhältnisse 698; besondere Arten von — 701; tripolare — 705.
- Ecke, Dualität zwischen körperlicher — und sphärischem Polygon 11; — eines Simplex 187.
- Eckensinus des sphärischen Dreiecks 1049, seine Ableitung mittels Punktrechnung 1489.
- Eichmaß 794.
- Einfachheit der Konstruktionen 529, Maß der — 531; logische — 1109; numerische — 1110.
- Einheitspunkt der ebenen Parallelkoordinaten 605; — der räumlichen Parallelkoordinaten 616; — der homogenen Koordinaten im  $R_n$  628; — der Tetraederkoordinaten 637.
- Einheitsstrecke 605.
- Einheitsübertrager 128.
- Einschiebungsaufgaben 806.
- Einseitige  $M_2$  158; —  $M_3$  162; — Lagerung einer  $\mathfrak{M}^n$  in einer  $\mathfrak{M}^{n+p}$  203, 220.
- Einsiedler 135.
- Element, v. Staudts Definition imaginärer —e 242; bikomplexe —e 248; — zweiter Ordnung nach Study 323; —e einer Konfiguration 482; Konnex— 755; uneigentliche —e zweiter Ordnung 196.
- Elementarflächenstück der Analysis situs 160; Minimahlzahl von bedeckenden —en 197.
- Elementargeometrie, Definition der — als Invariantentheorie der Hauptgruppe 298; Abgrenzung der — 773; Behandlung der — mit Punktrechnung 1493.
- Elementaroperationen, deskriptive 529; Einteilung der — 530; Verwertung der Stufenzahl der — als Maß der Einfachheit einer Konstruktion 531; Einfluß der — auf die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen 533.
- Elementarraumstück 163;  $n$ -dimensionales — 195.
- Elementarteiler, Theorie der — 383.
- Elementarverwandtschaft von Strecken- und Flächenkomplexen 159; — von Raumkomplexen 163.

- Ellipse, Definition und Haupteigenschaften der sphärischen — 587; Brocardsche — 1199; Steinersche Um— 1211, ihre Gleichung 1236; Steinersche In— 1211, ihre Gleichung 1246.
- Elliptische Ebene, Einseitigkeit der — 92; Bild der — 92.
- Elliptische Funktionen, Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit der Theorie der —  $n$  — 854.
- Elliptische Geometrie, absolute Fläche der —  $n$  — 90; Gültigkeit des Dualitätsprinzips in der —  $n$  — 93; Identität der —  $n$  — mit der Euklidischen Geometrie auf einer bzw. zwei Kugelflächen 366; Beziehungen der Reyeschen Konfiguration zur —  $n$  — 499; Unterschied zwischen sphärischer und —  $r$  — 1165; Veranschaulichung der zweidimensionalen —  $n$  — durch den Geradenbüschel 1167; axiomatische Grundlagen der —  $n$  — 1170.
- Elliptische Koordinaten, allgemeine — — 674; — — in der Ebene 678; spezielle — — 678; — — im Bündel 679; — — auf der Kugel 680; projektive verallgemeinerte — — 682; — — einer Geraden 735; — Polar— 752.
- Elliptische Maßbestimmung als Sonderfall der Cayleyschen 87; Krümmungsmaß der —  $n$  — 89.
- Elliptischer Raum, Bewegungen und Umlagungen des —  $n$  — es 1392; Abbildung des Kontinuums der reellen Speere des —  $n$  — es 1393; Abbildung der Bewegungen des —  $n$  — es 1394; Bewegungen des dreidimensionalen —  $n$  — es 1403.
- Endlichgleichheit 917.
- Entfernung zweier Punkte als Invariante in bezug auf den Kugelkreis 85; — — nach de Tilly 104; — — im  $R_n$  628; — — in pentasphärischen Koordinaten 668; — — mittels der Koordinaten der Kreispunkte 812; obere Grenze der — — —, die im Innern oder auf dem Rande eines Dreiecks liegen 1276; — — — in Punktmenngen des  $\mathbb{R}^n$  148; — — — in metrischen Räumen 166.
- Epizykloide als analytische Linie 134; — als Rollkurve 588.
- Ergänzung einer Einheit  $m^{\text{ter}}$  Stufe 1440; — einer Größe  $m^{\text{ter}}$  Stufe 1441; Zusammenhang der — mit den extensiven Brüchen 1458; geometrische Anwendungen der — 1489; absolute — 1537; Begriff der — bei Peano 1545.
- Ergänzungsgleichheit 940.
- Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie 836.
- Erhaltung der Anzahl, Prinzip der — — — 277.
- Erreichbarkeit 202.
- Erzeugung krummer Flächen 562; lineale — von algebraischen Kurven und Flächen 1513.
- Eulersche Formel, Verwendung der —  $n$  —  $e^{i\pi} + 1 = 0$  zum Beweis der Transzendenz von  $\pi$  934; — — für den Inhalt des Tetraeders 1016.
- Eulersche Gerade 984.
- Eulerscher Komplex 62; — — und Isomorphismus 117.
- Eulersche Parameter, Einführung der —  $n$  — in die Theorie der orthogonalen Substitutionen 851; Ableitung der —  $n$  — 852; Zusammenhang der —  $n$  — mit den Winkeln des sphärischen Dreiecks 853; homogene — — der ternären orthogonalen Transformation 1371; rationale Darstellung der Koeffizienten einer eigentlichen ternären orthogonalen Substitution durch die —  $n$  — 1375; Darstellung der Richtungswinkel der Drehachse und des halben Drehwinkels durch die —  $n$  — 1376.
- Eulersche Polyederformel, Beweis der komplexistischen und gewöhnlichen — — in der Komplexustheorie 181; erweiterte komplexistische — — für  $n$  Dimensionen 182; verallgemeinerte komplexistische — — für einen  $C_n$  183; spezielle — — 190; eigentliche — — 198; Literatur über die — — 199; eigentliche — — für einseitige Flächen 201; — — als Grundlage der elementaren Lehre von den Vielflachen 1051; Beweise der —  $n$  — 1052; Ausnahmen, die die — — unter gewissen Bedingungen erleidet 1053; Folgerungen aus der —  $n$  — 1054; Entstehung der —  $n$  — durch Induktion 16; Entdeckung der —  $n$  — bereits durch Descartes 19; Beweis der —  $n$  — durch Steiner 20, durch Hirsch und Legendre 20, durch Cauchy 21, durch Staudt 21; erste Erweiterung der —  $n$

— durch Lhuillier 22, zweite 23, durch Jordan 24; Verallgemeinerung der —  
— auf den  $R_n$  88.

Eulersches Problem der 36 Offiziere 178.

Eulerscher Satz über die Krümmung von Flächenkurven 1521.

Eulersche Winkel der Transformation rechtwinkliger Koordinaten 763; rationale Darstellung der Koeffizienten dieser Transformation durch — — 766; Zusammenhang der — — mit den elliptischen Funktionen 856; geometrische Bedeutung der — — 1378.

Exhaustionsverfahren, Anwendung des —s zum Beweis der Flächengleichheit 48, zur Bestimmung von Rauminhalten 942.

Existenzialaxiome 168.

Exponentialgröße einer Quaternion 1314.

Extremwerte symmetrischer Dreiecksfunktionen als Mittel zur Definition merkwürdiger Punkte 1185; — von trigonometrischen Ausdrücken und Entfernungen merkwürdiger Punkte des Dreiecks 1195.

Exzeß, sphärischer — 1048.

## F

$F_\sigma$  172.

Fachwerke, Anwendung der Polyedertheorie auf die Theorie ebener — 43.

Faltung 1582.

Fanosches Postulat 82.

Fehler, —theorie geometrischer Konstruktionen 532; —ellipse 535; —kurve 537.

Feld, drei gleichsinnig ähnliche —er in allgemeiner Lage 1267; drei ähnliche —er über den Seiten des Urdreiecks 1268.

Feldableitung 1586.

Fermatscher Satz über eine Kreisfigur 1033; — Punkt 1219.

Feuerbachsche, —r Kreis 780; Verallgemeinerung des Satzes über den —n Kreis auf das Kreisbogenzweieck 820; Eigenschaften des —n Kreises 1203, ausführlicher 1258; — Hyperbel 1245; —r Punkt 1263.

Figur, Definition der geradlinigen — nach Veronese 884; Definition und Kongruenz der —en nach Hilbert 887; isoperimetrische —en 1119; Moebius-

sche — zweier Tetraeder, die einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind 1172; Torricellische — 1218; Jacobische — 1219.

Fixpunktsätze 200.

Fläche, Definition der — eines Vielecks 26; Erzeugung einer — nach Riemann 64; absolute — zweiten Grades 90; isometrische —n 96; —n konstanter Krümmung 97; geodätische — 101; Cliffordsche —n 116, 1169; Definition der analytischen — 149, ihre Darstellung durch Gleichungen 150; Riemannsche — 217, aufgefaßt als absolut kompakte, homogene  $M^2$  183;  $W$ -—n 306; —n mit unendlich vielen projektiven Transformationen in sich 307; Kummersche — 501; — zweiter Ordnung 585, ihre Behandlung mit Quaternionen 1354, mit Punktrechnung 1509; Krümmung der —n 592; Definition der Gleichung einer — 621; Koordinaten— 631; anallagmatische — 663; Regel— 723; — gleichen Abstandes in der hyperbolischen Geometrie 1150; Behandlung der algebraischen —n mit Punktrechnung 1511; Hessesche — 1512; Entwicklung des Begriffs der — 181; homogene 184; geschlossene und ungeschlossene — 185; Homöomorphie der —n 196; schlichtartige — 197; einfach zusammenhängende — 197; Orientierbarkeit einer — 198.

Flächenbaum 181.

Flächeneinheit 922.

Flächenelement 353.

Flächeninhalt, Behandlung des —s ebener Figuren bei Euklid 47, ihre Kritik 48; — krummliniger Figuren 50; Zusammenhang der Theorie des —s mit dem Parallelenpostulat 51, mit dem Archimedischen Postulat 52; Formeln für den — des Dreiecks 990; — des Vierecks 996; — des bizen-trischen Vierecks 1000; — des Vierecks aus den Seiten und Diagonalen 1006; — von Vielecken 1011; — des sphärischen Dreiecks 1037; — des Dreiecks in der hyperbolischen Geometrie 1159.

Flächenkomplex 157.

Flucht, Einfluß der Einführung der —elemente auf die Entwicklung pro-

- jektiver Vorstellungen 392; —punkte projektiver Punktreihen 412; —linien kollinear Ebenen 412; —ebenen kollinear Räume; —maßstab 550.
- Folge von Quaternionen 1313; —produkt 1459.
- Form, logische — der geometrischen Entwicklung 10; monotype —en 209; Hermitesche — 251; Theorie der algebraischen —en 299; Theorie der quadratischen —en 308.
- Formel, Delambresche —n 842; L'hui-liersche —n 843; Simpsonsche — 952; Cagnolsche — 1050; Serretsche — 1051; Frenetsche — 1360; allgemeine Frenetsche — 1577; Christoffelsche —n 1579.
- Fortsetzung einer Seite eines Polyeders 26, im  $R_n$  85.
- Frenetsche Formeln 1360; — Pfeilgleichungen 1522; allgemeine — Formeln 1577.
- Füllgrößen 1453.
- Fuge 551.
- Fundamentalpolygon, —polyeder 194.
- Fundamentalsatz der Projektivität 77; — der Ähnlichkeitslehre 889; — der projektiven Geometrie 900.
- Fundamentalsystem von Umgebungen 158.
- Funktion, Hyperfuchssche —en 252; synektische —en 348; Zusammenhang zwischen elliptischen und trigonometrischen —en 854; Quaternionen—en 1333; —en extensiver Größen 1466.
- Funktionalrechnung 153.
- Funktionsstreifen 147.
- Fusion 906.
- G
- $G_\delta$  172.
- Galoissche Gruppe 508.
- Gaußsche Ebene 782.
- Gaußscher Integralsatz 1344.
- Gaußsche Koordinaten 744.
- Gaußsches Krümmungsmaß 96; seine Bedeutung für abwickelbare Flächen 282; Verallgemeinerung durch Riemann 347; Bedeutung für die Nichteuklidische Geometrie 1163; — abgeleitet mit Punktrechnung 1529.
- Gebiet, Jordansches — 67.
- Gebilde, hyperalgebraische — 247; homogenes  $n$ -dimensionales 183.
- Gebüsch, Kugel- 709; Strahl- 729; Haupt- 741.
- Genauigkeit geometrischer Konstruktionen 531; — von Annäherungskonstruktionen 805; — bei ungünstigen Lageverhältnissen 1111.
- Geometrie, Prinzipien der — 1 ff.; Gegenstand der — 8; Einteilung der — nach den zugehörigen Transformationsgruppen 56; Prinzipien der projektiven — 70 ff.; nicht-Desarguessche — 76; Hilbertsche — 106; nicht-Archimedische — 117 ff.; nicht-Pascalsche — 124; euklidische nicht-Archimedische — 125; nicht-Pythagoreische — 126; nicht-Sacchierische — 128; semi-Euklidische — 129; Unterschied zwischen synthetischer und analytischer — 223; Grundbegriffe der analytischen — 224; Beziehungen zwischen synthetischer und analytischer — 228; Beginn der neueren synthetischen — mit Poncelet 231; synthetische Behandlung der — durch Steiner 235, durch seine Nachfolger 236; Entwicklung der analytischen — durch Moebius und Plücker 238 ff.; — der Lage 241 ff., algebraische — 253 ff.; mehrdimensionale algebraische — 267 ff.; mehrdimensionale projektive — 269 ff.; — auf einem algebraischen Gebilde 272 ff.; — auf einer algebraischen Kurve 274; — auf einer algebraischen Fläche 275; abzählende — 276; Differential- 277; — im begrenzten Raumstück und des Gesamtraumes 279; — der analytischen Gebilde 281; affine — 302; — der Dynamen 312; konforme — 313; Kugel- 316; — de direction 318; Studys — der Elemente zweiter Ordnung in der Ebene 323; radial-projektive — 330; — der Somen 335; — der inkompressiblen Flüssigkeiten 343; — auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit 356; —en mit ähnlichen Gruppen 358 ff.; natürliche — 379; — der reziproken Radien 386; projektive — 389 ff., deren Konfigurationen 481 ff.; darstellende — 522 ff.; beschreibende — 560; Gegenstand der analytischen — 611; äquiforme — 618; Linien- 723; analytische Behandlung der Elementar- 774; algebraische Behandlung insbesondere der Dreiecks- 779; erwei-

- terte Pascal-Carnotsche — 781; Vierecks— 783; vektorielle Behandlung der Dreiecks— 785; Abgrenzung der Elementar— 862; Euklidische und nicht-Euklidische — 863; elementare Euklidische — 874 ff.; logarithmisch-sphärische — 1143; absolute — 1149; Riemannsche — 1164; neuere Dreiecks— 1173 ff.
- Geometrisch, —e Systeme von Minkowski und Hilbert 106; algebraisch—e Theorien der Kurven und Flächen 261; rein —e Theorie der algebraischen Gebilde 262; —e Theorie der Differentialgleichungen 285; —e Gruppen 289 ff.; —e Eigenschaften der Konfigurationen  $n_3$  489; —e Zeichen- und Bildersprache 520; —e Begriffe und ihre Zeichen 522; —e Grundoperation 525; Einfachheit —er Konstruktionen 528; Genauigkeit —er Konstruktionen 531; —e Konstruktionen 789; —e Analyse 1282; —e Addition von Strecken 1284; —e Anwendungen der Methode der Äquipollenzen 1298; —e Theorie der Quaternionen 1316; —e Anwendungen der Quaternionen 1346; —e Deutung der Biquaternionen 1399; —e Anwendungen der Ausdehnungslehre 1485 ff.; —e Differentiation nach Knoblauch 1576, Ricci und Levi-Civita 1581, Hessenberg 1587.
- Geometrographie 804; Kritik der — 1110.
- Gerade, Definitionen der —n 17; Linieneigenschaften der —n 23; Einführung der uneigentlichen —n 72, als Folge des Kontinuitätsprinzips 395; isotrope —n 455; Pascalsche — 494; merkwürdige —n 1194; Lemoinesche — 1199; Symmetrie—n 1211; Wallace — 1234.
- Gerüst 222.
- Gesamtfehler einer Konstruktion 536.
- Geschlecht einer  $M_3$  200; einer algebraischen Kurve 272; Invarianz des —s algebraischer Mannigfaltigkeiten 356.
- Gesetz der rationalen Indizes 832.
- Getrennt 162, 228.
- Gewinde 730; —koordinaten 732.
- Gitter 129.
- Glanzpunkt 581.
- Gleichung, Monge-Ampèresche —en 352; Pfaffsche — 354; Nepersche —en 844; Delambresche —en 850; Hamiltonsche —en 1367 (s. auch H.); Rodriguesche —en 1375; —en extensiver Größen 1482.
- Gradient 1341.
- Graphen 177, 221.
- Grenzformeln, trigonometrische — des ebenen Dreiecks 974.
- Grenzlilien und Flächen 1145.
- Größenlehre, astralische — 1142.
- Grund, Moebiusche —form für eine  $M_2$  196; —gebilde 406; —flach 54.
- Gruppe, Postulate bezüglich der — der Bewegungen 111; Definition der — 292, der endlichen kontinuierlichen — 294; Zusammensetzung einer — 294; gemischte — 295; Haupt— 297; allgemeine und erweiterte projektive — 299, ihre Untergruppen 301; affine — 303; speziell-affine oder äquifforme — 304; projektive — mit invarianter  $M_{n-1}^2$  308, Beispiele dafür 310; — der reziproken Radien 312; — aller konformen Transformationen 312; Unter—n der — der reziproken Radien 315; endliche kontinuierliche —n von Berührungstransformationen 320, irreduzible 322; — der dualen Kollineationen 327; — der radialen Projektivitäten 327; — der Cremonaschen Transformationen 339 ff.; Jonquièresche —n 342; — aller reellen konformen Punkttransformationen der Ebene 343; Moebiusche — 343; unendliche kontinuierliche —n von analytischen Punkttransformationen der Ebene 344; — aller analytischen Punkttransformationen 345; — der äquidistanten Berührungstransformationen 347; Laguerresche — 349; unendliche irreduzible —n von analytischen Berührungstransformationen 350; — aller analytischen Berührungstransformationen 351; — aller Transformationen der orientierten Strahlen des  $R_3$  353; — der orientierten Berührungstransformationen, die parallele Vereine in ebensolche überführen 353; —n von Punktmannigfaltigkeiten 355; ähnliche —n 358; Definition der Invarianten einer — 372; erweiterte — 373; zyklisch-projektive — 435; äquianharmonische — 435; — der Reyeschen Konfigura-

- tion 498; — der Heßschen Konfiguration 500; Kummersche — 502; Kleinsche — 504; Konfiguration einer — 507; Galoissche — des Zahlkörpers 508; anallagmatische — 669; Polyeder—n 831; —n sphärischer Dreiecke 840; dreigliedrige kontinuierliche — der Drehungen des Raumes um den Anfangspunkt 1369; viergliedrige — der eigentlichen Drehstreckungen des Euklidischen Raumes 1371; gemischte — aller eigentlichen und uneigentlichen kongruenten Transformationen des Raumes 1372; —n von quaternären Transformationen 1386; — aller eigentlichen Drehstreckungen des  $R_4$  1388; — der  $\infty^0$  eigentlichen projektiven Transformationen des Raumes, die eine  $F_2$  invariant lassen 1402; — der  $\infty^7$  Ähnlichkeitstransformationen des Euklidischen  $R_3$  1407; — der  $\infty^{10}$  konformen Transformationen des Euklidischen  $R_3$  1409; — der Drehungen des Euklidischen  $R_n$  und der Bewegungen des elliptischen  $R_{n-1}$  1415; — der Bewegungen eines beliebigen  $R_n$  1416; Polyeder—n 108, deren Fundamentalbereiche 111; kristallographische —n 115; —n aus Isomorphismen 116; Bewegungs—n des Euklidischen  $R_n$  129, des hyperbolischen  $H_n$  132; Drehungs—n des  $H_n$  136.
- Guldinsche Regel 962.
- H**
- Häufungspunkt einer Punktmenge des  $R_n$  148; Axiome des —s 155; Raum mit Festsetzungen über —e 154; vollständiger — 164.
- Halbkompakt 232.
- Hamiltonscher Satz 844; verallgemeinerter — 848; — Differentialoperator 1340.
- Hamilton Cayleysche Gleichung 1327, in der Ausdehnungslehre 1464, mit Punktrechnung 1506.
- Harmonikalebene 699.
- Hauptachse einer Kollineationsgruppe 507.
- Hauptdreieck vereinigter kollinearere Ebenen 421; — einer quadratischen Verwandtschaft 478; — der ternären Vierergruppe 507.
- Hauptebenen einer quaternären Kollineationsgruppe 515.
- Hauptformeln, einige — der Dreiecksgeometrie in Normalkoordinaten 1191.
- Hauptgebüsch 741.
- Hauptgerade einer quaternären Kollineationsgruppe 515.
- Hauptgleichung 1462.
- Hauptgruppe, Definition der — 295; Zusammensetzung der — aus Untergruppen 297; — räumlicher Änderungen 768; Invarianten der — 809; — als Kollineationsgruppe, die den Kugelkreis ungeändert läßt 811.
- Hauptinvariante 381; —n der Hauptgruppe 810.
- Hauptlinien einer quadratischen Verwandtschaft 478; — einer Fläche 478.
- Hauptpunkt der quadratischen Verwandtschaft 478; — des Horizonts 550.
- Hauptsatz, isoperimetrischer — 1123.
- Haupttetraeder 422.
- Hauptzahlen einer Verwandtschaft 1463.
- Heftung 180, 186.
- Helmholtzsche Postulate 107.
- Heptaeder 29.
- Hermitesche Form 251; — Bewegung 252; — Kollineation 423.
- Hessesche Kurve 255; — Konfiguration 491; — Koordinaten 606; — Normalform der Geradengleichung 614, der Ebenengleichung 626; — Fläche 1512.
- Heßsche Konfiguration 500.
- Hexagonoid 139.
- Hilbertsche Winkelaxiome 885; — Raum 173.
- Höhen des Dreiecks 981; — des Tetraeders 1059; —hyperboloid des Tetraeders 1060, seine Ausartungen 1171.
- Homöomorph, Definition—er Strecken- und Linienkomplexe 159; —e  $C_3$  162; Homotopie —er Komplexe 165; —e Domänen 166; Hauptsatz über —e eindimensionale Mannigfaltigkeiten 188, über —e Flächen 189; Definition der —ie 146; —ieproblem 147, 196, 209.
- Homogen, topologisch— 174; —es  $n$ -dimensionales Gebilde 181; —e  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit 187; —  $n$ -dimensional 232.
- Homologie 179.
- Homothetie 802.

Homotopie 165; Bedingung für — 205.  
 Hülle, abgeschlossene 160.  
 Hyperalgebraische Gebilde 247;  
 ihre Ordnung 248; ihre direkte Unter-  
 suchung 250 ff.  
 Hyperbel, Strahl— 535; gleichseitige  
 Um— des Dreiecks 1242; Kiepert'sche  
 — 1243; Feuerbach'sche —n 1245.  
 Hyperbolische Funktionen 1142.  
 Hyperbolische Geometrie, Begrün-  
 dung der —n — durch Lobatschewskij  
 und Bolyai 1152, durch Hilbert 1153,  
 durch Klein 1153; Beweis der Wider-  
 spruchsfreiheit der —n — 1154; Ab-  
 bildungen der —n — 1155; Beweise  
 der Parallelenkonstruktion in der —n  
 — 1157; andere Konstruktionen 1158;  
 Flächeninhalt des Dreiecks in der —n  
 — 1159; Trigonometrie der —n —  
 1160; Stereometrie 1161; Tetraeder  
 in der —n — 1161.  
 Hyperflächen 251.  
 Hypozykloide, Steinersche — 1237.

## I

Identitätsprinzip 255; — von geome-  
 trischen Gebilden als spezielle Trans-  
 formation 291; — als spezielle zykli-  
 sche Projektivität 435.  
 Imaginär, Erste Erwähnung —er Ele-  
 mente bei Poncelet 233; Behandlung  
 der —en Elemente durch Chasles 237;  
 ihre analytische Behandlung durch  
 Plücker 241; v. Staudts —theorie 242,  
 ihre Weiterbildung 243 ff.; reelle Dar-  
 stellung —er Grundformen 246; Ein-  
 führung —er Einheiten zur Verallge-  
 meinerung der äquivalenten Transfor-  
 mation 349; Bedeutung der Einführung  
 des —en Kugelkreises 368; Einfüh-  
 rung der —en Elemente als Folge des  
 Kontinuitätsprinzips 453; Zusammen-  
 hang der —en Gebilde mit den reellen  
 455; Einordnung der —en Gebilde in  
 die projektive Geometrie 456; Kon-  
 struktionen im Fall —er Elemente  
 457; weitere Arten der Definitionen  
 —er Elemente 458; Weiterbildung der  
 —theorie 459 ff.; Koordinaten eines  
 —en Punktes 616; Bedeutung der —en  
 Kreispunkte 904.  
 Index eines Fixpunktes 200.  
 Indexkurve und -fläche 1360.  
 Indikatrix einer Strecke und Fläche

158; — eines  $S_3$  162; — einer Raum-  
 kurve 592; — eines Vielflachs 26; Be-  
 ziehung zwischen — und Seite 27; Ver-  
 allgemeinerung des Begriffs der — 217.  
 Inkegelschnitt, Klassengleichung des  
 —s des Koordinatendreiecks 1193;  
 Brennpunkte des —s 1208; Eigenschaf-  
 ten der —e 1245.  
 Inklinatation einer Strecke 1295.  
 Inkreis des Dreiecks 979; Eigenschaf-  
 ten des —es vom Standpunkt der  
 neueren Dreiecksgeometrie aus 1247.  
 Inneres Produkt extensiver Größen  
 1448; — Quadrat extensiver Größen  
 1449; geometrische Bedeutung des —n  
 Produktes 1496; —r Punkt einer Menge  
 156.  
 Integral einer Quaternionenfunktion  
 1343; — extensiver Größen 1473.  
 Invariante, Entfernung und Winkel  
 als —n in bezug auf den Kugelkreis  
 83; —ntheorie 259; Kleins Auffassung  
 der Geometrie als —ntheorie 295;  
 —n der Kollineationsgruppe des  $R_3$   
 302; projektive Gruppen mit —n Kur-  
 ven und Flächen 305, mit —r  $M_{n-1}^2$   
 308; —n der Lieschen Kugelgeometrie  
 317; —n der Berührungstransforma-  
 tionen 321; —n der Cremonaschen  
 Transformation 340; Differential—n  
 345; — Geschlechter und Moduln 356;  
 —ntheorie linearer Systeme algebrai-  
 scher Formen 362; Differential—n 372;  
 absolute und relative —n 372; lineare  
 —ntheorie 374, ihre Deutung durch  
 die projektive Geometrie 375, durch  
 die affine Geometrie 377; Behandlung  
 einer Geometrie durch ausschließliche  
 Berücksichtigung der zugehörigen —n  
 379; —n der Trigonometrie 379; —n  
 von Kurven und Flächen 380; Bewe-  
 gungs—n 381; das Doppelverhältnis  
 als fundamentale absolute — der pro-  
 jektiven Geometrie 382; ganze Bewe-  
 gungs— 809; —n von Kreisen gegen-  
 über der  $G_6$  817; —s äußeres Produkt  
 extensiver Größen 1437; Dimensions-  
 zahl als topologische — 195; Zell-  
 teilungs— 214.  
 Inverse Transformation 291; — einer  
 Quaternion 1310.  
 Inversion 312; Zusammenhang der  
 pentasphärischen Koordinaten mit der  
 Gruppe der —en 668; Zusammen-



- setzung einer allgemeinen linearen Transformation aus —en an Projektivitäten 718; Anwendung der — auf ein Schiebungsproblem 802; elementare Theorie der — 1030; Zusammenhang der — mit der Polarentheorie 1031; Linien— 1035; Zusammenhang der — mit der stereographischen Projektion 1042; — am Umkreis des Dreiecks 1214.
- Involution, Kötters Theorie der —en 264, der —snetze 265; Definition der — 430; elliptische und parabolische — 431; gemeinsame Elemente zweier —en 432; zentrische und schiefe —en 433; Anti— 461; windschiefe — 730; die isodynamischen Punkte als Doppelpunkte einer — 824; absolute — eines Strahlenbüschels 903; — konjugierter Richtungen 1510; topologische — 175.
- Inzidenz 481; —bedingung in der Schreibweise der Quaternionen 1349.
- Isodynamische Punkte als Schnittpunkte der drei Apollonischen Kreise des Dreiecks 823 f.; ihre Koordinaten 1215.
- Isogonal-Kugel eines Komplexes 715; —kreis von zwei gegebenen Kreisen 1028; —e Verwandtschaft 1207 ff.
- Isogonische Punkte 1218.
- Isomorphismus 59; mehrstufiger — 64; Gruppen aus —en 116.
- Isoperimetrie bei den Alten 1119; — bei Lhuillier 1120, Legendre 1121, Gergonne 1122, Steiner 1122 ff., Ergänzungen der Arbeiten Steiners 1127; — bei Vielecken 38; — bei Polyedern 39 ff.
- Isophengen und Isophoten 581; ihre Konstruktion 582.
- Isotome Verwandtschaft 1210 ff.
- Isotopie geschlossener Mannigfaltigkeiten 166; — einer Kurve mit einem Streckenzug 207; Hauptproblem der — 215, seine Verallgemeinerung 216.
- J**
- Jacobische Figur eines Dreiecks mit Aufsatzdreiecken 1219.
- Joch 176.
- Jonquièr'sche Gruppe 342.
- Jordan, —scher Satz 59, 201; —sches Gebiet 67; —kurven 146, 201; vervollständigter —scher Satz 146; —sche Mitte 175; —sches Schema 501; —sche Fläche 201.
- K**
- Kalkül, baryzentrischer — 1289; abgekürzter baryzentrischer — 1292; Ricci— 1581, seine Mängel 1585, seine Weiterführung 1586, sein Verhältnis zur direkten geometrischen Analyse 1595; Situations— von Scheffler 1552.
- Kanal 191; —fläche 590.
- Kantengesetz 957.
- Kardioiden 546.
- Kartenfarbenproblem (Vierfarbensatz) 177, 220.
- Kegel, absoluter — 777; Schwerpunkt des —s 1057.
- Kegelschnitt, Einführung des absoluten —s durch Cayley 83; Konstruktionsarten der —e 584; Tangenten des absoluten —s 694; sphärischer — 1043; Behandlung der —e vor und bei Archimedes 1072, bei Apollonius 1073 ff., in der Neuzeit 1076; Brennpunkteigenschaften der —e 1078; metrische Beziehungen bei —en 1080; Durchmesser der —e 1081; Krümmungsradius der —e 1082; besondere —e 1083; ähnliche —e 1084; Um—e des Dreiecks 1239; In—e des Dreiecks 1245; Pol—e des Dreiecks 1250; Behandlung der —e mit Punktrechnung 1508.
- Keilkoordinaten 648.
- Kernfläche 424; — eines Dreikants 840.
- Kette im Sinne der Analysis situs 176; v. Staudtsche — 246; —  $n$ ter Stufe 250; —nkongruenz 335; Entstehung der —n aus Antiinvolutionen 461; analytische Darstellung der — 755.
- Kiepert'sche Hyperbel 1243.
- Kleinsche Konfiguration 504; —Linienkoordinaten 734.
- Knoten, Multiplizität eines —punktes 171; — 208; amphicheiraler — 212; —linie 763; s. a. unter „Verknötung“.
- Koeffizient einer Zelle 7.
- Körper im Sinne der Gruppentheorie 296; konvexer — im  $R_n$  90; platonische — 101; archimedische — 113.
- Kollineation, duale —en im hyperbolischen und Euklidischen Raum 327; radiale — 329; somatische — 336; Einführung des Begriffs der — durch Möbius 402; axiale und gescharte — 422; Achse und Zentrum einer — 425; zentrische — 426; — in ein- und umbeschriebener Dreieckslage 429; zykli-

- sche — 436; Pseudo— 508; — als Übertragungsprinzip 561; —en, die den Kugelkreis nicht ändern 811; Eigenschaften einer — 908; —en im Raum 912; harmonische — 1197; Klassifikation der —en 1328; Behandlung der —en mit Quaternionen 1353.
- Kompakt** (compact) 153, 185; absolut — 153; parfaitement — en soi 163; im Kleinen in sich — 164; compactifiable 185.
- Komplex**, eindimensionaler — 156; zweidimensionaler — 157; dreidimensionaler — 161;  $n$ -dimensionaler — mit Singularitäten 164; Entstehung des linearen —es aus der Liniengeometrie 311; Kugel— 708,  $n^{\text{ter}}$  Ordnung 709, linearer 715, dessen Koordinaten 716; Null— 716; ebener Kugel— 717; Strahlen— 723, spezieller linearer 729, allgemeiner linearer 730; Fundamental— 733; Behandlung des linearen —es mit Quaternionen 1352; geordneter — 58; Kanten— 50; polyedrischer — 60; endlicher, vollkommen zusammenhängender polyedrischer — 61; Eulerscher — 62; geordneter ( $n-s$ )-dimensionaler — 83;  $n$ -dimensionaler — 195; approximierender — 223.
- Komplexionssymbol** 209.
- Komponenten** einer Quaternion 1303; — eines topologischen Raumes 179.
- Kondensationspunkt** 155.
- Konfiguration**; Definition der — 482; Reyes Problem der —en 484; Bildungsweise der ebenen —en  $n_3$  487, der regelmäßigen 488; Eigenschaften der —  $n_3$  488; ebene —en auf einer  $C_3$  490; Pascalsche und Hessesche — 491; —en von Punkten und Ebenen 492; kombinatorische —en 494; Desarguessche — 495; polyedrale —en 495, deren Verallgemeinerung 496; Reyesche — 497; harmonische — 498; Gruppe der Reyeschen — 498; Hessesche — 500; Kummersche — 501; Kleinsche — 504; —en aus Kollineationsgruppen 505; — einer Gruppe 507; Oktaeder— 508; Ikosaeder— 509;  $G_{18}$ — 510;  $G_{168}$ — 511;  $G_{360}$ — 512; —en aus endlichen Kollineationsgruppen des quaternären Gebiets 514 ff.; Bedeutung der Desarguesschen — für die Dreiecksgeometrie 1220.
- Kongruenz**, Zusammenhang zwischen — und Bewegung 27 ff.; — als Projektivität 84; — im Sinne der Analysis situs 172; Strahlen— 333; Ketten— 335; — als spezielle Affinität 415; Kugel— 708; Kurven— 743; — bei Euklid 881; —axiome von Pasch 882; — bei Veronese 883; — bei Hilbert 885; direkte und indirekte — 911; Sätze über — 915.
- Konjugierte** einer Quaternion 1306; — einer Biquaternion 1397.
- Konnex** 755.
- Konstruktion**, Postulate der — 525; Ausführbarkeit der — 528; Einfachheit der — 529; Genauigkeit der — 531; Gesamtfehler einer — 536; Aufgabe der geometrischen — 789; lineale —en 790; projektive und affine —en 791; —en mit Lineal und Zirkel 792; —en mit Lineal und Streckenübertrager 794; Praxis der —en 805; kubische —en 806; — der Winkel eines sphärischen Dreiecks 853; —en im Sinne der Alten 1085; moderne Behandlung der —aufgaben 1089; —en des regelmäßigen Siebzehnecks 1097; —en mit dem Parallellineal 1104; —en mit dem Winkelhalbierer 1105; —en mit dem Zeichenwinkel 1105; Einfachheit der —en 1109; Genauigkeit der —en 1111; Näherungs—en zur Würfelverdoppelung 1113, zur Dreiteilung des Winkels 1114, zur Kreisteilung 1115, zur Rektifikation und Quadratur des Kreises 1117; —aufgaben der nicht-Euklidischen Geometrie 1149.
- Kontingenzwinkel** 117.
- Kontinuitätsprinzip** 395.
- Konvergenz** einer Vektorfunktion 1341; —raum 152.
- Konzentration** einer Vektorfunktion 1342.
- Koordinaten**, Einführung der projektiven — 74; Einführung des —begriffs in die Geometrie 224; Einführung homogener — durch Moebius und Plücker 239; Einteilung der —systeme 604; Cartesische — in der Ebene 605; Hessesche — 606; homogene Parallel— 608; räumliche Parallel— 615, homogene 616; schiefwinklige — 617; krummlinige — in der Ebene 629; allgemeine Punkt— 630; lineare Punkt—

- 634, homogene 635; Tetraeder— 635, homogene 637; tetrametrische — 638; Polyeder— 639; projektive — 641; Normal— 644; baryzentrische — 645; tetraedrische — 646; Winkel— 647; Keil— 648; Minimal— 649; nicht-lineare projektive — 654; ebene Polar— 656, räumliche 659; Kugel- und Zylinder— 660; polysphärische — 661; tetrasphärische — 662; pentasphärische — 663, orthogonale 666; bityklische — 670; — in bezug auf eine Normkurve 672; Kreis— 673; elliptische — 675; parabolische — 680; zyklische — 684; transzendente — 686; bipolare — 687; biangulare — 688; tripolare — 689; zomale — 690; logarithmische — 691; Plückersche — 692; Linien— 694; Ebenen— 695; Tetraeder— der Ebene 696; tetrametrische Ebenen— 697; nichthomogene projektive — 698; Vierpunkt— 701; Schweringsche Linien— 702; komplexe Linien— 703; polare Linien— 704; polare Ebenen— 705; Strahlen— 706; pentasphärische — einer Kugel 707; — des Kugelgebüschs 710; tetrazyklische Kreis— 711; zyklische Kugel— 711; hexasphärische — 714; — eines linearen Kugelkomplexes 716; — einer Projektivität 718; homogene — einer Fläche 719; Linien— im Raum 723, rechtwinklige homogene 725; tetraedrische Achsen— 727; Volum— 728; Gewinde— 732; allgemeine Linien— 735; Kleinsche Linien— 734; duale Strahl— 736; Somen— 738; — von Kreisen im Raum 739; — eines Kreissystems 741; — orientierter Drehkegel 742; — eines Kurvenpunktes 743; Gaußsche — 744; elliptische — auf der Kugel 748; sphärische — 745, homogene 747; Zentral— 746; Kreis— auf der Kugel 749; — auf einer  $F_2$  749; geodätische Polar— 752; natürliche — 753; — des Punkt-Linienelements 755; — der allgemeinsten algebraischen Gebilde 760; — transformation 760; astatische — 785; homogene tetrazyklische — 816; Verwendung verschiedenster — in der Dreiecksgeometrie 1180 ff.; baryzentrische — 1291; — einer Quaternion 1303; Ersatz von — durch Vektoren und umgekehrt 1346; Zusammenhang der —geometrie mit der Punktrechnung 1487.
- Korrelation, duale und radiale —en 329; singuläre — 438; Anzahl der —en, die gegebenen Bedingungen genügen 439, der räumlichen —en 441; Pseudo—en 508; Carnotsches —sprinzip 561; Darstellung einer — durch eine Gleichung 700, der allgemeinsten räumlichen — 770; Behandlung der —en mittels Quaternionen 1353, mit Punktrechnung 1506.
- Korrespondenz, hyperalgebraische —en 247; apolare —en 251; — zwischen geometrischen Gebilden 291; —prinzip 781; eindeutige — nach Veronese 884.
- Kosinussatz, sphärischer — 1048.
- Kovarianz, Christoffelsche — 1580.
- Kreis in der Analysis situs 157; Einführung imaginärer —e 777; gefährlicher — 806; — und Gerade bei Euklid 924, Veronese 925, Wellstein 926, Thieme 927; Um— des Dreiecks 978; In— des Dreiecks 979; Ähnlichkeitspunkt zweier —e 1027; Potenzpunkt dreier —e 1029; projektive Behandlung des —es 1031; Umfang des —es in der nicht-Euklidischen Geometrie 1141; Feuerbachscher — 1203; — der sechs Punkte 1209; Apollonische —e 1213; Schoutesche —e 1216; Fußpunkt—e 1232; Pol— 1251; Tucker-sche —e 1253; Lemoinesche —e 1254; Brocardscher — 1255; Bei—e 1256; Eigenschaften der Apollonischen —e 1257, des Feuerbachschen —es 1258; M'Caysche —e 1266.
- Kreisberechnung nach Archimedes 934, nach Cusanus 935, in Lehrbüchern der Elementargeometrie 936, nach Kelling und Hovestadt 937.
- Kreisbogen, Untersuchung von —dreiecken und —vierecken 838; quadrierbare —zweiecke 938, —dreiecke 939.
- Kreisketten 1026.
- Kreiskoordinaten 673; tetrazyklische — 711; — im Raum 739; — auf der Kugel 748; tetrazyklische — auf der Kugel 749.
- Kreislehre, elementare — 1023.
- Kreismessung bei Archimedes 928, bei Legendre 929, bei Veronese 930, bei Thieme 931.

- Kreispunkte s. Kugelkreis.  
 Kreisring 556.  
 Kreisteilung 1094; Näherungskonstruktionen zur — 1115.  
 Kreisverwandtschaft s. Inversion.  
 Kreuzhaube 198.  
 Kreuzung 52.  
 Kristallklassen 115.  
 Kroneckersche Charakteristik einer  $M_1$  189, einer  $M_2$  195.  
 Krümmung kollinear Kurven 414; Theorie der — 592; Total— eines Vielecks 6, eines sphärischen Vielecks 13, eines Vielflachs 32.  
 Krümmungsmaß der elliptischen Maßbestimmung 89; Gaußsches — einer abstrakten Mannigfaltigkeit 96; Bedeutung des Gaußschen —es für abwickelbare Flächen 282; Verallgemeinerung des —es durch Riemann 347; Bedeutung des —es für die nicht-Euklidische Geometrie 1163; Bestimmung des —es mittels Quaternionen 1359, mit Punktrechnung 1529.  
 Krümmungsradius eines Kegelschnitts 1082.  
 Kubatur mit Punktrechnung 1535.  
 Kugel im Sinne der Topologie 161; — mit Kreuzhauben 198; Gleichung der — 661; Potenz einer — in einem Punkt 662; gemeinsame Potenz zweier —n 665; Symmetrie—n einer anallagmatischen Fläche 669; Berührungs—n des Tetraeders 1058; Kanten—n des Tetraeders 1064; —n mit Kanälen und Henkeln 23.  
 Kugelfunktion 1572; zweiseitige — 1574; Vierer— 1575.  
 Kugelgebüsch 709.  
 Kugelgeometrie, niedere — 314; höhere — 316; Behandlung der — mit Koordinaten 706 ff.  
 Kugelkomplex 708; —  $n^{\text{ter}}$  Ordnung 709; linearer — 715, seine Koordinaten 716; ebener — 717.  
 Kugeligkongruenz 708.  
 Kugelkoordinaten 660; pentasphärische — 706; zyklische — 711; hexasphärische — 712.  
 Kugelkreis, Notwendigkeit des —es zur Einordnung der Metrik in die projektive Geometrie 82; Einführung des —es durch Poncelet 397; Bedeutung des —es für die Ähnlichkeitslehre 423; Gleichung des —es in Ebenenkoordinaten 694; Bedeutung des —es für die Elementargeometrie 811, für die sphärische Trigonometrie 845, für die neuere Dreiecksgeometrie 1194.  
 Kugelnetz, reguläres — 108; gleich-eckiges und gleichflächiges — 111.  
 Kummersche Konfiguration 501; — Gruppe 502.  
 Kurve, Definitionen der — 131 ff.; nicht-analytische — 141; Jordan— 146; Hessesche — 255;  $W$ — 305; Niveau—n 593; Gleichung der ebenen — 611; —  $n^{\text{ter}}$  Ordnung 612; Potenz— 663; Norm— 671; —nkongruenz 743; Behandlung der algebraischen —n mit Punktrechnung 1511; Gleichung der Hesseschen — in Punktrechnung 1512; Jordansche — 201; —n in  $n$ -dimensionalen Räumen 204; topologische Definition der — 234, der ebenen 235; geschlossene Schoenfliesche — 236.
- ### L
- Länge als Polarkoordinate 659; — als sphärische Koordinate 745; unendliche — der geraden Linie 869; absolute —neinheit bei Lambert 1140, bei Lobatschewskij 1146.  
 Lage, perspektive — projektiver Systeme 425; involutorische — 430.  
 Laguerresche Gruppe 349.  
 Laméscher Differentialparameter 1360.  
 Laplacescher Determinantensatz 1481.  
 Lehrbogen 551.  
 Leibnizsche Charakteristik 1282.  
 Lemoinesche Gerade 1199; —r Punkt 1210; —r Kreis 1254.  
 Lhuiliersche Formel 843.  
 Lichtgrenze 581.  
 Liesche Postulate 109; — Kugelgeometrie 316.  
 Limes 146; Zusammenhang zwischen —, Häufungspunkt und Umgebung 165; —raum 152; —axiome 152.  
 Lineal, Graßmanns —e Erzeugung von Kurven und Flächen 259; das — als geometrisches Werkzeug 527; —e Konstruktionen 790, bei festem Kreis 1093.  
 Lineare Abhängigkeit von Quaternionen 1311; — von Vektoren 1320.  
 Linie als stetige Mannigfaltigkeit 60; — auf einer Fläche 68 ff.; analytische — 132, ihre Zweige 133, ihre Dar-

- stellung durch Gleichungen 135; — als Bild einer Funktion 139; — als Bahn eines Punktes 139; — als Punktmenge 143; Cayley— $n$  494; Streich- und Fall— 563; zyklische — $n$  588; Fundamental— der Polarkoordinaten 656; — $n$  gleichen Abstandes in der hyperbolischen Geometrie 1150.
- Linienelement auf einer Fläche 95; — einer abstrakten Mannigfaltigkeit 96; — einer Fläche konstanter Krümmung 98; — einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit 100; — einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung 102; — in pentasphärischen Koordinaten 668; — einer Raumkurve vierter Ordnung in elliptischen Koordinaten 677; — in der Punktrechnung 1519.
- Liniengeometrie 310; differentielle — mit Quaternionenrechnung 1365; Behandlung der — mit Punktrechnung 1515.
- Linienkoordinaten 694; Schweringsche — 702; komplexe — 703; polare — 704; — im Raum 723, rechtwinklige homogene 725; Kleinsche — 734; allgemeine — 735; elliptische — einer Geraden 735.
- Liniensystem 171, 221.
- Lösbarkeit geometrischer Aufgaben 1085, bei beschränkten Hilfsmitteln 1090.
- Logarithmus einer Quaternion 1314.
- Lorenz, —sches Axiom 872; —transformation 1404.
- Lotsystem 93.
- Lücken, —ausdruck 1453; freie und gebundene — 1455.
- Lückenlos 163.
- M**
- Malfattisches Problem 781; seine Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal 795; seine Übertragung auf den Raum 804; seine vollständige Lösung 1099.
- Mannigfaltigkeit, stetige — einer Dimension 60; Riemannsche Definition der mehrdimensionalen — 64; Maßbestimmung einer abstrakten zweidimensionalen — 96, einer beliebig ausgedehnten — 100, einer homogenen — 101; —en konstanter Krümmung 102; ein- und zweidimensionale —en 157; Elementar— 160; dreidimensionale — 161; dreidimensionale berandete — 162;  $n$ -dimensionale — mit Singularitäten 164; unebene — 628; —en, definiert durch Formeln der sphärischen Trigonometrie 849; homogene  $n$ -dimensionale — 188; sphärische 189; berandete —en 194; verallgemeinerte — 195.
- Maßbestimmung, Cayleys allgemeine projektive — 86; Krümmungsmaß einer — 89; tangierende parabolische — 91; — auf einer Fläche 92; Riemannsche — 100; Hermitesche — 251; Zusammenhang zwischen Euklidischer und projektiver — 812 ff.; Bedeutung der projektiven — für die Elementargeometrie 901 ff.
- Maßgeometrie, Einordnung der gewöhnlichen — in die projektive 83; differentiale — 96; — von Minkowski und Hilbert 106; allgemeine — des  $R_n$  309; Behandlung der — mit Koordinaten 641.
- Maßstab als Werkzeug des Geometers 528; perspektiver — 549; Flucht— 550.
- Matrix eines extensiven Bruches 1465.
- Maxima und Minima 1118 ff.; — — und ihre Bedeutung für merkwürdige Punkte des Dreiecks 1185; — — symmetrischer Dreiecksfunktionen 1195 ff.
- M'Caysche Kreise 1266.
- Mechanik, Behandlung der — mit Punktrechnung 1539.
- Menge, abgeschlossene — 153; kompakte — 153; offene — 157; zusammenhängende — 157; Axiome der offenen — 159; umgebende — 159; —nfunktion 160; —nabstand 166, 177; einfach zusammenhängende — 223; erste Kennzeichnung der  $n$ -dimensionalen — 227, zweite 228, dritte 228, vierte 230, fünfte 232.
- Meniskus 807.
- Meridiankurve 589.
- Meßbarkeit 888.
- Meßkette 526.
- Metapol 1217.
- Metrik s. Maßgeometrie.
- Metrisation eines topologischen Raumes 169; Bedingungen für die — eines beliebigen topologischen Raumes 170.
- Minimalgerade 421; Gleichung der —geraden 613; —ebene 623; —ko-

- ordinaten 649; nichtlineare —koordinaten 655; Gleichung der —ebene in Plückerschen Koordinaten 694.  
 Mitte, Jordansche — 175; — der linearen Ausdehnung 176.  
 Mittelpunkt inzidenter reziproker Systeme 424; astatischer — dreier Kräfte 785.  
 Modul einer Klasse algebraischer Funktionen 273; — einer algebraischen Mannigfaltigkeit 356; — der schiefen Projektion einer Geraden 575; — des sphärischen Dreiecks 1049.  
 Moebiusche Grundform für eine  $M_2$  196; —s Netz 79, 402; —s Kantengesetz 957; — Figur zweier Tetraeder 1172; räumliches —s Netz 114.  
 Möglichkeit, logische — der nicht-Euklidischen Geometrie 44; physische — der nicht-Euklidischen Geometrie 46; Beweis der — der hyperbolischen Geometrie 1154.  
 Moment eines Blatts in einem Punkte 627; — einer Fläche 719.  
 Momentenachse und —zentrum 588.  
 Monodromie 108.  
 Monoid 257.  
 Monotone Menge von Mengen 164.  
 Move 217.  
 Multiplicité Cantorienne 231.  
 Multiplizität eines Knotenpunktes 171.  
 Muschellinie 546.
- N
- Nachbargebiet 178.  
 Näherungskonstruktionen, Theorie der — 799; Genauigkeit der — 805; — zur Würfelverdoppelung 1088, 1113; — zur Dreiteilung des Winkels 1114; — zur Kreisteilung 1115; — zur Rektifikation und Quadratur des Kreises 1117.  
 Näherungswerte für  $\pi$  934.  
 Nagelsche Punkte 1203.  
 Nebengerade 515.  
 Nepersche Gleichungen 844; — Regel 1044.  
 Netz, Moebiusches — 79, 402; Strahl— 730; Elementen— 755; —konstruktionen 792; räumliches Moebiusches — 114.  
 Neumannsches Axiom 196.  
 Newtonsche Regel 951.  
 Nexus 170.
- Nicht-Euklidische Geometrie als Geometrie abstrakter Räume 8; logische Möglichkeit der —n — 44; physische Möglichkeit der —n — 46; projektive Maßbestimmung der —n — 86; Stellung der —n — zum Parallelenpostulat 863; Vorgeschichte der Entdeckung der —n — 864; Definition der —n — 1137; Vorläufer der —n —: Saccheri 1138, Lambert 1139, Legendre, W. Bolyai, Wachter 1140; Begründer der —n —: Gauß 1141, Schweikart 1142, Taurinus 1142, Lobatschewskij 1144, J. Bolyai 1149; Konstruktionsaufgaben der —n — 1149; —, behandelt mit Punktrechnung 1536.  
 Niveaukurven 593.  
 Nonionen 1420.  
 Norm einer Quaternion 1306; — einer Biquaternion 1397.  
 Normal, —er Raum 162, vollständig —er 163.  
 Normalenstrecke der Geraden 614, — der Ebene 625.  
 Normalsystem 93.  
 Normalform einer  $M_2$  195; —en für geschlossene Flächen 197; Hessesche — der Geradengleichung 614, der Ebenengleichung 626; Plückersche — 692.  
 Normalkoordinaten 644; — merkwürdiger Punkte des Dreiecks 1193.  
 Normalsystem 1450.  
 Normalüberdeckung 195.  
 Normkurve 671.  
 Nulldimensional 229.  
 Nullpaar 411; —system 434; —kugel 661; —komplex 716; Darstellung des —systems mit Punktrechnung 1506; Kommerells Satz von der Torsion des —systems 1507.
- O
- Obelisk 951.  
 Objekt der Geometrie 8.  
 Offen, —e Menge 157; Axiome der —en Menge 159; —e Fläche 185.  
 Oktaedergruppe 499; —konfiguration 508.  
 Oktave 1417.  
 Ordinate 607.  
 Ordnung, zyklomatische —szahl 172; —skurve und —fläche 434; — eines Punktes einer Kurve 234.  
 Orientierbarkeit 198, 201.

- Orientierung 626; Tensor der äußeren — 1587; innere — 1587.  
 Orisphäre 1145.  
 Orthogonalitätsbedingung in poly-sphärischen Koordinaten 667; — für zwei Kreise 817; — in vektorieller Schreibweise 1351.  
 Oval 688.
- P**
- Pappusscher Satz 54, in der nicht-Euklidischen Geometrie 122.  
 Parabel 1249.  
 Parabolische Maßbestimmung 87; — Koordinaten 680.  
 Parallele, Cliffordsche — 1168.  
 Parallelenpostulat nach Veronese 21; Euklidisches — 39 ff.; Stellung der nicht-Euklidischen Geometrie zum — 42, spezielle Ausführungen dazu 863 ff.  
 Parallelenlehre, nicht-Archimedische — 126.  
 Parallelfeld 1067.  
 Parallelkreis 589.  
 Parallelkoordinaten, ebene 607; homogene 608; räumliche — 615, homogene 616.  
 Parallellineal, Ersatz von Zirkel und Lineal durch das — 793; Konstruktionsbereich des —s 800; Gleichwertigkeit des —s mit Zirkel und Lineal 1104.  
 Parallelogramm 990.  
 Parallelprojektion 537; — und Affinität 570; orthogonale u. schiefe — 573.  
 Parallelwinkel 1143.  
 Parameter, Eulersche — 1371; Cayleyscher — 1391.  
 Parasoma 337.  
 Paratoxie 1392.  
 Pascal, —scher Satz 54; —sche Konfiguration 491; —sche Gerade 494; —sches Sechseck 503; —scher Satz 1501.  
 Pentagramma 1045.  
 Pentazyklus 740.  
 Permanenzprinzip 457.  
 Perspektive im Altertum 541; male-rische — des Mittelalters 542; — bei Dürer 545; axonometrische — 548; freie — 551 ff.; Kavalier — 576; freie u. angewandte — 577; plastische — 579.  
 Perspektivität als Übertragungsprinzip 561.  
 Perversion 211.  
 Pfaffian 1413.  
 Pfaff, —scher Ausdruck 346; —sche Gleichung 354; —sches Problem 1476.  
 Pfeil 1431; Frenetsche —gleichungen 1522.  
 Pfeilkontinuum 310.  
 Phase 656.  
 Photogrammetrie 594.  
 Plagiograph 898.  
 Plangröße 625.  
 Plückerische Koordinaten 692.  
 Pluquaternionen 1419.  
 Pohlkescher Satz 573.  
 Poincarésche Postulate 110.  
 Pol einer ternären Gruppe 509; — einer Rollkurve 588; — des Koordinatensystems 656.  
 Polarbündel 434.  
 Polardreieck 1037.  
 Polare, konische — 1198; absolute — eines Speers 1395.  
 Polarebene 659.  
 Polarentheorie bei Steiner 261, bei Cremona 261, bei Schur 262; — als Grundlage für Reziprozität und Dualität 561; Zusammenhang zwischen — und Inversion 1031.  
 Polarität als Übertragungsprinzip 398; — bezüglich einer  $F_2$  700; Behandlung der — mit Punktrechnung 1506.  
 Polarkoordinaten, ebene — 656; elliptische und hyperbolische — 658; räumliche — 659; hyperbolische — 660; geodätische — 752.  
 Polarsystem eines  $c_2$  434; absolutes — 902.  
 Polkegelschnitte des Dreiecks 1250.  
 Polkreis des Dreiecks 1251.  
 Polyeder s. Vielfach, —fläche im Sinne der Topologie 195, 197.  
 Polygon s. Vieleck.  
 Polygonometrie 1013.  
 Polytop 83; konvexes — 88; reguläre —e 120.  
 Polyvektor 1569.  
 Ponceletsche Polygone 781.  
 Postulat, —e bei Euklid 7; unausgesprochene —e 10; physikalische Bedeutung der —e 10; Unabhängigkeit der —e 12; Verträglichkeit der —e 13; —e der Verknüpfung 22; Pascalsche —e 25; —e der Kongruenz 28, Veronesische 29; Archimedisches — 34; —e der Stetigkeit 36; Parallelen — 39 ff.; de Zoltisches — 49; —e in einem

- Raumstück 70 ff.; —e für den vollständigen projektiven Raum 73; Fano-sches — 82; — der metrisch-projektiven Geometrie 94; Helmholtzsche —e 107; Liesche —e 109; —e von Poincaré 110; Schursche —e 126.
- Potenz der projektiven Beziehung 412; — einer Kurve 662; gemeinsame — zweier Kugeln 665; — eines Punktes bezüglich eines Kreises 925; Maximum und Minimum der — 1028; — zweier Kreise bezüglich des Ähnlichkeitspunktes 1029; — einer Geraden bezüglich eines Kreises 1035.
- Potenzkurve 663.
- Potenzpunkt dreier Kreise 1029.
- Potenzraum 176.
- Potenzwert eines extensiven Bruchs 1461.
- Primquaternion 1316.
- Prinzip, Cavalierisches — 945; d'Alembertsches — 1541.
- Produkt zweier Strecken 894, nach der Methode der Äquipollenzen 1295; — zweier Quaternionen 1304; — zweier Vektoren 1317; — extensiver Größen 1432; äußeres — extensiver Größen 1435, seine Invarianz gegenüber linealen Änderungen 1437, seine geometrische Bedeutung 1439; progressives — 1439; regressives — 1442; reines und gemischtes — 1445; — nullter Stufe 1445; Bedeutung des regressiven —s im ebenen und räumlichen Punktfeld 1446; stereometrisches — 1447; inneres — 1448, von Größen gleicher Stufe 1449; algebraisches — extensiver Größen 1451; Lücken— 1453; unbestimmtes — 1454; Einsatz— 1454; Folge— 1459; bezügliches — 1460; geometrische Bedeutung des regressiven —s 1488; Verwendung des inneren —s in der Punkt- und Pfeilrechnung 1491; Verwendung des äußeren —s in der Elementargeometrie 1495; äußeres — bei Peano 1544; regressives — bei Peano 1545; mittleres — zweier Pfeile 1547; —raum 176.
- Projektion, orthogonale — 573; schiefe Parallel— 574; schiefe axonometrische — 576; kотиerte — 593; stereographische — 594, ihre Eigenschaften 1042.
- Projektionssatz 1014.
- Projektive Geometrie, Prinzipien der —n — 70; — — besonderer Punkt-systeme 81; mehrdimensionale — — 269; allgemeine — — 299; komplexe — — 300; — — der linearen Komplexe 311; radial— — 330; somatische — — 337; — — auf einer Kugel 821; Einfluß der —n — auf die Elementargeometrie 899; Behandlung der —n — mit Punktrechnung 1497.
- Projektive Koordinaten, Einführung der —n — 74; — — 641; nichtlineare — — 654; nichthomogene — — 698.
- Projektivität, Definition der — nach v. Staudt 77; duale und radiale — 325; Fundamentalsatz der — 407, sein Beweis 447; zyklische — 434; ausgeartete — 437; Büschel von —en 471 ff.; — als Übertragungsprinzip 561; Koordinaten einer — 718.
- Proportionentheorie der Alten 52; ihre Weiterentwicklung 812.
- Protosoma 336.
- Prozeß, Spaltungs— 64, beim Polyeder 68;  $\Theta$ — 69;  $\Pi$ — 70.
- Pseudogebilde 162; —soma 338; —kollineation 508.
- Ptolemäischer Satz 823; seine Verallgemeinerungen 994; Beweise 995.
- Punkt, Paare äquidistanter —e 23; uneigentliche —e 72, 82; Relation der fünf —e 105; isolierter — 135; harmonische —e 404; imaginäre —e 455; Ecken-, Flächen- und Kanten—e 506; Fläche eines —es 535; komplexer — 606; unendlich ferner — 613, seine homogenen Koordinaten 624; Einheits— 616; Gleichung eines —es 693; Harmonikal— 699; merkwürdige —e des Dreiecks als Symmetrie—e 1184; Brocardsche —e 1188, 1269; Normalkoordinaten merkwürdiger —e 1193; Lemoinescher — 1199, als Schwerpunkt seines Fußpunktdreiecks 1210; komplexe —e 1201; Supplement—e 1202; tripolar zugeordnete —e 1212; Zwillingen—e 1217; Fermatscher — 1219; Lot— 1224; Tarryscher — 1236; Steinerscher — 1241; Brianchonsche —e 1248; Feuerbachscher — 1263; unveränderliche —e 1267; merkwürdige —e des Vierecks 1272; Kondensations— 155; innerer — einer Menge 156; Rand- und mittlerer — 174; — eines Simplex 188.



Punktgröße 1290.  
 Punktierungsfläche 191.  
 Punktkomplex 156.  
 Punktkoordinaten, allgemeine — 630; lineare — 634; homogene — 635.  
 Punktrechnung 788; Definition der — 1432; Begründung der — durch Peano 1543.  
 Punktreihe, perspektive — 407; ähnliche —n 415; krumme —n 418.  
 Punktsysteme, projektive Geometrie besonderer — 81.  
 Punkttransformation 292; — und Analysis situs 355.  
 Pythagoreischer Satz 968; verallgemeinerter — 969; absoluter — 1160.

## Q

Quadratrix 1089.  
 Quadratur, Unmöglichkeit der — des Kreises mit Zirkel und Lineal 807, Beweis dafür 933; mechanische — 951; Näherungskonstruktionen zur — des Kreises 1117; — des Kreises in der hyperbolischen Geometrie 1150; — mit Punktrechnung 1535.  
 Quadrierbare Kreisbogenzweiecke 938; — Kreisbogendreiecke 939.  
 Quadrik 1564.  
 Quadriquaternen 1409.  
 Quasikomponenten 179, 229.  
 Quaternion, Definition der — als Quotient zweier Vektoren 845; algebraische Theorie der —en 1303 ff.; skalare und vektorielle —en 1305; komplanare —en 1309; diplanare —en 1310; geometrische Theorie der —en 1322 ff.; —enfunktionen 1333; symbolische —engleichungen 1334; Auflösung der linearen —engleichungen 1335, der quadratischen 1336; geometrische Anwendungen der —en 1346 ff.; Bi—en 1396 ff.; Tri—en 1406; Quadri—en 1409; Verallgemeinerungen der —en 1417; Plu—en 1419; —ensysteme von Scheffers 1420; longimetrische —en 1421; hyperbolische —en 1423; Einordnung der —en in die Ausdehnungslehre 1465; Zusammenhang der —en mit den extensiven Größen 1546; Verwendung der —en zum Studium der Bewegungsgruppen 125.  
 Querschnitt 200.

Quotient äquipollenter Strecken 1296; — zweier Quaternionen 1322.

## R

Radial 1323.  
 Radiusvektor 656.  
 Ränderzuordnung 180, 186.  
 Randecke und —kante 61; —punkt 174; —punkt eines Simplex 188; —punkt eines topologischen Raumes 194; — einer  $M^n$  194; —stück einer Fläche 199.  
 Rationalitätsbereich linearer Konstruktionen 792.  
 Raum, Berechtigung des physischen —es 8, des abstrakten —es 9; vollständiger projektiver — 72, von  $n$  Dimensionen 74; sphärischer — 113; kollineare —e 410; analytischer — 627; krummer — 628; Limes— 152; — mit Festsetzungen über Häufungspunkte 155; Umgebungs— 156; zusammenhängender — 157; Teil— 160; rationaler topologischer — 161; regulärer — 162; normaler — 162; separabler — 162; lückenloser — 163; bikompakter — 163; vollständig normaler — 163; absolut abgeschlossener — 164; im Kleinen bikompakter — 164; metrischer — 166; beschränkter metrischer — 168; vollständiger metrischer — 171; Universal— 173; Hilbertscher — 173; topologisch homogener — 174; Überlagerungs— 175; Summen— 176; Produkt— 176; Potenz— 176; Zerlegungs— 178; nulldimensionaler Universal— 229.  
 Raumeinteilung 127.  
 Raumformen von Clifford-Klein 116.  
 Rauminhalt bei Euklid 51; Vergleichung der —e von Spaten 939, von Prismen 940, von Pyramiden 940; Verwendung der Exhaustionsmethode zur Bestimmung von —en 942; Gleichheit von —en 946; —smaß 949; Messung und Berechnung von —en 950; — des schief abgeschnittenen Prismas 951; — von Obelischen 951; Moebiusche Definition des —s 958; — krummflächig begrenzter Körper bei Euklid 958, bei Archimedes 959, bei Pappus 961, bei Kepler 962; — der Kugelschicht 963; —sberechnungen von Steiner 964; — von Fässern 965; Ver-

- wendung der affinen Verwandtschaft zur Bestimmung des —s 965; — von Paraboloiden und Ellipsoiden 968; — des Tetraeders 1056, in der nicht-Euklidischen Geometrie 1151; Bestimmung von —en mit Punktrechnung 1535; — eines Körpers im  $R_n$  98.
- Raumkomplex 161.
- Raumkurve, Entstehung der — dritter Ordnung 587; Krümmung der —n 592; Gleichung einer — 622.
- Realität mathematischer Begriffe nach Cantor 878.
- Regel, Newtonsche — 951; Guldinsche — 962; Nepersche — 1044; — des doppelten Faktors 1444.
- Regelflächen, Behandlung der — mit Punktrechnung 1502; Differentialgeometrie der — 1531.
- Regulär, —er Raum 162; —e Unterteilung 193; —er Punkt einer Kurve 234.
- Reihen, zyklische — 470; Tripel— 477; — von Quaternionen 1314; — extensiver Größen 1471.
- Reißschiene 527.
- Rektaszension 745.
- Rektifikation des Kreises, eine transzendente Aufgabe 807; Geschichte des Problems der — des Kreises 933; Unmöglichkeit der — des Kreises mit Zirkel und Lineal 1086; Näherungskonstruktionen zur — des Kreises 1116; — von Kurven mit Punktrechnung 1535.
- Relation, de Tillys — der fünf Punkte 105; Ergänzungs—en der sphärischen Trigonometrie 836; Carnotsche — nebst Erweiterung 1015; Ableitung und räumliche Deutungen der Carnotschen — 1212.
- Restfigur 487.
- Resultantenbildung 779.
- Reyes Problem der Konfigurationen 484; —sche Konfiguration 497.
- Reziproke einer Strecke 1296; — einer Quaternion 1310; — einer Biquaternion 1397.
- Reziprozität, räumliche — 400; — als Übertragungsprinzip 561; analytische Darstellung der — 700; Darstellung der — durch Punktrechnung 1506; — bei Vielflächen 119.
- Ricciikalkül 1581; seine Mängel 1585; Weiterführung des —s 1586; Verhältnis des —s zur direkten Analyse 1595.
- Richtscheit 527.
- Richtstrecke 614.
- Richtungsfehler 534.
- Riemannsche Maßbestimmung 100; topologische Definition der —n Flächen 217; Transformationen der —n Fläche 219; Verallgemeinerung der —n Flächen 220; — Geometrie 1164; — Fläche als absolut-kompakte homogene  $M^2$  183.
- Rodriguessa Gleichungen 1375.
- Rollkurven 588.
- Rotation 1341.
- Rückkehrschnitt 198.

## S

- Satz, Desarguessaer — s. unter D.; Stellung des Pappusschen —es in der Lehre von den Proportionen 54; Jordanscher — 59, 140; Pappusscher — in der nicht-Archimedischen Geometrie 122; vervollständigter Jordanscher — 146; Malus-Dupinscher — 354; Carnotscher Transversalen— 393; — von Pohlke 573; — über Konstantenzahl eines Vielflachs 584; Übertragung des —es vom Peripheriewinkel auf die Kugel 815; — des Ptolemaeus, auf eine Identität zurückgeführt 823; Cauchyscher — über konvexe Polyeder 829; Hamiltonscher — 844, seine Verallgemeinerung durch Schilling 848; — des Pythagoras 968, seine Verallgemeinerung 969; Stewartscher — 985; orientierter Stewartscher — 987; — des Ceva 988; — des Menelaos 989; Verallgemeinerung des Ptolemäischen —es 994; Beweis des Ptolemäischen —es 995; Fermatscher — über eine Kreisfigur 1033; absoluter Pythagoreischer — 1160; Gaußscher Integral— 1344; Stokescher — 1345; Taylorscher — für extensive Größen 1471; Laplacescher Determinanten— 1481; — des Brianchon 1501; Pascalscher — 1501; Kommerells — von der Torsion des Nullsystems 1507; — von Meusnier über Krümmung von Flächenkurven 1520.
- Scharen von Kugeln 708; — von Geraden 723.
- Schatten, Einteilung der — 537; — konstruktion nach Dürer 548, nach

- Monge 582; —theorie 581; — einer Schraubenlinie 590.
- Schema einer Konfiguration 483; Jordansches — 501; — einer Mannigfaltigkeit 212.
- Schiebungen, rechts- und linksseitige — 1387.
- Schild 1439.
- Schlichtartig 197.
- Schließungssätze 1025.
- Schneckenlinie, ebene — 546; räumliche — 547; Verwendung der — zur Dreiteilung des Winkels 1108.
- Schnitt in der Topographie 593; Dedekindscher — 889; — eines Kreises mit einer Geraden 925.
- Schnittpunkt zweier Geraden als Fläche betrachtet, 535.
- Schnittpunktsätze der projektiven Geometrie 450.
- Schontesche Kreise 1216.
- Schränkung 1534.
- Schraubengröße 298; Entstehung der —linie bei Dürer 547; —röhrenfläche nach Frézier 556; Eigenschaften der —linie 589; Entstehung und Verwendung der —röhrenflächen 590; Behandlung der —geometrie mit Punktrechnung 1515.
- Schursche Postulate 126.
- Schweringsche Linienkoordinaten 702.
- Schwerpunkt des Dreiecks 983; — des Vierecks 1007; — einer geometrischen Figur 1019; — des Kegels und Tetraeders 1057; — des Dreiecks als Minimumpunkt 1130; — des Dreiecksumfangs 1203; — eines Punktsystemes 1288.
- Sechseck, Clebschsches — 427; Pascalsches — 503; Sehnen— 1009; Hamiltonsches — 1009.
- Sehnenviereck 993; Flächeninhalt des —s 996; Konstruktion des —s aus seinen Seiten 997; Sätze über das — 997; harmonische —e 998; —e mit senkrechten Diagonalen 999; —, das gleichzeitig Tangentenviereck ist 1000.
- Sehstrahl 550.
- Seite, positive — einer Geraden 615; — eines Simplex 188.
- Serretsche Formel 1051.
- Siebeneck, Unmöglichkeit der Konstruktion des —s mit Zirkel und Lineal 797.
- Siebzeheck, Möglichkeit der Konstruktion des —s 797; Auflösung der Kreisteilungsgleichung für das — 1096; Konstruktionen des —s 1097.
- Signatur einer Korrelation 439.
- Simplex,  $n$ -dimensionaler — 187, als einfachstes Beispiel einer berandeten  $M^n$  195.
- Simpsonsche Formel 952.
- Sinuslinie 547.
- Situationskalkül 1552.
- Skalar 1305; —es Produkt zweier Vektoren 1565.
- Soldnersche Koordinaten 753.
- Soma 335; Koordinaten eines — 738.
- Spaltung 64, beim Polyeder 68.
- Spat 1440.
- Speer, Einführung des —s durch Study 309; —kontinuum 310; — als Halbgerade 803; Koordinaten eines — 1393; absolute Polare eines —s 1395.
- Sphäre, zweidimensionale — 161.
- Sphärisch, Unterschied zwischen —em und elliptischem Raum 113; —e Koordinaten 745, homogene 747; Eulersche Definition des —en Dreiecks 833, Moebiusche 834, Studysche 834, Gauß-Studysche 835, Kleinsche 835; Ergänzungsrelationen der —en Trigonometrie 836; reduziertes —es Dreieck 837; Gruppen —er Dreiecke 839 ff.; Formeln der —en Trigonometrie 843; Bedeutung des Kugelkreises für die —e Trigonometrie 845; Deutung der Formeln der —n Trigonometrie 847; Abbildungen der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit aller —en Dreiecke 848 ff.; Zusammenhang der —en Trigonometrie mit orthogonalen Substitutionen 851, mit den elliptischen Funktionen 854; —es Dreieck und Polardreieck 1037; Entwicklung der Kenntnisse vom —en Dreieck 1038 ff.; —er Kegelschnitt 1043; Geschichtliches zur —en Trigonometrie 1044; Zusammenhang der —en Trigonometrie mit der Desarguesschen Konfiguration 1046; —er Kosinussatz 1049; Eckensinus des —en Dreiecks 1048; logarithmisch —e Geometrie von Taurinus 1142; —e Trigonometrie der nicht-Euklidischen Geometrie 1147; Riemanns —e Geometrie 1165; Ableitung von Sätzen über das —e Drei-

- eck mittels Quaternionen 1384; —  
 Abbildung einer Fläche auf die Ein-  
 heitskugel 1529; —e Vielecke 10, ihr  
 Inhalt 11; —e Vielecke gerader und  
 ungerader Art 12; —e Umgebung 148.  
 Spielfläche 535.  
 Spindel 80.  
 Spinnenlinie 547.  
 Spirale bei Dürer 546; — bei Frézier  
 556.  
 Stab 614; —kreuz 1493.  
 Stamm von Polyedern 82.  
 Steinerscher Punkt 1241.  
 Steinschnitt 551.  
 Stereographische Projektion, His-  
 torisches über die — — 594; Ab-  
 leitung des ptolemäischen Satzes mit-  
 tels —r — 995; Ableitung von Sätzen  
 der Sphärik durch — — 1042; Zu-  
 sammenhang zwischen —r — und In-  
 version 1042; Ausdehnung der Theorie  
 der —n — auf beliebige einteilige  
 Flächen zweiter Ordnung 1043.  
 Stereometrie, hyperbolische — 1161.  
 Stereotomie 554.  
 Stern, Inhalt eines —vielecks 954; reg-  
 elmäßige —vielecke 1012; Inhalt des  
 sphärischen —vielecks 1012; reg-  
 elmäßige —vielfache 1071, ihr Zusam-  
 menhang untereinander und mit den  
 regelmäßigen Polyedern 102ff.; —  
 polytope 122.  
 Stetigkeit der Geraden 34; —spostu-  
 late von Cantor 36, von Weierstraß  
 und Dedekind 36; Dedekindsche —  
 120; Veronesesche — 121; — der  
 Grundgebilde der projektiven Ge-  
 metrie 448; — der Abbildung einer  
 Punktmenge 146; gleichmäßige — 167.  
 Stewartscher Satz 985; orientierter  
 — — 987.  
 Stokesscher Satz 1344.  
 Strahl, eigentlicher und uneigentlicher  
 — 326; — im Sinne von Study 331;  
 —enkontinuum 332; —enkongruenz  
 333; —hyperbel 535; Leit— der Polar-  
 koordinaten 656; —enkoordinaten 706;  
 —enkomplex 723, spezieller linearer  
 729, allgemeiner linearer 730; —gebüsch  
 729; —netz 730; duale —enkoordi-  
 naten 736; —ensystem 1365; —system  
 92, konvexes 93, tetraederfreies 94.  
 Strecke und Gerade 21 ff.; —nkon-  
 gruenz 31; —nkomplex 156; Theorie  
 der —nkomplexe 171; —übertrager  
 526, sein Wirkungsbereich 794; Gleich-  
 heit von —n 884; —nrechnung 894;  
 geometrische Addition von —n 1284.  
 Strenge, mathematische — 10.  
 Stromlinie 1364.  
 Stützebene 89.  
 Summe zweier Strecken 1287; — zweier  
 Quaternionen 1304, ihre Konstruktion  
 1323; —nraum 176; —nsatz 227.  
 Supplementpunkte 1202.  
 Sylvestersches Zentrum 176.  
 Symmediane 1210.  
 Symmetralität 460.  
 Symmetriekugel einer allagmatischen  
 Fläche 669; — als elementare Trans-  
 formation 802; — nach Moebius 829;  
 Unterschied zwischen — und Kon-  
 gruenz 911; Benutzung der — in  
 Schullehrbüchern 913; — bei Viel-  
 flachen 106.  
 Symptosenachse 454.  
 System, Rechts- und Links— 619;  
 Kristall—e 833.

## T

- Tarryseher Punkt 1236.  
 Taylorscher Satz 1471.  
 Teilraum 160.  
 Tensor als Seitenstück zum Strahlge-  
 winde 760; — einer Quaternion 1307;  
 symmetrischer — 1322; — der äußeren  
 Orientierung 1587.  
 Tetraeder, perspektive — 427; des-  
 mische — 428; einander gleichzeitig  
 ein- und umbeschriebene — 492, 1065,  
 1171; — der Reyeschen Konfiguration  
 497; Fundamental— der Kleinschen  
 Konfiguration 504; —gruppe 506;  
 —koordinaten 635, homogene 637;  
 Schmiege— 672; —koordinaten in der  
 Ebene 696; Theorie des —s 815; Pro-  
 jektionssatz des —s 1014; Beziehung  
 zwischen den Kosinus der Flächen-  
 winkel des —s 1014; Eulersche For-  
 mel für den Inhalt des —s und Er-  
 weiterungen 1016; Elementargeometrie  
 des —s 1654; Volumen des —s aus  
 seinen Kanten 1056; Schwerpunkt des  
 —s 1057; Berührungskugeln des —s  
 1059; Höhen des —s 1059; — mit  
 Höhenschnittpunkt 1061; gleichflächiges  
 — 1062; rationales — 1065;  
 Höhenhyperboloid des —s 1071; Raum-

- inhalt des —s in der nicht-Euklidischen Geometrie 1151; —geometrie im hyperbolischen Raum 1161; Ausartungen des Höhenhyperboloids des —s 1171.
- Tettorionen 1420.
- Topologische Eigenschaften 146.
- Toricellische Aufgabe 1129; — Figur 1218.
- Torsionskoeffizienten 184; — einer Kurve 414; — des Nullsystems 1507; —zahlen 215.
- Torsus 694.
- Totalkrümmung eines Vielecks 6; — eines sphärischen Vielecks 13; — eines Vielflachs 32.
- Trägheitsgesetz der quadratischen Formen 308.
- Traktrix 705.
- Transformation, interne — 159; externe — 164; Elementar— 165; —en der Riemannschen Fläche 219; allgemeine Definition der — und ihrer inversen — 291, der Punkt—en und Berührungs—en 292; —gruppen 293; infinitesimale —en 294; —en der Hauptgruppe 295; Zusammensetzung der —en der Hauptgruppe 297; Flächen mit unendlich vielen —en in sich 307; konforme —en 312, als Spezialfälle von quadratischen —en 313; —s par directions réciproques 318; Berührungs—en des  $R_3$  320, des  $R_{n+1}$  321; —en der Somen 337; Cremonasche —en 339; unendliche Gruppen von Punkt—en 343; von analytischen Punkt—en 344; äquilonge —en 347; analytische Berührungs—en 350; orientierte Berührungs—en 353; algebraische und stetige Punkt—en 355; Prinzipielles zur — von Koordinatensystemen 604; Plückers — homogener linearer Koordinaten 642; Theorie der Koordinaten— 760; orthogonale — 762, ihre Determinante 765; orthogonale — im Bündel 768; — continue 775; Verwendung von —en in der Elementargeometrie 802; imaginäre —en 811; — durch reziproke Radien 816; Darstellung der affinen —en des Raumes durch Vektorfunktionen 1328; Darstellung projektiver —en durch Vektorfunktionen 1353; ternäre orthogonale —en 1368; quaternäre orthogonale —en 1386; projektive —en einer  $F_2$  1390; —en des Raumes, die eine  $F_2$  invariant lassen, 1402; Lorentz— 1404; Ähnlichkeits—en im  $R_3$  1407; konforme —en der Euklidischen  $R_3$  1409; eigentliche orthogonale —en von  $n$  Veränderlichen 1414; Deck— 197.
- Translationen des Euklidischen Raumes 1422; Translationssätze 200.
- Transversalen, Carnotscher —satz 393; — eines Dreiecks 985; —satz von Ceva 988, von Menelaos 989; —theorie 1018; — des Tetraeders 1056;
- Transzendenz von  $e$  und  $\pi$  933.
- Trapez 933.
- Trennbarkeitsaxiome 162.
- Triangulierbarkeit 185.
- Trigonometrie, sphäroidische — 752; Ergänzungsrelationen der sphärischen — 836; transzendente — erster Stufe 839; algebraische — 842; Formeln der sphärischen — 843, ihre Ableitung aus dem Hamiltonschen Satz 844; Zusammenhang der — mit der Invariantentheorie binärer Formen 845; Deutung der sphärischen — für komplexe Argumente 847; algebraische — erster Stufe 849; zweiter Stufe 850; Zusammenhang zwischen sphärischer — und orthogonaler Substitutionen 851, mit den elliptischen Funktionen 854; Grenzformeln der ebenen — 974; elementare — des Dreiecks 976; Geschichte der sphärischen — 1044; einheitliche Entwicklung der sphärischen — aus dem Kosinussatz 1049; nicht-Euklidische — 1143; — des hyperbolischen Raumes 1147; — der hyperbolischen Ebene 1160; Ableitung der sphärischen — aus den Formeln für die Bewegungen der Einheitskugel 1384; Behandlung der — mit Pfeilrechnung 1496.
- Tripelreihen 477.
- Triquaternionen 1406.
- Trisektor 807.
- Tuckersche Kreise 1253.
- Typus eines Vielflachs 47, seine Änderung durch Kreuzung 52; allgemeines Problem der Aufstellung der möglichen Typen 55.

## U

Überkreuzungsstelle 208; —tragungsprinzip 561, Hessesches 711, auf den

- Raum 804; —lagerungsraum 175; universelle —lagerungsfläche 197; —deckung 230.
- Ufer einer Linie 4.
- Umfang des Kreises in der nicht-Euklidischen Geometrie 1141.
- Umgebung, Definition der — 148; sphärische — 148; —sraum 156; —saxiome 156; Fundamentalsystem von —en 158; gleichwertige —ssysteme 159; abzählbares Fundamentalsystem von —en 161; —stypus 173; Rangordnung der verschiedenen —stypen 175.
- Umgegenschnitte des Dreiecks 1239 ff.
- Umkreis des Dreiecks 978; — als spezieller Umgegenschnitt 1241.
- Umrißlinien, wahre und scheinbare — 537; ihre Konstruktionen 581.
- Unabhängigkeit der Postulate 12; — der primitiven Begriffe 14.
- Uneigentlich, Einführung der —en Elemente 72; —e Strahlen 326; Gleichung der —en Geraden in Parallelkoordinaten 613; Gleichung der —en Ebene in Parallelkoordinaten 617, 623; in Tetraederkoordinaten 637, in baryzentrischen Koordinaten 645, in Kugelkoordinaten 661; —e Elemente zweiter Ordnung 758.
- Unendlichkeit und Unbegrenztheit 1162.
- Universalraum 173; nulldimensionaler — 229; —kurve 233.
- V
- Vektor, Koordinaten eines —s in der Ebene 613; Punkt— 614; Koordinaten eines —s im Raum 624; Punkt-Ebene— 625; freier und linienflüchtiger — 786; Definition des —s 1287; Summe von —en 1287; Multiplikation eines —s mit einem Skalar 1288; —teil einer Quaternion 1305; Einheits— 1307; geometrische Deutung des —s 1316; Produkt zweier —en 1317, mehrerer 1319; lineare Abhängigkeit von —en 1320; reziproker Wert eines —s 1321; Quotient zweier —en 1322; lineare —funktionen 1324, ihre Grundform 1329; Zusammenhang zwischen —funktionen und Dyaden 1331; geometrische Anwendung der —en 1346; —feld 1364; — des kürzesten Abstandes 1365; Bi— 1397; —kegel 1400; Stellung des —s in der Ausdehnungslehre 1431, in der Binäranalyse 1564; Poly— 1569.
- Verdichtungsstelle 155.
- Verein 321; — von Elementen zweiter Ordnung 324.
- Verjüngung 1583.
- Verkettung 213, 202; —nach Riesz 155.
- Verknötung 207, 202, 221; —sanordnung 210.
- Verknüpfung, Postulate der — 22.
- Veronesesche Zahlen 120; — Stetigkeit 121.
- Verschlingung 210; —sintegral 216.
- Verschmelzung 180.
- Verschwindungselemente 551.
- Version 1341.
- Versor 1307.
- Verträglichkeit der Postulate 10; —sbedingungen 180.
- Verwandtschaft, Kollinear—en 569; gegensinnig konforme —en 651; Verwendung der — räumlicher Systeme zu Volumberechnungen 965; quadratische —en in der Dreiecksgeometrie 1203; isogonale — 1207; isotome — 1210; lineare — in der Punktrechnung 1503; — von Zellaufbauten 210; — zweier Zellsysteme 212.
- Verzahnungstheorie 589.
- Vielbein 1569; Anwendung der —e auf lineare Vektorfunktionen 1570, auf die Theorie der Elastizität 1571.
- Vieleck, Definitionen der Fläche eines —s 26; —e, die sich selbst ein- und umschreiben sind, 487; zyklischperspektive —e 491; Ponceletsche —e 781; Inhalt eines Stern—s 954; Sehnen— 1009; bizentrisches — 1009; regelmäßiges — 1010; Stern— 1012; Inhalt des sphärischen —s 1041; Definition des ebenen —s 3, seiner Winkel 5; Einteilung der —e in Klassen 6; Flächeninhalt des —s als Dreiecks-summe 7; Doppelpunkte des ebenen —s 7; Form des —s 9; sphärisches — 10, seine Art und sein Inhalt 11; isoperimetrische —e 38.
- Vielfach, Darstellung der —e und ihrer Netze durch Dürer 548; deskriptive Theorie der —e 583; Satz über die Konstantenzahl eines —s 584; einseitige —e 828; symmetrische —e 829; Endlichgleichheit von —en 948; Mes-

- sung und Berechnung der —e 950; Zerlegung des konvexen —s in Pyramiden 956; Moebius'sche Definition des —s 957; Rauminhalt des zweiseitigen —s 958; Projektionssatz für —e 1013; nicht-Eulersche —e 1053; regelmäßige —e 1067; Archimedische —e 1070; Stern—e 1071; Definition des gewöhnlichen —s 14; Begründung der Morphologie der —e durch Euler 15; Einteilung der —e nach Euler 16; Winkelsumme eines —s 17; Zusammenhangszahl des —s 24; einseitiges — 26; Bestimmung des Rauminhalts und der Oberfläche eines —s nach Moebius 30; Art des —s 32; Legendres Bestimmung der Konstantenzahl eines —s 34; Kongruenz von —en 35; Verbiegung eines konvexen —s 36; endliche Deformation des —s 37; isoperimetrische —e 39; Darstellung der Typen der —e 47; Dreikants—e 50; Dreiecks—e 53, im engeren Sinn 66; —e ohne übergreifende Elemente 70, ihre Realisierbarkeit 75; Eulersche —e 71, ihre Realisierbarkeit 77, ihre Reduzierbarkeit auf Tetraeder 79; Stamm von —en 82; irreduzible —e 83; konvexes — mit gegebenen Normalenrichtungen 95; —, das einer Kugel umbeschrieben ist 97; reguläre —e 101; außergewöhnliche —e 102; symmetrische —e 106; gleicheckige und gleichflächige —e 111; Archimedische —e 113; autopolare —e 118; Reziprozität bei —en 119.
- Viereck, desmisches — 498; Gauß'sche Methode der —sgeometrie 783; Kreisbogen— 838; sphärisches — 845; Geometrie des —s 990; Sehnen— 993, sein Inhalt 996; Tangenten— 999; bizenstrisches — 1000; — mit senkrechten Diagonalen 1001; vollständiges — 1003; Schwerpunkte des —s 1007; rationale —e 1008.
- Vierergruppe 499; ternäre — 507.
- Vierfarbensatz 178, 220.
- Vierpunktkoordinaten 701.
- Vierseit, Tangenten— 999; vollständiges — 1003; harmonisches — 1273.
- Vollständig, —er Häufungspunkt 164; —er metrischer Raum 171; total —e Menge 234.
- Vorzeichenprinzip 953.
- W**
- Wallacegerade 1234.
- Weierstraß, —sches Stetigkeitspostulat 36; —sche Koordinaten 661.
- Wellenelement 353.
- Wendepunkt 209.
- Wert, numerischer — einer extensiven Größe 1450.
- Widerlager 551.
- Winkel als Invariante in bezug auf den Kugelkreis 83; — ausgedrückt durch einen Logarithmus 85; — in der Cayleyschen Maßbestimmung 86; —sheit 527; —messer 553; Koordinaten— 610; —koordinaten 648; —halbierender 795; Doppel— 822; Konstruktion der — eines sphärischen Dreiecks 853; —summe und Parallelpostulat 865; Zurückführung der Kongruenz der — auf die von Strecken 883; Hilbert'sche —axiome 885; —halbierende des Dreiecks 978; —summe der regelmäßigen Sternvierecke 1012, von Vielecken überhaupt 1017; Konstruktionen mit —halbierender und Zeichen— 1105; —teiler 1109; Parallel— 1143, ihre Trigonometrie 1147; —koordinaten in der Dreiecksgeometrie 1216; — einer Quaternion 1308; — zwischen Geraden und Ebenen, ausgedrückt durch Quaternionen 1352; Definition der — des ebenen Vielecks 5; —summe eines Vielflachs 17; — eines polyedrischen Komplexes 60.
- Wirkungsbereich der Zeicheninstrumente 1104.
- W-Kurven und -Flächen 305.
- Wölbfläche 551.
- Würfelverdoppelung, Unmöglichkeit der — mit Zirkel und Lineal 796; — mit Hilfe von Kegelschnitten 806; — mittels höherer Kurven 1087; Apparate zur — 1088; älteste Näherungskonstruktion zur — 1088; weitere Näherungskonstruktionen zur — 1113.
- Wurf von vier Punkten 75; — von fünf Punkten 410; — von vier imaginären Punkten 456; —rechnung 461; neutraler — 462; harmonischer — 462; 6-elementiger — bei der Kummer'schen Konfiguration 503; metharmonischer — 515.

## Z

- Zahl, transfiniten — en 119; nicht-Archimedische — en 119; Veronesische — en 120; Bettische — en der Mannigfaltigkeit  $M_n$  182; reduzierte Bettische — en nach Poincaré 185; bikomplexe — en 249; duale — en 249; geometrische Darstellung der dualen — en 349; Ableitung — einer Kugel 664; Verwendung der dualen — en in der Liniengeometrie 736; komplexe — en auf der Kugel 846; komplexes — ensystem von Clifford 1410, von Lipschitz 1411; Einordnung der dualen — en in die Ausdehnungslehre 1465; komplexe — en als Grundlage des Situationskalküls 1552; algebraische Theorie der dualen — en 1556; geometrische Anwendungen der dualen — en 1559; topologische Invarianz der Bettischen — en und der Torsions — en 215; Bettische — en und Approximation 223.
- Zeichenwinkel als Werkzeug des Geometers 527; Verwendung des — s bei kubischen Konstruktionen 807; — als Ersatz des Zirkels 1105.
- Zell, Zerlegung der Ebene in — en 7; Koeffizient einer — e 7; Möglichkeit eines — aufbaus 183; zweidimensionale — e 184; Definition der  $M^2$  durch einen — aufbau 185; Beschreibung des — aufbaus einer  $M^2$  186; — aufbau einer zusammenhängenden homogenen  $M^n$  189; allgemeine — aufbauten 193; — aufbau einer berandeten  $M^n$  195; — system 212; Verwandtschaft von — systemen 212; abgeleitetes — system 213; — teilung 213, ihre Invarianten 214.
- Zentral, — polygon 193; — projektion 537, ihre verschiedenen Verfahren 539, ihre Entwicklung zur Zeit der Renaissance 542; — kollineation 552; Ableitung der Gesetze der Ähnlichkeit aus der — projektion paralleler Ebenen 569; — projektion als selbständiges geometrisches Darstellungsverfahren 577; — kollineation räumlicher Figuren 579; — koordinaten 746; — punkt der Inversion 816; harmonische — kollineation 1197.
- Zentrum, Sylvestersches — 176; — der Kollineation 425; Momentan — 588; — einer Perspektivität 909; — similitudinis 910.
- Zerlegung, — sxiome 168; — sgleichheit von Vielecken 917; — sbeweise für Inhaltsgleichheit von Vielecken 923; — sgleichheit von Polyedern 940; — sformeln 1445, ihre Anwendung in der Ausdehnungslehre 1492; — sraum 178; — ssätze 201, 221.
- Zirkel, Proportional — 553; Gebrauch des — s bei den Alten 526; Konstruktionen mit — und Lineal 792, 1085; Ersatz des — s durch das Parallel-lineal 793, durch den Streckenüber-träger 794; Konstruktionen mit dem — allein 800, 1091.
- Zuordnung, harmonische — 1196; Ränder — 180, 186.
- Zurückführung der Formeln der sphärischen Trigonometrie auf Identitäten 851, auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks 853; — leitung 1446.
- Zusammenhang, — sverhältnisse des metrischen Raumes 91, des unbegrenzten Raumes 112; — stheorie 185; — szahl 195, eines Vielfachs 24; — einer Fläche 197; — im Kleinen 206, 223.
- Zusammenhangslos 229; total — 229.
- Zweieck, quadrierbares Kreisbogen — 938; — snetz 108.
- Zweige einer analytischen Linie 134.
- Zweiseitig 158, 162, 203, 220.
- Zwillingspunkte 248; — in der Dreiecksgeometrie 1217.
- Zyklide 684.
- Zyklisch, — e Anordnung von projektivem Charakter 81; — e Projektivität 434; — projektive Gruppe 435; — e Kollineation 436; — e Reihen 470; — perspektive Vielecke 491; — e Linien 588; — e Koordinaten 684; — e Kugelkoordinaten 711.
- Zyklographie als Darstellungsverfahren 595; Verwendung der — zur Lösung ebener Konstruktionsaufgaben 803.
- Zykloide 588; Verwendung der — zur Dreiteilung des Winkels 1108.
- Zyklotomische Ordnungszahl 172.
- Zyklosis 204, 223, 236.
- Zylinderkoordinaten 660.





## Erschienene Bände bzw. Hefte:

- Band I. Arithmetik und Algebra, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. Analysis, in 3 Teilen. Teil I in zwei Hälften, Teil II und Teil III in zwei Hälften vollständig erschienen.
  - III. Geometrie, in 3 Teilen. Teil I in zwei Hälften vollständig erschienen, Teil II, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 6 Heften, davon 4 erschienen. Teil III vollständig erschienen.
  - IV. Mechanik, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig erschienen. II Teilband in 4 Heften, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft (in Vorbereitung).
  - V. Physik, in 3 Teilen. Vollständig erschienen.
  - VI. 1. Geodäsie und Geophysik, in 1 Teilband. I und II. Hälfte vollständig erschienen.
  - VI. 2. Astronomie, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 5 Heften, davon 3 erschienen.

## Unter der Presse:

- Band III. Teil 2. Spezielle algebraische Flächen. II. Teil: Flächen vierter und höherer Ordnung. Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.
- VI. - 2. Astronomische Kolorimetrie. Von I. Hopmann in Bonn. — Photometrie und ihre Anwendungen. Von P. Guthnick in Berlin-Neubabelsberg.

## Band III: Geometrie, in 3 Teilen.

Redigiert von W. Fr. Meyer in Königsberg und H. Mohrmann in Darmstadt.

\* erschienen, † unter der Presse.

### I. Teil.

- \*Vorwort zu Band III von W. Fr. Meyer in Königsberg.  
A. Rein geometrische Theorien.  
B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

#### 1. Hälfte.

- \*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 1. Hälfte.
- \*1. Prinzipien der Geometrie: F. Enriques in Bologna.
  - \*2. Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“: H. v. Mangoldt (†).
  - \*3. Analysis situs: M. Dehn in Frankfurt a. M. und P. Heegaard in Oslo.
  - \*4a. Beziehung und Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert: G. Fano in Turin.
  - \*4b. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip: G. Fano in Turin.
  - \*5. Projektive Geometrie: A. Schoenflies (†).
  - \*5a. Konfigurationen der projektiven Geometrie: E. Steinitz (†).
  - \*6. Darstellende Geometrie: E. Papperitz i. Freiberg i. S.
  - \*7. Die verschiedenen Koordinatensysteme: E. Müller (†).

#### 2. Hälfte.

- Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 2. Hälfte
- \*8. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus: J. Sommer in Danzig.
  - \*9. Elementargeometrie u. elementare nichteuclidische Geometrie in synthetischer Behandlung: M. Zacharias in Berlin.
  - \*10. Neuere Dreiecksgeometrie: G. Berkhan (†) und W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.
  - \*11a. Systeme geometrischer Analyse I: \*H. Rothe (†).
  - b. Systeme geometr. Analyse II: \*A. Lotze in Stuttgart.
  - \*12. Polyeder u. Raumeinstellungen: E. Steinitz (†).
  - \*13. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie: H. Tietze in München und L. Victoris in Wien.
- \*Register zu Band III, A B.

### II. Teil.

#### C. Algebraische Geometrie.

#### 1. Hälfte.

- \*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 1. Hälfte.
- \*1. Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme: F. Dingeldey in Darmstadt.
  - \*2. Flächen II. Ordnung und ihre Systeme und Durchdrückungskurven: O. Staude (†).

#### Bisher erschienen:

Teil I Heft 1 (A, B 1—3).	[220 S.]	1907.	<i>R.M.</i> 8.—	Teil II Heft 4 (C 5a)	[114 S.]	1909.	<i>R.M.</i> 4.40
— I — 2 (A, B 4 a u. 4b).	[168 S.]	1907.	<i>R.M.</i> 6.40	— II — 5 (C 5b).	[64 S.]	1915.	<i>R.M.</i> 2.40
— I — 3 (A, B 5).	[92 S.]	1909.	<i>R.M.</i> 2.60	— II — 6 (C 6 a u. b).	[133 S.]	1915.	<i>R.M.</i> 5.—
— I — 4 (A, B 5 a, 6, 7).	[290 S.]	1910.	<i>R.M.</i> 11.—	— II — 7 (C 7).	[204 S.]	1913.	<i>R.M.</i> 7.60
— I — 5 (A, B 8, 9 I).	[191 S.]	1914.	<i>R.M.</i> 7.20	— II — 8 (C 8).	[266 S.]	1922.	<i>R.M.</i> 11.—
— I — 6 (A, B 9 II).	[210 S.]	1919.	<i>R.M.</i> 8.—	— II — 9 (C 9).	[208 S.]	1927.	<i>R.M.</i> 7.80
— I — 7 (A, B 10, 11 I).	[253 S.]	1921.	<i>R.M.</i> 9.40	— II — 10 (C 10).	[93 S.]	1928.	<i>R.M.</i> 3.60
— I — 8 (A, B 11).	[172 S.]	1924.	<i>R.M.</i> 6.40	— III — 1 (D 1—3).	[183 S.]	1903.	<i>R.M.</i> 8.60
— I — 9 (A, B 12).	[139 S.]	1923.	<i>R.M.</i> 5.—	— III — 2/3 (D 4—6 a).	[254 S.]	1903.	<i>R.M.</i> 9.60
— I — 10 (A, B 13).	[124 S.]	1930.		— III — 4 (D 7—8).	[98 S.]	1915.	<i>R.M.</i> 3.80
— II — 1 (C 1).	[160 S.]	1903.	<i>R.M.</i> 6.—	— III — 5 (D 9).	[66 S.]	1920.	<i>R.M.</i> 2.40
— II — 2 (C 2).	[96 S.]	1904.	<i>R.M.</i> 3.60	— III — 6 (D 10).	[72 S.]	1922.	<i>R.M.</i> 4.60
— II — 3 (C 3, 4).	[199 S.]	1906.	<i>R.M.</i> 7.40	— III — 7 (D 11).	[134 S.]	1927.	<i>R.M.</i> 5.60



II-348760

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

*Soeben erschienen*  
mit Unterstützung der Kongelige Frederiks Uni

## Sophus Lie / Theorie der Trans

Mit Zusätzen und Berichtigungen von Pro

I. Band. Geh. *RM* 26.—. II. Band. Geh. *RM* 23.—.

Das Werk gibt eine ausführliche und systematische Darstellung von Lies langjährigen Untersuchungen über die endlichen kontinuierlichen Gruppen. Es ist auch heute noch die vollständigste Einführung in die Liesche Theorie. Geradezu unentbehrlich ist es für alle, welche die „Gesammelten Abhandlungen“ von Lie lesen. Es ist daher sehr erfreulich, daß die Unterstützung der Norwegischen Universität Oslo einen Neudruck des Werkes ermöglicht hat. Dieser gibt den ersten Druck vollständig unverändert wieder.

## Bericht über neuere Untersuchungen u. Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper

Von Prof. Dr. H. Hasse

Teil I: Klassenkörpertheorie. Teil Ia: Beweise zu Teil I. Zus. geh. *RM* 7.40. (Sonderdruck aus Bd. 35 u. 36 d. Jahresber. d. Dtsch. Math.-Vereinigung.) Teil II: Reziprozitätsgesetz. (Die ausführl. Beweise enthaltend.) Geh. *RM* 11.80. (Ergänzungsband 6 zum Jahresber. d. Dtsch. Math.-Vereinigung.)

In der Theorie der algebraischen Zahlkörper hat sich das Interesse, nachdem die allgemeine Grundlegung in den letzten Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts durchgeführt war, vornehmlich der besonderen Klasse der relativ-Abelschen Zahlkörper zugewendet, die von sehr einfach auszusprechenden, aber außerordentlich tief liegenden Gesetzen beherrscht werden. Durch die Arbeiten von Hilbert, Furtwängler, Takagi und Artin, zu denen dann auch der Verfasser einiges beisteuern konnte, ist diese Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper zu einem gewissen Abschluß gekommen. Es erschien daher gerechtfertigt, mit dem vorliegenden Bericht einen zusammenhängenden Abriss dieser eleganten, in ihrer Eigenart reizvollen Theorie zu geben.

## Lehrbuch der Differentialgeometrie

Von Privatdoz. Dr. A. Duschek und Privatdoz. Dr. W. Mayer

I. Band: Kurven und Flächen im euklidischen Raum. Von A. Duschek. Mit 14 Fig. i. T. Geb. *RM* 17.—. II. Band: Riemannsche Geometrie.

Von W. Mayer. Mit 7 Fig. i. T. Geb. *RM* 17.—

### Aus den Urteilen:

„Ich bin mit dem Wege und den Methoden des Buches vollkommen einverstanden und halte es für ein sehr instruktives Buch, das eine große Verbreitung verdient. Ich habe es daher auch bei Beginn meiner Vorlesungen über Differentialgeometrie meinen Zuhörern aufs beste empfohlen.“ (Prof. Dr. O. Volk, Würzburg.)

„Ich werde das originelle, vortreffliche Werk meinen Schülern gelegentlichst empfehlen.“ (Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Rost, Würzburg.)

„Die sehr schöne, moderne, wissenschaftliche und klare Darstellung wird dem Werke sicher viel Freunde verschaffen, und auch ich werde es gerne den Studierenden empfehlen.“ (Prof. Dr. A. Loewy, Freiburg i. Br.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin





Durch das Erscheinen des vorliegenden  
Heftes III, 1, 10 wird der Teilband III, 1,  
2. Hälfte komplett. Einbanddecken in  
Halbleder dafür sind zum Preise von  
*℞* 5.— erhältlich. Ich bitte zu bestellen.

**B. G. Teubner.**





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**II-348760**

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**10000301668**