GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

ZWEITER THEIL:

VOM ANFANGE DES XVII. BIS

GEGEN DAS ENDE DES XVIII. JAHRHUNDERTS

VON

DR. HEINRICH SUTER

ZÜRICH

DRUCK & VERLAG VON ORELL FÜSSLI & CO.

1875

INHALT.

VORWORT.

HIEMIT übergebe ich den zweiten Theil meiner Geschichte der Mathematik der Oeffentlichkeit. Wer die ausserordentliche Mühe kennt, die das Studium der Geschichte einer Wissenschaft erheischt, der wird das etwas späte Erscheinen desselben zu entschuldigen wissen. Was die Behandlungsweise des Stoffes in diesem zweiten Theile betrifft, so unterscheidet sich dieselbe im Wesentlichen nicht von derjenigen des ersten Theiles; nur wird man leicht erkennen, dass ich in einzelnen Partieen etwas tiefer auf die Sache eingetreten bin und besonders der Entwicklung der Infinitesimalrechnung eine grössere Aufmerksamkeit geschenkt habe. Die Behandlung der angewandten Disciplinen habe ich, einige vereinzelte Andeutungen ausgenommen, auf die Mechanik, als auf die der reinen Mathematik sich am meisten nähernde, beschränkt, bin aber auch hier nur auf die Entwicklung der abstrakten Principien, nicht auf die analytische Deduction der einzelnen Probleme eingetreten. Ich war hier schon im Zweifel, ob ich nicht auch diese Wissenschaft gänzlich fallen lassen sollte; denn jede angewandte mathematische Disciplin ist so umfangreich, dass sie eine besondere Behandlung erfordern würde und theilweise auch schon erfahren hat.

Mögen nun vor Allem aus diejenigen Leser, die im ersten Theile ein näheres Eintreten auf hervorragende Punkte und Gründlichkeit der Angaben vermisst hatten, in diesem zweiten Theile sich nicht getäuscht finden.

St. Gallen, am 1. Juli 1875.

DER VERFASSER.

GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

I.

Wir treten hier zunächst in die auf Descartes vorbereitende Periode ein. In derselben treffen wir vor Allem aus auf zwei Erfindungen, die in der Arithmetik einen Fortschritt begründeten, wie er kaum ein zweites Mal die Grenzen dieser Wissenschaft erweitern sollte: Die Erfindung der Decimalbrüche und der Logarithmen.

Wir haben im ersten Theile gesehen, wie schon Regiomontan im 15. Jahrhundert einen grossen Schritt zum Decimalsystem that, indem er bei den trigonometrischen Zahlen die Sexagesimaltheilung der Alten durch die Decimaltheilung ersetzte, d. h. den Sinus totus = 1,000,000 annahm und so für die trigonometrischen Linien ganze Zahlen erhielt. Allein die Einführung der Decimalbrüche liess noch längere Zeit auf sich warten. Dieser letzte Schritt zur endlichen Vervollständigung der Erfindung wird meistens dem Niederländer **Simon Stevin** zugeschrieben, der in seiner 1585 erschienenen „Algebra" eine kurze Anleitung zum Gebrauche dieser neuen bequemeren Rechnungsmethode gab, so dass wir bei den Mathematikern des 17. Jahrhunderts die Decimalbrüche durchgängig in Anwendung finden. In ihrem Gefolge zeigten sich bald andere Erleichterungen des praktischen Rechnens, z. B. die abgekürzte Multiplikation, die Kepler schon gekannt haben soll.

Noch grössere Tragweite hatte die zweite Erfindung, die der Logarithmen. Schon Michael Stifel hatte in seiner „Arithmetica integra" den Zusammenhang der geometrischen und arithmetischen Progressionen angedeutet, aber ohne weitere Consequenzen daraus zu ziehen. Der Ruhm, die praktische Bedeutung erkannt zu haben, gebührt sowohl dem Schotten **John Napier**, als auch dem Schweizer **Jost Bürgi**, den wir schon als bedeutenden Astronomen am Hofe Wilhelms IV. von Hessen-Cassel gesehen haben.

Freilich publicirte Napier seine Erfindung vor Bürgi; allein nach dem Zeugniss Keplers soll sie dieser lange Zeit vor der Herausgabe seines Werkes schon gekannt haben. Das Buch Napiers erschien unter dem Titel: *„Mirifici logarithmorum canonis descriptio“* 1614 zu Edinburgh. — Der schottische Mathematiker ging ebenfalls von jener Beziehung der arithmetischen und geometrischen Progressionen aus, dass, wenn die Glieder der ersteren successive die Exponenten des Quotienten der zweiten bilden, dann die Multiplication je zweier Glieder der geometrischen durch Addition der entsprechenden der arithmetischen Progression ersetzt werden könne. Allein um die Gültigkeit dieses Satzes auch für gebrochene und irrationale Zwischenwerthe darzuthun, stellte er den continuirlichen Verlauf der Progressionen auf mechanischem Wege dar, indem er zwei Punkte sich auf zwei parallelen Linien bewegen liess, und zwar denjenigen, der die arithmetische Progression erklären sollte, mit gleichförmiger, den andern mit gleichförmig beschleunigter Bewegung. So erklärte er auf diesem Wege alle Eigenschaften der Logarithmen und indem er von der Annahme ausging, dass das erste Zehnmillionsteltheilchen der zweiten Punktreihe mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen worden sei, fand er durch Berechnung den Logarithmus von 10 = 2,3025850 ... und kam so auf das Logarithmensystem mit der Basis 2,7182818 ..., das später wegen seiner bekannten Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel das h y p e r b o l i s c h e oder auch n a t ü r l i c h e genannt wurde. — Am Ende seines Buches gibt Napier noch eine Tafel der Logarithmen der Sinusse des Quadranten von Minute zu Minute.

Nicht lange nach der Veröffentlichung seiner Erfindung starb Napier (1617) und hatte noch die Genugthuung, in dem Engländer Henry Briggs den Erfüller seiner Pläne und Wünsche zu finden. Dieser Mathematiker gab im Jahre 1624 zu London eine Tafel der Logarithmen aller Zahlen von 1—20,000 und von 90,000—100,000 heraus, unter dem Titel *Arithmetica logarithmica.* Dieses Mannes eigenes Verdienst aber ist es, die praktische Unzulänglichkeit der Napier'schen Logarithmen erkannt zu haben. Er wählte daher das für unser Zahlensystem passendere Logarithmensystem mit der Grundzahl 10, das heutzutage noch das Briggs'sche oder gemeine genannt wird. Kurz vor seinem Tode soll freilich schon Napier an diese zweckmässigere Wahl der Grundzahl gedacht haben. — Aber auch Briggs konnte sein Vorhaben nicht vollständig ausführen; er starb 1630. Die trigonometrischen Tafeln, die er projectirt hatte, wurden von dem Engländer Henry Gellibrand ausgeführt. Die Berechnung der Logarithmen war eben damals noch mit den grössten Schwierigkeiten oder wenigstens mit unsäglicher Mühe verbunden; erst später fand man bequemere und schnellere Methoden dafür. Wir erwähnen noch des berühmtesten Nachfolgers von Napier und Briggs in Verfertigung logarithmischer Tafeln, des Holländers Adrian Vlacq, der die mühsame Arbeit unternahm, die von Briggs gelassene Lücke der Logarithmen von 20,000—90,000 auszufüllen. Die Anführung späterer Herausgeber logarithmischer Tafeln gehört nicht hieher. — Kurze Zeit nach Erfindung der Logarithmen wurde zur Erleichterung praktischer Zwecke von dem Engländer Gunter der Rechenschieber erfunden und von Andern später mehrfach verbessert. Derselbe besteht in der Hauptsache aus zwei ineinander verschiebbaren Stäben, auf denen die Logarithmen der Zahlen von 1—100 ihrer Länge nach aufgetragen sind. Durch gehörige Verschiebung erhält man das Produckt oder den Quotienten zweier Zahlen zwischen 1 und 100.

In der Geometrie richteten sich die Bestrebungen dieser Zeit hauptsächlich auf die Inhaltsberechnungen krummer Linien und Oberflächen. Die Methode, die schon der grosse Archimedes seinen genialen Untersuchungen zu Grunde legte, die des Unendlichkleinen, gewann immer mehr an Ausdehnung und erreichte zuletzt in der Infinitesimalrechnung ihre wissenschaftliche Krone. Es sind besonders die Mathematiker Kepler, Cavaleri, Wallis, die ohne jene grosse Hülfe noch nach der alten Methode auf diesem Gebiete arbeiteten. Der erstere definirte in seiner *„Stereometria doliorum“* den Kreis als zusammengesetzt aus unendlich vielen Dreiecken, die alle ihre Spitze im Centrum und die Basis in der Peripherie haben; den Kegel aus unendlich vielen Pyramiden und ebenso den Cylinder aus Prismen. Er berechnete auf diese Weise den Inhalt einer grossen Anzahl von Körpern, von denen die meisten aber von geringer Wichtigkeit sind und arbeitete sich bei vielen zu tief hinein, ohne zu reüssiren. Systematischer ging der Italiener **Cavaleri** *) zu Werke in seinem Buche: *„Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota“*. Die Methode, deren sich derselbe bediente zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern ist im Grunde keine andere als die Exhaustionsmethode des Archimedes, nur ist sie der Infinitesimalrechnung um einen bedeutenden Schritt näher gerückt. Cavaleri betrachtet eine Fläche als die stetige Aufeinanderfolge von Linien, einen Körper von Flächen, denen er natürlich eine gewisse, doch untheilbar angenommene Dicke beilegt. Aus dem Verhältniss der stetigen Zu- oder Abnahme der Grösse dieser Linien und Flächen schliesst er dann auf die Grösse der betreffenden Gebilde. So findet er, dass die Summe der Quadrate aller Linien, durch deren Aufeinanderfolge das Dreieck gebildet wird,

---

*) Bonaventura Cavaleri, geboren 1598 zu Mailand, war Schüler Galilei's, dann Professor der Mathematik zu Bologna. Seine beiden Hauptwerke sind das oben genannte und seine Exercitationes geometricae. Er starb 1647 zu Bologna.

gleich ist dem Drittel der Summe der Quadrate aller Linien, die das Parallelogramm von gleicher Grundfläche und Höhe zusammensetzen. Daraus schliesst er, dass Pyramide und Kegel der dritte Theil des Prisma's und Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe sind, weil die Polygone und Kreise, die jene zusammensetzen, von der Grundfläche zur Spitze im gleichen Verhältniss abnehmen, wie die Quadrate der Dreieckslinien. Diese Methode ist mit ausgezeichneter Systematik von den niederen Gebieten der Geometrie bis zu den höchsten durchgeführt und gibt dem Werke den schönsten Anstrich der Vollendung.

Zu derselben Zeit versuchte der Mathematiker **Guldin** *) auf anderem Wege zur Inhaltsbestimmung der Körper zu gelangen. Der Satz, auf den er seine Methode basirte, ist berühmt unter dem Namen der Guldin'schen Regel, findet sich aber schon in den *Collectiones mathematicae* des Pappos. Er heisst: Rotirt irgend eine Figur um eine in ihrer Ebene befindliche Axe, so ist der Inhalt des entstehenden Rotationskörpers gleich dem Product aus der Fläche der Figur in den Weg ihres Schwerpunktes. Guldin veröffentlichte seine Erfindung in dem Werke *„de centro gravitatis“* oder *„centro-baryca“*. Diese Methode hätte vor denen Kepler's und Cavaleri's einen Vorzug in Hinsicht auf den exacteren und mehr reellen Weg, den sie einschlägt, wenn sie nicht den Uebelstand in sich bergen würde, dass oft die vorausgesetzte Bestimmung des Schwerpunktes einer Figur, besonders von Curven, schwerer zu finden ist, als das Volumen des erzeugten Körpers.

Wir kommen jetzt zu den Bestrebungen einiger ausgezeichneter französischer Mathematiker, das Gebiet der Curven zweiten und höheren Grades hauptsächlich auf analytischem Wege auszubilden. Es sind diese Männer theils Vorgänger, theils Zeitgenossen des grossen Descartes.

---

*) Guldin wurde geboren zu St. Gallen 1577, war Professor der Mathematik zu Graz und Wien und starb 1643.

Die Theorie der Tangenten hatte im Alterthum wenig Anklang gefunden. Die griechischen Geometer definirten dieselbe als eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Curve gemein hat. Abgesehen davon, dass diese Definition bei Curven höheren Grades keine Gültigkeit mehr hat, ist sie schon bei den Curven zweiten Grades wenig geeignet, die Eigenschaften der Tangenten und ihre Beziehungen zur Entstehung der Curve deutlich erkennen zu lassen. Im Anfange des 17. Jahrhunderts zeigte sich nun immer mehr das Bestreben, die Betrachtung der Tangenten in den Vordergrund zu ziehen. Die Mathematiker Roberval, Fermat, Descartes und Barrow sind es vor Allem aus, die dieser Sache ihre ganze Aufmerksamkeit geschenkt haben und die Discussion der Tangenten an krummen Linien jenem Punkte allmälig näher brachten, wo sie durch Herbeiziehung der Differentialrechnung ihre höchste Ausbildung erreichte. Jeder der genannten Mathematiker aber ist in seiner eigenen Weise vorgegangen. Fermat und Descartes definirten die Tangenten als Secanten, deren durchschnittspunkte mit der Curve in einen zusammenfallen; es war diese Auffassung für die Descartes'sche Behandlungsweise der Geometrie die geeignetste. Barrow betrachtete die Tangente einer Curve als die Verlängerung der Seite eines Polygons von unendlichgrosser Seitenzahl, als welches er die Curve auffasste und Roberval endlich ging auf mechanischem Wege vor und definirte die Tangente als die Bewegungsrichtung des die Curve beschreibenden Punktes in jedem Momente. **Roberval** *) veröffentlichte seine Methode

*) Giles Personier de Roberval wurde geboren zu Roberval im Jahre 1602 und starb 1675 als Professor der Mathematik zu Paris. Seine sämmtlichen Schriften erschienen erst nach seinem Tode im Druck. Ausser der obgenannten Schrift haben wir noch die Abhandlungen: *Projet d'un livre de mécanique; de recognitione aequationum; de resolutione geometrica aequationum planarum et cubicarum; traité des indivisibles* (nach Cavaleri's Methode) und *de trochoide vel cycloide*, nebst einigen Briefen, unter anderen an Toricelli.

in der Abhandlung: „*Sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*“. Er betrachtet hierin eine Curve als die Resultirende zweier Bewegungen. Vorausgesetzt nun, es lässt sich in jedem Punkte der Curve diese resultirende Bewegung in ihre Componenten der Grösse und Richtung nach zerlegen, so bildet die Diagonale des aus diesen beiden Factoren vervollständigten Parallelogrammes die Tangente der Curve in diesem Punkte. Es ist leicht einzusehen, dass bei dem damaligen Stande der Geometrie diese Analyse mit den grössten Schwierigkeiten verbunden sein musste und es gelang auch Roberval nicht in allen Fällen, die Tangente auf diesem Wege zu finden. Dessenungeachtet muss man gestehen, dass die Methode Roberval's an Tiefe, Gründlichkeit und Leichtigkeit der Auffassung über denjenigen Fermat's und Descartes' steht. Es fehlte ihr, um die Superiorität über diese zu erlangen, wie Chasles mit Recht bemerkt, nur der gewaltig erleichternden Hülfe der Descartes'schen Analysis. Immerhin bleibt es Roberval's grosses Verdienst, sich nicht mit der blossen Existenz geometrischer Gebilde begnügt zu haben, sondern auf die Entstehungsweise zurückgegangen zu sein, und aus den Verhältnissen der erzeugenden Kräfte auf die Eigenschaften der Curven selbst geschlossen zu haben.

Roberval behandelte in seiner Schrift die Tangentenlegung an 13 verschiedene Curven; ich gebe hier als ein Beispiel diejenige an die Parabel (*Exemple premier*):

Um die Componenten der resultirenden Bewegung zu finden, muss man auf die Construction der Parabel zurückgehen. Es seien in Fig. 1. der Scheitel A und der Brennpunkt F der Parabel gegeben, ebenso AB = AF gemacht. Man ziehe in beliebigen Punkten J, J′, J″ der Axe Senkrechte zu derselben und beschreibe vom Brennpunkt F aus mit den Radien BJ, BJ′, BJ″ Kreise, so werden die jeweiligen Durchschnittspunkte dieser Kreise mit den Senkrechten

Punkte der Parabel sein. — Roberval sagt nun: Die Bewegung des Punktes C, der die Parabel beschreibt, ist zusammengesetzt aus zwei Bewegungen; die eine hat die Richtung des Radii vectoris FC, die andere diejenige der zur Axe Parallelen DC. Beide Bewegungen aber haben gleiche Geschwindigkeit, denn FC ist für jeden Punkt gleich BJ oder DC; daher ist, wenn FE = CD, die Diagonale CE des Parallelogramms CDEF oder die Halbirungslinie des Winkels DCF die Tangente der Parabel im Punkte C.

Roberval zeichnete sich auch in der Ausmessung und Schwerpunktsbestimmung der Flächen und Körper aus und hat dabei seine Methode des Untheilbaren, ähnlich derjenigen Cavaleri's, angewandt. Montucla und Chasles sind der Meinung, dass er dieselbe unabhängig und früher als der italienische Mathematiker gefunden habe; seine sonderbare Zurückhaltung in der Veröffentlichung seiner Arbeiten brachte ihn aber auch hier wieder um den Ruhm der Erfindung.

Die Methode des **Fermat***) ist diejenige der Maxima und Minima, die desshalb von ungemeiner Bedeutung ist, weil sie einer der letzten Schritte zur Erfindung der Differentialrechnung war.

Fermat setzte die Funktion, deren Maximum oder Minimum er bestimmen will, gleich derselben Funktion, nachdem er die Unbekannte x um einen unbestimmten Werth e vermehrt hat. Dann hebt er die gemeinsamen Glieder auf beiden Seiten weg, dividirte den Rest durch e, setzt endlich in der so reducirten Gleichung e = O und erhält schliesslich einen Ausdruck für x, der die Funktion zu einem Maximum oder Minimum macht. Der Unterschied

*) Fermat wurde im Jahre 1608 zu Toulouse geboren. Sein mathematisches Genie, verbunden mit hoher klassischer Bildung sichern ihm einen würdigen Platz unter den grössten Männern seines Jahrhunderts. Ausser seinen eigenen mathematischen Abhandlungen haben wir von ihm eine mit ausgezeichneten Erläuterungen versehene Ausgabe des Diophant. Er starb im Jahre 1665.

der Fermat'schen Methode und der heutigen besteht also einzig darin, dass jener den unbestimmten Werth e anstatt der unendlich kleinen Grösse dx setzte. — Im folgenden Beispiele wollen wir zeigen, wie Fermat diese Methode auf die Tangentenlegung an eine Curve anwandte:

Es sei in Fig. 1. E C' die Tangente an die Parabel im Punkte C, C J die Ordinate dieses Punktes. Dann wird die Ordinate in irgend einem anderen Punkte, z. B. J', die Tangente ausserhalb der Curve treffen. Es ist nun das Verhältniss $J C^2 : J' C'^2$ oder was dasselbe ist, $E J^2 : E J'^2 < J C^2 : J' G^2 = A J : A J'$. Setzen wir nun mit Fermat $E J = a$, $A J = x$, $J J' = e$, und setzen wir zugleich jene ungleichen Verhältnisse einander gleich, so bekommen wir folgende Proportion:

$$a^2 : (a + e)^2 = x : x + e$$

Hieraus folgt:

$$a^2 x + a^2 e = a^2 x + 2 a e x + e^2 x$$

Heben wir die gleichen Glieder auf und dividiren durch e, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$a^2 - 2 a x - e x = o$$

Schliesslich $e = O$ gesetzt, gibt

$$a^2 = 2 a x \text{ oder } a = 2 x.$$

Wir haben hier also eine Gleichung für die Subtangente und können daraus die Tangente konstruiren. Die Anwendung der Theorie der Maxima und Minima auf dieses Problem basirt sich also auf die Variabilität des Verhältnisses $J C^2 : J' G^2$, das, wenn beide Ordinaten zusammenfallen, d. h. im Berührungspunkt C, ein Maximum wird.

Wir müssen F e r m a t noch auf ein anderes Gebiet folgen. In der Z a h l e n t h e o r i e war er der erste, der diese Wissenschaft jener mystischen Umhüllung entriss, die das Zeitalter der Pythagoræer und die vielen Jahrhunderte des Mittelalters um sie gelegt hatten. Zu bedauern ist nur, dass uns derselbe keine zusammenhängende Abhandlung aus diesem Gebiete hinterlassen hat. Wir finden einige wenige

Sätze in Briefen Fermat's an Roberval, Pascal, den Pater Mersenne u. A. Dieselben handeln hauptsächlich über Theilbarkeit und Zerlegung der Zahlen in Quadrate und Cubikzahlen. Nach Fermat wird heute noch der von ihm erfundenen Satz benannt, dass der Ausdruck $A^{p-1} - 1$ durch p theilbar ist, wenn p nicht in A aufgeht. Fermat bewies denselben übrigens nicht; erst Euler gelang es, den in verallgemeinter Form aufgestellten Satz zu beweisen. Die Anregung zu den zahlentheoretischen Untersuchungen erhielt Fermat jedenfalls durch seine Ueberzeugung und Commentirung des Diophant, der in seinem Werke eine bedeutende Anzahl von Aufgaben über die Zerlegung der Zahlen und am Ende eine eigene Abhandlung über die Polygonalzahlen gibt. — In den Briefen an *Pascal* beschäftigte er sich auch mit der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, scheint aber hiezu erst von ihm die Anregung erhalten zu haben, so dass dieser letztere Mathematiker als der Erfinder dieser Disciplin betrachtet werden muss.

Pascal *) war ein Zeitgenosse Fermat's, diesem an Genialität und mathematischem Erfindungsgeist wohl noch überlegen. Seine Auffassung und Behandlungsweise der Kegelschnitte würde allein seinen Namen unsterblich gemacht haben; sie bildet den Grundstein der neuern Geometrie, als deren Erfinder wir daher Pascal mit Recht betrachten.

Seine Methode nimmt die Principien der *Perspective* zu Hülfe, indem die Kegelschnitte als Projectionen des Kreises aufgefasst und so aus den Eigenschaften des letzteren diejenigen der ersteren abgeleitet werden. Leider ist dieses Werk, zu dem er den vollständigen Entwurf schon

---

*) *Blaise Pascal* wurde geboren 1624 zu Clermont-Ferrand und starb 1662 zu Paris. Neben seinen grossen mathematischen Entdeckungen, von denen einige die Grundlagen ganz neuer Disciplinen wurden, bewundert man ebenso sehr seine geistreichen Briefe und Abhandlungen philosophischen Inhalts.

im 16. Jahre gelegt hatte, wie so vieles Andere von Pascal nicht zur Veröffentlichung gekommen, ja gänzlich verloren gegangen. Durch Leibnitz, der es in Paris selbst gesehen hatte, erfahren wir wenigstens die Eintheilung desselben. Dasselbe bestand aus sechs Büchern, von denen das zweite für uns das meiste Interesse hat. Dieses enthält nämlich die Hauptsätze der neueren Geometrie, den Satz des anharmonischen Verhältnisses, den schon Pappos kannte, und denjenigen von dem mystischen Sechseck, von Pascal erfunden und heute noch nach ihm benannt, dass nämlich die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegender Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks in einer Geraden liegen. Diese Sätze finden wir noch ausgesprochen in einem kurzen Schriftchen, das Pascal 1640, in seinem 16. Lebensjahre, herausgab und das in die sämmtlichen Werke des grossen Mathematikers aufgenommen wurde. Ebenfalls findet sich darin der Satz über die Involution der sechs Punkte einer Geraden, die einen Kegelschnitt und ein demselben eingeschriebenes Viereck schneidet, welcher kurze Zeit vorher von **Desargues** (1593—1662), auch einem der ausgezeichnetsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts aufgestellt worden war. Dieser betrachtete die Kegelschnitte ebenfalls von einem neuen Standpunkt aus, indem er ähnlich wie Pascal dieselben als Projectionen des Kreises auffasste und die Theorie der Transversalen zur Erkennung ihrer Eigenschaften anwandte.

Pascal hat sich ebenfalls in der alten Geometrie durch seine Discussion der höheren Curven das grösste Verdienst erworben. Es war damals vor Allem die Cykloide, die die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch nahm. Galilei, Torricelli, Fermat, Roberval haben fast gleichzeitig ihre Bemühungen darauf gerichtet, ohne die Kenntniss ihrer Eigenschaften vollständig erschöpft zu haben. Der erstere der genannten berühmten Männer kann auch als der Erfinder dieser Curve betrachtet werden, wenigstens finden wir in einem Briefe Galilei's an Torricelli vom Jahre 1639 die Bemerkung, derselbe habe sich schon seit 40 Jahren mit der Cykloide beschäftigt. In der Erkennung ihrer Eigenschaften hat Galilei nicht reussirt; erst Roberval gelang es, mit Hülfe seiner berühmten Methode der Tangentenlegung die Tangente der Cykloide zu konstruiren und ihren Flächeninhalt zu finden. Ebenfalls lösten Fermat und Descartes das Problem der Tangenten dieser Curve, jeder nach eigener Methode. Aus dieser Rivalität entspann sich ein heftiger Streit zwischen den drei Mathematikern, welcher erst durch Pascal's ausgezeichnete und erschöpfende Discussion der Cykloide niedergeschlagen wurde. Er begnügte sich nicht bloss mit der Quadratur der vollständigen Curve, sondern berechnete den Flächeninhalt und den Schwerpunkt beliebiger Segmente, den Cubikinhalt und den Schwerpunkt der durch Rotation solcher Segmente um die Axe oder die Ordinate gebildeten Körper u. s. w. — Alle diese Probleme hatte Pascal, bevor er sie veröffentlichte, als Preisaufgaben ausgeschrieben; eine beträchtliche Zahl derselben wurden von verschiedenen Mathematikern, wie dem Pater Lalouère und dem berühmten Engländer Wallis gelöst, haben aber leider nicht die Billigung des dadurch etwas in seinem Ehrgeiz gekränkten Pascal gefunden (derselbe glaubte nämlich, da schon Roberval und Fermat an diesen schwierigeren Problemen scheiterten, es würden keine Lösungen eingehen). Er wies also, wie gesagt, die Arbeiten eines Wallis und Lalouère mit Geringschätzung ab und veröffentlichte seine Lösungen unter fremdem Namen, nämlich in den *„Lettres de A. Dettonville à M. de Carcavi“*. 1659. Im gleichen Jahre erschien dann auch die Abhandlung des englischen Mathematikers über die Cykloide und ein Jahr später (1660) diejenige des Pater Lalouère. Diese Lösungen betrafen allerdings nicht alle Sätze, die Pascal veröffentlicht hatte, besonders fehlten die schwierigsten Probleme über die Schwerpunktsbestimmungen. — Pascal hatte im Jahre

1658 schon eine *Histoire de la roulette* (*cycloïde*) publicirt, in welcher er wenigstens die Verdienste eines Roberval, Fermat, Huyghens etc. lobend anerkennt.

Zur nämlichen Zeit mit Pascal lebten noch einige bedeutende Mathematiker, die hier kurz erwähnt werden mögen. Wir haben oben schon die Behandlungsweise der Kegelschnitte des **Desargues** angeführt, die auf die Principien der Perspective basirt war. Er betrachtete also Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel als Unterarten einer einzigen Curve und brachte so eine weit grössere Allgemeinheit und eine bessere Systematik in das Gebiet der Kegelschnitte. Auch die Perspective selbst und die Gnomonik verdanken ihm durch Hinzuziehung dieses neuen Gesichtspunktes wesentliche Erweiterungen, die er dann in schönster Weise in den Anwendungen auf die Künste zu verwerthen wusste. Leider sind die wichtigsten seiner Schriften nicht mehr vorhanden; sie würden jedenfalls den ausserordentlichen Ruf bestätigen, den Desargues unter den grössten Geometern seines Jahrhunderts genoss. — **Mydorge** (1585 — 1647), ein Freund Descartes', hat ebenfalls als einer der ersten versucht, die Kegelschnitte von einem andern Gesichtspunkte aus als die Alten zu behandeln und ihr Gebiet zu erweitern. Seine Schrift erschien 1641 in 4 Büchern als Einleitung zu einem Werke über die Dioptrik und Katoptrik. Er ging nicht wie Desargues und Pascal von den Principien der Perspective aus. Seine Abhandlung ist mehr im Style der Alten geschrieben; doch betrachtet er die Kegelschnitte in Verbindung mit dem Kegel selbst, vereinfacht aber auf geistreiche Art die oft so weitschweifigen Beweise des Apollonios. Eine Fortsetzung seiner vier Bücher, die er versprochen, ist nicht erschienen.

Der Niederländer **Gregor** von **St. Vincent** (1584—1667) verdient hier als einer der vortrefflichsten Mathematiker erwähnt zu werden, die auf dem Gebiete der Flächen- und Inhaltsberechnung krummliniger Gebilde nach der Methode der Alten, d. h. im Sinne der Exhaustionsmethode des Archimedes vorgingen. Sein berühmtestes Werk hat den Titel: „*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*". 1647. Je weniger der erste Theil den Ruhm des Verfassers zu befestigen vermag, desto mehr glänzt im zweiten sein ausgezeichnetes Genie hervor, das, wenn auch nicht von vielen, doch von zwei der grössten Männer, Huyghens und Leibnitz, gebührend anerkannt worden ist. Seine Methode, die er „*ductus plani in planum*" nennt, ist eine weitere Ausbildung der Methoden eines Guldin, Cavaleri, Fermat, Roberval und bildet den nächsten Anschluss an die bald darauf erfundene Infinitesimalrechnung.

Wenn wir in unserer Geschichte eine grössere Ausführlichkeit innehalten wollten, so hätten wir noch eine Reihe von Namen anzuführen, die in grossen Geschichtswerken eine Stelle gefunden haben; wir müssten namentlich noch die geometrischen Arbeiten der beiden berühmten Schüler Galilei's, Torricelli's und Viviani's, in Betrachtung ziehen. Allein, da diese keine wesentlichen Neuerungen enthalten, sondern im Allgemeinen nach der Methode und den Principien der oben genannten vorgehen, so unterlasse ich hier das nähere Eintreten auf dieselben, um dem Plane meines Werkes, eine möglichst kurze, organische und übersichtliche Darstellung der Entwicklung der Mathematik zu geben, keinen Abbruch zu thun. Es möge hier genügen gezeigt zu haben, wie die auf Descartes vorbereitende Periode zwei schöne Keime später sich entfaltender kostbarer Blüthen theils erzeugt, theils weiter fortentwickelt hat: es entstand aus der durch Kepler, Cavaleri, Fermat und Roberval gepflegten Exhaustionsmethode das grosse, allumfassende Gebiet der Infinitesimalrechnung; es wurden die berühmten Sätze eines Pascal und Desargues die Fundamente eines allerdings sich später entwickelnden, aber nicht weniger wichtigen und ausgedehnten Zweiges der mathematischen Wissenschaften, der neueren Geometrie.

Damit aber jene Methode des Untheilbaren sich zu dem gewaltigen Baume der Infinitesimalrechnung entfalten und brauchbare Früchte tragen konnte, musste ein Mittelglied geschaffen werden, das geeignet war, jener noch zu planlos und mühsam herumtappenden Methode durch ein verallgemeinerndes Princip den Weg zu bahnen. Es war diess Descartes' herrliche Entdeckung der analytischen Geometrie, mit der wir den nächsten Theil beginnen werden.

II.

Descartes *) war einer der ersten Franzosen, welche die grossartige reformatorische Thätigkeit des 17. und 18. Jahrhunderts in Wissenschaft, Politik und socialem Leben geleitet haben, die endlich jene gewaltige Umwälzung zum Ausbruch brachte, die am Ende des 18. Jahrhunderts die noch bestehenden Anklänge an die Herrschaft des Mittelalters für ewige Zeit im Blute ertränkte. Wie Pascal, Voltaire, Rousseau und Andere theils mit dem giftigen Stachel des Witzes und der Satyre, theils mit der überzeugenden Kraft genialer auf Natur, Recht und Wahrheit gestützter Schriften, die morschen Grundpfeiler eines durch und durch faulen religiösen, politischen und socialen Lebens zu zertrümmern suchten und gewiss auch zum grossen Theile zertrümmert haben, so betrat der allseitig hochgebildete Descartes den durch seine unsterblichen Vorgänger Baco von Verulam und Galilei angezeigten Weg einer gründlichen Reformation der Gedankenwelt, gestützt auf die

*) *René Descartes*, *lat. Renatus Cartesius*, wurde geboren im Jahre 1596 zu *Haye en Touraine*. Er wollte sich zuerst der militärischen Laufbahn widmen, was aber seinem wissenschaftlichen Forschungstrieb bald nicht mehr behagte. So zog er sich nach Holland ins Privatleben zurück, da Frankreichs reaktionärer Boden seinen reformatorischen Ideen, wie denjenigen manches andern grossen Mannes jener Zeit, nicht günstig war. Hier erschienen die meisten seiner mathematischen und philosophischen Werke. Von der Königin Christine von Schweden an ihren Hof berufen, verbrachte er dort die letzte Zeit seines Lebens ruhig und glücklich. Er starb 1650 zu Stockholm.

gänzliche Zerstörung der Herrschaft der Scholastik und die auf Erfahrung basirte Forschung im grossen Reiche der Wissenschaften, welchem indirekten Wege die Menschheit nicht die geringeren, nein, ich kann sagen die andauernderen Wirkungen zu verdanken hat.

Was die rein philosophischen Schriften Descartes' betrifft, so werden wir im Folgenden gänzlich davon absehen; nur diess sei gesagt: wenn auch die cartesianische Philosophie nicht jene Erfolge und jene Bedeutung erlangt hat, wie sie den Systemen späterer grosser Philosophen zu Theil wurden und daher der Lobredner Descartes', Gaillard, mit Recht sagen konnte, *„que le nom illustre de Descartes survivrait au règne du Cartésianisme"*, so gebührt doch unserm Philosophen der ewige Ruhm, als der erste die drückende Herrschaft eines falschen Peripatetismus nicht nur angegriffen und zerstört, sondern auch etwas Neues an seine Stelle gesetzt zu haben; denn, sagt Gaillard, *„pour changer les nations, il ne suffit point d'abattre, il faut reconstruire"*.

Die Mathematik hat vor vielen Wissenschaften den unbestreitbaren Vorzug, dass ihre auf logischer Consequenz gegründeten Fortschritte und Entdeckungen nicht angezweifelt und in späteren Zeiten als unwahr oder nicht mehr für die Verhältnisse passend umgestossen werden können, und hierin liegt der Grund des unwandelbaren Ruhmes grosser Mathematiker. So begründete auch die „Geometrie" des Descartes mehr als alle seine anderen Schriften seinen unvergänglichen Namen. Wir werden im Folgenden etwas näher auf den Inhalt derselben eintreten.

Das Princip der Geometrie des Descartes ist die Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Wäre Diophant in der Blütheperiode der griechischen Mathematik erschienen, so hätten wir vielleicht dem schöpferischen Genius dieses Volkes diese umgestaltende Neuerung zu verdanken, obgleich die *Algebra numerosa* des griechischen

Mathematikers nicht so leicht zu jenem Ziele zu führen geeignet war wie zwölf Jahrhunderte später die *Algebra speciosa* eines Vieta. In den mathematischen Schriften der Araber finden wir allerdings schon Spuren der Anwendung der Algebra auf die Geometrie, allein sowohl Vieta als Descartes kannten diese Leistungen der Vorläufer ihres Ruhmes nicht; und so nennt denn Chasles mit Montesquieu zu sprechen die neue Methode des Descartes mit Recht eine *proles sine matre creata.*

Welch' gewaltige Folgen die Anwendung der Algebra auf die Geometrie in der weiteren Entwicklung der Mathematik hatte, ist Jedermann bekannt. Der Character der Allgemeinheit, der durch dieselbe vor Allem in die Lehre von den Kegelschnitten gebracht wurde, vereinfachte das Gebiet der höheren Geometrie auf erstaunenswürdige Weise, und führte sie in raschem Fluge jenem Ziele zu, wo sie in der Infinitesimalrechnung ihre höchste analytische Ausbildung erhielt. Von jetzt an ist es unmöglich, in der Geschichte der Mathematik die Algebra von der Geometrie zu trennen, bis am Ende des 18. und am Anfang des jetzigen Jahrhunderts die höhere Algebra und die neuere Geometrie sich wieder als selbstständige Disciplinen zu entwickeln begannen.

Die Geometrie des Descartes erschien im Jahre 1637 in 3 Büchern in dem bescheidenen Umfange von 104 kleineren Quartseiten. Im ersten Buche zeigt er zuerst, wie die arithmethischen Grundoperationen, Addition, Subtraction, Multiplication und Division geometrisch gedeutet werden können und kommt dann auf die Construction der Gleichungen I. und II. Grades. Bei diesen neuen Betrachtungen Descartes' gewann nicht allein die Geometrie an Ausdehnung und Allgemeinheit, sondern auch die Algebra an und für sich machte bedeutende Fortschritte. Descartes gibt zuerst den negativen Wurzeln eine faktische Bedeutung, indem er sie als geometrisch ebenso gut darstellbar nachweist, als die positiven. Allerdings hatte schon acht Jahre vorher Albert Girard, ein Holländer, auf die geometrische Bedeutung der negativen Wurzeln hingewiesen, ohne die Construction selbst anzugeben; er sagt bloss: *la solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant.* Im dritten Buche stellt Descartes noch einige Sätze auf, über die Natur der Gleichungen. Unter anderem lehrt er, wie man die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung erkennen könne: so oft die Zeichen + und — wechseln, so viele positive Wurzeln, so oft zwei gleiche Zeichen nebeneinander stehen, so viele negative Wurzeln hat die Gleichung. Der englische Mathematiker Wallis hat Descartes über diesen Punkt, wie über viele andere scharf angegriffen, leider nicht aus wissenschaftlichem Rechtsgefühl, sondern um die Verdienste seines von ihm so sehr gepriesenen, allerdings keineswegs unbedeutenden Landsmannes Harriot (1560—1621) in günstigeres Licht zu stellen. Wallis wirft Descartes vor, nicht beachtet zu haben, dass jenes Erkennungszeichen nicht mehr genüge, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln habe. Allerdings berücksichtigt Descartes in der nämlichen Stelle diesen Fall nicht direkt; aber er sagt ausdrücklich: *tot radices verae in ea haberi possunt, quot* . . . . also „es kann so viele haben", nicht „es hat so viele"; und einige Seiten nachher sehen wir in der That, dass Descartes die Anwesenheit imaginärer Wurzeln in den Gleichungen wohl zu berücksichtigen wusste. Montucla tritt ziemlich ausführlich und mit scharfen Worten auf diese kleinlichen Zänkereien eines Wallis ein und wir müssen in dieser Beziehung den französischen Schriftsteller eifrigst gegen einige Anschuldigungen in Schutz nehmen, die ihm als Franzose eine zu grosse Eingenommenheit für seinen Landsmann zu Schulden kommen lassen wollen. Montucla hat, wie wenig andere Franzosen, wir müssen es leider gestehen, den wahrhaft verdienstvollen Männern aller Nationen volle Gerechtigkeit widerfahren lassen. — Der genannte englische Mathematiker **Harriot** hat sich übrigens um die Theorie der Gleichungen bedeutende Verdienste erworben. Sein Hauptwerk erschien 1631 zu London unter dem Titel: *artis analyticae praxis.* Die hauptsächlichsten Neuerungen bestanden in der Einführung bequemerer Formen für die Gleichungen. Er soll unter Anderem auch zuerst das Ungleichheitszeichen angewandt haben.

Descartes geht im zweitem Buche seiner Geometrie auf die krummen Linien und die Aufgaben höheren Grades über. Er bemerkt im Anfange, wie die Alten drei Arten von Problemen unterschieden hätten: Ebene, körperliche und lineare; die ersteren lösten sie mit Hülfe des Lineals und des Kreises, die zweiten mittelst der Kegelschnitte und die letzteren durch Anwendung höherer Curven, die sie mit dem Namen „mechanische" bezeichneten, zum Unterschied von den Kegelschnitten, die, weil noch an körperlichen Gebilden hervortretend, „geometrische" genannt wurden. Er zeigt dann, wie in der Algebra den ebenen Problemen die Gleichungen I. und II. Grades, den körperlichen diejenigen III. und den linearen diejenigen IV. und höheren Grades entsprechen, und beweist, dass jede Gleichung beliebigen Grades auf diese Weise geometrisch gedeutet werden könne. — Er geht dann zur Erklärung seines Coordinatensystems über, vermittelst welchem er auf so geistreiche Weise die Eigenschaften der Curven auf diejenigen algebraischer Gleichungen zurückführt. Ich gehe hier nicht weiter auf diese bekannten Operationen ein.

Im dritten Buche behandelt er, wie schon gesagt, einige algebraische Eigenschaften der Gleichungen und geht dann auf die Lösung der berühmten Probleme dritten Grades, Duplication des Würfels und Dreitheilung des Winkels über, die die Geometer des Alterthums so sehr beschäftigt haben. Er weist nach, dass alle Probleme dritten Grades auf diese beiden Lösungen zurückzuführen sind, was allerdings schon Vieta erkannt hatte. Indem er dann auf die höheren Gleichungen übergeht, zeigt er, wie die Lösung derselben gleichbedeutend sei mit der Auffindung dreier und mehr mittlerer Proportionalen und der Theilung eines Winkels in vier, fünf und mehr Theile.

Wir haben im vorigen Abschnitte die verschiedenen Methoden betrachtet, die die Vorgänger Descartes' zur Construction der Tangenten an Curven angewandt haben; wir haben gesehen, wie Fermat mit Hülfe seiner Theorie der Maxima und Minima die Tangenten berechnete; wie Barrow dieselben als die Verlängerung der Seite des der Curve eingeschriebenen Polygons von unendlich grosser Seitenzahl auffasste; und wie endlich Roberval die dynamische Entstehungsweise der Curve zu Hülfe nahm und die Tangente als die Resultirende der beiden Bewegungscomponenten eines Punktes definirte. — Descartes nun schlägt im Princip den nämlichen Weg ein wie Fermat, indem er die Tangente aus der Secante entstehen lässt; nur gibt ihm seine neue analytische Behandlungsweise der Geometrie die Mittel in die Hand, die Aufgabe in allen Fällen, in denen die Curven durch algebraische Gleichungen repräsentirt werden können, leichter zum Ziele zu führen. Mit den Kegelschnitten geht Descartes folgendermassen vor. Er beschreibt aus irgend einem Punkte der Axe des Kegelschnittes einen Kreis, der den einen Curvenast in 2 Punkten schneidet. Er drückt nun eine der beiden gemeinsamen Ordinaten sowohl durch die Relationen des Kreises als des Kegelschnittes aus, setzt beide analytischen Ausdrücke einander gleich und erhält so eine Gleichung zweiten Grades für x, die zwei ungleiche Wurzeln hat. Die Coefficienten derselben vergleicht er nun mit den entsprechenden einer andern Gleichung zweiten Grades mit 2 gleichen Wurzeln, wie z. B. $x^2 + 2ax + a^2 = o$, wo a eine ganz willkürliche Grösse ist, die durch die Gleichung $x + a = o$ bestimmt wird. Aus der Gleichsetzung dieser Coefficienten ergibt sich ihm nun eine Relation zwischen bekannten Curventheilen (wie z. B. bei der Parabel zwischen

Parameter und Subnormale), die ihm die Construction der Tangente ermöglicht. Es ist diese Art der Lösung des Tangentenproblems eine Anwendung der von ihm zuerst eingeführten Methode der unbestimmten Coefficienten. Er löst auf diesem Wege auch die Gleichungen IV. Grades, indem er nämlich zwei Gleichungen II. Grades mit unbestimmten Coefficienten miteinander multiplicirt, die hieraus entstehende Gleichung IV. Grades der zu lösenden gleichsetzt und von ihr subtrahirt, so dass die Lösung nun auf diejenige einer Gleichung III. Grades zurückgeführt ist.

Diess sind in gedrängter Kürze die mathematischen Leistungen Descartes'. Wollten wir noch miteinander seine Principien der Philosophie durchgehen, so könnten wir keineswegs mit demselben Stolze den Ruhm des grossen Mannes verkündigen, wie wir es in den vorhergehenden Zeilen zu thun gezwungen waren. Dieses Werk trägt, obgleich es das System der aristotelischen Philosophie zu stürzen versucht, noch zu sehr den speculativen Character an sich, als dass in demselben viele positive Wahrheiten gefunden werden könnten. Descartes geht vom Standpunkt der Deduction anstatt der Induction aus und es zeigt sich diess am besten darin, wie er gegen die neuen mechanischen Entdeckungen Galilei's sich stellt. Ich komme später noch auf dieses Verhältniss zurück.

Wir gehen jetzt im Folgenden zu den Fortschritten über, die die Geometrie auf Grund der Descartes'schen Erfindung bis zum Auftreten der Infinitesimalrechnung gemacht hat.

Es ist sehr bezeichnend, wie Descartes anfänglich von seinen Landsleuten weniger verstanden werden wollte, als von ausländischen Mathematikern. — Unter seinen namhaftesten Gegnern finden wir den im vorigen Kapitel behandelten französischen Mathematiker Roberval, der allerdings nicht das ganze System Descartes' angriff, sondern nur an einzelnen Punkten zu rütteln versuchte, durch diesen von den Mathematikern mit Aufmerksamkeit verfolgten Streit aber nur dazu beitrug, die Kenntniss der neuen Methode zu verbreiten. — Von den Franzosen, die sofort mit vollstem Verständniss in seine Fussstapfen eintraten, haben wir nur seinen intimen Freund **De Beaune** (1601—1651) zu nennen, dessen Commentar zu Descartes' Geometrie von diesem selbst in vollstem Maasse gebilligt und empfohlen wurde. Derselbe befindet sich nebst zwei Abhandlungen über die Gleichungen (*De natura et constitutione atque de limitibus aequationum*) in der Ausgabe von Descartes' Geometrie durch den Leydener Professor Franciscus van Schooten. 1659. — Man verdankt De Beaune die Aufstellung eines neuen Gesichtspunktes in der analytischen Geometrie der krummen Linien. Er war nämlich der erste, der die Tangenten einer Curve als ein bestimmender Faktor derselben auffasste, d. h. der aus der Gleichung und den Eigenschaften der Tangente auf diejenigen der Curve schloss. Chasles nennt diese Methode umgekehrte Tangentenmethode. De Beaune wandte sie zuerst bei Gelegenheit einer Aufgabe an, die von Descartes gestellt wurde, nämlich eine Curve zu finden, deren Subtangente zur betreffenden Ordinate sich verhalte, wie der Theil der Ordinate, welcher zwischen der Curve und einer Geraden gelegen, die vom Scheitel der Curve unter einem Winkel von 45^0 ausgeht, zu einer konstanten Strecke.

Descartes handelt über diese Curve in seinen Briefen (Bd. VI.), gibt aber, da er sie als eine mechanische (*transcendente*) erkennt, ihre Gleichung nicht an, sondern erwähnt nur einige ihrer hervortretendsten Eigenschaften.

De Beaune hat auch die Theorie der algebraischen Gleichungen um eine Neuerung bereichert, indem er zuerst den Weg angezeigt hat, auf welchem man die Grenzen, zwischen welchen die reellen Wurzeln einer Gleichung sich befinden, bestimmen könne (*Tractatus de limitibus aequationum*). Im ersten Paragraphen untersucht er die Gleichung:

$$x^2 - l\,x + m^2 = o.$$

Er verfährt auf folgende Weise: Aus obiger Gleichung folgt: $m^2 = l\,x - x^2$, woraus $l\,x > x^2$, oder $l > x$. Die Gleichung kann aber auch geschrieben werden: $x^2 = lx - m^2$, woraus folgt: $l\,x > m^2$ oder $x > \frac{m^2}{l}$; daher x zwischen $\frac{m^2}{l}$ und l.

Die Niederländer sind es vor Allem aus, die die Geometrie des Descartes sogleich nach ihrem Erscheinen mit klarem Geiste erfasst und sich zu Nutzen gemacht haben. Männer wie van Schooten, Huyghens, Johann de Witt, van Heuraet, Sluze, Hudde nehmen eine ausgezeichnete Stelle ein in der Geschichte der Mathematik.

Franciscus van Schooten (16 . . —1659), Professor der Mathematik in Leyden, schrieb ebenfalls einen Commentar zu Descartes' Geometrie, der mit demjenigen De Beaune's zugleich erschien. Sein Hauptwerk aber sind seine Exercitationes mathematicae, in denen er die Methode des Descartes auf viele interessante und schwierige Probleme der höheren Geometrie anwendet. Ferner existirt von ihm eine Abhandlung, betitelt: *De organica sectionum conicarum descriptione,* in welcher er verschiedene Arten der mechanischen Construction der Kegelchnitte angibt.

Der edle, durch sein tragisches Schicksal berühmt gewordene Grosspensionair von Holland, **Johannes de Witt** (1625—1672) widmete sich trotz seines vielbewegten politischen Lebens mit Eifer und Erfolg der Mathematik. Von ihm datirt eine neue Auffassung der Entstehungsweise der Curven. Er betrachtete dieselben als den Ort der Durchschnittspunkte der Schenkel beweglicher Winkel und leitete aus dieser Beschreibungsart ihre hauptsächlichsten Eigenschaften ab. Diese Auffassung ist im Grunde die nämliche, wie die der neueren Geometrie. Jene sich drehenden Schenkel erzeugen projectivische Strahlenbüschel und ihre entsprechenden Durchschnittspunkte sind Punkte der Curve. Dass De Witt die Descartes'sche Analysis zur Erkennung der Eigenschaften der auf diese Weise entstandenen Curven anwandte, raubte dieser Verfahrungsart den synthetischen Character, der die neuere Geometrie kennzeichnet.

Sluze (1623—1685) und **Hudde** (1640—1704) beschäftigten sich hauptächlich mit der Fermat-Descartes'schen Methode der Tangentenlegung an Curven und der Maxima und Minima, und brachten wesentliche Verbesserungen an derselben an. In den Abhandlungen von Hudde: *De reductione aequationum et de maximis et minimis* finden wir einige geistreiche Sätze aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, z. B. wie man erkennen könne, ob in einer Gleichung zwei gleiche Wurzeln vorkommen und diese Wurzeln zu finden. Multiplicirt man nämlich eine Gleichung von bestimmtem Grade mit einer arithmetischen Progression von der nämlichen Anzahl Glieder wie die Gleichung und deren kleinstes Glied gleich Null ist, und zwar so, dass das höchste Glied der Gleichung mit dem höchsten Gliede der Progression u. s. f. bis zuletzt das niederste oder bekannte Glied der Gleichung mit dem niedersten Gliede der Progression, d. h. mit Null multiplicirt wird, so erhält man eine neue Gleichung, die ein Grad niedriger ist als die ursprüngliche und deren grösster gemeinsamer Faktor mit jener uns eine der beiden gleichen Wurzeln bestimmt. Multiplicirt man z. B. die Glieder der Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

mit den entsprechenden Gliedern der Progression:

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0,$$

so erhält man die Gleichung:

$$3x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \text{ oder reducirt:}$$

$$3x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Der grösste gemeinschaftliche Faktor dieser und der ursprünglichen Gleichung ist $x - 2$ und also 2 eine Wurzel der vorgelegten Gleichung, deren sie noch eine gleiche hat. Wenn jene Gleichung nicht 2 gleiche Wurzeln hat, so findet man keinen gemeinschaftlichen Faktor. Dieser Satz wurde von Hudde auch bewiesen in der Abhandlung *de maximis et minimis.* — Man kömmt übrigens noch auf andere Weise zu diesem Ziel; z. B. kann man das niederste Glied der Gleichung mit dem höchsten der Progression, und das höchste der Gleichung mit Null multipliciren und man wird den nämlichen grössten gemeinschaftlichen Faktor zwischen beiden Gleichungen finden.

Van Heuraet nimmt in der Geschichte der analytischen Geometrie eine hervorragende Stelle ein als einer der ersten, die sich mit Erfolg auf die Rectification der Curven warfen. Derselbe theilt uns in einem kleinen Schriftchen, betitelt: *De transmutatione curvarum linearum in rectas,* das uns van Schooten in der Ausgabe des Descartes aufbewahrt hat, seine Methode mit. Sie besteht darin, dass er die Rectification der Curve abhängig macht von der Quadratur einer andern, die mit der ersten in gewisser Relation steht; so z. B. führt er die Rectification der Parabel auf die Quadratur der Hyperbel zurück. — Die Engländer nehmen die Ehre der ersten Curvenrectification für ihren Landsmann **Neil** in Anspruch, der ums Jahr 1657 die von ihm erfundene semicubische oder Neil'sche Parabel rectificirt hat. Da es aber, wie uns Montucla versichert, ziemlich feststeht, dass Huyghens Ende 1658 noch nichts von dieser Erfindung wusste, so kann man die Kenntniss derselben noch viel weniger van Heuraet zuschreiben, der zu jener Zeit in einem ziemlich abgelegenen Städtchen Frankreichs lebte. Man darf also beiden Mathematikern den Ruhm der ersten Curvenrectification zutheilen.

Wir kommen zu einem der grössten Männer des 17. Jahrhunderts, zu **Christian Huyghens** *), gleich ausgezeichnet als tiefer Kenner der alten Geometrie, wie als Beförderer

*) Christian Huyghens wurde geboren 1629 zu Haag. Er widmete sich zuerst der Jurisprudenz, machte dann grössere Reisen, liess sich in Paris nieder, wo er 1666 Mitglied der Akademie wurde. 1681 kehrte er in seine Vaterstadt zurück und starb daselbst 1695.

der Descartes'schen Methode, ein ebenbürtiger Rivale Galilei's, ein würdiger Vorgänger Isaak Newton's. Sein mathematisches Genie zeigte er unstreitig am schönsten in seinen scharfsinnigen und eleganten Ableitungen der schwierigsten Probleme der höheren Geometrie nach der alten Methode. In dieser Hinsicht steht obenan seine Theorie der Evoluten, oder der durch Abwicklung eines der ganzen Länge einer Curve nach gespannten Fadens entstehenden neuen Curve. Huyghens nennt die ursprüngliche Curve, um die der Faden gespannt war, Evolute, und die durch Abwicklung entstehende „die durch Evolution beschriebene" *(descripta ex evolutione)*. Nachdem er die allgemeinen Eigenschaften solcher Evoluten nachgewiesen hat, z. B. dass die Tangente der ursprünglichen Curve in jedem Punkte, d. h. der Faden in jeder Lage, senkrecht stehe auf der neuen Curve, geht er zur Betrachtung der Cykloide über und weist auf sehr einfachem Wege nach, dass die Evolute dieser Curve (die Evolution vom Scheitel aus begonnen) wieder eine der ersteren gleiche Cycloide sei. — Seine Untersuchungen über die Cycloide als tautochronische Curve sind sehr geistreich. Nach verschiedenen vorausgeschickten Sätzen kommt er zu dem Resultate, dass die Fallzeiten eines Körpers in einer Cycloide und des freien Falles aus der Höhe der Cycloide sich verhalten wie der halbe Umfang des erzeugenden Kreises zu seinem Durchmesser, woraus er sodann schliesst, dass die Fallzeit in einer Cycloide immer dieselbe sei, von welchem Punkt derselben aus man den Körper fallen lasse. (Tautochrone oder Isochrone). Die Eigenschaft der Cycloide als Brachystochrone sprach Huyghens noch nicht aus. Erst Johann Bernoulli fand dieselbe 1696 als die erste Lösung des Hauptproblems des Variationencalculs.

Diese interessanten Untersuchungen Huyghens' befinden sich in seinem 1673 erschienenen Hauptwerke *Horologium oscillatorium,* auf dessen hauptsächlich mechanische Probleme wir in einem späteren Capitel näher einzutreten gedenken. Es ist dieses Werk eines der unsterblichen Producte des menschlichen Geistes und darf Newton's Principien, zu denen es gleichsam die Einleitung bildet, kühn an die Seite gestellt werden. Die Geistesverwandtheit der beiden Männer tritt auf jeder Seite der zwei genannten Werke in schönstem Lichte hervor, und Zeugnisse der gegenseitigen Verehrung dieser Heroen des Geistes sind die Attribute, mit denen Jeder den Andern zu citiren pflegt: Newton nennt Huyghens nie anders als *Summus Hugenius*. — In vielen zerstreuten Schriften und Briefen von Huyghens an zeitgenössische Mathematiker, wie an Leibnitz, De l'Hôpital, und Andere findet man noch eine grosse Zahl ausgezeichneter Abhandlungen dieses berühmten Mannes. So gibt er uns als Anhang zu seiner *Dissertatio de causa gravitatis* eine Uebersicht der Eigenschaften der Logistik oder logarithmischen Linie, auf deren Betrachtung er durch die Untersuchung des Falles der Körper in widerstehenden Medien hingewiesen wurde. Die Beweise zu diesen Sätzen wurden von dem italienischen Mathematiker Guido Grandi geliefert; sie erschienen im ersten Bande der *Opera posthuma* von Huyghens 1728.

Huyghens gab auch die Rectification der Kissoide, berechnete die Oberflächen der parabolischen und hyperbolischen Conoide, untersuchte die Kettenlinie und andere höhere Curven. Die meisten dieser ausgezeichneten Resultate fand der grosse Geometer mit Hülfe der alten Geometrie; in vielen Fällen nimmt er allerdings die Methode des Descartes, wenn auch nicht formell, so doch factisch zu Hülfe. Dass er auch die damals in ihrer Enstehung begriffene Infinitesimalrechnung hoch schätzte und trefflich anzuwenden verstand, beweisen seine zahlreichen Briefe an Leibnitz und De l'Hôpital, in denen verschiedene Probleme aus jenem Gebiete zur Sprache kommen. Der letztgenannte grosse Analytiker konnte nicht umhin, seine

Bewunderung über den Scharfsinn Huyghens' in der Lösung der schwierigsten Probleme auszudrücken; er sagt in einem Briefe an denselben, in welchem er ihn wegen der Lösung einer von Joh. Bernonlli gestellten Aufgabe beglückwünscht: *Cela ne me surprend point, car je sais assez que vous êtes notre maître dans tout ce qu'il y a de plus profond dans les mathématiques.*

Ich hätte jetzt als die letzten bedeutenden Mathematiker vor Erfindung der Differentialrechnung die beiden Engländer Wallis und Barrow am Ende dieses Capitels noch in Betrachtung zu ziehen; allein da dieselben in unmittelbarster Beziehung zu Newton (Barrow war dessen Lehrer) und zu dem neuen Calcul stehen, finde ich es für angezeigter, dieselben an den Eingang jener grossen, umgestaltenden Epoche zu stellen. — Wir schliessen also hiemit die Vorbereitungsperiode der Infinitesimalrechnung und erlauben uns im nächsten Capitel einen kleinen Unterbruch in der Geschichte der reinen Mathematik, um die Entwicklung einiger angewandter Disciplinen in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zu verfolgen. Es ist mir in Zukunft unmöglich, den angewandten Gebieten der mathematischen Wissenschaften dieselbe Aufmerksamkeit zu schenken, wie ich es in Bezug auf die Astronomie und die naturphilosophischen Lehren der Griechen und der abendländischen Völker bis auf Copernikus gethan habe. Es würde dem Zwecke und dem Plane meines Werkes nicht entsprechen und ich muss gestehen, meine Kräfte zu sehr übersteigen, wollte ich alle die ausgedehnten Gebiete der mathematischen Wissenschaften in den enggefassten Rahmen meines historischen Gemäldes zusammendrängen. Ich werde mich daher in der neueren Geschichte nur an das spezifisch Mathematische in den angewandten Theilen halten, soweit eben diese von der Entwicklung der reinen Mathematik untrennbar sind. Ich meine hier vor Allem die mathematischen Principien der Statik und Dynamik, die Gesetze der mathematischen

Astronomie, d. h. die Mechanik des Himmels und einzelne mathematische Theorien der Optik und Akustik. Alle diese verschiedenen Partien werde ich gemeinsam betrachten, d. h. nicht jeder einzelnen ein besonderes Capitel widmen. Der nächste Abschnitt behandelt also die Entwicklung dieser mathematischen Principien der Naturlehre von Galilei und Kepler bis auf Newton.

III.

Wir haben am Ende des I. Theiles unserer Geschichte, nachdem wir die epochemachenden Entdeckungen des grossen Copernikus betrachtet hatten, noch kurz auf die reformatorische Thätigkeit hingewiesen, die Baco von Verulam, Giordano Bruno, Gassendi, Descartes und andere ausgezeichnete Geister jener Zeit gegenüber dem alles beherrschenden System der peripatetischen Philosophie des Mittelalters in ihren Schriften entwickelten. Wir sahen, wie jene Lehren dieser Männer, dass die Erfahrung und Beobachtung der oberste Grundsatz und das Fundament wissenschaftlicher Forschung sein und bleiben müsse, die härtesten Anfechtungen von Seite des Klerus und der scholastischen Philosophen zu erdulden hatten und daher nur äusserst mühsam sich Bahn brechen konnten. Es brauchte die eklatantesten praktischen Beweise für jene Theorien, um denselben zum dauernden Siege zu verhelfen und die ersten Männer, die diese praktischen Beweise in unumstösslicher Form gegeben haben, sind in der Astronomie **Kepler**, in der Mechanik **Galilei**.

Kepler*) fand in der That seine unsterblichen Gesetze der Planetenbewegung nur mit Hülfe der vielfältigsten

*) Johannes Kepler wurde geboren am 27. Dec. 1571 zu Magstadt bei Weil in Württemberg. Er studirte zuerst an der Universität Tübingen Theologie, widmete sich dann aber auf die Ermahnungen Mästlins definitiv der Astronomie. 1593 erhielt er eine Stelle als Professor der Mathematik am Gymnasium zu Gratz, ging dann 1600 zu Tycho nach Prag, wo er kais. Mathematikus wurde. Im Jahre 1614

und genauesten Beobachtungen der Bewegung des Mars und es ist diese Arbeit wohl nicht so sehr ein geniales Produkt momentaner Denkungskraft, als vielmehr ein hehres Denkmal des Fleisses und der Ausdauer menschlicher Geistesthätigkeit, und in letzterer Hinsicht trägt Tycho Brache, selbst ein Gegner des kopernikanischen Systems, einen bedeutenden Antheil an der durch Kepler vollendeten Begründung und Befestigung desselben. Denn jene von Kepler benutzten Beobachtungen der Marspositionen waren von Tycho Brahe gemacht worden; dieser lieferte also Kepler das Material, aus dem sein scharfer Geist jene Gesetze herausgefunden hat, nach denen sich seit ewigen Zeiten die Planeten in den Menschen unbekannten Bahnen bewegten. Die beiden ersten Gesetze; die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, und die *radii vectores* beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen, bilden die Schlussresultate des 1609 erschienenen Werkes: *Astronomia nova de motibus stellae Martis ex observationibus Tychonis Brahe.* — Nachdem dann Kepler längere Zeit die Bewegungen und die Bahnen der verschiedenen Planeten untereinander verglichen und nach einem gesetzlichen Zusammenhang in den Umlaufszeiten und den Entfernungen von der Sonne geforscht hatte, fand er endlich 1618 das dritte Gesetz: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Cuben der grossen Axen der Bahnen, das er 1619 in dem Werke *Harmonices mundi Libri V.* veröffentlichte. — Wenn das erstere Werk des grossen Astronomen auf jedem Blatte den Stempel strenger Wissenschaft-

---

wurde er als Professor der Mathematik nach Linz berufen, wo er bis 1627 wirkte. Er lebte nachher eine Zeit lang bei Wallenstein zu Sagan, wo er ebenfalls eine Lehrstelle bekleidete, in der er aber nicht lange wirkte. Er starb zu Regensburg den 5. Nov. 1630, als er vor dem daselbst versammelten Reichstag seine rückständige Besoldung als kais. Angestellter reklamiren wollte. — Sein Leben war ein ruheloses, vielfach getrübt durch Anfechtungen, pecuniäre Noth und Krankheit. — Vergl. seine *Opera omnia, edid. Frisch.* 1858—67.

lichkeit und mathematischer Sicherheit trägt, so führt ihn dagegen in dem zweiten und mehr noch in dem schon 1596 erschienenen *Prodromus dissertationum cosmographicarum* sein ideales Wesen, seine lebhafte Phantasie auf nicht zu billigende Abwege, auf die wir nur in den mystischen Schriften der pythagoräischen Philosophen und der mittelalterlichen Scholastik zu stossen gewohnt sind. So stellte er in seinem Prodromus, also lange bevor er den empirisch-wissenschaftlichen Weg zur Auffindung seiner Gesetze einschlug, als Frucht speculativer Studien den Satz auf, dass sich die Entfernungen der Planeten von der Sonne nahezu verhalten, wie die Radien von Kugeln, die in folgender Reihenfolge in regelmässige Körper eingeschrieben sind:

Kugel,	Hexaeder,	Kugel,	Tetraed.,	Kugel,	Dodekaed.,
Saturn	—	Jupiter	—	Mars	—
Kugel,	Ikosaed.,	Kugel,	Octaeder,	Kugel,	
Erde	—	Venus	—	Mercur.	

Solch' ähnliche Sätze und kühne Spekulationen enthalten neben ausgezeichneten Ideen noch einige andere seiner Werke, wie seine *Epitomes astronomiae Copernicanae libri VII.1618—22.* Auch in der Theorie der Cometen stand Kepler noch nicht auf dem richtigen Standpunkt. Er wagte es nicht, die nämlichen Gesetze der Planetenbewegung auch auf jene anzuwenden und schrieb denselben daher anstatt elliptischer Bahnen mit grosser Excentricität geradlinige Bewegung zu. — Ueber das allgemeine Gravitationsgesetz finden wir an verschiedenen Stellen Andeutungen. Es scheint, dass Kepler die Wirkung desselben auch ausser der Erde geahnt hat; in einer Stelle der Einleitung zu seiner *Astronomia nova* handelt er über das gegenseitige Verhältniss von Erde und Mond und kommt hiebei auch mit folgenden Worten auf die Gravitation zu sprechen: *Gravitas est affectio corporea mutua inter cognata corpora ad unitionem seu conjunctionem. — Si luna et terra non retinerentur vi animali aut alia aliqua aequipollenti, quaelibet in suo circuitu, terra ascende-*

ret ad lunam quinquagesima quarta parte intervalli, luna descenderet ad terram quinquaginta tribus circiter partibus intervalli, ibique jungerentur: posito tamen, quod substantia utriusque sit unius et ejusdem densitatis. —

Wir sehen also, dass Kepler jenem Universalgesetze nicht mehr ferne stand, durch welches Newton die Gesammtheit der Körper des Weltalls in gegenseitige Beziehung gebracht und ihre ewig unveränderliche Bewegung und Stellung zu einander erklärt hat; wäre dem grossen Astronomen ein längeres Leben vergönnt gewesen, so würde ihm vielleicht jener kurze Schritt nicht verborgen geblieben sein, der von seinem dritten Gesetze zur Entdeckung der allgemeinen Gravitation noch nöthig war; allein das Schicksal hatte den Ruhm der Krönung des von Copernikus und Kepler so stolz emporgeführten Baues einem noch Grösseren aufbewahrt.

Von Keplers ausgezeichneten Leistungen habe ich schliesslich noch seine Rudolphinischen Tafeln zu erwähnen, die alle früheren an Genauigkeit und Reichhaltigkeit übertrafen.

Während Kepler auf diese Weise in Deutschland das copernicanische System befestigte, vertheidigte es Galilei*) in Italien gegen die vielfältigsten Anfechtungen. Er veröffentlichte seine Ansichten darüber in Form eines Dialoges zwischen einem Copernikaner und Anticopernikaner, welcher 1632 zu Florenz unter dem Titel: *Dialogo sopra i due sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano,* erschien. Diese

*) Galileo Galilei wurde geboren zu Pisa den 18. Feb. 1564. Er widmete sich aus Vorliebe der Mathematik, obgleich er zum Studium der Medicin bestimmt war. 1589—92 bekleidete er eine Professur zu Pisa, von 1593—1609 zu Padua, worauf ihn der Grossherzog von Toscana nach Pisa als grossherzoglichen Mathematiker berief. 1633 wurde er in jenen berühmten Inquisitionsprocess verwickelt, in welchem er seine Ansichten und seine Vertheidigung des cop. Weltsystems widerrufen musste. Er starb 1642 auf seiner Villa bei Arcetri. Vergleh. seine Opere, Ediz. compl. Firenze 1842—56.

Schrift rief eine Fluth von Gegenschriften hervor, die mit den ausgesuchtesten Spitzfindigkeiten der alten Scholastik gegen das neue System zu argumentiren versuchten. Diesen gegenüber war der Kampf nicht schwer; allein stärker in die Waagschaale fielen die wissenschaftlich theilweise begründeten Einwendungen, die von Seite einiger in den mathematischen Wissenschaften sehr bewanderter Männer erhoben wurden. Unter diesen hebe ich besonders den gelehrten Jesuiten Riccioli hervor, dessen Haupteinwand gegen die Bewegung der Erde bei dem damaligen Stande der Mechanik nicht so leicht zu widerlegen war. Ich führe ihn hier seines wissenschaftlichen Werthes wegen kurz an:

Es werde in Fig. II. ein Körper von der Höhe des Thurmes AE fallen gelassen. In gleichen Zeittheilen, z. B. in jeder Sekunde durchliefe er, falls sich die Erde nicht drehen würde, die Räume AB, BC, CD und DE, die sich nach den Gesetzen des freien Falles verhalten wie 1 : 3 : 5 : 7. Dreht sich aber die Erde und durchlaufe die Spitze des Thurmes, während der Körper von A bis E fällt, den Bogen AF, der Fuss desselben also E e, so wird der Körper in jeder Sekunde in Wirklichkeit die Räume A b, b c, c d und d e durchlaufen. Suchen wir aus der Drehungsgeschwindigkeit der Erde und der Fallgeschwindigkeit des Körpers nach dem Parallelogramm der Kräfte die resultirende Geschwindigkeit in jeder Sekunde, so finden wir dieselbe, oder was dasselbe ist, die Räume A b, b c, c d und d e nahezu einander gleich. Hieraus schliesst nun Riccioli, der Körper müsse, da die Geschwindigkeit in jedem Punkte b, c, d, e nahezu die gleiche sei, ein ihm entgegenstehendes Hinderniss in jeder Höhe mit der gleichen Kraft treffen, was gegen die Erfahrung sei; mithin könne sich die Erde nicht drehen. — Riccioli beachtete hiebei nicht, dass die Richtung des Falles in jeder Sekunde eine andere ist, am Ende senkrechter als am Anfang, dass mithin auch die Kraft des Stosses mit jeder Sekunde zunimmt und am Ende am grössten ist. — Bewaffnet mit dem von ihm selbst erfundenen und nach ihm benannten Fernrohr erweiterte Galilei auch die Grenzen der praktischen Astronomie besonders durch seine Entdeckung der Jupiterstrabanten, der Sonnenflecken und der Venusphasen, wodurch die neue Lehre immer festere Stützen gewann. Doch auf diese Gebiete näher einzutreten, erlaubt mir der Zweck meines Buches nicht. Ich wende mich zu seinen grossartigen mechanischen Entdeckungen.

Die Mechanik tritt uns hier zum ersten Mal als eine für sich abgeschlossene, auf bestimmten Principien basirende Wissenschaft entgegen. Wenn wir ihre ersten Anfänge im Alterthum betrachten, so können wir das, was Archimedes geleistet, wohl zu den grössten Errungenschaften des griechischen Geistes auf dem Gebiete der reellen Wissenschaften zählen; allein es trägt nicht, wie das stolze Gebäude der griechischen Geometrie, den Character einer von festen Axiomen oder Principien ausgehenden, sich systematisch entwickelnden Wissenschaft. Die statischen und hydrostatischen Sätze des Archimedes sind allerdings unumstössliche, bewiesene Wahrheiten; allein sie stehen vereinzelt, abgerissen da, nicht untereinander verbunden durch allgemeine Gesichtspunkte, nicht ausgehend von bestimmten fundamentalen Wahrheiten. Die Sätze vom Hebel und über den Schwerpunkt tragen mehr den Character mathematischer Lehrsätze, von einer rationellen, mechanischen Auffassung ist nicht die Rede. Hätte Archimedes nicht nur die statischen Grundsätze gekannt, sondern auch die dynamischen Gesetze schon zu beweisen verstanden, so hätte er vielleicht einen tieferen Zusammenhang zwischen Gleichgewichts- und Bewegungsverhältnissen gefunden und so eher aus der Mechanik eine systematische, selbstständige Wissenschaft schaffen können; denn darin zeigte sich eben in neuerer Zeit, wie E. Dühring*)

*) E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Von der philos. Facultät der Universität Göttingen gekrönte Schrift. Berlin 1873.

treffend nachweist, das erste Zeichen einer principiellen Auffassung der Mechanik, „dass statische Verhältnisse auf eventuell mögliche Bewegungen zurükgeführt wurden“. Dass also Archimedes die Dynamik noch nicht kannte, mag ein wesentlicher Grund des so späten Erscheinens einer rationellen Entwicklung der Mechanik gewesen sein.

Galilei nun ist der eigentliche Begründer der Dynamik und damit also auch einer wissenschaftlichen auf Principien beruhenden Mechanik. Diese Disciplin der angewandten Wissenschaften, nähert sich, soweit sie wenigstens in ihrer theoretischen Entwicklung beständig um jene Grundprincipien sich dreht, mehr als irgend eine andere der reinen Mathematik. „Die Mechanik“, sagt Dühring im Vorwort zu seinem ausgezeichneten Werke, „ist die abstrakteste und durchsichtigste der das rein ideelle Gebiet überschreitenden und hiemit erst in die Wirklichkeit der Dinge eindringenden Wissenschaften“. Diese nahe Verwandtschaft der Mechanik mit der reinen Mathematik und ihre besonders intimen Beziehungen zu einander in ihren höheren Partien haben mich dazu bestimmt, ihr von nun an eine nähere Aufmerksamkeit zu Theil werden zu lassen, als ich es den andern angewandten Disciplinen gegenüber zu thun im Falle bin.

Als Vorläufer Galilei's werden gewöhnlich der Holländer **Simon Stevin** (1548—1620) und der Italiener **Guido Ubaldi** (1545— . . . .) betrachtet. Allein diese bewegten sich ausschliesslich auf dem Gebiete der Statik und kamen auch hierin nicht weit über die Leistungen der Alten hinaus. Nur in der Hydrostatik verdanken wir Stevin einige schöne Fortschritte, indem er zuerst den Druck von Flüssigkeiten auf Gefässwandungen richtig bestimmte. — Auch in der Dynamik hatte Galilei einen Vorgänger, dessen hierauf bezügliche Leistungen bis jetzt noch zu wenig berücksichtigt wurden, den berühmten italienischen Maler **Leonardo da Vinci** (1452—1519). Bekannt ist, dass unter allen grossen Malern jener Zeit Leonardo die ausgedehntesten Kenntnisse in den zur Malerei unumgänglich nothwendigen theoretischen Wissenschaften, in der Perspective und Anatomie, hatte; dass er aber auch von den Gesetzen der Dynamik richtige Vorstellungen hatte, ist erst durch die eingehenderen Forschungen eines Venturi und Libri dargethan worden. Der erstere veröffentlichte im Jahre 1797 eine Abhandlung, betitelt: *Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci.* Aus dieser vernehmen wir, dass Leonardo das Bewegungsgesetz auf der schiefen Ebene kannte. Er stellt nämlich den Satz auf, dass die Fallzeit auf der schiefen Ebene zu derjenigen des freien Falles aus der Höhe dieser Ebene sich verhalte wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe. Hiemit ist allerdings noch nicht gesagt, dass Leonardo das Gesetz des freien Falles kannte; dass er aber auch in dieser Hinsicht richtige Vorstellungen hatte, beweisen uns verschiedene Stellen seiner Schriften. Diese einleitenden Erkenntnisse auf dem Gebiete der Dynamik blieben hierauf mehr als 100 Jahre ungefördert, bis endlich Galilei den richtigen Weg zu ihrer principiellen Entwicklung öffnete. — Sein Hauptwerk über Mechanik sind seine *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, etc. 1638.* Hieran reihen sich zwei kleinere Schriften von weniger bedeutendem Inhalt, nämlich der *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono, 1612,* und *Della scienza meccanica, 1649.* Die für die Entwicklung der dynamischen Principien beiden wichtigsten unter den sechs Dialoghi des ersteren Werkes sind der dritte und vierte. Bezeichnend ist, dass Galilei die Lehrsätze und zum grösseren Theil auch die Beweise dieser zwei Capitel in lateinischer Sprache gibt, während seine sämmtlichen Werke in italienischer Sprache geschrieben sind. Es mag wohl der wissenschaftliche Werth und die grosse Tragweite dieser Sätze ihn von seinem sonst so lobenswerthen Plane, nicht nur für Eingeweihte zu schreiben, abgebracht haben. — Der dritte Dialog enthält die Gesetze der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung und des Falles auf der schiefen Ebene, der vierte die Betrachtung der parabolischen Bahnen geworfener Körper. In der Ableitung des Fallgesetzes geht Galilei von der Hypothese aus, dass eine fortwährend mit gleicher Stärke wirkende Kraft die Geschwindigkeit eines Körpers in jedem Zeittheilchen um gleichviel vergrössere oder verkleinere, dass die Geschwindigkeit also stetig, d. h. der Zeit proportional zu- oder abnehme. Dieser Satz in Verbindung mit demjenigen der gleichförmigen Bewegung, dass die durchlaufenen Räume der Zeit und der Geschwindigkeit proportional sind, liefert ihm das Gesetz des freien Falles: Die durchlaufenen Räume sind dem Quadrate der Zeit proportional. Zu interessanten Betrachtungen gibt der Uebergang vom freien Fall zur schiefen Ebene Veranlassung. Es wird uns hier vor Allem aus klar, von welchem Gesichtspunkt aus Galilei sein System der Dynamik auffasst und auf welchen Principien es basirt. Schon beim freien Falle bildet die Geschwindigkeit den Ausgangspunkt der galileischen Auffassungsweise; von dem stetigen Wachsen derselben schliesst er auf die durchlaufenen Räume. Wäre Galilei einzig nur empirisch vorgegangen, ohne auch der inductiven Speculation, dem zerlegenden Denken die gebührenden Rechte einzuräumen, so hätte er wahrscheinlich consequenterweise die durchlaufenen Räume zum Ausgangspunkt seiner Forschungen gewählt, denn diese boten sich zunächst der blossen Beobachtung dar. Man hüte sich hier vor einer falschen Auffassung der galileischen Verfahrungsweise. Als Gegner der aristotelischen Philosophie konnte er sich niemals auf die Seite der reinen Deduction stellen; seine Gesetze sind keineswegs das Resultat blosser Speculation, aber auch nicht das nackte Ergebniss experimenteller Bestimmungen; sie sind das geniale Product des sichtenden, zergliedernden Gedankens, durch den Nachweis ihrer Uebereinstimmung mit den Erscheinungen der Natur als ewige Wahrheiten anerkannt. Das ist, was Dühring sehr treffend „inductive Spekulation“ nennt. — Der Begriff des Momentes spielt bei Galilei eine bedeutende Rolle; es hat aber bei ihm einen viel allgemeineren Sinn, als es in neuerer Zeit als statisches Moment erlangt hat. Es ist nämlich nichts Anderes als das Maass der Wirkung einer Kraft, oder die Kraft des Andranges (*impeto*) eines bewegten Körpers gegen einen Widerstand, also im Princip gleichbedeutend mit unserer lebendigen Kraft. Es ist bestimmt durch Masse und Geschwindigkeit eines Körpers und ist also letzterer proportional, wenn erstere als konstant vorausgesetzt wird. In diesem Sinne braucht es Galilei in den Sätzen über die schiefe Ebene, an deren Spitze folgender als Postulat hingestellt wird: Die Momente, oder also die Endgeschwindigkeiten, die ein auf verschieden geneigten Ebenen herunterfallender Körper erreicht, sind dieselben, wenn jene Ebenen die gleiche Höhe haben. Dieser Satz wurde nachher von Galilei bewiesen, allein nicht ohne die Zuhülfenahme der statischen Relationen der schiefen Ebene. Hier sehen wir zum ersten Mal deutlich, wie die dynamischen und statischen Principien ineinander übergreifen; es handelt sich nämlich darum, zu beweisen, dass die *impeti* oder *momenti* des auf einer schiefen Ebene und des aus ihrer Höhe fallenden Körpers sich verhalten, wie Höhe zur Länge der schiefen Ebene. Um diesen eigentlich statischen Satz für seine dynamischen Untersuchungen anwenden zu können, ging Galilei von folgenden Betrachtungen aus:

An einem gleicharmigen Hebelarm F C G (Fig. III.) befinden sich zwei gleiche Gewichte F und G. Der eine Hebelarm C G werde mit seinem Gewichte um die Axe C gedreht, und so nach und nach aus der horizontalen in die verticale Lage übergeführt, wobei das statische Moment des Gewichtes p in G allmählig von p. C G in Null übergeht. Betrachten wir eine bestimmte Lage des Hebelarmes, z. B. C D und ziehen wir in D die Tangente an den Kreis, der durch den drehenden Hebelarm beschrieben wird, so können wir uns das Gewicht p in D sowohl am Hebelarm C D, als auch auf der schiefen Ebene A B befindlich vorstellen. In ersterer Hinsicht ist die Kraft, mit der es den Hebelarm F C zu drehen versucht, gleich p. $\frac{ED}{CD}$ und in Bezug auf die schiefe Ebene strebt es mit der Kraft p. $\frac{AC}{AB}$ herunterzufallen. Da aber die Dreiecke E D C und A C B ähnlich sind, so sind jene beiden Quotienten einander gleich und hiemit sind die statischen Beziehungen auf der schiefen Ebene auf diejenigen am Hebel zurückgeführt und die dynamische Auffassung des galileischen *impeto* oder *momento* als gleichbedeutend mit den statischen Momenten nachgewiesen. Mit Hülfe dieser gegenseitigen Beziehungen beweist nun Galilei seinen zuerst als Postulat hingestellten Satz von der Gleichheit der Endgeschwindigkeiten bei beliebig geneigten Ebenen von gleicher Höhe.

Im vierten Theil der Discorsi geht Galilei zur Betrachtung der Bahnen geworfener Körper über und berührt hier zum ersten Male das Princip der Zusammensetzung der Bewegungen. Doch geschieht die Combination der dem Körper durch den ursprünglichen Stoss ertheilten gleichförmigen Geschwindigkeit mit der durch die Schwerkraft erzeugten accelerirten Bewegung ohne die Zuhülfenahme des Gesetzes vom Parallelogramm der Kräfte; die parabolische Bahn ergibt sich einfach durch rein mathematisches Verfahren unter alleiniger Voraussetzung des Princips der Trägheit und des Gesetzes vom freien Falle. Jenes Princip der Zusammensetzung der Kräfte tritt bei Galilei noch nicht als streng formulirter Satz auf, sondern zieht sich nur als verborgener Faden durch sein mechanisches System hindurch. Wir haben im ersten Theile gesehen, wie es der französische Mathematiker Roberval beträchtliche Zeit nach Galilei bei seiner mechanischen Entstehungstheorie der Curven angewandt hat. Erst von da an datirt also die principielle, gesetzliche Auffassung dieses so wichtigen mechanischen Satzes.

Eines der wichtigsten Principien der Mechanik, das die gegenseitigen Beziehungen zwischen Statik und Dynamik am deutlichsten und kürzesten ausspricht, und auf das später einer der grössten Mathematiker das ganze Gebäude der Mechanik gegründet hat, ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Es drückt dasselbe die Gleichgewichtsbedingung eines Massensystems, auf das beliebige Kräfte wirken, aus, indem es von der Voraussetzung einer nicht wirklichen, sondern bloss gedachten, möglichen Bewegung des Massensystems ausgeht: ist die Summe der virtuellen Momente, d. h. der Producte jeder wirkenden Kraft in die Projection der durch die virtuelle Bewegung hervorgebrachten Verschiebung auf die Richtung der Kraft gleich Null, so ist das System im Gleichgewicht. Dieses Princip, das erst durch die Hülfe der Infinitesimalrechnung seine vollendete und kürzeste mathematische Form erhielt, tritt schon in Galilei's mechanischen Untersuchungen, wenn auch nicht formell und selbstständig ausgedrückt, so doch mit der Sache auf's innigste verwoben und von ihr untrennbar hervor. Jene Galileische Auffassung der Geschwindigkeit als Maass der Kraft und die Beibehaltung dieser Auffassung in den statischen Beziehungen des Hebels und der schiefen Ebene, jener Begriff des *impeto* oder *momento* eines auf einer schiefen Ebene im Ruhezustand gehaltenen Körpers: alle diese Beziehungen bilden die ersten rohen, noch nicht gesetzlich erkannten Gestaltungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeit. Auch in die Hydrostatik hinüber versuchte Galilei diese ersten Anwendungen des virtuellen Princips zu ziehen.

Wir haben früher gesehen, wie Stevin zuerst es war, der den Kreis der hydrostatischen Kenntnisse, wie sie seit Archimedes bestanden, wesentlich erweitert hat, indem er auf sehr geistreiche Art den Druck von Flüssigkeiten auf Gefässwandungen bestimmte. Allein in seiner Auffassungsweise zeigt sich keineswegs die Idee eines inneren Zasammenhanges zwischen den statischen und hydrostatischen Principien; erst Galilei verdanken wir die Zurückführung der Hydrostatik auf statische Grundsätze, besonders auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeit. In seiner Abhandlung über die schwimmenden Körper bringt Galilei den Weg eines in einer Flüssigkeit sinkenden Körpers und die dadurch hervorgebrachte Verwendung des Flüssigkeitniveau's in gegenseitige Beziehung und führt auch hier den Begriff seiner Momente zur Feststellung der Gleichgewichtsbedingungen ein. Wir können hier nicht näher auf Galilei's Erörterungen über diesen Punkt eingehen; unser Zweck war zu zeigen, wie consequent der grosse Italiener sein System der Mechanik aufgeführt hat und wie vor Allem aus das Princip der virtuellen Geschwindigkeit, ohne bestimmt ausgesprochen zu sein, durchweg als fundamentaler Satz zur Geltung kommt. — Auch Pascal beschäftigte sich mit dem Gleichgewicht der Flüssigkeiten und es kommt ihm in Hinsicht der principiellen Auffassung der Sache ein vorzügliches Verdienst zu. Er geht nämlich von der Betrachtung der Wirkung eines in der Seitenwand eines Gefässes vorgeschobenen Stempels auf andere in der Wandung angebrachte Stempel aus, indem er die Grösse der Verschiebung und die Querschnitte der Stempel in gegenseitige Beziehung bringt.

Galilei fand auch auf empirischem Wege die Hauptgesetze der Pendelbewegung, den Isochronismus der Schwingungen und das Verhältniss der Schwingungszahlen zur Pendellänge; allein erst Huyghens war es vorbehalten, die mathematische Theorie des Pendels vollständig auszubilden und seine so hochwichtige Anwendung auf die Uhren zur praktischen Geltung zu bringen. Galilei soll allerdings in seinen letzten Jahren noch auf den Gedanken dieser Verwendung des Pendels gefallen sein.

Diese neuen Principien und Gesetze der Mechanik fanden gleich jenen astronomischen Theorien eines Copernikus und Kepler vielseitigen harten Widerstand. Wenn uns diess von

Seite der Anhänger der aristotelischen Metaphysik keineswegs auffallen kann, so muss es uns um so mehr in Erstaunen setzen, wenn ein Mann wie Descartes, der vielgepriesene Reformer des philosophischen Denkens, der erklärte Feind der Scholastik und einer der ausgezeichnetsten Mathematiker seines Jahrhunderts sich nicht zu den Anhängern Galilei's bekennen wollte. Dieses Verhalten liegt in dem Wesen der Descartes'schen Philosophie begründet. Wenn Baco nur zu sehr auf dem Standpunkt der Induction und Empirie sich befand, um die Entwicklung der so sehr zur Abstraction hinneigenden Principien der mechanischen Wissenschaften durch seine philosophischen Grundsätze fördern zu können, so vermochte sich sein Zeitgenosse Descartes ebenso wenig von der rein deductiven Seite der philosophischen Spekulation zu trennen, deren bedauernswerthe Ausflüsse er in der aristotelischen Philosophie so sehr bekämpfte. Galilei vereinigte in der Erforschung seiner mechanischen Gesetze Erfahrung mit philosophischer Deduction; Descartes aber suchte allein durch Deduction, ohne Berücksichtigung natürlicher Verhältnisse, auf die letzten angebbaren Gründe, d. h. auf die Principien der Mechanik zu gelangen. Sehr klar offenbart sich der Descartes'sche Standpunkt in seinen Angriffen gegen die Galilei'sche Theorie der Schwere. Zuerst das Wesen der Schwere ergründen und erst aus diesem Wesen die Erscheinungen und Gesetze des Falles zu deduciren, diess ist die Descartes'sche Verfahrungsweise, die eben Galilei glücklicherweise nicht verfolgt hat. Wie aber Descartes das Wesen der Schwere erkannt hat, zeigen verschiedene Stellen des 91. Briefes, II. Bds. an Mersenne, wo er sagt: *Quicquid ille dicit de velocitate corporum in vacuo descendentium nullo fundamento nititur; debuerat enim antea definire quid sit gravitas, cujus naturam si perspectam habuisset, deprehendisset nullam esse in vacuo.* — Indem er dann im Weiteren auf die Fallgesetze zu sprechen kommt, sagt er: *Supponit velocitatem ponderum* *descendentium aequaliter semper augeri, quod et olim cum illo credidi. Sed jam puto me demonstrative scire id non esse verum.* — Und von dem Fall auf der schiefen Ebene: *Supponit etiam velocitatis gradus ejusdem corporis in diversis planis esse aequales, quando aequales sunt istorum planorum elevationes; hoc vero ille non probat, neque exacte verum est; et quia sequentia omnia ex duabus hisce hypothesibus dependent, dici potest illum in äere aedificasse.* — Endlich urtheilt er über den schiefen Wurf folgendermaassen: *Falsam aliam hypothesin prioribus adjicit; nempe corpora in äerem projecta aequali velocitate ferri secundum horizontem; descendendo vero illorum velocitatem in ratione spatii duplicata augeri. Hoc autem posito facillimum est concludere motum projectorum sequi lineam parabolicam; sed cum ejus hypotheses sint falsae, conclusio etiam a vero valde remota esse potest.*

In mechanischen Theorien, deren Beziehungen zu den natürlichen Erscheinungen weniger intim sind, hat der deductive Zug der Descartes'schen Philosophie besser reüssirt. So müssen wir ihm die erste Conception des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft vindiciren, obgleich dasselbe erst viel später in der Mechanik allgemein auftritt. Descartes spricht übrigens dieses Gesetz in sehr universalem Sinne aus, indem er die ganze Kraftsumme oder Bewegungsmenge, die ursprünglich in die Natur gelegt wurde, für immer in derselben vorhanden, d. h. für ewig unzerstörbar annimmt.

Das hohe Ansehen des französischen Philosophen verschaffte seinen irrigen Ansichten über die Wirkungen der Schwerkraft und über die Ursachen der Bewegung der Himmelskörper, worauf wir bei der Betrachtung der Newton'schen Entdeckung noch zurückkommen werden, eine leider nur zu lange Existenz. Ausgezeichnete Gelehrte jener Zeit, unter andern auch Joh. Bernoulli vertheidigten sein System (wenn auch nicht seine dynamischen Lehren) und trugen dadurch zur Befestigung desselben wesentlich bei. Allein der Alles überwältigenden Macht des Newton'schen Genius, mussten endlich auch jene Meinungen sich unterwerfen, trotz der gewichtigen Unterstützung durch Männer, deren mathematisches Talent demjenigen Newton's ohne Anstand ebenbürtig genannt werden darf.

Am Ende dieses Capitels muss ich noch kurz auf eine Entdeckung hinweisen, die in der ersten Hälfte des siebenzehnten Jahrhunderts die Fortschritte der Optik in hohem Grade beförderte, die Entdeckung des Brechungsgesetzes durch den Niederländer **Snellius** (1591—1629). Noch Kepler hatte das Verhältniss des Einfalls - zum Brechungswinkel nur annähernd angegeben, so für Einfallswinkel unter 30^0 wie 3 : 1. Snellius drückte das Gesetz folgendermaassen aus: Die Länge des gebrochenen Strahls vom Einfallsloth bis zu einer diesem parallelen Wand und die Fortsetzung des einfallenden Strahles vom Einfallsloth bis zur nämlichen Wand haben in demselben Medium immer dasselbe Verhältniss; d. h. trigonometrisch ausgedrückt, die Cosecanten des Einfalls- und Brechungswinkels oder die Secanten der Complementärwinkel, oder wie es heutzutage ausgedrückt wird, die Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels stehen in konstantem Verhältniss. Snellius selbst hat das Gesetz nicht bewiesen. Erst Descartes versuchte in seiner 1637 erschienenen Dioptrik die physikalische Erklärung der Refraction zu geben. Diese Behandlung derselben Sache durch Descartes und der Umstand, dass Snellius über seine Erfindung nichts Schriftliches hinterlassen hat, gab unter den Gelehrten jener Zeit die Veranlassung zu einem längeren Streite, dessen Resultat das Verdienst eines Snellius keineswegs zu verkürzen, den französischen Mathematiker aber auch nicht des Plagiates zu beschuldigen im Stande war.

Descartes ging von der Betrachtung der Geschwindigkeit des Lichtes in verschiedenen Medien aus. Er nahm die Bewegung eines schief auf eine Oberfläche treffenden Strahles aus zweien zusammengesetzt an, deren eine parallel, die andere senkrecht zur Oberfläche des Mediums stattfindet.

Beim Eintritt in das neue Medium verändert sich nun nach Descartes nur die Geschwindigkeit der senkrechten Bewegung, die der horizontalen bleibt die gleiche. Hieraus ergibt sich sofort das Gesetz, wie es Descartes ausgesprochen hat, dass sich die Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels umgekehrt wie die Geschwindigkeiten im ersten und zweiten Medium verhalten, bei denselben Medien also stets in konstantem Verhältniss stehen müssen. Diese Descartes'sche Erklärung der Refraction wurde zuerst heftig angegriffen, und zwar hauptsächlich von dem Engländer Hobbes und von Fermat. Die gewichtigste Einwendung geschah gegen jenen von Descartes allerdings nur als Hypothese hingestellten Satz, dass sich die Geschwindigkeit der horizontalen Componente des eingetretenen Strahles nicht verändere. Dieser Streit setzte sich noch lange nach dem Tode Descartes' fort und endete erst mit den tiefen Forschungen und Theorien eines Huyghens und Newton über das Wesen des Lichtes.

IV.

Wir beginnen mit diesem Capitel die grosse Epoche der Infinitesimalrechnung, die über ein Jahrhundert lang das ganze Gebiet der Mathematik beherrschte, und die alte Geometrie und die neueren Methoden eines Pascal und Desargues vollständig verdrängte.

Es gibt zwei Gesichtspunkte, die zur Erfindung des neuen Calcüls führen konnten und von denen man in der That auch ausgegangen ist, wenn man nämlich, was wir später noch näher beleuchten werden, die unabhängige Entdeckung desselben durch Leibnitz zugestehen will. Dieser nämlich ging von metaphysisch-arithmetischen Betrachtungen aus; Newton dagegen wurde durch die Nothwendigkeit einer allgemeinen principiellen Methode für die Lösung einiger Hauptprobleme der analytischen Geometrie darauf geführt. Diese Probleme sind das der Tangentenbestimmung, dasjenige der Maxima und Minima und das der Quadratur der Curven.

Wir haben im I. Capitel gesehen, wie die französischen Mathematiker Roberval und Fermat sich schon mit der Auffindung einer allgemeinen Lösungsmethode für jene Probleme beschäftigt hatten; allein diese Männer vermochten sich noch nicht zu jenem Standpunkt zu erheben, der von so eminenter Bedeutung für die universelle Anwendungsfähigkeit des neuen Calcüls werden sollte, ich meine die Einführung des Begriffs des Unendlichkleinen in die Mathematik. Allein auch dieses Verdienst gebührt Newton nur in letzter, allerdings entscheidender Instanz; denn schon Archimedes machte mit seiner Exhaustionsmethode den Anfang dazu, und der Italiener Cavaleri that im Anfang des 17. Jahrhunderts mit seiner Methode des Untheilbaren einen weiteren Schritt auf diesem Wege; endlich haben unmittelbar vor Newton zwei seiner Landsleute Barrow und Wallis ihm in dieser Richtung die Bahn geebnet. Wir wollen die Leistungen dieser berühmten Männer im Folgenden kurz in Betrachtung ziehen.

Barrow *) geht in seinen *Lectiones geometricae* zuerst auf die Entstehung und das Wesen der Curven ein. Auch er lässt, wie Roberval, dieselben durch stetige Bewegung entstehen; allein er legt ein grösseres Gewicht auf die durch die erzeugenden Kräfte hervorgebrachten Geschwindigkeiten, d. h. auf das Verhältniss der durchlaufenen Wege zur Zeit. Und diess ist die entscheidende Auffassung, sie führte nachher in Newton's Fluxionsrechnung zu den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$. In der Tangentenmethode folgt Barrow dem Fermat'schen Princip; nur steht er auch hier insofern der Differentialrechnung näher, als er den Begriff des Unendlichkleinen zur Geltung bringt. In der X. Lectio setzt er sein Verfahren folgendermassen auseinander:

Es sei in Fig. IV. $AP = x$, $MP = y$, $AE = r$; die Curve OME sei dann durch die Gleichung $x^3 + y^3 = r^3$ bestimmt. Ferner sei $PT = t =$ Subtangente. Man ziehe die Ordinate NQ unendlich nahe bei MP, ferner NR || QP, so erhält man das unendlich kleine Dreieck MNR, dessen Seiten MR und RN man mit a und e bezeichne. Drückt

*) Isaak Barrow wurde geboren zu London im Jahre 1630 und starb daselbst 1677. Er war Professor der Mathematik zu London und Cambridge, an letzterem Orte Newton's Lehrer. Seine beiden Hauptwerke sind seine *Lectiones geometricae* (1670) und *Lectiones opticae* (1669).

man nun die Gleichung der Curve durch die Coordinaten A Q und N Q, resp. $x + e$ und $y - a$ aus, so erhält man folgende Gleichung:

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3$$

Da aber $x^3 + y^3 = r^3$, so reducirt sich die Gleichung auf folgende:

$$3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = 0$$

Hierin können wir die höheren Potenzen der unendlich kleinen Grössen a und e vernachlässigen und erhalten schliesslich folgende Gleichung:

$$3x^2e - 3y^2a = 0 \text{ und hieraus}$$

$$\frac{e}{a} = \frac{y^2}{x^2}.$$

Das Verhältniss $\frac{e}{a}$ ist aber gleich dem Verhältniss

$$\frac{TP}{MP} = \frac{t}{y} = \frac{\text{Subtangente.}}{\text{Ordinate.}}$$

$$\text{Also } \frac{t}{y} = \frac{y^2}{x^2} \text{ und hieraus } t = \frac{y^3}{x^2}.$$

Wir haben also auf diesem Wege einen Ausdruck für die Subtangente gefunden und können damit die Tangente konstruiren.

Diess ist die die Tangentenmethode Barrow's. Wir sehen, dass von derselben nur noch ein kleiner Schritt zur Differentialrechnung nöthig war; die unendlich kleinen Grössen a und e sind nichts anderes als die Newton'schen Fluxionen oder die Leibnitz'schen Differentiale dy und dx der Coordinaten y und x. Der Unterschied zwischen den Methoden Fermat's und Barrow's besteht darin, dass ersterer jene Grössen a und e anfänglich endlich annahm, dann am Ende der Rechnung Null setzte und nicht wie Barrow unendlich klein werden liess, so dass das Verhältniss derselben ohne Fehler einem solchen von endlichen Grössen gleichgesetzt werden konnte.

Wallis *), unstreitig einer der grössten Mathematiker des 17. Jahrhunderts, that in seiner Methode der Quadraturen den ersten Schritt zur Integralrechnung. Er veröffentlichte seine Untersuchungen hierüber in seiner berühmten *Arithmetica infinitorum* 1655. Dieselben basiren im Wesentlichen auf der Anwendung der Analysis auf die Methode des Untheilbaren des Cavaleri.

Wallis geht zuerst von der Dreiecksfläche aus. Er betrachtet dieselbe aus unendlich schmalen der Basis parallelen Streifen zusammengesetzt. Dann verhalten sich die Längen dieser Streifen oder Parallelogramme von der Spitze bis zur Basis wie $0:1:2:3$ u. s. f., stehen also in arithmetischer Progression, deren erstes Glied Null, das letzte die Basis des Dreieckes ist. Die Fläche des Dreieckes ist also die Summe jener arithmetischen Progression multiplizirt mit der Höhe eines einzelnen Parallelogrammes. Jene Summe ist aber, sobald das erste Glied Null ist, das letzte Glied multiplicirt mit der halben Anzahl der Glieder, in unserm Fall also: Basis. $\frac{\infty}{2}\cdot$ Die Höhe eines unendlich schmalen Parallelogrammes ist aber $\frac{1}{\infty}\cdot$ Dreieckshöhe. Also die Fläche des Dreieckes gleich $\frac{1}{\infty}\cdot$ Höhe. $\frac{\infty}{2}\cdot$ Basis $= \frac{\text{Basis.Höhe}}{2}\cdot$

Wir sehen, dass das Wesentliche der Lösung des Quadraturenproblems in der Summirung von Progressionen mit unendlicher Gliederzahl besteht.

Wallis bewies nun im Weiteren folgende wichtige Sätze:

---

*) John Wallis, geboren zu Ashford in Kent im Jahre 1616, war zuerst Theologe, dann Professor der Mathematik zu Oxford, woselbst er 1703 starb. Seine mathematischen Schriften sind äusserst zahlreich. Ich führe davon nur seine *Arithmetica infinitorum* (1655) und seinen *Tractatus de algebra historicus et practicus* (1685) an. Letzteres Werk ist ausserordentlich reichhaltig und für die Geschichte der Algebra von grossem Werthe.

1. Die Summe einer beliebigen Anzahl Glieder der gewöhnlichen arithmetischen Progression der ganzen Zahlen mit Null angefangen, verhält sich zum Producte aus dem höchsten Gliede und der Anzahl der Glieder wie 1 : 2. Z. B. ist:

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

2. Die Summe aller Quadratzahlen von Null an gerechnet, dividirt durch das Product der letzten Quadratzahl in die Anzahl der Glieder nähert sich immer mehr dem Quotienten $\frac{1}{3}$, je grösser die Anzahl der Glieder ist. Z. B.

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \text{ u. s. w.}$$

3. Die Summe aller Cubikzahlen von Null an gerechnet, dividirt durch das Product der letzten Cubikzahl in die Anzahl der Glieder nähert sich immer mehr dem Quotienten $\frac{1}{4}$, je grösser die Anzahl der Glieder ist, u. s. f. für die Summe aller Potenzen der ganzen Zahlen. Ebenso zeigt Wallis, dass die Reihen der Quadrat-, Cubikwurzeln etc. nach derselben Weise gebildet, die Verhältnisse $1 : 1^1/_2$, $1 : 1^1/_3$ u. s. w. ergeben. — Hieraus ist nun leicht einzusehen, wie Wallis mit Hülfe dieser Summationen alle Curven zu quadriren im Stande war, deren Gleichungen sich im folgenden Ausdruck repräsentirt finden:

$$y = a.\, x^{\frac{n}{m}} + b.\, x^{\frac{p}{q}}$$

denn auch bei zusammengesetzten Potenzausdrücken war die Quadratur ausführbar, indem einfach jede einzeln vorgenommen und die Resultate nachher addirt wurden. — Wenn wir hier noch das Beispiel der Parabelquadratur anführen wollen, so müssen wir, da die Gleichung der Parabel $y = \sqrt{p\,x}$, die Reihe der Quadratwurzeln zu Hülfe nehmen.

Diese ergibt uns aber sogleich das Verhältniss $1 : 1^1/_2$, das wir als dasjenige des Parabelsegmentes zum zugehörenden Parallelogramme kennen.

Die Anwendung dieser Wallis'chen Methode liess nicht lange nach ihrem Erscheinen auf sich warten. Es waren besonders einige englische Mathematiker, wie Neil, Brouncker, dann der Holsteiner Mercator, die sich auf die Quadratur der Curven warfen. Letzterer fand ungefähr zu gleicher Zeit mit Brouncker die Quadratur der Hyperbel. Neil rectificirte, wie wir früher schon angegeben haben, die kubische Parabel. Bei Gelegenheit des Versuches, für die Fläche des Kreises einen annähernden Ausdruck zu erhalten, fand Brouncker die Kettenbrüche (1658). Er gab nämlich für die Fläche des Kreises, diejenige des umschriebenen Quadrates gleich 1 gesetzt, folgenden Bruch:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}}$$

Wallis gibt am Ende seiner *Arithmetica inf.* den Weg an, auf dem Brouncker zu diesem Kettenbruch gelangte. Derselbe ist sehr weitläufig und complicirt und zeugt von ausserordentlicher mathematischer Erfindungsgabe. Das Verhältniss des umschriebenen Quadrates zum Kreise wird zuerst durch folgenden Quotienten gegeben:

$$\frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ \text{etc. in inf.}}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ \text{etc. in inf.}}$$

$$\text{oder: } \frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{81}{80}\cdots\cdots$$

aus welchem schliesslich obiger Kettenbruch resultirt.

Noch ist zu bemerken, dass Mercator zuerst es war, der in seiner Logarithmotechnia (1668) bei Gelegenheit der

Quadratur der Hyperbel die Beziehungen der natürlichen Logarithmen zu dem zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten enthaltenen Flächenraum auseinandersetzte, von welcher Zeit an jene Logarithmen auch den Namen der hyperbolischen erhalten haben.

Nach diesen vorbereitenden Versuchen eines Wallis und Barrow, den Begriff des Unendlichkleinen in den analytischen Calcül einzuführen, wenden wir uns endlich zu demjenigen Manne, dessen tiefer, allumfassender Genius zuerst die allgemeine Bedeutung dieses neuen Princips erkannte und dessen unerreichbare Leistungen in allen Gebieten des mathematischen Wissens seinen Namen für alle Zeiten unsterblich gemacht haben, zu **Isaak Newton** *).

---

*) Isaak Newton wurde am 25. December 1642 (a. St.) zu Woolsthorpe in Lincolnshire geboren. Seine Eltern, John Newton und Anna Ascough, waren arm und hatten daher nicht die Absicht, ihren Sohn studiren zu lassen. Sie riefen ihn darum, als er die höhere Stadtschule zu Grantham absolvirt hatte, nach Hause zurück, um ihnen in ihren ländlichen Arbeiten behülflich zu sein. Allein diess sagte dem strebenden Jüngling nicht zu und endlich liessen sich seine Eltern bewegen, ihn auf die Universität Cambridge ziehen zu lassen. Er war damals 18 Jahre alt. Seine etwas mangelhafte Vorbildung setzte ihn anfangs hinter seine Mitschüler zurück. Aber bald erwarb er sich durch eisernen Fleiss, und unterstützt durch sein ausserordentliches angebornes Talent die Achtung aller seiner Lehrer und Collegen. Er wandte sich hauptsächlich den mathematischen Studien zu. Sein Lehrer hierin war Barrow. Die elementare Geometrie, die er aus den Werken Euklid's und des Apollonios zuerst studirte, beschäftigte ihn nicht lange; diess Alles kam ihm zu leicht vor. Er machte sich sogleich an die neuere analytische Geometrie des Descartes und an die Werke von Wallis und Kepler. Im Jahre 1664 wurde er Baccalaureus der freien Künste, 1666 verfasste er sein epochemachendes Werk über die Optik, 1668 wurde er zum Magister ernannt und 1669 zum Professor der Mathematik an Barrow's Stelle. Hier blieb er in dieser Function bis 1695 mit mässiger Besoldung und daher in keineswegs günstigen Verhältnissen. Auf Verwenden seines Gönners, des Lord Montague, erhielt er 1699 die Stelle eines königl. Münzmeisters in London, die seine Verhältnisse wesentlich

Der Streit über die Priorität von Newton's grossen Entdeckungen, namentlich seiner Differentialrechnung, der aus seinen letzten Lebensjahren bis auf unsere Zeit sich fortgepflanzt hat, hat seinen Grund zum grössten Theil in der Verzögerung der Herausgabe seiner Abhandlungen. Nur wenige seiner Werke, darunter allerdings das ausgezeichnetste und seinen Ruhm zur glänzendsten Höhe führende, seine Principien der Naturphilosophie, erschienen noch während seiner Lebzeiten. Immerhin aber ist aus Briefen Newton's an Zeitgenossen und aus andern Dokumenten das frühere Datum seiner Entdeckungen unumstösslich festgestellt. Dasjenige Werk, das uns hier hauptsächlich beschäftigen soll und in dem er sein System der Differentialrechnung auseinandersetzte, erschien zum ersten Mal im Druck 1736. Schon im Anfang der siebziger Jahre aber hatte Newton seine Theorie vollständig ausgebildet. Ja schon 1669 sandte derselbe seine Abhandlung: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* dem Präsidenten der königlichen Akademie in London ein, welche allerdings erst eine Anwendung, keine eigentliche Begründung und Systematisirung der neuen Methode enthält. Ich gehe im Folgenden etwas näher auf diese kurze, aber sehr wichtige Schrift ein.

Den Inhalt und den Zweck derselben spricht er selbst im Anfang in folgenden Worten aus: *Methodum generalem, quam de curvarum quantitate per infinitam terminorum seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.*

Die Curven theilt er nun zum Zweck ihrer Quadrirung in einfache und zusammengesetzte. Ich gebe hier die wört-

verbesserte und die er bis zu seinem Tode bekleidete, der am 20. März 1727 erfolgte. Von 1703 an war er auch Präsident der Akademie der Wissenschaften. Seine letzten Jahre waren durch schmerzhafte Krankheitsanfälle und durch öftere Geisteszerrüttung getrübt. — Die Daten der Herausgabe seiner hauptsächlichsten Werke siehe im Text.

liche Uebersetzung der Quadratur der einfachen Curven, d. h. derjenigen, deren Gleichungen zur Klasse $y = a x^{\frac{m}{n}}$ gehören:

Auf der Basis AB irgend einer Curve (Fig. V) werde ein Perpendikel BD errichtet. Es sei dann $AB = x, BD = y$, ferner a, b, c ... gegebene Grössen und m, n ganze Zahlen, so ist, wenn $a x^{\frac{m}{n}} = y$,

$$\frac{a\,n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} = \text{Fläche ABD.}$$

Beispiele.

1. Wenn $x^2 = 1 . x^{\frac{2}{1}} = y$, das ist $a = 1$, $n = 1$ und $m = 2$; so ist $\frac{1}{3} x^3 =$ Fläche ABD.

2. Wenn $4 \sqrt{x} = 4 .\ x^{\frac{1}{2}} = y$, das ist $a = 1$, $n = 2$, $m = 1$; so ist $\frac{8}{3} . x^{\frac{3}{2}} =$ Fläche ABD. etc.

Hierauf geht Newton zur Quadratur zusammengesetzter und zur Rectification verschiedener Curvengattungen über, worauf wir nicht näher eintreten wollen. Erst am Ende der Abhandlung gibt er folgenden Beweis der Quadratur einfacher Curven:

Demonstratio quadraturae curvarum simplicium.

1. Vorbereitung zum Beweise.

Es sei (Fig. VI.) $AB = x$ die Basis irgend einer Curve $AD\delta$; $BD = y$ das darauf errichtete Perpendikel; die Fläche ABD sei $= z$. Ebenso sei $B\beta = o$, $BK = v$ und das Rechteck $B\beta HK$ (ov) gleich der Fläche $B\beta\delta D$.

Es ist nun $A\beta = x + o$, und $A\delta\beta = z + ov$.

Diess vorausgeschickt, suche ich aus der beliebig angenommenen Relation zwischen x und z, y auf folgende Weise:

$$\text{Man setze } \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z, \text{ oder } \frac{4}{9} x^3 = z^2.$$

Dann substituire man $x + o$ ($A\beta$) für x und $z + o\,v$ ($A\delta\beta$) für z, so erhält man:

$$\frac{4}{9}\left(x^3 + 3\,x^2\,o + 3\,x\,o^2 + o^3\right) = z^2 + 2\,z\,o\,v + o^2\,v^2.$$

Hebt man $\frac{4}{9}\,x^3$ gegen z^2, weil diese nach der Voraussetzung einander gleich, und dividirt den Rest durch o, so ergibt sich:

$$\frac{4}{9}\left(3\,x^2 + 3\,x\,o + o^2\right) = 2\,z\,v + o\,v^2.$$

Wenn wir jetzt annehmen, es nehme $B\beta$ bis ins Unendliche ab und verschwinde zuletzt, oder was dasselbe ist, jene Grösse o sei Null, so verschwinden die Glieder mit o multiplicirt und wir erhalten:

$$\frac{4}{3}x^2 = 2\,z\,v.$$

v ist nun aber, wenn o zu Null wird, $= y$ und daher:

$$\frac{2}{3}x^2 = z.\,y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.\,y$$

und hieraus $x^{\frac{1}{2}} = y$.

Wenn daher umgekehrt $x^{\frac{1}{2}} = y$ ist, so wird die Fläche

$$z = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \text{ sein.}$$

2. Beweis.

Im Allgemeinen nun, wenn $\frac{n}{m+n}\,a.\,x^{\frac{m+n}{n}} = z$, oder: $\frac{a\,n}{m+n}$ c und $m + n = p$ gesetzt, wenn $c.\,x^{\frac{p}{n}} = z$ oder $c^n.\,x^p = z^n$, so ist, wenn $x + o$ für x und $z + o\,v$, oder (was nachher auf dasselbe herauskömmt) $z + o\,y$ für z substituirt wird:

$$c^n\,(x^p + p.\,o.\,x^{p-1} + \ldots.) = z^n + n.\,o.\,y\,z^{n-p-1} \ldots..$$

$c^n. x^p$ gegen z^n aufgehoben, und das übrige durch o dividirt ergibt folgende Gleichung:

$$c^n. p. x^{p-1} = n. y. z.^{n-1} \left(= \frac{y\,n\,z^n}{z} = \frac{n\ y.\ c^n x^p}{c.\ x^{\frac{p}{n}}} \right)$$

oder durch $c^n\, x^p$ dividirt: $p\, x^{-1} = \dfrac{n\ y}{c.\ x^{\frac{p}{n}}}$. Hieraus:

$p.\ c.\ x^{\frac{p-n}{n}} = n\ y$. Setzt man für c und p ihre Werthe wieder ein, so erhält man schliesslich:

$$y = a.\ x^{\frac{m}{n}}$$

Wenn daher umgekehrt $a.\ x^{\frac{m}{n}} = y$ gesetzt wird, so ergibt sich für z der Werth $\dfrac{n}{m+n}\, a.\ x^{\frac{m+n}{n}}$. Q. E. D.

Wir sehen also in diesen geometrischen Anwendungen die Operationen des Differentiirens und Integrirens zur Geltung gebracht und besonders das inverse Verhältniss beider Rechnungsarten aufs klarste dargelegt.

Noch ist zu bemerken, dass man sich nicht etwa durch Newton's Bezeichnungsweise des Incrementes von x mit o verleiten lassen darf, seine Methode derjenigen Fermat's gleich zu setzen, indem dieser in seiner Tangentenmethode zuerst einen endlichen Zuwachs der Abscisse annahm, und diesen dann nachher ohne Weiters gleich Null setzte, Newton aber ausdrücklich bemerkt, dieser Zuwachs sei unendlich klein anzunehmen und nachher verschwinden zu lassen: *Tum supponimus $B\beta = o$ in infinitum diminui et evanescere.* Die Bezeichnung des Incrementes durch o scheint er aus dem Grunde für die geeignetste zu halten, weil es doch nachher in der That zu Null wird.

Gehen wir nun auf diejenige Abhandlung Newton's über, in der er seine neue Methode als eine selbstständige Rechnungsart, als ein vollständiges System hinzustellen versucht, auf seine *methodum fluxionum.* Wie wir schon angeführt haben, erschien dieselbe erst 1736 im Druck, Newton aber hatte sie schon 1671 abgefasst. Sie beginnt mit folgenden Worten:

Cum animadvertissem, quod multi ex recentioribus geometris, neglecta veterum synthetica methodo, praecipuam dederant operam colendae arti analyticae, qua freti perficere valuerunt tot, et tam ardua, ut omnes geometricas speculationes pertractasse et exhausisse videantur, praeter curvarum quadraturas et nonnulla alia hujus generis nondum satis perspecta et ponderata: non extra rem putavi libellum hunc in tyronum geometrarum gratiam conscribere, in quo fines analyseos proferre et curvarum doctrinam augere conatus sum.

Nachdem dann Newton im Anfange kurz die Verwandlung gebrochener und irrationaler Funktionen in unendliche Reihen beleuchtet hat, ein Gebiet, mit dem sich Newton schon in seinen ersten Studienjahren beschäftigte und das ihn schon frühe auf die Erfindung des so hochwichtigen binomischen Lehrsatzes und den Nachweis seiner Gültigkeit für gebrochene und negative Exponenten geführt hatte (eine Erfindung, deren Werth hier speciell hervorgehoben zu werden erfordert, um so mehr, da die Geschichte der Entdeckung der Infinitesimalrechnung nur zu leicht dazu gelangt, anderen wichtigen Neuerungen den Stempel der Inferiorität aufzudrücken und dieselben in tiefen Hintergrund zu versetzen); nach jenen vorbereitenden Sätzen, sage ich, geht Newton direkt zur Lösung der beiden mechanischen Probleme über, welche gleichsam als die natürlichen, reellen Stützen des abstrakten Calcüls zu betrachten sind, und worin sich Newton von Leibnitz, dessen System jener Stützen entbehrt, wesentlich unterscheidet. Jene beiden Probleme sind folgende:

1. Es sei der Raum gegeben, den ein in stetiger Bewegung begriffener Körper durchlaufen hat; man soll zu gegebener Zeit die Geschwindigkeit finden.

2. Es sei die Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers beständig gegeben; man soll den in einer bestimmten Zeit durchlaufenen Raum finden.

Wir sehen, dass diese Probleme keine andere sind, als die durch unsere heutigen Grundformeln der analytischen Mechanik repräsentirten:

$$1.\ v = \frac{dx}{dt};\quad 2.\ x = \int v.\,dt.$$

Zur Lösung derselben übergehend, fährt nun Newton mit folgenden Worten fort:

„Wenn z. B. in der Gleichung $y = x^2$, y die Länge des Weges repräsentirt, der in einer bestimmten Zeit durchlaufen wird, während welcher nämlichen Zeit der Weg x mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\dot{x}$ zurückgelegt wird, so stellt $2\,x\,\dot{x}$ die Geschwindigkeit dar, welche der Körper, nachdem er den Raum y durchlaufen, erreicht hat.

Da aber die Zeit hier nur durch eine gleichförmige Bewegung ausgedrückt und gemessen wird und ausserdem nur Grössen derselben Art, entweder beschleunigte oder verzögerte Geschwindigkeiten miteinander verglichen werden, so betrachte ich im Folgenden die Zeit nicht als solche (*tempus formaliter non considero*), sondern setze voraus, dass eine der gegebenen homogenen Grössen gleichförmig (*aequabili fluxu*) wachse, auf welche Grösse ich die übrigen, gerade wie auf die Zeit beziehe, wesshalb dieselbe auch der Analogie wegen Zeit genannt werden kann. So oft also das Wort „Zeit“ im Folgenden genannt wird (und ich brauche es öfters der Klarheit und Bestimmtheit wegen), so ist es also nicht seiner formalen Bedeutung nach zu nehmen, sondern als eine Grösse zu betrachten, durch deren gleichmässiges Zunehmen (*Fluxio*) die Zeit ausgedrückt und gemessen wird.“ — Newton meint wohl damit, er betrachte in irgend einer Gleichung $y = f(x)$ einer Curve, x als die unabhängige Variable, oder als die Zeit selbst, obschon es eigentlich, vom Standpunkt der mechanischen Entstehungsweise der Curven ausgegangen, das Richtige wäre, x als eine Function der Zeit t aufzufassen. Da er aber annehme, es wachse x stetig und gleichförmig, wie die Zeit, so sei es ihm erlaubt, dasselbe für die Zeit selbst zu setzen.

Weiter fährt er fort: „Im Folgenden nenne ich Fluenten (v. *fluere*, fliessen) die Grössen, welche ich als graduell und unbegrenzt wachsend betrachte und bezeichne dieselben durch die letzten Buchstaben des Alphabetes v, x, y und z, damit sie von andern Grössen unterschieden werden können, welche in den Gleichungen als bekannt und bestimmt (constant) betrachtet werden und welche ich durch die ersten Buchstaben des Alphabetes, a, b, c etc. ausdrücke. Die Geschwindigkeiten aber, durch welche die Fluenten durch die erzeugende Bewegung vermehrt werden, und welche ich Fluxionen oder auch einfach Geschwindigkeiten (*velocitates vel celeritates*) nenne, bezeichne ich durch dieselben Buchstaben mit einem Punkte darüber, also $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, d. h. für die Geschwindigkeit der Grösse v setze ich $\dot{v}$, u. s. w. Diess vorausgeschickt, gehe ich zu meiner eigentlichen Aufgabe über und gebe zuerst die Lösung der beiden oben aufgestelten Probleme.“

Es ist hier wohl zu beachten, dass Newton jene Fluxionen selbst noch nicht unendlich klein annimmt, sondern dass er erst behufs des Beweises seiner Lösung die unendlich kleinen Momente der Fluenten in die Rechnung einführt. Erst jene Momente sind mit den Differenzialen der variablen Grösse gleichbedeutend, die Fluxionen sind gleichsam nur die Differenzen. Wir werden auf dieses Verhältniss an geeigneter Stelle zurückkommen.

Gehen wir zur Lösung des ersten Problems über.

Es sei das gegenseitige Verhältniss der Fluenten gegeben; man soll das Verhältniss ihrer Fluxionen bestimmen.

Auflösung:

Man ordne die Gleichung, durch welche die gegebene Relation ausgedrückt wird, nach den Pontenzen einer ihrer

Fluenten, x z. B., multiplicire ihre Glieder mit denen irgend einer arithmetischen Progression und hierauf noch mit $\frac{\dot{x}}{x}$; diese Operation mache man für jede Fluente, setze die Summe aller hierdurch entstehenden Producte gleich Null, und man hat die gesuchte Gleichung.

Beispiel I. Wenn das Verhältniss der beiden Fluenten x und y durch die Gleichung $x^3 - a\,x^2 + a\,x\,y - y^3 = o$ ausgedrückt ist, so ordne man zuerst nach Potenzen von x, dann nach y und multiplicire sie, wie folgt:

Multiplicire	x^3	$- a\,x^2$	$+ a\,x\,y$	$- y^3$	$- y^3$	$+ a\,x\,y$	$- a\,x^2$	$+ x^3$
mit	$\frac{3\,\dot{x}}{x}$,	$\frac{2\,\dot{x}}{x}$,	$\frac{1\,\dot{x}}{x}$,	o	$\frac{3\,\dot{y}}{y}$,	$\frac{1.\,\dot{y}}{y}$,		o

so ergibt sich: $3\,x^2.\,\dot{x} - 2\,a\,x\,\dot{x} + a\,y\,\dot{x} - 3\,y^2\,\dot{y} + a\,x\,\dot{y} = o.$

Diese Gleichung gibt das Verhältniss zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, nämlich:

$$\dot{x} : \dot{y} = 3\,y^2 - a\,x : 3\,x^2 - 2\,a\,x + a\,y.$$

Ebenso verfährt Newton bei 3 und mehr Fluenten oder Variablen. Bei complicirtern Ausdrücken schlägt er folgenden Gang ein:

Beispiel III. Die Relation zwischen x und y sei folgende: $y^2 - a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} = o$. Man setze $x\sqrt{a^2 - x^2} = z$; dann hat man folgende zwei Gleichungen: $y^2 - a^2 - z = 0$ und $a^2\,x^2 - x^4 - z^2 = o$. Unsere Operation ergibt bei der ersten: $2\,y\,\dot{y} - \dot{z} = o$, bei der zweiten: $2\,a^2\,x\,\dot{x} - 4\,x^3\,\dot{x} - 2\,z\,\dot{z} = 0$, oder $\frac{a^2\,x\,\dot{x} - 2\,x^3\,\dot{x}}{z} = \dot{z}$. Diesen Werth in die Gleichung für $\dot{y}$ und $\dot{z}$ eingesetzt, gibt: $2\,y\,\dot{y} - \frac{a^2\,x\,\dot{x}}{z} + \frac{2\,x^3\,\dot{x}}{z} = o$, und für z seinen Werth $x\sqrt{a^2 - x^2}$ gesetzt, so erhält man $2\,y\,\dot{y} - \frac{a^2\,x\,\dot{x} - 2\,x^3\,\dot{x}.}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\,y\,\dot{y} - \frac{a^2\,\dot{x} - 2\,x^2\,\dot{x}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = o$ für die Relation zwischen $\dot{y}$ und $\dot{x}$.

Es folgt nun der Beweis dieses Verfahrens, der von grösster Wichtigkeit für die Newton'sche Auffassungsart des neuen Calcüls ist.

Beweis der Auflösung:

Die Momente der Fluenten (nämlich die unendlich kleinen Theile jener, durch deren Zuwachs sie in unendlich kleinen Zeittheilen continuirlich *(jugiter)* vermehrt werden, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, mit welchen sie fliessen oder wachsen.

Wenn daher das Moment irgend einer Fluente x dargestellt wird durch das Product aus ihrer Geschwindigkeit $\dot{x}$ in die unendlich kleine Grösse o, also durch $\dot{x}o$, so werden die Momente der andern ausgedrückt werden müssen durch $\dot{u}o$, $\dot{v}o$, $\dot{z}o$, etc. weil $\dot{u}o$, $\dot{z}o$, $\dot{y}o$ und $\dot{x}o$ gegenseitig dasselbe Verhältniss haben, wie $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ und $\dot{x}$.

Weil nun die Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ z. B. die unendlich kleinen Incremente sind, um welche die Fluenten x und y in unendlich kleinen Zeittheilchen vermehrt werden, so folgt, dass diese Fluenten nach dem Verlaufe eines unendlich kleinen Zeitintervalls zu $x + \dot{x}o$ und $y + \dot{y}o$ angewachsen sind. Die Gleichung aber, welche zu jeder Zeit die Beziehung zwischen den Fluenten ausdrückt, wird auch ebenso gut die Beziehung zwischen $x + \dot{x}o$ und $y + \dot{y}o$ ausdrücken, so dass in derselben Gleichung für x und y gesetzt werden darf $x + \dot{x}o$ und $y + \dot{y}o$.
Es sei z. B. die Gleichung gegeben: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

Man substituire für x und y, $x + \dot{x}o$ und $y + \dot{y}o$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ \quad + ax\dot{y}o \\ - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0$$

Es ist aber nach Voraussetzung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = o$.

Lässt man also diese Glieder weg und dividirt die übrigen durch den allgemeinen Faktor o, so bleibt die Gleichung:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o$$
$$- a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + x^3o^2 - y^3o^2 = 0.$$

Da wir aber o als unendlich kleine Grösse angenommon haben, um die Momente der Fluenten darzustellen, so verschwinden die mit diesem Faktor multiplicirten Glieder gegenüber den andern und es bleibt die Gleichung:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

wie wir sie im 1. Beispiel gefunden haben. Es ist hier noch zu bemerken, dass die Glieder, die nicht mit o multiplicirt sind, sowie diejenigen, die die höheren Potenzen von o enthalten, immer verschwinden und dass die übrigen Glieder, durch o dividirt, die Gleichung ergeben, die nach der obigen Regel resultiren soll. Q. E. D.

Ueber diesen Beweis ist einiges von Belang hinzuzufügen. Wie schon angeführt worden, ist aus demselben ersichtlich, dass Newton die Fluxionen selbst nicht, sondern nur ihre unendlich kleinen Theile, d. h. die Momente der Fluenten, als unendlich klein annimmt. Durch die nöthigen Operationen verschwinden aber wiederum jene unendlich kleinen Faktoren der Momente, die Newton geradezu mit o bezeichnet und es bleiben in der Gleichung nur die Fluxionen oder Geschwindigkeiten. Dieser mechanische Character der Newton'schen Fluxionen unterscheidet sie hauptsächlich von den Leibnitz'schen Differentialen, die einfach als die unendlich kleinen *Incremente* der Variablen zu betrachten sind und deren Verhältniss durch endliche Ausdrücke darzustellen, durch die Operation des Differentiirens erreicht wird. Würden die mit o afficirten Glieder in dem Ausdruck für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ beibehalten, so wäre derselbe gleichbedeutend mit dem Leibnitz'schen Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \omega$, aus welchem, wenn ω zugleich mit $\triangle x$ gegen Null convergirend angenommen wird, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$ hervorgeht. Newton aber setzt sein ω, d. h. seine mit o afficirten Glieder ohne weiters gleich Null, ohne davon auch die Convergenz von $\dot{y}$ und $\dot{x}$ gegen Null abhängig zu machen, wesshalb wir die Newton'schen Fluxionen nur als Differenzen und nicht als Differentiale aufzufassen berechtigt sind; die Momente, für die eben Newton die ihnen proportionalen Fluxionen substituirt, sind die Differenziale. — Es ist auch vielfach die Unzulänglichkeit jener Division durch o hervorgehoben worden. Allein diese Angriffe wurden nicht nur der Newton'schen Auffassungsweise gegenüber gemacht; sie richteten sich, wie wir im Verlaufe unserer Geschichte noch einige Male zu bemerken die Gelegenheit haben werden, überhaupt gegen die Einführung des vagen und der mathematischen Strenge entbehrenden Begriffes des Unendlichkleinen in die Mathematik.

Endlich muss ich noch auf einen Umstand aufmerksam machen, der von nicht zu verachtender Bedeutung für die Kritik der Newton'schen Fluxionsrechnung ist. Es wird gewiss Jedem auffallen, dass in der allgemeinen Auflösungsregel für das erste Problem die Annahme einer beliebigen arithmetischen Progression, am wenigsten zu sagen, etwas oberflächlich und unverständlich hingestellt ist; Newton sagt ausdrücklich: *ejus terminos multiplica per quamcunque arithmeticam progressionem,* ohne nähere Erörterung. Am Ende des von uns wiedergegebenen Beweises setzt er dann allerdings noch hinzu: „Nachdem dieses bewiesen, wird das übrige in der Regel Enthaltene leicht folgen, z. B. dass in der vorgelegten Gleichung mehrere *Fluenten* vorkommen können und dass die Glieder nicht allein mit den Exponenten der betreffenden Potenzen der Fluenten multiplicirt werden dürfen (also x^3 mit 3, x^2 mit 2 u. s. f.), sondern mit den Termen jeder andern arithmetischen Progression, so zwar dass in der Operation derselbe Unterschied der Termen bei allen Fluenten beobachtet werde und dass die Progression vertheilt werde nach der nämlichen Ordnung wie die Potenzen der Fluenten (*et progressio disponatur secundum ordinem dimensionum uniuscujusque fluentis*). Newton kann mit diesen nicht so ganz klaren Worten nur Folgendes meinen: Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 + y^3 = 0$$

so würde man am einfachsten folgenden Weg einschlagen: Man multiplicirt das nicht mit x behaftete Glied y^3 mit 0, das mit der ersten Potenz multiplicirte mit 1 und sofort, die dritte Potenz mit 3. Dies ist die einfachste Progression; fehlt ein Glied aus der fortlaufenden Reihe der Potenzen, so würde man eben auch das entsprechende Glied der Progression weglassen *(et progressio disponatur . . . . .)*. Nun aber ist es nicht gerade gesagt, dass man diese Progression anwenden müsse; man kann z. B. anstatt mit 3, 2, 1, 0 auch mit 6, 4, 2, 0 multipliciren, oder mit 9, 6, 3, 0; nur nicht mit 4, 3, 2, 1 oder 5, 4, 3, 2; denn das letzte von x freie Glied muss immer mit 0 multiplizirt werden und die Anzahl der Glieder der Progression immer um 1 grösser als die Anzahl der mit x behafteten Glieder der Gleichung sein. Mit der nämlichen Progression multiplicirt man dann auch in gleicher Reihenfolge die Potenzen von y.

Es ist ganz richtig, dass man auf diese Weise auf unendlich viele Arten zum Ziele gelangt, insofern man nämlich, was Newton sich zur Aufgabe stellt, bloss das Verhältniss der Fluxionen $\dot{y}$ und $\dot{x}$ berechnen will; denn es lässt sich jedesmal im Zähler und Nenner des für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ resultirenden Bruches ein gemeinschaftlicher Factor herausheben, so dass man schliesslich wieder auf die primitive Form zurückkommt, d. h. auf diejenige, die man durch Anwendung der einfachsten Progression 0, 1, 2 . . . . erhält. Allein wir können uns doch über die Richtigkeit dieser Methode keine genügende Rechenschaft geben, wenn es sich z. B. darum handelt, irgend eine Funktion von x allein zu differentiiren. Soll man z. B. das Differential von x^2 bestimmen, so könnte diess nach Newton's Methode ebenso wohl $2\,x\,d\,x$, als $4\,x\,dx$, als auch $6\,x\,dx$ u. s. w. sein. Es ist uns dieser Umstand nur ein weiteres wesentliches Kriterium für Newton's Auffassungsweise des neuen Calcüls. Derselbe sollte ihm ausschliesslich ein Mittel zur Auffindung der Eigenschaften der Curven sein; von selbstständigem, abstrakten Wesen, von einer neuen, rein arithmetischen Rechnungsoperation, wie sich die Differentialrechnung von Leibnitz an gestaltete, kann man angesichts der Newton'schen Fluxionsmethode nicht reden. Wir werden auf dieses Verhältniss noch einmal zurückkommen, wenn wir seine Methode des Integrirens und Leibnitzens Differentialrechnung einer nähern Prüfung unterworfen haben werden.

II. Problem.

Es sei die Gleichung gegeben, welche das Verhältniss der Fluxionen ausdrückt; man soll die Relation der Fluenten finden.

Besondere Lösung.

Da dieses Problem das *inverse* des vorhergehenden ist, so muss es auch durch inverse Operationen gelösst werden. Man ordnet also die mit $\dot{x}$ multiplicirten Glieder nach den Potenzen von x, dann dividirt man sie durch $\frac{\dot{x}}{x}$ und nachher durch den Exponenten der Potenz von x oder vielleicht durch irgend eine andere arithmetische Progression. Man wiederhole die gleiche Operation auch für die mit $\dot{v}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ etc. behafteten Glieder und setze, indem man die überflüssigen Glieder weglässt, das Resultat gleich Null.

Beispiel: Es sei die Gleichung vorgelegt:

$$3\,x^2\,\dot{x} - 2\,a\,x\,\dot{x} + a\,y\,\dot{x} - 3\,y^2\,\dot{y} + a\,x\,\dot{y} = 0,$$

so verfährt man folgendermassen:

Man dividire	$3x^2\dot{x}$	$-2ax\dot{x}$	$+ay\dot{x}$	$-3y^2\dot{y}$	$+ax\dot{y}$
durch	$\frac{3\dot{x}}{x}$,	$\frac{2\dot{x}}{x}$,	$\frac{1\dot{x}}{x}$	$\frac{3\dot{y}}{y}$,	$\frac{1.\dot{y}}{y}$
so erhält man:	x^3	$-ax^2$	$+ayx$	$-y^3$	$+ayx$

Es ist hier zu beobachten, dass das Glied $a\,y\,x$, das zweimal vorkommt, dennoch nur einmal gesetzt werden darf in dem Resultat, welches demnach lautet:

$$x^3 - a\,x^2 + a\,x\,y - y^3 = 0.$$

Wenn überhaupt in irgend einem Falle ein Glied zweimal (oder auch mehrmals, was bei mehr als zwei Fluenten stattfinden kann) vorkommt, so darf es in der Summe bloss einmal gesetzt werden".

„Es wäre noch Anderes hiebei zu beachten, was ich der Einsicht des Mathematikers überlasse; denn es wäre unnütz, sich länger hierüber aufzuhalten, da das Problem überhaupt durch obiges Verfahren nicht immer gelöst werden kann. Eines füge ich noch hinzu, nämlich dass, wenn man auf diese Weise die Relation der Fluenten gefunden hat, man nach dem ersten Problem die Fluxionen wieder suchen kann, und wenn man dann auf die nämliche Gleichung stösst, die Lösung richtig war, im andern Falle nicht. Es sei z. B. die vorgelegte Gleichung $x\,\dot{x} - y\,\dot{x} + a\,\dot{y} = 0$, so ergibt unsere Methode für die Relation der Fluenten:

$$\frac{1}{2}x^2 - y\,x + a\,y = 0.$$

Aus dieser ergibt sich aber nach dem I. Problem die Gleichung $x\,\dot{x} - y\,\dot{x} - x\,\dot{y} + a\,\dot{y} = 0$, welche von der vorgelegten verschieden ist.

Nach Diesem gehen wir zur allgemeinen Lösung über."

Wenn Newton's Methode des Differentiirens schon nicht vollständig systematisch durchgeführt werden konnte, wie viel mehr mussten sich die Schwierigkeiten bei der so viel schwereren inversen Operation häufen. Wir dürfen daher die Lücken um so eher übersehen, auf die wir in der Ausführung seiner Integrationsmethode stossen, zumal die Ausfüllung derselben noch lange Zeit nachher den Geist der vortrefflichsten Mathematiker beschäftigte. Schon in der oben angeführten besondern Lösung stiess Newton auf Schwierigkeiten, die er nur durch ein rein mechanisches Verfahren, das jeder näheren Begründung entbehrte, überwinden honnte. So musste er, weil sich ihm der Rückschluss von der Differentialgleichung

$$\frac{d\,f(x,y)}{d\,y}\,d\,y + \frac{d\,f(x,y)}{d\,x}\,d\,x = 0 \text{ auf die}$$

Integralgleichung $\int \frac{d\,f(x,y)}{d\,y}\,d\,y + \int \frac{d\,f(x,y)}{d\,x}\,d\,x = 0$

nicht durchweg anwendbar erwies, zu dem Ausweg Zuflucht nehmen, mehrfach in der resultirenden Fluentengleichung vorkommende Ausdrücke, wie im obigen Beispiel $a\,x\,y$, nur einfach zu setzen. Diess that er, wie gesagt, ohne weitere Begründung, wie er überhaupt sein ganzes System der Fluxionsrechnung ohne eigentliche Beweise hingestellt hat. — Ich werde im Folgenden nun ein *Resumé* seiner allgemeinen Integrationsmethode geben; die Weitschweifigkeit seiner Auseinandersetzung erlaubt mir nicht, die wörtliche Uebersetzung wie bisher anzuführen.

Als Einleitung macht Newton die Bemerkung, dass das von ihm angegebene Verfahren der Integration nur dann anwendbar sei, wenn alle Glieder mit Fluxionen gleicher Dimension behaftet sind, d. h. wenn nur Glieder vorkommen, die $\dot{x}$ oder $\dot{y}$ allein, nicht beide zusammen enthalten, oder wenn alle mit Fluxionen versehenen Glieder dieselben nur im zweiten Grade enthalten, z. B. $\dot{x}\,\dot{x}$, $\dot{y}\,\dot{y}$, $\dot{x}\,\dot{y}$ u. s. w. Nun gibt aber Newton ein Verfahren an, wie man in abweichenden Fällen vorzugehen habe, das vollständig unverständlich ist und von ihm selbst auch nicht weiter angewandt wird. Er sagt nämlich, in jenem Falle müsse man die niedern Potenzen der vorkommenden Fluxionen ergänzen, bis alle Glieder mit Fluxionen gleicher Dimension behaftet seien und zwar geschieht diess durch Multiplikation mit einer dritten Fluxion $\dot{z}$, die aber als Einheit angenommen wird, um dadurch den Werth der Gleichung unverändert zu lassen. Wenn z. B. die Gleichung $x^3 \dot{x} - b y \dot{x} \dot{y} - c x^2 = 0$ gegeben ist, so multiplicire man das erste Glied mit $\dot{z}$, das dritte mit $\dot{z}\dot{z}$, das zweite lasse man unverändert, so erhält man: $x^3 \dot{x} \dot{z} - b y \dot{x} \dot{y} - c x^2 \dot{z} \dot{z} = 0$, in welcher Gleichung alle Glieder mit Fluxionen gleicher Dimension behaftet sind. Ueber den Grund dieses Verfahrens schweigt Newton.

Indem er nun bloss solche Gleichungen in Berücksichtigung zieht, die von vorneherein nur Glieder mit Fluxionen gleicher Dimension enthalten, geht er zur Unterscheidung der verschiedenen hiebei möglichen Fälle über. Er bemerkt zuerst, dass man alle diese Gleichungen durch Division mit $\dot{x}$, oder $\dot{x}\dot{x}$, u. s. f. auf die Form bringen könne: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x, y)$. Kommen dann in dem Ausdruck für $f(x, y)$ Wurzelzeichen etc. vor, so können dieselben nach seinem in der Einleitung angegebenen Verfahren in unendliche Reihen entwickelt werden. Für die Integration dieser Differentialgleichungen unterscheidet er dann folgende drei Fälle:

1. Gleichungen mit zwei Fluxionen und nur einer Fluente;
2. Solche mit zwei Fluxionen und zwei Fluenten und
3. Solche mit drei und mehr Fluxionen und Fluenten.

Der erste Fall bietet keine weiteren Schwierigkeiten; er umfasst einfach die Integration der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$, auf welche sich ohne weiters die obige besondere Lösung Newton's anwenden lässt.

Der zweite Fall verlangt nichts Anderes als die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung. Wer weiss, wie lange nachher erst dieses schwierige Gebiet des Infinitesimalcalcüls in Arbeit genommen und bewältigt worden ist, der wird Newton's Leistungen hierin seine Bewunderung nicht versagen können, wenn er gleich nicht im Stande war, die Lösungen genau, sondern nur in Form unendlicher Reihen zu geben.

Es liege z. B. die Differentialgleichung $\dot{x} - 3\,x\,\dot{x} + y\,\dot{x} + x^2\,\dot{x} + x\,y\,\dot{x} - \dot{y} = 0$ vor, so kann dieselbe durch Division mit $\dot{x}$ auf die Form gebracht werden.

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3\,x + y + x^2 + x\,y.$$

Man schreibe nun die y nicht enthaltenden Glieder nach der Ordnung der Dimensionen von x in eine horizontale Reihe, die mit y versehenen ebenfalls nach den Dimensionen von x in die Vertikale zur Linken, nach untenstehendem Schema:

	$1 - 3\,x + x^2$
$+ y$	$+ \quad x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}$
$+ x\,y$	$+ x^2 - x^3 + \frac{x^4}{3}$
aggreg.	$1 - 2\,x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{6}$
$y =$	$x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30}$ — etc.

Nun multiplicire man das erste Glied der horizontalen Reihe 1 mit x und stelle dieses x unten als erstes Glied des Ausdruckes für y hin. Dann substituire man dieses x für y in die Ausdrücke y und x y, und die hieraus entstehenden Glieder x und x^2 schreibe man in die zweite und dritte Horizontalreihe unter die mit gleichen Exponenten versehenen der ersten Reihe. Dann addire man $- 3\,x$ und x der ersten und zweiten Horizontalreihe; das Resultat $- 2\,x$ multiplicirt mit x und dividirt durch den Exponenten 2 der entstehenden Potenz gibt $- x^2$, als zweites Glied des Ausdruckes für y. Dieses $- x^2$ setze man für y wieder in die Glieder y und x y ein; man erhält dadurch $- x^2$ und $- x^3$, welche man wieder unter die betreffenden Potenzen der ersten Horizontalreihe stellt. Jetzt addire man in allen drei Reihen die

Glieder, die x^2 enthalten, also $x^2 - x^2 + x^2 = x^2$. Dieses mit x multiplicirt und durch 3 dividirt, ergibt $\frac{x^3}{3}$ als drittes Glied des Ausdruckes für y. So fährt man in infin. fort.

Es liegt in dieser Art der Lösung Newton's die Methode der unbestimmten Coefficienten verborgen, was man leicht zu verificiren im Stande ist. Nehmen wir nämlich für y die allgemeine Form einer unendlichen Reihe an, also:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots \quad (1)$$

so folgt hieraus:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \ldots\ldots \quad (2)$$

In unserm Beispiele haben wir für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ die Gleichung:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

Setzt man nun den Werth von y aus (1) in diese Gleichung für $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ein, so erhält man:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + a_0 + (a_0 + a_1 - 3)x + (a_1 + a_2 + 1)x^2 + (a_2 + a_3)x^3 + \ldots$$

Wenn man nun die Coefficienten von x in dieser Reihe den entsprechenden in der Reihe (2) gleichsetzt, so kann man aus den dadurch entstehenden Gleichungen die unbestimmten Coefficienten berechnen. Hiebei ist aber zu berücksichtigen, dass der Coefficient a_0 unbestimmt bleibt, für denselben also ein beliebiger Werth gesetzt werden kann. Für den Fall $a_0 = 0$ findet man in der That:

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{6}$ u. s. f. also für y dieselbe Gleichung, wie nach Newton's Verfahren. Setzt man aber für a_0 einen andern Werth, so erhält man auch eine andere Gleichung und aus diesem Grunde gibt es unendlich viele Lösungen. Dieser Umstand entging Newton keineswegs; er bemerkt ausdrücklich, dass man als erstes Glied in der Reihe für y jede beliebige Zahl setzen könne, wodurch man unendlich viele verschiedene Lösungen erhalten würde.

Von der Lösung des dritten Falles gebe ich im Folgenden die wörtliche Uebersetzung:

„Nach diesem können wir sogleich auf die Lösung des dritten Falles, wo es sich um Gleichungen mit mehr als zwei Fluxionen handelt, übergehen. Hiezu genügt irgend eine Relation zwischen zwei der Fluenten vorauszusetzen, da diese Beziehung durch die vorgelegte Gleichung nicht beschränkt wird, und hieraus kann dann die Relation zwischen den betreffenden Fluxionen gezogen und damit eine Fluente mit ihrer Fluxion aus der ursprünglichen Gleichung eliminirt werden. Wenn nun drei Fluxionen vorhanden sind, so braucht man nur eine willkürliche Relation anzunehmen; bei vier Fluxionen dagegen zwei, bei fünf drei u. s. f., so dass die Gleichung immer in eine solche transformirt werden kann, die nur zwei Fluenten mit ihren Fluxionen enthält. Dann kann diese Gleichung nach dem zweiten Falle gelöst werden.

Es sei die vorgelegte Gleichung $2\,\dot{x} - \dot{z} + x\,\dot{y} = 0$. Um die Relation zwischen den Grössen x, y und z, deren Fluxionen in der Gleichung vorkommen, zu finden, nehme ich irgend eine Relation zwischen zweien derselben z. B. x und y an, indem ich $x = y$, oder $2\,y = a + x$ oder $x = y^2$ setze. Nehmen wir $x = y^2$ an, so resultirt hieraus $\dot{x} = 2\,y\,\dot{y}$. Setzt man in die vorgelegte Gleichung nun für $x = y^2$ und für $\dot{x} = 2\,y\,\dot{y}$ ein, so erhält man: $4\,y\,\dot{y} - \dot{z} + y^2\,\dot{y} = 0$ und hieraus findet man nach der im zweiten Fall angegebenen Methode die Gleichung $2\,y^2 - z + \frac{1}{3}\,y^3 = 0$. Substituirt man hierin für y^2 wieder x und für y^3 $x^{\frac{3}{2}}$, so ergibt sich die Gleichung $2\,x + \frac{1}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = z$. So haben wir also aus der unendlichen Zahl von Arten, nach welchen die Relation zwischen x, y und z zu finden ist, diejenige herausgenommen, die durch die

Gleichungen bestimmt ist: $x = y^2$; $2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = z$; und $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Wir sehen, wie sich Newton hier in diesem dritten Falle an die Lösung der partiellen Differentialgleichungen wagte und in dem angeführten Beispiele in der That auch reüssirte. Wenn daher Weissenborn*) behauptet, man könne sich durch die Probe überzeugen, dass Newton's Resultat ein unrichtiges sei, so kann ich diesen Schluss nicht begreifen, und diess um so weniger als Weissenborn selbst die allgemeine Lösung der obigen Gleichung, der man auch die Form $x\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} - 2$ geben kann, in folgenden Ausdrücken hinstellt:

$$y = \frac{2m+1}{2m-1} \cdot A.\, x^{\frac{2m-1}{2}} + B;\; z = A.\, x^{\frac{2m+1}{2}} + 2x + B.$$

Was ist nun Newton's Resultat

$$y = \sqrt{x} \text{ und } z = \frac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + 2x$$

anderes als ein in dieser allgemeinen Lösung enthaltenes partikuläres Integral?

Denn setzt man in der allgemeinen Lösung $m = 1$, $A = \frac{1}{3}$ und $B = 0$, so erhält man in der That Newton's Ausdrücke für y und z und wenn man mit denselben die Probe macht, so findet man, dass sie der Gleichung $x.\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$ genügen.

Es wird übrigens die obige Differentialgleichung auch durch die Werthe erfüllt:

$$y = \frac{n+2}{n} A.x^{\frac{n}{2}} + B;\; z = A.x^{\frac{n+2}{2}} + 2x + B;$$

---

*) Die Principien der höhern Analysis in ihrer Entwicklung von Leibnitz bis auf Lagrange. Halle 1856.

denn auch die ganzen, so gut wie die gebrochenen Potenzen von x genügen der Gleichung. Ich sehe nicht ein, aus welchem Grunde Weissenborn statt $\frac{n}{2}$ und $\frac{n+2}{2}$, $\frac{2m-1}{2}$ und $\frac{2m+1}{2}$ als Exponenten von x setzte.

Hiemit schliesst Newton sein System der Fluxionsrechnung ab und geht nun zu geometrischen Anwendungen derselben über. Zuerst behandelt er das Problem der Maxima und Minima und gibt für dasselbe folgende Erklärung und Lösung:

„Eine Grösse, die den höchsten oder kleinsten Werth erreicht hat, fluirt in diesem Augenblich nicht vorwärts noch rückwärts, d. h. nimmt weder zu noch ab: denn, wenn sie zunehmen könnte, so wäre sie nach der Fluxion grösser als vorher und vorher kleiner als nachher, und umgekehrt, wenn sie abnehmen würde. Man suche daher ihre Fluxion und setze dieselbe gleich Null.

Beispiel: Es sei der grösste Werth von x in der Gleichung $x^3 - a x^2 + a x y - y^3 = 0$ zu bestimmen; man suche die Relation der Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$; dieselbe ist $3 x^2 \dot{x} - 2 a x \dot{x} + a y \dot{x} + a x \dot{y} - 3 y^2 \dot{y} = 0$. Man setze $\dot{x} = 0$, so bleibt die Gleichung $a x \dot{y} - 3 y^2 \dot{y} = 0$ oder $3 y^2 = a x$. Mit Hülfe dieser Gleichung eliminirt man eine der Fluenten x und y aus der ursprünglichen Gleichung, und erhält so den Werth der andern.“

Wir sehen, dass Newton gleichwie Fermat wohl den Werth der Funktion zu bestimmen vermochte, für welchen der zweite Differentialquotient sein Zeichen wechseln würde; ob dieser Werth aber ein Maximum oder Minimum sei, konnte er eben aus Unkenntniss der zweiten Ableitungen nicht ermitteln.

Um so bewundernswerther ist daher gerade wegen dieser Unzulänglichkeit seiner Fluxionsmethode die Art und Weise, wie er das Problem des Krümmungsradius behandelte und für denselben in der That einen richtigen Ausdruck fand.

Es sei in Fig. VII. D der Berührungspunkt der Tangente DT, DC der Krümmungsradius senkrecht auf der Tangente, C also der Mittelpunkt der Krümmung. AB und BD seien die Coordinaten des Punktes D. DC schneide überdiess die Abscisse in P. Man ziehe DG || AB und vervollständige das Rechteck DGCH. Dann ziehe man in irgend einem Punkte g von GC die Parallele $g\delta$ zu DG, so hat man die Proportion: $Cg : g\delta = BT : BD$, d. h. wie die Fluxion der Abscisse zu der der Ordinate. Zugleich nehme man an, der Punkt D schreite unendlich wenig vor bis nach d; man fälle von d aus das Perpendikel db auf die Abscisse, dasselbe schneide D G in e. Man ziehe auch in d den Krümmungsradius C d; derselbe trifft DG in F und δg in f. Es sind nun De und de die Momente der Abscisse und Ordinate, und δf für denselben Zeitpunkt das Moment der Geraden $g\delta$. Es ist daher $DF = De + \frac{de^2}{De}$ (ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck DdF); da man nun das Verhältniss dieser Momente, oder, was dasselbe ist, der Fluxionen der betreffenden Grössen hat, so kennt man auch das Verhältniss von CG zur bekannten Strecke Cg (welches dasselbe ist wie das von DF zu δf), und hieraus lässt sich der Punkt C bestimmen.

Es sei nun $AB = x$, $BD = y$, $Cg = 1$, und $g\delta = z$, so hat man die Proportion:

$$1 : z = \dot{x} : \dot{y}$$

oder: $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Setze man nun δf, das Moment von z, gleich $o\dot{z}$ (d. h. gleich dem Product der Geschwindigkeit oder Fluxion $\dot{z}$ in die unendlichkleine Grösse o), so werden die Momente von x und y also De und de, beziehungsweise gleich sein $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$, woraus sich ergibt:

$$DF = \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}oo}{\dot{x}o}$$

Diess in die Proportion $Cg : CG = \delta f : DF$ eingesetzt, gibt:

$$Cg : CG = \dot{z}o : \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}.$$

Da nun $Cg = 1$ angenommen wurde, so finden wir für CG den Werth:

$$CG = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}.$$

Da wir der Fluxion $\dot{x}$ der Abscisse x jeden beliebigen Werth beilegen können, so nehmen wir dieselbe $= 1$ an. Hieraus folgt $z = \dot{y}$ und daher $CG = \frac{1 + zz}{\dot{z}}$. Aus der Proportion $CG : Cg = DG : \delta g$ folgt aber $DG = CG. \ \delta g$ $(Cg = 1)$ $= \frac{z + z^3}{\dot{z}}$ und hieraus

$$DC = \frac{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}}.$$

Beispiel: Es sei die Gleichung vorgelegt:

$$ax + bx^2 - y^2 = 0$$

so gibt dieselbe uns (nach Prob. I.):

$$a\dot{x} + 2bx\dot{x} - 2y\dot{y} = 0 \text{ oder:}$$

$$a + 2bx - 2yz = 0$$

wenn für $\dot{x}$ und $\dot{y}$ beziehungsweise 1 und z gesetzt wird.

Die Operation mit dieser Gleichung zum zweiten Male vollzogen, gibt:

$$2b\dot{x} - 2z\dot{y} - 2y\dot{z} = 0 \text{ oder:}$$

$$2b - 2z^2 - 2y\dot{z} = 0,$$

indem man wieder die betreffenden Substitutionen macht. Die erste Gleichung liefert uns den Werth für $z = \frac{a + 2bx}{2y}$, die zweite denjenigen für $\dot{z} = \frac{b - z^2}{y}$. Diese Ausdrücke für

z und $\dot{z}$ in die obige Formel eingesetzt, geben uns den Krümmungshalbmesser.

Die heutige Formel für den Krümmungshalbmesser:

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gibt uns in der That denselben Werth wie das Newton'sche Verfahren. Wir sehen aus diesem Beispiele, wie Newton, obgleich er die Operation des Differentiirens zweimal anwandte, noch nicht zum Begriffe des zweiten Differentialquotienten gelangt war und daher zur Umgehung desselben einen Kunstgriff zu Hülfe nehmen musste, der seinen mathematischen Scharfsinn gewiss in schönstem Lichte zeigt.

Auf Newton's Tangentenmethode brauchen wir nicht näher einzutreten, da dieselbe von der jetzigen sich nicht unterscheidet. Wie wir gesehen, hatte schon Barrow das Verhältniss der unendlichkleinen Incremente von Ordinate und Abscisse als bestimmenden Factor für die Construction der Tangente aufgestellt; Newton's Verfahren ist also nichts anderes als die Anwendung seiner Fluxionsrechnung auf Barrow's Methode. Dass Newton nur für algebraische Curven die Tangente auf diesem Wege bestimmen konnte, ist klar, weil sich seine Fluxionsmethode eben nur auf algebraische Gleichungen beschränkte. Bei transcendenten oder mechanischen Curven, wie sie Newton bezeichnete, stand ihm keine allgemeine Methode zu Gebote; er behalf sich in den einzelnen Fällen, wie für die Spiralen, Quadratricen und Cykloiden bestimmter Kunstgriffe.

Im VII. VIII. und IX. Problem wendet sich Newton zur Quadratur der Curven. Dieses Gebiet leidet natürlich mehr als irgend ein anderes an Unvollkommenheit, indem Newton den Uebergang von der Fluxionsgleichung $\dot{z} = y\dot{x}$ zur zugehörigen Fluentengleichung nur in den einfachsten

Fällen in endlichen, algebraischen Ausdrücken, bei complicirteren Problemen entweder gar nicht oder nur in unendlichen Reihen darstellen konnte.

An Stelle dieser nur in einzelnen Fällen anwendbaren Methode setzt nun aber Newton ein indirektes Verfahren. Er führt die Quadratur complicirterer Curven auf diejenige der Kegelschnitte zurück. Im VIII. Problem stellt er die Aufgabe:

„Irgendwelche Curven zu finden, deren Flächen zu den Flächen gegebener Curven eine durch eine endliche Gleichung ausgedrückte Relation haben."

Es sei (Fig. VIII. a und b.) F D H die gegebene, G E J die gesuchte Curve; man stelle sich vor, ihre Ordinaten D B und E C bewegen sich, sich selbst parallel, längs ihrer Abscissen, so werden die Fluxionen der Flächen, die sie beschreiben, sich verhalten wie die entsprechenden Ordinaten multiplicirt in die Geschwindigkeit ihrer Bewegung, d. h. in die Fluxion ihrer Abscissen. Wenn also $AB = x$, $BD = y$, $AC = u$ und $CE = z$, die Fläche $AFDB = s$ und die Fläche $AGEC = t$ gesetzt wird, so sind die Fluxionen dieser Flächen $\dot{s}$ und $\dot{t}$, und man hat folgende Proportion: $\dot{s} : \dot{t} = y\dot{x} : z\dot{u}$, woraus, $\dot{x} = 1$ und $y = \dot{s}$ gesetzt wie vorher, sich ergibt:

$$\dot{t} = z\dot{u} \text{ oder } z = \frac{\dot{t}}{\dot{u}}.$$

Wenn also zwei Gleichungen gegeben sind, von denen die eine die Relation der Flächen s und t, die andere diejenige der entsprechenden Abscissen x und u ausdrückt, so findet man aus diesen die Fluxionen $\dot{t}$ und $\dot{u}$, die man nur in die gefundene Formel einzusetzen braucht, um den Werth von z, d. h. die Gleichung der gesuchten Curve zu finden.

Beispiel: Es sei die gegebene Curve die Cissoide: $y = \frac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}}$, auf die man eine andere Curve beziehen will, deren Fläche zu der der Cissoide durch folgende Relation bestimmt wird: $\frac{x}{3}\sqrt{a x - x^2} + \frac{2}{3} s = t$. Man setze zur Abkürzung $\frac{x}{3}\sqrt{a x - x^2} = h$, so erhält man durch Differentiation: $\dot{h} + \frac{2}{3}\dot{s} = \dot{t}$. Aber die Gleichung $\frac{a x^3 - x^4}{9} = h^2$ gibt, $\dot{x} = 1$ gesetzt, $\frac{3 a x^2 - 4 x^3}{9} = 2 h \dot{h}$. Hierin für h seinen Werth gesetzt gibt: $\dot{h} = \frac{3 a x - 4 x^2}{6\sqrt{a x - x^2}}$. Ferner ist, da $y = \dot{s}$ angenommen wurde, aus der Gleichung der Cissoide $\frac{2}{3}\dot{s} = \frac{2 x^2}{3\sqrt{a x - x^2}}$. Daher $\dot{h} + \frac{2}{3}\dot{s} = \dot{t} = \frac{a x}{2\sqrt{a x - x^2}}$. Um u und $\dot{u}$ zu bestimmen, nehme man $\sqrt{a^2 - a x} = u$. Hieraus erhält man: $-a = 2 u \dot{u}$ oder $\dot{u} = -\frac{a}{2 u}$. Also ergibt sich, die Werthe für $\dot{t}$ und $\dot{u}$ in die Gleichung für z eingesetzt, folgende Gleichung der gesuchten Curve:

$$z = -\frac{u x}{\sqrt{a x - x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2 - a x}}{\sqrt{a x - x^2}} = \sqrt{a x}$$

und für x den Werth aus u gesetzt: $z = \sqrt{a^2 - u^2}$.

Diess ist die Gleichung eines Kreises. Da uns nun unsere Gleichung: $\frac{x}{3}\sqrt{a x - x^2} + \frac{2}{3} s = t$ das Verhältniss der beiden Flächen gibt, so ist hiemit die Quadratur der Cissoide auf diejenige des Kreises zurückgeführt.

Es leuchtet ein, dass die consequente Durchführung dieses Verfahrens mit den grössten Schwierigkeiten verbunden war; denn die Annahme der Relation zwischen den beiden Flächen s und t ist eine willkührliche, und daher zum grossen Theile dem Zufall anheimgestellt, gerade jene glückliche Combination zu finden, die als gesuchte Curve einen Kegelschnitt, oder irgend eine andere mit bekannter Quadratur ergeben würde.

Auch die Rectification der Curven gelang Newton nur in wenigen Fällen direkt; er suchte daher auch hier nach einem indirekten Wege, der sich ihm in der Theorie der Evoluten darbot. Wie bekannt ist der Ort des Krümmungsmittelpunktes der Evolvente die Evolute, und die Länge des Krümmungsradius irgend eines Punktes der Evolvente gleich der Länge der Evolute vom Anfangspunkte bis zu dem Berührungspunkte jenes Krümmungshalbmessers. — Hierauf basirte Newton seine Methode der Rectification, die wir im Folgenden in einem Beispiele vorführen wollen:

Nehmen wir an, es sei (Fig. IX.) die Parabel ADE durch die Gleichung gegeben $ax = y^2$. Nach dem V. Problem (Krümmungsradius) findet man $AL = 3x + \frac{1}{2}a$, $CL = \frac{4y^3}{a^2}$ und $DC = \frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax}$; AL und LC bestimmen die Curve KC, und DC gibt ihre Länge. Denn da es willkürlich ist, wo man die Punkte K und C auf der Curve annimmt, so setzen wir voraus, es sei K der Krümmungsmittelpunkt des Parabelscheitels; dann hat man für $x = o$ und $y = o$, $DC = \frac{1}{2}a = AK = DG$. Diesen Werth von dem allgemeinen Ausdrucke für DC subtrahirt, gibt: $GC = KC =$

$$\frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax} - \frac{1}{2}a.$$

Will man nun diese Curve und ihre Länge in eigenen Coordinaten ausgedrückt kennen, so setze man $KL = z$ und $LC = u$. Dann wird $z = AL - \frac{1}{2}a = 3x$, oder: $x = \frac{1}{3}z$; und $\frac{az}{3} = ax = y^2$; also $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}} = \frac{4y^3}{a^2} = CL = u$, oder: $16\frac{z^3}{27a} = u^2$, welches die Gleichung der kubischen Parabel ist. Ihre Länge wird sein: $\frac{3a+4z}{3a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}az} - \frac{1}{2}a$, indem man $\frac{1}{3}$ z für x in den Ausdruck für GC einsetzt. — Es ist also auf diesem Wege die kubische Parabel als Evolute der gewöhnlichen rectificirt.

Auch dieser Weg bot ungewöhnliche Schwierigkeiten dar, indem das Problem der Evoluten nur in wenigen Fällen leicht gelöst werden konnte.

Diess sind in Kürze die Hauptanwendungen, die Newton von seiner Fluxionsmethode machte. Bevor ich auf die Kritik seiner Verdienste um die Infinitesimalrechnung näher eintrete, wende ich mich zu der Betrachtung desjenigen, was der grosse Leibnitz auf diesem Gebiete geleistet und was ihm den ruhmvollen Namen des zweiten Erfinders des neuen Calcül's verschafft hat.

Leibnitz *) hat keine umfassende Schrift über die neue Methode und deren Anwendungen veröffentlicht, sondern nur vereinzelte Abhandlungen in damaligen Zeitschriften, wie in den *Miscellanea Berolin.*, und den *Acta eruditorum Lips.*, erscheinen lassen, wesshalb das Studium seiner diessfallsigen Leistungen bedeutend erschwert ist. Sein Briefwechsel mit andern grossen Mathematikern jener Zeit, besonders

*) Gottfried Wilhelm von Leibnitz wurde am 3. Juli 1646 zu Leipzig geboren. Er beschäftigte sich in seiner ersten Studienzeit mit Jurisprudenz und Philosophie. Erst nachdem er auf einer Reise nach Paris 1672 mit den ausgezeichnetsten Mathematikern jener Zeit bekannt geworden war, widmete er sich mit Vorliebe mathematischen Studien. 1676 wurde er Bibliothekar und Historiograph des Herzogs von Hannover; 1700 wählte ihn Friedrich I. von Preussen zum ersten Präsidenten der neu gegründeten Akademie in Berlin. Er war auch Mitglied der *Royal society* und der Pariser Akademie und starb am 14. Nov. 1716 zu Hannover. Seine allumfassende Gelehrsamkeit und sein tiefer Geist zeichnen ihn als ächten deutschen Gelehrten aus. Er bildet mit Newton und Alexander von Humboldt das glänzendste Dreigestirn am Gelehrtenhimmel der neuern Zeit. Seine sämmtlichen Werke, vielseitigen Inhaltes, gab Dutens, Genf 1768, heraus, seine mathematischen Schriften Gerhardt, Halle 1849—63.

mit Jakob und Johann Bernoulli, liefert uns ebenfalls vielfach zerstreute Belege zur Geschichte dieser Erfindung. Das erste, was Leibnitz hierüber veröffentlichte, ist eine Abhandlung in den *Acta erudit.* vom Jahre 1684, betitelt: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.* — Diese Abhandlung von 6 Seiten ist aber keineswegs geeignet, einen Einblick in die Leibnitz'sche Methode und seine Auffassung des neuen Calcüls zu gestatten. Im Anfange finden wir die Formeln für das Differential einer Summe, eines Produktes und eines Quotienten zweier variablen Grössen ohne irgend welche Beweise; dann die Differentiale von Potenzen und Wurzeln, hierauf ein Tangentenproblem und ein solches über Maxima und Minima und zuletzt das von De Beaune dem Descartes vorgelegte Problem, die Curve mit konstanter Subtangente zu finden. Leibnitz wendet allerdings unsere heutige Bezeichnungsweise für die Differentiale dx und dy an, allein ihre Eigenschaft als unendlich kleine Incremente der betreffenden Variabeln x und y tritt nicht deutlich genug hervor. Er nimmt dieselben in der That anfänglich endlich an, wenn er sagt: „Nun nennen wir irgend eine nach Willkür angenommene Gerade dx; dann werde die Gerade, welche sich zu dx verhält, wie y zu der Subtangente, mit dy bezeichnet, welches die Differenz von y ist". Erst in seiner zwei Jahre später ebenfalls in den *Act. erud.* veröffentlichten Abhandlung über die Integralrechnung, auf die er im vorigen Schriftstück nur mit den kurzen Worten hindeutet: *Notandum etiam non dari semper regressum a differentiale aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi* treten die Differentiale dx und dy wieder als unendlich kleine Incremente auf, welche Auffassung er dann 1689 in der Schrift: *Tentamen de motuum coelestium causis* näher erörtert und mit seinem philosophischen Systeme der Monaden in gegenseitige Beziehung bringt. — In der Lösung des De Beaune'schen Problems in der Abhandlung von 1684 stösst Leibnitz allerdings auf eine Integration, indem es sich darum handelt, von der Differentialgleichung $\frac{y}{a} = \frac{dy}{dx}$ zur Curvengleichung zurückzugehen. Allein er wendet darauf nicht seinen Integralalogrithmus an, sondern schliesst einfach, indem er dx konstant annimmt und dadurch die Gleichung $\frac{dy}{y} = \text{const.}$ erhält, dass y in geometrischer Progression wachsen müsse, wenn x in arithmetischer zunehme und dass diese Curve demnach die logarithmische Linie sei.

Allein diese kurzen, abgerissenen Aufsätze können uns keine Idee von dem Entwicklungsgang der Leibnitz'schen Erfindung geben; erst die in neuerer Zeit durch Gerhardt*) herausgegebenen Manuscripte von Leibnitz haben dieses Dunkel einigermaassen erhellt und dadurch den alten Streit über das Anrecht der beiden grossen Mathematiker auf die Priorität der Erfindung von Neuem entfacht. Aus diesem Manuscripte ersehen wir, dass Leibnitz schon im Jahre 1675 seine Differential- und Integralmethode theilweise ausgebildet hatte; warum er mit der Veröffentlichung derselben bis 1684 wartete, ist uns nicht bekannt, gerade so wenig wie Newton's Grund der Nichtveröffentlichung seiner Fluxionsrechnung.

Leibnitz erkannte schon 1673 den Zusammenhang des Tangentenproblems und der Quadraturen; in einem Manuscript vom October 1674 sagt er ganz deutlich: *Ajo, ex methodo tangentium inversa sequi figurarum omnium quadraturas, atque ita scientiam de summis et quadraturis, quod ante a nemine ne speratum est quidem, analyticam reddi posse.* Bezeichnend ist, dass nun Leibnitz von den Quadraturen aus-

---

*) Gerhardt, J. C. Die Entdeckung der höheren Analysis. 1855; und die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibnitz. 1848.

ging und also zuerst die Grundprobleme des Integrirens löste und dann von diesen rückwärts auf die Differentiation schloss. In einer Abhandlung vom Oct. 1674 betrachtete er die Methode der Quadratur durch Reihen, die seit Wallis und Mercator die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gelenkt hatte. In einem Manuscript, dessen verschiedene Theile vom 25. Oct. bis 1. Nov. 1675 abgefasst wurden, erwähnt er anfänglich der ältern Methode der Guldin'schen Regel, geht dann auf die Zurückführung der Quadratur gegebener Figuren auf die bereits bekannter über und führt die Methode an, durch Zerlegung der Figur in quadrirbare Theile das Problem zu lösen. Hiebei kommt er nun auf folgenden Satz: *Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem aequantur complemento summae terminorum, sive: momenta terminorum aequantur complemento summae summarum, sive:* $omn.\,\overline{xw} = ult.\ x.\ \overline{omn.w} - omn.\ \overline{omn.w}$. (Fig. X.) Diess ist, in unsere heutige Bezeichnungsweise umgesetzt, nichts Anderes als die Formel für die theilweise Integration:

$$\int x\,y\,dy = x\int y\,dy - \int dx \int y\,dy.$$

Für das Zeichen $\int$ setzte Leibnitz hier noch das Wort *omnia* respekt. *omn.*; das Differentialzeichen liess er ganz weg, so dass also $\int x\,dx$ einfach ausgedrückt wurde durch $\overline{omn.\ x}$ d. h. soviel als man nehme die Summe aller Producte x dx. Erst in dem Manuscript vom 29. Oct. führt dann Leibnitz das Integralzeichen ein, mit den Worten: *Utile erit scribi* $\int$ *pro omn., ut* $\int l$ *pro omn. l, id est summa ipsorum l* (l ist nämlich hier für dy gesetzt). Nun kommt er auf die Beziehung $\frac{\int l^2}{2} = \int \overline{\int l \frac{l}{a}}$, welche leicht falsch aufgefasst werden kann. In Fig. XI. nämlich nennt Leibnitz $AB = x$, $BL = y$, $GW = a$ und $LW = l$. Die Subnormale und Subtangente des Punktes L seien p und t. G W L ist das sog. *triangulum characteristicum,* wie Leibnitz es nennt. Nach seiner alten Bezeichnungsweise ist nun $\frac{1}{a} = \frac{p}{\text{omn.}\,1} = \frac{p}{y}$; also $p = \frac{\text{omn.}\,1}{a}.\,l$. Daher will omn. $y \frac{1}{a}$ nicht sagen omn. y mal omn. l noch auch y mal omn. l; da nun $p = \frac{y}{a}\,l$, oder $= \frac{\text{omn.}\,l}{a}\,l$, so will diess soviel heissen als omn. l multiplicirt mit einer jener Grössen, welche einem p entspricht (*in unum illud quod uni illi p respondet*); also omn. p = omn. $\frac{\text{omn.}\,l}{a}\,l$; nun habe ich an einem andern Orte gezeigt (sagt Leibnitz), dass omn. $p = \frac{y^2}{2}\left(\text{d. h.} \int y \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2}\right)$ oder $= \frac{(\text{omn.}\,l)^2}{2}$; hieraus erhalten wir die Beziehung, die mir bewunderungswürdig scheint und für den neuen Calcül in Zukunft von grosser Bedeutung sein wird, dass nämlich $\frac{(\text{omn.}\,l)^2}{2} = \text{omn.}\,\overline{\overline{\frac{\text{omn.}\,l}{a}\,l}}$. Hiefür schreibt nun Leibnitz, indem er für omn. das Zeichen $\int$ setzt:

$\frac{\overline{\int l^2}}{2} = \int \overline{\int \overline{l.\,\frac{l}{a}}}$ oder nach unserer heutigen Ausdrucksweise:

$$\frac{y^2}{2} = \int dy \int \frac{dy}{dx}\,dx.$$

Es ist also der Schluss, den Leibnitz macht, ganz richtig, und wir müssen es daher als ein Versehen Weissenborns*) betrachten, wenn er hierin einen Fehlschluss Leibnitzen's sieht. Er glaubt nämlich, derselbe verwechsle $\int l^2$ mit $\left(\int l\right)^2$.

---

*) Die Principien der höhern Analysis, etc. pag. 87.

Allerdings ist die Bezeichnung des Leibnitz undeutlich, indem er den Exponenten 2 unter das Integralzeichen setzt; wenn man aber die Herleitung mittelst der alten Bezeichnungsweise verfolgt, so wird man einsehen, dass er jenen Ausdruck $\int l^2$ wirklich für $\left(\int l\right)^2$ gebraucht und also keinen Fehler begeht. — Zu bemerken ist noch, dass Leibnitz in der Formel $\int\overline{\int l.\frac{l}{a}}$ ein dx weglässt, denn dieselbe heisst, wenn man für l und a ihre Werthe setzt, bloss: $\int\overline{\int dy.\frac{dy}{dx}} = \int y\,\frac{dy}{dx}$ anstatt: $\int y\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$. Dass l in diesen Formeln die Ordinate bedeute, wie Gerhardt*) behauptet, ist unrichtig, indem ja Leibnitz selbst in Fig. XI. für WL, was doch gleich unserm dy ist, den Buchstaben l setzt. Die Formel $\frac{\int l^2}{2} = \overline{\int l.\frac{l}{a}}$ wäre allerdings auch für diesen Fall richtig, wenn man nämlich a = dx = 1 setzen würde, was auch Leibnitz später in der That thut; sie hiesse dann:

$$\frac{\int y^2}{2} = \int\overline{\int y.\,y}$$

wo man überall anstatt y ydy zu ergänzen hätte. Sie würde dann die Gleichung ergeben:

$\frac{1}{2}\left(\int y\,dy\right)^2 = \int dy\int y\,dy = \frac{y^4}{8}$. Es stellt auch wirklich in der Formel $\int x = \frac{x^2}{2}$ Leibnitz x für xdx hin, indem er eben dx = 1 annimmt; wenn er aber eben, wie es oben der Fall ist, dx = a, nicht = 1 setzt, so kann er auch für ydy nicht einfach y setzen. In der Formel für die partielle Integration, die Leibnitz angibt, nämlich:

$\int x\,l = x\int l - \int\int l$ und die er aus der oben angeführten:

*) Die Entdeckung der höhern Analysis. 1855. pag. 59.

$$\text{omn.}\,\overline{\text{x w}} = \text{ult. x}\ \overline{\text{omn. w}} - \text{omn.}\ \overline{\text{omn. w}}$$

herleitet, setzt er nun für l, was er früher als erlaubt hingestellt hat, jeden beliebigen Werth, und erhält so für $l = dx = 1:\quad x\,dx = \int x = \frac{x^2}{2}$; für $l = x\,dx = x: \int x^2dx = \int x^2 = \frac{x^3}{3}$ u. s. f. Es ist also auch die Bemerkung Weissenborns (Ibid. pag. 87) ohne Bedacht hingestellt, Leibnitz habe nicht angegeben, wie er zu jenen Resultaten gelangt sei.

Von dieser Methode des Integrirens gelangt nun Leibnitz zur inversen Operation des Differentiirens, wenn er sagt: *Si analytice detur $\int l$, dabitur etiam l, ergo si detur $\int\int l$, dabitur etiam l, sed non si datur l, dabitur et $\int l$.* Und später: *Datur l, relatio ad x, quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo, scilicet si sit $\int l = y\,a$, ponemus $l = \frac{y\,a}{d}$,* (nämlich hier setzt Leibnitz noch das Differentialzeichen d in den Nenner, anstatt zu schreiben dy, was er dann in dem bloss drei Tage später geschriebenen Manuscripte wirklich thut) *nempe ut $\int$ augebit, ita d minuet dimensiones, $\int$ autem significat summam, d differentiam. Ex dato y semper invenitur $\frac{ya}{d}$ sive l sive differentia ipsorum y.*

Diess ist nun der Algorithmus des Summirens (Quadratur) und des Differentiirens (Tangentenproblem), wie ihn Leibnitz aufgestellt hat. Bezeichnend ist, dass derselbe nirgends näher auf die Bedeutung der Differentiale dx und dy eintritt, wie diess eben Newton in seiner mechanischen Auffassung der Fluxionen in evidenter Weise thut; auch braucht Leibnitz nie die Bezeichnung „Differential“, sondern immer nur

„Differenz". Erst in seinen ungefähr 10 Jahre später veröffentlichten Aufsätzen der *Acta erudit.* gibt er nähere Aufschlüsse über die Bedeutung dieser Symbole.

In den folgenden Manuscripten wendet nun Leibnitz seine Methode auf Quadraturen und das Tangentenproblem an. Wir geben im Folgenden als Beispiel das im Manuscripte vom 11. November 1675 behandelte Problem, nämlich: die Curve zu bestimmen, in welcher die Subnormale der Ordinate umgekehrt proportional ist.

Es sei in Fig. XII. $AB = DC = x$, $AD = BC = y$, so dass die Curve C (C) auf beide Axen AS und AP bezogen ist; ferner nennen wir $BP = w =$ Subnormale und $B(B) = z$. Von früher her wissen wir, dass $\int wz = \frac{y^2}{2}$, also $wz = \frac{y^2}{2d}$ $\left(\text{anstatt } d\,\frac{y^2}{2}\right)$. Es ist aber, wie wir aus der Quadratur des Dreieckes wissen, $\frac{y^2}{2d} = y$. (Hier lässt Leibnitz dy wieder weg); also $wz = y$. Nach der Voraussetzung ist aber $w = \frac{b}{y}$, also $\frac{bz}{y} = y$ oder $z = \frac{y^2}{b}$. Es ist aber $\int z = x$, daher $x = \int \frac{y^2}{b}$. Aus der Quadratur der Parabel folgt aber $\int \frac{y^2}{b} = \frac{y^3}{3b}$, also $x = \frac{y^3}{3b}$, welches die Gleichung der kubischen Parabel ist.

Es gibt diese Lösung zu einigen nicht unwichtigen Bemerkungen Anlass. Leibnitz scheint erstens kein Gewicht darauf zu legen, dass das Intervall B(B), welches wir mit dx bezeichnen würden, unendlich klein angenommen werde; er legt ihm irgend einen endlichen unbestimmten Werth z bei und setzt einfach nachher $\int z = x$, d. h. die Summe aller dieser endlichen Intervalle ist gleich x. Zweitens muss es auffallen, dass Leibnitz bei der Differentiation von $\frac{y^2}{2}$ und bei der Integration von $\frac{y^2}{b}$ auf die Quadratur des Dreieckes und der Parabel zurückweist; man sollte meinen, er würde den Werth dieser Ausdrücke ohne Weiters nach den Regeln seines in den vorigen Manuscripten aufgestellten Algorithmus hinschreiben, ohne auf eine bekannte Quadratur als Zwischenglied hinzuweisen; und drittens beruft sich Leibnitz bei der Probe, die er mit dieser Lösung macht, auf die Tangentenmethode des Holländers Sluze, anstatt nach seiner Differentiationsmethode von dem Resultate $\frac{y^2}{3b} = x$ auf die ursprüngliche Voraussetzung zurückzuschliessen.

Diese Umwege könnten mich nur dazu verleiten, anzunehmen, das Datum, welches das Manuscript eigentlich trägt, nämlich der 11. November 1673, sei am Ende doch das richtige. Gerhardt substituirte nämlich für die 3 eine 5, indem er deutlich zu sehen glaubte, dass letztere Zahl in die erstere umgefälscht worden sei (die Stelle war etwas radirt). Leibnitz könnte ja auch ganz gut anstatt der 3 zuerst eine 5 geschrieben haben. Die Anwendung der Zeichen $\int$ und d zeugt allerdings nicht für meine Ansicht; die Nichtanwendung der von Leibnitz in den vorhergehenden Manuscripten für ein und allemal aufgestellten Formeln $x = \frac{x^2}{2d}$ und $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$ aber bleibt mir unerklärlich und ist zum wenigsten inconsequent. Die Thatsache, dass Leibnitz die Bedeutung jener Zeichen $\int$ und d am Rande express bemerkt ($\int = $ *summa*, *d* = *differentia*), könnte dennoch für das frühere Datum des Manuscriptes entscheidend sein. — Ich habe die wörtliche Uebersetzung der Lösung des Problems gegeben. Man wird daraus den Zweck der zweiten zur ersten senkrecht angenommenen Axe A S und die Beziehung der Curve auf diese kaum herausfinden. In der That begreife ich Leibnitzens Worte am Ende der Lösung nicht: *Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus, cujus stratagematis antea non venerat in mentem.*

Am Ende desselben Manuscriptes unterzieht Leibnitz die Werthe von dxy und $d\frac{x}{y}$ der Betrachtung und kommt zu der Ueberzeugung dass sie nicht dasselbe bedeuten, was $dx dy$ und $\frac{dx}{dy}$; den richtigen Werth ist er aber noch nicht im Stande anzugeben. Erst in einem französisch geschriebenen Manuscripte vom 11. Juli 1677 gibt Leibnitz die Regeln für die Differentiation von Summen, Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln richtig. Schon in einer Abhandlung von November 1676 stellt er einige Differentiale von negativen und gebrochenen Potenzen auf und zwar die ganz gleichen Formeln kurz nacheinander falsch und richtig, ohne einen Grund der Aenderung anzugeben, wesshalb mir das Manuscript sehr unverständlich vorkommt. Dasselbe ist betitelt:

Calculus tangentium differentialis.

Dann folgt:

$dx = 1,\ dx^2 = 2x,\ dx^3 = 3x^2$ etc.

$d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},\ d\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2},\ d\frac{1}{x^3} = -\frac{3}{x^2}$ etc.

$d\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ etc.

Ex his colligitur regula generalis haec pro differentiis ac summis simplicium potestatum $dx^e = e x^{e-1}$ *et contra* $\int x^e = \frac{x^{e+1}}{e+1}$.

$$\textit{Unde}\ d\frac{1}{x^2}\ \textit{seu}\ dx^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\textit{et}\ d\sqrt{x} = dx^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ \textit{seu}\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Wir sehen, dass die Differentiale von $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ u. s. w. nur das erste Mal, dasjenige von $\sqrt{x}$ aber beide Male falsch angegeben sind. Für das Differential von $\sqrt{a+bz+cz^2}$ gibt er am Ende der Schrift den ebenfalls unrichtigen Werth $-\frac{b+2cz}{2dz\sqrt{a+bz+cz^2}}$. Wenn diese Unrichtigkeiten keine Schreib- oder Druckfehler sind (und Gerhardt bemerkt, dass die Manuscripte mit der grössten Sorgfalt abgedruckt worden seien), so scheint Leibnitz über die Operation des Differentiirens ausserhalb des Gebietes der ganzen, rationalen Functionen sich noch nicht ganz klar gewesen zu sein. In der Abhandlung der *Act. erud.* vom Jahre 1684 sind dann allerdings die Formeln für die Differentiale von Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten richtig angegeben.

Unserer heutigen Auffassung der Differentiale und gesammten Infinitesimalmethode überhaupt am nächsten kommt Leibnitz in einem leider nicht mit Datum versehenen Manuscripte, betitelt: *Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum aliisque communem calculum transcendentibus.* Dort geht er von der Betrachtung des *Triangulum characteristicum* aus und definirt dx und dy als *quantitates infinitae parvae seu quavis data minores.* Ferner betrachtet er die Curven als Polygone von unendlich vielen Seiten und die Flächen derselben als die Summe aller Rechtecke aus Ordinate in das Increment der Abscisse und findet so für die Quadratur die Formel: $F = \int y\,dx$, für die Rectification $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$, für die Cubatur der Rotationskörper $\int y^2 dx$ u. s. f. — Am Schlusse fasst dann Leibnitz noch die Elementaroperationen des neuen Calcüls kurz zusammen und versucht eine Veranschaulichung des Differentiirens und Integrirens vermittelst arithmetischer Progressionen verschiedener Ordnung zu geben. Er sagt:

Wenn die Reihe der Differenzen:	1	2	3	4	5	...	(dx)
so ist die Reihe selbst:	0	1	3	6	10	15	...	(x)
und die Summe der Reihe:	0	1	4	10	20	35	...	$\int x$.

Es scheint mir, dass diese Darstellung keineswegs zum Verständniss hilft, sondern im Gegentheil störend wirken könnte, indem das gerade vorher in den Calcül eingeführte Princip des Unendlichkleinen und der Continuität oder Stetigkeit der veränderlichen Grössen hier keinen Ausdruck findet. Wir kommen auf dieses schwankende Verhalten von Leibnitz in Bezug auf die Auffassung der Differentiale dx und dy später noch zurück.

Wir wenden uns nun im Folgenden zu einer Parallele zwischen Newton und Leibnitz, indem wir zugleich den grossen Streit über die Priorität der beiden Entdeckungen einer kurzen Analyse unterwerfen werden.

Wenn es sich darum handeln soll, zu entscheiden, welcher von den beiden Mathematikern den neuen Calcül zuerst entdeckt hat, so muss selbstverständlich darüber zuvörderst Klarheit herrschen, ob Newton's Fluxionsrechnung und Leibnitzens Differentialrechnung ein und dasselbe seien. Man wird wohl eine solche Frage lächerlich, zum mindesten höchst überflüssig finden, zumal wenn man die veröffentlichten Schriften der beiden Männer über diesen Gegenstand, oder auch nur die kurzen Auszüge, die ich im Vorhergehenden davon gegeben, mit Aufmerksamkeit durchgeht. Ein Unterschied in der Bezeichnungsweise, eine unwesentliche Verschiedenheit in der Bedeutung der Differentiale dx und dy und eine Abweichung in der principiellen Auffassung des ganzen Calcüls sind einzelne für die beiden Methoden unterscheidende Momente; allein das innerste Wesen, Zweck und Bedeutung, Anwendung und Resultate der beiden Systeme sind ein und dieselben. — Und doch ziehen Gerhardt und zum Theil auch Weissenborn in ihren schon früher angeführten Schriften eine so scharfe Grenze zwischen Fluxions- und Differentialrechnung, dass man wirklich gezwungen ist, anzunehmen, diese Männer, wenigstens Gerhardt hätten beides als etwas grundverschiedenes betrachtet. Und in der That konnte Gerhardt nicht anders, sobald er seinen Zweck zu erreichen hoffte, Leibnitz als den ersten Erfinder der Differentialrechnung hinzustellen; und diess ist Leibnitz allerdings, wenn Differential- und Fluxionsrechnung nicht dasselbe sind; in diesem Falle konnte Gerhardt getrost ausrufen: „Das Capitel, in welchem die Frage über den ersten Erfinder der höheren Analysis bisher erörtert wurde, verschwindet fortan aus der Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Der mehr als hundertjährige Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung ist zu Ende". (Entdeckung der höheren Analysis Seite 62). Auch wir stimmen herzlich gern mit diesen Worten Gerhardts überein; nur betrachten wir eben jene beiden Rechnungsarten als identisch und dann ist es auch ebenso unbestreitbar festgestellt, dass Newton der erste Entdecker des neuen Calcüls ist; denn selbst Gerhardt gibt zu, dass Newton's Fluxionsrechnung früheren Datums als Leibnitzens Differentialrechnung sei. — Diese Anstrengungen Gerhardts, Leibnitz den alleinigen Ruhm der Erfindung der höheren Analysis zu vindiciren, müssen auf jeden unbefangenen Beurtheiler einen bemühenden Eindruck machen; sie zeigen eben nur, dass auch Deutsche in jene verwerfliche Sucht verfallen können, die wir so gern bereit sind, als eines der grössten Nationalübel der Franzosen hinzustellen, nämlich ihre eigenen Geistesheroen auf Kosten derer anderer Nationen über Gebühr herauszustreichen. Was hierin Gerhardt gesündigt, hat ein anderer Deutscher Dr. Sloman in seiner Schrift: „Leibnitzens Ansprüche auf die Erfindung der Differentialrechnung, Leipzig 1857“, wieder gut gemacht, wenn er auch in einigen Beziehungen Leibnitz vielleicht etwas zu stark angegriffen hat. Sloman tritt in seiner Abhandlung Gerhardt und den Franzosen Biot und Lefort entgegen, welch' letztere im *Journal des Savants* und in den Zusätzen zu dem von ihnen herausgegebenen *Commercium epistolicum* ebenfalls Partei für Leibnitz nehmen, dabei aber ja nicht vergessen, auf Kosten eines Wallis und Barrow, den unmittelbaren Vorgänger Newton's, ihren Landsmann Fermat unter diejenigen zu stellen, *dont les travaux on préparé l'invention au dix-septième siècle.* Fermat darf gewiss ebenso gut unter die Vorarbeiter der grossen Fortschritte der Analysis im 17. Jahrhundert gezählt werden, wie Wallis und Barrow, wie Roberval und Cavaleri und Kepler, ja wie selbst im Alterthum der grosse Archimedes; allein ihn über alle emporzuheben und sogar Wallis ganz zu ignoriren, ist ebenso lächerlich wie Gerhardts Versuche in Bezug auf Leibnitz. Biot's und Lefort's Untersuchungen gipfeln in den Resultaten: *Il y a trois phases de l'invention bien marquées: 1. emploi des évanouissants comme méthode aux fonctions rationelles, ceci appartient spécialement à Fermat; 2. extensions aux fonctions irrationelles par le développement en série, surtout au moyen du théorème du binôme, voilà la part spéciale de Newton; 3. réduction de cet artifice particulier en méthode général de calcul, voilà Leibnitz.* — Hiernach soll also Newton bloss eine untergeordnete Stellung einnehmen, indem er die Methode, die Fermat auf rationale Functionen angewandt hatte, auf irrationale ausdehnte. Wie grundfalsch diese Behauptung ist, sieht jeder Verständige leicht ein. Wir haben früher bei Betrachtung von Fermat's Leistungen allerdings hinzugesetzt, dass seine Tangentenmethode einer der letzten Schritte zur Erfindung der Differentialrechnung war; allein sie war und bleibt eben, wie diejenige Descartes' und später Barrow's nur eine Specialmethode für das Tangentenproblem; das Princip der Differentialrechnung lag in ihr verborgen, aber Fermat erkannte in ihr noch nicht das Fundament eines neuen Calcüls. Lagrange und Poisson gingen daher zu weit, wenn sie in zu grossem, nationalem Eifer Fermat als den eigentlichen Erfinder der Differentialrechnung betrachtet haben und auch Chasles irrt sich in seiner Geschichte der Geometrie, wenn er sagt: „Die philosophische Idee ist Eigenthum Fermat's, das Mittel aber, welches unumgänglich nothwendig war, um diese in Anwendung bringen zu können, gehört Leibnitz.“ — Es ist interessant zu beobachten, wie die Franzosen fast durchweg für den Deutschen Leibnitz Partei nehmen, aber sie thun diess nur, wie Sloman mit Recht bemerkt, um dadurch ihren Fermat in ein helleres Licht zu setzen, keineswegs aus guter Ueberzeugung und Unparteilichkeit. Denn um Fermat hineinzubringen, müssen sie Newton weglassen; Fermat hat den neuen Calcül erfunden, Leibnitz dafür den passenden, für die spätern, grossen Erfolge nothwendigen Algorithmus geschaffen; Newton hat dabei nur eine sekundäre Stellung eingenommen. Von den Franzosen können wir also die Parteinahme für Leibnitz begreifen, von einem Deutschen, wie Gerhardt, angesichts der Schriften von Newton und Leibnitz und der offenen Belege der historischen Forschung aber keineswegs. Nur Montucla, von dem Sloman mit Recht sagt, dass er in der Waagschale der geschichtlichen Mathematik (was wenigstens die neuere Zeit anbetrifft) mehr wiege als irgend ein anderer Franzose, nimmt einen höheren, unparteiischeren Standpunkt ein; er sagt (*Hist. des math. Tome III. p. 109*): *Il est temps de nous résumer, et d'abord on ne peut douter que Newton ne soit le premier inventeur des calculs dont il s'agit. Les preuves en sont plus claires que le jour!*

Die Priorität von Newton's Erfindung einmal festgestellt, handelt es sich nun darum, den Weg zu ergründen, auf welchem Leibnitz zu dem neuen Calcül gelangte. Dieser Wege sind zwei möglich: Entweder hat Leibnitz um Newton's Erfindung gewusst, und dann ist seine Differentialrechnung mit ihrem bequemeren Algorithmus nur die systematischere Ausbildung von Newton's Methode; oder er hat seinen Calcül vollkommen unabhängig und selbstständig erfunden. Zu den Vertheidigern der ersten Ansicht gehören natürlich die eifrigen Anhänger Newton's, vor Allem die englischen Gelehrten, aber auch Männer wie Dr. Sloman, dem ich Rechts- und Wahrheitssinn keineswegs abstreiten kann. Auch Weissenborn neigt sich in seiner oben genannten Schrift, wenn er es auch nicht offen ausspricht, nach dieser Seite hin. Sloman führt in den Beilagen zu seiner Abhandlung ein Urtheil aus der Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Physik (1856, 4. Heft. S. 62) über diese Frage an, welches dahin geht, dass nur eine gewisse Pietät Weissenborn abgehalten habe, „offen zu gestehen, was in der ganzen Untersuchung desselben durchdringt, dass er nämlich glaubt, dass Leibnitz diese Kenntniss gehabt habe, welches Urtheil wir zwar ungern, aber vollständig unterschreiben.“ Und doch macht merkwürdiger Weise Weissenborn eine so scharfe Unterscheidung zwischen Fluxions- und Differentialrechnung, dass man von vorneherein verleitet werden könnte, ihn auf die Seite Gerhardts zu stellen. Ja er gibt sogar jeder der beiden neuen Methoden eine eigene Vorbereitungsperiode, für die Fluxionsrechnung nennt er Roberval, für die Differentialrechnung Barrow als Vorläufer. Allerdings macht er diese Unterscheidung, wie mir scheint, nur in Hinblick auf die verschiedene (mechanische und arithmetische) Auffassung der Differentiale dx und dy durch Newton und Leibnitz; allein diese Verschiedenheit halte ich nicht wesentlich genug, um als Grund einer so scharfen Trennung jener beiden Methoden aufgestellt werden zu können.

Am 10. Dec. 1672 schrieb Newton an seinen Freund Collins den berühmten Brief, in dem er ihm seine neue Tangentenmethode mittheilte. Es frägt sich nun, ob Leibnitz in den Jahren 1672—75 diesen Brief gelesen oder indirekt von seinem Inhalt Kenntniss erhalten habe. Beides kann nicht bewiesen werden; denn Leibnitz würde sich wohl gehütet haben, hierüber etwas verlauten zu lassen. Allein wenn man bedenkt, dass Leibnitz während seinem vierjährigen Aufenthalt in Paris (1672—76) mit vielen berühmten Mathematikern jener Zeit bekannt wurde, dass er in intimster Beziehung zu seinem Freunde, dem Freiherrn von Tschirnhausen, einem sehr bedeutenden Mathematiker, stand, der in London selbst mit Wallis, Newton, Collins und Oldenburg, dem Sekretär der Royal society, in Verbindung gestanden hatte, und dass endlich Leibnitz im Januar 1673 selbst nach London reiste und dort mit seinem Freunde Oldenburg, mit dem er schon seit 1670 in Briefwechsel gestanden und der ebenfalls Newton's Fluxionsrechnung kannte, täglichen Umgang hatte, so kann man schwerlich mehr darüber im Zweifel sein, ob Leibnitz von Newton's neuer Methode gewusst habe. Der gewichtigste Beweis aber könnte wohl in der Thatsache liegen, dass, wie selbst Gerhardt zugeben muss, im Mai 1675 eine Abschrift des Newtonschen Tangentenbriefes an Tschirnhausen nach Paris gesandt wurde und der Letztere gerade zu dieser Zeit gemeinsam mit Leibnitz arbeitete. Es bezeugt diese Mittheilung des Briefes an Tschirnhausen Eddleston in der Herausgabe von Newton's Correspondence. Furchtbar gravirend, wie sich Sloman selbst ausdrückt, sind aber die Anschuldigungen, die er im V. Cap. seiner Schrift gegen Leibnitz zu machen gezwungen ist. Gerhardt selbst sagt nämlich offen, es liege auf seinem Tische, und er habe diess aus der Hannoverschen Bibliothek, von der Hand Leibnitzens, ohne Vormerk der Zeit, ein Manuscript mit der Aufschrift: *Excerpta ex tractatu Newtoni manuscripto de* *analysi per aequationes numero terminorum infinitas.* Wie wir wissen, ist diess die Schrift, in welcher Newton die Resultate der Anwendung seiner neuen Methode auf Quadraturen und Rectificationen ohne Beweise und ohne Zuhülfenahme der Fluxionen zusammenstellte. Gerhardt bemerkt hiezu, nach seiner Meinung könne Leibnitz diese Excerpte aus Newton's Compendium nicht von 1672—74 gesehen haben. Also nur bis 1674 nicht, nachher wohl! „Vergessen wir", ruft Sloman aus, „denn ganz, dass Leibnitz diese Schrift nie sehen durfte, wenn von seinem Ruhme auch nur ein Tüttelchen übrig bleiben soll".

Am Ende des V. Cap. sagt Sloman: „Wir sind zu dieser Untersuchung durch die unwürdigen Angriffe auf Newton, den wir als Einen unserer Nation zu verehren gewohnt waren, getrieben worden, und thun gern Leibnitz Abbitte, wenn wir in dem letzten Capitel, aber auch nur in diesem, zu weit gegangen sind." Vorausgesetzt, es wären auch alle die Thatsachen, die Sloman aufführt, nicht zu läugnen, und sie sind es leider schwer, so hätten wir dennoch nicht nöthig, Leibnitz des Plagiates zu beschuldigen, wenn er eben seine Differentialrechnung nicht für mehr als eine Ausbildung und Generalisirung von Newton's Methode ausgegeben hätte. Allein er betrachtete sie als einen neuen, einzig dastehenden, nur von ihm erfundenen Calcül, an dem Newton keinen Antheil gehabt hätte. Mit grosser Selbstschätzung sagt er in seiner *Historia et origo calculi differentialis* (Seite 2): *Sed ita calculum differentialem (nempe ut Newtonus) dudum habuissent Keplerus, Cavallerius, Fermatius, Hugenius, Wallisius et qui non illa indivisibilia vel infinite parva tractantes,* und weiter unten: *Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium exstat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant, posset aliquis Cartesii analysin etiam Apollonio vindicare, qui rem calculi habebat, calculum ipsum non habebat.* Es sind diess nicht die einzigen Stellen in Leibnitzens

Schriften, die kein günstiges Licht auf seinen Character zu werfen geeignet sind.

Will man nun aber dieser ersteren Ansicht nicht beipflichten, Leibnitz habe Newton's Erfindung nur besser systematisirt und einen geeigneten Algorithmus für sie geschaffen, so braucht man sich desswegen noch keineswegs auf den Standpunkt Gerhardts zu stellen, der jeden äussern Einfluss auf Leibnitz negiren will. Nach ihm ist Newton's Fluxionsrechnung nur die consequente Durchführung und letzte Ausbildung der Tangenten- und Quadrirungsmethoden, wie sie vereinzelt, ohne Systematik, schon Wallis, Barrow, Fermat, Cavaleri, Roberval und im Alterthum Archimedes zuerst angewandt und dadurch die Infinitesimalrechnung vorbereitet hatten. Leibnitzens Differentialrechnung dagegen wäre das selbsteigene Product des grossen Mannes, nicht die consequente Folge jener angeführten Zwischenglieder, ja selbst, wie sich Gerhardt ausdrückt, nur in dunklem, nicht mehr leicht erkennbarem Zusammenhang mit der ältesten Quelle, der Archimed'schen Exhaustionsmethode, stehend. Das Urtheil über die Newton'sche Erfindung können wir nur unterschreiben, dagegen wird wohl Niemand dasjenige über Leibnitz anerkennen können, der nur etwelchermaassen einen Begriff von der Entwicklung der mathematischen Wissenschaften, der Fortschritte des menschlischen Geistes überhaupt hat. Eine solche Erfindung ist nicht das Product momentaner Gedankenblitze, sondern die nothwendige Krönung eines durch immer vollkommener werdende Methoden Jahre, ja vielleicht Jahrhunderte lang sich stetig entwickelnden Gebäudes. Und Leibnitz sollte nicht dieselben Vorarbeiten nöthig gehabt haben wie Newton, sondern seine Entdeckung unabhängig, aus sich allein gefunden haben? Diese Behauptung ist gewiss sehr kühn und schliesst nichts weniger als die Ansicht von Newton's Inferiorität gegenüber von Leibnitz in sich, welche schwerlich mit triftigen Argumenten bekräftigt werden könnte. Berücksichtigt man endlich noch

Leibnitzens eigenes Geständniss, das er Jakob Bernoulli gegenüber in einem Briefe vom April 1703 macht: *Cum Parisios apulissem anno Christi 1672, eram ego — — — in pene dixerim superba matheseos ignorantia,* so erhält schliesslich jene Ansicht die grösste Wahrscheinlichkeit, Leibnitz habe Newton's Erfindung gekannt. Doch verlassen wir hier diesen Streit; seine tiefere Kritik und endgültige Entscheidung überlasse ich Anderen; sie kommen demjenigen nicht zu, der nur gewohnt ist, mit Bewunderung und dem Gefühl der eigenen Ohnmacht zu jenen Heroen des Geistes aufzublicken, deren Namen in den Kranz der Unsterblichkeit verflochten sind.

Also angenommen, Leibnitz habe um Newton's Erfindung gewusst, so mag die absichtliche Verheimlichung dieser Thatsache seinerseits nur ein ungünstiges Licht auf seinen Character werfen, seinem Ruhme als genialer Mathematiker aber thut sie keinen Abbruch. Denn der Schritt, den Leibnitz durch Einführung seines Algorithmus in den neuen Calcül gethan hat, ist meiner Ansicht nach ebenso gross, sicherlich aber viel bedeutungsvoller und bahnbrechender als derjenige Newton's von den Tangenten- und Quadrirungsmethoden eines Barrow und Wallis zu seiner Fluxionsrechnung. Man kann sagen, dass jene Methoden zur Zeit von Newton und Leibnitz auf die äusserste Spitze ihrer nur speziellen Verwendungsfähigkeit gelangt waren; es bedurfte nur eines leisen, letzten Versuches, um sie zu generalisiren. „*Il faut faire attention qu'à l'époque de Newton et de Leibnitz une foule d'idées analogues à celles de ces deux grands hommes perçaient de toutes parts dans les écrits des savans. C'était réellement un fruit mûr. Cavalerius, Fermat, Pascal avaient soumis au calcul les quantités infiniment petites; Descartes avait trouvé la méthode des indéterminées; Roberval avait imaginé de décomposer la vitesse du point qui décrit une courbe, en deux autres respectivement parallèles aux deux coordonées; Barrow avait considéré les courbes comme des polygones d'une in-*

finité de côtés; Wallis avait enseigné à calculer les séries. Il ne manquait plus que d'assujétir toutes les découvertes de même genre à un mode uniforme par un algorithme", sagt der berühmte Carnot*). Und dieses that Newton, aber nicht auf eine Weise, die geeignet war, die Grundgesetze des neuen Calcüls leicht zu erkennen und mit ihnen ohne Schwierigkeit zu operiren. Diesen letzten, epochemachenden Schritt verdanken wir Leibnitz. Durch Einführung seines glücklich gewählten Algorithmus befähigte er den neuen Calcül zu leichterem Gebrauche und ermöglichte so die erstaunenswerthe Ausdehnung und ausgezeichnete Systematik, die in kurzer Zeit die Infinitesimalrechnung erreichte und wodurch das ganze Gebäude der mathematischen Wissenschaften so unendlich befördert wurde.

Leibnitzens Differentialrechnung hat vor derjenigen Newtons, abgesehen von der als eine Folge der unzusammenhängenden Darstellung sich ergebenden geringeren Uebersichtlichkeit einige wesentliche Vorzüge voraus. So die Differentiation irrationaler Functionen, wozu Newton's Methode nicht hinreichte; dann vor Allem aus die Darstellung des Differentials eines Productes und eines Quotienten zweier variablen Grössen und der Potenzen einer Variablen. Die Begründung der von Leibnitz aufgestellten Formeln fehlt allerdings in seinen Schriften, wir können daher nur vermuthen, dass er durch richtige Schlüsse zu den Resultaten $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, und $d\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ gelangt sei. Allein bei Newton treffen wir hierüber in seiner Methodus fluxionum keinerlei Andeutungen; er vermeidet durchweg das Auftreten einer Variablen im Nenner einer Function. Das Differential des Productes xy stellt er allerdings richtig dar, indem er eben eine Gleichung mit den Variablen x und y zuerst nach der einen und dann nach der andern differentiirt und die Resultate addirt; allein ob er sich genügende Rechen-

*) *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Paris. 1839.*

schaft über das hierin herrschende Gesetz geben konnte, ist unwahrscheinlich. Es tritt diess sogar deutlich in dem Beweise hervor, den er im 2. Abschnitte des II. Buches seiner Principia von der Fluxion des Rechteckes AB zu geben versuchte. Er sagt daselbst: „Ein durch beständige Bewegung wachsendes Rechteck AB war, als an den Seiten A und B die Hälften der Momente $\frac{1}{2}$ a und $\frac{1}{2}$ b fehlten, gleich $(A - \frac{1}{2}a)(B - \frac{1}{2}b) = AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$, und wird, wenn A und B um dieselben halben Momente zugenommen haben, gleich:

$$(A + \frac{1}{2}a)(B + \frac{1}{2}b) = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab.$$

Subtrahirt man vom letzten Rechteck das erstere, so ergibt sich der Rest: $aB + bA$.

Die ganzen Incremente a und b bringen daher im Rechteck AB das Increment $aB + bA$ hervor, w z. b. w.“

Weissenborn*) sieht den Grund nicht ein, wesshalb Newton, anstatt die Seiten geradezu um die ganzen Momente wachsen zu lassen, jene merkwürdige Annahme der halben Momente machte. Allein die Erklärung dafür scheint mir sehr leicht zu geben. Hätte Newton das Wachsen um ganze Momente vorausgesetzt, so hätte er für die Fluxion den Ausdruck $aB + bA + ab$ erhalten, und um hieraus auf das richtige Resultat $aB + bA$ zu kommen, hätte er das Glied ab gegenüber den andern unendlich klein annehmen, d. h. den Begriff des Unendlichkleinen in seinen Beweis einführen müssen, was Newton consequent zu vermeiden suchte. Er sagt ausdrücklich: „Es kommt auf dasselbe hinaus, ob man statt der Momente entweder die Geschwindigkeiten der Zu- und Abnahme (welche man auch Bewegungen, Veränderungen und Fluxionen der Grössen nennen kann), oder beliebige

*) Die Principien der höhern Analysis in ihrer Entwicklung etc. Pag. 42.

endliche Grössen versteht, welche jenen Geschwindigkeiten proportional sind.“ Aber auch diese Umgehung des Unendlichkleinen als Motiv jener Annahme der halben Momente zugegeben, so hat dieser Beweisgang immer noch eine schwache Seite. Wie Weissenborn ganz richtig bemerkt, ist das Resultat nicht mehr richtig, wenn man die Seiten zuerst um ein Drittel eines Momentes abnehmen und dann um zwei Drittel wachsen lässt, was doch auch eine Veränderung um ein ganzes Moment ist; denn in diesem Falle wird die Fluxion von AB gleich $aB + bA + \frac{1}{3} ab$. — Newton dehnt dann diesen Beweis auf das Product dreier und mehr Variabeln A. B. C. . . , auf A^n, A^{-n}, $A^{\frac{m}{n}}$ u. s. w. aus, denjenigen für die Fluxion des Quotienten $\frac{A}{B}$ aber gibt er nicht, was uns zu dem Schlusse berechtigt, er habe denselben nicht gekannt. — Wass die Auffassungsweise der Differentiale dx und dy anbetrifft, so kann man nicht umhin zu gestehen, dass Newton hier auf reellerem Boden steht als Leibnitz. Wir haben schon gelegentlich auf das schwankende Verhalten Leibnitzens in dieser Sache hingewiesen, wie in seinen verschiedenen Abhandlungen und Manuscripten, dx und dy bald als unendlich kleine Grössen, bald als endliche Linien, bald als *quantitates inassignabiles* (verschwindende), die aus den *quantitates assignabiles* (endliche) (d) x und (d) y*) hervorgehen oder für sie gesetzt werden können, auftreten. In dieser letztern Auffassung nähert sich Leibnitz der Newton'schen Erklärungsweise, indem die endlichen Grössen (d) x und d (y) und die ihnen proportionalen, unendlich kleinen dx und dy beziehungsweise den Fluxionen und Momenten Newton's entsprechen. Die phoronomische Bedeutung der Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, d. h. ihre Eigenschaft als die Geschwindigkeitscomponenten des die Curve erzeugenden Punktes nach den

---

*) Im Anhang zu Leibnitzens *Historia et origo calculi differentialis*.

beiden Coordinatenaxen hält Newton durch seine ganze Fluxionsrechnung hindurch fest und substituirt für sie bloss in den Beweisen ihre unendlich kleinen Incremente, d. h. die Momente $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$, die den ersteren als proportional angenommen werden. Diese mechanische Auffassung könnte freilich in verschiedenen Anwendungen der Differentialrechnung nicht mehr strikt festgehalten werden, allein Newton's Fluxionsrechnung gab sie immerhin ein sicheres Fundament. — In den Problemen der Integralrechnung reüssirte Leibnitz trotz seiner glücklichen Bezeichnungsweise nicht besser als Newton; diese inverse Operation verdankt ihre weitere Ausbildung erst den Bernoulli. Newton aber wagte sich in der Lösung der allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung und der partiellen Differentialgleichungen, wie wir gesehen haben, an Probleme, die erst lange nach Leibnitz eine befriedigende Lösung gefunden haben, theilweise aber heutzutage noch nicht vollständig erledigt sind. Seine Auffindung des Werthes von y als f (x) in einer unendlichen Reihe aus der Differentialgleichung erster Ordnung ist ein würdiges Denkmal von Newton's mathematischem Genie. — Was die höheren Differentialquotienten anbetrifft, so können wir weder Leibnitz noch Newton das richtige Verständniss und die klare Auffassung derselben zuerkennen. Wir finden in Leibnitzens Schriften dieselben direkt gar nicht berücksichtigt; nur in einer kurzen Abhandlung, die derselbe gegen die Angriffe des holländischen Mathematikers Nieuwentiit auf die Differentialrechnung verfasste, ist er gezwungen auf die Bedeutung der höhern Differentiale einzutreten, indem ihm Nieuwentiit den Vorwurf machte, seine Differentialmethode zeige nicht klar, wie sich die Differentiale höherer Ordnungen von denen der ersten Ordnung unterschieden. Hier legt er ihnen allerdings geometrisch und mechanisch die richtige Bedeutung bei. Er sagt: „Es verhalten sich nämlich, wie ich schon anderswo glaube erwähnt zu haben, die gewöhnlichen Grössen, die unendlich kleinen Grössen oder ersten Differentiale und die unendlich kleinen zweiter Ordnung oder Differentio-Differentiale gerade wie die Bewegung oder der Weg, die Geschwindigkeit und die Acceleration (*ut motus et celeritas et sollicitatio, quae est elementum celeritatis.*) Und in der Geometrie sind die gewöhnlichen Grössen die Coordinaten (*sunt pro vulgari algebra*), die Differentiale der ersten Ordnung beziehen sich auf die Tangenten oder die Richtung der Curven und die Differentiale der zweiten Ordnung auf die Krümmung derselben." Seine arithmetische Auffassung hingegen ist unzulänglich. Er behauptet nämlich $d^2 x$ stehe in demselben Verhältniss zu dx wie dieses zu x, und beweist diess folgendermaassen: Er nimmt an, y wachse in einer arithmetischen, x in einer geometrischen Progression. Dann ist also dy constant, dx nicht. Es verhält sich also dx zu dy, wie eine veränderliche Grösse zu einer Constanten. Jene veränderliche Grösse nun setzt er, ohne sich weiter darüber Rechenschaft zu geben, gleich x, und hierin liegt der Fehlschluss des Beweises. Er erhält nun die Proportion $dx : dy = x : a$, und hieraus $dx = \frac{x\,dy}{a}$. Da a und dy constant, so folgt durch Differentiation $d^2 x = \frac{dx\,dy}{a}$, oder in Proportion: $d^2 x : dx = dy : a$. Es ist aber $dy : a = dx : x$. Also ergibt sich die Proportion: $d^2 x : dx = dx : x$. Nach diesem wäre also für irgend eine Function das zweite Differential $= \frac{(df(x))^2}{f(x)}$. — Newton drückt sich über die geometrische Bedeutung der höhern Fluxionen weniger klar aus als Leibnitz. In der XI. Prop. seines *Tractatus de quadratura curvarum* sucht Newton die Fluxion einer Fläche und construirt dieselbe als Curve. Die Fluxion der von dieser neuen Curve gebildeten Fläche construirt er wieder als Curve u. s. f. Die Ordinaten dieser Curven verhalten sich nun wie die successiven Fluxionen der Ordinate der ersten Curve; nämlich:

Es stelle in Fig. XIII. die Curve AG die Fluxion der Fläche AHB, die Curve AF die Fluxion der Fläche AGB, u. s. w. dar, so ist die zweite Fluxion der Ordinate HB gleich der ersten von GB, die dritte von HB gleich der zweiten von GB, oder gleich der ersten von FB, u. s. w.; oder es verhalten sich die ersten, zweiten, dritten u. s. w. Fluxionen der Fluente HB beziehungsweise wie die Ordinaten GB, FB, EB, etc.

Diese etwas gezwungene Darstellung der höhern Fluxionen war denn auch kaum geeignet, die richtigen Werthe derselben bei den verschiedenen Functionen zu erkennen. Man hat daher hiemit auch den Fehler in Beziehung gebracht, den Newton begangen haben soll, indem er die succesiven Fluxionen von x^n beziehungsweise den Gliedern des entwickelten Binoms $(x + o)^n$ gleichsetzt. Newton sagt: *Terminus secundus* $n. x^{n-1} o$ *erit ejus incrementum primum seu differentia prima, terminus tertius* $\frac{n. (n-1)}{2} x^{n-2}. 0. 0$ *erit ejus incrementum secundum, etc.* Diess ist also falsch, indem die jeweiligen Nenner der Binomialcoefficienten weggelassen werden sollten. Dieser Fehler wurde dann auch von Joh. Bernoulli in seinen Briefen an Leibnitz gerügt, worauf Newton denselben dadurch zu verbessern suchte, dass er jedesmal vor *erit incrementum* .. das Wörtchen „*ut*" einschob, so dass es dann hiess: *erit ut ejus* ...... d. h. „verhält sich wie ...." — Sloman*) will Newton von dem Vorwurf eines Fehlers befreien, indem er darauf aufmerksam macht, dass Newton im Anfang des betreffenden Scholium's sagt: *Hae Fluxiones (prima, secunda .. etc.) sunt ut termini serierum infinitarum convergentium,* und er daher nicht mehr für nöthig gefunden habe, dieses „*ut*" nachher in jedem einzelnen Falle zu wiederholen. In der That müssen uns die Beispiele von höheren Fluxionen, die Newton in der I. Prop.

*) Versuch die Differentialrechnung auf andere als die bisherige Weise zu begründen. Paris 1856.

seines Tractatus gibt, zu der Ansicht verleiten, er habe die Werthe der höheren Fluxionen von Potenzen wohl gekannt und daher jenen Fehler nicht begehen können. Er differentiirt nämlich die Gleichung $z y^3 - z^4 + a^4 = 0$ zweimal und erhält als Resultat den richtigen Werth: $y^3 . d^2 z + 6 y^2 d z d y + 3 z y^2 d^2 y + 6 z y (d y)^2 - 4 z^3 d^2 z - 12 z^2 (d z)^2 = 0$.

Mit dieser kurzen Parallele zwischen Newton und Leibnitz schliesse ich die Geschichte der Entdeckung der Differentialrechnung und damit diejenige eines der grössten und epochemachendsten Fortschritte, die die neuere Zeit in ihren Annalen aufzuweisen hat. Die Vervollkommnung der abstrakten Mathematik ist nicht nur für diese selbst von unberechenbarem Erfolge gewesen, sondern sie hat auch den physischen Wissenschaften einen mächtigen Impuls und ein starkes, unzerstörbares Gerüste für ihren weiteren Ausbau gegeben. Es mögen hier noch einige schöne Worte Platz finden, die der grosse Alexander v. Humboldt an das Ende seines Ueberblickes über die Geschichte der physischen Weltanschauung (Kosmos, Bd. II) gesetzt hat: „Die Geistesarbeit zeigt sich in ihrer erhabensten Grösse da, wo sie, statt äusserer materieller Mittel zu bedürfen, ihren Glanz allein von dem erhält, was der mathematischen Gedankenentwicklung, der reinen Abstraktion entquillt. Es wohnt inne ein fesselnder, von dem ganzen Alterthum gefeierter Zauber in der Anschauung mathematischer Wahrheiten, der ewigen Verhältnisse der Zeit und des Raumes, wie sie sich in Tönen und Zahlen und Linien offenbaren. Die Vervollkommnung eines geistigen Werkzeuges der Forschung, der Analysis, hat die gegenseitige Befruchtung der Ideen, welche ebenso wichtig als der Reichthum ihrer Erzeugung ist, mächtig befördert. Sie hat der physischen Weltanschauung in ihrer irdischen und himmlischen Sphäre (in den periodischen Schwankungen der Oberfläche des Weltmeeres, wie in den wechselnden Störungen der Planeten) neue Gebiete von ungemessenem Umfange eröffnet“.

V.

Es konnte nicht ausbleiben, dass das Vage und Unmathematische des Begriffes des Unendlichkleinen von verschiedenen Seiten hartnäckige Opposition gegen den neuen Calcül hervorrief. Ausser dem Holländer Nieuwentiit, dessen Einsprüche wir schon erwähnt haben, traten gegen denselben noch einige andere unbedeutende Mathematiker auf, wie der Franzose Rolle und der Engländer Berckley. Aber die Nichtigkeit ihrer Finwendungen vermochte eben nichts gegen das mächtige Zeugniss der mit dieser angegriffenen neuen Methode erzielten grossartigen Resultate; die Wahrheit dieser stand unerschütterlich fest. So haben später die grossen Mathematiker Euler und Lagrange noch ihre Einwendungen erhoben gegen die gewöhnliche Auffassung und Begründung der Differentialrechnung und in dieser Hinsicht ihre eigenen Theorien aufgestellt, ohne ihre Anwendung zu verschmähen, oder ihre Resultate zu bezweifeln; sie haben selbst ihre unsterblichen Lorbeeren sich nur mit Hülfe des neuen Calcüls geholt. Und sogar noch bis in unsere Zeit hinein hat sich der Streit über das Wesen und die Begründung der Infinitesimalrechnung gezogen, ohne ihrem Werthe als mathematische Rechnungsoperation den geringsten Abbruch zu thun. Die Begriffe des stetigen Wachsens und Abnehmens, des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen sind an und für sich schon nicht so leicht verständlich und fassbar; wie vielmehr musste ihre Einführung in die sich immer der äussersten Strenge und Klarheit befleissende Mathematik gerechte Bedenken erwecken. Die ausserordentlichen Fortschritte des 18. Jahrhunderts haben sie für die Mathematiker für immer gehoben; gehen wir zur geschichtlichen Analyse dieser raschen, staunenswerthen Entwicklung über.

England blieb längere Jahrzehnte hinter den Leistungen der Mathematiker des Continentes zurück, wenigstens was die Ausbildung der höheren Analysis anbetrifft; wir werden nachher sehen, wie die Anwendung der alten Geometrie auf die schwierigsten Probleme unter ihnen einige hervorragende Vertreter hatte. Der Grund hiefür liegt in der Rivalität zwischen Newton und Leibnitz; nationaler Stolz und Neid machten die englischen Mathematiker blind für die Vortheile der Leibnitzischen Bezeichnungsweise, sie behielten die Newton'sche Fluxionsmethode bei, deren geringere Anwendungsfähigkeit die Entwicklung der höheren Mathematik in hohem Grade hemmen musste. Es mag gerade in diesem praktischen Beispiele für Leibnitzens Anhänger eine schöne Genugthuung und eine Entschädigung dafür liegen, dass sie eben gezwungen sind, in Newton den ersten Entdecker der Differentialrechnung anzuerkennen.

Unter den englischen Mathematikern, die dem neuen Calcül ihre Aufmerksamkeit zuwandten, haben wir vor Allem aus **Taylor** *) und **Maclaurin** *) zu nennen; aber auch sie hielten sich an die Newton'sche Fluxionsmethode und vermochten sich daher nicht auf einen viel höheren Standpunkt als jener zu erheben. Ihre Bemühungen richteten sich weniger auf die weitere Ausbildung, als vielmehr auf eine tiefere und strengere Begründung dieser Methode, wozu sie durch die oben erwähnten Angriffe auf die Differential-

---

*) Brook Taylor wurde geboren zu Edmonton im Jahre 1685 und starb zu London 1731. Er war längere Zeit Secretär der *Royal society*.

**) Colin Maclaurin, geboren zu Kilmoddan in Schottland im Jahre 1698, war Professor der Mathematik zu Aberdeen und Edinburgh. Er starb 1746 zu York.

rechnung bewogen wurden. Taylor's Hauptwerk trägt den Titel: *Methodus incrementorum directa et inversa;* dasselbe ist in zwei Theile getheilt, deren erster die Begründung und Hauptsätze, der zweite die wichtigsten geometrischen und physikalischen Anwendungen der Fluxionsrechnung enthält. Taylor unterscheidet zwischen Incrementen und Fluxionen und betrachtet die letzteren als sich verhaltend wie die entstehenden oder verschwindenden Incremente. Er rechnet mittelst der Incremente, setzt aber nachher an Stelle dieser die Fluxionen, wie Newton in Beziehung auf die Momente verfährt. Die Incremente bezeichnet er zum Unterschied von den Fluxionen durch $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot}{y}$, $\underset{\cdot}{z}$, etc. In Theor. III. Prop. VII. beweist er den berühmten nach ihm benannten Satz, dass, wenn x eine Function von z und letzteres in den Werth z + v übergeht, x dann den Werth annimmt:

$$f(z+v) = x + \frac{v}{1} \cdot \frac{\dot{x}}{\dot{z}} + \frac{v^2}{1.2} \cdot \frac{\ddot{x}}{\dot{z}^2} + \frac{v^3}{1.2.3} \cdot \frac{\dddot{x}}{\dot{z}^3} + \ldots$$

oder nach unserer Bezeichnungsweise:

$$f(z+v) = f(z) + \frac{v}{1} f^1(z) + \frac{v^2}{1.2} f^2(z) + \frac{v^3}{1.2.3} \cdot f^3(z) \ldots$$

Im zweiten Theile löst Taylor eine Reihe von interessanten Problemen über Quadraturen, Rectificationen, Schwingung von Saiten, Schwingungsmittelpunkt, astronomische Refraction etc., auf die hier nicht näher eingetreten werden kann.

Maclaurin's berühmtes Werk: *A treatise of fluxions,* obgleich bedeutend später (1742) erschienen, muss hier ebenfalls, als unmittelbar an Newton's Fluxionsrechnung sich anschliessend, betrachtet werden. In zwei Büchern gibt Maclaurin eine strengere Begründung jener Methode, indem er ihre Fundamentalsätze, ohne Zuhülfenahme des Unendlichkleinen, nur auf dem Wege der alten Geometrie zu beweisen sucht. Man muss gestehen, dass hiebei das eigentliche Wesen der Fluxionsrechnung in den Hintergrund tritt und Maclaurin sich wieder mehr auf den Boden der Euklidischen Geometrie zurückbegibt, mit dem einzigen, allerdings gewichtigen Unterschiede, dass er die dynamischen Begriffe der Bewegung und Geschwindigkeit oder das Wachsen und Abnehmen geometrischer Grössen als neues bestimmendes Moment in jene alten Methoden einführt. Auf diesem Wege löst Maclaurin die schwierigsten Probleme der höheren Curventheorie und der mathematischen Physik mit bewunderungswürdiger Eleganz und Ueberlegenheit und hierin zeigt sich sein mathematisches Genie in schönstem Lichte und setzt ihn als würdigen Jünger an Huyghens' und Newton's Seite. Es ist begreiflich, dass mit dieser Methode eine gewisse Weitschweifigkeit in den Beweisen und Lösungen nicht zu vermeiden war und dass daher viele Sätze jener Klarheit und Kürze entbehren, die die Anwendung der Analysis den geometrischen Untersuchungen zu verleihen im Stande ist. Allein die mathematische Strenge und Genauigkeit der Beweise entschädigt gewiss den Verfasser für die Mühe der Herleitung und den Leser für die Schwierigkeit des Studiums und Verständnisses. — Maclaurin betrachtet die Fluxion geometrischer Grössen und diejenigen abstrakter oder algebraischer Ausdrücke getrennt und behandelt die ersteren im ersten, die letzteren im zweiten Bande seines Werkes. Diese Unterscheidung war nothwendig, weil Maclaurin seine geometrischen Probleme auf rein synthetischem Wege löste, also von der Darstellung der geometrischen Gebilde durch algebraische Gleichungen abstrahirte. Die beiden Hauptsätze, die Maclaurin an die Spitze der Fluxionen geometrischer Grössen setzt und die die Fluxionen geradliniger Figuren betreffen, heissen: 1. „Die Fluxion eines Parallelogramms von constanter Höhe wird immer gemessen durch ein Parallelogramm von derselben Höhe, beschrieben über der geraden Linie, die die Fluxion der Basis misst.“ — 2. „Wenn die Basis eines Dreieckes gleichförmig wächst, so wächst das Dreieck mit beständig beschleunigter Bewegung, und wenn die Basis gleichförmig abnimmt, so nimmt das Dreieck mit beständig verzögerter Bewegung ab.“ Mit Hülfe dieser Sätze, die ganz synthetisch bewiesen werden, leitet dann Maclaurin im Weiteren die Fluxionen krummliniger Figuren und aus diesen wiederum die Fluxionen von Oberflächen und Rotationskörpern ab. — Wie Maclaurin bei der Bestimmung der Fluxionen algebraischer Functionen oder rein abstracter Grössen verfährt, wollen wir an dem folgenden Beispiele zeigen.

Im ersten Capitel des zweiten Buches (Bd. II.) macht Maclaurin zunächst einige Betrachtungen über das gegenseitige Verhältniss geometrischer und algebraischer Grössen und über die Veränderungen, die algebraische Functionen bei constantem Wachsen oder Abnehmen ihrer unabhängigen Variablen erleiden. In letzterer Beziehung stellt er den Satz auf, dass, wenn den successiven Werthen $A - a, A, A + a$ einer unabhängigen Variablen A die Werthe $B - b, B, B + \beta$ einer von A auf irgend eine Weise abhängigen Function B entsprechen, dass alsdann, während A die Fluxion a annimmt, die Fluxion von B nicht grösser sein kann als β und nicht kleiner als b, wenn die successiven Differenzen b, β, etc. beständig wachsen; und nicht grösser sein kann als b oder kleiner als β, wenn jene Differenzen beständig abnehmen. Mit Hülfe dieses Satzes beweist nun Maclaurin, dass die Fluxion von A^2 gleich $2\,A\,a$ ist, wenn diejenige von A gleich a angenommen wird, in folgender Weise:

„Die successiven Werthe von A seien $A - u$, A, $A + u$ und die correspondirenden Werthe von A^2 werden sein $A^2 - 2\,A\,u + u^2$, A^2, $A^2 + 2\,A\,u + u^2$, also die successiven Differenzen $2\,A\,u - u^2$, $2\,A\,u + u^2$ etc. Weil nun diese Differenzen wachsen, so folgt aus dem vorhergehenden Satze, dass, wenn die Fluxion von A durch u ausgedrückt wird, die Fluxion von A^2 nicht grösser sein kann als $2Au + u^2$ und nicht kleiner als $2\,A\,u - u^2$. Nennen wir nun die Fluxion von A gleich a nach der Voraussetzung, und nehmen wir an, es sei die Fluxion von A^2 nicht gleich $2A\,a$, sondern in irgend einem Verhältniss, z. B. wie $2A + e$ zu $2A$, grösser, also gleich $2Aa + ea$. Vorausgesetzt nun, u sei irgend ein Increment von A kleiner als e, so folgt, weil a zu u sich verhält, wie $2Aa + ea$ zu $2Au + eu$, dass, wenn die Fluxion von A durch u ausgedrückt würde, die Fluxion von A^2 gleich $2Au + eu$ wäre, welches grösser als $2Au + u^2$ ist. Es wurde aber vorher gezeigt, dass, wenn die Fluxion von A gleich u ist, die Fluxion von A^2 nicht grösser als $2Au + u^2$ sein kann. Aus diesem Widerspruch folgt, dass die Fluxion von A^2 nicht grösser sein kann als $2Aa$, diejenige von A gleich a gesetzt. Ebenso lässt sich zeigen, dass sie nicht kleiner sein kann als $2Aa$, also ist sie gleich $2Aa$."

Maclaurin suchte, wie man sieht, in diesem Beweise das Unendlichkleine gänzlich zu vermeiden, konnte aber leider dabei andere Mängel des Beweises nicht unterdrücken. So leuchtet ein, dass, wenn man u grösser als e, anstatt kleiner annimmt, die Fluxion von A^2 ganz gut den Werth $2Au + eu$ haben könnte, welcher ja die Grenze $2Au + u^2$ noch nicht überstiegen hat, indem $e < u$ angenommen wurde. Es würde also diese Annahme bloss ergeben, dass die Fluxion von A^2 zwischen $2Au + u^2$ und $2Au - u^2$ liegen müsse; dass sie aber gerade den Werth $2Au$ habe, würde hieraus keineswegs folgen. Auch die dynamische Grundlage der Fluxionsmethode, die Maclaurin bei Betrachtung geometrischer Grössen so streng festhält, scheint hier verlassen worden zu sein; es tritt diess schon äusserlich in der Benennung der Fluxionen hervor: an Stelle des Wortes Geschwindigkeit (*velocity*) tritt jetzt das Wort Zunahme oder Abnahme *(increase or decrease)*, und das Verhältniss der Zunahme der Function zu der der unabhängigen Variabeln ist nichts anderes als Leibnitzens Differentialquotient, nur mit endlichen Incrementen. — Schliesslich habe ich noch jenes Theorem's zu erwähnen, das, unter dem Namen des Maclaurin'schen Satzes bekannt, nur als ein Specialfall des oben angeführten Taylor'schen Satzes zu betrachten ist. Im 2. Cap. des II. Buches (Bd. II.) kommt Maclaurin bei Betrachtung des Newton'schen Binomialtheorems und der unendlichen Reihen auf den Satz, dass durch successive Differentiation der Reihe

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots = f(x)$$

und durch jeweiliges Nullsetzen von x in den betreffenden Differentialquotienten für y die unendliche Reihe gefunden werde:

$$y = f(o) + x.f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \ldots$$

Aus der ansehnlichen Zahl englischer Mathematiker jener Zeit, die sich auf dem Gebiete der alten Geometrie bewegten, hebe ich hier bloss die beiden ausgezeichnetsten, am tiefsten in den Geist der apollonischen und archimedischen Methoden eingedrungenen heraus, **Edmund Halley** (1656—1742) und **Robert Simson** (1687—1768). Von jenem wissen wir aus dem 3. Cap. des ersten Theiles dieses Buches, dass er das verloren gegangene achte Buch der Kegelschnitte des Apollonios, sowie dessen Abhandlung *„de sectione spatii"* bloss nach den durch Pappos uns erhaltenen Inhaltsangaben in bewunderungswürdiger Weise wieder hergestellt hat; Letzterem verdanken wir die nicht weniger geistreichen Ausarbeitungen der verlorenen apollonischen Schriften *„de locis planis"*, *„de sectione determinata"* und der euklidischen Porismen. Auch hat Simson im Jahre 1735 ein ausgezeichnetes Werk über Kegelschnitte nach der alten Methode herausgegeben.

Während die englischen Mathematiker sich so in ihrer stolzen Abgeschlossenheit der Pflege eines nicht weniger würdigen, wenn auch nicht unmittelbar die damalige rapide Entwicklung der Wissenschaft unterstützenden, so doch die Schärfe des Gedankens und des mathematischen Genie's in schönstem Lichte entfaltenden Gebietes widmeten, waren ihre deutschen und französischen Zeitgenossen mit dem Ausbau und der Verwendung des neuen Gebäudes der Infinitesimalrechnung beschäftigt, das in Leibnitz, Jakob und Johann Bernoulli*) Varignon und De l'Hôpital seine grössten, unsterblichen Baumeister fand.

Leibnitzen's Erfindung schien anfänglich nicht recht begriffen zu werden; er stand daher auch längere Zeit mit ihr vereinzelt da. Er selbst hatte sich vorläufig damit begnügt, die Grundsätze des neuen Calcüls aufzustellen und die nächstliegenden Anwendungen desselben zu zeigen; seine Leistungsfähigkeit an höheren Problemen zu erproben, wagte er nicht; wohl möglich, dass daher Leibnitz selbst einen Zweifel an der Vollkommenheit und dem Erfolge seiner

*) Ich ergreife hier den Anlass, den Leser kurz mit der Genealogie dieses in den mathematischen Wissenschaften so hochberühmten Geschlechtes bekannt zu machen, das, wie Whewell gelegentlich bemerkt, mit Euler und Hermann der Stadt Basel das Recht gab, als Wiege des mathematischen Talentes keine ihr ebenbürtige Nebenbuhlerin anzuerkennen. Acht Bernoulli haben sich als Mathematiker während eines Jahrhunderts ausgezeichnet; ich werde sie im Folgenden der Reihe nach und zur Unterscheidung mit Zahlen bezeichnet, anführen:

1. Jakob I. (1654—1705), Professor der Mathematik in Basel, Lehrer von Johannes I. und Nikolaus I.

2. Johannes I. (1667—1748), Bruder des vorigen, Professor der Mathematik in Gröningen und Basel, Lehrer von de l'Hôpital, Euler etc.

3. Nikolaus I. (1687—1759), Neffe von 1 und 2, Professor der Mathematik in Padua, später der Rechte in Basel.

4. Nikolaus II. (1695—1726), Sohn von 2, Professor der Rechte in Bern, dann Akademiker in Petersburg.

5. Daniel (1700—1782), Sohn von 2, Akademiker in Petersburg, später Professor der Physik in Basel.

6. Johannes II. (1710—1790), Sohn von 2, Professor der Mathematik in Basel.

7. Johannes III. (1744—1807), Sohn von 6, Direktor der Sternwarte und Mitglied der Akademie in Berlin.

8. Jakob II. (1759—1789), Sohn von 6, Akademiker in Petersburg.

Die berühmtesten sind Jakob I., Johannes I. und Daniel, deren Leben ich bei Gelegenheit näher skizziren werde.

Erfindung empfand. Erst die Lösungen einiger berühmter Probleme, wie die der Isochrone, der Kettenlinie, der logarithmischen Spirale, etc. durch Jakob und Johann Bernoulli, hoben für immer diesen Zweifel und führten die Mathematiker des Continentes rasch dem neuen Gebiete zu.

In den *Acta erud. Lips.* vom Jahre 1690 (pag. 217) veröffentlichte **Jakob Bernoulli** *) die erste Abhandlung, in der er sich des neuen Calcüls bediente. Es war diess die Lösung des von Leibnitz im Jahre 1687 aufgestellten Problems der Isochrone, d. h. derjenigen Curve, in der ein fallender Körper in gleichen Zeiten gleiche Höhe durchläuft. Es ist diese Eigenschaft nicht mit derjenigen der Cykloide zu verwechseln, in welcher ein fallender Körper gleich viel Zeit braucht, auf dem tiefsten Punkte derselben anzulangen, wo er auch seine Bewegung beginnen mag, und die desshalb

---

*) Jakob Bernoulli wurde am 27. Dec. 1654 dem Basler Rathsherrn Nikolaus Bernoulli geboren. Er war von seinen Eltern zum Studium der Theologie bestimmt, studirte dieselbe auch wirklich in Basel und bestand 1676 die Prüfung. Nebenbei aber verliess ihn seine schon früh gepflegte Neigung zur Mathematik niemals; er widmete sich im Geheimen fleissig dieser Wissenschaft. Von grösseren Reisen, die er durch die Schweiz, nach Holland, England und Frankreich unternahm, in seine Vaterstadt zurückgekehrt, begann er sich als Privatmann einlässlicher dem Gebiete der Mathematik zuzuwenden. Bei Anlass des Erscheinens des grossen Cometen von 1680 erschien seine Schrift: *Conamen novi systematis cometarum etc.* und bald nachher eine andere: *de gravitate aetheris*, die freilich weniger zu seinem grossen Ruhme beigetragen haben. Im Jahre 1687 wurde er zum Professor der Mathematik in Basel ernannt und jetzt begann seine Gelehrtenlaufbahn. Wir werden im Texte seine hauptsächlichsten Leistungen näher betrachten. Es entspann sich ein eigentlicher Wettkampf zwischen ihm und seinem etwas zu leidenschaftlichen, nicht weniger grossen Bruder Johannes. Seine zahlreichen Abhandlungen in den *Acta erud. Lips.* und im „Journal des Savans“ wurden in Genf im Jahre 1744 in zwei Bänden herausgegeben unter dem Titel: *Opera Jacobi Bernoullii.* Er wurde am 16. August 1705 im Alter von 51 Jahren der Wissenschaft zu früh vom Schicksal entrissen.

ebenfalls den Namen Isochrone, besser aber Tautochrone erhalten hat. Die letztere Eigenschaft der Cykloide fand, wie wir aus dem II. Capitel wissen, Christian Huyghens schon um 1670; die Lösung des von Leibnitz aufgestellten Problems verdanken wir ebenfalls dem niederländischen Mathematiker, sowie Leibnitz selbst, welcher beide Lösungen in den *Act. erud.* 1689 veröffentlichte. Beide Mathematiker (und es mag diess bei Leibnitz auffallen) lösten das Problem auf synthetischem Wege; Jakob Bernoulli nun fand kaum ein Jahr später die gesuchte Curve mit Hülfe der Differentialrechnung. Dieselbe ist die semicubische oder Neil'sche Parabel. Ich gebe im Folgenden die Bernoullische Lösung als die erste so bedeutende und erfolgreiche Anwendung der Differentialrechnung (*Opera J. Bern. T. I. pg. 421*):

Aufgabe: Es sei die Curve zu bestimmen, die von einem schweren Körper so durchlaufen wird, dass er in gleichen Zeiten um gleiche Höhen fällt.

Lösung: Es falle der Körper von A aus (Fig. XIV) in der gesuchten Curve B F G. Man nehme zwei verschiedene unendlich kleine Curvenelemente H F und G D an, deren Höhen G J und H L gleich gross sind. Dann ziehe man in H und G die Tangenten H N und G M, ferner G P || H N. Es sind nun die Geschwindigkeiten, die der Körper in H und G hat, dieselben, die er erlangen würde, wenn er senkrecht nach den Linien E H und C G hinunterfallen würde, und diese Linien selbst verhalten sich wie die Quadrate dieser Geschwindigkeiten nach dem Gesetz des freien Falles. — Es verhält sich also G C : H E wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers in G zu demjenigen in H, d. h. wie $GD^2 : HF^2$. Denn die Längen dieser unendlich kleinen Curvenelemente sind den Geschwindigkeiten proportional. Es verhält sich nun aber:

$$GM^2 : GC^2 = GD^2 : GJ^2$$
$$GP^2 : GC^2 = HF^2 : HL^2.$$

Hieraus folgt, da $GJ^2 = HL^2$ und $GC^2 = GC^2$

$$GM^2 : GP^2 = GD^2 : HF^2.$$

Also haben wir:

$$GC : HE = GM^2 : GP^2.$$

Das Problem reducirt sich also auf folgende geometrische Aufgabe: Es sei die Gerade A C und der Punkt A der Lage nach gegeben. Man soll eine solche Curve B F G finden, dass die Ordinaten G C und E H sich verhalten wie die Quadrate der Tangente im Punkte G und der Parallelen zur zweiten Tangente im Punkte H. Es ist klar, dass die Gerade A C nicht die Axe der Curve sein kann, noch A der Scheitel; sonst würde, wenn der Punkt H im Scheitel angenommen würde, das Verhältniss der Ordinaten unendlich gross werden, dasjenige der Geraden G M und G P aber endlich bleiben.

Es sei nun $GC = a$, $GM = b$, $AE = x$ und $HE = y$, so haben wir folgende Beziehungen: Es verhält sich:

$$HL : HF = GC : GP$$

$$\text{Oder: } dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} = a : \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

$$\text{Ferner: } GC : EH = GM^2 : GP^2$$

$$\text{Oder: } a : y = b^2 : \frac{a^2 (dx^2 + dy^2)}{dy^2}$$

Hieraus erhält man:

$$a : y = b^2 dy^2 : a^2 dx^2 + a^2 dy^2$$

$$b^2 y dy^2 = a^3 dx^2 + a^3 dy^2$$

$$(b^2 y - a^3) dy^2 = a^3 dx^2$$

$$dy \sqrt{b^2 y - a^3} = dx \sqrt{a^3}.$$

Diese Differentialgleichung integrirt, gibt:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{b^2 y - a^3}{b^2} \cdot \sqrt{b^2 y - a^3} = x \sqrt{a^3}$$

oder für $\dfrac{b^2 y - a^3}{b^2} = z$ gesetzt:

$$\frac{2}{3} z \sqrt{b^2 z} = x \sqrt{a^3} \text{ oder:}$$

$$z^3 = \frac{9\,a^3}{4\,b^2} . x^2$$

welche Gleichung man sogleich als die der semicubischen Parabel erkennt.

Zur nämlichen Zeit legte Jakob Bernoulli den Mathematikern ein anderes Problem vor, nämlich die Curve zu bestimmen, in der sich ein zwischen zwei Punkten frei aufgehängter, vollkommen biegsamer Faden einstellt. (Problem der Kettenlinie, *Problema funicularium vel catenarium).* Dasselbe wurde in kurzer Zeit von Leibnitz, Huyghens und **Joh. Bernoulli** *) gelöst und die drei Lösungen miteinander in den *Act. erud.* 1691 (pg. 273—282) veröffentlicht. Huyghens entwickelte auch hierin wieder seine ausserordentliche Gewandtheit und Eleganz in Handhabung der alten Geometrie. Die Gleichung der gewöhnlichen Kettenlinie (homogenes Seil) fand indess keiner der drei Mathematiker;

---

*) Johannes Bernoulli, der Bruder von Jakob, wurde am 27. Juli 1667 zu Basel geboren. Auch er zeigte wenig Lust zu dem Fache, zu dem ihn sein Vater bestimmt hatte, zur Handlung, und ging seinen eigenen Weg. Durch seinen Bruder angeregt und unterrichtet, widmete er sich mit Eifer der Mathematik. Schon in seinem achtzehnten Jahre erwarb er sich den Doktortitel in der Philosophie und schwang sich von da nun in raschem Fluge zum höchsten Ruhme empor. Ungefähr zu gleicher Zeit mit seinem Bruder wurde er mit der Leibnitzischen Differentialrechnung bekannt, und nun begann der grosse geistige Wettkampf der beiden Brüder, der der Wissenschaft so glänzende Dienste leisten, ihr gegenseitiges Verhältniss leider aber nur stören sollte. Im Jahre 1695 wurde er zum Professer der Mathematik an die Universität Gröningen berufen, folgte dann 1705 seinem Bruder in derselben Stelle an der Universität Basel, an der er bis zu seinem Tode wirkte, der am 1. Januar 1748 erfolgte. Er war der Lehrer von drei ihm ebenbürtigen Männern, von de l'Hôpital, Euler und Daniel Bernoulli, seinem Sohne, und war Mitglied der Petersburger, Berliner, Pariser und Londoner Akademien und wissenschaftlichen Institute. Seine zahlreichen Schriften wurden von Cramer gesammelt und in Genf 1742 in 4 grossen Bänden herausgegeben. Ebendaselbst erschien 1745 seine Correspondenz mit Leibnitz in 2 Bd.

Joh. Bernoulli stiess auf die richtige Differentialgleichung

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

konnte sie aber nicht integriren, wesshalb er die Curve unter die mechanischen oder transcendenten setzte *(quae quoniam nequit integrari, indicio est curvam inter mechanicas referendam esse)*. In einigen Specialfällen, z. B. wenn die Schwere des Seiles mit der Abscisse wächst, fand Johannes Bernoulli die Form der Curve eine parabolische oder hyperbolische. — Wie das mathematische Genie diesen Männern in solchen Fällen zu Hülfe kam, wo die Unzulänglichkeit der analytischen Hülfsmittel ihrem Erfolge hemmend in den Weg trat, zeigt sich in schönster Weise an dem obigen Beispiele der gewöhnlichen Kettenlinie. Ihre Gleichung konnte Joh. Bernoulli nicht finden, aber es gelang ihm dennoch auf mehrere sehr geistreiche Arten, die Construction der Curve auf Quadraturen und Rectificationen algebraischer Curven zurückzuführen. Wir finden die hierauf bezüglichen Abhandlungen in der XII. und XIII. Lectio über Integralrechnung*), die Joh. Bernoulli in den Jahren 1691 und 1692 für den Marquis de l'Hôpital niederschrieb. Hier construirt der berühmte Mathematiker die Kettenlinie sowohl mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel, als auch der Parabel; Leibnitz dagegen nimmt für seine Construction die logarithmische Linie zu Hülfe; wie bekannt, ist die Ordinate der Kettenlinie das arithmetische Mittel zwischen den Ordinaten zweier logarithmischer Linien. Bernoulli's Construction mittelst der gleichseitigen Hyperbel ist folgende:

Die Differentialgleichung der Kettenlinie ist:

$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$; dieselbe, mit a multiplicirt, gibt:

$$a\,dy = \frac{a^2\,dx.}{\sqrt{2ax + x^2}}\,.$$

*) *Joh. Bernoullii opera omn. T. III. pg. 426 etc.*

Es sei nun in Fig. XV $AB = a$, und es werde aus dem Scheitel B und dem Centrum A die gleichseitige Hyperbel BC construirt. Ferner beschreibe man nun die Curve DJ dermaassen, dass BA die mittlere Proportionale zwischen KD und KC sei; d. h. $KD = \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$, denn $\sqrt{2ax + x^2}$ ist die Ordinate der gleichseitigen Hyperbel, wenn das Coordinatensystem so verändert wird, dass x in $x + a$ übergeht, was nothwendig ist, um den Coordinatenanfangspunkt der Kettenlinie mit dem der Hyperbel zu indentificiren. Man ziehe nun AF || der Axe GB und mache das Rechteck AFGB gleich der Fläche HBKDJ. Der Punkt E, wo sich die Verlängerungen von FG und KD schneiden, ist ein Punktder Kettenlinie. Denn es ist das Differential der Fläche $AFBG = a\,dy$, dasjenige der Fläche $HBKDJ = KD.\ dx = \frac{a^2\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Nach der Differentialgleichung der Kettenlinie müssen diese beiden Ausdrücke einander gleich sein, also auch ihre Integrale, welche Forderung in der Gleichsetzung der beiden Flächen erfüllt worden ist. — Es ist selbstverständlich, dass diese Construction rein theoretischer Natur und von keiner praktischen Bedeutung ist; denn mit seinen analytischen Hülfsmitteln konnte Bernoulli die Quadratur der Curve DJ ebensowenig bestimmen, wie die Gleichung der Kettenlinie finden; allein sein Zweck ist erreicht, die Construction der transcendenten Kettenlinie ist auf die Quadratur einer algebraischen Curve zurückgeführt.

In zwei im Januar und Juni des Jahres 1691 in den Act. erud. veröffentlichten Abhandlungen versucht Jakob Bernoulli durch Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Discussion einiger interessanten Curven, wie der helicoidischen Parabel, der logarithmischen Spirale und der loxodromischen Linie, die Mathematiker etwas näher mit dem neuen Calcül vertraut zu machen, indem er selbst zugesteht, dass aus der von Leibnitz im Jahre 1684 veröffentlichten kurzen Auseinandersetzung seiner Erfindung die Wenigsten einen Begriff von ihrem Werthe und ihrer Tragweite erhalten konnten. — Interessant ist der Weg, den Bernoulli in der analytischen Discussion der Spiralen einschlägt. So bezieht er die helicoidische Parabel, oder wie sie heutzutage genannt wird, die parabolische Spirale, weder auf rechtwinklige noch auf Polarcoordinaten, sondern betrachtet dieselbe als eine degenerirte Parabel, d. h. als eine solche, bei der die geradlinige Axe in einen Kreis verwandelt ist. Dann ist also der Kreis Abscissenaxe und die Radien desselben sind die Ordinaten. In diesem Falle ist die Gleichung der parabolischen Spirale selbstverständlich keine andere als die der gewöhnlichen Parabel. Es hat diese Auffassung allerdings Analogie mit der der Polarcoordinaten, nur tritt eben der cyklometrische Charakter der Coordinaten in den Hintergrund. — Auf dieselbe Weise behandelt Jakob Bernoulli die von ihm mit grosser Vorliebe discutirte logarithmische Spirale, deren Eigenschaft, dass ihre Evolute wiederum eine logarithmische Spirale ist, vielleicht den Scholastikern des Mittelalters reichlichen Stoff zu mathematisch-philosophisch-religiösen Speculationen gegeben hätte, ihn aber nur auf ein sinniges Motto führte, das er auf seinen Grabstein setzen liess: „*Eadem mutata resurgo*“. — Die loxodromische Linie ist nichts Anderes als die logarithmische Spirale auf der Kugel. Dieselbe würde von einem Schiffe beschrieben, das immer nach der gleichen Windrichtung segeln würde; denn bekanntlich hat die logarithmische Spirale die Eigenschaft, dass sie alle vom Centrum ausgehenden Radien (auf der Kugel die Meridiane) unter gleichem Winkel schneidet.

Im Spätjahr 1691 begab sich Johannes Bernoulli nach Paris und kam daselbst mit den ausgezeichnetsten Männern jener Zeit in Berührung, so vor Allem mit dem Marquis **de l'Hôpital***), dessen Talent für die Mathematik sich

*) Der Marquis de l'Hôpital wurde geboren zu Paris im Jahre 1661 und starb daselbst 1704. Er widmete sich seit der frü-

durch Bernoulli's Anleitung bald zur schönsten Blüthe entfalten sollte. Bernoulli schrieb für ihn 59 *Lectiones mathematicae de methodo integralium***), nachdem er ihn zuerst mit der Differentialrechnung bekannt gemacht hatte, die beinahe noch gar nicht nach Frankreich gedrungen war, ja auf dem Continente überhaupt nur Leibnitz und den beiden Bernoulli geläufig war. Diese Lectiones sind eine reiche Fundgrube der schönsten Anwendungen der Integralrechnung; sie enthalten überhaupt das ganze System des neuen Calcüls, hier zum ersten Mal auseinandergesetzt, und man darf daher mit Recht Joh. Bernoulli den eigentlichen Begründer der Integralrechnung nennen, denn Leibnitz hat in seinen in den *Act erud.* veröffentlichten Abhandlungen nicht viel mehr als blosse Andeutungen auf die inverse Operation seiner Differentialrechnung gemacht. Die Zahl der integrirbaren Differentialausdrücke ist freilich auch hier noch eine sehr kleine, sie beschränkt sich ausschliesslich auf diejenigen, deren Integrale algebraische Functionen sind. Die meisten Integrale leitete Joh. Bernoulli aus der Formel:

$$d\,\frac{a.\,x^{p-1}}{p+1} = a.\,x^p.\,dx$$

ab. In dem Falle $p = -1$ aber ist dieselbe nicht anwendbar, und Bernoulli irrte sich daher, wenn er

$$\int\frac{dx}{x} = \infty \text{ setzte.}$$

Der Werth dieser Lectiones liegt in den zahlreichen ausgezeichneten Abhandlungen über Quadraturen, Rectificationen etc., in der Lösung der damals interessantesten

---

hesten Jugend mit Vorliebe der Mathematik, zeichnete sich bald durch scharfsinnige Lösung einiger schwieriger Probleme aus und wurde schon im Jahre 1690 Mitglied der Pariser Akademie. Sein Name darf denjenigen von Leibnitz, Bernoulli und Euler mit Recht an die Seite gesetzt werden. Seine Analyse *des infiniment petits* (1696) ist eines der ausgezeichnetsten Werke über Infinitesimalrechnung.

**) *Joh. Bernoullii opera omnia T. III.*

und schwierigsten Probleme, wie der Kettenlinie, der Isochrone, der Evoluten, der Brennlinien (*curva caustica* d. h. der Ort der gegenseitigen Durchschnittspunkte zurückgeworfener Lichtstrahlen), der Epicykloiden, etc. Auf Einzelnheiten einzugehen ist mir hier nicht möglich; ich werde gelegentlich auf das eine oder andere dieser Probleme zurückkommen. Von den caustischen Curven muss ich bemerken, dass dieselben schon von Barrow in seinen *Lectiones opticae* und noch ausführlicher von Walter von Tschirnhausen (1651—1708) behandelt worden sind. Der letztere fand, dass beim Kreise diese Curve eine Aehnlichkeit mit der Cykloide habe, indem ihre Evolute wieder eine gleichartige Curve sei; aber erst de la Hire erkannte in dieser Brennlinie des Kreises die Epicykloide. Jakob und Johann Bernoulli dehnten dann diese Theorien weiter aus; der erstere entdeckte die merkwürdige Eigenschaft der logarithmischen Spirale, dass ihre Brennlinie, wenn der leuchtende Punkt im Centrum sich befindet, gleichwie ihre Evolute, wiederum eine logarithmische Spirale ist. Dieses auffallende sich immer wieder Erzeugen dieser Curve veranlasste Jakob Bernoulli, ihr den Beinamen „*mirabilis*", die wunderbare, zu geben (siehe S. 123) — Auch die velarische Curve, d. h. diejenige, in welcher ein vom Wind geblähtes Segel (*velum*) sich einstellt, wurde von den beiden Bernoulli bestimmt. Sie fanden dieselbe je nach der Richtung des Windes einen Kreisbogen oder eine Kettenlinie. — Ferner untersuchten sie die Curve, die ein Lichtstrahl in Folge seiner Brechung durch die Atmosphäre beschreibt. Dieselbe hängt natürlich von der Dichtigkeitsänderung der atmosphärischen Luft ab. Ist die Curve dieser Aenderung eine Parabel, so beschreibt der Lichtstrahl ebenfalls eine Parabel; ist jene Curve hingegen eine Gerade, d. h. wächst die Dichtigkeit in arithmetischem Verhältniss, so ist die Curve des Lichtstrahls eine mechanische. — Es ist natürlich diess ein rein theoretischer Versuch, denn in Wirklichkeit ist diese Curve durch verschiedene Faktoren beeinflusst, wie Temperatur der Luft, Barometerstand, Sonnenhöhe, etc., so dass dieselbe nur durch eine empirische Formel repräsentirt werden kann. — Das von de l'Hôpital zuerst gelöste Problem der Gleichgewichtscurve wurde von den beiden Bernoulli ebenfalls mehr generalisirt und weiter ausgedehnt. Soll nämlich bei einer Aufzugbrücke das an der Aufzugskette angebrachte Gegengewicht die Brücke in jeder Lage im Gleichgewicht halten, so muss es sich in einer gewissen Curve einstellen, der sog. Gleichgewichtscurve und diese ist eine Epicykloide. Auch die elastische Linie wurde von den beiden Mathematikern discutirt, ihre Gleichung aber nur in ganz speciellen Fällen gefunden. — Alle Lösungen dieser Probleme aber zeugen von ausserordentlichem mathematischem Genie, und von einer Gewandtheit in Handhabung der Infinitesimalrechnung, die bei der Neuheit und Unvollkommenheit dieses Calcüls zu damaliger Zeit auch den gewiegten Mathematiker zur Bewunderung hinreissen muss.

Das grösste Interesse aber bieten Joh. Bernoulli's *Lectiones mathematicae* in demjenigen Abschnitte, der über die Integration der Differentialgleichungen handelt. Dieses schwierige, heute noch so unvollständige Gebiet zeigte damals noch grosse Lücken. Wir haben im Anfange dieses Capitels gesehen, wie Newton seine umgekehrte Fluxionsmethode auf die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung anwandte und insofern reüssirte, als er den Werth der Funktion y in einer unendlichen Reihe angeben konnte. Es verdient dieser Abschnitt aus Newton's Fluxionsrechnung unser gerechtes Erstaunen, zumal ihm seine Methode selbst in der Integration der einfachen Differentialausdrücke von der Form F (x) dx nur geringe Dienste leistete. Leibnitz wagte sich gar nicht auf dieses Feld, und so theilt denn Joh. Bernoulli mit Newton den Ruhm, zuerst den Weg zu weitführenden Untersuchungen nach dieser Richtung hin geebnet zu haben. Bernoulli kannte im

Jahre 1692, als er seine Lectiones schrieb, allerdings auch noch keine allgemeinen Regeln für die Lösung der Differentialgleichungen erster Ordnung, sondern bediente sich in jedem speciellen Falle geeigneter Kunstgriffe. Die Integration der Differentialgleichungen nannte er die inverse Tangentenmethode zum Unterschied von der einfachen Integralrechnung, die sich nur mit Ausdrücken befasst, in denen die Variablen mit ihren Differentialen getrennt vorkommen. Zuerst gibt er verschiedene Differentialformeln an, mit deren Hülfe einige einfache Gleichungen integrirt werden können; z. B.:

$$d.\,\frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$d.\,\frac{y^2}{x} = \frac{2\,x\,y\,dy - y^2\,dx}{x^2}$$

$$d.\,\frac{y^3}{x} = \frac{3\,x\,y^2\,dy - y^3\,dx}{x^2} \text{ u. s. w.}$$

Die Differentialgleichung $y\,dx = 2\,x\,dy$ z. B., welche auf die Parabel führt und welche wir heutzutage nach Umwandlung in:

$$\frac{dx}{x} = 2\,\frac{dy}{y}$$

ohne Weiters integriren können, löste Bernoulli mit Hülfe der zweiten Formel, weil er, wie wir früher bemerkt haben, das Integral von $\frac{dx}{x} = \log x$ nicht kannte. Er brachte die Gleichung in die Form $2\,x\,dy - y\,dx = 0$, multiplicirte dieselbe mit $\frac{y}{x^2}$, was ihm das vollständige Differential $\frac{2\,x\,y\,dy - y^2\,dx}{x^2}$ ergab, dessen Integral $\frac{y^2}{x}$ gleich einer Constanten b gesetzt, die Gleichung der Parabel ist. Bei Differentialgleichungen, die auf Parabeln höheren Grades führen, gaben die Formeln 3 und 4 etc. die Lösung. — In den folgenden Lectiones geht B e r n o u l l i dann zu schwierigeren Problemen über, mit denen er meistens durch Substitutionen neuer Variabeln zum Ziele gelangt. Ich gebe im Folgenden ein Beispiel dieser Art, das im vollsten Maasse im Stande ist, den scharfen, erfinderischen Geist des grossen Mathematikers zu zeigen.

Es wird die Curve gesucht, deren Subtangente $= \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay}$, d. h. es wird die Integration der Differentialgleichung

$$y . \frac{dx}{dy} = \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay}$$

verlangt.

Aus obiger Gleichung folgt:

$3x^3 dy - 2axy dy = 3x^2 y dx - ay^2 dx.$

Man setze nun $y = mx$, also $dy = m dx + x dm$, und substituire diese Werthe in obige Formel, so erhält man:

$$3x^2 dm - 2ax m dm = a m^2 dx.$$

Man sieht, dass diese Substitution zum Zwecke der Herabsetzung der Dimensionen der Faktoren von dy und dx vorgenommen wurde; die neue Gleichung enthält nur noch solche vom zweiten Grade. Nun setzt man $x = mn$; also $dx = m dn + n dm$; diese Werthe in die vorhergehende Gleichung eingesetzt, gibt:

$$3n^2 dm - 3an dm = am dn.$$

Die Dimensionen der Faktoren von dm und dn sind hier vom zweiten und ersten Grade. Jetzt nehme man $n = \frac{a^2}{r}$, $dn = -\frac{a^2}{r^2} dr$, dann ergibt die Substitution in die letztere Gleichung die neue:

$$3a dm - 3r dm = -m dr,$$

welche nur noch Variable im ersten Grade enthält. Endlich setzt man $r - a = t$, und $dr = dt$, so folgt aus voriger Gleichung die folgende:

$$3t dm = m dt \text{ oder}$$

$$3t dm - m dt = 0,$$

welche durch Multiplikation mit $\frac{m^2}{t^2}$ das vollständige Differential:

$$\frac{3\,t\,m^2\,dm - m^3\,dt}{t^2} = 0 \text{ ergibt,}$$

dessen Integral $\frac{m^3}{t} = b$ die Gleichung der gesuchten Curve liefert. Geht man nun wieder rückwärts, für t und m ihre Werthe substituirend, so findet man zuletzt die folgende Gleichung der Curve durch x und y ausgedrückt:

$$y^3 + b\,a\,x^3 = a^2\,b\,y\,x$$

und setzt man hierin die willkürliche Constante $b = \frac{1}{a}$, so resultirt schliesslich die Gleichung:

$$y^3 + x^3 = a\,y\,x.$$

Es gelang damals schon Bernoulli in sehr vielen Fällen, die Variabeln zu trennen, allein der noch sehr primitive Stand der Integralrechnung erlaubte ihm gewöhnlich nicht, die Lösung zum Ziele zu führen. Unter solchen Verhältnissen behalf er sich dann, wie wir oben gesehen haben, eines rein theoretischen Hülfsmittels, er suchte die Construction der zu findenden Curve auf die Quadratur oder Rectification einer bekannten, algebraischen Curve zurückzuführen.

Die Lösung der Differentialgleichung $a\,dy = y\,X\,dx + b\,y^n X'\,dx$ (wo X und X' Funktionen von x allein sind), die im Jahre 1695 in den *Act. erud.* den Mathematikern von Jakob Bernoulli vorgelegt wurde, zeigt in der Theorie der Differentialgleichungen einen wesentlichen Fortschritt. Dieselbe wurde von Leibnitz und Jakob Bernoulli schon 1696 auf eine leichtere Form zurückgeführt, von letzterem auch auf geometrischem Wege mit Hülfe der logarithmischen Linie gelöst. Er zeigte, dass die Gleichung nichts Anderes als das verallgemeinerte De Beaune'sche Problem darstelle, welches dieser Mathematiker einst Descartes vorgelegt hatte, nämlich die Curve zu bestimmen, deren Subtangente zur Ordinate sich verhält, wie eine constante Linie zur Summe oder Differenz der Ordinate der gesuchten Curve und derjenigen einer geraden Linie, die um einen halben rechten Winkel gegen die Axe der x geneigt ist. — Die Differentialgleichung dieser Curve ist also $a\,dy - y\,dx \pm x\,dx = 0$. Nimmt man aber anstatt jener geraden Linie irgend eine Curve als gegeben an, so verwandelt sich die Gleichung in die folgende:

$$a\,dy - y\,dx \pm X\,dx = 0\,,$$

wo X eine Funktion von x, d. h. die Gleichung der gegebenen Curve ist. Diese Gleichung ist, wie man sofort sieht, nur ein spezieller Fall der Bernoulli'schen. Im Jahre 1697 veröffentlichte Joh. Bernoulli seine Lösung in den *Act. erud.* Dieselbe übertrifft die vorhin genannten an Vollständigkeit und Eleganz. In der Differentialgleichung: $a\,dy = y\,X\,dx + b\,y^n\,X'\,dx$ setze man $y = m\,z$, also $dy = m\,dz + z\,dm$, so verwandelt sich dieselbe in:

$$a\,m\,dz + a\,z\,dm = m\,z\,X\,dx + b\,m^n\,z^n\,X'\,dx.$$

Nun setze man $a\,m\,dz = m\,z\,X\,dx$, woraus $a\,\frac{dz}{z} = X dx$, und diess integrirt, ergibt $z = f(x) = \xi$. Weil $a\,m\,dz = m\,z\,X\,dx$, so reducirt sich obige Gleichung auf:

$$a\,z\,dm = b\,m^n\,z^n\,X'\,dx.$$

Hierin für z seinen Werth ξ gesetzt, ergibt:

$$a\,\xi\,dm = b\,m^n\,\xi^n\,X'\,dx \qquad \text{oder:}$$

$$a\,m^{-n}\,dm = b\,\xi^{n-1}\,X'\,dx \text{ und hieraus}$$

durch Integration: $\frac{a}{1-n}\,m^{1-n} = b\int \xi^{n-1}\,X'\,dx.$

Hieraus findet man m und aus diesem durch Multiplikation mit $z = \xi$ die Gleichung für y als Function von x. — Diese Differentialgleichung wird heutzutage noch die Bernoulli'sche genannt und auch auf diesem Wege gelöst.

Bevor ich in der Entwicklungsgeschichte der Differentialgleichungen weiter gehe, muss ich mich zunächst zu der

Betrachtung der Fortschritte wenden, die um diese Zeit die einfache Integralrechnung machte.

Wie wir wissen, kannten die Mathematiker bis zum Jahre 1697 den Werth des Integrals $\int \frac{dx}{x}$ nicht, was uns um so unerklärlicher erscheinen muss, als schon geraume Zeit vorher die Eigenschaften der logarithmischen Linie analytisch und geometrisch erschöpfend discutirt waren. Es ist diess nur ein Beispiel, welch' grosse Schwierigkeiten die transcendenten Functionen den Mathematikern in der ersten Entwicklungsperiode der Infinitesimalrechnung bereiteten, oder besser gesagt, welche Scheu sie vor dieser ihnen unübersteigbar scheinenden Kluft fühlten, so dass sogar das Gebiet der Differentialgleichungen in relativer Hinsicht rapiderer Fortschritte sich zu erfreuen hatte als das der Integration von Functionen mit nur einer Variable.

Im März 1697 veröffentlichte nun Joh. Bernoulli in den *Act. erud.* eine Abhandlung über die Principien des Exponentialcalcüls *(calculum exponentialium seu percurrentium)*. Leibnitz hatte schon vorher auf Functionen von der Form y^x, d. h. auf Potenzen mit variabeln Exponenten hingewiesen und einige Sätze über diesen Gegenstand aufgestellt (der Name Exponentialcalcül rührt auch von ihm her, wogegen Bernoulli ihn *calculum percurrentium* nannte). — In dieser Abhandlung gibt nun Joh. Bernoulli zuerst die Herleitung des Integrals $\int \frac{dx}{x}$, deren Leichtigkeit bei Kenntniss der Eigenschaften der logarithmischen Linie zu bemerkenswerth ist, als dass ich die Anführung derselben hier unterlassen könnte.

Es sei in Fig. XVI. AB eine logarithmische Linie. AD stelle die Subtangente derselben dar; wir setzen sie der Einfachheit wegen $= 1$. Ferner ist $BC = y$, $Bn = dy$, $DC = x$, $cC = dx$. Nun ist nach den Eigenschaften der logarithmischen Linie Subtg. $Bn = BC \cdot Cc$; denn die Werthe eingesetzt, ergibt die Gleichheit:

$$y \frac{dx}{dy} \cdot dy = y\,dx.$$

Aus jener Gleichung folgt aber die Proportion:

$$Bn : BC = Cc : \text{Subtg.}$$

oder weil die Subtg. $= 1$ gesetzt wurde:

$$\frac{Bn}{BC} = Cc.$$

Es ist nun aber in der logarithmischen Linie die Abscisse gleich dem Logarithmus der Ordinate; in unserm Falle also $DC = x = \log y$ und mithin $Cc = dy = d \log y$. Setzt man nun diesen Werth in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\frac{dy}{y} = d \log y.$$

Auf beiden Seiten integrirt, muss wiederum Gleichheit ergeben und es ist also:

$$\int \frac{dy}{y} = \log y \qquad \text{q. e. d.}$$

Hierauf gründet nun Joh. Bernoulli seinen Exponentialcalcül. Er leitet zuförderst das Differential von y^x ab, indem er $y^x = t$ setzt. Hieraus folgt, indem man die Logarithmen nimmt: $x \log y = \log t$ und dieses differentiirt, ergibt: $\log y \,.\, dx + x\, d \log y = d \log t$, oder

$$\log y \,.\, dx + x \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} = \frac{dt}{y^x};$$

woraus

$$dt = dy^x = y^x \log y \,.\, dx + x \,.\, y^{x-1} dy.$$

So differentiirt er dann weiter die Exponentialgrössen höheren Grades, z^{y^x} u. s. w. Zuletzt konstruirt und discutirt er mit Hülfe der logarithmischen Linie die Curve $x^x = y$, und betrachtet noch einige andere Gleichungen dieser Art, worauf ich nicht weiter eintreten kann.

Die Integration rationaler gebrochener Functionen verdankt ihre erste Ausbildung Leibnitz und Joh. Bernoulli. Beide veröffentlichten ihre hierauf bezüglichen Abhandlungen im Jahre 1702, der erstere in den *Act. erud.*, der letztere in den *Mém. de l'acad. des sciences.* Ihre Methode ist ein und dieselbe, nämlich die noch heute angewandte Zerlegung in Partialbrüche. Leibnitz lässt auch den Fall nicht unberücksichtigt, bei dem die Funktion im Nenner imaginaire Wurzeln hat; er zieht zwei solche Partialbrüche in einen zusammen mit dem Nenner $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = x^2 + a^2$.

Allein den Werth des Integrals $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$, das auf einen *arc. tang.* führt, konnte damals weder Leibnitz noch Bernoulli genau angeben; immerhin aber vermutheten sie richtig, indem sie dasselbe mit der Quadratur des Kreises in Beziehung brachten. — Es ist hier der Ort, der Verdienste des englischen Mathematikers **Roger Cotes**, des Freundes von Newton, um die Integralrechnung zu gedenken. Die Ohnmacht der Mathematiker bei Ermittlung des Werthes solcher Integrale, die auf Kreisbogen oder Logarithmen führen, lenkte Cotes' Aufmerksamkeit tiefer auf diesen Gegenstand hin. Er fand zuerst, dass die Quadratur der Ellipse (Kreis) und der Hyperbel, auf welche gewöhnlich jene Integrale als zurückführbar angesehen wurden, beziehungsweise gleichbedeutend sei mit der Bestimmung eines Kreisbogens oder eines Logarithmen. Es ist diess aus den Eigenschaften der Ellipse und der Hyperbel sehr leicht nachzuweisen. Diese Bemerkung führte ihn dann auf die eigentliche Bestimmung des Werthes solcher Integrale. Er veröffentlichte seine Resultate zuerst in einer Abhandlung in den *Philosoph. Transactions*, 1714, und nachher in einem Werke, betitelt *Harmonia mensurarum,* 1722, das einen ausgezeichneten Fortschritt auf dem Gebiete der Integralrechnung bewirkte. Man findet darin eine Menge bis dahin als unlösbar oder wenigstens in vollständiger Form unangebbar betrachteter Integrale gelöst. So z. B. fand Cotes den Werth des Integrales, das die Rectification der Parabel gibt; also:

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+4x}{x}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+4x} + \frac{a}{4}\lg\left(\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{a}}\right).$$

Die Ausführung und die Beweise der von Cotes gebrauchten Methoden fehlen in dem Werke (Cotes starb schon 1716 und sein Freund Smith vervollständigte das noch unvollendete Werk und gab es 1722 heraus). Dieselben verdanken ihre weitere Ausbildung dem ausgezeichneten französischen, in England lebenden Mathematiker **Abraham de Moivre** (1667—1754). Sein 1730 erschienenes Werk *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* enthält sehr gelehrte und wichtige Untersuchungen über diesen Gegenstand, sowie über verschiedene andere Gebiete der Analysis, besonders der unendlichen Reihen und der rationalen gebrochenen Funktionen. Wir werder später noch Gelegenheit haben, auf diesen Mathematiker zurückzukommen.

Ich habe hier noch zu erwähnen, dass Joh. Bernoulli lange vor dieser Zeit, schon 1694, die nach ihm benannte Reihe gefunden hatte, mit deren Hülfe er jedes Integral von der Form $\int F(x)\,dx$, also jede Quadratur oder Rectification entwickeln konnte. Aus der Reihe:

$$n\,dx = n\,dx + x\,dn - x\,dn - \frac{x^2 d^2 n}{1.2.dx} + \frac{x^2 d^2 n}{1.2.dx} + \frac{x^3 d^3 n}{1.2.3.dx^2} - \text{etc.}$$

in der $n = f(x)$ ist und wo je zwei Glieder einander aufheben, ergibt sich durch Integration je zweier Glieder mit gleichen Zeichen die folgende:

$$\int n\,dx = nx - \frac{x^2.dn}{1.2.dx} + \frac{x^3 d^2 n}{1.2.3.dx^2} - \text{ in inf.}$$

Auch Leibnitz hatte in den *Act. erud.* schon 1693 eine Reihe angegeben, vermittelst welcher, jedoch auf einem etwas beschwerlicheren Wege, jedes Integral in dieser Form gefunden werden konnte.

Unter den verschiedenen Problemen rein analytischer und mechanisch-geometrischer Natur, die sich die mathematischen Coryphäen des Continentes gegen das Ende des 17. und Anfangs des 18. Jahrhunderts wechselseitig vorlegten, sind keine von grösserer Schwierigkeit und Tragweite gewesen, als die berühmten Probleme der Brachystochrone und der Isoperimetrie. In ihnen haben wir nämlich die ersten Keime eines neuen, umfangreichen und wichtigen Gebietes der Infinitesimalrechnung zu betrachten, des Variationencalcüls, d. h. derjenigen Rechnungsart, in der die Theorie der Maxima und Minima nicht mehr auf blosse Functionen einer oder mehrerer Variablen, sondern auf Integrale angewandt wird, oder um mit Jak. Bernoulli*) selbst zu sprechen, wo es sich nicht mehr darum handelt, aus unendlich vielen Theilen (z. B. Ordinaten) einer einzigen gegebenen Curve den grössten oder kleinsten herauszusuchen, sondern aus unendlich vielen nicht gegebenen Curven eine herauszufinden, der irgend eine Maximal- oder Minimaleigenschaft zukömmt. Die Bernoulli vermochten es noch nicht, dieses Gebiet zu systematisiren; wir werden später sehen, wie Euler und Lagrange der Ruhm gebührt, die Variationsrechnung zu einem selbstständigen Calcül ausgebildet zu haben. Diese ausgezeichneten Probleme der Brachystochrone und der Isoperimetrie haben leider, wenn auch neuen Ruhm auf die schon gekrönten Häupter der Bernoulli ladend, das traurige Schicksal gehabt, die Brüder bis zum Tode des ältern auf's heftigste zu entzweien. — Im Juni 1696 legte Joh. Bernoulli den Mathematikern in den *Act. erud.* das erstere Problem vor, nämlich die Curve zu finden, die ein Körper einschlagen muss, um von einem Punkte zu einem tieferen, nicht senkrecht unter jenem gelegenen, in der kürzesten Zeit zu fallen. Der Termin für die Lösung war auf sechs Monate festgesetzt. Schon sehr bald nach der Veröffentlichung des Problems theilte Leibnitz

*) *Oper omn. T. II. pag. 768.*

Joh. Bernoulli mit, er habe die Lösung gefunden und rieth ihm zugleich*), den Termin noch bis Ostern 1697 hinauszuschieben, indem vielleicht noch andere Lösungen, besonders die seines Bruders eingehen könnten, wozu Joh. Bernoulli einwilligte. Diejenige Jak. Bernoulli's erschien auch wirklich im Mai 1697 in den *Act. erud.* und im selben Monate die Lösung des Marquis de l'Hôpital, freilich ohne Analyse; ebenso brachten die *Philosoph. Transactions* im Januar desselben Jahres eine Lösung ohne Angabe des Verfassers, doch war es nicht zweifelhaft, dass sie aus Newton's Feder entsprungen war; Joh. Bernoulli sagt darüber in einem Briefe**) an Mr. Basnage, den Autor der *Histoire des ouvrages des Savants: Nous savons pourtant indubitablement par plusieurs circonstances que c'est le célèbre M. Newton; et quand même nous ne le saurions point d'ailleurs, ce serait assez de le connaître par cet échantillon, comme „ex ungue leonem"*. Jakob Bernoulli nun, wahrscheinlich gereizt durch die etwas zurückhaltend verfasste Kritik seiner Lösung von Seite seines Bruders (er liess ihn merken, dass seine Lösung etwas zu lange auf sich habe warten lassen und unter den andern stehe), legte den Mathematikern und speziell seinem Bruder zwei andere Probleme vor, die ebenfalls in diese höhere Categorie der Aufgaben über Maxima und Minima gehören; dieselben sind folgende: 1. „Es sei unter den unendlich vielen Cykloiden, die von einem Punkte ausgehen und über derselben Basis construirt sind, diejenige zu bestimmen, in der ein Körper vom Anfangspunkt aus bis zu einer alle gegebenen Cykloiden schneidenden Geraden in der kürzesten Zeit fällt." 2. „Es sei unter allen Curven von gleichem Umfange und über derselben Basis construirt diejenige zu finden, die die Fläche einer andern Curve zu einem Maximum mache, deren Ordinate eine gegebene Function derjenigen der ersteren Curve ist." — Diesen Auf-

*) *Commerc. epistolic. epistola XXVIII & XXX.*

**) *Oper. omn. T. I. pag. 196.*

gaben fügte Jak. Bernoulli folgende Worte hinzu: „Eine Person, für die ich bürge, verspricht meinem Bruder 50 Imperialen, unter der Bedingung, dass er innerhalb dreier Monate diese Probleme zu lösen verspreche und innerhalb eines Jahres die vollständigen Lösungen veröffentliche; wenn nach Ablauf dieser Zeit keine Lösungen erschienen sind, so werde ich meine eigenen publiciren.“

Joh. Bernoulli löste nun in der That die beiden Probleme in sehr kurzer Zeit, das erstere vollständig und richtig, das zweite aber in der That nur mangelhaft. Desswegen mussten die aufreizenden und prahlerischen Worte, mit denen derselbe seine Lösungen in dem schon genannten Briefe an Basnage anzeigte, Jak. Bernoulli nur noch mehr empören und zur Fortsetzung des schmählichen Streites reizen. Joh. Bernoulli sagt daselbst: „*Quelques difficiles que ces problèmes paraissent, je n'ai pas manqué de m'y attacher à l'instant même que je les ai lus: mais voyez avec quel succès; au lieu de trois mois qu'on me donne pour sonder le gué et au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution, je n'ai employé en tout que trois minutes de temps pour tenter, commencer et achever d'approfondir tout le mystère.*“ — Weiter unten fährt Bernoulli, nachdem er bemerkt, es wäre am Besten, das Geld Leibnitz zu übergeben, damit es nach Veröffentlichung seiner Lösungen bald in seinen Händen wäre, indem er es für sehr bedürftige Arme bestimmt hätte, mit folgenden Worten fort, die keineswegs geeignet waren, seinen Bruder milder zu stimmen: „*Car j'aurais honte de prendre de l'argent pour une chose qui m'a donné si peu de peine et qui ne m'a point fait perdre de temps, si ce n'est ce que j'emploie à écrire ceci.*“

Hierauf veröffentlichte nun Jak. Bernoulli im *Journal des Savants* vom Febr. 1698 folgenden Avis:

„*M. Bernoulli, professeur à Bâle, auteur de ces problèmes, prétend que la solution du principal qui concerne* *les figures isopérimètres, n'y est pas entièrement conforme à la vérité. C'est pour cela qu'il veut bien accorder encore quelque temps aux géomètres pour la chercher. Et si enfin personne ne la trouve, il s'engage à trois choses :*

1. A deviner au juste l'analyse qui a conduit son frère à la solution qui se voit dans ce journal.

2. Quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes si on la veut publier.

3. A donner la véritable solution du problème dans toutes ses parties.

Il ajoute que s'il se trouvait quelqu'un qui s'intéressât assez à l'avancement des sciences pour proposer quelque prix pour chacun de ces articles, il s'engage à perdre autant s'il ne s'acquitte pas du premier; à perdre le double s'il ne réussit pas au second, et le triple s'il manque au troisième.

Joh. Bernoulli aber war trotz aller Einwendungen und trotz der Mahnung von Seite seines Bruders, er möchte seine Lösung noch einmal aufmerksam in allen Punkten durchgehen (*Journal des Savants,* 26. Mai 1698), nicht von seiner Meinung abzubringen, seine Lösung des isoperimetrischen Problems sei correct und vollständig. Er erklärte dieses zwei Mal im *Journal des Savants* vom April und Juni des Jahres 1698 und legte bei dieser Gelegenheit den Mathematikern, speziell aber jenem Unbekannten, der die 50 Thaler versprochen hatte, folgendes Problem vor: „Es sei von allen Halbellipsen, über einer gegebenen Horizontalaxe, diejenige zu bestimmen, die von einem Körper in der kürzesten Zeit durchlaufen wird, wenn derselbe seine Bewegung an einem der Axenenden beginnt." — Für die Lösung verspricht er das Vierfache des von jenem Unbekannten ausgesetzten Preises und erlaubt zugleich, dass sein Bruder ihm bei der Lösung behülflich sei.

Doch wenden wir uns zum Ende dieses unerquicklichen Streites. Im Jahr 1700 schrieb Jak. Bernoulli einen

Brief an seinen Bruder, in welchem er ihn in versöhnlichen Worten einlud, seine Lösung zu veröffentlichen; er fügte zugleich die Endresultate seiner eigenen Lösung ohne Analyse hinzu. Hierauf entwickelte Joh. Bernoulli seine Methode ausführlich in einer Abhandlung, die er der Pariser Academie der Wissenschaften verschlossen und mit dem ausdrücklichen Wunsche zusandte, dieselbe möchte erst geöffnet werden, wenn sein Bruder seine Lösung bekannt gemacht hätte.

Nun veröffentlichte Jakob Bernoulli seine „*Analysis magni problematis isoperimetrici**) im März 1701 in der Form einer Dissertation eines jungen Basler Mathematikers, Bischoff, unter seinem Präsidium, und gewidmet den vier grossen Mathematikern jener Zeit, Newton, Leibnitz, de l'Hôpital und Fatio de Duillier, dem berühmten Vertheidiger Newton's in dem Streit über die Erfindung der Differentialrechnung. Diese Abhandlung ist unbedingt die genialste Schöpfung Jakob Bernoulli's auf dem Gebiete der höhern Analysis und ein bewunderungswürdiges Denkmal seiner Erfindungsgabe und seines mathematischen Scharfsinnes. Wir treten unten etwas näher auf dieselbe ein.

Joh. Bernoulli, anstatt nun gemäss seinem Versprechen, seine Lösung ebenfalls zu veröffentlichen, bewahrte das tiefste Stillschweigen, was keinen anderen Grund haben konnte, als dass er das Fehlerhafte seiner Lösung damals schon einsah. Allein sein Stolz liess ihm das öffentliche Geständniss nicht zu und so schwieg er und schwieg, bis sein Bruder im Jahr 1705 dem Leben entrissen wurde. Aber auch jetzt noch nicht, als er im Jahre 1706 seine Lösung in den Mémoiren der franz. Academie endlich der Oeffentlichkeit übergab, auch jetzt wollte er noch nicht einsehen oder zugeben, dass seine Lösung unvollständig und mangelhaft sei. Erst dreizehn Jahre nach seines Bruders Tode, im Jahr 1718, that er das grosse Opfer, das ihn leider

*) *Act. erud. Lips.* Mai 1701 und *Jac. Bern. op. omn. T. II. pag. 897—920.*

nur noch mit den Manen seines Bruder's versöhnen konnte; er gab in den Mémoiren der franz. Academie eine neue Lösung und gestand zu, dass er sich in der ersten geirrt habe.

So endete dieser Streit, der wohl dazu geeignet war, die Grenzen des mathematischen Wissens weiter hinauszurücken, leider aber nicht dazu, dem Lorbeerkranze, mit dem die beiden Streitenden damals schon geschmückt waren, neue mackellose Blätter hinzuzufügen.

Jakob Bernoulli erkannte wohl schon in dem Problem der Brachystrochrone einen speziellen Fall jener höheren Theorie der Maxima und Minima; allein er so wenig wie Joh. Bernoulli lösten dasselbe auf prinzipielle Weise mit Hülfe dieses neuen Calcüls; ja der letztere schloss sogar direkt, ohne weitere Rechnung, aus dem Problem der astronomischen Refraction auf die Cykloide als die Curve des kürzesten Falles. Wenn, sagt er*) ein Lichtstrahl ein Mittel von stetig zunehmender oder stetig abnehmender Dichte durchläuft, so wird er keine gerade Linie, sondern eine Curve von der Art bilden, dass das Lichtkügelchen (Bernoulli folgte damals noch mit Newton der Emanationstheorie), das sie beschreibt, mit continuirlich abnehmender oder zunehmender Geschwindigkeit in der kürzesten Zeit vom leuchtenden Punkt zum Auge gelangt. Wenn nun der Lichtstrahl durch ein Mittel geht, dessen Dichte im umgekehrten Verhältniss mit dem Quadrate der Geschwindigkeit steht, oder wie sich Bernoulli ausdrückt, um dieses Verhältniss besser mit demjenigen beim freien Falle in Uebereinstimmung zu bringen, dessen Dünnigkeit (*raritas*) mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so ist, wie bekannt, die Curve des Lichtstrahls eine Cykloide. Mithin ist auch unsre Brachystochrone, bei der nach dem Galilei'schen Gesetze die Quadrate der Geschwindigkeiten des fallenden Körpers sich verhalten wie die Fallhöhen, eine Cykloide (*nullo negotio perspicitur, curvam brachystochronam illam ipsam esse quam*

*) *Opera omn. T. I. pag. 190.*

formaret radius transiens per medium cujus raritates essent in ratione velocitatum quas grave verticaliter cadendo acquireret). — Erst als dann das allgemeine Problem der Isoperimetrie gelöst war, betrachtete man dasjenige der Brachystrochrone als einen speziellen Fall desselben. Ich trete im Folgenden etwas näher auf die Jak. Bernoulli'sche Lösung dieses für die Entwicklung der höhern Anlalysis so hochwichtigen Problems ein.

Jak. Bernoulli stellte im Anfange einige Lehrsätze auf, die zur Lösung nothwendig sind; ich gebe sie hier ohne die Beweise.

I. Wenn in irgend einer Curve mehrere Abscissen unendlich nahe auf einander folgen, die wir der Reihe nach mit x, x', x'', x''' etc. bezeichnen, so ist: $x' = x + dx$, $x'' = x + 2dx + d^2x$, $x''' = x + 3dx + 3d^2x + d^3x$, u. s. f. Nennt man aber die grösste x, die folgenden kleineren x', x'' u. s. f., so ist: $x' = x - dx$, $x'' = x - 2dx + d^2x$, etc. Ebenso ist, wenn die Differentiale erster Ordnung der Reihe nach sind: dx, dx', dx'', dx''' u. s. w., $dx' = dx \pm d^2x$, $dx'' = dx \pm 2d^2x + d^3x$, u. s. f. Ebenso verhält es sich mit den Ordinaten y, y' y'' etc. und ihren Differentialen und mit den Curvenelementen ds, ds', ds'' etc.

II. Es sei in Fig. XVII die Gerade AT ihrer Lage nach gegeben und ausser derselben in verschiedenen Distanzen die 4 Punkte B, F, G und C, durch welche die Geraden BH, FK, GL und CJ senkrecht, BX, FY, GZ parallel zu AT gezogen werden. Dann, indem man die äussersten Punkte B und C festhält, lasse man die übrigen F und G auf den gegebenen Geraden FK und GL sich bewegen und zwar so, dass die Summe der 3 Verbindungslinien BF + FG + GC constant bleibt. Dann verhält sich die momentane Fluxion des Punktes F zur momentanen Fluxion des Punktes G, d. h. das Increment oder Decrement der Geraden KF zum Decrement oder Increment der Geraden LG, wie die Differenz zwischen den zwei ersten zur Differenz zwischen den zwei letzten der folgenden drei Würfel: CZ . BF . FG; GY . BF . GC; FX . FG . GC.

III. Es sei in derselben Figur von Neuem $BF + FG + GC$ konstant gesetzt; aber es fluiren jetzt die Punkte F und G auf den Peripherien der um die festen Punkte B und C beschriebenen Kreise, indem sie die Geraden KF und LG mit sich führen. Dann verhält sich das Inkrement der Geraden KF zum Dekrement der Geraden LG oder umgekehrt das Decrement jener zum Increment dieser, wie die Differenz zwischen den zwei erstern zur Differenz zwischen den zwei letztern der drei folgenden Würfel: BX . FY . CZ; BX . GZ . GY; FY . GZ . FX.

IV. Man nehme in der gleichen Figur die 4 unendlich nahe auf einander folgenden und gleichweit entfernten Ordinaten*) der Curve ABD: HB, KF, LG und JC; nenne die erste kleinste x, sowie $AH = y$ und $AB = s$. Dann lasse man die Krümmung des Curventheilchens BFGC durch das Fluiren der Punkte F und G auf ihren Ordinaten KF und LG um ein Geringes sich ändern, so zwar, dass die Länge BC immer constant bleibt. Dann verhält sich das Increment oder Decrement von KF zum Decrement oder Increment von LG wie $ds^2 d^2x + ds^2 d^3x - dx\,(d^2x)^2$ zu $ds^2 d^2x + 2\,dx\,(d^2x)^2$. (Es folgt diess nämlich aus dem zweiten Theorem, wenn man für die Seiten der Würfel ihre Werthe einsetzt).

V. Es seien wiederum die vier Ordinaten HB, KF, LG und JC gegeben, die kleinste mit x bezeichnet, $AH = y$ und $AB = s$; aber sie seien so gezogen, dass jetzt nicht ihre Abstände, sondern die Curventheilchen BF, FG und GC einander gleich sind. Es ändere sich nun wieder die Krümmung von BFGC durch die Rotation der äusseren Theile BF und GC um die Punkte B und C, so zwar, dass weder die Länge der einzelnen noch diejenige von BC sich

*) Ich bemerke, dass Bernoulli hier die Ordinaten als Abscissen betrachtet und mit x bezeichnet.

verändere. Dann verhält sich das Increment oder Decrement von KF zum Decrement oder Increment von LG wie $dy^2 d^2x + dy^2 d^3x + dx(d^2x)^2$ zu $dy^2 d^2x - 2dx(d^2x)^2$. (Es folgt diess aus dem dritten Theorem durch die nämliche Einsetzung).

VI. Man habe zwei unbestimmte Grössen, die kleinere f und die diese nur um eine unendlich kleine Grösse übertreffende, g; ferner zwei aus diesen auf gleiche Weise entstandene, gegebene Functionen F und G; und es sei $a\,dF = h\,df$, und $a\,dG = i\,dg$, so sage ich, es ist $i = h + dh$.

Der Beweis hiezu ist sehr einfach: Es sei z. B. $F = \sqrt{a^2 + f^2}$ und daher $G = \sqrt{a^2 + g^2}$, so ist $a\,dF : df$ oder $h = \frac{af}{\sqrt{a^2 + f^2}}$; und $a\,dG : dg$ oder $i = \frac{ag}{\sqrt{a^2 + g^2}}$.

Diese Grössen aber können als Ordinaten ein und derselben Curve betrachtet werden, wenn die entsprechenden Abscissen f und g sind. Da diese nun nach der Voraussetzung nur unendlich wenig von einander verschieden angenommen wurden, so werden die entsprechenden Ordinaten h und i ebenfalls unendlich nahe bei einander sein und also $i = h + dh$ sein, q. e. d.

VII. Wenn der Curve ABD unter allen mit ihr zwischen den Punkten A und D isoperimetrischen Curven irgend eine Maximal- oder Minimaleigenschaft zukömmt, so wird irgend einem beliebigen Theile derselben, wie BFGC, vor allen andern zwischen den Punkten B und C mit ihm isoperimetrischen Theilen die nämliche Eigenschaft zukommen.

Nach diesen Lehrsätzen geht er nun zur Lösung des schon oben allgemein angeführten Problems über:

Es seien in Fig. XVII die beiden zu einander senkrechten Geraden AT und AM gezogen und irgend eine Curve AN gegeben. Es wird nun aus allen über der gemeinsamen Axe AT und zwischen den Punkten A und D möglichen isoperimetrischen Curven diejenige ABD gesucht, die die Eigenschaft hat, dass, wenn man aus irgend einem ihrer Punkte B die beiden zu AT und AM normalen Geraden BHP und BMN zieht und $MN = PH$ macht, der von der Curve APV eingeschlossene Raum ATV ein Maximum oder Minimum wird.

Lösung: Die gesuchte Curve sei ABD und das Maximum oder Minimum, das, indem man $HP = MN$ macht, durch sie hervorgerufen wird, die Fläche ATV. Man nehme auf der Axe die gleich grossen Abscissentheilchen HK, KL und LJ, deren jedes mit 1 bezeichnet werde, an und ziehe die zugehörigen Ordinaten $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$, und $JC = c$; ebenso die als bestimmte Functionen der vorhergehenden zu betrachtenden $HP = B$, $KR = F$, $LS = G$, und $JQ = C$. Es ist nun nach Theor. VII die Fläche PHJQ, das ist $HK.HP + KL.KR + LJ.LS$, oder $1.B + 1.F + 1.G =$ Max. od. Min.; desshalb aus der Natur der Maxima und Minima ihr Differential $1dF + 1dG = 0$, oder $dF + dG = 0$. (Denn indem wir nur die Ordinaten KF und LG fluirend, die Punkte B und C aber fest angenommen haben, sind die Ordinaten HB und JC, also auch HP und JQ constant.) Man setze nun $dF = \frac{h.df}{a}$ und $dG = \frac{i.dg}{a}$; (wo h und i nur um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sind, d. h. um dh nach Theor. VI); hieraus folgt: $h.df + i.dg = 0$ und hieraus: $df : -dg = i:h = h + dh : h$, und weil nach Theor. IV im Allgemeinen $df : -dg = ds^2 d^2x + ds^2 d^3x - dx(d^2x)^2 : ds^2 d^2x + 2dx(d^2x)^2$, so folgt: $h + dh : h = ds^2 d^2x + ds^2 d^3x - dx(d^2x)^2 : ds^2 d^2x + 2dx(d^2x)^2$ oder indem man die Division ausführt:

$$\frac{dh}{h} = \frac{ds^2 d^3x - 3dx(d^2x)^2}{ds^2 d^2x + 2dx(d^2x)^2};$$

und hieraus:

$$h\,ds^2 d^3x - 3h\,dx(d^2x)^2 = dh.ds^2(d^2x)^2,$$

indem man nämlich das Glied $2dh.dx(d^2x)^2$, das von einem höheren Grad des Unendlichkleinen als die übrigen ist, weglässt. Es ist nun diese Differentialgleichung dritter Ordnung auf eine solche erster zu reduciren.

Zuerst setze man $ds\,d^2s$ anstatt $dx\,d^2x$ (damit man so viele Grössen h, ds, d^2x mit ihren Differentialen dh, d^2s, d^3x hat, als die Gleichung Glieder enthält), so wird

$$h\,ds^2 d^3x - 3h\,ds\,d^2s\,d^2x = dh\,ds^2 d^2x$$

oder Alles auf eine Seite gebracht und mit ds dividirt:

$$h\,ds\,d^3x - 3h\,d^2s\,d^2x - dh\,ds\,d^2x = 0. \quad (1)$$

Nun nehme man $h^m ds^n (d^2x)^r = \text{const.}$ an, (2)
wo m, n und r unbekannte Grössen, die aber später bestimmte Werthe erhalten werden. Differentiirt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$m\,.\,h^{m-1}dh\,.\,ds^n(d^2x)^r + n\,h^m ds^{n-1} d^2s\,(d^2x)^r$$
$$+ r\,h^m ds^n (d^2x)^{r-1} d^3x = 0.$$

Diess dividirt durch $h^{m-1} ds^{n-1} (d^2x)^{r-1}$ ergibt:

$$m\,dh\,ds\,d^2x + n\,h\,d^2s\,d^2x + r\,h\,ds\,d^3x = 0. \quad (3)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (1), so ergeben sich für die unbestimmten Exponenten m, n und r die Werthe

$$r = 1,\ n = -3,\ m = -1;$$

diese in (2) eingesetzt, liefern uns die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2x}{h\,ds^3} = \text{const.}$$

Die Constante setzen wir $\pm \frac{1}{a^2 dy}$ (es ist nämlich dy constant) und haben also:

$$\frac{d^2x}{h\,ds^3} = \pm \frac{1}{a^2 dy} \quad (4)$$

Um diese auf die erste Ordnung zu reduciren, setze man $a\,dx = t\,dy$, woraus durch Differentiation folgt:

$$d^2x = \frac{dt\,dy}{a}$$

und durch Quadriren:

$$a^2 dx^2 = t^2 dy^2;$$

fügt man hier auf beiden Seiten $a^2 dy^2$ hinzu, so resultirt:

$$a^2 ds^2 = (a^2 + t^2)\,dy^2 \text{ und } ds = \frac{\sqrt{a^2+t^2}}{a}\,dy.$$

Setzt man diese Werthe für $d^2 x$ und $d s$ in (4) ein, so erhält man:

$$\frac{a^2 \, dt}{(a^2 + t^2)\sqrt{a^2 + t^2}} = \pm \frac{h \, dy}{a^2} = \pm \frac{h \, dx}{at}$$

und mit $\pm$ t multiplizirt:

$$\frac{\pm a^2 t \, dt}{(a^2 + t^2)\sqrt{a^2 + t^2}} = \frac{h \, dx}{a} = \frac{h \, d f}{a} = d F;$$

woraus durch Integration sich die beiden Werthe ergeben*) (je nachdem man das negative oder positive Zeichen nimmt):

$$F_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} \quad \text{und} \quad F_2 = a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$$

F ist aber nichts Anderes als die Ordinate K R der Curve A P T, deren Fläche ein Maximum oder Minimum werden soll. Setzen wir dieses $F = p$ und ziehen dann aus den obigen Formeln die Werthe für t, so erhalten wir:

$$t = \frac{a \sqrt{a^2 - p^2}}{p}; \; t = \frac{a \sqrt{2ap - p^2}}{a - p}.$$

Diese Werthe für t in die Gleichung $a \, dx = t \, dy$ eingesetzt, gibt:

$$dy = \frac{p \, dx}{\sqrt{a^2 - p^2}}; \; dy = \frac{(a-p) \, dx}{\sqrt{2ap - p^2}}$$

Diess sind die Differentialgleichungen derjenigen Curve, die A T V zu einem Maximum oder Minimum machen soll. Es frägt sich nun, welche von den beiden Gleichungen das eine oder das andere hervorbringt.

Nehmen wir die erstere und quadriren dieselbe:

$dy^2 = \frac{p^2 \, dx^2}{a^2 - p^2}$; indem wir dx^2 auf beiden Seiten hinzufügen, erhalten wir: $ds^2 = \frac{a^2 \, dx^2}{a^2 - p^2}$; hieraus $d s = \frac{a \, dx}{\sqrt{a^2 - p^2}}$

Also $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{a}$. Wenn daher d s constant angenommen

---

*) Die beiden richtigen Werthe wären: $F = C \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$; allein Bernoulli liess der grössern Einfachheit wegen beim positiven Werthe F_1 die Constante weg und setzte sie beim negativen F_2 a selbst.

wird, so ist dy proportional zu p. Wenn nun mit wachsendem x auch p als wachsend angenommen wird, so wächst also auch dy, und unsere gesuchte Curve ist gegen die Axe A T concav. Es sei diese Curve A B C in Fig. XVIII; sie rotire um die Sehne A C, so erhalten wir die mit ihr isoperimetrische Curve A E C. Wir ziehen die gemeinsame Ordinate B E F (in unserm Falle $= x$). Da nun nach der Voraussetzung das p, das der grössern Ordinate B F entspricht, grösser ist als das der kleineren E F entsprechende, so wird auch das $p\,dy$ der ersteren grösser als das der zweiten sein; mithin auch das der Curve A B C entsprechende $\int p\,dy$ grösser als das der Curve A E C zukommende; desshalb kann das der Curve ABC zugehörige $\int p\,dy$ kein Minimum sein. Es kann also nur ein Maximum sein. Ebenso ergibt sich die Curve A E C als die das Integral $\int p\,dy$ zu einem Maximum machende, wenn p mit wachsendem x abnimmt. Und auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, dass die zweite Gleichung: $dy = \frac{(a - p)\,dx}{\sqrt{2\,ap - p^2}}$ in den beiden betrachteten Fällen $\int p\,dy$ zu einem Minimum macht.

Das zweite isoperimetrische Problem, welches Bernoulli löst, auf das ich aber nicht weiter eingehen werde, heisst:

Fig. XVII. Es wird unter allen über derselben Axe A T und zwischen denselben Punkten A und D möglichen isoperimetrischen Curven diejenige ABD gesucht, die die Eigenschaft hat, dass, wenn ihren einzelnen Ordinaten HB etc. andere H P u. s. w. entsprechen, die in bestimmter Relation zu den Curventheilen AB etc. stehen, sie die Fläche ATV zu einem Maximum oder Minimum macht.

Das 3. Problem lautet:

Es sei in Fig. XVII A B D eine biegsame Linie, in ihrer ganzen Länge mit Gewichten in irgend welcher Weise beschwert und an ihren Enden A und D frei aufgehängt. Es wird nun unter den unendlich vielen Lagen, die eine solche Linie einnehmen kann, diejenige gesucht, bei der der Schwerpunkt sämmtlicher Gewichte am weitesten oder am wenigsten weit von der Axe A T entfernt ist, d. h. (da jener Schwerpunkt natürlicher Weise den tiefsten Punkt einzunehmen strebt) es werden alle möglichen Kettenlinien gesucht.

Joh. Bernoulli's erste Lösung unterscheidet sich wesentlich von derjenigen seines Bruders, indem er, anstatt wie Jakob Bernoulli drei Curvenelemente variiren zu lassen, bloss zwei solche als variabel in die Rechnung einführte, d. h. indem er Fig. XIX, weil $F\omega + \omega\varphi$ constant bleiben muss, den Punkt ω eine unendlich kleine Ellipse um die fest angenommenen Brennpunkte F und φ beschreiben liess. Zur vollkommenen Lösung des isoperimetrischen Problems war aber durchaus jene Variation dreier Elemente nöthig. Joh. Bernoulli sah diess dann später, wie oben bemerkt worden, ein, und seine 1718 veröffentlichte Lösung ist im Allgemeinen nur die seines Bruders, obgleich er selbst diese keineswegs mit der seinigen auf gleiche Stufe setzen möchte und immer wieder auf den mühsamen Weg hindeutet, den sein Bruder zur Herleitung einiger Sätze eingeschlagen habe. Es bezieht sich diess auf die Beweise der oben angeführten Probleme II und III, die Jakob Bernoulli, wie mir scheint, sehr consequent mit Hülfe der Differentialrechnung, Johannes aber auf elementarem Wege, nur aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke hergeleitet hat.

Was das andere von Jakob Bernoulli vorgelegte Problem betrifft, diejenige Cykloide zu bestimmen, in der ein Körper bis zu einer gegebenen Geraden in der kürzesten Zeit fällt, so löste Johannes dasselbe richtig, indem er die die Gerade unter rechtem Winkel schneidende Cykloide als die gesuchte fand; ja er dehnte das Problem sogar noch weiter aus und bestimmte diejenige Curve, bis zu der der Körper in allen Cykloiden von einem Punkte aus in der nämlichen Zeit fällt, d. h. diejenige, die die gegebenen Cykloiden unter rechtem Winkel schneidet, und nannte diese Curve die Synchrone. — Das Problem der orthogonalen Trajectorien, zu welchem obige Curve ein Beispiel liefert, wurde überhaupt von den Bernoulli damals eifrigst behandelt.

So viel über diese ersten Anfänge der Variationsrechnung. Wir werden in einem spätern Kapitel ihre weiteren Fortschritte unter Euler und Lagrange zu betrachten haben. — Es möge nur noch bemerkt werden, dass auch Taylor in seiner *Methodo incrementorum directa et inversa* 1717 eine Lösung des isoperimetrischen Problems gab, die aber so weitschweifig und dunkel ist, dass sie nur wenig Beachtung und Anerkennung gefunden hat.

Ich bin in der Geschichte der reinen Mathematik nahezu bei jenem Zeitpunkte angelangt, da das Genie eines Eulers in ihre Entwicklung einzugreifen begann. Wohl hätte ich noch viele ausgezeichnete Arbeiten, Abhandlungen und Erfindungen der berühmten Bernoulli zu erwähnen gehabt, wenn ich ihre sämmtlichen Leistungen registerartig hätte aufzählen wollen; allein es ist mir vor Allem aus darum zu thun, eine zusammenhängende Darstellung der Entwicklung der Hauptdisciplinen des mathematischen Wissens zu geben, und desshalb konnte eine streng chronologische Eintheilungsweise nicht immer aufrecht erhalten werden. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass in der Folge die Namen der Bernoulli, Leibnitz etc. aus meinem Buche verschwinden werden; ich werde im Gegentheil noch oft die Gelegenheit haben, dieselben mit den ausgezeichnetsten und fruchtbringendsten Fortschritten der reinen und angewandten Mathematik in Beziehung zu bringen. Vorerst sei es mir nun gestattet, die Geschichte der Mechanik und einiger anderer mit der Mathematik in intimem Verhältniss stehender angewandter Partieen von Huyghens und Newton bis auf Euler nachzuholen.

VI.

Nach den durch Ubaldi, Stevin, Galilei, etc., festgestellten einfachsten Grundprinzipien der Mechanik, wie das Hebelgesetz, die schiefe Ebene, der freie Fall, das Princip der virtuellen Geschwindigkeit und die Zusammensetzung der Kräfte, drängte sich gegen Ende des 17. Jahrhunderts die Betrachtung der krummlinigen Bewegung in den Vordergrund, und zwar einerseits die auf der Theorie der schiefen Ebene basirende durch feste Hindernisse beschränkte Bewegung, wie die des Pendels, und andrerseits die freie durch Central- und Tangentialkräfte bewirkte Bewegung in krummen Linien. Die Hauptvertreter dieser beiden Richtungen sind beziehungsweise Huyghens und Newton.

Wir haben schon bei Gelegenheit der rein mathematischen Leistungen des erstern auf sein berühmtes Werk, *Horologium oscillatorium,* als auf eines der schönsten Denkmäler mathematischen Genies und eines der letzten und grossartigsten Producte synthetischer Behandlungsweise der Geometrie und Mechanik hingewiesen. — Dasselbe zerfällt in zwei grosse Hauptheile; der erste handelt von der Anwendung des Pendels auf die Uhren und zwar wird hier das Pendel nur als ein einfaches, mathematisches betrachtet; der zweite beschäftigt sich mit dem materiellen Pendel, oder allgemeiner mit der Theorie vom Schwingungsmittelpunkt. Huyghens entdeckte die Pendeluhren gegen das Ende des Jahres 1656. Schon Galilei hatte allerdings in den einfachen Pendelgesetzen, in dem Verhältniss von Schwingungszeit und Länge und in dem Isochronismus kleiner Elongationen die Basis entdeckt, auf die sich die Messung der Zeit gründen liesse; allein die Anwendung des Pendels auf die Regulirung der Uhrbewegung kommt Huyghens zu.

Indem er aber zugleich entdeckte, dass bei grösseren Elongationen die Schwingungszeit sich merklich ändere, boten ihm der von ihm entdeckte Tautochronismus der Cykloide und ihre Eigenschaft, dass ihre Evolute wieder eine Cykloide ist, die Mittel, in seinem Cykloidalpendel ein isochronisches Pendel zu konstruiren. Dieses Pendel besteht bekanntlich in einem an seinem Ende mit einem Gewichte versehenen Faden, der zwischen zwei festen cykloidisch geformten Bändern hin und her schwingt, sich abwechselnd an das eine und andere anschmiegend; das Gewicht wird in diesem Falle als Evolute jener festen Cykloiden wieder eine solche Curve beschreiben. — Von der ausgezeichneten Behandlungsweise dieser Probleme über die Cykloide und die Evoluten haben wir schon bei früheren Gelegenheiten gesprochen; das Hauptinteresse bietet für uns jetzt der zweite Theil seines Werkes, über den Schwingungsmittelpunkt *(centrum oscillationis)*.

Hier betrachtet nämlich Huyghens das materielle Pendel, dessen Schwingungsdauer eine andere ist als die des gleichlangen mathematischen, indem die näher bei der Axe gelegenen festen Punkte oder Molecüle des Pendels die Bewegung der tieferen beschleunigen und umgekehrt. Es handelt sich nun darum, den Punkt zu finden, dessen Abstand von dem Aufhängepunkt die Länge des mathematischen Pendels bestimmen würde, das mit dem materiellen gleiche Schwingungsdauer hätte, oder wie man sich auch ausdrücken kann, denjenigen Punkt, in dem man sich ohne veränderte Wirkung die ganze Masse des schwingenden Körpers concentrirt denken könnte. Dieser Punkt wird der Schwingungsmittelpunkt genannt.

Huyghens basirt seine Untersuchungen auf den hypothetischen Grundsatz, dass der Schwerpunkt eines Systems von festen Punkten, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegen, nicht höher steigen könne, als er beim Beginn der Bewegung stand. In diesem Satze wurde zuerst das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft bestimmter ausgesprochen, auf dessen weitere Entwicklung wir im Laufe dieses Capitels noch zu sprechen kommen werden. Aus diesem Satze folgert Huyghens die zweite Hypothese, dass, abgesehen vom Luftwiderstand und andern Hindernissen, der Schwerpunkt des materiellen Pendels gleich hoch steigt wie fällt. Nachdem er nun zuerst einige Sätze über den Schwerpunkt aufgestellt und in der 3. Proposition bewiesen hat, dass bei einem sich bewegenden System von schweren Punkten das Produkt aus der Masse sämmtlicher Punkte in die Höhe, bis zu welcher der Schwerpunkt gestiegen ist, gleich sei der Summe der Produkte der einzelnen Massen in ihre resp. Steighöhen, und im 4. Lehrsatz, dass, wenn ein aus mehreren schweren Punkten zusammengesetztes Pendel irgend einen Theil seiner Schwingung zurückgelegt hat und hierauf die schweren Punkte aus ihrer gegenseitigen festen Verbindung herausgerissen und mit ihren erlangten Geschwindigkeiten senkrecht in die Höhe steigen würden, dass dann ihr gemeinsamer Schwerpunkt auf die nämliche Höhe gelangen würde, die er am Anfang inne gehabt hat, kommt er, indem er beim Pendel diese Steig- resp. Fallhöhen durch die ihnen proportionalen Quadrate der Geschwindigkeiten ersetzt hat, und diese Geschwindigkeiten sich wiederum verhalten wie die Abstände von der Drehungsaxe zu dem Resultate, dass der Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Axe gleich sei dem Quotienten aus der Summe der Produkte der einzelnen Massen in die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe durch das Produkt der Gesammtmasse in den Abstand ihres Schwerpunktes von der Axe, oder, kürzer gesagt, dem Quotienten aus Trägheitsmoment durch statisches Moment.

Wie nun Huyghens die Trägheitsmomente von Flächen und Körpern und hieraus dann die Schwingungsmittelpunkte für dieselben Gebilde ohne Zuhülfenahme der Infinitesimalrechnung bestimmt, kann ich hier nicht weiter auseinandersetzen;

ich verweise den Leser auf den vierten Theil seines berühmten Werkes.

Schon Mersenne hatte 1646 das Problem des Schwingungsmittelpunktes den Mathematikern vorgelegt. Descartes und Roberval wandten sich demselben zu; allein ihre Auffassungsweise war keineswegs eine prinzipielle; sie bestimmten auch nicht den Schwingungsmittelpunkt, sondern denjenigen des Stosses *(centrum percussionis)*, indem sie annahmen, dieser wäre mit ersterem identisch. Der Mittelpunkt des Stosses ist derjenige Punkt eines um eine Axe sich drehenden Körpers, in welchem die ganze Bewegungsmenge als eine einzige Kraft concentrirt gedacht werden kann, so dass ein nach diesem Punkt gerichtetes Hinderniss die ganze in dem Körper liegende Kraft vernichtet. Dieser Punkt trifft allerdings, wie Betrachtung und Erfahrung lehren, mit dem Oscillationscentrum in allen Fällen schwingender Körper zusammen; allein ihre Auffassung und Ableitung ruhen auf ganz verschiedener Basis, und so sind auch Huyghens und Descartes nicht von denselben Principien ausgegangen. Der letztere und Roberval lösten die Aufgabe für einige spezielle Fälle, in den meisten aber reüssirten sie nicht. Ihrer verschiedenen Ansichten wegen wurden sie gegenseitig in einen unerquicklichen Streit verwickelt.

Huyghens wurde in seiner principiellen Auffassungsweise, sowie in seiner faktischen Lösung von Jakob und Johannes Bernoulli und von de l'Hôpital eifrigst unterstützt. Im Jahre 1682 erhob sich der Franzose Catelan gegen Huyghens' Theorie, indem er namentlich jene hypothetischen Sätze anzugreifen versuchte. Er stellte nämlich diesen einige höchst willkürliche Behauptungen gegenüber, die von Huyghens und Jakob Bernoulli bald darauf leicht und schlagend widerlegt wurden. Einer dieser Catelan'schen Sätze war der folgende: In einem aus mehreren schweren Punkten zusammengesetzten Pendel ist die Summe der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte gleich der Summe der Geschwindigkeiten, die jeder einzelne Punkt gehabt hätte, wenn er als selbstständiges Pendel geschwungen hätte. Jakob Bernoulli bewies nun in einer Abhandlung vom Jahre 1686 *), dass die Summe der Geschwindigkeiten der Gewichte im zusammengesetzten Pendel geringer sein müsse als in dem Falle, wo jedes Gewicht seine Schwingung getrennt machen würde. (Der Satz Catelan's wäre richtig, wenn der Schwerpunkt der Schwingungsmittelpunkt wäre.) Jakob Bernoulli ging in seiner Betrachtung der gegenseitigen Wirkung der schweren Punkte des Pendels auf einander von den Grundprincipien der Statik, dem Hebelgesetze und der Zusammensetzung der Kräfte und Geschwindigkeiten aus. Er nahm vorerst nur zwei gleichschwere Punkte an und indem er schloss, dass die von dem einen gewonnene und von dem andern verlorene Kraft gegenseitig im Gleichgewicht stehen müssen und dass folglich die Produkte aus Masse in Geschwindigkeit, oder die Bewegungsmengen sich umgekehrt verhalten müssen wie die Entfernungen vom Drehungspunkte, fand er auf leichtem Wege die Unrichtigkeit des Catelan'schen Satzes, konnte aber damit die Richtigkeit der Huyghens'schen Lösung noch nicht verificiren. Er beging nämlich den Fehler, die totalen Geschwindigkeiten in Berücksichtigung zu ziehen, anstatt bloss ihre Elemente, was aus Grund der Variabilität der Geschwindigkeiten nothwendig war. Es gebührt de l'Hôpital das Verdienst, diesen Fehler zuerst eingesehen und ihn auch richtig corrigirt zu haben **). Jakob Bernoulli gab dann ebenfalls im Jahre 1703 in den *Mémoires de l'acad. des sciences* die vollständige Lösung des Theorems vom Schwingungsmittelpunkt ***) auf Grundlage der Hebelgesetze und mit Hülfe der Infinitesimalrechnung. Ebenso nahm

*) *Op. omn. T. I. p. 277*, und *Act. erud.* Juli 1686.

**) *Jacobi Bern. Op. omn. T. I. pag. 454.*

***) *Jac. Bern. Op. omn. T. II. pag. 930.*

Joh. Bernoulli im Jahre 1714 diesen Gegenstand, nachdem er längere Zeit wenig beachtet geblieben, wieder auf und gab in den *Act. erud.* vom Juni desselben Jahres eine Lösung des Problems unter dem Titel: *Meditatio de natura centri oscillationis.* Wir kommen auf diese Abhandlungen bei der Betrachtung des Streites über das Princip der lebendigen Kraft noch zu sprechen. Es ist hier noch zu bemerken, dass zur nämlichen Zeit mit Joh. Bernoulli auch Taylor dieses Problem löste, und dass sich darüber zwischen den beiden ein hässlicher Streit entspann, der wiederum wie jener mit seinem Bruder keineswegs zu Joh. Bernoulli's Gunsten spricht.

Bei den einfachsten Principien der Mechanik, dem Hebelgesetz, der schiefen Ebene, der Zusammensetzung der Kräfte, etc., wie wir sie von Galilei bis auf Huyghens in Entwicklung begriffen sahen, war ein allgemeiner Gesichtspunkt maassgebend, nämlich die Einwirkung von äusseren Kräften auf einen einzigen Körper. Bei der soeben betrachteten Theorie des Schwingungsmittelpunktes und dem nun im Folgenden zu behandelnden Stoss der Körper liegt das Hauptmoment in der dynamischen Wirkung und Gegenwirkung mehrerer Massen unter einander, sei es nun, dass diese wie beim Pendel einer statischen Beschränkung unterworfen sind, d. h. fest mit einander verbunden und in einer vorgeschriebenen Bahn sich zu bewegen gezwungen sind, oder dass sie wie beim Stoss frei auf einander wirkend gedacht werden.

Die Gesetze des Stosses, so einfach sie auch scheinen mögen und so untergeordnet die Stellung auch ist, die ihnen heutzutage in den mechanischen Wissenschaften eingeräumt wird, haben die grössten Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts beschäftigt, und nicht Alle haben in ihrer principiellen Auffassung reüssirt. Sie sind desswegen von so eminenter Bedeutung, weil eines der Hauptprincipien der Mechanik, die Erhaltung der lebendigen Kraft, am augenscheinlichsten in ihnen verkörpert liegt. — Galilei hatte in seinen *Discorsi* an mehreren Stellen schon Andeutungen über den Stoss der Körper gegeben, ohne zu den Gesetzen desselben zu gelangen. Er legt nämlich das Hauptgewicht auf die Intensität des Stosses oder auf die momentane Pressung beim Zusammentreffen, anstatt auf das dynamische Resultat nach dem Stosse, indem er die Differenz der Geschwindigkeiten als das Maass der Kraftwirkung hinstellt. So ist, wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit 10 einen andern gleich grossen mit der Geschwindigkeit 4 einholt, die Stärke des Stosses gleich 6; steht der letztere still, so wäre die Intensität des Stosses 10. Sie ist also am grössten, d. h. gleich 20, wenn der zweite Körper mit der nämlichen Geschwindigkeit dem ersteren sich entgegen bewegt. Wir sehen leicht, wie Galilei hier die dynamische Wirkung ausser Acht lässt; denn diese wäre im letzteren Falle gleich Null, indem ja beide Körper zur Ruhe kommen (es handelt sich hier natürlich nur um unelastische Körper).

Descartes ist es, der zuerst ausführlicher und principieller die Sache betrachtete*), aber mit seiner zu metaphysischen Auffassungsweise zu keinem richtigen Ziele kam. Sein Grundprincip ist das der Erhaltung derselben Bewegungsmenge. So schön nun auch dieser Satz in manchen einfachen Fällen des Stosses stimmt, so ist er eben doch nicht allgemein anwendbar und desshalb die Grundlage der Descartes'schen Theorieen keine richtige. Beim Stoss ist nicht nur auf die Masse und Geschwindigkeit, sondern auch auf die Richtung der Bewegung Rücksicht zu nehmen, und in diesem Falle gilt das obige Princip nicht durchgängig; auf den Stoss elastischer und unelastischer Körper nach entgegengesetzter Richtung kann es nicht angewandt werden. Für den Stoss zweier gleich grosser vollkommen elastischer Körper mit gleicher Geschwindigkeit und in entgegengesetzter Richtung hätte es allerdings

*) *Principia philosophiae, Pars II. num. 46, etc.*

Gültigkeit, allein Descartes macht keinen Unterschied zwischen elastischen und unelastischen Körpern. Huyghens hat später nachgewiesen, dass wohl die algebraische Summe der Bewegungsmengen nicht verändert werde (d. h. wenn man bei entgegengesetzten Bewegungen die eine Geschwindigkeit, also auch die Bewegungsmenge negativ annimmt). Es liegt, wie Dühring*) mit Recht bemerkt, in dieser Unrichtigkeit des Princips der Erhaltung derselben Bewegungsmenge bei Nichtbeachtung des Sinnes der Bewegung gleichsam eine Gewähr für die Richtigkeit des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft, oder vielmehr der Grund dafür, dass in dem analytischen Ausdruck für die lebendige Kraft die Geschwindigkeit im Quadrate auftreten muss. Wenn man die lebendige Kraft nur als den Ausdruck für die Wirkung einer bewegten Masse betrachtet, so ist nicht von vornherein einleuchtend, warum gerade das Quadrat der Geschwindigkeit in ihrer Formel fungiren soll; erst wenn man auf jene praktischen Gebiete blickt, in denen die Erhaltung der Kraft eine so hervorragende Rolle spielt, wie in der Theorie des Stosses, und im Problem des Schwingungsmittelpunktes, so wird es klar, wie in diesen Fällen von negativen Geschwindigkeiten abstrahirt werden muss. Diese haben ebenso gut eine absolute Kraftwirkung, einen „*impetus*“, wie die positiven und dieses liegt eben in jener Formel der lebendigen Kraft ausgedrückt, in der auch negative Geschwindigkeiten immer ein positives Resultat geben.

Nach Descartes beschäftigten sich auf Anregung der Londoner Akademie der Wissenschaften hin die Engländer Wallis und Wren (1632—1723) mit der Lehre vom Stosse der Körper. Ihre Arbeiten hierüber erschienen fast gleichzeitig in den *Philosophical Transactions* des Jahres 1668 und nur wenig später Huyghens' Schrift: *De motu corporum ex percussione.* Dass aber alle drei Männer die wahren Gesetze des Stosses unabhängig von einander gefunden

*) Kritische Geschichte der Principien der Mechanik, pag. 172.

haben, steht fest. Wallis betrachtete nur den unelastischen Stoss, dehnte aber in einer spätern Schrift (1670) seine Theorie auch auf elastische Körper aus; Wren hingegen behandelte nur den elastischen Stoss und nähert sich in dieser Hinsicht Huyghens mehr, dessen Abhandlung allerdings erschöpfender ist. Es ist mir hier nicht gestattet, näher auf diese verschiedenen Schriften einzutreten, nur über diejenige von Huyghens muss ich Einiges hinzufügen. Derselbe geht nicht auf die physischen Ursachen ein, die bei dem elastischen Stosse zur Geltung kommen, sondern stellt den Satz, dass zwei gleich grosse elastische Körper, die sich mit gleicher Geschwindigkeit entgegen kommen, nach dem Stosse mit derselben Geschwindigkeit wieder zurückgehen, einfach als Erfahrungssatz an die Spitze seiner Untersuchungen, ohne dem Grund dieser Erscheinung irgend welche Aufmerksamkeit zu schenken: *Quaecunque sit causa corporibus duris a mutuo contactu resiliendi cum in se invicem impinguntur, ponimus*.... Von diesem Erfahrungssatz aus schliesst er dann auf die verschiedenen Fälle der ungleichen Geschwindigkeiten und ungleichen Massen. Von grosser Bedeutung in Huyghens Schrift über den Stoss aber ist der 11. Satz, in welchem er das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kraft aufstellt und beweist, d. h. er zeigt, dass die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse die gleiche sei. Dieses Gesetz nimmt allerdings bei ihm noch nicht die Gestaltung eines allgemein gültigen mechanischen Princips an, der Ausdruck „lebendige Kraft" tritt ebenfalls noch nicht auf, aber immerhin war dieser erste Beweis des so wichtigen Princips durch Huyghens von hoher Bedeutung und der Anlass zu dem bald darauf sich entwickelnden berühmten Streite über diesen Punkt. Wir werden demselben in unserer Geschichte später begegnen. — Zum Schlusse ist noch zu bemerken, dass der berühmte französische Physiker Mariotte (16..—1684) zahlreiche und genaue Versuche über den Stoss angestellt hat.

Von ungleich grösserer Tragweite als die beiden soeben betrachteten Theorieen des Schwingungsmittelpunktes und des Stosses, sind die Gesetze über die Centralkräfte oder die Bewegung in krummen Linien. Es bilden diese die Grundlagen, auf die Newton sein grossartiges Weltsystem aufgebaut hat. In ihnen erblicken wir die Folge oder vielmehr die Verallgemeinerung des Princips der Zusammensetzung der Kräfte. In der Bestimmung der Wurfparabel durch Galilei liegt der erste Keim der Theorie krummliniger Bewegungen; allein es brauchte noch eines Zwischengliedes, um von dieser Betrachtung der Bahnen geworfener Körper auf die allgemeine Combination einer ein für alle Mal gegebenen geradlinigen Bewegung und der Wirkung einer stetig andauernden Centralkraft zu gelangen. Dieses Zwischenglied liegt in den Gesetzen über die Centrifugalkraft, d. h. über diejenige Kraft, mit der ein in einem Kreise sich bewegender Körper vom Centrum sich zu entfernen strebt und sich entfernen würde, wenn die Spannung, die den Körper immer im gleichen Abstand vom Centrum hält, plötzlich aufhören würde. Diese Spannung steht hier an Stelle der Centralkraft bei der allgemeinen krummlinigen Bewegung; allein ihre Wirkung ist keine dynamische, sondern nur eine statische. — Die erste Aufstellung der Gesetze über die Centrifugalkraft, dass z. B. bei zwei gleichen Körpern, die in gleichen Zeiten ungleiche Peripherien durchlaufen, die Centralkräfte sich wie die Radien der Kreise verhalten, u. s. w., verdanken wir Huyghens. Man findet dieselben ohne Beweise als Anhang zu seinem *Horologium oscillatorium,* unter dem Titel: *De vi centrifuga ex motu circulari theoremata.* Die Beweise erschienen später im zweiten Bande seiner *Opera posthuma* 1728.

Diese Gesetze über die Centrifugalkraft in Kreisen und jenes von Kepler aufgefundene dritte Gesetz, dass die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten sich verhalten wie die Cuben der grossen Axen ihrer Bahnen, bilden die unmittelbaren Stützen, auf die der grosse Newton sein System der allgemeinen Gravitation aufgebaut hat. Es sind daher Kepler und Huyghens als Newtons nächste Vorgänger zu betrachten und vielleicht wäre dem ersteren schon der Ruhm zu Theil geworden, die Ursache der Bewegungen der Weltkörper zu finden, wenn damals schon jene mechanischen Wahrheiten dem berühmten Astronomen entschleiert gewesen wären, die später durch Galilei's und Huyghens' Bemühungen Newton's unmittelbare Ausgangspunkte bilden sollten. Die Geschichte der Entdeckung der allgemeinen Gravitation, jenes unsterblichen Gesetzes, das alle Bewegungen der irdischen und ausserirdischen Natur auf ein und dieselbe Ursache zurückführt, das uns, wie kein anderes, in die Geheimnisse des uns so unermesslich und unerforschbar scheinenden Weltalls hineingeführt hat und das desshalb vor allen anderen Leistungen des grossen Engländers seinen unwandelbaren Ruhm begründet hat, gehört seinem Wesen nach in die Geschichte der Astronomie, der ich in diesem zweiten Theile meines Buches keine Aufmerksamkeit schenken kann. Allein die so innige Beziehung dieses Gegenstandes zu den Principien der Mechanik, die ich ihres abstrakten, dem rein Mathematischen so nahe tretenden Charakters wegen in meine Geschichte aufzunehmen müssen glaubte, zwingt mich, über diese Entdeckung der allgemeinen Gravitation hier Einiges hinzuzufügen. Es führen mich diese Betrachtungen zu dem grossartigsten Werke Newton's, zu dem an genialen Lösungen mechanischer und astronomischer Probleme reichsten, das vielleicht irgend eine Zeit aufzuweisen hat, zu seinen *Principia philosophiae naturalis mathematica,* das — man erlaube mir diese Aufmunterung hier — noch heutzutage kein Studirender der Mathematik und Mechanik zu lesen unterlassen sollte. — Die erste Ausgabe dieses Werkes erschien im Mai des Jahres 1686, die zweite 1713. Dasselbe zerfällt in 3 Haupttheile. — Der erste und zweite Theil sind rein mechanischer Natur, und zwar handelt der erste über die Bewegung der Körper in krummen Linien, sei es dass bei gegebener Bahn die Centripetalkraft, oder wenn diese bekannt, die Bahn gesucht wird, von der Bewegung der Körper auf gegebenen Oberflächen u. s. w.; der zweite Theil handelt von der Bewegung der Körper in widerstehenden Medien und von der Hydrostatik, und der dritte enthält die astronomischen Anwendungen dieser mechanischen Gesetze und ist betitelt: „Vom Weltsystem.“ — Es ist hier nicht der Ort und wäre auch vollkommen unnütz, tiefer dem philosophischen Gedankengang nachzuforschen, den Newton bei Entdeckung seines Gesetzes befolgt hat. Seinen Plan hatte er sich sicher und scharf vorgezeichnet, und seine nie ermüdende, Alles überwältigende Geisteskraft hat ihn auch endlich glorreich zum Ziele geführt, obgleich die Unzulänglichkeit der nöthigen praktischen Mittel ihn mehr als einmal beinahe am Gelingen verzweifeln liess.

Auf dem ahnenden Gedanken fussend, es möchte wohl die Schwerkraft der Erde weit über ihre Grenzen hinaus, ja bis zum Monde hin ihre anziehende Wirkung ausüben, ja, es möchten wohl auch die Sonne und alle übrigen Himmelskörper eine solche anziehende Kraft besitzen, erschloss sich ihm aus der Combination des dritten Kepler'schen Gesetzes mit denjenigen von Huyghens über die Centrifugalkraft in Kreisen das bedeutungsvollste der Gesetze über die Centralkräfte, nämlich, dass sich dieselben umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten. — Dasselbe Resultat fand Newton auf selbstständige, geniale Weise aus dem ersten Kepler'schen Gesetze. Ich kann nicht umhin, seine elegante synthetische Herleitung dieses Gesetzes hier wörtlich wiederzugeben. — Nachdem er im ersten Abschnitte des I. Buches zuerst die Grundsätze und Gesetze der Bewegung überhaupt aufgestellt und hierauf im zweiten Abschnitte die Beweise zu den schon von Huyghens aufgestellten Gesetzen über die Centrifugal- oder petalkräfte gegeben hat, geht er im dritten Abschnitte zu der Bewegung der Körper in excentrischen Kegelschnitten über. Die erste Aufgabe*) ist folgende: „Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse; es soll das Gesetz der nach ihrem Brennpunkt gerichteten Centripetalkraft gefunden werden.“

„Es sei S (Fig. XX) der Brennpunkt der Ellipse. Man ziehe den Radius vector PS, welcher den Durchmesser DK in E und die Ordinate Qv in x schneide, und vollende das Parallelogramm QxPR. Es ist nun offenbar

$$EP = AC.$$

Dann zieht man aus dem zweiten Brennpunkt H die Gerade HJ || DK, so ist, weil CS = CH, SE = EJ, also

$$EP = EJ + JP = \frac{1}{2}(ES + EJ + JP + JP)$$

$$= \frac{1}{2}(SP + JP)$$

Da aber HJ || PR und $\angle JPR = \angle HPZ$, so ist PJ = PH und also

$$EP = \frac{1}{2}(SP + PH) = AC.$$

Zieht man QT senkrecht auf SP und sei der Parameter der Ellipse

$$L = \frac{2 . BC^2}{AC},$$

so ist $\quad L . QR : L . Pv = PE : PC = AC : PC;$

(indem man Px = QR annimmt), ferner

$$L . Pv : Gv . Pv = L : Gv,$$

und durch Multiplikation beider Proportionen:

$$L . QR : Gv . Pv = L . AC : Gv . PC.$$

Es ist aber aus der Eigenschaft der Ellipse

$$Gv . Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2,$$

also $\quad L . QR : Qv^2 = L . AC . PC : Gv . CD^2.$

Fallen die Punkte P und Q zusammen, so wird

$$Qv^2 = Qx^2.$$

(nach der Methode der ersten und letzten Verhältnisse, die

---

*) *Princip. philos. nat. math. edit. secunda lib. I. sect. III. prop. XI.*

Newton im ersten Abschnitt auseinandersetzt). Es ist daher auch

$$L . QR : Qx^2 = L . AC . PC : Gv . CD^2;$$

ferner ist, wenn PF auf DK senkrecht steht,

$$\begin{aligned} Qx^2 : QT^2 &= PE^2 : PF^2 \\ &= CA^2 : PF^2 \\ &= CD^2 : CB^2. \end{aligned}$$

Also $L . QR : QT^2 = L . AC . PC : Gv . CB^2$

oder weil $L . AC = 2 . BC^2$

$$L . QR : QT^2 = 2 . PC : Gv.$$

Wenn aber die Punkte Q und P zusammenfallen, so wird $2 . PC = Gv$, also

$$L . QR = QT^2.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{SP^2}{QR}$, so erhält man:

$$\frac{SP^2 . QT^2}{QR} = L . SP^2.$$

In der VI. Prop. Corol. 1 wurde aber gezeigt, dass die Centripetalkraft umgekehrt proportional ist dem Ausdruck:

$$\frac{SP^2 . QT^2}{QR}$$

also auch umgekehrt proportional zu $L . SP^2$, oder weil L constant, zu SP^2, d. h. dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional."

Dass die Centripetalkraft dem Ausdruck $\frac{SP^2 . QT^2}{QR}$ umgekehrt proportional ist, wird in der VI. Prop. folgendermaassen bewiesen:

In Fig. XXI verhält sich die in S wirkende Centripetalkraft direkt wie der Pfeil Pv und umgekehrt wie das Quadrat der Zeit; sie ist also proportional dem Ausdruck: $\frac{Pv}{t^2}$. Es ist aber das Dreieck SQP, in welchem der kleine Bogen QP als gerade Linie betrachtet werden kann, $= SP . QT$, wenn QT senkrecht auf SP steht. Dieses Dreieck ist aber bekanntlich der Zeit proportional, also kann man in dem Ausdruck: $\frac{Pv}{t^2} = \frac{QR}{t^2}$ für t setzen SP . QT. Also ist die Centripetalkraft proportional dem Ausdruck $\frac{QR}{SP^2 . QT^2}$ oder umgekehrt proportional

$$\frac{SP^2 . QT^2}{QR}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Die umgekehrte Aufgabe, bei gegebenem Gesetze der Centripetalkraft die Curve zu bestimmen, wurde von Newton nicht vollständig gelöst; er führte dieselbe bloss auf Quadraturen zurück. Die erste analytische Lösung des Falles, wo die Centripetalkraft sich umgekehrt verhält wie das Quadrat der Entfernung, wurde von Joh. Bernoulli*) gegeben.

Um nun dieses Gesetz, das Newton für die Planeten gültig gefunden hatte, faktisch nachzuweisen, nahm er an, es müsse dasselbe auch für die Bewegung des Mondes um die Erde gelten. Wenn nun in diesem Falle, schloss er, die anziehende Kraft der Erde gegenüber dem Monde dieselbe sein soll, die den Fall der Körper auf der Erdoberfläche bewirkt, d. h. die Schwerkraft, so muss auch nach dem eben gefundenen Gesetze die Acceleration, oder was dasselbe ist, der Weg eines fallenden Körpers auf der Erde in der ersten Sekunde sich verhalten zu dem Wege, um den der Mond in einer Sekunde von seiner Tangentialrichtung ab der Erde sich nähert, wie das Quadrat des Halbmessers der Mondbahn zum Quadrate des Erdhalbmessers. — Aus einfachen geometrischen Betrachtungen ergibt sich nun jener Weg des Mondes gegen die Erde hin in einer Sekunde leicht, wenn der Halbmesser der Mondbahn und seine Umlaufszeit bekannt. Ersteren nahm Newton ziemlich genau 60,16 Erdhalbmesser an, den Erdhalbmesser zu ungefähr 17 Mill. Par. Fuss. So fand er für jenen Fall des Mondes in einer Sekunde gegen

*) *Opera omn. T. I. pag. 474.*

die Erde hin = 0,00361 Par. F., was rückwärts geschlossen für den Fall eines Körpers auf der Erde in der ersten Sekunde = 13,06 P. F. ergibt, also mehr als 2′ zu wenig. — Das Misslingen dieses Versuches liess Newton die Sache für längere Zeit vergessen. Erst als im Jahre 1682, also volle 16 Jahre nachher, das Resultat von Picard's Gradmessung, die für die Länge des Erdradius 19,615,000 P. F. ergab, zu Newton's Ohren gelangte, nahm er die Rechnung von Neuem auf und fand nun eine glänzende Uebereinstimmung. Vier Jahre nach dieser Entdeckung und 20 Jahre nach dem ersten Versuche übergab er endlich sein grosses Werk der königl. Akademie der Wissenschaften zu London. — Im 4. Lehrsatz des dritten Buches finden wir das Gesetz aufgestellt: „Der Mond gravitirt gegen die Erde; er wird durch die Schwere von seiner geradlinigen Bewegung fortwährend abgelenkt und in seiner krummlinigen Bahn erhalten.“ Der Beweis enthält nur das Schema, nicht die vollständige Ausführung der Rechnung.

Das dritte Buch bietet uns noch eine Menge von Berechnungen terrestrischer und himmlischer Erscheinungen, die auf dem Gesetze der allgemeinen Gravitation basiren. So berechnet Newton die Grösse der Mondungleichheiten, die Praecession der Aequinoctien, die Bahnen von Cometen und die Grösse der Meeresfluth. Wir überlassen das nähere Eintreten auf diese Arbeiten dem Geschichtschreiber der Astronomie.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass schon vor Newton der Gedanke einer nach einem bestimmten Gesetze wirkenden Centralkraft der Sonne gegenüber den Planeten in einigen seiner Zeitgenossen rege geworden war. So spricht der Italiener Borelli in seiner 1666 erschienenen Schrift: *Theoricae planetarum Medicearum* von einer anziehenden Kraft der Sonne gegenüber den Planeten und dieser letzteren auf ihre Trabanten, welche Kraft er mit der des

Magneten vergleicht. Ja der Engländer Hooke (1635—1703) drückte sich in seiner 1674 erschienenen Abhandlung: „Versuch eines Beweises der Bewegung der Erde“ noch deutlicher aus, indem er behauptete, dass alle Himmelskörper eine gegen ihren Mittelpunkt gerichtete anziehende Kraft besitzen, wodurch sie nicht nur auf ihre eigenen Elemente, sondern auch auf alle andern Himmelskörper wirken; dass diese anziehenden Kräfte desto stärker sind, je näher ihnen die angezogenen Körper gebracht werden, und dass endlich diese Grundsätze, wenn sie weiter verfolgt würden, die Astronomen dahin führen müssten, die Bewegungen aller himmlischen Körper auf ein bestimmtes Gesetz zurückzubringen. In einem Briefe an Halley gesteht Newton, dass er die Kenntniss von dem Gesetze der quadratischen Abnahme der Anziehung, aus verschiedenen Umständen zu schliessen, sowohl Wren als Hooke zuerkennen müsse, was Letzterer auch beim Erscheinen des Newton'schen Werkes selbst behauptet hatte. Doch war dieser Schritt angesichts der Kenntniss der Kepler'schen und Huyghens'schen Gesetze weitaus der kleinere; der viel grössere, durch Herbeiziehung der Mondbewegung die Identität jener Kraft mit der Schwere nachzuweisen, war allein Newton aufbehalten.

So fest und unumstösslich und so einleuchtend auch die Beweise der allgemeinen Gravitation gegeben wurden und so schön die Bewegungen der himmlischen Körper mit den theoretischen Resultaten stimmten, so merkwürdig muss uns die Thatsache erscheinen, dass sowohl in England als auch auf dem Continente das neue System nur langsam Eingang fand. Während in Schottland die beiden berühmten Mathematiker James und David Gregory schon 1690 die neue Lehre vertheidigten, wurde in Cambridge, wo Newton selbst gelehrt hatte, die Physik 1715 noch nach dem Buche des Cartesianers Rohault vorgetragen. Für gewisse Kreise war die strenge mathematische Herleitung und die nur durch scharfen Verstand zu überwältigende Auffassung des ganzen

Systems vielleicht ein Grund des schweren Verständnisses und daher der Zurückhaltung von demselben. Dass aber Männer wie Huyghens, Joh. Bernoulli und Leibnitz, diese Coryphäen der kontinentalen Mathematiker, erklärte Gegner desselben genannt werden müssen, ist gewiss eine der interessantesten Erscheinungen in der Geschichte der Wissenschaften und beweist eben nur, wie Jahrhunderte lang das System eines grossen Philosophen die hervorragendsten Geister, die hellsehendsten Köpfe trotz seiner Richtigkeit gefesselt halten kann. Sollten wir uns da noch wundern, dass des Aristoteles Lehren während der langen dunkeln Zeit des Mittelalters das Scepter der Wissenschaften geführt haben? — Jene grossen Mathematiker, und alle übrigen Gegner Newton's waren eifrige Anhänger Descartes', der durch seine berüchtigte Wirbeltheorie die Bewegungen der Planeten um die Sonne und der Monde um jene zu erklären suchte. Wie schon Kepler theilweise gethan hatte, nahm Descartes den Weltraum von einer feinen Materie (Aether) erfüllt an, die in fortwährender Wirbelbewegung begriffen ist. So werden die Planeten durch einen solchen Wirbel, der sich gleich einem Strome um die Sonne dreht, mitgerissen; ebenso werden auch die Satelliten durch kleinere, untergeordnete Wirbel um ihren Hauptplaneten geführt. — Die französischen Naturforscher hingen mit zäher Starrheit an diesem System ihres als Philosophen zu sehr vergötterten Landsmannes; von diesen aus war keine Anerkennung Newton's zu erwarten. Dieselbe kam von einer Seite her, von der man es am wenigsten vermuthet hätte: Der Dichter Voltaire mit seinen *„Eléments de la philosophie de Newton“* (1738), und die geistreiche Marquise du Châtelet mit ihrer ausgezeichneten Uebersetzung der Principien (1759) haben besonders zur Verbreitung der neuen Lehre in Frankreich beigetragen. — Das übrige Europa erkannte etwas schneller die Wahrheit des Newton'schen Systems. Nachdem seine beiden grössten Feinde, Leibnitz und Joh. Bernoulli, gestorben waren, standen demselben keine gewichtigen Autoritäten mehr gegenüber.

Newton's „Principien" enthalten ausser dieser Theorie der Centralkräfte und ihrer astronomischen Anwendungen noch eine reiche Fülle der schönsten und schwierigsten Probleme der Mechanik. Besonders verdient das zweite Buch unsere höchste Bewunderung. Dasselbe handelt von der Bewegung der Körper in widerstehenden Medien, und zwar werden die Fälle unterschieden, wo der Widerstand erstens der Geschwindigkeit, zweitens dem Quadrate derselben und drittens beiden zugleich proportional ist; auch die kreisförmige Bewegung in widerstehenden Medien wird bestimmt. Die letzten Abschnitte handeln über Probleme der Hydrostatik und Hydrodynamik. Ich kann hier nicht näher auf Einzelnheiten eintreten, werde aber im Laufe meiner Geschichte noch öfter die Gelegenheit haben, auf die diessbezüglichen Leistungen Newton's hinzuweisen.

Wenn wir vom Standpunkt der principiellen Entwicklung der Mechanik ausgehen, so weist uns allerdings Newton's Werk keine neuen fundamentalen Wahrheiten auf, sondern es basiren seine Probleme bloss auf der Verallgemeinerung älterer Principien. Dasselbe bildet gleichsam ein stolzes, weitverzweigtes Gebäude, das auf den von Galilei bis Huyghens geschaffenen Grundpfeilern ruht, und kann zugleich als Schlussstein jener Periode betrachtet werden, wie sich diess auch in seiner formellen Darstellungsweise auffallend offenbart. Newton bediente sich noch der ältern synthetischen Methode, neigte aber in mehreren Beziehungen, so in seiner Theorie der ersten und letzten Verhältnisse und in der Darstellung seiner neuen Fluxionsmethode (Lemma II, Sect. II, Lib. II) zur analytischen Behandlungsart hin. Nach ihm tritt diese letztere entschieden in den Vordergrund, und wir werden in einem spätern Kapitel sehen, wie die Mechanik während des 18. Jahrhunderts stufenweise jener höchsten Ausbildung entgegengeführt wurde, die sie in Lagrange's analytischer Formulirung erlangt hat. So können wir Newton und Lagrange als die Hauptrepräsentanten oder vielmehr als die Schlusssteine zweier grosser Entwicklungsperioden der Mechanik betrachten. Mit des Ersteren Principien, noch in älterer synthetischer Darstellungsform abgefasst, schliesst das Zeitalter der Ausbildung der wesentlichsten und einfachsten Grundsätze der allgemeinen Mechanik, in des Letzteren analytischem Werke hingegen haben wir die von einem Brennpunkt ausgehende systematische Herleitung aller mechanischen Grundgesetze und ihre streng mathematische Formulirung.

Wenn wir am Schlusse dieses Kapitels noch einen schnellen Blick auf die wichtigsten Errungenschaften der übrigen angewandten Disciplinen werfen wollen, so weist uns vor Allem aus die Optik im Zeitalter von Huyghens und Newton die epochemachendsten Fortschritte auf. — Wir haben im 3. Kapitel gesehen, wie Snellius im Anfang des 17. Jahrhunderts durch Entdeckung des Brechungsgesetzes der raschen Entwicklung der Optik Bahn gebrochen hatte. Die weitere Ausbildung der elementaren formellen Optik geschah hierauf durch die *Lectiones opticae* eines Barrow und David Gregory, namentlich aber durch die Entdeckung und Begründung der Dispersion durch Newton und der doppelten Brechung durch den Dänen Erasmus Bartholinus (1625—1698) und durch Huyghens. Newton gab im Jahre 1672 in den *Philos. Trans.* die Erklärung der Erscheinung, dass das durch eine kleine, runde Oeffnung eines Fensterladens auf ein Prisma gefallene Sonnenlicht auf der gegenüberstehenden Wand des Zimmers kein helles rundes, sondern ein gefärbtes längliches Bild erzeugt, darin, dass das Sonnenlicht aus verschieden farbigem

Licht von verschiedener Brechbarkeit bestehen müsse. Ferner schloss nun Newton umgekehrt, dass die sieben Farben des Spektrums zusammengesetzt, weisses Licht geben würden. — Diess sind die einfachen Resultate von Newton's Entdeckung.*) — Auch hier, wie in seinem System der allgemeinen Gravitation, fand er eifrige Gegner. Der berühmteste, wenn auch nicht der gewichtigste, war der allerdings erst beinahe ein Jahrhundert nach Newtons Tode mit einer neuen Farbenlehre hervortretende Göthe. Wie wenig Anklang und Berücksichtigung des grossen Dichters hierauf bezügliche Schriften gefunden haben, ist bekannt. Die Grundlage derselben entbehrte jeden empirischen, wie theoretischen Haltes.**) — Zu den bedeutenden Männern, die Newton hierin widersprachen, gehörte auch Huyghens. Allein seine Widerlegungen richteten sich nicht sowohl gegen das Newton'sche Gesetz der verschiedenen Brechbarkeit der Strahlen, als vielmehr gegen seine Erklärung der physischen Ursachen dieser optischen Erscheinungen. Wie bekannt waren in den Ansichten über das Wesen des Lichtes Newton und Huyghens zwei principielle Gegner. Der Erstere vertheidigte die Emanations- oder Emissionstheorie, nach welcher das Licht eine Wirkung der von dem leuchtenden Körper ausströmenden unendlich kleinen Lichtpartikelchen wäre; der Letztere stellte die Undulationstheorie auf, die das Licht als eine Folge der Wellenbewegung einer im Weltraum verbreiteten feinen Flüssigkeit betrachtete. Diese Huyghens'sche Theorie ist auch im Laufe der Zeit immer mehr zur Anerkennung gelangt und endlich glänzend als Siegerin aus dem Kampfe hervorgegangen.

---

*) Vergl. seine *Optics*, London 1704, und seine *Optical lessons*, 1728.

**) Dass der Göthe'schen Farbenlehre gegenüber der Newton'schen in der allerneuesten Zeit wieder Geltung zu verschaffen versucht worden ist, mag wohl gerechtes Erstaunen hervorrufen. Die betreffende Schrift ist von einem gewissen C. Schramek verfasst und betitelt: Das Wärmespectrum der Sonne. Wien, 1872.

Es ist einleuchtend, wie viel leichter Huyghens mit Hülfe seiner Theorie die Erscheinungen der Reflexion, Refraction und Dispersion erklären konnte als Newton mittelst der Emissionstheorie, und dennoch war der Letztere nicht zu Huyghens' Ansicht zu bekehren. — Wir finden die optischen Arbeiten des grossen Niederländers in seinem *Traité de la lumière,* 1690, und in seiner posthumen Schrift: *Dioptrica.* Die Erstere enthält die Auseinandersetzung seiner Undulationstheorie, die hierauf fussende Erklärung der Reflexion und Refraction und schliesslich die Begründung der von Bartholinus zuerst am isländischen Kalkspath entdeckten und in seiner Abhandlung: *Experimenta crystalli islandici disdiaclastici* beschriebenen Erscheinung der doppelten Brechung. Huyghens kam auf geistreiche Weise zu dem Resultate, dass der aussergewöhnlich gebrochene Strahl für alle Lagen des einfallenden Strahles mittelst einer ein gegebenes Sphäroid tangirenden Ebene konstruirt werden könne. Wir werden später sehen, wie der berühmte Engländer Young die Ursachen dieser Erscheinung aus der ungleichen Elasticität des Aethers im Krystall und der hieraus resultirenden verschiedenen Geschwindigkeit des Lichtes nach den verschiedenen Axenrichtungen hergeleitet hat. — Zum Schlusse ist hier noch die Bemerkung beizufügen, dass Huyghens auch schon die Eigenschaft der Polarisation des Lichtes am isländischen Kalkspath entdeckt hatte. Er kommt auf diese Erscheinung noch am Ende des 5. Kap. seiner Abhandlung über das Licht kurz zu sprechen, ohne aber den Grund derselben weiter zu verfolgen.

VII.

Wenden wir uns nun im Folgenden zu den grossartigen Fortschritten, die die Mathematik in allen ihren Partieen im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts gemacht hat. Keine Wissenschaft hat wohl eine glänzendere und fruchtbarere Epoche ihrer Entwicklung aufzuweisen, keine solche hervorragende Coryphäen des Geistes in ihren Annalen zu verzeichnen, wie die Mathematik im verflossenen Jahrhundert. Die unsterblichen Namen eines Euler, Daniel Bernoulli, d'Alembert, Clairault, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Carnot u. And. zieren die Culturgeschichte dieser Periode; auch dürfen wir die nicht weniger genialen Männer nicht vergessen, deren Wirken theilweise noch jener Zeit angehört, Joh. Bernoulli, Maclaurin und Moivre im Anfange, Fourier und Gauss am Ende des Jahrhunderts. Ihre ersten Studien machten in diesem ferner noch Poisson, Cauchy, Poncelet, Young, Fresnel, während ihre ausgezeichneten Leistungen schon unserm Jahrhundert angehören.

Es ist begreiflich, dass bei dieser grossen Zahl ausserordentlicher Männer und bei der so ungewöhnlich mannigfaltigen Entwicklung und dem immer mehr sich kundgebenden Ineinandergreifen aller mathematischen Disciplinen, eine systematisch und organisch gegliederte geschichtliche Darstellung eine äusserst schwierige und schwer zu bewältigende Arbeit ist. Bis dahin bewegte sich die stetige Entwicklung der einzelnen Theile der Mathematik innerhalb leicht bemerkbarer Grenzen, und es war desshalb auch die chronologische Folge der auf den verschiedenen Gebieten

Mitarbeitenden leichter innezuhalten und enger mit der historischen Darstellung zu verknüpfen. Ich erinnere hier nur an die drei ziemlich scharf getrennten Methoden, die sich auf dem Gebiete der Geometrie von Descartes bis auf Newton geltend gemacht haben, nämlich erstens die Behandlungsweise jener Wissenschaft nach der Methode der Alten, zweitens nach der neueren eines Pascal und Desargues und drittens nach der analytischen des Descartes. Und als diese letztere unter Newton und Leibnitz sich zu dem grossen Systeme der Infinitesimalrechnung ausgebildet hatte, blieb sie immerhin noch unter den Bernoulli bis in's achtzehnte Jahrhundert hinein eine geschlossene, sich für sich selbst entwickelnde Disciplin. Aber von nun an machte sich in dieser Infinitesimalrechnung selbst eine gewisse Trennung der Entwicklung geltend; die rein analytische Ausbildung derselben führte auf verschiedene Gebiete hin, wie die Theorie der Differentialgleichungen, der Funktionen, die Variationsrechnung, etc., während in anderer Hinsicht sie wiederum als Hülfswissenschaft der Geometrie, Mechanik und Physik eine unbegrenzte, mannigfaltige Entwicklung eröffnete. Daneben erschliessen und erweitern sich im Laufe des Jahrhunderts einige andere weniger infinitesimale Disciplinen, wie die Theorie der algebraischen Gleichungen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Zahlentheorie, und zuletzt tritt wiederum die beinahe zwei Jahrhunderte lang mehr oder weniger unbeachtet gebliebene neuere Geometrie hervor. Darin aber liegt hauptsächlich der erschwerende Umstand einer klaren und übersichtlichen historischen Darstellung der Mathematik im achtzehnten Jahrhundert, dass nicht nur einzelne jener hervorragenden Männer auf bestimmten Gebieten sich bewegt haben, sondern dass die Leistungen einer grossen Zahl derselben sich über beinahe sämmtliche Disciplinen erstrecken.

Wenn nun doch eine gewisse Ordnung und Uebersichtlichkeit in das grosse, weitschichtige Material dieser Periode gelegt werden soll, so ist es nothwendig, dass jede der angeführten Hauptpartieen der mathematischen Wissenschaften einer getrennten geschichtlichen Behandlung unterworfen werde, so aber, dass der organische Zusammenhang, den die einzelnen Theile unter sich immerhin mehr oder weniger haben, gehörig berücksichtigt und innegehalten werden muss. Von diesem Standpunkt ausgehend, habe ich mir für dieses Capitel folgende Anordnung gebildet: Ich werde zuerst die Geschichte der niedern Analysis behandeln, worunter ich besonders die Theorie der Reihen (exponentiale, logarithmische und trigonometrische), der complexen Grössen, der Functionen im Allgemeinen rechne; hierauf zur weiteren Entwicklung der Infinitesimalrechnung, besonders der Differentialgleichungen und des Variationencalcüls übergehen. Es folgt dann im Weiteren die Geschichte der algebraischen Curven, der analytischen Geometrie überhaupt; hierauf die Theorie der algebraischen Gleichungen und die erste Entwicklung der Zahlentheorie und endlich die Combinationslehre mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Die biographischen Notizen über die betreffenden Mathematiker werde ich jeweilig am geeigneten Orte einschieben.

1. Die niedere oder algebraische Analysis.

Zur Zeit der ersten Entwicklung der Infinitesimalrechnung richteten sich die Bemühungen der Mathematiker hauptsächlich darauf, Wege und Mittel zur leichtern Lösung schwieriger Integrationsfälle aufzufinden. Dazu bot ihnen das Gebiet der niedern Analysis, besonders die Theorie der unendlichen Reihen eine reichliche Fundgrube mannigfaltiger Hülfsmittel dar. — Wir haben im IV. Cap. gesehen, wie schon Wallis in seiner *Arithmetica infinitorum* und später Newton in seiner *Methodus fluxionum* ihr

Augenmerk auf die Entwicklung der Functionen in unendliche Reihen gerichtet haben. Besonders hat der Letztere, gezwungen durch die Unkenntniss der Differentiation und Integration irrationaler Funktionen solche Entwicklungen in verschiedenen Fällen ziemlich eingehend auseinandergesetzt; die schönsten Dienste leisteten ihm dieselben vor Allem in der Integration der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung, deren geistreiche Lösung wir ebenfalls näher kennen gelernt haben. — Ich möchte, bevor ich die weitere Entwicklung dieses Gegenstandes verfolge, hier noch kurz auf eine andere Methode aufmerksam machen, die Newton für die Quadratur der Curven erfunden hat. Es ist diess seine *Methodus differentialis,* zum ersten Male im Jahre 1704 im Druck erschienen als Anhang zu seiner Optik.*) Der Titel könnte leicht zur Vermuthung führen, es handle sich hier um eine infinitesimale Methode, was keineswegs der Fall ist; dieselbe kann passender eine Differenzenmethode genannt werden. Sie besteht nämlich darin, dass man durch eine Anzahl von in bestimmten Intervallen aufeinanderfolgenden Punkten einer gegebenen Curve eine andere Curve legt, deren Quadratur ausführbar ist, z. B. eine Parabel, deren Gleichung in der allgemeinen Formel $y = ax + bx^2 + cx^3 \dots$ etc. enthalten ist und deren Ordinaten aus jenen angenommenen Punkten man nun messen muss. Mit Hülfe seiner Differenzenmethode bestimmt nun Newton aus diesen bekannten Ordinaten die Coefficienten a, b, c, etc. der gesuchten quadrirbaren Curve, deren Fläche zwischen denselben Ordinaten derjenigen der gegebenen Curve um so näher kommt, je mehr Punkte oder Ordinaten man angenommen hat. Die Bestimmung jener Coefficienten geschieht mit Hülfe der in der Auflösung der höheren numerischen Gleichungen und der Interpolation so wichtigen Differenzenreihen oder arithmetischen Progressionen

---

*) Vergl. *Newtoni opuscula math. etc. Edid. Castillioneus. 1744. T. I.*

höheren Grades, über welche Newton zuerst einige wichtigere Sätze aufgestellt hat. Schneidet man nämlich auf der Axe der gegebenen Curve von demselben Punkte aus die successiven Abscissen p, q, r, s, etc. ab, und errichtet in den Endpunkten derselben die Ordinaten α, β, γ, δ,... deren Grösse man bestimmt und deren Endpunkte in einer Curve liegen sollen, die der Gleichung genügt: $y = ax + bx^2 + cx^3$, so hat man, indem man jene Abscissen p, q, r, s... der Reihe nach in diese Gleichung einsetzt, die folgenden Beziehungen:

Abscissen	Ordinaten	
p	$ap + bp^2 + cp^3 = \alpha$	
q	$aq + bq^2 + cq^3 = \beta$	
r	$ar + br^2 + cr^3 = \gamma$	
s	$as + bs^2 + cs^3 = \delta$	etc.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die folgenden Gleichungen bestehen:

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha - \beta}{p - q} = a + b\,(p+q) + c\,(p^2+pq+q^2) = \varepsilon \\ \dfrac{\beta - \gamma}{q - r} = a + b\,(q+r) + c\,(q^2+qr+r^2) = \zeta \\ \dfrac{\gamma - \delta}{r - s} = a + b\,(r+s) + c\,(r^2+rs+s^2) = \eta \text{ etc (bei weit.Ord.)} \end{array} \right.$$

Ferner erhält man aus diesen:

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon - \zeta}{p - r} = b + c\,(p+q+r) = \vartheta \\ \dfrac{\zeta - \eta}{q - s} = b + c\,(q+r+s) = \varkappa. \end{array} \right.$$

Und hieraus endlich:

$$3. \quad \frac{\vartheta - \varkappa}{p - s} = c = \lambda.$$

Da nun α, β, γ, δ, und p, q, r und s bekannt, so können wir mit Hülfe dieser Formeln die Coefficienten a, b, c, berechnen. Betrachten wir die Ausdrücke $\frac{\alpha-\beta}{p-q}$, u. s. w., so sehen wir, dass die unter 1 nichts Anderes sind, als die Quotienten der successiven Differenzen der Ordinaten durch die Differenzen der entsprechenden Abscissen; diejenigen unter 2 aber die successiven Differenzen jener ersten Differenzen, oder die zweiten Differenzen der Ordinaten, dividirt durch das Intervall je zweier Abscissen, die unter 3 die dritten Differenzen dividirt durch das Intervall je dreier Abscissen u. s. f.

Hätte man z. B. für die successiven Abscissen die Zahlen 2, 3, 4, 5 etc., für die entsprechenden Ordinaten die Zahlen 56, 168, 376, 710 u. s. w., so würde man die Grössen ε, ζ, η, ϑ, $\varkappa$, λ, etc., mit Berücksichtigung der jeweiligen Divisoren aus folgendem Schema finden:

Reihe der Ordinaten:	56		168		376		710
Erste Differenzreihe:		112		208		334	
Zweite „ :			96		126		
Dritte „ :				30			

In diesem Falle würde man für a, b und c die Werthe 2, 3 und 5 finden und also die Gleichung $y = 2x + 3x^2 + 5x^3$ für die gesuchte Curve erhalten, deren Quadratur mit derjenigen der gegebenen um so genauer übereinstimmen würde, je kleiner man die Intervalle der Ordinaten angenommen hätte. Newton hat übrigens diese Methode noch dahin vereinfacht, dass er aus jenem Gesetze der Differenzreihen Formeln hergeleitet hat, mit deren Hülfe er die Quadratur der gegebenen Curve unmittelbar, ohne vorherige Aufstellung der Gleichung der Hüfscurve finden konnte. — Wir sehen in dieser Differenzenmethode Newton's nichts Anderes als unser heutiges Interpolationsverfahren, das in vielen Fällen der praktischen Arithmetik, besonders in der Berechnung der Logarithmen und in der Astronomie eine so wichtige Rolle spielt, angewendet. Die Formel, die Newton für irgend eine zur Abscisse x gehörige Ordinate y aufgestellt hat, nämlich:

$$y = k + xl + \frac{x^2}{2} m + \frac{x^3 - x}{6} n + \frac{x^4 - x^2}{24} o + \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{120} p + \ldots$$

und wo k, l, m . . etc. bekannte, aus den jeweiligen Differenzreihen der numerisch gegebenen Ordinaten hergeleitete Faktoren sind, ist in der noch jetzt unter dem Namen der Newton'schen Interpolationsformel bekannten Reihe enthalten:

$$a_n = a + \binom{n}{1} \Delta a + \binom{n}{2} \Delta^2 a + \binom{n}{3} \Delta^3 a + \ldots$$

wo Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ etc. die ersten, zweiten, dritten u. s. w. Differenzen der Zahlenreihe:

$$a_{-n}, a_{-n+1} \ldots . a_{-1}, a, a_1, \ldots . . a_n$$

bedeuten. Die Beziehung von a, Δa u. s. w. zu k, l, etc. und der Binominalkoefficienten $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ . . zu den aus x gebildeten Faktoren, ist leicht nachzuweisen.

Andere sehr bequeme Methoden zur approximativen Quadratur, wie auch Rectification krummer Linien wurden von Lambert und Thomas Simpson*) aufgestellt. Des Letztern Regel zur Bestimmung des Flächeninhaltes einer Curve wird noch jetzt die Simpson'sche genannt. — Indem wir durch Betrachtung von Newton's *Methodus differentialis* auf die Interpolation geführt worden sind, scheint es angezeigt, auf die Entwicklung dieser Theorie an dieser Stelle kurz einzutreten. Die nächste Ausbildung derselben nach Newton verdanken wir dem ausgezeichneten englischen Mathematiker Stirling. Er veröffentlichte seine Arbeiten hierüber in dem Werke: *Methodus differentialis seu de summatione et interpolatione serierum, London 1730.* Auch er schlägt den gleichen Weg wie Newton ein, indem er von der approximativen Quadratur der Curven ausgeht. Seine

*) *Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical subjects. London, 1743.*

zum Zwecke der Einschaltung einer Ordinate zwischen zwei andere abgeleitete Formel ist die eigentliche heutzutage angewandte Interpolationsformel. Seien die den Abscissen 0, 1, 2, 3, 4, ... entsprechenden Ordinaten $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128} \ldots$ so erhält man folgende Differenzreihen:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{8} & & \frac{5}{16} & & \frac{35}{128} \\
& -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{8} & & -\frac{1}{16} & & -\frac{5}{128} & \\
& & \frac{3}{8} & & \frac{1}{16} & & \frac{3}{128} & & \\
& & & -\frac{5}{16} & & -\frac{5}{128} & & & \\
& & & & \frac{35}{128} & & & &
\end{array}
$$

Es sind nun die successiven Differenzen der beiden ersten Ordinaten 1 und $1/2$, d. h. die Zahlen $-\frac{1}{2}, +\frac{3}{8}, -\frac{5}{16}, +\frac{35}{128} \ldots$ die Coefficienten der irgend eine Ordinate repräsentirenden Reihe, also:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\binom{x}{2} - \frac{5}{16}\binom{x}{3} + \frac{35}{128}\binom{x}{4} - \ldots,$$

Setzt man hierin für x successiv die Werthe 0, 1, 2, 3 ... so erhält man wieder unsere obige Ordinatenreihe; setzt man aber $x = \frac{1}{2}$, so erhält man die Ordinate in der Mitte zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, für $x = \frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, erhält man 2 Ordinaten in gleichen Intervallen zwischen der ersten und zweiten u. s. f.

Mit der Theorie der Interpolation beschäftigten sich im Laufe des Jahrhunderts noch eine Reihe von Mathematikern, ohne wesentliche Aenderungen in derselben hervorzurufen, so Friedrich Christoph Mayer*), die Astronomen Lacaille**), und Lalande***), Lagrange†), Laplace††) und Andere. Indem der Raum mir nicht gestattet, näher auf Einzelnheiten einzutreten, verweise ich auf die citirten Schriften.

Die eigentliche Theorie der unendlichen Reihen beginnt mit Newton. Wir wissen, dass derselbe schon in der ersten Zeit seiner wissenschaftlichen Thätigkeit sich auf diesem Gebiete ausgezeichnet und namentlich den für die Entwicklung irrationaler Functionen in unendliche Reihen, überhaupt für die ganze Analysis so wichtigen binomischen Lehrsatz aufgestellt und seine Gültigkeit für negative und gebrochene Exponenten nachgewiesen hat.

Leibnitz veröffentlichte 1682 in den *Act. erud. Lips.* eine Abhandlung betitelt: *De proportione circuli ad quadratum circumssriptum,* in welcher er einige Reihen betrachtet, die mit dem Kreise und dessen eingeschriebenem und umschriebenem Quadrate in Beziehung stehen. So findet er die Summe der Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{ in inf.}$$

in welcher die Zähler gleich der Einheit und die Nenner die Quadrate der natürlichen Zahlen von 2 an vermindert um 1 sind, gleich $\frac{3}{4}$. Nun ist die Summe der ungeraden Glieder der Reihe, also

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \text{ in inf.} = \frac{1}{2}$$

die Summe der geraden Glieder also $= \frac{1}{4}$, die Summe

*) *Comment. acad. Petrop. Tom. II. pag. 180.*

**) *Lectiones astronomicæ, Viennæ, 1757.*

***) *Mém. de l'acad. des sciences, 1761. pag. 125.*

†) *Astron. Jahrbuch, Berlin 1783, und Mém. de l'acad. des sciences, 1772 pag. 513.*

††) *Mém. de l'acad. des sciences. 1779 pag. 207.*

der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ in inf. aber gleich der Fläche des Kreises, dessen umschriebenes Quadrat $= \frac{1}{2}$, das eingeschriebene also $= \frac{1}{4}$ ist. — Die Beweise dieser Summationen gab Leibnitz nicht; dieselben finden sich aber in den reichhaltigen Abhandlungen über die Reihentheorie von Jakob Bernoulli*), die von 1689—1697 in den *Act. erud. Lips.* unter dem Titel erschienen sind: *Positiones arithmeticæ de seriebus infinitis earumque summa finita.* In den beiden ersten Abhandlungen stellt er zuerst einige allgemeine Sätze über die Eigenschaften der Reihen auf und geht dann zur Summation einer Anzahl nach einfacheren Gesetzen gebildeten Reihen über. Die späteren Abhandlungen enthalten Anwendungen der Reihensummation auf Quadraturen und Rectificationen. Durch welche Kunstgriffe Bernoulli in vielen Fällen den Werth einer Reihe fand, zeigt die Summation der oben angeführten Leibnitz'schen Reihen:

Wird von der Reihe $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$

abgezogen die Reihe $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdots = A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

so bleibt $C = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} \cdots = A - B = \frac{3}{2}$

und daher $D = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} \cdots = \frac{1}{2} C = \frac{3}{4}$

Und zweitens:

Wird von der Reihe $E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots$

abgezogen die Reihe $F = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots = E - 1,$

*) *Vide Opera omnia T. I. pag 375 und 517 und T. II. pag. 745 849 und 953.*

so bleibt $G = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} \cdots = E - F = 1$

und daher $H = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} \cdots = \frac{1}{2}\ G = \frac{1}{2}$

und desshalb auch $J = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} \cdots = D - H = \frac{1}{4}$.

Wie diese Reihen mit dem Kreise und seinem ein- und umgeschriebenen Quadrate in Beziehung stehen, zeigt Jak. Bernoulli auf folgende Weise:

Ist in Fig. XXII $BE = x$, $FE = dx$ und der Radius AB des Kreises $BCD = 1$, so ist, wie bekannt, der Sector LAH, d. h. das Differential des Sectors $BAH = \frac{dx}{2\sqrt{2x - x^2}}$.

Um diesen Ausdruck zu integriren, verwandelt man ihn in eine unendliche Reihe und setzt zu diesem Zwecke

$\frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} = t$, so wird

$$\frac{dx}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$dt - t^2\,dt + t^4\,dt - t^6\,dt + \ldots \text{ in inf.}$$

Diess integrirt gibt für den Sector BAH den Werth:

$$t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{5}\,t^5 - \frac{1}{7}\,t^7 + \ldots \text{ in inf.}$$

und für den Bogen BH die Reihe

$$2t - \frac{2}{3}\,t^3 + \frac{2}{5}\,t^5 - \frac{2}{7}\,t^7 \ldots \text{ in inf.}$$

Aus der Gleichheit der Winkel BAI und ADK und der Aehnlichkeit der Dreiecke DAK und DEH folgt aber:

$$AD : AK = DE : EH = EH : BE \text{ oder}$$

$$1 : AK = \sqrt{2x - x^2} : x = 1 : t,$$

also $AK = BI = t$.

Für $t = 1$ wird auch $x = 1$ und man hat in diesem Falle für die Fläche des Quadranten BAC die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \text{ in inf.}$$

oder, wenn man die Subtraction je zweier Glieder vollzieht,

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \dots \text{ in inf.}$$

Es verhält sich aber das Ouadrat des Radius zum Kreisquadranten wie das Quadrat des Durchmessers zum ganzen Kreise. Ist also das Quadrat des Durchmessers oder die Fläche des umschriebenen Quadrates $= 1$, die des eingeschriebenen daher $= \frac{1}{2}$, so stellt obige Reihe die Fläche des ganzen Kreises dar; ist aber die Fläche des umschriebenen Quadrates nur $= \frac{1}{2}$, die des eingeschriebenen also $= \frac{1}{4}$, so ist die Hälfte obiger Reihe, d. h.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \dots \text{ in inf.}$$

gleich der Fläche des Kreises. q. e. d.

Newton*) sowie Leibnitz haben auch schon die Beziehung gefunden, dass der Bogen, dessen Tangente gleich t, durch die Reihe repräsentirt wird.

$$t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \dots \text{ in inf.}$$

dass also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \text{ in inf.}$$

Das hier angeführte Verfahren Bernoulli's, Reihen zu summiren, indem man dieselben in andere zerlegt, deren Summe schon bekannt oder wenigstens leichter zu finden ist, oder indem man von der gegebenen Reihe die nämliche, vermindert um das erste oder mehrere der ersten Glieder,

*) *Opuscula, edid. Castillioneus, 1744, pag. 328, etc.*

subtrahirt, konnte in vielen Fällen mit Erfolg angewandt werden, und war sehr oft da von Nutzen, wo das Bildungsgesetz der Reihe wohl leicht zu erkennen, aber nicht in eine allgemein gültige algebraische Formel einzukleiden war. — Nach Jak. Bernoulli beschäftigten sich unter Anderen hauptsächlich sein Bruder Johannes, sein Neffe Nikolaus Bernoulli und der französische Mathematiker de Montmort (Paris, 1678—1719) mit der Summation von Reihen; vor Allem aus aber hat *Euler* die Grenzen dieser Theorie in hohem Maasse erweitert; wir kommen weiter unten auf seine diessbezüglichen Arbeiten zu sprechen.

Von grösserer, weittragenderer Bedeutung ist die Theorie derjenigen Reihen, in denen jedes Glied in konstanter, sich immer gleich bleibender Beziehung zu einem oder mehreren der vorhergehenden Glieder steht. Abraham de Moivre hat dieselben recurrirende Reihen genannt und sich zuerst eingehender mit ihrer Theorie befasst in dem ausgezeichneten Werke, betitelt: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Lond. 1730.* — Zugleich die einfachste und die allgemeinste recurrirende Reihe ist die geometrische Progression; denn von vornherein ist bekannt, dass jene constante Relation nur zwischen einem Gliede und dem unmittelbar vorhergehenden besteht; dann kann aber nachgewiesen werden und Moivre hat diess in der That schon gethan, dass eine konstante Beziehung eines Gliedes mit so vielen der vorhergehenden als man will aufgefunden werden kann. Eine recurrirende Reihe, in der jedes Glied in einem konstanten Verhältniss mit den zwei vorhergehenden steht, ist z. B. folgende:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ 1 + & 3x + & 4x^2 + & 7x^3 + & 11x^4 + \dots \end{array}$$

$$\text{wo } C = Bx + Ax^2,\ D = Cx + Bx^2, \text{ etc.}$$

Diese Faktoren von x u. x^2, womit die vorhergehenden Glieder multiplicirt werden müssen, nennt Moivre die *scala relationis.*

Eine recurrirende Reihe mit dreigliedriger scala relationis wäre slso:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ 1 + & 2x + & 3x^2 + & 10x^3 + & 34x^4 + \dots, \end{array}$$

wo $D = 3Cx - 2Bx^2 + 5Ax^3$, $E = 3Dx - 2Cx^2 + 5Bx^3$ etc., und die scala $= 3x - 2x^2 + 5x^3$.

Einer der Hauptsätze über die recurrirenden Reihen ist der schon von Moivre in dem angeführten Werke aufgestellte und bewiesene, dass nämlich jede rationale, ächt gebrochene Function sich in eine recurrirende Reihe entwickeln lässt, deren Relationsscala in nächster Beziehung zum Nenner der Function steht. So lässt sich z. B. die Funktion $\dfrac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2}$ in die Reihe entwickeln:

$$1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + \dots\dots$$

deren Relationsscala $= 5x - 6x^2$ ist, d. h. gleich dem Nenner, vermindert um das erste Glied und mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Ist das erste Glied nicht $=$ 1, sondern irgend eine beliebige andere Zahl, so dividirt man den Nenner durch dieselbe, und man hat wiederum als Relationsscala alle Glieder des nunmehrigen Nenners ohne das erste Glied mit umgekehrtem Zeichen. Es lässt sich dieser Satz mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten leicht als allgemein gültig nachweisen.

Das Hauptinteresse in der Theorie der recurrirenden, der unendlichen Reihen überhaupt, liegt in der Frage nach der Form des allgemeinen Gliedes; denn von der Kenntniss dieses letztern hängt zum grössten Theile die Möglichkeit einer nähern Discussion der Reihe, vor Allem aber ihre Summation ab. **Euler** hat in dieser Frage, wie in so vielen andern Problemen der algebraischen Analysis sich unstreitig ein grosses Verdienst erworben. Sein unübertreffliches Werk: *Introductio in analysin infinitorum (2 Bände, Lausannæ 1748)* bietet uns die reichste Fülle der wichtigsten, für das Studium der höheren Analysis unentbehrlichsten Sätze und Probleme.

Es enthält alle vor Euler und zu seiner Zeit gemachten Entdeckungen auf dem Gebiete der niederen Analysis, der analytischen Geometrie, und macht daher seinem Titel als erstes, ausführlichstes und vollkommenstes Einleitungsbuch in das Studium der Infinitesimalrechnung, wie kein anderes, alle Ehre. — Das grossartige, vielgestaltige Talent des unsterblichen Mathematikers, seine ausserordentlichen Leistungen auf allen Gebieten des mathematischen Wissens und die erstaunliche Fruchtbarkeit seiner Feder, lassen uns nur schwer entscheiden, in welcher Sphäre der so ausgedehnten und vielgliedrigen Wissenschaft diesem schöpferischen Geiste der höchste Ruhm zukommt. Dieser Umstand hat mich bewogen, gleich hier im Anfange bei Betrachtung der Geschichte der niedern Analysis, obgleich seine Thätigkeit auf diesem Gebiete nicht zur erfolgreichsten und am meisten bewunderten gehört, dem Leser ein kurzes Bild des Lebens und Wirkens des grossen Mannes vorzuführen; ich verweise auf die untenstehende Note. *)

---

*) Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 zu Basel geboren. Sein Vater war Pfarrer zu Riehen und gab seinem Sohne eine streng religiöse Erziehung, deren Einfluss sich während seines ganzen Lebens in bedeutendem Grade offenbarte. Er war daher auch, wie Jakob Bernoulli zum geistlichen Stande bestimmt, was ihm aber ungeachtet seiner dahin zielenden Erziehung nicht behagte. So widmete er sich auf der Universität Basel unter Joh. Bernoulli mit grossem Erfolge der Mathematik. Schon in seinem 19. Jahre löste er die Preisaufgabe der Pariser Akademie über die Leitung der Schiffe, welche Lösung allerdings nicht den ersten Preis erhielt. In seinem 20. Lebensjahre ging er auf den Ruf Daniel Bernoulli's nach Petersburg, wurde dort Adjunct der mathematischen Klasse der Akademie und nach 6 Jahren, 1733, nach dem Weggange Daniel Bernoulli's, Mitglied derselben. Im Jahre 1741 verliess er diese Stadt wieder und ging auf die Einladung Friedrichs des Grossen nach Berlin, um dort die Stelle eines Präsidenten der Akademie zu bekleiden. 1766 kehrte er abermals nach Petersburg zurück, wo er noch bis am 7. Sept. 1783 der Wissenschaft diente, an welchem Tage er durch einen Schlaganfall plötzlich dem Leben entrissen wurde. Er hinterliess viele Kinder, unter denen

Die Arbeiten Euler's über die recurrirenden Reihen finden sich im XIII. Cap. des ersten Bandes seiner *Introductio.* Hier gibt er zuerst das Verfahren an, durch welches das allgemeine Glied der Reihe gefunden werden kann. Hat man z. B. irgend eine ächt gebrochene Funktion und die aus ihr abgeleitete recurrirende Reihe, so ist ersichtlich, dass diese letztere die Summe aller derjenigen recurrirenden Reihen bildet, die einzeln aus den Partialbrüchen hergeleitet werden können, aus denen jene ächt gebrochene Function zusammengesetzt ist. Irgend ein Glied der allgemeinen Reihe ist dann also die Summe der mit gleich hohen Potenzen der Variabeln behafteten Glieder der Partialreihen. Euler hat nun in einem frühern Capitel gezeigt, wie man eine ächt gebrochene Function in ihre Partialbrüche zerlegt. Das allgemeine Glied einer aus einem solchen Partialbruch entstehenden recurrirenden Reihe ist aber sehr leicht anzugeben; so ergibt der Bruch $\frac{A}{1 - px}$ die Reihe: $A + Apx + Ap^2x^2 + \dots$ deren allgemeines Glied $= Ap^nx^n$; der Bruch $\frac{A}{(1 - px)^2}$ lässt sich in die Reihe entwickeln: $A + 2\,Apx +$

sein Sohn Albert ebenfalls bedeutender Mathematiker und Mitglied der Berliner, Pariser und Petersburger Akademien war. Obgleich viele Jahre blind (1735 verlor er das eine Auge, 1766 das zweite) ist dennoch seine literarische Fruchtbarkeit eine ausserordentliche und wohl von keinem Mathematiker erreicht worden. Die Commentarien der Petersburger Akademie und viele andere Journale enthalten eine Unzahl von mathematischen Aufsätzen Eulers von 1729 bis 1830, 47 Jahre nach seinem Tode. Seine grösseren Werke werde ich bei Gelegenheit im Texte erwähnen. Was die Schriften des grossen Mannes vor Allem aus kennzeichnet, ist die bewunderungswürdige Eleganz und Klarheit in den schwierigsten Deductionen. Seine tiefsten Untersuchungen sind mit einer seltenen Leichtigkeit zu verfolgen und tragen nicht jenes verschwommene, schwer entwirrbare Gepräge, das das Studium der Werke so vieler Mathematiker nur zu sehr erschwert. Vergl. für ihn: *Condorcet, éloge de L. Euler (Mém. de l'ac. 1782),* und N. Fuss, Lobrede auf Euler, Basel, 1786.

$3Ap^2x^2 + \ldots$ deren allgemeines Glied $= (n+1)\,Ap^n x^n$;

und allgemein gibt uns der Bruch $\frac{A}{(1-px)^k}$ die Reihe:

$$A + k.\,Apx + \frac{k(k+1)}{1.2}Ap^2x^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1\;.\;2\;.\;3}Ap^3x^3 + \ldots$$

und daher das allgemeine Glied: $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1\;.\;2\;\ldots.\;(k-1)}Ap^n x^n$.

Soll z. B. das allgemeine Glied der Reihe:

$$1 + 0x + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + \ldots. = \frac{1-x}{1-x-2x^2}$$

deren Relationsscala nach dem oben gegebenen Kriterium $x + 2x^2$ ist, gefunden werden, so sucht man vorerst die Partialbrüche der die Reihe erzeugenden gebrochenen Function, die in unserm Falle $\frac{\frac{2}{3}}{1+x}$ und $\frac{\frac{1}{3}}{1-2x}$ sind. Aus diesem findet man sogleich die beiden allgemeinen Glieder der Partialreihen: $\frac{2}{3}(-1)^n x^n$ und $\frac{1}{3}2^n.x^n$; also das allgemeine Glied der obigen Hauptreihe: $(\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n)\,x^n = \frac{2^n \pm 2}{3}.\,x^n$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Euler betrachtet im Weitern auch die Fälle, in welchen der Nenner der ächt gebrochenen Function gleiche und imaginäre Factoren besitzt. Ich kann hier nicht näher auf Einzelnheiten eintreten und verweise desshalb auf das betreffende Capitel.

Was nun die Summe einer recurrirenden Reihe betrifft, so ist offenbar, dass dieselbe bei unendlicher Gliederzahl gleich ist der ächt gebrochenen Function, aus der die Reihe abgeleitet ist. Diese Function zu finden, ist nun eine leichte Sache, sobald die Relationsscala der Reihe bekannt ist. Denn dann ist der Nenner des Bruches sofort gegeben und aus diesem und der Reihe kann der Zähler mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten leicht berechnet werden. Allein zu erkennen, ob die vorgelegte Reihe eine recurrirende sei und ihr Bildungsgesetz zu finden, ist oft mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden. So ist auf den ersten Blick kaum herauszufinden, dass die Reihe:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7 + \dots.$$

eine recurrirende ist. Und doch ist dies der Fall, ihre Relationsscala ist: $3x - 4x^2 + 3x^3 - x^4$. Lagrange hat zuerst den Weg angegeben, wie man Reihen als recurrirende erkennen und ihre Scalen finden kann. Man findet seine Untersuchungen hierüber in der schon bei Betrachtung der Interpolation citirten Abhandlung der Memoiren der Par. Akad. vom Jahre 1772, betitelt: *Recherches sur la manière de former des tables des planètes d'après les seules observations.*

Die recurrirenden Reihen haben vielfach nützliche Anwendung gefunden, so vor Allem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Auflösung der numerischen Gleichungen. In letzterer Hinsicht müssen wir besonders Daniel Bernoulli erwähnen. Derselbe hat im III. Bande der Commentarien der Petersburger Academie eine Abhandlung veröffentlicht, unter dem Titel: *Observationes de seriebus recurrentibus* etc. — Um die kleinste Wurzel irgend einer Gleichung n^{ten} Grades approximativ zu finden, verfährt Daniel Bernoulli folgendermaassen:

Man bringe die Gleichung in die Form: $1 = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$

Dann bilde man eine recurrirende Reihe, indem man so viele Glieder derselben beliebig annimmt, als der Grad der Gleichung beträgt und die folgenden nach der aus den Coefficienten der Gleichung gebildeten Relationsscala $a + b + c + d \dots$ bestimmt, so dass, wenn A, B, C, D, etc. die fortlaufenden Glieder dieser Reihe darstellen, das Glied E z. B. durch die Formel gefunden wird:

$$E = aD + bC + cB + dA + \dots$$

Seien nun in dieser recurrirenden Reihe M und N zwei aufeinander folgende Glieder, so kommt der Quotient $\frac{M}{N}$ der kleinsten Wurzel der vorgelegten Gleichung um so näher, je weiter zurück in der Reihe die Glieder M und N stehen. — Hat man z. B. die Gleichung 4. Grades:

$$1 = -2x + 5x^2 - 4x^3 + x^4,$$

und nehme man also die 4 ersten Glieder der zu bildenden recurrirenden Reihe beliebig an, z. B. 1, 1, 1, 1, so erhält man, indem man die Reihe nach der Relationsscala $-2, +5, -4, +1$, fortsetzt, die recurrirende Reihe:

$$1, 1, 1, 1, 0, 2, -7, 25, -93, 341, -1254, \ldots$$

und für die kleinste Wurzel der vorgelegten Gleichung also den angenäherten Werth: $-\frac{341}{1254}$

Die grösste Wurzel der Gleichung findet man, indem man dieselbe in umgekehrter Ordnung schreibt, also:

$$x^4 = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1,$$

hierauf in gleicher Weise nach der Relationsscala $4, -5, + 2, -1$, die recurrirende Reihe bildet, welche in diesem Fall

$$1, 1, 1, 1, 0, -4, -15, -41, -97, -209, \ldots$$

wird; dann ist $\frac{209}{97}$, also ein Glied durch das vorhergehende anstatt wie im ersteren Falle durch das nachfolgende dividirt, der angenäherte Werth der grössten Wurzel der vorgelegten Gleichung. — Für die Fälle gleicher und imaginärer Wurzeln der Gleichung, sowie für die Beweise obiger Sätze, verweise ich auf die äusserst interessante Abhandlung.

Neben Eulers *Introductio* enthält besonders der zweite Theil seiner *Institutionum calculi differentialis, Petrop. 1755*, die mannigfaltigsten Sätze über die Theorie der Reihen. Wir treffen hier hauptsächlich auf die Reihen der Potenzen der ganzen Zahlen und Polygonalzahlen mit abwechselndem Zeichen, wie z. B.:

$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \ldots \text{ oder}$$
$$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \ldots$$

dann auf solche von Brüchen, deren Nenner die Potenzen der ganzen Zahlen oder die Polygonalzahlen sind, wie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots . \text{ oder}$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots . \text{ oder}$$
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots . \text{ etc.}$$

Die Bestimmung des allgemeinen Gliedes, die Summation und die Untersuchungen über Convergenz und Divergenz werden hier erschöpfend an interessanten Beispielen vollzogen. Der letztere Punkt der Reihentheorie stand damals freilich noch in seiner ersten Entwicklung, und daher war das Criterium der Convergenz oder Divergenz in ausserordentlich vielen Fällen noch sehr schwankend. Euler hat im 7. Bande der Petersburger Commentarien eine Abhandlung über diesen Gegenstand veröffentlicht, die aber damals kaum geeignet war, die Unterscheidung der Convergenz und Divergenz einer Reihe wesentlich zu erleichtern.

Mit der allgemeinen Theorie der Reihen beschäftigten sich im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts eine ganze Reihe hervorragender Mathematiker. Auf die Arbeiten der Einzelnen einzutreten, würde uns hier zu weit führen; ich mache desshalb den Leser bloss auf einige der nennenswerthesten Schriften über diesen Gegenstand aufmerksam. Die Engländer Maclaurin und Thomas Simpson haben in ihren beiden „*A treatise of fluxions*“ betitelten Abhandlungen und der letztere ausserdem in seinen *Miscellaneous tracts* die verschiedensten Reihen eingehend behandelt; ebenso John Landen in seinen *Mathematical lucubrations, London, 1755*, und Charles Hutton (1737—1823), Professor zu Woolwich, in der Schrift: *Miscellaneous tracts both physical and mathematical, London,* *1778.* Schliesslich habe ich noch das Werk: *De seriebus convergentibus* (1778) des Italieners Lorgna, Professor der Mathematik zu Verona, zu erwähnen.

Einen äusserst wichtigen Theil der algebraischen Analysis bildet die Theorie der Exponential- und logarithmischen Reihen. Wie man heutzutage von den erstern ausgeht, um die Theorie der Logarithmen abzuleiten und dieselben zu berechnen, so hatte man dagegen im Beginn der Entwicklung dieses Gebietes, bevor die allgemeine Exponentialreihe abgeleitet war, schon genügende Hülfsmittel, die natürlichen Logarithmen zu berechnen, und zwar geschah diess mit Hülfe derselben Reihen, die man jetzt noch zur Anwendung bringt.

Wie wir aus dem IV. Theile wissen, verdankt man Mercator (*Logarithmotechnia, 1668*) die erste Darstellung der Beziehung der natürlichen Logarithmen zur Quadratur der Hyperbel, und die hierauf sich gründende Berechnung derselben mittelst unendlicher Reihen. Allein es ist erwiesen, dass Newton jene Beziehungen schon gekannt hat, bevor das genannte Werk Mercator's erschien. In einem Briefe *) des grossen Engländers an Oldenburg, den Secretär der *Royal society*, vom Oktober 1676, finden wir dieselben kurz auseinandergesetzt. Newton bemerkt zuerst über den Zeitpunkt der Erfindung folgendes: *Eo tempore pestis ingruens (quæ contigit annis 1665, 1666) coëgit me hinc fugere, et alia cogitare. Addidi tamen subinde condituram quandam logarithmorum ex area hyperbolæ, quam hic subjungo.* — An einer andern Stelle gibt Newton hochherzig zu, dass Mercator, obgleich er seine Methode erst 1668 publicirte, dieselbe doch vor ihm gefunden haben möge: *Sed ubi prodiit ingeniosa illa Nicolai Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) cœpi ea minus curare;* etc. — Newtons Ableitung ist folgende:

---

*) *Is. Newtonii opuscula*, *T. I 1744.*

Es sei (Fig. XXIII) dFD eine gleichseitige Hyperbel, deren Centrum C, der Scheitel F ist. AC, also auch AFEC sei $= 1$. Man nehme Ab, sowie AB $= \frac{1}{10}$ an, und errichte die Perpendikel bd und BD, so ist die halbe Summe der Flächen AD und Ad

$$= 0{,}1 + \frac{0{,}001}{3} + \frac{0{,}00001}{5} + \frac{0{,}0000001}{7} + \text{etc.}$$

und ihre halbe Differenz

$$= \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}0001}{4} + \frac{0{,}000001}{6} + \frac{0{,}00000001}{8} + \text{etc.}$$

Die erste Reihe gibt den Werth: 0,1003353, die zweite: 0,0050252; die Summe beider: 0,1053605 ist gleich Ad, die Differenz 0,0953102 gleich AD. Diess sind aber nichts Anderes als die natürlichen Logarithmen der Zahlen 0,9 (eigentlich $\frac{1}{0{,}9}$, denn Cb < 1) und 1,1. Setzt man gleicherweise AB $=$ Ab $= 0{,}2$, so erhält man die Logarithmen von 0,8 (eigentlich $\frac{1}{0{,}8}$) und 1,2; und hieraus sofort den Logarithmus von 2 (indem $\frac{1{,}2}{0{,}8} \cdot \frac{1{,}2}{0{,}9} = 2$) $= 0{,}6931472$.

Die erste der beiden Zahlenreihen wird also repräsentirt durch die allgemeine Reihe:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

die letztere durch:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \cdots$$

von denen die erste die halbe Summe, die zweite die halbe Differenz der beiden Reihen

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

darstellt. Diese zwei Reihen aber sind, wie bekannt, beziehungsweise gleich den Logarithmen von $(1 + x)$ und $(1 - x)$, der letztere mit negativem Zeichen genommen.

Newton's und Mercator's unmittelbare Nachfolger in der Theorie der Logarithmen sind James Gregory und Edmund Halley. Während der erstere ebenfalls wie seine Vorgänger von geometrischen Gesichtspunkten ausging und in dieser Hinsicht einige interessante Sätze über das Verhältniss trigonometrischer Functionen zu ihren Logarithmen aufgestellt hat, stiess Halley auf rein analytischem Wege auf die oben gefundenen logarithmischen Reihen. Seine Ableitung, die sich in den *Philos. Transact.* vom Jahre 1695 befindet, ist im Grunde von derjenigen Eulers nicht verschieden; ich gebe von der letzteren im Folgenden die Hauptzüge an.

Die wichtigsten Sätze über die Exponential- und logarithmischen Reihen wurden auch von Euler, und zwar in seiner *Introductio in anal.* etc. mit gewohnter Gründlichkeit und Klarheit behandelt. Das VI. Cap. des ersten Bandes enthält die allgemeinen Grundtheorien der Exponentialgrössen und Logarithmen; das VII. Cap. dagegen, betitelt: *De quantitatum exponentialium ac logarithmorum per series explicatione*, zeigt uns die Darstellung jener Grössen in der Form unendlicher Reihen. Euler gibt daselbst folgende Ableitung:

„Wenn w eine unendlich kleine Grösse vorstellt, so kann man setzen $a^w = 1 + kw$, daher auch, was immer i für eine Zahl sein mag, $a^{iw} = (1 + kw)^i$. Es ist nun aber in eine Reihe entwickelt:

$$a^{iw} = 1 + i \, . \, kw + \frac{i(i-1)}{1 \, . \, 2} k^2w^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} k^3w^3 + \text{etc.}$$

Setzt man jetzt $i = \frac{z}{w}$, wo z irgend eine endliche Zahl, so wird also i, weil w unendlich klein angenommen wurde, unendlich gross, und $w = \frac{z}{i}$ ist also, wie vorausgesetzt, unendlich klein. Setzt man nun anstatt w den Bruch $\frac{z}{i}$ in obige Reihe ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1\,(i-1)}{1\,.\,2i} k^2 z^2 + \frac{1\,(i-1)\,(i-2)}{1\,.\,2i\,.\,3i} k^3 z^3 + \text{etc.}$$

Da nun i unendlich gross ist, so wird $\frac{i-1}{i} = 1$, $\frac{i-2}{i} = 1$, u. s. f.; daher $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$, etc. Diese Werthe in die Reihe für a^z eingesetzt, gibt:

$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3 z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{in inf.}$$

Diese Gleichung gibt zugleich die Beziehung zwischen a und k; denn z = 1 gesetzt, wird

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{k^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots$$

Da nun $a^w = 1 + kw$, wenn w unendlich klein gesetzt wird, und das Verhältniss zwischen a und k durch die Gleichung festgesetzt wird:

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

so wird, wenn a als Basis eines Logarithmensystems angenommen wird:

$$w = l(1 + kw) \text{ und } iw = l(1 + kw)^i.$$

Es ist aber klar, dass je grösser i angenommen wird, desto mehr die Potenz $(1 + kw)^i$ die Einheit übersteigen wird; und dass, wenn i unendlich gross, $(1 + kw)^i$ gleich irgend einer Zahl grösser als die Einheit wird. Setzen wir daher $(1 + kw)^i = 1 + x$, so ist $l(1 + x) = iw$, d. h. eine endliche Zahl, weil w unendlich klein, i aber unendlich gross angenommen ist.

Da nun gesetzt wurde $(1 + kw)^i = 1 + x$, so ist $1 + kw = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$ und $kw = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$, woraus

$\text{i w} = \frac{\text{i}}{\text{k}}\left((1+\text{x})^{\frac{1}{\text{i}}} - 1\right)$. Weil aber $\text{i w} = \text{l}(1+\text{x})$, so ist $\text{l}(1+\text{x}) = \frac{\text{i}}{\text{k}}(1+\text{x})^{\frac{1}{\text{i}}} - \frac{\text{i}}{\text{k}}$, wo i also eine unendlich grosse Zahl. Es ist aber:

$$(1+\text{x})^{\frac{1}{\text{i}}} = 1 + \frac{1}{\text{i}}\text{x} - \frac{1\,(\text{i}-1)}{\text{i}\,.\,2\text{i}}\text{x}^2 + \frac{1\,(\text{i}-1)(2\text{i}-1)}{\text{i}\,.\,2\text{i}\,.\,3\text{i}}\text{x}^3 - \text{etc.}$$

Weil aber i unendlich gross, so wird

$$\frac{\text{i}-1}{2\text{i}} = \frac{1}{2},\ \frac{2\text{i}-1}{3\text{i}} = \frac{2}{3},\ \text{u. s. w., daher:}$$

$$\text{i}\,(1+\text{x})^{\frac{1}{\text{i}}} = \text{i} + \text{x} - \frac{\text{x}^2}{2} + \frac{\text{x}^3}{3} - \frac{\text{x}^4}{4} + \ldots.$$

und hieraus:

$$\text{l}\,(1+\text{x}) = \frac{1}{\text{k}}\left(\text{x} - \frac{\text{x}^2}{2} + \frac{\text{x}^3}{3} - \frac{\text{x}^4}{4} + \ldots.\right)$$

wenn die Basis des Logarithmensystems = a, und k der Gleichung genügt:

$$\text{a} = 1 + \text{k} + \frac{\text{k}^2}{1\,.\,2} + \frac{\text{k}^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$$

Da wir nun eine Reihe für den Logaritmus von $(1+\text{x})$ haben, so können wir mit Hülfe derselben bei gegebener Basis a den Werth von k berechnen. Weil nämlich $\text{l}\,(1+\text{x}) = \frac{1}{\text{k}}\left(\text{x} - \frac{\text{x}^2}{2} + \frac{\text{x}^3}{3} - \ldots\right)$, so ist, indem man x negativ setzt, $\text{l}(1-\text{x}) = -\frac{1}{\text{k}}\left(\text{x} + \frac{\text{x}^2}{2} + \frac{\text{x}^3}{3} + \frac{\text{x}^4}{4} + \ldots\right)$

Diese Reihe von der ersten abgezogen, gibt:

$$\text{l}(1+\text{x}) - \text{l}(1-\text{x}) = \text{l}\,\frac{1+\text{x}}{1-\text{x}} = \frac{2}{\text{k}}\left(\text{x} + \frac{\text{x}^3}{3} + \frac{\text{x}^5}{5} + \frac{\text{x}^7}{7} + \ldots\right)$$

Setzt man nun $\frac{1+\text{x}}{1-\text{x}} = \text{a}$, woraus $\text{x} = \frac{\text{a}-1}{\text{a}+1}$, so ist, weil $\text{l a} = 1$:

$$\text{k} = 2\left(\frac{\text{a}-1}{\text{a}+1} + \frac{(\text{a}-1)^3}{3\,(\text{a}+1)^3} + \frac{(\text{a}-1)^5}{5\,(\text{a}+1)^5} + \ldots\right)$$

welche Reihe ziemlich schnell convergirt und für $a = 10$ z. B. den Werth $k = 2{,}30258\ldots$ ergibt.

Indem man, um ein Logarithmensystem festzusetzen, jede beliebige Basis wählen kann, so nehmen wir jetzt die einfachste, nämlich diejenige, die für $k = 1$ resultirt. Es ist dann also:

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots$$

welche Reihe den Werth: 2,718281828459... ergibt. Die Logarithmen aus dieser Basis konstruirt, werden die natürlichen oder hyperbolischen genannt." — — —

Diess wäre also die Ableitung der so wichtigen Reihen mit Hülfe der Newton'schen Binomialformel durch Halley und Euler. Dieser Gegenstand hat noch andere ausgezeichnete Mathematiker des 18. Jahrhunderts vielfach beschäftigt; besonders aber hat der grosse Lagrange in seinem berühmten Werke: *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797, dieses Gebiet nach seiner genialen Methode der Derivationsrechnung behandelt, welche er zur strengern und die Vorstellung vom Unendlichkleinen entbehrenden Begründung der Differentialrechnung aufgestellt hat. Ich komme auf diese eigenthümliche Stellung Lagrange's in der Entwicklung der Analysis später ausführlicher zu sprechen; hier möchte ich nur seine Ableitung der Exponential- und logarithmischen Reihen zur Vergleichung der verschiedenen Auffassung kurz erwähnen. — Auch Lagrange nimmt die Newton'sche Binomialformel zu Hülfe, aber wie Euler den Exponenten w unendlich klein, dann wiederum i unendlich gross annehmen musste, um zum Ziele zu gelangen, bemerkt Lagrange von vornherein, dass er sich des Begriffs des Unendlichen enthalten werde. Er verfährt folgendermaassen (I. Theil, IV. Abschnitt):

„Man nehme die Gleichung $y = a^x$, in welcher x der Logarithme von y für die Basis a ist. Man setze $1 + a - 1 = a$

an die Stelle von a, also $\left[(1 + a - 1)^n\right]^{\frac{x}{n}}$, welches nichts anderes als a^x ist, an die Stelle von a^x, so erhält man:

$$y = \left[(1 + a - 1)^n\right]^{\frac{x}{n}}$$

wo n eine beliebige Grösse ist, die in dem Ausdruck von y verschwindet.

Nun entwickle man das Binom $(1 + a - 1)^n$ in die Reihe

$$1 + n(a-1) + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2}(a-1)^2 + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(a-1)^3 \ldots$$

und ordne die Glieder nach Potenzen von n, so erhält man:

$$(1 + a - 1)^n = 1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \ldots$$

wo die Coefficienten durch a gegeben sind. Es ist leicht zu sehen, dass zunächst:

$$A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots$$

ist. Die andern Coefficienten braucht man nicht zu entwickeln, weil sie aus der Rechnung, wie sich zeigen wird, wieder verschwinden.

Substituirt man, so wird:

$$y' = (1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \ldots)^{\frac{x}{n}}$$

führt man nach der Binomialformel die Entwicklung aus, so erhält man:

$$y = 1 + \frac{x}{n}(An + Bn^2 \ldots) + \frac{x \,.\, x-n}{2n^2}(An + Bn^2 \ldots)^2$$
$$+ \frac{x \,.\, x-n \,.\, x-2n}{2 \,.\, 3 \,.\, n^3}(An + Bn^2 \ldots)^3 + \ldots$$

oder, wenn man die gleichen Potenzen von n in den Zählern und Nennern der Glieder aufhebt,

$$y = 1 + x(A + Bn \ldots) + \frac{1}{2}x(x-n)(A + Bn \ldots)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2 \,.\, 3}x(x-n)(x-2n)(A + Bn \ldots)^3 + \ldots$$

Nun muss sich nothwendig Alles, was n enthält, in dem Ausdruck von y aufheben, weil in y kein n vorkommt. Lässt man diess also, weil es von selbst verschwindet, was auch n sein mag, weg, so erhält man bloss:

$$y = a^x = 1 + A x + A^2 \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + A^3 \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots$$

die bekannte Exponentialreihe."

Um die logarithmische Reihe abzuleiten, fährt er auf folgende Weise fort:

„Wir wollen auf eine ähnliche Weise den Werth von x in y suchen. Wir geben zu dem Ende der Gleichung $a^x = y$ die Form:

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n$$

wo n eine beliebige Grösse bedeutet, die auf die Werthe von x und y keinen Einfluss hat.

Entwickelt man die beiden Glieder wie Binomien, so erhält man:

$$1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{1 \,.\, 2}(a-1)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(a-1)^3 \ldots$$

$$= 1 + n(y-1) + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2}(y-1)^2 + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(y-1)^3 \ldots$$

oder wenn man auf beiden Seiten 1 weglässt und mit n dividirt:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1}{1 \,.\, 2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(a-1)^3 \ldots$$

$$= (y-1) + \frac{n-1}{1 \,.\, 2}(y-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(y-1)^3 \ldots$$

Da nun, wie gesagt, n eine gänzlich willkürliche Grösse ist, die auf den Ausdruck von x und y keinen Einfluss hat, so müssen sich die verschiedenen in n multiplizirten Glieder unter einander aufheben, so dass nur diejenigen übrig bleiben, welche kein n enthalten. Man erhält also, wenn man nur auf die Glieder ohne n Rücksicht nimmt, nachstehende Gleichung, in welcher ich die oben vorgekommene Grösse A gebrauche:

$$xA = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots$$

woraus folgt:

$$x = \overset{a}{\log} y = \frac{1}{A}\left((y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots\right)$$

oder $y + 1$ für y gesetzt:

$$\overset{a}{\log}(1+y) = \frac{1}{A}\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \ldots\right)$$

die gewöhnliche logarithmische Reihe."

Lagrange selbst hat diese Reihen noch auf andere Weise abgeleitet; man vergleiche hiefür dieselbe Theorie der analytischen Functionen (I. Theil, III. Abschnitt) und seine *Leçons sur le calcul des fonctions*, *Paris 1806, (IV. leçon)*, welche gleichsam einen Commentar zu seiner Functionentheorie bilden.

Diese Stelle scheint mir geeignet, Einiges über den interessanten Streit hinzuzufügen, der während des grössten Theils des 18. Jahrhunderts unter den hervorragendsten Mathemathikern sich um die Frage drehte, ob die negativen Zahlen ebenfalls Logarithmen hätten. Dieser Streit entspann sich im Jahre 1712 zwischen Leibnitz und Joh. Bernoulli und pflanzte sich gegen die Mitte des Jahrhunderts auf Euler und D'Alembert über. Auch andere Mathematiker jener Zeit liessen hierüber ihre Urtheile und Meinungen hören, allerdings ohne in dieser Frage neue Gesichtspunkte zur Geltung zu bringen; denn jene grossen Männer hatten in erschöpfendem Maasse alle Hebel ihrer unversiegbaren Geisteskraft in Anwendung gebracht, und die subtilsten Argumentationen, die ihnen die Wissenschaft zu Gebote stellte, für ihre Ansicht ins Feld geführt, so dass für einen Geringeren als sie hierin kaum mehr etwas zu thun übrig bleiben konnte. — Gewiss verdient dieser Gegenstand bei Weitem nicht jene Aufmerksamkeit, die ihm von jenen Koryphäen der Wissenschaft geschenkt worden ist; allein der Streit über denselben bietet für den

Geschichtschreiber der Mathematik und insbesondere für denjenigen, der die Leistungen jener grossen Männer studirt, insofern ein hohes Interesse dar, als er in demselben ihr unerschöpfbares Genie glänzender hervorleuchten sieht, als in ihren grossen vollendeten Werken.

Die verschiedenen Controversen zwischen Leibnitz und Bernoulli befinden sich in ihrem *Commercium epistolicum, epist. 190—208.* Der Erstere vertrat die Ansicht, dass es keine Logarithmen negativer Grössen gebe, der Letztere behauptete dagegen, es existiren solche, und zwar wären dieselben identisch mit denen der entsprechenden positiven Grössen, also $\log x = \log(-x)$. Joh. Bernoulli stützte sich in seinen Argumentationen anfänglich auf die geometrische, Leibnitz dagegen mehr auf die analytische Herleitung der Logarithmen. Jener urtheilte so: Es ist bekannt, dass $d \log x = \frac{dx}{x}$, d. h. das Differential eines jeden Logarithmen wird erhalten, indem man das Differential der Zahl durch die Zahl selbst dividirt. Also ist auch $d \log(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x} = d \log x$; mithin ebenfalls $\log x = \log(-x)$. Hieraus sieht man, dass die logarithmische Curve ABC (Fig. XXIV) eine mit ihr symmetrische $\alpha\beta\gamma$ hat, wie z. B. die Hyperbel zwei entgegengesetzte Aeste; so dass, BE als Einheit angenommen, EF der Logarithmus sowohl von CF als auch von $\gamma F = - CF$ ist.

Dagegen wandte Leibnitz ein, es könne gar keinen Logarithmus von -2 z. B. geben; denn wenn es einen solchen hätte, so müsste seine Hälfte gleich dem Logarithmus von $\sqrt{-2}$ sein; diess ist aber eine unmögliche oder imaginäre Zahl, ihr Logarithmus könne daher niemals reell sein, also auch nicht derjenige von -2. (Dass er aber imaginär sein könne, fiel damals Leibnitz noch nicht ein; die imaginären Zahlen waren eben noch unmögliche). Gegen einen negativen Ast der logarithmischen Linie warf Leibnitz ein, es könne keinen solchen geben, denn die positive Ordinate werde, obgleich immer abnehmend, niemals gleich 0 und könne daher nicht in eine negative übergehen.

Aber auch Bernoulli hatte auf die sehr feine und im Grund auch ganz richtige Einwendung von Leibnitz, dass der Logarithmus von — 2 unmöglich, weil es derjenige von $\sqrt{-2}$ ist, wiederum eine sehr spitzfindige Entgegnung zur Hand. Er verneint, dass der Logarithmus von $\sqrt{-2}$ die Hälfte desjenigen von — 2 sei. „Denn", sagt er, „der Logarithmus von $\sqrt{2}$ ist desshalb die Hälfte desjenigen von 2, weil $\sqrt{2}$ die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2 ist; aber $\sqrt{-2}$ ist nicht die mittlere Proportionale zwischen — 1 und — 2, also kann nicht geschlossen werden, der Logarithmus von $\sqrt{-2}$ sei die Hälfte desjenigen von — 2; wie desshalb der Logarithmus von $\sqrt{1 \,.\, 2}$ gleich der Hälfte des Logarithmus von 2 ist, so ist auch der Logarithmus von $\sqrt{-1 \,.\, -2}$ die Hälfte des Logarithmus von — 2, d. h. der Lorgarithmus von $\sqrt{2}$ ist sowohl die Hälfte des Logarithmus von — 2 als auch von + 2." Gegen die zweite Einwendung von Leibnitz betreff des negativen Astes der logarithmischen Linie hatte er allerdings leichten Stand; er führte an, wie es eine grosse Zahl von Curven gebe, wie z. B. die Conchoide, die zwei entgegengesetzte Aeste haben, ohne dass die positive Ordinate jemals durch 0 ins Negative übergehen braucht.

Leibnitz geht in seiner späteren Erwiderung auf die einfache Beziehung der geometrischen und arithmetischen Progression zurück. Er deutet darauf hin, dass in der Gleichung $2^n = x$, wo also $n = \log x$ für die Basis 2, für n kein Werth gefunden werden könne, der x negativ machen würde.

Dieser Streit zwischen Leibnitz und Bernoulli wurde abgebrochen, ohne dass der Eine oder Andere Genugthuung erlangt, oder sich befriedigt gefühlt hätte. „*Car il faut remarquer que les contradictions que ces deux grands hommes se reprochaient, étaient réelles et point du tout du nombre de celles qui ne paraissent telles qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment*" — sagt Euler. *) In den Jahren 1747 und 1748 wurde er dann wieder durch Euler und D'Alembert aufgenommen, und zwar stellte sich der Erstere auf Leibnitzens, der Letztere auf Bernoulli's Seite. Die gegenseitig gewechselten Briefe wurden nicht veröffentlicht, man findet die Ansichten Eulers in einer Abhandlung der *Histoire de l'acad. de Berlin* vom Jahre 1749, diejenigen D'Alembert's im ersten Bande seiner *Opuscules mathématiques*, 1761, entwickelt. — Euler setzt zuerst die Ansichten Bernoulli's und Leibnitzens auseinander, führt ihre verschiedenen Gründe für dieselben und die gegenseitigen Einwendungen an, und geht dann zu seiner eigenen Auffassung der Sache über. Obgleich er Leibnitzens Meinung für die besser begründete hält, gesteht er doch zu, dass sich zu Bernoulli's Gunsten Argumente aufstellen lassen, die nur äusserst schwer zu widerlegen seien. Weil nämlich $(-a)^2 = (+a)^2$, so werden auch ihre Logarithmen einander gleich sein, also: $\log(-a)^2 = \log(+a)^2$. Da aber $\log p^2 = 2 \log p$, so ist auch $\log(-a)^2 = 2 \log(-a)$ und $\log(+a)^2 = 2 \log(+a)$. Mithin $2 \log(+a) = 2 \log(-a)$, oder $\log(+a) = \log(-a)$. — Wollte man aber, sagt Euler, diese Schlüsse als richtig hinstellen, so würde man sofort beweisen können, dass auch die Logarithmen der imaginären Grössen reelle Werthe haben; denn es ist auch $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, folglich wäre: $\log(a\sqrt{-1})^4 = \log a^4$, oder $4 \log(a\sqrt{-1}) = 4 \log a$ und daher $\log(a\sqrt{-1}) = \log a$.

Euler macht noch weiter auf die merkwürdige, die Frage noch weit schwieriger gestaltende Thatsache aufmerk-

*) *Histoire de l'acad. de Berlin, 1749, pag. 140.*

sam, dass man auf Verwicklungen und Widersprüche stösst, ob man die Bernoulli'sche Ansicht adoptire oder nicht. Nimmt man nämlich $\log a = \log (-a)$ an, so ist man, wie wir soeben gesehen haben, gezwungen, ebenfalls $\log (a \sqrt{-1}) = \log a$ zu setzen. Und nimmt man $\log (-a)$ nicht gleich $\log a$, oder also $\log (-1)$ nicht gleich $\log 1 = 0$ an, sondern setze z. B. $\log (-1) = w$, wo w also nicht gleich Null, so ist auch $2w$ nicht $= 0$; $2w$ ist aber der Logarithmus von $(-1)^2 = +1$; also wäre der Logarithmus von $+1$ nicht gleich Null. — Aehnlich verhält es sich auch mit der Ansicht Leibnitzens. Obgleich dieser für den Logarithmus einer negativen Zahl immer den Ausdruck „unmöglich“ (*impossibilis*) braucht, nimmt dennoch Euler an, er habe damit „imaginär“ gemeint. In diesem Falle aber liegt auch ein Widerspruch in Leibnitzens Auffassung. Denn wenn der Logarithmus von -1 imaginär ist, so wäre es auch derjenige von $+1$, denn dieser ist das Zweifache des ersteren.

Diese Widersprüche zu lösen und auf ihren eigentlichen Ursprung zurückzuführen, ist nun die Aufgabe von Eulers Abhandlung. Ich kann hier nicht ins Einzelne der ausführlichen, höchst geistreichen Schrift eintreten und muss desshalb den Leser auf dieselbe verweisen; ich will hier nur die Hauptpunkte anführen.

Euler beweist zuerst, dass eine Zahl nicht nur einen, sondern unendlich viele Logarithmen hat. Die Ableitung der natürlichen Logarithmen zeigt nämlich, dass, wenn w eine unendlich kleine Zahl, $\log (1 + w) = w$ ist. Hieraus folgt: $\log (1 + w)^2 = 2w$, u. s. f. und allgemein: $\log (1 + w)^n = nw$. Da nun w eine unendlich kleine Zahl ist, so ist klar, dass $(1 + w)^n$ nur dann einer beliebigen endlichen Zahl x gleich werden kann, wenn n unendlich gross angenommen wird. Thut man diess, so sei also $(1 + w)^n = x$; dann ist, wenn $\log x = y$ gesetzt wird,

$y = nw$. Aus der Gleichung $(1 + w)^n = x$, folgt aber: $1 + w = x^{\frac{1}{n}}$ und $w = x^{\frac{1}{n}} - 1$. Setzt man diesen Werth für w in die Gleichung $y = nw$ ein, so erhält man: $y = nx^{\frac{1}{n}} - n = \log x$. Nun ist aber bekannt, dass $x^{\frac{1}{2}}$ zwei verschiedene Werthe hat, $x^{\frac{1}{3}}$ deren drei u. s. w., $x^{\frac{1}{n}}$ also unendlich viele, wenn n eine unendlich grosse Zahl ist.

Man erhält also auch für den Logarithmus von x unendlich viele Werthe.

Nun zeigt Euler im Weitern, dass die positiven Zahlen nur einen reellen und sonst alles imaginäre Logarithmen, die negativen Zahlen aber nur imaginäre Logarithmen haben. — Sei A der reelle Logarithmus der positiven Zahl a, so findet Euler, dass sämmtliche Logarithmen dieser Zahl der Reihe nach sind:

A, $A \pm 2\pi\sqrt{-1}$, $A \pm 4\pi\sqrt{-1}$, $A \pm 6\pi\sqrt{-1}$, etc.
sämmtliche Logarithmen der negativen Zahl $-a$ aber:
$A \pm \pi\sqrt{-1}$, $A \pm 3\pi\sqrt{-1}$, $A \pm 5\pi\sqrt{-1}$ etc.

Hiedurch wird nun der Widerspruch gehoben dass $\log a^2 = \log (-a)^2$ sein kann, ohne dass $\log a = \log (-a)$ ist. Man sieht, dass in den beiden obigen Reihen kein Glied dem andern gleich ist. Multiplicirt man aber die Glieder beider Reihen mit 2, was also die Logarithmen von $(+a)^2$ und $(-a)^2$ ergibt, so, behauptet Euler, gibt es in der zweiten Reihe Glieder, die solchen in der ersten gleich sind, mithin auch $\log (-a)^2 = \log (+a)^2$, ohne dass $\log a = \log (-a)$. — Diess ist nun nicht ganz richtig. Denn die Glieder der ersten Reihe sind in der allgemeinen Formel enthalten: $A \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, diejenigen der zweiten in der Formel $A \pm (2n + 1)\pi\sqrt{-1}$. Multiplicirt man jede dieser allgemeinen Formeln mit 2, so wird die erste $= 2A \pm 4n\pi\sqrt{-1}$, die zweite $= 2A \pm (4n + 2)\pi\sqrt{-1}$.

Die Zahl 4n wird aber niemals gleich $4n + 2$, obgleich beide gerade sind. Euler behauptet nun, diess sei gleichgültig, es sei wenigstens $4n + 2$ eine gerade Zahl und das allgemeine Schema für die Logarithmen von a^2 sei: $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, wo p irgend eine gerade Zahl. Diess ist der schwache Punkt in Eulers Darstellung und sie ist auch desshalb nur später noch angegriffen worden. Freilich zieht er sich gleich nachher ganz schön aus dieser Klemme. Addirt man nämlich irgend zwei Glieder der ersten Reihe, was auch den Logarithmus von a^2 ergibt, so findet man in der zweiten Reihe immer zwei Glieder, deren Summe gleich derjenigen der beiden Glieder der ersten Reihe wird. So z. B. ist $A \pm 2\pi\sqrt{-1} + A \pm 6\pi\sqrt{-1} = A \pm 3\pi\sqrt{-1} + A \pm 5\pi\sqrt{-1}$, was ebenfalls $\log(+a)^2 = \log(-a)^2$ ergeben würde. — Diese Ausflucht ist allerdings bei den Logarithmen von $+1$ und -1 nicht nöthig. Die Logarithmen von $+1$ sind:

$$0, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}, \pm 6\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

diejenigen von -1:

$$\pm \pi\sqrt{-1}, \pm 3\pi\sqrt{-1}, \pm 5\pi\sqrt{-1} \text{ etc.}$$

Hier braucht man nur die zweite Reihe mit 2 zu multipliciren, was die Logarithmen von $(-1)^2 = +1$ ergibt, so erhält man immer Glieder, die entsprechende in der ersten Reihe haben, womit also festgestellt ist, dass $2\log(-1) = \log(+1)$. — Euler geht dann im Folgenden zu den Logarithmen imaginärer Zahlen über, worauf ich aber nicht weiter eintreten kann.

D'Alembert nahm, wie gesagt, im Allgemeinen den Standpunkt Bernoulli's ein und stützte sich, wie dieser, auf die Eigenschaften der logarithmischen Linie. Ich muss auch hiefür auf die oben angeführte Abhandlung des französischen Mathematikers verweisen; hier sei nur bemerkt, dass derselbe, um auch Euler gerecht zu werden, sich genöthigt sah, das Schlussresultat auszusprechen, dass die Logarithmen negativer Grössen, sowohl reell, als auch imaginär sein können, je nach dem gewählten Logarithmensystem. — Im Ganzen schlossen sich übrigens die späteren Mathematiker der Ansicht Eulers an, wenngleich noch hie und da Argumente zu Gunsten der Gegner geltend gemacht wurden.

Es ist wohl eine der interessantesten Erscheinungen in der Geschichte der Mathematik, dass die so lange Zeit als „unmöglich" betrachteten imaginären Grössen im Anfange des vorigen Jahrhunderts aus dem Hemmschuh, den sie für die Entwicklung der Analysis und Algebra waren, zu einem diese Disciplinen in hohem Grade vervollkommnenden und erweiternden Werkzeuge sich umgestalten sollten. Wir haben soeben gesehen, welche Rolle sie in der Theorie der Logarithmen negativer Grössen spielen, allein diese Anwendung ist von geringerer Bedeutung. Viel weittragender war ihre Substitution in die Exponentialreihe und der daraus hervorgehende Zusammenhang letzterer mit den trigonometrischen Funktionen. Die Einführung dieser Grössen in den Calcül und das Operiren mit denselben war lange Zeit vielfachen Anfechtungen ausgesetzt und zwar kamen dieselben oft von nicht zu verachtender Seite. Es war auch hier wiederum wie bei der Reaction gegen die Infinitesimalrechnung die Furcht gewissenhafter Mathematiker vor dem Verluste jener stets bewahrten spezifischen Eigenschaften ihrer Wissenschaft, der zweifellosen Wahrheit und Evidenz ihrer Principien, der Klarheit, Unumstösslichkeit und logischen Consequenz der Beweise und des scharfen, von verschwommenen Umrissen freien Gepräges der Gesammtdarstellung. Erst als im Laufe der Zeit ihre Anwendungsfähigkeit so glänzend hervortrat, ja als man selbst in der Auflösung der Gleichungen dritten Grades nur mit Hülfe ihrer Theorie die Wurzeln des irreductibeln Falles finden konnte, da fing man an, ihnen grössere Beachtung zu schenken und ihr Existenzrecht, ja ihre Nothwendigkeit in der Mathematik nicht zu bezweifeln. — Joh. Bernoulli war der erste, der die imaginären Grössen eigentlich in den Calcül einführte und durch ihre Benutzung reelle Resultate erzielt hat. Es ist diess die bei Betrachtung des Verhältnisses der Kreisquadratur zu der der Hyperbel gefundene Beziehung des Kreisquadranten zum Radius, dass nämlich ersterer zu letzterem sich verhält wie $\log \sqrt{-1}$ zu $\sqrt{-1}$, oder dass, wenn der Radius $= 1$ gesetzt wird, die Gleichung besteht:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Später hat dann D'Alembert *) zuerst und nach ihm Euler die Regeln und Beweise für die Addition, Multiplication, Potenzirung und die inversen Operationen complexer Grössen von der Form $a \pm b \sqrt{-1}$ aufgestellt. Die Substitution von $x \sqrt{-1}$ oder xi (für $\sqrt{-1}$ wurde seit Gauss allgemein i gesetzt) für x in die Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \cdots$$

und die daraus hervorgehenden Beziehungen

$$\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \sin x \text{ und } \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x,$$

$$\text{und } \sin x = x - \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \cdots,$$

dann die unter dem Namen der Moivre'schen Formel bekannte hochwichtige Gleichung:

$$(\cos x \pm i \,.\, \sin x)^n = \cos nx \pm i \,.\, \sin nx$$

wo n eine beliebige positive, negative oder gebrochene Zahl sein kann, verdankt man ebenfalls Euler **). Die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ hatte schon Newton aus geometri-

---

*) *Mémoires de l'acad. de Berlin*, *1746.*

**) Vergl. seine *Introductio in analysin infin.* *T. I. Cap. VIII.*

schen Betrachtungen hergeleitet; man findet dieselben in seiner *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, Lond. 1711.* Ebendaselbst findet sich auch die Reihe für den Bogen, dessen sin. = x, nämlich:

$$z = x + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1.3^2}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{1.3^2.5^2}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \ldots$$

Die oben genannte Formel heisst desshalb die Moivre'sche, weil sie dieser berühmte Mathematiker in seinem schon früher citirten Werke *Miscellanea analytica*, etc. zuerst aufgestellt hat. Gleich im Anfange treffen wir auf den Satz, dass, wenn x und l die Cosinus zweier Bogen bezeichnen, von denen der zweite das n-fache des erstern ist, die Gleichung besteht:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}}}$$

Bis auf Euler sieht man in keinen mathematischen Abhandlungen die trigonometrischen Zahlen in der Form cos x, sin y, tang z, etc. auftreten; ihre Werthe wurden in der Rechnung durch bestimmte Buchstaben, wie z. B. in der obigen Moivre'schen Formel durch l und x, ausgedrückt.

In Eulers *Introductio* finden wir sodann die Ableitung einer grossen Zahl der wichtigsten trigonometrischen Formeln, wie Sinus, Cosinus und Tangens der Summe und Differenz zweier Bogen, der Vielfachen und Potenzen eines Bogens u. s. w., auf welche bekannten Dinge ich hier nicht näher einzutreten brauche. — Es ist hier zu bemerken, dass die einfacheren und gebräuchlicheren dieser Formeln, wie Sinus, Cosinus und Tangens der Summe und Differenz zweier Winkel, etc. schon vor Euler bekannt waren, und zwar verdankt man sie dem oben schon genannten sehr bedeutenden Mathematiker Friedrich Christoph Mayer. Die betreffende Abhandlung erschien unter dem Titel *Trigonometrica* im II. Bd. der Commentarien der Petersburger

Academie vom Jahre 1727. Die neuen Commentarien derselben Academie (Bd. V, 1754) enthalten auch noch eine ausgezeichnete Schrift von Euler, betitelt: *Subsidium calculi sinuum*, in der er die in seiner *Introductio* über diesen Gegenstand veröffentlichten Arbeiten ziemlich erschöpfend ergänzt.

2. Die Infinitesimalrechnung.

Vielleicht hat man erwartet, es würde der Geschichte der algebraischen Analysis diejenige der analytischen Geometrie unmittelbar nachfolgen, indem beide Disciplinen heutzutage als einleitende zum höheren Calcül betrachtet werden. Allein auf welcher Stufe die analytische Geometrie ohne Zuhülfenahme der Infinitesimalrechnung gestanden, das haben wir bereits bei Betrachtung Descartes', seiner Zeit und seiner unmittelbaren Nachfolger, dem Leser vor Augen geführt; wesentliche beachtungswerthe Fortschritte hat sie auf jenem elementaren Wege bis zum Anfange des 18. Jahrhunderts nicht viele mehr gemacht. Allerdings hat Euler den zweiten Theil seiner *Introductio*, der die Theorie der krummen Linien und Oberflächen enthält, dem Titel des ganzen Werkes gemäss, unabhängig von der Differential- und Integralrechnung in ausgezeichneter und erschöpfender Weise behandelt, und diess erst im Jahr 1748, als die infinitesimalen Methoden die Geometrie schon ganz beherrschten. Ich werde dieses geniale Product mathematischer Geistesschärfe im nächsten Theile gebührend berücksichtigen.

Bevor ich hier die Fortsetzung des V. Capitels beginne, werde ich zuerst jener Bestrebungen gedenken, die sich während eines grossen Theiles des 18. Jahrhunderts dahin geltend gemacht haben, die Differentialrechnung von anderem Gesichtspunkt aus aufzufassen und fester zu begründen und denen zum Theil, insofern sie von den grössten Mathematikern jener Zeit ausgegangen sind, die Ehre zugekommen ist, zu den scharfsinnigsten und vollendetsten Erzeugnissen des mathematischen Genie's gezählt zu werden.

Man hat der Differentialrechnung in der ersten Zeit ihrer Entwicklung oft, obschon mit Unrecht, den Vorwurf gemacht, dass ihre Resultate der mathematischen Genauigkeit entbehren, indem durch Einführung des Unendlichkleinen in dieselbe und die dadurch nothwendig gewordene Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen sekundärer Ordnung in der Rechnung Fehler begangen würden, die in dem Resultate zu Tage treten müssten. Obgleich nun dieser Vorwurf in vielen Fällen direkt als unbegründet nachgewiesen werden kann und in der That auch wurde, ja obgleich man sogar zeigte, dass jene Vernachlässigung nothwendig stattfinden muss, wenn kein Fehler entstehen soll, gab es immerhin noch Solche, die einen Zweifel in die mathematische Strenge dieses Calcüls setzten und desshalb als unversöhnliche Feinde der Theorie des Unendlichkleinen auftraten. Diese Befürchtungen für immer zu heben, war nun der Zweck eines Taylor, Euler und Lagrange, indem sie durch ihre Theorie der endlichen Differenzen zu zeigen versuchten, wie durch Substitution endlicher Grössen an Stelle der unendlich kleinen Differentiale vollständig dieselben Resultate erzielt würden, wie sie uns die Infinitesimalrechnung liefert. Sie wollten damit keineswegs die Herrschaft letzterer verdrängen, wie sie auch ihre grössten unerreichten Leistungen nach dieser Methode zu Tage gefördert haben, sondern einfach der Infinitesimalrechnung ein sicheres unantastbares Fundament und der Wahrheit ihrer Resultate ein unwiderlegbares Zeugniss geben.

Diese Aufgabe war keineswegs eine so leichte und es bedurfte des Genie's der grössten Mathematiker des Jahrhunderts, ihr auch nur befriedigend nachzukommen. Vergleicht man damit die Leichtigkeit und Sicherheit, mit der die infinitesimalen Methoden in allen Gebieten der Mathematik operiren, so tritt ihre Berechtigung und Zweckmässigkeit um so schärfer hervor. — Taylor war der erste, der in seiner *Methodus incrementorum directa et inversa, 1717,* eine Theorie der endlichen Differenzen aufzustellen versuchte. Wir haben im V. Cap. schon dieses Werkes Erwähnung gethan und die Hauptpunkte der Behandlungsweise hervorgehoben und werden daher hier nicht näher anf dasselbe eintreten; nur so viel sei bemerkt, dass Taylor in Folge seiner Weitschweifigkeit und schwer verständlichen Ausdrucksweise auf diesem Gebiete am wenigsten reüssirt hat, obgleich er vermittelst seines Calcüls die schwierigsten Probleme der Geometrie und mathematischen Physik in ausgezeichneter Weise gelöst hat. — Dieser Umstand bewog zwei bedeutende Mathematiker, Taylor's Werk gleichsam zu commentiren und seine Theorie zugänglicher und verständlicher zu machen. Es sind diess der Franzose Nicole *) und der Engländer Emerson **). Aber auch auf die Arbeiten dieser Beiden kann ich nicht weiter eingehen, ich verweise auf die unten citirten Schriften.

Auch Maclaurin kann in gewisser Beziehung zu den Vertretern der Theorie der endlichen Differenzen gerechnet werden, indem er ebenfalls in seinem berühmten Werke *A treatise of fluxions* von den unendlich kleinen Grössen abstrahirt. Allein, was die eigentlichen Begründer und Vertreter jener Theorie charakterisirt und worin Lagrange die grösste Consequenz gezeigt und desshalb auch die vollendetste Systematik erreicht hat, das ist die rein analytische, von jeder geometrischen Vorstellung freie und daher viel allgemeinere Auffassung und Behandlung ihrer Methoden. Maclaurin dagegen, obwohl seine Incremente

*) *Traité des différences finies. (Mémoires de l'acad. des sciences pour les années 1717, 1723, et 1724).*

**) *The method of increments. London, 1763.*

endlich annehmend, schliesst sich mehr der mechanisch-geometrischen Auffassungsweise der Newton'schen Fluxionen an und konnte desshalb seiner Theorie niemals jene Allgemeinheit und Abstraction geben, die sie allein zum Fundamente eines eigenen grossen Calcüls geeignet machen konnte.

Eulers *Institutiones calculi differentialis* enthalten in den beiden ersten Capiteln die Grundsätze der Theorie der endlichen Differenzen und ihre Anwendung auf die Theorie der Reihen. Auch hier bewährt sich der grosse Mathematiker wieder als klarer und präciser Darsteller. Seine Methode bietet nicht die geringste Schwierigkeit des Verständnisses dar; sie ist im Allgemeinen nichts Anderes als die Theorie der Differenzenreihen. Setzt man in $y = f(x)$, für x der Reihe nach die Werthe x, $x + w$, $x + 2w$, $x + 3w$, etc., wo w eine beliebige endliche Zahl ist und bezeichnet man die ihnen entsprechenden Werthe der Funktion mit y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, etc., so nennen wir $y^{I} - y = \triangle y$ die erste Differenz von y, $y^{II} - y^{I} = \triangle y^{I}$ die erste Differenz von y^{I}, $y^{III} - y^{II} = \triangle y^{II}$ die erste Differenz von y^{II} u. s. w. Bildet man weiter die successiven Differenzen $\triangle y^{I} - \triangle y$, $\triangle y^{II} - \triangle y^{I}$, $\triangle y^{III} - \triangle y^{II}$, u. s. f. und bezeichnet dieselben durch $\triangle^2 y$, $\triangle^2 y^{I}$, $\triangle^2 y^{II}$, etc., so sind diess die successiven zweiten Differenzen der Functionswerthe y, y^{I}, y^{II} u. s. w. Auf diese Weise erhält man folgendes Schema:

Werthe der Variabeln:

$$x, \quad x + w, \quad x + 2w, \quad x + 3w, \quad x + 4w, \text{ etc.}$$

Functionswerthe:

$$y, \quad y^{I}, \quad y^{II}, \quad y^{III}, \quad y^{IV}, \text{ etc.}$$

Erste Differenzen:

$$\triangle y, \quad \triangle y^{I}, \quad \triangle y^{II}, \quad \triangle y^{III}, \text{ etc.}$$

Zweite Differenzen:

$$\triangle^2 y, \quad \triangle^2 y^{I}, \quad \triangle^2 y^{II}, \text{ etc.}$$

Dritte Differenzen:

$\Delta^3 y$, $\Delta^3 y^I$, etc.

Vierte Differenzen:

$\Delta^4 y$, etc.

etc.

Aus den Beziehungen: $\Delta y = y^I - y$ und $\Delta y^I = y^{II} - y^I$ folgt zunächst:

$$\Delta^2 y = \Delta y^I - \Delta y = y^{II} - 2y^I + y;$$

ferner $\Delta^2 y^I = \Delta y^{II} - \Delta y^I = y^{III} - 2y^{II} + y^I$;

also $\Delta^3 y = \Delta^2 y^I - \Delta^2 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$;

und im Allgemeinen:

$$\Delta^n y = y^{(n)} - \binom{n}{1} y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} - \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} y^I + (-1)^n y,$$

wo $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ u. s. w. die Werthe von y bedeuten, wenn man für x der Reihe nach $x + nw$, $x + (n - 1)w$ etc. setzt.

Aus $y^I - y = \Delta y$ folgt ferner:

$$y^I = y + \Delta y;$$

aus $\Delta^2 y = y^{II} - 2y^I + y$ ergibt sich für y^{II} der Werth: $y^{II} = \Delta^2 y + 2(y + \Delta y) - y = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, und so fort; schliesslich erhält man für $y^{(n)}$ die Gleichung: $y^{(n)} = y + \binom{n}{1}\Delta y + \binom{n}{2}\Delta^2 y + \binom{n}{3}\Delta^3 y + \cdots + \Delta^n y$.

Euler geht hierauf zu Beispielen über. Für die erste Differenz von $y = x^2$ z. B. findet man nach dieser Methode: $\Delta y = y^I - y = (x + w)^2 - x^2 = 2wx + w^2$; $\Delta^2 y = \Delta y^I - \Delta y = 2w(x + w) + w^2 - (2wx + w^2) = 2w^2$; $\Delta^3 y = 0$, etc.

Er berechnet auf diese Weise die Differenzen algebraischer und transcendenter Functionen und wendet sich dann noch kurz zur inversen Operation, d. h. aus den Differenzen die ursprüngliche Function zu finden. — Es ist begreiflich, dass bei dieser Theorie der endlichen Differenzen sich dieser inversen Operation ungleich grössere Schwierigkeiten entgegenstellen als der Integration unendlich kleiner Differentialausdrücke, indem bei ersterer die höheren Potenzen von w nicht vernachlässigt werden dürfen und desshalb die Gliederzahl, besonders bei complicirteren Functionen, eine beträchtlich grössere ist.

Euler braucht für diese Operation das Zeichen Σ (= Summe). So ist z. B., wenn $\Delta ax = aw$, $\Sigma\, aw = ax + C$, wo C eine Constante von beliebigem Werthe sein kann, indem sie bei Bildung der Differenzen wieder verschwindet; sie ist also gleichbedeutend mit der Integrationsconstanten.

Um nun die Functionen zu finden, deren Differenzen ganze rationale Functionen von x sind, verfährt Euler folgendermaassen:

Es ist: $\Sigma\, w = x$, also $\Sigma\, 1 = \frac{x}{w}$. Wir wissen nun, dass $\Delta x^2 = 2wx + w^2$, also: $\Sigma\,(2wx + w^2) = x^2$. Hieraus folgt:

$$\Sigma\, 2wx + \Sigma\, w^2 = x^2, \text{ oder:}$$

$$2w\,\Sigma x + \Sigma\, w^2 = x^2 \text{ und hieraus:}$$

$$\Sigma\, x = \frac{x^2}{2w} - \Sigma\,\frac{w}{2} = \frac{x^2}{2w} - \frac{x}{2}.$$

Ebenso ist: $\Sigma\,(3wx^2 + 3w^2x + w^3) = x^3$.

Oder: $3w\,\Sigma x^2 + 3w^2\,\Sigma x + w^3\,\Sigma 1 = x^3$.

Also: $\Sigma\, x^2 = \frac{x^3}{3w} - w\,\Sigma x - \frac{w^2}{3}\,\Sigma 1$,

oder für $\Sigma\, x$ und $\Sigma\, 1$ die oben gefundenen Werthe gesetzt:

$$\Sigma\, x^2 = \frac{x^3}{3w} - \frac{x^2}{2} + \frac{xw}{6}.$$

Ferner $$\Sigma\, x^3 = \frac{x^4}{4w} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2w}{4},$$

oder wenn man w unter das Summenzeichen nimmt:

$$\Sigma\, x^3w = \frac{x^4}{4} - \frac{wx^3}{2} + \frac{x^2w^2}{4}.$$

Will man nun die Function suchen, deren Differenz $= ax^2 + bx + c$ ist, so hat man nach den vorhergehenden Formeln:

$$\Sigma ax^2 = \frac{ax^3}{3w} - \frac{ax^2}{2} + \frac{awx}{6},$$

$$\Sigma bx = \frac{bx^2}{2w} - \frac{bx}{2}$$

$$\Sigma c = \frac{cx}{w},$$

also:

$$\Sigma(ax^2+bx+c) = \frac{a}{3w}x^3 - \frac{(aw-b)}{2w}x^2 + \frac{(aw^2-3bw+6c)}{6w}x + C.,$$

oder

$$\Sigma(ax^2+bx+c)w = \frac{a}{3}x^3 - \frac{(aw-b)}{2}x^2 + \frac{(aw^2-3bw+6c}{6}x + C.$$

Setzt man hier w unendlich klein, so geht die Gleichung über in:

$$\int(ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C.$$

Von dieser Theorie der endlichen Differenzen gelangt dann Euler auf die Differentialrechnung, indem er von der Betrachtung ausgeht, dass wenn in der Gleichung $\Delta y = Pw + Qw^2 + Rw^3 + \ldots$, in die sich die Differenz jeder Function y bringen lässt, w unendlich klein wird, dieselbe sich auf $\Delta y = Pw$ reducirt, oder, indem wir nun $w = dx$ und $\Delta y = dy$ setzen, auf die Differentialgleichung $dy = Pdx$. Es haben also dy und dx, obgleich sie beide nnendlich klein, d. h. gleich Null sind (was Euler geradezu annimmt), dennoch ein endliches Verhältniss zu einander, nämlich $\frac{dy}{dx} = P$, wo P irgend eine Funktion von x, die von y abhängig ist, bezeichnet. Denn x und y wachsen nicht in gleichem Verhältnisse, so dass, wenn x z. B. um 1 zunähme, y auch um 1 grösser würde, oder dass, wenn also x um die unendlich kleine Grösse dx wächst, y auch um dx zunehmen sollte. y wächst in diesem Falle um dy, welches, obgleich unendlich klein wie dx, sich dennoch zu diesem nicht verhält wie 1 : 1, sondern wie P : 1, so gut wie $\frac{0}{0}$ keineswegs 1 zu sein braucht, sondern jede beliebige Zahl sein kann. Diese beliebige Zahl wird in unserm Falle eben eine bestimmte, P, indem sie in einem gewissen Abhängigkeitsverhältnisse zu y steht.

Wir haben gesehen, wie diese Summation endlicher Differenzen weitaus grössere Schwierigkeiten darbietet als die ihr analoge Integralrechnung. Euler hat sich auch nicht eingehender damit beschäftigt; er hat sich begnügt zu zeigen, dass die Differentialrechnung sich folgerichtig aus der Theorie der endlichen Differenzen entwickeln lasse und dass daher aus jener Annahme unendlich kleiner Grössen keine Widersprüche noch Fehler hervorgehen würden. Dagegen haben im Laufe des Jahrhunderts noch einige ausgezeichnete Mathematiker versucht, das Gebiet der Summation endlicher Differenzen weiter auszudehnen; ich mache den Leser hiefür auf die Arbeiten eines Condorcet *), Laplace **), Lagrange ***), Charles †), etc. aufmerksam.

Den Hauptversuch aber, die Sätze der Differential- und Integralrechnung, unabhängig von der Theorie des Unendlichkleinen, nur auf dem Wege der reinen algebraischen Analysis zu entwickeln, hat **Lagrange** †) gemacht in seinem

*) *Mémoires de l'acad. des sciences, 1770 und 1771.*

**) *Mém. présentés par divers savants, 1773.*

***) *Miscell. philos.-math. societ. Taurin. Tom. I.*

†) *Mém. de l'acad. des sciences, 1783.*

††) Joseph Louis Lagrange, einer der scharfsinnigsten Mathematiker aller Zeiten, wurde am 25. Jan. 1736 zu Turin geboren Sein Vater, aus französischem Geschlechte, war daselbst Kriegsschatzmeister und anfänglich in guten ökonomischen Verhältnissen, verarmte dann aber in Folge unglücklicher Speculationen. Diess betrachtete Lagrange später als die Ursache seines Glückes, indem er, wie er

genialen Werke: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou d'évanouissants, ou de limites, ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies, Paris, 1797.* (Neue Auflage, übersetzt von A. L. Crelle, 1823.) Das zweite Werk desselben Verfassers über die Functionen, betitelt: *Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. édit. Paris, 1806*, bildet nur eine Ergänzung und Erweiterung der in dem erstern entwickelten Theorien.

Diese Arbeiten Lagrange's sind vielfach bewundert, aber auch vielfach angegriffen worden. Und in der That kann man denselben die höchste Anerkennung nicht versagen, wenn man sie bloss als mathematische Geistesprodukte der Beurtheilung unterzieht. Die Klarheit und Eleganz der Darstellung, die Schärfe der Deductionen und die

---

sich selbst ausdrückt, die Mathematik vielleicht nie kennen gelernt haben würde, wenn er reich gewesen wäre. Er machte seine ersten Studien auf der Universität Turin und wurde im siebzehnten Jahre schon zum Professor der Mathematik an der k. Artillerieschule daselbst ernannt. Bei einem kurzen Aufenthalte in Paris wurde er mit den ausgezeichnetsten Gelehrten, wie D'Alembert, Clairaut, Condorcet, Fontaine, etc. näher bekannt. Im Jahre 1766 berief ihn Friedrich der Grosse an Eulers Stelle an die Berliner Academie der Wissenschaften, nachdem er schon 1759 zum Mitglied derselben erwählt worden war. In dieser Stelle wirkte er zwanzig Jahre lang; die Abhandlungen der Akademie enthalten eine grosse Zahl seiner genialsten Aufsätze. Nach dem Tode Friedrichs des Grossen verliess er Berlin und begab sich 1787 nach Paris. Zwei Jahre nachher wurde er in die Kommission für Einführung des Metermaasses gewählt. Während der Revolutionszeit war er nacheinander Professor an der Ecole normale und polytechnique. Seine letzten Lebensjahre, sowie öftere Abschnitte seines langen Lebens, waren leider durch Krankheit vielfach getrübt. Er starb am 10. April 1813, gleich bewundert als einer der geistvollsten Mathematiker, wie als edler und charaktervoller Mensch, Eulers würdiger und ebenbürtiger Nachfolger und Rivale. — Vergl. für ihn: *Eloge de J. L. Lagrange par Delambre 1814.* Seine hauptsächlichsten Werke siehe im Text.

consequente Systematik, mit der Lagrange das ganze Gebäude der höhern Analysis auf seiner Fundamentalauffassung der analytischen Functionen aufgebaut hat, sichern diesem Werke, sowie überhaupt allen Erzeugnissen des Lagrange'schen Genie's, für alle Zeiten die Bewunderung der Mathematiker. Crelle sagt in der Vorrede zu seiner Uebersetzung der Theorie der analytischen Functionen treffend: „In hohem Grade nämlich besass Lagrange die seltene Gabe, einen Gegenstand aus dem umfassendsten und allgemeinsten Standpunkte zu betrachten, ihn zu überschauen und bis in seine Tiefen zu durchdringen. Lagrange's Klarheit der Ideen und der Darstellung ist fast ohne Beispiel; das Verwickeltste ist ihm und wird durch ihn so leicht und einfach wie das Elementare, und an Strenge und Scharfsinn möchten nur die Alten ihm zu vergleichen sein. Alle seine Schriften sind Denen, für die er sie bestimmte, in hohem Grade deutlich, welches der stärkste Beweis ist, dass er sich selbst klar war.“

Betrachten wir aber Lagrange's Functionentheorie vom Standpunkte des Zweckes aus, den er ihr wesentlich beilegte, das ganze Gebiet der höhern Analysis ohne das Unendlichkleine zu behandeln und zu bewältigen, so müssen wir wohl zugestehen, dass der Erfolg seines so consequent verwirklichten Planes nicht der von ihm selbst gewünschte war. Wohl mögen die Autorität des grossen Mannes und die gewiss nicht zu verkennende höchste Systematik seines Werkes, sowie auch die Versuche, die in dieser Richtung schon von Männern, wie Taylor und Euler, gemacht worden waren, die Ursache gewesen sein, dass jenen Theorien, wenn auch nicht für lange Zeit nach ihrem Entstehen, immerhin doch eine seltene Aufmerksamkeit zu Theil geworden ist. Im Anfange dieses Jahrhunderts haben dann allerdings die Analytiker den Bemühungen ihres grossen Vorgängers um eine festere, das Unendlichkleine nicht zu Hülfe nehmende Begründung der Differentialrechnung keine

Rücksicht mehr geschenkt, indem sie jene immer mehr als unbegründet erkannte Furcht der früheren Mathematiker vor dem Verluste der als ein stetes eigenthümliches Attribut ihrer Wissenschaft hoch gehaltenen Strenge und Unumstösslichkeit der Principien ohne Schwanken bei Seite legten. Man sah allgemein ein, dass jene Bestrebungen keinen wesentlichen Erfolg gehabt hatten; um zu den endgültigen Resultaten der Differential- und Integralrechnung zu gelangen, musste man schliesslich doch wieder von den endlichen Differenzen zu den Differentialen übergehen. Lagrange nimmt in dieser Beziehung allerdings einen höhern Standpunkt ein als Euler; seine Entwicklung der Functionen in Reihen hat ihn in den gewöhnlichen Fällen auf elegante Weise zu den Derivirten der Funktionen geführt, ohne dabei den ihm keiner Klarheit fähig scheinenden Begriff des Unendlichkleinen irgendwie gebrauchen zu müssen. Aber gerade diese Reihenentwicklung ist es, die die Hauptangriffe auf Lagrange's Functionentheorie hervorgerufen hat. Man konnte es nicht gestatten, dass Reihenentwicklungen der Darstellung zu Grunde gelegt wurden, da noch keine eigentlich ausgebildete Theorie der Reihen geschaffen war. Worauf es bei der allgemeinen Gültigkeit einer Reihe vor Allem aus ankommt, auf ihre Convergenz, war bis dahin noch zu wenig Rücksicht gelegt worden. Erst Cauchy verdankt man tiefere Untersuchungen und Aufstellung zuverlässiger Gesetze und Kennzeichen der Convergenz der Reihen. Lagrange selbst hat darauf aufmerksam gemacht, dass ihn diese Entwicklung in besonderen Fällen im Stiche lasse. Im fünften Abschnitte seiner Functionentheorie kommt er auf die Entwicklung der Functionen, wenn man der veränderlichen Grösse einen bestimmten Werth beilegt. Setzt man nämlich in der Entwicklung von $f(x+k)$, welche die Form hat:

$$f(x+k) = f(x) + k \,.\, f'(x) + \frac{k^2}{1\,.\,2} \,.\, f''(x) + \cdots$$

für x einen bestimmten Werth, so kann es vorkommen, dass in f(x) Wurzelgrössen verschwinden, die in f'(x), f''(x), etc. nicht verschwinden. f'(x), f''(x), etc. würden dann also mehrere Werthe haben, während f(x) nur einen hat, was nicht sein darf. Es ist also, sagt Lagrange, die Reihe:

$$f(x) + k \,.\, f'(x) + \frac{k^2}{1\,.\,2} f''(x) + \dots$$

für die Entwicklung der Function f(x + k), sobald Wurzelgrössen, die sie enthalten sollte, wegfallen, „fehlerhaft". Mit Recht bemerkt Crelle hier, dass der Ausdruck „fehlerhaft" nicht ganz genau sei, indem eine richtige Rechnung nie etwas Fehlerhaftes geben hönne. Die Reihe sei in solchen Fällen eben divergirend und lasse das, was sie ausdrücke, unbestimmt.

Diess ist der Haupteinwand, den man gegen die sonst so meisterhaft durchgeführte Lagrange'sche Methode erhoben hat, und er ist nicht ganz unbegründet. In jedem Falle aber verdient das ausgezeichnete Werk nicht jene vernichtende, gewiss etwas unüberlegte Kritik, die C. H. Schnuse in dem Vorwort zu seiner Uebersetzung der Theorie der Functionen von Cournot so absprechend dahin geworfen hat: „Die Lagrange'sche Begründungsart der höhern Analysis ist die begriffloseste, willkürlichste und vageste von allen, wie man schon seit vielen Jahren eingesehen hat."

Wenn nun auch die Lagrange'schen Arbeiten nicht von jenem Erfolge gekrönt worden sind, den er mit ihnen hauptsächlich zu erzwecken hoffte, indem eben kurze Zeit nach seinem Tode jene Versuche einer andern, festern Begründung der Differentialrechnung wahrscheinlich für immer fallen gelassen wurden, so sind dieselben dennoch nicht ohne nachhaltige, ja theilweise epochemachende Wirkung geblieben. Ganz abgesehen davon, dass einige unwesentliche Eigenthümlichkeiten der Lagrange'schen Darstellung, wie das Princip der Reihenentwicklung in einzelnen Fällen, oder seine Benennung und Bezeichnung der Differentialquotienten als Derivirte $\left(\frac{dy}{dx} = f'(x)\right)$ einer Function etc. von den spätern Mathematikern adoptirt wurden und bis auf den heutigen Tag geblieben sind, hat Lagrange mit seinem Werke der Theorie der Functionen, der höhern Analysis überhaupt, einen neuen eigenthümlichen und scharf hervortretenden Entwicklungsgang vorgezeichnet. Nicht in dem ihr bestimmten Zwecke nämlich, sondern in dem Wesen und Charakter der Auffassung und Darstellung der Lagrange'schen Functionentheorie lag das bedeutungsvolle Moment ihrer spätern gestaltenden Kraft. Unter diesem ihr eigenthümlichen Charakter aber verstehe ich nicht ihre Darstellungsform ohne den Begriff des Unendlichkleinen, sondern die rein analytische oder besser arithmetische, von geometrisch-mechanischen Vorstellungen freie, vollständig abstrakte Auffassung der Functionen. Bis auf Lagrange betrachtete man jeden algebraischen Ausdruck von Variabeln bloss insofern, als er in irgend einer Beziehung zu geometrischen oder mechanischen Gebilden oder Problemen stand; jede Function einer oder mehrerer Variabeln repräsentirte entweder die Gleichung einer Curve, ihre Fläche oder Länge, die Acceleration oder den Weg eines sich bewegenden Körpers u. s. w.; man untersuchte ihre Eigenschaften also auch nur so weit, als sie mit denen der repräsentirten Gebilde in Beziehung standen. Lagrange war es, der zuerst die Functionen als solche an und für sich betrachtete, der $y = f(x)$, abgesehen von jeder geometrischen oder mechanischen Bedeutung, nur als eine sich stetig ändernde, von x abhängige, mit ihm wachsende oder abnehmende Grösse auffasste, und in dieser Hinsicht auch ihre Eigenschaften von rein algebraisch-arithmetischem Standpunkt aus discutirte. Insofern verdient Lagrange's Werk mit Recht den Namen einer Theorie der analytischen Functionen, während es in Rücksicht auf den Zweck, den ihm der Verfasser wesentlich beilegte, eher den Titel Derivationscalcül führen sollte. — Diese Lagrange'sche Auffassung der Functionen ist es nun, die in der Weiterentwicklung der höheren Analysis im neunzehnten Jahrhundert stets der leitende Grundzug blieb und als Quelle jener Functionentheorie betrachtet werden kann, die unter den grossen Analytikern der neuern Zeit, wie Legendre, Cauchy, Abel, Jakobi, Riemann, Weierstrass, etc. zu so hoher Blüthe sich entfaltet hat. Allein die weitere Entwicklung dieses Stoffes gehört nicht mehr in den Bereich dieses Buches; ich breche mit Lagrange ab und hoffe nur, durch diese letzten Betrachtungen dem unsterblichen Mathematiker gerecht geworden zu sein, indem ich auf die wahrhaft fruchtbare Seite seines grossen Werkes aufmerksam gemacht habe, deren Wirkungen auf die spätere Entfaltung der höhern Analysis eine strenge, aber einsichtige und unparteiische Beurtheilung niemals zu negiren vermag.

Bevor ich mich von dieser Seite der Lagrange'schen Thätigkeit wegwende, wird es angezeigt sein, kurz auf die elementaren Entwicklungen einzutreten, auf die derselbe seine gesammte Theorie stützt. Die *Théorie des fonctions analytiques* ist in drei Theile getheilt, deren erster die allgemeine Lehre von den Functionen und ihren Derivirten, nebst der Anwendung auf die Analysis, enthält; der zweite beschäftigt sich mit der Anwendung der Functionentheorie auf die Geometrie und der dritte mit derjenigen auf die Mechanik. Lagrange beginnt den ersten Theil damit, dass er in einer beliebigen Function von x, wie f(x), für x den Werth $x + k$ setzt, wo k eine beliebige unbestimmte Grösse ist, und die hieraus entstehende Function $f(x + k)$ in eine Reihe von der Form

$$f(x) + k \cdot p + k^2 \cdot q + k^3 \cdot r + \ldots$$

entwickelt, worin die Coefficienten p, q, r, neue, von der Stammgrösse f(x) abgeleitete und von k unabhängige Functionen von x sind. Lagrange will nun im Ferneren zeigen, dass eine solche Entwicklung einer Function in eine

Reihe mit ausschliesslich ganzen und positiven Exponenten von k möglich ist, oder vielmehr, dass die Reihe keine Potenzen von k mit gebrochenen oder negativen Potenzen enthält. Der Beweis ist allerdings etwas schwach, aber er ist auch, wie Crelle mit Recht bemerkt, nicht nöthig. „Denn", sagt der genannte Uebersetzer, „es kommt nur darauf an, die Grösse $f(x + k)$, und zwar gerade nur mit Potenzen von k mit ganzen positiven Exponenten, wirklich zu entwickeln, unbekümmert darum, ob noch eine andere Entwicklung möglich sei oder nicht. — — Man setzt die Gestalt der Entwicklung von $f(x + k)$ mit ganzen positiven Exponenten von k willkürlich voraus; denn nur diese Entwicklung und keine andere ist nothwendig." Wie nun diese Entwicklung vorgenommen werden kann, zeigt Lagrange auf folgende Weise:

Die Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von k vorausgesetzt, erhält man folgende Beziehung:

$$f(x + k) = f(x) + kP, \text{ also}$$

$$f(x + k) - f(x) = kP.$$

Dividirt man durch k, so erhält man

$$P = \frac{f(x + k) - f(x)}{k}.$$

Dieses P ist nun ebenfalls eine Function von x und k. Man kann also davon das, was von k unabhängig ist und folglich für $k = o$ nicht verschwindet, absondern. Wir bezeichnen mit p das, was aus P wird, wenn man $k = o$ setzt, so ist also p bloss eine Function von x, und analog wie oben für $f(x + k)$ hat man jetzt für P die Gleichung:

$$P = p + k \,.\, Q,$$

wo $k \,.\, Q$ denjenigen Theil von P bedeutet, welcher für $k = o$ verschwindet. Aehnlich schliesst man nun weiter:

$$Q = q + k \,.\, R,$$

wo q der Werth von Q für $k = o$, und $k \,.\, R$ derjenige

Theil von Q ist, der mit k zugleich verschwindet. So erhält man, indem man auf diese Weise fortfährt:

$$R = r + k \,.\, S \quad \text{u. s. f.}$$

und indem man diese Ausdrücke nach und nach substituirt, die successiven Gleichungen:

$$f(x + k) = f(x) + k \,.\, P = f(x) + kp + k^2 \,.\, Q = f(x) + kp + k^2 q + k^3 R = \text{etc.},$$

welches für die Entwicklung von $f(x + k)$ eine Reihe von der Form gibt, wie wir sie oben vorausgesetzt haben.

Es sei z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$, so erhält man:

$$f(x + k) = \frac{1}{x + k}, \text{ also}$$

$$k.P = \frac{1}{x + k} - \frac{1}{x} = -\frac{k}{x(x + k)}, P = -\frac{1}{x(x + k)}, p = -\frac{1}{x^2}$$

$$k.Q = -\frac{1}{x(x + k)} + \frac{1}{x^2} = \frac{k}{x^2(x + k)}, \; Q = \frac{1}{x^2(x + k)}, \; q = \frac{1}{x^3};$$

$$k.R = \frac{1}{x^2(x + k)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{k}{x^3(x + k)}, R = -\frac{1}{x^3(x + k)}, r = -\frac{1}{x^4} \text{ etc.}$$

folglich:

$$\frac{1}{(x + k)} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x(x + k)} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2(x + k)} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^3(x + k)} = \text{etc.}$$

wie es die wirkliche Division von $(x + k)$ in 1 ergibt.

Lagrange macht nun darauf aufmerksam, dass nach dieser Methode leicht zu ersehen ist, wie die Coefficienten p, q, r ... von der Stammfunction $f(x)$ abhängen und dass aus der Gleichzeitigkeit des Verschwindens der Reste kP, kQ, kR, etc. mit k, der für seine Functionentheorie so wichtige Satz folgt, dass man in der Reihe $f(x) + p \,.\, k + q \,.\, k^2 + r \,.\, k^3 + \ldots$, k immer so klein annehmen kann, dass ein beliebiges Glied der Reihe grösser ist als die Summe aller folgenden Glieder.

Es ist nun ferner noch das Gesetz zu bestimmen, nach welchem die Coefficienten p, q, r ..., von einander und von der Stammfunction abhängen. Kennt man dieses, so braucht man also die Reihe nicht mehr auf die eben ausgeführte Weise abzuleiten, sondern kann sämmtliche Coefficienten aus der Stammfunction berechnen. Zu diesem Zwecke verfährt Lagrange folgendermaassen:

Man setze in $f(x + k)$ für x den Werth $x + e$, wo e irgend eine unbestimmte, von k unabhängige Grösse ist, so geht dieselbe in $f(x + k + e)$ über. Es ist aber klar, dass man das nämliche Resultat erhält, wenn man in $f(x + k)$ $k + e$ anstatt k setzt. Das letztere Verfahren gibt uns die Gleichung:

$$f(x+k+e) = f(x) + p(k+e) + q(k+e)^2 + r(k+e)^3 + \cdots$$

oder nach Potenzen von k und e entwickelt (wobei wir aber zu der spätern nothwendigen Vergleichung nur der ersten Potenz von e bedürfen):

$$\begin{aligned} f(x + k + e) = f(x) &+ p \cdot k + q \cdot k^2 + r \cdot k^3 + \cdots \\ &+ p \cdot e + 2q \cdot ke + 3r \cdot k^2 e + \cdots \end{aligned}$$

Substituirt man aber $x + e$ an Stelle von x, und bedeuten $f(x) + e \cdot f'(x) \ldots$, $p + p'e + \ldots$, $q + q'e + \ldots$, etc. das, was aus $f(x)$, p, q, etc. wird, wenn man darin $x + e$ statt x setzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x + k + e) = f(x) &+ pk + qk^2 + rk^3 + \cdots \\ &+ f'(x) \cdot e + p'ke + q'k^2e + \cdots \end{aligned}$$

Da die beiden Resultate identisch sein müssen, was auch k und e für Werthe haben mögen, so erhält man, wenn man die Glieder, welche e, ke, k^2e, etc. enthalten, einzeln mit einander vergleicht:

$$p = f'(x),\ 2q = p',\ 3r = q', \text{ etc.}$$

Nun ist offenbar, wie $f'(x)$ die erste abgeleitete Function von $f(x)$ ist, auch p' die erste abgeleitete Function von p, q' diejenige von q, u. s. w. Bezeichnet man also der Gleichförmigkeit und Kürze wegen durch $f'(x)$ die erste abgeleitete Function von $f(x)$, durch $f''(x)$ diejenige von $f'(x)$, durch $f'''(x)$ diejenige von $f''(x)$, u. s. w., so erhält man:

$$p = f'(x) \qquad \text{und hieraus } p' = f''(x).$$

$$q = \frac{p'}{2} = \frac{f''(x)}{2} \qquad \text{„ „ } q' = \frac{f'''(x)}{2}$$

$$r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''(x)}{2\,.\,3} \qquad \text{„ „ } r' = \frac{f^{IV}(x)}{2\,.\,3}$$

$$s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{IV}(x)}{2.3.4} \qquad \text{„ „ } s' = \frac{f^{V}(x)}{2.3.4} \text{ etc.}$$

Substituirt man nun diese Werthe von p, q, r, s, etc. in die Reihe für $f(x + k)$, so erhält man:

$$f(x+k) = f(x) + k\,.\,f'(x) + \frac{k^2}{1\,.\,2}\,.\,f''(x) + \frac{k^3}{1.2.3}\,.\,f'''(x) + \ldots$$

wo $f'''(x)$ aus $f''(x)$ abgeleitet wird, wie $f''(x)$ aus $f'(x)$ und $f''(x)$ aus $f'(x)$, wie dieses aus $f(x)$. Sobald man also die erste abgeleitete Function einer Stammgrösse bilden kann, so erhält man auf dieselbe Weise alle übrigen Ableitungen derselben. Es braucht also die Entwicklung von $f(x + k)$ in eine Reihe bloss bis zum zweiten Gliede fortgeführt zu werden, denn der Coefficient von k ist die erste Ableitung von $f(x)$. — Es sei z. B. $f(x) = x^m$, so ist:

$$f(x + k) = (x + k)^m.$$

Durch einfache algebraische Operationen ist aber leicht nachzuweisen, dass die beiden ersten Glieder der Entwicklung von $(x + k)^m$ beziehungsweise x^m und $m\,.\,x^{m-1}\,.\,k$ sind. Es ist also

$$m\,.\,x^{m-1} = f'(x).$$

Auf dieselbe Weise, wie man aus $f(x)$ $f'(x)$ gebildet hat, bildet man nun auch $f''(x)$ aus $f'(x)$, d. h. man vermindert den Exponenten von x um 1 und multiplicirt die Function mit dem unverminderten Exponenten, also:

$$m\,(m - 1)\,x^{m-2} = f''(x) \text{ u. s. w.}$$

Die obige von Lagrange für $f(x + k)$ abgeleitete

Reihe ist wie bekannt nichts Anderes als der Taylor'sche Satz, den hier der französische Mathematiker auf rein algebraischem Wege, ohne Hinzuziehung unendlich kleiner Grössen aufgestellt und bewiesen hat. — Diess sind die Fundamentalsätze der Lagrange'schen Functionentheorie oder besser seiner Derivationsrechnung. Auf die weitere Entwicklung derselben kann ich hier nicht eintreten.

Ich muss hier noch kurz auf diejenige Methode zu sprechen kommen, die später in der Begründung der Differentialrechnung und der Ableitung ihrer elementaren Sätze die herrschende geworden und es auch bis auf die jetzige Zeit wesentlich geblieben ist, auf die Methode der Grenzen. Sie entstand aus dem Zurückgehen auf den Ursprung des infinitesimalen Princips, auf die Exhaustionsmethode des Archimedes. Dieser grosse Geometer ging zuerst von dem Grundsatz aus, dass die Fläche eines einem Kreise eingeschriebenen Polygons sich um so mehr derjenigen des Kreises nähere, je grösser die Anzahl seiner Seiten sei, d. h. dass die Kreisfläche die Grenze derjenigen des Polygons sei. Dasselbe Princip befolgte er in der Quadratur der Parabel und der Cubatur des parabolischen Konoids. In der neuern Zeit hat Newton zuerst diese Methode wieder aufgenommen; er nennt sie diejenige der ersten und letzten Verhältnisse und stellt sie an den Anfang seiner „Principien", das ganze Werk auf dieselbe basirend. Nach Newton vertrat Maclaurin diesen Standpunkt in seinem ausgezeichneten Werke *A treatise of fluxions,* welches er zur festern Begründung des neuen Calculs schrieb und in welchem er die Methode der Alten auf meisterhafte Art zu seinen Beweisen benutzt hat. Nach Maclaurin zeigte sich nun das Bestreben, diese alte synthetische Methode der Grenzen in den analytischen Calcul hineinzuziehen und hieraus entstand eben die Grenzmethode in der Differentialrechnung. Wir verdanken D'Alembert die ersten fundamentalen Auseinandersetzungen in dieser Hinsicht *); ihm folgte der Genfer L'huilier mit seinem von der Berliner Akademie gekrönten Werke *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, *1786*, und dem spätern ausführlicheren *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, 1795.* In diesem Jahrhundert vervollkommnete dann Cauchy **) die Grenzmethode und befestigte überdies die Principien der Differentialrechnung durch seine Theorien über die Convergenz der Reihen. Der Grundzug der Methode der Grenzen ist wohl bekannt. Man nennt eine Grösse die Grenze einer andern, wenn diese letztere sich jener stetig nähert, so dass der Unterschied beider schliesslich kleiner wird als jede angebbare Grösse. So ist z. B.

$$\text{Limes } \frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1,$$

indem der Quotient $\frac{\sin \triangle x}{\triangle x}$ der Zahl 1 um so näher kommt, je kleiner $\triangle x$ wird und in dem Momente, da $\triangle x$ zu Null wird, den Werth 1 erreicht. In der Differentialrechnung handelt es sich nun bekanntlich darum, die Grenze des Differenzenquotienten, welche der Differentialquotient ist, zu finden, d. h. es wird der Werth von

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

gesucht, für den Fall, dass $\triangle x$ gegen Null convergirt, was durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$\lim. \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{d\, f(x)}{dx}.$$

---

*) *Encyclopédie, par Didérot et D'Alembert, article: (Calcul) différentiel T. IV.*

**) *Cours d'analyse, 1821,* und *Leçons sur le calcul différentiel, 1829.*

Um diesen Werth zu finden, muss meistentheils $f(x + \Delta x)$ in eine Reihe entwickelt werden, deren Convergenz erforderlich ist; ein Fall, wo diese Entwicklung nicht nothwendig, ist folgender:

Es sei $f(x) = \sin x$. Also

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} . \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

Nun ist $\lim. \dfrac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$, und $\lim. \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)$ $= \cos x$, wenn Δx gegen Null convergirt, also ist lim. $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{d f(x)}{dx} = \dfrac{d \sin x}{dx} = \cos x$.

So viel über die Entwicklung der Grenzmethode, die heutzutage von dem grössten Theil der Mathematiker adoptirt ist.

Nachdem wir im Vorhergehenden die Versuche kennen gelernt haben, die im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts für eine festere Begründung der Principien der Infinitesimalrechnung gemacht worden waren, gehen wir nun im Folgenden zur Betrachtung der Fortschritte dieses höhern Calculs selbst über.

Es kann hier natürlich nicht davon die Rede sein, die ausserordentlich grosse Zahl von Integralen einzeln in Betrachtung zu ziehen und ihre jeweiligen Erfinder anzugeben; denn abgesehen von der Nutzlosigkeit eines solchen Unternehmens, wäre dasselbe mit den grössten Schwierigkeiten verbunden, ja geradezu unmöglich. Mit der Entstehung der Integralrechnung waren zugleich eine grosse Reihe der wichtigsten Integrale ohne Weiteres als Umkehrungen der einfacheren Differentialausdrücke gegeben. Die Mittel und Wege zur Integration der complicirteren Differentialfunctionen, deren hauptsächlichste wir im V. Cap. kurz berücksichtigt haben, fanden sich anfänglich ziemlich rasch, so dass die Hauptwerke über Integralrechnung, die um die Mitte des 18. Jahrhunderts veröffentlicht wurden, wie Eulers *Institutiones calculi integralis (Petropol. 1768, in 3 Bdn.)* und Bougainville's *Calculus integralis* (Wien 1764), etc. beinahe alle Integrale rationaler, irrationaler und transcendenter Differentialausdrücke enthalten, die man in den heutigen Lehrbüchern der Integralrechnung trifft. Schwer zu entscheiden ist, was in Eulers Werk von ihm selbst herrührt. Wir finden in der nur vier Jahre vorher erschienenen Integralrechnung von Bougainville beinahe dieselben Integrationen ausgeführt, wenn auch oft in weniger allgemeiner Form. So enthält das zweite Cap. des ersten Bandes von Eulers *Institutiones etc.* die sechs berühmten Recursionsformeln, die wir bei Bougainville im 7. und 8. Cap. des ersten Theiles ebenfalls antreffen, wenn auch weniger entwickelt und abgerundet. — Wir haben im V. Cap. auf die Fortschritte hingewiesen, die die Integralrechnung im Anfange des 18. Jahrhunderts durch Cotes'*) und Moivre's**) ausgezeichnete Leistungen erreicht hat, indem diese Mathematiker die Lösungen einer grossen Zahl von Integralen, die man bis dahin, ohne ihren bestimmten Werth angeben zu können, bloss auf die Quadratur des Kreises und der Kegelschnitte zurückgeführt hatte, in Form von Logarithmen oder Kreisbogen gaben. Auf diese Arbeiten kann ich hier nicht weiter eintreten, sondern gehe im Folgenden zu einigen schwierigen Partien der Integralrechnung über, die um diese Zeit die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch nahmen und in der Folge eine Bedeutung erlangen und die Grenzen der höhern Analysis in einem Maasse erweitern sollten, wie es ihr erstes unscheinbares Hervortreten nicht im Entferntesten ahnen liess. Es sind diess die Probleme der Rectification der Ellipse und Hyperbel, die auf Integrale führen, deren Werthe in endlicher, sowohl algebraischer als

---

*) *Harmonia mensurarum*, 1722.

**) *Miscell. analyt. etc. 1730.*

transcendenter Form, nicht angebbar sind. Die ersten Versuche auf diesem Gebiete richteten sich aber nicht sowohl auf die unmittelbare Lösung jener Integrale, als vielmehr auf die Zurückführung anderer complicirter Integrale auf die Rectification elliptischer und hyperbolischer Bogen. Es sind dies besonders Integrale wie die folgenden, $\int \frac{\sqrt{x}\,.\,dx}{\sqrt{1 \pm x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1 \pm x^2}}$, $\int \frac{\sqrt{x}\,.\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{a + bx + cx^2}}$, die in diese höhere Klasse gehören, d. h. sich nicht auf die Quadratur des Kreises und der Kegelschnitte zurückführen lassen und deren Reduktion die Mathematiker des 18. Jahrhunderts vielfach beschäftigte. Schon im Jahre 1718 *), dann aber eingehender 1750 **), zeigte der Italiener **Giulio Carlo Fagnano** (1682—1766), dass die Rectification der Lemniscate, jener interessanten Curve vierten Grades, von derjenigen der Ellipse und Hyperbel abhänge. Ebenso wies er die merkwürdige Eigenschaft derselben nach, dass auf ihr auf unendlich viele Arten zwei Bogen gefunden werden können, die einander gleich sind, dass ihr Quadrant also halbirbar sei, ja in so viele gleiche Theile getheilt werden könne, als Zahlen in den drei Formeln enthalten sind: $2 \,.\, 2^m$, $3 \,.\, 2^m$, $5 \,.\, 2^m$. (Euler zeigte später allgemeiner, dass die Lemniscate in $2 + 2^n$, gleiche Theile getheilt werden könne).

Ferner bewies Fagnano, dass auch auf der Ellipse sowohl als auf der Hyperbel unendlich viele Bogen gefunden werden können, deren Differenz in algebraischer Form ausdrückbar sei, obgleich einzeln die Bogen nicht rectificirt werden können. — Fagnano ahnte wohl selbst nicht, dass diese seine Untersuchungen von so weittragender Bedeutung werden sollten, indem sie die Mathematiker des achtzehnten

---

*) *Giornale de' letterati d'Italia, Tomo XXIX., XXX., e XXXIV.*

**) *Produzioni matematiche, Pesaro, 1750, Tom. II. pag. 317 etc.*

Jahrhunderts auf die Betrachtung derjenigen Integrale hinwiesen, die die Rectification elliptischer nnd hyperbolischer Bogen repräsentiren und die die Grundsteine jener neuen grossartigen Schöpfung auf dem Gebiete der höhern Analysis, der Theorie der elliptischen Functionen bilden, die den Namen eines Legendre und Jakobi unauslöschlichen Glanz verliehen hat. — Diese grosse Wichtigkeit jener ersten Arbeiten Fagnano's veranlasst mich, den Leser mit einigen derselben näher bekannt zu machen.

Die Darstellung der Differenz zweier elliptischer Bogen in algebraischer Form gibt Fagnano auf Seite 336 des zweiten Bandes seiner *Produzioni* in folgender Weise:

Lehrsatz: Die Summe der beiden Integrale $\int \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}$ und $\int \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}$ ist gleich $-\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}$, wenn x und z und die Constanten f, g, h und l der Gleichung genügen:

$$(1)\quad fhx^2z^2 + flx^2 + flz^2 + gl = 0.$$

Beweis: Aus Gleichung (1) folgt:

$$(2)\quad z = \frac{\sqrt{-flx^2-gl}}{\sqrt{fhx^2+fl}} \text{ und } x = \frac{\sqrt{-flz^2-gl}}{\sqrt{fhz^2+fl}}$$

Bezeichnen wir, um nicht immer die Integralzeichen wiederholen zu müssen, den Differentialausdruck unter dem ersten Integral mit X, denjenigen unter dem zweiten mit Z, und führen wir vermittelst der Gleichungen (2) z in den ersten und x in den zweiten Ausdruck ein, so erhalten wir, wie sogleich zu verificiren:

$$(3)\quad X + Z = \frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}} + \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}.$$

Differenzirt man die Gleichung (1) und dividirt das Resultat durch 2 fxz, so ergibt sich:

$$hzdx + hxdz + \frac{ldx}{z} + \frac{ldz}{x} = 0.$$

Dividirt man nochmals durch $\sqrt{-fl}$, so erhält man schliesslich:

$$\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}} + \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}} = -\frac{hzdx}{\sqrt{-fl}} - \frac{hxdz}{\sqrt{-fl}}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (3), so folgt sofort:

$$X + Z = -\frac{hzdx}{\sqrt{-fl}} - \frac{hxdz}{\sqrt{-fl}}$$

und hieraus durch Integration:

$$\int\frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}} + \int\frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}} = -\frac{h}{\sqrt{-fl}}\int zdx + xdz$$

$$= \frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}. \quad \text{q. e. d.}$$

Anwendung auf die Ellipse: Es sei in Fig. XXV die kleine Axe der Ellipse FDAN gleich $AF = 2a$, ihr Parameter $= p$, und die Abscisse $CH = x$. Setzt man zur Abkürzung $p - 2a = h$, so findet man für das Element ds des Bogens DJ den Differentialausdruck:

$$\frac{dx\sqrt{hx^2+2a^3}}{\sqrt{2a^3-2ax^2}}$$

Um diesen mit dem Ausdruck X im obigen Beweise in Uebereinstimmung zu bringen, brauchen wir bloss $l = 2a^3$, $f = -2a$ und $g = 2a^3$ anzunehmen. Setzt man nun diese Werthe für die Constanten in die Gleichung (2) ein, so findet man:

$$z = \frac{a\sqrt{2a^3-2ax^2}}{\sqrt{2a^3+hx^2}}$$

und gibt man der Abscisse $CE = z$ diesen Werth, so hat man nach obigem Lehrsatz die Beziehung:

$$\text{arc. } JD + \text{arc. } DG = \frac{-hxz}{2a^2} + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, bemerken wir, dass für $x = 0$, sowohl arc. JD als auch der algebraische Theil

$\frac{hxz}{2a^2}$ verschwindet, arc. DG aber gleich dem ganzen Quadranten DF wird. Man hat also in diesem Falle arc. DF = Const., und zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man schliesslich:

$$\text{arc. JD} - \text{arc. GF} = -\frac{hxz}{2a^2}.$$

Für die Rectifikation der Lemniscate vermittelst elliptischer und hyperbolischer Bogen schlägt Fagnano folgendes Verfahren ein:

Es sei in Fig. XXV die Lemmiscate CQACF mit der Halbaxe AC = a gegeben. Wenn C der Anfangspunkt der Coordinaten, so ist ihre Gleichung $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$, und nehmen wir irgend eine Sehne CQ = z $= \sqrt{x^2 + y^2}$ an, so ist, wie leicht nachzuweisen, $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$ = arc. CQ. Dann ist aber auch zugleich der ergänzende Bogen QA = arc. CA — arc. CQ = $\int \frac{-a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$.

Es sei in derselben Figur ADFN eine Ellipse mit der kleinen Halbaxe CA = a und der grossen Halbaxe CD = $a\sqrt{2}$. Nehmen wir die Abscisse CH = der Sehne CQ = z an, so ist der ihr entsprechende Bogen DJ = $\int \frac{dz\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ und der ergänzende JF = arc. DF — arc. DJ = $\int \frac{-dz\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

Es sei endlich in der nämlichen Figur LOAP eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbaxe AC = a. Nennen wir den radius vector CO = t, so wird der Bogen AO ausgedrückt durch das Integral $\int \frac{t^2 \, . \, dt}{\sqrt{t^4 - a^4}}$, was leicht zu verificiren.

Lehrsatz: Wenn zwischen t und z die Gleichung besteht:

$$(1)\quad t = \frac{a\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

so findet folgende Beziehung statt:

$$(2)\quad \int \frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int \frac{dz\,\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4 - a^4}} - \frac{zt}{a}.$$

Man zeigt die Richtigkeit dieses Satzes, indem man die aus (1) gezogenen Werthe für t und dt in die differenzirte Gleichung (2) einsetzt.

Zusatz: Es sei in Fig. XXV die Sehne CQ der Lemniscate CQACF $= z$, ebenso die Abscisse CH der Ellipse ADFN $= z$, und der radius vector CO der gleichseitigen Hyperbel LOAP $= t$, und hat dieses t den durch die Gleichung (1) ausgedrückten Werth, so stellt Gleichung (2) folgende Beziehung dar:

$$(3)\quad \text{arc. CQ} = \text{arc. DJ} + \text{arc. AO} - \frac{zt}{a}.$$

Setzt man $z = 0$, so werden alle drei Bogen, sowie auch das Glied $\frac{z\,t}{a}$ gleich Null, die Gleichung (3) ist daher vollständig und bedarf keiner Constante. Will man nun den Ausdruck für den Lemniscatenquadranten haben, so muss man $z = a$ setzen. In diesem Falle aber wird t und desshalb auch der hyperbolische Bogen AO, sowie das Glied $\frac{z\,t}{a}$ unendlich gross und die Gleichung (3) gibt uns daher in diesem Falle kein brauchbares Resultat; wir suchen desshalb für den Lemniscatenbogen noch eine andere Beziehung aufzustellen.

Lehrsatz: Wenn zwischen r und z die Gleichung besteht:

$$(4)\quad r = \frac{a^2}{z},$$

so findet folgende Beziehung statt:

$$(5)\quad \int \frac{-a^2\,dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \quad \int \frac{-dz\,\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{r^4 - a^4}} - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$$

Man zeigt die Richtigkeit dieses Satzes, indem man die aus (4) gezogenen Werthe für r und dr in die differenzirte Gleichung (5) einsetzt.

Zusatz: Es sei wie oben die Sehne CQ der Lemniscate $=$ z, ebenso die Abscisse CH der Ellipse; der radius vector CL der Hyperbel sei $=$ r und genüge der Gleichung (4), so repräsentirt die Gleichung (5) folgende Beziehung:

$$(6)\quad \text{arc. } QA = \text{arc. } JF + \text{arc. } AL - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$$

Setzt man $z = a$, so werden alle drei Bogen, sowie auch das Glied $\frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$ gleich Null, die Gleichung (6) bedarf daher keiner Constante. Setzt man aber $z = 0$, so wird arc. AL, sowie auch das Glied $\frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$ unendlich gross und man erhält also für den Lemniscatenquadranten wiederum kein befriedigendes Resultat. Addirt man aber die beiden Gleichungen (3) und (6), macht ferner in Fig. XXV Bogen AP $=$ AO, sodass arc. LAP $=$ arc. AO $+$ arc. AL, und berücksichtigt, dass $\frac{zt}{a} + \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4} = \frac{at}{z}$ ist, was leicht nachzuweisen, indem man für t seinen Werth aus (1) einsetzt, so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$\text{arc. } CQA = \text{arc. } DJF + \text{arc. } LAP - \frac{at}{z}$$

d. h. der Lemniscatenquadrant ist gleich dem Quadranten der Ellipse, deren kleine Axe gleich dem Durchmesser der Lemniscate, $= 2a$ und deren grosse Axe $= 2a\sqrt{2}$ ist, mehr dem Bogen LAP der gleichseitigen Hyperbel mit der Axe 2 a, weniger dem Ausdruck $\frac{at}{z}$.

Um die nämliche Zeit beschäftigten sich Maclaurin *) und D'Alembert **) mit der Reduction von Integralen

*) *A Treatise of fluxions*, *1740*.

**) *Histoire de l'acad. de Berlin*, *1746 und 1748*.

auf die Rectification der Ellipse und Hyperbel; ihre Zahl ist sehr gross; man findet die meisten derselben in Bougainville's Integralrechnung (Cap. XIV — XVII). Gegen die Mitte des Jahrhunderts richtete dann Euler seine Aufmerksamkeit auf jene Arbeiten Fagnano's über die Ellipse, Hyperbel und Lemniscate und fasste dieselben zuerst von allgemeinerem Gesichtspunkte auf, indem er sich die Aufgabe stellte, die Differentialgleichung $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$ zu integriren *). Obgleich nämlich die Integrale von $\frac{dx}{\sqrt{1-{}^4}}$ und $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ einzeln weder in algebraischer noch transcendenter Form ausgedrückt werden können, so ist dessenungeachtet das allgemeine Integral obiger Differentialgleichung algebraisch angebbar. Euler behandelt zuerst den speziellen Fall, wo m und n = 1 sind; da nun aber $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ den Bogen einer Lemniscate mit der Halbaxe = 1 für die Abscisse x darstellt, so repräsentirt die Integration der Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ die Aufgabe, auf der Lemniscate zwei Bogen zu bestimmen, die einander gleich sind. Sind m und n nicht gleich 1, sondern irgend andere Zahlen, die zu einander ein rationelles Verhältniss haben (denn nur für diesen Fall ist die Integration in algebraischer Form möglich, so handelt es sich darum, irgend zwei Bogen der Lemniscate anzugeben, die sich zu einander wie jene zwei Zahlen verhalten. Für das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ findet Euler: $x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$ und diess zwar, wie er selbst gesteht, nach keiner bestimmten Methode, sondern durch blosses Probiren (*nulla certa methodo ad hoc integrale sum perductus, sed id potius tentando vel divi-*

*) *Novi comment. acad. Petropol. Tom. VI., 1761.*

nando elicui). Differenzirt man nämlich obige Gleichung zwischen x und y, so erhält man:

$$x\,dx + y\,dy + c^2xy\,(xdy + ydx) = xdy + ydx \sqrt{1 - c^4},$$

woraus folgt:

$$dx\,(x + c^2xy^2 - y\sqrt{1 - c^4}) + dy\,(y + c^2x^2y - x\sqrt{1 - c^4}) = 0$$

Aus derselben Gleichung findet man für y und x die Werthe:

$$y = \frac{x\sqrt{1 - c^4} \pm c\sqrt{1 - x^4}}{1 + c^2x^2}$$

$$x = \frac{y\sqrt{1 - c^4} \pm c\sqrt{1 - y^4}}{1 + c^2y^2}.$$

Hieraus erhält man:

$$x + c^2xy^2 - y\sqrt{1 - c^4} = \mp c\sqrt{1 - y^4}$$

$$y + c^2x^2y - x\sqrt{1 - c^4} = \pm c\sqrt{1 - x^4}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die letzte Differentialgleichung ein, so folgt:

$$\mp\, c\,dx\sqrt{1 - y^4} \pm c\,dy\sqrt{1 - x^4} = 0$$

und hieraus:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist also in der That gleich

$$x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1 - c^4}$$

oder

$$y = \frac{x\sqrt{1 - c^4} \pm c\sqrt{1 - x^4}}{1 + c^2x^2}$$

d. h., wenn diese Gleichung zwischen x und y besteht, so ist der Bogen der Lemniscate, dessen Abscisse $= x$, von dem Bogen derselben Lemniscate, dessen Abscisse $= y$, nur um eine Constante verschieden, denn:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} + C.$$

Euler geht nun im Weiteren zu der allgemeineren

Differentialgleichung $\frac{m\,dx}{\sqrt{f + gx^2 + hx^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{f + gy^2 + hy^4}}$ über und zeigt, dass auch diese ein algebraisches Integral hat und schliesslich gibt er noch die Lösung der Gleichung:

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2 + 2dx^3 + ex^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{a + 2by + cy^2 + 2dy^3 + ey^4}}$$

die ebenfalls algebraisch angegeben werden kann, immer unter der Bedingung, dass m und n ein rationales Verhältniss zu einander haben. *) In der folgenden Abhandlung desselben Bandes gibt dann Euler die bekannten Anwendungen dieser Sätze auf Ellipse, Hyperbel und Lemniscate, in denen er die Probleme Fagnano's wesentlich ergänzt und verallgemeinert. Wir finden hierüber noch weitere Arbeiten Eulers im VII. Bande derselben Commentarien. Er zeigt daselbst und später in einer Abhandlung des XII. Bandes allgemein, dass alle Curven, deren Bogen durch ein Integral von der Form $\int \frac{dx\,(a + bx^2 + cx^4 + \ldots \text{etc.})}{\sqrt{A + Bx^2 + Dx^4}}$ repräsentirt werden, sich verhalten wie Ellipse und Hyperbel, etc., d. h. dass wenn auf einer solchen Curve irgend ein Bogen angenommen wird, von irgend einem Punkte der Curve aus ein anderer Bogen abgeschnitten werden kann, der von jenem um eine geometrisch angebbare Grösse verschieden ist. In der ersten Abhandlung desselben XII. Bandes gibt uns dann Euler die directe, äusserst complicirte Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}}$$

vermittelst verschiedener Substitutionen, welche des grossen Mathematikers unvergleichlichen Scharfsinn in höchstem Maasse bezeugen. Euler gesteht selbst zu, dass bei diesem

---

*) Man findet diese Lösung auch in den *Instit. calcul. integ. Tom. I. Sect. II. Cap. VI.*

Probleme, wie bei kaum einem anderen, die mathematische Erfindungsgabe den grössten Antheil hatte (*ita ut vix sit exspectandum, cuiquam has operationes in mentem venire potuisse*). — Die nämliche Differentialgleichung wurde auch von Lagrange*) integrirt und zwar nach einer andern, nicht weniger geistreichen Methode.

Diese Integrationen nun sind nichts anderes als die Lösungen des Additions- und Multiplicationsproblems der elliptischen Integrale; denn, wie bekannt, stellt sich das allgemeine elliptische Integral unter der Form dar

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

welche leicht auf die einfachere:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

zurückgeführt wird. Das Problem der Multiplication besteht nun darin, eine Function y von x zu bestimmen, die der Gleichung genügt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \int \frac{n\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+y^3D+Ey^4}}$$

Nach diesen Vorarbeiten Fagnano's, Maclaurin's, D'Alembert's und Eulers richteten sich sodann die Bemühungen der Mathematiker auf die weitere Reduction des obigen allgemeinen Integrals. Die ersten umfassenden Arbeiten in dieser Hinsicht verdanken wir Lagrange*). Derselbe führte das allgemeine Integral auf die Form zurück:

$$\int \frac{X\,dx}{\sqrt{(1 \pm r^2x^2)(1 \pm s^2x^2)}},$$

wo X eine ganze rationale Function von x^2 ist. In derselben Abhandlung beschäftigte sich dann Lagrange mit der

*) *Théorie des fonctions analytiques, I. Part. § 79.*

**) *Mémoires de l'acad. royale des sciences de Turin, 1784 et 1785. Tom. II.*

Rectification der Ellipse und Hyperbel, deren Bogen allgemein durch das Integral:

$$\int \frac{(A + Bx^2)\, dx}{\sqrt{(1 - p^2x^2)(1 - q^2x^2)}}$$

repräsentirt werden. Lagrange transformirt auch dieses durch die Substitution $px = \sin\varphi$ in das folgende:

$$\int \frac{\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^3} \sin^2\varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2} \sin^2\varphi}}$$

für welches er die beiden Grenzen

$$\int \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^3} \sin^2\varphi\right) d\varphi \text{ und } \int \frac{\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^3} \sin^2\varphi\right) d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}}}$$

angibt, die in Folge bestimmter Werthverhältnisse von p und q einander beliebig nahe gebracht werden können. Lagrange entwickelt jenes Integral auch in eine unendliche Reihe, deren Convergenz selbst für Berechnung der Bogen von Ellipsen mit grosser Excentricität hinreichend ist. — Wir sehen, dass Lagrange mit dem obigen Integrale jener schliesslichen Transformation des allgemeinen elliptischen Integrals durch Legendre, den eigentlichen Begründer der Theorie der elliptischen Functionen, nicht mehr ferne stand. Wie bekannt ist das Resultat der Legendre'schen Transformation *) die Reduction des allgemeinen Integrales

$$\int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

auf die drei elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung:

$$1) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = F(k, \varphi),$$

*) *Traité des fonctions elliptiques, Paris 1825, Tom. I.*

$$2)\quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,.\,d\varphi = E\,(k,\ \varphi),$$

$$3)\quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} = \Pi(k,l,\varphi)$$

Um die nämliche Zeit, da Lagrange sich mit diesen Transformationen des allgemeinen Integrals beschäftigte, nahm der Engländer **John Landen***) die Untersuchungen Fagnano's und Eulers über die Vergleichung elliptischer und hyperbolischer Bogen wieder auf. Man verdankt diesem ausgezeichneten Mathematiker die Herleitung jener merkwürdigen Beziehung zwischen den hyperbolischen und elliptischen Bogen, dass nämlich ein ersterer sich durch zwei letztere darstellen lasse; ferner den Satz, dass ein elliptischer Bogen durch denjenigen einer andern Ellipse und einen Kreisbogen ausgedrückt werden könne. In diesen Ableitungen wandte Landen jene Substitutionen an, die heute noch in der Theorie der elliptischen Functionen seinen Namen tragen und mit deren Hülfe ein elliptisches Integral erster Gattung in ein anderes von grösserem oder kleinerem Modulus und kleinerer oder grösserer Amplitude transformirt werden kann, oder wodurch ein elliptisches Integral erster Gattung durch zwei elliptische Integrale zweiter Gattung ausgedrückt werden kann. — Hiemit verlasse ich diesen Gegenstand, indem ich für die weitere Entwicklung der Theorie der elliptischen Functionen auf des grossen Legendre's**) und in zweiter Linie auf Jacobi's***)

---

*) *Philosoph. Transactions, 1771 und 1775 und Mathematical Memoirs, 1780.*

**) *Mémoires de l'acad. royale des sciences 1786.*

Mémoire sur les transcendantes elliptiques, etc. 1793.

Traité des fonctions elliptiques, 1825—28.

***) *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum, Regiomonti 1829.*

epochemachende Arbeiten hinweisen muss; ich habe in den vorhergehenden Zeilen nur einen kurzen Ueberblick über die geometrischen Vorarbeiten gegeben, die allmälig zu der eigentlich analytischen Theorie dieses so ausgedehnten Gebietes der höheren Mathematik geführt haben.

Von geringerer Tragweite als die elliptischen Functionen, aber dennoch von bedeutendem Einfluss auf die Theorie der Transcendenten (so nennt man in der höhern Analysis gewöhnlich diejenigen Integrale, deren allgemeiner Werth in geschlossener Form nicht angebbar ist) sind einige bestimmte Integrale geworden, die zuerst von Euler und nachher hauptsächlich von Legendre, der ihnen den Namen Euler'sche Integrale gegeben hat, der Betrachtung unterzogen worden sind. Es sind diess die beiden bestimmten Integrale

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-y)^{q-1}\,dx \text{ und } \int_0^1 \left(l\,.\,\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,$$

die Legendre kürzer durch die Symbole (p, q) und $\Gamma(a)$ bezeichnet hat. Das letztere Integral, das durch die Substitution $y = l\frac{1}{x}$ die Form $\int_0^\infty y^{a-1}.\ e^{-y}.\ dy$ annimmt, wird gemäss seiner Bezeichnung Gammafunction genannt. Diese Function ist für ganze und positive Werthe von a ebenfalls eine ganze Zahl; denn in diesem Falle findet man leicht

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,.\,e^{-x}\,.\,dx = \Gamma(a) = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,(a-1)$$

und allgemeiner:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,.\,e^{-mx}\,.\,dx = \frac{\Gamma(a)}{m^a}\,.$$

Ist aber a eine gebrochene Zahl, so ist die Gammafunction eine transcendente, deren Werth allgemein nicht angebbar, aber für bestimmte Werthe von a numerisch berechnet werden kann. Euler betrachtete anfangs in verschiedenen Abhandlungen nur das erste Integral, von dem er einige ausgezeichnete Eigenschaften nachwies. So zeigte er *), dass die folgende Beziehung stattfindet:

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1 - x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,.\,dx = \int_0^1 x^{q-1}\,(1 - x^n)^{\frac{p}{n}-1}\,.\,dx.$$

Euler schrieb nämlich die Integrale erster Art in dieser Form, p, q und n als ganze positive Zahlen voraussetzend. Dieselben reduciren sich, indem man $x^n = y$ setzt, auf

$$\frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1}\,(1 - y)^{\frac{q}{n}-1}\,dy,$$

welche Form mit der unsrigen übereinstimmt, wenn man $\frac{p}{n} = p$ und $\frac{q}{n} = q$ setzt, wo nun p und q jeden beliebigen positiven gebrochenen Werth haben können. Euler bezeichnete die obigen beiden Integrale kürzer durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ (erst später wurde die Bezeichnung (p, q) gebräuchlicher), und der angeführte Satz liegt also in der einfachen Gleichung ausgesprochen:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

d. h. man darf in dem Integrale erster Art p und q vertauschen, ohne den Werth desselben zu verändern. Dieser Werth ist nämlich nach Euler in Form eines unendlichen Produktes:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n\,(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n\,(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)}\cdot\frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)}$$

woraus der oben ausgesprochene Satz sogleich folgt.

---

*) *Mélanges de la Société royale de Turin, Tom. III., pour les années 1762—65, et Institut. calc. integr. Tom. I. sect. I. Cap. VIII et IX.*

Noch allgemeiner ist nach Euler:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)$$

oder nach Legendre's Bezeichnungsweise:

$$(p, q)(p+q, r) = (p, r)(p+r, q) = (q, r)(q+r, p),$$

was der französische Mathematiker mit Hülfe der Integrale zweiter Art oder der Gammafunctionen nachweist. Durch Transformation des Integrales erster Art lässt sich nämlich leicht zeigen, dass

$$(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Analog ist dann: $(p+q, r) = \dfrac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$;

und multiplicirt man beide Gleichungen, so folgt:

$$(p, q)(p+q, r) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

Da nun das Glied auf der rechten Seite sich nicht ändert, wenn man p, q und r untereinander vertauscht, so muss dies auch bei dem Glied auf der linken Seite der Fall sein und der obige Satz ist hiemit bewiesen.

Euler leitete aus diesen Beziehungen verschiedene andere Sätze ab, führte eine grosse Zahl von Integralen auf die Form (p, q) zurück und verglich vor Allem die verschiedenen Integrale dieser Art für das nämliche n miteinander. Aus der Beziehung:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{n-p}\right)=\left(\frac{n-p}{p}\right)=\frac{\pi}{n \sin \frac{p\pi}{n}}=\frac{\pi}{n \sin \frac{q\pi}{n}}$$

die Euler aus dem unendlichen Produkte für $\left(\frac{p}{n-p}\right)$ herleitete, ergaben sich ihm die Werthe einer Menge von Integralen der ersten Gattung für beliebige ganze p, q und n. Für n = 3 z. B. hätte man, so lange p und q nicht > n werden, folgende Fälle zu unterscheiden:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right),$$

und von diesen haben $\left(\frac{2}{1}\right)$ und $\left(\frac{3}{2}\right)$ z. B. folgende Werthe:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{2}{1}\right) = \int_0^1 x\,(1-x^3)^{\frac{1}{3}-1}.\,dx = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)^3}} = \frac{\pi}{3.\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left(\frac{2}{3}\right) = \int_0^1 x\,d\,x = \frac{1}{2}.$$

$\left(\frac{2}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{1}\right)$ sind die einzigen in geschlossener Form nicht angebbaren Fälle.

Auf die Betrachtung des Integrales zweiter Art kam Euler erst später in einer posthumen Abhandlung.*) Hier finden wir zuerst den Fundamentalsatz der Theorie der Gammafunctionen ausgesprochen und zwar in folgender Form:

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^n dx = n\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx;$$

oder nach den Legendre'schen Zeichen:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n),$$

vermittelst welcher Relation man z. B. die Function Γ für alle Werthe von n zwischen 1 und 2 berechnen kann, wenn man sie für alle Werthe von n von 0 bis 1 kennt. Ferner treffen wir in dieser Abhandlung die gegenseitige Beziehung der Integrale erster und zweiter Art aufgestellt, in der Gleichung:

$$\frac{m+n}{mn}\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^m dx.\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^n dx = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{m+n} dx \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

*) *Nova acta acad. Petrop. Tom. VIII. 1790.*

welche nach jetziger Bezeichnungsweise die Form annimmt:

$$\frac{m+n}{m\,.\,n}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)=\Gamma(m+n+1)\,.\,(m,n);$$

oder: $$\frac{m+n}{m\,.\,n}\,m\,.\,\Gamma(m)\,.\,n\,\Gamma(n)=(m+n)\,\Gamma(m+n)\,.\,(m,n)$$

und endlich:

$$(m,n)=\frac{\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Diese Euler'schen Arbeiten wurden später dann von Legendre wieder aufgenommen, der die Theorie der Gammafunctionen zu grosser Vollkommenheit ausgebildet hat. Derselbe berechnete auch für diese, d. h. vielmehr für ihre Logarithmen, Tafeln, wie er es für die elliptischen Integrale gethan hatte. Man findet dieselben, sowie seine erschöpfenden Untersuchungen über die Gammafunctionen in seinen *Exercices de calcul intégral, Tom. II., 1817,* auf die ich den Leser hiemit verweisen muss.

Kein Gebiet der gesammten Mathematik weist grössere Lücken in seinem inneren organischen Bau dar, keines widersteht in solchem Maasse einer consequenten Anwendung bestimmter Methoden und feststehender Principien, wie dasjenige der Differentialgleichungen, und doch haben sich auf diesem Felde wie auf keinem anderen die Anstrengungen der grössten Mathematiker concentrirt. Euler, D'Alembert, Lagrange, Clairaut, Monge, Laplace sind es vorzüglich, die hierin sich die schönsten Lorbeeren errungen und die Theorie der Differentialgleichungen auf jenen Punkt gebracht haben, den sie am Ende des 18. Jahrhunderts inne gehabt und mit Ausnahme einzelner besonderer Partien bis auf unsere Zeit um wenig mehr überstiegen hat, wenn schon die ausgezeichnetsten Analytiker dieses Jahrhunderts ihre eminenten Kräfte hierin vielfach mit einander gemessen haben. Die Theorie der Differentialgleichungen mit nur zwei Variabeln ist allerdings auf einem bedeutenden Grade ihrer Ausbildung angelangt, wenn auch in vielen, besonders allgemeinern Fällen alle Hülfsmittel der Analysis scheitern; um so grössere Schwierigkeiten aber bieten die Differentialgleichungen mit mehreren Variabeln und unter diesen besonders die partiellen Differentialgleichungen dar, die bekanntermaassen die grösste Wichtigkeit haben, indem die vorzüglichsten und meisten Probleme der mathematischen Physik auf solche zurückgeführt werden müssen. Dieses Gebiet ist es besonders, das den Anstrengungen jener grossen Mathematiker mehr als irgend ein anderes hartnäckig widerstand und gerade in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit der ersten Analytiker in um so höherem Grade auf sich gelenkt hat.

Die Zahl der Abhandlungen über Differentialgleichungen während des achtzehnten Jahrhunderts ist eine enorme, und diess verbunden mit dem Umstande, dass sich dieselben nur selten in principiellen Betrachtungen über diese Theorien und über die Lösung allgemeiner Fälle ergehen, sondern meistens nur ganz spezielle Gleichungen behandeln, erschwert in hohem Maasse eine gedrängte geschichtliche Darstellung dieses Gebietes. Immerhin verdanken wir vor Allem Euler, Clairaut, Lagrange und Monge die Aufstellung der wesentlichen allgemeinen Gesichtspunkte in dieser ausgedehnten Theorie, worauf ich in der folgenden Behandlung dieses Stoffes das Hauptgewicht legen werde.

Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades. — Wir haben im V. Cap. die ersten Anfänge der Theorie der Differentialgleichungen unter den Bernoulli kurz betrachtet und hier auf das erste und wesentlichste Moment in der Lösung der Gleichungen erster Ordnung mit nur zwei Variabeln hingewiesen, nämlich auf die Trennung dieser Variabeln behufs der Integration. Es war diess selbstverständlich die erste Forderung und unumgängliche Bedingung der Integration einer solchen Gleichung; allein dieselbe trat im Anfange der Entwicklung keineswegs so natürlich hervor, wie man erwarten könnte; in vielen Fällen durfte die Trennung sogar nicht vorgenommen werden, wenn die Integration ermöglicht werden sollte, was wir an dem Beispiele sehen, das wir Seite 128 aus Joh. Bernoulli's *Lectiones* angeführt haben, wo durch verschiedene Substitutionen die Gleichung:

$$y \frac{dx}{dy} = \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay}$$

auf die folgende zurückgeführt wird

$$3t\,dm - mdt = 0,$$

welche durch Multiplication mit $\frac{m^2}{t^2}$ das vollständige Differential:

$$\frac{3tm^2\,dm - m^3dt}{t^2} = 0$$

ergibt, dessen Integral gleich $\frac{m^3}{t} = c$ ist. Die Trennung der Variabeln aber in der Gleichung:

$$3t\,dm - m\,dt = 0$$

würde ergeben:

$$\frac{3\,dm}{m} = \frac{dt}{t},$$

welche Differentiale, wie wir wissen, Bernoulli damals noch nicht integriren konnte. Wie bekannt, führt aber die Trennung der Variabeln bei Differentialgleichungen sehr oft auf Integrale von dieser Form. — Allein die richtige Lösung des Integrals $\int \frac{dx}{x}$ liess nicht lange auf sich warten; wir finden dieselbe bekanntlich zuerst in der Abhandlung Joh. Bernoullli's über den Exponentialcalcül (*Act. erud. März 1697*). Schon vorher aber drückte sich dieser Mathematiker in einem Briefe an Leibnitz vom Mai 1694 *) dahin aus, dass die Haupt-, ja die unerlässliche Bedingung der Integration der Differentialgleichung erster Ordnung die Trennung der Variabeln sei (*Hoc enim unicum intendo, ut in æquationibus*

*) *Comm. epistol. Tom. I. pag. 7.*

differentialibus indeterminatæ x cum suis differentialibus dx separentur ab indeterminatis y et dy, quod palmarium est in hoc scrutinio: secus enim ad constructionem aequationis differentialis non pervenitur). Dieses geschah nun entweder durch einfache Umstellung der Gleichungen, oder, wo dies nicht anging, durch Substitution neuer Variabeln, und hierin nun war dem mathematischen Erfindungsgeist ein ausserordentlicher Spielraum gelassen. Beide Brüder Bernoulli lösten auf diesem Wege schon eine grosse Zahl von Differentialgleichungen; die wichtigste derselben, nach Jak. Bernoulli, der sie zuerst den Mathematikern vorgelegt hatte, die Bernoulli'sche genannt, haben wir schon im V. Cap. näher betrachtet (pag. 129), und ihre Lösung durch Joh. Bernoulli angegeben. Derselbe fand sie direkt durch Substitution von u z für y; sie kann aber auch indirekt gelöst werden, indem man sie zuerst durch Substitution von $z^{\frac{1}{1-n}}$ für y auf die sog. lineare Gleichung der ersten Ordnung zurückführt, deren Form

$$dy + Xydx + X_1dx = 0$$

ist und welche als allgemeines Integral bekanntlich die Gleichung hat:

$$y = e^{-\int X\,dx}\left(C - X e^{\int X\,dx}dx\right)$$

Zur Zeit der Bernoulli kannte man auch schon die Lösung der homogenen Differentialgleichung vermittelst Trennung der Variabeln, und man verdankt besonders Joh. Bernoulli die wesentlichen Fortschritte in dieser Richtung. Die homogene Gleichung ist bekanntlich diejenige, in welcher die Summe der Exponenten von x und y in allen Gliedern die gleiche ist. Durch Substitution von ux für y lassen sich die Variabeln sofort trennen. — Mit der Lösung der homogenen und linearen Differentialgleichungen war die Aufgabe der Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades in beträchtlichem Maasse reducirt, indem eine bedeutende Zahl complicirterer Gleichungen sich auf jene zurückführen lassen. Mit solchen Reductionen und Integrationen beschäftigten sich bis gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts die berühmtesten Mathematiker; ich verweise hiefür den Leser auf die Abhandlungen von Euler, Joh. und Nikol. Bernoulli, Hermann, Goldbach*), etc., und auf Joh. Bernoulli's Werke (Tom. I und III). Auch einige italienische Mathematiker haben sich auf diesem Gebiete in ausgezeichneter Weise hervorgethan, **Gabriel Manfredi** **) (1681—1761), **Jacopo** ***) (1676—1754) und seine Söhne **Vinzenzo** †) und **Giordano Riccati**. Jacopo legte den Mathematikern im Jahre 1722 im 8. Bande der Supplemente der *Act. erud. Lips.* die nach ihm benannte Differentialgleichung zur Lösung vor, deren Form gleich

$$dy + ay^2dx = bx^m dx$$

und von der er zeigte, dass sie vollständig integrirbar, wenn m in der Formel

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$$

enthalten ist, wo i jede beliebige positive, ganze Zahl sein kann. Diese Integrationsbedingung (die Integration selbst nicht) fanden ungefähr zu gleicher Zeit die Mathematiker Johannes, Nikolaus (Sohn von Jakob), Nikolaus (Sohn von Joh.), Daniel Bernoulli und Goldbach *(Commentar. acad. Petrop. Tom. I.)*

Gegen das Jahr 1740 machte sich in der Integration der Differentialgleichungen ein neues Princip geltend, das, wenn es auch nicht auf gleiche Anwendungsfähigkeit An-

---

*) *Comment. acad. Petrop. Tom. I, II, VI, IX.*

**) *De constructione æquationum differentialium primi gradus, Pisa 1707.*

***) *Opere del conte Jacopo Riccati, Lucca 1764—74.*

†) *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia, Lucca 1757—72, et*

Institutiones analyticæ, Bologna, 1765—67.

spruch machen kann, wie das der Trennung der Variabeln, dennoch als das allgemeinere und mit dem Wesen der Differentialgleichungen tiefer zusammenhängende betrachtet werden muss. Es ist diess die Theorie des integrirenden Factors, die mit gleicher Berechtigung Euler*), Clairaut**) und **Fontaine*****) (1705—71) ihre Entstehung verdankt. Diese Mathematiker gingen von der Betrachtung der allgemeinen Gleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln von der Form

$$M\,dx + L\,dy = 0$$

aus. Da eine solche Gleichung, schlossen sie, immer ein Integral zulässt, so muss, wenn sie nicht selbst ein vollständiges Differential ist, ein Factor existiren, der sie zu einem solchen macht. Wenn nun μ ein solcher Factor ist, so verfuhren sie, um denselben zu finden, folgendermaassen:

Sie zeigten, dass, wenn $M\,dx + N\,dy$ ein vollständiges Differential sein soll, die Gleichung erfüllt sein muss

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx};$$

ist aber $M\,dx + N\,dy$ kein vollständiges Differential, sondern μ der Factor, der es erst zu einem solchen macht, so muss nun ebenso die Gleichung bestehen:

$$\frac{d\mu M}{dy} = \frac{d\mu N}{dx}$$

oder, da μ im Allgemeinen eine Function von x und y ist:

$$\mu\frac{dM}{dy} + M\frac{d\mu}{dy} = \mu\frac{dN}{dx} + N\frac{d\mu}{dx}.$$

oder:

$$\mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = N\frac{d\mu}{dx} - M\frac{d\mu}{dy}.$$

Diess ist, wie man sieht, eine partielle Differentialgleichung und ihre Lösung daher im allgemeinen schwieriger

---

*) *Novi comment. acad. Petrop. Tom. VIII et XVII.*

**) *Mém. de l'acad. des sciences, 1739 et 1740.*

***) *Mém. donnés à l'acad. 1764, pag. 24 et 84.*

als die der vorgelegten Gleichung. Wesentlich erleichtert wird die Bestimmung von μ, wenn es nur eine der Variabeln enthalten soll. Fehlt z. B. y, so verwandelt sich obige Gleichung in:

$$\mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = N\frac{d\mu}{dx}$$

oder:

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$

Ebenso hat man, wenn x fehlt:

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dy} = -\frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right).$$

Soll also μ leicht, ohne Lösung einer partiellen Differentialgleichung, gefunden werden können, so dürfen die Ausdrücke

$$\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$

resp. kein y oder kein x enthalten.

Euler zeigte nun im Weiteren, dass, wenn ein solcher Factor μ existirt, der die Gleichung $M\,dx + N\,dy$ zu einem vollständigen Differential macht, es dann für die nämliche Gleichung unendlich viele integrirende Factoren gibt. Denn es sei

$$\mu\,(M\,dx + N\,dy) = dz$$

so hat man:

$$\mu\,\varphi(z)\;(M\,dx + N\,dy) = \varphi(z)\,dz\,;$$

Das zweite Glied ist aber immer ein vollständiges Differential, also muss es das erste ebenfalls sein, d. h. $\mu\,.\,\varphi(z)$ ist ein integrirender Factor, was auch φ für eine Function bedeuten mag.

Wie man die Gleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ integrirt, wenn sie ein vollständiges Differential ist, finden wir in den citirten Abhandlungen ebenfalls gezeigt und in derjenigen von Clairaut vom Jahre 1740 diese Betrachtungen auch auf Gleichungen von mehr als zwei Variabeln ausgedehnt.

So zeigt er, dass wenn die Differentialgleichung erster Ordnung mit 3 Variabeln:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

ein vollständiges Differential sein soll, die drei Bedingungsgleichungen erfüllt sein müssen:

$$(1)\ \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},\ \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx},\ \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy},$$

oder allgemeiner, dass, wenn die Gleichung überhaupt eine Lösung zulässt, die einzige Bedingungsgleichung

$$(2)\ P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0$$

erfüllt sein soll. Allgemein zeigt Clairaut, dass die Anzahl der Bedingungsgleichungen für die Möglichkeit der Lösung einer totalen Differentialgleichung erster Ordnung mit m Variabeln gleich $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ sei, dass diese Zahl sich aber reduciren lasse auf $\frac{m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2}$, indem die übrigen Gleichungen durch diese bestimmt und also nicht mehr willkürlich sind. — Auch auf die geometrische Bedeutung der totalen Differentialgleichungen mit 3 Variabeln geht Clairaut etwas näher ein, indem er zeigt, dass nur in dem Falle, wo die vorgelegte Differentialgleichung der Bedingung (2) genügt, dieselbe eine Eigenschaft einer bestimmten krummen Oberfläche ausdrückt, dass also nur dann eine Function z von x und y existirt, die der Differentialgleichung genügt.

Auch D'Alembert *) und Condorcet **) haben sich in verschiedenen Abhandlungen mit den Integrationsbedingungen und dem integrirenden Factor der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei und mehreren Variabeln beschäftigt; ich verweise unten auf die hauptsächlichsten ihrer

---

*) *Opuscules mathématiques, Tom. IV.*

**) *Du calcul intégral, Paris, 1765.*
Miscell. Taurin. Tom. IV.

Schriften. — Für den integrirenden Faktor vergleiche man ferner Eulers *Institutiones calc. integ. (Tom. I. Sect. II. Cap. II).* Derselbe gibt dort eine grössere Zahl von Beispielen, von denen besonders diejenigen über die homogenen Differentialgleichungen hervorzuheben sind. Euler macht nämlich dabei die Beobachtung, dass das Princip des integrirenden Factors insofern das allgemeinere und rationellere sei als dasjenige der Trennung der Variabeln, als bei diesem der integrirende Factor ebenfalls, wenn auch gewöhnlich verborgen, zur Anwendung komme, umgekehrt aber durch den integrirenden Factor noch keineswegs die Trennung der Variabeln gegeben sei, dass mithin dieses letztere Verfahren dem erstern untergeordnet sei. In dem folgenden dritten Capitel stellt sich Euler die für die Lösung von Differentialgleichungen nicht unwichtige Aufgabe, für bestimmte gegebene integrirende Factoren die Form der zugehörigen Differentialgleichungen zu finden.

Differentialgleichungen erster Ordnung und höhern Grades. — Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + T\frac{dy}{dx} + U = 0.$$

Die zunächstliegende Integrationsmethode einer solchen Gleichung wäre, dieselbe nach $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen. Man würde so n Gleichungen von der Form $\frac{dy}{dx} - \varphi(x, y) = 0$ erhalten, die n Integrale $\psi_1(x, y, c_1) = 0$, $\psi_2(x, y, c_2) = 0$, etc. ergeben würden. Nimmt man in allen diesen Integralen die Constanten $c_1, c_2 \dots$ als gleich an, was der Allgemeinheit unbeschadet geschehen darf, so erhält man als allgemeines Integral das Product sämmtlicher n Integrale. Allein diese direkte Methode ist in vielen Fällen, selbst wenn n nicht über 2 hinausgeht, mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden, so dass die Mathematiker schon frühe sich nach besonderen analytischen Kunstgriffen behufs Integration solcher Gleichungen umgesehen haben. Oft ist es nämlich leichter, die vorgelegte Gleichung nach y oder x als nach $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen. In solchen Fällen erhält man die eine oder die andere der beiden Gleichungen:

$$y = F(x, p), \; x = \Phi(y, p),$$

wo p für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt ist.

Differenzirt man dieselben, so erhält man entweder eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p oder zwischen y und p. Gelingt es, eine solche Gleichung zu integriren, so eliminirt man p zwischen diesem Integral und der vorgelegten Gleichung und man hat das gesuchte allgemeine Integral.

Enthalten die beiden obigen Gleichungen nur die Variable p, so dass man also hat:

$$y = F(p), \; x = \Phi(p),$$

so erhält man im ersten Falle durch theilweise Integration von $dx = \frac{dy}{p}$ und Substitution von F (p) für y:

$$x = \frac{F(p)}{p} + \int \frac{F(p)}{p^2}\, dp + C,$$

und im zweiten durch theilweise Integration von $dy = pdx$ und Substitution von $\Phi(p)$ für x:

$$y = p\,\Phi(p) - \int \Phi(p)\, dp + C.$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen und den entsprechenden vorgelegten p, so erhält man für beide Fälle das allgemeine Integral.

In vielen Fällen nun zeigt sich aber noch eine andere Lösung einer solchen Differentialgleichung als das auf dem angegebenen Wege gefundene allgemeine Integral, und diese Erscheinung ist es besonders, die die Aufmerksamkeit der Mathematiker des 18. Jahrhunderts vielfach auf diese Gleichungen gelenkt und dennoch erst gegen das Ende desselben durch Laplace und Lagrange die richtige analytische und geometrische Deutung erlangt hat.

Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$y = px + f(p),$$

so erhält man durch Differentiation:

$$dy = p\,dx + x\,dp + f'(p)dp,$$

oder da $dy = p\,dx$:

$$0 = \big(x + f'(p)\big)\,dp.$$

Diese Gleichung nun kann auf zwei Arten gleich Null werden, indem man entweder dp oder $x + f'(p)$ gleich Null setzt. Die Gleichung $dp = 0$ ergibt durch Integration $p = C$, und diesen Werth in die vorgelegte Differentialgleichung eingesetzt, gibt das Integral:

$$y = Cx + f(C),$$

welches, weil es durch Integration hervorgegangen und demnach eine willkürliche Constante hat, das allgemeine ist. Setzt man $x + f'(p) = 0$ und eliminirt zwischen dieser Gleichung und der vorgelegten p, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y ohne willkürliche Constante, die aber immerhin der Differentialgleichung genügt und ihr singuläres Integral oder besser singuläre Lösung genannt wird. Es sei hier gelegentlich bemerkt, dass die Mathematiker des vorigen Jahrhunderts diese Benennung noch nicht kannten und diese Lösung die particuläre nannten, wogegen sie die durch bestimmte Werthe der Constanten hervorgehenden Variationen des allgemeinen Integrals particuläre Integrale hiessen.

Clairaut *) ist der erste, der diese Eigenschaft der Differentialgleichungen erster Ordnung und höheren Grades ent-

---

*) Alexis Claude Clairaut, einer der scharfsinnigsten Mathematiker, wurde geboren am 13. Mai 1713 zu Paris. In seinem sechszehnten Lebensjahre schon veröffentlichte er das Werk: *Recherches sur les courbes à double courbure* und zwei Jahre nachher wurde er zum Mitglied der Pariser Akademie gewählt. Im Jahre 1735 begleitete er Maupertuis zur Gradmessung in Lappland und gab

deckt hat. In einer geometrischen Abhandlung *) der Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1734 trifft er auf die Gleichung:

$$(1) \qquad x\,\Pi(u) - u\,\Pi(u) = y - \Phi(u)$$

wo $\Pi(u) = \frac{dy}{dx}$ ist.

Indem er diese Gleichung differenzirt und für dy seinen Werth $\Pi(u)\,dx$ einsetzt, erhält er:

$$(2)\ 0 = \Pi(u)du - x\,.\,\Pi'(u)du + u\,.\,\Pi'(u)du - \Phi'(u)du,$$

welche Gleichung, durch du dividirt und mit (1) verglichen, ihm eine Beziehung zwischen y und u gibt (er eliminirt nämlich für seinen Zweck x nicht u). — Er bemerkt nun, dass, um der Gleichung (2) zu genügen, er auch $du = 0$ hätte setzen können, woraus $u = a$ gefolgt wäre, was, in (1) eingesetzt, als zweite Lösung die Gleichung:

$$x\,\Pi(a) - a\,\Pi(a) = y - \Phi(a),$$

d. h. eine gerade Linie ergeben hätte. — Auf die nähere Discussion dieser Erscheinung geht er nicht ein, sondern deutet bloss, indem er noch einige Gleichungen anführt, die ebenfalls diese Eigenschaft haben, auf eine spätere Abhandlung hin.

D'Alembert gibt in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1748 das nämliche Verfahren an für die Lösung von Gleichungen höheren Grades von der Form:

$$x = y\,\varphi(z) + \triangle(z),$$

wo $z = \frac{dx}{dy}$; d. h. er differenzirt die vorgelegte Gleichung, setzt für dx seinen Werth z dy, sucht die so erhaltene Glei-

---

1743 sein berühmtes Werk: *Sur la figure de la terre* heraus, das seinen Namen vor Allem aus zu den Unsterblichen setzte. In allen Gebieten des mathematischen Wissens, in Analysis, Geometrie und theoretischer Astronomie verdankt man ihm geniale Leistungen. Sein Tod erfolgte, leider zu früh, schon am 17. Mai 1765.

*) *Solutions de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée.*

chung zu integriren und eliminirt dann zwischen dem Integral und der vorgelegten Gleichung z. — Nur ganz kurz kommt er auf den Fall zu sprechen, wo die Differentialgleichung eine singuläre Lösung hat. Diess ist nämlich immer der Fall, wenn die obige Gleichung die Form annimmt

$$x = yz + \Delta(z).$$

Denn dann erhält man durch Differentiation:

$$dx = y\,dz + z\,dy + \Delta'(z)dz$$

oder weil $dx = z\,dy$:

$$0 = (y + \Delta'(z)dz.$$

Setzt man dz gleich Null, so hat man $z = c$ und diess, in die Differentialgleichung eingesetzt, gibt die allgemeine Lösung, eine Gerade, wogegen z zwischen der Differentialgleichung und der Gleichung $y + \Delta'(z) = 0$ eliminirt, die singuläre Lösung und zwar eine krumme Linie ergibt. — Es ist hier noch hinzuzufügen, dass D'Alembert das oben angegebene Auflösungsverfahren auch auf analog gebildete Gleichungen höherer Ordnung ausdehnt. Ist nämlich $z = \frac{dx}{dy}$, $u = \frac{dz}{dy} = \frac{d^2x}{dy^2}$, $v = \frac{du}{dy} = \frac{d^3x}{dy^3}$, etc, so löst er auf demselben Wege, den er bei der Integration von $x = y\varphi(z) + \Delta(z)$ eingeschlagen, die Gleichungen:

$$z = y\varphi(u) + \Delta(u)$$

$$u = y\varphi(v) + \Delta(v) \text{ etc.}$$

Euler, dessen scharfer Geist in den subtilsten Forschungen selten an irgend einem Punkte Anstoss nahm, war merkwürdiger Weise hier nicht im Stande, die Kluft zu überschreiten und diese Erscheinung auf ihre wahre Ursache zurückzuführen. In einer Abhandlung der Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1756 nennt er den Umstand, dass es Differentialgleichungen gebe, die nicht auf dem naturgemässen Wege der Integration, sondern im Gegentheil durch nochmaliges Differenziren gelöst werden können, ein Paradoxon, und als dasselbe erklärt er die, wie er zeigt, damit verbundene Erscheinung, dass solche Differentialgleichungen Lösungen haben, die nicht im allgemeinen Integral enthalten sind. Er zeigt diese Beziehungen an mehreren Beispielen in äusserst klarer Weise, ohne aber weiter auf den Grund derselben einzutreten. Ebenso wenig sucht er die Sache in der III. Sect. des ersten Bandes seiner *Instit. calc. integr.*, wo er über die Gleichungen erster Ordnung und höheren Grades handelt, näher aufzuklären. Von Bedeutung für die weitere Entwicklung dieser Theorien ist aber das IV. Cap. der II. Sect. des ersten Bandes, wo Euler über die particulären Integrale handelt und ein Verfahren angibt, nach welchem man erkennen kann, ob eine Gleichung, die einer gegebenen Differentialgleichung genügt, ein particuläres Integral ist oder nicht, ohne das allgemeine Integral zu kennen.

Diese Untersuchungen wurden im Jahre 1772 von Laplace*) wieder aufgenommen und weiter ausgedehnt. Derselbe löst die beiden folgenden Probleme: 1. Es sei eine Differentialgleichung irgend einer Ordnung und mit einer beliebigen Zahl von Variabeln gegeben, deren allgemeines Integral man nicht kennt; man soll bestimmen, ob eine Gleichung von einer niedrigeren Ordnung als jene, die ihr genügt, im allgemeinen Integral enthalten ist oder nicht. 2. Man soll alle particulären (singulären) Integrale jener Differentialgleichung angeben. Diese Probleme löst Laplace für die Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit 2 Variabeln und für die totale Differentialgleichung mit 3 Variabeln, indem er zugleich zeigt, wie dieselben auf höhere Ordnungen auszudehnen sind. Obgleich Laplace Euler um einen beträchtlichen Schritt vorausgeeilt ist, so war er doch noch weit davon entfernt, die Theorie der singulären Lösungen in ihrem Hauptprincipe erkannt zu haben; von einer geometrischen Deutung derselben war bei ihm

---

*) *Mémoires de l'acad. des sciences de Paris 1772.*

keine Rede, selbst die analytische Theorie basirt zum Theil nicht auf einer rationellen Auffassung der Sache. So bestimmt er die singuläre Lösung, wenn das allgemeine Integral bekannt ist, nicht aus diesem Letztern auf dem Wege der Elimination der Constanten, sondern aus dem integrirenden Factor, indem er zeigt, dass, wenn $\mu = 0$ eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $dy = P\,dx$ sein soll, die Gleichung $\frac{1}{\beta} = 0$, wo β der integrirende Factor ist, durch diejenige $\mu = 0$ identisch gemacht werden, oder dass also μ ein Factor von $\frac{1}{\beta}$ sein muss.

Zwei Jahre nach Laplace veröffentlichte Lagrange seine Abhandlung *) über die singulären Lösungen, die er, wohl nicht zweckmässig, particuläre Integrale nannte. Er bestimmt die singuläre Lösung sowohl aus dem allgemeinen Integral, als auch aus der Differentialgleichung durch nochmaliges Differenziren derselben. Sein Verfahren stimmt im Wesentlichen mit dem jetzt angewandten überein, wesshalb ich es nicht näher erörtern werde. Ueberdiess stellt Lagrange noch die Bedingungsgleichungen auf, die erfüllt sein müssen, wenn eine singuläre Lösung, die einer Differentialgleichung irgend einer Ordnung genügt, auch den Differentialgleichungen höherer Ordnung, aus denen jene durch successive Integration hergeleitet ist, genügen soll. Sei $Z = 0$ eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln x und y und $y = f(x, a)$ ihr allgemeines Integral, so erhält man ihr singuläres Integral, indem man a zwischen den Gleichungen $\frac{dy}{da} = 0$ und $y = (fx, a)$ eliminirt. Dieses singuläre Integral genügt nur dann auch der Differentialgleichung zweiter Ordnung $Z' = 0$, von der $Z = 0$ das erste abgeleitete Integral ist, wenn zugleich die Bedingungen erfüllt sind $\frac{dy}{da} = 0$, $\frac{d^2y}{dadx} = 0$;

*) *Mémoires de l'acad. de Berlin 1774.*

es genügt nur dann der Differentialgleichung dritter Ordnung $Z'' = 0$, von der $Z' = 0$ das erste und $Z = 0$ das zweite abgeleitete Integral ist, wenn man zugleich hat $\frac{dy}{da} = 0$, $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$ und $\frac{d^3y}{dx^2da} = 0$, etc.

Die geometrische Deutung der singulären Integrale tritt bei Lagrange zum ersten Male auf. Er zeigt kurz und klar, allgemein und an einigen Beispielen, wie das singuläre Integral die Enveloppe der unendlich vielen durch stetige Variation der Constanten des allgemeinen Integrals entstehenden particulären Curven repräsentire. Auch hier ist sein Gedankengang dem heutigen vollständig analog, wenigstens soweit es sich um die Herleitung der singulären Lösung aus dem allgemeinen Integral handelt; bei der Ableitung aus der Differentialgleichung dagegen weichen die beiden Auffassungsarten einigermaassen, wenn auch nicht principiell, von einander ab. Während man nämlich heutzutage gewöhnlich von der Betrachtung ausgeht, dass die Differentialgleichung $f(x, y, p) = 0$ im Allgemeinen für einen und denselben Werth von x und y wenigstens zwei verschiedene Werthe von p liefern muss und dass zwei dieser Werthe gleich werden müssen, wenn x und y einen Punkt der umhüllenden Curve repräsentiren, und indem man desshalb, um die singuläre Lösung zu erhalten, p eliminirt zwischen den Gleichungen $f(x, y, p) = 0$ und $\frac{df}{dp} = 0$, von denen die letztere eben die Bedingung ausdrückt, dass die erstere zwei gleiche Werthe für p gibt, schloss dagegen Lagrange folgendermaassen: In jedem Punkte der Umhüllenden treffen sich zwei Curvenzweige, die eine gemeinsame Tangente haben, also für $\frac{dy}{dx}$ den gleichen Werth ergeben; der eine Zweig gehört der umhüllenden, der andere einer der particulären Curven an. Jedem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ entspricht daher ein doppelter Werth $\frac{d^2y}{dx^2}$, indem die beiden Curven nicht gleiche Krümmung haben, also muss der Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$, aus der vorgelegten Differentialgleichung gezogen, für alle Punkte der Umhüllenden sich unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen, aus dem nämlichen Grunde, aus dem auch der Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich $\frac{0}{0}$ wird für die Doppelpunkte der Curven. Man findet also die singuläre Lösung einer Differentialgleichung, indem man dieselbe noch einmal differenzirt, den Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ bildet und Zähler und Nenner desselben gleich Null setzt. Genügt eine aus irgend einer dieser Gleichungen gezogene Beziehung zwischen x und y auch der andern Gleichung, so ist sie eine singuläre Lösung der vorgelegten Differentialgleichung. Enthält eine dieser Gleichungen oder auch beide noch $\frac{dy}{dx}$ so eliminirt man dieses zwischen ihr und der Differentialgleichung und erhält so ebenfalls das singuläre Integral. — Lagrange beschäftigt sich in der nämlichen Abhandlung noch mit den singulären Integralen der Differentialgleichungen höherer Ordnung und der partiellen Gleichungen, worauf ich gehörigen Orts zurückkommen werde *).

Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Variabeln. — Das zunächst liegende Princip in der Lösung solcher Gleichungen und desshalb auch dasjenige, das sich den Mathematikern zuerst zur Anwendung darbot, ist, abgesehen von der Integration durch unendliche Reihen, das der Reduction auf die erste Ordnung. Euler gab schon 1728 in den Commentarien der Peters-

---

*) Vergl. für die Theorie der singulären Lösungen ferner noch: *Trembley, Mém. de l'acad. des sciences de Turin, 1790—91*, und *Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, I. Part. § 69.*

burger Academie eine Methode*) an, vermittelst welcher er eine grosse Zahl von Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf solche erster reducirte. Durch geeignete Substitution transformirte er zuerst Differentialgleichungen, in denen beide Variable mit ihren Differentialen vorkommen, in solche, die nur noch eine Variable und die beiden Differentiale enthalten, und reducirte hierauf diese Gleichungen durch eine zweite Substitution auf die erste Ordnung. Diese beiden Substitutionen zu einer vereinigt, geben die bekannte Substitution von $e^{\int t\,dx}$ für y, die man jetzt anwendet, um die lineare Gleichung m^{ter} Ordnung auf die $m - 1^{\text{ste}}$ Ordnung zu reduciren. Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{d\,y}{d\,x} + Qy = 0,$$

so verwandelt sich dieselbe, indem man $y = e^{\int t\,dx}$ setzt, in die folgende von der ersten Ordnung:

$$\frac{d\,t}{d\,x} + t^2 + Pt + Q = 0,$$

$$\text{weil}\ \frac{d\,y}{d\,x} = te^{\int t\,dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} = t^2e^{\int t\,dx} + \frac{d\,t}{dx}\,e^{\int t\,dx},$$

und sich also der Faktor $e^{\int t\,dx}$ wegheben lässt. — Die leichtern Fälle von Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind diejenigen, in denen entweder nur der zweite Differentialquotient mit einer der Variabeln x oder y, oder die beiden Differentialquotienten mit nur einer Variable oder auch ohne die Variabeln, oder endlich beide Differentialquotienten mit beiden Variabeln, y aber nur im ersten Grade (lineare Gleichung), vorkommen**). Die letztere Art ist durch die

---

*) *Methodus nova innumerabiles æquationes differentiales secundi gradus ad primum gradum reducendi. Tom. III. pag. 12.*

**) Für die Lösung dieser einfachern Fälle vergleich. man *Eulers Institut. calc. integr. Tom. II. Sect. I. Cap. I., II., III., IV. et IX.*

soeben behandelte Gleichung repräsentirt; ein Beispiel für die übrigen Arten ist die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\,(y, \frac{d\,y}{d\,x}).$$

Es ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{d\,x} = \frac{dy'}{d\,y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{d\,y} \cdot y'$. Setzt man diesen Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die vorgelegte Gleichung ein, so nimmt sie folgende Form an:

$$y' \frac{dy'}{d\,y} = f\,(y, y').$$

Diess ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabeln y und y'. Hat man diese gelöst und gefunden:

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x} = \varphi\,(y),$$

so erhält man schliesslich durch Trennung der Variabeln und Integration:

$$x = \int \frac{dy}{\varphi\,(y)} + C_1.$$

Diess ist das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, indem die zweite willkürliche Constante C in $\varphi(y)$ inbegriffen ist. — Analog verfährt man, wenn die vorgelegte Gleichung nur die Variable x anstatt y enthält, u. s. w. — Die allgemeine lineare Gleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + P\,\frac{dy}{dx} + Qy = R,$$

wo also P, Q und R Functionen von x allein sind, integrirte Euler *) durch Reduction auf diejenige, die kein R enthält und auf eine solche erster Ordnung. Setzt man nämlich für y in obige Gleichung das Product u v ein, für $\frac{dy}{dx}$ also

*) *Institut. calc. integr. Tom. II. Sect. I. Cap. IV.*

$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$, und für $\frac{d^2y}{dx^2}$ seinen Werth $u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}$ $+v\frac{d^2u}{dx^2}$, so erhält man folgende Gleichung:

$$u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+v\frac{d^2u}{dx^2}+Pu\frac{dv}{dx}+Pv\frac{du}{dx}+Quv=R.$$

Indem u oder v willkürlich ist, kann man eine dieser Variabeln, v z. B., durch eine Gleichung bestimmen. Setzt man also:

$$(2)\quad \frac{d^2v}{dx^2}+P\frac{dv}{dx}+Qv=0,$$

so bleibt die Gleichung:

$$(3)\qquad 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+v\frac{d^2u}{dx^2}+Pv\frac{du}{dx}=R.$$

Setzt man hierin $du = z\,dx$, so hat man:

$$v\frac{dz}{dx}+2z\frac{dv}{dx}+Pzv=R,$$

welche Gleichung erster Ordnung durch Multiplication mit $ve^{\int Pdx}$ integrirbar wird. Man erhält nämlich $v^2ze^{\int Pdx}=\int e^{\int Pdx}\cdot Rv\,dx+C$; und hieraus:

$$z=\frac{e^{-\int Pdx}}{v^2}\left(\int e^{\int Pdx}\cdot Rv\,dx+C\right)$$

und weil $du = z\,dx$:

$$u=C_1+\int\frac{e^{-\int Pdx}\cdot dx}{v^2}\left(\int e^{\int Pdx}\cdot Rv\,dx+C\right)$$

$$\text{und } y=v\left[C_1+\int\frac{e^{-\int Pdx}\cdot dx}{v^2}\left(\int e^{\int Pdx}Rv\,dx+C\right)\right]$$

Bestimmt man nun v aus Gleichung (2) nach der für diese einfachere Form oben angegebenen Methode und setzt seinen Werth in die letzte Gleichung für y ein, so hat man das Integral der vorgelegten Gleichung. — Bekanntlich nimmt dasselbe nach der heutigen Methode, der sog. Variation der Constanten, eine bedeutend einfachere Form an. Man versucht nämlich, ob die Gleichung (1) durch die Annahme:

$$(\alpha)\ y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

befriedigt werde, wo y_1 und y_2 die beiden particulären Integrale der Gleichung (1) ohne R, und u_1 und u_2 zwei unbekannte Functionen von x bezeichnen. Differenzirt man diese Gleichung zweimal und setzt die Werthe für y, y' und y'' in die Gleichung (1) ein, und berücksichtigt ferner, dass y_1 und y_2 der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ genügen, so erhält man die Gleichung:

$$(\beta)\ \frac{dy_1}{d\,x}\frac{du_1}{d\,x} + \frac{dy_2}{d\,x}\frac{du_2}{d\,x} = R.$$

Aus dieser und aus dem Differential von (α) bestimmt man die Werthe von $\frac{du_1}{d\,x}$ und $\frac{du_2}{d\,x}$, hieraus durch Integration u_1 und u_2 und durch Einsetzen in (α) das allgemeine Integral der Gleichung (1), welches die Form erhält:

$$y = y_1\left(\int \frac{R\,dx}{y_2\left[\frac{y_1}{y_2}\right]'} + C_1\right) + y_2\left(\int \frac{R\,dx}{y_1\left[\frac{y_2}{y_1}\right]'} + C_2\right),$$

wo $\left[\frac{y_1}{y_2}\right]'$ und $\left[\frac{y_2}{y_1}\right]'$ die Ableitungen der Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ und $\frac{y_2}{y_1}$ bedeuten.

Auch D'Alembert beschäftigte sich in verschiedenen seiner Schriften, wie in den *Réflexions sur la cause générale des vents* und in den *Opuscules mathématiques (Tom. VII)* mit der Integration der linearen Gleichung zweiter Ordnung; ich muss den Leser für Näheres auf diese Schriften verweisen.

Ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht linear, so ist ihre Lösung gewöhnlich nur auf dem Wege der Reihenentwicklung möglich; ich werde später noch Einiges über diese approximative Integration der Differentialgleichungen hinzufügen.

Gleichwie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 Variabeln eine Bedingungsgleichung erfüllt sein muss, wenn dieselbe ein vollständiges Differential sein soll und wie es, wenn diess nicht der Fall ist, ein Factor gibt, der sie zu einem solchen macht, so lassen sich auch für die Gleichungen zweiter Ordnung zwei Bedingungen aufstellen, denen genügt werden muss, damit dieselbe das vollständige Differential einer Gleichung erster Ordnung ist, und ebenso lässt sich, wenn jene Bedingungen nicht erfüllt sind, ein Faktor bestimmen, der die Gleichung zu einem vollständigen Differential macht. Wenn die Bestimmung dieses Faktors schon bei den Gleichungen erster Ordnung mit oft unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft ist, so ist wohl einzusehen, wie viel mehr sich dieselben bei höheren Ordnungen häufen müssen, so dass nur in äusserst seltenen Fällen die Integration einer Gleichung auf diesem Wege ausgeführt werden kann. Diese Methode des integrirenden Faktors bei höheren Differentialgleichungen hat desshalb auch nicht die Früchte getragen, die Euler ihr bei der Entstehung für eine spätere Zeit verheissen hatte, wenn er sagt *): *In quo negotio si eventus spem non fefellerit, nullum est dubium, quin methodi hunc in finem detectæ multo latius pateant, ac nostram facultatem æquationes differentiales secundi gradus tractandi non mediocriter promoveant.* Man findet die Arbeiten Eulers über diesen Gegenstand in der soeben citirten Abhandlung, sowie in seinen *Instit. calc. integ. Tom. II. Sect. I. Cap. V* und *VI.* Wenn der integrirende Faktor nur x enthalten soll, so ist seine Bestimmung in einzelnen Fällen möglich; so z. B. findet man denselben für die lineare Gleichung $= e^{\int t\,dx}$, welchen Werth wir schon früher als den Reductionsfactor auf die erste Ordnung gefunden haben. Soll er aber x und y, oder was

---

*) *Novi comment. acad. Petrop. Tom. VII. pag. 165: De æquationibus differentialibus secundi gradus.*

ebenfalls vorkommen kann, x, y und y' enthalten, so ist, wie gesagt, seine Bestimmung mit den jetzigen Hülfsmitteln meistentheils unmöglich.

Differentialgleichungen höherer Ordnungen mit zwei Variabeln. — Die Differentialgleichungen höherer Ordnungen haben die Mathematiker des 18. Jahrhunderts mehr beschäftigt als diejenigen zweiter Ordnung und zwar aus dem Grunde, weil man sich lange Zeit nicht von dem Gedanken trennen konnte, eine allgemeine Auflösungsmethode für solche Gleichungen zu finden. Besonders waren es Condorcet*) und Fontaine**), deren mathematischer Scharfsinn verbunden mit philosophisch-speculativem Geist in dieser Richtung unermüdlich war, leider aber ein fruchtloses Wirkungsfeld finden sollte. Weniger kühnen Hoffnungen gaben sich in diesem Punkte D'Alembert, Euler und Lagrange hin, indem sich ihre Untersuchungen innerhalb reellerer Grenzen bewegten. Sie beschäftigten sich hauptsächlich mit der Lösung der linearen Gleichung n^{ter} Ordnung, deren allgemeine Form durch die Gleichung repräsentirt wird:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

wo P, Q, ... T, U, V Functionen von x allein sind. Im Jahre 1740 veröffentlichte Euler***) die Lösung der einfacheren Gleichung n^{ter} Ordnung:

$$(1)\ N\frac{d^n y}{dx^n} + M\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + B\frac{dy}{dx} + Ay = 0,$$

wo N, M, etc. constante Factoren sind. Er zeigte, dass diese Gleichung, indem man $y = e^{px}$ setzt, wo p eine noch unbestimmte Constante, sich auf die folgende algebraische Gleichung n^{ten} Grades reducirt:

---

*) *Du calcul intégral, Sect. II. 1765*, und *Miscell. Taurin. Tom. IV.*

**) *Mémoires donnés à l'acad. des sciences, 1764.*

***) *Miscellan. Berol. Tom. VII.*

$$(2)\ Np^n + Mp^{n-1} + \ldots + Bp + A = 0,$$

deren n Wurzeln, für p in die Gleichung $y = e^{px}$ eingesetzt, n particuläre Integrale der vorgelegten Differentialgleichung liefern, so dass also das allgemeine Integral derselben die Form hat:

$$(3)\ y = C_1\, e^{p_1 x} + C_2\, e^{p_2 x} + \ldots\ldots + C_n\, e^{p_n x},$$

wo p_1, p_2, etc. die Wurzeln der Gleichung (3) und C_1, C_2, etc. n willkürliche Constante bedeuten. Auch die Modifikationen dieser Formel für die Fälle gleicher und imaginärer Wurzeln der algebraischen Gleichung für p hat Euler angegeben und zwar hat er dieselben auf folgendem Wege gefunden: Hat die Gleichung (3) drei gleiche Wurzeln z. B., ist also einer ihrer Faktoren $(p - p_1)^3$, so ist y bestimmt durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3p_1 \frac{d^2y}{dx^2} + 3p_1^{\,2} \frac{dy}{dx} - p_1^{\,3} y = 0.$$

Setzt man hierin $y = e^{p_1 x} \,.\, u$, so erhält man die Gleichung $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$ und hieraus durch Integration:

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

mithin $y = e^{p_1 x}\, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ als particuläres Integral der vorgelegten Gleichung. — Hat ferner die Gleichung (2) imaginäre Wurzeln, wir wollen annehmen ein Paar, so findet Euler auf analoge Weise das ihnen entsprechende particuläre Integral:

$$y = e^{\alpha x}\, (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

wo α und β resp. die reellen und imaginären Theile der complexen Wurzeln bezeichnen. Euler setzt allerdings für α und β ihre goniometrischen Formen; die weit einfachere Ableitung mit Hülfe der Beziehung:

$$e^{\pm \beta x i} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x$$

entging ihm, wahrscheinlich aus Unkenntniss dieser Formel. Wie bekannt, treffen wir erst in seiner acht Jahre nach dieser Abhandlung erschienenen *Introductio in anal.* zum ersten Mal auf jene Beziehung zwischen den Exponential- und trigonometrischen Reihen. — Hat nun z. B. die Gleichung (2) g gleiche, zwei Paar complexe und das übrige verschiedene reelle Wurzeln, so ist ihr allgemeines Integral nach dem Vorhergehenden:

$$y = e^{p_1 x}(C_1 + C_2 x + \dots + C_g x^{g-1}) + e^{\alpha x}(C_h \cos\beta x + C_i \sin\beta x)$$
$$+ e^{\gamma x}(C_k \cos\delta x + C_l \sin\delta x) + C_m e^{p_m x} + C_n e^{p_n x},$$

wenn $\alpha \pm \beta i$ und $\gamma \pm \delta i$ die beiden Paare complexer Wurzeln sind.

In der nämlichen Abhandlung behandelt dann Euler eine Reihe von Specialfällen der Gleichung (1), auf die ich nicht weiter eintreten will. — Im III. Bande der *Nov. comment. Petrop.* für die Jahre 1750 und 1751 geht Euler zu der Gleichung über:

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \dots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

wo A, B, C, etc. Constante und X eine beliebige Function von x bezeichnen. Zuerst behandelt er den Fall, wo X eine ganze rationale Function von x ist, den er auf denjenigen, wo X fehlt, reducirt, und wendet sich dann zu dem allgemeineren, wo X jede beliebige Function sein kann. Für diesen findet er das allgemeine Integral:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x} X\,dx + \frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\beta x} X\,dx \dots +$$
$$+ \frac{e^{\nu x}}{\mathfrak{N}}\int e^{-\nu x} X\,dx,$$

wo α, β, etc. die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades

$$P = A + Bz + Cz^2 + \dots + Nz^n = 0$$

sind und wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. die Werthe haben:

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{dP}{dz}\right) z=\alpha\ , \quad \mathfrak{B} = \left(\frac{dP}{dz}\right) z=\beta\ , \quad \text{etc.}$$

In dem obigen allgemeinen Integrale sind die n Constanten noch zu ergänzen. Dasselbe wird, entsprechend der früheren Gleichung (3), auf analoge Weise modificirt, wenn die Gleichung n^{ten} Grades $P = A + Bz + Cz^2 +$ etc. gleiche und imaginäre Wurzeln hat, welche Fälle Euler ebenfalls berücksichtigt.

Lagrange dehnte diese Untersuchungen weiter aus, indem er auf die Gleichung überging *):

$$(1)\quad Ly + M\frac{dy}{dx} + N\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{d^3y}{dx^3} + \dots = X,$$

in welcher L, M, N, ... T Functionen von x sind. Er zeigte, dass das allgemeine Integral der Gleichung (1), die wir von der n^{ten} Ordnung voraussetzen wollen, angegeben werden kann, wenn man n particuläre Integrale der Gleichung:

$$(2)\quad Ly + M\frac{dy}{dx} + M\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{d^3y}{dx^3} + \dots = 0$$

kennt; dass man selbst noch in dem Falle, wo man nur $n - 1$ particuläre Integrale der Gleichung (2) kennt, durch eine nochmalige Integration leicht zu dem allgemeinen Integral der Gleichung (1) gelangen könne. Nach diesem Verfahren integrirt er die Gleichung:

$$Ay + B(h + kx)\frac{dy}{dx} + C(h + kx)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \dots = X,$$

wo A, B, C, etc. Constante sind. — Auch Euler **) integrirte diese Gleichung für den Fall, wo $h = 0$ ist; ich muss für diese Arbeiten auf die citirten Schriften verweisen.

Von dem eben angeführten Lagrange'schen Theorem gibt D'Alembert in demselben Bande der Memoiren der Turiner Akademie (pag. 381) einen einfachen Beweis mit Hülfe der Variation der Constanten; d. h. er setzt, wenn y_1, y_2, y_3, etc. die particulären Integrale der Gleichung (2)

---

*) *Miscell. Taurin. Tom. III. 1762—65.*

**) *Instit. calc. integ. Tom. II. Sect. II. Cap. V.*

sind, für y in die Gleichung (1) den Werth $y = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \ldots$ ein; hiedurch erhält er eine Reihe von Bestimmungsgleichungen, aus denen sich die Werthe der unbestimmten Faktoren v_1, v_2 v_3, ... herleiten lassen. — Laplace gibt in dem 4. Bande derselben Memoiren ebenfalls eine Methode an, das allgemeine Integral der Gleichung (1) zu finden, wenn man n oder $n - 1$ particuläre Integrale der Gleichung (2) kennt. Für weitere Untersuchungen auf dem Gebiete der Gleichungen höherer Ordnungen verweise ich auf die Abhandlungen von D'Alembert*), Lexell**) und Lorgna***).

Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabeln: Simultane, totale, partielle Differentialgleichungen. — Die Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabeln können unter verschiedenen Formen auftreten. Nehmen wir z. B. an, dass das totale Differential einer Function von mehreren unabhängigen Variabeln die Function vermischt mit diesen Variabeln enthalte, dass also die Gleichung folgende Gestalt habe:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

oder in allgemeinerer Form:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0;$$

wo also P, Q und R im Allgemeinen Functionen von x, y und z sind, so nennen wir eine solche Gleichung eine totale Differentialgleichung. Eine totale Differentialgleichung ist demnach zusammengesetzt aus den sämmtlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Function von mehreren unabhängigen Variabeln; dann bestehen einzeln die Gleichungen:

---

*) *Mémoires de l'acad. de Paris, 1767 et 1769.*

**) *Acta acad. Petrop. 1777, Pars I, und 1779, Pars II.*

***) *Memorie della soc. Ital. Tom. II.*

$$\frac{dz}{dx} = p; \frac{dz}{dy} = q; \frac{dz}{du} = r, \text{ etc.};$$

wo also p, q und r, etc. im Allgemeinen Functionen von z, x, y, u, u. s. w. sind, so folgt hieraus die totale Differentialgleichung:

$$dz = p\,dx + q\,dy + r\,du + \text{etc.}$$

Hat man nun bloss eine Gleichung zwischen diesen partiellen Ableitungen, der Function und den unabhängigen Variabeln, welche im Allgemeinen die Form haben wird:

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

so nennt man eine solche Gleichung eine partielle Differentialgleichung. Kommen in einer solchen Gleichung höhere Differentialquotienten vor, so hat man eine partielle Differentialgleichung höherer Ordnung.

Sind endlich zwischen den n + 1 Veränderlichen x, y, z, ... s, t, unter denen t die unabhängige Variable sei und ihren Ableitungen nach t, n Gleichungen gegeben von der Form:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z \ldots t),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z \ldots t),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z \ldots t),$$

etc.

so nennt man diese ein System simultaner Gleichungen erster Ordnung.

D'Alembert betrachtete diese Gleichungen zuerst in der Form:*)

$$dx + (Cx + Dy)\,dt = 0$$

$$dy + (Kx + Ly)\,dt = 0.$$

---

*) *Histoire de l'acad. de Berlin*, 1748, *pag.* 283.

Er wurde auf dieselben durch seine Methode der Integration der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt. In seiner Abhandlung: *Réflexions sur la cause générale des vents* (1747) kommt er nämlich auf die Differentialgleichung:

$$(1)\quad \varrho + e\frac{d\varrho}{dx} + f\frac{d^2\varrho}{dx^2} = 0,$$

die er auf folgende Weise integrirt:

Er setzt (2) $d\varrho = t\,dx$; dadurch verwandelt sich die Gleichung (1) in folgende:

$$(3)\quad \varrho + e\frac{d\varrho}{dx} + f\frac{dt}{dx} = 0.$$

Hiezu die Gleichung (2) in der Form genommen:

$$(2)\quad d\varrho - t\,dx = 0,$$

gibt ihm zwei simultane Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Variabeln ϱ, t und x.

Multiplicirt man nun die Gleichung (2) mit dem unbestimmten Factor ν und addirt dazu die Gleichung (3), so erhält man:

$$\nu d\varrho + e\,d\varrho + f\,dt + \varrho\,dx - \nu t\,dx = 0,$$

oder:

$$(4)\quad (\nu + e)\,d\varrho + f\,dt + (\varrho - \nu t)\,dx = 0.$$

Man setze nun $\frac{\varrho - \nu t}{\varrho\,(\nu + e) + ft} = -\frac{\nu}{f}$, woraus folgt $\frac{1}{\nu + e} = -\frac{\nu}{f}$, so lässt sich hieraus ν bestimmen, die Gleichung (4) aber verwandelt sich in:

$$dx + \frac{(d\varrho - \nu\,dt)(\nu + e)}{\varrho - \nu t} = 0.$$

Hieraus folgt $\varrho - \nu t = F(x)$, also $t = \frac{\varrho - F(x)}{\nu}$, und diesen Werth in (2) eingesetzt, gibt die Gleichung:

$$d\varrho - \frac{\varrho\,dx - F(x)\,dx}{\nu} = 0,$$

aus welcher man durch Integration leicht ϱ als Function von x findet. — D'Alembert führt also die Integration der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf diejenige zweier simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung zurück. Um diese Methode zu verallgemeinern, tritt er in der oben genannten Abhandlung der Berliner Memoiren vom Jahre 1748 noch näher auf die simultanen Differentialgleichungen ein. Es seien also die beiden Gleichungen gegeben:

$$dx + (Cx + Dy)\,dt = 0.$$
$$dy + (Kx + Ly)\,dt = 0.$$

Man multiplicire die zweite mit einem unbestimmten Coefficienten v und addire die beiden Gleichungen, so erhält man:

$$dx + v\,dy + dt\,\big((C + Kv)\,x + (D + Lv)\,y\big) = 0.$$

Man setze nun $(C + Kv)\,x + (D + Lv)\,y$ gleich irgend einem Multiplum von $x + vy$, so dass z. B. die Gleichung besteht:

$$C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$$

woraus folgt:

$$v = \frac{-C + L \pm \sqrt{(L - C)^2 + 4DK}}{2K}$$

Man nehme nun $x + vy = u$ an, so hat man:

$$du + (C + Kv)\,u\,dt = 0,$$

und hieraus durch Integration:

$$u = g \cdot e^{-(C + Kv)t},$$

wo g die willkürliche Constante bezeichnet. Es seien nun v_1 und v_2 die beiden für v aus der obigen Gleichung resultirenden Werthe, so dass man also hat $x + v_1 y = u_1$ und $x + v_2 y = u_2$, so erhält man die Gleichungen:

$$u_1 = g_1 e^{-(C + Kv_1)t};\ u_2 = g_2 e^{-(C + Kv\ )t};$$

$$\text{ferner: } y = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2};\ x = \frac{v_2 u_1 - v_1 u_2}{v_2 - v_1}.$$

Die Constanten g_1 und g_2 bestimmen sich durch die Werthe, die x und y annehmen, wenn man $t = 0$ oder irgend eine andere bekannte Grösse setzt.

Diess ist die D'Alembert'sche Auflösung der simultanen Gleichungen erster Ordnung. Man wird nun leicht einsehen, wie bei drei, vier und mehr gleichzeitig bestehenden Differentialgleichungen vorzugehen ist. Man wird in diesem Falle für v eine Gleichung dritten, vierten und höheren Grades erhalten; kennt man die Wurzeln dieser Gleichung, so ist das Problem sofort gelöst. Schwieriger wird die Integration, wenn die Coefficienten C, D, K, L, etc. keine Constante, sondern Functionen von t sind. Man wird dann auch für v keine constanten Werthe, sondern ebenfalls Functionen von t erhalten. Ich kann hier nicht näher auf diese complicirteren Fälle eintreten, sondern verweise den Leser auf die betreffende Abhandlung D'Alembert's, die ich als die einzige wichtigere über simultane Differentialgleichungen im achtzehnten Jahrhundert kenne. — Die ältere und natürlichere Auflösungsmethode simultaner Gleichungen ist diejenige vermittelst Elimination, die aber selbstverständlich die weitaus schwerfälligere und schwierigere ist. Hat man z. B. ein System von 3 Gleichungen erster Ordnung zwischen den 4 Variabeln x, y, u und t und ihren Differentialquotienten nach ein und derselben unabhängigen Variable t, so differentiirt man jede dieser Gleichungen zweimal in Beziehung auf t und erhält so sechs neue Gleichungen. Aus diesen und den drei gegebenen eliminirt man nun auf dem gewöhnlichen Wege die acht Grössen:

$$u, y, \frac{du}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3u}{dt^3}, \frac{d^3y}{dt^3},$$

so erhält man schliesslich eine lineare Gleichung dritter Ordnung zwischen den Variabeln x und t, die man nach der früher angegebenen Methode integriren kann. Man bekommt so den Werth von x als Function von t; diesen substituirt man in die Werthe von u und y, die durch die Elimination gegeben sind, und erhält so endlich x, u und y als Functionen von t. Analog verfährt man bei einer grösseren Zahl von Gleichungen. Wie also die Integration eines Systems von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung auf dem Wege der Elimination zurückgeführt wird auf die Lösung einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, so wird umgekehrt nach der D'Alembert'schen Methode die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung abhängig gemacht von der Integration eines Systems von n gleichzeitigen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n + 1$ Variabeln. —

Wir haben schon auf Seite 255 bemerkt, wie Clairaut zuerst die Bedingungsgleichung für die Integrabilität der totalen Differentialgleichung mit 3 und mehr Variabeln aufgestellt hat. Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

so muss, damit dieselbe ein vollständiges Differential sei, oder damit es eine bestimmte Function z von x und y gebe, die der Gleichung Genüge leistet, die Bedingungsgleichung erfüllt sein:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Wird dieser Gleichung genügt, so ist die totale Differentialgleichung auf dem nämlichen Wege zu integriren, den man bei der Integration der Gleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ einschlägt, wenn für dieselbe die Bedingung erfüllt ist: $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

Wenn aber die Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ der obigen Bedingung nicht genügt, so gibt es keine bestimmte, eindeutige Function z von x und y, die das Integral der gegebenen Gleichung ist, und man betrachtete daher in diesem Falle die Differentialgleichung als eine absurde und beschäftigte sich nicht weiter mit derselben. Erst Monge zeigt in den Memoiren der Pariser Academie vom Jahre 1784, wie auch in diesem Falle die totale Differentialgleichung eine Lösung zulasse und einer geometrischen Deutung fähig sei. Ist nämlich die Gleichung gegeben: $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, die also der bekannten Bedingung nicht genügt, so integrire man zuerst, indem man eine der Variabeln, z z. B., als constant betrachtet. Sei nun $U = C$ das Integral der Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$, so wird C auch die Variable z enthalten. Differentiirt man nun die Gleichung $U = C$ nach allen drei Variabeln x, y und z, so erhält man:

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = dC,$$

und vergleicht man damit die vorgelegte Gleichung, nachdem man sie mit dem Faktor μ multiplicirt hat, der $P\,dx + Q\,dy$ zu einem vollständigen Differential macht, also:

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy + \mu R\,dz = 0,$$

so erhält man, indem man berücksichtigt, dass $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy$, die Gleichung:

$$\frac{dU}{dz}dz - \mu R\,dz = dC, \text{ oder:}$$

$$\frac{dU}{dz} - \mu R = \frac{dC}{dz}.$$

In dem Falle nun, wo $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ein vollständiges Differential ist, ist die linke Seite dieser Gleichung eine Function von z allein, und man kann also C durch Integration finden, im andern Falle aber nicht. Nimmt man nun für C eine beliebige Function von z an, z. B. $\varphi(z)$, so ist einleuchtend, dass der vorgelegten Gleichung das System der beiden Gleichungen genügen muss:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & U = \varphi(z) \\ (2) & \dfrac{dU}{dz} - \mu R = \dfrac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi'(z) \end{array}\right\}$$

was auch φ für eine Function bedeuten mag. Man erhält also eine unendliche Anzahl von Systemen zweier Gleichungen, die der vorgelegten Differentialgleichung genügen, je nachdem man die Function φ wählt. Hieraus ist nun auch die geometrische Bedeutung einer solchen Differentialgleichung, wie sie Monge in der genannten Abhandlung nachgewiesen hat, ersichtlich. Jede der beiden obigen Gleichungen (1) und (2) repräsentirt nämlich eine krumme Oberfläche, beide zugleich geben demnach die Berührungscurve dieser zwei Oberflächen; die vorgelegte Differentialgleichung repräsentirt mithin eine gemeinsame Eigenschaft aller Berührungscurven je zweier der unendlich vielen Oberflächen, die durch die unendliche Zahl von Systemen zwei solcher Gleichungen (1) und (2) gegeben sind. Die totalen Differentialgleichungen, die der Integrabilitätsbedingung nicht genügen, gehören also im Allgemeinen einem System von Curven doppelter Krümmung an. Monge hat diess besonders noch für die Gleichungen höheren Grades und höherer Ordnung nachgewiesen. — Man sieht leicht ein, wie eine solche totale Differentialgleichung auf zwei partielle Differentialgleichungen zurückgeführt wird. Denn es sei die Gleichung gegeben: $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, so verfährt man, um dieselbe zu integriren, nach Monge folgendermaassen:

Man setzt in die gegebene Gleichung für dz seinen Werth $p\,dx + q\,dy$, wo also $p = \frac{dz}{dx}$ und $q = \frac{dz}{dy}$, so erhält man:

$$(1) \quad (P + Rp)\,dx + (Q + Rq)\,dy = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem man $\frac{dy}{dx}$ als die einzige Variable betrachtet, eliminirt hierauf $\frac{dy}{dx}$ zwischen der Gleichung (1) und ihrer Ableitung nach $\frac{dy}{dx}$, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man die beiden Coefficienten von dx und dy in Gleichung (1) gleich Null setzt, d. h. man kommt auf die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$(2)\ P + Rp = 0.$$

$$(3)\ Q + Rq = 0.$$

Integrirt man die eine dieser Gleichungen, z. B. (2), so erhält man die eine der beiden Gleichungen, die der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Differentiirt man hierauf dieses Integral nach der anderen Variabeln, so erhält man hieraus den Werth für q, und setzt man diesen in (3) ein, so hat man die zweite der der vorgelegten genügenden Gleichungen.

Man erlaube mir, hier die Berichtigung einer früheren Behauptung einzuschalten. Auf Seite 73 und 74 kam ich auf Newton's dritten Integrationsfall zu sprechen, den er in seiner *Methodus fluxionum* behandelt, nämlich auf denjenigen, wo eine Differentialgleichung mit drei und mehr Fluxionen und Fluenten gegeben ist. Als Beispiel gibt Newton die Gleichung: $2\,dx + x\,dy - dz = 0$, und findet, dass derselben die beiden Beziehungen genügen:

$$y^2 = x, \text{ und } z = 2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Behauptung Weissenborns, die ich theilweise aufgenommen habe, Newton habe sich hier auf das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen gewagt, dahin zu modificiren ist, dass Newton hier in erster Linie die totalen Differentialgleichungen betrachtet. Berücksichtigt man indessen, dass die Lösung einer totalen Differentialgleichung, die der Integrationsbedingung nicht genügt und wovon die vorgelegte ein Beispiel liefert, auf diejenige zweier partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt werden muss, so hat die Behauptung Weissenborns Berechtigung. Allein Newton löste seine totale Differentialgleichung nicht auf diese allgemeine Weise, sein Resultat ist daher auch nicht von diesem Standpunkt aus zu beurtheilen; es frägt sich bloss, ob das System der beiden von

Newton gefundenen Gleichungen der vorgelegten Differentialgleichung genüge, und da diess der Fall ist, so sind auch die beiden Gleichungen als eine Lösung, wenn auch nicht als die allgemeine und auf gesetzmässige Weise gefundene, zu betrachten *). —

Der erste, der das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen betrat, war Euler; in der Anwendung derselben auf physikalisch-mathematische Probleme aber müssen wir D'Alembert den Vorrang lassen. Eulers erste Abhandlung **) über diesen Gegenstand hat allerdings nicht den unmittelbaren Zweck der Discussion und Lösung partieller Differentialgleichungen, sondern bewegt sich mehr auf geometrischem Gebiete. Sie ist betitelt: *De infinitis curvis ejusdem generis, etc.* und handelt über die Bestimmung der sogenannten Modulargleichung, d. h. derjenigen Differentialgleichung, die entsteht, wenn das Integral einer Gleichung zwischen den Variabeln x und y von Neuem und zwar auch nach der als veränderlich betrachteten Constante a differenzirt wird. Ist das Integral bekannt, so ist die Modulargleichung sofort durch Differentiation gegeben und ist gleich:

$$dy = P\,dx + Q\,da.$$

Allein wenn das Integral nicht bekannt, sondern nur die Differentialgleichung $dy = P\,dx$ gegeben ist und man soll aus dieser direkt die Modulargleichung bestimmen, so ist das Problem auf die Integration der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = P$, welche, da y eine Function von x und a, eine partielle ist, zurückgeführt. Euler liess nach dieser Abhandlung diesen Gegenstand wieder fallen und kam erst

---

*) Vergleiche hiefür: *Lacroix, Traité du calc. differ. et intégr. 1798. Tom. II. pag. 624.*

**) *Comment. acad. Petrop. Tom. VII. 1734, pag. 174.*

lange nachdem D'Alembert in seinen physikalischen Untersuchungen*) auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung gestossen war, auf denselben und zwar jetzt in allgemeinerer Weise zurück. Die betreffende Abhandlung befindet sich im IX. Bande der Novi Comment. Petrop. (1762 u. 63) und ist betitelt: *Investigatio functionum ex data differentialium conditione.* Hier stellt sich Euler die Aufgabe, die Function z der beiden Variabeln x und y zu bestimmen, wenn irgend eine Beziehung zwischen x, y, z und den Ableitungen von z nach x und y, die man gewöhnlich mit p und q bezeichnet, gegeben ist. Dieses Problem in seiner Allgemeinheit ist das der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln. Euler unterscheidet verschiedene Fälle, indem er von den einfacheren zu den schwierigeren Differentialgleichungen übergeht. Zuerst betrachtet er solche Gleichungen, in denen bloss eine der partiellen Ableitungen, p oder q, als Function von x und y gegeben ist, also Gleichungen von der Form:

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y); \quad \frac{dz}{dy} = f(x, y).$$

Dann geht er zu solchen über, welche eine Beziehung zwischen p, q und den Variabeln x und y ausdrücken; hierauf betrachtet er diejenigen, welche nur eine der Ableitungen p oder q, aber alle drei Variabeln x, y und z enthalten, und endlich kommt er auf die vollständige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die also beide Ableitungen p und q und alle drei Variabeln x, y und z enthält. Das Verfahren, das er bei der Integration dieser verschiedenen Fälle anwendet, ist folgendes: Er zieht aus der gegebenen Differentialgleichung den Werth von p oder von q und setzt denselben in das vollständige Differential von z, also $dz = p\,dx + q\,dy$, ein. Die rechte Seite dieser

*) *Réflexions sur la cause générale des vents (1746) et Opuscules mathém. Tom. I, 1761, et Tom. IV 1767.*

Gleichung enthält nun nur noch p oder q, und da dieses nun willkürlich ist, so muss es so angenommen werden, dass die rechte Seite ein vollständiges Differential wird. Ist z. B. die Gleichung gegeben: $Pp + Qq = o$, wo P und Q Functionen von x und y sind, so zieht man hieraus $p = -\frac{Qq}{P}$, und dieses in die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ eingesetzt, gibt:

$$dz = \frac{q}{P}(P\,dy - Q\,dx).$$

Damit man nun hieraus für z eine Function der zwei Variabeln x und y bestimmen kann, muss $\frac{q}{P}(P\,dy - Q\,dx)$ ein vollständiges Differential sein. Wenn die Grösse $P\,dy - Q\,dx$ ein solches ist, so dass man also hat: $P\,dy - Q\,dx = du$, so wird man augenscheinlich der Integrationsbedingung genügen, wenn man $\frac{q}{P}$ gleich irgend einer Function von u setzt; denn alsdann hat man:

$$dz = \varphi(u)\,du \text{ und hieraus}$$
$$z = f(u).$$

Beispiel: Es sei die Gleichung gegeben: $q = n.p$, oder also: $\frac{dz}{dy} = n\frac{dz}{dx}$. Man soll die allgemeinste Function z von x und y bestimmen, die dieser Gleichung genügt.

Weil $q = np$, so verwandelt sich das Differential $dz = p\,dx + q\,dy$ in $dz = p\,(dx + n\,dy)$. Es ist aber $dx + n\,dy$ das vollständige Differential von $x + ny = u$; also $dz = p\,du$. Die rechte Seite kann aber kein vollständiges Differential sein, wenn nicht p eine Function von u ist. Ist diess der Fall, so ist auch das Integral z eine Function von u, und man hat also als allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung die Beziehung:

$$z = f(u) = f(x + n\,y).$$

Wäre ferner die Gleichung gegeben: $p = f(x, y)$, so setzt man diesen Werth in das Differential von z ein und erhält:

$$dz = f(x, y)\, dx + q\, dy.$$

Integrirt man diese Gleichung, indem man y als constant betrachtet, so ergibt sich:

$$z = F(x, y) + C.$$

Dieses C braucht nun aber keine Constante zu sein, sondern kann als eine beliebige willkürliche Function von y, also $\varphi(y)$, betrachtet werden. Denn differentiirt man die Gleichung $z = F(x, y) + \varphi(y)$ nach x, so erhält man die vorgelegte Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = p = f(x, y)$. Es ist also $z = F(x, y) + \varphi(y)$ das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung. Ganz ebenso verfährt man, wenn q als eine Function von x und y gegeben ist. Man erhält dann als Integral die Gleichung: $z = F(x, y) + \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine willkürliche Function von x ist.

Solcher Gleichungen löst Euler in der genannten Abhandlung eine grössere Zahl und geht dann schliesslich zum allgemeinen Fall über, in welchem die Differentialgleichung beide Differentialquotienten nebst der gesuchten Function selbst enthält. Für diesen Fall kennt Euler keine allgemein gültige Methode der Integration und behandelt desshalb nur einige leichtere Beispiele. Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$z = mpx + nqy,$$

so findet er ihr Integral auf folgende Weise: Aus der vorgelegten Gleichung folgt:

$$q = \frac{z - mpx}{ny} \text{ und dieses in } dz = pdx + qdy$$

eingesetzt, gibt:

$$dz - \frac{zdy}{ny} = pdx - \frac{mpxdy}{ny} = \frac{p}{ny}(nydx - mxdy).$$

Der Faktor, der $n y dx - m x dy$ integrabel macht, ist $\frac{1}{xy}$; man hat desshalb:

$$dz - \frac{z\,dy}{ny} = \frac{px}{n}\left(\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y}\right).$$

Setzt man nun $n \log x - m \log y = \log u$, oder $u = \frac{x^n}{y^m}$, so verwandelt sich obige Gleichung, weil $\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y} = \frac{du}{u}$, in folgende: $dz = \frac{zdy}{ny} + \frac{pxdu}{nu}$.

Nimmt man nun u constant an und integrirt, so erhält man:

$$\log z = \frac{1}{n} \log y + \log \varphi\,(u),$$

wo also $\varphi\,(u)$ eine willkürliche Function von u bedeutet. Diese Gleichung verwandelt sich in:

$z = y^{\frac{1}{n}} \cdot \varphi\,(u)$ oder, für u seinen Werth gesetzt, in

$$z = y^{\frac{1}{n}} \cdot \varphi\left(\frac{x^n}{y^m}\right).$$

Wir sehen, dass in allen Fällen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung eine willkürliche Function einer oder mehrerer (wenn die Anzahl der Variabeln der Differentialgleichung drei übersteigt) Variabeln in das allgemeine Integral eintritt. Wie also das Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln eine willkürliche Constante enthält, so verwandelt sich diese Constante bei den partiellen Differentialgleichungen in eine willkürliche Function einer oder mehrerer Variabeln. Wir werden später sehen, wie die Integrale der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung zwei und mehr willkürliche Functionen in sich schliessen.

Bevor die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zur weiteren Ausbildung gelangte, beschäftigten sich D'Alembert, Euler und Lagrange bei Anlass der Probleme über die Schwingung der Saiten und über die Fortpflanzung des Schalles in Röhren (1760—65) mit den Gleichungen zweiter Ordnung. Ich werde auf diese Probleme an dieser Stelle nicht eintreten, indem es sich hier ausschiesslich um die theoretische Entwicklung des Infinitesimalcalcüls handelt, sondern dieselben nur insofern berücksichtigen, als die Integration der dabei auftretenden Differentialgleichungen wesentliche Momente für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen liefert. Vorläufig werde ich noch einige spätere Arbeiten in Betrachtung ziehen, die speziell die Differentialgleichungen erster Ordnung betreffen.

Diese Differentialgleichungen behandelte zuerst Lagrange von allgemeinerem Gesichtspunkte aus in einigen Abhandlungen der Berliner Memoiren. Die erste derselben erschien in dem Bande für das Jahr 1772. Hier zeigt Lagrange, wie das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gelöst ist, wenn ein Werth von $p = \frac{dz}{dx}$ gefunden werden kann, der der Gleichung genügt:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p\frac{dq}{dz} + q\frac{dp}{dz} = 0,$$

wo für q dessen Werth in x, y, z und p, aus der gegebenen Differentialgleichung gezogen, einzusetzen ist. Die obige Bedingungsgleichung aber findet Lagrange auf folgende Weise:

Ist irgend eine Differentialgleichung zwischen den Variabeln x, y, z, und den ersten Ableitungen von z nach x und y, die wir also gewöhnlich mit p und q bezeichnen, gegeben, so dass man hieraus den Werth von q in x, y, z und p ziehen kann, so handelt es sich, nachdem man diesen Werth von q in die identische Gleichung $dz = pdx + qdy$, oder $dz - pdx - qdy = 0$, eingesetzt hat, darum, p so zu bestimmen, dass diese Gleichung entweder von vorneherein, oder nachdem man dieselbe mit einem bestimmten Faktor multiplicirt hat, ein vollständiges Differential wird. Sei nun M dieser Faktor, so dass also die Grösse M (dz—pdx—qdy) das vollständige Differential einer Funktion von z, x und y ist, die wir mit N bezeichnen wollen, so hat man:

$$dN = \frac{dN}{dz} dz + \frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy$$
$$= M dz - M p dx - M q dy,$$

und hieraus $\frac{dN}{dz} = M$, $\frac{dN}{dx} = - Mp$, $\frac{dN}{dy} = - Mq$.

Aus diesen Gleichungen zieht man die folgenden:

$$\frac{dM}{dx} = - \frac{d(Mp)}{dz}, \frac{dM}{dy} = - \frac{d(Mq)}{dz}, - \frac{d(Mp)}{dy} = - \frac{d(Mq)}{dx}.$$

Die letzte Gleichung gibt:

$$M\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right) + p \frac{dM}{dy} - q \frac{dM}{dx} = o.$$

Substituirt man hierin für $\frac{dM}{dx}$ und $\frac{dM}{dy}$ ihre Werthe aus den beiden ersten Gleichungen, lässt, was sich hebt, weg und dividirt schliesslich durch M, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p \frac{dq}{dz} + q \frac{dp}{dz} = 0,$$

welches unsere obige Bedingungsgleichung ist. Setzt man also hierin für q seinen aus der gegebenen Differentialgleichung gezogenen Werth und lässt sich dann für p eine Function von x, y und z finden, die dieser Gleichung genügt, so macht dieser Werth von p, in die Gleichung $dz - p dx - q dy = o$ eingesetzt, dieselbe zu einem vollständigen Differential, oder lässt wenigstens den Faktor leicht bestimmen, der sie zu einem solchen macht. Auf den ersten Blick scheint es nun wohl, als ob die Lösung keineswegs ihrem Ziele näher gebracht worden wäre, denn die Bestimmungsgleichung für p ist ebenfalls eine partielle und zwar eine solche zwischen vier Variabeln, x, y, z und p, während die vorgelegte nur deren drei, x, y und z, enthält; allerdings ist diese Gleichung linear, was auch die vorgelegte für eine Form haben mag. Allein Lagrange zeigt nun, wie man nicht den allgemeinsten Werth von p braucht, um zur Lösung der vorgelegten Differentialgleichung zu gelangen, sondern wie schon ein particulärer Werth, der eine willkürliche Constante enthält, hinreichend ist, das vollständige Integral der Differentialgleichung zu finden. Hat man nämlich einen solchen particulären Werth von p gefunden, so ermittelt man mit seiner Hülfe den integrirenden Faktor M, welcher das Differential dz—p dx—q dy zu einem vollständigen macht. Dann hat man, indem man integrirt, die Gleichung:

$$\int M\,(dz - pdx - qdy) = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet.

Bezeichnen wir dieses Integral zur Abkürzung mit N, welches also eine Funktion von x, y und z sein wird, so ist ersichtlich, dass dieses N auch die Constante α enthalten wird, die in dem Ausdruck von p vorkommt. Nehmen wir nun diese Constante als variabel an und differenziren N nach allen 4 Variabeln x, y, z und α, so erhalten wir:

$$dN = M\,(dz - pdx - qdy) + \frac{dN}{d\alpha}\,d\alpha, \text{ also}$$

$$N = \int M\,(dz - pdx - qdy) + \int \frac{dN}{d\alpha}\,d\alpha,$$

und daher:

$$\int M\,(dz - pdx - qdy) = N - \int \frac{dN}{d\alpha}\,d\alpha.$$

Wenn nun M (dz — pdx — qdy) ein vollständiges Differential sein soll, so muss auch $\frac{dN}{d\alpha}\,d\alpha$ ein solches sein, was nur statthaben kann, wenn $\frac{dN}{d\alpha}$ irgend eine Funktion von α ist. Setzen wir also $\frac{dN}{d\alpha} = \varphi(\alpha)$, so wird $\int \frac{dN}{d\alpha}\,d\alpha = F(\alpha)$ sein; wir haben demnach die Gleichung:

$$\int M\,(dz - pdx - qdy) = N - F(\alpha),$$

und hieraus, weil $\int M\,(dz - pdx - qdy) = C$,

$$N - F(\alpha) = C \text{ oder einfach}$$

$$N - F(\alpha) = 0,$$

indem wir die Constante C in $F(\alpha)$ inbegriffen annehmen können. Eliminiren wir nun α zwischen den beiden Gleichungen $N - F(\alpha) = 0$ und $\frac{dN}{d\alpha} = \varphi(\alpha)$, so erhalten wir das Integral der vorgelegten Differentialgleichung, und zwar das allgemeine, indem es eine willkürliche Function enthält. — Lagrange behandelt nun nach dieser Methode eine Reihe von Fällen partieller Differentialgleichungen, von denen ich hier ein Beispiel anführen will. Es sei q als eine Function von p gegeben, also z. B. $q = mp$, so verwandelt sich die Bedingungsgleichung in folgende:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{m\,dp}{dx} - p\,\frac{m\,dp}{dz} + m\,p\,\frac{dp}{dz} = 0.$$

Es genügt dieser Gleichung, wie sofort ersichtlich ist, der Werth $p = \text{Const.}$ Setzt man also $p = \alpha$, so ist $q = m\alpha$, und die Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ wird in diesem Falle: $dz - \alpha\,dx - m\,\alpha\,dy = 0$. Diese ist sofort integrirbar; man erhält also:

$$N = z - \alpha x - m\alpha y.$$

Differenzirt man nach α, und setzt $\frac{dN}{d\alpha} = \varphi(\alpha)$, so hat man die Gleichung: $-x - my = \varphi(\alpha)$.

Diese verbunden mit der folgenden:

$$N - F(\alpha) = 0 \text{ oder } z - \alpha\,(x + my) - F(\alpha) = 0$$

gibt uns das allgemeine Integral der Gleichung $q = mp$. Aus $-x - my = \varphi(\alpha)$ folgt aber $\alpha = \psi(x + my)$ und diess in die Gleichung $z - \alpha\,(x + my) - F(\alpha) = 0$ eingesetzt, gibt:

$$z - (x + my)\,\psi(x + my) - F(\psi(x + my)) = 0,$$

woraus, da ψ und F willkürliche Functionen bezeichnen, als allgemeines Integral die einfachere Gleichung folgt:

$$z = f(x + my).$$

In denjenigen Fällen, wo sich kein partikulärer Werth von p finden liess, der der Bedingungsgleichung genügte, wandte Lagrange die schon von Euler gebrauchte, aber weniger principielle Methode an, die gegebene Differentialgleichung mit der totalen $dz - pdx - qdy = 0$ zu vergleichen, d. h. den aus der ersteren gezogenen Werth von p oder q in die letztere einzusetzen, hierauf, nachdem man eine der Variabeln, z z. B., als constant angenommen, die Gleichung zwischen dx und dy zu integriren und schliesslich durch geeignete Bestimmung des noch willkürlichen p oder q den nunmehr verwandelten Ausdruck $dz - p\,dx - q\,dy$ zu einem vollständigen Differential zu machen.

In einer zweiten Abhandlung der Berliner Mémoiren vom Jahr 1774*) finden wir einige interessante Bemerkungen von Lagrange über die Integrale der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir haben nämlich gesehen, wie in der vorhin betrachteten Differentialgleichung $q = mp$, der Werth $p = \text{Const.} = \alpha$ der Bedingungsgleichung genügte und in die identische Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ eingesetzt, dieselbe zu dem vollständigen Differential $dz - \alpha\,dx - m\,\alpha\,dy = o$ machte. Integriren wir nun und setzen das Integral gleich einer zweiten willkürlichen Constanten β, so erhalten wir die Gleichung:

$$z - \alpha(x + my) - \beta = 0,$$

welche zwei willkürliche Constante α und β enthält und der vorgelegten Differentialgleichung genügt. Dieses Integral nennt Lagrange das vollständige, wogegen dasjenige, welches eine willkürliche Function enthält und in unserm Beispiele, wie wir oben gefunden, $z = f(x + my)$ ist, das

---

*) *Des intégrales particulières des équations aux différences partielles, avec des remarques nouvelles sur la nature et sur l'intégration de ces sortes d'équations, pag. 239.*

allgemeine genannt wird. Setzt man in dem vollständigen Integral die zweite Constante $\beta = \varphi(\alpha)$, differenzirt dasselbe hierauf nach α und eliminirt diese Constante zwischen dem Integral und der gefundenen Ableitung nach α, so erhält man das allgemeine Integral mit einer willkürlichen Function. Machen wir diese Operation mit unserem vollständigen Integral $z - \alpha(x + my) - \beta = 0$, so erhalten wir in der That die Gleichung $z = f(x + my)$ als allgemeine Lösung.

In derselben Abhandlung kommt Lagrange auch auf die particulären oder besser singulären Integrale der partiellen Differentialgleichungen zu sprechen. Er zeigt, dass, wie man bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen mit zwei Variabeln die singuläre Lösung findet, indem man die willkührliche Constante α zwischen dem allgemeinen Integral $y = f(x, \alpha)$ und seiner gleich Null gesetzten Ableitung nach α, $\frac{dy}{d\alpha} = 0$, eliminirt, man analoger Weise auch die singuläre Lösung einer partiellen Differentialgleichung zwischen drei Variabeln bestimmt, indem man zwischen dem vollständigen Integral und seinen nach den beiden willkürlichen Constanten genommenen Ableitungen, $\frac{dz}{d\alpha} = 0$ und $\frac{dz}{d\beta} = 0$, α und β eliminirt. — Geometrisch repräsentirt diese singuläre Lösung ganz entsprechend derjenigen der gewöhnlichen Differentialgleichungen die umhüllende Fläche aller der durch das vollständige Integral gegebenen Oberflächen.

Im Jahre 1779 *) und noch allgemeiner 1785 **) veröffentlichte Lagrange in den Berliner Memoiren seine

---

*) *Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre, pag. 152.*

**) *Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, etc., pag. 174.*

Methode der Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer beliebigen Zahl von Variabeln. Diese Methode ist diejenige der Zurückführung einer partiellen Differentialgleichung auf ein System simultaner Gleichungen, und zwar ist die Anzahl dieser simultanen Gleichungen immer um Eines kleiner als die Zahl der Variabeln der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Die allgemeine Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades mit 4 Variabeln z. B. ist:

$$P\frac{dz}{dt} + Q\frac{dz}{dx} + R\frac{dz}{dy} = S,$$

wo P, Q, R und S beliebige Funktionen von t, x, y und z sind. Die Lösung dieser Gleichung wird also zurückgeführt auf diejenige dreier simultaner Differentialgleichungen, und diese sind bekanntlich:

$$\begin{aligned} P\,dz - Q\,dt &= 0 \\ P\,dy - R\,dt &= 0 \\ P\,dz - S\,dt &= 0 \end{aligned}$$

Bezeichnen $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, $f_3 = a_3$ die Integrale dieser drei simultanen Gleichungen, wo also f_1, f_2, f_3 bestimmte Functionen von t, x, y und z, und a_1, a_2, a_3 willkürliche Constanten bedeuten, so ist:

$$F\,(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$f_3 = \varphi\,(f_1, f_2)$$

das allgemeine Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, in welchem an die Stelle der drei willkürlichen Constanten a_1, a_2 und a_3 die willkürliche Function F oder φ getreten ist. Die Functionen f_1, f_2 und f_3 leisten der gegebenen Gleichung einzeln ebenfalls Genüge und sind daher drei particuläre Integrale derselben. — Für die analytische Herleitung dieses Satzes muss ich auf die citirten Arbeiten Lagrange's verweisen.

Schon im Jahre 1773 integrirte Laplace*) die partielle lineare Differentialgleichung:

$$(1)\quad \frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{dy} + R = 0,$$

wo P eine Function von x und y, und R eine solche von x, y und z bezeichnet, indem er durch Einführung einer neuen Variable u die Gleichung (1) in folgende transformirte:

$$0 = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} + P\frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dy} + R,$$

aus welcher, da u unbestimmt ist, die beiden Bestimmungsgleichungen resultiren:

$$0 = \frac{du}{dx} + P\frac{du}{dy}, \text{ und } 0 = \frac{dz}{dx} + R.$$

Hat man nun einen Werth von u in x und y, der der ersten Gleichung genügt, zieht daraus y als Function von u und x und substituirt diesen Werth für y in die zweite Gleichung und integrirt dieselbe, indem man u als constant betrachtet, so hat man das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung. Das Integral von $\frac{du}{dx} + P\frac{du}{dy} = 0$ findet man aber leicht, indem man den Werth von $\frac{du}{dx}$ aus dieser Gleichung in das totale Differential $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ einsetzt, was die Gleichung ergibt: $du = \frac{du}{dy}(dy - P\,dx)$. Sei nun der Factor, der den Ausdruck $dy - P\,dx$ integrirbar macht, $= \mu$, so wird $\mu\,(dy - P\,dx)$ ein vollständiges Differential, z. B. dv; dann muss, damit die Gleichung $du = \frac{du}{\mu\,dy} \cdot dv$, in welche sich $du = \frac{du}{dy}(dy - P\,dx)$ durch

*) *Mémoires de l'acad. de Paris, 1773, pag. 341.*

diese Annahme verwandelt, integrirt werden kann, $\frac{du}{\mu dy}$ eine Function von v sein, und man erhält demnach als Integral der Differentialgleichung $\frac{du}{dx} + P\frac{du}{dy} = 0$ die Gleichung $u = \varphi(v)$. Nimmt man für φ eine bestimmte Function, setzt man z. B. ganz einfach $u = v$, zieht hieraus den Werth von y in x und u und setzt denselben in die Gleichung $\frac{dz}{dx} + R = 0$ ein, und integrirt, indem man u als constant betrachtet, so erhält man eine Gleichung von der Form: $S = C$, wo S eine Function von x, z und u, und C eine Constante bedeutet, die aber als eine willkürliche Function von u, z. B. F (u), betrachtet werden kann. Setzt man hierin für u seinen Werth $= v$, so erhält man als allgemeines Integral der vorgelegten Gleichung: $S = F(v)$, wo F eine willkürliche Function bedeutet. —

Wir haben früher schon erwähnt, wie zuerst D'Alembert in seinen physikalisch-mathematischen Untersuchungen über die schwingenden Saiten auf die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gestossen war und einzelne spezielle Formen derselben integrirt hatte. Später beschäftigten sich auch Euler und Lagrange mit Untersuchungen dieser Art, und es entwickelte sich um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts zwischen diesen drei grossen Mathematikern eine äusserst interessante Discussion über diese wichtigen Probleme, zu denen auch diejenigen über die Fortpflanzung des Schalles in Röhren und über die periodischen Bewegungen elastischer Körper überhaupt sich gesellten. Die Abhandlungen D'Alembert's habe ich oben schon citirt; diejenigen Euler's und Lagrange's finden sich im II. (pag. 11) und III. (ppg. 1, 27 und 60) Bande der Miscell. Taurin. (1760—65). Die partielle Differentialgleichung, die die Bewegung schwingender Saiten repräsentirt, hat bekanntlich die Form: $\frac{d^2z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2z}{dx^2}$. Ihr allgemeines Integral gab Euler zuerst im III. Bd. der Memoiren der Turiner Akademie (1762—65) in der Form:

$$z = F(x + at) + \Phi(x - at),$$

wo F und Φ willkürliche Functionen bezeichnen. Allein die Hauptschwierigkeit dieser physikalischen Probleme lag nicht in der Lösung der sie bestimmenden Differentialgleichungen, sondern vielmehr in der Bestimmung der willkürlichen Functionen aus den gegebenen Anfangswerthen der Variabeln, und hierum drehte sich hauptsächlich der Streit der drei genannten berühmten Mathematiker. D'Alembert war nämlich der Ansicht, dass, um die Lage irgend eines Punktes der schwingenden Saite nach einer bestimmten Zeit t angeben zu können, oder mit andern Worten, um das allgemeine Integral der die Bewegung der Saite repräsentirenden Differentialgleichung analytisch discutiren zu können, es nothwendig sei, dass die Anfangslage der Saite dem Gesetze der Stetigkeit oder Continuität unterliegen müsse, d. h. dass die Curve, die dieselbe im Anfange der Bewegung bildet, continuirlich, oder also, was dasselbe ist, durch eine algebraische oder transcendente Gleichung ausdrückbar sei. Euler und Lagrange dagegen behaupteten, dass diese Bedingung keineswegs nothwendig sei und nur der Allgemeinheit des Problems Eintrag thun würde; die Anfangslage der Saite dürfe eine vollständig willkürliche sein, d. h. die Curve, die sie bildet, müsse keinem analytischen Gesetze unterworfen, könne also ganz beliebig, continuirlich oder discontinuirlich gezogen sein. Diese Ansicht, die von den Mathematikern bald als die richtige erkannt wurde, findet man näher erörtert in der citirten Abhandlung von Euler im III. Bd. der Turiner Memoiren (pag. 1, etc.), worauf ich den Leser verweise.

Mit der Theorie der höheren partiellen Differentialgleichungen beschäftigten sich gegen das Ende des vorigen

Jahrhunderts besonders Euler, Condorcet, Monge, Laplace und Legendre. In allen diesen ausserordentlich schwierigen und complicirten Untersuchungen liegt das Hauptmoment in der Bestimmung und Deutung der willkürlichen Functionen; die vollständige Integration solcher Gleichungen aber ist nur in sehr wenigen Fällen durchzuführen; die grösste Zahl der wirklich integrirbaren partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung findet man im dritten Bande von Euler's *Institutiones calc. integr.* Es sind diess besonders die einfacheren Gleichungen mit nur einem Differentialquotienten, wie:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Q, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Q_1,$$

wo Q und Q_1 Functionen von x, y und z sind, oder:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = Q,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} = Q,$$

wo P und Q Functionen von x, y und z sind, oder auch:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

wo P und Q nur x und y enthalten, deren Integrale in endlicher Form angebbar sind. Das vollständige Integral der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei Variabeln gab Laplace*) unter gewissen Beschränkungen, welche Methode Legendre**) auf die nämliche Gleichung mit vier Variabeln und auf einige spezielle Fälle der linearen Gleichung dritter Ordnung ausgedehnt hat.

Die tiefgehendsten Untersuchungen über die Bestimmung der willkürlichen Functionen verdankt man **Monge** ***) (Beaune 1746 — Paris 1818). Dieser ausgezeichnete Mathe-

---

*) *Mémoires de l'acad. de Paris, 1773.*

**) *Ibid. 1787.*

***) *Miscell. Taurin. Tom. V. 1770—73.*

matiker zeigte in äusserst klarer Weise an einer Reihe von Beispielen, wie die willkürlichen Functionen aus den Bedingungen des Problems bestimmt werden können, wenn diese Bedingungen in analytisch bestimmter Form gegeben sind, wie dagegen das Integral, wenn auch die willkürlichen Functionen desselben wegen der Discontinuität der Bedingungsgleichungen in analytischer Form nicht angebbar sind, dennoch construirt werden können. So repräsentirt das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, das also eine willkürliche Function enthält, so viele krumme Oberflächen, als die willkürliche Function Formen annehmen kann; die Lösung ist also eine unbestimmte, sie wird erst eine bestimmte durch eine gegebene Bedingungsgleichung, welche eine Curve darstellt, durch welche die krumme Oberfläche gehen muss. Ist diese Bedingungsgleichung keine analytische, die Curve also keine continuirliche, so ist auch die willkürliche Function des Integrales analytisch nicht zu bestimmen, das Integral dessenungeachtet aber geometrisch construirbar. Analog verhält es sich mit den Integralen von Differentialgleichungen höherer Ordnung; diese haben bekanntlich so viele willkürliche Functionen, als der Grad der Ordnung beträgt, und um diese zu bestimmen, müssen auch ebenso viele Bedingungsgleichungen gegeben sein, also z. B., die krumme Oberfläche muss durch so viele Curven doppelter Krümmung gehen, als das Integral willkürliche Functionen enthält. — So viel über die partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung; man wird mir verzeihen, wenn ich auf dieses Gebiet nicht die Ausführlichkeit verwende, die ich einigen infinitesimalen Partieen, eigentlich schon mehr als es der Rahmen meines Buches erlaubt, habe zu Theil werden lassen.*)

Variationsrechnung. — Die Geschichte dieses

*) Man vergl. für Weiteres die Memoiren der Pariser Akad. für die Jahre 1770, 1772, 1773, 1784 und 1787.

Gebietes der höheren Analysis haben wir im V. Cap. mit den berühmten Problemen der Brachystochrone und der Isoperimetrie begonnen, die wir als die ersten Anfänge des Variationencalcüls bezeichnet haben. In diesen Problemen handelt es sich nämlich darum, unter unendlich vielen Curven, die irgend einer Bedingung unterworfen sind, z. B. wie im ersteren, zwischen denselben Punkten zu liegen, oder wie im zweiten, dieselbe Länge zu haben, diejenige herauszufinden, der irgend eine Maximal- oder Minimaleigenschaft zukommt. Analytisch lässt sich das isoperimetrische Problem z. B. so ausdrücken: Es soll bestimmt werden, was für eine Relation zwischen x und y bestehen muss, damit der Werth von $\int_{x_1}^{x_2} y dx$ für einen bestimmten constanten Werth von $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ein Maximum werde. Will man nun zur Lösung solcher Aufgaben denselben Weg betreten, den man bei der Bestimmung der Maxima und Minima von Functionen einer oder mehrerer Variabeln eingeschlagen hat, so wird es sich wohl hier in erster Linie darum handeln, jene Methode auf Ausdrücke unter dem Integralzeichen auszudehnen, und diess ist die Aufgabe der Variationsrechnung. Doch trat beim Entstehen des neuen Calcüls die Analogie der beiden Methoden noch beträchtlich in den Hintergrund, indem, wie wir gesehen haben, jene Probleme mehr aus geometrischen Gesichtspunkten aufgefasst wurden. Die Lösungen des isoperimetrischen Problems durch Jak. und Joh. Bernoulli bedurften daher einer wesentlichen Verallgemeinerung, und der erste Schritt hiezu geschah durch Euler in der Abhandlung: *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti* *solutio generalis* *), und in der vier Jahre späteren: *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium investigatio nova et facilis* **). Allgemeiner und umfassender aber behandelte Euler diesen Gegenstand in dem unübertroffenen, reichhaltigen Werke, betitelt: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti (Lausannae, 1744.)*

Die Hauptsätze, von denen Euler in seinen Untersuchungen ausging, sind die folgenden beiden: 1. Die Eigenschaft des Maximums oder Minimums, die einer ganzen Curve zukommt, kommt auch einem unendlich kleinen Theile derselben zu; und 2. das Increment, oder wie es später genannt wurde, die Variation einer Function der Variabeln x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. wird nach den Regeln des Differentiirens gefunden. — Der Umstand, dass diese Sätze, besonders der erste, nicht allgemeine Gültigkeit haben, ist der einzige Grund, der die Euler'schen Lösungen dieser höheren Probleme nicht als vollkommene und fehlerlose anerkennen lässt. In den beiden ersten der genannten Abhandlungen nimmt Euler noch vorherrschend den geometrischen Standpunkt ein, sein Verfahren in denselben erinnert desshalb noch in bedeutendem Grade an die Bernoulli'schen Lösungen; in der letzteren grösseren Schrift dagegen nähert er sich so sehr der analytischen Theorie der Variationsrechnung, dass man den Schritt, den Lagrange auf diesem Gebiete weiter ging, mit demjenigen wohl vergleichen darf, den Leibnitz von Newton's Fluxionstheorie zu seiner Differentialrechnung that. Abgesehen davon, dass Lagrange jene oben erwähnten Lücken der Euler'schen Ausführung ausgebessert hat, hat er vor Allem aus durch die rein analytische Auffassung der Sache und die passende Bezeich-

*) *Commentar. acad. Petrop. Tom. VI. 1732.*

**) *Ibid. Tom. VIII. 1736.*

nungsweise der Variationen die bis jetzt noch überwiegend geometrischen Probleme über Maxima und Minima zu einem selbstständigen analytischen Calcül erhoben, und hierin liegt die hervorstechende Aehnlichkeit mit Leibnitzens Erfindung.

Euler theilt in seinem letztgenannten Werke die Aufgaben über Maxima und Minima in zwei Hauptklassen; in der ersten bestimmt er unter allen über einer gegebenen Abscisse möglichen Curven diejenige, die irgend einen Integralausdruck, wie z. B. $\int Z\,dx$, wo Z eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ etc. sein kann, zu einem Maximum oder Minimum macht, und nennt diese Methode die absolute; in der zweiten Klasse dagegen behandelt er diejenigen Aufgaben, in denen nicht unter allen überhaupt möglichen Curven über derselben Abscisse, sondern nur unter denjenigen, die eine oder mehrere gegebene gemeinsame Eigenschaften haben, diejenige gesucht wird, die $\int Z\,dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht; diese Methode nennt er die relative. Zur ersten Klasse gehört z. B. das Problem der Brachystochrone, zur zweiten dasjenige der Isoperimetrie.

Euler gibt nun zunächst die allgemeine Erklärung des Weges, den man bei der Lösung solcher Probleme einzuschlagen hat und geht dann zu speciellen Beispielen über. Man versteht unter Increment, oder, wie es später genannt wurde, Variation eines Integrales die Grösse, um die sich das Integral ändert, wenn die gesuchte Curve aus ihrem ursprünglichen Zustand in einen benachbarten, von jenem unendlich wenig verschiedenen übergeht. Man geht also bei diesen höheren Problemen über Maxima und Minima von einer Curve zu einer anderen über, während man bei den elementaren Problemen dieser Art bloss die Aenderungen bestimmter Stücke derselben Curve ins Auge fasst. (Vergleiche hiefür Fig. XXVI und XXVII.) Sei also $y =$

f(x), so bestimmt man im letzteren Falle die Aenderung von y für eine bestimmte Aenderung von x, aber so, dass die Relation y = f(x) die gleiche bleibt; im ersteren Falle dagegen wird die Relation y = f(x) eine andere, indem man zu einer benachbarten Curve übergeht, und man bestimmt nun die Aenderung von y, welche jetzt von derjenigen von x vollkommen unabhängig angenommen werden kann. — Wie man nun in der Differentialrechnung das Maximum oder Minimum einer Function y von x sucht, indem man den ersten Differentialquotienten von y nach x gleich Null setzt und aus dieser Gleichung den Werth von x zieht, so bestimmt man das Maximum oder Minimum eines Integralausdruckes, indem man die Function unter dem Integralzeichen variiren lässt, diese Variation gleich Null setzt und aus dieser Gleichung eine Relation zwischen y und x zieht, welche uns die gesuchte Curve repräsentirt. Das Increment oder die Variation einer solchen Function unter dem Integralzeichen aber betimmt man nach denselben Regeln wie das Differential. Soll z. B. die Function y von x gesucht werden, die $\int Z\,dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, und es sei Z bloss eine Function von x und y, so verfährt Euler folgendermaassen:

Das Differential von Z nach x und y sei $dZ = Mdx + Ndy$, die Variation von Z also $= \delta Z = M\delta x + N\delta y$, oder, weil die Abscisse, über der die gesuchte Curve liegen soll, constant angenommen wurde und desshalb δx gleich Null gesetzt werden kann, $\delta Z = N\delta y$. (Euler setzt für die Variation von y noch nicht das Zeichen δy, sondern bezeichnet dieselbe seiner geometrischen Herleitung entsprechend mit $n\nu$; s. Fig. XXVIII.) Die Variation von Zdx ist demnach $= N\delta y\,.\,dx$. Diesen Ausdruck setzt man nun gleich Null, was uns für die Bestimmung der gesuchten Curve die Gleichung gibt:

$$N = 0.$$

Ist Z eine Function von x, y und y′ und es sei ihr Differential $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dy'$, so findet Euler das Increment (oder wie er es nennt *valor differentialis*) von $Z\,dx$ gleich $n\nu\left(N - \frac{dP}{dx}\right)dx$, oder nach jetziger Bezeichnungsweise: $\delta Z dx = \delta y\left(N - \frac{dP}{dx}\right)dx$. Diese Variation gleich Null gesetzt, gibt für die Bestimmung der gesuchten Curve die Gleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

So erhält man entsprechend, wenn Z noch y″ enthält, die Bestimmungsgleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

u. s. f. nach leicht zu erkennendem Gesetze.

Zum zweiten Falle, wo also Z eine Function von x, y und y′ ist, gehört das Problem der Brachystochrone, das ich hier als Beispiel der Euler'schen Behandlungsweise anführen will.

Es soll unter allen Curven, auf dieselbe Abscisse bezogen, diejenige gesucht werden, die $\int\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht. (Dieses Integral drückt nämlich die Fallzeit vom Punkte x bis zum Anfangspunkt der Coordinaten aus; p bedeutet $\frac{dy}{dx} = y'$.)

In diesem Beispiele ist $Z = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$,

also $dZ = \frac{-dx\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{x}\,(1+p^2)}$.

Wir haben also $M = \frac{-\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}}$, $N = 0$ und $P = \frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}$.

Die Gleichung $N - \frac{dP}{dx} = 0$ wird daher in diesem Falle $-\frac{dP}{dx} = 0$, oder $dP = 0$, und hieraus durch Integration:

$$P = \frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}} = \text{Const.} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Bestimmen wir hieraus p, so erhalten wir:

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}, \quad \text{oder } y = \int dx \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

welches bekanntlich die Gleichung einer Cykloide ergeben würde.

In den folgenden Capiteln behandelt Euler solche Fälle, wo die Grösse Z unter dem Integralzeichen eine Function eines andern unbestimmten Integralausdruckes, wie z. B. $\int [Z]\, dx$, ist, wo [Z] dann eine Function der Grössen x, y, y', y'', etc. bedeutet; zu diesem Falle gehören demnach die Doppelintegrale. Im V. Capitel sodann geht er zur relativen Methode der Maxima und Minima über. Auf diese weiteren Entwicklungen kann ich hier nicht näher eintreten, sondern wende mich zu den Fortschritten, die die Variationsrechnung durch Lagrange's analytisch-abstracte Auffassungsweise kurze Zeit nachher in so hohem Maasse gemacht hat.

Schon im Jahre 1755 theilte Lagrange Euler seine neue Methode für die Bestimmung der Maxima und Minima von Integralformeln mit, veröffentlichte dieselbe aber erst 1762 unter dem Titel: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales* *indéfinies.* *) Euler anerkannte sofort die Vortrefflichkeit und Allgemeinheit dieser Methode und ihren Vorzug vor der seinigen und verband seine wissenschaftlichen Kräfte mit denjenigen des Erfinders, um den neuen Calcül zum Gemeingut der Mathematiker zu machen. Er veröffentlichte im Jahre 1766 eine Abhandlung, betitelt: *Elementa calculi variationum* **,) in welcher er die Principien der neuen Methode in der gewohnten klaren Weise auseinandersetzte. Von ihm rührt auch die Benennung „Variationsrechnung" her.

Abgesehen von der rein analytischen Auffassungsweise behandelt Lagrange in der oben genannten Abhandlung das Problem der Maxima und Minima von Integralausdrücken viel allgemeiner als Euler in seinem mehr auf geometrischem Grunde fussenden Werke. Letzterer setzte nämlich die Grenzen des Integrales, also die Endpunkte der zu bestimmenden Curve als fest voraus und liess desshalb in dem Ausdruck Z, der im Allgemeinen eine Function von x, y, y', y'', etc. sein kann, nur y, y', y'', etc. variiren, die Variation von x aber setzte er gleich Null. Lagrange dagegen, indem er die Grenzen des Integrales als unbestimmt, gleichgültig ob variabel oder constant annahm, liess auch x variiren und betrachtete also dasselbe ganz als selbständige Variable, die Variationen δx, δy, δz also als völlig unabhängig von einander. (Vergl. hiefür Fig. XXVI u. XXIX.) Die Bestimmung der Variation von $\int Z$, wo Z eine Function von x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, etc. darstellt, leitet Lagrange auf eine für eine erste, einen neuen Calcül erklärende Abhandlung zu kurze Weise ab, wahrscheinlich indem er die Euler'sche Darstellung für die fundamentalen Sätze als genügend erachtete und desshalb voraussetzte. Euler sah sich wahrscheinlich auch später aus Grund dieser ge-

* *Mélanges de la société de Turin. Tom. II. 1760 et 61*

**) *Novi commentar. Petrop Tom. X.*

drängten Kürze der Lagrange'schen Abhandlung veranlasst, die neue Methode in den Commentarien der Petersburger Academie klarer und ausführlicher darzustellen. — Nachdem Lagrange kurz angedeutet hat, dass er eine neue unendlich kleine Veränderung der Variablen x, y, z, dx, dy, dz etc. zum Unterschiede von der Differentialänderung durch den Buchstaben δ bezeichnen werde, dass diese Veränderung δZ einer Function Z aber nach denselben Regeln wie die Differentiation bestimmt werde (so dass, wenn $dZ = m\,dx$, auch $\delta Z = m\,\delta x$ sein würde), geht er sogleich zur Lösung des Problems über, die Relation zu bestimmen, die die Variabeln x, y, z unter sich haben müssen, damit der Ausdruck $\int Z$, wo Z eine Function dieser Variabeln und ihrer Differentiale beliebiger Ordnung, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, etc. bedeutet, ein Maximum oder Minimum werde. Lagrange nimmt nun ohne Weiteres an, dass $\delta \int Z = \int \delta Z$ sei und findet in Folge dessen für die Variation von $\int Z$, wenn Z eine Function von x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, etc. ist, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = \int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \dots \\ + \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \dots \\ + \int \nu\delta z + \int \pi\delta dz + \int \chi\delta d^2z + \dots\end{aligned}$$

welcher mit Berücksichtigung der Beziehungen $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$, etc. (die Lagrange ebenfalls ohne Beweis hinstellt) und mit Zuhülfenahme der theilweisen Integration, in Folge welcher $\int pd\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$, $\int qd^2\delta x = qd\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x$, etc. in folgenden übergeht:

$$\delta \int Z = \int (n - dp + d^2q - \ldots)\, \delta x$$
$$+ \int (N - dP + d^2Q - \ldots)\, \delta y$$
$$+ \int (\nu - d\pi + d^2\chi - \ldots)\, \delta z$$
$$+ \left(p - dq + \ldots\right) \delta x + \left(q - \ldots\right) d\delta x + \text{etc.}$$
$$+ \left(P - dQ + \ldots\right) \delta y + \left(Q - \ldots\right) d\delta y + \text{etc.}$$
$$+ \left(\pi - d\chi + \ldots\right) \delta z + \left(\chi - \ldots\right) d\delta z + \text{etc.}$$

Damit nun ein Maximum oder Minimum stattfinden kann, muss diese Variation gleich Null sein. In dem Falle, wo die Variationen δx, δy, δz, $d\delta x$ $d\delta y$, $d\delta z$, etc. vollkommen unabhängig von einander sind, muss jedes der Integrale und jedes der vom Integralzeichen freien Glieder für sich gleich Null sein; man erhält also die Bestimmungsgleichungen:

$$n - dp + d^2q - d^3r + \ldots \text{ etc.} = 0$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots \text{ etc.} = 0$$
$$\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\varrho + \ldots \text{ etc.} = 0$$
$$p - dq + d^2r - \ldots = 0 \,,\; q - dr + \ldots = 0, \text{ etc.}$$
$$P - dQ + d^2R - \ldots = 0 \,,\; Q - dR + \ldots = 0, \text{ etc.}$$
$$\pi - d\chi + d^2\varrho - \ldots = 0 \,,\; \chi - d\varrho + \ldots = 0, \text{ etc.}$$

Die ersten drei Gleichungen geben uns die gesuchte Curve, die übrigen sind die sog. Grenzgleichungen und dienen zur Bestimmung der in die Gleichung der Curve eingetretenen willkürlichen Constanten und der Grenzwerthe der Curve. In den meisten Fällen reducirt sich natürlich die Zahl dieser Gleichungen bedeutend, was mit den Bedingungen des gegebenen Problems zusammenhängt. — Im Weiteren behandelt dann Lagrange, wie Euler, auch den Fall, wo die Function Z unter dem Integralzeichen selbst wieder einen Integralausdruck enthält, worauf ich nicht weiter eintreten kann. Dieser Abhandlung Lagrange's folgt in demselben Bande der Turiner Memoiren eine andere, welche verschiedene interessante mechanische Probleme mit Hülfe der Variationsrechnung gelöst enthält, so das schon von Euler im Anhang zu seiner *Methodus inveniendi etc.* bewiesene Princip, dass bei den Bahnen, welche Körper in Folge centraler Kräfte in nicht widerstehenden Medien beschreiben, das Integral aus der Geschwindigkeit in das Element der beschriebenen Curve immer ein Maximum oder Minimum sei.

So umfassend auch die Lagrange'sche Bestimmung der Variation eines Integrals war, so zeigte dieselbe dennoch einige Lücken, welche auszufüllen der Gegenstand einiger späterer ausgezeichneter Arbeiten Eulers und Lagrange's selbst war. Die Verbesserungen bezogen sich hauptsächlich auf den Fall der Variabilität der Grenzen und auf eine festere Begründung der Fundamentalprincipien des neuen Calcüls. Für diese weitere Entwicklung aber bin ich genöthigt, den Leser auf die unten angeführten Quellen zu verweisen *).

3. Die Geometrie.

Es kann hier nicht mein Plan sein, die Entwicklung der Geometrie im achtzehnten Jahrhundert unter dem Einfluss der Infinitesimalrechnung zu verfolgen; ich habe einen

---

*) *Lagrange, Sur la méthode des variations (Mémoires de l'acad. de Turin pour 1766—69, pag. 163), et Leçons sur le calcul des fonctions, Paris, 1806.*

Euler, Institut. calcul. integ. Tom. III. et Commentar. Petrop. Tom. XVI. 1771, pag. 35.

Für die Geschichte der Variationsrechnung vergleiche man: Gräffe, *Commentatio historiam calculi variationum etc.* Gottingae, 1825; und Todhunter, *A history of the progress of the calculus of variations, etc. Cambridge, 1861.*

grossen Theil der wichtigsten geometrischen Probleme schon in der Geschichte der Differential- und Integralrechnung behandelt, welch' analytische Disciplinen eben nur schwierig von ihrem geometrischen Gewande zu befreien sind. Es handelt sich hier einerseits um die Geometrie der Alten und andrerseits um jene Methoden, die im Laufe des 17. Jahrhunderts ihren Ursprung genommen und der ganzen Geometrie, besonders aber der Theorie der Kegelschnitte und höheren Curven neue verheissungsvolle Bahnen eröffnet haben, die analytische Geometrie des Descartes und die neuere eines Pascal, Desargues u. de la Hire.

Die Behandlungsweise der Geometrie nach der synthetischen Methode der Alten trat bekanntlich nach Descartes immer mehr in den Hintergrund; als die hauptsächlichsten Vertreter dieser Richtung haben wir seiner Zeit Huyghens und die Engländer Newton, Maclaurin, Halley und Simson genannt. Die letzteren Beiden wandten die alte Methode weniger in eigenen Untersuchungen an, sondern beschäftigten sich, wie wir wissen, vorzugsweise mit der Wiederherstellung der verloren gegangenen apollonischen Schriften; von Simson haben wir ein ausgezeichnetes Werk über Kegelschnitte in fünf Büchern streng nach apollonischer Methode verfasst. Zu derselben Richtung gehört auch der bedeutende schottische Mathematiker **Matthew Stewart** (Rothsay 1717 — Edinburgh 1785). Seine *Propositiones geometricae more veterum demonstratae, etc. Edinb. 1763* sind vollständig im Geiste der alten Geometrie geschrieben. Ebenso ausgezeichnet ist sein 1761 erschienenes Werk: *Tracts physical and mathematical, etc.*, in welchem verschiedene wichtige Probleme der physischen Astronomie, unter Anderem auch die Entfernung der Erde von der Sonne, auf ganz elementarem Wege, ohne analytische Hülfsmittel gelöst sind. In diesem letzteren Probleme hat Stewart allerdings nicht reüssirt, was aber nicht der

Methode, sondern der zu unvorsichtigen Vernachlässigung verschiedener Grössen zuzuschreiben ist. — Vor Allem aber sind es die beiden grossen Mathematiker Newton und Maclaurin, die im achtzehnten Jahrhundert noch, da die Descartes'sche Analysis und die Infinitesimalrechnung die Geometrie schon vollständig beherrschten, bei ihren grossen geometrischen und mechanisch-astronomischen Entdeckungen sich der alten Geometrie mit einer Meisterschaft bedient haben, die oft mehr als die damit erzielten Resultate die Bewunderung der Mit- und Nachwelt hervorgerufen hat. Wir haben im VI. Cap., bei Betrachtung der mechanisch-astronomischen Entdeckungen Newton's, schon auf die eleganten synthetischen Herleitungen der Haupteigenschaften der Kegelschnitte und der Bewegungsgesetze der Körper in solchen Curven hingewiesen und auch einen der wichtigsten Sätze selbst als Beispiel angeführt. Besonders zu erwähnen sind der IV. und V. Abschnitt des ersten Buches der Principien; man findet hier die Sätze über die Construction von Kegelschnitten, wenn ein Brennpunkt und verschiedene Gerade oder Punkte gegeben sind, welche der Kegelschnitt berühren, resp. durch welche er gehen soll; ferner die Construction von Kegelschnitten, wenn gar kein Brennpunkt gegeben ist, sondern eine bestimmte Zahl von Geraden oder Punkten, welche der Kegelschnitt berühren oder durch welche er gehen soll; ebenso die organische Beschreibung der Kegelschnitte durch das eine Schenkelpaar zweier gegebener Winkel, deren übrige beiden Schenkel sich auf einer bestimmten Geraden schneiden. Newton löste alle diese Probleme nach der synthetischen Methode der Alten und nicht nach der neueren projectivischen, der Geometrie der Lage, nur nimmt er die sog. Methode der ersten und letzten Verhältnisse zu Hülfe, die er im ersten Abschnitt auseinandergesetzt hat. Wir haben die Anwendung dieser Methode im VI. Cap. ebenfalls kennen gelernt. Auch über die perspectivische Transformation der Figuren finden wir im V. Abschnitt einige interessante Sätze. So sehen wir, dass dieses unsterbliche Werk der Principien nicht nur die wichtigsten mechanisch-astronomischen Entdeckungen aller Zeiten in sich birgt, sondern dass es auch in rein geometrischer Hinsicht zu den reichhaltigsten und geistreichsten Schöpfungen der neueren Zeit gehört, und berücksichtigt man, dass es sogar die Andeutung auf die unter Newton und Leibnitz neu sich bildende Infinitesimalrechnung enthält, so darf dasselbe mit Recht das Universalwerk der mathematischen Entdeckungen des 17. Jahrhunderts genannt werden.

Colin Maclaurin steht in Handhabung der alten Geometrie vielleicht noch über Newton; wir wissen schon aus dem V. Cap., dass er in seinem berühmten *Treatise of fluxions* die neue Newton'sche Fluxionsrechnung nach der alten synthetischen Methode strenge zu beweisen suchte, wir treten daher nicht näher auf diesen Gegenstand ein; allein nicht nur in diesen geometrischen Untersuchungen zeigte sich seine ausserordentliche Gewandtheit in der alten Geometrie, sondern vor Allem aus in der Lösung der schwierigsten mechanischen Probleme, die sein *Treatise* enthält, so vorzüglich in der Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Sphaeroids auf einen Punkt auf der Oberfläche oder im Innern desselben, welches Problem in der Frage über die Figur der Erde und über die Ebbe und Fluth eine Rolle spielt. Maclaurin löste dieses Problem, das später die grössten Analytiker vielfach beschäftigte, auf synthetischem Wege bloss mit Hülfe einiger Eigenschaften der Ellipse und des Ellipsoides, und diese Lösung hat Lagrange mit Recht als eines der grössten Meisterstücke rein geometrischer Ableitung hingestellt. *)

Das Theorem, das Maclaurin zur Bestimmung der Attraction eines Rotationsellipsoides aufgestellt und bewiesen

*) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1773.*

hat, ist folgendes: „Wenn man im Scheitel der kleineren von zwei ähnlichen concentrischen Ellipsen die Tangente zieht, ferner aus dem einen der beiden Schnittpunkte dieser Tangente mit der grösseren Ellipse zwei Sehnen, welche gleiche Winkel mit der Tangente bilden, zieht und endlich von dem betreffenden Scheitel der kleineren Ellipse aus in dieser ebenfalls zwei Sehnen construirt, die den ersteren beiden parallel sind, so ist die Summe dieser letzteren Sehnen gleich der Summe der ersteren.“ — Maclaurin spricht übrigens den Satz nicht ganz so allgemein aus, sondern auf folgende Weise: *(Treatise of fluxions, Tom. II. § 626)* „Es seien (Fig. XXX) ADBE u. adbe die beiden concentrischen ähnlichen Ellipsen; man ziehe die Tangente PJ in d und in der kleineren Ellipse die ihr parallele Sehne lk; dann verbinde man d mit l und k, ziehe vom Punkte P aus die beiden zu dl und dk parallelen Sehnen PM und PN und ziehe schliesslich noch die beiden Senkrechten MQ und NR auf die zum Durchmesser DE parallele Sehne PH, so ist PR + PQ = 2 dv.“ — Man wird aus diesem Satze leicht den ersten allgemeineren ableiten können.

Die analytische Geometrie des Descartes ist es wie bekannt vorzüglich, die die alte Methode auf beinahe zwei Jahrhunderte hin verdrängt hat. Diese Erscheinung aber wird wohl Niemandem auffallend vorkommen, der die Leichtigkeit und Kürze betrachtet, mit der geometrische Probleme mit Hülfe der Algebra gelöst werden und mit der sich allgemeine Eigenschaften verwandter Gebilde, wie z. B. der Kegelschnitte, in wenigen Formeln ausdrücken und vereinigt discutiren lassen. Aber auch die Descartes'sche Analysis regierte nach ihrem Entstehen nicht unbeschränkt, indem die aus ihr hervorgegangene Infinitesimalrechnung in Kurzem den grössten Einfluss auf die Geometrie gewann. Freilich bildete die Descartes'sche Methode immer noch die Grundlage einer analytischen Behandlung der Geometrie, wenn auch die elementare Algebra durch den höheren Calcül ersetzt wurde. Aber trotz dieser Beherrschung der Geometrie durch die Differential- und Integralrechnung wurden die Haupteigenschaften der Kegelschnitte, höheren Curven und krummen Oberflächen von ausgezeichneten Mathematikern rein nach der Descartes'schen Methode in erschöpfender Weise hergeleitet; ich erinnere nur an den zweiten Band von Eulers unübertroffenem Werke: *Introductio in analysin infinitorum,* eine analytische Geometrie, wie sie klarer, methodischer und umfassender bis jetzt kaum zu Tage gefördert worden ist. Euler behandelt auch hier zum ersten Male die analytische Geometrie der krummen Oberflächen oder dreier Dimensionen, auf die Descartes nur mit kurzen Worten hingewiesen hatte. Am vortrefflichsten ausgeführt ist in diesem Euler'schen Werke die Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei und drei Variabeln. Nach Descartes'scher Methode behandelten um diese Zeit die krummen Linien ferner noch in ausgezeichneter Weise **Jean Paul de Gua** (Carcasonne 1712 — Paris 1785) in dem Werke: *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir les propriétés des lignes géometriques de tous les ordres;* und der Genfer **Gabriel Cramer** (Genf 1704 — Bagnols 1752) in seiner *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (1750).* — Wir dürfen hier doch einige andere berühmte Werke, die einen bedeutenden Fortschritt in der analytischen Theorie der krummen Linien und Oberflächen begründeten, nicht unerwähnt lassen, obwohl sie nicht ausschliesslich der Descartes'schen Analysis sich bedient, sondern die infinitesimalen Methoden theilweise zu Hülfe genommen haben. Es sind diess: der *Traité analytique des sections coniques (1707) des* Marquis de l'Hôpital, und die *Recherches sur les courbes à double courbure (1731)* von Clairaut, welches Werk zuerst ausführlicher die Theorie der Curven doppelter Krümmung enthielt und dieselbe begründete.

Newton war der erste, der die Curven höherer Ordnung einer allgemeinen Betrachtung unterzog und zwar in der Abhandlung: *Enumeratio linearum tertii ordinis*, welche zuerst im Jahre 1706, als Anhang zu seiner Optik, erschien. Er zählte in derselben 72 verschiedene Arten von Curven dritter Ordnung auf, die er wieder in fünf Hauptklassen eintheilte und von denen er nachwies, dass sie durch perspectivische Projection von fünf cubischen Parabeln gebildet werden, gleichwie alle Curven zweiter Ordnung durch Projection des Kreises entstehen *). Ausser diesem höchst interessanten Satze leitete Newton eine Reihe von allen algebraischen Curven gemeinsamen Eigenschaften ab, allein ohne die Beweise dazu anzugeben, so dass schwer zu entscheiden ist, ob er auf analytischem oder rein geometrischem Wege zu diesen Resultaten gelangt ist. Der Engländer Stirling gab im Jahre 1717 in dem Werke: *Lineae tertii ordinis Newtonianae, etc.* einen Commentar zu Newton's *Enumeratio,* in welchem er die meisten der von Newton aufgestellten Sätze beweist. Vollständiger aber wurden Newton's Arbeiten über die Theorie der Curven durch Maclaurin's ausgezeichnete Untersuchungen in diesem Gebiete ergänzt, welche er in den beiden Werken: *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, 1719,* und *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus,* 1748, veröffentlicht hat. Das erstere enthält die schon von Newton in seinen Principien und am Ende seiner *Enumeratio* für die Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung gegebene organische Beschreibung durch die Schenkel zweier sich drehender Winkel, ausgedehnt auf algebraische Curven beliebiger Ordnung und analytisch bewiesen. Das zweite Werk, das man gewöhnlich als Anhang seines *Treatise of algebra* findet, enthält eine Menge der interessantesten und wichtigsten Eigenschaften der algebraischen Curven hauptsächlich auf synthetischem Wege nachgewiesen. Maclaurin nimmt

*) Vergleh. Chasles, *Aperçu historique etc.*, Note XX.

für seine Untersuchungen die Transversalentheorie zu Hülfe und leitet auf diese Weise die Sätze von Pascal und de la Hire, welche die Grundprincipien der neueren Geometrie bilden, wieder ab. Es ist also vorzüglich dieses Werk von Maclaurin, sowie die oben genannten von Simson und Stewart, die wir als die synthetischen Hauptwerke des achtzehnten Jahrhunderts betrachten müssen; sie bilden die Vermittlung zwischen den grundlegenden Arbeiten eines Pascal, Desargues und de la Hire und den epochemachenden neueren Schöpfungen eines Carnot, Poncelet und Steiner. Den Leistungen jener berühmten englischen Mathematiker müssen wir unsere Bewunderung um so mehr zu Theil werden lassen, als sie die Stellung der reinen Geometrie in der Mathematik zu einer Zeit glänzend aufrecht zu erhalten wussten, da die Analysis alle Gebiete beherrschte und die grössten Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts sich ihrer Pflege zuwandten. Uebrigens muss man wohl berücksichtigen, dass jene Sätze, die wir heute als die Fundamentalsätze der neueren Geometrie kennen, nicht nach der projectivischen Methode, die das eigentliche Wesen der Geometrie der Lage ausmacht, abgeleitet wurden, sondern einfach mit Hülfe der synthetischen Geometrie der Alten.

Zu den Hauptsätzen, welche Maclaurin in dem letzteren Werke über die algebraischen Curven abgeleitet hat, gehören die folgenden: „Wenn man durch einen in der Ebene irgend einer Curve gegebenen Punkt eine Transversale zieht, welche die Curve in so vielen Punkten schneidet, als der Grad ihrer Ordnung beträgt, so schneiden die Tangenten, die man an diesen Schnittpunkten zieht, auf einer andern durch den gegebenen Punkt gezogenen beliebigen Geraden Segmente ab, und zwar ist die Summe der reciproken Werthe dieser Segmente eine konstante Grösse, welches auch die ursprüngliche Transversale sein mag; nur ist zu berücksichtigen, dass die auf entgegengesetzter Seite

des gegebenen Punktes liegenden Segmente auch mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind.“ (Sect. I. § 9.) Gleich nachher zeigt dann Maclaurin, dass jene Summe gleich sei der Summe der reciproken Werthe aller Segmente, die auf der unveränderlichen Geraden zwischen dem gegebenen Punkte und den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Curve liegen. Auch wenn die unveränderliche Gerade die Curve nicht schneidet, oder wenigstens nicht in so vielen Punkten, als die Curve Dimensionen hat, bestimmt Maclaurin jenen constanten Werth. — Ein anderes Theorem, das Maclaurin benutzt, das aber schon von dem Engländer Cotes aufgestellt worden war, ist das folgende: „Es drehe sich wiederum eine Transversale um einen festen Punkt in der Ebene einer Curve und schneide diese in so vielen Punkten, als der Grad ihrer Ordnung beträgt. Nimmt man nun in jeder dieser Transversalen einen Punkt M so an, dass der reciproke Werth seiner Entfernung von dem gegebenen Punkte gleich ist der Summe der reciproken Werthe der Segmente, die auf der Transversale zwischen dem festen Punkte und den Schnittpunkten mit der Curve liegen, so ist der Ort des Punktes M eine Gerade. Bestimmt man aber auf jeder dieser Transversalen einen Punkt m so, dass der reciproke Werth seiner Entfernung von dem festen Punkt gleich ist dem arithmetischen Mittel aus den reciproken Werthen derselben Segmente, wie im vorhergehenden Falle, so ist der Ort des Punktes m ebenfalls eine Gerade.“ (Sect. I. § 27 und 28.) Sei z. B. der feste Punkt P, die Durchschnittspunkte der Transversale mit der Curve A, B, C, etc., so wird der erste Theil dieses Theorems durch folgende Gleichung ausgedrückt: $\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \cdots$, der zweite Theil dagegen durch die Gleichung:
$\frac{1}{Pm} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \cdots\right)$, wo n die Ordnungszahl der Gleichung der Curve bedeutet, so dass

also die Beziehung besteht: $\frac{1}{PM} = \frac{n}{Pm}$. Maclaurin nannte das Segment Pm das harmonische Mittel aus den Segmenten zwischen dem festen Punkte und den Schnittpunkten mit der Curve. Diese Eigenschaften der algebraischen Curven leitet Maclaurin allerdings mit Hülfe einiger Sätze aus der Fluxionsrechnung ab. Er gibt dann ferner noch einige Theoreme über die Krümmung der Curven und construirt den Krümmungskreis einer Curve auf rein geometrischem Wege, ohne analytische Ableitung. Die zweite und dritte Section des Maclaurin'schen Werkes enthalten dann die Anwendungen der allgemeinen Theoreme des ersten Theiles auf Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung. Besonders interessant ist der zweite Theil, indem man in demselben eine Reihe von projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet findet, so die harmonische Theilung der von einem Punkt ausgehenden Transversalen, die Theorie des ein- und umschriebenen Vierecks, der Satz des Pascal, welcher sich übrigens auch noch an anderen Stellen der Maclaurin'schen Schriften ausgesprochen findet.

Wir haben hier noch einen continentalen Mathematiker anzuführen, der um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts seine ausgezeichneten Kräfte der reinen Geometrie, besonders aber der so lange vernachlässigt gebliebenen Perspective und darstellenden Geometrie gewidmet hat. Es ist diess **Joh. Heinrich Lambert** (Mühlhausen 1728 — Berlin 1777). Seine ausgezeichnete Abhandlung, betitelt: *Insigniores orbitae cometarum proprietates, 1761,* enthält die Ableitung verschiedener Eigenschaften der Kegelschnitte auf rein geometrischem Wege. Wichtiger aber ist sein 1759, und zum zweiten Mal 1774 erschienenes Werk: „Die freie Perspective", welches die Grundlehren der Central- und Parallelprojection ziemlich vollständig enthält und damit Lambert zu einem Begründer der darstellenden Geometrie und würdigen Vorläufer des grossen Monge macht.

Hiemit schliessen wir die Geschichte der Geometrie im achtzehnten Jahrhundert. Die grossen Analytiker dieser Zeit haben nur selten ihr Augenmerk auf die rein geometrische Behandlungsweise gerichtet, so dass sich uns keine Gelegenheit darbietet, erfolgreiche Arbeiten derselben in dieser Richtung hier anzuführen. Die epochemachenden Schöpfungen aber eines Monge, Carnot, Poncelet, Steiner etc. auf dem Gebiete der neueren und darstellenden Geometrie gehören schon in die Geschichte des neunzehnten Jahrhunderts.

4. Die Theorie der algebraischen Gleichungen und die Zahlentheorie.

Wir betreten hier ein Gebiet, auf dem sich, wie kaum auf einem andern die Anstrengungen der grössten Mathematiker vereinigt haben, und das dennoch am Ende des vorigen Jahrhunderts vielleicht vor allen mathematischen Disciplinen das am wenigsten vorgeschrittene und unvollkommenste Entwicklungsgemälde aufzuweisen hatte. Allerdings kannte man eine grosse Zahl höchst wichtiger Sätze über die Eigenschaften algebraischer Gleichungen, über die Anzahl der positiven, negativen und imaginären Wurzeln, über die Grenzen, zwischen welchen dieselben liegen, etc.; allein das eigentliche Ziel, nach welchem alle Mathematiker ihr Augenmerk richteten und mit Aufbietung aller verwendbaren Kräfte strebten, die algebraische Lösung der Gleichungen höheren Grades, war noch nicht gefunden, und in dieser Hinsicht war man also nicht viel weiter als zu den Zeiten eines Cardan und Vieta. Erst Abel gab den vielfachen Untersuchungen auf diesem Gebiete eine neue Richtung, indem er bekanntlich die Unmöglichkeit der algebraischen Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades nachwies (1824).

Im II. Capitel haben wir der Leistungen eines Descartes, Harriot, Hudde etc., in der Theorie und Lösung der algebraischen Gleichungen Erwähnung gethan; wir führten den wichtigen Satz von Descartes an, dass eine Gleichung so viele, aber nicht mehr positive Wurzeln haben kann, als Zeichenwechsel in derselben vorkommen, und denjenigen von Hudde, wie man erkennen kann, ob in einer Gleichung zwei gleiche Wurzeln vorkommen. Von diesem Mathematiker stammt auch die heutzutage gebräuchlichste und einfachste Methode der Auflösung der Gleichungen dritten Grades, nämlich durch Substitution von $y + z$ an die Stelle von x. (Man kennt den Weg nicht, auf welchem Ferreo und Tartaglia zur Lösung der cubischen Gleichung gelangten; Cardan gibt uns bloss die nach ihm benannte Formel und weist die Lösung, wie ich im ersten Theile angegeben habe, auf geometrischem Wege nach.)

Zur Zeit der Erfindung und ersten Ausbildung der Infinitesimalrechnung trat die Theorie der algebraischen Gleichungen etwas in den Hintergrund; doch verdankt man Leibnitz, Newton, Tschirnhausen, Maclaurin u. A. einige ausgezeichnete Sätze, besonders über die Anzahl und die Grenzen der reellen Wurzeln einer Gleichung. In letzterer Richtung haben wir früher schon den Zeitgenossen Descartes', De Beaune, erwähnt; von mehr practischer Bedeutung aber in der Theorie der Gleichungen ist die Newton'sche Regel für die Bestimmung der Grenzen der reellen Wurzeln, die man in seiner *Arithmetica universalis* (1707, I. Edit. pg. 252—57) findet. Dieselbe basirt auf dem Satze, dass, wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^m(x)$ eine ganze Function m^{ten} Grades mit ihren Ableitungen darstellen und diese Functionen für einen bestimmten Werth a von x positiv sind, sie es auch für jeden Werth $a + h$, welcher grösser als a ist, sein werden. Newton drückt nun die Regel auf folgende elementare Weise aus: Man multiplicire jedes Glied der gegebenen Gleichung mit dem Exponenten der betreffenden Potenz von x, und dividire das Resultat durch x. Dieselbe Operation mache man mit der so erhaltenen, um einen Grad niedrigeren Function von x und fahre so fort, bis man zu der Function gelangt, die x nur noch in der ersten Potenz enthält (d. h. zur m-1sten abgeleiteten). Dann wird diejenige Zahl, welche für x in die sämmtlichen Functionen (Ableitungen) bis und mit der ursprünglichen Gleichung eingesetzt, dieselben alle positiv macht, grösser sein als irgend eine der positiven Wurzeln der Gleichung. Man muss also so lange probiren, bis man einen Werth für x findet, der alle Ableitungen sammt der ursprünglichen Gleichung positiv macht. Um die Grenze der negativen Wurzeln zu finden, setzt Newton in jeder Ableitung und in der gegebenen Gleichung für x den Werth — x, wechselt das Zeichen der mit ungeraden Potenzen von x beginnenden Ableitungen und verfährt sodann wie im vorigen Falle. Dieselbe Regel zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln einer Gleichung, nur in etwas veränderter Form, hatte schon der französische Mathematiker Rolle in seiner 1690 erschienenen Algebra aufgestellt. — Newton gibt vorher noch eine andere Regel zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln einer Gleichung, die aber nicht so allgemein ist, indem sie sich nur auf solche Gleichungen anwenden lässt, die keine imaginären Wurzeln haben. Kennt man nämlich die Summe der Quadrate aller Wurzeln, die Summe der vierten Potenzen derselben, etc., so ist die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Wurzeln jedenfalls grösser als die grösste Wurzel der Gleichung. Noch näher gelangt man der grössten Wurzel, wenn man die vierte Wurzel aus der Summe der vierten Potenzen der Wurzeln auszieht, u. s. w. Die Summe der verschiedenen Potenzen der Wurzeln aber findet Newton auf folgende Weise: Bezeichnen p, q, r, s, t, etc. die Coefficienten der Gleichung vom zweiten Gliede an mit umgekehrtem Zeichen, so ist p die Summe der Wurzeln, $p^2 + 2q = a$ die Summe der Quadrate derselben, $pa + qp + 3r = b$ die Summe der Cuben, $pb + qa + rp + 4s = c$ die Summe der Biquadrate der Wurzeln, u. s. f. nach demselben, leicht zu verificirenden Gesetze, das übrigens schon der Niederländer **Albert Girard** ums Jahr 1620 entdeckt hatte. — Wir finden dieselben Regeln nebst einigen anderen interessanten Eigenschaften der Gleichungen auch in Maclaurin's *Treatise of algebra* (pag. 170, etc.)

Zu den wichtigsten Untersuchungen in der Theorie der Gleichungen gehören diejenigen über die Anzahl der imaginären Wurzeln. Hierüber gab Newton*) eine allerdings nicht vollständig genügende Regel, mit deren Beweis und Vervollkommnung sich später auch Maclaurin**), Stirling und De Gua***) beschäftigten, indem sie hauptsächlich die geometrische Darstellung der Gleichungen zu Hülfe nahmen. Dieselbe lautet folgendermaassen: Man bilde eine Reihe von Brüchen, deren Nenner successive die Zahlen von 1 bis zum Exponenten des höchsten Gliedes der Gleichung seien, die Zähler aber dieselben Zahlen in umgekehrter Ordnung. Dann dividire man jeden dieser Brüche durch den vorhergehenden und stelle die so erhaltenen Resultate der Reihe nach über das zweite bis vorletzte Glied der Gleichung. Man nehme nun irgend eines dieser mittleren Glieder, bilde sein Quadrat und multiplicire dasselbe mit dem darüberstehenden Bruche; ist das Resultat grösser als das Product aus dem vorhergehenden und dem nachfolgenden Gliede, so setze man unter jenes Glied ein positives Zeichen; ist dasselbe kleiner, ein negatives. Dieses mache man mit allen mittleren Gliedern, und setze ausserdem unter das erste und letzte Glied das positive Zeichen,

---

*) *Arithmetica univers. Edit. I. pag. 242.*

**) *Philosoph. Transactions, 1726—28 & 29.*

***) *Mémoires de l'acad. de Paris, 1741.*

so hat die Gleichung so viele imaginäre Wurzeln, als Zeichenwechsel in den unter die Gleichung gestellten Zeichen vorkommen. Hat man z. B. die Gleichung: $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$, so erhält man nach der obigen Regel die Reihe der Brüche $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$. Dividirt man den zweiten durch den ersten und den dritten durch den zweiten, was die beiden Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$ ergibt, und stellt dieselben über die beiden mittleren Glieder, so ist das Quadrat des zweiten Gliedes multiplicirt mit dem darüberstehenden Bruche gleich $\frac{16x^4}{3}$ und also grösser als das Product aus dem ersten und dritten Gliede, d. h. als $4x^4$; es kommt also unter das zweite Glied ein positives Zeichen zu stehen. Ferner ist das Quadrat des dritten Gliedes multiplizirt mit $\frac{1}{3}$, also $\frac{16x^2}{3}$ kleiner als $24x^2$, also gehört unter das dritte Glied ein negatives Zeichen.

Man hat also folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \\ x^3 & - & 4x^2 & + & 4x & - & 6 = 0. \\ + & & + & & - & & + \end{array}$$

Diese Gleichung hat demnach zwei imaginäre Wurzeln.

Die algebraische Lösung der höheren Gleichungen hat die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts vielfach beschäftigt; allein ihre Anstrengungen, in denen sich oft bewunderungswürdige Genialität und reiche Erfindungsgabe offenbarten, hatten bekanntlich nicht den gewünschten Erfolg. Wir haben hier zuerst einiger Versuche in dieser Hinsicht zu erwähnen, die theilweise noch dem siebzehnten Jahrhundert angehören, nämlich der Arbeiten eines Leibnitz und Tschirnhausen in diesem Gebiete. Von Ersterem wissen wir bloss aus einem seiner Briefe an Collins (1676), dass er sich mit der Reduction und Auflösung der höheren Gleichungen lange Zeit beschäftigt hat, indem seine diessbezüglichen Leistungen nie veröffentlicht worden sind; man kennt von ihm nur eine Methode *), die Wurzeln der cubischen Gleichung im irreductibeln Fall zu finden, welche darin besteht, dass man die beiden Cubicwurzeln in der Cardanischen Formel in unendliche Reihen entwickelt, in denen sich gegenseitig die imaginären Glieder aufheben; es handelt sich also schliesslich nur noch darum, die hieraus resultirende Reihe mit reellen Gliedern zu summiren, was natürlich in den wenigsten Fällen möglich sein würde. Bekanntlich hatte schon Bombelli in einzelnen Fällen die Lösung auf ähnliche Weise gefunden; die exacte trigonometrische Lösung aber wurde erst nach Herleitung der Sätze von Cotes und Moivre über die Winkeltheilung und über die Operationen mit complexen Zahlen entdeckt. Was seine übrigen nicht veröffentlichten Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen anbetrifft, so wissen wir aus dem genannten Briefe, dass er ungefähr den gleichen Weg wie Tschirnhausen eingeschlagen hatte, dessen Methode in den *Act. erud. Lips.* vom Jahre 1683 veröffentlicht wurde. Dieselbe besteht in der Wegschaffung aller Glieder einer Gleichung zwischen dem höchsten und niedersten (bekannten) Gliede, so dass schliesslich nur noch die sovielte Wurzel als der Grad der Gleichung anzeigt, aus einem bekannten Ausdrucke zu ziehen ist. Diese und einige andere weiter unten anzuführende Methoden für die Auflösung der Gleichungen dritten, vierten und höheren Grades hat Lagrange in seiner ausgezeichneten Abhandlung: *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* **) und ebenso in der XIII. Note seines *Traité de la résolution des équations numériques* (Edit. III. 1826) zur Vergleichung und

*) *Commerc. epist.* pag. 63, etc.

**) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1770 et 71.*

näheren Kritik ausführlich neben einander gestellt. Ich gebe hier in möglichster Kürze die Tschirnhausen'sche Methode wegen ihrer grossen Allgemeinheit und Eleganz und zur Vergleichung mit den bekannteren Methoden von Tartaglia, oder besser Hudde und Ferrari.

Es ist bekannt, dass man irgend ein Glied einer Gleichung mit der Unbekannten x wegschaffen kann durch Substitution von $y + a$ an die Stelle von x, wo y eine neue Unbekannte und a eine unbestimmte Grösse bedeutet, durch deren geeignete Annahme eben jenes Glied zum Verschwinden gebracht werden kann. Tschirnhausen fand nun, dass man ebenso zwei Glieder einer Gleichung zum Verschwinden bringen könne, indem man $x^2 = bx + a + y$ setze, ferner drei Glieder durch die Substitution $x^3 = cx^2 + bx + a + y$, u. s. f., wo c, b, a, etc. jene unbestimmten Coëfficienten bedeuten, deren Anzahl so gross sein muss als die Zahl der wegzuschaffenden Glieder. Allgemein handelt es sich also, wenn die Gleichung m^{ten} Grades:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots\dots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

gegeben ist und wenn r mittlere Glieder derselben weggeschafft werden sollen, darum, zwischen der gegebenen Gleichung und der folgenden:

$$x^r = a_{r-1} x^{r-1} + a_{r-2} x^{r-2} + \dots\dots + a_1 x + a_0 + y$$

x zu eliminiren. Diese Elimination wird als Endgleichung in y eine Gleichung vom m^{ten} Grade ergeben; r mittlere Glieder dieser Gleichung setzt man nun gleich Null, was uns r Gleichungen zur Bestimmung der r unbekannten Coëfficienten a_0, a_1, a_2 .... a_{r-1} gibt. Diese Elimination, die mit Hülfe der symmetrischen Functionen bewerkstelligt werden kann, lässt sich nach Tschirnhausen leicht und sehr zweckmässig auf folgende Weise ausführen. Wir nehmen hier als Beispiel die Auflösung der Gleichung dritten Grades:

Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0.$$

Zur Wegschaffung der beiden mittleren Glieder setzen wir $x^2 = bx + a + y$. Hieraus folgt, $x^3 = bx^2 + ax + yx$, oder indem man den Werth von x^2 hierin substituirt: $x^3 = (b^2 + a + y)\,x + b\,(a + y)$. Setzt man nun diese Werthe von x^3 und x^2 in die gegebene Gleichung ein, so folgt:

$$(b^2 + a + y + mb + n)\,x + (b + m)\,(a + y) + p = 0$$

und hieraus in rationaler Form:

$$x = -\frac{(b + m)\,(a + y) + p}{b^2 + a + y + mb + n}.$$

Setzt man endlich diesen Werth für x in die Gleichung $x^2 = bx + a + y$ ein, so erhält man als Endgleichung in y die Gleichung dritten Grades:

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0,$$

wo die Coëfficienten A, B, C folgende Werthe haben:

$$A = 3a - mb - m^2 + 2n.$$

$$B = 3a^2 - 2\,a\,(mb + m^2 - 2n) + nb^2 + b\,(mn - 3p) + n^2 - 2\,m\,p.$$

$$C = a^3 - a^2\,(mb + m^2 - 2n) - p\,(b^3 + mb^2 + nb + p) + a\,\{nb^2 + b\,(m\,n - 3p) + n^2 - 2\,mp\}.$$

Indem man nun A und B gleich Null setzt, erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten a und b, und die Gleichung: $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ ist nun zurückgeführt auf die folgende:

$y^3 + C = 0$, welche uns die drei Wurzeln gibt:

$$y = \sqrt[3]{-C},\ y = \alpha\,\sqrt[3]{-C},\ y = \beta\,\sqrt[3]{-C},$$

wo α und β die complexen cubischen Wurzeln der Einheit sind. Die Bestimmung von a und b hängt in diesem Falle von einer Gleichung ersten und von einer solchen zweiten Grades ab; hat man diese Werthe, so setzt man dieselben mit den gefundenen Werthen für y in den obigen rationalen gebrochenen Ausdruck für x ein und erhält so drei verschiedene Werthe für x, welches die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. — Tschirnhausen hat diese Methode auch auf die Gleichungen vierten Grades angewandt, deren Lösung ihm in der That, besonderer Umstände wegen, noch gelungen ist. Er brauchte nämlich nur das zweite und das vierte Glied einer Gleichung vierten Grades wegzuschaffen, denn die Gleichung $x^4 + bx^2 + d = 0$ kann wie eine quadratische Gleichung gelöst werden. Denn hätte er nöthig gehabt, alle drei mittleren Glieder wegzuschaffen, so hätte er die vorgelegte Gleichung mit einer Hülfsgleichung von der Form: $x^3 = cx^2 + bx + a + y$ in Verbindung bringen und aus beiden x eliminiren müssen. Hieraus wäre eine Gleichung vom 4^{ten} Grade in y von der Form:

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

hervorgegangen, wo die Coëfficienten A, B, C, etc. Functionen der unbestimmten Grössen a, b, c sind, und zwar A eine Function vom ersten, B eine solche vom zweiten, C eine solche vom dritten Grade, u. s. f. Um daher die Grössen a, b und c aus den Gleichungen: $A = 0$, $B = 0$ und $C = 0$ zu bestimmen, wäre er auf eine Resolvente vom $1.\ 2.\ 3^{ten} = 6^{ten}$ Grade gestossen, also auf eine höhere als die vorgelegte Gleichung selbst. Brauchte er aber nur das zweite und das vierte Glied zu eliminiren, so hatte er für die Bestimmung von a und b die beiden Gleichungen $A = 0$ und $C = 0$, von denen die erste vom 1^{ten}, die zweite vom 3^{ten} Grade ist; die Resolvente war also nur vom dritten Grade. Im Allgemeinen ist die Resolvente einer vollständigen Gleichung m^{ten} Grades, wenn man alle Glieder zwischen dem ersten und letzten wegschaffen will, vom Grade $1.\ 2.\ 3 \ldots (m-1)$; für die Gleichung 5^{ten} Grades also vom Grade $1.\ 2.\ 3.\ 4 = 24$.

Die allgemeine Lösung der Gleichung vierten Grades nach der Tschirnhausen'schen Methode gelingt nun allerdings, wie Lagrange in der citirten Abhandlung gezeigt hat, auch in dem Falle, wo alle mittleren Glieder weggeschafft werden, wo also die Resolvente vom 6ten Grade ist; denn diese lässt sich auf eine solche vom 3ten Grade zurückführen. Dieser Umstand ist auch der Grund, wesshalb Lagrange noch keineswegs an der allgemeinen Lösung der Gleichung 5ten Grades verzweifelt hatte, indem er jene Resolvente vom 24sten Grade auf eine niedrigeren Grades reducirbar hielt, und wesshalb er gerade die Tschirnhausen'sche Methode als die zur Erreichung dieses so sehnlichst gewünschten, wichtigen Fortschrittes geeignetste erachtete.

Um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts erfanden Euler und **Bezout** (Nemours 1730 — Gatinois 1783) neue Methoden zur Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades, denen sie ihrerseits ebenfalls die Fähigkeit zuschrieben, auf die höheren Gleichungen ausgedehnt werden zu können. Dieselben unterscheiden sich von der Tschirnhausen'schen nur der Form nach, denn alle diese Methoden haben eigentlich, wie auch Lagrange sehr klar nachgewiesen hat, denselben Ursprung und Verlauf. Es handelt sich bei allen darum, die Auflösung der gegebenen Gleichung auf diejenige einer andern zurückzuführen, deren Wurzeln Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.

Die Euler'sche Methode*) zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades besteht darin, y zwischen den beiden Gleichungen $x = a + by + cy^2$ und $y^3 = d$ zu eliminiren und die hieraus hervorgehende Gleichung dritten Grades in x Glied für Glied mit der gegebenen zu vergleichen, woraus dann die unbestimmten Grössen a, b, c und d bis auf eine einzige, die man nun beliebig annehmen kann, erhalten werden können. Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung präsentiren sich also in der Form:

$$x = a + b\sqrt[3]{d} + c\sqrt[3]{d^2}$$

*) *Novi comment. Petrop.* Tom. IX. 1764.

und es handelt sich mithin nur darum, die unbestimmten Coefficienten a, b, c und d zu berechnen. Die Bezout'sche Methode *) unterscheidet sich nur dadurch von der Euler'schen, dass der willkürliche der vier Coefficienten, z. B. d, von vornherein = 1 angenommen wird, während Euler erst im Laufe der Rechnung denjenigen = 1 setzt, der ihm zum Ziele zu gelangen der geeignetste scheint. Diese Methode dehnen Euler und Bezout auch auf die Gleichungen vierten Grades aus, indem sie in diesem Falle y zwischen den Gleichungen $x = a + by + cy^2 + dy^3$ und $y = e^4$ eliminiren. Für die Gleichungen fünften Grades aber reicht die Methode nicht mehr aus, indem die Elimination der Grössen a, b, c etc. aus den Bestimmungsgleichungen auch hier auf eine Endgleichung vom vierundzwanzigsten Grade führt, deren Reduction auf einen niedrigeren als den fünften Grad nur in speciellen Fällen möglich ist. Auch Euler und Bezout verzweifelten noch keineswegs an einer solchen Reduction; sie sahen vielmehr die Unmöglichkeit der Lösung in der ungeheuren Schwierigkeit der complicirten Elimination und standen desshalb von der weiteren Ausführung ab.

Ausser den Methoden von Tschirnhausen, Euler und Bezout für die Auflösung der Gleichungen IV. Grades sind hier noch zu erwähnen die ältere von Descartes und diejenige von Lagrange; Ferrari's Methode hatten wir schon im ersten Bande angegeben. Die Erstere besteht darin, dass die allgemeine Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

als das Product zweier Gleichungen des zweiten Grades:

$$x^2 + fx + g = 0 \text{ und}$$
$$x^2 + hx + k = 0$$

betrachtet werden kann, deren unbestimmte Coefficienten dadurch erhalten werden, dass man die beiden Gleichungen

*) *Mémoires de l'acad. de Paris*, 1762 et 65.

mit einander multiplicirt und die Coefficienten der hieraus resultirenden Gleichung vierten Grades den entsprechenden der vorgelegten Gleichung gleichsetzt. Aus den dadurch hervorgehenden vier Gleichungen lassen sich die vier Unbekannten f, g, h, k bestimmen. Wir sehen hiernach, dass Descartes die Gleichung vierten Grades mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten löst. Die Resolvente, auf die er bei Bestimmung der Coefficienten stösst, ist vom sechsten Grade, lässt sich aber leicht auf eine solche vom dritten Grade reduciren.

In der oben citirten Abhandlung Lagrange's in den Berliner Memoiren, welche sehr tiefgehende und interessante Untersuchungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen enthält, stellt der Verfasser schliesslich den Satz auf, dass das allgemeine Princip der algebraischen Auflösung der Gleichungen darin beruhe, eine Resolvente zu finden, deren Wurzeln die Form haben:

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \text{etc.}$$

wo x_1, x_2, $x_3 \ldots$ die Wurzeln der vorgelegten Gleichung und α eine der sovielten Wurzeln der Einheit, als der Grad der Gleichung beträgt, bedeuten. Auf diesem Satze beruht auch die Lagrange'sche Methode der Auflösung der Gleichung vierten Grades und in demselben glaubte Lagrange noch das wahre Princip der allgemeinen Auflösung der Gleichungen entdeckt zu haben. Ich führe hier seine eigenen Worte an, welche uns zeigen, wie hoffnungsvoll der grosse Mathematiker damals noch nach einem fünfzig Jahre später als unerreichbar erwiesenen Ziele sah. „*Voilà, si je ne me trompe, les vrais principes de la résolution des équations, et l'analyse la plus propre à y conduire; tout se réduit, comme l'on voit, à une espèce de calcul des combinaisons, par lequel on trouve a priori les résultats auxquels on doit s'attendre. Il serait à propos d'en faire l'application aux équations du cinquième degré et des degrés supérieurs dont la résolution est jusqu'à présent inconnue; mais cette* *application demande un trop grand nombre de recherches et de combinaisons, dont le succès est encore d'ailleurs fort douteux, pour que nous puissons quant à présent nous livrer à ce travail; nous espérons cependant pouvoir y revenir dans un autre temps et nous nous contenterons ici d'avoir posé les fondements d'une théorie qui nous paraît nouvelle et générale.*" (Mém. de Berlin, 1771, pag. 235).

In der Auflösung der Gleichung vierten Grades verfährt Lagrange etwas anders, als es das oben angegebene allgemeine Verfahren vorschreibt, indem er den Wurzeln der Resolvente nicht die lineare Form

$$t = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$

die aus der obigen hervorgehen würde, wenn man als die vierte Wurzel der Einheit -1 nähme, gibt, sondern die Form:

$$y = x_1 x_3 + x_2 x_4,$$

welche durch Vertauschung der Wurzeln x_1, x_2, x_3 und x_4 nur drei verschiedene Werthe annehmen kann und desshalb durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt ist. Sind y_1, y_2 und y_3 diese drei Werthe, so hat die Gleichung in y die Form:

$$y^3 - (y_1 \pm y_2 + y_3)\, y^2 + (y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)\, y - y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Setzt man hierin für y_1, y_2 und y_3 ihre Werthe als Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung, nämlich:

$$y_1 = x_1 x_3 + x_2 x_4,\ y_2 = x_1 x_4 + x_2 x_3,\ y_3 = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

so werden die Coefficienten der obigen Gleichung in y symmetrische Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung und können desshalb durch die Coefficienten dieser letzteren, welche a, b, c und d sein mögen, rational ausgedrückt werden. Die Resolvente in y erhält hiernach folgende Gestalt:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)\, y - (a^2 - 4b)\, d - c^2 = 0.$$

Hat man nun die drei Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so lassen sich die Wurzeln der vorgelegten leicht bestimmen. Es sei nämlich y_1 eine Wurzel der Resolvente, so hat man:

$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = y_1$$
$$x_1 x_3 \,.\, x_2 x_4 = d$$

Es sind also $x_1 x_3$ und $x_2 x_4$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$z^2 - y_1 z + d = 0.$$

Bezeichnen wir dieselben mit z_1 und z_2, so ist:

$$x_1 x_3 = z_1 \text{ und } x_2 x_4 = z_2.$$

Es ist aber auch:

$$x_2 x_4 (x_1 + x_3) + x_1 x_3 (x_2 + x_4) = -c, \text{ also:}$$
$$z_2 (x_1 + x_3) + z_1 (x_2 + x_4) = -c; \text{ ferner:}$$
$$x_1 + x_3 + x_2 + x_4 = -a.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen für $x_1 + x_3$ und $x_2 + x_4$ die Werthe:

$$x_1 + x_3 = \frac{c - az_2}{z_2 - z_1} \text{ und } x_2 + x_4 = \frac{az_1 - c}{z_2 - z_1}.$$

Jetzt haben wir $x_1 + x_3$, $x_2 + x_4$, $x_1 x_3$ und $x_2 x_4$ ausgedrückt durch die Coefficienten der vorgelegten Gleichung, woraus wir leicht die einzelnen Wurzeln erhalten können.

Wir sehen, dass diese Auflösungsmethode darauf beruht, für die Wurzeln der Resolvente eine solche Function der Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu substituiren, welche weniger verschiedene Werthe annehmen kann, als der Grad der Gleichung beträgt. — Dieses sind kurz die Resultate der Lagrange'schen Untersuchungen über die allgemeine Lösung der algebraischen Gleichungen. Wie er dieses Princip auf höhere Gleichungen auszudehnen suchte, und wie er hierin verschiedene Wege einschlug, je nachdem der Grad der Gleichung eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl war, kann ich hier nicht des Weitern erörtern und muss desshalb auf die citirten Schriften verweisen.

Um dieselbe Zeit, wie Lagrange diese Untersuchungen der Berliner Academie vorlegte, las der bedeutende französische Mathematiker **Vandermonde** (Paris 1735—1796) in der Pariser Academie eine Abhandlung über denselben Gegenstand vor, in welcher er zu ähnlichen Resultaten wie Lagrange und zwar auf ganz anderem Wege gelangt war *).

Zur vollständigen Auflösung der sog. binomischen Gleichungen von der Form: $x^n \pm a = 0$, sowie speciell des irreductibeln Falles, führten, wie schon bemerkt worden ist, erst die Sätze von Cotes und Moivre über die Kreistheilung und die complexen Zahlen. Das berühmte Theorem von Cotes, das derselbe in seiner *Harmonia mensurarum* (1722) ohne Beweis aufgestellt hat, lautet folgendermassen:

„Theilt man (Fig. XXXI) den Umfang eines Kreises vom Radius a in 2n gleiche Theile, PP_1, $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ etc. und zieht man vom Punkte O, der auf dem Durchmesser PP_n um die Grösse $x = OC$ vom Centrum entfernt liegt, die Linien OP, OP_1, OP_2 etc. nach den Theilpunkten, so ist das Product aller derjenigen Linien, die nach geraden Theilpunkten gehen, gleich $a^n - x^n$, wenn der Punkt O im Innern des Kreises gelegen ist, und gleich $x^n - a^n$, wenn derselbe ausserhalb des Kreises liegt; das Produkt derjenigen Linien aber, die nach ungeraden Theilpunkten gehen, ist gleich $a^n + x^n$.“ Denn es ist, wie leicht zu verificiren, $OP = a - x$, $OP_2{}^2 = OP_2 \,.\, OP_{2n-2} = a^2 - 2ax \cos\frac{2\pi}{n} + x^2$, $OP_4{}^2 = OP_4 \,.\, OP_{2n-4} = a^2 - 2ax \cos\frac{4\pi}{n} + x^2$, u. s. w. Demnach ist das Product $OP \,.\, OP_2 \,.\, OP_4 \ldots\ldots OP_{2n-4} \,.\, OP_{2n-2} = (a-x)$ $(a^2 - 2ax \cos\frac{2\pi}{n} + x^2)\,(a^2 - 2ax \cos\frac{4\pi}{n} + x^2) \ldots\ldots$ $(a^2 - 2ax \cos\frac{(2n-2)\pi}{n} + x^2) = a^n - x^n$ (wenn n nämlich eine ungerade Zahl ist). Ganz gleich verfährt man bei den

---

*) Man vergl. *Mémoires de l'acad. de Paris*, *1771*, und *Traité de la résol. des équat. numér.* Note XIII.

übrigen Fällen und man sieht hieraus, wie das Problem der Kreistheilung mit der Zerlegung der binomischen Gleichungen in Factoren des zweiten Grades zusammenhängt. Dieses wichtige Theorem wurde später von Moivre und Joh. Bernoulli bewiesen und weiter ausgedehnt.

Ueber die algebraische Auflösung der Gleichungen, besonders aber über ihre allgemeinen Eigenschaften, über die symmetrischen Functionen der Wurzeln und über eine Reihe von zahlentheoretischen Problemen hat der ausgezeichnete englische Mathematiker **Edward Waring** ein inhaltsreiches Werk herausgegeben, betitelt: *Meditationes algebraicae*, in erster Ausgabe 1762, in zweiter 1770 und in dritter 1782 erschienen. Wir finden darin auch eine Auflösungsmethode der Gleichungen vierten Grades, die sich von der Euler'schen nicht wesentlich unterscheidet (Ed. III. pag. 167 etc.).

Die Elimination von Unbekannten aus gegebenen Gleichungen hatte zu der Zeit, als man sich vorzugsweise mit der Lösung der höheren algebraischen Gleichungen beschäftigte, eine grosse Bedeutung erlangt. An der möglichsten Vereinfachung derselben arbeiteten eine Reihe von hervorragenden Mathematikern; wir erwähnen hier nur Gabriel Cramer*), Vandermonde**) und Bezout***). Die Arbeiten dieser Männer auf diesem Gebiete fanden später ihre Fortsetzung in der Ausbildung einer neuen mathematischen Disciplin, der Theorie der Determinanten, als deren Begründer wir hauptsächlich Lagrange, Gauss, Cauchy und Jacobi zu nennen haben.

Schon frühzeitig richteten sich die Bemühungen der Mathematiker auf die numerische Auflösung der Gleichungen, für die wir heutzutage verschiedene Methoden kennen, die uns in allen denjenigen Fällen zum Ziele führen,

---

*) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algèbr.* 1750.

**) *Mémoires de l'acad. de Paris*, 1772.

***) *Théorie générale des équations algèbr.* 1779.

wo die algebraische Auflösung scheitert, und die desshalb von grösserer practischer Bedeutung sind. Schon Vieta und Harriot hatten sich mit diesem Gegenstande beschäftigt; die erste rationelle Methode aber verdanken wir Newton. Dieselbe wurde zuerst in der 1685 erschienenen Algebra von Wallis veröffentlicht und dann 1736 zum zweiten Male in Newton's *Methodus fluxionum* und unterscheidet sich wenig von der heutzutage unter dem Namen der *regula falsi* bekannten Methode. Dieselbe setzt die Kenntniss des angenäherten Werthes einer Wurzel voraus. Newton bestimmte diesen Näherungswerth nach seiner oben schon besprochenen Methode der Aufsuchung der Grenzen der Wurzeln und fuhr dann auf folgende Weise fort:

Es sei a ein Näherungswerth einer Wurzel der Gleichung: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots = 0$. Man setze $x = a + p$, wo also p eine sehr kleine Grösse repräsentirt, und substituire diesen Werth für x in die vorgelegte Gleichung und ordne das Resultat nach Potenzen von p, so verwandelt sich die Gleichung in:

$X + X'p + X''p^2 + \ldots\ldots p^m$, wo X, X', X'' etc. Functionen von a sind und zwar, wenn man die gegebene Gleichung mit f(x) bezeichnet, $X = f(a)$, $X' = \frac{df(a)}{da}$, $X'' = \frac{d^2f(a)}{da^2}$, etc.

Da p sehr klein sein wird, so darf man die höheren Potenzen desselben vernachlässigen. Berücksichtigt man also nur die erste, so verwandelt sich die obige Function von p in

$$X + pX' = 0$$

und hieraus folgt:

$$p = -\frac{X}{X'},$$

Es ist also $b = a - \frac{X}{X'}$ ein neuer Näherungswerth der Wurzel. Verfährt man mit diesem auf gleiche Weise, wie mit dem ersten, d. h. setzt man in die gegebene Gleichung für x den Werth $b + q$, ordnet das Resultat nach Potenzen von q, so erhält man, indem man die höheren Potenzen vernachlässigt, für q den Ausdruck:

$$q = -\frac{Y}{Y'},$$

wo Y und Y' resp. gleich f(b) und f'(b) sind. Es wäre also $c = b - \frac{Y}{Y'}$, ein dritter Näherungswerth der gesuchten Wurzel, und so fährt man weiter, bis die Correctionen p, q, r etc. für die erforderliche Genauigkeit genügend klein werden. — Dieselbe Methode mit geringen Variationen fanden ungefähr zu der nämlichen Zeit auch Raphson und Halley. Der Erstere veröffentlichte dieselbe in seiner *Analysis aequationum universalis* (1690) und der Letztere in den *Philos. Trans.* vom Jahre 1694.

Von andern Methoden, die im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts für die numerische Auflösung der höheren Gleichungen gefunden wurden, sind hier noch zu erwähnen diejenigen von Daniel Bernoulli, die wir schon im VII. Cap. bei Betrachtung der recurrirenden Reihen kennen gelernt haben, und von Lagrange. Sowohl Newton's als Bernoulli's Methode haben den Fehler, dass sie nicht in allen Fällen richtige Resultate liefern, sondern nur für den Fall der grössten oder kleinsten Wurzel unbedingt anwendbar sind. Diese Unvollkommenheiten zu heben, war der Zweck von Lagrange's Arbeiten in dieser Richtung. Dieselben erschienen zuerst in den Memoiren der Berliner Academie für die Jahre 1767 und 68 und später (1798) in einem eigenen Bande unter dem Titel: *Traité de la résolution des équations numériques,* etc. Lagrange's Methode ist kurz folgende:

Es sei die Gleichung gegeben:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + N = 0, \text{(a)}$$

und man kenne den angenäherten ganzzahligen Werth p einer Wurzel derselben, so dass $x > p$ und $< p + 1$ ist, so setze man $x = p + \frac{1}{y}$, wo also $y > 1$ ist. Substituirt man diesen Werth für x in die Gleichung (a), multiplicirt hierauf mit y^m und ordnet das Resultat nach Potenzen von y, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \ldots\ldots + N' = 0, \text{(b)}$$

Diese Gleichung muss wenigstens eine reelle Wurzel > 1 haben. Hat man den angenäherten ganzzahligen Werth derselben nach den bekannten Methoden gefunden, er sei q, so setze man

$$y = q + \frac{1}{z},$$

und substituire diesen Werth für y in die Gleichung (b), so erhält man, nachdem man mit z^m multiplicirt hat, eine neue Gleichung von der Form:

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \ldots\ldots + N'' = 0, \text{(c)}$$

von der man wieder einen angenäherten ganzzahligen Wurzelwerth aufsucht. Es sei dieser r, so setze man $z = r + \frac{1}{u}$ substituire diesen Werth von Neuem in die Gleichung c und verfahre wie oben, so wird man, indem man so fortfährt, sich immer mehr der gesuchten Wurzel nähern und es ist sofort ersichtlich, dass der Werth dieser Wurzel durch den Kettenbruch dargestellt wird:

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

welcher schliesst, wenn einer der ganzzahligen Werthe p, q, r etc. eine genaue Wurzel der betreffenden Gleichung werden sollte, in jedem andern Falle aber unendlich ist. Für die Ausdehnung dieser Methode auf diejenigen Fälle, wo zwei Wurzeln der Gleichung denselben ganzzahligen Näherungswerth haben und auf die Bestimmung der complexen Wurzeln muss ich auf die angeführte Abhandlung verweisen.

Die Zahlentheorie und die mit ihr eng verbundene unbestimmte Analytik nahmen schon im Alterthum ihren Ursprung, und zwar die erstere, wenn auch in ihren primitivsten Anfängen, schon unter den ältesten Pythagoräern, die letztere erst im 4. Jahrhundert n. Chr., mit dem einzigen griechischen Algebristen, mit Diophant. Das mystisch-speculative Mittelalter war der Zahlentheorie geneigter als allen übrigen mathematischen Disciplinen, aber ohne den wissenschaftlichen Ausbau derselben nur einigermassen zu fördern. Mit Vieta und Fermat begann erst die eigentliche Entwicklungsperiode dieses Theiles der Mathematik; sie wurde aber durch die grossen Entdeckungen des 17. Jahrhunderts, besonders durch die rapiden Fortschritte des Infinitesimalcalculs fast gänzlich in den Hintergrund gedrängt, bis sie sich gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts unter Euler und Lagrange und später unter Legendre, Gauss und Jacobi zur vollen Blüthe entfaltete.

Die grosse Zahl vereinzelter und zerstreuter Abhandlungen über Zahlentheorie, die besonders Euler und Lagrange in den Petersburger, Berliner und andern Memoiren veröffentlicht haben und der Mangel eines grösseren, zusammenhängenden Werkes über diesen Zweig der Wissenschaft im 18. Jahrhundert, erschweren in hohem Grade eine übersichtliche Darstellung ihrer Fortschritte während jener Zeit. Erst Legendre und Gauss gaben durch ihre epochemachenden Werke, der erstere durch seinen *Essai sur la théorie des nombres* (1798) und der letztere durch seine *Disquisitiones arithmeticae* (1801) der Zahlentheorie das Anrecht auf den Namen einer selbstständigen principiellen Wissenschaft. Ich muss es hier unterlassen, näher auf diese Werke einzutreten; ich führe im Folgenden nur kurz die hauptsächlichsten zahlentheoretischen Sätze an, die im Laufe des 18. Jahrhunderts von verschiedenen Mathematikern, besonders aber von Euler und Lagrange aufgestellt und bewiesen wurden.

Wir haben im I. Cap. schon der Arbeiten Fermat's in der Zahlentheorie Erwähnung gethan. Leider sind dieselben nicht auf uns gekommen; wir kennen bloss aus den Noten zur Ausgabe des Diophant von Bachet und aus Briefen an seine Freunde den Wortlaut der wichtigsten von ihm gefundenen Sätze, die dann später von Euler und Lagrange bewiesen worden sind; wie z. B. der Satz, dass der Ausdruck $a^{p-1} - 1$ immer durch p theilbar, oder wie es in der Zahlentheorie ausgedrückt wird, dass $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p) ist, wenn p eine Primzahl und a prim zu p ist*); ferner, dass jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist**); dass jede ganze Zahl die Summe von drei oder weniger Trigonalzahlen, von vier oder weniger Quadraten***), von fünf oder weniger Pentagonalzahlen u. s. w. ist; dass die Summe oder Differenz zweier Cuben kein Cubus sein kann. Lagrange bewies den sog. Wilson'schen Satz, der von dem Engländer John Wilson entdeckt und zuerst von Waring in seinen *Meditationes algebraicae* veröffentlicht wurde, nämlich dass die Zahl $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, (p-1) + 1$ durch p theilbar sei, wenn p eine Primzahl ist†).

Die Fundamentalsätze aus der Theorie der quadratischen Formen verdanken wir ebenfalls Euler und Lagrange. Der Erstere bewies††) den Satz, dass jede Primzahl von der Form $8n + 1$ zugleich durch die drei Formen $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$ und $x^2 - 2y^2$ darstellbar ist; Lagrange zeigte†††), dass jede Primzahl von der Form $8n + 3$ nur auf eine einzige Weise durch die Form $x^2 + 2y^2$ darstellbar ist; dass

---

*) *Novi Comment. Petrop. Tom. I.* (*Euler*).

**) *Ibid. Tom. V.*

***) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1770.* (*Lagrange*).

†) *Ibid. 1771.*

††) *Novi Comment. Petrop. Tom. I. et IV.*

†††) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1775.*

jede Primzahl von der Form $8n + 7$ sich nur auf eine einzige Art durch die Form $x^2 - 2y^2$ darstellen lässt; u. s. w. Dieses sind nur einige wenige Sätze aus den wichtigen Untersuchungen, die Lagrange in dem zuletzt citirten Bande der Berliner Memoiren über die linearen und quadratischen Formen der Divisoren von $x^2 + ay^2$ veröffentlicht hat, und welche Legendre mit Hilfe seines Reciprocitätsgesetzes wesentlich ergänzte. Dieses Gesetz, eines der bedeutungsvollsten der Zahlentheorie, wurde von Legendre zuerst in den Memoiren der Pariser Academie vom Jahre 1785 aufgestellt und bewiesen. Dasselbe lautet: Sind p und q zwei beliebige ungerade Primzahlen und bedeuten die Symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ resp. die Reste der Division von $p^{\frac{q-1}{2}}$ durch q und von $q^{\frac{p-1}{2}}$ durch p, die niemals etwas anderes als $+1$ oder -1 sein können, so hat man die Beziehung:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

wenn nicht beide Primzahlen von der Form $4x + 3$ sind; dagegen die Beziehung:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$$

wenn beide Zahlen von letzterer Form sind, welche beide Beziehungen sich auch in die eine zusammenziehen lassen:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

Wir haben schon im IV. Cap. des ersten Theiles auf die Mannigfaltigkeit der Methoden hingewiesen, die Diophant zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen angewandt hat. Aus der grossen Menge solcher Aufgaben, die sich in seinem Werke gelöst finden, ist es uns kaum möglich, einen allgemeinen, principiellen Gesichtspunkt herauszufinden, der ihn in der Behandlung solcher Probleme geleitet hätte. Es handelt sich bei ihm nicht nur um die ganzzahligen Lösungen unbestimmter Gleichungen, nicht um die Anzahl der möglichen Lösungen, nicht um die Methode, aus einer gegebenen Lösung andere zu finden; sondern er begnügt sich damit, in jedem speciellen Falle durch Anwendung glücklicher Kunstgriffe irgend eine dem Probleme entsprechende rationale Lösung zu finden (vide I. Thl. pag. 116). Dieser Mangel jeder Systematik in dem der Neuheit des Inhalts wegen sonst so epochemachenden Werke erlaubt uns nicht, vom Standpunkt der Zahlentheorie des 18. Jahrhunderts aus Diophant als den Entdecker der Auflösung der unbestimmten Gleichungen hinzustellen. Diese Ehre gebührt einem der frühesten Algebristen aus der Periode des Wiedererwachens der Wissenschaften, dem Commentator des Diophant, Bachet de Meziriac (1587—1638). Allerdings haben neuere Forschungen (vide I. Thl. pg. 136) dargethan, dass die Indier schon im VI. Jahrhundert Methoden für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten und zweiten Grades kannten, die sich von derjenigen Bachet's bezüglich der Gleichungen ersten Grades nur wenig unterscheiden; allein der französische Mathematiker hat jedenfalls seine Methode selbstständig gefunden. Dieselbe wurde veröffentlicht in dem Werke: „*Problèmes plaisants et délectables*“ (Lyon 1612) und besteht im Wesentlichen darin, dass man nach der Regel der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Divisors zweier Zahlen den grösseren der Coefficienten von x und y durch den kleineren dividirt, dann den kleineren durch den erhaltenen Rest, diesen Rest durch den neuen Rest u. s. f. bis man zu dem Rest 1 kommt, was immer der Fall ist, da die beiden Coefficienten prim zu einander vorausgesetzt werden. Die hierbei erhaltenen Quotienten geben uns eine Reihe von unter einander abhängigen unbestimmten Gleichungen, in deren letzte wir für die eine Unbekannte der Reihe nach alle ganzen Zahlen einzusetzen haben, um rückwärts schliessend alle ganzzahligen Werthe von x und y zu erhalten. Es sei die

Gleichung gegeben: $ax + by = c$, wo a der grössere Coefficient sei, so gibt uns die fortgesetzte Division von a durch b die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ b &= rq_1 + r_1 \\ r &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + 1 \end{aligned}$$

(Wir nehmen an, bei der vierten Division stosse man auf den Rest 1.) Aus der gegebenen Gleichung folgt: $y = \frac{c-ax}{b}$, oder für a seinen obigen Werth eingesetzt,

$$y = \frac{c - bqx - rx}{b} = - qx + \frac{c - rx}{b}.$$

Damit nun y eine ganze Zahl werden kann, muss $\frac{c - rx}{b} = t$, d. h. gleich einer ganzen Zahl sein. Wir haben also jetzt die erste Bestimmungsgleichung: $y = - qx + t$. Die obige Bedingung $\frac{c - rx}{b} = t$, gibt uns $bt + rx = c$. Verfahren wir mit dieser Gleichung auf dieselbe Weise, wie mit der gegebenen, so erhalten wir unter Berücksichtigung des obigen Werthes für b die zweite Bestimmungsgleichung $x = - q_1t + t_1$. Wir würden auf diese Weise der Reihe nach die fünf Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} y &= - qx + t \\ x &= - q_1t + t_1 \\ t &= - q_2t_1 + t_2 \\ t_1 &= - q_3t_2 + t_3 \\ t_2 &= - r_2t_3 + c \end{aligned}$$

Geben wir in der letzten t_3 irgend einen ganzzahligen Werth, so erhalten wir rückwärts schliessend zwei ganzzahlige Werthe von x und y. Hat man nun irgend ein ganzzahliges Werthepaar, α, β von x und y gefunden, so folgen aus den Gleichungen:

$$x = \alpha + nb$$
$$y = \beta - na$$

sofort alle übrigen, wenn wir für n der Reihe nach alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ setzen.

Dieselbe Methode mit geringer Variation gab Euler in seiner „Anleitung zur Algebra" (1770). Eine andere Auflösung, auf die wir hier nicht näher eintreten werden, beruht auf der Theorie der Kettenbrüche.

Die Bestimmung der sämmtlichen Auflösungen der Gleichung zweiten Grades $ax^2 + 1 = y^2$ aus einem gegebenen Werthepaare gab schon Brouncker; Euler dehnte hierauf diese Methode auf die allgemeinere Gleichung $ax^2 + bx + c = y^2$ aus; Lagrange endlich bewies*), dass die Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ in ganzen Zahlen immer möglich sei und fand eine elegante Methode für die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades $x^2 - Ay^2 = Bz^2$, auf welche er die übrigen Formen dieser Gleichungen zurückführte**). Diese Auflösung besteht darin, durch gewisse Transformationen die Coefficienten A und B so zu reduciren, dass der eine von ihnen gleich 1 wird, wodurch die Lösung auf schon bekannte Fälle zurückgeführt ist. Ich muss den Leser hiefür auf die betreffenden Arbeiten verweisen.

Diess sind einige der wesentlichsten Fortschritte, die in der Zahlentheorie und unbestimmten Analytik bis zu dem Zeitpunkte gemacht wurden, da Legendre und Gauss in ihre Entwicklung einzugreifen begannen. Von da an eröffnete sich für diese Disciplinen eine neue vielversprechende Epoche, und in der That hat die Zahlentheorie, unterstützt durch das gewaltige Hilfsmittel der Analysis, bereits eine solche Entwicklungsstufe erreicht, dass sie, um

*) *Miscell. Taurin. Tom. IV. et*
Mémoires de l'acad. de Berlin, 1767.

**) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1767.*

vollständig erfasst zu werden, ein eigenes, tiefes Studium erfordert, und desshalb auch als selbstständige mathematische Disciplin neben die andern als gleichberechtigt gesetzt werden darf.

5. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In dem Jahrhunderte, das man mit vollem Recht das mathematische nennen könnte, in welchem die Errungenschaften der Alten durch die rasch auf einander folgenden Entdeckungen der Descartes'schen Analysis, der neueren Geometrie uud der Differentialrechnung auf eine so bewunderungswürdige Höhe gebracht wurden: eine Entwicklung, wie sie wohl kaum eine zweite Wissenschaft in so kurzem Zeitraume aufzuweisen hat, in dem siebenzehnten Jahrhundert, nahm eine neue mathematische Disciplin ihren Ursprung, die im Laufe der Zeit in nahe, man darf wohl sagen nächste Beziehung zu den Verhältnissen und Erscheinungen des menschlichen Lebens, namentlich auch zu den socialen, treten sollte, die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Die Anwendung der Mathematik auf die Gesetze der Wahrscheinlichkeit ist ein neues Beleg dafür, wie diese abstracteste aller Wissenschaften selbst in diejenigen Sphären menschlichen Denkens, die auf den ersten Anblick der wissenschaftlichen Strenge und Gesetzmässigkeit entbehren und nur schwer dem mathematischen Formalismus sich unterziehen zu wollen scheinen, mit Erfolg eingedrungen ist, und dieselben zu eigentlichen Wissenschaften erst gestempelt hat. Es scheint selbst dem Jünger der mathematischen Wissenschaften, der sich zum ersten Male an das Studium der Wahrscheinlichkeitsrechnung wagt, ich möchte sagen geheimnissvoll, wie die Mathematik sich der scheinbar gesetzlosen und zufälligen Erscheinungen der Natur und des menschlichen Handelns zu bemächtigen und dieselben in gesetzliche Formen zu kleiden vermöge; wie vielmehr müssen da in dem mit dem Wesen der Mathematik weniger Vertrauten Zweifel aufsteigen über die Anwendungsfähigkeit dieser Wissenschaft auf die Theorie der Wahrscheinlichkeiten und wie vielmehr müssen desshalb den Laien die Erfolge in Erstaunen setzen, die die Anwendung der Mathematik auf diesem Gebiete erzielt hat. „— — *Ideo res hactenus erravit incerta; nunc autem quae experimento rebellis fuerat, rationis dominium effugere non potuit; eam quippe tanta securitate in artem per geometriam reduximus, ut certitudinis ejus particeps facta, jam audacter prodeat; et sic matheseos demonstrationes cum aleae incertitudine jungendo, et quae contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem suam accipiens stupendum hunc titulum jure sibi arrogat: aleae geometria*“. (Pascal, in einem Briefe an die franz. Academie der Wissenschaften.)

Die beiden berühmten französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts, Pascal und Fermat, deren Namen mit den grossen mathematischen Errungenschaften jener Zeit, der Differentialrechnung, neueren Geometrie und Zahlentheorie, so eng verknüpft sind, treten auch hier wieder an die Spitze der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, als die eigentlichen Begründer derselben. Den Anlass zu einer eingehenderen Beschäftigung mit diesen Theorien gab ein Problem, das ein gewisser Chevalier de Méré ums Jahr 1654 Pascal vorlegte, der es seinerseits wieder Fermat und Roberval mittheilte und welches lautet: Von zwei Spielern hat jeder eine Anzahl Punkte gewonnen; sie trennen sich, ohne das Spiel zu Ende zu bringen; wie muss in diesem Falle der Einsatz unter die beiden vertheilt werden?“ Pascal und Fermat lösten das Problem, jeder auf eigene Weise; ihr hierauf bezüglicher Briefwechsel ist theilweise noch vorhanden und findet sich im IV. Bande der Pariser Ausgabe von Pascals Werken (1819). Fermat's Lösung ist mathematischer, sie basirt auf der Theorie der Combinationen, diejenige Pascal's mehr auf einfacher, rationeller Ueberlegung. Er schliesst so: „Angenommen, Jeder der beiden Spieler habe 32 Thaler gesetzt, und es seien bereits drei Punkte gespielt. Der Erste habe zwei gewonnen, der Zweite einen. Gewinnt der erste den vierten Punkt, so hat er das ganze Spiel gewonnen und zieht 64 Thaler; gewinnt aber der zweite den vierten Punkt, so sind sie gleich und Jeder zieht seinen Einsatz. Brechen sie aber das Spiel ab, ohne den vierten Punkt zu spielen, so sagt der Erste zum Zweiten: 32 Thaler sind mir sicher, auch wenn ich den vierten Punkt verliere; für die andern 32 Thaler sind die Chancen für uns beide gleich; wir theilen diese desshalb zu gleichen Theilen. Ich erhalte also die 32, die mir sicher sind und 16 von den letzteren, also im Ganzen 48, oder $^3/_4$ der ganzen Summe und du 16 oder $^1/_4$. — Ein zweiter Fall wäre folgender: Der Erste habe zwei Punkte gewonnen, der Zweite keinen. Gewinnt der Erste den dritten Punkt, so zieht er alle 64 Thaler; gewinnt aber der Zweite, so befinden sich die Spieler im vorhergehenden Falle, so dass der Erste 48 und der zweite 16 Thaler ziehen würde. Brechen sie aber das Spiel ab, ohne den dritten Punkt zu spielen, so sagt der Erste zum Zweiten: 48 Thaler sind mir sicher, auch wenn ich den dritten Punkt verliere; für die andern 16 Thaler sind die Chancen für uns beide gleich. Ich erhalte also die 48, die mir sicher sind und die Hälfte von den 16, macht im Ganzen 56, oder $^7/_8$ der ganzen Summe, du mithin $^1/_8$ derselben, oder 8 Thaler.“ — F e r m a t löst den letzteren Fall auf folgende Weise: Spielen zwei Spieler ein Spiel mit 3 Punkten, so sind 8 Variationen möglich; entweder gewinnt er alle drei, oder gewinnt zwei und verliert den dritten, oder gewinnt den ersten und den dritten und verliert den zweiten, u. s. f. Diess kann man durch die Anzahl der Variationen der Buchstaben a und b zur dritten Klasse ausdrücken; es sind also die Fälle möglich: aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb. Wenn nun das Spiel so steht, dass der Erste zwei Punkte und der Zweite noch keinen gewonnen hat, so sind dem ersten

Spieler 7 von den obigen 8 Fällen, dem zweiten nur der letzte günstig, um das ganze Spiel zu gewinnen. Der Erste zieht daher $^7/_8$, der Zweite $^1/_8$ des Gesammteinsatzes. — Fermat dehnte diese Methode auch auf den Fall von drei Spielern aus, was Pascal anfänglich nicht für richtig hielt, später aber vollkommen anerkannte.

In nächster Beziehung zu Pascal's Lösung dieser Probleme steht sein *Traité du triangle arithmétique* (Paris 1665), worunter er eine Tafel der figurirten Zahlen verstand, und zwar enthielt die erste Horizontalzeile dieser Tafel lauter Eins, die zweite die natürlichen, die dritte die Trigonal-, die vierte die Pyramidalzahlen u. s. f. Von diesem *Triangle arithmétique* machte dann Pascal verschiedene Anwendungen, so unter Anderem auch auf die Combinationslehre. Er zeigte, dass die Trigonalzahlen nichts anderes sind, als die Anzahl der Combinationen zur zweiten Klasse aus 2, 3, 4 u. s. f. Elementen, die Pyramidalzahlen die Anzahl der Combinationen zur dritten Klasse aus 3, 4, 5... Elementen, etc. — Die mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in so naher Beziehung stehende Combinationslehre wurde nach Pascal hauptsächlich von Leibnitz*), Wallis**), Jakob Bernoulli***), de Montmort†) und Andern gepflegt und weiter ausgebildet; ich kann aber hier auf die einzelnen Schriften nicht näher eintreten.

Ungefähr zu gleicher Zeit mit Pascal und Fermat beschäftigte sich auch Huyghens mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Seine hierüber veröffentlichte Schrift trägt den Titel: *De ratiociniis in ludo aleae,* und erschien als Anhang zu Schooten's *Exercitationes mathematicae*, 1657. Dieselbe enthält die Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den einfachsten Anwendungen auf das

*) *Dissertatio de arte combinatoria 1666.*

**) *Algebra, 1685.*

***) *Ars conjectandi, 1713.*

†) *Essai d'analyse sur les jeux de hazard, (1708).*

oben erwähnte Problem der Punkte, und dasjenige des Würfels. Der wichtigste darin vorkommende Satz ist wohl der folgende: Wenn ein Spieler p Chancen hat, die Summe a zu gewinnen und q Chancen die Summe b zu gewinnen, so hat er Anspruch auf die Summe $\frac{pa + qb}{q + q}$. Wenn er also für beide Summen gleiche Chancen hat, so ist sein Anspruch $\frac{1}{2}(a + b)$. Die Abhandlung enthält sonst, mit Ausnahme einiger Probleme über den Würfel, keine wesentlich neue Gesichtspunkte; ihr Hauptwerth besteht darin, dass sie zuerst eine systematischere Begründung und analytische Formulirung der Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat.

In dieser Hinsicht steht Huyghens Arbeit aber noch weit hinter dem in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung epochemachenden Werke Jakob Bernoulli's, der *Ars conjectandi*, zurück. Dasselbe erschien erst 1713, acht Jahre nach des Verfassers Tode. Es besteht aus vier Theilen: der erste enthält Huyghens Abhandlung: *de ratiociniis in ludo aleae* nebst einem Commentar, der zweite die Combinationslehre, der dritte die Lösungen einer Reihe von Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der vierte die Anwendung dieser Theorieen auf Fragen der Moral und Politik.

Einer der wichtigsten Sätze, welche der erste Theil enthält, ist der folgende: Sind $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens und Nichteintretens eines Ereignisses bei einem einmaligen Versuche, so dass also $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 1$ ist, so repräsentirt die Summe aller Glieder des entwickelten Binoms $\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)^n$ vom ersten bis und mit dem Gliede, welches die Factoren $\left(\frac{b}{a}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{n-m}$ enthält, die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss bei n Versuchen m Mal eintrete. Ferner stellt Bernoulli den Satz auf, dass die Anzahl der Arten, auf welche die Zahl m mit n Würfeln erhalten werden kann, gleich ist dem Coefficienten von x^m in der Entwicklung des Polynoms $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$. — Der vierte Theil enthält unter Anderem das Theorem, welches den Namen des Bernoulli'schen trägt und so ausgesprochen werden kann: Bezeichnen r und s die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens und Nichteintretens eines Ereignisses bei einem einmaligen Versuche, so dass also wieder $r + s = 1$ ist, so ist die Summe der $2x + 1$ Glieder der Entwicklung von $(r + s)^n$, welche das grösste Glied zu ihrem mittleren Gliede haben, gleich der Wahrscheinlichkeit, dass in n Versuchen das Ereigniss zwischen $m - x$ und $m + x$ Mal eintrete, wenn nämlich jenes grösste Glied das m^{te} ist.

Zu derselben Zeit mit Jakob Bernoulli widmeten sich zwei französische Mathematiker mit Erfolg der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich Pierre Remond de Montmort (1678—1719) und Abraham de Moivre. Ihre Arbeiten erschienen theilweise noch vor Bernoulli's *Ars conjectandi*; allein wir wissen, dass sich der letztere Mathematiker schon bedeutend früher mit diesem Zweige der Wissenschaft beschäftigt hatte (vide *Journal des Savants*, 1685). Montmort's Hauptwerk trägt den Titel: *Essai d'analyse sur les jeux de hazard,* und erschien zu Paris im Jahre 1708 und in zweiter Auflage 1713. Es ist in vier Theile getheilt; der erste handelt von der Combinationslehre, der zweite und dritte über Karten- und Würfelspiele und der vierte enthält eine Reihe verschiedenartiger Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im zweiten Theile behandelt Montmort das Spiel, das von den Franzosen „*Treize*“ genannt wurde und auf welches sich folgendes interessante Problem bezieht (pag. 130—143, Ed. II): Es seien 13 Karten, mit den Nummern 1—13 versehen, unter einander gemischt; man ziehe nun eine Karte nach der andern heraus, so ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass wenigstens ein Mal die Zahl, die die Karte trägt, mit der Ordnungsnummer der Ziehung übereinstimme. Diese Wahrscheinlichkeit findet Montmort gleich

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!},$$

wo n die Anzahl der Karten bezeichnet. Der Beweis, den Montmort von dieser Lösung gibt, ist von Nicolaus Bernoulli, mit welchem Jener über diese Untersuchungen einen lebhaften Briefwechsel führte. Nicolaus Bernoulli veröffentlichte ebenfalls eine interessante Abhandlung über Wahrscheinlichkeitsrechnung, betitelt: *Specimina artis conjectandi ad quaestiones juris applicatae,* 1709, welche hauptsächlich über die Wahrscheinlichkeit des menschlichen Lebens und über die der Unschuld eines Angeklagten handelt. — Ein anderes wichtiges, von Montmort, hauptsächlich aber von Moivre in seiner Abhandlung *De mensura sortis* *), sowie in seinem grössern Werke: *The doctrine of chances*, 1718, (II. Edit. 1738) behandeltes Problem ist das der „Dauer des Spiels“ (*Duration of play*), welches folgendermassen ausgesprochen werden kann: „Ein Spieler A habe m Marken, ein anderer B deren n; ihre Wahrscheinlichkeiten, in einem einzelnen Spiel zu gewinnen, verhalten sich beziehungsweise wie a zu b; Jeder, welcher ein Spiel verliert, muss dem Gewinnenden eine Marke geben. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass, nachdem oder bevor eine bestimmte Zahl von Spielen gespielt worden sind, der eine Spieler sämmtliche Marken des andern gewonnen habe.“ Wir können hier nicht auf die ziemlich verwickelte Lösung dieses Problems (durch Moivre mit Hülfe

---

*) *Philosoph. Transactions, Tom. XXVII. 1711.*

seiner Sätze über die recurrirenden Reihen) eintreten und verweisen desshalb auf die citirten Schriften, sowie auf Todhunter's *History of the mathematical theory of probability, Cambridge* und *London,* 1865, welches Werk die Hauptparthieen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in erschöpfender Weise behandelt. Moivre's Abhandlung *De mensura sortis* enthält eine Reihe von Problemen über Karten- und Würfelspiele, von denen einige sich schon in Montmort's Werk gelöst vorfinden, wesshalb zwischen den beiden Mathematikern bisweilen kleinere Zwistigkeiten über Prioritätsansprüche sich erhoben, die aber keineswegs zu vollständigem Bruche führten. Beide Männer waren geistvoll und auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleich gut bewandert; ihre Methoden keineswegs die gleichen, sondern jeder nach eigener Art vorgehend, so dass Verdächtigungen nach der einen oder andern Seite hier vollkommen ungerechtfertigt sind. Eine Abtheilung von De Moivre's Werk: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis,* betitelt: *Responsio ad quasdam criminationes*, enthält eine ziemlich ausführliche Darlegung der Controversen zwischen Montmort und de Moivre. Indem wir diese beiden Mathematiker verlassen, können wir nicht umhin, noch besonders den Einfluss hervorzuheben, den ihre Hauptwerke auf die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeübt haben, und hauptsächlich in Hinblick auf de Moivre's *Doctrine of chances* müssen wir hier der Ansicht Todhunter's, die derselbe am Ende seiner Betrachtung der Moivre'schen Arbeiten kundgibt, beipflichten, dass die Theorie der Wahrscheinlichkeiten diesem Mathematiker mehr verdankt als allen Andern, ausser Laplace.

Ohne näher auf ihre Werke eintreten zu können, haben wir hier von Mathematikern der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts, die sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigten, noch zu nennen: die Franzosen Nicole*)

*) *Histoire de l'acad. de Paris, 1730.*

und Buffon*) und den Engländer Thomas Simpson**).

Um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts treffen wir in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf jene Namen, die in allen Gebieten des mathematischen Wissens die hervorragendste Stelle einnehmen, auf Daniel Bernoulli, Euler, D'Alembert und Lagrange.

Die erste Abhandlung, die Daniel Bernoulli über diesen Gegenstand veröffentlichte, führt den Titel: *Specimen theoriae novae de mensura sortis****). Diese Arbeit bietet besonderes Interesse wegen der neuen Auffassungsweise des bei einem Spiel zu erwartenden Gewinnstes, oder einfach der Erwartung (engl. *expectation*, franz. *espérance*). Die mathematische Erwartung nämlich ist nichts anderes, als das Product der Wahrscheinlichkeit, eine Summe zu gewinnen, in die Summe selbst. So wenn z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass Jemand eine Summe von 60 Thalern gewinne, gleich $\frac{1}{3}$ ist, so ist seine Erwartung, oder sein Anspruch gleich 20 Thaler. Nun unterscheidet aber Daniel Bernoulli zwischen mathematischer und moralischer Erwartung. Es ist nämlich ein und dieselbe Summe nicht für Jedermann von derselben Wichtigkeit, für einen Armen hat ein Pfenning mehr Werth als für einen Reichen und in dieser Bedeutung führt Bernoulli den Begriff der moralischen Erwartung ein, er zieht den relativen Werth des Geldes in Berücksichtigung. Auch Laplace schenkt diesem Gegenstand seine Aufmerksamkeit in seiner *Théorie analytique des probabilités* und unterscheidet daselbst zwischen *fortune physique* und *fortune morale.* Man nehme an, eine Person besitze eine Summe Geldes gleich x, dessen unendlich kleiner Zuwachs sei dx, so ist nach Bernoulli der relative oder

---

*) *Histoire de l'acad. de Paris, 1733, et Essai d'arithmétique morale, 1777.*

**) *The nature and laws of chances, 1740.*

***) *Commentar. acad. Petrop. Tom. V. 1738.*

moralische Werth dieses Zuwachses gleich $\frac{kdx,}{x}$ d. h. direct proportional dem wirklichen, physischen Zuwachs und umgekehrt proportional dem wirklichen Vermögen. Bezeichnen wir den moralischen Zuwachs mit dy, so ist also

$$dy = \frac{kdx}{x},$$

und integrirt,

$$y = k. \log x + C = k. \log \frac{x}{a}.$$

Hier ist nach Laplace x das *fortune physique* und y das *fortune morale* (bei *Bernoulli emolumentum*). Bernoulli macht hievon einige Anwendungen, die interessanteste ist diejenige auf das berühmte Petersburger Problem, so genannt, weil Daniel Bernoulli seine Untersuchungen darüber zuerst in den Commentarien der Petersburger Academie veröffentlicht hat. Schon Nicolaus Bernoulli hatte dasselbe Montmort in folgender Form vorgelegt: A verspricht dem B einen Thaler, wenn dieser mit einem Würfel beim ersten Wurf sechs wirft, zwei Thaler, wenn er erst beim zweiten Wurf sechs wirft, drei Thaler, wenn er beim dritten Wurf sechs wirft, u. s. f. Es soll die Erwartung von B bestimmt werden. Montmort findet dieselbe gleich der Summe der Reihe:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{4}{6^4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Daniel Bernoulli spricht das Problem etwas anders aus, nämlich: A wirft eine Münze in die Luft; wenn der Kopf beim ersten Wurf oben liegt, so erhält er von B einen Thaler, wenn der Kopf erst beim zweiten Wurf oben erscheint, zwei Thaler, wenn er erst beim dritten Wurf oben liegt, vier Thaler, beim vierten Wurf acht Thaler, u. s. f. Nach Montmort's Formel wäre nun die Erwartung von A gleich

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{8}{2^4} + \ldots \text{ in inf.}$$

d. h. gleich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \text{ in inf.} = \infty.$$

A müsste also B eine unendlich grosse Summe geben, wenn dieser auf solche Weise mit ihm spielen sollte. Um dieses Paradoxon zu heben, nimmt Bernoulli zu der moralischen Erwartung die Zuflucht. Er findet mit Hülfe derselben die Summe, welche Jemand, der ein Capital von a Thalern besitzt, A ohne Nachtheil für seine Erwartung geben kann, oder das *fortune physique* von A, gleich

$$\left(a+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(a+2\right)^{\frac{1}{4}}\left(a+4\right)^{\frac{1}{8}}\left(a+8\right)^{\frac{1}{16}} \ldots\ldots - a.$$

Je grösser also a ist, desto grösser wird auch dieses *fortune physique*; bei a = 100, ist es ungefähr 4 1/3, für a = 1000 ungefähr 6 u. s. f., also immerhin eine sehr geringe Summe. a kann auch als die Summe aufgefasst werden, mit welcher A zu spielen beginnt, also das Spiel riskirt.

Mehrere andere Mathematiker, wie Cramer*), Fontaine, Beguelin**), D'Alembert, waren nicht einverstanden mit dieser Bernoulli'schen Umgehung des Paradoxons und suchten desshalb das Problem von andern Gesichtspunkten aus aufzufassen, allein ohne mehr Klarheit in die Sache zu bringen. Besonders war es D'Alembert, der in dieser Angelegenheit, sowie in der ganzen Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung seinen ausserordentlichen, kritischen Geist hervortreten liess. Er wandte sich hauptsächlich gegen die bis dahin unangefochtenen Grundprincipien dieses Calcüls***). So hält er die nach den gewöhn-

---

*) In einem Briefe an Nikolaus Bernoulli, in der citirten Abhandlung von Daniel Bernoulli.

**) *Mémoires de l'acad. de Berlin*, 1767.

***) *Encyclopédie*, *art.* „*croix ou pile*“, *et Opuscules mathématiques*, *Tom. II*, *1761*.

lichen Regeln gleich $^3/_4$ gefundene Wahrscheinlichkeit, dass in zwei Würfen mit einer Münze einmal der Kopf oben liege, nicht für richtig, sondern setzt dieselbe gleich $^2/_3$. Anstatt nämlich so zu schliessen: Unter den sämmtlichen möglichen Fällen, deren es vier gibt, nämlich: KK, KZ, ZK, ZZ, wo K Kopf und Z Zahl bedeutet, sind die drei ersten günstige und nur der letzte ungünstig, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Kopf oben liege, gleich $^3/_4$, urtheilt D'Alembert so: Wenn beim ersten Wurf schon der Kopf oben liegt, so ist das Spiel beendigt und kein zweiter Wurf nöthig; die beiden ersten Fälle lassen sich also in einen zusammenziehen und man hat so die drei möglichen Fälle K, ZK, ZZ, unter denen zwei günstige sind, also die Wahrscheinlichkeit gleich $^2/_3$. — Betreffs des Petersburger Problems macht D'Alembert die Einwendung, dass die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze in einem Wurf den Kopf zu werfen, nicht immer gleich $\frac{1}{2}$ bleibe, sondern dass sie um so kleiner werde, je öfter hinter einander schon der Kopf oben erschienen sei, was die Erfahrung zur Genüge zeige, und in diesem Sinne unterscheidet er zwischen *metaphysischer* und *physischer* Wahrscheinlichkeit; die letztere ist also gleichsam die durch die Erfahrung beschränkte *metaphysische* Wahrscheinlichkeit. — Nicht den geringsten Theil seiner Thätigkeit auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung wandte Daniel Bernoulli der Anwendung derselben auf die Bestimmung der Sterblichkeit der Pockenkranken zu. Eine Abhandlung hierüber trägt den Titel: *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir* *). Ausser dem mathematischen Werthe, den diese Arbeit darbietet, ist sie in socialer Beziehung noch insofern von Wichtigkeit, als die Vertreter

*) *Histoire de l'acad. de Paris*, 1760.

des Impfzwanges in ihr ein Hauptbeleg für ihre Ansicht finden. Damals, als die Kuhpockenimpfung erst in der Einführung begriffen war, wurden nach Daniel Bernoulli in einem Jahre ungefähr 1/8 aller derjenigen Personen, die die Krankheit früher noch nicht gehabt hatten, von den Pocken befallen, und ungefähr 1/8 dieser Kranken starb; während heutzutage ein viel geringerer Procentsatz von dieser Krankheit ergriffen wird. D'Alembert machte auch hierin Bernoulli Opposition*), indem er der Impfung keinen so günstigen Einfluss zuschreiben wollte, obgleich er sich nicht absolut dagegen aussprach.

In einer Abhandlung, betitelt: *Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda***), versucht Daniel Bernoulli, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf das Gebiet der Methode der kleinsten Quadrate hinüber zu ziehen. Er findet das beste Resultat aus einer Anzahl von Beobachtungen dasjenige, welches das Product der Wahrscheinlichkeiten aller Fehler zu einem Maximum macht. Für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers aber gibt er den Ausdruck $\sqrt{r^2 - e^2}$, wo r eine Constante und e einen Fehler bezeichnen. Wir werden weiter unten sehen, dass hauptsächlich Lagrange sich mit dieser Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt hat.

Obgleich die Wahrscheinlichkeitsrechnung Euler keine ausserordentliche Leistung zu verdanken hat, so kann doch sein Name in der Geschichte derselben nicht weggelassen werden. Seine Abhandlungen enthalten meistens Anwendungen dieses Calcüls auf die Lebensversicherungen und Rentenrechnung; so z. B. diejenige, betitelt: *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre*

---

*) *Opuscules mathém. Tom. II.*

**) *Acta acad. Petrop 1777. Pars. I.*

*humain**), ferner: *Sur les rentes viagères***), etc. Auch über Lotterieen hat Euler einige Memoiren veröffentlicht, wie *Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise****), *Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium*†), etc. In der letzten Abhandlung bestimmt Euler die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lotterie, die aus n Loosen besteht, von denen jedes Mal r gezogen werden, nach x Ziehungen alle Nummern gezogen sein werden. Dieselbe bietet auch noch ein Interesse durch die Worte, mit welchen Euler die feindlichen Angriffe D'Alembert's auf die Theorie der Wahrscheinlichkeiten von sich weist; er sagt im Anfang der Abhandlung: — — *Neque me deterrent objectiones Illustris D'Alembert, qui hunc calculum suspectum reddere est conatus. Postquam enim summus geometra studiis mathematicis vale dixit, iis etiam bellum indixisse videtur, dum pleraque fundamenta solidissime stabilita evertere est aggressus. Quamvis enim hae objectiones apud ignaros maximi ponderis esse debeant, haud tamen metuendum est, inde ipsi scientiae ullum detrimentum allatum iri.*

Es ist hier noch ein Haupteinwand D'Alembert's anzuführen, den er gegen eines der Grundprincipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhebt; er sagt u. A. ††): „Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ verhält sich zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ wie np Thaler zu mp Thaler. Ich bin damit einverstanden; also ist $\frac{1}{m}$. mp Thaler gleich $\frac{1}{n}$. np Thaler; das ist auch noch richtig; es soll also die Erwartung

*) *Mémoires de l'acad. de Berlin, pour 1760.*

**) *Ibid.*

***) *Ibid. pour 1765.*

†) *Opuscula analytica, Tom. II. 1785.*

††) *Opuscules math. Tom. IV.*

eines Spielers, welcher die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ hat, mp Thaler zu gewinnen, gleich sein der Erwartung eines Spielers, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ hat, np Thaler zu gewinnen. Das ist was ich verneine; ich sage, dass die Erwartung für denjenigen grösser ist, welcher die grössere Wahrscheinlichkeit hat, obgleich die zu erwartende Summe kleiner ist, und dass man nicht zaudern wird, die Erwartung eines Spielers, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, 1000 Thaler zu gewinnen, derjenigen eines andern Spielers vorzuziehen, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2000}$ hat, 1,000,000 Thaler zu gewinnen.“ — Es ist wahr, dass diese Reflexionen auf den ersten Anblick etwas Verlockendes an sich haben und man wird uns entschuldigen, wenn wir es unterlassen, eine Kritik dieser Ansichten beizufügen, um so mehr als D'Alembert selbst im Unklaren war, welche Rechenschaft er sich darüber zu geben hatte; er bemerkt weiter unten: „*Vous me demanderez peut-être quels sont les principes qu'il faut, selon moi, substituer à ceux dont je révoque en doute l'exactitude? Ma réponse sera celle que j'ai déjà faite; je n'en sais rien, et je suis même très porté à croire que la matière dont il s'agit, ne peut être soumise, au moins à plusieurs égards, à un calcul exact et précis, également net dans ses principes et dans ses résultats.*“

Lagrange widmete seine ausserordentlichen analytischen Hülfsmittel ebenfalls der Theorie der Wahrscheinlichkeiten. Eine seiner wichtigsten Abhandlungen, worauf wir oben schon hingewiesen haben, betrifft die Ausgleichung der Beobachtungsfehler und ist betitelt: *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, etc.**) Dieselbe enthält 10 Pro-

*) *Miscell. Taur. Tom. V.*

bleme; im fünften bestimmt Lagrange den wahrscheinlichsten, mittleren Fehler aus n Beobachtungen. Es seien p, q, r, s etc. die Fehler, und die Anzahl der Fälle, in welchen dieselben vorkommen können, seien beziehungsweise gleich a, b, c, d etc. Ist dann M der Coefficient von x^{μ} in der Entwicklung von $(ax^p + bx^q + cx + \ldots)^n$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehler gleich μ, der mittlere Fehler daher gleich $\frac{\mu}{n}$ ist, gleich

$$\frac{M}{(a + b + c + \ldots)^n}$$

Es handelt sich nun darum, den Werth von μ zu finden, für welchen M am grössten ist, indem man von der Voraussetzung ausgeht, dass der kleinste Fehler die grösste Wahrscheinlichkeit hat.

Die folgenden Probleme der Abhandlung beziehen sich auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der mittlere Fehler zwischen gegebenen Grenzen liege, worauf ich nicht weiter eintreten kann. Eine andere Arbeit*) Lagrange's enthält Anwendungen der linearen Gleichungen mit endlichen und partiellen Differenzen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, worüber Laplace schon vorher einige Untersuchungen veröffentlicht hatte**).

Condorcet's (Ribemont 1743 — Bourg-la-Reine 1794) geniale Auffassungsweise und philosophische Gedankentiefe traten wie in seinen socialen und politischen Schriften, so auch auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung glänzend hervor. Er wandte dieselbe hauptsächlich auf politische und juridische Probleme an, wie z. B. in dem Werke: *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (1785). Seine Auseinandersetzungen und Schlüsse sind oft dunkel und machen das Werk äusserst schwer verständlich, wie über-

*) *Nouveaux mémoires de l'acad. de Berlin, 1775.*

**) *Mémoires présentés par divers Savans Tom. VI. et VII.*

haupt seine mathematischen Schriften der Euler-Lagrange'schen Klarheit und Präcision entbehren. Das genannte Werk zerfällt in fünf Theile; der erste enthält die für die folgenden Entwicklungen nothwendigen theoretischen Sätze, deren einer folgendermassen lautet: Es seien $2q + 1$ Stimmende, sämmtlich von gleichwerthigem Urtheil; es sei ferner v die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stimmender richtig urtheilt, und e die Wahrscheinlichkeit, dass er unrichtig urtheilt, so dass also $v + e = 1$ ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Majorität für das richtige Urtheil herauskommt, gleich der Summe aller Glieder in der Entwicklung von $(v + e)^{2q+1}$ vom ersten bis zum Gliede $v^{q+1} e^q$, beide mitgerechnet. — Condorcet hat noch einige andere Abhandlungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung veröffentlicht; dieselben erschienen in den Memoiren der Pariser Academie für die Jahre 1781--84.

Der Hauptbeförderer der Theorie der Wahrscheinlichkeiten ist **Laplace** *). Er veröffentlichte über diesen Gegenstand eine Reihe von Abhandlungen in den *Mémoires présentés par divers Savans,* in den *Mémoires de l'acad. de Paris* und in der *Connaissance des Temps,* deren wesentlichste Resultate er in dem ausgezeichneten Werke: *Théorie analytique des probabilités (I. Edit. Paris 1812, III. Edit. 1820)* zusammengestellt hat. Dasselbe *(III. Edit.)* zerfällt

*) Pierre Simon Laplace, einer der genialsten Mathematiker, wurde geboren am 23. März 1749 zu Beaumont-en-Auge, und starb zu Paris am 5. Mai 1827. Schon frühe beschäftigte er sich neben seinen theologischen und philosophischen Studien mit Mathematik. Aus seiner Vaterstadt nach Paris übergesiedelt, wurde er zum Examinator beim k. Artilleriecorps und bald darauf zum Mitgliede der Academie ernannt. Später war er Professor der Mathematik an der *Ecole normale.* Während der Revolution und des Kaiserreiches nahm er mehrmals an politischen Operationen Theil und war unter Napoleon's Consulat kurze Zeit Minister des Innern. Seine vollendetsten Werke sind seine *Mécanique céleste* und seine *Théorie analytique des probabilités.* Daneben hat man von ihm noch eine grosse Zahl vereinzelter Abhandlungen.

in drei Haupttheile, eine Einleitung, die Laplace auch als selbstständiges Werk herausgegeben hat, unter dem Titel: *Essai philosophique sur les probabilités*, ein erstes Buch: *Du calcul des fonctions génératrices*, und ein zweites Buch: *Théorie générale des probabilités.*

Die Einleitung verdient ihren Titel im vollsten Maasse; sie ist vielleicht eines der tiefsten und gedankenreichsten Werke, die auf dem Gebiete der Mathematik veröffentlicht worden sind. Die Entwicklung der ganzen Theorie der Wahrscheinlichkeiten ohne das Hülfsmittel der Analysis, die Anwendung derselben auf die interessantesten Fragen des politischen und socialen Lebens, kurz, die feine Behandlungsweise des so reichen und alle Wissenszweige berührenden Stoffes, machen diese Einleitung zu einer wahrhaft philosophischen Abhandlung. Schade, dass die heutigen Philosophen das Wesen der mathematischen Wissenschaften nicht mehr humanistisch genug finden! Sie könnten aus dem Studium solcher Werke die Möglichkeit einer innigen Berührung rein abstracter Grundsätze und Theorien mit den mannigfaltigsten Verhältnissen und Actionen des Lebens auf's Schönste erkennen. — Die Hauptcapitel der Einleitung sind diejenigen, welche über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturphilosophie, auf Wahlen und Beschlüsse von Versammlungen, auf richterliche Urtheile, auf Mortalität, Lebensversicherungen und Rentenanstalten, über die Täuschungen in der Schätzung der Wahrscheinlichkeit und über die Geschichte dieses Calcüls handeln. Dieser letztere Abschnitt, obgleich sehr kurz, gibt ein äusserst prägnantes Bild der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Pascal bis auf Laplace.

Das erste Buch: *Calcul des fonctions génératrices,* enthält die analytischen Hülfsmittel für die nachfolgende Theorie der Wahrcheinlichkeiten. Laplace wendet diesen Calcül hauptsächlich bei der Integration der Gleichungen mit endlichen Differenzen an, welche in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wesentliche Rolle spielen. Der zweite Theil dieses Buches handelt über die approximative Bestimmung einer Reihe von analytischen Ausdrücken, namentlich von bestimmten Integralen, die in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten vorkommen.

Das zweite Buch: *Théorie générale des probabilités,* besteht aus eilf Capiteln. Das erste enthält die allgemeinen Grundprincipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung; das zweite behandelt die bekannteren Probleme dieses Calcüls, wie die der Punkte, des Würfels, überhaupt der Hazardspiele; das dritte beschäftigt sich mit ähnlichen Gegenständen, so hauptsächlich mit dem Bernoulli'schen Theorem, d. h. mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl des Eintretens eines Ereignisses bei einer gegebenen Zahl von Versuchen, zwischen bestimmten Grenzen liege. Eines der wichtigsten Capitel des ganzen Buches ist das vierte, worin Laplace die Methode der kleinsten Quadrate mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinandersetzt. Er bestimmt zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehler einer Reihe von Beobachtungen, oder auch der mittlere Fehler zwischen bestimmten Grenzen liege, und geht hierauf dazu über, zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung darauf hinweist, denjenigen mittleren Werth als den vortheilhaftesten und dem wahren Resultat am nächsten liegenden zu betrachten, der die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht. — Dieses Capitel ist wegen seiner complicirten und etwas ungewöhnlichen analytischen Ausdrucksweise auch das schwierigste des ganzen Werkes; sein Studium erfordert eine bedeutende Gewandtheit in analytischen Deductionen und besonders eine genauere Kenntniss der etwas eigenthümlichen Laplace'schen Entwicklungsmethoden. Poisson hat in der *Connaissance des temps* für die Jahre 1827 und 1832 zwei Abhandlungen gleichsam als Commentare über jene Laplace'schen Untersuchungen veröffentlicht.

Von den folgenden Capiteln ist das sechste, welches über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen und der zukünftigen Ereignisse, abgeleitet aus beobachteten Ereignissen, oder über die sog. Wahrscheinlichkeit a posteriori, handelt, von hervorragender Bedeutung. Laplace findet für die Wahrscheinlichkeit eines zukünftigen Ereignisses, das zu einem beobachteten Ereignisse in einer bestimmten Abhängigkeit steht, die Formel:

$$P = \frac{\int_0^1 yzdx}{\int_0^1 ydx},$$

wo x die Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses, y diejenige des beobachteten und z die des zukünftigen Resultates bezeichnet. Es soll z. B. die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass ein Ereigniss, das m Mal hinter einander eingetroffen ist, die n folgenden Male auch noch eintrifft; so ist, wenn x die Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses bedeutet, $y = x^m$ diejenige des beobachteten, und $z = x^n$ diejenige des zukünftigen, zusammengesetzten Ereignisses, und demnach:

$$P = \frac{\int_0^1 x^{m+n}\, dx}{\int_0^1 x^m\, dx} = \frac{m+1}{m+n+1}$$

die ganze Wahrscheinlichkeit des zukünftigen, betrachtet als Ursache des beobachteten Ereignisses. — Laplace wendet dann diese Resultate auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit an, dass die Zahl der Geburten von Knaben diejenige der Mädchen während eines bestimmten Zeitraumes beständig übertreffen werde, indem er von der Beobachtung ausgeht, dass sowohl in Paris, als in London, als auch im Königreich Neapel die Zahl der männlichen Geburten während einer langen Reihe von Jahren fortwährend höher war, als diejenige der weiblichen.

Von grösserem Interesse sind ferner das achte und neunte Capitel, welche über mittlere Lebensdauer, Mortalität, Lebensversicherungs- und Rentenwesen handeln. Das zehnte Capitel beschäftigt sich mit der sog. moralischen Erwartung, deren wir schon bei Betrachtung der Daniel Bernoulli'schen Arbeiten über die Wahrscheinlichkeitsrechnung Erwähnung gethan haben. Das letzte Capitel endlich handelt über die Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen.

Wir verlassen hier Laplace und mit ihm auch die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im achtzehnten Jahrhundert. Wir hätten gerne diesem so interessanten und hochwichtigen Gebiete der Mathematik, das das Wesen dieser Wissenschaft mit einem ganz andern Lichte beleuchtet, als es den Gegnern der reinen Abstraction gewöhnlich erscheint, eine grössere Aufmerksamkeit gewidmet; allein der Raum ist schon überschritten, den wir eigentlich jeder Disciplin in unserem Buche angewiesen hatten. Zum Schlusse mögen hier noch die Namen einiger Mathematiker Platz finden, die auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung namhafte Leistungen aufzuweisen haben und die theilweise als Zeitgenossen von Laplace wirkten. Es sind diess der Engländer Bayes*), der Italiener Malfatti**) und die Genfer Trembley***), Prevost und Lhuilier†).

---

*) *Philos. Trans. for 1763 and 64.*

**) *Memorie mat. e fis. della Soc. Ital. Tom. I. 1782.*

***) *Comment. Soc. Gotting. Tom. XII.* et *XIII.*, und *Mémoires de l'acad. de Berlin, pour les années 1794—1802.*

†) *Mémoires de l'acad. de Berlin, pour l'année 1796.*

VIII.

Wir haben im III. und VI. Capitel unseres Buches den historischen Gang der Mechanik, besonders ihrer allgemeinen Principien von Galilei bis auf Newton zu verfolgen versucht; wir widmen nun dieses letzte Capitel einer kurzen Betrachtung der Entwicklung dieser Principien im achtzehnten Jahrhundert, besonders unter den grossen Mathematikern Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler und Lagrange.

Es unterscheidet sich diese Periode von der frühern wesentlich dadurch, dass die meisten jener bekannten mechanischen Principien, wie diejenigen der virtuellen Geschwindigkeit, der Erhaltung der lebendigen Kraft, der geringsten Wirkung etc. erst jetzt mit Hülfe des generalisirenden Mittels der Analysis zur allgemeinen Formulirung gelangten, während sie im siebenzehnten Jahrhundert noch unentwickelt, oder doch weniger scharf und allgemein ausgesprochen zur Geltung gekommen waren. Es trat dieser Unterschied schon formell, d. h. in der Behandlungsart der mechanischen Probleme hervor, worauf wir schon am Ende des VI. Capitels aufmerksam gemacht haben. Mit Newton's „Principien" schliesst die Periode der synthetischen Darstellungsweise und der mehr inductiven Forschungsart der Mechanik, mit Bernoulli's und D'Alembert's Arbeiten beginnt diejenige der analytischen Formulirung, die Epoche der mathematischen Deduction, wie Whewell diesen Zeitabschnitt treffend bezeichnet.

Huyghens „*Horologium oscillatorium*" (1673) enthält, wie wir wissen, den ersten mathematischen, wenn auch in

Form einer Hypothese niedergelegten Ausspruch des Princips der Erhaltung der Kraft, denn in seinen Untersuchungen über das Pendel, oder über den Schwingungsmittelpunkt, geht Huyghens von dem Grundsatze aus, dass der Schwerpunkt eines Systems von festen Punkten, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegen, nicht höher steigen könne, als er beim Beginn der Bewegung stand. Durch was man aber nun die Kraft zu messen habe, ob durch das Product aus Masse in Geschwindigkeit, oder durch dasjenige aus Masse in Steighöhe resp. in das Quadrat der Geschwindigkeit, darüber entstand nun jener berühmte aber unfruchtbare Streit, der, wenn er sich ausschliesslich auf dem reellen Boden der mathematisch-mechanischen Auffassung der Frage bewegt hätte, schon mit Jakob Bernoulli's und de l'Hôpital's Abhandlungen über diesen Gegenstand, ja schon mit Huyghens' Arbeit gewissermassen als beigelegt zu betrachten gewesen wäre der aber durch die metaphysische Umkleidung, die ihm einerseits Leibnitz und andrerseits die Anhänger Descartes' gaben, über 40 Jahre lang hinausgezogen wurde und die Mathematiker Europa's in zwei feindliche Lager trennte, bis endlich D'Alembert durch seinen *Traité de dynamique* (1743) gleichsam wie durch einen Machtspruch dem unnützen Wortstreite, denn etwas Anderes war es nicht, ein Ende machte.

Leibnitz begann denselben mit seiner Abhandlung: *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum* etc.*) zu welcher neun Jahre später eine Ergänzung, betitelt: *Specimen dynamicum* etc.**) hinzukam. Leibnitz erhob sich nicht gegen das Princip der Erhaltung der Kraft, das bekanntlich schon von Descartes, wenn auch in theologischem Gewande, ausgesprochen worden war; er wandte sich bloss gegen die

*) *Acta erud. Lips. 1686.*

**) *Ibid. 1695.*

Descartes'sche und damals durchwegs gebräuchliche Messung der Kraft durch das Product aus Masse in Geschwindigkeit, oder durch die Bewegungsmenge. Er substituirte dafür die sog. lebendige Kraft, d. h. das Product aus Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit. Leibnitz unterschied nämlich die Kräfte in „todte" und „lebendige" und verstand unter ersteren den blossen Druck oder Zug der im Ruhezustand befindlichen Körper, und unter letzteren die eigentliche Kraftäusserung sich bewegender Körper. Die todten Kräfte mass er durch das Product aus Masse in die Geschwindigkeit, mit der der Körper sich bewegen würde, wenn er aus dem Ruhezustand plötzlich in den bewegten übergehen würde, also durch die virtuelle Bewegungsmenge, wie man dieses Product nennen könnte; die lebendigen Kräfte aber repräsentirte er durch das Product aus Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit. Es ist, so schloss Leibnitz, die nämliche Kraft erforderlich, einen Körper von vier Pfund Gewicht um einen Fuss, wie einen Körper von einem Pfund Gewicht um vier Fuss zu heben, also eine vier Mal grössere Kraft, denselben Körper um vier Fuss, als ihn nur um einen Fuss zu heben; nun sind aber die Wege dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, denn wenn ein Körper um vier Fuss gefallen ist, so hat er die doppelte Geschwindigkeit erlangt, wie wenn er nur um einen Fuss gefallen ist; beim Fallen aber erreichen die Körper die Kraft, wieder auf dieselbe Höhe zu steigen von der sie gefallen sind; also sind die Kräfte dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional.

Gegen Leibnitz erhoben sich sofort die eifrigen Anhänger Descartes', wie die Franzosen Mairan und Catelan und der Engländer Clarke; für ihn traten in die Schranken vor Allem aus Joh. Bernoulli und Hermann, dann die Philosophen Bullfinger und Wolf und der Niederländer s'Gravesande. Die Argumente, die die Cartesianer, besonders Catelan gegen Leibnitzens Theorie auf-führten, hatten theilweise ihre volle Berechtigung. Sie gaben zu, dass ein Körper mit doppelter Geschwindigkeit zu vierfacher Höhe emporsteigt, aber, behaupteten sie, er braucht dazu auch zwei Mal mehr Zeit; also ist die Kraft nicht vier Mal, sondern nur zwei Mal grösser. Leibnitz hatte Recht, wenn es sich um die blosse Actionsmenge, ohne Rücksicht auf die Zeit, in welcher sie hervorgebracht wird, handelt; sobald man aber die Zeit betrachtet, während welcher die Wirkung der Kraft vor sich geht, war seine Schlussfolgerung eben nicht mehr richtig. In dieser Hinsicht muss man diesen Streit über die Messung der Kraft als einen blossen Wortstreit taxiren; beide Theile hatten Recht und beide hatten Unrecht. Der Ausdruck „lebendige Kraft" hat sich dennoch bis auf heute erhalten; allein er gilt nicht mehr als Mass der Kraft, sondern ist eine blosse einmal angenommene Bezeichnung für das in der Mechanik so bedeutungsvolle Product der Masse in das halbe Quadrat der Geschwindigkeit. Hätte Leibnitz die Sache principieller und weniger metaphysisch aufgefasst, so wäre er mit Hülfe seiner Infinitesimalrechnung auf das mathematisch richtige halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit und nicht auf das ganze Product gekommen; denn die Actionsmenge im Sinne der Summation der unendlich kleinen elementaren Wirkungsgrössen entspricht dem Integral aus der Bewegungsmenge in das Differential der Geschwindigkeit, d. h. dem Ausdruck

$$\int mvdv = \frac{mv^2}{2}.$$

Der Streit nahm seinen heftigsten Charakter erst mit dem Auftreten Joh. Bernoulli's auf dem Kampfplatz an. Dieser grosse Mathematiker neigte sich erst nach längerem Zögern auf Leibnitzens Seite. In seinen beiden Schriften: *Meditatio de natura centri oscillationis**) und

---

*) *Acta erud. Lips. 1714.*

*Discours sur les lois de la communication du mouvement**) (1724) trat er mit allen ihm zu Gebote stehenden Kräften für die Leibnitzische Ansicht ein, obgleich er nicht alle Argumente dieses Letzteren als stichhaltig erfunden hatte. So erwiderte er ihm unter Anderem**), dass seine Schlüsse eigentlich nur Gültigkeit hätten, so lange die wirkende Kraft die Schwerkraft sei; bei irgend einer andern Kraft würden sich wohl die Höhen, auf die die Körper steigen, keineswegs wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten. Einer der Hauptgründe, die Bernoulli für seine Theorie vorbrachte, war die dynamische Wirkung der Federn auf Körper; ich verweise hiefür den Leser auf die zuletzt citirte Schrift.

Zu welch' eigenthümlichen, man möchte sagen, zarten Fäden dieser Streit ausgesponnen wurde, zeigt die Thatsache, dass selbst Voltaire und seine Freundin, die geistreiche Marquise du Châtelet, sich an demselben zu betheiligen für angezeigt fanden. Merkwürdiger Weise waren dieselben hierin nicht der nämlichen Ansicht. Die Marquise vertheidigte Leibnitzens Meinung, Voltaire blieb Cartesianer***).

Im Jahre 1743 erschien D'Alembert's *Traité de Dynamique.* Der geniale Mathematiker liess sich keineswegs tiefer auf die Streitfrage ein; allein seine wenigen Auslassungen genügten, um dem Streit, wenigstens unter den Mathematikern, ein Ende zu machen. Er erklärte, dass die Sache von verschiedenen Gesichtspunkten aufgefasst werden könne, je nachdem man die Kraft durch die absolute Grösse der überwundenen Hindernisse, oder durch die Summe der Widerstände messen wolle. Er neigte sich für seinen Theil zu der letzteren Auffassungsart der Kräftemessung

*) *Opera omn. Tom. III.*

**) *Commerc. epistol. Leibn. et Bern. Tom. I. epist. XI.*

***) *Doutes sur la mesure des forces motrices et sur leur nature. 1741.*

hin, beging aber hiebei den Fehler, die elementaren Widerstandsgrössen ohne Rücksicht auf die Variabilität der Geschwindigkeit zu summiren, was ihn auf die Bewegungsmenge und nicht auf die lebendige Kraft führte.

Mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte löste Joh. Bernoulli eine Reihe von Problemen, deren directe Lösung bedeutende Schwierigkeiten darbot. In der Gesammtauffassung des Princips aber neigte er sehr zu der metaphysischen Anschauungsweise Leibnitzens hin. Er greift nicht auf den reelleren Boden des Huyghens'schen Problems vom Schwingungsmittelpunkt zurück, sondern deducirt das Princip a priori aus dem Satze der Gleichheit der Ursache und Wirkung und stellt dasselbe desshalb als unbeweisbar hin.

Sein Sohn **Daniel Bernoulli** *) dagegen, einer der grössten Meister der angewandten Mathematik im achtzehnten Jahrhundert, nahm mehr D'Alembert's Standpunkt ein, indem er die metaphysische Seite der Frage als nebensächlich betrachtete und behufs der Lösung seiner Probleme von dem Huyghens'schen Satze über die Gleichheit des Fallens und Aufsteigens der Körper ausging. Sein berühmtestes Werk, die *Hydrodynamik* (1738), basirt zum grössten Theil auf dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft. Das Hauptbestreben derjenigen Mathematiker, die die Mechanik flüssiger Körper behandelten, lag in der Ausdehnung der bis jetzt nur für die festen Körper aufgestellten dynamischen

---

*) Daniel Bernoulli wurde geboren zu Gröningen im Jahre 1700. Schon 1725 wurde er Academiker zu Petersburg, kehrte dann 1733 als Professor der Anatomie und Botanik in seine Vaterstadt Basel zurück, bekleidete später den Lehrstuhl der Physik und starb daselbst im Jahre 1782. Er bildet mit seinem Vater Johannes und seinem Onkel Jacob das berühmte Dreigestirn dieser so hoch begabten Familie. Sein Hauptverdienst besteht in der Anwendung der Mathematik auf die Physik und sein bedeutendstes Werk ist seine *Hydrodynamica* (1738). Ferner hat man von ihm noch seine *Exercitationes mathematicae* (1724) und eine grosse Zahl kleinerer mathematischer Abhandlungen.

Principien auf Flüssigkeiten. Diese Erweiterung der allgemeinen mechanischen Grundsätze gehörte zu den schwierigsten Partien dieser Wissenschaft und nicht in allen Punkten hat ihre Durchführung wenigstens anfänglich zu einem vollkommen befriedigenden Resultate geleitet. Besonders war das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, wie es aus Huyghens Untersuchungen hervorgegangen ist, nicht vollständig genügend, die Hydromechanik systematisch auf ein und demselben Grundgesetz aufzubauen. Bei den tropfbar flüssigen Körpern tritt noch ein anderer Gesichtspunkt hinzu, oder fällt vielmehr einer von denen hinweg, die bei der Huyghens'schen Lösung des Problems vom Schwingungsmittelpunkt eine wesentliche Rolle gespielt hatten; es ist dies die statische Wechselwirkung der zu einem festen System verbundenen Massen unter einander. Bei den flüssigen Körpern hört diese gegenseitige statische Beziehung auf, die einzelnen Theile des Systems sind völlig frei und unabhängig von einander. So haben denn in dem systematischen Aufbau der Hydromechanik D'Alembert und Lagrange, der erstere mit Hülfe des nach ihm benannten Princips und der letztere mit demjenigen der virtuellen Geschwindigkeiten besser reussirt, ebenso hat Euler*) durch die Aufstellung der der Hydrostatik und Hydrodynamik gemeinsamen Grundgleichungen ein Hauptverdienst an der Vollendung des Ausbaues einer principiellen Hydromechanik. Daniel Bernoulli aber gebührt der Ruhm, zuerst eine wissenschaftliche und möglichst consequent durchgeführte Theorie der hydromechanischen Erscheinungen aufgestellt zu haben.

Wir schieben hier die Betrachtungen einiger Principien oder Theoreme der Dynamik ein, die von geringerer Wichtigkeit für die Entwicklung der Mechanik gewesen sind, als das zuvor behandelte; es sind diess der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, derjenige von der Erhaltung der Rotationsmomente oder das

[1]) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1755.*

Princip der Flächen und das Princip der geringsten Wirkung. Diese Principien haben mit demjenigen der Erhaltung der lebendigen Kraft das gemeinsam, dass sich Alle aus der Grundgleichung deduciren lassen, die Lagrange aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und demjenigen D'Alembert's für die gesammte Dynamik hergeleitet hat; sie drücken also vereinigt die Hauptrelationen der Bewegung eines beliebigen Körpersystems aus.

Das erste der drei Principien kann folgendermassen ausgesprochen werden: Wenn keine äusseren Kräfte auf ein Massensystem einwirken, d. h. wenn es bloss inneren Kräften, z. B. der gegenseitigen Anziehung der Massen, unterworfen ist, so folgt der Schwerpunkt dieses Systems dem Gesetz der Trägheit, d. h. er ist entweder in Ruhe, oder er bewegt sich gleichförmig und geradlinig fort. Newton hat diesen Satz zuerst in dieser Form aufgestellt*). Er basirt ihn auf den Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Die wechselseitigen Actionen zweier Körper können ihre Distanzen vom gemeinsamen Schwerpunkte nur proportional den ursprünglichen Entfernungen verändern, so dass der frühere Schwerpunkt nach wie vor Schwerpunkt bleibt. Lagrange**) hat dann den Satz etwas allgemeiner formulirt, indem er die Existenz äusserer Kräfte voraussetzte, unter deren Einwirkung sich der Schwerpunkt eines durch innere Kräfte beliebig veränderlichen Massensystems gerade so bewegt, als wenn alle Massen im Schwerpunkt concentrirt und die Angriffspunkte der Kräfte in den Schwerpunkt verlegt wären.

Das zweite Princip lautet: Bei einem System von Massen, das sich um ein festes Centrum dreht und auf das keine äusseren Kräfte oder nur solche wirken, deren Mo-

---

*) *Phil. nat. princ. math. Coroll. 4. zu Axiom III.*

**) *Mécan. analyt. Tom. I. Dynamique Sect. III.*

mente in Beziehung auf die Drehungsaxe sich zu Null aufheben, ist die Summe der Producte der einzelnen Massen in die auf eine und dieselbe Ebene projicirten Flächenräume, die die zugehörigen *Radii vectores* beschreiben, der Zeit proportional, oder also in gleichen Zeiten die gleiche. Wir erkennen leicht in dem zweiten Kepler'schen Gesetze, welches die Constanz der von den *Radii vectores* der Planeten in einer bestimmten Zeit beschriebenen Flächen ausspricht, die einfachere Gestaltung dieses Princips, nur für einen sich drehenden Körper und desshalb ohne Hinzuziehung der Masse ausgesprochen. Allgemeiner formulirt wurde das Gesetz erst durch Euler*), Daniel Bernoulli**) und d'Arcy***) und zwar ungefähr zu derselben Zeit (1746); von Ersterem bei Gelegenheit der Betrachtung der rotirenden Bewegung von Körpern, die in Röhren eingeschlossen sind. Es tritt hier mehr als Princip der Erhaltung der Rotationsmomente auf, während es bei d'Arcy in der älteren, geometrischen Form des Flächenprincips ausgesprochen ist. Lagrange†) deducirt es aus seiner allgemeinen dynamischen Grundformel und Poinsot leitet dasselbe, zwar erst in diesem Jahrhundert, mit Hülfe seiner Theorie der Kräftepaare ab.

Das dritte Princip, dasjenige der geringsten Wirkung, hat seine schliessliche richtige Fassung Lagrange zu verdanken und in dieser lautet es: Ein Massensystem bewegt sich unter dem Einfluss innerer, oder solcher äusserer Kräfte, die nach einem Centrum gerichtet und Functionen der Distanzen von diesem Centrum sind, immer so, dass die Summe der Producte der Massen in die Integrale der Geschwindigkeiten multiplicirt mit den Curvenelementen,

---

*) *Opuscula var. argum. Tom. I.*

**) *Mémoires de l'acad. de Berlin, 1746.*

***) *Mémoires de l'acad. de Paris, pour 1747.*

†) *Mécanique analyt. Tom. I. Dynamique Sect. III. et Théorie des fonct. anal. III. Part. VI. Chap.*

genommen zwischen zwei bestimmten Punkten, also die Summe der Ausdrücke m$\int_{s_1}^{s_2}$ vds, ein Maximum oder Minimum wird. Dieses Princip wurde zuerst von Fermat*), analog dem Descartes'schen Satze von der Erhaltung derselben Kraftsumme, in metaphysischem Gewande aufgestellt, um das Brechungsgesetz des Lichtes abzuleiten; es heisst bei ihm: die Natur ist immer auf den kürzesten Wegen thätig, oder operirt mit dem geringstmöglichen Kraftaufwand. Um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts wurde dann dieses Princip von Maupertuis **) wieder aufgefrischt und als ein allgemein mechanisches hingestellt, was Veranlassung zu einem interessanten Streite gab, in welchem ein gewisser König, Professor der Mathematik im Haag, gegen Maupertuis auftrat und die Richtigkeit des Princips, sowie die Priorität Maupertuis' bekämpfte, indem er behauptete und durch angebliche Briefe Leibnitzens bekräftigte, dieser letztere Mathematiker hätte das Princip schon in gleicher Form wie Maupertuis ausgesprochen. Wir werden uns nicht näher mit diesem Streite befassen, zumal die Formulirung des Princips bei Maupertuis keineswegs eine klare und allgemein gültige und ebenfalls noch zu sehr von metaphysischen Gesichtspunkten abhängig war. Seine Fassung ist folgende: Wenn in der Natur eine Veränderung vorgeht, so ist die für diese Veränderung nothwendige Actionsmenge die möglichst kleinste. Die Actionsmenge aber wird gemessen durch das Product aus Masse, Geschwindigkeit und durchlaufenem Raum. Euler beschäftigte sich mit diesem Gegenstande ungefähr zu gleicher Zeit und zwar im Anhange zu seiner Schrift: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate*

---

*) *Varia opera math. 1679, pag. 156, etc.*

**) *Mémoires de l'acad. de Paris, pour 1744, et Mémoires de l'acad. de Berlin, pour 1746.*

gaudentes etc. 1744, als eine mechanische Anwendung der neu entdeckten Variationsrechnung. Er discutirt daselbst die Bewegung von Körpern, die sich unter dem Einfluss von Centralkräften bewegen und kommt hierbei auf die Bedingung, dass das Integral aus mvds, zwischen zwei festen Punkten genommen, ein Minimum sein müsse. Er unterscheidet sich also darin von Maupertuis wesentlich, dass er das Curvenelement und nicht die ganze Curve in die zu summirenden Producte einführt. Wie hier Euler von der Bewegungsmenge als von der Actionsgrösse ausgeht, wendet er sich dagegen unmittelbar nachher zu dem Standpunkt, der die lebendigen Kräfte zum Maass der Kraftwirkung macht, indem er einfach das Curvenelement ds durch den aequivalenten Ausdruck vdt ersetzt, und also das Integral aus mv^2dt zwischen zwei bestimmten Zeitgrenzen ein Minimum setzt. Diese Grösse nennt Euler die augenblickliche lebendige Kraft. Wie sehr Euler übrigens noch für die metaphysische oder apriorische Conception des Princips eingenommen war, beweist die Erscheinung, dass er, der dasselbe analytisch richtig gefasst hatte, jenem Integral nur die Eigenschaft eines Minimums beilegte, da dasselbe nach der Theorie der Maxima und Minima doch eben so gut ein Maximum sein kann, indem es bloss der Bedingung unterliegt, dass seine Variation gleich Null gesetzt werden könne. Lagrange*) liess diesen Gesichtspunkt nicht ausser Acht. Er setzte die Variation jenes Integrales, oder vielmehr der Summe der einzelnen Integrale (denn er betrachtete ein Massensystem, Euler nur einen einzelnen Körper) gleich Null, woraus aber für die Summe selbst die Möglichkeit eines Maximums oder Minimums resultirt. Damit fällt bei Lagrange das Princip als ein solches der geringsten Wirkung dahin und er bezeichnet daher dasselbe auch auf andere Weise, er nennt es an einer Stelle dasjenige der

*) *Mécan. anal. Tom. I. Dynamique Sect. III.*

grössten oder kleinsten lebendigen Kraft. Wir sehen also, dass das Princip der geringsten Wirkung, vom älteren philosophischen Standpunkt aufgefasst, keinen festen Halt mehr hat; die richtige analytische Deduction, wie sie Lagrange aus seiner dynamischen Grundgleichung vollzogen hat, ergibt allerdings eine Haupteigenschaft der Bewegung, die aber bald in einem Maximal-, bald in einem Minimalwerth jener Summe von Integralen besteht.

Von eminenter Bedeutung für die Entwicklung der Mechanik waren die Gesichtspunkte, von denen aus **D'Alembert** *) das ganze System dieser Wissenschaft aufgefasst hat, und zwar zuerst in seinem *Traité de dynamique*, 1743. Das Wesentliche des sog. D'Alembert'schen Princips besteht darin, dass es die dynamischen Relationen eines beliebigen Massensystems auf statische Bedingungen zurückführt. Wirken auf ein Massensystem eine Reihe äusserer Kräfte, so lässt sich jede dieser Kräfte, oder vielmehr die Bewegung, die durch dieselbe im statisch nicht gebundenen Zustande dem einzelnen Massentheilchen ertheilt würde, in zwei Bewegungen oder Componenten zerlegen, deren eine gleich ist der effectiven Bewegung des Systems, und deren andere die verlorene Bewegung desselben genannt wird.

---

*) Jean-le-Rond D'Alembert wurde im Jahre 1717 geboren und als Findelkind von dem Glaser Alembert auferzogen. Seine Studien waren schon in der Jugend sehr vielseitig, mit Vorliebe aber wandte er sich immer den mathematischen Wissenschaften zu. Schon im Jahre 1741 wurde er Mitglied der Pariser Academie, 2 Jahre später erschien sein epochemachendes Werk: *Traité de dynamique*, und kaum ein Jahr nach diesem sein *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. Zu seinen ausgezeichnetsten mathematischen Schriften gehören ferner noch seine *Recherches sur la précession des équinoxes* (*1749*), seine *Réflexions sur la cause générale des vents* (*1774*) und seine *Opuscules mathématiques*. Im Jahre 1763 trug ihm Friedrich der Grosse die Präsidentschaft der Berliner Academie an, die er aber ausschlug und dafür Lagrange empfahl. Die Feinheit seines Geistes und die Eleganz seiner Schreibweise traten besonders glänzend in seinen philosophischen und belletristischen Schriften hervor. Er starb im Jahre 1783.

Diese verlorenen Kräfte oder Bewegungen sind nun offenbar ohne Wirkung auf die Bewegung des Systems, d. h. sie sind unter einander im Gleichgewicht, ihre algebraische Summe ist Null. Damit ist die statische Beschränkung des Systems, d. h. die feste Verbindung der einzelnen Massentheilchen unter einander ausgesprochen. Denkt man sich die effective Kraft oder Bewegung des Systems von jedem Massentheilchen aus rückwärts in gleicher Richtung und Grösse aufgetragen, so kann der Satz auch so ausgesprochen werden: Bei der Bewegung eines statisch fest verbundenen Massensystems sind die äusseren Kräfte und die negativen effectiven Kräfte im Gleichgewicht; denn in diesem Falle sind die verlorenen Kräfte die Resultanten der negativen effectiven und der äusseren Kräfte. D'Alembert ist allerdings nicht der erste, der diese drei Kräftearten an einem bewegten System in Betracht gezogen hat; Jakob Bernoulli hatte schon in seiner Lösung des Huyghens'schen Problems vom Schwingungsmittelpunkt in Rücksicht auf die statischen Relationen der in einem materiellen Pendel verbundenen Massentheilchen die äusseren, die verlorenen und die effectiven Kräfte unterschieden; nur fasst er nicht die verlorenen Kräfte als Resultanten auf, wie D'Alembert, sondern betrachtet die effectiven Bewegungen als Resultanten der äusseren und der verlorenen Kräfte. Wir verdanken also eigentlich Jak. Bernoulli die erste Conception des fraglichen Princips, allein D'Alembert gebührt der Ruhm, die Bedeutung desselben für die gesammte Mechanik erkannt zu haben und durch dasselbe die lange vorbereitete Verschmelzung dynamischer und statischer Relationen zur Verwirklichung gebracht zu haben. — Ausser seiner Dynamik fester Körper basirte er auf dieses Princip auch die Hydromechanik *(Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides)* und löste mit Hülfe desselben das schwierige Problem der Praecession der Tag- und Nachtgleichen.

Den letzten Grenzstein der Generalisationsperiode und der mathematischen Deduction der Mechanik bildet Lagrange. Das Fundament, auf das er die ganze Wissenschaft mit unerreichter Systematik aufgebaut hat, ist eines der ältesten Principien, das schon der Begründer der modernen Mechanik, Galilei, wenn auch nicht gesetzlich gefasst, so doch in seiner fundamentalen Bedeutung erkannt hatte, dasjenige der virtuellen Geschwindigkeiten, dessen moderne Fassung wir schon im III. Cap. gegeben haben. Ausser dieser consequenten Entwicklung der Mechanik von einem principiellen Gesichtspunkt aus, bildet noch die streng analytische Herleitung aller mechanischen Gesetze und Probleme ein Hauptmoment der Lagrange'schen Behandlungsweise; diese beiden Factoren haben der *Mécanique analytique* Lagrange's (Edit. I. 1788, Edit. II. 1811, Edit. III. 1853) die vollendete Gestalt gegeben, in der man sie heute noch bewundert und zu allen Zeiten bewundern wird. Für Lagrange haben in Bezug auf die beiden wesentlichen, gestaltenden Momente des Werkes, das principielle und das formelle, hauptsächlich Joh. Bernoulli und Euler vorarbeitend gewirkt. Der Erstere sprach schon 1717 in einem Briefe an Varignon und dann 1724 in seinem *Discours sur les lois de la communication du mouvement* das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als allgemein gültigen Satz aus, und Euler ist durch seine *Mechanica seu motus scientia* (1736) der Begründer der analytischen Mechanik geworden. Dem grossen französischen Analytiker aber war es aufbewahrt geblieben, durch Erfassung und Verfolgung beider Gesichtspunkte eine rationelle Mechanik zu schaffen, deren unvergänglicher Werth in der Festigkeit des Fundamentes und in der vollendeten Form besteht.

ERRATA.

Seite	9	Zeile	11 v. o.	lies: EJ'^2 statt: EJ^2.
„	10	„	10 v. o.	lies: Uebersetzung statt: Ueberzeugung.
„	11	„	14 v. o.	ist nach „Schriften“ einzuschieben: *Essai sur les coniques.*
„	23	„	15 v. o.	lass' „ein“ weg, und lies: bestimmenden statt: bestimmender.
„	32	„	5 v. o.	lies: Brahe statt: Brache.
„	43	„	7 v. o.	lies: Veränderung statt: Verwendung.
„	57	„	5 v. u.	lies: $\frac{an}{m+n} = c$ statt: $\frac{an}{m+n}\,c$.
„	57	„	1 v. u.	lies: z^{n-1} statt: z^{n-p}.
„	74	„	1—3 v. u.	ist wegzulassen.
„	75	„	1—4 v. o.	
„	84	„	5 v. o.	lies: Integralalgorithmus statt: Integralalogrithmus.
„	95	„	11 v. o.	lies: Vorgängern statt: Vorgänger.
„	124	„	7 v. u.	lies: x^{p+1} statt: x^{p-1}.
„	132	„	10 v. o.	lies: dx statt: dy,
„	162	„	10 v. o.	lies: denn statt: dann.
„	167	„	10 v. o.	lies: Nichtigkeit statt: Richtigkeit.
„	187	„	2 v. u.	lies: 1783 statt: 1782.
„	232	„	9 v. u.	lies: 2^m statt: 2.
„	240	„	6 v. o.	lies: n ein statt: nein.
„	244	„	16 v. o.	lies: $(1-x)^{q-1}$ statt: $(1-y)^{q-1}$.
„	251	„	12 v. u.	lies: $(C-\int X_1\ldots\ldots)$ statt: $(C-X\ldots\ldots)$
„	260	„	11 v. o.	lies: $\triangle'(z))$ dz statt: $\triangle'(z)$ dz.
„	262	„	4 v. u.	lies: f(x,a) statt: (fx,a).
„	271	„	7 und 12 v. o.	lies: (2) statt: (3).

Seite	272	Zeile	1	v. u. lies: $\left(\frac{dP}{dz}\right)_{z=\alpha}$ und $\left(\frac{dP}{dz}\right)_{z=\beta}$ statt: $\left(\frac{dP}{dz}\right)z=\alpha$ und $\left(\frac{dP}{dz}\right)z=\beta$.
„	274	„	2	v. u. lies: denn statt: dann.
„	277	„	3	v. u. lies: Kv_2 statt: Kv.
„	280	„	2	v. o. lies: zeigte statt: zeigt.
„	294	„	15	v. o. lies: dx statt dz.
„	331	„	3	v. o. lies: puissions statt: puissons.
„	349	„	3	v. o. lies: wenigstens m Mal statt: m Mal.
„	359	„	6	v. o. lies: cx^r statt: cx.
„	366	„	17	v. o. setze nach „wäre“ ein ,

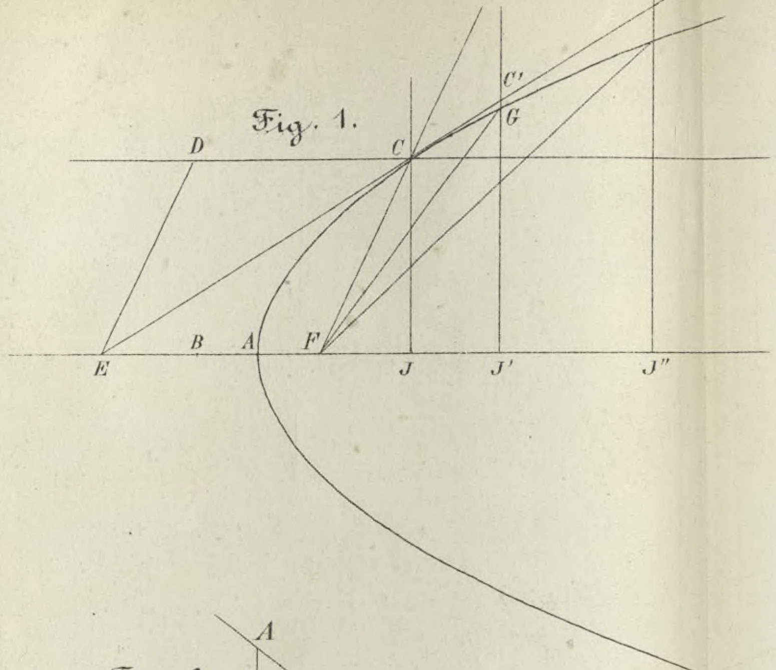

Fig. 1.

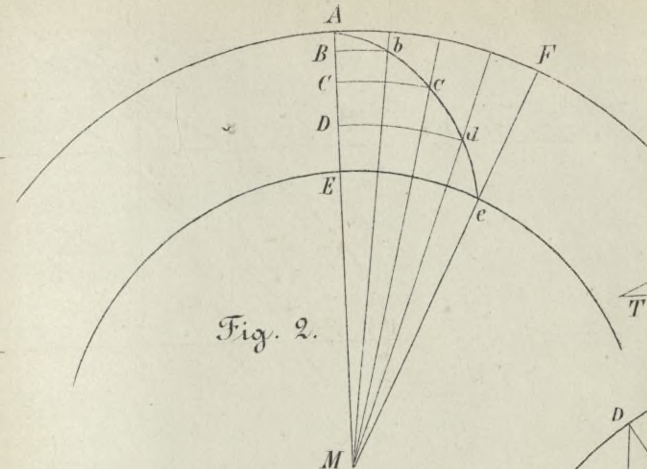

Fig. 2.

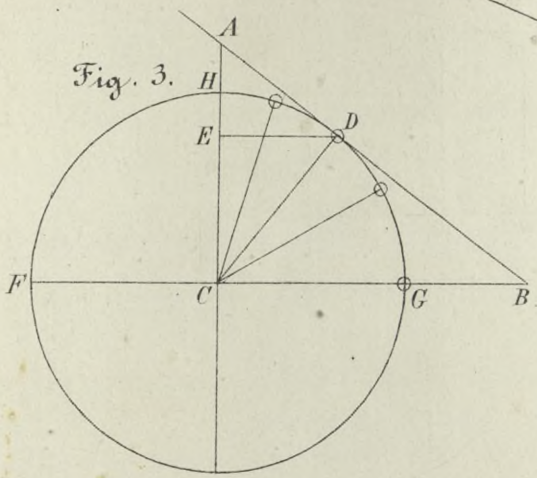

Fig. 3.

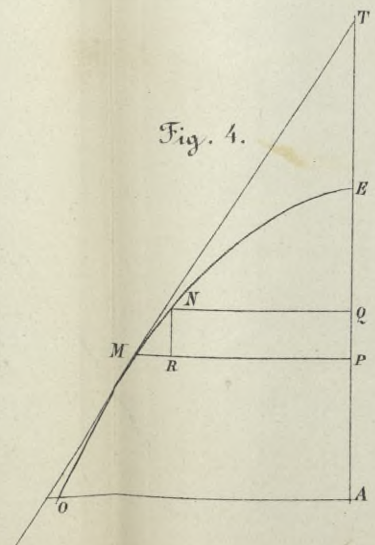

Fig. 4.

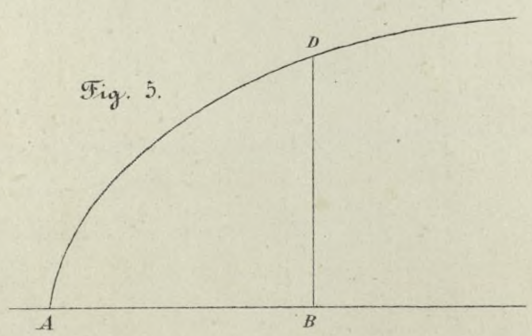

Fig. 5.

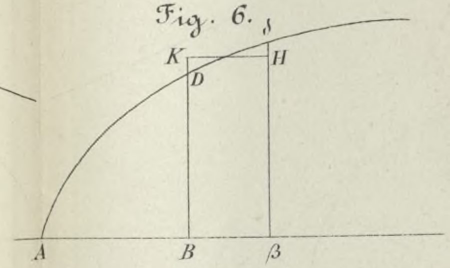

Fig. 6.

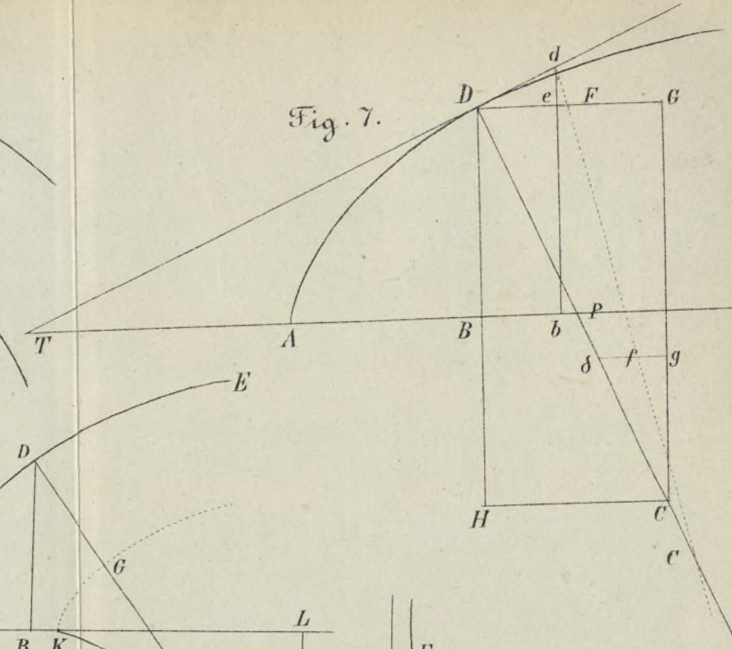

Fig. 7.

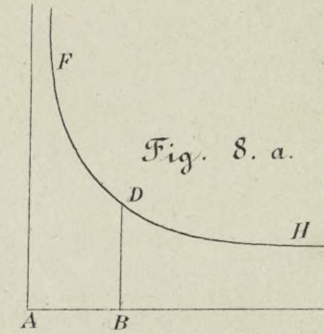

Fig. 8. a.

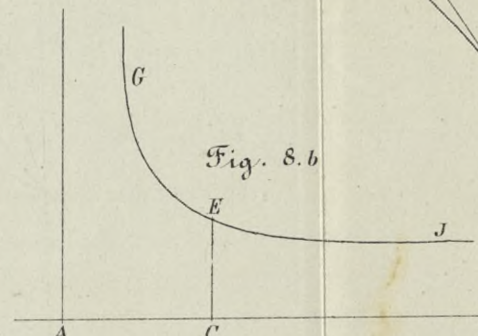

Fig. 8. b

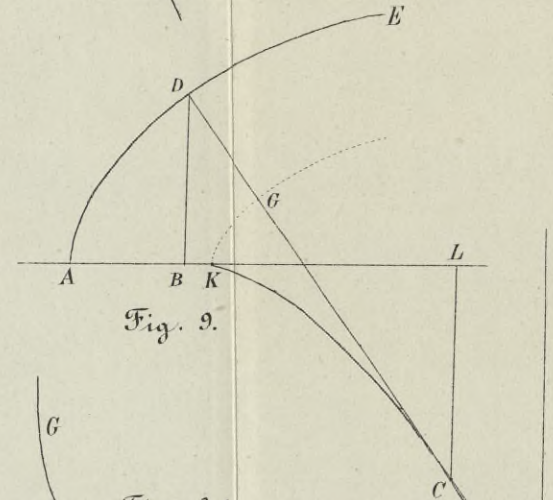

Fig. 9.

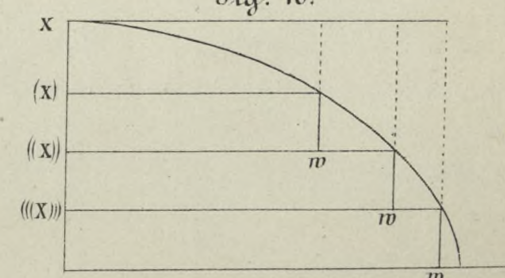

Fig. 10.

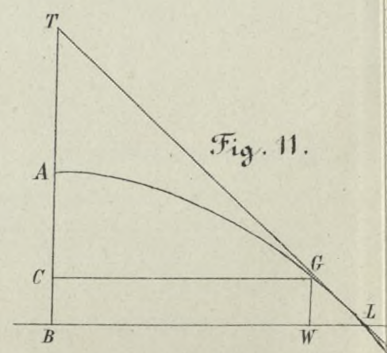

Fig. 11.

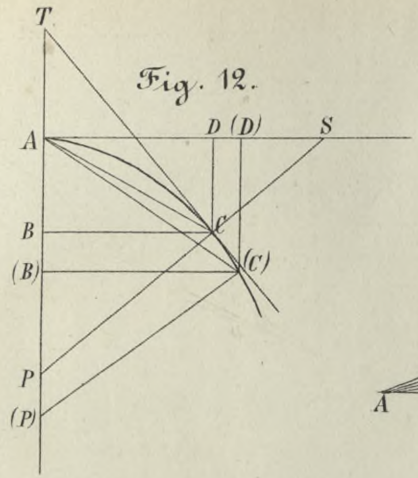

Fig. 12.

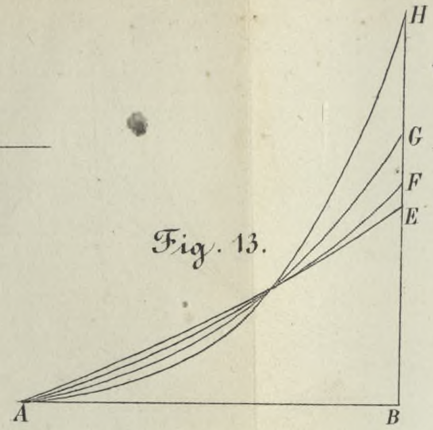

Fig. 13.

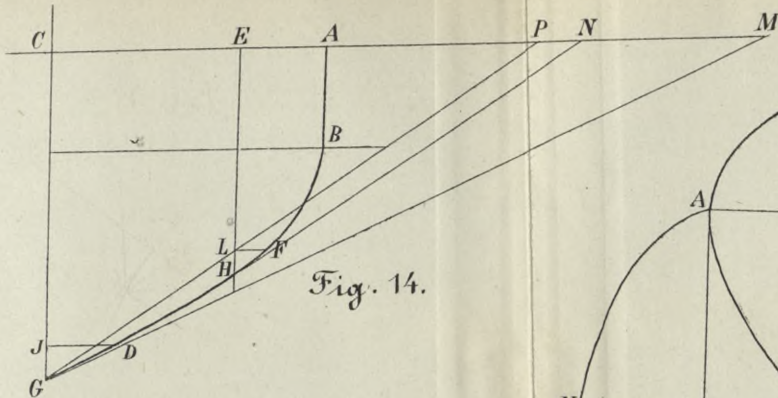

Fig. 14.

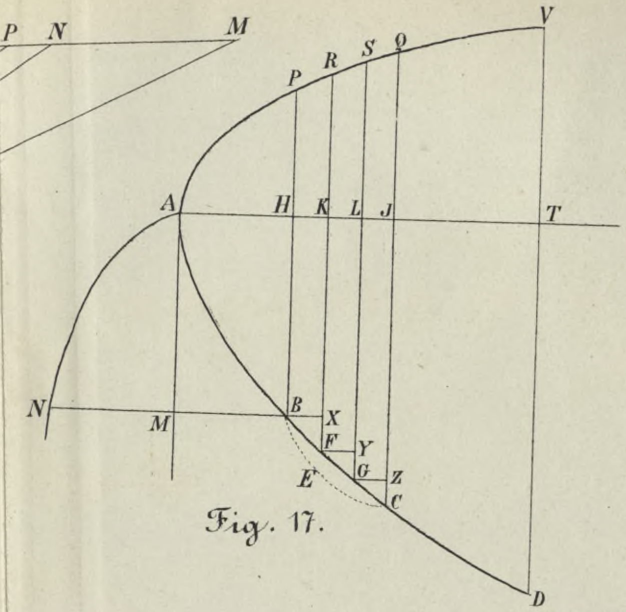

Fig. 17.

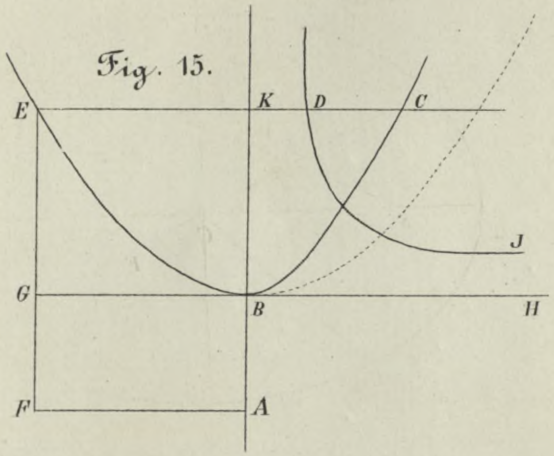

Fig. 15.

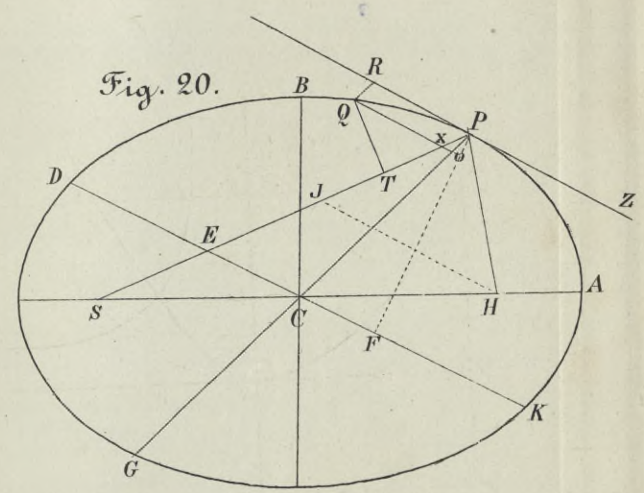

Fig. 20.

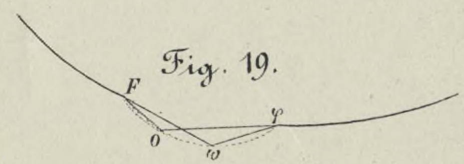

Fig. 19.

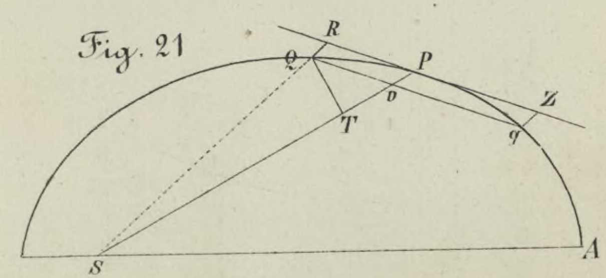

Fig. 21

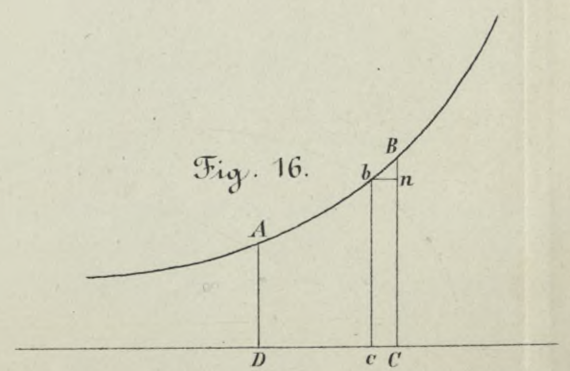

Fig. 16.

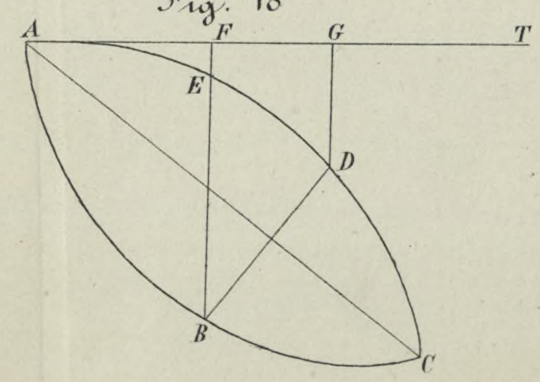

Fig. 18

Fig. 22.

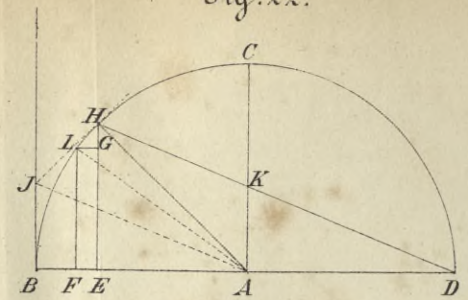

Fig. 23.

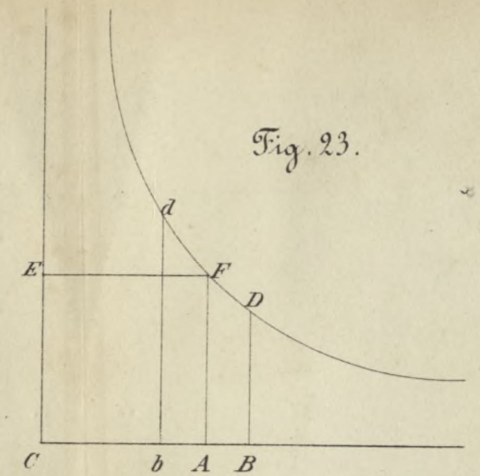

Fig. 24.

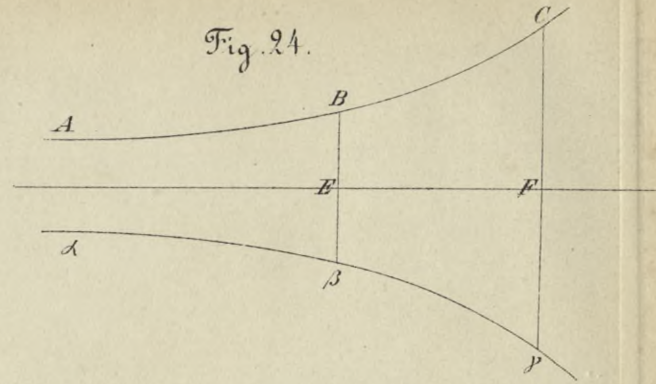

Fig. 25.

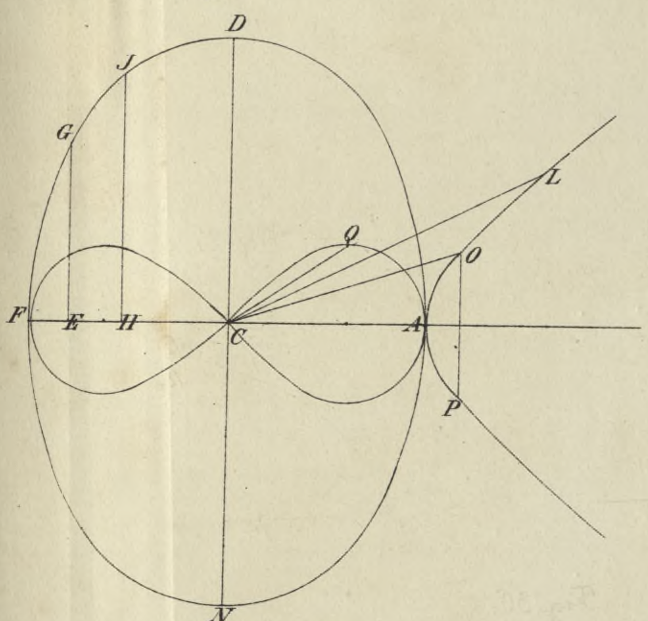

Fig. 26.

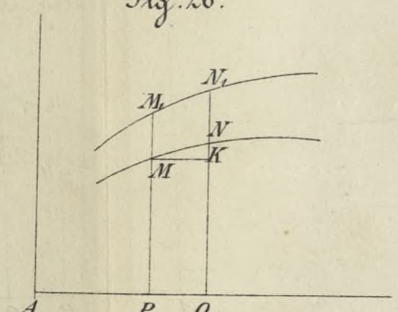

Fig. 27.

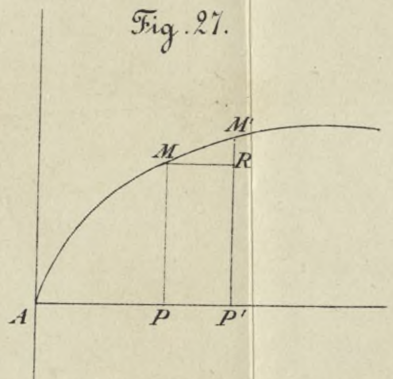

Fig. 28.

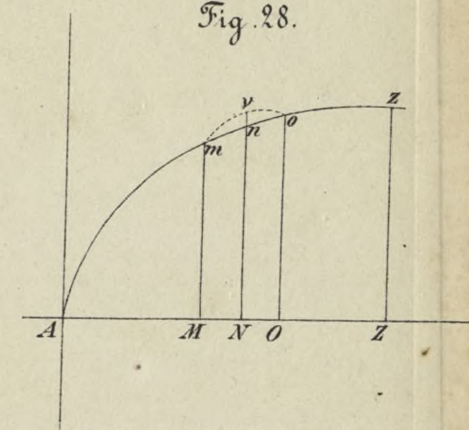

Fig. 29.

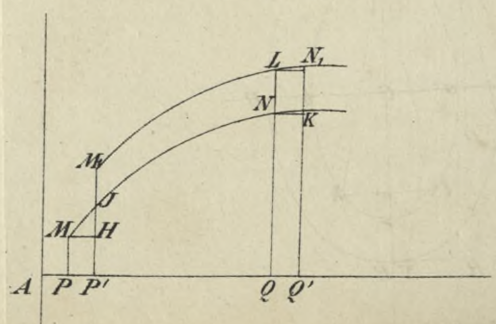

Fig. 30.

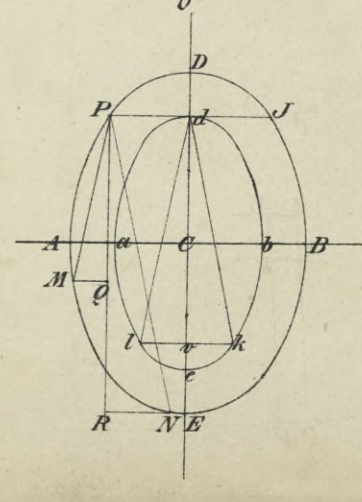

Fig. 31.