

ALEKSANDER OSTRZENIEWSKI,
Inżynier-Technolog.

DO TEORYI MOSTÓW.

ZASADA DŹWIGNI W WYTRZYMAŁOŚCI
MATERIAŁÓW.

UWAGA O PRZEDSTAWIENIU RYSUNKOWEM
ZMIENNOŚCI FUNKCYI $\text{tang } \alpha$.

Cena kop. 70.

WARSZAWA,
NAKŁADEM WŁASNYM.
1908.

Zkład główny w księgarni E. WENDE i S-ka (Hiż i Turkuł) w Warszawie.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299633

ALEKSANDER OSTRZENIEWSKI,
Inżynier-Technolog.

DO TEORYI MOSTÓW.

ZASADA DŹWIGNI W WYTRZYMAŁOŚCI
MATERIAŁÓW.

UWAGA O PRZEDSTAWIENIU RYSUNKOWEM
ZMIENNOŚCI FUNKCYI $\tan \alpha$.

Cena kop. 70.

WARSZAWA,
NAKLADEM WŁASNYM.

1908.

Zkład główny w księgarni E. WENDE i S-ka (Hiż i Turkuł) w Warszawie.

KD 624.21.04+620.17+514.1

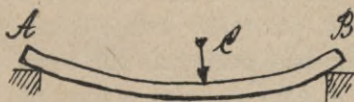


II 8034

DO TEORYI MOSTÓW.

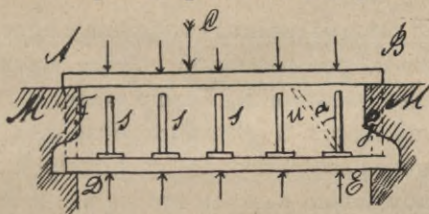
§ 1.

Belka jakakolwiek AB (rys. 1), pod ciężarem C , ugnie się na dół, jak wiemy, i to wątpliwości nie podpada żadnej; jeżeli pod tą samą belką AB (rys. 2) umieścimy drugą belkę DE , na której umocujemy szereg słupków s, s, \dots końcami górnymi dotykających prawie belki AB , to jak najwyraźniej widać, że belka AB , kiedy zacznie się pod ciężarem C uginać—zacznie także stopniowo naciskać na słupki s, s, \dots jedno mniej,



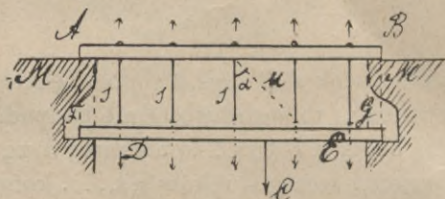
Rys. 1.

drugie więcej. Z kolei rzeczy znów, słupki s, s, \dots przenieść muszą ciśnienie na belkę dolną DE i musi się ona także ugiąć, jeżeli ciśnienie będzie dostateczne. Ponieważ belka DE uginając się, stawia słupkom opór, więc każdy ze słupków dozna



Rys. 2.

od dołu ciśnienia, idącego od belki DE ; od góry zaś dozna ciśnienia od belki AB . Przy takim działaniu sił równych i wprost przeciwnych, wzdłuż każdego słupka — *wszystkie* słupki będą *ściskane* w kierunku długości. Oczywiście, że ściskane także będą i wszelkie części ukośne u , niezależnie od tego w jakiej są liczbie i pod jakimi kątami α będą do kierunku pionowego ustawione. Niech teraz ciężar C działa na belkę dolną DE (rys. 3), a słupki s, s, \dots niech będą umocowane na belce górnej AB końcami górnymi; naturalnie, belka DE



Rys. 3.

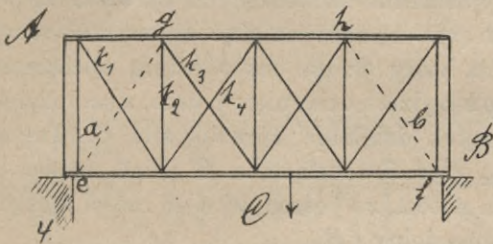
ugnie się tak, jak się ugięła np. na rys. 1 belka AB , jeżeli końce dolne słupków nie będą w żaden sposób z nią, t. j. z belką DE , połączone; ale, jak tylko końce dolne zwiążemy z belką DE , to, uginając się, pociągnie ona teraz zapomocą słupków s, s, \dots belkę AB także, gdyż inaczej nie może być przecież. A ponieważ belka AB nie da się słupkom pociągnąć na dół bez wszelkiego oporu, tylko okaże znaczny właśnie opór, — więc, rzecz zupełnie zrozumiała, że tutaj znów wszystkie słupki będą pociągane przez belkę AB do góry, a przez belkę DE na dół; przy takim zaś działaniu sił *wszystkie* słupki będą w tym razie *rozciągane*.

I tutaj tak samo działaniu rozciągania ulegać będą wszelkie części ukośne u , pod wszelkimi stojące kątami α do kierunku pionowego, we wszelkiej liczbie także.

Jeżelibyśmy na rys. 2 i 3 połączyli ze sobą końce belek AB i DE zapomocą części dodatkowych stałych F i G , oczywiście w rozumowaniach naszych nic się przez to nie zmieni; możemy odrzucić wtedy części muru M, M ; zaś belki nasze

zamieniają się wtedy na przeszła mostów: z rys. 2 — z jazdą górną, z rys. 3 — z jazdą dołem.

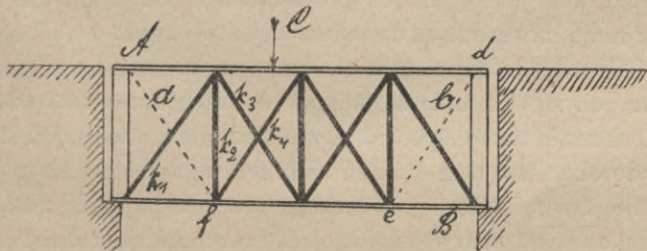
Jeżeli teraz, zamiast belek AB i CD , wspomnianych powyżej, weźmiemy przeszło dowolne AB mostu (rys. 4), to, pod ciśnieniem C przy jeździe dołem, wszystkie kraty k_1, k_2, k_3, \dots będą *rozciągnięte*. Wyjątek stanowią tylko 2 kraty a i b , jeżeli byłyby tutaj ustawione, one będą *ściśnięte*: jest to wynik logiczny działania ugięć, gdyż w kracie a punkt jej krańcowy dolny e , jako umieszczony na oparciu stałym (na przyczółku,



Rys. 4.

na filarze) ustąpić na dół nie może; punkt zaś krańcowy drugi g , wskutek ugięcia się pasa górnego na dół, musi się wraz z tym pasem osunąć także na dół; więc oczywiście krata a skurczy się, t. j. będzie wzdłuż długości swojej *ściśnięta*. To samo zupełnie stosuje się do punktów f i h kraty prawej b ; i ta więc krata musi być także *ściśnięta*.

Biorąc przeszło kratowe mostu z jazdą górną (rys. 5) AB , pod ciśnieniem C wszystkie kraty k_1, k_2, k_3, \dots będą *ściśnięte*.



Rys. 5.

Wyjątek, zupełnie także logiczny, stanowią będą i tutaj dwie kraty a i b , jeżeli byłyby tam umieszczone, które podległy będą rozciąganiu: bowiem punkt A znajduje się nieruchomo na słupie przeszłowym, zaś punkt f kraty a będzie się oddalać na dół; zatem krata a będzie rozciągnięta. Również i krata b także; bo i do punktów d i e stosuje się zupełnie to samo, co i do punktów A i f .

Należy tu zwrócić uwagę baczniejszą w obydwóch wypadkach, t. j. przy rys. 4 i 5, na tę ważną okoliczność, w celu lepszego wyjaśnienia zachodzących zjawisk, że w wypadku jazdy dołem (rys. 4), zaczyna giąć się naprzód ten pas (tutaj dolny ef), na który działa bezpośrednio obciążenie C ; a już pas górny gh będzie pociągnięty potem, a samodzielnie się nie ugina: początek działania sprawia siła C . Tak samo, przy jeździe górą (rys. 5) obciążenie C działa na pas górny najpierw Ad ; a potem, za pośrednictwem części łączących, przenosi się na pas dolny fB .

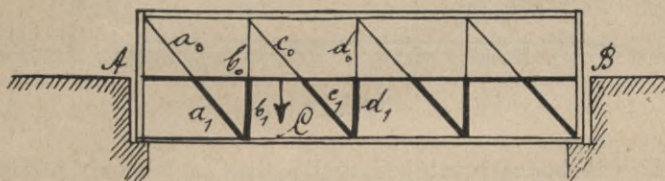
Dotychczas co do tego panuje, jak wiadomo, zupełnie inne mniemanie, mianowicie: że tak w jednym, jak i w drugim wypadku, w przeszłach jednocześnie ulegają rozciąganiu jedne kraty, kiedy inne są ściskane. Jak widać, wcale tak nie jest; charakter działania sił nie może się zmieniać od jednej do drugiej kraty i znak (+) na (—) przeskakiwać ciągle nie może: jeżeli zachodzi rozciąganie, to wszystkich krat; jeżeli zachodzi znów ściskanie, to także wszystkich krat; wyjątek stanowią niekiedy mogą dwie kraty końcowe, jeżeli są wtedy tam umieszczone, jak o tem już powiedziano; wszystkie zaś inne kraty mają zawsze znak działania siły stały albo (+), albo (—).

Naturalnie, krata gruba, mocna, postawiona w przeszle w tem przypuszczeniu, że działać na nią będzie siła ściskająca, doskonale także spełnić może zadanie i wtedy, jeżeli naprawdę okaże się tam działanie siły rozciągającej; most na tem nic nie ucierpi. Gorzej znacznie być musi, jeżeli na kratę cienką, zamiast przypuszczalnej siły rozciągającej, działać będzie naprawdę siła ściskająca; wtedy, jeżeli sąsiadki grubsze

i mocniejsze nie wyręczą kraty zanadto słabej, ustrój przesła pozostawia wiele do życzenia.

W obydwóch wypadkach w moście nie da się to zauważyć, tkwi jednakowoż tam zasada błędna.

Z natury rzeczy teraz wyciągniemy wniosek, że, kiedy po moście AB jazda odbywać się będzie (rys. 6) środkiem, jak wskazuje obciążenie C , to części krat znajdujące się *nad pomostem* AB , mianowicie: a_0, b_0, c_0, \dots będą *rozciągnięte*, zaś części krat a_1, b_1, c_1, \dots , znajdujące się *pod pomostem* AB będą *ściśnięte*. Ten wypadek bowiem stanowi połączenie, tylko co, rozpatrzonych powyżej dwóch mostów osobnych, oddzielnie z jazdą dołem i oddzielnie z jazdą górą. Należy i tutaj



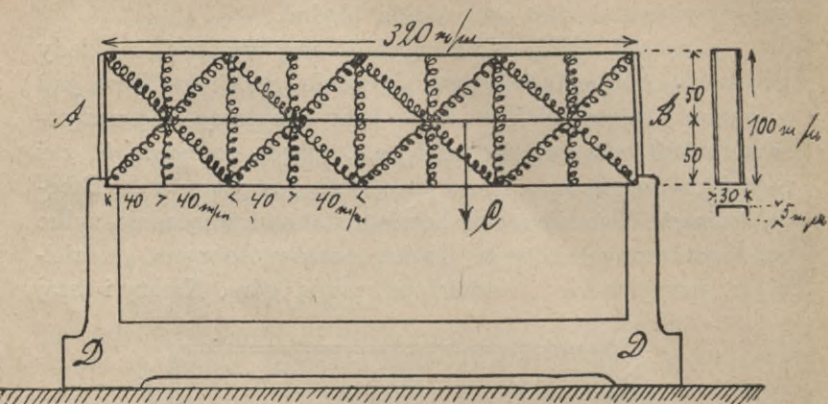
Rys. 6.

przyjąć pod uwagę możliwość wyjątków względem 2-ch krat końcowych, jeżeliby takie były, jak to wskazano na rys. 4 i 5, przez kraty a i b .

Wszystkie wywody powyższe, zupełnie jasne ze strony rozumowania, tak samo też mogą być stwierdzone drogą doświadczalną. Został mianowicie zbudowany model (rys. 7) z blachy białej, wyobrażający przesła mostu AB z jazdą środkiem, jak wskazuje obciążenie C , długości 320 mm , wysokości 100 mm , gdzie zamiast krat prostopadłych i ukośnych, przylutowano cienkie sprężyny kręcone z drutu.

Boki stojące, ramy przesła, wygięte w kształcie korytka, dla lepszego usztywnienia całości, liczącej 8 przedziałów, po 40 mm długości każdy, t. j. razem 320 mm . Pod naciskiem ręki gdziekolwiek na pomost środkowy AB , widać zawsze, iż te wszystkie kraty, które są nad pomostem rozciągają się,

a które są pod pomostem — ściskają się i kurczą. Model oparty na podstawie drewnianej *DD*, w celu ułatwienia z nim doświadczeń, które są bardzo ciekawe i jasno przedstawiają



Rys. 7.

wszelkie zachodzące tutaj zjawiska. Jeżeli zechcemy naciskać na pas górny, zobaczymy, że kraty ściskają się; jak naciskać będziemy na pas dolny — kraty rozciągają się będą, z zastrzeżeniem uczynionem co do krat *a* i *b* na rys. 4 i 5¹⁾.

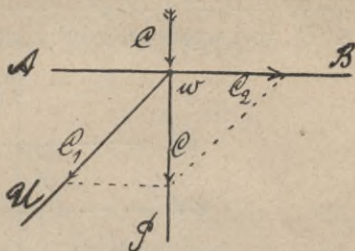
§ 2.

Przypuśćmy, że do rozpatrzenia mamy (rys. 8) węzeł w zawiasowy, t. j. ruchomy²⁾ około osi wspólnej przecięć wszy-

¹⁾ Model taki, jako bardzo niekosztowny, bo całość wynosi około 2 rub., może być łatwo przez każdego blacharza uskuteczniiony. Taki jeden model w r. 1906 został posłany do redakcji *Czas. Techn.* we Lwowie.

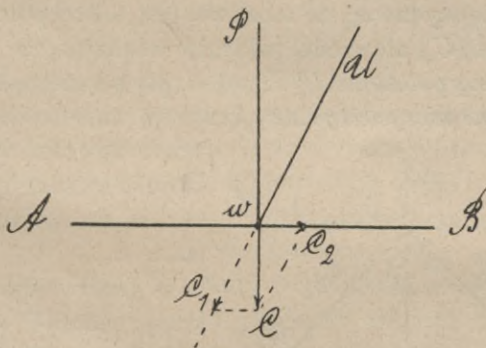
²⁾ Nie pochwalam nazwy *przegibny* lub *przegubny* albo *przegubowy*, bo są to wyrażenia pod każdym względem zupełnie złe; za lepsze uważam: połączenie zawiasowe albo ruchome, lub też węzeł zawiasowy albo ruchomy, jako zgodne z duchem języka.

stkich, zbiegających się w punkcie w , kierunków krat i pasa górnego AB w prześle mostu, pod działaniem obciążenia C , gdy są dwie kraty, jedna prostopadła P , druga ukośna U . Jeżelibyśmy tu przyjęli rozkład zwyczajny siły C na dwie składowe C_1 i C_2 , to musimy powiedzieć, że siła C_2 jest szkodliwą dla całego ustroju, bo dąży do zerwania całego przęsła z miejsca (na prawo, jak na rysunku); życzyć sobie tego wcale nie możemy.



Rys. 8.

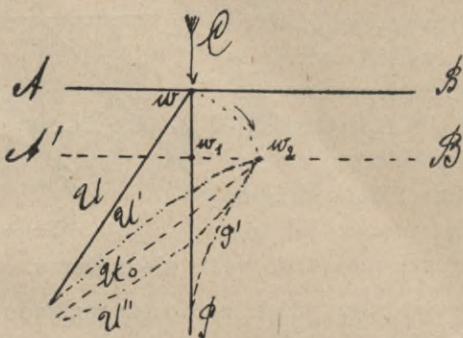
Jeżelibyśmy przypuścili znowu, że rozkładu powyższego sił nie będzie i siła C , mając pod sobą kratę prostopadłą P , na nią przejdzie w całości, to wypada, że kratka ukośna U zbyteczna, gdyż nie przyjmuje udziału należytego w pracy całości ustroju. Zupełnie to samo odpowiednio stosować się będzie i do węzła zawiasowego w na pasie dolnym AB (rys. 9),



Rys. 9.

pod działaniem siły C , gdy mieć będziemy jedną kratę prostopadłą P , drugą zaś ukośną U , i tutaj tworzy się siła pozioma szkodliwa raczej, niż pożyteczna C_2 , lub też niepotrzebną się staje kratka U .

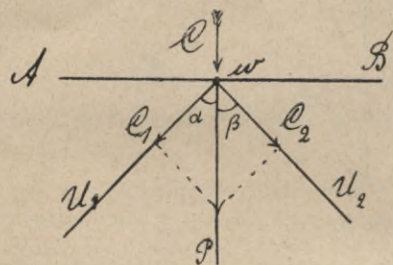
Rozbiór bliższy tego przypadku i model wskazują, że zachodzi tu zjawisko pośrednie. Mianowicie, jeżeli np. pas górny AB (rys. 10) pod ciśnieniem C , przejdzie do położenia $A'B'$, to i węzeł w , gdyby była tylko jedna krata prostopadła



Rys. 10.

P , zająłby miejsce w_1 ; ale, ponieważ istnieje także krata U , więc odepchnie ona węzeł na prawo, t. j. do położenie w_2 ; krata więc P musi się wygiąć i zająć położenie P' , krata U tak samo wygnie się, zajmując albo położenie U' albo U'' . Mogłoby się wydawać, że możliwe jest także położenie środkowe, proste U_0 , ale model właśnie wskazuje, że najczęściej wytwarza się położenie U'' . Stąd wypływa niezaprzeczenie, iż kraty ukośne niesymetryczne pociągają za sobą znaczne nie-

prawidłowości w pracy ustroju, podczas gięcia się przęsła; są zatem bardzo wadliwe.



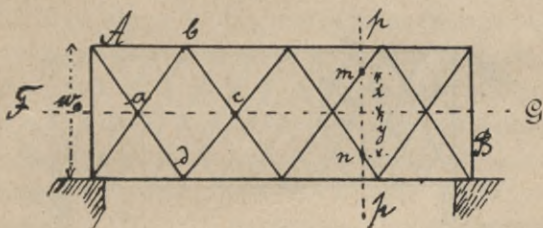
Rys. 11.

Łatwo spostrzedz, że kraty ukośne symetryczne (rys. 11), gdzie kąty $\alpha = \beta$, pomiędzy kratami ukośnymi U_1 i U_2 , a kratą prostopadłą P , — nie posiadają już tych wad: bo tutaj obciążenie C , rozkładając się na dwie siły równe i symetryczne C_1 i C_2 — nie wywołuje już w ustro-

ju, podczas gięcia się przeszła, tych zaburzeń i zбочeń jednostronnych, jakie widoczne były powyżej; wypadkowa zawsze tu spłynie po kracie prostopadłej P , nie wywołując sił bocznych jednostronnych. Te więc kraty nie są szkodliwe, bo nie wytwarzają sił szkodliwych¹⁾.

§ 3.

Jeżeli mamy jakiegokolwiek przeszło kratowe AB (rys. 12), to, niezależnie od tego, czy wprowadzimy do obliczeń momen-

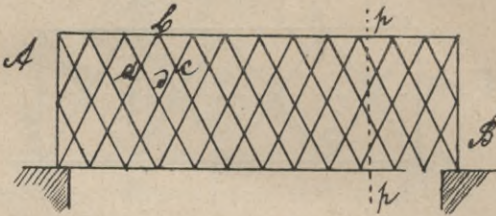


Rys. 12.

tu wytrzymałości M_w , na przecięciu dowolnem pp , wytrzymałość krat w miejscach m i n , odległych od osi obojętnej FG na wielkości x i y ; czy też tej wytrzymałości uwzględniać nie zechcemy, licząc tylko na masy materiału w pasach górnym i dolnym; zawsze wytrzymałość ta w rzeczywistości istnieje i w całości pracy przeszła rolę odpowiednią odgrywa. Weźmy to pod uwagę. Jeżeli będziemy mieli kraty rzadkie, t. j. takie, które dają oka a, b, c, d wielkie, spostrzedz musimy, że moment wytrzymałości M_w belki w punktach a i c w każdym oku będzie najmniejszy, zaś w punktach blizkich do b i d będzie największy; ze względu, że $(x = y)$ może się zmieniać od zera do $\left(\frac{w_0}{2}\right)$, gdzie w_0 wysokość mostu, widzimy, że wielkość

¹⁾ Przenosimy tu wszystkie rozumowania z węzłów zawiasowych na węzły nitowe, gdyż jest to w tym razie droga jedynie dostępna, jak wiadomo.

liczebna momentu, jako zależna od $x^2=y^2$, musi się w każdym oku ciągle wahać w bardzo znacznym stopniu. Aby praktycznie nie dało się to uczuć, trzeba znacznie nadkładać materiału w pasach, żeby pokryć ten brak wytrzymałości; zwiększa to znowóż koszt ogólny budowy. Naturalnie, że takiego chwiania się momentu wytrzymałości M_w w każdym oku za okoliczność pomyślną w ustroju przyjąć nie można. Trzeba więc powiedzieć, że *kraty rzadkie są także wadliwe*. Na tej podstawie również możemy orzec, iż *kraty gęste* (rys. 13) nie posiadają tej wady, bo tu oka $abcd$ są małe; płaszczyzna za-

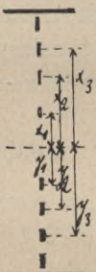


Rys. 13.

tem przecinająca pp w ruchu swoim na prawo lub na lewo, wykaże o wiele mniejszy stopień wahań się wielkości liczebnej wytrzymałości M_w , co stanowi znaczną już korzyść ustroju. Bo tutaj zawsze będziemy mieli wiele krat w przecięciu, na wysokościach x_1, x_2, x_3 , i t. d., y_1, y_2, y_3 , i t. d. (rys 14);

gdy tymczasem w kratkach rzadkich będziemy mieli jedną lub dwie tylko kraty w przecięciu; a to stanowi, bez zaprzeczenia, wielką różnicę w całości przeszła. Kraty więc gęste mają istotną przewagę nad kratami rzadkimi, tak ze względu na większą stałość ustroju, jak również i ze względu na większą taniłość budowy.

§ 4.



Rys. 14.

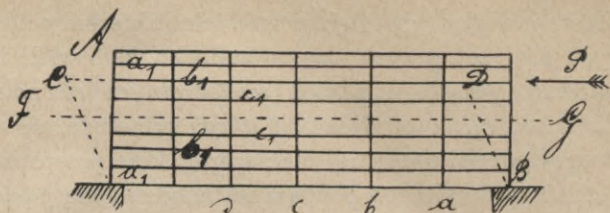
Biorąc wszystko to, co powiedziano powyżej, pod baczną uwagę, przyjdziemy do wniosku, że

mosty współczesne nie są rzeczywiście ostatnim wyrazem doskonałości¹⁾.

Zastanawiając się głębiej nad charakterem wad, wytkniętych powyżej, przychodzę do wniosku, że o wiele będzie prawidłowsze przeszło o pasach *wielokrotnych równoległych* (rys. 15) a_1, b_1, c_1, \dots od dołu i od góry; symetrycznie ułożonych względem osi obojętnej $F'G'$; szereg krat prostopadłych a, b, c, \dots służy do silnego powiązania między sobą pasów poziomych, równoległych. Utworzone w ten sposób przeszło AB za doskonalsze uważam, najpierw z tego powodu, że odbywa się tu rozkład sił prawidłowy, bo siły jednostronne boczne nie powstają tutaj; powtóre, moment wytrzymałości nie podlega tu ciągłym zmianom, o jakich mówiliśmy powyżej; po trzecie, da się wyzyskać lepiej wytrzymałość całkowita materiału, gdyż materiał pracować tu może w warunkach o wiele lepszych, niż dotąd; bowiem pasy równoległe zbliżają zupełnie ustrój przeszła do budowy naturalnej, przyrodzonej—belek. Jak bowiem widzimy, gdy przyroda rozwiązuje u siebie to samo zadanie, np. w drzewach i wogóle w świecie roślinnym, to używa właśnie włókien podłużnych, równoległych, nawet stosuje całe szeregi warstw włókien podłużnych i równoległych, wszystko to wiązuje mocno pomiędzy sobą spojeniami prostopadłymi właśnie. Do ustroju takiego zbliża się zupełnie przeszło AB (rys. 15). W ustrojach belek naturalnych nie widzimy wzmocnień ukośnych, któreby nam przypominały nasze kraty ukośne. Sądzę z tego wszystkiego, że kraty ukośne w danym względzie więcej też są dziełem fantazyi, aniżeli potrzeby rzeczywistej i świadomości celowej z naszej strony. W przyrodzie spotykać się dają włókna ukoś-

¹⁾ Zdarzyło mi się raz usłyszeć zdanie, ciekawe w tej mierze, znanego specjalisty z innej dziedziny nauki, że technika od najlepszego mostu jest bardzo jeszcze daleką, na co wskazuje sama obfitość różnych wzorów: bo most najlepszy i najtańszy zarazem, będzie zawsze jednego wzoru. Może jest tu dużo prawdy.

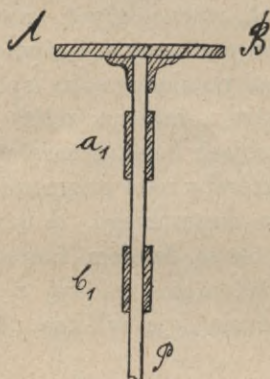
ne, przeważnie, zdaje się, tylko w świecie zwierzęcym, w skórach zwierząt, czyli w ustrojach takich, które służyć powin-



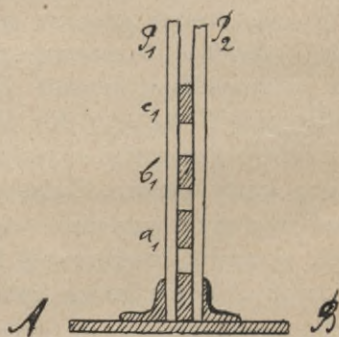
Rys. 15.

ny do okrycia objętości pewnych, biorąc np. idealnie, do pokrycia kuli geometrycznej. Pokrycie takie, wskutek zastosowania warstw włókien, krzyżujących się z sobą ukośnie, nabiera we wszystkich kierunkach wytrzymałości i rozciągliwości jednostajnej. W belkach zaś chodzi nam tylko o wytrzymałość w jednym kierunku pionowym¹⁾, *głównie*.

Zastosowanie w mostach pasów równoległych, ułatwia znacznie wyzyskanie lepszego materiału; bo, przy jedna-



Rys. 16.



Rys 17.

¹⁾ Nie należy przypuszczać, aby przęsło *AB* (rys. 15) pochyliło się i przybrało położenie *CDB*: bo, ani węzły nitowane nie są osiami obrotu, ani nie ma siły zewnętrznej *P*, któraby przęsło pochylała.

kowej wszędzie grubości, pas każdy od środka ku końcom może być coraz węższy, jak tego właśnie wymaga belka o wytrzymałości jednostajnej przy zginaniu. Wygrywa więc most na lekkości i trwałości, a jednocześnie i na taniości także. Pasy równoległe, jak wskazują rys. 16 i 17, mogą obejmować z dwóch stron kratę prostopadłą P lub mogą być wpuszczane pomiędzy dwie kraty prostopadłe P_1, P_2 , zawsze napłask; t. j. płaszczyzna pasów a_1, b_1, c_1, \dots powinna być prostopadłą do płaszczyzny pasów głównych AB dolnego i górnego.

Zasada Dźwigni

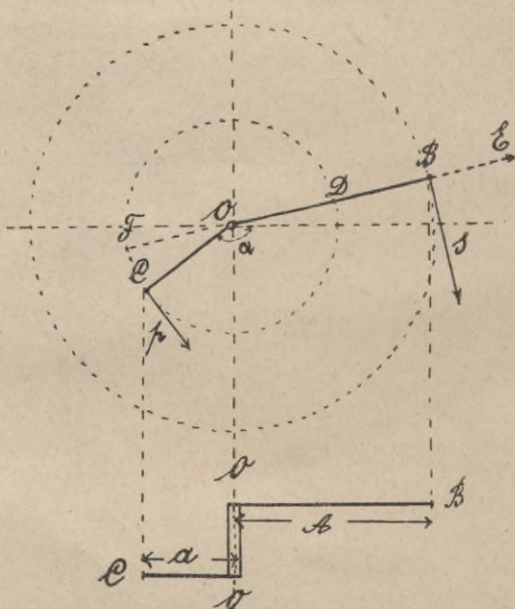
W

Wytrzymałości Materiałów.

§ 1.

Mamy dźwignię łamaną lub kolankową COB (rys. 1); w punkcie O znajduje się punkt oparcia dźwigni, lub wszystko jedno w danym razie, jej oś obrotu, prostopadła do płasz-

Rys. 1.



Rys. 2.

czyzny rysunku. $OB=A$ wyraża ramię dłuższe dźwigni; $OC=a$ ramię krótsze; s —siła, umieszczona¹⁾ prostopadle do ramienia A w punkcie B ; p —opór, działający prostopadle do ramienia a w punkcie C ; α —kąt pomiędzy kierunkami obydwóch ramion.

Jeżeli kąt $\alpha=180^\circ$, t. j. ramię OC przybierze kierunek OF , przedłużonego ramienia OB , to, podług dawnego podziału, jak wiadomo, był to rodzaj I-szy dźwigni.

Gdy $\alpha=0^\circ=360^\circ$ czyli, gdy ramię OC przybiera położenie OD , na kierunku ramienia dłuższego OB —był to rodzaj II-gi dźwigni.

Gdy, na koniec, ramię OC , przybrawszy kierunku OB , stanie się od niego dłuższe, będzie np. OE , wtedy mamy rodzaj III-ci dźwigni. To jest:

$\alpha = 180^\circ$ i $a < A$ I-szy rodzaj dźwigni,

$\alpha = 0^\circ = 360^\circ$ i $a < A$ II-gi rodzaj dźwigni,

$\alpha = 0^\circ = 360^\circ$ i $a > A$ III-ci rodzaj dźwigni.

Jeśli ramiona A i a (rys. 2) leżą w dwóch różnych płaszczyznach, nie zmienia to, naturalnie postaci rzeczy; przypuszczamy tylko jedno, że oś OO jest dostatecznie mocną, aby przenieść natężenie sił z jednego ramienia na drugie.

Podział dźwigni czyli drąga, jako maszyny prostej, na 3 rodzaje podobne—jest zupełnie dowolny i, właściwie mówiąc, na niczem koniecznym nie oparty; możnaby np., przy $\alpha=90^\circ$, przyjąć rodzaj IV-ty dźwigni, a przy $\alpha=270^\circ$, przyjąć jeszcze rodzaj V-ty dźwigni, i t. d. Jednak, w gruncie rzeczy, wszystkie te podziały są zbyteczne, bowiem istota rzeczy—wskazuje nam jasno—jedną tylko rzeczywiście dźwignię. Ponieważ, jak widać, ramiona a i A mogą, każde z osobna, zakreślać okręgi całkowite kół, więc zupełnie rzecz zro-

¹⁾ Należy mówić punkt *umieszczenia* albo punkt *działania* siły, nie zaś—przyczepienia albo przyłożenia, gdyż jest to przykre bardzo—psucie języka.

zumiała, iż ramiona mogą stawać względem siebie, we wszelkich położeniach; ale, zawsze, jest to ta sama ciągle, jedna dźwignia. Również siła s i opór p —mogą także działać, to na jednym, to znów na drugim ramieniu. Słusznie można tylko pozostawić nazwę, przy dźwigni COB —łamanej, a przy FOB lub OBE —prostych, jako określenia pomocnicze jedynie; bo to wypływa z natury rzeczy.

Jako jest jedna dźwignia, tak jeden również istnieje związek pomiędzy jej ramionami i siłami, a mianowicie:

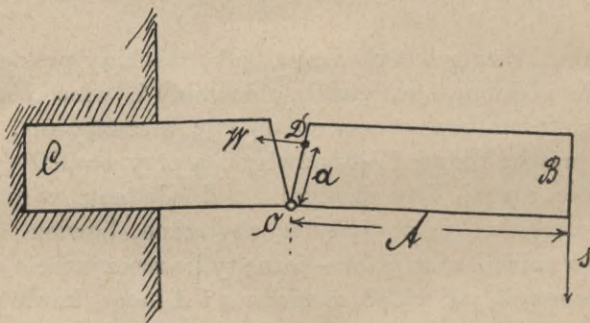
$$sA = pa \dots \dots \dots (1)$$

wyrażający równowagę momentów; t. j. moment siły sA równać się powinien momentowi oporu pa , jeżeli chcemy mieć dźwignię w równowadze.

§ 2.

Z g i n a n i e.

Mamy belkę BC , zamocowaną jednym końcem (rys. 3) C stale, a na drugim końcu B działa siła s , która zgina belkę na dół.



Rys. 3.

Jeżeli belka rzeczywiście pęknie w płaszczyźnie OD , to punkt O rozpatrywać możemy, jako oś obrotu dźwigni, lub jako punkt oparcia jej; przyczem A —będzie ramię działania

siły s , zaś a —ramię wypadkowe, t. j. jako średnie ze wszystkich ramion cząstkowych—działania siły W —*wytrzymałości przecięcia poprzecznego belki*, w płaszczyźnie OD ; punkt D jest punktem umieszczenia właśnie wypadkowej wytrzymałości całego przecięcia danego. Następuje, oczywiście, bardzo wyraźny i jasny związek ramion dźwigni i jej sił, podany w zrówn. (1), gdzie opór p zastępuje teraz wytrzymałość W przecięcia poprzecznego:

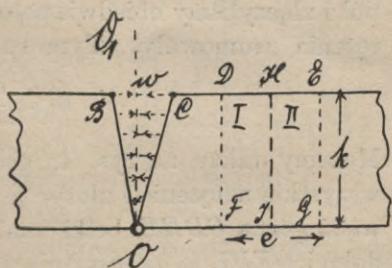
$$Wa = sA \quad \dots \quad (2).$$

Oznaczmy $Wa = m$, jako moment wewnętrzny (czyli moment wytrzymałości); $sA = M$, jako moment zewnętrzny (czyli zginający); to mamy:

$$m = M \quad \dots \quad (3).$$

Moment M jest wiadomy, obliczyć trzeba tylko moment sił wewnętrznych m .

W tym celu zwrócimy uwagę na to, że gdy belka pęka np. w płaszczyźnie OD , to wszystkie włókna muszą być zerwane, t. j. materiał ulega *rozciąganiu*. Jeżeli *wytrzymałość gatunkową* na rozciąganie, odniesioną do 1 cm^2 , oznaczymy przez w , wysokość przecięcia poprzecznego belki przez k , szerokość przez e (rys. 4), to znajdziemy, zapomocą rozumowania poniższego, wartość liczebną wielkości W . Gdy w punkcie O mamy oś obrotu dźwigni, to rzecz jasna, iż na krawędzi górnej BC —materiał belki uległ największemu nateżeniu; takowe nie powinno być większe od wytrzymałości gatunkowej w , ale jej równe tylko.

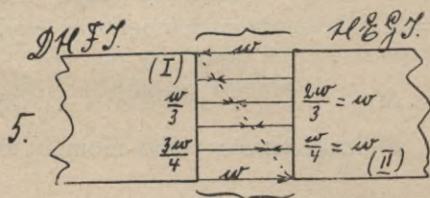


Rys. 4.

Jeżelibyśmy wprost nateżenie w przedstawili jako długość BC , t. j. jako podstawę trójkąta OBC , to nateżenia włókien, coraz bliższych do wierzchołka O , będą coraz mniejsze, w sto-

sunku właśnie do tych podstaw trójkąta, ciągle malejących; aż, w samym punkcie O , gdzie ta podstawa stanie się równą zeru i natężenie włókna będzie równe zeru. Zatem, w przecięciu poprzecznym belki, jakimkolwiek, natężenia rozwijają się różne, mianowicie od największego w , aż do równego zeru. Należy te wszystkie natężenia zsumować, aby otrzymać wartość W .

Podzielimy, w tym celu, przecięcie $DEFG$ linią HI na 2 połowy równe: połowę I-ą, $DHIF$ i połowę II-ą, $HEGI$;



Rys. 5.

odjawszy te połowy od siebie, złożymy je potem tak, jak wskazuje rys. 5; t. j., aby góra połowy II-ej — zesła się z dołem połowy I-ej. Wtedy zpozatrzejemy, że wszystkie natężenia, zupełnie ściśle

i naturalnie, układają się na całym przecięciu poprzecznym, wszędzie — do całkowitego natężenia w , wytrzymałości gatunkowej materiału. Trzeba je teraz odnieść tylko do połowy całego przecięcia, gdyż podzieliśmy to przecięcie na pół i złączyliśmy obiedwie połowy z sobą, aby się przez to natężenia zsumowały. Tym sposobem, otrzymamy, że:

$$W = \frac{ek}{2} w \dots \dots \dots (4).$$

Możemy także na rys. 4, podzielić na połowę linią OO_1 — wszystkie natężenia i złożyć je potem do siebie tak, aby krawędź górna $CDHE$ belki znalazła się na miejscu krawędzi dolnej $OFIG$, a ta ostatnia z dołu — przeszła do góry; t. j. aby część prawa belki obróciła się na 180° ; — wtedy powierzchnia przecięcia poprzecznego pozostaje całkowita, a natężenia sumują się wszędzie do równych $\left(\frac{w}{2}\right)$; t. j. mieć będziemy:

$$W = \frac{w}{2} ek \dots \dots \dots (5).$$

Jest to ta sama wartość, co i wzór (4). Jeżeli oznaczymy zatem przez

$$P = ek \dots \dots \dots (6).$$

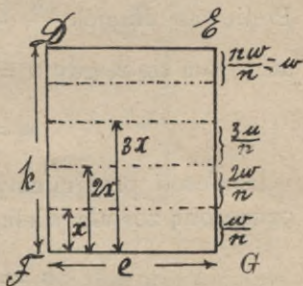
to będziemy mieli wzór ogólny

$$W = \frac{Pw}{2} \dots \dots \dots (7).$$

wytrzymałość przecięcia poprzecznego belki równa się: *połowie iloczynu powierzchni przecięcia poprzecznego, przez wytrzymałość gatunkową materiału.*

Wzór (7), jako ogólny, stosuje się do wszelkich form możliwych, t. j. okrągłych, kwadratowych, krzyżowych i t. p., jak również i do wszelkich innych, aby tylko one były symetryczne w kierunku poziomym i pionowym *HI* (rys. 4); niesymetryczne zaś, jak to jasno wypada z rów. (2) (rys. 3) powinny być odpowiednio, w każdym wypadku, obliczone na podstawie form prostokątnych.

Pozostaje jeszcze do oznaczenia długość ramienia *a*, na którym działa siła *W* — co znajdziemy w sposób następujący (rys. 6 i 4). Podzielmy, w kierunku pionowym, przecięcie poprzeczne belki *DEFG* na *n* części równych; wysokość każdego paska będzie *x*, zatem $k = nx$; zgodnie z zasadą stopniowego



Rys. 6.

zmniejszania się napięcia włókien od góry do dołu (rys. 4), musimy przyjąć, że na pasku dolnym, ostatnim, przecięcia, napięcie włókien równać się będzie $\left(\frac{w}{n}\right)$ i na każdym wyższym pasku — odpowiednio będzie większe; mianowicie, na

2-im już $\left(2 \frac{w}{n}\right)$, na 3-im już $\left(3 \frac{w}{n}\right)$ i t. d., aż na ostatnim, czyli na krawędzi górnej belki — będzie już $\left(n \frac{w}{n}\right)$, t. j.: w .

W ten sposób, moment wytrzymałości sił wewnętrznych m —równać się będzie sumie wszystkich momentów cząstkowych, t. j. wszystkich pasków:

$$m = Wa = ex \frac{w}{n} x + ex \frac{2w}{n} 2x + ex \frac{3w}{n} 3x + \dots + ex \frac{nw}{n} nx \dots (8).$$

Po uproszczeniu, otrzymamy:

$$m = ex^2 \frac{w}{n} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \dots \dots \dots (9).$$

Ponieważ suma kwadratów liczb kolejnych, od 1 do n — równa się: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, więc:

$$m = \frac{ek^2w}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ek^2w}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \dots (10).$$

Ponieważ ułamek $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{1+3n+2n^2}{n^2}$ u kre-su równa się 2, gdy $n = \infty$; więc, otrzymujemy:

$$m = \frac{2ek^2w}{6} \dots \dots \dots (11).$$

Jeżeli przyjmiemy teraz pod uwagę równ. (5), gdzie oznaczoną została wielkość siły W , to otrzymamy, że:

$$a = \frac{2}{3} k \dots \dots \dots (12).$$

To znaczy, że ramię wypadkowe, na którym działa siła wy-trzymałości W , przecięcia poprzecznego belki, wynosi, licząc od osi obrotu dźwigni, $\frac{2}{3}$ całej wysokości przecięcia.

Tym sposobem, obiedwie części wzoru (2)—są teraz wia-dome już i w wypadku szczegółowym z równ. (5) dadzą:

$$Wa = \frac{ek^2w}{3} = sA \dots \dots \dots (13)$$

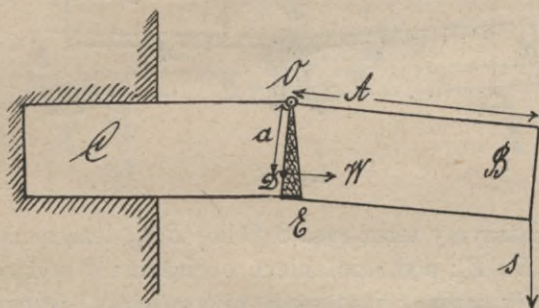
lub, w przypadku ogólniejszym (równ. 7):

$$Wa = \frac{Pkw}{3} = sA \dots \dots \dots (14).$$

Wskazana więc na rys. 3 dźwignia łamana DOB , występująca przy zjawisku zginania, uczy nas, że, gdy pomiędzy jej ramionami i siłami—zachowamy równowagę, — zabezpieczymy przez to trwałość samej belki także, gdyż wtedy moment wytrzymałości materiału — pokona moment siły zginającej (teoretycznie—dorówna mu).

§ 3.

Na rys. 3—przedstawiona belka, która pęka — wskutek zerwania wszystkich włókien w przecięciu poprzecznym; na rys. 7—przedstawiamy belkę CB , która pęka pod działaniem



Rys. 7.

siły zginającej s , wskutek *zgniecenia* materiału pomiędzy płaszczyznami OE i OD ; wtedy oś O obrotu dźwigni łamanej DOB znajdować się będzie na krawędzi górnej belki. Przecięcie OD było na jednej płaszczyźnie z przecięciem OE przed zgnieceniem materiału; po zgnieceniu zaś, albo, wogóle—po rozpoczęciu działania przez siłę zginającą s — płaszczyzny DO i OE —rozchodzą się i wytwarza się oddziaływanie wytrzymałości W przecięcia poprzecznego. Ponieważ co do tego zjawiska nic się nie zmienia w rozumowaniu, przeprowadzonym przy belce na rys. 3,—więc wszystko to samo

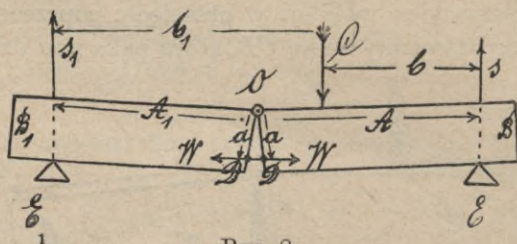
stosuje się i do wypadku obecnego; należy tylko oznaczyć przez w' — wytrzymałość gatunkową materiału na *zgniata-
nie*, bowiem zdolność materiału — wytrzymać rozciąganie
i zgniatać, może być nie zawsze równa. Mielibyśmy więc
z równań 13 i 14, że:

$$\frac{ek^2w'}{3} = sA \quad \dots \quad (15)$$

i

$$\frac{Pkw'}{3} = sA \quad \dots \quad (16).$$

Jeżeli, naturalnie, $w' = w$, to otrzymujemy wzory
dawne: 13 i 14.



Rys. 8.

Rozpatrzmy teraz rys. 8 belkę BB_1 , leżącą na dwóch
oparciach E i E_1 ; pod działaniem obciążenia C wytworzą się
dwa oddziaływania s i s_1 ; jeżeli przypuścimy, że oś obrotu
dźwigni leży na krawędzi górnej, w punkcie O i że materiał
belki podlega rozciąganiu, — to warunki równowagi dadzą nam:

$$sb = s_1b_1 \quad \text{i} \quad s + s_1 = C \quad \dots \quad (17)$$

także

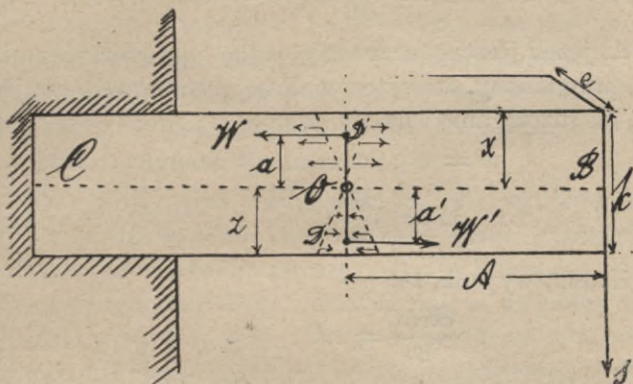
$$\left. \begin{aligned} aW &= sA \\ aW &= s_1A_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

bo tutaj tworzą się dwie dźwignie: część prawa belki ma swoją
dźwignię BOD i część lewa ma swoją także dźwignię B_1OD .
W miarę tego, jak rozpatrywać będziemy zjawisko, t. j. czy
następuje rozciąganie materiału belki, czy zgniatać, — na-
leży wziąć zamiast aW — albo $\left(\frac{Pkw}{3}\right)$, albo też $\left(\frac{Pkw'}{3}\right)$.

Moment wytrzymałości $m = aW$ jest tutaj jeden, wspólny obydwóm częściom BB_1 belki.

§ 4.

Dotąd rozpatrywaliśmy zjawisko zginania w przypadkach takich, w których oś O obrotu dźwigni — mieściła się zawsze na jednej z krawędzi belki, albo na górze, albo na dole; ale, jeżeli przypuścimy w belce BC (rys. 9) oś środkową



Rys. 9.

jej, podłużną CB , albo inaczej—linią obojętną belki i na tej właśnie linii przypuścimy położenie punktu O oparcia dźwigni;—to przypadek ten różnić się będzie od poprzednich. Mianowicie, w połowie górnej belki, ponad osią CB w przecięciu DD znajdzie rozciąganie włókien; a pod osią CB w przecięciu DD — znajdzie zgniatanie włókien; do połowy górnej odnosi się wytrzymałość gatunkowa materiału na rozciąganie, w ; a do połowy dolnej—wytrzymałość na zgniatanie, w' . Oczywiście, moment wytrzymałości m (rów. 3), równać się będzie sumie momentów obydwóch połówek belki, t. j. dwóch dźwigni:

$$m = Wa + W'a' \dots \dots \dots (19).$$

zachodzą tu bowiem, jakby jednocześnie, obydwaj wypadki rozpatrzone poprzednio; do każdej też połowy belki stosuje się właściwy tejże wywód. Równ. (11, 13) dadzą nam:

$$m = \frac{ex^2w}{3} + \frac{ez^2w'}{3} \dots \dots \dots (20).$$

Jeżeli przypuścić, iż $x = z = \frac{k}{2}$, — to :

$$m = \frac{ek^2w}{12} + \frac{ek^2w'}{12} \dots \dots \dots (21).$$

A, jeżeli jeszcze uczynimy jedno uproszczenie, mianowicie, przyjmiemy, że wytrzymałości gatunkowe — są jednakowe, na rozciąganie i na zgniatanie, t. j., że:

$w = w'$; otrzymamy wtedy:

$$m = \frac{ek^2w}{6} \dots \dots \dots (22).$$

Zatem, wypada, że:

$$\frac{ek^2w}{6} = sA \dots \dots \dots (23).$$

Porównyując ten wzór ze wzorem 13, widzimy, że zachodzi bardzo wielka różnica w zginaniu, gdy oś O dźwigni leżeć będzie na jednej z krawędzi belki, lub na jej linii środkowej: w 2-ch pierwszych wypadkach przecięcie poprzeczne belki ma wytrzymywać tylko 3 momenta sA ; w ostatnim zaś wypadku musi ono wytrzymać 6 tych samych momentów sA ; t. j. w tym razie belka musi być 2 razy mocniejszą. Nie może to być wcale rzeczą obojętną — wydać na materiał dwa razy mniej, lub dwa razy więcej.

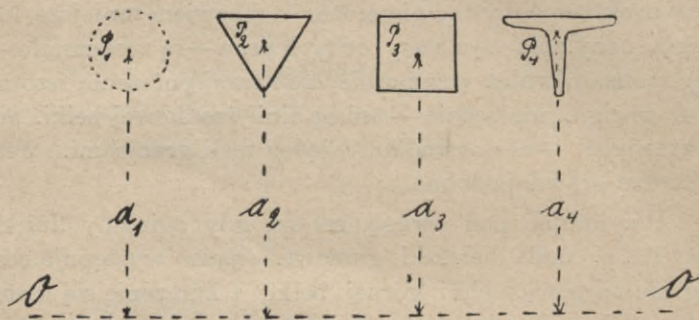
Teorya dotychczasowa podaje jeden tylko wzór, mianowicie (23), na wszystkie te wypadki i nie odróżnia ich; tymczasem, okazuje się, że mogą one istnieć. Kiedy oś O dźwigni, przy zginaniu, przenosi się na jedną z krawędzi belki, a kiedy pozostaje na linii środkowej — nie wiemy tego: należałoby to — zbadać dopiero, zapomocą odpowiednich prób

i doświadczeń. Zauważona niezgodność w wielu wypadkach pomiędzy obliczeniami ze wzoru (23) i praktyką, tłumaczona dotąd wyłącznie tylko wpływem różnorodnych wartości w i w' , przejawiających się w materiale, — oprócz tej przyczyny, może mieć także jeszcze i tę głębszą przyczynę, że oś O dźwigni, w rozmaitych warunkach, może mieć rozmaite położenia, — to na krawędzi, to na środku przecięcia poprzecznego. Ponieważ podług teorii, czyli w ścisłości myśli, nie się w praktyce odbywać nie może, — albowiem mniejsze lub większe uchylenia się materji od tych praw — są zrozumiałe; — więc można również przypuścić, że i tutaj położenie istotne osi O dźwigni, nie będzie — ani na linii środkowej belki, ani na krawędzi, — ale pośrodku, między temi granicami. Jest to bardzo prawdopodobne.

Przyjmując pod uwagę, że np. gdy zginamy linijki, pręty i t. p. małe beleczki gumowe, — jasno występuje rozciąganie na powierzchni górnej belki, a kurczenie się materiału czyli zginięcie — na części dolnej; — możnaby wnosić, że właśnie w razach, gdy ma się do czynienia z ciałami słabymi, o wytrzymałościach w i w' nie wielkich — oś O dźwigni leży blisko osi obojętnej CB (rys. 9); w materiałach zaś mocnych — oś O leży zapewne blisko krawędzi. Wtedy do drzewa, ołowiu, cyny, miedzi i t. p. — należałoby stosować może wzór (23); a do stali, żelaza i t. p. materiałów mocnych — wzór (13). Ale, powtarzamy, iż rzecz ta wymaga — zbadania. Zapewne, że i forma przecięcia poprzecznego, nie pozostaje tu bez wpływu; tak np., w przecięciach kołowych, owalnych — można łatwiej przypuścić, iż oś O dźwigni znajduje się bliżej środka przecięcia poprzecznego, czyli bliżej do linii obojętnej CB (rys. 9); w przecięciach zaś prostokątnych, szczególnież zaś w niesymmetrycznych względem osi poziomej, a także i w przesłach mostowych, z powodu jazdy górą lub dołem — belki; można przypuszczać znajdowanie się osi O dźwigni — bliżej do jednej z krawędzi.

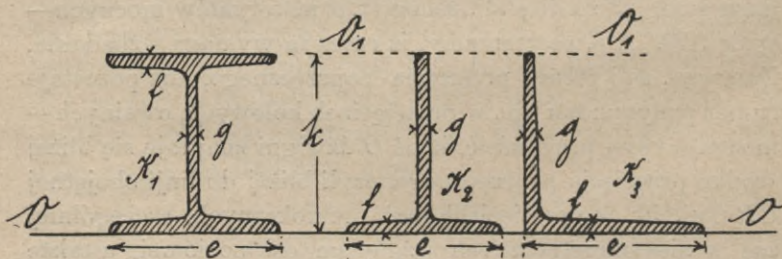
§ 5.

Jeżeli ustrój belek taki, że masy materiału przecięcia poprzecznego, jak wskazują (rys. 10) powierzchnie $P_1, P_2, P_3 \dots$ ześrodkowane są przeważnie, albo też — zupełnie na odległościach, od osi OO obrotu dźwigni, $a_1, a_2, a_3 \dots$, to wtedy, rzecz zrozumiała, iż wytrzymałość takich przecięć, należy brać nie z rów. (7) ale bezpośrednio: $W = P_1 w = = P_2 w = P_3 w = \dots$; również wielkość ramienia nie



Rys. 10.

z rów. (12), ale całkowite, $a_1, a_2, a_3 \dots$, czyli odległość od osi OO — środków ciężkości, odpowiednich przecięć poprzecznych; odpowiednio też moment wytrzymałości byłby $m = wP_1 a_1 = wP_2 a_2 = wP_3 a_3 = wP_4 a_4 \dots$ i t. d.



Rys. 11.

Przypuśćmy, że mamy krzyżówkę podwójną K_1 , pojedynczą K_2 , kątownik K_3 ; oś obrotu dźwigni OO przechodzi

przez ich krawędzi dolne; to ich dokładne momenta wytrzymałości, byłyby odpowiednio (rys. 11):

$$\left. \begin{aligned} K_1 \dots m &= efwk + \frac{g(k-f)^2w}{3} + \frac{ef^2w}{3} \\ K_2 \dots m &= \frac{gk^2w}{3} + \frac{ef^2w}{3} \\ K_3 \dots m &= \frac{gk^2w}{3} + \frac{ef^2w}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (24).$$

Ale, ponieważ półki dolne tych przecięć, jak to widać na rys. 3 i 4, mają natężenia włókien, w bliskości osi O dźwigni, równe prawie zeru; więc stąd wypada, że półek dolnych, w rachunek brać nie należy, właściwie mówiąc, tak z powodu niedziałania ich włókien, jak też i z powodu małej długości ramienia f , na którym występuje wytrzymałość efw — każdej półki. Zamiast więc układu (24), będziemy w takich razach mieli wyrażenie praktyczniejsze:

$$\left. \begin{aligned} K_1 \dots m &= efwk + \frac{g(k-f)^2w}{3} \\ K_2 \dots m &= \frac{gk^2w}{3} \\ K_3 \dots m &= \frac{gk^2w}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (25).$$

I odwrotnie, mając przecięcia K_2 i K_3 — lub tym podobne, jeżelibyśmy mogli rzeczywiście wytworzyć oś obrotu dźwigni, zamiast OO , na końcu drugim przecięć, t. j. O_1O_1 ; to rzecz jasna, że teraz, materiał, zawarty w półkach dolnych, będzie zupełnie wyczerpany, bo teraz te właśnie włókna będą ulegać natężeniu największemu. Wtedy moment wytrzymałości ich byłyby odpowiednio:

$$K_2 \text{ i } K_3 \dots m = efwk + \frac{g(k-f)^2w}{3} \dots \dots (26).$$

Jeżeli w równ. (23) podzielimy obiedwie strony przez wytrzymałość gatunkową w , to otrzymamy:

$$\mu = \frac{ek^2}{6} = \frac{sA}{w} \dots \dots \dots (27)$$

wielkość μ ¹⁾, zwaną w dotychczasowych wydawnictwach — momentem wytrzymałości — znajdujemy gotową w rozmaitych tablicach i podręcznikach, zastosowaną do mnóstwa rozmaitych przecięć poprzecznych, używanych powszechnie w praktyce; można przeto, bez osobnego obliczania, brać je gotowe zawsze, — pamiętając tylko, że odnosi się to do położenia osi O dźwigni — na linii obojętnej, belki; a, jeżeliby miała oś dźwigni przechodzić przez krawędź górną lub dolną tejże belki, — to, jak wiemy, musi być wtedy:

$$\mu' = \frac{ek^2}{3} = \frac{sA}{w} \dots \dots \dots (28)$$

t. j. wtedy: $\mu' = 2\mu$.

§ 6.

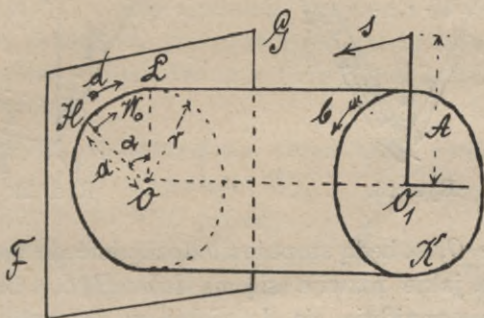
Z k r ę c a n i e.

Na rys. 2 — ramiona dźwigni leżą w dwóch płaszczyznach, oddalonych mniej lub więcej od siebie; ten właśnie wypadek zachodzi przy zkręcaniu. Jeżeli mamy ciało HLK (rys. 12), o przecięciu poprzecznym kołowym, umocowane w płaszczyźnie FG , a na drugim końcu K , na ramieniu A — działa siła zkręcająca s , — to, rozpatrując wytrzymałość ciała w płaszczyźnie FG lub jakiegokolwiek innej, widać, iż od końca K , w płaszczyźnie którego działa właśnie siła s , płaszczyzna FG — zawsze musi być mniej lub więcej — odległą; długość OO_1 — wyrażać będzie odległość pomiędzy płaszczyznami omawia-

¹⁾ Wielkość $\left(\frac{ek^2}{6}\right)$ i inne, jej podobne, niesłusznie została nazwaną momentem wytrzymałości: przecie tu niema nawet wielkości w , charakteryzującej wytrzymałość właśnie. Moment wytrzymałości $m = Wa = \frac{ek^2w}{3}$ lub $\frac{ek^2w}{6}$.

nemi, albo lepiej, pomiędzy ramionami dźwigni. Jeżeli zkręcanie następuje w kierunku strzałki b , to opór materiału czyli wytrzymałość W_0 przecięcia, jako oddziaływanie, mieć będzie kierunek strzałki d , odwrotny. Oznaczając przez a — ramię siły wytrzymałości przecięcia, dla równowagi mamy:

$$W_0 a = s A \dots \dots \dots (29).$$



Rys. 12.

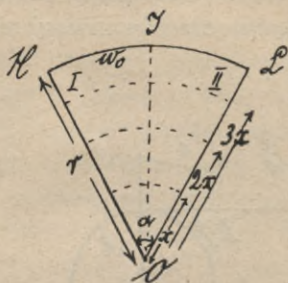
Iloczyn $sA = M_0$ — jest momentem sił zewnętrznych czyli momentem zkręcającym; zaś $W_0 a = m_0$ — jest momentem sił wewnętrznych czyli momentem wytrzymałości przy zkręcaniu. Zatem, mamy zawsze:

$$m_0 = M_0 \dots \dots \dots (30).$$

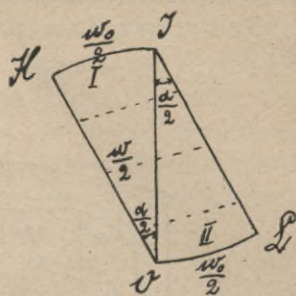
Ażeby uprościć rozbiór, nie będziemy zwracać uwagi na zginanie, jakie często powstaje przy zkręcaniu, bo to nie zmienia natury zkręcania; ale samo zkręcanie rozpatrzmy. Istota tego zjawiska polega na tem, że promień LO przecięcia poprzecznego, po zkręceniu — zajmuje położenie HO , różniące się od pierwotnego o kąt α .

Moment $M_0 = sA$, jako wiadomy, — nie wymaga obliczenia; potrzeba obliczyć tylko moment wytrzymałości $m_0 = W_0 a$. Niech będzie, w tym celu, wycinek HOL (rys. 13) — ten sam, co i na rys. 12; jeżeli przy kącie α nastąpiło pęknięcie materiału, to znaczy, że włókna na po-

wierzchni walca, na łuku HIL doznały największego nateżenia; inne zaś wszystkie łuki, nie o promieniu r , ale o promieniach x , $2x$, $3x$ i t. d. — począwszy od nateżenia = 0,



Rys. 13.



Rys. 14.

w punkcie O , — będą stopniowo dochodzić do nateżenia największego, jakie rozwija się na łuku HIL . Oczywiście, iż te nateżenia znajdują się do siebie w stosunku do owych właśnie łuków albo, co na jedno wypada, do ich promieni. Jeżelibyśmy tedy, dla krótkości, przyjęli łuk HIL — za samo nateżenie, — to rzecz jasna, iż, aby ciało nie pękło, potrzeba, aby łuk $HIL = w_0$, gdzie w_0 — znaczy wytrzymałość gatunkową materiału na zkręcanie; jak wiadomo, ta wytrzymałość jest równą wytrzymałości na zcinanie, czyli $\frac{3}{4}$ do $\frac{4}{5}$ wytrzymałości gatunkowej podczas rozciągania, t. j. $w_0 = \frac{4}{5}w$; odnosi się również do 1cm^2 przecięć poprzecznych. Jeżeli wycinek $HILO$ podzielić linią IO na dwie części równe, I-ą lewą i II-ą prawą i złożyć, jak wskazano na rys. 14, aby góra połowy drugiej znalazła się na dole u połowy pierwszej, — to łatwo zauważyć, że wszystkie nateżenia, od zera zwiększające się, aż do w_0 na rys. 13, tutaj sumują się ściśle i widocznie przytem, na całej dawnej powierzchni wycinka, gdyż ta się nie zmieniła — wszędzie do połowy nateżenia największego w_0 ; — t. j. mamy¹⁾:

¹⁾ Odnosząc do powierzchni całego koła.

$$W_0 = \pi r^2 \frac{w_0}{2} \dots \dots \dots (31).$$

Jeżeli zaś ogólnie nazwiemy powierzchnię przecięcia poprzecznego—ciała, przez P —to

$$W_0 = P \frac{w_0}{2} \dots \dots \dots (32).$$

Zatem, jak i przy zginaniu, tak i przy zkręcaniu,—wytrzymałość przecięcia poprzecznego ciał zkręcanych, równa się: *iloczynowi powierzchni przecięcia przez połowę wytrzymałości gatunkowej.*

Pozostaje do znalezienia teraz tylko ramię a , na którym działa siła wytrzymałości W_0 .

Weźmy część BOC przecięcia poprzecznego i podzielmy je od środka ku obwodowi na n pasków równych, o wysokości x ;

zatem, $x = \frac{r}{n}$ (rys.. 15). Jeżeli

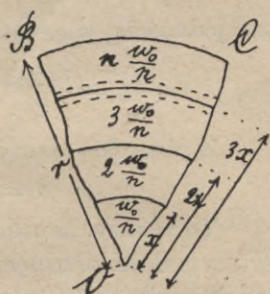
na powierzchni walca mamy natężenie w_0 , to na ostatnim pasku, czy też — krawędzi, przyległym do środka O , natężenie będzie oczywiście $\left(\frac{w_0}{n}\right)$; na następnym musi

być $\left(2\frac{w_0}{n}\right)$; potem $\left(3\frac{w_0}{n}\right)$ i t. d., aż — właśnie do $n\frac{w_0}{n} = w_0$.

A zatem, rozszerzając wycinek BOC do całego przecięcia kołowego, o promieniu r , — otrzymamy, że moment m_0 złożyć się musi z sumy momentów wszystkich pasków:

$$m_0 = 2\pi x \cdot x \frac{w_0}{n} x + 2\pi 2x \cdot x \frac{2w_0}{n} 2x +$$

$$+ 2\pi 3x \cdot x \frac{3w_0}{n} 3x + \dots \dots 2\pi nx \cdot x \frac{nw_0}{n} nx \dots \dots (33).$$



Rys 15.

Po wzięciu za nawias wyrazu wspólnego, otrzymamy:

$$m_0 = \frac{2\pi x^3 w_0}{n} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \dots (34).$$

Ponieważ suma sześciąt liczb kolejnych, od jedności do n , znaną jest i równa się:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \dots (35)$$

więc, biorąc jednocześnie, zamiast $x = \frac{r}{n}$, — będzie

$$m_0 = \frac{\pi r^3 w_0}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \dots (36).$$

Ponieważ ułamek $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$, u kresu, gdy $n = \infty$, będzie jednością, więc ostatecznie, znajdziemy, że:

$$m_0 = \frac{\pi r^3 w_0}{2} \dots (37).$$

Z rów. (31) mamy W_0 , zatem, teraz otrzymamy, iż:

$$a = r. \dots (38).$$

To znaczy, że ramię wypadkowe, na którym działa siła wytrzymałości przecięcia poprzecznego przy zkręcaniu, równa się całej odległości od osi obrotu dźwigni, do powierzchni ciała.

Na podstawie przeto rów. (29) możemy teraz napisać:

$$\frac{\pi r^3 w_0}{2} = sA \dots (39).$$

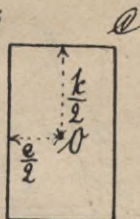
Stąd, w razie potrzeby, oznaczymy promień r :

$$r = \sqrt[3]{\frac{2sA}{\pi w_0}} \dots (40).$$

§ 7.

Równ. (39) zciśle odnosi się do przecięcia poprzecznego—kołowego; przy innych figurach moment m_0 , obliczony na

podstawie rów. (32) i (38) — będzie cokolwiek różnić się od rzeczywistości. Aby tę różnicę uczynić bardzo nieznaczną, rozpatrzmy tu niektóre przypadki. Jeżeli mamy prostokąt (rys. 16), o wymiarach: wysokość k i szerokość e , — przyczem, przez punkt O przechodzi oś zkręcania ciała; to należy zauważyć, że, z jednej strony, od środka O do powierzchni ciała mamy $\left(\frac{k}{2}\right)$, z drugiej zaś $\left(\frac{e}{2}\right)$; jako ramię wypadkowe dźwigni,



Rys. 16.

ni, bez wielkiego błędu, możemy tedy wziąć wielkość średnią, pomiędzy niemi, czyli:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} + \frac{e}{2} \right) = \frac{k + e}{4} \quad \dots \quad (41).$$

Ponieważ:
$$W_0 = \frac{Pw_0}{2} = \frac{ekw_0}{2} \quad \dots \quad (42),$$

więc moment wytrzymałości będzie:

$$m_0 = \frac{ek(e + k)w_0}{8} \quad \dots \quad (43).$$

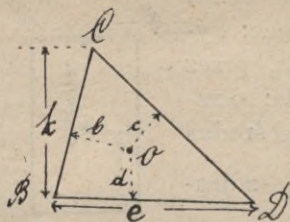
I zatem, ostatecznie, mamy:

$$\frac{ek(e + k)w_0}{8} = sA \quad \dots \quad (44).$$

Mamy tutaj niejaki zapas wytrzymałości, gdyż punkta B i C narożne u góry, a także u dołu, — mają ramię a — cokolwiek większe, niż $\left(\frac{k}{2}\right)$ lub $\left(\frac{e}{2}\right)$; tymczasem, liczymy wszędzie na $\left(\frac{k}{2}\right)$ i $\left(\frac{e}{2}\right)$. W przypadku przecięcia kwadratowego, gdy $\frac{k}{2} = \frac{e}{2}$, rów. (44) da nam:

$$sA = \frac{k^3w_0}{4} \quad \dots \quad (45).$$

Jeżeli mamy przecięcie trójkątne (rys. 17), gdzie O jest środkiem ciężkości powierzchni trójkąta BCD , — to, nazywając przez: b, c, d — odległości od punktu O do boków trójkąta, w kierunkach prostopadłych, — możemy przyjąć:



Rys. 17.

$$a = \frac{b + c + d}{3} \dots (46).$$

Ponieważ $W_0 = \frac{Pw_0}{2} =$

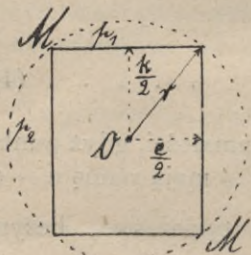
$= \frac{ekw_0}{4}$; więc otrzymamy:

$$sA = \frac{ek(b + c + d)w_0}{12} \dots (47).$$

W razie równości $b = c = d$, byłoby:

$$sA = \frac{ekbw_0}{4} \dots (48).$$

Możemy poszukiwać i w inny sposób momentów wytrzymałości przy skręcaniu; mianowicie, przypuśćmy, iż mamy prostokąt MM (rys. 18); promieniem $r = \frac{\sqrt{e^2 + k^2}}{2}$ możemy



Rys. 2.

zawsze opisać koło, ze środka O ; jeżeli oznaczymy przez p_1 i p_2 — powierzchnie odcinków koła nad prostokątem i z boku, — to moment wytrzymałości przecięcia da się teraz wyrazić:

$$sA = \frac{\pi r^3 w_0}{2} - r w_0 (p_1 + p_2) \dots (49).$$

Jest to sposób ogólny, bo zamiast prostokąta MM — może być wpisana do koła — figura dowolna; należy tylko wtedy odjąć odpowiednie części urojone momentu, zależne

od właściwych, jak widzimy, powierzchni: p_1, p_2, p_3 i t. d. Wziąwszy zamiast wyrazu w nawiasie—jego wartość, t j.:

$$p_1 + p_2 = \frac{\pi r^2 - ek}{2} \dots \dots \dots (50)$$

po podstawieniu, ostatecznie znajdujemy:

$$sA = \frac{ekw_0}{4} \sqrt{e^2 + k^2} \dots \dots \dots (51).$$

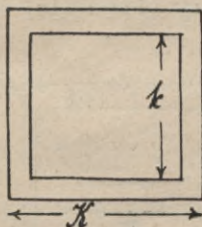
W przypadku kwadratu, gdy $e = k$, wzór ten dałby:

$$sA = \frac{\sqrt{2}k^3w_0}{4} \dots \dots \dots (52).$$

Wzory (52) i (45) nieco się różnią; ale, są to też różne stopnie przybliżeń.



Rys. 19.



Rys. 20.

W myśl wzoru (49), opartego na różnicy pomiędzy częściami momentu wytrzymałości przecięć poprzecznych, można otrzymywać momenta przecięć takich, jak np. rury, kwadratu pustego i t. p.

Jeżeli mamy rurę (rys. 19), o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r —to:

$$sA = \frac{\pi w_0}{2} (R^3 - r^3) \dots \dots \dots (53).$$

Jeżeli to będzie kwadrat (rys. 20), którego bok zewnętrzny oznaczony został przez K , a wewnętrzny przez k —to:

$$sA = \frac{w_0}{4} (K^3 - k^3) \dots \dots \dots (54).$$

Tak samo postąpić należy i przy innych figurach, odejmując od momentu całkowitego moment cząstkowy.

Wzory te łatwo jeszcze sprawdzić w inny sposób; rys. 19 da nam: $\frac{\pi(R^2 - r^2)w_0}{2} \cdot R$; tutaj zamiast Rr^2 , może-

my zawsze przyjąć r^3 i będziemy mieli $sA = \frac{\pi w_0}{2} (R^3 - r^3)$, t. j. dawny wzór (53). Rys. 20 da nam tak samo:

$(K^2 - k^2) \frac{w_0}{2} \cdot \frac{K}{2}$; tutaj również zamiast Kk^2 może-

my przyjąć k^3 i otrzymamy $sA = \frac{w_0}{4} (K^3 - k^3)$, — t. j. dawny wzór (54).

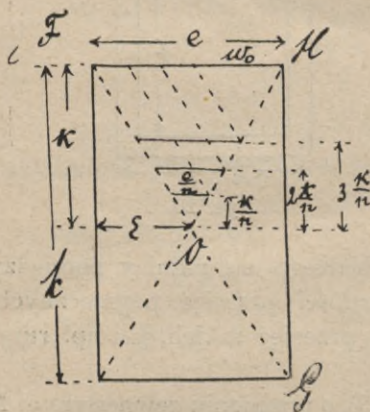
Wzory (44) i (45) są, pomimo tego, że zostały zupełnie prosto i łatwo wy-

prowadzone — zcześnie także. Weźmy w tym celu prostokąt FG (rys. 21) o wysokości k i szerokości e ; przy-

czem, oznaczymy $x = \frac{k}{2}$

i $\varepsilon = \frac{e}{2}$; podzielmy powierzchnię jego na 4 odpowiednie trójkąty, schodzące się wierzchołkami w środku O . Rozpatrzmy trójkąt górny FOH . Podzielmy powierzchnię jego, po-

czynając od środka O — na n pasków, o wysokości równej, która będzie w takim razie $\left(\frac{x}{n}\right)$; długość pierwszego paska będzie, jak widać $\left(\frac{e}{n}\right)$, drugiego $\left(2\frac{e}{n}\right)$ i t. d., aż do $\frac{ne}{n} = e$;



Rys. 21.

wytrzymałość pierwszego paska będzie także $\left(\frac{w_0}{n}\right)$, drugiego $\left(\frac{2w_0}{n}\right)$ i t. d., aż do $\frac{nw_0}{n} = w_0$ — na powierzchni ciała czyli na krawędzi FH ; ramiona wytrzymałości tych pasków, będą także, kolejno: $\left(\frac{x}{n}\right)$, $\left(\frac{2x}{n}\right)$, . . . $\frac{nx}{n}$. Suma momentów wytrzymałości wszystkich pasków, da nam moment wytrzymałości całego trójkąta FOH —tak samo, jak to odpowiednio wzięliśmy przy rozpatrywaniu przecięcia kołowego (rys. 15); będzie więc:

$$m' = \frac{x}{n} \frac{e}{n} \frac{w_0}{n} \cdot \frac{x}{n} + \frac{x}{n} \frac{2e}{n} \frac{2w_0}{n} \cdot \frac{2x}{n} +$$

$$+ \frac{x}{n} \frac{3e}{n} \frac{3w_0}{n} \cdot \frac{3x}{n} + \dots \dots \frac{x}{n} \frac{ne}{n} \frac{nw_0}{n} \cdot \frac{nx}{n} \dots \dots (55).$$

Biorąc za nawias wyraz wspólny, otrzymamy:

$$m' = \frac{x^2 e w_0}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots n^3) \dots (56).$$

Zastępując szereg sześciątów przez jego sumę z rów. (35) i wprowadzając skrócenia, znajdziemy:

$$m' = \frac{k^2 e w_0}{16} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \dots \dots (57).$$

A ponieważ, jak już wspomnieliśmy wyżej, — wartość ułamka $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$, u kresu, gdy $n = \infty$, będzie jednością; zatem, ostatecznie:

$$m' = \frac{k^2 w_0 e}{16} \dots \dots (58).$$

Takiż sam moment, odnośnie do trójkąta HOG , będzie odpowiednio znowuż:

$$m'' = \frac{e^2 k w_0}{16} \dots \dots (59).$$

A zatem, moment wytrzymałości całej powierzchni prostokąta FG , będzie, oczywiście:

$$m_0 = 2(m' + m'') = \frac{w_0}{8}(k^2e + ke^2) = sA \dots (60).$$

Jeżeli zaś $k = e$, to znajdujemy:

$$sA = \frac{k^3w_0}{4} \dots \dots \dots (61).$$

Jak widać, wzory (60) i (61) są te same, co i dawne (44) i (45).

§ 8.

Zestawiając wzory (2) i (29) z wzorami np. (13) i (45), trzeba zwrócić uwagę przy obliczeniach, że wzór, napisany pod postacią np. $Wa = sA$ lub $W_0a = sA$, — wymaga oczywiście, aby ramiona a i A dźwigni, były zmierzone jednakołą miarą, np. metrem i t. p.; siły zaś W lub W_0 i s — będą wyrażone również w jednostkach wspólnych, np. w kilogramach i t. p.: tu już rzecz obojętna, jak otrzymaliśmy wartości liczebne sił W , W_0 i s — aby tylko były obliczone dobrze; i możemy użyć, do obliczenia powierzchni przecięcia — miar dowolnych, zupełnie innych, niż te, które były użyte do mierzenia ramion a i A . Mogą więc być np. ramiona wyrażone w metrach, a przy oznaczeniu sił W lub W_0 — możemy użyć millimetrów lub centymetrów i t. d. Lecz, jeśli korzystać zechcemy z postaci wzorów $sA = \frac{ek^2w}{3}$ lub $sA = \frac{k^3w_0}{4}$, — to rzecz jasna, iż we wszystkich wzorach podobnych — musimy, dla zgodności z prawdą, brać ramię A w takich jednostkach długości, w jakich wyrażone będą boki e , k ; a ponieważ wytrzymałości gatunkowe w lub w_0 — odnosić najdogodniej do 1cm^2 , — więc najlepiej używać centymetrów, tak do mierzenia ramienia A dźwigni, jak i do mierzenia powierzchni przecięcia. Inaczej bowiem, trzeba by jedną potęgę od k^3 lub od k^2 oddzielać na ramię małe a dźwigni, aby je doprowadzić do

zgodności z ramieniem A ; a toż samo k^2 lub k , już zmniejszone i stosujące się teraz tylko do powierzchni, a nie do ramienia a ,—obliczać niezależnie choćby, ale zgodnie już z siłą s , jak wspomniano z początku. Taki, naturalnie, sposób postępowania, byłby uciążliwszy i mniej dogodny.

Zasada dźwigni, przedstawiona w części powyższej—wytrzymałości materiałów,—ma tę zaletę, jak widać, że prosto bardzo, wyraźnie i jasno podaje i wskazuje konieczność tych związków i stosunków, jakie zachodzą pomiędzy siłami i wymiarami ciał; t. j. podaje łatwość ułożenia równań—równowagi sił.

Tablica wytrzymałości gatunkowych, niektórych materiałów.

№	Materiał	Wytrzymałość gatunkowa średnia ¹⁾		
		Na rozciąganie w	Na zgniatanie w'	Na zcinanie w_0
1	Żelazo	600	600	460
2	Surowiec	200	1000	150
3	Stal	1100	1100	800
4	Miedź	300	700	230
5	Mosiądz	170	100	80
6	{ Drzewo (równoległe { do włókien { prostopadle	130}	70}	50}
7	Cynk	80	90	60
8	Ołów	20	70	15
9	Cyna	100	140	80
10	Szkło	40	40	30
11	Łupek	20	50	15
12	Cegła	4	20	3

Uwaga. W tablicy powyższej—siły wyrażono w kilogramach; odniesione są do jednego centymetra kwadratowego.

¹⁾ Są gatunki materiałów—lepsze i gorsze; tutaj bierzemy gatunki średnie, przeciętne.

Pewność przyjętą została *siedmiokrotna*, t. j.: jeżeli ciało, przeciętnej dobroci, obciążymy siłą *siedm* razy większą, niż wskazana pod którymkolwiek znakiem w , w' , w_0 ,—to natychmiast ulegnie ono zniszczeniu — albo przez rozerwanie, albo przez zgniecenie, albo nakoniec — przez zcinanie, — zależnie od tego, jakiemu działaniu materiał poddany.

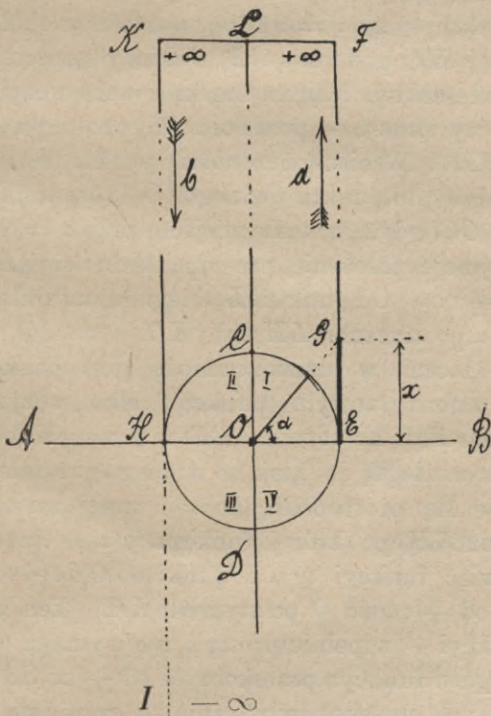
Wytrzymałość na zcinanie jest ta sama, co i wytrzymałość na skręcanie, $w_0 = \frac{3}{4}$ do $\frac{4}{5}$ *mniejszej* z dwóch wartości w i w' .

Najwłaściwiej, wypróbować, dany do budowy, materiał i przyjmować te wytrzymałości, jakie każdy gatunek da z doświadczenia. Stopień pewności zależy po części od nas, po części od rodzaju budowy i okoliczności towarzyszących. Może być jednak zachowywany i zawsze ten sam, niezmienny stopień pewności, np. siedmiokrotny; można tylko, w miarę potrzeby, wtedy wymiary nieco powiększać lub zmniejszać, jak tego wymagać będą okoliczności i warunki rzeczywiste.

UWAGA

o przedstawieniu rysunkowym zmian funkcyi: *tangens α .*

Jeżeli mamy kąt α (rys. 1), to na stycznej EF odcinek $EG = x$, wyrazi nam, przy promieniu $OE = r = 1$, — wielkość



Rys. 1.

funkcyi $\operatorname{tg} \alpha$; t. j. $x = \operatorname{tg} \alpha$. Gdy kąt α rośnie od 0° do 90° , x rośnie od 0 do $+\infty$; t. j. punkt G , przecięcia się promienia przedłużonego OG ze styczną EF , będzie się posuwać do góry, w kierunku strzałki a , po stycznej EF .

Kiedy zaś kąt α zaczął przechodzić wartości od 90° do 180° , objaśniano, że wtedy *raptem* x przeskakuje od $+\infty$ do $-\infty$; t. j. przeszła już wartość x — pod linię AB i znajduje się już teraz na stycznej HI .

Objaśnianie podobne — niewłaściwe, z różnych nawet punktów widzenia i bynajmniej tego nie wymaga — istota rzeczy. Widzimy, iż bieg wartości kąta α od 0° do 180° — zupełnie naturalny i nie ulega przecie żadnym nadzwyczajnościom; dlaczego więc ma się znaleźć w wartości x tak wielki przeskok, jak dwie aż naraz niezkończoności? Pocóż mamy szukać, przy $\alpha = 91^\circ$ np. wartości x około punktu I , na stycznej HI , pod linią AB , — kiedy prościej nierównie i daleko właściwiej, idąc za logiką rysunku czyli w tym razie — rzeczy samej, — poszukać jej około punktu K , na stycznej KH ? W niezkończoności, punkta F i K , zchodzą się, jak gdyby do punktu jednego L , który musi znajdować się na osi OC , gdyż w tem miejscu, przy $\alpha = 90^\circ$, promień koła przyjmuje położenie prostopadłe do osi AB ; a funkcyja $\operatorname{tg} \alpha = +\infty$. Od punktu L , biegiem naturalnym, zpadać będzie $\operatorname{tg} \alpha$ po stycznej LH lub KH — na dół, aż do zera. Punkt L zatem, w niezkończoności, jest punktem zwrotu funkcyi; zatem, w tym punkcie, albo wszystko jedno, w punktach F i K , styczna EF z prostopadłą do osi AB , staje się równoległą do niej; a w biegu już dalszym potem, znów staje się prostopadłą do tej samej osi AB , ale jako styczna już KH , po której funkcyja $\operatorname{tg} \alpha$ — zpada do zera. Zmiany więc funkcyi $\operatorname{tg} \alpha$ idą tak: od 0 do $+\infty$ po stycznej EL i od $+\infty$ do 0 po stycznej LH . Ten bieg zmienności funkcyi — zupełnie prosty i nie wymaga objaśnień, że tutaj—*raptem* funkcyja przeskoczyła od $+\infty$ do $-\infty$: gdyż widać, iż tych przeskoków właśnie — czynić nie potrzebuje.

Żadna też funkcyja, prawidłowo rozumiana, nie może ominąć podstawy zasadniczej, iż punkt zwrotu — jest jeden, a nie dwa, oddzielone od siebie, aż dwiema niezakończonościami. Żadna też funkcyja nie może ominąć i innego jeszcze prawa zasadniczego: od wartości dodatniej, do wartości odjemnej, przejść musi przez wartość zero; a gdzież $tg \alpha$ około 90° — przeszedł przez wartość zero, żeby już miał prawo stać się odjemnym, w ćwierci II-ej koła?

Tak więc, w kierunku strzałki a idzie ruch wstępujący wartości, a w kierunku b — ruch zstępujący jej, od tegoż samego punktu L . W tem przedstawieniu rzeczy — rozwój wartości x nie ulega żadnej przerwie, ale odbywa się sposobem — ciągłym. Zmiana więc znaku w II-ej ćwierci koła z $(+)$ na $(-)$ do wartości x odnosić się nie może, — bo, jakkolwiek w tej ćwierci, zmiany funkcyi odbywają się w kierunku strzałki b , odwrotnym do strzałki a , — to okoliczność ta ma związek tylko z kierunkiem ruchu, jeżeliby chodziło w znaczeniu mechanicznem — o ruch; na wartość zaś wpływać — nie może; w ten sposób bowiem, trzebaby również przyznać, że wzięwszy np. $tg \alpha$ przy 75° , jeżeli potem mamy przejść do $tg \alpha$ przy 40° , — to, ponieważ się cofamy, czyli idziemy na dół, — to $tg \alpha$ będzie miał tutaj wartość — także odjemną. Tak jednakże nie liczymy, bo weźmiemy znowuż kąt α od początku E .

Na ogólnych również zasadach uznać musimy, iż odcinek x , nad osią AB , wszędzie musi być dodatni; więc, nie tylko w I, ale i w II ćwierci koła; a pod osią już AB , w ćwierci III i IV — dopiero może być odjemny. Wszak wartości $\sin \alpha$ — nie szukamy, przy $\alpha = 90^\circ - 180^\circ$, w III ćwierci koła, ale w II, — t. j. tam, gdzie on jest *nad* osią AB ; pocóż $tg \alpha$ przenosić z ćwierci II do III?

Jeżeli to zawikłanie stąd powstało, że funkcyja $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, co dawało w ćwierci II $\frac{+ \sin \alpha}{- \cos \alpha} = - tg \alpha$, a koniecznie trzeba było otrzymać $(+ tg \alpha)$ i udano się w tym

celu do ćwierci III, w której już mamy $\frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$; — to, podobny sposób postępowania — można uznać, jako zbyt-
 teczny, gdyż i w ćwierci II możemy algebraicznie brać także
 $(+\operatorname{tg} \alpha)$, na tej podstawie, że $\frac{+\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{+\sin \alpha}{-(+\sqrt{1-\sin^2 \alpha})} =$
 $= \operatorname{tg} \alpha$; t. j., przed pierwiastkiem mamy 2 znaki, więc wy-
 brać możemy ten, który będzie właściwszy.

Łatwo więc uniknąć przeskoku niepotrzebnego od $+\infty$
 do $-\infty$, gdyż w istocie takowy nie istnieje wcale; a funkcyja
 $\operatorname{tg} \alpha$ jest dodatnią w ćwierci I i II koła, odjemną zaś
 w III i IV.

Toż samo stosuje się także do funkcyi $\operatorname{sec} \alpha$.

Jakkolwiek korzystaliliśmy z przypuszczenia, iż w nie-
 zkończoności punkt L staje się miejscem wspólnem obydwóch
 punktów F i K ,—to jednakże, przy odległościach wszelkich
 zakończonych, od osi AB do góry (lub odpowiednio—na dół),
 pomiędzy stycznymi EF i KH — zawsze odległość prosto-
 padła — być musi równą średnicy HE koła; zatem, styczne
 EF i KH —mogą służyć za obraz doskonały — *równoległości*
geometrycznej linii.



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

8034

L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299633

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-8034

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299633