

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

~~370~~ 673

steswelt

M. Lindow  
Integralrechnung

Dritte Auflage



B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

# Die Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“

„nunmehr über 800 Bändchen umfassend, bietet wirkliche „Einführungen“ in die Hauptwissensgebiete für den Unterricht oder Selbstunterricht des Laien nach den heutigen methodischen Anforderungen, seit ihrem Entstehen (1898) den Gedanken dienend, auf denen die heute so mächtig entwickelte Volkshochschulbewegung beruht. Sie will jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie will ihn dabei zugleich unmittelbar im Beruf fördern, den Gesichtskreis erweiternd, die Einsicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend. Diesem Bedürfnis können Skizzen im Charakter von „Auszügen“ aus großen Lehrbüchern nie entsprechen, denn solche setzen eine Vertrautheit mit dem Stoffe schon voraus.

Die Sammlung bietet aber auch dem Fachmann eine rasche zuverlässige Übersicht über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des Forschers zu dienen, sich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten.

In den Dienst dieser Aufgabe haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

So konnte der Sammlung auch der Erfolg nicht fehlen. Mehr als die Hälfte der Bändchen liegen, bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet, bereits in 2. bis 8. Auflage vor, insgesamt hat die Sammlung bis jetzt eine Verbreitung von fast 5 Millionen Exemplaren gefunden.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

Wenn eine Verteuerung der Sammlung infolge der außerordentlichen Steigerung der Herstellungskosten – sind doch die Löhne bis August 1922 auf etwa das Zweiundvierzigfache, die Materialien auf das Einhundertundfünfzig- bis Zweihundertfache (teilweise noch weit darüber) gestiegen – auch unvermeidbar gewesen ist, wie bei anderen „billigen“ Büchern, z. B. den Reclamheften, gestiegen, und

feil, |

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295963

Leipzig,

3. Teubner



# Zur Mathematik und Astronomie

sind bisher erschienen:

## Einführung in die Mathematik.

**Einführung in die Mathematik.** Von Studentat W. Mendelsohn. Mit 42 Figuren im Text. (Bd. 503.)

\***Mathematische Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jacobi. I. Arithmetik und Algebra. II. Geometrie. (Bd. 646/47.)

## Arithmetik, Algebra und Analysis.

**Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studentat J. Cranh. 2 Bände. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 7. Aufl. Mit 9 Figuren im Text. (Bd. 120.)

II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 5. Aufl. Mit 21 Textfiguren. (Bd. 205.)  
**Lehrbuch der Rechenorteile.** Schnellrechnen und Rechenkunst. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Von Ing. Dr. phil. J. Vojsko. (Bd. 739.)

**Einführung in die Infinitesimalrechnung.** Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3., verbesserte Aufl. Mit 18 Figuren. (Bd. 197.)

**Differentialrechnung** unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. 4. Aufl. Mit 50 Figuren und 161 Aufgaben. (Bd. 387.)

**Integralrechnung** unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit 43 Figuren im Text und 200 Aufgaben. (Bd. 673.)

**Differentialgleichungen** unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. Mit 38 Figuren im Text und 160 Aufgaben. (Bd. 589.)

**Kaufmännisches Rechnen zum Selbstunterricht.** Von Studentat K. Döll. (Bd. 724.)

## Geometrie.

**Planimetrie zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. 3. Aufl. Mit 94 Figuren im Text. (Bd. 340.)

**Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. 3. Aufl. Mit 50 Figuren im Text. (Bd. 431.)

**Sphärische Trigonometrie zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. Mit 27 Figuren im Text. (Bd. 605.)

**Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht.** Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. 3. Aufl. Mit 55 Figuren im Text. (Bd. 504.)

**Einführung in die darstellende Geometrie.** Von Prof. P. D. Fischer. Mit 59 Figuren im Text. (Bd. 541.)

## Angewandte Mathematik.

**Praktische Mathematik.** Von Prof. Dr. K. Neudorff. 2 Bde. I. Teil: Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verbesserte Auflage. Mit 29 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Figuren. (Bd. 526.)

**Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen.** Von Regierungsrat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

**Geometrisches Zeichnen.** Von atad. Zeichenlehrer A. Schudeisth. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 508.)

**Projektionslehre.** Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von atad. Zeichenlehrer A. Schudeisth. Mit 208 Abbildungen im Text. (Bd. 564.)

**Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen.** Von Prof. Dr. K. Doeblermann. 2. Aufl. Mit 91 Figuren und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)

## Angewandte Mathematik.

**Graphisches Rechnen.** Von Prof. D. Pröhl. Mit 164 Fig. im Text. (Bd. 708.)

**Die graphische Darstellung.** Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und Gebrauch der Methode. Von Hofrat Prof. Dr. J. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Fig. im Text. (Bd. 437.)

**Maße und Messen.** Von Dr. W. Bloß. Mit 34 Abbildungen. (Bd. 385.)

**Nautik.** Von Direktor Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit 64 Figuren im Text und 1 Seetarte. (Bd. 255.)

**Vermessungs- und Kartenkunde.** 6 Bände. Jeder Band mit Abbildungen.

\*I. Bd. Geographische Ortsbestimmung. Von Prof. Schnauder. (Bd. 606.) \*II. Bd. Erdmessung. Von Prof. Dr. Osw. Eggert. (Bd. 607.) III. Bd. Die Landmessung. Von Geh. Finanzrat F. Sußow. Mit 69 Zeichnungen im Text. (Bd. 608.) IV. Bd. Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Reg.-Rat Prof. E. Hegemann. Mit 11 Figuren im Text. (Bd. 609.) V. Bd. Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie). Von Dipl.-Ing. Hermann Lüscher. Mit 78 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. (Bd. 612.) VI. Bd. Kartenkunde. Von Finanzrat Dr. Ing. A. Egger. I. Einführung in das Kartenverständnis. Mit 49 Abbildungen im Text. (Bd. 610.)

## Mathematische Spiele.

**Mathematische Spiele.** Von Dr. W. Ahrens. 4., verbesserte Aufl. Mit 1 Titelbild und 78 Figuren. (Bd. 170.)

**Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien.** Von Dr. M. Lange. Mit den Bildn. C. Easters u. P. Morphy's, 1 Schachbretttafel u. 43 Diagrammen. 3. Aufl. (Bd. 281.)

## Geschichte.

**Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum.** Von Prof. Dr. Joh. E. Heiberg. 2. Aufl. Mit 2 Figuren. (Bd. 370.)

\***Die Naturwissenschaften im Mittelalter und im Zeitalter des Wiedererwachens der Wissenschaften.** Von Direktor Dr. F. Dannemann. (Bd. 695.)

\***Die Naturwissenschaften in der Neuzeit.** Von Direktor Dr. F. Dannemann. (Bd. 696.)

## Astronomie und Astrologie.

**Der Bau des Weltalls.** Von Prof. Dr. J. Scheiner. 5. Aufl. Bearbeitet von Prof. Dr. P. Guthnick. Mit 28 Figuren im Text. (Bd. 24.)

**Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft.** Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. M. V. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)

**Weltuntergang in Sage und Wissenschaft.** Von Prof. Dr. K. Ziegler und Prof. Dr. E. Oppenheim (Bd. 720.)

**Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit.** Von Prof. Dr. E. Oppenheim I. Teil: Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Auflage. Mit 18 Abbildungen. (Bd. 444.)

II. Teil. Moderne Astronomie. 2. Auflage. Mit 9 Figuren im Text und 1 Tafel. (Bd. 445.)

**Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Professor Dr. A. Marcuse. 2. Aufl. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 378.)

**Die Sonne.** Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 357.)

**Die Planeten.** Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 16 Figuren. 2. Aufl. von Observ. Dr. B. Naumann. (Bd. 240.)

**Der Kalender.** Von Prof. Dr. W. J. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

**Sternglaube und Sternedeutung.** Die Geschichte und das Wesen der Astrologie. Unter Mitwirkung von Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt von Geh. Hofrat Prof. Dr. Franz Voll. 2. Aufl. Mit 1 Sternkarte und 20 Abbildungen. (Bd. 638.)

## Meteorologie.

**Einführung in die Wetterkunde.** Von Prof. Dr. E. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. (Bd. 55.)

**Unser Wetter.** Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wettertatten. Von Dr. A. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. im Text. (Bd. 349.)

Die mit \* bezeichneten u. weitere Bände befinden sich in Vorb.



370  
Aus Natur und Geisteswelt  
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

---

673. Band

# Integralrechnung

unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung  
in der Technik mit zahlreichen Beispielen  
und Aufgaben versehen

von

Dr. Martin Lindow

Studienrat, Münster i. W.

Dritte Auflage

11.—15. Tausend

Mit 43 Figuren im Text  
und 200 Aufgaben



Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1922

Bz/2  
67.

KD 5 17.3.004.14

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA

~~I 340~~



II



I 301501

Schutzformel für die Vereinigten Staaten von Amerika:  
Copyright 1922 by B. G. Teubner in Leipzig

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten

BPK-B-63/2017

Arg. Nr. 7

~~1732~~ 50



## Vorwort.

In der ersten Auflage behandelte ein Bändchen zusammenfassend Differential- und Integralrechnung, für die zweite wurde jeder Rechnungsart ein abgeschlossenes Büchlein zur Verfügung gestellt. Da das Differenzieren die Grundlage der Integralrechnung ist, so wurde häufig auf des Verfassers „Differentialrechnung“ (MUS. Bd. 387) unter Anführung der betreffenden Seite (D. S. . . .) hingewiesen.

Die Integralrechnung bietet dem Theoretiker und dem Praktiker gleich viel. Der eine schöpft aus ihr stets neue Anregung zum Studium rein wissenschaftlicher Fragen, dem anderen gibt sie die Möglichkeit, Flächen- und Körperinhalte zu finden, Schwerpunkte und Trägheitsmomente zu berechnen, den zeitlichen Ablauf von Bewegungen und von chemischen Prozessen zu erforschen oder in die Geheimnisse des elektrischen Stromes einzudringen. Diese praktische Seite will die vorliegende Darstellung besonders betonen, sie will zeigen, daß mit wenigen Zauberformeln sich schon reiche Schätze heben lassen.

Die auf das Praktische gerichtete Eigenart des Buches wird aber auch den Theoretiker anziehen, denn erfahrungsgemäß klappt zwischen Wissen und Können, genauer gesagt, zwischen der Kenntnis der reinen Mathematik und der Möglichkeit, sie auf die Naturerscheinungen anzuwenden, oft ein Spalt, der manchem zunächst unüberbrückbar erscheint. Und doch haben gerade die größten Mathematiker — verfolgen wir nur die Reihe, welche von Archimedes über Newton, Euler und Gauß bis zu Klein und Poincaré führt — erkannt, daß die „reine“ Mathematik oft etwas an Blutleere krankt und ihr eine Transfusion von der Naturwissenschaft her recht gut bekommt. Aus diesem Grunde sind die Beispiele und Aufgaben dem Gedankengange organisch eingefügt; die Lektüre soll dem Leser nicht nur Wissen, sondern auch Können vermitteln.

Der Zweck des Buches brachte es weiter mit sich, daß die graphische

Darstellung oft zu Rate gezogen wurde. Ferner mußten neben den bekannten exakten Verfahren auch die Näherungsmethoden zur Berechnung der Integrale in die rechte Beleuchtung gerückt werden. Approximationsformeln für Integrale, bei denen der Integrand oder eine Grenze unendlich wird, pflegen die Lehrbücher ängstlich aus dem Wege zu gehen, gerade deshalb wurden sie hier gebracht. Erst die Übung im näherungsweise Integrieren läßt jenes Gefühl der Unsicherheit schwinden, welches das häufige Versagen der exakten Methoden in vielen praktisch wichtigen Fällen erzeugt. Aus demselben Grunde wird ein Hinweis auf die Mittel, mit denen man die Richtigkeit einer Integration prüfen kann, sehr erwünscht sein.

Auch diesmal unterstützte mich Herr Professor Dr. J. Plafmann in freundlichster und vielseitigster Weise beim Korrekturlesen. Herr Oberlehrer R. Emde in Bremen hat alle Rechnungen einer genauen Durchsicht unterzogen. Herr Lehrer Gütziges in Opladen hat mit großer Sorgfalt die in der zweiten Auflage noch vorhandenen Druckfehler und Ungenauigkeiten zusammengestellt und sich dadurch um die Herstellung eines möglichst fehlerlosen Textes sehr verdient gemacht. Den drei Herren spreche ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für ihre wertvolle Unterstützung aus.

Ist die Differentialrechnung ein Auflösungsprozeß, so stellt die Integralrechnung aus den kleinsten Teilen wieder ein Ganzes her. Möge dies Buch sein Teilchen zum Wiederaufbau der Kultur beitragen.

Münster i. W., April 1919.

M. Lindow.



# Inhalt.

## I. Das unbestimmte Integral . . . . . Seite 7

Die Integralrechnung als Umkehrproblem der Differentiation. Die Integrationskonstante. Fundamentalintegrale. Geometrische und mechanische Anwendungen der Integration. Integration einer Summe oder Differenz. Der konstante Faktor.

## II. Das bestimmte Integral . . . . . 15

Die Bildung des bestimmten Integrals aus dem unbestimmten. Sätze über die Grenzen des bestimmten Integrals. Die Simpsonsche Regel für Kurven dritten Grades. Weitere Flächenberechnungen. Das bestimmte Integral als Summe. Uneigentliche bestimmte Integrale.

## III. Anwendung der Integralrechnung auf Linien, Flächen und Körper . . . . . 24

1. Flächenberechnungen in Polarkoordinaten. Spiralen. 2. Berechnung von Kurvenbogen: Neilsche Parabel, Kettenlinie, Polarformel. 3. Körperinhalte: Pyramide, Kegel, Prismatoid, Simpsonscher Körper, Kugel, Kugelabschnitt, Rotationsparaboloid und Rotationsellipsoid. 4. Krumme Oberflächen: Kugelzone, Kugellappe, Kugeloberfläche.

## IV. Integrationsbeispiele aus der Statik . . . 37

1. Einiges aus der Lehre vom Schwerpunkt: Statische Momente. Schwerpunkt eines Punktsystems. 2. Schwerpunkt einer Linie. Kettenlinie. 3. Schwerpunkt einer Fläche: Rechteck, Dreieck, Parabel. 4. Die Guldinsche Regel. 5. Schwerpunkte von Körpern: Kegel, Halbkugel, Simpsonscher Körper. 6. Trägheitsmomente: Rechteck, Dreieck, Trägheitsmoment bezogen auf parallele Achsen.

## V. Anwendungen auf verschiedene Gebiete . . . 49

Ausflußdauer. Eine Vereinfachung der Darstellungsweise. Barometrische Höhenformel. Arbeit bei isothermer Kompression. Adiabatische Zustandsgleichung. Magnetisches Potential. Selbstinduktion. Zerfall radioaktiver Substanzen.

	Seite
<b>VI. Allgemeine Integrationsmethoden . . . . .</b>	<b>60</b>
<p>Eindeutigkeit der Integralfunktion. 1. Einführung einer neuen Veränderlichen. 2. Partielle Integration. 3. Zerlegung in Partialbrüche. Chemische Reaktionsgeschwindigkeit. Zerlegung des Jodwasserstoffs. 4. Rekursionsformeln. Die Mercatorprojektion. 5. Entwicklung in Potenzreihen.</p>	
<b>VII. Näherungsmethoden . . . . .</b>	<b>73</b>
<p>1. Reihenentwicklung. 2. Die Trapezregel für Sehnen und für Tangenten. Anwendungen auf Ellipseninhalte und -umfang. 3. Die Simpsonsche Regel. Näherungsformeln für Schwerpunkte und Trägheitsmomente. 4. Näherungsformeln für uneigentliche bestimmte Integrale.</p>	
<b>VIII. Prüfungsmethoden . . . . .</b>	<b>83</b>
<p>Allgemeine Bemerkungen. Prüfungsmethoden für unbestimmte Integrale: 1. Die Differentiation. 2. Verschiedene Integrationsmöglichkeiten. 3. Prüfung durch Potenzreihen und Näherungsformeln. 4. Spezialisierung. Prüfungsmethoden für bestimmte Integrale: 1. Prüfung durch Vergleichsfunktionen. 2. Der Mittelwertsatz. 3. Abzählungs- und Wägungsmethode. 4. Näherungsverfahren.</p>	
<b>Lösungen . . . . .</b>	<b>89</b>



## Erstes Kapitel.

### Das unbestimmte Integral.

Die Differentialrechnung lehrt uns, aus einer gegebenen Funktion  $F(x)$  nach bestimmten Sätzen eine andere, die abgeleitete Funktion  $F'(x) = f(x)$  zu bilden. Man kann sich umgekehrt die Aufgabe stellen, wenn diese Ableitung gegeben ist, aus ihr den ursprünglichen Ausdruck  $F(x)$  wiederherzustellen. Das ist das Problem der Integralrechnung.

Zur Veranschaulichung diene folgende Betrachtung. Die Addition sucht aus zwei positiven ganzen Zahlen  $a$  und  $b$  die Summe  $s$  zu bilden ( $s = a + b$ ). Die Subtraktion schließt, wenn die Summe  $s$  und ein Summand  $a$  gegeben ist, auf den andern,  $b = s - a$ . Jede Additionsaufgabe aus dem Gebiet der positiven ganzen Zahlen führt wieder auf eine solche Zahl, die Subtraktion nur dann, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist. Im andern Falle fordert die Aufgabe die Einführung negativer Größen und fördert so die mathematische Erkenntnis durch Vermehrung des Materials, mit dem man arbeitet. In gleichem Zusammenhange steht die Multiplikation mit der Division

$$a \cdot b = p; \quad b = \frac{p}{a}.$$

Die Division ergänzt das Zahlenreich durch Einführung der Brüche; die Umkehrungen des Potenzierens, das Radizieren und Logarithmieren, liefern die einfachsten irrationalen und transzendenten Zahlen.

Bei der Differential- und Integralrechnung haben wir es nicht mit Zahlen allein, sondern mit Funktionen zu tun. Eine bekannte Funktion liefert durch Differentiation wieder eine bekannte, die Integration eines elementaren Ausdrucks führt aber durchaus nicht immer wieder auf einen elementaren, sondern definiert häufig ganz neue Funktionen. Gerade deren Studium verdankt die moderne Mathematik eine Reihe der wichtigsten Anregungen und Ergebnisse. Hier sollen nur die einfachsten Fälle behandelt werden.

Es sei also  $f(x)$  eine gegebene Funktion (der Integrand); wir suchen

$F(x)$  so zu bestimmen, daß  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$  wird. Ist uns dies gelungen, so nennen wir die gefundene Funktion das Integral von  $f(x) dx$ .

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Warum man den Faktor  $dx$  hinschreibt, also nicht  $F(x) = \int f(x)$  setzt, wird später klar werden. Ist z. B.  $f(x) = x^2$ , so ist  $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ , denn differenziert man diesen Ausdruck, so ergibt sich wieder  $x^2$ , wie es verlangt war.

Aber auch  $\frac{x^3}{3} + 4$ ,  $\frac{x^3}{3} - 7,23$ , allgemein  $\frac{x^3}{3} + c$  hat dieselbe Eigenschaft.  $c$  bedeutet dabei eine beliebige Konstante. Die Integration liefert also nicht nur eine Funktion, sondern beliebig viele, doch unterscheiden sich diese alle nur durch die additiv hinzugefügte Integrationskonstante  $c$ . Wir sprechen hier von unbestimmten Integralen.

Diese Unbestimmtheit pflegt den Anfänger abzustößen; später zeigt sich, daß sich die Integrationskonstanten bei speziellen Aufgaben sehr wohl ermitteln lassen, ja daß sie der allgemeinen Lösung genügende Elastizität verleihen, um jedem Einzelfall gerecht zu werden.

Es ist einleuchtend, daß man jedes Lehrbuch der Differentialrechnung als Fundgrube für Integralformeln benutzen kann. Die Richtigkeit wird jedesmal bewiesen, indem man das Ergebnis differenziert, stets muß man dadurch auf den Integranden zurückkommen. In der folgenden Tafel der Fundamentalintegrale gebe ich die Seiten meiner „Differentialrechnung“ (MKG Bd. 387) an, welche der Leser, wenn nötig, zu Rate ziehen kann.

### Grundformeln.

(1.)  $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$ , denn die Differentiation der rechten Seite liefert  $ax^n$  (§. 18, 25, 26). Nur für einen Fall ist diese Gleichung nicht richtig, wenn  $n = -1$  ist. Wir haben dann

$$(2.) \int \frac{a dx}{x} = alx + c \quad (\text{§. 36}).$$

Diese Formel versagt, wenn  $x$  negativ ist. Dann ist

$$\int \frac{a dx}{x} = al(-x) + c.$$



$$(3.) \int (a + bx + cx^2 + gx^3 + \dots + kx^n) dx = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{gx^4}{4} + \dots + \frac{kx^{n+1}}{n+1} + c_1 \quad (\S. 18).$$

In den folgenden Formeln ist der Kürze halber die Integrationskonstante meistens fortgelassen.

$$(4.) \int \sin x dx = -\cos x \quad (5.) \int \cos x dx = \sin x \quad (\S. 31 \text{ f. u. } 29 \text{ f.}).$$

$$(6.) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \quad (7.) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \quad (\S. 32).$$

$$(8.) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + c = -\operatorname{arc} \cos x + c_1 \quad (\S. 32 \text{ f.}).$$

$$(9.) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + c_1 \quad (\S. 33).$$

$$(10.) \int \operatorname{Sin} x dx = \operatorname{Cos} x \quad (11.) \int \operatorname{Cos} x dx = \operatorname{Sin} x \quad (\S. 38).$$

$$(12.) \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Ctg} x \quad (13.) \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{Tg} x \quad (\S. 38).$$

$$(14.) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (\S. 39).$$

$$(15.) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (\S. 39 \text{ f.}).$$

$$(16.) \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \text{ wenn } x^2 < 1 \quad (\S. 40).$$

$$(17.) \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{Ctg} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right), \text{ wenn } x^2 > 1 \quad (\S. 40)$$

$$(18.) \int e^x dx = e^x \quad (19.) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (\S. 37).$$

### Aufgaben.

1.  $\int dx$ ; 2.  $\int x dx$ ; 3.  $\int \frac{1}{10} x^3 dx$ ; 4.  $\int 4x^5 dx$ ; 5.  $\int \frac{1}{x^2} dx$ ;
6.  $\int \frac{4}{x^3} dx$ ; 7.  $\int \frac{1}{5x^4} dx$ ; 8.  $\int \sqrt{x} dx$ ; 9.  $\int \sqrt[3]{x} dx$ ; 10.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ;
11.  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ ; 12.  $\int \sqrt[5]{x^4} dx$ ; 13.  $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} dx$ .

Ehe wir weiter in die Theorie der Integralrechnung einzudringen versuchen, ist es aber zweckmäßig, Ausschau zu halten, ob die Ausbeute unsere Mühe auch belohnen wird. Schon ein Kind pflegt sich zu ärgern, wenn eine mit gewaltiger Kraft geknackte Nuß sich als taub erweist. Befragen wir zunächst die Geometrie.

Die geometrische Bedeutung des Integrals tritt hervor, wenn man die Funktion  $y = f(x)$  in der bekannten Weise (vgl. D<sup>1</sup>) S. 4 f.) durch

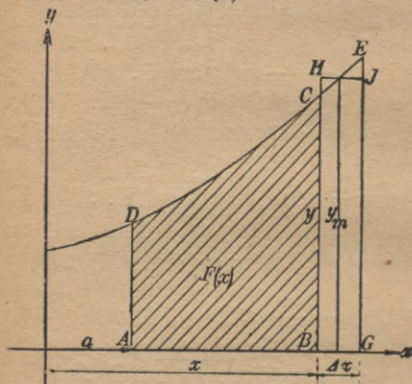


Fig. 1.

eine Kurve darstellt. Selbstverständlich ist auch die Fläche, welche von ihr, von der Abszissenachse und den im Abstände  $a$  ( $a$  sei eine Konstante) und  $x$  zur Ordinatenachse gezogenen Parallelen begrenzt wird (Fig. 1), eine Funktion von  $x$ , denn mit wachsendem oder abnehmendem  $x$  ändert sich auch ihr Inhalt. Wird z. B.  $x$  um  $BG = \Delta x$  größer, so nimmt  $F$  um  $BGEC$  zu. Den Zuwachs kann man durch das Rechteck  $BGEH$  ersetzen, wenn man dessen Höhe  $y_m$  passend bestimmt. Natürlich muß  $y_m$  zwischen dem Maximal- und Minimalwert liegen, den  $y$  in dem Intervall  $BG$  annimmt. Man erhält  $\Delta F = y_m \Delta x$ ;  $\frac{\Delta F}{\Delta x} = y_m$ .

Läßt man  $G$  immer näher an  $B$  rücken,  $\Delta x$  also immer mehr an Null, so nähert sich der Maximal- und auch der Minimalwert, den die Ordinate in dem immer schmaler werdenden Streifen hat, unbegrenzt der Größe  $y$ , der Differenzenquotient geht in den Differentialquotienten über (D. S. 14); es ist  $\frac{dF}{dx} = y = f(x)$ .

Die Flächenfunktion ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Ableitung gleich  $f(x)$  ist. Man hat demnach die Fläche

$$\text{(Formel 17.) } F = \int f(x) dx.$$

1) D. ist hier und weiterhin ein Hinweis auf das Bändchen 387 dieser Sammlung, welches die Differentialrechnung enthält.



Diese Lösung scheint unvollständig zu sein, da in ihr ja noch die Integrationskonstante auftritt. Durch einen leichten Kunstgriff kann man der Schwierigkeit Herr werden.

**Beispiel 1.** Wie groß ist die Fläche  $ABCD$ , welche von der Linie  $y=2+0,5x$ , der Abszissenachse und den 1 cm und 6 cm von der Ordinatenachse entfernten Ordinaten begrenzt wird? (Fig. 2)

Die Linie ist eine Gerade (D. S. 16), die Fläche ein Trapez. Da dessen Inhalt aus der Elementarmathematik bekannt ist, so gibt uns die vorliegende Aufgabe die Möglichkeit, unsere Untersuchungen auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

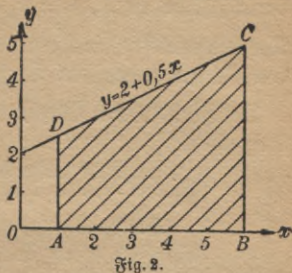


Fig. 2.

$$F = \int (2 + 0,5x) dx = 2x + 0,25x^2 + c \quad (\text{S. 9, Formel 3}).$$

Gesucht ist der Wert, den  $F$  für  $x=6$  annimmt; er ist  $F=12+9+c=21+c$ . Da die Fläche aber von der Ordinate  $x=1$  an gezählt werden soll, so muß  $F$  für diesen Wert gleich Null sein, also  $2+0,25+c=0$ . Diese Bedingung liefert uns die Integrationskonstante  $c=-2,25$ , die zu berechnende Fläche hat also den Inhalt  $F=21-2,25=18,75$  qcm. Die Paralleelseiten des Trapezes sind 2,5 und 5 cm, die Mittellinie ist  $m = \frac{1}{2}(2,5+5) = 3,75$  cm, die Höhe  $h = 6-1 = 5$  cm, also der Inhalt  $F = mh = 18,75$  qcm.

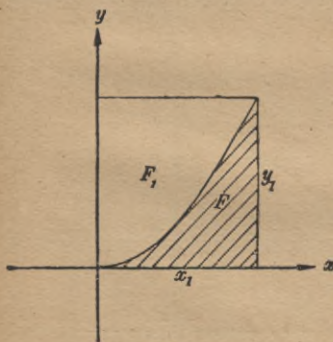


Fig. 3.

**Beispiel 2.** Es soll die in Fig. 3 schraffiert gezeichnete Fläche, die von der Parabel  $y = \frac{x^2}{a}$  begrenzt wird, berechnet werden.

$F = \int \frac{x^2}{a} dx = \frac{1}{3} \frac{x^3}{a} + c$ . Da die Fläche für  $x=0$  verschwindet, so muß  $0=0+c$ ;  $c=0$  sein, also  $F = \frac{x^3}{3a}$ . Für den Wert  $x_1$  erhält man  $F = \frac{x_1^3}{3a}$ . Ersetzt man noch im Zähler  $x_1^2$  durch  $ay_1$ , was nach der Kurvengleichung

gestattet ist, so ergibt sich  $F = \frac{1}{3} x_1 y_1$ . Die anstoßende, nicht schraffierte Fläche ist  $F_1 = x_1 y_1 - F = \frac{2}{3} x_1 y_1$ . Die Parabel teilt also das Rechteck, welches die Koordinaten eines beliebigen Kurvenpunktes mit den Achsen bilden, im Verhältnis 1 : 2.

**Beispiel 3.** Ein Körper bewegt sich geradlinig; man kennt in jedem Augenblicke seine im Laufe der Zeit veränderliche Geschwindigkeit. Wie groß ist der Weg, den der Körper vom Zeitpunkt  $t = 0$  an bis zum Zeitpunkt  $t_1$  durchläuft?

Die vorkommenden Strecken werden in Metern gemessen, die Zeit wird in Sekunden ausgedrückt. Bei der gleichförmigen Bewegung, die dadurch gekennzeichnet ist, daß in gleichen Zeitabschnitten auch stets gleiche Strecken durchzweilt werden, versteht man unter der Geschwindigkeit  $c$  den Weg, der in einer Sekunde zurückgelegt wird. Verfolgt man den Körper  $t$  Sekunden lang, so hat man den Gesamtweg  $s$  durch  $t$  zu dividieren, um die Geschwindigkeit zu erhalten;  $c = \frac{s}{t}$ ; da die Bezeichnung für  $s$  das Meter, für  $t$  die Sekunde ist, so wird  $c$  in  $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$  (m/sec) ausgedrückt. Dann ist umgekehrt  $s = ct$ . Man kann diesen Ausdruck veranschaulichen, wenn man auf der Abszissenachse die Zeit  $t$ , auf der Ordinatennachse die Geschwindigkeit  $c$  abträgt und aus diesen Seiten das Rechteck bildet; sein Inhalt ist der Weg  $s$ . (Fig. 4.)

Bei der ungleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit  $v$  in den einzelnen Augenblicken verschieden. Trägt man wieder die Zeitangaben auf der Abszissenachse (Fig. 5), die Geschwindigkeiten als Ordinaten ab, so erhält man eine Kurve.  $AB$  ist die Anfangsgeschwindigkeit. In dem

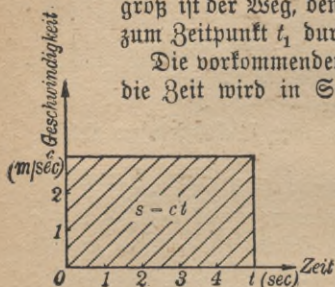


Fig. 4.

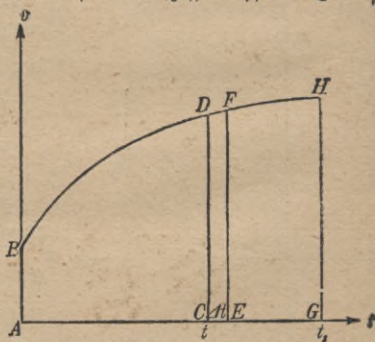


Fig. 5.



kleinen Intervall von  $t$  bis  $t + \Delta t$  kann die Bewegung nahezu als gleichförmig aufgefaßt werden. Es stellt also der Inhalt des Streifens  $CEDF$  den in diesem kleinen Zeitraum zurückgelegten Weg dar. Für das folgende oder vorhergehende Zeiteilchen würde man eine entsprechende schmale Fläche erhalten, durch Summation dieser Einzelwege bekommt man den Gesamtweg. Sein Betrag ist in  $t_1$  Sekunden numerisch gleich der Fläche  $AGHB$ .

(Formel 18.)  $s = \int v dt$ . Umgekehrt ist natürlich

$$(Formel 19.) \quad v = \frac{ds}{dt}$$

**Beispiel 4.** Die Geschwindigkeit eines frei ohne Anfangsgeschwindigkeit fallenden Körpers ist  $v = gt$ , wenn  $t$  die in Sekunden ausgedrückte Zeit seit dem Beginn der Bewegung und  $g$  die Zahl 9,81 (m/sec<sup>2</sup>) bedeutet. Wie groß ist der in  $t$  Sekunden durchlaufene Weg?

$$s = \int v dt = \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + c.$$

Da zu Beginn der Bewegung ( $t=0$ ) noch kein Weg zurückgelegt war ( $s=0$ ), so folgt:  $0 = 0 + c$ ;  $c = 0$ , also

$$(Formel 20.) \quad s = \frac{1}{2}gt^2.$$

### Aufgaben.<sup>1)</sup>

14. Man berechne durch Integration den Inhalt eines Trapezes, dessen Parallelseiten  $a$  und  $b$  und dessen Höhe  $h$  man kennt. Was erhält man, wenn  $a$  oder  $b$  gleich 0 ist?

15. Kann die in Beispiel 2 gelöste Aufgabe für eine Potenzkurve mit beliebigem Exponenten erweitert werden? (D. S. 49 f.)

16. Es soll das  $tv$ -Diagramm der gleichförmigen Bewegung gezeichnet werden.

17. Man zeichne das  $tv$ -Diagramm für die Fallbewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

18. Bei jeder gleichmäßig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit ( $v=bt$ ,  $b$  konstant) verhalten sich die in 1, 2, 3 ... Sekunden

1) Bei allen Aufgaben, in denen Flächeninhalte berechnet werden sollen, empfiehlt sich eine Nachprüfung. Man überdeckt die Figur mit einem (gezeichneten oder auf durchscheinendem Papier aufgetragenen) Netz von Quadratzentimetern, zählt die vollen, schätzt die von der Begrenzungskurve zerschnittenen und addiert.

den zurückgelegten Wege wie die Quadrate dieser Zeiten; die in der ersten, in der zweiten, in der dritten Sekunde usw. durchlaufenen Strecken sind den ungeraden Zahlen proportional. Man beweise diese Sätze graphisch.

19. Welche Geschwindigkeit hat ein ohne Anfangsgeschwindigkeit frei fallender Körper, wenn er die Strecke  $s$  Meter durchfällt hat?

20. Es soll das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm einer Bewegung gezeichnet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit die gegebene Größe  $c$  ist und die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um den bekannten Betrag  $b$  zu- oder abnimmt. (Gleichmäßig beschleunigte oder verzögerte Bewegung.) Wie groß ist der Weg in  $t$  Sekunden?

kehren wir nach diesen Anwendungen der Integralrechnung zur Theorie zurück, um zwei Sätze zu finden, die später von großem Wert sein werden.

**Satz 1.** Eine Summe oder Differenz kann gliedweise integriert werden.

$$\text{(Formel 21.) } \int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx;$$

$u$  und  $v$  bedeuten Funktionen von  $x$ .

$$\text{Es sei } U = \int u dx, V = \int v dx, \text{ also } \frac{dU}{dx} = u, \frac{dV}{dx} = v.$$

$$U + V = \int u dx + \int v dx$$

Die Ableitung der linken Seite  $\frac{d}{dx} (U + V)$  ist (D. S. 22 Satz 1) gleich  $\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx} = u + v$ . Deshalb ist  $U + V$  selbst das Integral dieser Größe.

$U + V = \int (u + v) dx$ . Vergleicht man die beiden Werte von  $U + V$ , so folgt daraus die Behauptung. Der Beweis für eine Differenz ist ganz entsprechend.

**Satz 2.** Ist der Integrand ein Produkt mit einem konstanten Faktor, so kann dieser vor das Integralzeichen gestellt werden.

$$\text{(Formel 22.) } \int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

Es sei  $\int f(x) dx = U$ , also  $\frac{dU}{dx} = f(x)$ . Nun ist  $\frac{d}{dx} (aU) = a \frac{dU}{dx}$  (D. S. 22 Satz 2)  $= a f(x)$ , also muß, da dieser Ausdruck die Ab-



leitung von  $aU$  ist,  $aU$  selbst das entsprechende Integral sein;  $aU = \int af(x)dx$ ; setzt man für  $U$  seinen Wert, so steht die Behauptung bewiesen vor uns.

### Aufgaben.

21.  $\int a \cos x \, dx$ ; 22.  $\int b \sin x \, dx$ ; 23.  $\int (a \cos x + b \sin x) \, dx$ ;  
 24.  $\int (a \sin x + b \cos x) \, dx$ ; 25.  $\int (a \cos x - b \sin x) \, dx$ ;  
 26.  $\int (a \sin x - b \cos x) \, dx$ ; 27.  $\int \frac{a^2}{x} \, dx$ ; 28.  $\int (e^x - a^x) \, dx$ ;  
 29.  $\int 6 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \, dx$ ; 30.  $\int \frac{f(x)}{a} \, dx$ ; 31.  $\int (4e^x + 3x^n) \, dx$ ;  
 32.  $\int \frac{a \, dx}{\cos^2 x}$ ; 33.  $\int \frac{dx}{b \sin^2 x}$ ; 34.  $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \, dx$ ; 35.  $\int \frac{5}{6} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \, dx$ ;  
 36.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}$ ; 37.  $\int \sin^3 x \, dx + \int \sin x \cos^2 x \, dx$ ;  
 38.  $\int x^2 \cos^2 x \, dx - \int x^2 \sin^2 x \, dx$ ; 39.  $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx - \int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$ ;  
 40.  $\int \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \, dx + \int \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \, dx$ .

### Zweites Kapitel.

### Das bestimmte Integral.

Die durch eine Konstante hervorgerufene Unbestimmtheit des Integrals verschwindet, sobald man genügend spezialisiert; in der Mechanik beispielsweise, wenn die Anfangsbedingungen des Bewegungsvorganges vorgeschrieben sind. Das bisher zur Bestimmung der Integrationskonstante angewendete Verfahren war in seinen Grundzügen stets dasselbe, es entspricht der Wirtschaftlichkeit geistiger Arbeit, wenn wir es ein für allemal festlegen.

Gehen wir zu diesem Zweck auf die Berechnung der in Fig. 1 dargestellten Fläche zurück. Nur wollen wir sie rechts nicht durch eine beliebige Ordinate begrenzt sein lassen, sondern durch eine Gerade, die in dem bestimmten und bekannten Abstand  $b$  parallel zur  $Y$ -Achse gezogen ist.

Um unsere Aufgabe zu lösen, berechnen wir aus der gegebenen Kurven-

gleichung  $y = f(x)$  zunächst die Flächenfunktion  $F(x) = \int f(x) dx$ . Sie möge in der Form  $\Phi(x) + c$  auftreten, wobei  $\Phi(x)$  die durch Integration gefundene Funktion und  $c$  die Integrationskonstante bedeute. Da die Fläche erst von  $a$  an gerechnet werden soll, so muß  $F(a) = 0$  sein, während für  $x = b$  der gesuchte Wert  $F_a^b$  resultiert. Aus den Gleichungen  $0 = \Phi(a) + c$  und  $F_a^b = \Phi(b) + c$  folgt durch Subtraktion  $F_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$ ; die Integrationskonstante ist, da sie in beiden Gleichungen als gleiche Größe auftrat, verschwunden.

Den Ausdruck  $\Phi(b) - \Phi(a)$  oder  $[\Phi(x)]_a^b$ , der aus dem unbestimmten Integral  $\int f(x) dx$  hervorgeht, wenn man nach der Integration die Variable  $x$  einmal durch die obere Grenze  $b$ , einmal durch die untere  $a$  ersetzt und dann den zweiten Ausdruck subtrahiert, nennen

wir das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$ .

### Aufgaben.

41.  $\int_0^1 x dx$ ; 42.  $\int_2^3 x^2 dx$ ; 43.  $\int_3^2 x^2 dx$ ; 44.  $\int_{-1}^{+1} x^3 dx$ ; 45.  $\int_{-1}^{+1} x^4 dx$ ;  
 46.  $\int_{-3}^{-2} (x^2 - x) dx$ ; 47.  $\int_{-2}^{-3} (x^2 - x) dx$ ; 48.  $\int_0^{\frac{1}{2}} (5x^4 + \frac{1}{2}) dx$ ;  
 49.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 (5x^4 + \frac{1}{2}) dx$ ; 50.  $\int_0^1 (5x^4 + \frac{1}{2}) dx$ .

Aus der Definition des bestimmten Integrals ergeben sich sofort einige Sätze, bei deren Beweis wir die obigen Bezeichnungen festhalten.

**Satz 3.** Vertauscht man die Grenzen eines bestimmten Integrals, so ändert sich allein sein Vorzeichen.

**Beweis:**  $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ ;  $\int_b^a f(x) dx = \Phi(a) - \Phi(b)$ ,  
 folglich (Formel 23)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .



$$\text{Satz 4. } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \text{ (Formel 24)}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= \Phi(b) - \Phi(a) + \Phi(c) - \Phi(b) \\ &= \Phi(c) - \Phi(a) = \int_a^c f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Satz 5. } \int_a^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx. \text{ (Formel 25.)}$$

Figur 6 liefert den geometrischen Nachweis für die Richtigkeit

des vierten Satzes; der fünfte kann ganz entsprechend veranschaulicht werden; bei dem dritten hat man auf das Vorzeichen der Fläche zu achten;  $\Delta x$  ändert sein Vorzeichen, wenn man die Begrenzung umkehrt. Man vergleiche auch die letzten Aufgaben mit den eben entwickelten Sätzen.

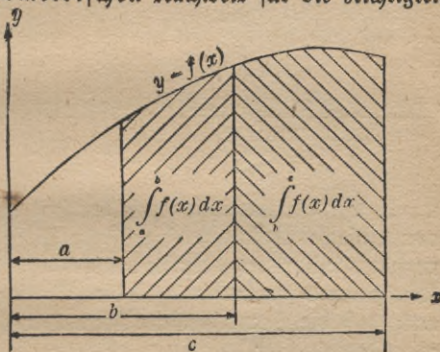


Fig. 6.

**Beispiel 5.** Wie groß ist die Fläche, welche von den Achsen, der Ordinate  $x = x_1$  und einer Kurve dritten Grades begrenzt wird? (Fig. 7.)

Die Gleichung der Kurve sei  $y = a + bx + cx^2 + kx^3$ ;  $a, b, c, k$  seien gegebene Konstanten.

$$F_0^{x_1} = \int_0^{x_1} (a + bx + cx^2 + kx^3) dx = \left[ ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{kx^4}{4} \right]_0^{x_1}$$

$$F_0^{x_1} = x_1 \left( a + \frac{bx_1}{2} + \frac{cx_1^2}{3} + \frac{kx_1^3}{4} \right).$$

Das Ergebnis kann noch vereinfacht werden. Die zu  $x = 0$ ;  $x = \frac{x_1}{2}$ ;  $x = x_1$  gehörigen Ordinaten seien  $y_0, y_m, y_1$ . Nach der Kurvengleichung ist

$$y_0 = a$$

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + kx_1^3$$

$$y_m = a + \frac{bx_1}{2} + \frac{cx_1^2}{4} + \frac{kx_1^3}{8}$$

Addiert man die drei Gleichungen, nachdem man die letzte mit 4 multipliziert hat, so findet man

$$\begin{aligned} y_0 + y_1 + 4y_m &= \\ &= 6a + 3bx_1 + 2cx_1^2 + \frac{3}{2}kx_1^3 = \\ &= 6\left(a + \frac{bx_1}{2} + \frac{cx_1^2}{3} + \frac{kx_1^3}{4}\right), \text{ also} \end{aligned}$$

(Formel 26.)

$$F_0^{x_1} = \frac{x_1}{6} (y_0 + y_1 + 4y_m).$$

Dies ist die **Simpson'sche Regel**; sie gilt genau, wenn die Kurvengleichung höchstens vom dritten Grad ist, sie kann aber näherungsweise auch dann angewandt werden, wenn dies nicht der Fall ist, da sich eine beliebige Kurve von einfacher Gestalt durch passende Wahl der Größen  $a, b, c, k$  näherungsweise durch eine Kurve dritten Grades ersetzen läßt; die Zahl der Konstanten vermehrt natürlich die „Biegsamkeit“ der Linie. Man weise nach, daß die Simpson'sche Formel auch für das Intervall  $x_0 \dots x_1$  gilt (statt  $0 \dots x_1$ ).

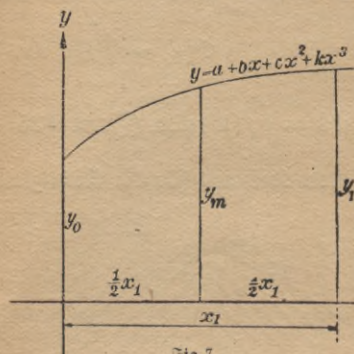


Fig. 7.

wandt werden, wenn dies nicht der Fall ist, da sich eine beliebige Kurve von einfacher Gestalt durch passende Wahl der Größen  $a, b, c, k$  näherungsweise durch eine Kurve dritten Grades ersetzen läßt; die Zahl der Konstanten vermehrt natürlich die „Biegsamkeit“ der Linie. Man weise nach, daß die Simpson'sche Formel auch für das Intervall  $x_0 \dots x_1$  gilt (statt  $0 \dots x_1$ ).

**Beispiel 6.** Die Fläche werde durch die gleichseitige Hyperbel  $y = \frac{a^2}{x}$  (D. S. 45), die  $x$ -Achse und die Ordinaten im Abstände  $x = x_1$

und  $x = x_2$  begrenzt ( $x_1 < x_2$ ). Ihr Inhalt wird  $F = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2}{x} dx = [a^2 \ln x]_{x_1}^{x_2}$   
 $= a^2 \ln x_2 - a^2 \ln x_1 = a^2 (\ln x_2 - \ln x_1) = a^2 \ln \left(\frac{x_2}{x_1}\right) = a^2 \ln \left(\frac{y_1}{y_2}\right)$ .  
 (Natürliche Logarithmen!)

**Beispiel 7.** Man stelle dieselbe Untersuchung für die polytropische und adiabatische Kurve an (D. S. 46 und 48, Aufg. 132).

Die Kurvengleichung lautet  $y = \frac{a}{x^n}$ , für die Fläche erhält man



$$F = \int_{x_1}^{x_2} ax^{-n} dx = \left[ \frac{ax^{-n+1}}{-n+1} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{a}{-n+1} [x_2^{-n+1} - x_1^{-n+1}] =$$

$$= \frac{a}{n-1} \left[ \frac{1}{x_1^{n-1}} - \frac{1}{x_2^{n-1}} \right].$$

$F = \frac{1}{n-1} [x_1 y_1 - x_2 y_2]$ ;  $y$  ist darin  $ax^{-n}$ . Bei der Adiabate hat man  $n = k = 1,41$ .

**Beispiel 8.** Wie groß ist die Fläche der Sinuslinie, gerechnet vom Anfangspunkt bis zur höchsten Ordinate?

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Die Simpsonsche Näherungsformel ergibt  $y_0 = 0$ ,  $y_m = \sin \frac{\pi}{4} = 0,707$ ,  $y_1 = 1$ ;  $F = \frac{\pi}{12} (1 + 4 \cdot 0,707) = 1,002$ .

Wollte man die von der Sinuslinie begrenzte Fläche, gerechnet von  $x = 0$  bis  $x = 2\pi$ , kennen lernen, so hätte man  $F = \int_0^{2\pi} \sin x dx = \left[ -\cos x \right]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$ . Statt dessen zerlegt man sie in zwei Teile:  $F_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$  und  $F_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -2$ . Die

Integralrechnung hat bei der Flächenberechnung die Vorzeichen der Ordinaten berücksichtigt und so  $F = F_1 + F_2 = 0$  geliefert.

Auch ohne Kenntnis der Integralrechnung und der Simpsonschen Regel lassen sich die bisher angeführten Flächen wenigstens näherungsweise berechnen. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß die Kurve  $y = f(x)$  in dem Intervall  $a \dots b$ , welches die gesuchte Fläche abgrenzt, stets steigt, was sich durch Differentialrechnung leicht entscheiden läßt (D. S. 41). Man zerlegt dann das Intervall  $a \dots b = P_0 P$  auf der  $X$ -Achse durch die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  in  $n$  Teilintervalle (in Fig. 8 ist  $n = 4$  angenommen), deren Breite  $x_1 - a, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, b - x_{n-1}$  ist, wenn die Abszisse von  $P_1$  mit  $x_1$ , die von  $P_2$  mit  $x_2$  bezeichnet wird, uß. In der Figur sind diese (4) Teilintervalle gleich groß angenommen, wie man es in der Praxis wohl ausnahmslos macht.

Jetzt ist klar, daß die gesuchte Fläche  $P_0 P B B_3 B_2 B_1 B_0$  (ihr Inhalt sei  $F$ ) größer ist als die ganz in ihrem Innern liegende treppenfö-

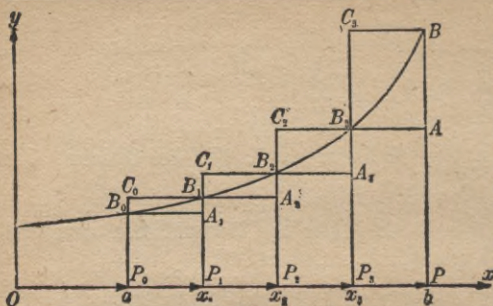


Fig. 8.

mige Fläche  $P_0 P A B_3 A_3 B_2 A_2 B_1 A_1 B_0$  und kleiner als die sie ganz umschließende, ebenfallig aus lauter Rechtecken zusammengesetzte Fläche  $P_0 P B C_3 B_3 C_2 B_2 C_1 B_1 C_0 B_0$ . Bezeichnet man die Ordinaten  $P_0 B_0, P_1 B_1, P_2 B_2, P_3 B_3$  mit  $y_0$  oder  $f(a), y_1$  oder  $f(x_1)$  usw., so

ist der Inhalt der zu großen Fläche

$$F_2 = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + (x_3 - x_2)f(x_3) + (b - x_3)f(b),$$

der Inhalt der zu kleinen Fläche

$$F_1 = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + (b - x_3)f(x_3).$$

Zwischen  $F_1$  und  $F_2$  muß  $F = \int_a^b f(x) dx$  liegen, und jede dieser Größen kann man berechnen.

Natürlich ändert sich im Gedankengang dieser Überlegung gar nichts, wenn man die Strecke  $P_0 P$  nicht in 4, sondern in 100 oder allgemein in  $n$  Teile zerlegt, nur unterscheiden sich  $F_1$  und  $F_2$  um so weniger, je größer die Zahl der Intervalle ist. Obwohl dies geometrisch unmittelbar einleuchtet, sei es für den praktisch fast allein in Betracht kommenden Fall gleicher Teilintervalle auch algebraisch nachgewiesen. Wir setzen  $x_1 - a = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \dots = b - x_{n-1} = \Delta x$  und erhalten

$$F_2 = \Delta x [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(b)]$$

$$F_1 = \Delta x [f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})].$$

Bei der Subtraktion fallen alle Glieder außer  $f(a)$  und  $f(b)$  weg und es ist

$$F_2 - F_1 = \Delta x [f(b) - f(a)].$$

Der Klammerinhalt hat einen bestimmt gegebenen Wert, die Größe  $\Delta x$

ist aber gleich dem  $n$ ten Teile von  $P_0 P$ ;  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ; sie kann daher,

wenn man  $n$  genügend groß wählt, also bei sehr zahlreichen Intervallen, unter jede noch so kleine Zahl heruntergedrückt werden, mithin kann man auch  $F_2 - F_1$  so klein machen, wie man will. Der Satz gilt auch dann, wenn die Intervalle nicht gleich sind, nur muß ihre Anzahl unendlich groß, ihre Länge unendlich klein werden.



Unsere Hilfsflächen  $F_1$  und  $F_2$  nähern sich unbegrenzt demselben Werte  $F$ , dem gesuchten Flächeninhalt.

Statt der Anfangsordinate (in  $F_1$ ) oder der Endordinate (in  $F_2$ ) hätte man auch in jedem Flächenelement eine zwischen ihnen liegende Ordinate  $m_1, m_2, m_3 \dots$  usw. (vgl. Fig. 1) nehmen können. Jeder Bestandteil der Fläche  $F_m = (x_1 - a)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + (x_3 - x_2)m_3 + (b - x_3)m_4$  ist kleiner als der entsprechende von  $F_2$  und größer als der entsprechende von  $F_1$ , also liegt  $F_m$  zwischen  $F_1$  und  $F_2$ ; und da bei unbegrenzt wachsender Gliederzahl die Ausdrücke  $F_1$  und  $F_2$  demselben Werte  $F$  zustreben, so kann man dasselbe von der zwischen ihnen liegenden Größe  $F_m$  behaupten.

Offenbar genügt es jetzt, nur eine Hilfsfläche, etwa  $F_1$ , zu betrachten; es ist  $F = \int_a^b f(x) dx = F_1$ , wenn man  $n$  über alle Grenzen wachsen läßt. Dies drückt man durch das Zeichen des Grenzüberganges,  $\lim$  (= limes, Grenze) aus (D. S. 58).

$$\text{(Formel 27.) } \int_a^b f(x) dx = \lim \left[ (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \right. \\ \left. + (x_3 - x_2)f(x_2) + \dots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}) \right]_{n=\infty}.$$

Bezeichnet man eine der Größen  $x_1 - a, x_2 - x_1, x_3 - x_2$  usw., die nicht gleich zu sein brauchen, aus praktischen Gründen aber meist gleich gewählt werden, mit  $\Delta x$ , die kleinste in dem zugehörigen Teilintervalle vorkommende Ordinate mit  $f(x)$  oder  $y$ , so hat ein beliebiges Glied von  $F_1$  die Größe  $f(x)\Delta x$  oder  $y\Delta x$ . Die Forderung der Summation gleichgebauter Ausdrücke gibt das Zeichen  $\Sigma$ ; also ist, unter Beifügung der Grenzen, zwischen denen summiert werden soll,

$$F_1 = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x = \sum_{x=a}^{x=b} y \Delta x.$$

Die Forderung, den betreffenden Ausdruck einem Grenzwert zustreben zu lassen, erheben wir wie oben durch das Zeichen  $\lim$ . Somit ergibt sich

$$\text{(Formel 28.) } \int_a^b f(x) dx = F = \lim \Sigma f(x) \Delta x = \lim \Sigma y \Delta x \\ \text{(für } n = \infty \text{).}$$

Die eben angestellten Überlegungen gelten offenbar mit geringen Modi-

fikationen auch dann, wenn die Kurve in dem Intervall  $a \dots b$  stets fällt. Wenn sie aber wellenförmig verläuft, so kann man sie stets

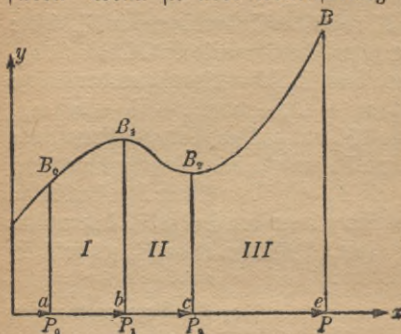


Fig. 9.

(abgesehen von Fällen, die nur den Theoretiker interessieren) in kleinere Stücke zerschneiden, die entweder nur steigende oder nur fallende Tendenz haben. So ist in Fig. 9 die Fläche  $P_0 P B B_2$   $B_1 B_0$  in die Teile I, II und III zerlegt. Es ist  $F_I = \lim \sum y \Delta x$ , wobei die Summation sich auf das Intervall  $P_0 P_1$  ( $x = a$  bis  $x = b$ ) erstreckt,  $F_{II} = \lim \sum y \Delta x$  für das Intervall  $P_1 P_2$ ,  $F_{III} = \lim \sum y \Delta x$  für das Intervall  $P_2 P$ , also  $F = F_I + F_{II} + F_{III} = \lim \sum y \Delta x$ , wobei die Summation das ganze Intervall  $P_0 P$  ( $x = a$  bis  $x = e$ ) umfaßt. Formel 28 gilt also allgemein.

Jetzt verstehen wir auch die Schreibweise  $\int f(x) dx$ . Es bedeutet  $dx$  eine immer kleiner werdende Differenz  $\Delta x$ , das Zeichen  $\int$ , welches aus dem lateinischen *s* (summa) hervorgegangen ist, eine Summe, die sich über eine immer größere Zahl von Gliedern erstreckt.

Bei der Differentialrechnung hat man ein Problem, das der Aufnahme eines Kinematographenfilms ähnlich ist, die Auflösung eines Vorganges in seine Elemente; die Integralrechnung setzt solche Elemente zu einem Ganzen zusammen wie es die Lichtbildvorführung tut.

### Aufgaben.

51. Gegeben ist die durch die Gleichung  $y = 1 + \frac{1}{10} x^3$  charakterisierte Kurve. Es soll das von ihr, von der Abszissenachse und von den Ordinaten  $x = 1$  und  $x = 4$  begrenzte Flächenstück einmal genau, dann durch Annäherung berechnet werden. Man wähle die Zahl der (gleichen!) Intervalle,  $n$ , der Reihenach 1, 2, 3, 6, 12, bestimme die Werte  $F_1$  und  $F_2$  und vergleiche jedesmal sie und ihr arithmetisches Mittel  $F_m$  mit dem genauen Wert.

52. Um welchen Betrag unterscheiden sich die in der vorigen Aufgabe gefundenen Größen  $F_1$  und  $F_2$  voneinander und von ihrem Mittelwert?

53. In wieviele Intervalle muß der zwischen  $x = 1$  und  $x = 4$



liegende Teil der Abszisse mindestens zerlegt werden, wenn sich  $F_1$  von  $F_2$  höchstens um 0,01 unterscheiden soll?

54. Wie groß ist die Fläche, welche von der Exponentialkurve  $y = e^x$ , den Achsen und der Ordinate  $x = a$  begrenzt wird?

55. Wie lautet die Antwort, wenn  $y = e^{-x}$  ist?

56. Welchem Wert nähert sich die eben berechnete Fläche, wenn  $a$  über alle Grenzen wächst?

57. Wie groß ist die Fläche der Kettenlinie, deren Gleichung die Form  $y = \frac{m}{2}(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$  hat, wenn die andern Grenzlinien dieselben sind wie in Aufg. 54 und 55?

58. Gilt Satz 1 und 2 auf S. 14 auch für bestimmte Integrale?

59. Man beweise, daß der Differentialquotient des nach der Formel 27 berechneten Integrals  $\int_a^x f(x) dx$  gleich  $f(x)$  ist.

### Uneigentliche bestimmte Integrale.

$\int_a^b f(x) dx$  heißt ein uneigentliches Integral, wenn der Integrand  $f(x)$  für einen zwischen  $a$  und  $b$  (einschließlich) liegenden Wert von  $x$  unendlich groß wird; dieselbe Bezeichnung wendet man auch dann an, wenn eine der Grenzen ( $a$  oder  $b$ ) unendlich wird.

1.  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$  ist ein uneigentliches Integral der ersten Art.  $\varepsilon$  sei eine Zahl, welche nur wenig größer ist als der Wert  $x = 0$ , für den der Integrand unendlich wird. Dann ist  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \left[ \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} \right]_\varepsilon^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{\varepsilon^3}$ .

Dieser Ausdruck bleibt richtig, wie klein auch  $\varepsilon$  ist, wir werden also als Wert des uneigentlichen Integrals die Größe definieren, die wir erhalten, wenn  $\varepsilon = 0$  wird. Man bekommt dann  $I = \frac{4}{3}$ .

Liegt  $x_0$ , der kritische Wert von  $x$ , zwischen den Grenzen, so ist nach Satz 4 auf S. 17  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$ , und man kann dieselbe Überlegung wie eben anwenden.

2.  $I = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$  ist ein uneigentliches Integral der zweiten Art.

$\omega$  sei eine große endliche Zahl.  $\int_0^{\omega} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\omega} = 1 - e^{-\omega}$ . Je größer wir  $\omega$  wählen, um so mehr nähert sich  $e^{-\omega} = \frac{1}{e^{\omega}}$  dem Wert 0.

So definieren wir  $I = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [1 - e^{-\omega}]$  und erhalten  $I = 1$ . Vgl. Aufgabe 56.

Solche uneigentlichen Integrale besitzen durchaus nicht immer einen endlichen Wert. B. B. ist  $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1}$  nach unserer Definition gleich

$\lim_{\varepsilon} \left[ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x-1} \right]_{\varepsilon=1}$  zu setzen. Man erhält  $[\ln(x-1)]_{\varepsilon}^{\infty}$ . Für  $\varepsilon = 1$

resultiert kein endlicher Wert. So nähert sich auch  $\int_0^{\omega} e^x dx = [e^{\omega} - 1]$

für  $\omega = \infty$  keiner endlichen Zahl, sondern der Klammerinhalt wird bei hinreichend wachsendem  $\omega$  beliebig groß.

### Drittes Kapitel.

## Anwendung der Integralrechnung auf Linien, Flächen und Körper.

Unsere letzten Überlegungen hatten gezeigt, daß die bei der Flächenberechnung auftretende Summe

$$(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + \cdots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

mit wachsender Gliederzahl dem Werte  $\int_a^b f(x) dx$  unbegrenzt zustrebt.

Derartige Summen kommen auch bei vielen andern Aufgaben vor, und nachdem uns einmal die Identität jener beiden Rechenausdrücke klar geworden ist, können wir stets einen durch den andern ersetzen, auch wenn nicht gerade eine Flächenberechnung zur Diskussion steht. Zum Überfluß läßt sich aber auch noch jedes Problem, das auf eine Summe von der Form  $\Sigma f(x) \Delta x$  führt, geometrisch durch eine Flächenberechnung interpretieren, wenn man die Kurve  $y = f(x)$  zeichnet (vgl. Fig. 8).



### 1. Flächenberechnungen in Polarkoordinaten.

Lassen wir einen Winkel, dessen einer Schenkel festliegt, wachsen, und tragen auf dem beweglichen eine konstante Strecke  $r$  ab, so entsteht ein Kreis. Ist die abgetragene Strecke variabel, so entsteht eine andere Kurve, deren Gestalt bestimmt ist, wenn man angeben kann, wie  $r$  von dem Winkel  $\varphi$  abhängt (Fig. 10).  $r = f(\varphi)$  heißt die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten. Zieht man zu zwei benachbarten Kurvenpunkten Radien, so entsteht ein Flächenelement, das um so mehr als Kreisabschnitt aufgefaßt werden kann, je näher die Strahlen einander liegen. Die Zentrwinkel der Elemente, in welche  $AOB$  zerfällt, sind  $\varphi_1 - \alpha$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 \dots$ ,  $\beta - \varphi_{n-1}$ , also ist die Fläche  $AOB =$

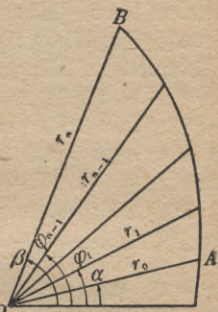


Fig. 10.

$$F = \lim \left[ \frac{1}{2} r_0^2 (\varphi_1 - \alpha) + \frac{1}{2} r_1^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + \frac{1}{2} r_{n-1}^2 (\beta - \varphi_{n-1}) \right]$$

$$\text{(Formel 29.) } F = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

**Beispiel 9.** Eine Archimedische Spirale beschreibt ein Punkt, wenn er sich auf einer Geraden gleichförmig bewegt, während diese sich um einen Punkt gleichförmig dreht (Drehkran mit horizontalem Ausleger). Ist die Winkelgeschwindigkeit (D. S. 28)  $= \omega$ , so wird in  $t$  Sekunden der Winkel  $\omega t$  (im absoluten Maß) überstrichen;  $\varphi = \omega t$ . Gleichzeitig bewegt sich der auf dem drehbaren Strahl wandernde Punkt, wenn wir seinen Lauf zur Zeit 0 im Drehpunkt beginnen lassen und ihm die Geschwindigkeit  $c$  m/sec geben,  $r = ct$  Meter weit. Hieraus folgt als Gleichung der Archimedischen Spirale  $r = \frac{c\varphi}{\omega}$ . Die Fläche, welche durch die den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  entsprechenden Radien begrenzt

wird, ist  $F_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \frac{c^2 \varphi^2}{\omega^2} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega^2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2 d\varphi$  (vgl. Satz 2 auf S. 14);

$$F_{\alpha}^{\beta} = \frac{c^2}{6\omega^2} (\beta^3 - \alpha^3).$$

### Aufgaben.

60. Die Fläche, welche der veränderliche Radius einer Archimedischen Spirale bei der ersten vollen Umdrehung überstreicht, ist gleich dem dritten Teil des Kreises, der mit dem letzten Radius beschrieben werden kann (Zeichnung!).

61. Die Gleichung der parabolischen Spirale ist  $r = a\sqrt{\varphi}$  (Zeichnung!). Wie groß ist die beim ersten vollen Umlauf des Radius überstrichene Fläche?

62. Wie verhalten sich die Flächen, welche zwischen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \alpha$ ;  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\alpha$ ;  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 3\alpha$  usw. liegen, bei der Archimedischen und bei der parabolischen Spirale?

63. Die hyperbolische Spirale ist definiert durch die Beziehung  $r = \frac{a}{\varphi}$  (Zeichnung!). Welche Fläche grenzt sie zwischen den Radien  $\varphi = 90^\circ$  und  $\varphi = 180^\circ$  ab?

64. Man löse die entsprechende Aufgabe für den „Vitruvius“  $r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ .

65. Man zeichne weitere Kurven von der Gleichung  $r = a\varphi^n$  und untersuche sie.

### 2. Berechnung von Kurvenbogenen.

Praktisch wird die Länge eines Kurvenbogens bestimmt, indem man auf ihm, vom Anfangspunkt ausgehend, mit konstanter Zirkelöffnung wiederholt kleine Teile absticht, ihre Anzahl sich merkt und den am Ende vielleicht übrigbleibenden Rest schätzt. Trägt man, ohne die Zirkelöffnung zu ändern, dieselbe Anzahl Teile auf einem genauen geraden Millimetermaßstab ab, so kann man auf ihm sofort die gesuchte Länge ablesen, wenn die Teilung aufging, sonst ist das letzte kleinere Teilchen noch für sich anzutragen, oder seine geschätzte Größe dem Ergebnisse

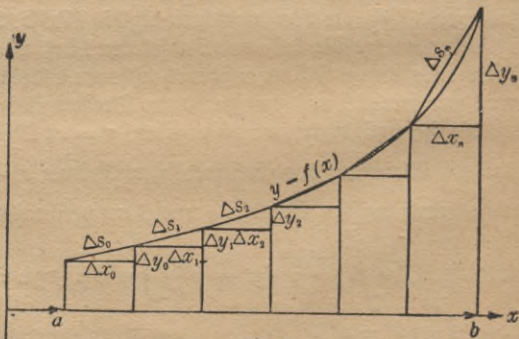


Fig. 11.



rechnerisch hinzuzufügen. (Man läßt auch, z. B. bei Landkarten, ein Rädchen auf der Kurve abrollen, dessen Umfang in Längeneinheiten geteilt ist.)

Dies Verfahren, dessen Kern darin liegt, daß man kleine Bogenstückchen durch die von ihnen sehr wenig abweichenden Sehnen ersetzt, macht sich die Integralrechnung zu eigen. Es ist (Fig. 11) die Summe der Sehnen

$$L_1 = \Delta s_0 + \Delta s_1 + \dots + \Delta s_n = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2} + \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} + \dots + \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta y_n^2}.$$

$$L_1 = \Delta x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right)^2} + \Delta x_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2} + \dots + \Delta x_n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2}.$$

Damit die gebrochene Linie zur Kurve werde, muß  $\Delta x_0, \Delta x_1 \dots \Delta x_n$  immer kleiner werden, die Differenzenquotienten werden Differentialquotienten, und die Summe wird zum Integral. (Vgl. Formel 28.) Die Länge des Kurvenbogens ist

$$\text{(Formel 30.) } L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \text{ wobei } a$$

und  $b$  die Abszissen des Anfangs- und Endpunktes sind. Bei der Berechnung hat man meistens nicht viel Freude, da Wurzeln, deren Radikand eine Summe ist, nur selten Neigung zeigen, sich integrieren zu lassen.

**Beispiel 10.** Wie lang ist der Bogen der Keilschen oder semikubischen Parabel  $y = ax^{\frac{3}{2}}$  zwischen  $x = 0$  und  $x = x_1$ ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}}; L = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{9}{4}a^2x} dx = \left[ \frac{8}{27a^2} \left(1 + \frac{9}{4}a^2x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=x_1},$$

was man durch Differentiation leicht bestätigt. Der Kurvenbogen ist also  $\frac{8}{27a^2} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}a^2x_1\right)^3} - 1 \right]$ .

**Beispiel 11.** Wie lang ist der Bogen der Kettenlinie, gerechnet von ihrem tiefsten Punkt bis zu einem beliebigen Punkt mit den Koordinaten  $x_1, y_1$ ?

$$y = \frac{m}{2} \left( e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right) = m \operatorname{Cof} \left( \frac{x}{m} \right); 1 + (y')^2 = \frac{y^2}{m^2} \text{ (vgl. D. S. 61, Aufg. 140).}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{y}{m} = \cos\left(\frac{x}{m}\right); L = \int_0^{x_1} \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx = \left[ m \sin\left(\frac{x}{m}\right) \right]_0^{x_1}$$

$$L = \frac{m}{2} \left( e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}} \right) = \sqrt{y_1^2 - m^2}.$$

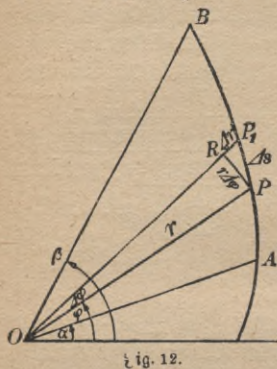


Fig. 12.

**Beispiel 12.** Wie lang ist der Bogen  $AB$  in Fig. 12, wenn die Kurvengleichung in Polarkoordinaten  $r = f(\varphi)$  ist?

Beschreibt man um  $O$  mit  $OP$  den Kreis, so entsteht die Figur  $PRP_1$ , die sich um so mehr einem bei  $R$  rechtwinkligen Dreieck nähert, je enger  $P$  und  $P_1$  zusammentreten.

Es ist  $\Delta s = \sqrt{(r \Delta \varphi)^2 + (\Delta r)^2} = \Delta \varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta \varphi}\right)^2}$ ,

$$\text{(Formel 31.) } L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

### 3. Körperinhalte.

Als bekannt sehen wir voraus, daß der Inhalt jedes prismatischen (scheiben- oder säulenförmigen) Körpers gefunden wird, indem man den Flächeninhalt der Grundfläche mit der Höhe des Körpers multipliziert ( $V = G \cdot h$ ). Natürlich sind stets entsprechende Maßeinheiten zu verwenden; mißt man die Höhe in Zentimetern, so muß die Grundfläche in Quadratcentimetern angegeben werden, und den Inhalt erhält man in Kubitzentimetern.

Will man den ungefähren Inhalt eines unregelmäßigen Körpers, z. B. einer Kartoffel, kennen lernen, so zerschneidet man ihn in dünne Scheiben, die annähernd als Prismen aufgefaßt werden können, berechnet deren Inhalte und summiert sie. Dies Verfahren ist um so genauer, je dünner die Scheiben werden. Um es rechnerisch zu erfassen, legen wir durch den Körper eine Gerade, die alle Querschnitte senkrecht durchsticht, und machen sie zur  $X$ -Achse. (Fig. 13.) Zu jedem  $x$  gehört dann ein ganz bestimmter Querschnitt  $Q$ , der Querschnitt ist also eine Funktion von  $x$ . Zu  $x = a$  möge  $Q_a$  gehören, zu dem Nachbarwert  $x_1$  gehört  $Q_1$  usw., bis wir für  $b$  den Wert  $Q_b$  bekommen. Dann ist das Volumen der Grenzwert von



$$V_1 = (x_1 - a) Q_a + (x_2 - x_1) Q_1 + \dots + (b - x_{n-1}) Q_{n-1}, \text{ also}$$

$$\text{(Formel 32.) } V = \int_a^b Q dx.$$

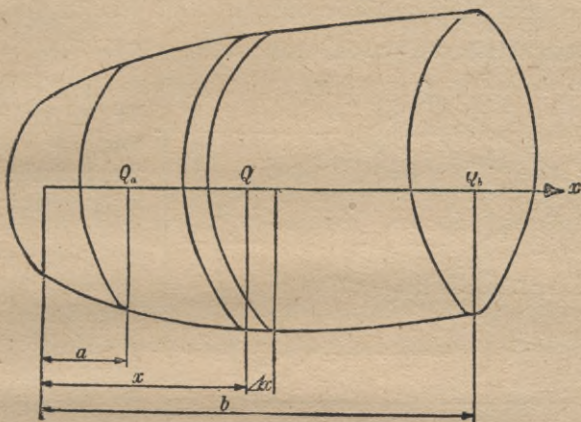


Fig. 13.

**Beispiel 13.** Wie groß ist der Inhalt einer Pyramide, deren Grundfläche  $G$  und deren Höhe  $h$  ist? (Fig. 14.)

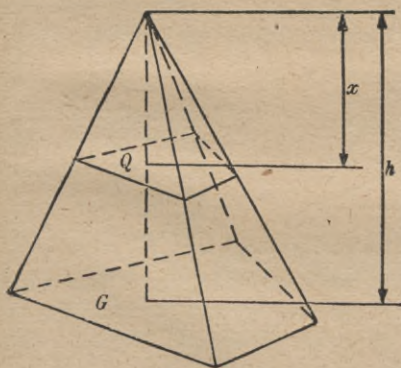


Fig. 14.

In der Stereometrie wird gezeigt, daß bei diesem Körper jeder Schnitt, der ihn parallel zur Grundfläche  $G$  durchsägt, eine ihr ähnliche Figur ausschneidet. Die Inhalte der beiden Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Pyramidenspitze. Diese wählen wir als Ausgangspunkt der  $X$ -Achse, deren Richtung mit der Höhe des Körpers zusammenfallen möge. Dann ist

$$Q : G = x^2 : h^2; \quad Q = \frac{Gx^2}{h^2}; \quad V = \int_0^h \frac{Gx^2}{h^2} dx = \left[ \frac{Gx^3}{3h^2} \right]_0^h$$

$$\text{(Formel 33.)} \quad \text{Pyramideninhalt} = \frac{Gh}{3}$$

Nimmt man als Grundfläche einen Kreis mit dem Durchmesser  $d$ , so erhält man als Formel für den Inhalt eines Kegels  $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{3} = \frac{r^2 \pi h}{3}$ .

Fig. 15.

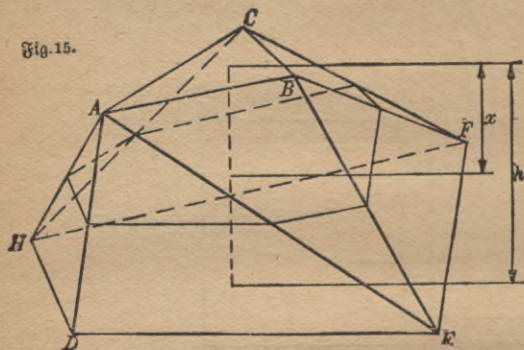
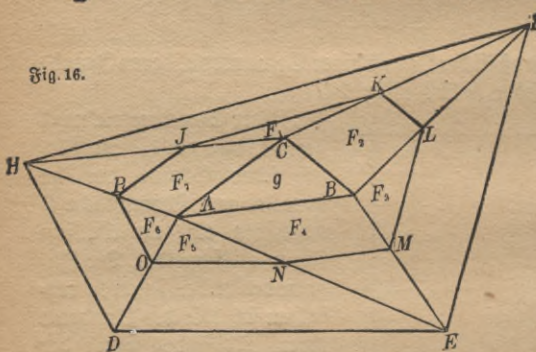


Fig. 16.



**Beispiel 14.** Unter einem Prismatoid (Körperstumpf) versteht man einen Körper, dessen Grundflächen zwei nach Form und Größe ganz beliebige ebene Vielecke sind, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie in parallelen Ebenen liegen. Seine seitliche Begrenzung bilden ebene Flächen, die von der einen Grundfläche zur andern gehen. Im allgemeinen sind sie Dreiecke; nur wenn zwei entsprechende Kanten parallel sind, erhalten wir Trapeze. Solch Trapez kann aber

durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt werden, so daß wir allgemein die seitliche Begrenzung als ein Netz von Dreiecken bezeichnen können, die von einer Seite der einen Grundfläche ausgehen und in einer Ecke der andern Grundfläche endigen. Die Zahl der seitlichen Dreiecke ist also ebenso groß wie die Summe aller Kanten der Grundflächen. Es soll der Inhalt dieses Körpers bestimmt werden. (Fig. 15 und 16)



Die Höhe des Prismatoids sei  $h$ . Auf ihr tragen wir von einer, z. B. der oberen Grundfläche  $g$  aus ein beliebiges Stück  $x$  ab und legen durch dessen Endpunkt eine neue Ebene, die parallel zu den Grundflächen verläuft. Denkt man sich ein Modell des Körpers aus Draht angefertigt, stellt es mit der unteren Grundfläche auf eine photographische Platte und belichtet es von oben her, so erscheinen die beiden Grundflächen und der Schnitt  $Q$  in wahrer Größe und Gestalt, die Seitenflächen werden als Dreiecke projiziert; der Inhalt dieser Projektionsdreiecke, die um die kleine Grundfläche  $g$  herumliegen, sei  $G_1, G_2 \dots G_7$ . Die Stücke von ihnen, welche sich von  $g$  bis  $Q$  erstrecken, seien  $F_1, F_2 \dots F_7$ .

Es gilt jetzt, die Fläche  $Q$  zu berechnen, welche von dem Linienzuge  $JKLMNOP$  umschlossen wird, sie setzt sich aus  $g$  und  $F_1$  bis  $F_7$  zusammen. Bestimmen wir zunächst  $F_1 = CJK$ . Aus den Gesetzen der Projektion folgt leicht, daß sich  $CJ$  zu  $CH$  wie  $x : h$  verhalten muß. Da aber die Inhalte der ähnlichen Dreiecke  $CJK$  und  $CHF$  den Quadraten entsprechender Seiten proportional sind, so ist  $F_1 : G_1 = CJ^2 : CH^2 = x^2 : h^2$  oder  $F_1 = \frac{x^2 G_1}{h^2}$ . Ebenso ist in unserem Fall

$F_3 = \frac{x^2 G_3}{h^2}$ ,  $F_5 = \frac{x^2 G_5}{h^2}$  und  $F_6 = \frac{x^2 G_6}{h^2}$ . In der Figur  $CFB$  gilt aber die Proportion:  $\triangle FKL : \triangle FCB = (h-x)^2 : h^2$  oder  $\triangle FKL = \frac{(h-x)^2 G_2}{h^2}$  und es ist  $F_2 = G_2 - FKL = \frac{G_2}{h^2} [h^2 - (h-x)^2]$

$= \frac{G_2}{h^2} (2hx - x^2)$ . Ebenso ist  $F_4 = \frac{G_4}{h^2} (2hx - x^2)$  und  $F_7 = \frac{G_7}{h^2} (2hx - x^2)$ , also der Inhalt des Schnittes

$$Q = \frac{x^2}{h^2} (G_1 + G_3 + G_5 + G_6) + \frac{2hx - x^2}{h^2} (G_2 + G_4 + G_7) + g;$$

$$Q = \frac{x^2}{h^2} (G_1 + G_3 + G_5 + G_6 - G_2 - G_4 - G_7) + \frac{2x}{h} (G_2 + G_4 + G_7) + g.$$

Setzt man beispielsweise  $x = 0$ , so erhält man die obere Grundfläche  $g$ , für  $x = h$  ergibt sich  $G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7 + g = G$ , für  $x = \frac{h}{2}$  resultiert  $M = \frac{1}{4} G_1 + \frac{1}{4} G_3 + \frac{1}{4} G_5 + \frac{1}{4} G_6 + \frac{3}{4} G_2 + \frac{3}{4} G_4 + \frac{3}{4} G_7 + g$ . Das gesuchte Volumen ist jetzt leicht zu berechnen.

$$V = \int_0^h Q dx = \frac{h}{3} (G_1 + G_3 + G_5 + G_6 - G_2 - G_4 - G_7) + h(G_2 + G_4 + G_7) + gh = \frac{h}{3} (3g + G_1 + 2G_2 + G_3 + 2G_4 + G_5 + G_6 + 2G_7).$$

Der Inhalt der Klammer ist, wie man sofort ersieht, gleich  $\frac{G+g+4M}{2}$ , also

$$\text{(Formel 34.) Prismatoidinhalt} = \frac{h}{6}(G + g + 4M).$$

**Beispiel 15.** Inhalt des Simpsonschen Körpers.

Ein Simpsonscher Körper ist dadurch gekennzeichnet, daß er von zwei parallelen ebenen Grundflächen begrenzt wird, und daß die Fläche jedes zu diesen parallelen Querschnitts  $Q$  durch die Formel  $Q = a + bx + cx^2 + ex^3$  dargestellt werden kann. Hierin bedeutet  $x$  den Abstand des Querschnitts von einer Grundfläche,  $a, b, c, e$  sind beliebige Konstanten.

Die Höhe des Körpers, der Abstand der Grundflächen, sei  $h$ .

$$V = \int_0^h Q dx = \left[ ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{ex^4}{4} \right]_0^h. \text{ Durch eine Entwicklung,}$$

die genau dem Gedankengange des Beispiels 5 auf S. 17 entspricht, ergibt sich

$$\text{(Formel 35.) Inhalt des Simpsonschen Körpers} = \frac{h}{6}(G + g + 4M).$$

$G$  und  $g$  sind wie in Beispiel 14 die Grundflächen, welche zu  $x = 0$  und  $x = h$  gehören,  $M$  ist der Mittelschnitt ( $x = \frac{h}{2}$ ). Das Prismatoid ist ein Spezialfall des Simpsonschen Körpers, weil dort  $Q$  nur eine Funktion zweiten Grades von  $x$  ist.

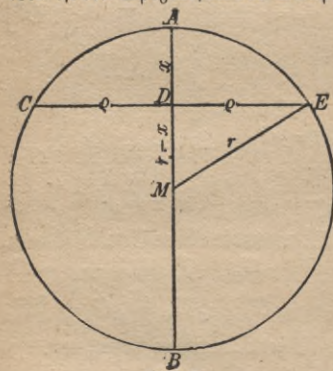


Fig. 17.

**Beispiel 16.** Wie groß ist der Inhalt einer Kugel vom Radius  $r$ ? (Fig. 17.)  $AB$  sei ein Durchmesser  $d$  der Kugel. Senkrecht zu ihm legen wir eine Ebene, die den Körper in einem Kreissegment vom Radius  $\rho$  schneidet. Aus unserer Figur geht hervor, daß  $\rho^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2rx - x^2$  ist. Der Inhalt der Kugel wird  $V =$

$$= \int_0^{2r} \pi \rho^2 dx = \int_0^{2r} (2\pi r x - \pi x^2) dx$$

$$= 2r\pi \int_0^{2r} x dx - \pi \int_0^{2r} x^2 dx = 2\pi r \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{2r} - \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{2r}.$$



$$\text{(Formel 36.) Kugelinhalt} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Man kann die Kugel auch, da  $Q = \rho^2\pi = 2r\pi x - \pi x^2$  nur eine quadratische Funktion von  $x$  ist, als Simpson'schen Körper auffassen, wenn man die Grundflächen auf die Punkte  $A$  und  $B$  zusammenschrumpfen läßt. Der Mittelschnitt ist der Äquator, die Höhe der Durchmesser.

$$\text{Somit ist } G = g = 0, M = r^2\pi, h = 2r, \text{ woraus } V = \frac{h}{6}(G + g + 4M) = \frac{4}{3}r^3\pi \text{ folgt.}$$

**Beispiel 17.** Wie groß ist der Inhalt eines Kugelabschnitts von der Höhe  $h$ ?

Führt man einen ebenen Schnitt durch die Kugel, so zerfällt sie in zwei Kugelabschnitte, deren Höhen  $h$  und  $2r - h$  sind. Um den ersten zu berechnen, muß man in dem vorigen Beispiel nur die obere Grenze des Integrals passend ändern.

$$V = \int_0^h \pi \rho^2 dx = \int_0^h (2\pi r x - \pi x^2) dx = 2\pi r \int_0^h x dx - \pi \int_0^h x^2 dx = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}.$$

$$\text{(Formel 37.) Inhalt des Kugelabschnitts} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Es ist zu beachten, daß  $r$  nach wie vor den Kugelradius bedeutet, nicht etwa den Halbmesser der Grundkreisfläche; dieser sei  $r_1$ . Will man ihn einführen, so braucht man nur daran zu denken, daß  $r_1^2 = 2rh - h^2$  ist (vgl.  $\rho$  in Beispiel 16). Hieraus folgt  $r = \frac{r_1^2 + h^2}{2h}$ ;  $3r - h = \frac{3(r_1^2 + h^2)}{2h} - h = \frac{3r_1^2 + h^2}{2h}$ ;  $V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + h^2)$ .

**Beispiel 18.** Die Parabel  $y = \frac{x^2}{a}$  (D. S. 16 f.) dreht sich um ihre Symmetrieachse. Wie groß ist der Inhalt des entstehenden Rotationsparaboloids, wenn seine Höhe  $h$  ist (Fig. 18)?

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi a y dy = \frac{\pi a h^2}{2}. \text{ Bezeichnen wir den Grundkreisradius des Paraboloids mit } r, \text{ die Grundfläche mit } G, \text{ so ist } h = \frac{r^2}{a}, a = \frac{r^2}{h}, V = \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

$$\text{(Formel 38.) Inhalt des Rotationsparaboloids} = \frac{Gh}{2}.$$

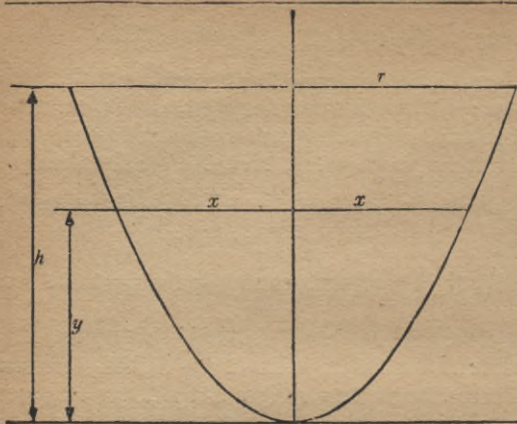


Fig. 18.

Dreht man also von einem Zylinder so viel Späne ab, bis der übrigbleibende Körper ein Paraboloid von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so geht gerade die Hälfte verloren. Damit man einen Kegel erhält, muß man sogar  $\frac{2}{3}$  des ursprünglichen Körpers opfern.

Wenn ein teilweise mit Flüssigkeit gefüllter Hohlzylinder um seine Achse rotiert, so dreht sich bald die Flüssigkeit mit, ihre Oberfläche wird ein Rotationsparaboloid.

**Beispiel 19.** Die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dreht sich einmal um die kleine Achse  $2b$ , einmal um die große Achse  $2a$ . Wie groß ist der Inhalt des im ersten Fall entstehenden abgeplatteten, des im zweiten entstehenden verlängerten Rotationsellipsoids?

$$\text{Im ersten Fall ist } V = \int_{-b}^{+b} \pi x^2 dy = \pi \int_{-b}^{+b} \left( a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} \right) dy = \frac{4}{3} \pi a^2 b,$$

$$\text{im zweiten haben wir } V = \int_{-a}^{+a} \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^{+a} \left( b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

(Formel 39.)

$$\text{Inhalt des abgeplatteten Rotationsellipsoids} = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

(Formel 40.)

$$\text{Inhalt des verlängerten Rotationsellipsoids} = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

### Aufgaben.

66 Man ermittle den Inhalt eines Prismatoids, welches von andern Vielecken als in Fig. 15 und 16 begrenzt wird, und weise nach,



daß die für diesen Spezialfall angestellten Überlegungen allgemeine Gültigkeit haben.

67. Ein Kasten hat als Grundflächen Rechtecke mit den Seiten  $a, b$  und  $c, d$ .  $a$  sei  $c$  und  $b$  sei  $d$  parallel. Seine Höhe sei  $h$ . Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

68. Ein Dach hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$ . Die Höhe ist  $h$ , die Firstlänge  $c$ . Wie groß ist die von ihm umschlossene Luftmenge?

69. Die Formel  $V = \frac{h}{6} (G + g + 4M)$  gilt für den Inhalt des Würfels, Quaders, Prismas, Zylinders, der Pyramide, des Kegels, des Pyramiden- und des Kegestumpfes. Warum? Man leite die üblichen Formeln aus ihr ab.

70. Warum kann man dieselbe Formel auf die Kugel, den Kugelabschnitt, das Rotationsparaboloid und das Rotationsellipsoid anwenden?

71. Wie verhalten sich die Inhalte eines Zylinders, einer Halbkugel, eines Rotationsparaboloides und eines Kegels, wenn man allen Körpern gleiche Grundkreisradien und gleiche Höhe gibt?

72. Der Inhalt eines Rotationsparaboloides ist gleich dem Produkte aus der Höhe und dem Mittelschnitt.

73. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses, welches ein Simpsonscher Körper ist, wenn der Durchmesser am Spund  $D$ , der Bodendurchmesser  $d$  und die Höhe  $h$  ist?

74. Der Inhalt einer Kugel vom Durchmesser  $d$  ist näherungsweise  $\frac{1}{2}d^3$ ; wieviel Prozent beträgt der Fehler?

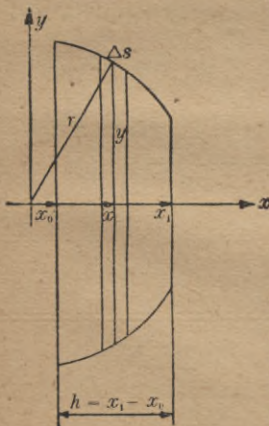


Fig. 19.

#### 4. Krümme Oberflächen.

Beispiel 20. Man berechne den Flächeninhalt einer Kugelzone.

Die Kugelzone wird aus der Oberfläche der ganzen Kugel durch zwei parallele Ebenen ausgeschnitten (Fig. 19). Durch zahlreiche nahe Ebenen, welche alle parallel zu den obigen geführt werden, zerfällt die Kugelzone in Teile, die um so besser als Mantelflächen abgestumpfter Kegel aufgefaßt wer-

36 III. Anwendung der Integralrechnung auf Linien, Flächen u. Körper  
 den können, je schmaler sie sind. Durch Summation entsteht die gesuchte  
 Fläche.

$\Delta F = 2\pi y \Delta s$ ; es ist aber  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $\Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$   
 (S. 27). Je schmaler die Streifen werden, um so weniger unterscheidet  
 sich  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  von  $\frac{dy}{dx}$ ; dieser Differentialquotient ist aber  $= -\frac{x}{y}$  (D. S. 51).

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{r}{y}.$$

$$\Delta F \approx 2\pi y \cdot \frac{r}{y} \cdot \Delta x = 2\pi r \Delta x.$$

$$F = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi r dx = 2\pi r (x_1 - x_0) = 2\pi r h.$$

Die Fläche der Kugelzone ist also ebenso groß, wie die Mantelfläche  
 eines Zylinders, der den Kugelradius zum Grundkreisradius hat  
 und dessen Höhe der der Kugelzone gleichkommt.

**Beispiel 21.** Wie groß ist die Fläche der Kugelhappe (Kalotte)  
 und wie groß die ganze Kugeloberfläche?

Schneidet man die Kugeloberfläche nur durch eine Ebene, so zer-  
 fällt sie in zwei Kugelhappen. Man findet hier  $F = \int_0^h 2\pi r dx = 2\pi r h$ ,  
 wenn  $h$  die Höhe der Kalotte ist. Endlich ist die ganze Kugeloberfläche

$$O = \int_0^{2r} 2\pi r dx = 4\pi r^2 = \pi d^2.$$

(Formel 41.) Kugelzone = Kugelhappe =  $2\pi r h = \pi d \cdot h$ .

(Formel 42.) Kugeloberfläche =  $4\pi r^2 = \pi d^2$ .



## Viertes Kapitel.

## Integrationsbeispiele aus der Statik.

## 1. Einiges aus der Lehre vom Schwerpunkt.

An einem zweiarmligen Hebel mögen auf der einen Seite die Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  angreifen, ihre senkrechten Abstände vom Drehpunkt  $O$  seien  $OA = x_1, OB = x_2, OC = x_3$  (Fig. 20). Auf der andern Seite wirke die Kraft  $K$  in der Entfernung  $k$ . Der Hebel selbst sei als gewichtslos oder ausbalanciert angenommen. Dann lehrt die Mechanik, daß die Vorrichtung im Gleichgewicht bleibt, wenn die Beziehung besteht  $Kk = K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3$ . Bei mehr Kräften treten natürlich mehr entsprechende Glieder auf. Jedes von ihnen ist das Produkt aus einer Kraft und ihrem Abstände vom Drehpunkte, es wird als das statische Moment der Kraft in bezug auf den Drehpunkt bezeichnet.

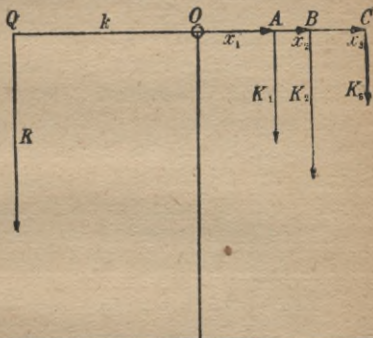


Fig. 20.

Ganz entsprechend sind die Formeln, wenn man die um einen Punkt drehbare Hebelstange durch ein Brett ersetzt, das auf einer Schneide liegt, oder, mehr mathematisch gesprochen, durch eine Ebene, die sich um eine in ihr liegende Gerade drehen kann. Wir wollen annehmen  $V$  (Fig. 21), daß das Brett  $STUV$ , somit auch die Schneide  $WZ$ , waagrecht liege, und daß die Kräfte Einwirkungen der Schwere auf die Körper  $A, B, C$  seien, welche auf dem Brette befestigt sind. Diese Körper seien von sehr geringer Ausdehnung, so daß sie in der Zeichnung durch Punkte wiedergegeben werden können. Die Größe der in ihnen senk-

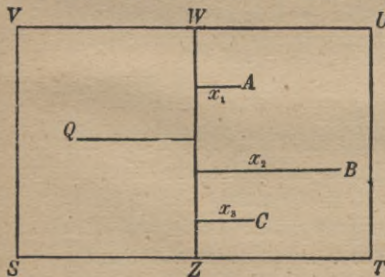


Fig. 21.

recht nach unten wirkenden Kräfte sei wie vorher mit  $K_1, K_2, K_3$  bezeichnet. Jetzt sind  $x_1, x_2, x_3$  die Abstände der Punkte  $A, B, C$  von der Drehachse. Auf der andern Seite von  $WZ$  greife in  $Q$  (Abstand  $k$ ) die ebenfalls lotrechte Kraft  $K$  an. Gleichgewicht herrscht, wenn das statische Moment der „Last“  $K$  gleich der Summe der statischen Momente aller Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  ist, wobei die statischen Momente stets auf die Drehachse  $WZ$  bezogen werden. Dann ist auch hier

$$Kk = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3.$$

Ist beispielsweise  $K = 12$  kg,  $k = 0,5$  m, so ist das statische Moment  $M = Kk = 6$  mkg. Wir wählen willkürlich  $K_1 = 10, K_2 = 2, K_3 = 3$  kg. Dann herrscht Gleichgewicht, wenn die entsprechenden Abstände  $x_1 = 0,28$  m;  $x_2 = 1$  m;  $x_3 = 0,4$  m sind, aber auch, wenn man  $x_1 = 0,38$  m;  $x_2 = 0,2$  m;  $x_3 = 0,6$  m macht. So kann man die gegebenen schweren Körper noch auf unendlich viele Arten verschieben, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn nur die Momentengleichung beachtet wird. Insbesondere kann man sie auch auf einen einzigen Punkt stellen; sein Abstand von der Drehachse sei  $\xi$  Meter. Die Momentengleichung liefert  $6 = 10\xi + 2\xi + 3\xi = \xi(10 + 2 + 3) = 15\xi$ ;  $\xi = \frac{6}{15} = 0,4$  m.

Diese Überlegung gilt natürlich allgemein. Man kann die drei Körper, deren Gewichte  $K_1, K_2, K_3$  sind, auf einen Punkt stellen oder, anders ausgedrückt, sie durch einen einzigen Körper ersetzen, dessen Gewicht gleich ihrem Gesamtgewicht  $K_1 + K_2 + K_3$  ist. Damit das Gleichgewicht nicht gestört wird, muß er einen ganz bestimmten Abstand  $\xi$  von der Drehachse haben, so daß sein statisches Moment gleich dem der drei ursprünglichen Körper ist.

$$(K_1 + K_2 + K_3) \xi = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3.$$

$$\text{(Formel 43.) } \xi = \frac{K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

Der Ersatzkörper muß auf irgend einem Punkte der im Abstände  $\xi$  zur Drehachse gezogenen Parallelen liegen.

Diese Willkür fällt fort, wenn wir unserm Brett  $STUV$  noch eine zweite zu  $WZ$  senkrechte Schneide geben und verlangen, daß der Körper vom Gewicht  $K_1 + K_2 + K_3$  (nach Ausschaltung von  $WZ$ ) auch in bezug auf die neue Gerade die ursprünglichen drei Körper völlig ersetzt. Bezeichnet man ihre Abstände von der neuen Achse mit  $y_1, y_2, y_3$ , so erhält man hier



$$\text{(Formel 44.) } \eta = \frac{K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3}{K_1 + K_2 + K_3},$$

und durch die berechneten Größen  $\xi$  und  $\eta$  ist die Lage des Ersatzkörpers in dem Koordinatensystem, welches die beiden Achsen definieren, ganz eindeutig festgelegt. Wir haben die Koordinaten des Schwerpunktes der drei Körper  $A, B, C$  gefunden.

## 2. Schwerpunkt einer Linie.

Eine gerade Linie von gleichartiger Beschaffenheit hat, wie sich un-

mittelbar einsehen läßt, ihren Schwerpunkt im Mittelpunk-

t. Eine krumme Linie zerlegen wir in sehr

viele Teile und ersetzen zunächst jeden Kurvenbogen

durch die entsprechende Sehne, die Kurve also durch

eine gebrochene Linie. 1 cm möge stets  $p$  Gramm wie-

gen, dann findet man in Fig. 22, wenn man die Länge

der Geraden  $OS_1$  mit  $s_1$ , die der gebrochenen Linie

$OS_1 S_2$  mit  $s_2$  bezeichnet usw., während  $\xi$  und  $\eta$  die

Schwerpunktswerte der Kurve bedeuten:

Schwerpunktswerte der Kurve bedeuten:

Schwerpunktswerte der Kurve bedeuten:

Schwerpunktswerte der Kurve bedeuten:

Schwerpunktswerte der Kurve bedeuten:

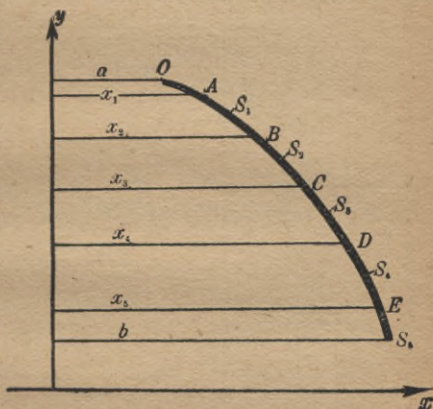


Fig. 22.

Schwerpunktswerte der Kurve bedeuten:

$$\xi \approx \frac{s_1 p x_1 + (s_2 - s_1) p x_2 + (s_3 - s_2) p x_3 + (s_4 - s_3) p x_4 + (s_5 - s_4) p x_5}{s_1 p + (s_2 - s_1) p + (s_3 - s_2) p + (s_4 - s_3) p + (s_5 - s_4) p}.$$

Hierin sind  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  die Abstände der Sehnenmittelpunkte  $A, B, C, D, E$  von der Drehachse.

Die (als konstant angenommene) Größe  $p$  kann im Zähler und Nenner ausgeklammert und dann fortgehoben werden. Man bekommt

$$\xi \approx \frac{\sum x \Delta s}{\sum \Delta s}; \quad \text{ebenso } \eta \approx \frac{\sum y \Delta s}{\sum \Delta s}.$$

$\Delta s$  ersetzen wir durch den auf S. 27 ermittelten Wert

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \quad \text{und finden im Grenzfall}$$

$$\text{(Formel 45.) } \xi = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{l}, \quad \eta = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{l},$$

wobei  $l$  die Länge der Kurve (von  $x = a$  bis  $x = b$ ) bedeutet.

**Beispiel 22.** Die Gleichung der Kettenlinie ist  $y = m \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ .

Wie hoch liegt der Schwerpunkt des Kurvenstückes, welches durch  $x = 0$  und  $x = a$  begrenzt wird, über der Abszissenachse (Fig. 23)?

Nach Beispiel 11 auf S. 27 ist  $l = m \operatorname{Sin}\left(\frac{a}{m}\right)$ , ferner  $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$ .

Man erhält  $l \cdot \eta = \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$

$$\int_0^a m \operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) dx. \text{ Aus den Formeln } \operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) + \operatorname{Sin}^2\left(\frac{x}{m}\right) = \operatorname{Cof}^2\left(\frac{2x}{m}\right) \text{ und } \operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) - \operatorname{Sin}^2\left(\frac{x}{m}\right) = 1 \text{ (D. S. 39) findet man leicht}$$

$$\operatorname{Cof}^2\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1 + \operatorname{Cof}\left(\frac{2x}{m}\right)}{2}. \text{ Es ist } l \cdot \eta =$$

$$\frac{m}{2} \int_0^a \left[1 + \operatorname{Cof}\left(\frac{2x}{m}\right)\right] dx = \frac{m}{2} \left[ a + \frac{m}{2} \operatorname{Sin}\left(\frac{2a}{m}\right) \right];$$

$$\eta = \frac{a + \frac{m}{2} \operatorname{Sin}\left(\frac{2a}{m}\right)}{2 \operatorname{Sin}\left(\frac{a}{m}\right)}, \quad \eta = \frac{\frac{m}{4} e^{\frac{2a}{m}} + a - \frac{m}{4} e^{-\frac{2a}{m}}}{e^{\frac{a}{m}} - e^{-\frac{a}{m}}}. \text{ Ist } \frac{a}{m} \text{ klein, so daß man}$$

die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion (D. S. 72) mit dem kubischen Gliede abbrechen kann, so erhält man nach Anwendung einiger Näherungsformeln  $\eta \approx m \left[ 1 + \frac{a^2}{6m^2} \right]$

### 3. Schwerpunkt einer Fläche.

Eine Fläche wird man zur Berechnung ihres Schwerpunktes in schmale Streifen zerlegen. Wenn sie durch eine gegebene Kurve, durch die X-Achse

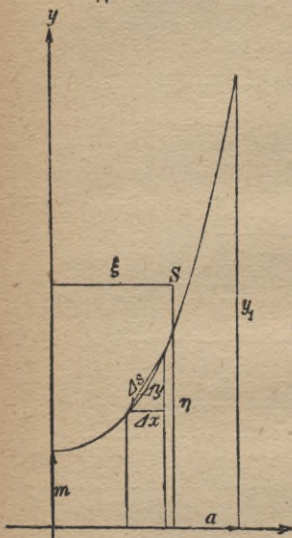


Fig. 23.



und die beiden zu  $x = a$  und  $x = b$  gehörenden Ordinaten. begrenzt wird (Fig. 24), so führen wir viele nahe Schnittgeraden parallel zur  $Y$ -Achse. Jeden der so erhaltenen Streifen kann man durch seinen Mittelpunkt  $S_1$  vertreten lassen, wenn man hier das Gewicht des ganzen Streifens ( $p \Delta F$ ) konzentriert. Die Größe  $p$  bedeute das in Gramm ausgedrückte Gewicht von 1 qem der Fläche. Man erhält für die

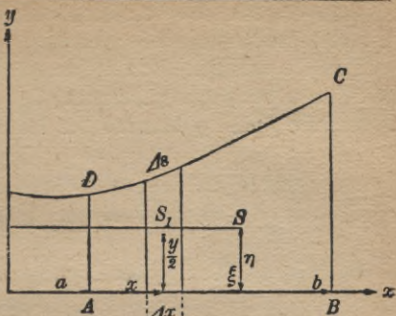


Fig. 24.

$ABCD$  in Figur 24

$$\xi \approx \frac{\sum x p \Delta F}{\sum p \Delta F}, \quad \eta \approx \frac{\sum \frac{y}{2} p \Delta F}{\sum p \Delta F}.$$

Die in jedem Summanden als Faktor auftretende Größe  $p$  hebt sich fort.

$$\xi \approx \frac{\sum x \Delta F}{\sum \Delta F} = \frac{\sum x y \Delta x}{\sum \Delta F}; \quad \eta \approx \frac{\sum \frac{y}{2} \Delta F}{\sum \Delta F} \approx \frac{\sum \frac{y}{2} y \Delta x}{\sum \Delta F}, \text{ also genau}$$

$$\text{(Formel 46.)} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\int_a^b x dF}{F} = \frac{\int_a^b x y dx}{F} \\ \eta = \frac{\int_a^b \frac{y}{2} dF}{F} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx}{F} \end{array} \right.$$

Wird die Fläche durch die Kurve, die  $Y$ -Achse und die im Abstande  $c$  und  $d$  zur  $X$ -Achse gezogenen Parallelen begrenzt (Fig. 25), so erhält man

(Formel 47.)

$$\xi = \frac{\int_c^d \frac{1}{2} x^2 dy}{F}; \quad \eta = \frac{\int_c^d x y dy}{F}.$$

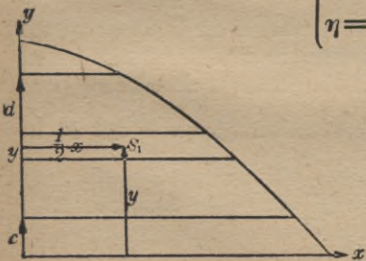


Fig. 25.

**Beispiel 23.** Es soll der Schwerpunkt eines Rechtecks mit den Seiten  $a$  und  $b$  gefunden werden.

Das Koordinatensystem lassen wir zweckmäßig mit zwei anstoßenden Seiten der Figur zusammenfallen,  $a$  bilde die  $X$ -Achse. Dann ist in unserer Fläche  $y$  dauernd der konstanten Größe  $b$  gleich.

$$\xi = \frac{\int_0^a x b \, dx}{ab} = \frac{\frac{1}{2} a^2 b}{ab} = \frac{1}{2} a; \quad \eta = \frac{\int_0^a \frac{1}{2} b^2 \, dx}{ab} = \frac{\frac{1}{2} b^2 a}{ab} = \frac{1}{2} b.$$

**Beispiel 24.** Wo liegt der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche (Fig. 26)?

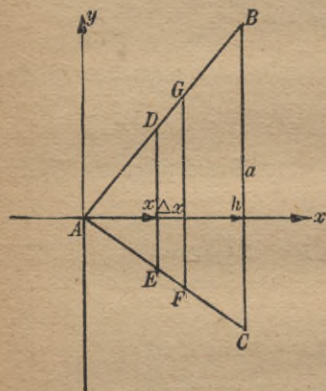


Fig. 26.

Wir legen eine Ecke des Dreiecks in den Koordinatenanfangspunkt und die von ihr ausgehende Höhe auf die  $X$ -Achse. Das Flächenelement  $DEFG$  ist hier ungefähr gleich  $DE \cdot \Delta x$ ;  $DE$  kann aber leicht durch eine Proportion gefunden werden, da die Dreiecke  $DEA$  und  $BCA$  einander ähnlich sind;

$$DE : BC = x : h; \quad DE = \frac{ax}{h}.$$

$$\xi = \frac{\int_0^h x \cdot \frac{ax}{h} \, dx}{F} = \frac{\left[ \frac{ax^3}{3h} \right]_0^h}{\frac{1}{2} ah} = \frac{\frac{ah^3}{3}}{\frac{1}{2} ah} = \frac{2}{3} h.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf einer Parallelen zu der Dreiecksseite  $BC$ , welche von der Spitze  $A$  den Abstand

$\frac{2}{3} h$ , also von  $BC$  den Abstand  $\frac{h}{3}$  hat. Entsprechendes gilt natürlich auch von seiner Lage zu den beiden andern Dreiecksseiten. Man überzeugt sich geometrisch leicht, daß der Schnittpunkt der drei Mittellinien diesen Anforderungen genügt, da sie sich im Verhältnis 1 : 2 teilen.

**Beispiel 25.** Wo liegt der Schwerpunkt der Flächen  $F$  und  $F_1$  in Fig. 3 (S. 11)?

Für  $F$  ist  $\int_a^{x_1} x y \, dx = \int_a^{x_1} x \cdot \frac{x^2}{a} \, dx = \int_0^{x_1} \frac{x^3}{a} \, dx = \frac{x_1^4}{4a}$ . Nach Beispiel 2 auf S. 11 ist  $F = \frac{x_1^3}{3a}$ . Hieraus ergibt sich  $\xi = \frac{3}{4} x_1$ .



$$\int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx = \int_0^{x_1} \frac{x^4}{2a^2} dx = \frac{x_1^5}{10a^2}, \quad \eta = \frac{x_1^5}{10a^2} : \frac{x_1^3}{3a} = \frac{3x_1^2}{10a} = \frac{3}{10} y_1.$$

Für  $F_1$  benutzt man die Formeln 47; man erhält

$$\xi_1 = \frac{\int_0^{y_1} \frac{1}{2} x^2 dy}{F_1} = \frac{\int_0^{y_1} \frac{1}{2} a y dy}{F_1} = \frac{\frac{1}{4} a y_1^2}{\frac{2}{3} x_1 y_1} = \frac{3}{8} \frac{a y_1}{x_1} = \frac{3}{8} x_1$$

$$\eta_1 = \frac{\int_0^{y_1} x y dy}{F_1} = \frac{\int_0^{y_1} y \sqrt{a y} dy}{F_1} = \frac{\int_0^{y_1} a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} dy}{F_1} = \frac{\frac{2}{5} a^{\frac{1}{2}} y_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} x_1 y_1} = \frac{\frac{2}{5} x_1 y_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} x_1 y_1} = \frac{3}{5} y_1.$$

#### 4. Die Guldin'sche Regel.

Die im dritten Kapitel behandelten, von krummen Flächen begrenzten Körper waren (vom allgemeinen Simpsonschen Körper abgesehen) ausschließlich Rotationskörper. Wir wollen jetzt Formeln für den Inhalt und die Mantelfläche dieser Körper ableiten, die wegen ihrer Symmetrie praktisch besonders wichtig sind.

Gegeben sei also die Kurve  $y = f(x)$ , sie drehe sich um die  $X$ -Achse. Wir betrachten das Stück von ihr, welches zwischen  $x = a$  und  $x = b$  liegt, und suchen die Fläche, welche durch die Kurve  $DC$  (Fig. 24) bei der Rotation erzeugt wird, und den Körper, der aus  $ABCD$  bei der Drehung hervorgeht.

A) Die Elemente  $\Delta s$  der Kurve erzeugen Mäntel von abgestumpften Kegeln. Ein beliebiger von ihnen hat die Oberfläche  $2\pi y \Delta s$ . Die Oberfläche, welche durch Rotation des aus geraden Elementen, den Sehnen der Kurve, bestehenden Linienzuges  $DC$  erzeugt wird, ist

$M_1 = \Sigma 2\pi y \Delta s = \Sigma 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$ . Rotiert die Kurve, so geht die Summe in das Integral über.

$$M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Das Integral ist aber nach Formel 45 gerade gleich  $\eta l$ , wenn  $\eta$  den Schwerpunktsabstand und  $l$  die Länge der Kurve bedeutet. Man bekommt so für die gesuchte Mantelfläche  $M = 2\pi \eta l$ .

Man beschreibt aber bei der Drehung der Schwerpunkt der Kurve einen Kreis mit dem Radius  $\eta$ ;  $2\pi \eta$  ist der Weg des Schwerpunktes.

Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Kurve und dem Wege ihres Schwerpunktes.

B) Der Inhalt eines Rotationskörpers läßt sich leicht nach der auf S. 28f. angegebenen Methode ermitteln; der Querschnitt  $Q$  ist hier stets ein Kreis, sein Radius ist die Ordinate  $y$ , daher ist  $Q = \pi y^2$ ;

es wird  $V = \int_a^b \pi y^2 dx = 2\pi \int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx$ . Das Integral ist nach For-

mel 46 gleich  $\eta F$ , wenn  $\eta$  den Schwerpunktsabstand der Fläche  $F = ABCD$  von der Drehachse bedeutet;  $V = 2\pi \eta F$ .

$2\pi \eta$  ist auch hier der Schwerpunktsweg.

Der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Fläche ( $F$ ) und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Es muß streng darauf geachtet werden, daß man im Fall A den Schwerpunkt der Kurve  $CD$ , im Fall B den der Fläche  $ABCD$  braucht. Diese fallen im allgemeinen durchaus nicht zusammen, so daß  $\eta$  in den beiden Fällen eine verschiedene Bedeutung hat.

**Beispiel 26.** Es soll der Inhalt des Rotationsparaboloides nach der Guldin'schen Regel gefunden werden.

Da  $F_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1$  (S. 11, Beispiel 2),  $\xi_1 = \frac{3}{8} x_1$  ist (S. 42, Beispiel 25), so hat man  $V = 2\pi \xi_1 \cdot F_1 = \frac{1}{2} \pi x_1^2 y_1$  (vgl. S. 33, Beispiel 18).

### Aufgaben.

75. Die größere Parallelseite eines Trapezes ist  $a$ , die kleinere  $b$ , die Höhe  $h$  cm. Welchen Abstand hat der Schwerpunkt der Trapezfläche von  $a$ ?

76. Ein regelmäßiges Sechseck dreht sich um eine Seite, (deren Länge  $s$  cm sei). Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstehenden Körpers?

77. Ein Kreis vom Radius  $r$  dreht sich um eine äußere, in seiner Ebene liegende feste Achse, deren Abstand vom Mittelpunkt  $l$  ist. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des entstehenden Ringkörpers? Läßt sich auf ihn die Simpsonsche Regel anwenden?

78. Wo liegt der Schwerpunkt einer Halbkreislinie?

79. Wo liegt der Schwerpunkt einer Halbkreisfläche?



80. Es soll der Schwerpunkt eines beliebigen Kreisbogens bestimmt werden.

81. Man ermittle den Schwerpunkt eines Kreisabschnittes.

### 5. Schwerpunkte von Körpern.

**Beispiel 27.** Wo liegt der Schwerpunkt eines Kegels? (Fig. 27.)

Da er natürlich auf  $A$  der Symmetrieachse liegen muß, so handelt es sich nur darum, seinen Abstand  $\xi$  von der Spitze festzustellen. Der Grundkreisradius des Kegels sei  $r$ , die Höhe  $h$ . Man kann den Kegel durch viele nahe Parallelebenen zur Grundfläche in Scheiben zerschneiden, deren Masse im Mittelpunkt einer jeden vereinigt gedacht werden kann.

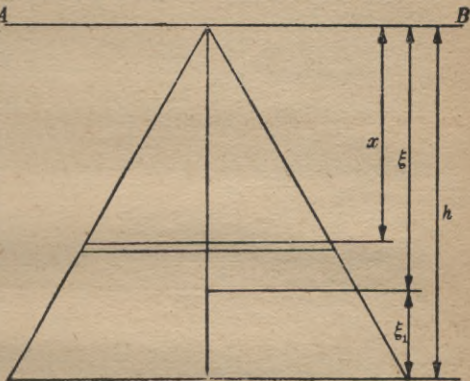


Fig. 27.

Führt man dann als Drehachse eine beliebige Gerade  $AB$  ein, die durch die Spitze des Kegels parallel zu seiner Grundfläche gezogen wird, so

findet man  $\xi = \frac{\int_0^h x Q dx}{V}$ ;  $Q$  ist der Parallelschnitt, welcher von der Spitze den Abstand  $x$  hat.

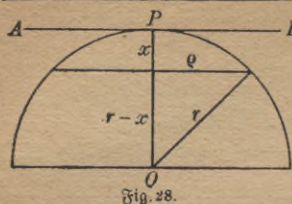
$$\int_0^h x Q dx = \int_0^h x \left(\frac{rx}{h}\right)^2 \pi dx = \frac{r^2 \pi}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{r^2 \pi h^2}{4}.$$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ;  $\xi = \frac{3}{4} h$ . Der Schwerpunkt liegt um  $\xi_1$  gleich  $\frac{1}{4}$  der Höhe von der Grundfläche entfernt.

Man führe dieselbe Überlegung bei der Pyramide durch. (Vgl. Beispiel 13 auf S. 29.)

**Beispiel 28.** Wo liegt der Schwerpunkt einer Halbkugel? (Fig. 28.)

Man nimmt die Symmetrielinie  $OP$  des Körpers als  $X$ -Achse an, den Pol  $P$  als Anfangspunkt des Achsensystems. Der Schnitt  $Q$  wird



so hindurchgelegt wie in der vorigen Aufgabe.  $Q = 2\pi r x - \pi x^2$ . (Vgl. Beispiel 16

auf S. 32.)  $\int_0^r x Q dx = 2\pi r \int_0^r x^2 dx - \pi \int_0^r x^3 dx = \frac{5}{12} r^4 \pi$ ;  $V = \frac{2}{3} r^3 \pi$ ;  
 $\xi = \frac{5}{8} r$ ;  $\xi_1 = \frac{3}{8} r$ .

**Beispiel 29.** Welchen Abstand hat der Schwerpunkt eines Simpson'schen Körpers (vgl. S. 32) von der Grundfläche  $g$ ?

$$Q = a + bx + cx^2 + ex^3.$$

$$\int_0^h x Q dx = \int_0^h (ax + bx^2 + cx^3 + ex^4) dx = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \frac{eh^5}{5};$$

$$V = \frac{h}{6} (G + g + 4M).$$

$$\xi = \frac{h^2 \left( \frac{a}{2} + \frac{bh}{3} + \frac{ch^2}{4} + \frac{eh^3}{5} \right)}{\frac{h}{6} (G + g + 4M)} = \frac{h (3a + 2bh + \frac{3}{2}ch^2 + \frac{6}{5}eh^3)}{G + g + 4M}.$$

Machen wir noch die besondere Voraussetzung, daß  $e = 0$  ist, also  $Q$  nur eine quadratische Funktion von  $x$ , so fällt das letzte Glied im Zähler von  $\xi$  weg. Nun ist  $M = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}$ ,  $G = a + bh + ch^2$ , und man sieht leicht, daß  $3a + 2bh + \frac{3}{2}ch^2 = 2M + G$  ist; es gilt also in unserm Spezialfall (Formel 48.)  $\xi = \frac{h(2M + G)}{G + g + 4M}$ .

Der Abstand von  $G$  ist  $\xi_1 = h - \xi = \frac{h(2M + g)}{G + g + 4M}$ .

Bei allen bisher behandelten Körpern außer dem Kreisring (Aufg. 77 auf S. 44) und dem allgemeinen Simpson'schen Körper fehlt das kubische Glied in  $Q$ , Formel 48 gilt also streng. Ist das nicht mehr der Fall, so kann sie wenigstens als gute Näherungsformel gelten. Da Höhe, Grundflächen und Mittelschnitt meist durch praktische Messungen ohne große Rechenarbeit bestimmt werden können, so ist unsere Formel für die Praxis wertvoll.

### Aufgaben.

82. Wo liegt der Schwerpunkt eines Rotationsparaboloides?

Nach der in Beispiel 29 gefundenen Formel berechne man den Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche für 83. den Würfel,



84. den Quader, 85. das Prisma, 86. den Zylinder, 87. die Pyramide, 88. den Kegels, 89. den Pyramidenstumpf, 90. den Kegelsstumpf, 91. die Halbkugel, 92. den Kugelabschnitt, 93. das Rotationsparaboloid, 94. die Hälfte eines Rotationsellipsoides.

## 6. Trägheitsmomente.

Bei der Zurückführung eines physischen Pendels auf das mathematische, bei Aufgaben über Durchbiegung eines Stabes, bei der Berechnung der Wucht, die in einem rotierenden Schwungrad steckt, und bei vielen anderen Problemen spielt das Trägheitsmoment eine sehr wichtige Rolle.

Das Trägheitsmoment einer geometrischen ebenen Fläche in bezug auf eine Gerade, welche in ihrer Ebene liegt, erhält man, wenn man jedes Flächenelement mit dem Quadrat seines Abstandes  $r$  von dieser Geraden multipliziert und die erhaltenen Ausdrücke addiert; es ist also  $J \approx \sum r^2 \Delta f$ ,

$$\text{(Formel 49.) } J = \int r^2 df.$$

**Beispiel 30.** Wie groß ist das Trägheitsmoment eines schmalen Rechtecks, dessen Länge  $a$  cm und dessen (geringe) Breite  $\delta$  cm ist, in bezug auf eine Achse, welche  $a$  parallel läuft und von der Mittellinie des Streifens den Abstand  $l$  hat?

Wir machen die Achse zur Trägerin der Abszissen (Fig. 29) und zerlegen das Rechteck durch Parallelen zur Ordinatenachse in Elemente, bei denen die Ausdehnungen sehr klein sind. Dann ist

$$J = \int_{x_1}^{x_2} l^2 \delta dx = l^2 \delta (x_2 - x_1) = l^2 a \delta = l^2 f,$$

wenn  $f$  die Rechtecksfläche bedeutet.

**Beispiel 31.** Es soll das Trägheitsmoment des Rechtecks von Fig. 30 in bezug auf die eingezeichnete Mittellinie  $AB$  gefunden werden.

Wir zerlegen zu dem Zweck die gegebene Fläche durch Parallelen zur Achse in schmale Streifen. Das Trägheitsmoment eines jeden können

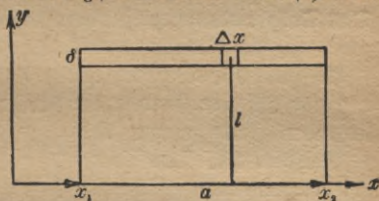


Fig. 29.

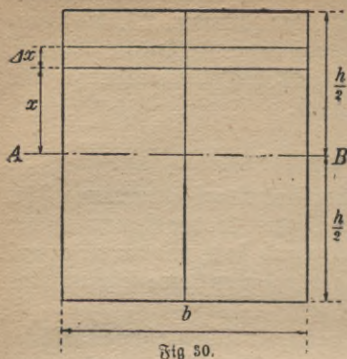


Fig. 50.

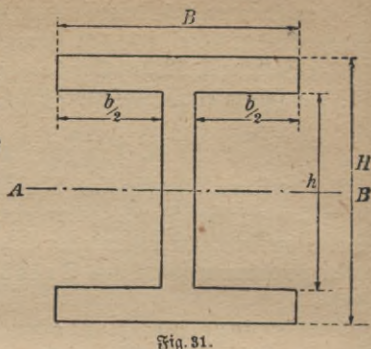


Fig. 31.

wir nach dem vorigen Beispiel finden. An die Stelle von  $l$  tritt  $x$ ,  $a$  wird durch  $b$  und  $d$  durch  $\Delta x$  ersetzt.

$$J = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b x^2 dx = \frac{b h^3}{12}$$

Das Trägheitsmoment für den Querschnitt eines Doppel-T-Eisens, bezogen auf die Mittellinie  $AB$  (Fig. 31), ist  $J = \frac{1}{12} (BH^3 - bh^3)$ .

**Aufgabe 95.** Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche in bezug auf eine Gerade, die durch eine Ecke parallel zur gegenüberliegenden Seite gezogen ist?

**Beispiel 32.** Das Trägheitsmoment einer Fläche, bezogen auf eine in ihrer Ebene liegende, durch den Schwerpunkt gehende Achse, sei  $J_s$ . Wie groß ist ihr Trägheitsmoment  $J$ , bezogen auf eine parallele Gerade, die von der ersten Achse den Abstand  $l$  hat?

Der Schwerpunkt  $S$  werde zum Koordinatenanfangspunkt gemacht, die erste Achse

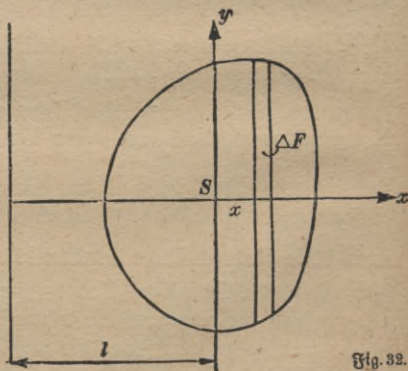


Fig. 32.



zur  $Y$ -Achse. Dann ist  $J_y = \int x^2 dF$ ,  $J = \int (x+l)^2 dF = \int x^2 dF + 2l \int x dF + l^2 \int dF$  (Fig. 32). Der erste Summand ist  $J_y$ , der zweite verschwindet, da der Schwerpunktsabstand  $\xi$  (vgl. Formel 46 auf S. 41) gleich Null ist, für den dritten erhält man  $l^2 F$ , wobei  $F$  der ganze Flächeninhalt ist. Also wird  $J = J_y + l^2 F$ .

### Aufgaben.

96. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Fig. 30, wenn man  $b$  als Achse wählt?

97. Man berechne das Trägheitsmoment eines Dreiecks in bezug auf seine Grundlinie.

98. Welche Änderung tritt ein, wenn man die Achse parallel zur Grundlinie durch den Schwerpunkt des Dreiecks gehen läßt?

99. Welches Trägheitsmoment haben die Flächen  $F$  und  $F_1$  in Fig. 3 in bezug auf die  $X$ - und die  $Y$ -Achse?

100. Gegeben sei eine Fläche und ein Achsenkreuz. Das Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf die Abszissenachse sei  $J_x$ , auf die Ordinatenachse  $J_y$ . Wie groß ist das polare Trägheitsmoment, welches auf die senkrechte Gerade bezogen wird, die man im Schnittpunkt der beiden andern auf der Ebene errichten kann?

### Fünftes Kapitel.

#### Anwendungen auf verschiedene Gebiete.

**Beispiel 33.** Ein oben offenes Gefäß hat überall denselben Querschnitt  $Q$  Quadratmeter. Es ist  $H$  Meter hoch mit Wasser gefüllt, am Boden hat es eine Abflußöffnung vom Querschnitt  $q$  Quadratmeter. (Natürlichkeit  $q$  meistens ein kleiner Bruch.) In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel auf die vorgeschriebene Höhe  $H_1$  Meter?

(Fig. 33). Um das Problem an einem konkreten Fall zu erläutern, nehmen wir an, der Querschnitt sei überall ein Kreis vom Durchmesser  $d = 60$  cm, die Höhe betrage  $H = 1,20$  m, die kreisförmige Ausflußöffnung habe einen Durchmesser von  $d_1 = 9$  mm.  $H_1$  sei der Reihe nach 1 m; 0,80 m; 0,60 m; 0,40 m; 0,20 m; 0 m.

Wir wollen uns vorstellen, das Niveau sei bereits auf  $h$  Meter gesunken. Dann beträgt die Ausflußgeschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$ , wobei

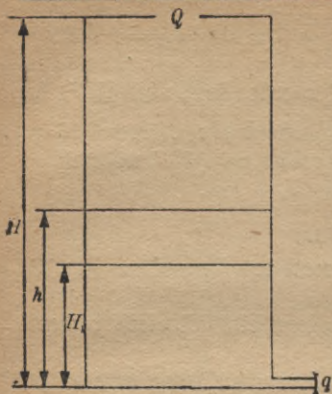


Fig. 35.

$g = 9,81 \text{ m/sec}^2$  ist. In einer Sekunde würde eine Wassersäule vom Querschnitt  $q$  Quadratmeter und der Länge  $v$  Meter die Ausflußöffnung verlassen, wenn die Geschwindigkeit ihren Wert in dieser Zeit beibehielte. Das wird nicht genau der Fall sein, eine gute Annäherung erzielen wir aber, wenn wir eine recht kurze Zeitspanne  $\Delta t$  betrachten. Die Länge der Wassersäule wird jetzt nur  $v \Delta t$  sein, in der Zeit  $\Delta t$  fließen also  $qv \Delta t$  Kubikmeter aus. Das äußert sich auch durch das Sinken des oberen Niveaus; die Höhe  $h$  möge um  $\Delta h$  Meter steigen, also um  $-\Delta h$  Meter fallen

( $\Delta h$  ist negativ,  $-\Delta h$  positiv). Dann beträgt die Verringerung der Flüssigkeitsmenge  $-Q \Delta h$  Kubikmeter, und wir haben

$$qv \Delta t = q \sqrt{2gh} \Delta t = -Q \Delta h; \quad \text{also} \quad \Delta t = -\frac{Q \Delta h}{q \sqrt{2gh}}$$

Summiert man und geht zur Grenze über, so findet man für die gesuchte Zeit

$$t = \int_H^{H_1} -\frac{Q dh}{q \sqrt{2gh}} = -\frac{Q}{q \sqrt{2g}} \int_H^{H_1} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{Q}{q \sqrt{2g}} \int_{H_1}^H \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (\text{Formel 22 auf S. 14}).$$

$$t = \frac{2Q}{q \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{H_1}) \text{ Sekunden.}$$

In Wirklichkeit muß die theoretische Ausflußgeschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$  noch durch den Erfahrungskoeffizienten  $\mu$  verbessert werden, welcher der Zusammenziehung des Strahles und der Reibung an den Rohrwandungen Rechnung trägt. Setzt man  $v = \mu \sqrt{2gh}$ , so wird

$$t = \frac{2Q}{q \mu \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{H_1}) \text{ Sekunden.}$$

Zur Entleerung des Behälters ( $H_1 = 0$ ) ist die Zeit

$$T = \frac{2Q \sqrt{H}}{q \mu \sqrt{2g}} \text{ sec erforderlich.}$$

$\mu$  wollen wir zu 0,6 annehmen,  $\sqrt{2g}$  findet man in Tabellen und auf dem Rechenschieber gleich 4,429.



In unserem Fall ist  $Q = 0,6^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0,283 \text{ qm}$ ,  $q = 0,009^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0,0000636 \text{ qm}$ ;  $\frac{Q}{q} = 4444 (= d^2 : d_1^2)$ ;  $\frac{2Q}{q\mu\sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 4444}{0,6 \cdot 4,429} = 3340$ ,  $\sqrt{H} = 1,095$ .

$t = 3340 (1,095 - \sqrt{H_1}) = 3660 - 3340 \sqrt{H_1}$ . Die gesuchten Ausflußzeiten sind  $t_1 = 320^s = 5^m 20^s$ ;  $t_2 = 11^m 10^s$ ;  $t_3 = 17^m 50^s$ ;  $t_4 = 25^m 40^s$ ;  $t_5 = 36^m 10^s$ ;  $t_6 = T = 61^m 0^s$ . Wegen der Unsicherheit der Zahl  $\mu$  genügt hier die Genauigkeit des Rechenschiebers vollkommen.

### Aufgaben.

101. Ein trichterförmiges Gefäß ist ganz mit Flüssigkeit gefüllt. a) Welche Zeit braucht diese zum Ausfluß? b) Wann steht die Flüssigkeit nur halb so hoch über der Ausflußöffnung wie zu Anfang? c) Wann ist das halbe Volumen ausgeströmt?

102. Ein kugelförmiger Behälter vom Radius  $r$  ist (ganz oder teilweise) mit Wasser gefüllt. An seinem tiefsten Punkt liegt die Ausflußöffnung mit dem Querschnitt  $q$ . In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel von der Höhe  $H$  auf die Höhe  $H_1$ , beide Höhen vom tiefsten Punkt an gerechnet?

### Eine Vereinfachung der Darstellungsweise.

Der Leser wird gemerkt haben, daß derselbe Gedankengang bei jeder Anwendung der Integralrechnung wiederkehrt: man zerlegt einen Körper, eine Fläche, oder was man sonst betrachtet, in Elemente, ersetzt jedes durch ein einfacheres, z. B. ein kleines Kurvenstück durch eine Gerade, ein Flächenelement durch ein Rechteck, und knüpft hieran seine Betrachtungen. Ist man mit ihnen fertig geworden, so geht man zur Grenze über, wobei sich Differenzenquotienten in Differentialquotienten, Summen in Integrale verwandeln, und das ursprüngliche Gebilde als Grenzfall aus der Summe seiner vereinfachten Elemente wieder ersteht.

Ohne diesen Gedankengang irgendwie zu ändern, wollen wir die Bezeichnung jetzt vereinfachen. Da zu Anfang stets Differenzenquotienten auftreten, die zum Schluß in Differentialquotienten übergehen, so macht es offenbar im Ergebnis keinen Unterschied, wenn wir von vornherein das Differentialzeichen  $d$  statt des Differenzenzeichens  $\Delta$  brauchen, wenn wir uns nur dabei bewußt bleiben, daß wir es in Wirklichkeit immer zunächst mit endlichen, wenn auch meist sehr kleinen, Differenzen zu tun haben. So können wir in Beispiel 33 sagen: In dem Zeit-

element  $dt$  erreicht die Länge der Ausflußsäule den Wert  $v dt$ , das obere Niveau sinkt um  $-dh$ , es ist

$$qv dt = -Q dh; \quad dt = -\frac{Q dh}{q\sqrt{2gh}}; \quad t = -\int_H^{H_1} \frac{Q dh}{q\sqrt{2gh}}.$$

**Beispiel 34.** Ein Ballon steigt von einem Orte auf, der  $H_1$  Meter über dem Meerespiegel liegt. Der Barometerstand beträgt hier  $P_1$  Millimeter Quecksilbersäule. Nach einiger Zeit fährt der Ballon in einer Luftschicht, deren Barometerstand  $P_2$  mm ist ( $P_2 < P_1$ ). Die mittlere Lufttemperatur ist  $t^\circ$  C. Wie hoch schwebt der Ballon über dem Meerespiegel?

Die gesuchte Höhe sei  $H_2$ , der Höhenunterschied also  $H_2 - H_1$  Meter. Wir betrachten die Verhältnisse in der Höhe  $h$  Meter über dem Ausgangspunkt. Der Querschnitt des Barometerrohres sei  $Q$  Quadratcentimeter. Bekanntlich kann man ein Quecksilberbarometer als Wage auffassen, auf deren eine Schale der Luftdruck wirkt, während die andere mit der Quecksilbersäule belastet ist. Steigt das Luftschiff um  $dh$  Meter = 100  $dh$  Zentimeter, so wird auf der einen Seite eine Luftsäule weggenommen, deren Volumen 100  $Q dh$  ccm ist. Nun wiegt 1 ccm Luft bei  $0^\circ$  und 760 mm Barometerstand 0,001293 Gramm, bei  $t^\circ$  und  $p$  mm — es sei  $p$  der in  $h$  Meter herrschende Barometerstand — aber  $\frac{0,001293 p}{760 (1 + \frac{1}{273} t)}$  Gramm, also unsere Luftsäule  $\frac{0,1293 p Q dh}{760 (1 + \frac{1}{273} t)}$ . Das Quecksilber steige um  $dp$  (sinke also um  $-dp$ ) Millimeter. ( $dp$  ist negativ,  $-dp$  positiv). Sein spezifisches Gewicht ist 13,6, eine Quecksilbersäule von  $Q$  qcm Querschnitt und  $-dp$  mm Höhe wiegt also  $-1,36 Q dp$  Gramm. So ergibt sich

$$\frac{0,1293 p Q dh}{760 (1 + \frac{1}{273} t)} = -1,36 Q dp;$$

$$dh = -\frac{1,36 \cdot 760 (1 + \frac{1}{273} t)}{0,1293} \frac{dp}{p} = -7994 (1 + \frac{1}{273} t) \frac{dp}{p}.$$

Jetzt kann man links zwischen den Grenzen  $H_1$  und  $H_2$ , rechts entsprechend zwischen  $P_1$  und  $P_2$  integrieren.  $t$  ist konstant.

$$\int_{H_1}^{H_2} dh = \int_{P_1}^{P_2} -7994 (1 + \frac{1}{273} t) \frac{dp}{p} = 7994 (1 + \frac{1}{273} t) \int_{P_2}^{P_1} \frac{dp}{p}.$$

$H_2 - H_1 = 7994 (1 + \frac{1}{273} t) (lP_1 - lP_2)$ . Es ist bequemer, statt der hier gebrauchten natürlichen Logarithmen  $k$  n  $s$  t  $l$  i  $c$  h  $e$  einzuführen;



dann tritt rechts noch der Faktor 2,3026 auf (D. S. 36.);  $7994 \cdot 2,3026 = 18400$ , also

$H_2 - H_1 = 18400 \left(1 + \frac{1}{273} t\right) (\lg P_1 - \lg P_2) =$   
 $(18400 + 67t) (\lg P_1 - \lg P_2)$ . Ist z. B.  $H_1 = 120$  m,  $P_1 = 730$  mm,  $t = +20^\circ$ ,  $P_2 = 585$  mm, so findet man  $H_2 - H_1 = 1898$  m,  $H_2 = 2018$  m.

**Aufgabe 103.** Man stelle den obigen Ausdruck graphisch dar, indem man das Verhältnis  $\frac{P_1}{P_2}$  als unabhängige Veränderliche wählt und ihm zunächst den Wert 1, dann steigende Werte beilegt.

**Beispiel 35.** Ein Gas erfüllt einen Raum von  $v_0$  cem bei einem Druck von  $p_0$  Atm ( $=$  kg/qcm). Es dehnt sich unter Beibehaltung seiner Temperatur (isotherm) auf den größeren Raum  $v_1$  cem aus. Welche Arbeit leistet es dabei?

Das Gas erfülle einen Zylinder, welcher an einer Seite durch den Kolben  $JK$  (Fig. 34) verschlossen ist. Sein Querschnitt sei  $Q$  qcm. Der ursprüngliche Raum,  $v_0$ , ist  $CDKJ$ , der spätere,  $v_1$ , wird durch  $CDBA$  dargestellt.

Die Raumvergrößerung ist bei dem isothermen Verlauf nur dadurch möglich, daß der auf dem Kolben lastende Druck, ursprünglich  $p_0$  Atm, sich allmählich auf den Enddruck,  $p_1$  Atm, ermäßigt. Ein Zwischenwert sei  $p$  (Atm), er werde erreicht, wenn das Gas das Volumen  $v = CDHG$  erfüllt; die Höhe  $DH$  sei  $h$  cm.

Geht der Kolben ein Stückchen,  $dh$  cm, weiter, so leistet er eine geringe Arbeit  $dA$ , deren Betrag sich leicht finden läßt, wenn man die Kraft, mit der das Gas den Kolben vorwärts treibt, mit dem zurückgelegten Wege multipliziert. Da auf 1 Quadratcentimeter  $p$  Kilogramm drücken, so ist die gesamte Kraft  $p \cdot Q$  kg, und die Arbeit

$$dA = p Q dh.$$

$Q dh$  ist aber die Volumenänderung  $dv$ , also ist  $dA = p dv$ .

Da nun nach dem Mariotteschen Gesetz  $p_0 v_0 = p v$  ist, so kann man

$$p = \frac{p_0 v_0}{v}$$

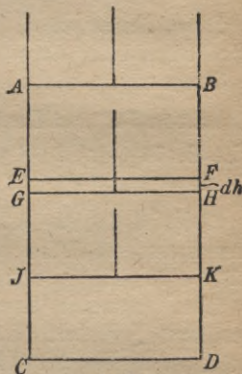


Fig. 34.

$$A = \int_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0}{v} dv = p_0 v_0 [\ln v_1 - \ln v_0] = p_0 v_0 \ln \left( \frac{v_1}{v_0} \right) = p_0 v_0 \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right) \text{ cmkg.}$$

(Vgl. Beispiel 6 auf S. 18.)

Will man die Arbeit in Meterkilogramm haben, so muß das Ergebnis durch 100 dividiert werden; führt man außerdem noch künstliche statt der natürlichen Logarithmen ein, so ist  $A = 0,02303 p_0 v_0 / g \frac{v_1}{v_0}$  mkg. Meist wird das Volumen in Kubikmetern oder Litern gegeben sein; im ersten Fall ist der Zahlenfaktor 23030, im zweiten 23,03.

$p_0 v_0$  kann man auch durch  $p_1 v_1$ ,  $\frac{v_1}{v_0}$  durch  $\frac{p_0}{p_1}$  ersetzen.

Ist  $v_1$  kleiner als  $v_0$ , so ist das Vorzeichen der Arbeit negativ. Das Gas leistet keine Arbeit, sondern ihm wird Energie zugeführt.

Preßt man z. B. ein Luftvolumen von 2,4 l, das zunächst unter dem Druck von 745 mm Quecksilbersäule  $= \frac{745 \cdot 1,033}{760} = 1,013$  Atm stand (D. S. 74), auf 2,0 l zusammen, so ist

$$A = 23,03 \cdot 1,013 \cdot 2,4 (\lg 2,0 - \lg 2,4) = -4,433 \text{ mkg.}$$

**Beispiel 36.** Es soll der Zusammenhang zwischen Druck und Volumen eines vollkommenen Gases bei adiabatischer Zustandsänderung (D. S. 48) abgeleitet werden.

Eine Gasmenge, deren Masse  $a$  kg sei, erfülle den in Fig. 34 gezeichneten Zylinder. Das Anfangsvolumen sei wieder  $v_0$ , das Endvolumen  $v_1$  ccm, der Anfangsdruck  $p_0$ , der Enddruck  $p_1$  Atm. Man kann den Zylinder, und mit ihm das Gas, erwärmen oder abkühlen, man kann den Kolben beliebig verschieben (ohne aber Gas entweichen oder hinzutreten zu lassen), immer gilt nach den Lehren der Physik die Gay-Lussac-Mariottesche „Zustandsgleichung“:  $p v = R T$ . Darin bedeutet  $R$  eine für den betreffenden Versuch konstante Zahl,  $p$  den Druck,  $v$  das zugehörige Volumen und  $T$  die um  $273^\circ$  vermehrte Temperatur  $t$ , die in Celsiusgraden angegeben wird.  $T$  heißt die absolute Temperatur.

Führen wir dem Gase, wenn es sich in dem Zustand befindet, welcher durch die Zahlen  $p$ ,  $v$ ,  $T$  charakterisiert ist (Kolbenstellung  $GH$ ), eine kleine Wärmemenge  $dQ$  zu, ohne den Druck zu ändern, dann wird die absolute Temperatur auf den Wert  $T'$  steigen und auch das Volumen um  $dv$  größer werden (Kolbenstellung  $EF$ ).

$$p(v + dv) = RT'$$



Man kann davon die ursprüngliche Gleichung  $p v = R T$  subtrahieren. dann hat man

$$p dv = R (T' - T).$$

Jetzt wollen wir die spezifische Wärme einführen, und zwar die spezifische Wärme bei konstantem Druck  $c_p$ . Man versteht darunter die in Kilogrammkalorien ausgedrückte Wärmemenge, die einem Kilogramm des Gases zugeführt werden muß, will man dessen Temperatur bei gleichbleibendem Druck um  $1^\circ\text{C}$  erhöhen. Da wir hier  $a$  kg um  $T' - T$  Grad erhitzen, so ist die erforderliche Wärmemenge  $dQ = a c_p (T' - T)$ . Durch die vorige Formel können wir die Temperaturdifferenz herauschaffen, wir finden

$$dQ = \frac{a c_p p dv}{R}.$$

Nun halten wir den Kolben in der neuen Stellung  $EF$  fest, so daß das Volumen dauernd den neuen Wert  $v + dv$  beibehält, und entziehen durch Abkühlung dem Gase wieder die Wärmemenge  $dQ$ . Natürlich sinkt dabei der Druck, der bisher  $p$  Atm war, auf den kleineren Wert  $p + dp$  ( $dp$  ist negativ). Die absolute Temperatur nehme den Wert  $T''$  an. Wir haben dann

$$(p + dp)(v + dv) = R T''.$$

Wir subtrahieren die Gleichung  $p(v + dv) = R T'$  und erhalten  $v dp + dp dv = R (T'' - T')$ .

Das Glied  $dp dv$  kann als Produkt zweier Größen, von denen jede sehr klein ist, vernachlässigt werden, also ist

$$v dp = R (T'' - T').$$

Auch hier berechnen wir die Wärmemenge, die wie vorher  $dQ$  ist. Da sie aber dem Gase entzogen wurde, während sein Volumen konstant blieb, ist hier die spezifische Wärme bei konstantem Volumen,  $c_v$ , zu berücksichtigen.

$$dQ = a c_v (T' - T'') = - \frac{a c_v v dp}{R}.$$

Wir können jetzt die beiden Prozesse zusammenfassend als einen betrachten, dann ist er adiabatisch, wenn Wärme weder gewonnen noch verloren wird, wenn also  $dQ$  in beiden Fällen denselben Wert hat. Für die adiabatische Zustandsänderung gilt demnach die Gleichung

$$\frac{a c_p p dv}{R} = - \frac{a c_v v dp}{R};$$

$$\frac{dp}{p} = - k \frac{dv}{v}, \text{ wenn } \frac{c_p}{c_v} = k \text{ gesetzt wird.}$$

Hieraus ergibt sich, wenn man viele derartige Prozesse summiert:

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = \int_{v_0}^{v_1} -k \frac{dv}{v}, \quad \ln p_1 - \ln p_0 = -k \ln v_1 + k \ln v_0 = \ln(v_1^{-k}) - \ln(v_0^{-k}).$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{v_1^{-k}}{v_0^{-k}} = \frac{v_0^k}{v_1^k}; \quad p_1 v_1^k = p_0 v_0^k.$$

**Aufgabe 104.** Ein Gas erfüllt einen Raum von  $v_0$  ccm bei einem Druck von  $p_0$  Atm. Es dehnt sich adiabatisch auf den größeren Raum  $v_1$  ccm aus. Welche Arbeit leistet es dabei? Welches Ergebnis liefern die in Beispiel 35 gegebenen Zahlen bei adiabatischer Kompression?

**Aufgabe 105.** Der Anfangszustand eines Gases ist durch  $v_0, p_0, T_0$  charakterisiert; es geht adiabatisch in den Endzustand  $v_1, p_1, T_1$  über.  $T_1$  soll durch die andern Größen ausgedrückt werden. Wie groß ist bei dem vorigen Zahlenbeispiel die Endtemperatur, wenn die Anfangstemperatur  $+40^\circ\text{C}$  ist?

**Beispiel 37.** Ein fester Magnetpol besitzt die im absoluten Maß angegebene Polstärke  $M$ , ein beweglicher gleichnamiger Pol von der Stärke  $m$  wird natürlich von ihm abgestoßen. Welche Arbeit muß man gegen diese Abstößungskraft aufwenden, damit der bewegliche Pol, welcher ursprünglich von dem festen  $r_1$  cm entfernt war, in die kleinere Entfernung  $r_2$  cm gebracht wird?

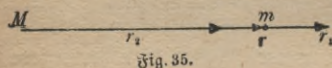


Fig. 35.

Wir betrachten eine Zwischenlage, in der die Entfernung  $r$  cm ist (Fig. 35). Nach der Definition der magnetischen Polstärke und nach dem Coulombschen Gesetz beträgt dort die abstößende Kraft  $\frac{Mm}{r^2}$  Dynen. Verschiebt man  $m$  um die kleine Strecke  $dr$  — sie ist negativ, weil  $r$  abnehmen soll —, so muß man die geringe Arbeit  $dA = -\frac{Mm}{r^2} dr$  Erg leisten.  $dA$  besitzt einen positiven Wert, weil  $-dr$  positiv ist. Für die Gesamtarbeit bekommt man

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{Mm}{r^2} dr = Mm \int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2} = Mm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \text{ Erg.}$$

Ist z. B. die Stärke des festen Poles  $M = 200$ , die des beweglichen  $m = 30$  Poleinheiten, und soll dieser dem festen von 6 cm auf 2 cm Abstand genähert werden, so ist  $A = 6000 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 2000$  Erg  $\approx \frac{1}{50000}$  mkg.



Wählt man  $r_1$  so groß, daß  $\frac{1}{r_1}$  außer Betracht bleiben kann und gibt  $m$  den Wert 1, so erhält man  $A = \frac{M}{r_2}$ . Es ist das Potential des Poles  $M$  in bezug auf einen  $r_2$  cm entfernten Punkt, die Arbeit, welche nötig ist, um die Einheit der Polstärke im Kampf mit der abstoßenden Kraft  $M$  aus der „Unendlichkeit“ bis in die Entfernung  $r_2$  zu bringen.

Ist  $M = 200$ , so haben alle Punkte, welche von  $M$  um 2 cm entfernt sind (Kreisperipherie!), das Potential 100.

**Beispiel 38.** Es soll die Einwirkung der Selbstinduktion auf den elektrischen Strom beim Ein- und Ausschalten untersucht werden.

Die konstante Spannung des Stromes sei  $E$  Volt, der Widerstand einer Spule  $W$  Ohm. Der Wert, welchen die Stromstärke nach dem Ohmschen Gesetz annimmt,  $J = \frac{E}{W}$ , wird nach dem Einschalten erst allmählich erreicht, da die Selbstinduktion ihm entgegenwirkt. Diese ist um so größer, je schneller sich die Stromstärke in dem durchflossenen Draht ändert, also  $\frac{di}{dt}$  proportional, wenn  $i$  die momentane Stromstärke und  $t$  die Zeit ist. Man setzt daher  $S = L \frac{di}{dt}$ ; die Einheit des Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  ist der Koeffizient für eine Spule, in welcher 1 Volt induziert wird, wenn der Strom gleichmäßig um 1 Ampere in der Sekunde wächst. Diese Einheit heißt 1 Henry.  $L \frac{di}{dt}$  gibt, wenn  $L$  in Henry gemessen wird, die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion in Volt. Da sie der elektromotorischen Kraft  $E$  entgegenwirkt, so ist zur Zeit  $t$  die Spannung an den Enden der Spule gleich  $E - L \frac{di}{dt}$ ; anderseits ist sie gleich der zurzeit herrschenden Stromstärke  $i$ , multipliziert mit dem Widerstand  $W$ . So entsteht die Gleichung

$$E - L \frac{di}{dt} = iW.$$

Hieraus folgt:  $E dt - L di = iW dt$ ;  $dt(E - iW) = L di$ ;  $dt = \frac{L di}{E - iW}$ ;  
 $dt = \frac{L di}{W \left( \frac{E}{W} - i \right)} = \frac{L di}{W(J - i)}$  oder  $\frac{W dt}{L} = \frac{di}{J - i}$ . Wenn der Strom ein-

geschaltet wird, so ist zur Zeit  $t = 0$  die Stromstärke  $i = 0$ , man hat

$$\int_0^i \frac{W dt}{L} = \int_0^i \frac{di}{J-i}; \left[ \frac{Wt}{L} \right]_0^i = \left[ -\ln(J-i) \right]_0^i \quad (\text{Beweis durch Differentiation})$$

$$-\frac{Wt}{L} = \ln(J-i) - \ln J; e^{-\frac{Wt}{L}} = \frac{J-i}{J} \quad \text{oder}$$

$$i = J - J e^{-\frac{Wt}{L}}.$$

Ist z. B.  $E = 4$  Volt,  $W = 8 \Omega$ ,  $L = 0,2$  Henry, so ist  $J = E/W = 0,5$  Ampere,  $i = 0,5 (1 - e^{-40t})$ ; nach  $\frac{1}{100}$  sec ist  $i = 0,165$  Ampere, nach  $\frac{2}{100}$  sec dagegen  $0,275$  Ampere.

Beim Ausschalten nimmt die Stromstärke von  $J$  auf  $0$  ab, und zwar wegen der Selbstinduktion allmählich. Die elektromotorische Kraft  $E$  ist durch das Ausschalten wirkungslos geworden; wir haben jetzt nur die Gleichung

$$-L \frac{di}{dt} = iW.$$

Da die Stromstärke sinkt, ist  $\frac{di}{dt}$  negativ, die linke Seite der Gleichung positiv, die Selbstinduktion erzeugt einen Strom, der dem ursprünglichen gleichgerichtet ist. Man erhält hier

$$\frac{di}{i} = -\frac{W dt}{L}.$$

Zur Zeit  $t = 0$  (Zeitpunkt des Ausschaltens) ist  $i = J$  (ursprüngliche Stromstärke), also

$$\int_J^i \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{W dt}{L}; \ln i - \ln J = -\frac{Wt}{L}; \ln i = \ln J + \ln e^{-\frac{Wt}{L}}; i = J e^{-\frac{Wt}{L}}$$

Wählt man die Zahlen unseres Beispiels, so ist  $0,01$  sec nach dem Ausschalten die Stromstärke noch  $0,335$  Amp, nach  $0,02$  sec ist sie  $0,225$  Amp.

### Aufgaben.

106. Man stelle die eben gefundenen Gesetze für die angegebenen Zahlen oder für andere, willkürlich gewählte, graphisch dar.

107. Man stelle für kleine Werte von  $t$  Näherungsformeln auf.

108. Welches Gesetz gilt in einer Versuchsanordnung für die Stromstärke, welche  $t$  Sekunden nach dem Einschalten und  $t$  Sekunden nach dem Ausschalten herrscht?

109. Wann ist die Stromstärke  $i$  gleich der Hälfte der ursprünglichen  $J$ ?



**Beispiel 39.** Anwendung der Integralrechnung auf den Zerfall radioaktiver Substanzen.

Die Wirkungen, welche von einer bestimmten Menge eines radioaktiven Stoffes ausgehen, kann man z. B. durch Messung der Luftionisation feststellen. Sie klingen mit der Zeit mehr und mehr ab. Ist die ursprüngliche Strahlungsintensität, in irgend einem Maß ausgedrückt,  $J_0$ , so lehrt das Experiment, daß sie nach der Zeit  $t$  den Wert  $J = J_0 e^{-\lambda t}$  hat, also ähnlich abnimmt, wie der Unterbrechungsstrom im vorigen Beispiel.  $\lambda$  ist dabei eine für den betreffenden Stoff durchaus charakteristische Konstante. Man nimmt an, daß die radioaktiven Wirkungen durch den Zerfall der „Atome“ der betreffenden „Elemente“ zustande kommen, und daß die Intensität derjenigen Stoffmenge proportional ist, welche in der Zeiteinheit umgewandelt wird.

Ist  $N$  die Anzahl der Atome, die bis zu dem bestimmten Zeitmoment  $t$  noch nicht umgewandelt sind, so ist die Umwandlungsgeschwindigkeit  $-\frac{dN}{dt}$ , also, wenn  $k$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet

$$-\frac{k dN}{dt} = J_0 e^{-\lambda t}; \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{J_0}{k} e^{-\lambda t};$$

$$N = \int -\frac{J_0}{k} e^{-\lambda t} dt; \quad N = \frac{J}{k\lambda} e^{-\lambda t} + c.$$

Da in unendlich langer Zeit die ganze Substanz sich zersetzt hat, so muß für  $t = \infty$  der Größe  $N$  der Wert 0 gegeben werden.  $e^{-\infty} = 0$ , also folgt  $0 = c$ ; dadurch ist die Integrationskonstante bestimmt.

$$N = \frac{J_0}{k\lambda} e^{-\lambda t}.$$

$N_0$  sei die Anzahl der Atome zur Zeit  $t = 0$ , dann ist  $N_0 = \frac{J_0}{k\lambda}$ , woraus man schließt

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Diese Formel sagt aus, daß die Zahl der unzerfallenen Atome nach demselben Gesetze abnimmt wie die Strahlung, denn die charakteristische Konstante  $\lambda$  tritt hier in demselben Zusammenhang wie dort auf. Durch Division der Formeln für  $J$  und  $N$  folgt

$$\frac{J}{N} = \frac{J_0}{N_0} = k\lambda; \quad J = k\lambda N.$$

Die radioaktive Wirkung  $J$  eines Präparates ist stets der Menge  $N$  der noch nicht zerfallenen Substanz proportional.

Die Zeit, in welcher eine gewisse Menge sich gerade zur Hälfte zersetzt hat (Halbwertsperiode) findet man leicht:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0,69315}{\lambda} \text{ sec.}$$

So ist für Radium-Emanation  $\lambda = 2,085 \cdot 10^{-6}$ ,  $t = 332450$  sec = 3,85 Tage. Für Uran ist  $\lambda = 4 \cdot 10^{-18}$ ,  $t = 6000000000$  Jahre, für Aktinium-Emanation ist  $\lambda = 1,8 \cdot 10^{-1}$ ,  $t = 3,9$  sec.

### Sechstes Kapitel.

## Allgemeine Integrationsmethoden.

Die vorigen Kapitel zeigten, wie mit den einfachsten Integralen auf sehr verschiedenen Gebieten schöne Erfolge erzielt werden können. Diese Erfolge müssen aber noch gesichert werden.

Bei manchen Aufgaben gibt es mehr als eine Lösung. So kann z. B. als Quadratwurzel aus 25 ebensogut die Zahl + 5 wie - 5 auftreten, denn  $(+ 5)^2$  ist ebenso wie  $(- 5)^2 = + 25$ . Die Gleichung  $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10 = 0$  hat sogar vier Lösungsmöglichkeiten; man kann  $x = 1, 2, 5$  oder  $- 1$  setzen. Es ist denkbar, daß auch die Integration einer gegebenen Funktion  $f(x)$  auf mehrere, voneinander ganz verschiedene Ausdrücke  $F_1(x), F_2(x), F_3(x) \dots$  führt. Jeder von ihnen muß dann nach der Definition des Integrals die Ableitung  $f(x)$  haben. Wäre dies der Fall, so würden alle unsere bisher erhaltenen Ergebnisse in der Luft schweben, denn wir könnten ja vielleicht gerade die ungeeignete Funktion genommen haben.

Wir brauchen zur Beantwortung dieser Frage den **Hilfssatz**: Ist für alle Werte von  $x$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$  die Ableitung einer stetigen Funktion ständig gleich Null, so ist diese Funktion eine Konstante.

Zum Beweise nehmen wir zwei Zahlen  $a$  und  $b$ , die auch in dem Intervall  $x_1 \dots x_2$  liegen. Nach dem Mittelwertsatz (D. S. 80) ist dann  $f(b) = f(a) + (b - a)f'[a + \Theta(b - a)]$ , wobei  $\Theta$  einen positiven echten Bruch bedeutet.  $a + \Theta(b - a)$  ist eine Zahl, die zwischen  $a$  (für  $\Theta = 0$ ) und  $b$  (für  $\Theta = 1$ ) liegt, also ganz sicher im Intervall  $x_1 \dots x_2$  enthalten ist. Da nach Voraussetzung  $f'$  für alle Werte von  $x$ , welche den Inhalt dieses Intervalls ausmachen, verschwindet, so muß auch  $f'[a + \Theta(b - a)]$  gleich Null sein. Demnach ist  $f(b) = f(a)$ . Diese Überlegung gilt für ganz beliebige, also für alle Zahlen  $a$  und  $b$  des Intervalles  $x_1 \dots x_2$ , daher ist die Funktion in ihm konstant. Die geometrische Deutung ist einfach, eine Linie, die stets das Steigungsmaß 0 hat, ist eine Parallele zur X-Achse.

Wenn nun zwei Funktionen  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  als Lösungen der Auf-



gabe  $\int f(x) dx$  existieren, so muß nach der Definition des Integrals sowohl  $\frac{dF_1}{dx}$  wie auch  $\frac{dF_2}{dx}$  gleich  $f(x)$  sein, also  $\frac{dF_2}{dx} = \frac{dF_1}{dx}$ , oder  $\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dx} = 0$ ,  $\frac{d}{dx}(F_2 - F_1) = 0$ .

Da beide Funktionen,  $F_1$  und  $F_2$ , differentiierbar sind, so müssen sie, wie auch ihre Differenz, stetig sein.

Nach dem eben bewiesenen Hilfsatz ist notwendig  $F_2 - F_1$  eine Konstante; die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  können sich nur durch die verschiedene Wahl der Integrationskonstante unterscheiden, und dieser Unterschied wurde ja stets genau berücksichtigt. Wir dürfen also auf die eindeutige Sicherheit unserer Ergebnisse vertrauen.

Eine andere Frage ist die, ob wir mit den bisherigen Integrationsmethoden bei allen weiteren mathematischen und physikalisch-technischen Problemen auskommen. Das muß glatt verneint werden. Ein so einfacher Vorgang wie das Schwingen eines Pendels — von der Reibung und sonstigen störenden Einflüssen wollen wir ganz absehen — führt schon auf Integrale, die den bisher behandelten Funktionen nicht mehr angehören. Das Problem der Bewegung dreier Körper, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, trotz noch heute allen Bemühungen der theoretischen Astronomie, obwohl die Differentialgleichungen der Bewegung bekannt sind und die Natur uns in vielen Sternsystemen die praktische Lösung vorführt.

Getreu dem Spruche:

„Ein Mann, der recht zu wirken denkt,  
muß auf das beste Werkzeug halten“

wollen wir uns aber zunächst mit einigen sehr allgemeinen Methoden zur Vereinfachung schwierigerer Integrale vertraut machen und dann sehen, wie wir Näherungsverfahren anwenden können, wenn auch diese Mittel versagen.

## 1. Einführung einer neuen Veränderlichen.

Ist das Integral  $\int \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx$  vorgelegt, so wird man versuchen, es auf eine der Grundformeln zurückzuführen, nämlich auf Formel 5. Es stört der Nenner  $m$ . Wir setzen zur Vereinfachung  $\frac{x}{m} = z$ , also  $x = mz$ . Dann wird  $\frac{dx}{dz} = m$ , also  $dx = m dz$ .

$$\int \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx = \int \cos z \cdot m \cdot dz = m \int \cos z dz.$$

Dies ist nach Formel 5 gleich  $m \sin z + c$ , und hierfür kann man wieder  $m \sin\left(\frac{x}{m}\right) + c$  schreiben. Ein ganz ähnlicher Fall trat schon in Aufgabe 57 auf.

Hat man es mit einem bestimmten Integral zu tun, so muß man natürlich auch die Grenzen entsprechend ändern; in unserem Beispiel

ist  $J = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx = m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z dz$ , denn wenn  $x = 0$  ist (untere Grenze), so ist auch  $z = \frac{x}{m} = 0$ , ist aber  $x = \frac{m\pi}{2}$  (obere Grenze), so ist  $z = \frac{x}{m} = \frac{\pi}{2}$ .

$J = \left[ m \sin z \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = m$ . Führt man wieder die alte Veränderliche ein, so bleiben natürlich auch die alten Grenzen:  $J = \left[ m \sin\left(\frac{x}{m}\right) \right]_0^{\frac{m\pi}{2}} = m$ .

**Beispiel 40.**  $\int \sqrt{ax + b} \cdot dx$ .

Da die Quadratwurzel stört, setzen wir  $\sqrt{ax + b} = y$ ;  $ax + b = y^2$ ;  
 $x = \frac{y^2 - b}{a}$ ;  $dx = \frac{2y dy}{a}$ .

$$\int \sqrt{ax + b} \cdot dx = \int y \cdot \frac{2y dy}{a} = \frac{2}{a} \int y^2 dy = \frac{2}{3a} y^3 = \frac{2}{3a} (\sqrt{ax + b})^3.$$

**Beispiel 41.**  $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$ .

Um auf die Grundformel 9 zu kommen, substituieren wir  $x = at$ , dann ist  $dx = a dt$ .

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_0^1 \frac{a dt}{a^2 + a^2 t^2} \quad (x = a \text{ entspricht } t = 1)$$

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_0^1 \frac{a dt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right]_0^1 = \frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{4a}.$$

Ist allgemein  $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$  zu integrieren und wählt man die Substitution



$x = \varphi(t)$ , wobei  $\varphi$  eine bekannte Funktion ist, so wird  $f(x)$  durch deren Einführung in eine andere bekannte Funktion  $f[\varphi(t)]$ , die wir kurz mit  $\Phi(t)$  bezeichnen wollen, übergehen,  $dx$  in  $\frac{d\varphi}{dt} dt$ , und wir erhalten

$$\text{(Formel 50.) } \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t) \frac{d\varphi}{dt} dt, \text{ wobei die}$$

neuen Grenzen so bestimmt werden müssen, daß  $x_0 = \varphi(t_0)$ ,  $x_1 = \varphi(t_1)$  ist.

### Aufgaben.

110.  $J = \int (a + bx)^n dx$ . 111. Man bilde Spezialfälle der

vorigen Formel. 112.  $J = \int \frac{x^2 dx}{(4 + 7x^2)^3}$ . 113.  $J = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ .

114.  $J = \int f'(x) \cdot f(x) dx$ . 115.  $J = \int \operatorname{tg} x dx$ . 116.  $J = \int \operatorname{ctg} x dx$ .

117.  $J = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ . 118.  $J = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$ . 119.  $J = \int \sin^2 x dx$ .

120.  $J = \int \cos^2 x dx$ . 121.  $J = \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ . 122.  $J = \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .

123.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ . 124.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ . Man setze  $\sqrt{a^2 + x^2}$

$= t - x$ . 125.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}}$ ;  $c$  sei positiv

126.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$ .

127. Wie groß ist die Fläche, welche zwischen einem Zweig der gewöhnlichen Hykloide (D. S. 57) und der X-Achse liegt?

128. Wie lang ist der Kurvenbogen, der diese Fläche begrenzt?

129. Wie lang ist der Bogen der Kreisevolvente (D. S. 56), von ihrem Anfang bis zu einem beliebigen Punkte gerechnet?

### 2. Partielle Integration.

Häufig ist die zu integrierende Funktion ein Produkt, dessen einer Faktor sich leicht als Differentialquotient  $u'$  eines bekannten Ausdrucks  $u$  zu erkennen gibt. Dann ist

$$\text{(Formel 51.) } \int u' v dx = uv - \int uv' dx.$$

**Beweis:**  $\int u'v dx + \int uv' dx = \int (u'v + v'u) dx$ . (Satz 1 auf S. 14.)

$$\int (u'v + v'u) dx = \int \frac{d(uv)}{dx} dx. \quad (\text{D. S. 23, Satz 3.})$$

Setzt man  $uv = z$ , so wird  $\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \frac{dz}{dx} dx = \int dz = z = uv$ , also  $\int u'v dx + \int uv' dx = uv$ . Durch Umstellung erhält man die obige Formel. Die Integrationskonstante ist der Einfachheit halber unberücksichtigt geblieben.

**Beispiel 42.**  $\int e^{kx} \cdot x dx$ .

Man sieht sofort, daß  $e^{kx}$  die Ableitung von  $u = \frac{1}{k} e^{kx}$  ist;  $v$  ist  $= x$ ,  $v' = 1$ . Demnach ist  $\int e^{kx} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{k} e^{kx} \cdot x - \int \frac{1}{k} e^{kx} \cdot 1 dx = \frac{x}{k} e^{kx} - \frac{e^{kx}}{k^2} = \frac{e^{kx}}{k^2} (kx - 1)$ .

**Beispiel 43.** Welchen Abstand hat der Bogen der Kettenlinie (Beispiel 22 auf S. 40) von der Y-Achse?

$$\xi = \frac{\int_0^a x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{l} = \frac{\int_0^a x \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) dx}{m \operatorname{Sin}\left(\frac{a}{m}\right)}$$

Da  $\operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right)$  die Ableitung von  $m \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right)$  ist, so setzen wir diesen Ausdruck gleich  $u$ , während  $x = v$  ist.

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) dx &= m \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) \cdot x - \int m \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) \cdot 1 \cdot dx = \\ &= mx \operatorname{Sin}\left(\frac{x}{m}\right) - m^2 \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a x \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{m}\right) dx &= ma \operatorname{Sin}\left(\frac{a}{m}\right) - m^2 \operatorname{Cof}\left(\frac{a}{m}\right) + m^2. \\ \xi &= a - \frac{m \left(\operatorname{Cof}\left(\frac{a}{m}\right) - 1\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{a}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Aus den Formeln  $\operatorname{Cof}^2 u - \operatorname{Sin}^2 u = 1$ ,  $\operatorname{Cof}^2 u + \operatorname{Sin}^2 u = \operatorname{Cof}(2u)$  (D. S. 39) findet man leicht, daß  $\operatorname{Cof}(2u) - 1 = 2 \operatorname{Sin}^2 u$  ist. Ferner hat man



$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$ , also  $\frac{\cos 2u - 1}{\sin 2u} = \operatorname{Tg} u$ . Hier ist  $u = \frac{a}{2m}$ ,  
also

$$\xi = a - m \operatorname{Tg} \left( \frac{a}{2m} \right).$$

Will man keine Hyperbelfunktionen verwenden, so lassen sich die notwendigen Integrationen auf Beispiel 42 zurückführen.

### Aufgaben.

130.  $J = \int \ln x dx$ . 131.  $J = \int x \ln x dx$ . 132.  $J = \int x^n \ln x dx$ .

133.  $J = \int x^2 e^x dx$ .

134. Wie findet man  $\int x^n e^x dx$ , wenn  $n$  eine positive ganze Zahl ist?

135. Wo liegt der Schwerpunkt der von der Sinuslinie, der  $X$ -Achse und der Ordinate  $x = \frac{\pi}{2}$  begrenzten Fläche?

136. Wie groß ist das Trägheitsmoment dieser Fläche in bezug auf die Anfangsordinate?

137. Wo liegt der Schwerpunkt der halben Zyklidenfläche?

### 3. Zerlegung in Partialbrüche.

Tritt die Veränderliche im Nenner des Integranden auf, so hat man meistens unbequeme Rechnungen vor sich; man sucht den Ausdruck dann immer auf möglichst einfache Fälle dieser Art zurückzuführen. Wir wollen annehmen, der Nenner sei eine ganze rationale Funktion von  $x$ , wir verstehen darunter einen Ausdruck von der Form  $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Lx + M$ . Durch Ausklammern der Größe  $A$  geht die Funktion in die Form  $A(x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + kx + l)$  über, wenn  $\frac{B}{A} = a$ ,  $\frac{C}{A} = b \dots \frac{L}{A} = k$  und  $\frac{M}{A} = l$  gesetzt wird.

In der Algebra wird gezeigt, daß eine derartige Funktion stets für  $n$  Werte von  $x$  (die auch alle oder teilweise gleich sein können) verschwindet; sie seien  $\alpha, \beta, \gamma \dots \kappa, \lambda$ . Dann ist

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + kx + l = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \kappa)(x - \lambda).$$

Man sieht unmittelbar, daß der rechtsstehende Ausdruck für jeden der Werte  $\alpha, \beta, \gamma \dots \kappa, \lambda$  gleich Null wird, und daß er, ausmultipliziert, eine Funktion  $n$ ten Grades ist, also durchaus der linken Seite der Gleichung entspricht.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wollen wir das Verfahren der Partialbruchzerlegung an einem konkreten Beispiel erläutern.

Es sei

$$J = \int \frac{9x - 31}{x^2 - 8x + 15} dx.$$

Um die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  zu bekommen, setzen wir  $x^2 - 8x + 15 = 0$  und finden aus dieser quadratischen Gleichung  $\alpha$  und  $\beta$  unter der Form  $4 \pm \sqrt{16 - 15}$ , erhalten also die reellen Werte  $\alpha = 5$  und  $\beta = 3$ ; der Integrand wird gleich  $\frac{9x - 31}{(x - 5)(x - 3)}$ .

Wir wollen nun, und darin liegt der Kern unserer Methode, versuchen, ihn in der Form  $\frac{P}{x - 5} + \frac{Q}{x - 3}$  darzustellen.  $P$  und  $Q$  sollen konstante Zahlen sein, die uns vorläufig noch unbekannt sind. Brüche dieser Art, aber auch solche von der Form  $\frac{P}{(x - a)^n}$ , heißen Partialbrüche.

Aus der identischen Gleichung:  $\frac{P}{x - 5} + \frac{Q}{x - 3} = \frac{9x - 31}{(x - 5)(x - 3)}$  folgt durch Multiplikation mit dem Hauptnenner:  $P(x - 3) + Q(x - 5) = 9x - 31$ ;  $Px - 3P + Qx - 5Q = 9x - 31$ ;  $x(P + Q) - 3P - 5Q = 9x - 31$ .

Durch Vergleichung der entsprechenden Größen findet man, daß  $P + Q = 9$ ,  $-3P - 5Q = -31$  ist, und hieraus ergibt sich  $P = 7$ ,  $Q = 2$ .

$$J = \int \frac{9x - 31}{(x - 5)(x - 3)} dx = \int \left[ \frac{7}{x - 5} + \frac{2}{x - 3} \right] dx = 7 \ln(x - 5) + 2 \ln(x - 3) + c.$$

### Aufgaben.

$$138. J = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}; \quad 139. J = \int \frac{x + 3}{3x^2 + 9x + 6} dx;$$

$$140. J = \int \frac{23x - 9}{6x^2 - 5x + 1} dx; \quad 141. J = \int \frac{4x - 5}{x^2 - 7x} dx.$$

### Beispiel 44. Chemische Reaktionsgeschwindigkeit.

Wenn zwei gasförmige oder gelöste Stoffe chemisch aufeinander wirken, so hängt die Geschwindigkeit des Prozesses von ihrer Konzentration ab. Da diese Vorgänge zwischen den Molekülen stattfinden, so kommt es auf die Anzahl Mole an, die ein Liter enthält. (1 Mol ist das in Gramm ausgedrückte Molekulargewicht, z. B. sind 58,5 g Kochsalz ein Mol dieses Stoffes, weil sein Molekulargewicht 58,5 ist.) Es mag



zur Zeit  $t = 0$  ein Stoff  $A$ , von welchem ein Liter  $a$  Mole enthält, mit einem zweiten,  $B$ , zusammengebracht werden, dessen Konzentration  $b$  Mole pro Liter beträgt. Zur Zeit  $t$  mögen  $x$  Mole von  $A$  sich mit  $x$  Molen von  $B$  vereinigt haben, so daß noch  $a - x$  und  $b - x$  Mole übriggeblieben sind. Diese werden sich nicht mehr so schnell wie die ersten verbinden, denn die Chemie lehrt, daß die Reaktionsgeschwindigkeit  $\frac{dx}{dt}$  den noch in der Raumeinheit vorhandenen Stoffmengen (welche anfangs größer waren) proportional ist. Vgl. Beispiel 39 auf S. 59. Die Proportionalitätskonstante sei  $c$ , dann ist

$$\frac{dx}{dt} = c(a - x)(b - x).$$

Hieraus können wir leicht den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Größe  $x$  berechnen. ( $2x$  ist die Anzahl der Mole pro Liter, die schon in die neue Verbindung übergegangen sind.) Es ist

$$dt = \frac{dx}{c(a-x)(b-x)} = \frac{dx}{c(x-a)(x-b)} = \frac{dx}{c(a-b)} \left[ \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right],$$

$$t = \frac{1}{c(a-b)} \left[ \ln(x-a) - \ln(x-b) \right] + c_1 = \frac{1}{c(a-b)} \ln \left( \frac{x-a}{x-b} \right) + c_1 =$$

$$= \frac{1}{c(a-b)} \ln \left( \frac{a-x}{b-x} \right) + c_1.$$

Da zur Zeit  $t = 0$  die Zersetzung erst begann, so ist für  $t = 0$  auch  $x = 0$ , also

$$0 = \frac{1}{c(a-b)} \ln \left( \frac{a}{b} \right) + c_1; \quad c_1 = -\frac{1}{c(a-b)} \ln \left( \frac{a}{b} \right);$$

$$t = \frac{1}{c(a-b)} \left[ \ln \left( \frac{a-x}{b-x} \right) - \ln \left( \frac{a}{b} \right) \right].$$

Hierdurch ist die gewünschte Beziehung hergestellt, die Konstante  $c$  wird gefunden, wenn man zu einer bestimmten Zeit  $t_1$  die Größe  $x = x_1$  experimentell ermittelt. Für  $x = a$  oder  $x = b$  (aus leicht ersichtlichen Gründen muß die kleinere der beiden Größen genommen werden) wird  $t = \infty$ , der vollständige Ablauf der Reaktion erfordert theoretisch unbegrenzte Zeit, praktisch ist nach einiger Zeit die noch zur Zersetzung verfügbare Menge meist unmeßbar klein.

Es wurde bisher angenommen, daß die Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ , welche, für  $x$  eingesetzt, den Nenner des Integranden zum Verschwinden bringen, ungleich seien. Den entgegengesetzten Fall erläutere das folgende Beispiel.

**Beispiel 45.**  $J = \int \frac{5x+6}{x^2-8x+16} dx = \int \frac{5x+6}{(x-4)^2} dx.$  Wir setzen

$\frac{5x+6}{(x-4)^2} = \frac{P}{(x-4)^2} + \frac{Q}{x-4}$ ; multiplizieren wir aus, so ergibt sich  
 $5x+6 = P + Q(x-4) = Qx + P - 4Q$ . Die Koeffizienten-  
 vergleichung gibt  $Q = 5$ ,  $P - 4Q = 6$ , also  $P = 26$ .

$$J = \int \left[ \frac{26}{(x-4)^2} + \frac{5}{x-4} \right] dx = -\frac{26}{x-4} + 5 \ln(x-4).$$

**Aufgabe 142.**  $J = \int \frac{x dx}{x^2+10x+25}$ ; **Aufgabe 143.**  $J = \int \frac{mx+n}{(x-a)^2} dx$ .

Die Zersetzung des Sodwasserstoffs durch Temperaturerhöhung geschieht nach der Formel:  $2HJ = H_2 + J_2$ . Da die Bestandteile des ursprünglichen Stoffes,  $HJ$  und  $HJ$ , gleich sind, also auch gleiche Konzentration  $a$  haben, so ist  $\frac{dx}{dt} = c(a-x)^2$ ;  $t = \int \frac{dx}{c(a-x)^2} = \frac{1}{c(a-x)} + c_1$ . Hier ist für  $t = 0$  auch  $x = 0$ , also  $c_1 = -\frac{1}{ca}$  daher  $t = \frac{x}{ca(a-x)}$ .

Bisher hatten wir es bei  $\alpha$  und  $\beta$  mit reellen Größen zu tun. Ist eine von ihnen komplex, etwa  $3 + 4i$ , so muß die andere konjugiert komplex sein, also  $3 - 4i$ . Die bisherige Methode würde dann auf einige Schwierigkeiten führen, man kommt besser zum Ziele, wenn man auf einen Ausdruck von der Form  $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$  hinsteuert.

**Beispiel 46.**  $J = \int \frac{dx}{x^2-6x+25}$ .

Hier ist  $\alpha = 3 + 4i$ ,  $\beta = 3 - 4i$ . Die quadratische Ergänzung gibt  $J = \int \frac{dx}{(x^2-6x+9)+16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16}$ . Setzt man  $x-3 = z$ , so ist  $J = \int \frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{4} \right) + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-3}{4} \right) + c$ .

**Aufgabe 144.** Welchen Wert hat  $\int \frac{dx}{x^2+mx+n}$ , wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $p + qi$  und  $p - qi$  sind?

Tritt im Nenner eine Funktion höheren Grades auf, so ist das Verfahren entsprechend, aber komplizierter.

#### 4. Rekursionsformeln.

Oft gelingt es, ein schwieriges Integral stufenweise zu vereinfachen, so daß man nach einer endlichen Anzahl von Schritten am Ziele, der exakten Integration, anlangt. Formeln, die dies ermöglichen, heißen



Rekursionsformeln. Der Raum gestattet uns nur an wenigen Beispielen ihr Wesen zu zeigen.<sup>1)</sup>

**Beispiel 47.**  $J = \int x^n e^x dx$  (vgl. Aufg. 134) soll auf  $\int x^{n-1} e^x dx$  zurückgeführt werden.

Durch partielle Integration findet man

$$(A) \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

Man kommt bei ganzzahligem  $n$  schließlich auf  $\int e^x dx = e^x + c$ .

**Aufgabe 145.**  $\int x^5 e^x dx$ .

**Beispiel 48.**  $J = \int \frac{e^x dx}{x^n}$  soll auf  $\int \frac{e^x dx}{x^{n-1}}$  reduziert werden.

Durch Umstellung der Gleichung (A) folgt

$$\int x^{n-1} e^x dx = \frac{x^n e^x}{n} - \frac{1}{n} \int x^n e^x dx.$$

Für  $n - 1 = -m$  wird

$$(B) \int \frac{e^x}{x^m} dx = -\frac{e^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{e^x}{x^{m-1}} dx.$$

Man kommt schließlich bei ganzzahligem  $m$  auf  $\int \frac{e^x}{x} dx$ ; dieser Ausdruck erfordert Reihenentwicklung.

**Beispiel 49.**  $\int \sin^n x dx$  soll auf  $\int \sin^{n-2} x dx$  reduziert werden.

$$\frac{d}{dx} (\sin^{n-1} x \cos x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x;$$

also  $\frac{d}{dx} (\sin^{n-1} x \cos x) = (n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x$ . Durch Multi-

plikation mit  $dx$  und Integration findet man

$$\sin^{n-1} x \cos x = (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - n \int \sin^n x dx.$$

Durch Umstellung:

$$(C) \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

**Beispiel 50.**  $\int \frac{dx}{\sin^m x}$  soll auf  $\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$  zurückgeführt werden.

Aus Formel (C) folgt durch Umstellung

1) Eine Reihe wichtiger Rekursionsformeln sind in L. A. Sohn des Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung angegeben.

$$\int \sin^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n}{n-1} \int \sin^n x dx.$$

Für  $n-2 = -m$ , also  $n = -m+2$  erhält man

$$(D) \int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}.$$

**Beispiel 51.** Man stelle entsprechende Formeln für den Cosinus auf.

Setzt man  $\frac{\pi}{2} - x = z$ ,  $dx = -dz$ , so entsteht aus (C) nach Vorzeichenwechsel

$$(E) \int \cos^n z dz = \frac{1}{n} \cos^{n-1} z \sin z + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} z dz, \text{ und aus (D)}$$

$$(F) \int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{1}{m-1} \frac{\sin z}{\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dz}{\cos^{m-2} z}.$$

### Aufgaben.

$$146. \int \sin^2 x dx; 147. \int \sin^3 x dx; 148. \int \sin^4 x dx; 149. \int \cos^2 x dx;$$

$$150. \int \cos^3 x dx; 151. \int \cos^4 x dx; 152. \int \frac{dx}{\sin^4 x}; 153. \int \frac{dx}{\cos^4 x};$$

$$154. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx; 155. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

Das Trägheitsmoment einer Halbkreisfläche ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ), die symmetrisch zur X-Achse liegt, ist  $J = \int_{\pi}^0 \frac{1}{12} (2r \sin \varphi)^3 d(r \cos \varphi) = -\frac{2r^4}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi d\varphi$

$$= \frac{2r^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{r^4 \pi}{8}.$$

Ist  $n$  eine ungerade Zahl, so kommt man bei fortgesetzter Reduktion der in Formel (D) und (F) auftretenden Ausdrücke schließlich auf

$$(G) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) + c; \quad (H) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + c.$$

Die Richtigkeit dieser Formeln wird leicht durch Differentiation erwiesen.

**Beispiel 52.** Die Mercatorprojektion. In Fig. 36 stelle der Halbkreis  $NAS$  einen Meridian des Erdglobus dar,  $N$  den Nordpol,  $S$  den Südpol,  $M$  den Kugelmittelpunkt,  $A$  einen Punkt des Äquators und  $TAT_1$ , die in ihm an den Kreis gelegte Tangente. Dreht man die Figur um die Achse  $NS$ , so entsteht aus dem Halbkreis die Kugel, aus  $TT_1$  der Mantel eines sie umgebenden Zylinders. Dieser Zylindermantel soll zur Abbildung für die Punkte der Kugel-



oberfläche benutzt werden. Natürlich wird  $NAS$  durch  $TAT_1$  abgebildet und ebenso jeder andere Meridian durch die entsprechende Seitenlinie des Zylindermantels.  $T$  und  $T_1$  sind beliebige Punkte der Tangente, nicht etwa die Bildpunkte für  $N$  und  $S$ . Der Punkt  $R$ , welcher auf  $TAT_1$  dem Punkte  $P$  entsprechen soll, kann noch willkürlich definiert werden. Wir wollen es so einrichten, daß ein sehr kleines Flächenstück der Kugeloberfläche dem entsprechenden Flächenstück des Zylindermantels ähnlich werde (winkeltreue Abbildung).

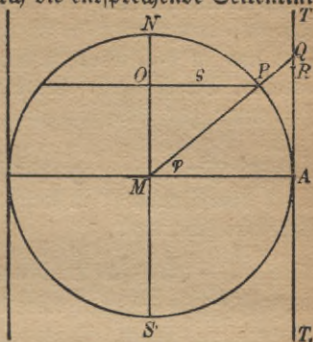


Fig. 36.

Der Äquator wird durch einen gleichgroßen Kreis wiedergegeben. Sein Umfang ist  $2\pi r$ . Ein Parallelkreis, der durch Rotation von  $P$  um  $MN$  entsteht, hat nur den Umfang  $2\pi \rho = 2\pi r \cos \varphi$ , wobei  $\varphi$  die geographische Breite bedeutet. Der entsprechende Kreis auf dem Zylindermantel, welcher durch Rotation von  $R$  um  $NS$  entsteht, besitzt aber wie vorher die Länge  $2r\pi$ . Läßt man den gegebenen Meridian bei der Rotation nur den kleinen Bogen  $d\lambda$  beschreiben ( $\lambda$  ist die geographische Länge), so entsteht auf der Kugeloberfläche ein kleines Stück des Parallelkreises von der Länge  $dx_1 = r d\lambda \cos \varphi$ , auf dem Zylindermantel ein Kreisbogen  $dx = r d\lambda$ ; es ist  $\frac{dx}{dx_1} = \frac{1}{\cos \varphi}$ .

Um ein kleines Rechteck abzugrenzen, lassen wir noch die Breite um den geringen Betrag  $d\varphi$  wachsen, dann wird das entsprechende Stück auf dem Meridian  $dy_1 = r d\varphi$ . Soll das Rechteck auf dem Zylindermantel dem auf der Kugel ähnlich sein, so muß die Proportion bestehen:  $dy : dy_1 = dx : dx_1$ ;  $dy = dy_1 \cdot \frac{dx}{dx_1} = r d\varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$ . Hieraus folgt

$$y = \int_0^{\varphi} \frac{r d\varphi}{\cos \varphi} = r \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Endlich kann man den Zylindermantel längs einer Seitenlinie aufschneiden und abrollen, dann werden die Meridiane und Parallelkreise durch ein System von wagerechten und senkrechten Linien wiedergegeben, und der Punkt, welcher die geographische Länge  $\lambda$  und Breite  $\varphi$  hat, besitzt hier die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \lambda \\ y &= r \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

### Aufgaben.

156. Man zeichne das Gradnetz einer Kugel in Mercators Projektion auf, indem man die Länge von  $0^\circ$  beginnend um je  $10^\circ$  wachsen läßt und in demselben Intervall die Breite von  $-80^\circ$  bis  $+80^\circ$  variiert. Der Radius  $r$  werde passend gewählt, am besten so, daß die Zeichnung zur Prüfung einer entsprechenden Karte im Atlas dienen kann.

157. Für kleine geographische Breiten liegt der Punkt  $R$  nur wenig unter dem Punkte  $Q$ , in welchem der Radius  $MP$  die Tangente  $TT_1$  schneidet. Warum?

### 5. Entwicklung in Potenzreihen.

Häufig läßt sich durch keine der bisherigen Methoden ein vorgelegtes Integral ausführen. Dann pflegt man den Integranden in eine Reihe zu entwickeln und gliedweise zu integrieren. Dies ist bei endlichen Reihen nach Satz 1 auf S. 14 ohne weiteres gestattet, bei unendlichen Reihen ist eine Untersuchung über die Berechtigung des Verfahrens unerläßlich. Wir wollen hier nur den einfachsten Fall, die Integration von Potenzreihen, behandeln.

Gegeben sei die Reihe  $f(x) = a + bx + cx^2 + ex^3 + \dots$ , welche für den positiven Wert  $x = x_0$  absolut konvergiere. Dann konvergiert sie auch für alle Werte von  $x$ , welche zwischen  $-x_0$  und  $+x_0$  liegen (D. S. 67). In demselben Intervall konvergiert sicherlich die Reihe

$a + \frac{bx}{2} + \frac{cx^2}{3} + \dots$ , denn jedes Glied dieser Reihe ist, absolut genommen, kleiner als das der ursprünglichen. Mithin gilt die Konvergenz auch von  $F(x) = x \left( a + \frac{bx}{2} + \frac{cx^2}{3} + \dots \right) = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \dots$ .

Eine absolut konvergente Potenzreihe darf aber gliedweise differenziert werden (D. S. 68), folglich ist

$$\frac{dF(x)}{dx} = a + bx + cx^2 + ex^3 + \dots, \text{ und das ist}$$

gerade die ursprünglich gegebene Funktion  $y$ . Da  $F$  nach der Differentiation  $y$  liefert, so ist

$$F = \int y dx, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} \text{(Formel 52.) } \int (a + bx + cx^2 + ex^3 + \dots) dx &= \\ &= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{ex^4}{4} + \dots + c_1. \end{aligned}$$



## Aufgaben.

$$158. J = \int \frac{e^x dx}{x}; \quad 159. J = \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad 160. J = \int \frac{\cos x}{x} dx;$$

$$161. J = \int f(x) dx; \quad 162. J = \int f(a + x) dx.$$

## Siebentes Kapitel.

## Näherungsmethoden.

Auf S. 61 wurde erwähnt, daß nicht jedes Integral in geschlossener Form berechnet, d. h. auf eine endliche Anzahl bekannter Funktionen zurückgeführt werden kann; in diesem Fall löst man es durch näherungsweise Integration. Die große praktische Bedeutung dieser Methoden, deren einfachste hier mitgeteilt werden sollen, leuchtet ein, denn die Natur, welche uns so viele Integralaufgaben stellt, kümmert sich nicht im geringsten darum, ob unsere theoretischen Hilfsmittel ausreichen; der Praktiker ist zu Näherungen gezwungen. Auch die Astronomie, die exakteste unter den Naturwissenschaften, arbeitet sehr häufig mit Approximationen. Kann man die Genauigkeit des Verfahrens beliebig weit treiben, so wird es auch der strengste Theoretiker gelten lassen müssen.

## 1. Reihenentwicklung.

Bei stark konvergierenden Potenzreihen genügen oft schon die ersten Glieder.

**Beispiel 53.** Das Integral  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$ , worin  $\kappa$  eine bekannte Konstante, kleiner als 1, bedeutet, läßt sich durch keine Umformung auf eine elementare Funktion zurückführen. Für kleine Werte von  $\kappa$  und  $x$  ist, wenn man bei  $x^4$  haltmacht

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4$ ;  $\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2 x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\kappa^2 x^2 + \frac{3}{8}\kappa^4 x^4$   
(D. S. 69). Durch Multiplikation findet man bei Unterdrückung der höheren Potenzen

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} = 1 + \frac{x^2}{2}(1 + \kappa^2) + \frac{x^4}{8}(3 + 2\kappa^2 + 3\kappa^4), \text{ also}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} = c + x + \frac{x^3}{6}(1 + \kappa^2) + \frac{x^5}{40}(3 + 2\kappa^2 + 3\kappa^4).$$

Beispielsweise erhält man für  $\kappa = 0,1$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} = 0,25000 + 0,00263 + 0,00007 = 0,2527.$$

**Aufgabe 163.**  $J = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-\kappa^2 x^2}{1-x^2}} dx; \kappa = 0,1.$

## 2. Die Trapezregel.

Zur Berechnung von  $F = \int_a^b f(x) dx$  stellen wir  $f(x)$  durch eine

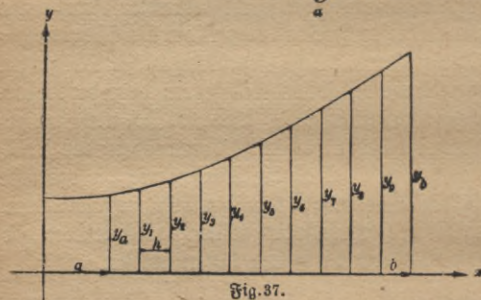


Fig. 37.

Kurve dar und bestimmen die zugehörige Fläche. Dazu teilen wir (Fig. 37) das Intervall  $x = a \dots b$  in  $n$  (z. B. 10) gleiche Teile, von denen natürlich jeder  $h = \frac{b-a}{n}$  ist. Die Fläche zerfällt dadurch in

Streifen; in jedem von ihnen ersetzen wir den Kurvenbogen durch die Sehne. Die Summe der Sehnentrapeze kommt dem gesuchten Flächeninhalt um so näher, je größer ihre Anzahl ist.

$$F \approx \frac{h}{2} (y_a + y_1) + \frac{h}{2} (y_1 + y_2) + \frac{h}{2} (y_2 + y_3) + \dots + \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_b).$$

$$F \approx \frac{h}{2} (y_a + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + y_b).$$

$$\text{(Formel 53.) } F \approx \frac{b-a}{2n} (y_a + y_b + 2 \sum y_m)$$

(Sehnen-Trapezregel).

Das letzte Glied bedeutet die doppelte Summe der mittleren Ordinaten.

Es ist selbstverständlich, daß diese Formel für ein beliebiges ganzzahliges  $n$  gilt, man hat nur in der Ableitung  $y_n$  durch  $y_{n-1}$  zu ersetzen.

Man erkennt leicht, daß  $F$  das arithmetische Mittel der auf S. 20 definierten Flächen  $F_1$  und  $F_2$  ist (Fig. 8). Vgl. Aufg. 51 und 52.

Man kann die Kurve auch durch die Tangenten, statt durch die



Sehnen, ersetzen. In Fig. 37 mögen diese durch die Endpunkte von  $y_1, y_3, y_5$  u. s. w. gelegt sein. Das erste Trapez hat dann die Höhe  $2h$  und die Mittellinie  $y_1$ , also den Inhalt  $2h \cdot y_1 = \frac{2(b-a)}{n} y_1$ . Die Summation liefert die Tangenten-Trapezregel

$$\text{(Formel 54.) } F \approx \frac{2(b-a)}{n} (y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}).$$

$n$  bedeutet hier eine gerade Zahl.

**Beispiel 54.** Die Gleichung einer Ellipse ist  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{(\frac{1}{4})} = 1$ . Wie groß ist der Näherungswert für die Fläche eines Quadranten, wenn  $n = 6$  angenommen wird?

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2}, \quad F = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} dx.$$

$x$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
$y$	0,5	0,49300	0,47140	0,43301	0,37268	0,27638	0

Die Sehnen-Trapezregel liefert  $F \approx \frac{1}{12} (0,5 + 0 + 2 \cdot 2,04647) = 0,38274$ , die Tangenten-Trapezregel  $F \approx 0,40080$ , der Mittelwert ist  $F \approx 0,39177$ . Zur Ermittlung des genauen Wertes setzt

man zweckmäßig  $x = \sin \varphi$ ,  $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = \left[ \frac{\sin x \cos x}{4} + \frac{1}{4} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,39270$ . Die Fehler sind  $2 \frac{1}{2} \text{‰}$ ,  $2 \text{‰}$ ,  $\frac{1}{4} \text{‰}$ .

**Beispiel 55.** Man bestimme den Bogen, welcher die eben berechnete Fläche begrenzt.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad \text{Auch hier setzt man } x = \sin \varphi, \text{ dann}$$

ist  $y = \frac{1}{2} \cos \varphi$ ,  $dx = \cos \varphi d\varphi$ ,  $dy = -\frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$ ,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \cdot \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad \text{Der Aus-}$$

druck läßt sich nicht geschlossen integrieren. Wir zerlegen das Intervall  $0 \dots \frac{\pi}{2}$  in 10 Teile.

$\varphi$	0	$\frac{1}{20} \pi$	$\frac{2}{20} \pi$	$\frac{3}{20} \pi$	$\frac{4}{20} \pi$	$\frac{5}{20} \pi$
$\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi}$	1	0,9908	0,9635	0,9195	0,8607	0,7906
$\varphi$	$\frac{6}{20} \pi$	$\frac{7}{20} \pi$	$\frac{8}{20} \pi$	$\frac{9}{20} \pi$	$\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi}$	0,7135	0,6361	0,5671	0,5180	0,5	

Formel 53 liefert  $L \approx 1,21105$ , Formel 54:  $L = 1,21108$ , der genaue Wert ist  $L = 1,211056 \dots$ . Der ganze Ellipsenumfang ist 4 mal so groß.

### Aufgaben.

164. Wie groß ist die Fläche der Sinuslinie, gerechnet vom Anfangspunkt bis zur höchsten Ordinate, wenn man sie nach den Trapezformeln 53 und 54 berechnet, und  $n = 2, 4, 6, 12$  gemacht wird?

165. Man beantworte dieselben Fragen für die Fläche, welche von der Kettenlinie  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ , der X-Achse und den im Abstände  $x = 0$  und  $x = 3$  gezogenen Ordinaten begrenzt wird.

166. Es sollen die natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen von 2 bis 10 durch die Formeln 53 und 54 gefunden werden.  $n$  sei gleich 10.

167. Jemand hat  $\int y dx$  nach Formel 53 gefunden, wobei er  $n = 5$  wählte. Der Näherungswert sei  $F_5$ . Er vermutet aber, daß dieser Wert noch zu ungenau sei, und zerlegt daher jedes Intervall in zwei neue. Wie groß ist  $F_{10}$ ? Wie findet man  $F_{2n}$  aus  $F_n$ ?

### 3. Die Simpson'sche Regel.

Als weitere Näherungsformel haben wir schon in Beispiel 5 auf S. 17 die Simpson'sche Regel kennen gelernt. Erscheint es bedenklich, sie auf die ganze Fläche anzuwenden, so muß man diese in Streifen zerlegen und sie einzeln genähert berechnen. Die Zahl  $n$  muß hier gerade sein, denn sonst hätte man für jeden Streifen erst noch die Mittellinie  $y_m$  zu suchen; jetzt faßt man je zwei Streifen zu einem Flächenelement zusammen. In Fig. 37 hat das erste die Endordinaten  $y_a$  und  $y_b$ , die Mittelordinate  $y_1$  und die Höhe  $2h = \frac{2(b-a)}{10} = \frac{(b-a)}{5}$ . Der Flächeninhalt wird



$$F \approx \frac{2h}{6} (y_a + y_2 + 4y_1) + \frac{2h}{6} (y_2 + y_4 + 4y_3) + \dots + \frac{2h}{6} (y_8 + y_6 + 4y_9).$$

$$F \approx \frac{b-a}{30} (y_a + y_2 + 4y_1 + y_2 + y_4 + 4y_3 + \dots + y_8 + y_6 + 4y_9).$$

$$F \approx \frac{b-a}{30} [y_a + y_b + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)].$$

Allgemein ist

$$\text{(Formel 55.) } F \approx \frac{b-a}{3n} [y_a + y_b + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})].$$

### Aufgaben.

168. Welchen Näherungswert liefert die Simpson'sche Regel für die Fläche des Ellipsenquadranten in Beispiel 54?

169. Man berechne den entsprechenden Ellipsenbogen (Beispiel 55) nach der Simpson'schen Regel.

170. Man beantworte die Fragen der Aufgabe 164 nach der Simpson'schen Regel.

171. Desgl. die der Aufg. 165. 172. Desgl. die von Aufg. 166.

173. Die Zahl  $\pi$  soll nach der Simpson'schen Regel berechnet werden.

Mit der Simpson'schen Regel kann man die Koordinaten des Schwerpunkts einer ebenen Fläche näherungsweise ermitteln.

Es möge die Anfangsordinate der Fläche zur  $Y$ -Achse genommen werden, das Intervall auf der  $X$ -Achse möge in eine gerade Anzahl  $n$  Teile zerlegt werden, die betreffenden Abszissen seien  $0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

die zugehörigen Ordinaten  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Dann ist  $\xi = \int_0^{x_n} xy dx : \int_0^{x_n} y dx$ .

Das im Nenner auftretende Integral ist  $\approx \frac{x_n}{3n} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]$ . Im Zählerintegral,

das wir  $Z$  nennen, steht statt  $y$  überall  $xy$ , also  $0 \cdot y_0$  statt  $y_0$ ,  $\frac{x_n}{n} \cdot y_1$  statt  $y_1$ ,  $\frac{2x_n}{n} y_2$  statt  $y_2$  usw. So erhält man

$$Z \approx \frac{x_n}{3n} \left[ x_n y_n + 4 \left( \frac{x_n}{n} y_1 + \frac{3x_n}{n} y_3 + \dots + \frac{(n-1)x_{n-1}}{n} y_{n-1} \right) + 2 \left( \frac{2x_n}{n} y_2 + \frac{4x_n}{n} y_4 + \dots + \frac{(n-2)x_n}{n} y_{n-2} \right) \right].$$

$$Z \approx \frac{x_n}{3n} \cdot \frac{x_n}{n} \left[ n y_n + 4(y_1 + 3y_3 + \dots + (n-1)y_{n-1}) + 2(2y_2 + 4y_4 + \dots + (n-2)y_{n-2}) \right].$$

$$\approx \frac{x_n}{n} \cdot \frac{n y_n + 4(y_1 + 3y_3 + \dots + (n-1)y_{n-1}) + 2(2y_2 + 4y_4 + \dots + (n-2)y_{n-2})}{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})}$$

Ebenso einfach ergibt sich

$$\eta \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0^2 + y_n^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + \dots + y_{n-1}^2) + 2(y_2^2 + y_4^2 + \dots + y_{n-2}^2)}{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})}$$

174. Es soll das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche in bezug auf die X- und die Y-Achse näherungsweise berechnet werden.

#### 4. Näherungsformeln für uneigentliche bestimmte Integrale.

**Erster Fall.** Wird eine Ordinate unendlich (S. 23), so versagen natürlich unsere Näherungsformeln. Wir zerlegen zunächst das Integral in so viele Teile (die entsprechende Fläche in so viele Streifen), daß in jedem nur die Anfangs- oder nur die Endordinate unendlich groß wird, und berechnen jeden für sich. Fig. 38 zeigt eine Fläche mit unendlicher Anfangsordinate ( $A \infty C' C$ ). Jetzt nehmen wir eine Abszisse  $b$  an, die nur wenig größer als die untere Grenze  $a$  ist. Die endliche Fläche  $BB' C' C$  läßt sich nach den bisherigen Formeln, am besten nach (55)

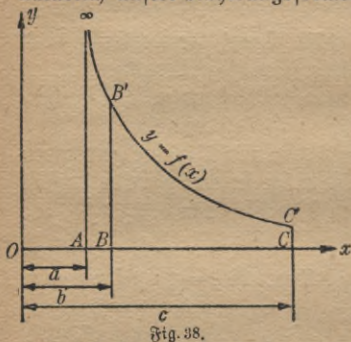


Fig. 38.

finden, so daß nur noch  $A \infty B' A'$  zu untersuchen ist. Diese Fläche ist in Fig. 39 (ohne Beibehaltung des Maßstabes) wiedergegeben.

Die Strecke  $AB$  wird durch  $M_1$  und  $X_1$  gedrittelt, ebenso  $AX_1$  durch  $M_2$  und  $X_2$ ,  $AX_2$  durch  $M_3$  und  $X_3$  usw. Man hat also

Abzissen	$OB = b$	$OM_1 = a + \frac{2}{3}(b-a)$	$OX_1 = a + \frac{1}{3}(b-a)$
----------	----------	-------------------------------	-------------------------------

Ordinaten	$y_b = f(b)$	$m_1 = f(a + \frac{2}{3}(b-a))$	$y_1 = f(a + \frac{1}{3}(b-a))$
-----------	--------------	---------------------------------	---------------------------------

Abzissen	$OM_2 = a + \frac{2}{9}(b-a)$	$OX_2 = a + \frac{1}{9}(b-a)$
----------	-------------------------------	-------------------------------

Ordinaten	$m_2 = f(a + \frac{2}{9}(b-a))$	$y_2 = f(a + \frac{1}{9}(b-a))$
-----------	---------------------------------	---------------------------------



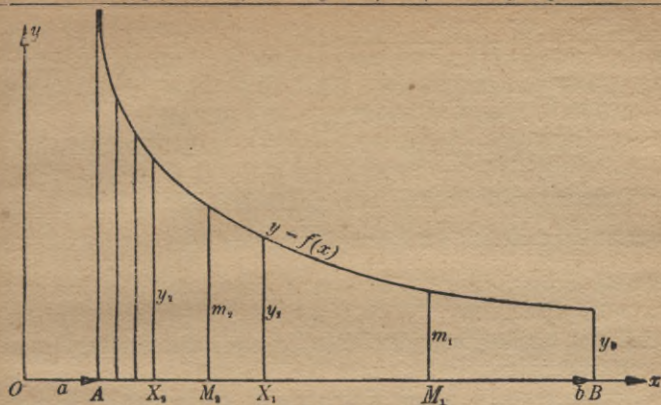


Fig. 39.

Jetzt wendet man die Simpson'sche Regel auf die Flächenstücke mit den Mittellinien  $m_1, m_2 \dots$  an;  $h_1 = X_1 B = \frac{2(b-a)}{3}$ ,  $h_2 = X_1 X_2 = \frac{2(b-a)}{9}$  usw.

$$J = \int_a^b y dx \approx \frac{b-a}{9} (y_b + 4m_1 + y_1) + \frac{b-a}{27} (y_1 + 4m_2 + y_2) + \frac{b-a}{81} (y_2 + 4m_3 + y_3) + \dots$$

Setzt man  $b - a$  heraus und vereinigt die zusammengehörigen Glieder, so findet man

(Formel 56.) 
$$\int_a^b y dx \approx (b-a) \left[ \frac{1}{9} y_b + \frac{4}{9} \left( \frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{9} + \frac{y_3}{27} + \dots + \frac{y_n}{3^n} \dots \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{9} + \frac{m_3}{27} + \dots + \frac{m_n}{3^n} + \dots \right) \right].$$

Beispiel 56.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  soll berechnet werden.

Der Integrand wird für  $x = 0$  unendlich; wir setzen  $b$  etwa  $= 0,2$

$\int_0^1 = \int_0^{0,2} + \int_{0,2}^1 = J_1 + J_2$ . Das zweite Integral läßt sich, da der Integrand stets endlich bleibt, nach Formel 55 ermitteln. Wir wählen  $n = 8$  und finden

$x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y$	1,4953	1,3512	1,2574	1,1892	1,1362	1,0932	1,0574	1,0267	1,0000
$J_2 \approx 0,9346$	(genau 0,93458). Bei $J_1$ ist $b - a = 0,2$ ; $y_1 = 1,9680$ , $y_2 = 2,5900 \dots m_1 = 1,6549$ ; $m_2 = 2,1779$ uff.								
$J_1 \approx 0,2$	$[0,1661 + \frac{4}{9}(0,6560 + 0,2878 + 0,1262 + 0,0554 \dots) + \frac{4}{3}(0,5516 + 0,2420 + 0,1061 + 0,0466 + \dots)]$ .								

Die Rechnung wird dadurch vereinfacht, daß hier in den Klammern geometrische Reihen (mit dem Quotienten  $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}} = 0,43869$ ) auftreten (D. S. 58);  $J_1 \approx 0,3992$  (genau  $J_1 = 0,39875$ ).  $J \approx 1,3338$  (genau 1,33333 ...).

Will man die Rechnung schneller (allerdings auf Kosten der Genauigkeit) zu Ende führen, so kann man das Intervall  $a \dots b$  in eine größere Anzahl, etwa 10, gleiche Teile zerlegen, denjenigen, welcher  $a$  zunächst liegt, ausschalten und den Rest nach der Simpsonschen Formel berechnen. Sodann wird der Rückstand ebenso behandelt, uff.

Hier gilt folgendes Schema:

Abszissen	$b$	$x_1 = a + \frac{1}{10}(b-a)$	$x_2 = a + \frac{1}{100}(b-a)$	$x_3 = a + \frac{1}{1000}(b-a)$
Ordinaten	$y_0 = f(b)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_3 = f(x_3)$ uff.

$\xi_1$  sei das arithmetische Mittel von  $b$  und  $x_1$ ;  $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + b) = \frac{1}{2}[a + \frac{1}{10}(b-a) + a + (b-a)]$ ;  $\xi_1 = a + \frac{11}{20}(b-a)$ ;  $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = a + \frac{11}{200}(b-a)$  uff.

Abszissen	$\xi_1 = a + \frac{11}{20}(b-a)$	$\xi_2 = a + \frac{11}{200}(b-a)$	$\xi_3 = a + \frac{11}{2000}(b-a)$
Ordinaten	$m_1 = f(\xi_1)$	$m_2 = f(\xi_2)$	$m_3 = f(\xi_3)$ uff.

$$F_1 \approx \frac{b-x_1}{6} \cdot (y_0 + y_1 + 4m_1) = \frac{3}{20}(b-a)(y_0 + y_1 + 4m_1);$$

$$F_2 \approx \frac{3}{200}(b-a)(y_1 + y_2 + 4m_2) \text{ uff.}$$

$$F \approx \frac{3}{20}(b-a)[y_0 + 1,1(y_1 + \frac{1}{10}y_2 + \frac{1}{100}y_3 + \dots) + 4(m_1 + \frac{1}{10}m_2 + \frac{1}{100}m_3 + \dots)].$$

In unserem Beispiel wird  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0,4050$  (genau 0,39875). Auch hier vereinfacht eine geometrische Reihe die Berechnung.



## Aufgaben.

175.  $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  soll genau und näherungsweise berechnet werden, ebenso 176.  $J = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ; 177.  $J = \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ ; 178.  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ .

179. Für welche Werte von  $n$  hat die Fläche, die zwischen der  $X$ -Achse, der  $Y$ -Achse, der Kurve  $y = ax^n$  und der Ordinate  $x = 1$  liegt, einen endlichen Wert?

180. Wie verhält es sich mit Formel 55, wenn nicht die erste, sondern die letzte Ordinate unendlich wird?

181.  $J = \int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ; 182.  $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 183.  $J = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ .

184. Man bilde Formel 53 für ein uneigentliches bestimmtes Integral der bisher behandelten Art um.

185. Dasselbe soll mit Formel 54 geschehen.

**Zweiter Fall.** Wird die eine Grenze des Integrals unendlich groß, ist also  $\int_a^\infty y dx = \int_a^\infty f(x) dx$  zu berechnen, so trennt man auch hier zu-

nächst ein endliches Stück ab, dessen obere Grenze  $b$  man um so größer wählt, je genauer das Endergebnis sein soll. (Fig. 40.)  $\int_a^\infty = \int_a^b + \int_b^\infty$ .

Das erste Integral berechnet man nach einer der früheren Methoden.

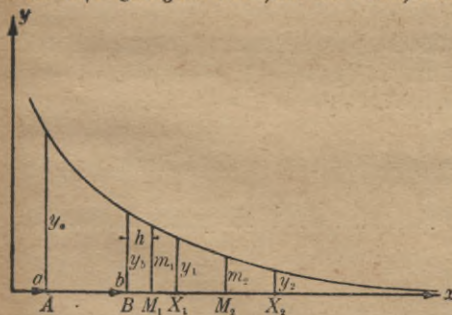


Fig. 40.

Dann trägt man vom Endpunkt des Intervalles,  $B$ , das Stück  $h$  ab, wobei  $h$  eine beliebige, aber zweckmäßig gewählte Größe bedeutet — sie muß um so kleiner sein, je genauer das Endergebnis werden soll — und erhält  $M_1$ . Setzt man  $M_1 X_1$  auch gleich  $h$  (also  $BX_1 = 2h$ ),  $X_1 M_2 = 2h$ ;  $M_2 X_2 = 2h$ ;

$X_2 M_3 = 4h$ ;  $M_3 X_3 = 4h$  uff. Die Bezeichnung der zugehörigen Ordinaten ist aus folgendem Schema ersichtlich.

Abszissen	$b$	$b + h$	$b + 2h$	$b + 4h$
Ordinaten	$y_0 = f(b)$	$m_1 = f(b + h)$	$y_1 = f(b + 2h)$	$m_2 = f(b + 4h)$
Abszissen	$b + 6h$	$b + 10h$	$b + 14h$	
Ordinaten	$y_2 = f(b + 6h)$	$m_3 = f(b + 10h)$	$y_3 = f(b + 14h)$	

Nun ist nach der Simpsonschen Regel

$$\int_b^{\infty} y dx = \frac{2h}{6} (y_0 + y_1 + 4m_1) + \frac{4h}{6} (y_1 + y_2 + 4m_2) + \frac{8h}{6} (y_2 + y_3 + 4m_3) + \dots$$

$$\int_b^{\infty} y dx = \frac{h}{3} [y_0 + 3y_1 + 6y_2 + 12y_3 + \dots + 4m_1 + 8m_2 + 16m_3 + \dots].$$

$$\text{(Formel 57.) } \int_b^{\infty} y dx = \frac{h}{3} [y_0 + 3(y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4 + \dots) + 4(m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4 + \dots)].$$

**Beispiel 57.**  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  soll näherungsweise berechnet werden.

Wir setzen etwa  $\int_0^{\infty} = \int_0^3 + \int_3^{\infty}$ . Zerlegt man das Intervall des ersten

Integrals in 6 Teile und wendet Formel 55 an, so resultiert  $\int_0^3 e^{-x} dx$

$= 0,9505$  (genauer Wert  $0,9502$ ). Zur Berechnung des zweiten Integrals nehmen wir  $h$  gleich 1 an. Es ist  $y_0 = e^{-3} = 0,0498$ ;  $m_1 = e^{-4} = 0,0183$ ;  $y_1 = e^{-5} = 0,0067$ ;  $m_2 = e^{-7} = 0,0009$ ;  $y_2 = e^{-9} = 0,0001$ , also  $\int_3^{\infty} e^{-x} dx = 0,0503$  (genau  $0,0498$ ). Der angenäherte

Wert des ganzen Integrals ist somit  $1,0008$ , der genaue  $1,0000$ , der Fehler  $\sim \frac{1}{12} \%$ .



## Aufgaben.

$$186. J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}. \quad 187. J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}. \quad 188. J = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{10^x} dx.$$

$$189. J = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1}. \quad 190. J = \int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{1+x^8}. \quad 191. J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

192. Für welche Werte von  $n$  hat die Fläche, welche von der Potenzkurve  $y = ax^n$ , der  $X$ -Achse und der Ordinate  $x = 1$  begrenzt wird, einen endlichen Inhalt?

$$193. J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ soll näherungsweise berechnet werden.}$$

$$194. J = \int_0^{\infty} e^{-k^2 x^2} dx.$$

195. Man transformiere Formel 53 für ein uneigentliches Integral der zweiten Art.

196. Man verfare ebenso mit Formel 54.

## Achstes Kapitel.

## Prüfungsmethoden.

Da die Integralrechnung ganz und gar auf den Schultern der Differentialrechnung steht, so ist eine genaue Kenntnis jener Wissenschaft unbedingt erforderlich. Die Beherrschung der Theorie genügt aber nicht, es muß Übung und Gewandtheit im Differenzieren vorausgesetzt werden.<sup>1)</sup>

Bei der Ausführung der einzelnen Operationen vermeide man Hast und Unübersichtlichkeit, schreibe deutlich — auch die Grenzen bei bestimmten Integralen — und richte die Darstellung so ein, daß die Nebenrechnungen übersichtbar sind und die Hauptergebnisse durch ihre Stellung und durch Unterstreichen als besonders wichtig kenntlich gemacht werden. Ist dann ein Fehler begangen, so kann man ihn bei sorgfältiger Nachprüfung meistens leicht entdecken.

1) Eine große Anzahl von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung enthält z. B. die vom Verfasser bearbeitete *Sohncke'sche Aufgabensammlung*.

## Prüfungsmethoden für unbestimmte Integrale.

**1. Die Differentiation.** Ist  $\int f(x)dx = F(x) + c$  gefunden worden, so muß nach Definition (§. 7 und 8) der Differentialquotient von  $F(x)$  den Wert  $f(x)$  annehmen.

**Beispiel 58.** Es sei die Formel  $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$  zu prüfen.<sup>1)</sup> Wenn man die rechte Seite differentiiert, so erhält man  $\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2} \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \right) = \sqrt{1-x^2}$ , also ist die Integration richtig ausgeführt. Will man ganz sicher gehen, so wird man die Differentiation möglichst auf verschiedenen Wegen vollziehen.

**2. Verschiedene Integrationsmöglichkeiten.** Oft kann man verschiedene der im sechsten Kapitel angeführten Verfahren benutzen. Auch hier werde das Beispiel  $J = \int \sqrt{1-x^2} dx$  behandelt.

a) Einführung einer neuen Veränderlichen. Wir setzen  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ , dann ist  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ ,  $J = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$ . Jetzt sei  $2t = z$ ,  $dt = \frac{1}{2} dz$ ,  $J = \int \frac{1+\cos z}{2} \cdot \frac{1}{2} dz$ ;  $J = \int \frac{1}{4} dz + \frac{1}{4} \int \cos z dz$ . Der zweite Summand ist  $\frac{1}{4} \sin z = \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} \sin t \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$ , der erste ist  $\frac{1}{4} z = \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \arcsin x$ , folglich ist  $J = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$ .

b) Partielle Integration.  $u' = 1$  (also  $u = x$ ),  $v = \sqrt{1-x^2}$ .  

$$J = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} - \int x \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$
 Das letzte Integral wird einfacher, wenn man im Zähler 1 addiert und subtrahiert.

1) Der Kürze halber sind hier die Integrationskonstanten fortgelassen.



$$J = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$J = x\sqrt{1-x^2} - J + \arcsin x$ . Dies ist eine Gleichung für  $J$ , die aufgelöst den vorigen Wert ergibt.

c) Rekursionsformeln.  $\int \cos^2 t dt$  kann nach Beispiel 51, Formel (E) auf S. 70 berechnet werden.

**3. Prüfung durch Potenzreihen und Näherungsformeln.** Kann man den Integranden in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, so ist die gliedweise Integration gestattet (S. 72). Sie muß das Integral ergeben, natürlich auch in Form einer konvergenten Potenzreihe.

Wenden wir dies Verfahren zur Prüfung der Formel  $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$  an!

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 \dots \quad (-1 < x < +1).$$

$$J = x - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 - \dots$$

Nun entwickeln wir das angegebene Resultat

$$\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2}x^3 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 2}x^5 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2}x^7 - \dots$$

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}x^7 + \dots$$

Abdiert man, so ergibt sich z. B. als Koeffizient von  $x^7$  die Größe  $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}[-7+5] = -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$ , und auch bei allen andern Gliedern kommen dieselben Zahlen vor wie oben.

Um einen Irrtum nachzuweisen, genügen oft schon die ersten Glieder der Entwicklung. Soll diese für jeden Wert von  $x$  gelten, so muß sie auch für kleine Werte gelten, und bei diesen werden die höheren Glieder der Reihe bedeutungslos.

**Aufgabe 197.** Jemand setzt  $\int e^{x^2} dx = e^{x^2}$ . Ist das richtig?

**Aufgabe 198.** Jemand setzt  $J = \int \frac{dx}{1+x^3} = l(1+x^3)$ . Ist das Ergebnis richtig?

Dies Verfahren ist wohl geeignet, Fehler aufzudecken, aber nicht, die

Richtigkeit des Ergebnisses einwandfrei darzutun. So würde z. B. die Formel  $\int \frac{dx}{1+x^2} = x \sqrt{1-x^2}$  die Probe bestehen, wenn man bei der Reihenentwicklung nur die erste Potenz von  $x$  berücksichtigt, die Untersuchung der weiteren Glieder läßt aber keinen Zweifel darüber, daß das Ergebnis falsch ist; das gesuchte Integral hat vielmehr den Wert  $\arctg x$ . Natürlich fällt auch die Differentiationsprobe negativ aus.

**4. Spezialisierung.** Integralformeln, in denen Buchstabenausdrücke vorkommen, müssen auch dann richtig bleiben, wenn man den Buchstaben beliebige, am besten einfache Zahlenwerte beilegt (0, +1, -1,  $\infty$  usw.). Dadurch werden oft die Integrale leichter ausführbar.

**Beispiel 59.** Es soll die Formel  $\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a \cos x)}{1+a^2}$  geprüft werden. Setzt man  $a = 0$ , so bekommt man, weil  $e^0 = 1$  ist, den einfacheren Ausdruck  $\int \cos x \, dx = \sin x$ . Er ist richtig; unsere Formel besteht auch jede andere Probe. Ableiten läßt sie sich am einfachsten durch partielle Integration.

$$\text{Aufgabe 199. } J = \int \frac{(\alpha + \beta x) dx}{x^2 + 2ax + b} = \frac{\alpha - \beta a}{2\sqrt{a^2 - b}} \ln \left( \frac{x + a - \sqrt{a^2 - b}}{x + a + \sqrt{a^2 - b}} \right) + \frac{1}{2} \beta l(x^2 + 2ax + b)$$

soll durch Spezialisierung geprüft werden.

### Prüfungsmethoden für bestimmte Integrale.

Bei der Berechnung eines bestimmten Integrals ermittelt man im allgemeinen zuerst den Wert des unbestimmten, setzt dann die Grenzwerte ein und bildet die Differenz. Der erste Teil dieses Verfahrens kann durch die bisherigen Methoden leicht kontrolliert werden, der zweite verlangt nur Sorgfalt in der Ausführung elementarer Rechnungen. Es gibt aber auch Prüfungsmittel, die gerade auf die bestimmten Integrale zugeschnitten sind.

#### 1. Prüfung durch Vergleichsfunktionen.

Gegeben sei  $\int_a^b f(x) dx$ , es sei ferner  $\varphi(x)$  eine Funktion, die für jeden

Wert von  $x$  innerhalb des Intervalles  $a \dots b$  kleiner sei als  $f(x)$ . Eine zweite Funktion  $\Phi(x)$  sei in demselben Bereich stets größer als



$f(x)$ . Wir fassen jetzt das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe auf, die wir abkürzend mit  $\Sigma f(x) \Delta x$  bezeichnen.

Dann liegt nach Voraussetzung jeder Summand zwischen  $\varphi(x) \Delta x$  und  $\Phi(x) \Delta x$ , also auch  $\Sigma f(x) \Delta x$  zwischen  $\Sigma \varphi(x) \Delta x$  und  $\Sigma \Phi(x) \Delta x$ . Da diese Behauptung gilt, mag die Gliederzahl groß oder klein sein, so gilt sie auch für den Grenzfall, es ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b \Phi(x) dx.$$

Da die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\Phi(x)$ , abgesehen von der zugrunde gelegten Voraussetzung, ganz beliebig sein können, so wird man sie recht einfach wählen und damit die Möglichkeit gewinnen, das vorgelegte bestimmte Integral in berechenbare Grenzen einzuschließen.

**Beispiel 60.**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 x} dx$  soll in angebbare Grenzen eingeschlossen werden.  $x^2$  sei ein echter Bruch.

Als Vergleichsfunktion wählen wir  $\varphi(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$  und  $\Phi(x) = 1$ . Es ist  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx$ . Das gesuchte Integral liegt zwischen 1 und  $\frac{\pi}{2} = 1,571$ . Vgl. Beispiel 55 auf S. 75.

**Aufgabe 200.** Kann  $J = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$  den Wert 2 haben?

**2. Der Mittelwertsatz.** Es sei  $\int_a^b f(x) dx = F(x)$ , dann ist  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Der Mittelwertsatz (D. S. 80) liefert dafür  $F(b) - F(a) = (b - a) F' [a + \Theta (b - a)]$ . Die Größe  $F'$  ist hier aber gleich  $f$ , also

$$\text{(Formel 58.) } \int_a^b f(x) dx = (b - a) f[a + \theta (b - a)].$$

$\Theta$  bedeutet einen echten Bruch.  $a + \Theta (b - a)$  ist ein Wert der Abszisse  $x$  zwischen  $a$  und  $b$ ;  $f[a + \Theta (b - a)]$  ist die zugehörige Ordinate; der

Satz sagt also aus, daß die durch Integration gefundene Fläche (Fig. 1, wenn die Endabszisse  $b$  ist) einem Rechteck gleichkommt, das aus ihrer Länge ( $b - a$ ) und einer passenden Ordinate als Breite gebildet wird.

**Beispiel 61.** Kann  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx$  gleich 5 sein?

$J = \frac{\pi}{2} e^{\sin \left[ 0 + \Theta \cdot \frac{\pi}{2} \right]} = \frac{\pi}{2} e^{\sin \left( \Theta \cdot \frac{\pi}{2} \right)}$ ;  $\Theta \cdot \frac{\pi}{2}$  liegt zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ , der Sinus dieser Größe zwischen 0 und 1,  $J$  also zwischen  $\frac{\pi}{2} = 1,57$  und  $\frac{\pi}{2} \cdot e = 4,27$ ; also bestimmt unter 5.

**3. Abzählungs- und Wägungsmethode.** Man kann  $\int_a^b f(x) dx$  in

bekannter Weise durch eine Fläche darstellen, deren Endordinaten von der  $Y$ -Achse den Abstand  $a$  und  $b$  haben. Benutzt man Zeichenpapier, welches in Quadratzentimeter und Quadratmillimeter eingeteilt ist, so lassen sich die ganzen Quadratzentimeter und Quadratmillimeter zählen, Bruchteile schätzen.

Ist diese Einteilung nicht vorhanden, so kann man die Fläche mit der Schere ausschneiden. Dann stellt man ihr Gewicht fest und vergleicht es mit dem der Flächeneinheit. Diese sei etwa 1 qcm, dann wird man das Gewicht eines möglichst genau gezeichneten Quadratdezimeters messen und durch 100 dividieren.

Dies Verfahren setzt gleichmäßige Stärke des Papiers voraus. Man achte genau auf den Maßstab der Zeichnung.

**4. Näherungsverfahren.** Das beste Mittel, um zu entscheiden, ob ein bestimmtes Integral richtig gefunden ist, werden immer die im vorigen Kapitel entwickelten Formeln zur näherungsweise Berechnung sein. Sie sind in der Anwendung bequem und liefern jede gewünschte Genauigkeit, lassen also die Prüfung bis zu jedem Grade der Schärfe zu; sie verlangen nur, daß der Integrand außer der Variablen  $x$  keine willkürlichen Buchstaben, sondern lauter fest bestimmte Zahlen enthalte. Das ist aber bei den meisten praktischen Aufgaben der Fall.



**Lösungen.**

1.  $x + c$ ; 2.  $\frac{1}{2}x^2 + c$ ; 3.  $\frac{1}{40}x^4 + c$ ; 4.  $\frac{2}{3}x^6 + c$ ; 5.  $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$ ; 6.  $\int 4x^{-3} dx = -2x^{-2} + c = -\frac{2}{x^2} + c$ ; 7.  $-\frac{1}{15x^3} + c$ ;  
 8.  $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$ ; 9.  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$ ; 10.  $2\sqrt{x} + c$ ;

11.  $\frac{3}{2}\sqrt{x^3} + c$ ; 12.  $\frac{5}{9}\sqrt{x^9} + c$ ; 13.  $5\sqrt[5]{x} + c$ . 14. In Fig. 2 sei  $AB$  und  $AD$  das Achsenkreuz,  $AD = a$ ,  $BC = b$ ,  $AB = h$ . Dann ist  $y = a + \frac{(b-a)x}{h}$  (D. S. 16).  $F = ax + \frac{b-a}{2h}x^2 + c$  Weil für  $x=0$  auch  $F=0$  ist, so muß auch  $c=0$  sein, also  $F = x \left[ a + \frac{(b-a)x}{2h} \right]$ ; für  $x=h$  wird  $F = h \cdot \frac{a+b}{2}$ . Ein Trapez, dessen Schenkelseiten beide nicht senkrecht zu den Grundlinien stehen, wird durch eine beliebige Höhe in zwei passende Figuren zerlegt. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist ein Spezialfall des Trapezinhaltes.

15. Ist  $n$  positiv, so teilt die Kurve  $y = cx^n$ , da  $F = \frac{xy}{n+1}$ ,  $F_1 = \frac{nx y}{n+1}$  ist, das aus den Koordinaten eines ihrer Punkte gebildete Rechteck im Verhältnis  $1:(n+1)$ . Ist  $n$  negativ und seinem absoluten Betrage (D. S. 63) nach kleiner als 1, so bleibt dies Ergebnis ungeändert, trotzdem die Kurve die Ordinate asymptotisch berührt (D. S. 55). Man erläutere diesen Fall durch eine Zeichnung und deute das in der Formel auftretende negative Vorzeichen. Für  $n = -1$  und Werte von  $n$ , die unter  $-1$  liegen, erhält man keinen endlichen Flächeninhalt. 16. Parallele zur  $t$ -Achse. 17.  $v = 9,81 t$ ; Gerade durch den Anfangspunkt. 18 (Fig. 41). Die Wege  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , die in den ersten 1, 2, 3  $\dots$  Sekunden zurückgelegt werden,

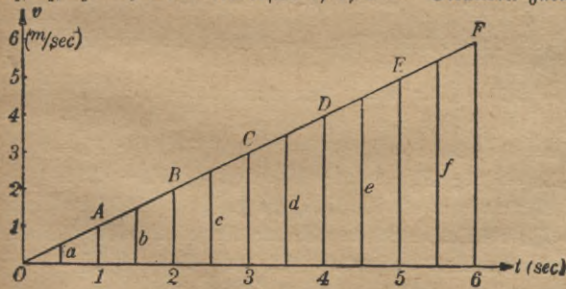


Fig. 41.

werden durch die Inhalte der Dreiecke  $01A, 02B, 03C$  usw. dargestellt; diese sind ähnlich und verhalten sich deshalb wie die Quadrate entsprechender Seiten, also

wie  $01^2 : 02^2 : 03^2 \dots$ . Die Wege in der ersten, in der zweiten Sekunde u. s. w. sind durch das Dreieck  $01A$  und die Trapeze  $12BA$ ,  $23CB$ ,  $34DC \dots$  dargestellt. Die Höhen  $01$ ,  $12$ ,  $23$ ,  $34 \dots$  sind alle gleich 1, die Flächeninhalte also numerisch gleich den Mittellinien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d \dots$ , und diese verhalten sich, wie die Figur unmittelbar zeigt, wie die ungeraden Zahlen. 19. Aus Formel 20 auf S. 13 und  $v = gt$  folgt  $v^2 = 2gs$ .

20.  $v = c + bt$  oder  $c - bt$ . Steigende oder fallende Gerade.  $s = ct + \frac{1}{2}bt^2$  oder  $s = ct - \frac{1}{2}bt^2$ . 21.  $a \sin x + c$ . 22.  $-b \cos x + c$ . 23.  $a \sin x - b \cos x + c$ . 24.  $a \cos x + b \sin x + c$ . 25.  $a \sin x + b \cos x + c$ . 26.  $a \cos x - b \sin x + c$ . 27.  $a^2 \ln x + c$ . 28.  $e^x - \frac{a^x}{\ln a} + c$ . 29.  $6x - 6 \arcsin x + c$  oder  $6x + 6 \arccos x + c$ . 30.  $\int \frac{1}{a} f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) dx$ . 31.  $4e^x + \frac{3x^{n+1}}{n+1} + c$ . 32.  $a \operatorname{tg} x + c$ . 33.  $-\frac{\operatorname{ctg} x}{b} + c$ . 34.  $x + \ln x + c$ .

35.  $\frac{5}{6} (\operatorname{Zg} x - \operatorname{Utg} x) + c$ . 36.  $\int \frac{a dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = a \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c$ . 37. Die Summe der beiden Integrale ist  $\int (\sin^3 x + \sin x \cos^2 x) dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) \sin x dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$ . 38.  $\int x^2 (\operatorname{Cof}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c$ . 39.  $\int \left[ \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right] dx = \int \cos x dx = \sin x + c$ . 40.  $\int \ln \left[ (\sqrt{x^2 + 1} + x) (\sqrt{x^2 + 1} - x) \right] dx = \int \ln 1 dx = c$ .

41.  $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$ ;  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ . 42.  $\frac{19}{3}$ . 43.  $-\frac{19}{3}$ . 44. 0. 45.  $\frac{2}{5}$ . 46.  $8 \frac{5}{6}$ . 47.  $-8 \frac{5}{6}$ . 48.  $\frac{9}{32}$ . 49.  $\frac{39}{32}$ . 50.  $\frac{48}{32} = \frac{3}{2}$ . 51. Der genaue Wert ist  $\int_1^4 (1 + \frac{1}{10} x^3) dx = 9,375$ . Für  $n = 1$  wird  $\Delta x = 3$ ;  $F_1 = 3,3$ ;

$F_2 = 22,2$ ;  $F_m = 12,75$ . Für  $n = 2$  hat man  $\Delta x = 1,5$ ;  $F_1 = 5,49$ ;  $F_2 = 14,94$ ;  $F_m = 10,22$ ; für  $n = 3$  ist  $\Delta x = 1$ ;  $F_1 = 6,6$ ;  $F_2 = 12,9$ ;  $F_m = 9,75$ ; für  $n = 6$  wird  $\Delta x = 0,5$ ;  $F_1 = 7,89$ ;  $F_2 = 11,04$ ;  $F_m = 9,47$ ; für  $n = 12$  ist  $\Delta x = 0,25$ ;  $F_1 = 8,611$ ;  $F_2 = 10,186$ ;  $F_m = 9,398$ . In Fig. 42 sind die Werte von  $n$  als Abszissen, die zu ihnen gehörigen Werte von  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_m$  als Ordinaten eingetragen; die so gefundenen Punkte werden mit dem Kurvenlineal verbunden. 52. Nach S. 20 ist  $F_2 - F_1 = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)]$ ;  $F_2 - F_m = F_2 - \frac{F_2 + F_1}{2} = \frac{F_2 - F_1}{2}$ . Man bestä-



tige die Formeln durch die Zahlen der vorigen Aufgabe. 53.  $b - a = 3$ ;  $f(b) = 7,4$ ;  $f(a) = 1,1$ ; aus  $\frac{3}{n}(7,4 - 1,1) = 0,01$  folgt  $n = 1890$ .

54.  $F = \int_0^a e^x dx = [e^x]_0^a = e^a - 1$ .

Ist die Maßeinheit das Zentimeter, so erhält man die Fläche, indem man die letzte Ordinate um 1 vermindert u. diese Strecke zur Grundlinie eines Rechtecks nimmt, dessen Höhe 1 cm ist.

55.  $[-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$ .

Beweis durch Differentiation der Klammer.

Ähnliche Konstruktion.

56.  $\lim F = 1$  für  $a = \infty$ . 57.  $F = \int_0^a m \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx = \left[m^2 \sin\left(\frac{x}{m}\right)\right]_0^a$ .

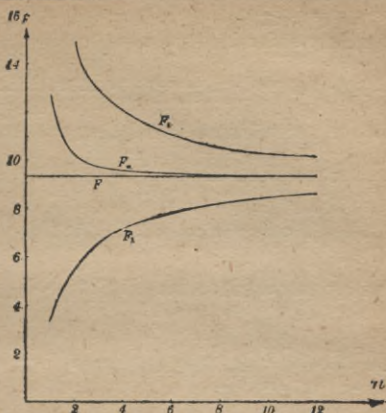


Fig. 42.

Der Beweis erfolgt durch Differentiation des Klammersausdrucks.

$F = m^2 \sin\left(\frac{a}{m}\right) = \frac{m^2}{2} \left(e^{\frac{a}{m}} - e^{-\frac{a}{m}}\right)$ . 58. Ja, da das bestimmte Integral aus dem unbestimmten entsteht. Fig. 43 gibt die geometrische Deutung für Satz 1: Durch Summation der Ordinaten summieren sich auch die Flächen. Der Satz über die Integration einer Differenz und die Integration eines Produktes wird ganz entsprechend veranschaulicht. 59.  $x$  möge erst den Wert  $x_n$ , dann den nur wenig größeren  $x_{n+1}$  annehmen. Es ist  $F(x_{n+1}) = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_{n+1} - x_n)f(x_n)$ ;

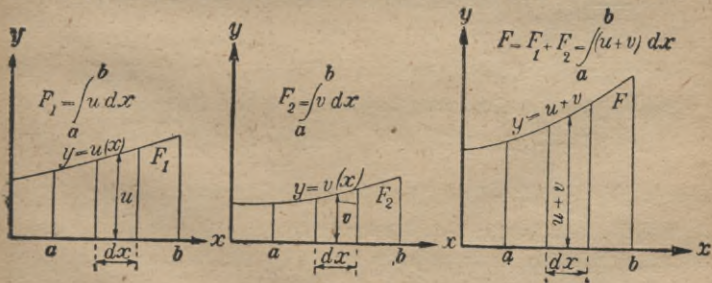


Fig. 43.

$F(x_n) = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$ . Bei der Subtraktion bleibt nur das letzte Glied von  $F(x_{n+1})$  stehen;  $F(x_{n+1}) -$

$- F(x_n) = (x_{n+1} - x_n)f(x_n)$ ;  $\frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_n)$ . Im Grenzfalle geht die Summe in das Integral, der Differenzenquotient in den Differentialquotienten über;

$$\frac{dF}{dx} = f(x). \quad 60. F = \frac{4\pi^3 c^2}{3\omega^2}; R = \frac{2\pi c}{\omega}; F = \frac{1}{3}R^2\pi.$$

61.  $\int_0^{\frac{1}{2}} a^2 \varphi d\varphi = a^2 \pi^2$ . 62. Bei der Archimedischen Spirale wie  $1^2:2^2:3^2 \dots$ ,

bei der parabolischen wie  $1^2:2^2:3^2 \dots$ . 63.  $F = \frac{a^2}{2\pi}$ . 64.  $F = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{a^2}{2\varphi} d\varphi =$

$$= \left[ \frac{a^2}{2} \ln \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{a^2}{2} \ln 2 = 0,347 a^2. \quad 66. \text{ Die Schnittfläche } Q \text{ hängt stets}$$

quadratisch von dem Abstände  $x$  ab. 67. Der Körper ist ein Prismatoid.

$$M = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}, \quad V = \frac{h}{6}(2ab + 2cd + bc + ad). \text{ Man weist leicht nach,}$$

daß  $V = hM + \frac{h}{12}(a-c)(b-d)$  ist. 68. Spezialfall der vorigen Aufgabe.

$$V = \frac{h}{6}(2ab + bc). \quad 69. \text{ Alle diese Körper können als besondere Fälle des}$$

Prismatoids angesehen werden. Es ist nur zu beachten, daß bei der

Pyramide und dem Kegelschnitt die eine Grundfläche unendlich klein wird ( $g=0$ ),

und daß man beim Zylinder, Kegelschnitt und Kegelschnitt einen Kreis als Grenz-

fall eines regelmäßigen Vielecks von großer Seitenzahl auffassen muß.

Die Ableitung der Formeln macht nur beim Pyramidenstumpf Schwierig-

keiten. Eine Seite der großen Grundfläche  $G$  sei  $a$ , die entsprechende Seite

der kleinen Grundfläche  $g$  sei  $b$ , die des Mittelschnitts  $M$  sei  $m$ . Dann

$$\text{ist } m = \frac{a+b}{2}. \text{ Aus der Ähnlichkeitslehre folgt } G:g = a^2:b^2; \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}},$$

$$\text{und anderseits } M:g = \frac{1}{4}(a+b)^2:b^2; M = \frac{g}{4}\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2; M = \frac{g}{4}\left(\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} + 1\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{G} + \sqrt{g})^2. \text{ Setzt man diesen Wert in die Prismatoidformel ein,}$$

$$\text{so entsteht } V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g). \text{ Beim Kegelschnitt ist } G = R^2\pi,$$

$$g = r^2\pi, \quad V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2). \quad 70. \text{ Sie sind Simpsonsche Körper. 71. Die}$$

Grundkreisradien seien  $r$ , die Höhe der Halbkugel, also auch die der andern

Körper, gleichfalls  $r$ . Dann verhalten sich die Inhalte, wenn man die Reihen-



folge der Aufgabe zugrunde legt, wie  $\pi r^3 : \frac{2}{3} \pi r^3 : \frac{1}{2} \pi r^3 : \frac{1}{3} \pi r^3 = 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 6 : 4 : 3 : 2$ . Zylinder, Kugel und Kegel verglich schon Archimedes. 72. In der

Bezeichnungsweise des Beispiels 18 ist  $M = \pi a \frac{h}{2}$ ,  $V = \frac{\pi a h^2}{2}$ ,  $V = Mh$ .

Der Satz gilt auch für den Körper, welcher aus dem Rotationsparaboloid durch zwei zur Symmetrielinie senkrechte Ebenen herausgeschnitten wird.

73. Man erhält, da  $G = g = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $M = \frac{\pi D^2}{4}$  ist,  $V = \frac{\pi h}{12} (d^2 + 2 D^2)$ .

74. Der genaue Wert ist  $\frac{1}{6} \pi d^3$ , der Näherungswert ist um  $4 \frac{1}{2} \%$  zu klein.

75. Wählt man  $a$  zur  $x$ -Achse, so ist  $\int_0^h xy dy = \int_0^h \left( a - \frac{a-b}{h} y \right) y dy = \frac{h^2}{6} (a + 2b)$ ,  $\eta = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$  cm. Der Schwerpunkt muß außerdem auf der

Geraden liegen, die die Mitten von  $a$  und  $b$  verbindet. 76. Man verbinde den Mittelpunkt des Sechsecks mit den Ecken. Jedes Teildreieck hat die Höhe  $\frac{s}{2} \sqrt{3}$  und den Flächeninhalt  $\frac{s^2}{4} \sqrt{3}$ ;  $M = 6 s^2 \pi \sqrt{3} = 32,65 s^2$  qcm,

$V = \frac{9\pi}{2} s^3 = 14,14 s^3$  ccm. 77.  $O = 4\pi^2 r l = 39,48 r l$ ;  $V = 2\pi^2 r^2 l = 19,74 r^2 l$ .

Bei Anwendung der Simpsonschen Regel ist  $G = g = 0$ , der Mittelschnitt  $M = 4r\pi l$ ,  $V = \frac{16}{3} \pi r^2 l = 16,755 r^2 l$ . Der Wert ist offenbar falsch (Fehler  $\approx 15\%$ ); der Körper erfüllt nämlich nicht die Anforderungen, die wir an die Querschnitte des Simpsonschen Körpers stellen müssen. 78. Offenbar ist er auf der Symmetrielinie zu suchen, sein Abstand vom Mittelpunkt sei  $\xi$ . Lassen wir den Halbkreis um seinen Durchmesser rotieren, so entsteht eine Kugeloberfläche. Ist der Kugelradius gleich  $r$ , so ist der Inhalt dieser Fläche nach der Guldinischen Regel  $\pi r \cdot 2\pi \xi$ , nach Formel 42 auf Seite 36 aber gleich  $4\pi r^2$ . Beide Ausdrücke müssen gleich sein;  $\xi = \frac{2r}{\pi} =$

$= 0,6366 r$  79. Wendet man ebenso zwei Formeln für den Kugelinhalt an, so ergibt sich  $\xi = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244 r$ . 80. Der Radius sei  $r$ , die Sehne  $s$  und der Kreisbogen  $b$ . Man lasse die Rotation um eine Achse ausführen, die durch den Kreismittelpunkt geht und der Sehne parallel ist. Der Ab-

stand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt ist  $\xi = \frac{rs}{b} = \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ , wenn  $\alpha$

der Zentrwinkel ist (vgl. D. S. 77). 81. Der Zentrwinkel sei  $\alpha$ , seine Halbierungslinie sei die  $x$ -Achse. Der Schwerpunkt des Dreiecks, welches

durch zwei Radien gebildet wird, die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  einschließen, ist vom Mittelpunkt um  $\frac{2}{3}r$  entfernt und hat die Abszisse  $x = \frac{2r \cos \varphi}{3}$ . Nach Formel 46 auf S. 41 ist  $\xi F = \int x dF$ ;  $\xi \cdot \frac{rb}{2} = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \frac{2r \cos \varphi}{3} \cdot \frac{r^2 d\varphi}{2}$ ;  $\xi \cdot \frac{rb}{2} = \frac{r^3}{3} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{2r^3 \sin \frac{\alpha}{2}}{3}$ . Es ist aber

$2r \sin \frac{\alpha}{2} = s$ , also  $\xi = \frac{2rs}{3b}$ . 82. Er liegt auf der Symmetrielinie und ist

von der Grundfläche  $\frac{1}{3}y_1$ , von dem Scheitelpunkt  $\frac{2}{3}y_1$  entfernt, wenn  $y_1$  die Höhe des Paraboloids ist. 83—86.  $G = g = M$ ,  $\xi = \xi_1 = \frac{h}{2}$ . 87 und

88.  $M = \frac{G}{4}$ ,  $\xi_1 = \frac{h}{4}$ . 89. Nach Aufg. 69 ist  $M = \frac{1}{4}(\sqrt{G} + \sqrt{g})^2$ , also

$\xi_1 = \frac{h(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)}{4(G + \sqrt{Gg} + g)}$ ;  $\xi = \frac{h(g + 2\sqrt{Gg} + 3G)}{4(g + \sqrt{Gg} + G)}$ . 90. Spezialfall der

vorigen Aufgabe. 91.  $Q = 2\pi r x - \pi x^2$  (vgl. Beispiel 16),  $M = \frac{3}{4}\pi r^2$ ;

$\xi = \frac{5}{8}r$ ,  $\xi_1 = \frac{3}{8}r$ . 92.  $Q$  wie in 91;  $M = \pi r h - \frac{\pi h^2}{4}$ ;  $\xi = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h}$ ;

$\xi_1 = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r - h}{3r - h}$ . 93.  $Q = \pi x^2 = \pi a y$ ;  $M = \frac{\pi a y_1}{2}$ ;  $\eta$  und  $\eta_1$  natürlich

wie in Aufg. 82. 94. Dreht sich die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  um die  $X$ -Achse, so ist  $Q = \pi y^2 = \pi b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ ;  $M = \frac{3}{4}\pi b^2$ ;  $\xi = \frac{5}{8}a$ ;  $\xi_1 = \frac{3}{8}a$ . Bei der

Rotation um die kleine Achse gelten ganz entsprechende Formeln (Ver-

tauschung von  $b$  und  $a$ ). 95. Man kann hier Fig. 26 benutzen.  $J = \int_0^h \frac{ax^2}{h} dx =$

$\frac{ah^3}{4}$ . 96.  $J = \int_0^h bx^2 dx = \frac{1}{3}bh^3$  vgl. Beispiel 32. 97. Der Abstand

eines Parallelstreifens von der Grundlinie  $a$  sei  $x$ , die Höhe  $h$ . Dann

ist  $J = \int_0^h x^2 \frac{a(h-x)}{h} dx = \frac{1}{12}ah^3$ . 98. Zählt man  $x$  wie vorher, so hat

man  $J = \int_0^h \left(x - \frac{h}{3}\right)^2 \left(a - \frac{ax}{h}\right) dx = \frac{ah^3}{36}$ . Aus Beispiel 32 folgt auch

$J_s = J - I^2 F$ . 99. Das Trägheitsmoment von  $F$  in bezug auf die  $X$ -Achse



Ist  $J_x = \int_0^{y_1} y^2(x_1 - x) dy = \int_0^{y_1} y^2(x_1 - \sqrt{ay}) dy = \frac{1}{21} x_1 y_1^3$ ;  $F_1$  hat das Moment  $J'_x = \int_0^{y_1} y^2 \sqrt{ay} dy = \frac{2}{7} x_1 y_1^3$ . (Beide zusammen ergeben natürlich

das Trägheitsmoment des Rechtecks mit den Seiten  $x_1$  und  $y_1$ .) Die Trägheitsmomente in bezug auf die  $Y$ -Achse sind  $J_y = \int_0^{x_1} x^2 y dx = \int_0^{x_1} \frac{x^4 dx}{a} = \frac{x_1^5}{5a} = \frac{1}{5} x_1^3 y_1$ ;  $J'_y = \frac{2}{15} x_1^3 y_1$ . 100. Der Abstand eines Flächenelementes

von der neuen Achse ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , somit ist  $J = \int r^2 dF = \int y^2 dF + \int x^2 dF = J_x + J_y$ . 101. Das Gefäß kann als Kreiskegel aufgefaßt werden,

dessen Achse senkrecht steht, mit der Spitze nach unten.  $R$  sei der Grundkreisradius,  $H$  die Höhe des ursprünglichen Flüssigkeitspegels,  $q$  der Querschnitt des ausfließenden Strahles,  $h$  eine beliebige Höhe (vom tiefsten Punkte an gerechnet),  $Q$  der zugehörige Kegelquerschnitt.  $H_1$  sei die Höhe des Endniveaus.  $Q$  ist jetzt nicht konstant, sondern hat den Wert  $\pi \left(\frac{hR}{H}\right)^2$ . Es wird (theoretisch)

$$t = \int_{H_1}^H \frac{Q dh}{q \sqrt{2gh}} = \int_{H_1}^H \frac{\pi R^2 h^{\frac{3}{2}} dh}{q H^2 \sqrt{2g}} = \frac{2\pi R^2}{5q H^2 \sqrt{2g}} \left( H^{\frac{5}{2}} - H_1^{\frac{5}{2}} \right).$$

a)  $T_1 = \frac{2\pi R^2 \sqrt{H}}{5q \sqrt{2g}} = 0,2837 \frac{R^2 \sqrt{H}}{q}$ ;      b)  $T_2 = \frac{2\pi R^2 \sqrt{H}}{5q \sqrt{2g}} \left( 1 - \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \right) = 0,2336 \frac{R^2 \sqrt{H}}{q}$ .

c)  $\pi \left(\frac{H_1 R}{H}\right)^2 \cdot \frac{H_1}{3} = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{H}{3}$ , also  $H_1 = \frac{H}{\sqrt{2}}$ ;  
 $T_3 = \frac{2\pi R^2}{5q H^2 \sqrt{2g}} \left( H^{\frac{5}{2}} - \frac{H^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{5}{2}}} \right)$ ;  $T_3 = 0,1245 \frac{R^2 \sqrt{H}}{q}$ . In der Praxis ist

$v = \mu \sqrt{2gh}$ , also müssen  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  noch durch  $\mu$  ( $\approx 0,6$ ) dividiert werden.

102.  $Q$ , der Querschnitt in der beliebigen Höhe  $h$ , ist ein Kreis; sein Radius sei  $\rho$ . Man findet ihn aus der Gleichung  $\rho^2 = h(2r - h)$ . Dann ist

$$t = \int_{H_1}^H \frac{h(2r - h) \pi dh}{q \sqrt{2gh}} = \frac{4\pi r}{3q \sqrt{2g}} \left( H^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{2\pi}{5q \sqrt{2g}} \left( H^{\frac{5}{2}} - H_1^{\frac{5}{2}} \right).$$

In der Praxis muß man natürlich die gefundenen Werte noch durch  $\mu$  dividieren.

Ist die Kugel ganz gefüllt, so ist die Zeit bis zur völligen Leerung  $T = \frac{16\pi r^{\frac{5}{2}}}{15q \sqrt{g}}$

(theoretisch). 104.  $dA$  ist auch hier  $p dv$ ;  $A = \int_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0^k}{v^k} dv = \frac{p_0 v_0^k}{1-k} \left( \frac{1}{v_1^{k-1}} \right.$

$\left. - \frac{1}{v_0^{k-1}} \right) = \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} \right]$ . Einheit cmkg. (Bgl. Beispiel 7 auf

S. 18.) Speziell ist  $A = \frac{1,013 \cdot 2400}{0,41} [1 - 1,2^{0,41}] = -460 \text{ cmkg} = -4,6 \text{ mkg}$ .

105. Aus  $p_0 v_0 = R T_0$  und  $p v = R T$  folgt, daß  $T = \frac{p v}{p_0 v_0} T_0 = \frac{p}{p_0} \frac{v}{v_0} \cdot T_0 =$

$= \frac{v^{-k}}{v_0^{-k}} \cdot \frac{v}{v_0} T_0 = \left( \frac{v_0}{v} \right)^{k-1} \cdot T_0$  ist. Für unsere Werte bekommen wir, da

$T_0 = 273^\circ + 40^\circ = 313^\circ$  ist,  $T = 1,2^{0,41} \cdot 313 = 337,3$ . Diese Zahl entspricht

$+64,3^\circ \text{ C}$ . 107. Nach dem Einschalten ist  $i = \frac{J W t}{L} \left( 1 - \frac{W t}{2L} + \frac{W^2 t^2}{6L^2} \dots \right)$ ,

nach dem Ausschalten  $i = J \left( 1 - \frac{W t}{L} + \frac{W^2 t^2}{2L^2} \dots \right)$ . 108. Die beiden Strom-

stärken sind zusammen gleich der ursprünglichen,  $J$ . 109. In beiden Fällen

für  $t = \frac{L l 2}{W} = 0,693 \frac{L}{W} \text{ sec}$ . 110.  $a + b x = t$ ,  $J = \frac{(a + b x)^{n+1}}{b(n+1)} + c$ , wenn

$n$  von  $-1$  verschieden ist.  $\int \frac{dx}{a + b x} = \frac{1}{b} \ln(a + b x) + c$ . 111. Es ist  $\int \frac{dx}{(a + b x)^n} =$

$= -\frac{1}{b(n-1)(a + b x)^{n-1}}$ , wenn  $n$  von  $1$  verschieden ist;  $\int \sqrt{(a + b x)^p} dx =$

$= \frac{q \sqrt{(a + b x)^{p+q}}}{b(p+q)} + c$ . Durch Spezialisierung der Werte  $a$ ,  $b$  und  $n$  ergibt

sich z. B.  $\int \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x} + c$ ;  $\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + c$ ;  $\int \sqrt{1+x} dx =$

$= \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} + c$ ;  $\int \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3} + c$ ;  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x} + c$ ;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + c$ , usw. 112.  $4 + 7x^3 = y$ ;  $21x^2 dx = dy$ , also

$x^2 dx = \frac{1}{21} dy$ ;  $J = \frac{1}{21} \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{42} \cdot \frac{1}{(4 + 7x^3)^2} + c$ . 113.  $f(x) = y$ ;  $f'(x) dx = dy$ ;

$J = \int \frac{dy}{y} = \ln f(x) + c$ . 114.  $f(x) = y$ ;  $J = \int y dy = \frac{1}{2} [f(x)]^2 + c$ . 115.  $J =$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln \cos x + c$ . Spezialfall von 113 für  $f(x) = \cos x$ . 116.  $J =$



$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln \sin x + c; f(x) = \sin x. \quad 117. J = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos x| + c.$$

$$118. J = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c. \quad 119. J = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx; 2x = t;$$

$$J = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c. \quad 120. J = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx; 2x = t; J = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

$$121. x^2 = t; x dx = \frac{1}{2} dt; J = \sqrt{a^2 + x^2} + c. \quad 122. x^2 = t, J = -\sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

$$123. x = at; J = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + c. \quad 124. a^2 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2; \text{ hieraus folgt}$$

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}; dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt. \text{ Da } a^2 = t^2 - 2tx \text{ ist, so ergibt sich } dx = \frac{2t^2 - 2tx}{2t^2} dt =$$

$$= \frac{t-x}{t} dt; J = \int \frac{1}{t-x} \cdot \frac{t-x}{t} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c.$$

Bgl. Formel 14.

$$125. J = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{2bx}{c} - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b^2}{c^2}\right) - \left(x - \frac{b}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \left( \frac{x - \frac{b}{c}}{\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{c^2}}} \right) + c_1. \text{ Bgl. Aufg. 123.}$$

$$126. J = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{c} - \frac{b^2}{c^2}\right) + \left(x + \frac{b}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[ x + \frac{b}{c} + \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{2bx}{c} + x^2} \right] + c_1.$$

Bgl. Aufg. 124. Hierfür kann man auch schreiben:  $J = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[ cx + b + \sqrt{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2} \right] + c_2$ , wenn  $c_2 = c_1 - \frac{\ln c}{\sqrt{c}}$  ist.

$$127. F = \int_0^{2a\pi} y dx. \text{ Es ist}$$

$$y = a(1 - \cos \varphi); \quad x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad \text{also } dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi;$$

$$F = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 3\pi a^2. \text{ Das}$$

Rechteck, welches den Archimedenszweig umschließt, wird durch ihn im Ver-

$$\text{hältnis 3:1 geteilt. } 128. L = \int_0^{2a\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx; \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}; dx = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi; L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[ -\cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

129.  $x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi); y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi); \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$   
 $= \frac{1}{\cos \varphi}; dx = a \varphi \cos \varphi d\varphi; L = \int_0^{\varphi} a \varphi d\varphi = \frac{a \varphi^2}{2}.$  130.  $u' = 1, u = x, v = \ln x.$

$J = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + c.$  131.  $J = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2}) + c.$  132.  $J =$   
 $= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c.$  133.  $u' = u = e^x; v = x^2; J = e^x \cdot x^2 - \int 2x e^x dx.$

Somit ist nach Beispiel 42 das Integral  $J = e^x \cdot x^2 - 2e^x(x-1) + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$

134. Durch partielle Integration wird es auf  $\int x^{n-1} e^x dx$  zurückgeführt usw.

135.  $\xi = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \left[ -x \cos x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}} = 1; \eta = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx} = \frac{\pi}{8}.$

136.  $J_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx.$  Durch zweimalige partielle Integration findet man  $J_y = \left[ -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$  137. Im Zähler von

$\xi$  steht  $\int_0^{\pi} xy dx = \int_0^{\pi} a^3 (1 - \cos \varphi)^2 (\varphi - \sin \varphi) d\varphi.$  Nach Auflösung der

Klammern kommen außer einfacheren Gliedern folgende Teilintegrale vor:

1.  $\int \varphi \cos \varphi d\varphi = \cos \varphi + \varphi \sin \varphi;$  2.  $\int \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \int \varphi \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi =$   
 $= \frac{\varphi^2}{4} + \frac{1}{8} (\cos 2\varphi + 2\varphi \sin 2\varphi);$  3.  $\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi;$

4.  $\int \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi$  (durch die Substitution  $t = \cos \varphi$ ). Die Integrationskonstanten sind nicht aufgeführt, weil sie hier unwesentlich sind.

Man findet  $\xi = a \left( \frac{\pi}{2} + \frac{8}{9\pi} \right) = 1,854a; \eta = \frac{5}{6}a.$  138.  $J = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)};$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{P}{x-a} + \frac{Q}{x+a}; Px + Pa + Qx - Qa = 1; P + Q = 0;$$



$Pa - Qa = 1$ , also  $P = \frac{1}{2a}$ ,  $Q = -\frac{1}{2a}$ ,  $J = \frac{1}{2a} \ln(x-a) - \frac{1}{2a} \ln(x+a) + c =$   
 $= \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c$ . 139.  $J = \frac{1}{3} \int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$ ;  $\frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{P}{x+1} + \frac{Q}{x+2}$ ,

man findet  $P = 2$ ,  $Q = -1$ ,  $J = \frac{1}{3}[2 \ln(x+1) - \ln(x+2)] + c$ . 140.  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  
 $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $J = \frac{1}{6} \int \left[ \frac{15}{x-\frac{1}{2}} + \frac{8}{x-\frac{1}{3}} \right] dx = \frac{5}{2} \ln(x-\frac{1}{2}) + \frac{4}{3} \ln(x-\frac{1}{3}) + c$ . 141.  $J = \frac{5}{7} \ln x +$

$+\frac{23}{7} \ln(x-7)$ . 142.  $J = \frac{5}{x+5} + \ln(x+5) + c$ . 143.  $J = \int \left[ \frac{n+m\alpha}{(x-\alpha)^2} + \frac{m}{x-\alpha} \right] dx = -\frac{n+m\alpha}{x-\alpha} + m \ln(x-\alpha) + c$ . 144.  $J = \frac{1}{q} \arctg\left(\frac{x-p}{q}\right) + c$ .

145.  $J = x^5 e^x - 5 \int x^4 e^x dx$  u. ff.; Endergebnis:  $J = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + c$ . 146.  $J = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$  (vgl. Aufg. 119).

147.  $J = -\frac{1}{3} \sin^3 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + c$ . 148.  $J = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x -$   
 $-\frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + c$ . 149.  $J = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x + c$ . 150.  $J = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x +$

$+\frac{2}{3} \sin x + c$ . 151.  $\frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + c$ . 152.  $J = -\frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} -$   
 $-\frac{2}{3} \operatorname{ctg} x + c$ . 153.  $J = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + c = \frac{1}{3} \left[ \frac{\sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^3 x} + \right.$

$\left. + 2 \operatorname{tg} x \right] + c = \frac{1}{3} \left[ \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} x \right] + c = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + c$ . Diese Formel wird bei der Berechnung parabolischer Kometenbahnen gebraucht.

154. Ist  $n$  gerade, so wird  $J = \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$ ; ist  $n$  ungerade, so wird  $J = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{n \cdot (n-2)\dots 5 \cdot 3}$ . 155. Man erhält dieselben Werte.

157.  $AR = y = r \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ ;  $AQ = r \operatorname{tg} \varphi$ . Entwickelt man beide Ausdrücke nach der Mac Laurinschen Formel (D. S. 62), so ergibt sich unter Vernachlässigung der Glieder von  $\varphi^5$  an:  $AR = r\left(\varphi + \frac{1}{6} \varphi^3\right)$ ;  $AQ = r\left(\varphi + \frac{1}{3} \varphi^3\right)$ .

158.  $J = \ln x + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + c$  (Integrallogarithmus). 159.  $J = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \mp \dots + c$  (Integralcosinus). 160.  $J = \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} \mp \dots + c$

(Integralcosinus). 161.  $J = c + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3 \cdot 2!} f'''(0) + \frac{x^4}{4 \cdot 3!} f^{(4)}(0) + \dots$

162.  $J = c + x f(a) + \frac{x^2}{2} f'(a) + \frac{x^3}{3 \cdot 2!} f''(a) + \frac{x^4}{4 \cdot 3!} f'''(a) + \dots$  163.  $J = \left[ c + x + \frac{x^3}{6} (1-k^2) + \frac{x^5}{40} (3-2k^2-k^4) \right]_0^{\frac{1}{2}} = 0,2526_6$ . 164. Nach Formel 53 sind

die Näherungswerte 0,9481; 0,9871; 0,9943; 0,9986; Formel 54 liefert 1,1107; 1,0262; 1,0115; 1,0029. Da die Kurve stets konvex ist, so ist die Summe der Sehnentrapeze stets zu klein, die der Tangententrapeze stets zu groß. Interessant ist eine graphische Darstellung der Annäherung wie in Aufg. 51. Beim Mittelnehmen vereinige man Näherungswerte, die der gleichen Anzahl von Teilintervallen entsprechen. 165. Nach Formel 53 sind die Näherungswerte 11,8295; 10,4832; 10,2258; 10,0700; nach Formel 54 sind sie 7,0572; 9,1370; 9,6123; 9,9143. Der genaue Wert ist 10,0179. Die Kurve ist stets konkav, daher Annäherung einmal von oben, dann von

unten. 166. Beispiel:  $\ln 7 = \int_1^7 \frac{dx}{x}$ . Man erhält nach Formel 53 den Wert 1,9743,

nach 54 ergibt sich 1,8968. Die genaue Zahl ist 1,9459. 167.  $F_6 =$

$= \frac{b-a}{10} [y_a + y_b + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)]$ . Die neue Ordinate zwischen  $y_a$  und  $y_1$

sei  $y_{0,5}$ ; zwischen  $y_1$  und  $y_2$  liege  $y_{1,5}$  usw.  $n$  ist jetzt = 10;  $F_{10} =$

$= \frac{b-a}{20} [y_a + y_b + 2(y_{0,5} + y_1 + y_{1,5} + y_2 + y_{2,5} + y_3 + y_{3,5} + y_4 + y_{4,5})] =$

$= \frac{b-a}{20} [y_a + y_b + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 2(y_{0,5} + y_{1,5} + y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5})] = \frac{1}{2} F_5 +$

$+ \frac{b-a}{10} (y_{0,5} + y_{1,5} + y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5})$ . Allgemein ist  $F_{2n} = \frac{1}{2} F_n + \frac{b-a}{2n} \sum \eta$ ,

wenn unter den Größen  $\eta$  die neu eingeschalteten Ordinaten verstanden werden.

168.  $F = 0,38876$ . Der Fehler ist  $0,00394 \approx 1\%$ . 169.  $L = 1,2111$ .

170. 1,00228; 1,00013; für  $n = 6$  und  $n = 12$  ist die Abweichung von 1

mit fünfstelligen Tafeln nicht mehr zu ermitteln, ein Beweis für die vor-

zügliche Genauigkeit der Simpsonschen Regel. 171. 10,2387; 10,0344<sub>5</sub>;

10,0213; 10,0181. Große Genauigkeit. 172. 1,9485. 173.  $\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

also  $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . Fährt man 10 Teilintervalle ein, so ergibt

sich  $\pi = 3,141600$  (genauer Wert 3,141592...). Anderes Verfahren:

$$\pi = 4 \arcsin \frac{1}{2} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$174. J_x = \int_0^{x_n} \frac{1}{3} y^3 dx \approx \frac{x_n}{9n} [y_0^3 + y_n^3 + 4(y_1^3 + y_2^3 + \dots + y_{n-1}^3) + 2(y_2^3 + y_4^3 + \dots + y_{n-2}^3)]$$



$$J_y = \int_0^{x_n} x^2 y dx \approx \frac{x_n^3}{3n^3} \left[ n^2 y_n + 4(1^2 y_1 + 3^2 y_3 + \dots + (n-1)^2 y_{n-1}) + 2(2^2 y_2 + 4^2 y_4 + \dots + (n-2)^2 y_{n-2}) \right].$$

175.  $J=2$ . 176.  $J=2,381$ . 177. 2,828. 178.  $[\ln x]_0^1 = \infty$ ; in der Näherungs-

formel 56 divergieren die Reihen. 179.  $F = \int_0^1 ax^n dx = \left[ \frac{ax^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$ , wenn  $n$

nicht gleich  $-1$  ist. (Vgl. Formel 1 und 2 auf S. 8.) Für die obere Grenze er-

halten wir dann stets den endlichen Wert  $\frac{a}{n+1}$ . Ist  $n$  größer als  $-1$ ,

so ist  $x^{n+1}$  für  $x=0$  ebenfalls gleich 0, die Fläche endlich. Ist  $n$  kleiner

als  $-1$ , so wird  $x^{n+1}$  unendlich, die Fläche auch. Für  $n = -1$  gibt Aufg. 178

die Antwort. 180. Das Intervall von  $a$  bis  $b$  wird wieder in drei Teile

zerlegt, die Reihenfolge der Ordinaten sei  $y_a, m_1, y_1$ . Jetzt wird der Raum

zwischen  $y_1$  und  $y_b$  gedrittelt ( $y_1, m_2, y_2$ ) usw. Man erhält dieselbe Formel,

nur muß  $y_b$  durch  $y_a$  ersetzt werden. 181.  $J=1,4142$ . 182.  $J=1,5708$ .

183.  $J = \infty$ . 184. In  $J = \int_a^b y dx$  werde der Integrand für  $x = a$  unendlich

groß. Man ziehe die Ordinate  $y_1$ , welche das Intervall  $a \dots b$  in  $x_1$  halbiert,

dann die Ordinate, welche in  $x_2$  das Intervall  $a \dots x_1$  halbiert usw. Die Anwen-

dung der Sehnen-Trapezregel liefert die Formel  $\int_a^b y dx \approx \frac{b-a}{4} \left[ y_b + 3 \left( \frac{1}{2} y_1 + \right. \right.$

$\left. \left. + \frac{1}{4} y_2 + \frac{1}{8} y_3 + \dots \right) \right]$ . 185. Man teilt das Intervall so wie in Fig. 39

und bekommt  $\int_a^b y dx \approx 2(b-a) \left( \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{9} + \frac{m_3}{27} + \dots \right)$ . 186. Zur näherungs-

weisen Berechnung setze man etwa  $\int_1^\infty = \int_1^8 + \int_8^\infty$ . Macht man im ersten Integral

$n=8$ , so liefert die Simpsonsche Regel den Näherungswert 0,4455 (genauer

Betrag 0,4444). Im zweiten Integral sei  $h = \frac{1}{2}$ , Näherungswert 0,0561

(genau 0,0556).  $J \approx 0,5016$ ,  $J = \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^\infty = 0,5$ . 187.  $J = \infty$

188.  $J = 0,21344$ . 189.  $J = 1,64493$ . (Für kleine Werte von  $x$  ist  $\frac{x}{e^x - 1}$

$\approx \frac{x}{x + \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$ . Für  $x = 0$  wird also der Integrand gleich 1.)

190.  $J = 1,0262$ . 191.  $J = 3,1416$ . 192.  $F = \left[ \frac{ax^{n+1}}{n+1} \right]_1^\infty$ ;  $n$  muß unter  $-1$  liegen. Die Näherungsformeln lehren dasselbe. 193. Für  $a = 0, b = 2,$

$n = 8$  erhält man  $\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,88207$ ; mit  $h = 0,5$  wird  $\int_2^\infty e^{-x^2} dx \approx 0,00449,$

$J \approx 0,88656$  (genauer Wert  $0,88623$ ). 194. Setzt man  $kx = y$ , so wird

$J = \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-y^2} dy$ , das Integral ist somit auf das der vorigen Aufgabe zurück-

geführt. Es spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der kinetischen Theorie der Gase und anderen Gebieten eine große Rolle. 195.  $\int_b^\infty y dx$  wird er-

mittelt, indem man von  $b$  aus die beliebige Strecke  $h$  abträgt, von deren Endpunkt  $2h$ , dann  $4h$  usw. Die entsprechenden Ordinaten seien  $y_b, y_1,$

$y_2, y_3 \dots$ . Die Anwendung der Sehnen-Trapezregel liefert  $\int_b^\infty y dx \approx$

$\frac{h}{2} [y_b + 3(y_1 + 2y_2 + 4y_3 \dots)]$ . 196. Man teilt das Intervall wie in Fig. 40.

$\int_b^\infty y dx \approx 2h(m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4 + \dots)$ . 197.  $e^{x^2} \approx 1 + x^2$ ;  $\int e^{x^2} dx \approx$

$x + \frac{1}{3}x^3$  und nicht  $1 + x^2$ . Die Formel ist falsch, entstanden durch Ver-

wechselung mit  $\int e^x dx = e^x$ . 198.  $\frac{1}{1+x^3} \approx 1 - x^3$ .  $J \approx x - \frac{1}{2}x^4$ , während

$\int (1+x^3) \approx x^3$  ist. Falsch;  $\int \frac{3x^2 dx}{1+x^3} = \ln(1+x^3)$ . 199. Die spezielle Zu-

sammenstellung  $\alpha = 1, \beta = 0, a = 0, b = 0$  eignet sich nicht, dagegen  $\alpha = 2,$

$\beta = 1, a = 1, b = 0$ , oder  $\alpha = \beta = 1, a = 1, b = 1$ ; oder  $\alpha = 0, \beta = 1,$

$a = b = 0$ ; oder  $\alpha = 1, \beta = 0, a = 2, b = 3$  usw. Die Formel wird stets als richtig befunden. Beweis durch Partialbruchzerlegung. 200.  $x$  ist hier

stets ein echter Bruch;  $J$  ist kleiner als  $\int_0^1 \frac{1 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[ \arcsin x \right]_0^1 = 1,57 \dots$

und größer als  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Der angegebene Wert ist falsch, der wahre ist 1.



## Die angegebenen Preise

sind Grundpreise, auf die ein den jeweiligen Herstellungs- und allgemeinen Unkosten entsprechender Zuschlag (August 1922: 1500%, Schulbücher mit \* bezeichnet 900%) berechnet wird. Nur durch diese im geschäftlichen Verkehr sonst auch allgemein übliche Berechnung ist es möglich, den durch die fortschreitende Teuerung bedingten Preisänderungen zu folgen.

Von Studienrat Dr. *M. Lindow* erschien ferner:

**Differentialrechnung.** Unter Berücksichtigung der praktischen Anwend. in der Technik mit zahlr. Beisp. u. Aufgab. versehen. 4. Aufl. Mit 50 Fig. i. Text u. 161 Aufg. [VI u. 97 S.] 8. 1922. (ANuG 387.) Kart. M. 2.35, geb. M. 3.—

„... Der Verfasser hat es verstanden, in kurz gedrängtem Raume uns ein überaus klares Bild von dem Wesen der Differential- und Integralrechnung zu geben, und bringt vor allem auch eine große Menge Beispiele aus den verschiedensten Gebieten der Technik, wodurch das Buch besonders für den Praktiker wertvoll wird.“ (Techn. Mitteil. u. Nachr.)

**Differentialgleichungen.** Unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlr. Beisp. u. Aufg. vers. Mit 38 Fig. im Text u. 160 Aufg. [106 S.] 9. 1921. (ANuG Bd. 589.) Kart. M. 2.35, geb. M. 3.—

Als Ergänzung zu den beiden bereits in 3. und 4. Auflage erschienenen Bänden Differential- und Integralrechnung des gleichen Verfassers will der vorliegende gleichfalls an der Hand von praktischen Beispielen und Aufgaben in die Rechnungsart einführen, die der mathematischen Untersuchung der Bewegungsvorgänge dient.

**Einführung in die Infinitesimalrechnung.** Von Prof. Dr. *A. Witting*, Oberstudienrat am Gymnas. zum Heil. Kreuz in Dresden. Bd. I: Die Differentialrechnung. 2. Aufl. Mit 1 Porträttaf., vielen Beisp. u. Aufgab. u. 33 Fig. i. T. [IV u. 52 S.] 8. 1920. Bd. II: Die Integralrechnung. 2. Aufl. Mit 1 Porträttaf., 35 Beisp. u. Aufgaben u. mit 9 Fig. im Text. [50 S.] 8. 1921. (Math. Phys. Bibl. 9 u. 41.) Kart. je M. 18.—

„Eine methodisch ganz vorzügliche, ausführliche und klare Einführung, die in ihrer Eigenart den erfahrenen Schulmann verrät.“ (Natur und Unterricht)

**Differential- und Integralrechnung.** Von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. an der Univ. Berlin. I. Differentialrechnung. 2., verm. u. verb. Aufl. Mit 34 Fig. [VI u. 132 S.] 8. Kart. M. 4.50 II. Integralrechnung. Mit 25 Fig. [VI u. 142 S.] (Teubners technische Leitfäden, 4 u. 5.) Kart. M. 5.—

Der Gegenstand der einführenden Universitätsvorlesung über Differential- und Integralrechnung wird hier in knapper, aber leichtfaßlicher Form dargestellt. Die geometrischen Anwendungen sind überall in gehöriger Weise berücksichtigt.

**Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen.** Von Geh. Hofrat Dr. *R. Fricke*, Prof. an der Techn. Hochsch. Braunschweig. gr. 8. I. Bd.: Differentialrechnung. 2. u. 3. Aufl. Mit 129 in d. Text gedr. Fig., 1 Samml. v. 253 Aufg. u. 1 Formeltab. [XII u. 388 S.] 1921. II. Bd.: Integralrechnung. 2. u. 3. Aufl. Mit 100 in d. Text gedr. Fig., 1 Samml. von 242 Aufgaben u. 1 Formeltabelle. [IV u. 406 S.] 1921. Geh. je M. 20.—, geb. je M. 24.—

Das Problem des Unterrichts in den Grundlagen der höheren Mathematik an den Technischen Hochschulen ist seit mehr als zwei Jahrzehnten nicht nur wiederholt besprochen und in Monographien behandelt, sondern hat auch die Gestaltung der neueren Lehrbuchliteratur wesentlich beeinflußt. Auch das vorliegende Lehrbuch ist aus dieser Bewegung hervorgewachsen.

**Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Ursprünglich Übersetzung des Lehrbuches von *J. A. Serret*, seit der 3. Aufl. gänzlich neu bearbeitet von Geh. Reg.-Rat Dr. *G. Scheffers*, Prof. an der Techn. Hochschule Berlin. gr. 8. I. Band: Differentialrechnung. 6. u. 7. Aufl. Mit 70 Fig. [XVI u. 670 S.] 1915. Geh. M. 12.60, geb. M. 15.— II. Band: Integralrechnung. 6. u. 7. Aufl. Mit 108 Fig. [XII u. 612 S.] 1921. Geh. M. 13.40, geb. M. 16.— III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnungen. 4. u. 5. Aufl. Mit 64 Fig. [XIV u. 735 S.] 1914. Geh. M. 13.40, geb. M. 16.—

„Die rasche Aufeinanderfolge der Auflagen spricht zur Genüge für die Güte des Buches, das auch wegen der Reichhaltigkeit des Stoffes und der leicht faßlichen Darstellung Lehrenden und Lernenden aufs wärmste empfohlen werden kann.“ (Archiv der Mathematik u. Physik.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

## Die angegebenen Preise

sind Grundpreise, auf die ein den jeweiligen Herstellungs- und allgemeinen Unkosten entsprechender Zuschlag (August 1922: 1500%, Schulbücher mit \* bezeichnet 900%) berechnet wird. Nur durch diese im geschäftlichen Verkehr sonst auch allgemein übliche Berechnung ist es möglich, den durch die fortschreitende Teuerung bedingten Preisänderungen zu folgen.

# Teubners Technische Leitfäden

Die Leitfäden wollen zunächst dem Studierenden, dann aber auch dem Praktiker in knapper, wissenschaftlich einwandfreier und zugleich übersichtlicher Form das Wesentliche des Tatsachenmaterials an die Hand geben, das die Grundlage seiner theoretischen Ausbildung und praktischen Tätigkeit bildet. Sie wollen ihm diese erleichtern und ihm die Anschaffung umfangreicher und kostspieliger Handbücher ersparen. Auf klare Gliederung des Stoffes auch in der äußeren Form der Anordnung wie auf seine Veranschaulichung durch einwandfrei ausgeführte Zeichnungen wird besonderer Wert gelegt. — Die einzelnen Bände, für die vom Verlag die ersten Vertreter der verschiedenen Fachgebiete gewonnen werden konnten, erscheinen in rascher Folge. Bisher sind erschienen bzw. unter der Presse:

**Analytische Geometrie.** Von Geh. Hofrat Dr. R. Fricke, Professor an der Techn. Hochschule zu Braunschw. 2. Aufl. M. 96 Fig. VI u. 125 S. (Bd. 1.) M. 4.50.

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. M. Großmann, Prof. an der Eidgen. Techn. Hochschule zu Zürich. Bd. 1. Mit 134 Fig. u. 100 Übungsangaben. 1922. (Bd. 2.) M. 3.50

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. M. Großmann, Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochsch. z. Zürich. Bd. II. 2., umg. Aufl. Mit 144 Fig. [VI u. 154 S.] 1921. (Bd. 3.) Kart. M. 5.-

**Differential- und Integralrechnung.** Von Dr. L. Bieberbach, Prof. a. d. Universität Berlin. I. Differentialrechnung. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 34 Fig. [VI u. 132 S.] 1922. (Bd. 4.) Kart. M. 4.50. II. Integralrechnung. Mit 25 Fig. [VI u. 142 S.] 1918. (Bd. 5.) Kart. M. 5.-

**Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und ihrer Anwendung auf Physik, Maschinenbau, Elektrotechnik u. Geodäsie.** Von Ingenieur K. Happach, Charlottenburg. (Bd. 18).

**Funktionentheorie.** Von Dr. L. Bieberbach, Prof. an der Universität Berlin. Mit 80 Fig. [IV u. 118 S.] 1922. (Bd. 14.) Kart. M. 4.50

**Einführung in die Vektoranalysis.** Mit Anwendungen auf die mathemat. Physik. Von Prof. Dr. R. Gans, Dir. des physikalischen Instituts der Univers. La Plata. 4. Aufl. M. 39 Fig. [VI u. 118 S.] gr. 8. 1921. (Bd. 16.) Geh. M. 5.50, geb. M. 7.50

**Praktische Astronomie.** Geograph. Orts- u. Zeitbest. Von V. Theimer, Adjunkt a. d. Montan. Hochsch. zu Leoben. Mit 62 Fig. [IV u. 127 S.] 1921. (Bd. 13.) Kart. M. 4.50

**Feldbuch für geodätische Praktika.** Nebst Zusammenstellung d. wichtigsten Meth. u. Regeln sowie ausgef. Musterbeispielen. V. Dr.-Ing. O. Israel, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Dresden. Mit 46 Fig. [IV u. 160 S.] 1920. (Bd. 11.) M. 5.50

**Grundzüge der Festigkeitslehre.** Von Geh. Hofrat Dr. phil. Dr. Ing. A. Föppl, Professor a. d. Techn. Hochschule in München. (Bd. 17.) [Unter der Presse 1922.]

**Erdbau, Stollen- und Tunnelbau.** Von Dipl.-Ing. A. Birk, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Prag. Mit 110 Abb. [V u. 117 S.] 1920. (Bd. 7.) Kart. M. 4.50

**Landstraßenbau einschl. Trassieren.** V. Oberbaurat W. Euting, Stuttgart. Mit 54 Abb. I. Text u. a. 2 Taf. [IV u. 100 S.] 1920. (Bd. 9.) Kart. M. 4.-

**Grundriß der Hydraulik.** Von Hofrat Dr. Ph. Forchheimer, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 114 Fig. im Text. [V u. 118 S.] 1920. (Bd. 8.) M. 4.-

**Hochbau in Stein.** Von Geh. Baurat H. Walbe, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Darmstadt. Mit 302 Fig. im Text. [VI u. 110 S.] 1920. (Bd. 10.) Kart. M. 4.50

**Leitfaden der Baustoffkunde.** Von Geheimrat Dr.-Ing. M. Foerster, Prof. an d. Techn. Hochsch. i. Dresden. M. 57 Abb. i. T. [V u. 220 S.] 1922. (Bd. 15.) M. 7.40

**Veranschlagen, Bauleitung, Baupolizei, Heimatschutzgesetze.** Von Stadtbaur. Fr. Schultz, Bielefeld. Mit 3 Taf. [IV u. 150 S.] 1921. (Bd. 12.) Kart. M. 5.-

**Mechanische Technologie.** Von Dr. R. Escher, weil. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule zu Zürich. Mit 418 Abb. im Text. 2. Aufl. [VI u. 164 S.] 1921. (Bd. 6.) Kart. M. 5.50

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin



sind Grundpreise, auf die ein den jeweiligen Herstellungs- (Einband-) und allgemeinen Unkosten entsprechender Zuschlag (August 1922: 1100 %, Schulbücher mit \* bezeichnet 700 %) berechnet wird. Nur durch diese im geschäftlichen Verkehr sonst auch allgemein übliche Berechnung ist es möglich, den durch die fortschreitende Teuerung bedingten Preisänderungen zu folgen.

# Teubners kleine Fachwörterbücher

geben rasch und zuverlässig Auskunft auf jedem Spezialgebiete und lassen sich je nach den Interessen und den Mitteln des einzelnen nach und nach zu einer Enzyklopädie aller Wissenszweige erweitern.

„Mit diesen kleinen Fachwörterbüchern hat der Verlag Teubner wieder einen sehr glücklichen Griff getan. Sie ersetzen tatsächlich für ihre Sondergebiete ein Konversationslexikon und werden gewiss großen Anlang finden.“ (Die Warte.)

„Wer ist jetzt in der Lage, teure Nachschlagebücher zu kaufen? Wie viele aus den Reihen der Volkshochschulbesucher verlangen nach Handreichungen, die das Studium der Natur- und Geisteswissenschaften ermöglichen. Die Erklärungen sind sachlich zutreffend und so kurz als möglich gegeben, das Sprachliche ist gründlich erfaßt, das Wesentliche berücksichtigt. Die Bücher sind eine glückliche Ergänzung der Bändchen „Aus Natur und Geisteswelt“ des gleichen Verlags. Selbstverständlich ist dem neuesten Stande der Wissenschaft Rechnung getragen.“ (Pädagog. Arbeitsgemeinschaft.)

„Diese handlichen Nachschlagebücher bieten nach Form und Inhalt Vorzügliches und werden sich, wie zu erwarten steht, in unseren Volksbüchereien schnell einbürgern.“ (Blätter für Volksbibliotheken.)

Bisher erschienen:

- Philosophisches Wörterbuch. 3. Aufl. V. Studentrat Dr. P. Thormeyer. (Bd. 4.) [U. d. Pr. 22.]
- Psychologisches Wörterbuch von Privatdozent Dr. Fritz Diefel. Mit 60 Fig. (Bd. 7.) M. 5.40
- Wörterbuch zur deutschen Literatur von Studentrat Dr. H. Köhl. (Bd. 14.) M. 6.—
- \*Musikalisches Wörterbuch von Privatdoz. Dr. J. H. Moser. (Bd. 12.)
- \*Wörterbuch zur Kunstgeschichte von Dr. H. Vollmer.
- Physikalisches Wörterbuch von Prof. Dr. G. Berndt. Mit 81 Fig. (Bd. 5.) M. 6.—
- \*Chemisches Wörterbuch von Privatdozent Dr. H. Remb. (Bd. 10.)
- \*Astronomisches Wörterbuch v. Observator Dr. H. Naumann. (Bd. 11.)
- Geologisch-mineralogisches Wörterbuch von Dr. E. W. Schmidt. Mit 211 Abb. (Bd. 6.) M. 6.—
- Geographisches Wörterbuch von Prof. Dr. O. Kende. I. Allgem. Erdkunde. Mit 81 Abb. (Bd. 8.) M. 6.— \*II. Wörterbuch der Länder- und Wirtschaftskunde. (Bd. 13.)
- Zoologisches Wörterbuch von Dir. Dr. Th. Knottnerus-Meyer. (Bd. 2.) M. 5.40
- Botanisches Wörterbuch von Dr. O. Gerke. Mit 103 Abb. (Bd. 1.) M. 5.40
- Wörterbuch der Warenkunde von Prof. Dr. M. Pietsch. (Bd. 3.) M. 6.—
- Handelswörterbuch von Handelschuldir. Dr. V. Sittel u. Justizrat Dr. M. Strauß. Zugleich fünfssprachiges Wörterbuch, zusammengestellt von V. Armhaus, verpfl. Dolmetscher. (Bd. 9.) M. 6.—

\* in Vorbereitung bzw. unter der Presse (1922)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfelle farbige Originalwerke erster deutscher Künstler fürs deutsche Haus  
Die Sammlung enthält jetzt über 200 Bilder in d. Größen 100×70 cm (M. 300.-), 75×55 cm (M. 225.-), 109×41 cm (M. 150.-), 60×50 cm (M. 200.-), 55×42 cm (M. 120.-), 41×30 cm (M. 75.-). Geschmackvolle Rahmung aus eigener Werkstatt.

## Neu: Kleine Kunstblätter

18×24 cm je M. 30.-. Elebertmann, Im Park. Brenzel, Am Wehr. Heder, Unter der alten Kastanie und Weihnachtsabend. Treuter, Bei Mondenschein. Weber, Apfelflüte.

## Schattenbilder

**R. W. Diefenbach** „Per aspera ad astra“. Album, die 34 Teils. des vollst. Wandstieles fortlaufend wiederh. (20 $\frac{1}{2}$ ×25 cm) M. 150.-. Teilsbilder als Wandstieles (42×80 cm) je M. 60.-, (35×18 cm) je M. 20.-, auch gerahmt in versch. Ausführ. erhältlich.  
„Göttliche Jugend“. 2 Mappen, mit je 20 Blatt (25 $\frac{1}{2}$ ×34 cm) je M. 150.-. Einzelbilder je M. 10.-, auch gerahmt in versch. Ausführ. erhältlich.

**Kindermusik**. 12 Blätter (25 $\frac{1}{2}$ ×34 cm) in Mappe M. 100.-, Einzelblatt M. 10.-.

**Gerda Luise Schmidt** (20×15 cm) je M. 9.-. Auch gerahmt in verschiedener Ausführung erhältlich. Blumenoratel. Reifenspiel. Der Besuch. Der Liebesbrief. Ein Frühlingsstrauch. Die Freunde. Der Brief an „Ihn“. Annäherungsversuch. Am Spinett. Beim Wein. Ein Märchen. Der Geburtstag.

## Teubners Künstlerpostkarten

(Ausf. Verzeichnis v. Verlag in Leipzig.) Jede Karte M. 3.-. Reihe von 12 Karten in Umschlag M. 30.-, jede Karte unter Glas mit schwarzer Einfassung u. Schnur edig oder oval.

Die mit \* bezeichneten Reihen auch in feinen ovalen Holzrahmchen oder in Kettenrahmchen edig oder oval. Teubners Künstlersteinzeichnungen in 12 Reihen. Teubners Künstlerpostkarten nach Gemälden neuerer Meister. 1. Maccio, Matemeit. 2. Köstlich, Sonnenbild. 3. Butterjack, Sommer im Moor. 4. Hartmann, Sommerweide. 5. Kühn jr., Im weißen Zimmer. In Umschlag M. 15.- \*Diefenbachs Schattenbilder in 7 Reihen. Aus dem Kinderleben, 6 Karten nach Bleisilberdr. von Hela Peters. 1. Der gute Bruder. 2. Der böse Bruder. 3. Wo drückt der Schuh? 4. Schmeicheltätchen. 5. Püppchen, aufgepößt! 6. Große Wäsche. In Umschlag M. 15.-. \*Schattenspielfarten von Gerda Luise Schmidt: 1. Reihe: Spiel und Tanz, Fest im Garten, Blumenoratel, Die kleine Schäferin, Berauschter Dichter, Kattenjäger von Hameln. 2. Reihe: Die Freunde, Der Besuch, Im Grünen, Reifenspiel, Ein Frühlingsstrauch, Der Liebesbrief. 3. Reihe: Der Brief an „Ihn“, Annäherungsversuch, Am Spinett, Beim Wein, Ein Märchen, Der Geburtstag. Jede Reihe in Umschlag M. 15.-

## Rudolf Schäfers Bilder nach der Heiligen Schrift

Der barmherzige Samariter (M. 225.-), Jesus der Kinderfreund (M. 200.-), Das Abendmahl (M. 225.-), Hochzeit zu Kana (M. 200.-), Weihnachten (M. 225.-), Die Bergpredigt (M. 200.-), (75×55 bzw. 60×50 cm).

Diese 6 Blätter in Format **Biblische Bilder** in Mappe M. 100.-, als 23×30 unter dem Titel Einzelblatt je M. 20.- (Auch als „Kirchliche Gedendblätter“ und als „Glückwunsch- u. Einladungskarten“ erhältlich.)

## Karl Bauers Federzeichnungen

Führer und Helden im Weltkrieg. Einzelne Blätter (28×36 cm) M. 6.-  
2 Mappen, enthaltend je 12 Blätter, je M. 18.-  
Charakterköpfe zur deutschen Geschichte. Mappe, 32 Bl. (28×36 cm) M. 90.-,  
12 Bl. M. 35.-, Einzelblätter M. 6.-  
Aus Deutschlands großer Zeit 1913. In Mappe, 16 Bl. (28×36 cm) M. 35.-,  
Einzelblätter M. 6.-

Katalog üb. künstl. Wandschmuck gegen Einsend. von (J. St. August 1922) M. 16.- oder gegen Nachn. (M. 18.-) v. Verlag in Leipzig, Poststr. 3, erhältlich

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin



sind Grundpreise, auf die ein den jeweiligen Herstellungs- (Einband-) und allgemeinen Unkosten entsprechender Zuschlag (August 1922: 1100%, Schulbücher mit \* bezeichnet 700%) berechnet wird. Nur durch diese im geschäftlichen Verkehr sonst auch allgemein übliche Berechnung ist es möglich, den durch die fortschreitende Teuerung bedingten Preisänderungen zu folgen.

## Teubners

# Naturwissenschaftliche Bibliothek

Serie A. Für reifere Schüler, Studierende und Naturfreunde

Alle Bände sind reich illustriert und geschmackvoll gebunden

- Große Physiker.** Von Joh. Keferstein. Mit 12 Bildnissen . . . . . M. 4.50
- Physikalisches Experimentierbuch.** Von G. Rebenstorff. In 2 Teilen. I. Teil. 2. Aufl. Mit 99 Abbildungen M. 6.— II. Teil. Mit 87 Abbildungen . M. 4.50
- Chemisches Experimentierbuch.** Von K. Scheid. In 2 Teilen. I. Teil. 4. Aufl. Mit 77 Abbildungen. M. 4.50. II. Teil. 2. Aufl. Mit 51 Abbildungen . M. 5.—
- An der Werkbank.** Von E. Gscheidlen. Mit 110 Abbildungen u. 44 Tafeln. M. 7.50
- Hervorragende Leistungen der Technik.** Von K. Schreber. Mit 56 Abb. M. 4.—
- Vom Einbaum zum Linienschiff.** Streifzüge auf dem Gebiete der Schifffahrt und des Seewesens. Von K. Radunz. Mit 90 Abbildungen . . . . . M. 3.—
- Die Luftschiffahrt.** Von K. Nimführ. Mit 99 Abbildungen . . . . . M. 3.—
- Aus dem Luftmeer.** Von M. Sassenfeld. Mit 40 Abbildungen . . . . . M. 3.—
- Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge.** Von J. Kusch. 2. Aufl. Mit 30 Figuren und 1 Sternkarte . . . . . M. 6.—
- An der See.** Geogr.-geologische Betrachtungen. Von P. Dahms. Mit 61 Abb. M. 2.—
- Küstenwanderungen.** Biologische Ausflüge. Von V. Franz. Mit 92 Fig. M. 2.50
- Geologisches Wanderbuch.** Von K. G. Volk. 2 Teile. I. 2. Aufl. Mit 201 Abb. u. 1 Orientierungstafel. M. 8.— II. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. [I. d. Pr. 22.]
- Große Geographen.** Bilder aus der Geschichte der Erdkunde. Von F. Lampe. Mit 6 Porträts, 4 Abb. u. Kartenstiche. M. 5.50
- Geographisches Wanderbuch.** Von A. Berg. 2. Aufl. Mit 212 Abb. M. 5.50
- Anleitung zu photographischen Naturaufnahmen.** Von G. E. J. Schulz. Mit 41 photographischen Aufnahmen. M. 6.50
- Vegetationsbilder.** Von P. Gräbner. Mit 40 Abbildungen . . . M. 2.—
- Unsere Frühlingspflanzen.** Von Fr. Höd. Mit 76 Abbildungen . . M. 3.—
- Große Biologen.** Bilder aus der Geschichte der Biologie. Von W. Mah. Mit 21 Bildnissen . . . . . M. 4.—
- Biologisches Experimentierbuch.** Anleitung zum selbständigen Studium der Lebenserscheinungen für jugendliche Naturfreunde. Von C. Schäffer. Mit 100 Abbildungen . . . . . M. 5.—
- Insektenbiologie.** Von Chr. Schröder. [I. d. Presse 1922.]
- Erlebte Naturgeschichte.** Von C. Schmitt. 2. Aufl. Mit 95 Abb. i. Text. Kart. M. 5.—

Serie B. Für jüngere Schüler und Naturfreunde.

- Physikalische Plaudereien f. die Jugend.** Von E. Wunder. Mit 15 Abbildungen. Kart. . . . . M. 2.—
- Chemische Plaudereien für die Jugend.** Von E. Wunder. Mit 5 Abbildungen. Kart. . . . . M. 2.—
- Mein Handwerkszeug.** Von D. Fies. Mit 12 Abbildungen . . . Kart. M. 1.60
- Vom Tierleben in den Tropen.** Von K. Guenther. Mit 7 Abb. Kart. M. 1.60
- Versuche mit lebenden Pflanzen.** Von M. Dettli. Mit 7 Abb. Kart. M. 1.60

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301501



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295963