# LEHRBUCH

DER

# ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

DUHAMEL,
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN PARIS.

---

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN

VON

**DR. OSKAR SCHLÖMILCH,**
PROFESSOR DER HÖHEREN MATHEMATIK UND ANALYTISCHEN MECHANIK AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE IN DRESDEN.

ZWEITE GÄNZLICH UMGEARBEITETE AUFLAGE.

**NEUE WOHLFEILE AUSGABE.**

ERSTER BAND.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG.
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1861.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

# Inhalt des ersten Bandes.

## Erstes Buch. Statik fester Körper.

### Cap. I. Allgemeine Begriffe und Grundsätze.



### Cap. II. Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften an einem Punkte.



### Cap. III. Zusammensetzung und Gleichgewicht paralleler Kräfte.



### Cap. IV. Theorie der Kräftepaare.



### Cap. V. Gleichgewichtsbedingungen für ein vollkommen freies starres System.

**Cap. VI. Gleichgewichtsbedingungen für ein nicht völlig freies System.**



**Cap. VII. Bedingungen des Gleichgewichts für astatische Körper.**



**Cap. VIII. Gleichgewicht eines veränderlichen Complexes starrer Körper.**



**Cap. IX. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.**



**Cap. X. Theorie des Schwerpunktes.**



**Cap. XI. Theorie der Ketten- und Kettenbrückenlinien.**



**Cap. XII. Von der Reibung.**

### Cap. XIII. Theorie der Attraction.



## Zweites Buch. Phoronomie.

### Cap. I. Bewegung eines einzelnen Punktes.



### Cap. II. Geometrische Bewegung eines starren Punktesystemes.



### Cap. III. Geschwindigkeit und Deviation bei der zusammengesetzten Bewegung.



## Drittes Buch. Dynamik fester Körper.

### Cap. I. Allgemeine Grundsätze.

Cap. II. **Krummlinige Bewegung eines freien Punktes.**



Cap. III. **Beispiele für die krummlinige Bewegung eines freien Punktes.**



Cap. IV. **Bewegung eines Punktes auf einer festen Curve.**



Cap. V. **Bewegung eines Punktes auf einer festen Oberfläche.**



Cap. VI. **Die Arbeit einer Kraft. Die lebendige Kraft.**



Cap. VII. **Das Princip der kleinsten Wirkung.**



Cap. VIII. **Bestimmung der Kräfte bei der relativen Bewegung eines Punktes.**



Anhang. **Ueber einige Formeln der analytischen Geometrie des Raumes.**

Erstes Buch.

# Statik fester Körper.

## Erstes Capitel.

# Allgemeine Begriffe und Grundsätze.

### Grundbegriffe.

1. Ruhe und Bewegung. Ein Punkt befindet sich im Zustande der Ruhe, wenn er beständig denselben Ort im Raume einnimmt, er ist dagegen in Bewegung, wenn er diesen Ort nach und nach ändert. Da wir die Stellung eines Punktes nur durch Vergleichung desselben mit anderen Punkten bezeichnen können und uns keine Gegenstände gegeben sind, deren Unbeweglichkeit ausser Zweifel wäre, so können wir auch nicht mit voller Sicherheit entscheiden, ob ein beobachteter Punkt in Ruhe oder Bewegung ist; nur so viel ist gewiss, dass, wenn mehrere Punkte ihre gegenseitige Lage geändert haben, einer oder einige davon auch ihren absoluten Ort im Raume geändert haben müssen.

Eine grössere Anzahl von Punkten, die ihre gegenseitige Lage unverändert beibehalten, hält man in der Regel für ruhend, und wenn einer jener Punkte seine Stellung gegen das ganze Punktesystem ändert, so erklärt man diesen für den bewegten, weshalb man z. B. die Erde lange Zeit für unbeweglich im Raume ansah. Eine genauere Untersuchung der Erscheinungen kann diesen ersten Eindruck modificiren niemals aber volle Gewissheit geben, daher sind auch die aus der Beobachtung relativer Bewegungen abstrahirten Principien der absoluten Bewegung nur Inductionen von grosser Wahrscheinlichkeit und bedürfen immer der Prüfung durch den Vergleich zwischen den berechneten und den direct beobachteten Erscheinungen.

2. Kräfte. Das einfachste Princip, wozu man auf diese Weise gelangt, lautet dahin, dass ein in absoluter Ruhe befindlicher Punkt ewig in diesem Zustande bleiben würde, wenn nicht äussere Ursachen ihn in Bewegung setzen; diese äusseren Ursachen heissen Kräfte; die Richtung einer Kraft fällt zu-

sammen mit der Richtung derjenigen Geraden, in welcher sich ein vollkommen freier Punkt zufolge jener Einwirkung bewegen würde. [Allgemeiner aufgefasst wird das obige Princip zum Gesetz der Trägheit, vermöge dessen ein Körper seinen Zustand, mag dieser nun Ruhe oder Bewegung heissen, selbstthätig nicht ändern kann, woraus weiter folgt, dass jede derartige Veränderung durch eine äussere Ursache hervorgerufen werden muss. Es gehört daher nicht nur eine Kraft dazu, um einen ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, sondern auch um einen bewegten Körper zur Ruhe zu bringen oder überhaupt dessen Bewegung zu modificiren.]

Zwei Kräften legt man gleiche Intensität bei, wenn sie, in entgegengesetztem Sinne an einem ruhenden und freien Punkte angebracht, letzterem keine Bewegung ertheilen oder, wie man zu sagen pflegt, sich aufheben. Der Begriff der Gleichheit zweier Kräfte führt weiter zu der Vorstellung irgend eines Verhältnisses derselben, namentlich versteht man unter der Summe mehrerer nach einer und derselben Richtung wirkenden Kräfte diejenige Einzelkraft, welche dem Punkte die nämliche Bewegung ertheilt, wie jene Kräfte zusammen. Demgemäss kann man Kräfte durch Zahlen oder auch durch gerade Linien, deren Längen jenen Zahlen proportional sind, darstellen; diese Strecken pflegt man von den Angriffspunkten der Kräfte aus auf deren Richtungen abzutragen, um somit Grösse und Richtung jeder Kraft gleichzeitig zur Anschauung zur bringen.

3. Masse. Die Erfahrung lehrt, dass eine und dieselbe Kraft verschiedene Bewegungen hervorbringen kann, wenn man sie auf verschiedene Körper wirken lässt; diese Bemerkung führt auf den neuen Begriff der Masse. Man schreibt nämlich zwei Körpern gleiche Massen zu, wenn sie, von der Ruhelage ausgehend, unter der Einwirkung gleicher Kräfte gleiche Bewegungen annehmen. Durch Vereinigung zweier oder mehrerer Körper von gleichen Massen erhält man einen einzigen neuen Körper, dessen Masse die Summe von den Massen der früheren einzelnen Körper ist. Dies führt dann weiter zu der Vorstellung irgend eines Verhältnisses zwischen Massen, und daher können letztere durch Zahlen ausgedrückt werden, wenn man sie mit der in einem bestimmten Volumen einer bestimmten Substanz enthaltenen Masse vergleicht.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Massen aller aus gleichem und homogenem (d. h. gleichförmig vertheiltem) Material gebildeten Körper in demselben Verhältnisse wie die Volumina jener Körper stehen, oder kürzer, dass die Massen den in jenen Körpern enthaltenen Stoffmengen proportional sind.

4. Dichtigkeit. Durch Vergleichung der Masse mit dem Volumen, worin sie enthalten ist, kommt man auf den Verhältnissbegriff der Dichtigkeit; bei einem homogenen Körper versteht man darunter die in der Volumeneinheit enthaltene Masse, woraus folgt, dass man in diesem Falle die Dichtigkeit auch als das Verhältniss der Masse zu dem von ihr erfüllten Volumen ansehen darf. Bei einem nicht homogenen Körper findet an verschiedenen Punkten eine verschiedene Dichtigkeit statt; construirt man um einen bestimmten Punkt herum einen beliebig kleinen Körpertheil und lässt diesen durch unendliche Abnahme sich nach und nach auf jenen Punkt reduciren, so nähert sich das Verhältniss der in jenem Körpertheil enthaltenen Masse zu dem Volumen des Körpertheiles einer bestimmten Grenze; letztere ist die Dichtigkeit in jenem Punkte. Kürzer drückt man dies durch die Formel aus, dass innerhalb eines unendlich kleinen Körpertheiles die Dichtigkeit constant, nämlich gleich dem Verhältnisse des Massenelementes zum Volumenelemente ist.

[Für einen homogenen Körper, dessen Volumen $V$, dessen Masse $M$ und dessen Dichtigkeit $\varrho$ heisst, gilt demnach die Gleichung

$$\varrho = \frac{M}{V} \text{ oder } M = \varrho\, V.$$

Ist dagegen der Körper nicht homogen, so denkt man sich denselben auf ein (meistens rechtwinkliges) Coordinatensystem bezogen und an einer Stelle $(xyz)$ ein Volumenelement $dV$, welches das Massenelement $dM$ enthält; die Dichtigkeit an jener Stelle ist dann

$$\varrho = \frac{dM}{dV} \text{ und } dM = \varrho\, dV.$$

Die zweite Gleichung dient zur Bestimmung der Gesammtmasse, wenn das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt ändert, d. h. wenn $\varrho$ als Function der Coordinaten eines Punktes gegeben ist. Bei rechtwinkligen Coordinaten bildet $\varrho$ eine Function der Coordinaten $x$, $y$, $z$, zugleich ist $dV = dx\, dy\, dz$, mithin

$$M = \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz, \qquad \varrho = F(x, y, z);$$

bei Polarcoordinaten, welche mit rechtwinkligen Coordinaten durch die bekannten Formeln

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\omega,\quad z = r\sin\varphi\sin\omega$$

zusammenhängen, muss $\varrho$ als Function von $r$, $\varphi$, $\omega$ gegeben sein, ausserdem hat man $dV = r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\omega$, folglich

$$M = \int\int\int \varrho\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\omega.$$

Die Integrationsgrenzen bestimmen sich in beiden Fällen durch die Gestalt der umschliessenden Fläche.

Als Beispiel diene die Massenbestimmung eines Körpers, in dessen Innern die Dichtigkeit nach dem Gesetze

$$\varrho = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{k}{r}$$

variirt und dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2$$

bestimmt wird, was zusammen geometrisch bedeutet, dass erstens der Körper aus einer stetigen Folge concentrischer Kugelschalen besteht, deren jede für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von einer Schicht zur nächst grösseren abnimmt und in der Entfernung 1 gleich $k$ ist, und dass zweitens die Oberfläche des Körpers die Fusspunktfläche eines aus den Halbachsen $a$, $b$, $c$ construirten Ellipsoides bildet. Nach der zweiten Formel hat man

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_1} \frac{k}{r}\, r^2 \sin\varphi\, d\omega\, d\varphi\, dr$$

$$= \tfrac{1}{2} k \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r_1{}^2 \sin\varphi\, d\omega\, d\varphi,$$

wobei $r_1$ den Radiusvector bezeichnet, welcher vom Coordinatenanfange in der durch Winkel $\varphi$ und $\omega$ bestimmten Richtung bis zur Oberfläche des Körpers reicht. Man erhält dieses $r_1$ aus der Gleichung der Oberfläche mittelst der Substitutionen

$$\xi = r_1\cos\varphi,\quad \eta = r_1\sin\varphi\cos\omega,\quad \zeta = r_1\sin\varphi\sin\omega$$

nämlich

$$r_1{}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\omega + c^2\sin^2\varphi\sin^2\omega;$$

setzt man dies in die obige Formel für $M$ ein und führt die übrigen Integrationen aus, so kommt

$$M = \tfrac{2}{3}\pi k\,(a^2+b^2+c^2).$$

Um diesen Ausdruck zu interpretiren, bemerken wir, dass einer homogenen Kugel, welche mit dem Halbmesser $d$ beschrieben ist und die constante Dichtigkeit $k'$ besitzt, die Masse $k' . \frac{4}{3} \pi d^3$ zukommen würde; die Masse $M$ beträgt daher die Hälfte von der Masse einer homogenen Kugel, deren Radius $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ und deren Dichtigkeit überall $= \frac{k}{d}$ ist.

Bei einem nicht homogenen Körper kann man noch die Frage nach dessen mittlerer Dichtigkeit stellen, wenn man hierunter die Dichtigkeit versteht, welche der Körper haben müsste, um bei gleichförmiger Massenvertheilung die nämliche Masse zu besitzen; diese *mittlere Dichtigkeit* ist nichts anderes, als das Verhältniss von $M$ zu $V$, wobei $M$ auf die vorige Weise zu berechnen ist.]

5. Aufgabe der Mechanik. Wenn Kräfte auf ein ruhendes System von irgendwie unter einander verbundenen Punkten wirken, so kann es eben so wohl geschehen, dass sie eine Bewegung hervorbringen, als auch, dass sie sich gegenseitig aufheben, also das Punktesystem in Ruhe lassen; im letzteren Falle findet, wie man zu sagen pflegt, Gleichgewicht zwischen jenen Kräften statt. Die Bedingungen, unter welchen Gleichgewicht eintritt, untersucht die Statik; die Gesetze der Bewegung bilden den Inhalt der Dynamik; beide Wissenschaften zusammen begreift man unter dem gemeinschaftlichen Namen der Mechanik.

## Allgemeine Grundsätze.

6. Wenn die auf ein Punktesystem wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so wird dieser Zustand dadurch nicht verändert, dass man einen oder mehrere dieser Punkte fest macht, eben so wenig dadurch, dass man zwischen ihnen neue Verbindungen herstellt. Auch kann man ohne Störung des Gleichgewichtes neue Kräfte anbringen, wenn letztere der Art sind, dass sie, für sich allein auf das Punktesystem wirkend, sich gegenseitig aufheben würden; mit gleichem Rechte darf man Kräfte der letzteren Art weglassen, wenn sie, was nicht zu übersehen, trotz des Vorhandenseins der übrigen Kräfte thatsächlich ebenso auf das Punktesystem wirken, als wenn sie allein vorhanden wären.

Endlich kann man ohne Störung des Gleichgewichtes Kräfte weglassen, wenn ihnen gleiche und an denselben Punkten in entgegengesetzten Richtungen angebrachte Kräfte, für sich allein auf das System wirkend, im Gleichgewichte sein würden. Durch Einführung der letzteren Kräfte ändert man nämlich den Zustand des Systemes nicht, aber da jede von ihnen die ihr gleiche an demselben Punkte entgegengesetzte Kraft aufhebt, so kann man an jedem Punkte beide zugleich weglassen und es bleiben nur die ursprünglichen Kräfte mit Ausschluss der in jener zuerst genannten Gruppe enthaltenen Kräfte.

Diese einfachen Grundsätze nützen hauptsächlich durch die zahlreichen Umwandlungen, denen ein Kräftesystem mit ihrer Hilfe unterworfen werden kann.

## Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft.

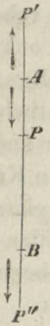



Fig. 1.

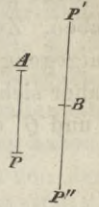
7. Eine auf einen vollkommen freien Punkt $A$ wirkende Kraft $P$ kann ohne Aenderung ihres Effektes nach einem anderen Punkte $B$ ihrer Richtung versetzt werden, vorausgesetzt, dass erstens der Kraft $P$ in $B$ die nämliche Richtung wie in $A$ angewiesen wird, und dass zweitens der Punkt $B$ unveränderlich mit dem ersten Punkte $A$ verbunden ist. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt $B$ von $A$ aus gerechnet in dem Sinne, in welchem die Kraft wirkt, so reicht es aus, dass letztere die Strecke $AB$ nicht vergrössern kann; dies findet z. B. statt, wenn die Punkte $A$ und $B$ durch einen dünnen, zwar biegsamen, aber nicht ausdehnbaren Körper, d. h. durch einen Faden, dem man nur eine Längenausdehnung beizulegen pflegt, verbunden sind. Liegt dagegen $B$ auf der anderen Seite von $A$, also dem Sinne der Kraft entgegengesetzt, so muss man die Strecke $AB$ als unverkürzbar ansehen, wie es bei einer starren Verbindung zwischen den Punkten $A$ und $B$ der Fall sein würde.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, denken wir uns an den Endpunkten der undehnbaren Geraden $AB$ zwei Kräfte $= P$ angebracht, die längs $AB$ in den entgegengesetzten Richtungen $AP'$ und $BP''$ wirken; diese Kräfte heben sich offenbar auf und ändern deshalb nichts am Zustande des Systemes. Andererseits heben sich die an einem und demselben Punkte $A$ nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte $P$ und $P'$ auf und es bleibt daher nur die Kraft $P''$ übrig, die in der That nichts Anderes als die nach $B$ versetzte Kraft $P$ ist. Auf ähnliche Weise lässt sich der zweite Theil des obigen Satzes begründen.

8. Hieraus kann leicht die fernere Behauptung abgeleitet werden, dass an einem freien Punktesysteme zwei nicht im direkt entgegengesetzten Sinne wirkende Kräfte auch nicht im Gleichgewicht sein können. Sollte nämlich letzteres vorhanden sein, so müsste es auch dann noch bestehen, wenn man den Angriffspunkt der einen Kraft fest machte, wodurch die Wirkung dieser Kraft aufgehoben würde; dann bliebe aber noch eine Kraft übrig, deren Richtung nicht durch jenen festen Punkt ginge, um welchen das System immerhin drehbar wäre. Da wir es aber als Grundsatz ansehen, dass in diesem Falle die übrige Kraft durch Nichts verhindert ist, das Punktesystem in Bewegung zu setzen, so folgt hieraus die Unmöglichkeit des Gleichgewichts zwischen den anfangs genannten Kräften.

Dies führt weiter zu dem allgemeineren Satze, dass eine an einem freien Systeme thätige Kraft durch keine in anderer Richtung wirkende Kraft ersetzbar ist. Bezeichnet nämlich $A$ den Angriffspunkt von $P$, $B$ einen mit $A$ fest verbundenen Punkt, so wird an der Wirkung von $P$ nichts geändert, wenn man in $B$ zwei nach irgend einer Richtung wirkende gleiche und entgegengesetzte Kräfte $P'$ und $P''$ anbringt. Sollte nun $P$ an $A$ durch $P''$ an $B$ ersetzbar sein, so müssten die Kräfte $P$ und $P'$ sich aufheben, was nach dem Vorigen unmöglich ist.

Fig. 2.




In allen Fällen, wo nachgewiesen werden kann, dass eine an einem freien Systeme wirkende Kraft $P$ durch eine andere an einem gewissen Punkte $M$ angreifende Kraft $P'$ ersetzbar ist, darf man nun auch schliessen, dass dieser neue Angriffspunkt in der Richtung jener Kraft liegt und ferner, dass die zweite Kraft der ersten gleich kommt. Fände nämlich das Erste nicht statt, so würde dem Vorigen zufolge keine solche Verlegung möglich sein, wie sie die Voraussetzung ausspricht; liegt aber, wie hiermit bewiesen, der neue Angriffspunkt in der Richtung der Kraft, so ist letztere nach dem früheren durch eine ihr gleiche $P''$ ersetzbar und da nun sowohl $P'$ an $M$ als $P''$ an $M$ der Kraft $P$ gleichgilt, so muss $P' = P'' = P$ sein.

9. Bevor wir weiter gehen, wollen wir an einem einfachen Beispiele zeigen, wie nothwendig die genaue Beobachtung der vorigen Grundsätze ist.

In Fig. 3 mögen $A$ und $B$ zwei Punkte bezeichnen, die sich

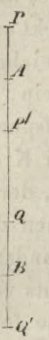



Fig. 3.

nicht von einander entfernen, wohl aber einander nähern können; an $A$ denken wir uns zwei in der Richtung der Geraden $AB$ wirkende gleich grosse und entgegengesetzte Kräfte $P$ und $P'$ angebracht, ebenso in $B$ zwei derartige Kräfte $Q$ und $Q' = P = P'$, so dass in dem ganzen Systeme Gleichgewicht vorhanden ist, da es an jedem Punkte desselben statt findet. Obschon nun die Kräfte $P$ und $Q'$ sich aufheben würden, wenn sie allein auf das System wirkten, so darf man sie doch nicht weglassen, denn es blieben dann die Kräfte $P'$ und $Q$ übrig, die sich nicht aufheben würden, weil $A$ und $B$ der Voraussetzung zufolge einander näher kommen können. Die Gruppe $P$, $Q'$ passt daher unter keinen der oben bezeichneten Fälle.

Erstens nämlich ist das Bestehen des Gleichgewichtes zwischen allen vier Kräften ganz unabhängig von der Verbindung zwischen den Punkten $A$ und $B$; man kann diese Verbindung wegnehmen und das Gleichgewicht bleibt, dann aber darf man auch $P$ nicht gegen das an einem isolirten Punkte $B$ wirkende $Q'$ aufheben. Zweitens sind auch die den Kräften $P$ und $Q'$ gleichen und entgegengesetzten Kräfte $P'$ und $Q$ nicht im Gleichgewichte und daher sieht man auch von dieser Seite, dass die Wegnahme von $P$ und $Q'$ eine Störung des Gleichgewichtes hervorrufen würde.

## Componenten und Resultante.

10. Wenn Kräfte auf ein vollkommen freies System fest unter einander verbundener Punkte wirken, so ist der Fall denkbar, dass durch Einführung einer neuen Kraft $R$ Gleichgewicht hergestellt wird; dann aber müssen sich auch alle gegebenen Kräfte (mit Ausschluss von $R$) durch eine einzige der Kraft $R$ gleiche und entgegengesetzte Kraft ersetzen lassen. In der That wird nämlich die Wirkung der ursprünglichen Kräfte nicht geändert, wenn man die Kraft $R$ in Verbindung mit einer gleichgrossen und entgegengesetzten Kraft einführt. Der Voraussetzung gemäss hebt aber $R$ die erst genannten Kräfte auf und folglich bleibt nur die dem $R$ gleiche und entgegengesetzte Kraft übrig. Jede solche Einzelkraft, welche mehrere andere Kräfte ersetzen kann, heisst deren Resultante; die ursprünglichen Kräfte, welche durch die Resultante vertreten werden, nennt man die Componenten. Aus dem un-

mittelbar Vorhergehenden erhellt, dass die Bestimmung der Resultante gegebener Componenten ein Problem der Statik ist.

Mehrere auf einen und denselben Punkt wirkende Kräfte, zwischen denen kein Gleichgewicht besteht, haben immer eine Resultante; denn der Punkt würde in Folge der Einwirkung jener Kräfte sich in einer bestimmten Richtung bewegen, diese Bewegung kann durch eine passende entgegengerichtete Kraft aufgehoben und damit Gleichgewicht hergestellt werden.

11. Wenn auf einen freien Punkt drei im Gleichgewicht befindliche Kräfte wirken (z. B. mittelst biegsamer Fäden), so ist kein Grund vorhanden, warum eine dieser Kräfte eher auf der einen als auf der andern Seite der Ebene der beiden übrigen Kräfte liegen solle, in der That zeigt auch die Erfahrung, dass die Richtungen der drei Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten sind. Ferner fällt die Richtung jeder Kraft in den von den beiden anderen Kraftrichtungen gebildeten Winkel. Wäre nämlich nur eine Kraft vorhanden, so würde sich der von ihr getriebene Punkt in der Richtung dieser Kraft bewegen; das Hinzutreten einer zweiten Kraft bewirkt eine Ablenkung von dieser Richtung und zwar nach der Seite hin, nach welcher die zweite Kraft wirkt; der Punkt kann sich also nur nach einer Richtung bewegen, welche zwischen den Richtungen der beiden Kräfte enthalten ist. Die Resultante der letzteren muss folglich dieselbe Richtung haben, und das Nämliche gilt, nur im umgekehrten Sinne, auch von der dritten der Resultante entgegengesetzten Kraft, welche das Gleichgewicht herstellt. Die Erfahrung bestätigt übrigens diesen Satz.

In dem besondern Falle zweier gleichen Kräfte kann die Resultante keine andere Richtung haben, als die der Geraden, welche den Winkel zwischen den Componenten halbirt.

12. Zwei gleiche auf einen Punkt wirkende Kräfte können immer parallel zu sich selbst nach einem Punkte der winkelhalbirenden Geraden versetzt werden, wenn dieser neue Angriffspunkt mit den früheren fest verbunden ist. Denn man kann die ursprünglichen Kräfte erst zu ihrer Resultante vereinigen, welche in der Richtung der Winkelhalbirenden wirkt, dann die Resultante nach dem neuen Angriffspunkte versetzen und schliesslich sie hier wieder in ihre beiden gleichen Componenten zerlegen, die nun den anfänglichen Componenten parallel und gleich sind.

## Zweites Capitel.

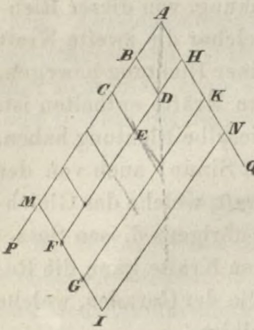
# Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften an einem Punkte.

---

### Parallelogramm der Kräfte.

13. Richtung der Resultante zweier Kräfte. Auf einen freien Punkt $A$ mögen zwei Kräfte $P$ und $Q$ wirken, deren Intensitäten und Richtungen durch die Geraden $AM$ und $AN$ repräsentirt sein sollen. Setzen wir zunächst voraus, dass $AM$ zu $AN$ in demselben rationalen Verhältnisse stehe, wie die ganze Zahl $m$ zur ganzen Zahl $n$, dass also $P:Q = AM:AN = m:n$, so können wir $P$ durch $m$ gleiche Kräfte und $Q$ durch $n$ gleiche Theile ersetzen und jede dieser gleichen Kräfte $\frac{P}{m} = \frac{Q}{n}$ sichtbar machen, indem wir $AM$ in $m$ gleiche Theile $AB$, $BC$ . . . und $AN$ in $n$ gleiche Theile $AH$, $HK$ . . . zerlegen. Führen wir noch durch die Punkte $B$, $C$ . . . Parallelen zu $AN$, sowie durch die Punkte $H$, $K$ . . . Parallelen zu $AM$, so erhalten wir ein in $mn$ gleiche Rhomben getheiltes Parallelogramm. Nach Nr. 12 dürfen wir nun die gleichen Kräfte $AB$ und $AH$ parallel mit sich selbst an den Eckpunkt $D$ des Rhombus $ABDH$ versetzen, weil $D$ auf der Halbirungslinie des Winkels $BAH = MAN$ liegt. Nehmen wir jetzt die zweite in der Richtung von $P$ wirkende Kraft $BC$ hinzu, so können wir $\frac{Q}{n}$ an $D$ nach $B$ versetzen, dann $BD$ mit $BC$ zusammen nach

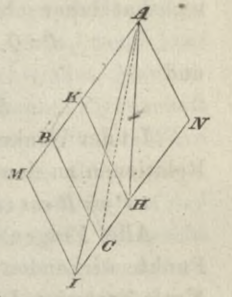
Fig. 4.



$E$ bringen und gleichzeitig die in $D$ wirkende Kraft $\frac{P}{m}$ gleichfalls nach $E$ verschieben; wir haben dann in $E$ die Kraft $2\frac{P}{m} \parallel AM$ und $\frac{Q}{n} \parallel AN$. So fortgehend erhalten wir zuletzt an $F$ die Kraft $m\frac{P}{m} = AM$ und $\frac{Q}{n} = AH$. Auf die nämliche Weise können wir die Kräfte $AM$ und $HK$ nach $G$ bringen u. s. w., bis wir zuletzt die Kräfte $AM = P$ und $AN = Q$ nach $I$ versetzt haben. An dieser Stelle würden sie nun dieselbe Resultante wie in $A$ liefern, die Resultante muss also nach $I$ versetzbar sein, folglich (Nr. 8) $I$ in der Richtung der Resultante liegen. Die gesuchte Resultante fällt daher ihrer Richtung nach in die Diagonale des Parallelogrammes $AMIN$. Durch eine Grenzenbetrachtung kann man diesen Satz auf zwei in incommensurablem Verhältniss stehende Kräfte ausdehnen; einfacher aber ist der folgende apagogische Beweis.

Wenn die Resultante zweier incommensurabelen Kräfte $AM$ und $AN$ nicht die Richtung der Diagonale $AI$ haben sollte, so müsste sie nach irgend einer anderen Richtung $AH$ gehen; diese schneidet eine der Seiten des Parallelogrammes etwa $NI$ in $H$ und durch diesen Punkt legen wir die Gerade $HK$ parallel zur anderen Parallelogrammseite $AN$. Jedenfalls können wir nun zwischen $K$ und $M$ einen Punkt $B$ der Art finden, dass $AB$ in commensurabelem Verhältniss zu $AN$ steht und dann giebt die Diagonale $AC$ die Richtung der Resultante aus $AN$ und $AB$.

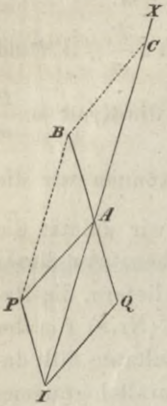
Fig. 5.




Verbinden wir nun $AC$ mit der noch übrigen Kraft $BM$, die wir uns nach $A$ versetzt denken, so müsste schliesslich die Kraft $AH$ resultiren. Dies ist aber unmöglich, weil die Richtung von $AH$ ausserhalb des von $AC$ und $BM$ gebildeten Winkels $CAM$ liegt.

14. G r ö s s e d e r R e s u l t a n t e. Welche auch die Grösse $R$ der Resultante aus $P$ und $Q$ sein möge, so muss doch eine der Resultante gleiche und im entgegengesetzten Sinne nach $AX$ wirkende Kraft das Gleichgewicht herbeiführen; dann aber muss auch die aus $P$ und $R$ gebildete Resultante gleich und entgegengesetzt

Fig. 6.




der Kraft $Q$ sein. Legen wir nun durch den Punkt $P$ eine zu $AX$ parallele Gerade, welche die verlängerte $AQ$ in $B$ schneidet und durch $B$ eine Parallele zu $AP$ bis zum Durchschnitte $C$ mit $AX$, so kann nur $AC$ die Kraft $R$ repräsentiren, denn jede andere auf $AX$ abgeschnittene Strecke würde mit $AP$ verbunden ein Parallelogramm liefern, dessen Diagonale von $AB$ verschieden ist. Wegen $AC = BP = AI$ ist folglich die Resultante aus $P$ und $Q$ gleich $AI$, und dies giebt mit dem in Nr. 13 gefundenen Ergebnisse zusammen den Satz:

Die Resultante zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte wird, der Richtung und Grösse nach, durch die Diagonale desjenigen Parallelogrammes dargestellt, welches aus den linear construirten Componenten zusammengesetzt werden kann.

Die Kräfte $P$, $Q$ und ihre Resultante $R$ stellen die Seiten eines Dreiecks $ABP$ dar, welches zugleich die Winkel $APB = \angle(P, R)$, $ABP = \angle(Q, R)$ und das Supplement des Winkels $(P, Q)$ enthält; man hat daher

$$P : Q : R = \sin(QR) : \sin(PR) : \sin(PQ)$$

und

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ).$$

Ist der Winkel zwischen $P$ und $Q$ ein rechter, so werden diese Relationen zu den einfacherern

$$P = R\cos(PR), \quad Q = R\cos(QR), \quad R^2 = P^2 + Q^2.$$

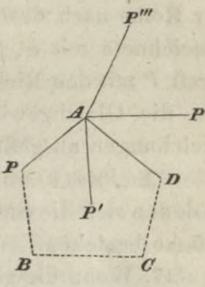
Alle Fragen über die Zusammensetzung zweier an einem Punkte wirkenden Kräfte, sowie hinsichtlich der Zerlegung einer Kraft in zwei andere sind demnach durch Construction oder trigonometrische Auflösung eines Dreiecks beantwortbar, was keiner näheren Erörterung bedarf.

## Zusammensetzung und Gleichgewicht beliebiger Kräfte an einem freien Punkte.

15. Um die Resultante mehrerer auf einen und denselben freien Punkt $A$ wirkenden Kräfte $P$, $P'$, $P''$ . . . zu erhalten, bedarf es nur einer fortgesetzten Anwendung des Satzes vom Parallelo-

gramm der Kräfte; man verbindet nämlich $P$ mit $P'$, die entstehende Resultante mit $P''$, die neue Resultante mit $P'''$ u. s. f. bis zur letzten Kraft. Am einfachsten führt man diese successive Zusammensetzung auf die Weise aus, dass man ein Polygon $APBCD$ construirt, dessen Seiten parallel und gleich den die Kräfte repräsentirenden Geraden $AP$, $AP'$, $AP''$ ... sind; die Verbindungslinie des Endpunkts $D$ dieses Polygones mit dem Anfangspunkte $A$ giebt dann, der Grösse und Richtung nach, die Resultante aller vorhandenen Kräfte. Bei drei Kräften, deren Richtungen nicht in einer und derselben Ebene liegen, erhält man hiernach die Diagonale des Parallelepipedes, welches die drei linear dargestellten Kräfte zu Kanten hat.

Fig. 7.




16. Zum Bestehen des Gleichgewichtes unter mehreren Kräften ist es der obigen Construction zufolge nothwendig und hinreichend, dass $AD = 0$ mithin das Polygon ein geschlossenes wird. In diesem Falle ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in den Cosinus des Winkels zwischen ihrer und einer festen Richtung gleich Null, wie auch diese feste Richtung angenommen werden möge. Umgekehrt muss das Polygon ein geschlossenes sein, wenn jene Summe bei jeder Lage der festen Richtung verschwindet. Man bemerkt aber leicht, dass es hinreicht, wenn die genannte Eigenschaft für drei von einem Punkte ausgehende Richtungen stattfindet. Wäre nämlich das Polygon kein geschlossenes, so könnte die fragliche Summe nur für solche Richtungen verschwinden, welche auf der Verbindungslinie der ersten und letzten Ecke ($AD$) senkrecht stehen; nun kann aber diese Gerade nicht gleichzeitig normal zu drei Richtungen sein, welche in einem Punkte zusammentreffen und in verschiedenen Ebenen liegen. Verschwindet also jene Summe in Beziehung auf drei solche Richtungen, so ist das Polygon nothwendig ein geschlossenes und daher auch Gleichgewicht vorhanden. Man hat demgemäss den Satz:

Für das Geichgewicht von Kräften an einem freien Punkte ist es erforderlich und hinreichend, dass die Summen der Projectionen der Kräfte auf drei nicht in derselben Ebene liegende Richtungen einzeln verschwinden.

Aus dem Vorigen erhellt unmittelbar, dass die Projectionen der Kräfte ebenso wie die Projectionen von begrenzten Geraden als positiv oder negativ angesehen werden, je nachdem die Cosinus der Winkel zwischen den Kraftrichtungen und der festen Richtung positiv oder negativ sind. Nimmt man für die letztere der Reihe nach drei auf einander senkrechte Gerade $x$, $y$, $z$ und bezeichnete mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Richtung einer Kraft $P$ mit den Richtungen der positiven $x$, $y$, $z$ bildet, so werden die Gleichgewichtsbedingungen durch die folgenden drei Gleichungen ausgedrückt:

$$\Sigma\,(P\cos\alpha)=0,\quad \Sigma\,(P\cos\beta)=0,\quad \Sigma\,(P\cos\gamma)=0,$$

in denen sich die Summenzeichen $\Sigma$ auf alle gleichgebildeten Ausdrücke beziehen.

17. Wenn die gegebenen Kräfte nicht im Gleichgewichte sind, so kann man mittelst der vorigen Formeln ebensowohl die Grösse ihrer Resultante $R$ als die Winkel $a$, $b$, $c$ bestimmen, welche $R$ mit den drei festen Achsen einschliesst. Dazu reicht die Bemerkung hin, dass Gleichgewicht eintreten muss, sobald man zu den bisherigen Kräften eine neue Kraft hinzusetzt, welche von der nämlichen Grösse wie $R$, aber entgegengesetzter Richtung ist, d. h. mit den Achsen die Winkel $180^0-a$, $180^0-b$, $180^0-c$ bildet. Man hat daher die Gleichungen

$$\Sigma\,(P\cos\alpha)+R\cos\,(180^0-a)=0,$$
$$\Sigma\,(P\cos\beta)+R\cos\,(180^0-b)=0,$$
$$\Sigma\,(P\cos\gamma)+R\cos\,(180^0-c)=0,$$

oder

$$R\cos a=\Sigma\,(P\cos\alpha),$$
$$R\cos b=\Sigma\,(P\cos\beta),$$
$$R\cos c=\Sigma\,(P\cos\gamma),$$

die man auch unmittelbar durch Betrachtung des Polygons $APBDA$ erhalten kann, in welchem die Projection der Resultante auf irgend eine Richtung gleich ist der algebraischen Summe der Projectionen der Componenten. Indem wir zur Abkürzung

$$\Sigma\,(P\cos\alpha)=X,\quad \Sigma\,(P\cos\beta)=Y,\quad \Sigma\,(P\cos\gamma)=Z$$

setzen, finden wir aus den obigen Gleichungen:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$\cos a=\frac{X}{R},\quad \cos b=\frac{Y}{R},\quad \cos c=\frac{Z}{R}.$$

18. Die zur Bestimmung der Grösse von $R$ dienende Formel kann übrigens unabhängig von den Richtungen der Achsen dargestellt werden, wenn man die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ herausschafft und statt deren die Winkel zwischen den Kraftrichtungen einführt. Man rechnet zu diesem Zwecke die Quadrate von $x$, $y$, $z$ aus und beachtet die Gleichungen

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1,$$

$$cos\,\alpha\, cos\,\alpha' + cos\,\beta\, cos\,\beta' + cos\,\gamma\, cos\,\gamma' = cos\,(PP');$$

dies giebt

$$R^2 = \Sigma(P^2) + 2\,\Sigma[PP'\,cos\,(PP')].$$

19. Zu den so eben entwickelten Resultaten führt auch folgender Weg. Jede der Kräfte $P$, $P'$, $P''$... lässt sich vermittelst des Parallelepipedes der Kräfte in drei auf einander senkrechte Seitenkräfte zerlegen, z. B. $P$ in die Componenten $P\,cos\,\alpha$, $P\,cos\,\beta$, $P\,cos\,\gamma$, und zwar sind diese, entsprechend den jedesmaligen Vorzeichen der Cosinus, positiv oder negativ, je nachdem sie im Sinne der positiven oder negativen Achsen wirken. Die längs einer Achse wirkenden Kräfte können jetzt zu einer Kraft zusammengezogen werden und zwar ist diese die algebraische Summe jener Kräfte; damit sind alle vorhandenen Kräfte auf die drei längs der Achsen wirkenden Kräfte

$$X = \Sigma(P\,cos\,\alpha),\quad Y = \Sigma(P\,cos\,\beta),\quad Z = \Sigma(P\,cos\,\gamma)$$

zurückgeführt. Soll nun Gleichgewicht vorhanden sein, so müssen $X$, $Y$, $Z$ gleichzeitig verschwinden, weil sonst aus $X$, $Y$, $Z$ eine von Null verschiedene Resultante entspränge; die zum Gleichgewichte nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind daher

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0.$$

Ist dagegen kein Gleichgewicht vorhanden, so wird die gesuchte Resultante $R$ sowohl der Grösse als der Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelepidedes dargestellt, wovon $X$, $Y$, $Z$ die in einer Ecke zusammenstossenden Kanten sind; aus dieser Bemerkung zieht man die Formeln

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$cos\,(RX) = \frac{X}{R},\quad cos\,(RY) = \frac{Y}{R},\quad cos\,(RZ) = \frac{Z}{R},$$

welche mit den frühern übereinstimmen.

20. Reduction für schiefe Achsen. Denkt man sich das Polygon $APBCD$ auf drei schiefwinklige Achsen projicirt, so ge-

langt man durch dieselben Schlüsse wie in Nr. 16 zu dem Satze, dass es zum Gleichgewichte der gegebenen Kräfte nothwendig und ausreichend ist, wenn die algebraischen Summen der Projectionen einzeln verschwinden, wobei die Projectionen als positiv oder negativ gelten, jenachdem sie im Sinne der positiven oder negativen Achsen wirken. Für die Rechnung gestalten sich in diesem Falle die Gleichgewichtsbedingungen etwas anders, ohne dass jedoch in der Sache selbst eine Aenderung einträte. Ist kein Gleichgewicht vorhanden, so bilden die algebraischen Summen der Kräfteprojectionen drei neue Componenten, deren Resultante nach dem Parallelepiped der Kräfte bestimmt werden kann.

21. Im Folgenden werden wir bisweilen den Ausdruck „die nach einer Richtung genommene oder projicirte Kraft“ brauchen; wir verstehen darunter die Projection einer Kraft auf eine Gerade dieser Richtung oder was dasselbe ist, die Componente, welche entsteht, wenn man die gegebene Kraft in andere Kräfte zerlegt, von denen die eine nach der gegebenen Richtung wirkt und die übrigen in der darauf senkrechten Ebene liegen. So sind z. B. in den obigen Formeln $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$ und $P \cos \gamma$ die nach den Richtungen der $x$, $y$, $z$ genommenen Werthe der Kraft $P$.

## Gleichgewicht eines Punktes, der auf einer festen Oberfläche oder Curve bleiben muss.

22. Wenn ein Punkt sich nicht anders als auf einer festen Fläche bewegen kann und von einer normal zu dieser Fläche gerichteten Kraft angegriffen wird, so muss er in Ruhe bleiben; denn alle Richtungen, nach denen er sich bewegen könnte, liegen gleichförmig um die Normale herum und es ist daher kein Grund vorhanden, warum er eher die eine als die andere Richtung einschlagen sollte. Auch wird dieser Grundsatz durch alle Erfahrungen bestätigt. Eine schief gerichtete Kraft dagegen lässt sich in zwei Kräfte zerlegen, deren eine in die Normale und deren andere in die Berührungsebene fällt; die erste wird durch den Widerstand der Fläche aufgehoben und es bleibt nur die zweite Componente übrig, welche durch nichts verhindert wird, dem Punkte eine Bewegung zu ertheilen, vorausgesetzt, dass letzterer auf der Oberfläche nach allen Seiten hin frei beweglich ist. Der letztere Um-

stand würde übrigens nicht in alter Strenge statt haben, sobald Reibung vorhanden wäre; vor der Hand aber abstrahiren wir von dieser und betrachten den Punkt als frei beweglich auf der Fläche.

Da die genannte Fläche nur die normal zu ihr wirkenden Kräfte aufhebt, so leistet sie dasselbe wie eine Kraft, welche der Resultante aller in jedem Punkte aufgehobener Kräfte gleich ist und im entgegengesetzten Sinne der Normale wirkt. Ebenso verhält sich eine feste Curve, auf der ein Punkt frei beweglich ist; sie hebt durch ihren Widerstand gleichfalls alle Kräfte auf, deren Richtungen in der Normalebene des Punktes liegen, niemals aber andere Kräfte. Sie wirkt daher wie eine normale Kraft, welche der Resultante aller aufgehobenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist.

23. Wird nun ein Punkt, der sich nur auf einer durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ repräsentirten Fläche bewegen kann, durch die Kräfte $P$, $P'$, $P''$ etc. getrieben, so ist es zum Bestehen des Gleichgewichtes nicht mehr erforderlich, dass sich die Kräfte $P$, $P'$, $P''$ etc. untereinander aufheben, es reicht vielmehr hin, wenn ihre Resultante senkrecht auf der Fläche steht, wobei auf die Grösse der Resultante nichts ankommt. Da ferner die Resultante und die Normale einen Punkt $(xyz)$ gemein haben, so findet das Zusammenfallen beider statt, sobald ihre Richtungen parallel sind und hierzu gehört, dass die Cosinus der in Nr. 19 bestimmten Winkel $(RX)$, $(RY)$, $(RZ)$ sich wie die Cosinus der Winkel verhalten, welche die Normale im Punkt $xyz$ mit den Coordinatenachsen einschliesst. Die letzteren Winkel können aus der Gleichung analytisch bestimmt und durch $x, y, z$ ausgedrückt werden; sie mögen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ heissen. Diesen Erörterungen zufolge lauten die Bedingungen des Gleichgewichts

$$\frac{X}{\cos\lambda} = \frac{Y}{\cos\mu} = \frac{Z}{\cos\nu}.$$

Sind dieselben nicht erfüllt, so findet auch kein Gleichgewicht statt; doch könnte man in diesem Falle denjenigen Punkt der Fläche aufsuchen, an welchem die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht sind; man hätte dann die Werthe von $x$, $y$, $z$ aus den obigen zwei Gleichungen und der Gleichung der Fläche zu bestimmen.

Bietet die Fläche nur nach einer Seite hin Widerstand, so muss die Resultante der Kräfte nach der entgegengesetzten Seite hin wirken, weil sie sonst nicht aufgehoben würde. Dieser Fall tritt z. B. bei einem Punkte ein, welcher die Fläche, auf der er sich bewegt, zwar nicht durchdringen, wohl aber sich von ihr entfernen könnte.

24. Für das Gleichgewicht der Kräfte an einem Punkte, der auf einer gegebenen Curve zu bleiben gezwungen ist, reicht es hin, wenn die Resultante der Kräfte senkrecht auf der Tangente an jenem Curvenpunkte steht. Nennen wir $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel zwischen der Tangente und den Coordinatenachsen, welche Winkel leicht aus den Gleichungen der Curve zu finden sind, so haben wir als Bedingung

$$\cos(RX) \cos\lambda + \cos(RY) \cos\mu + \cos(RZ) \cos\nu = 0,$$

d. i. vermöge der Werthe von $\cos(RX)$, $\cos(RY)$ und $\cos(RZ)$

$$X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu = 0.$$

Das Gleichgewicht kann nicht statt finden, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist; letztere dient dann in Verbindung mit den Gleichungen der Curve zur Bestimmung desjenigen Punktes der Curve, an welchem die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte sind.

## Andere Bestimmung des Widerstandes krummer Flächen und Linien.

25. Da der Widerstand einer Fläche oder Curve wie eine normale Kraft wirkt, so kann man letztere statt der Fläche oder Curve einführen und nachher den Punkt als völlig frei ansehen. Die Grösse dieser widerstehenden Kraft ist vorläufig als Unbekannte zu betrachten, ihre Richtung fällt bei einer Fläche mit der Richtung der Normale in dem einen oder im entgegengesetzten Sinne zusammen, und steht bei einer Curve senkrecht auf der Tangente.

26. Die Gleichung der gegebenen Fläche sei $F(x, y, z) = 0$, die Intensität ihres normalen Widerstandes $= N$; die Winkel, welche die in einem bestimmten Sinne genommene Normale mit den Achsen einschliesst, mögen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ heissen und folglich die Componenten des Widerstandes

$$\pm N \cos\lambda, \quad \pm N \cos\mu, \quad \pm N \cos\nu,$$

wobei die oberen oder untern Zeichen gelten, jenachdem $N$ im Sinne der Normale oder im entgegengesetzten Sinne wirkt. Betrachten wir jetzt den Punkt als vollkommen frei, so müssen die früheren Gleichgewichtsbedingungen

$$X \pm N \cos\lambda = 0, \quad Y + N \cos\mu = 0, \quad Z \pm N \cos\nu = 0$$

statt haben, und aus diesen erhalten wir durch Elimination von $N$, auf dessen Grösse es nicht ankommt,

$$\frac{X}{\cos\lambda} = \frac{Y}{\cos\mu} = \frac{Z}{\cos\nu}.$$

Ausser diesen Bedingungsgleichungen, welche mit den früheren übereinstimmen liefern die vorhergehenden Gleichungen noch den Werth von $N$, nämlich

$$N = \pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Mit dem einen Vorzeichen giebt diese Formel die Grösse des Widerstandes, mit dem anderen Vorzeichen den Druck, welchen die Fläche durch die Einwirkung der gegebenen Kräfte erleidet.

27. Liegt der Punkt auf einer Curve, deren Gleichungen sind

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

so hat die Kraft $N$, welche den Widerstand der Curve repräsentirt, irgend eine vor der Hand noch nicht bekannte Lage in der Normalebene. Die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ zwischen der Tangente und den Coordinatenachsen sind durch die Gleichungen der Curve als Functionen von $x$, $y$, $z$ bestimmt, die Winkel zwischen $N$ und den Coordinatenachsen mögen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ heissen; es ist dann

$$\cos\lambda \cos\alpha + \cos\mu \cos\beta + \cos\nu \cos\gamma = 0$$

und ferner sind die Bedingungen des Gleichgewichts

$$X + N \cos\alpha = 0, \quad Y + N \cos\beta = 0, \quad Z + N \cos\gamma = 0.$$

Durch Elimination der Unbekanten $N$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ findet man übereinstimmend mit dem Früheren die Bedingungsgleichung

$$X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu = 0.$$

Die vorigen drei Gleichungen bestimmen auch die Grössen und Vorzeichen der Widerstandscomponenten $N \cos\alpha$, $N \cos\beta$, $N \cos\gamma$, welche den Componenten gleich und entgegengesetzt sind; daraus findet sich nachher der Widerstand (oder umgekehrt der Druck) $N$ gleich und entgegengesetzt der Resultante aller gegebenen Kräfte.

---

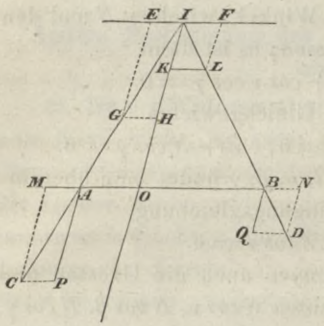
# Drittes Capitel.

## Zusammensetzung und Gleichgewicht paralleler Kräfte.

### Parallele Kräfte an zwei Punkten.

28. Resultante zweier parallelen Kräfte. An zwei unveränderlich mit einander verbundenen Punkten $A$ und $B$ mögen zwei in gleichem Sinne parallele Kräfte $P$ und $Q$ wirken, und es sei die Aufgabe gestellt, die Grösse und Richtung ihrer Resultante zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bringen wir in $A$ und $B$ zwei längs der Geraden $AB$ wirkende gleich grosse und entgegesetzte Kräfte $AM$ und $BN$ an; diese heben sich zwar auf und ändern daher den Zustand des Systemes nicht, wohl aber bieten sie den Vortheil, dass durch Verbindung von $P$ mit $AM$, sowie von $Q$ mit $BN$ zwei andere nicht mehr parallele Kräfte erhalten werden können. Statt $P$ und $AM$ setzen wir nämlich die in der Richtung der Diagonale $AC$ wirkende Kraft, statt $Q$ und $AN$ die Kraft $BD$. Die Richtungen von $AC$ und $BD$ treffen in einem Punkte $I$ zusammen; diesen denken wir uns mit dem Systeme fest verbunden und versetzen an ihn die Kräfte $AC$ und $BD$ der Art, dass $IG = AC$, $IL = BD$. Zerlegen wir nun die an $I$ wirkenden Kräfte wieder in die Componenten, aus denen sie früher in $A$ und $B$ zusammengesetzt wurden, so erhalten wir zwei Parallelogramme $EIHG \cong MAPC$ und $IFLK \cong BNDQ$ mit den Kräf-

Fig. 8.



ten $IE$, $IH$ einerseits und $IF$, $IK$ andererseits. Unter diesen heben sich die beiden gleichen und entgegengerichteten Kräfte $IE$ und $IF$ auf, und es bleiben nur die gleichgerichteten Kräfte $IH$, $IK$ übrig, welche sich durch Addition vereinigen lassen. Diess giebt den Satz:

Zwei in gleichem Sinne parallele Kräfte haben eine in demselben Sinne parallel wirkende Resultante gleich ihrer Summe; die Richtung der Resultante schneidet die Verbindungslinie $AB$ zwischen den Punkten $A$ und $B$.

Um den Durchschnitt $O$ von $IH$ mit $AB$ näher zu bestimmen, benutzen wir die aus ähnlichen Dreiecken folgenden Proportionen

$$AO : GH = IO : IH \text{ und } KL : BO = IK : IO;$$

durch Zusammenziehung derselben und unter Rücksicht auf die Gleichungen

$$IH = P, \quad IK = Q, \quad GH = KL$$

erhalten wir

$$AO : BO = Q : P.$$

Die Abschnitte, in welche die Linie $AB$ durch die Resultante getheilt wird, verhalten sich demnach umgekehrt wie die Kräfte, oder, was Dasselbe ist, die Producte aus jeder Kraft in den anliegenden Abschnitt sind gleich.

Bemerkenswerth ist, dass der Punkt $O$ von der Richtung der Kräfte nicht abhängt; er bleibt derselbe, so lange die Kräfte nur in dem Sinne parallel wirken, auch selbst dann noch, wenn die Kräfte in demselben Verhältnisse geändert werden. Wir nennen diesen Punkt ausschliesslich den Angriffspunkt der Resultante oder den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Bezeichnet $R$ die Resultante, so ist nach dem Vorigen

$$R = P + Q,$$

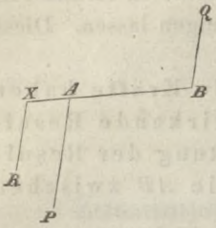
$$P : Q : R = OB : OA : AB.$$

Diese Relationen liefern immer drei Gleichungen und durch diese jederzeit die Auflösung der verschiedenen einfachen Aufgaben, die sich bilden lassen, wenn man drei von den sechs Grössen $P$, $Q$, $R$, $OA$, $OB$, $AB$ als gegeben und die übrigen als Unbekannte ansieht.

29. Wir gehen nun zu dem zweiten Falle über, wenn die Kräfte $P$ und $Q$ in entgegengesetztem Sinne parallel sind, und denken uns dabei $P > Q$.

Die Kraft $P$ zerlegen wir in zwei andere in gleichem Sinne

Fig. 9.




parallele Kräfte, deren eine der Kraft $Q$ gleich und entgegengesetzt ist, was nach dem obigen Satze immer geschehen kann; da hierbei $Q$ aufgehoben wird, so bleibt zuletzt nur die zweite Kraft übrig und stellt die Resultante von $P$ und $Q$ dar. Ihre Grösse beträgt $P - Q$, ihr Angriffspunkt $X$ liegt ausserhalb der Strecke $AB$ und bestimmt sich durch die Proportion

$$AX : AB = Q : R,$$

woraus man wegen

$$R = P - Q$$

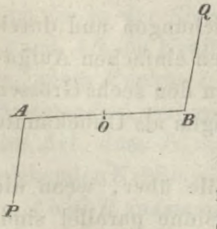
erhält

$$AX = \frac{Q}{P - Q} \, . \, AB.$$

Mit Ausnahme des Falles $P = Q$ haben also zwei antiparallele Kräfte immer eine Resultante, welche ihnen parallel im Sinne der grösseren Kraft wirkt und ausserhalb beider Kräfte auf der Seite der grösseren Kraft angreift; ihre Grösse kommt der Differenz der antiparallelen Kräfte gleich und alle drei Kräfte verhalten sich wie die Strecken zwischen den Angriffspunkten der jedesmaligen beiden übrigen Kräfte. Ausserdem ist der Punkt $X$, der Angriffspunkt der Resultante, unabhängig von der Richtung und dem Verhältnisse der Kräfte.

30. Bei zwei antiparallelen Kräften von gleicher Grösse wird $AX = \infty$, was eine Unmöglichkeit andeutet; dass in der That unter diesen Umständen keine Resultante existirt, kann man auch direct auf folgende Weise bestätigen. Man drehe das System

Fig. 10.



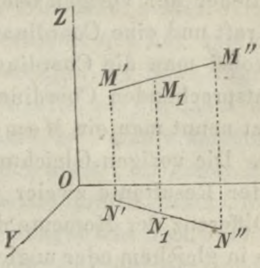

der Kräfte, um den Mittelpunkt $O$ der Strecke $AB$ und zwar so, dass die Drehung $180^0$ ausmacht; die Kräfte $P$ und $Q$ tauschen dann gegenseitig ihre Plätze und es hat sich in ihrer Wirkung nichts geändert. Wäre nur irgend eine Resultante vorhanden, so würde diese eine gleiche Drehung erfahren und sie müsste nach wie vor die nämliche Wirkung ausüben; diess ist aber unmöglich, weil die Resultante nach der Drehung eine andere Richtung hat, als vor derselben.

Ein solches System von zwei gleichen und antiparallelen Kräften, welches demnach nicht durch eine Einzelkraft ersetzbar ist, heisst nach Poinsot ein Kräftepaar. Die Theorie der Kräftepaare bildet gegenwärtig einen wesentlichen Theil der Mechanik.

31. Gewöhnlich bezieht man die Angriffspunkte paralleler Kräfte auf ein Coordinatensystem und hat dann die Lage des Angriffspunktes der Resultante gleichfalls durch Coordinaten zu bestimmen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Die Angriffspunkte zweier in gleichem Sinne parallelen Kräfte $P'$ und $P''$ mögen $M'$ und $M''$ sein; $M_1$ sei der Angriffspunkt der Resultante; die zur Achse der $z$ parallelen Coordinaten der drei Punkte $M'$, $M''$, $M_1$ sollen der Reihe nach $z'$, $z''$, $z_1$ heissen. Nach dem Vorigen hat man

Fig. 11.




$$P' . M_1 M' = P'' . M'' M_1;$$

welche nun auch die Vorzeichen der Coordinaten sein mögen, so gilt doch immer die Proportion

$$M' M_1 : M'' M_1 = z_1 - z' : z'' - z_1,$$

woraus man den Werth des Verhältnisses $M' M_1 : M'' M_1$ entnehmen und in die vorige Gleichung einsetzen kann. Diess giebt

$$P' (z_1 - z') = P'' (z'' - z_1)$$

oder

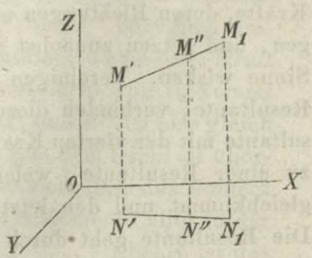
$$(P' + P'') z_1 = P' z' + P'' z''$$

d. i. weil $P' + P''$ gleich der Resultante $R$,

$$R z_1 = P'z' + P''z''.$$

Auf ähnliche Weise wie hier $z_1$ gefunden wurde, kann man auch $x_1$ durch $x'$ und $x''$ sowie $y_1$ durch $y'$ und $y''$ ausdrücken.

Fig. 12.




Bei zwei antiparallelen Kräften sei $P''$ die grössere und $M_1$ wieder der Angriffspunkt der Resultante, welcher jetzt ausserhalb $M' M''$ auf der Seite von $M''$ liegt. Man hat wie früher

$$P' . M_1 M' = P'' . M_1 M''$$

dagegen ist nun allgemein

$$M_1 M' : M_1 M'' = z_1 - z' : z_1 - z'',$$

folglich
$$P'(z_1 - z') = P''(z_1 - z'')$$
oder
$$(P'' - P') z_1 = P'' z'' - P' z'$$
und weil $P'' - P' =$ der Resultante $R$ ist,

$$R z_1 = P'' z'' - P' z'.$$

Aehnlich gestalten sich die Formeln für $x_1$ und $y_1$.

32. Die Momente. Die soeben entwickelten Gleichungen lassen sich durch Einführung eines neuen Begriffes zu einem kurzen Theoreme zusammenfassen, welches bald nachher erweitert werden soll und überhaupt häufig Anwendung findet. Die einzelnen Glieder der vorigen Gleichungen sind Producte, deren jedes eine Kraft und eine Coordinate ihres Angriffspunktes zu Faktoren hat, wobei man die Coordinate als Entfernung des Punktes von der entsprechenden Coordinatenebene betrachtet. Jedes solche Product nennt man ein Moment der Kraft in Beziehung auf eine Ebene. Die vorigen Gleichungen folgen demnach, dass das Moment der Resultante zweier parallelen Kräfte gleich der Summe oder Differenz der Momente der Componenten ist, jenachdem die Kräfte in gleichem oder ungleichem Sinne wirken. Um noch diese beiden Sätze auf einen gemeinschaftlichen Ausdruck zu bringen, legen wir den Kräften Vorzeichen bei, indem wir alle in dem einen Sinne wirkenden Kräfte als positive und die im entgegengesetzten Sinne thätigen als negative bezeichnen; wir gelangen damit zu dem Theoreme:

Das Moment der Resultante zweier irgendwie parallelen Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten.

### Beliebig viele parallele Kräfte.

33. Wir betrachten jetzt eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte, deren Richtungen nicht in einer und derselben Ebene liegen, und setzen zunächst voraus, dass alle Kräfte in gleichem Sinne wirken. Vereinigen wir die ersten beiden Kräfte zu einer Resultante, verbinden diese mit der dritten Kraft, die neue Resultante mit der vierten Kraft u. s. w., so gelangen wir schliesslich zu einer Resultante, welche der Summe der parallelen Kräfte gleichkommt und den letztern in gleichem Sinne parallel wirkt. Die Resultante geht durch einen Punkt, dessen Lage von den

Lagen der Angriffspunkte der Componenten sowie von dem Verhältniss der gegebenen Kräfte abhängt, dagegen von der Richtung der Componenten und den absoluten Grössen der letzteren unabhängig ist. Diess Alles folgt unmittelbar aus dem über die Zusammensetzung zweier Parallelkräfte Gesagten.

Wenn nicht alle gegebenen Kräfte in gleichem Sinne wirken, so kann man diejenigen unter ihnen, welche in gleichem Sinne parallel sind, zu einer Resultante zusammenziehen und ebenso mit den im entgegengesetzten Sinne thätigen Kräften verfahren; das Kräftesystem ist dann auf zwei antiparallele Kräfte zurückgeführt. Diese beiden geben im Allgemeinen eine im Sinne der grösseren Kraft wirkende Resultante gleich der Differenz beider Kräfte. Der Angriffspunkt dieser Resultante bestimmt sich nur durch die Grössenverhältnisse der Componenten und die Lage ihrer Angriffspunkte. Sind die beiden antiparallelen Kräfte, auf die das Kräftesystem zurückkommt, von gleicher Grösse, so ist zu untersuchen, ob ihre Angriffspunkte dieselben sind oder nicht. Im ersten Falle hat man zwei gleiche direct entgegengesetzte Kräfte mithin Gleichgewicht; im zweiten Falle ist weder Gleichgewicht noch eine Resultante und ebensowenig ein Angriffspunkt (Mittelpunkt) vorhanden; das Kräftesystem reducirt sich dann auf ein Kräftepaar.

34. Momentegleichung. Das in Nr. 32 bewiesene Theorem von den Momenten zweier parallelen Kräfte kann leicht auf beliebig viele Kräfte ausgedehnt werden. Zu diesem Zwecke denken wir uns zunächst das ganze Kräftesystem in zwei Gruppen von Kräften zerlegt, deren erste alle in dem einen Sinne parallelen Kräfte $P'$, $P''$, $P'''$ . . . enthält, und deren zweite die Kräfte $Q'$, $Q''$ $Q''$ . . . entgegengesetzten Sinnes umfasst; die Resultante aller $P$ heisse $R$, die Resultante aller $Q$ entsprechend $S$.

Die Kräfte $P'$ und $P''$ lassen sich durch eine Kraft $P_1 = P' + P''$ ersetzen, deren Moment in Beziehung auf irgend eine Ebene gleich ist der Summe der Momente von $P'$ nnd $P''$ bezüglich derselben Ebene. Ferner geben $P_1$ und $P'''$ zusammen eine neue Kraft $P_2 = P_1 + P''' = P' + P'' + P'''$, und das Moment von $P_2$ kommt überein mit der Summe der Momente von $P_1$ und $P'''$ ist also gleich der Summe der Momente von $P'$, $P''$, $P'''$. Aus dem leicht zu übersehenden Fortgange dieser Schlüsse ergiebt sich, dass das Moment von $R$ ebensoviel beträgt, als die Summe der Momente aller in der ersten Gruppe enthaltenen Kräfte $P'$, $P''$, $P'''$ . . . . Ebenso ist das

Moment von $S$ gleich der Summe der Momente aller Kräfte $Q'$ $Q''$, $Q'''$ ... der zweiten Gruppe.

Mit Ausnahme des Falles $R = S$, in welchem $R$ und $S$ ein Kräftepaar bilden, haben nun die antiparallelen Kräfte eine Resultante, deren Moment gleich der Differenz der Momente von $R$ und $S$ ist also etwa $= Rr - Ss$, wenn $r$ und $s$ die Coordinaten der Angriffspunkte von $R$ und $S$ bezeichnen. Diese Differenz kann man aber direct erhalten, wenn man die Momente aller gegebenen Kräfte $P'$, $P''$ ... $Q'$, $Q''$ ... in irgend einer Ordnung addirt und dabei jeder Kraft das positive oder negative Zeichen giebt, jenachdem sie zur Gruppe der $P$ oder zur Gruppe der $Q$ gehört. Demnach gilt der allgemeine Satz: Das Moment der Resultante eines Systemes irgendwie paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Componentenmomente, wobei alle Momente in Beziehung auf eine und dieselbe beliebige Ebene zu nehmen sind.

35. Coordinaten des Mittelpunktes paralleler Kräfte. Durch das vorige Theorem ist man in den Stand gesetzt, die Coordinaten des Mittelpunktes paralleler Kräfte unmittelbar aus den Coordinaten der Angriffspunkte dieser Kräfte herzuleiten indem man der Reihe nach die Momente der Kräfte in Beziehung auf die drei Coordinatenebenen berechnet. Sind nämlich $P$, $P'$, $P''$ ... die gegebenen positiven oder negativen Parallelkräfte $xyz$, $x'y'z'$, $x''z''y''$ ... ihre Angriffspunkte, und bezeichnen wir ferner die Resultante der Kräfte mit $R$ und ihren Angriffspunkt mit $x_1y_1z_1$, so haben wir folgende vier Gleichungen

$$R = P + P' + P'' + \dots$$
$$Rx_1 = Px + P'x' + P''x'' + \dots$$
$$Ry_1 = Py + P'y' + P''y'' + \dots$$
$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \dots$$

oder
$$R = \Sigma P,$$
$$x_1 = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma P}.$$

Dabei ist, wie erwähnt, der Fall auszunehmen, in welchem das Kräftesystem auf ein Kräftepaar zurückkommt, wobei $R = 0$ wird, ohne dass Gleichgewicht besteht. Vor der Hand mag diese Bemerkung genügen, da wir den bezeichneten Ausnahmefall späterhin genauer betrachten.

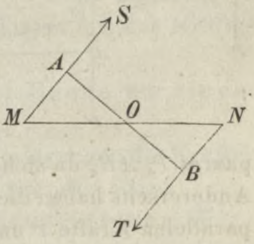
## Viertes Capitel.

# Theorie der Kräftepaare.

### Verlegung der Kräftepaare.

36. An den fest mit einander verbundenen Punkten $M$ und $N$ mögen zwei Kräfte, jede $= P$, nach den antiparallelen Richtungen $MS$ und $NT$ wirken; man hat dann ein Kräftepaar, in welchem der Winkel zwischen der Verbindungslinie der Angriffspunkte und der Kraftrichtung ein schiefer ist. Um dieses Paar durch ein anderes zu ersetzen, bei welchem jener Winkel einem rechten gleichkommt, legen wir durch den Halbirungspunkt $O$ der Geraden $MN$ eine Senkrechte $AB$ zu den Richtungen der antiparallelen Kräfte und versetzen die Kräfte nach den Durchschnitten $A$ und $B$, sodass nun ein neues Kräftepaar der verlangten Art entsteht.

Fig. 13.




J e d e m  s c h i e f w i n k l i g e n  K r ä f t e p a a r e  k a n n  a l s o  e i n  r e c h t w i n k l i g e s  m i t  d e r  n ä m l i c h e n  K r a f t  v e r s e h e n e s  P a a r  s u b s t i t u i r t  w e r d e n.

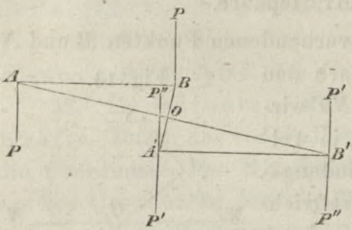
Ein Kräftepaar der letzten Art bezeichnen wir im Folgenden mit $\overline{P, AB}$; die zur Kraftrichtung senkrechte Gerade $AB$ möge der A r m (oder die B r e i t e) des Paares und das Product $P.AB$ das M o m e n t des Paares heissen.

Denkt man sich den Arm eines Paares als drehbar um seinen Mittelpunkt und zwar in dem Sinne wie die angebrachten Kräfte wirken, so bemerkt man augenblicklich, dass bei den in einer und derselben Ebene liegenden Kräftepaaren zwei entgegengesetzte

Drehungsrichtungen zu unterscheiden sind, d. h. dass es sowohl rechts- als linksdrehende Paare geben kann. Um die Drehungsrichtung eines Paares scharf zu bezeichnen, denken wir uns im Mittelpunkte des Armes eine zur Ebene des Paares senkrechte Gerade und längs derselben einen Beobachter mit den Füssen gegen die Ebene so gestellt, dass er die Drehung des Paares von der Linken zur Rechten vor sich gehen sieht. Die Richtung, nach welcher dieser Beobachter längs der Normalen hinsehen muss, bestimmt dann die Achsenrichtung des Paares; Kräftepaaren von entgegengesetzten Drehungsrichtungen entsprechen dann entgegengesetzte Achsenrichtungen.

37. Es sei $\overline{P, AB}$ ein Kräftepaar, $A'B'$ eine in derselben Ebene liegende Gerade parallel und gleich $AB$, endlich mögen an jedem der Punkte $A'$ und $B'$ zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $P'$ und $P''$ in der Art angebracht sein, dass $P'$ und $P''$ der Grösse und Richtung nach mit $P$ überein kommen; die Wirkung aller sechs Kräfte reducirt sich dann auf die des Kräftepaares $\overline{P, AB}$, da sich die übrigen vier Kräfte paarweis aufheben.

Fig. 14.



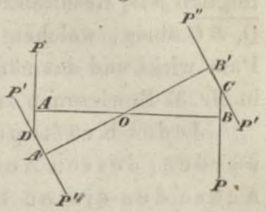
Andererseits haben die an $A$ und $B'$ angreifenden in gleichem Sinne parallelen Kräfte $P$ und $P''$ eine Resultante, welche $= P + P''$ ist und parallel $P$ im Mittelpunkte $O$ der Geraden $AB'$ angreift. Aus gleichen Gründen geben die an $A'$ und $B$ wirkenden Kräfte $P$ und $P''$ eine Resultante $P + P''$, welche im Mittelpunkte $O$ von $A'B$ angreift. Beide Resultanten sind gleich und wirken an demselben Punkte $O$ in entgegengesetztem Sinne; sie heben sich folglich auf und lassen nur das Paar $\overline{P', A'B'}$ übrig, welches nichts anderes als das erste parallel zu sich selbst verschobene Paar ist. Man wird ferner bemerken, dass diese Betrachtung ungeändert bleibt, wenn man sich $A'B'$ nicht in derselben, sondern in einer parallelen Ebene denkt, vorausgesetzt, dass diese mit jener fest verbunden ist. Demnach gilt der Satz:

Ein Kräftepaar darf ohne Aenderung seiner Wirkungsweise parallel zu sich selbst verschoben werden.

Behufs weiterer Untersuchung sei $\overline{P, AB}$ ein Kräftepaar, der

Arm desselben durch Drehung um seinen Mittelpunkt $O$ in eine andere Lage $A'B'$ versetzt, an jedem der Punkte $A'$ und $B'$ mögen zwei einander entgegengesetzte Kräfte senkrecht zu $A'B'$ wirken und alle diese Kräfte, nämlich $P'$ und $P''$ an $A'$, sowie $P'$ und $P''$ an $B'$, der Grösse nach $= P$ sein; sämmtliche sechs Kräfte kommen dann auf das anfangs genannte Kräftepaar zurück, weil sich die Kräfte $P'$, $P'$, $P''$, $P''$ gegenseitig zu zweien aufheben. Andererseits geben die gleichen Kräfte $P$ und $P''$ an $A$ und $A'$, welche man sich an den Durchschnitt $D$ ihrer Richtungen verlegt denken kann, eine nach $DO$ wirkende Resultante; ebenso lassen sich $P$ an $B$ und $P''$ an $B'$ nach dem Durchschnitte $C$ verlegen und hier zu einer nach $CO$ gerichteten Resultante vereinigen. Diese zwei Resultanten sind von gleicher Grösse und einander direct entgegengesetzt, weil ihre beiderseitigen Richtungen die Winkel $AOA' = BOB'$ halbiren; es heben sich also jene Resultanten auf und lassen nur das Kräftepaar $\overline{P', A'B'}$ übrig; d. h.:

Fig. 15.



Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene um einem beliebigen Winkel gedreht werden.

Denkt man sich die beiden erwähnten Verlegungen des Kräftepaares nach einander vorgenommen, so hat man den Satz:

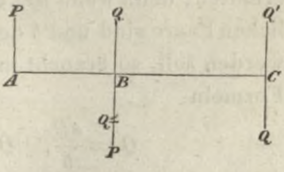
Ein Kräftepaar kann ohne Störung seiner Wirkungsweise beliebig versetzt werden, wenn nur seine Achse in demselben Sinne parallel bleibt und der neue Arm mit dem früheren fest verbunden ist.

38. Irgend ein Kräftepaar $\overline{P, AB}$ sei gegeben; wir verlängern seinen Arm $AB$ um eine beliebige Strecke $BC$ und bringen an den Punkten $B$, $C$ zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $Q$, $Q'$ an, für welche die Relation

$$Q \,.\, BC = P \,.\, AB$$

gilt; diese Kräfte heben sich zu je zweien gegenseitig auf und lassen folglich das ursprüngliche Paar ungestört. Die Kräfte $P$ an $A$ und $Q'$ an $C$ besitzen nun eine Resultante $= P + Q'$, deren Richtung in gleichem Sinne parallel mit $P$ und $Q'$ ist, und deren Angriffspunkt vermöge der obigen Gleichung nach $B$ fällt. An demselben Punkt wirkt aber

Fig. 16.



im entgegengesetztem Sinne die Kraft $P+Q=P+Q'$ und hebt folglich jene Resultante auf. Demnach bleibt nur das Kräftepaar $Q, BC$ übrig, welches in demselben Sinne wie das ursprüngliche Paar wirkt und das nämliche Moment besitzt. Diess giebt mit dem in Nr. 37 Bewiesenen zusammen den Satz:

Jedes Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, dessen Achse in gleichem Sinne parallel der Achse des ersten Paares ist, und dessen Moment dem Momente jenes Paares gleichkommt.

Die Wirkung eines Paares bestimmt sich hiernach einzig und allein durch die Richtung seiner Achse und durch sein Moment. Denken wir uns künftig das Moment jedes Kräftepaares als eine auf der Achse von deren Anfange aus abgeschnittene Strecke, so haben wir den Vortheil, Kräftepaare ebenso wie Einzelkräfte durch Strecken von bestimmter Richtung geometrisch darstellen zu können. Nur findet der Unterschied statt, dass diese Geraden bei Kräftepaaren parallel zu sich selbst beliebig verschoben werden dürfen, während sie bei Kräften bloss in ihrer eigenen Richtung fortgleiten können.

## Zusammensetzung der Kräftepaare.

39. Zusammensetzung für parallele Achsen. Wenn mehrere mit parallelen Achsen versehene Kräftepaare in verschiedenen (also parallelen) Ebenen liegen, so können sie zunächst in eine Ebene verlegt werden, und hier lässt sich jedes Paar durch ein anderes ersetzen, wenn letzteres nur dasselbe Moment besitzt und im gleichen Sinne wirkt. Diese Substitution kann so geschehen, dass die neuen Kräftepaare einen und denselben Arm erhalten, denn wenn $aP$, $a'P'$, $a''P''$ ... die Momente der ursprünglichen Paare sind und $b$ der gemeinschaftliche Arm der neuen Paare werden soll, so braucht man die Kräfte $Q$, $Q'$, $Q''$ ... nur nach den Formeln

$$Q=\frac{aP}{b}, \quad Q'=\frac{a'P'}{b}, \quad Q''=\frac{a''Q''}{b} \dots$$

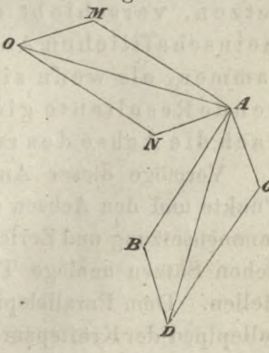
zu bestimmen um sofort $aP=bQ$, $a'P'=bQ'$, $a''P''=bQ''$ ... zu erhalten. Bringt man ferner die Arme der neuen Paare zur Deckung, so fallen die Richtungen aller der Kräfte zusammen, welche von Kräftepaaren gleichen Sinnes herrühren und es lassen sich an jedem Endpunkte des Armes $b$ die daselbst vorhandenen Kräfte zu einer einzigen Kraft vereinigen; diese beträgt soviel als die Differenz zwischen der Summe der rechtsdrehenden und der Summe der linksdrehenden Kräfte, und wirkt im Sinne der grösseren von beiden Summen. Demnach bleibt ein Kräftepaar mit dem Arme $b$ übrig, dessen Moment dem Producte aus $b$ in die vorhin genannte Kräftedifferenz gleichkommt also $= b\,(Q + Q' + Q'' + \ldots) = aP + a'P' + a''P''$ ist, wobei wir die Summe im algebraischen Sinne, d. h. die Momente als positiv oder negativ nehmen jenachdem die Paare rechts oder links drehende sind; das Vorzeichen der Summe bestimmt dann von selbst die Drehungsrichtung des resultirenden Paares. Letzteres kann nach den früheren Sätzen verlegt und umgeformt werden.

Denkt man sich die Momente der betreffenden Paare auf deren Achsenrichtungen aufgetragen und nennt jede solche Strecke die Achse des zugehörigen Paares, so lässt sich das erhaltene Resultat folgendermaassen zusammenfassen:

Um Kräftepaare mit parallelen Achsen zusammenzusetzen, verlegt man deren Achsen so, dass letztere einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt erhalten und führt die Zusammensetzung so aus, als ob die Achsen Kräfte wären; die erhaltene Resultante ist dann der Grösse und Richtung nach die Achse des resultirenden Paares.

40. Zusammensetzung für nicht parallele Achsen. Zwei beliebige Paare verlegen wir zunächst so, dass ihre Achsen einen und denselben Anfangspunkt $A$ bekommen und durch die Strecken $AB$, $AC$ dargestellt werden.

Fig. 17.




Die Ebenen der beiden Paare schneiden die Ebene $ABC$ in zwei Geraden $AM$, $AN$, welche beziehungsweis auf $AB$, $AC$ senkrecht sind und durch den Punkt $A$ gehen. Den beiden Paaren geben wir Arme, welche ihren Achsen gleich sind, nämlich $AM = AB$, $AN = AC$, und es besitzen dann die an den Armen wirkenden Kräfte eine und dieselbe, der Einheit gleiche Intensität. Endlich verlegen wir die Paare noch soweit, dass beide eine in gleichem Sinne in $A$ angreifende Kraft besitzen, dass also an $A$ zwei gleiche in gleichem Sinne wirkende Kräfte zusammenkommen. Dabei liegen $AM$ und $AN$ (die Momente der Paare) so, dass eine um $A$ ausgeführte Drehung von $90^0$, welche $AM$ nach $AB$ brächte, gleichzeitig das Zusammenfallen von $AN$ mit $AC$ bewirken würde.

Nach diesen Vorbereitungen verschieben wir das mit dem Arme $AM$ versehene Paar soweit parallel zu sich selbst, dass der Arm desselben nach $ON$ fällt; die eine seiner Kräfte hebt dann die an $N$ wirkende Kraft auf, und die ursprünglich vorhandenen vier Kräfte reduciren sich auf ein Kräftepaar, dessen Achse die Diagonale des Parallelogrammes $BACD$ ist; die Ebene des letzteren steht senkrecht auf der Ebene des Paares nach der gehörigen Seite. Da ferner die Kräfte des resultirenden Paares den Kräften der anfänglichen zwei Paare gleich sind, so muss auch sein Moment durch den Arm $AO$ oder durch die ihm gleiche Strecke $AD$ dargestellt sein; hiermit gelangt man zu dem Satze:

Zwei Kräftepaare mit nicht parallelen Achsen lassen sich zu einem einzigen Paare zusammensetzen, dessen Achse nach Richtung und Grösse durch die Diagonale desjenigen Parallelogrammes dargestellt wird, welches aus den Achsen der Componentenpaare gebildet ist.

Durch wiederholte Anwendung dieses Theoremes kann man beliebig viele Kräftepaare zu einem einzigen Kräftepaare vereinigen und überhaupt für alle Fälle folgende Regel aussprechen:

Um irgend welche Kräftepaare, deren Achsen beliebige Grössen und Richtungen haben, zusammenzusetzen, verschiebt man alle Achsen nach einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte und setzt sie so zusammen, als wenn sie Kräfte bedeuteten; die entstehende Resultante giebt dann der Grösse und Richtung nach die Achse des resultirenden Paares.

Vermöge dieser Analogie zwischen den Kräften an einem Punkte und den Achsen der Kräftepaare lassen sich den auf Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte an einem Punkte bezüglichen Sätzen analoge Theoreme für die Kräftepaare zur Seite stellen. Dem Parallelepiped der Kräfte z. B. entspricht das Parallepiped der Kräftepaare, auch bleiben die metrischen Relationen zwischen den Componenten und der Resultante die nämlichen für die Achsen der Componentenpaare und des Resultantenpaares. Diess wird keiner weiteren Auseinandersetzung bedürfen.

### Gleichgewichtsbedingungen für Kräftepaare.

41. Bei Kräftepaaren mit parallelen Achsen, also bei Kräftepaaren in derselben Ebene oder in Parallelebenen, ist es zum Gleichgewichte erforderlich und hinreichend, dass die algebraische Summe ihrer Momente verschwindet, denn eben diese Summe bildet das Moment des resultirenden Paares.

Bei nicht parallelen Achsen folgt aus der Analogie zwischen der Zusammensetzung der Kräfte und jener der Achsen, dass die algebraischen Summen der Achsenprojectionen auf drei nicht in einer Ebene liegende Gerade einzeln für sich verschwinden müssen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Liegen alle Achsen in einer und derselben Ebene oder, was Dasselbe ist, sind die Ebenen aller Kräftepaare senkrecht zu einer und derselben Ebene, so brauchen jene Projectionssummen nur in Beziehung auf zwei nicht parallele in der nämlichen Ebene liegende Gerade zu verschwinden.

## Fünftes Capitel.

# Gleichgewichtsbedingungen für ein vollkommen freies starres System.

### Allgemeine Reduction der Kräfte.

42. Die Wirkung einer am Punkte $M$ angreifenden Kraft wird nicht geändert, wenn man $M$ mit einem andern Punkte $N$ fest verbindet und an letzterem zwei gleich grosse und entgegengesetzte Kräfte anbringt; nimmt man diese parallel und gleich $P$, so hat man drei Kräfte, welche sich auch als Verbindung der Kraft $P$ an $N$ mit dem Kräftepaare $\overline{P, MN}$ ansehen lassen; d. h.

Jede Kraft lässt sich ersetzen durch eine gleiche und parallele Kraft an einem anderen fest mit dem ersten verbundenen Angriffspunkte und durch ein Kräftepaar zwischen beiden Angriffspunkten.

Bei mehreren Kräften an verschiedenen Punkten kann diese Substitution so vorgenommen werden, dass der Angriffspunkt ($N$) aller verlegten Kräfte derselbe ist; man erhält dann alle Kräfte parallel zu sich selbst an einen und denselben Punkt verlegt und ausserdem eine gleiche Anzahl von Kräftepaaren, deren Ebenen im Allgemeinen von einander verschieden sind. Alle jene Kräfte lassen sich zu einer Kraft, ebenso alle Kräftepaare zu einem einzigen Kräftepaar zusammenziehen, d. h.

Irgendwelche an verschiedenen fest mit mit einander verbundenen Angriffspunkten wirkende Kräfte lassen sich immer auf eine Kraft und ein Kräftepaar zurückführen.

Da nun eine Einzelkraft und ein Kräftepaar sich gegenseitig nicht aufheben können (weil ein Paar nicht durch eine Kraft ersetzbar ist) so bestehen die zum Gleichgewichte eines starren und freien Systemes erforderlichen und hinreichenden Bedingungen darin, dass sowohl die Kraft als dass Kräftepaar einzeln verschwinden. Jede dieser Bedingungen wird im Allgemeinen durch drei Gleichungen ausgedrückt, es gehören daher sechs Bedingungsgleichungen zum Gleichgewichte eines derartigen Systemes.

Bevor wir indessen die allgemeinen Formeln entwickeln, betrachten wir erst den speciellen Fall paralleler Kräfte, da es bequemer ist, denselben direct zu behandeln, als ihn aus den allgemeinen Untersuchungen herzuleiten.

### Gleichgewicht und Zusammensetzung paralleler Kräfte.

43. Wir setzen zunächst parallele Kräfte in einer Ebene voraus und legen durch einen beliebigen Punkt $O$ der nämlichen Ebene eine Gerade senkrecht zu der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte; diese Normale betrachten wir als Abscissenachse mit dem Anfangspunkte $O$. Die Lagen der einzelnen Kräfte sind vollständig bestimmt durch die Abscissen der Punkte, in welchen die Abscissenachse von den Kraftrichtungen geschnitten wird; selbstverständlich können die zu den einzelnen Kräften gehörigen Abscissen ebensowohl positiv als negativ sein.

Ist nun $P$ eine der parallelen Kräfte und $x$ die entsprechende Abscisse, so lässt sich $P$ durch eine an $O$ wirkende, im gleichen Sinne parallele und gleichgrosse Kraft und durch ein Kräftepaar mit dem Momente $Px$ ersetzen. Hierbei ist auf das Vorzeichen von $Px$ zu achten, und indem man die vier verschiedenen Combinationen der Vorzeichen von $P$ und $x$ durchgeht, bemerkt man leicht, dass der Sinn des Kräftepaares sich in den entgegengesetzten umändert, wenn eine der Grössen $P$ und $x$ negativ wird, dass dagegen der Sinn des Kräftepaares bei gleichen Vorzeichen von $P$ und $x$ derselbe bleibt; das Product $Px$ hat demnach für alle Paare des entgegengesetzten Sinnes das entgegengesetzte Zeichen. Die algebraische Summe aller Momente nämlich

$$Px + P'x' + P''x'' + \ldots = \Sigma(Px)$$

giebt nun das Moment des resultirenden Paares und durch ihr Vorzeichen den Sinn desselben; ebenso bestimmt die algebraische Summe

$$P + P' + P'' + \ldots = \Sigma P$$

die Grösse und Richtung der parallel nach $O$ verlegten Kräfte. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind jetzt

$$\Sigma P = 0 \text{ und } \Sigma(Px) = 0;$$

sie lassen sich leicht in Worte übertragen, wenn man unter dem Momente einer Kraft in Beziehung auf einem Punkt das Product aus der Kraft in die Entfernung des Punktes von der Geraden, längs welcher die Kraft wirkt, versteht; man hat dann den Satz:

Zum Gleichgewichte paralleler Kräfte, welche in einer Ebene an einem freien Systeme fest mit einander verbundener Punkte wirken, ist es nothwendig und hinreichend, dass erstens die algebraische Summe jener Kräfte verschwindet, und dass zweitens die algebraische Summe ihrer Momente in Beziehung auf irgend einen Punkt derselben Ebene gleich Null ist.

Wenn die erwähnten Bedingungen in Beziehung auf einen Punkt der Ebene erfüllt sind, so findet Gleichgewicht statt und folglich muss die Summe der Momente aller Kräfte auch in Beziehung auf jeden anderen Punkt der Ebene verschwinden. Es würde keine Schwierigkeit haben, diesen Satz direct aus den beiden Bedingungsgleichungen herzuleiten.

44. Bei nicht vorhandenem Gleichgewichte, d. h. wenn nicht gleichzeitig $\Sigma P = 0$ und $\Sigma(Px) = 0$ ist, kann man nach der Resultante des Kräftesystems fragen, vorausgesetzt, dass eine solche existirt. Ist nun $R$ ihr positiver oder negativer Werth und $x_1$ die ihr entsprechende Abscisse, so kommt das System ins Gleichgewicht, sobald eine der Resultante $R$ gleiche und entgegengesetzte Kraft hinzutritt, man hat daher

$$-R + \Sigma P = 0, \qquad -Rx_1 + \Sigma(Px) = 0,$$

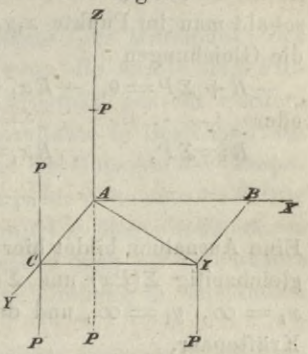
woraus folgt

$$R = \Sigma P, \qquad Rx_1 = \Sigma(Px) \text{ oder } x_1 = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}.$$

Bei dieser Bestimmung der Resultante muss der Fall ausgenommen werden, in welchem $\Sigma P = 0$ ist ohne dass zugleich $\Sigma(Px)$ verschwindet; es wird nämlich unter diesen Umständen $x_1 = \infty$ und das Kräftesystem reducirt sich auf ein Kräftepaar. In jedem anderen Falle existirt eine Resultante gleich der algebraischen Summe der Componenten, und die Gerade, längs welcher sie wirkt, liegt von $O$ entfernt um eine Strecke gleich der algebraischen Summe der Momente dividirt durch die algebraische Summe der Kräfte.

45. Um für parallele nicht in einer Ebene liegende Kräfte die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen zu finden, legen wir zunächst eine auf der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte senkrechte Ebene und ferner irgend zwei den Kräften parallele Ebenen. Die beiden letzteren Ebenen schneiden die erste in zwei Geraden; diese nehmen wir zu Coordinatenachsen der $x$ und der $y$, wobei wir als bekannt die Coordinaten der Punkte voraussetzen, in denen die Kräfte, oder die sie repräsentirenden Geraden, die $xy$-Ebene schneiden. Ein solcher Punkt sei z. B. $I$ und seine Coordinaten $AB = x$, $AC = y$; letztere sind identisch mit den beiden ersten Coordinaten des eigentlichen Angriffspunktes $M$ der betreffenden Kraft, wenn man sich diesen Punkt auf das zu Grunde liegende Coordinatensystem der $x$, $y$, $z$ bezogen denkt.

Fig. 18.




Die an $M$ parallel zur $z$-Achse wirkende Kraft $P$, deren Richtung durch $I$ geht, lässt sich durch eine gleiche und in gleichem Sinne parallele Kraft $P$ an $A$ und durch das Kräftepaar $\overline{P, AI}$ ersetzen. Denken wir uns ferner an $C$ zwei entgegengesetzte Kräfte beide parallel und gleich $P$ angebracht, so dürfen wir das erwähnte Kräftepaar in die beiden Paare $\overline{P, AC}$ und $\overline{P, CI}$ zerlegen, von denen das letztere parallel zu sich selbst in die Ebene $xz$ verschoben werden kann; statt des Kräftepaares $\overline{P, AI}$ haben wir dann die Paare $\overline{P, AC}$ und $\overline{P, AB}$. Das erste liegt in der Ebene $yz$ und besitzt das Moment $Py$, das zweite liegt in der $xz$-Ebene und sein Moment ist $Px$. Hierbei überzeugt man sich wie früher leicht, dass diese Momente positiv oder negativ sind, jenachdem die betreffenden Paare in dem einen oder im entgegengesetzten Sinne wirken. Zerlegen wir auf gleiche Weise alle Kräftepaare und vereinigen dann die in einer Ebene liegenden Paare, so reduciren wir alle Paare auf zwei, welche in den Ebenen $xz$, $yz$ liegen und beziehungsweise die Momente $\Sigma(Px)$, $\Sigma(Py)$ besitzen. Ausserdem bleiben noch die nach $A$ parallel verlegten Kräfte, deren Resultante $= \Sigma P$ ist.

Zum Gleichgewichte gehört nun, dass einerseits $\Sigma P = 0$ ist und dass andererseits das resultirende Paar, welches aus den beiden zuletzt erhaltenen Paaren construirt werden könnte, gleichfalls verschwindet. Diess ist, weil jene Paare nicht in parallelen Ebenen liegen, nur möglich, wenn die Paare einzeln verschwinden; die Bedingungen des Gleichgewichtes sind folglich

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma(Px) = 0, \quad \Sigma(Py) = 0.$$

46. Bei nicht vorhandenem Gleichgewichte kann man nach der Resultante der Kräfte fragen, vorausgesetzt, dass eine solche existirt. Nennen wir $R$ ihre Grösse und $x_1 y_1$ den Punkt, in welchem sie die Ebene $xy$ trifft, so wird das Gleichgewicht herbeigeführt, sobald man im Punkte $x_1 y_1$ die Kraft $-R$ anbringt; diess giebt die Gleichungen

$$-R + \Sigma P = 0, \quad -R x_1 + \Sigma(Px) = 0, \quad -R y_1 + \Sigma(Py) = 0,$$

oder

$$R = \Sigma P, \qquad R x_1 = \Sigma(Px), \qquad R y_1 = \Sigma(Py),$$

$$x_1 = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}, \qquad y_1 = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}.$$

Eine Ausnahme bildet hier der Fall, wenn $\Sigma P = 0$ ist, ohne dass gleichzeitig $\Sigma(Px)$ und $\Sigma(Py)$ verschwinden; man erhält dann $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$, und das Kräftesystem reducirt sich auf ein Kräftepaar.

47. Wie schon bemerkt wurde, bedeuten in den vorigen Formeln $x$ und $y$ die Coordinaten des Punktes, in welchem die Richtung der Kraft $P$ die $xy$-Ebene schneidet, zugleich können $x$ und $y$ auch als die beiden ersten Coordinaten des eigentlichen Angriffspunktes von $P$ betrachtet werden, wobei der Winkel zwischen den Ebenen $xy$ und $yz$ willkührlich bleibt; die dritte Coordinate ($z$) des Angriffspunktes jeder Kraft kommt in den Formeln nicht vor. Verstehen wir nun unter Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Ebene das Product aus der Kraft in den senkrechten oder schiefen Abstand ihres Angriffspunktes von jener Ebene, so können wir die erhaltenen Resultate folgendermaassen in Worte übertragen:

1) Zum Gleichgewichte eines Systemes paralleler Kräfte ist es erforderlich und hinreichend, dass erstens die algebraische Summe der Kräfte verchwindet und dass zweitens die algebraischen Summen ihrer Momente in Beziehung auf zwei Ebenen, die sich in einer den Kräften parallelen Geraden schneiden, einzeln gleich Null sind.

2) Die Resultante eines Systemes paralleler Kräfte ist die algebraische Summe der letzteren; ihr Moment in Beziehung auf irgend eine den Kräften parallele Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten.

3) Die Kräfte haben nur in dem einen Falle keine Resultante, wo ihre Summe verschwindet, ohne dass gleichzeitig die Summen ihrer Momente in Beziehung auf zwei sich schneidende den Kräften parallele Ebenen einzeln verschwinden.

48. Der Angriffspunkt der Resultante (der Mittelpunkt der parallelen Kräfte) bleibt ungeändert, wenn die Kräfte ohne Störung ihres Parallelismus um ihre Angriffspunkte gedreht werden. Hieraus folgt, dass das Moment der Resultante in Beziehung auf irgend eine Ebene gleich ist der Summe der Momente der Componenten in Beziehung auf dieselbe Ebene; denn wenn man die Kräfte soweit dreht, dass sie dieser Ebene parallel zu liegen kommen, so gilt der Satz nach Nr. 2 und bleibt nachher auch für jede andere Lage richtig, weil die Momente bei der Drehung in eine andere Lage keine Aenderung erleiden.

49. Der positive oder negative, normale oder schiefe Abstand des Mittelpunktes der parallelen Kräfte von irgend einer Ebene ist hiernach gleich der algebraischen Summe der Momente jener Kräfte in Beziehung auf diese Ebene dividirt durch die algebraische Summe der Kräfte. Man erhält folglich die drei rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, wenn man die genannten Quotienten in Beziehung auf die drei Coordinatenebenen berechnet.

Soll der Mittelpunkt der parallelen Kräfte in eine bestimmte Ebene zu liegen kommen, so ist es nothwendig und hinreichend, dass die Momentensumme der Kräfte in Beziehung auf diese Ebene verschwindet.

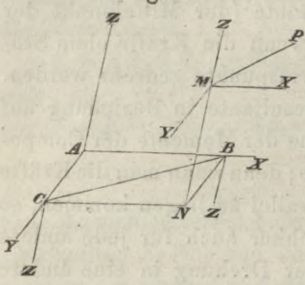
### Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräfte im Raume.

50. Obschon die Zugrundelegung eines rechtwinklichen Coordinatensystemes am bequemsten für die Rechnung sein würde, so gehen wir doch, um die Frage ganz allgemein zu behandeln, von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme aus. Wir denken uns

dabei beliebige fest mit einander verbundene Punkte $M, M', M''\ldots$ durch ihre schiefwinkligen Coordinaten $xyz$, $x'y'z'$, $x''y''z''\ldots$ bestimmt und an diesen Punkten die Kräfte $P$, $P'$, $P''\ldots$ nach irgend welchen Richtungen im Raume wirkend. Jede dieser Kräfte zerlegen wir in drei Componenten parallel zu den Coordinatenachsen, z. B. $P$ in $X$, $Y$, $Z$, und betrachten diese Componenten als positiv oder negativ, jenachdem sie im Sinne der gleichnamigen positiven oder negativen Coordinaten wirken.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, geben wir dem Punkte $M$ die drei positiven Coordinaten $AB = x$, $AC = y$, $NM = z$ und denken uns die in $M$ angreifenden Componenten $X$, $Y$, $Z$ als positiv. Die Kraft $Z$ an $M$ ersetzen wir nun durch die gleiche und in gleichem Sinne parallele Kraft $Z$ an $A$ und durch das in der Ebene $MAN$ liegende Kräftepaar $\overline{Z, AM} = \overline{Z, AN}$; das letztere zerlegen wir in die Paare $\overline{Z, AB}$ und $\overline{Z, AC}$, welche beziehungsweise in den Ebenen $zx$ und $zy$ liegen. Beide Paare sind schiefwinklige aber nach Nr. 36 leicht in rechtwinklige zu verwandeln, wenn man $AB$ mit dem Sinus des Coordinatenwinkels $zx$ und $AC$ mit $\sin(zy)$ multiplicirt; bezeichnen wir überhaupt die Sinus der Coordinatenwinkel $xy$, $xz$, $yz$ der Reihe nach mit $c$, $b$, $a$, so ist, einstweilen abgesehen vom Vorzeichen, $Zxb$ das Moment von $\overline{Z, AB}$ und $Zya$ das Moment von $\overline{Z, AC}$.

Fig. 19.




Hinsichtlich der Vorzeichen der Momente wollen wir die Bestimmung treffen, dass ein Paar als positiv gelten soll, wenn seine Achse von der Ebene des Paares aus nach derselben Seite des Raumes hingeht, wie die positive Seite der dritten in jener Ebene nicht begriffenen Coordinatenachse; im entgegengesetzten Falle bringen wir das Paar als negativ in Rechnung. Hiernach ist das Paar $\overline{Z, AB}$ negativ, mithin sein Moment $= -bxZ$, dagegen das Paar $\overline{Z, AC}$ positiv mit dem Momente $+ayZ$.

Jede der Kräfte $X$ und $Y$ giebt auf ähnliche Weise eine gleiche und im gleichen Sinne parallele Kraft an $A$ nebst einem Paare, dessen Moment sich nach dem vorigen Verfahren finden oder auch durch blosse Buchstabenvertauschung ableiten lässt. Die Kraft $Y$ liefert in der $yz$-Ebene ein Paar mit dem Momente $-azY$ und in der $yx$-Ebene ein Paar mit dem Momente $+cxY$; die Kraft $X$ giebt in der $xy$-Ebene ein Paar mit dem Momente $-cyX$ und in der $xz$-Ebene ein Paar mit dem Momente $+bzX$.

Stellen wir nun alle längs derselben Geraden wirkenden Kräfte und alle in denselben Ebenen thätigen Paare zusammen, so haben wir

in der $x$-Achse die Kräfte $X$, $X'$, $X''$ ....
„ „ $y$ „ „ „ $Y$, $Y'$, $Y''$ ....
„ „ $z$ „ „ „ $Z$, $Z'$, $Z''$ ....
in der $yz$-Ebene die Paare $ayZ$, $-azY$, $ay'Z'$, $-az'Y'$ ....
„ „ $zx$ „ „ „ $bzX$, $-bxZ$, $bz'X'$, $-bx'Z'$ ....
„ „ $xy$ „ „ „ $cxY$, $-cyX$, $cx'X'$, $-cy'X'$ ....

Von der Allgemeinheit dieser Ausdrücke überzeugt man sich wie früher leicht, wenn man für irgend ein Paar die vier möglichen Combinationen der Vorzeichen von Kraft und Coordinate durchgeht.

Durch Vereinigung der in einer Horizontalreihe stehenden Kräfte, sowie der entsprechenden Kräftepaare reducirt sich das ganze Kräftesystem auf die drei längs der Coordinatenachsen wirkenden Kräfte

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z,$$

und auf drei in den gegenüberliegenden Coordinatenebenen thätige Kräftepaare, deren Momente sind

$$a\Sigma(yZ - zY), \quad b\Sigma(zX - yZ), \quad c\Sigma(xY - yX).$$

Soll nun Gleichgewicht stattfinden, so müssen ebensowohl jene Kräfte als diese Paare einzeln verschwinden; diess giebt nach Weglassung der gemeinschaftlichen constanten Faktoren

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0;$$

diess sind die zum Gleichgewichte eines vollkommen freien starren Systemes nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

Für den speciellen Fall eines rechtwinkligen Coordinatensystemes mögen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung einer Kraft $P$ mit den positiven Seiten der Coordinatenachsen einschliesst; wir haben dann

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma,$$

mithin werden die sechs Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0, \quad \Sigma(P\cos\beta) = 0, \quad \Sigma(P\cos\gamma) = 0,$$
$$\Sigma[P(y\cos\gamma - z\cos\beta)] = 0, \quad \Sigma[P(z\cos\alpha - x\cos\gamma)] = 0,$$
$$\Sigma[P(x\cos\beta - y\cos\alpha)] = 0.$$

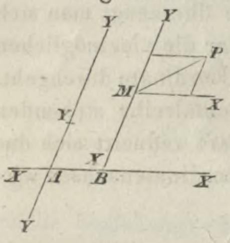
## Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene.

51. Wenn alle Kräfte in einer und derselben Ebene wirken, so kann man diese zur $xy$-Ebene nehmen und es sind dann ebensowohl die mit $z$ bezeichneten Coordinaten als auch die gleichnamigen Kräfte gleich Null; die sechs Gleichungen des Gleichgewichts reduciren sich dann auf die folgenden drei

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Zu diesen speciellen Formeln gelangt man unmittelbar, wenn man das vorhin benutzte allgemeine Verfahren auf den vorliegenden besonderen Fall anwendet. Man nimmt dann zwei in der

Fig. 20.




Ebene der Kräfte liegende nicht parallele Gerade $AX$, $AY$ zu Achsen der $x$ und $y$ und zerlegt vorerst die Kraft $P$ an $M$ in zwei diesen Achsen parallele Componenten $X$ und $Y$. Hierauf ersetzt man $X$ und $M$ durch eine gleiche und in gleichem Sinne parallele Kraft an $A$ in Verbindung mit dem Kräftepaare $\overline{X, BM}$, ebenso $Y$ an $M$ durch eine gleiche und parallele Kraft an $A$ nebst dem Kräftepaare $\overline{Y, AB}$. Vorausgesetzt, dass $x$, $y$ und ebenso $X$, $Y$ nach den positiven Seiten der Coordinatenachsen gerichtet sind, hat man zwei Paare von entgegengesetztem Sinne, welche zusammen ein Paar mit dem Momente $c\,(xY - yX)$ geben; diese Bestimmung bleibt aber auch für alle Vorzeichen von $x$, $y$, $X$, $Y$ richtig, wenn man immer festhält, dass Paare von entgegengesetztem Drehungssinne durch die entgegengesetzten Vorzeichen ihrer Momente unterschieden werden. Die in der Richtung der $x$ wirkenden Kräfte geben nun zusammen die Kraft $\Sigma X$; die Kräfte in der Richtung der $y$ liefern die Resultante $\Sigma Y$, endlich setzen sich alle Kräftepaare zu einem einzigen zusammen, dessen Moment $= c\,\Sigma\,(xY - yX)$ ist. Die zum Gleichgewichte nothwendigen und hinreichenden Bedingungen lauten daher

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

52. Die letzte dieser Gleichungen kann unter einer anderen Form dargestellt werden, wenn man jede Kraft $P$ in eine gleiche und in gleichem Sinne parallele Kraft an $A$ verbunden mit einem Kräftepaare mit dem Momente $Pp$ ersetzt, wo $p$ den Abstand der Kraft $P$ vom Punkte $A$ bezeichnet. Zerlegt man wie früher die

an $A$ wirkende Kraft $P$ in ihre längs der Coordinatenachsen wirkenden Componenten $X$ und $Y$, und vereinigt ferner alle Paare, indem man deren Momente wieder mit gehörigen Zeichen versieht, so gelangt man zu den Kräften $\Sigma X$, $\Sigma Y$ und zu einem Paare mit dem Momente $\Sigma(Pp)$; die Gleichungen des Gleichgewichtes sind dann

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Pp) = 0.$$

Nur die letzte Gleichgewichtsbedingung erscheint hier in anderer Form, sie besteht darin, dass die Summe der Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der nämlichen Ebene verschwinden muss.

## Sechstes Capitel.

# Gleichgewichtsbedingungen für ein nicht völlig freies System.

### System mit einem festen Punkte.

53. Wenn das Punktesystem einen festen Punkt enthält, so nehmen wir denselben zum Coordinatenanfang $A$ und es hat dies zur Folge, dass die drei an diesem Punkte wirkenden Kräfte $\Sigma X$, $\Sigma Y$, $\Sigma Z$ durch den Widerstand des Punktes aufgehoben werden. Sollten nun die noch übrigen drei Kräftepaare nicht im Gleichgewichte sein, so würden sie ein gewisses Resultantenpaar geben; dieses liesse sich so verlegen, dass eine seiner Kräfte durch den festen Punkt ginge, also aufgehoben würde, und es bliebe dann eine nicht durch den festen Punkt gehende Kraft übrig, welche das System in Bewegung setzen müsste. Man sieht hieraus, dass der Zustand der Ruhe, d. h. des Gleichgewichtes nur dann eintreten kann, wenn die genannten Paare sich ganz ebenso wie bei einem völlig freien Systeme aufheben, wozu die Bedingungen

$$\Sigma(yZ-zY)=0, \quad \Sigma(zX-xZ)=0, \quad \Sigma(xY-yX)=0$$

erforderlich und hinreichend sind.

Da sich die Paare unabhängig von dem festen Punkte aufheben, so üben sie auch keine Wirkung auf ihn aus und streben nur das System zu zerbrechen. Der feste Punkt wird nur von der Resultante der Kräfte $\Sigma X$, $\Sigma Y$, $\Sigma Z$ sollicitirt, und diese Resultante ist gleich und entgegengesetzt dem Widerstande, welchen der Punkt zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes darbieten muss.

Ein Körper, welcher sich frei um einen festen Punkt drehen kann, bildet die unter dem Namen des **Hebels** bekannte einfache Maschine; der feste Punkt heisst sein **Stützpunkt**. Dem Vorigen zufolge findet bei Kräften am Hebel Gleichgewicht statt, wenn die von der parallelen Verschiebung der Kräfte nach dem Stützpunkte herrührenden Paare sich aufheben. Bei zwei Kräften am Hebel gehört hierzu, dass sie mit dem Stützpunkte in einer Ebene liegen und dass die von ihnen erzeugten Paare gleiche Momente von entgegengesetztem Zeichen haben. Die Resultante aller parallel nach dem Stützpunkte verschobenen Kräfte muss durch die Festigkeit des Körpers aufgehoben werden und giebt die Belastung des Hebels. Liegt der Hebel auf einer Fläche, auf der er frei gleiten kann, so ist zum Gleichgewichte erforderlich, dass die erwähnte Resultante normal auf der betreffenden Fläche steht.

## System mit einer festen Achse.

54. Wenn zwei Punkte eines Systems fest sind, so bleiben alle Punkte ihrer geraden Verbindungslinie in unveränderlicher Lage, und der Körper kann sich dann nur noch um diese Gerade drehen, deren Punkte einen unbegrenzten Widerstand nach jeder Richtung hin darbieten. Die feste Gerade nehmen wir zur Achse der $z$ und heben dadurch die drei Kräfte $\Sigma X$, $\Sigma Y$, $\Sigma Z$ auf zugleich auch die zwei in den Ebenen $xz$ und $yz$ liegenden Paare, weil deren Arme in die Achse selbst versetzt werden können. Demnach bleibt nur noch das in der Ebene $xy$ liegende Paar $c\Sigma(xY - yX)$ übrig, welches durch die feste Achse nicht aufgehoben werden kann. Die in diesem Falle erforderliche und genügende Bedingung des Gleichgewichtes besteht in der einzigen Gleichung

$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

55. Um die auf die feste Achse ausgeübte Wirkung der Kräfte kennen zu lernen, muss man die von der Achse aufgehobenen Kräfte zusammensetzen. Das in der Ebene $xz$ liegende Paar $b\Sigma(zX - xZ)$ und die Kraft $\Sigma X$ geben zusammen eine Einzelkraft, wofern nicht $\Sigma X = 0$ ist, in welchem Falle nur das genannte Paar übrig bleibt; analog verhält es sich in der Ebene $yz$. Ausser diesen Einwirkungen ist noch die Kraft $\Sigma Z$ vorhanden, welche das System längs der Achse zu verschieben strebt. Die von der Achse dargebotenen Widerstände sind diesen Kräften gleich und entgegengesetzt.

Wenn nur zwei Punkte des Systemes fest sind, so können die

Widerstände auch nur von diesen Punkten herrühren; man hat dann alle die Achse treffenden Kräfte in Componenten zu zerlegen, welche durch jene Punkte gehen. Die längs der Verbindungslinie beider Punkte wirkende Kraft kann auf unendlich viel Arten in zwei an diesen Punkten thätige Kräfte zerlegt werden. Die Gesammtheit aller dieser Kräfte bestimmt die Einwirkung, die jene Punkte erleiden und zugleich den Widerstand, welchen sie zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes aufbieten müssen. Aehnlich verfährt man, wenn mehrere auf einer Geraden liegende feste Punkte vorhanden sind.

Beispiele hierzu bieten die unter dem Namen der Rolle und des Göpels bekannten einfachen Maschinen; jede von ihnen besteht in einem Körper, welcher sich um eine feste Achse drehen nicht aber längs derselben gleiten kann. Aus dem Vorigen erkennt man leicht die Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften an einer solchen Maschine, sowie den Druck, welcher auf die Achse ausgeübt wird. Reduciren sich die Kräfte auf zwei, deren Richtungen in irgendwelchen Normalebenen zur Achse liegen, so besteht die Gleichgewichtsbedingung darin, dass sich die Kräfte umgekehrt wie ihre Abstände von der Achse verhalten.

56. Wir wollen endlich noch die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall aufsuchen, dass der Körper die Freiheit hat, längs der festen Achse zu gleiten und sich gleichzeitig um dieselbe zu drehen. Die feste Achse hebt unter diesen Umständen einzig und allein die zu ihr normalen Kräfte auf, man muss daher jede die Achse treffende Kraft in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine längs der Achse wirkt und die andere darauf senkrecht steht. Bedienen wir uns der für diesen Fall bequemeren rechtwinkligen Coordinaten, so erhalten wir als Bedingungen des Gleichgewichtes die beiden Gleichungen

$$\Sigma (P \cos \gamma) = 0, \quad \Sigma \left\{ P (x \cos \beta - y \cos \alpha) \right\} = 0.$$

Den Widerstand der Achse findet man dadurch, dass man ebensowohl die längs der Achsen der $x$ und $y$ wirkenden Kräfte als die in den Ebenen $zx$ und $zy$ thätigen Kräftepaare zusammensetzt.

Kann der Körper nur gleiten ohne sich zu drehen, so bleibt als einzige Bedingung des Gleichgewichtes: $\Sigma (P \cos \gamma) = 0$; das in der Ebene $xy$ liegende Paar bestimmt dann den Widerstand, womit die Achse gegen die Torsion reagirt.

57. Die besprochenen speciellen Fälle führen zu einer eleganten Interpretation der allgemeinen sechs Bedingungen des Gleichgewichtes für ein vollkommen freies System (Nr. 50). Betrachtet man nämlich die drei rechtwinkligen Coordinatenachsen, auf welche man das System gewöhnlich bezieht, als feste Gerade, so sagen die Gleichungen

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0, \quad \Sigma(P\cos\beta) = 0, \quad \Sigma(P\cos\gamma) = 0,$$

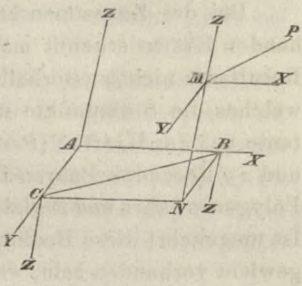
dass das System keine Verschiebungen längs der Achsen gestattet; die übrigen drei Gleichungen

$$\Sigma[P(y\cos\gamma - z\cos\beta)] = 0, \quad \Sigma[P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,$$
$$\Sigma[P(x\cos\beta - y\cos\alpha)] = 0$$

bedeuten, dass keine Drehungen um die Achsen möglich sind. Mit einem Worte, die auf ein freies System wirkenden Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn sie weder eine Verschiebung des Systemes längs einer der Achsen noch eine Drehung desselben um eine der Achsen hervorbringen.

Die letzten drei Bedingungen können auf eine andere Form gebracht werden, deren Kenntniss nicht überflüssig ist. Legt man nämlich durch den Angriffspunkt $M$ der Kraft $P$ eine zu $AZ$ senkrechte Ebene, welche die $z$-Achse in $O$ schneidet, und zerfällt die Kraft $P$ in zwei Componenten, deren eine parallel $AZ$ ist und deren andere in die genannte Parallelebene fällt, so hat man $P$ durch die Kräfte $P\cos\gamma$, $P\sin\gamma$, ersetzt und dabei ist $P\sin\gamma$ die Resultante der zu $AX$ und $AY$ parallelen Kräfte $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$. Das Moment von $P\sin\gamma = Q$ in Beziehung auf $O$ nennen wir das Moment der Kraft $P$ bezogen auf die $z$-Achse, es ist gleich der algebraischen Summe der Momente von $P\cos\alpha$ und $P\cos\beta$, nämlich

Fig. 19.




$$= P(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Die drei letzten Bedingungen des Gleichgewichts drücken also aus, dass die algebraischen Summen der Momente aller Kräfte, bezogen auf drei rechtwinklige Achsen, verschwinden müssen. Der Abstand des Punktes $O$ von der Kraft $Q$ kommt überein mit der Entfernung des Punktes $O$ von einer Ebene, welche die Kraft $P$ in sich enthält und der $z$-Achse parallel liegt; jener Abstand ist also die kürzeste Entfernung der Kraft $P$ von der $z$-Achse. Man kann daher auch sagen, dass das Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Gerade gleich ist dem Producte aus der kürzesten Entfernung beider Geraden in die zur ersten Geraden senkrechte Componente der Kraft.

### Stützung eines Körpers durch eine feste Ebene.

58. Die Ebene, worauf sich ein Körper mit einer beliebigen Anzahl seiner Punkte stützt, nehmen wir zur Coordinatenebene der $x$ und $y$. Sie entwickelt einen gewissen Widerstand, d. i. normale in gleichem Sinne thätige Kräfte, welche in den Berührungspunkten angreifen. Diese Kräfte haben nothwendig eine normale, ihrer Summe gleich Resultante; es müssen daher auch die an dem Körper angebrachten Kräfte eine der $z$-Achse parallele Resultante geben, wenn Gleichgewicht bestehen soll; demnach gehören zu letzterem die Bedingungen

$$\Sigma(P\cos\alpha)=0,\quad \Sigma(P\cos\beta)=0,\quad \Sigma\left\{P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\right\}=0.$$

Bei der Zusammensetzung der von der festen Ebene ausgehenden Kräfte erkennt man ferner, dass der Angriffspunkt ihrer Resultante nicht ausserhalb des convexen Polygones liegen kann, welches die Stützpunkte umfasst; es muss daher auch die Resultante aus der Kraft $\Sigma(P\cos\gamma)$ und den beiden in den Ebenen $zx$ und $zy$ liegenden Paaren ihren Angriffspunkt innerhalb desselben Polygones haben und zugleich den Körper gegen die Ebene drücken. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so muss auch dass Gleichgewicht vorhanden sein, weil man die genannte Resultante in normal zur Ebene gerichtete an den Stützpunkten angreifende Componenten zerlegen kann.

Diese Componenten haben nur den drei durch die Theorie der parallelen Kräfte gegebenen Bedingungen zu genügen und werden daher unbestimmt, sobald mehr als drei Stützpunkte gegeben sind; dasselbe findet statt bei mehr als zwei in gerader Linie liegenden Stützpunkten. Im letztern Falle braucht der Angriffspunkt der Resultante nur in diese Gerade zu fallen. Ist endlich nur ein Stützpunkt vorhanden, so muss die Richtung der Resultante durch ihn hindurchgehen.

### Resultante eines räumlichen Kräftesystemes.

59. Wenn ein System von nicht in Gleichgewichte befindlichen Kräften auf eine Einzelkraft zurückführbar sein soll, so ist es erforderlich und hinreichend, dass durch Hinzufügung einer passenden Kraft Gleichgewicht eintritt, denn das System lässt sich dann durch eine dieser Kraft gleiche und entgegengesetzte Kraft ersetzen. Andererseits kann, wie wir gesehen haben, die Gesammtheit aller an einem starren Körper wirkenden Kräfte auf eine Einzelkraft und auf ein Kräftepaar reducirt werden, folglich muss bei eintretendem Gleichgewichte die genannte Einzelkraft mit der hinzugefügten Kraft zusammen das noch übrige Kräftepaar aufheben; d. h. beide Einzelkräfte müssen ein Paar bilden, welches jenem Kräftepaare gleich und entgegengesetzt ist. Hierzu gehört, dass die resultirende Einzelkraft parallel der Ebene des resultirenden Paares ist und nicht verschwindet. Wenn umgekehrt diese Bedingungen stattfinden, so existirt auch immer eine Kraft, welche mit der resultirenden Einzelkraft zusammen ein dem Resultantenpaare gleiches und entgegengesetztes Paar bildet, mithin lässt sich in diesem Falle das Kräftesystem auf eine einzelne Kraft zurückführen.

60. Um diese Bedingungen allgemein analytisch auszudrücken, legen wir ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und nennen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ die den Coordinatenachsen parallelen Componenten der Resultante des Kräftesystemes, sowie $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante; es muss dann Gleichgewicht stattfinden, sobald man den bisherigen Kräften noch die Kräfte

$$-X_1, \quad -Y_1, \quad -Z_1$$

hinzufügt. Aus den allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes erhalten wir nun, wenn zur Abkürzung

$$\Sigma X = A, \quad \Sigma Y = B, \quad \Sigma Z = C,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = L, \quad \Sigma(zX - xZ) = M, \quad \Sigma(xY - yX) = N$$

gesetzt wird, die folgenden sechs Gleichungen

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B, \quad Z_1 = C,$$
$$y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = L, \quad z_1 X_1 - x_1 Z_1 = M, \quad x_1 Y_1 - y_1 X_1 = N,$$

welche für den vorliegenden Fall nothwendig und hinreichend sind. Die ersten drei Gleichungen bestimmen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, mithin auch die gesuchte Resultante sowohl der Grösse als der Richtung nach; die drei übrigen Gleichungen, denen man auch die Form

$$Cy_1 - Bz_1 = L, \quad Az_1 - Cx_1 = M, \quad Bx_1 - Ay_1 = N$$

geben kann, führen zur Kenntniss von $x_1, y_1, z_1$. Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $A$, $B$, $C$ und addirt die Producte, so bleibt

$$AL + BM + CN = 0$$

als Bedingung für die Möglichkeit von $x_1, y_1, z_1$, d. h. als Bedingung für die Existenz einer Resultante. Die vorigen drei Gleichungen reduciren sich jetzt auf zwei lineare Gleichungen zwischen $x_1, y_1, z_1$ und bestimmen nicht mehr einen Punkt, sondern eine Gerade. Damit ist das Kräftesystem auf eine Resultante zurückgeführt, deren Componenten $A$, $B$, $C$ sind und deren Angriffspunkt $x_1\, y_1\, z_1$ auf der vorhin bestimmten Geraden beliebig gewählt werden darf; selbstverständlich fällt diese Gerade mit der Richtung der Resultante zusammen wie man auch aus ihren Gleichungen ersehen kann.

61. Wenn die Bedingung $AL + BM + CN = 0$ nicht erfüllt ist, so existirt keine Resultante, dagegen lässt sich in diesem Falle das Kräftesystem auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte zurückführen. In der That kann nämlich das Kräftesystem auf ein Kräftepaar und auf eine zur Paarebene nicht parallele Kraft reducirt werden und zwar so, dass die letztere mit einer von den Kräften des Paares an einem und demselben Punkte zusammentrifft. Vereinigt man die beiden an diesem Punkte wirkenden Kräfte, so erhält man eine wiederum nicht in die Paarebene fallende Resultante also zusammen zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte.

Durch die umgekehrte Construction überzeugt man sich leicht, dass zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte durch ein Kräftepaar und durch eine Kraft ersetzt werden können, welche der Paarebene nicht parallel ist, dass folglich die beiden ursprünglichen Kräfte keine Resultante haben. Dieser Satz lässt sich übrigens unabhängig von der Theorie der Kräftepaare auf folgende einfache Art beweisen. Wenn jene zwei nicht in einer Ebene liegenden Kräfte eine Resultante hätten, so würde durch Einführung einer der Resultante gleichen und entgegengesetzten Kraft Gleichgewicht entstehen. Das Gleichgewicht müsste bleiben, wenn man die Punkte des Systemes mit einer festen Geraden verbände, die so gewählt ist, dass sie die neu eingeführte Kraft und nur eine der ursprünglichen Kräfte schnitte, was auf unendlich viel verschiedene Weisen geschehen kann. Da jetzt zwei Kräfte durch die feste Gerade aufgehoben werden, so müsste wegen des postulirten Gleichgewichtes auch die letzte Kraft aufgehoben sein, was aber nicht möglich ist, weil sie die feste Gerade nicht trifft. Hieraus folgt die Unmöglichkeit der Resultante.

### Resultante eines ebenen Kräftesystemes.

62. Wenn alle Kräfte in einer Ebene liegen, so nehmen wir diese zur Coordinatenebene $xy$; es sind dann alle $z$ und $Z$ der Null gleich, ebenso $C = 0$, $L = 0$, $M = 0$, und es bleiben zur Bestimmung der Resultante die Gleichungen

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B, \quad Bx_1 - Ay_1 = N.$$

Die beiden ersten geben die Grösse und Richtung der Resultante, die letzte Gleichung charakterisirt eine Gerade, auf welcher der Angriffspunkt der Resultante beliebig gewählt werden kann; diese Gerade fällt mit der Richtung der Resultante zusammen. Sie wird unmöglich sobald gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$, nicht aber $N = 0$ ist, was mit der früheren Bemerkung zusammenstimmt, dass sich die Kräfte unter diesen Umständen auf ein Paar reduciren. In allen übrigen Fällen existirt eine Resultante, und findet dabei auch immer die Gleichung

$$AL + BM + CN = 0$$

statt, wegen $L = 0$, $M = 0$, $C = 0$.

63. Von den zur Bestimmung der Resultante dienenden Gleichungen kann die letzte unter anderer Form dargestellt werden, sobald man die Momente der Kräfte in Beziehung auf den Coordinatenanfang einführt.

Ist nämlich $R$ die Resultante, $Rr$ ihr positives oder negatives Moment, so hat die entgegengesetzte Kraft das Moment $-Rr$, mithin sind die Bedingungen des Gleichgewichtes

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B, \quad -Rr + \Sigma(Pp) = 0,$$

folglich

$$Rr = \Sigma(Pp).$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass in Beziehung auf einen beliebigen Punkt derselben Ebene das Moment der Resultante gleich ist der algebraischen Summe der Momente aller gegebenen Kräfte; sie wird aber unmöglich für $\Sigma(Pp) = 0$ und dann giebt es keine

Resultante. In der That reduciren sich in diesem Falle die Kräfte auf ein Paar, während es in jedem anderen Falle einen der obigen Gleichung genügenden Werth von $r$ giebt. Man hat demnach die Grösse und Richtung der Resultante, sowie ihren Abstand vom Coordinatenanfang; endlich bestimmt sich durch das Vorzeichen von $Rr$ der Sinn, in welchem die Resultante nach jener Richtung wirkt.

### Allgemeine Sätze über die Reduction von Kräftesystemen.

64. Wie in Nr. 42 gezeigt wurde, kann ein System von Kräften, die an fest unter einander verbundenen und frei im Raume schwebenden Punkten wirken, immer auf eine Einzelkraft und auf ein Kräftepaar reducirt werden; diese Kraft ist die Resultante aller parallel mit sich selbst an einen beliebigen Punkt verlegten Kräfte des Systemes; sie bleibt der Grösse und Richtung nach immer dieselbe und nur ihr Angriffspunkt gestattet eine Veränderung in so fern er willkührlich gewählt werden darf. Das resultirende Paar dagegen hängt von dem Punkte ab, nach welchem die Kräfte versetzt wurden; zerlegt man es in zwei Paare, von denen das eine seine Achse in einer gegebenen Richtung, und das andere die seinige in einer darauf senkrechten Richtung hat, so ist das Moment des ersten Paares gleich der Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf die durch den Angriffspunkt der verlegten Kräfte nach der gegebenen Richtung gezogene Gerade. Wir wollen nun die Veränderungen betrachten, welche die Momente erleiden, wenn man entweder die Gerade, worauf sie bezogen sind, um den Angriffspunkt der parallel verlegten Kräfte dreht, oder diesen Punkt auf einer Geraden verschiebt.

65. Momente in Beziehung auf verschiedene Achsen. Nehmen wir wie früher den Angriffspunkt aller parallel verlegten Kräfte zum Coordinatenanfang und setzen das Coordinatensystem als rechtwinklig voraus, so lässt sich die Grösse und Lage der Achse des Resultantenpaares leicht aus den mit $L$, $M$, $N$ bezeichneten Grössen herleiten; es ist nämlich nach Nr. 40, wenn $G$ das Moment oder die Achse dieses Paares bedeutet und $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel sind, welche die Paarachse mit den Coordinatenachsen einschliesst,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Projicirt man die Paarachse $G$ auf eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade, welche mit den Coordinatenachsen die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ und mit der Paarachse den Winkel $\vartheta$ einschliesst, so ist die Projection

$$G\cos\vartheta = G(\cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\psi + \cos\nu\cos\chi)$$

d. h.

$$G\cos\vartheta = L\cos\varphi + M\cos\psi + N\cos\chi.$$

Man erhält also die Projection des Paares $G$ auf irgend eine Gerade, wenn man die drei Componenten von $G$ auf dieselbe Gerade projicirt und diese Projectionen addirt.

66. Man kann dieser Gleichung noch eine andere Seite abgewinnen, sobald man darauf ausgeht die Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf die Gerade $\varphi\psi\chi$ direct zu ermitteln. Für irgend eine Kraft $P$, die am Punkte $xyz$ wirkt, deren Richtung mit den Coordinatenachsen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und mit jener Geraden den Winkel $\omega$ bildet, ist nämlich das Moment der Kraft $= q \,.\, P\sin\omega$, wobei $q$ die kürzeste Entfernung der Kraft von jener Geraden bezeichnet. Sind nun überhaupt zwei Gerade durch die Gleichungen

$$\eta = B\xi + b, \quad \zeta = C\xi + c,$$
$$\eta = B_1\xi + b_1, \quad \zeta = C_1\xi + c_1$$

gegeben, so hat man bekanntlich für den Winkel $\omega$ zwischen ihnen

$$\cos\omega = \frac{1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(1 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}},$$

woraus man leicht findet

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{(BC_1 - B_1C)^2 + (B_1 - B)^2 + (C_1 - C)^2}{(1 + B + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}};$$

ferner ist der kürzeste Abstand beider Geraden

$$q = \frac{(b_1 - b)(C_1 - C) - (c_1 - c)(B_1 - B)}{\sqrt{(BC_1 - B_1C)^2 + (B_1 - B)^2 + (C_1 - C)^2}},$$

folglich

$$q\sin\omega = \frac{(b_1 - b)(C_1 - C) - (c_1 - c)(B_1 - B)}{\sqrt{(1 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}}.$$

Im vorliegenden Falle hat man zu setzen

$$B = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \quad C = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha},$$

$$B_1 = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}, \quad C_1 = \frac{\cos\chi}{\cos\varphi},$$

ferner, weil die erste Gerade durch den Punkt $xyz$ und die zweite durch den Coordinatenanfang geht,

$$b = y - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x, \quad c = z - \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x,$$

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0,$$

und man erhält auf diese Weise

$$q \sin\omega = (y\cos\gamma - z\cos\beta)\cos\varphi + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\cos\psi$$
$$+ (x\cos\beta - y\cos\alpha)\cos\chi.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $P$, so hat man das Moment der Kraft $P$ in Beziehung auf die Gerade $\varphi\psi\chi$; die Summe aller ähnlich gebildeten Ausdrücke giebt

$$\Sigma(Pq\sin\omega) = L\cos\varphi + M\cos\psi + N\cos\chi,$$

und durch Vergleichung mit dem Vorigen

$$\Sigma(Pq\sin\omega) = G\cos\vartheta;$$

d. h.

Die Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf irgend eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade ist gleich der Projection der Achse des Resultantenpaares auf dieselbe Gerade.

Hieraus folgen unmittelbar die Sätze:

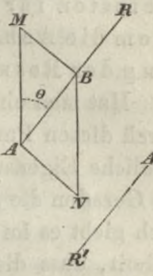
Die Summe der Momente eines Kräftesystemes in Beziehung auf eine durch einen bestimmten Punkt gehende Gerade wird am grössten, wenn man diesen Punkt zum Angriffspunkt der verlegten Kräfte nimmt und die Gerade mit der Achse des für diesen Fall resultirenden Paares zusammenfallen lässt.

Die Momentensumme bleibt dieselbe für alle Gerade, welche mit der Achse des resultirenden Paares gleiche Winkel bilden; sie verschwindet für alle zu jener Achse senkrechten Gerade.

67. Maximalmomente für verschiedene Anfangspunkte. In Fig. 21 bedeute $A$ den Angriffspunkt der parallel verlegten Kräfte, $AR$ die Resultante der letzteren, $AM$ die Achse des resultirenden Paares; man findet nun das zu einem anderen Anfangspunkte $A'$ gehörige Resultantenpaar, wenn man das erste

Paar mit einem neuen Paare zusammensetzt, welches aus der Kraft $R$ und einer an $A'$ wirkenden antiparallelen Kraft $R$ gebildet ist. Dieses Paar verschwindet in dem Falle, wo $A'$ auf der Geraden $AR$ liegt, man hat also den Satz:

Fig. 21.




Für alle Punkte einer und derselben zur Resultante der Kräfte parallelen Geraden bleibt das resultirende Paar nach Grösse und Richtung dasselbe, oder auch: Für alle Punkte einer und derselben zur Resultante parallelen Geraden sind die Achsen der Maximalmomente parallel und von gleicher Grösse.

Wenn der Punkt $A'$ nicht auf der zum Anfange $A$ gehörigen Resultante $AR$ liegt, so steht die Achse des mit $AM$ zusammenzusetzenden Paares $\overline{R, AA'}$ senkrecht auf der Ebene $RAA'$ mithin auch auf $AR$. Durch Veränderung des Punktes $A'$ kann man diese Achse in alle auf $AR$ senkrechten Lagen überführen, doch wird keine dieser Lagen mit $AM$ zusammenfallen, wofern nicht $\angle MAR = 90^0$, d. h. das Kräftesystem auf eine Einzelkraft zurückführbar ist. Nehmen wir sowohl diesen als auch den andern extremen Fall $\angle MAR = 0$ aus, so bilden die Achsen der verschiedenen Paare $\overline{R, AA'}$ mit $AM$ theils spitze, theils stumpfe Winkel. Jedes Paar, dessen Achse einen spitzen Winkel mit $AM$ einschliesst, giebt mit dem Paare $AM$ zusammen ein Resultantenpaar grösser als $AM$; jedes Paar, dessen Achse unter einem stumpfen Winkel gegen $AM$ geneigt ist, liefert mit $AM$ zusammen ein grösseres oder kleineres Resultantenpaar als $AM$, je nach der Grösse des Momentes (der Achse) des Paares aus $R$ und $R'$, welches Moment von 0 bis $\infty$ wachsen kann, wenn man den senkrechten Abstand der Geraden $AR$ und $A'R'$ von 0 bis $\infty$ zunehmen lässt. Hieraus erkennt man, dass das grösste zu dem Punkte $A$ gehörige Moment, verglichen mit denjenigen grössten Momenten, welche den verschiedenen durch $A'$ gehenden Geraden entsprechen, kleiner als die einen und grösser als die anderen ist, so lange $AM$ von $AR$ verschieden bleibt; fallen dagegen $AM$ und $AR$ zusammen, so stehen die Achsen der beiden zusammenzusetzenden Paare senkrecht auf einander und liefern jedenfalls ein Resultantenpaar grösser als $AM$. Diess giebt den Satz:

Das Moment des resultirenden Paares wird am kleinsten für denjenigen Punkt des Raumes, bei welchem die Achsenrichtung dieses Paares mit der Richtung der Resultante zusammenfällt.

Hat man einen Punkt dieser Art, so besitzen alle Punkte einer durch diesen Punkt parallel zur Resultanten gelegten Geraden die nämliche Eigenschaft; zugleich fallen für sämmtliche Punkte dieser Geraden die Achsen der resultirenden Paare zusammen. Demnach giebt es im Raume nur eine einzige Gerade von der Beschaffenheit, dass die Momentensumme der Kräfte in Beziehung auf sie grösser ist als in Beziehung auf jede andere sie schneidende Gerade, und zugleich kleiner als die grösste Momentensumme, die irgend einem ausser ihr liegenden Punkte entspricht. Diese Gerade heisse nach Poinsot die Centralachse der Momente.

68. Bestimmung der Centralachse. Um die Centralachse zu erhalten, muss man den Punkt $A'$ so wählen, dass die Normale auf der Ebene $RAA'$, d. h. die Achse des aus den Kräften $R$ und $R'$ gebildeten Paares in die Ebene $MAR$ zu liegen kommt. Zu diesem Zwecke nimmt man $A'$ in der durch $RA$ senkrecht auf $MAR$ stehenden Ebene und zwar auf der Seite von $AR$, bei welcher die Achse des Kräftepaares nach $AN$ und nicht nach der entgegengesetzten Richtung zeigt, weil $AR$ in dem Winkel zwischen den beiden Seitenachsen enthalten sein muss; darauf giebt man dem Abstande des Punktes $A'$ von $AR$ eine solche Grösse, dass das Moment des Paares aus $R$ und $R'$ der Seite $MB$ des Parallelogrammes $MBAN$ gleich wird. Bezeichnet $G$ wie früher das Moment des für den Anfangspunkt $A$ resultirenden Paares ($AM = G$), $K$ das Moment des neuen für den Punkt $A'$ resultirenden Paares, $p$ den Abstand des Punktes $A'$ von der Geraden $AR$, und $\Theta$ den Winkel $MAR$, so ist nach den erwähnten Bedingungen

$$K = G \cos \Theta \text{ und } Rp = G \sin \Theta.$$

In Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung hat man

$$\cos \Theta = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu,$$

d. i.

$$\cos \Theta = \frac{AL + AM + CN}{GR}.$$

Damit ist der Punkt $A'$ hinreichend bestimmt; er liegt nämlich beliebig auf einer in der Entfernung $p = \frac{G \sin \Theta}{R}$ parallel zu $AR$ gezogenen Geraden, die in der durch $AR$ senkrecht auf $MAR$ errichteten Ebene enthalten ist. Denkt man sich noch $A$ als Anfang des Coordinatensystemes und $a$, $b$, $c$ als Coordinaten des Endpunktes von $p$, so hat man die Gleichungen

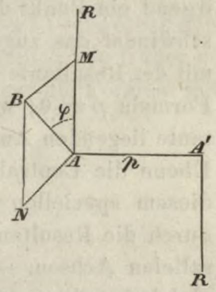
$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 = \frac{G^2 \sin^2 \Theta}{R^2} = \frac{G^2 - K^2}{R^2},$$

$$aA + bB + cC = 0, \quad aL + bM + cN = 0.$$

Diese bestimmen zwar zwei mit entgegengesetzten Coordinaten versehene Punkte, doch gilt unter ihnen nur derjenige, für welchen das Paar aus $R$ und $R'$ den vorhin bezeichneten Sinn erhält.

69. Anordnung aller Achsen um die Centralachse. Wir betrachten zunächst eine zur Centralachse senkrechte Ebene und bemerken, dass Alles was für beliebige Punkte dieser Ebene gilt, auch für alle Punkte einer Parallelebene, mithin für jeden Punkt im Raume gültig bleibt.

Fig. 22.




In Fig. 22 sei $AR$ die Centralachse und $A'$ ein Punkt der durch $A$ senkrecht zu $AR$ gelegten Ebene. Wählt man den neuen Punkt zum Anfang, so muss das erste resultirende Paar, welches der Grösse und Richtung nach durch seine Achse $AM$ repräsentirt wird, mit dem neuen Paare zusammengesetzt werden, das in der Ebene $RAA'$ liegt und das Moment $Rp$ besitzt, wenn $AA' = p$. Die Achse des aus beiden Paaren entstehenden Paares ist der Grösse und Richtung nach die Diagonale $AB$ des Rechtecks aus $AM$ und $AN = Rp$; mithin haben wir, wenn $\varphi$ den Winkel zwischen der Centralachse und der Resultantenachse und $R$ die Grösse der letzteren bezeichnet,

$$\tan \varphi = \frac{Rp}{G}, \quad K^2 = R^2 p^2 + G^2.$$

Da die Werthe von $K$ und $\varphi$ nur von $p$ abhängen, so sind die Maximalmomente von gleicher Grösse für alle Punkte einer Kreisperipherie, die um $A$ als Mittelpunkt in der auf $AR$ senkrechten Ebene beschrieben ist; zugleich bilden die Achsen der Maximalmomente um die Centralachse herum ein Rotationshyperboloid, dessen Kehlschnitt jener Kreis und bei welchem die Nebenhalbachse der erzeugenden Hyperbel $= \frac{G}{R}$ ist. Nimmt man $p$ als Abscisse und das entsprechende $K$ zur Ordinate, so lässt sich nach der obigen Gleichung eine Hyperbel construiren, deren Hauptachse $= 2G$ längs $AR$ liegt und deren Nebenhalbachse mit der Nebenhalbachse $\frac{G}{R}$ der vorigen Hyperbel übereinstimmt.

Für alle Punkte einer Kreiscylinderfläche, deren Achse die Centralachse ist, haben demnach die Maximalmomente denselben Werth; für alle Punkte einer und derselben Cylinderseite sind diese Achsen parallel; bei dem Uebergange von einer Cylinderseite zur anderen ändert die Achse des Maximalmomentes ihre Richtung, behält aber ihre Neigung gegen die Centralachse und ihre Entfernung. Mit dem Abstande des Anfanges von der Centralachse wächst das Maximalmoment ins Unendliche, während der Winkel zwischen seiner Achse und der Centralachse den rechten Winkel zur Grenze hat.

70. Wenn das Kräftesystem nur eine Resultante besitzt und irgend ein Punkt derselben zum Anfang genommen wird, so verschwindet das zugehörige Paar und dann fällt die Centralachse mit der Resultante zusammen; in der That geben auch die vorigen Formeln $p = 0$, wenn $G = 0$. Für einen ausserhalb der Resultante liegenden Anfang erhält man ein resultirendes Paar, dessen Ebene die Centralachse und den neuen Anfang enthält; d. h. in diesem speciellen Falle liefern alle Punkte einer und derselben durch die Resultante gehenden Ebene resultirende Paare mit parallelen Achsen. — Die Momente dieser Paare sind aber nicht gleich, sondern proportional den Abständen der zugehörigen Anfangspunkte von der allgemeinen Resultante; sie haben denselben Werth nur für solche Punkte, welche auf zwei gleichweit von der Resultante entfernten Parallelen liegen, und ferner ist der Sinn der Paare nur derselbe für Punkte der nämlichen Parallelen.

In dem Falle, wo die Resultante verschwindet, führt die Aenderung des Anfanges zu keinem neuen Paare, mithin behält das resultirende Paar immer dasselbe Moment und seine Achse dieselbe Richtung bei jeder beliebigen Lage des Anfanges.

71. Zu den im Vorigen entwickelten Resultaten gelangt man auch leicht durch Rechnung und zwar auf folgende Weise.

Wählt man den Punkt, an welchen alle Kräfte parallel zu sich selbst verlegt worden sind, zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, so reduciren sich nach Nr. 50 alle gegebenen Kräfte auf eine Einzelkraft $R$, deren Componenten

$$A = \Sigma X, \quad B = \Sigma Y, \quad C = \Sigma Z$$

sind, und auf ein Kräftepaar $G$ zusammengesetzt aus den drei Paaren

$$L = \Sigma(yZ - zY), \quad M = \Sigma(zX - xZ), \quad N = \Sigma(xY - yX),$$

und es ist

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Allgemeiner werden diese Formeln, wenn man die Kräfte nicht in den Anfangspunkt, sondern nach einem beliebigen Punkte $\xi\eta\zeta$ verlegt; es bedarf hierzu nur einer Verschiebung des Coordinatensystemes, indem man $x$, $y$, $z$ durch $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ ersetzt. Dabei ändern sich $A$, $B$, $C$, $R$ der Grösse und Richtung nach nicht, dagegen erhalten $L$, $M$, $N$, $G$ neue Werthe, die zur Unterscheidung mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden mögen. Es ist nämlich

$$\mathfrak{L} = \Sigma[(y-\eta)Z - (z-\zeta)Y] = \Sigma(yZ - zY) - [\Sigma(\eta Z) - \Sigma(\zeta Y)]$$

oder weil $\eta$ und $\xi$ für alle $Y$ und $Z$ constant bleiben

$$\mathfrak{L} = \Sigma(yZ - zY) - [\eta\Sigma Z - \zeta\Sigma Y] = \Sigma(yZ - zY) - (\eta C - \zeta B);$$

der erste Theil rechter Hand ist wieder $L$, nämlich wie früher die Momentensumme in Beziehung auf die $x$-Achse; die Formeln lauten daher

$$1) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = L - (\eta C - \zeta B), \\ \mathfrak{M} = M - (\zeta A - \xi C), \\ \mathfrak{N} = N - (\xi B - \eta A), \\ \mathfrak{G} = \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}. \end{cases}$$

Durch die Wahl der beliebigen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bestimmt sich die Grösse und Lage des resultirenden Paares. Zwei Annahmen sind es nun vorzüglich, die einer genauern Untersuchung bedürfen; man kann nämlich den Punkt $\xi\eta\zeta$ entweder auf einer der Resultante $R$ parallelen Geraden oder in einer zu ihr senkrechten Ebene fortrücken lassen.

Im ersten Falle mögen $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$ zwei verschiedene um $s$ von einander entfernte Stellungen des Punktes $\xi\eta\zeta$ bezeichnen, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche $R$, folglich auch $s$ mit den Coordinatenachsen einschliesst; man hat dann

$$\xi_1 - \xi_2 = s \cos\lambda = s\,\frac{A}{R},$$

$$\eta_1 - \eta_2 = s \cos \mu = s \frac{B}{R},$$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = s \cos \nu = s \frac{C}{R},$$

und

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{A} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{B} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{C}.$$

Hieraus folgt

$$\eta_1 C - \zeta_1 B = \eta_2 C - \zeta_2 B, \; \zeta_1 A - \xi_1 C = \zeta_2 A - \xi_2 C, \; \xi_1 B - \eta_1 A = \xi_2 B - \eta_2 A,$$

und diese Gleichungen geben zu erkennen, dass die Werthe von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ dieselben bleiben, mag man nun $\xi \eta \zeta$ durch $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ oder durch $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ ersetzen. Demgemäss bleibt $\mathfrak{G}$ constant, wenn der Punkt $\xi \eta \zeta$ auf einer zur Resultante parallelen Geraden fortrückt.

Wenn zweitens der Punkt $\xi \eta \zeta$ in einer zur Resultante senkrechten Ebene liegt, so können wir diese immer durch den Coordinatenanfang gehen lassen weil letzterer beliebig ist; wir haben dann

$$\xi \cos \lambda + \eta \cos \mu + \zeta \cos \nu = 0$$

und durch Multiplication mit $R$

2) $$\xi A + \eta B + \zeta C = 0.$$

Ferner ist nach 1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^2 &= \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 \\ &= L^2 + M^2 + N^2 \\ &\quad - 2L(C\eta - B\zeta) - 2M(A\zeta - C\xi) - 2N(B\xi - A\eta) \\ &\quad + (C\eta - B\zeta)^2 + (A\zeta - C\xi)^2 + (B\xi - A\eta)^2, \end{aligned}$$

die letzte Zeile hat den Werth

$$\begin{aligned} &(B^2 + C^2)\,\xi^2 + (C^2 + A^2)\,\eta^2 + (A^2 + B^2)\,\zeta^2 \\ &\quad - 2BC\eta\zeta - 2CA\zeta\xi - 2AB\xi\eta \\ &= (R^2 - A^2)\,\xi^2 + (R^2 - B^2)\,\eta^2 + (R^2 - C^2)\,\zeta^2 \\ &\quad - 2BC\eta\zeta - 2CA\zeta\xi - 2AB\xi\eta \\ &= R^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (A\xi + B\eta + C\zeta)^2; \end{aligned}$$

hier verschwindet wegen Gleichung 2) der negative Theil, und es bleibt daher

3) $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}^2 = G^2 - 2L(C\eta - B\zeta) - 2M(A\zeta - C\xi) - 2N(B\xi - A\eta) \\ + R^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2). \end{aligned} \right.$$

Um nun denjenigen Punkt $\xi \eta \zeta$ zu finden, für welchen $\mathfrak{G}$ sein Minimum erreicht, haben wir die drei partiell in Beziehung auf $\xi$, $\eta$, $\zeta$ genommenen Differentialquotienten von $\mathfrak{G}^2$ der Null gleich zu setzen; wir erhalten so wenn $a, b, c$ die auf das Minimum bezüglichen Specialwerthe von $\xi, \eta, \zeta$ sind,

$$
4)\quad \begin{cases} R^2 a = BN - CM, \\ R^2 b = CL - AN, \\ R^2 c = AM - BL. \end{cases}
$$

Diese Gleichungen, deren dritte vermöge 2) aus den beiden ersten folgt, bestimmen sofort $a, b, c$; ferner ergeben sich daraus die Werthe

$$
\begin{aligned}
Cb - Bc &= L - \frac{A}{R} \cdot \frac{AL + BM + CN}{R}, \\
Ac - Ca &= M - \frac{B}{R} \cdot \frac{AL + BM + CN}{R}, \\
Ba - Ab &= N - \frac{C}{R} \cdot \frac{AL + BM + CN}{R}.
\end{aligned}
$$

Nennen wir ferner $l, m, n, g$ die Werthe von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$, welche dem Punkte $abc$ entsprechen, so erhalten wir aus den vorstehenden und den in 1) verzeichneten Gleichungen, indem wir in letzteren $a, b, c$ für $\xi, \eta, \zeta$ setzen

$$
5)\quad \begin{cases} l = \dfrac{A}{R} \cdot \dfrac{AL + BM + CN}{R}, \\ m = \dfrac{B}{R} \cdot \dfrac{AL + BM + CN}{R}, \\ n = \dfrac{C}{R} \cdot \dfrac{AL + BM + CN}{R}, \\ g = \dfrac{AL + BM + CN}{R}, \end{cases}
$$

$$
\frac{l}{g} = \frac{A}{R}, \quad \frac{m}{g} = \frac{B}{R}, \quad \frac{n}{g} = \frac{C}{R}.
$$

Endlich erhalten wir aus den Gleichungen 4) wenn wir dieselben mit $a$, $b$, $c$ multipliciren und die Producte addiren

$$
\begin{aligned}
R^2 (a^2 + b^2 + c^2) &= L\,(Cb - Bc) + M(Ac - Ca) + N(Ba - Ab) \\
&= L^2 + M^2 + N^2 - \left(\frac{AL + BM + CN}{R}\right)^2
\end{aligned}
$$

oder

$$
6)\qquad R^2 r^2 = G^2 - g^2, \quad r = \frac{\sqrt{G^2 - g^2}}{R},
$$

wo $r$ den Radiusvector des Punktes $abc$ bezeichnet.

Das resultirende Kräftepaar hat also seinen kleinsten Werth $g$, wenn alle Kräfte nach dem Punkte $abc$ verlegt werden; die

Achse des Paares liegt dann parallel der Resultante $R$. Die durch den Punkt $abc$ parallel zu $R$ gelegte Gerade ist die Centralachse.

Um noch eine Vergleichung des kleinsten Paares $g$ mit irgend einem anderen auf den beliebigen Punkt $\xi\eta\zeta$ bezüglichen Paare zu gewinnen, multipliciren wir die Gleichungen 4) mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und substituiren die entstehende Summe

$$\begin{aligned} &R^2(a\xi + b\eta + c\zeta) \\ &= L(C\eta - B\zeta) + M(A\zeta - C\xi) + N(B\xi - A\eta) \end{aligned}$$

in die allgemeine Formel 3); diess giebt

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^2 &= G^2 - 2R^2(a\xi + b\eta + c\zeta) + R^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ &= G^2 - R^2(a^2 + b^2 + c^2) + R^2[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2] \\ &= G^2 - R^2 r^2 + R^2 p^2, \end{aligned}$$

wo $p$ den Abstand des Punktes $\xi\eta\zeta$ von der Centralachse bezeichnet. Unter Rücksicht auf 6) wird diese Gleichung einfacher

$$\mathfrak{G}^2 = g^2 + R^2 p^2.$$

Abgesehen von einigen Aenderungen in der Bezeichnung stimmen diese Ergebnisse mit den früheren überein.

## Siebentes Capitel.

# Bedingungen des Gleichgewichtes für astatische Körper.

### Gleichgewichtsbedingungen für einen völlig freien astatischen Körper.

72. Im Allgemeinen nennt man einem Körper astatisch, wenn er so befestigt ist, dass die auf ihn wirkenden Kräfte bei jeder seiner möglichen Stellungen im Gleichgewichte bleiben; meisstentheils aber beschränkt man diese sehr umfassende Definition durch die Voraussetzung, dass die vorhandenen Kräfte mit unveränderten Intensitäten und in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften sollen, in welcher Lage sich der Körper auch befinden mag. In diesem specielleren Sinne nehmen auch wir den Begriff eines astatischen Körpers bei den folgenden Untersuchungen.

Zunächst erhellt, dass eine parallele Verschiebung des Körpers keinen Einfluss auf die Lage der Kräfte gegen den Körper ausübt; ein astatischer Körper bleibt daher astatisch bei jeder derartigen Verrückung, und es bedarf mithin nur einer Untersuchung über die Drehung des Körpers um einen beliebigen Punkt. Zu diesem Zwecke legen wir durch diesen Punkt als Anfangspunkt zwei rechtwinklige Coordinatensysteme, von denen das erste die Achsen der $x$, $y$, $z$ besitzen und im Raume fest sein möge, während wir uns das zweite System der $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zwar als fest in dem Körper aber mit diesem im Raume beweglich denken. Der Winkel, welchen der Durchschnitt der Ebenen $xy$ und $\xi\eta$ mit der positiven Seite der $x$-Achse einschliesst, heisse $\psi$, der Winkel zwischen eben dieser Durchschnittslinie und der $\xi$-Achse sei $= \varphi$, endlich der Neigungswinkel der Ebene $\xi\eta$ gegen die $xy$-Ebene $= \vartheta$; die Drehung des Körpers wird nun durch die folgenden bekannten Formeln der analytischen Geometrie ausgedrückt

$$\begin{aligned} x = {} & \xi\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ & - \eta\,(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ & + \zeta\sin\psi\sin\vartheta, \\ y = {} & \xi\,(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ & - \eta\,(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ & - \zeta\cos\psi\sin\vartheta, \\ z = {} & \xi\sin\varphi\sin\vartheta + \eta\cos\varphi\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Diese Werthe substituiren wir in die sechs allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0,\quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0,\quad \Sigma(zX - xZ) = 0,\quad \Sigma(xY - yX) = 0;$$

dagegen sind die rechtwinkligen Componenten $X$, $Y$, $Z$ . . . aller vorhandenen Kräfte nicht zu ändern, weil letztere ihre Intensitäten und Richtungen auch bei den neuen Angriffspunkten $\xi\eta\zeta$ . . . behalten; wir gelangen so zu den folgenden sechs Gleichungen

$$\Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0,\quad \Sigma Z = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} & (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\xi Z) \\ & -(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\eta Z) \\ & \qquad - \cos\psi\sin\vartheta\;\Sigma(\zeta Z) \\ & -\sin\varphi\sin\vartheta\,\Sigma(\xi Y) - \cos\varphi\sin\vartheta\;\Sigma(\eta Y) - \cos\vartheta\,\Sigma(\zeta Y) \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} & \sin\varphi\sin\vartheta\,\Sigma(\xi X) + \cos\varphi\sin\vartheta\;\Sigma(\eta X) + \cos\vartheta\,\Sigma(\zeta X) \\ & -(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\xi Z) \\ & +(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\eta Z) \\ & \qquad - \sin\psi\sin\vartheta\,\Sigma(\zeta Z) \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} & (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\xi Y) \\ & -(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\eta Y) \\ & \qquad + \sin\psi\sin\vartheta\,\Sigma(\zeta Y) \\ & -(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\xi X) \\ & +(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta)\,\Sigma(\eta X) \\ & \qquad + \cos\psi\sin\vartheta\,\Sigma(\zeta X) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Die letzten drei Gleichungen können aber für alle Werthe von $\varphi$, $\psi$ und $\vartheta$ nur dann bestehen, wenn die neun mit $\Sigma$ bezeichneten Summen einzeln verschwinden, so dass im Ganzen zwölf Bedingungen zum Vorschein kommen. Finden diese bei irgend einer Lage des Körpers statt, so gelten sie auch für jede andere; schreiben wir also $x$, $y$, $z$ für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und setzen zur Abkürzung

$$\Sigma X = A, \quad \Sigma Y = B, \quad \Sigma Z = C,$$
$$\Sigma(xX) = A_1, \quad \Sigma(yY) = B_1, \quad \Sigma(zZ) = C_1,$$
$$\Sigma(yZ) = D, \quad \Sigma(zX) = E, \quad \Sigma(xY) = F,$$
$$\Sigma(zY) = D_1, \quad \Sigma(xZ) = E_1, \quad \Sigma(yX) = F_1,$$

so sind die Bedingungen für das astatische Gleichgewicht der vorhandenen Kräfte:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$
$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0,$$
$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$
$$D_1 = 0, \quad E_1 = 0, \quad F_1 = 0.$$

73. In dem Falle, wo die vorstehenden Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sind, also auch kein astatisches Gleichgewicht statt findet, kann man die Frage stellen, ob sich dieses nicht durch Hinzubringung einer oder mehrerer Kräfte herbeiführen lässt, wenn auch diese Kräfte mit unveränderlichen Intensitäten und Richtungen an ihren Angriffspunkten haften.

Wir untersuchen zunächst, ob das Gleichgewicht durch eine neue Kraft $R$ hergestellt werden kann und nennen $U$, $V$, $W$ ihre rechtwinkligen Componenten, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Cordinaten ihres Angriffspunktes. Da in diesem Falle das astatische Gleichgewicht durch Einführung von $-R$ entstehen soll, so haben wir die Gleichungen

$$A - U = 0, \quad B - V = 0, \quad C - W = 0,$$
$$A_1 - \xi U = 0, \quad B_1 - \eta V = 0, \quad C_1 - \zeta W = 0.$$
$$D - \eta W = 0, \quad E - \zeta U = 0, \quad F - \xi V = 0,$$
$$D_1 - \zeta V = 0, \quad E_1 - \xi W = 0, \quad F_1 - \eta U = 0.$$

Durch Elimination der sechs Unbekannten $U$, $V$, $W$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ergeben sich, wofern nicht gleichzeitig $A = B = C = 0$, d. h. die Resultante der ursprünglichen Kräfte $= 0$ ist, die sechs Bedingungsgleichungen

$$\frac{A_1}{A} = \frac{F}{B} = \frac{E_1}{C},$$
$$\frac{F_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{D}{C},$$
$$\frac{E}{A} = \frac{D_1}{B} = \frac{C_1}{C},$$

und wenn diese erfüllt sind, so bestimmen sich die Unbekannten durch die Formeln

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C,$$

$$\xi = \frac{A_1}{A}, \quad \eta = \frac{B_1}{B}, \quad \zeta = \frac{C_1}{C}.$$

Die Kraft $R$ ist die astatische Resultante des Kräftesystemes, $\xi\eta\zeta$ ihr Angriffspunkt der sogenannte astatische Mittelpunkt des Systemes.

Für parallele Kräfte, deren algebraische Summe nicht verschwindet, sind übrigens die erwähnten sechs Bedingungsgleichungen immer erfüllt; man hat nämlich für die einzelnen parallelen Kräfte $P, P', P'' \ldots$, deren gemeinsame Richtung durch die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ bestimmt wird,

$$X = P \cos\alpha, \quad Y = P \cos\beta, \quad Z = P \cos\gamma, \ldots$$
$$X' = P' \cos\alpha, \quad Y' = P' \cos\beta, \quad Z' = P' \cos\gamma, \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folglich

$$A = \cos\alpha\, \Sigma P, \quad B = \cos\beta\, \Sigma P, \quad C = \cos\gamma\, \Sigma P,$$
$$A_1 = \cos\alpha\, \Sigma(xP), \quad B_1 = \cos\beta\, \Sigma(yP), \quad C_1 = \cos\gamma\, \Sigma(zP),$$
$$D = \cos\gamma\, \Sigma(yP), \quad E = \cos\alpha\, \Sigma(zP), \quad F = \cos\beta\, \Sigma(xP),$$
$$D_1 = \cos\beta\, \Sigma(zP), \quad E_1 = \cos\gamma\, \Sigma(xP), \quad F_1 = \cos\alpha\, \Sigma(yP),$$

welche Werthe jenen Gleichungen genügen. Ferner ist

$$U = \cos\alpha\, \Sigma P, \quad V = \cos\beta\, \Sigma P, \quad W = \cos\gamma\, \Sigma P, \quad R = \Sigma P,$$
$$\xi = \frac{\Sigma(xP)}{\Sigma P}, \quad \eta = \frac{\Sigma(yP)}{\Sigma P}, \quad \zeta = \frac{\Sigma(zP)}{\Sigma P},$$

der astatische Mittelpunkt fällt also mit dem Mittelpunkte der parallelen Kräfte zusammen.

74. Wenn die vorigen sechs Bedingungen nicht erfüllt sind, so existirt keine astatische Resultante und es ist dann weiter zu untersuchen, ob das astatische Gleichgewicht durch Einführung von zwei neuen Kräften hergestellt werden kann. Wir denken uns letztere auf eine Einzelkraft und auf ein Kräftepaar reducirt und bezeichnen mit $R$ die Einzelkraft, mit $U, V, W$ ihre Componenten und mit $\xi, \eta, \zeta$ die Coordinaten ihres Angriffspunktes; die Kraft des Paares heisse $R'$, ihre Componenten mögen $U', V', W'$ sein, endlich bezeichne $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ den Angriffspunkt von $R'$ und $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ den von $-R'$, so dass die Differenzen

$$\xi' = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta' = \eta_1 - \eta_2, \quad \zeta' = \zeta_1 - \zeta_2$$

die Projectionen des Paararmes auf die Coordinatenachsen bedeuten. Aus der Bedingung, dass das Gleichgewicht eintreten muss, wenn die Kräfte $-R$ an $\xi\eta\zeta$, $-R'$ an $\xi_1\eta_1\zeta_1$ und $+R'$ an $\xi_2\eta_2\zeta_2$ hinzukommen, erhalten wir nun nach Nr.71 die Gleichungen

$$A - U = 0,\quad B - V = 0,\quad C - W = 0,$$
$$A_1 - \xi U - \xi' U' = 0,\quad B_1 - \eta V - \eta' V' = 0,\quad C_1 - \zeta W - \zeta' W' = 0,$$
$$D - \eta W - \eta' W' = 0,\quad E - \zeta U - \zeta' U' = 0,\quad F - \xi V - \xi' V' = 0,$$
$$D_1 - \zeta V - \zeta' V' = 0,\quad E_1 - \xi W - \xi' W' = 0,\quad F_1 - \eta U - \eta' U' = 0,$$

Den ersten drei Gleichungen entnehmen wir die Werthe von $U$, $V$, $W$, den darauf folgenden die Werthe von $U'$, $V'$, $W'$ und substituiren diess Alles in die letzten sechs Gleichungen; diese gestalten sich wie folgt

$$\begin{aligned}
C(\eta\zeta' - \eta'\zeta) &= D\zeta' - C_1\eta',\\
A(\zeta\xi' - \zeta'\xi) &= E\xi' - A_1\zeta',\\
B(\xi\eta' - \xi'\eta) &= F\eta' - B_1\xi';\\
B(\eta\zeta' - \eta'\zeta) &= B_1\zeta' - D_1\eta',\\
C(\zeta\xi' - \zeta'\xi) &= C_1\xi' - E_1\zeta',\\
A(\xi\eta' - \xi'\eta) &= A_1\eta' - F_1\xi'.
\end{aligned}$$

Um hieraus die sechs Unbekannten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ zu bestimmen, verbinden wir die erste Gleichung mit der vierten, die zweite mit der fünften, die dritte mit der sechsten und bekommen vorausgesetzt, dass nicht gleichzeitig $A = B = C = 0$ ist,

$$\begin{aligned}
(BC_1 - CD_1)\eta' &= (BD - B_1C)\zeta' &&\text{oder } b\eta' = c_1\zeta',\\
(CA_1 - AE_1)\zeta' &= (CE - C_1A)\xi' &&\text{,, } c\zeta' = a_1\xi',\\
(AB_1 - BF_1)\xi' &= (AF - A_1B)\eta' &&\text{,, } a\xi' = b_1\eta',
\end{aligned}$$

wo $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ von selbst verständliche Abkürzungen sind. Aus den letzten drei Gleichungen lassen sich aber nur dann Werthe von $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ ableiten wenn die Bedingung

$$\text{I)}\qquad abc = a_1b_1c_1$$

erfüllt ist; diess vorausgesetzt, bleibt eine der Grössen $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ z. B. $\xi$ willkührlich und die beiden anderen sind

$$\text{II)}\qquad \eta' = \frac{a}{b_1}\xi',\quad \zeta' = \frac{a_1}{c}\xi'.$$

Behufs der Ermittelung von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gehen wir auf die sechs vorigen Gleichungen zurück, drücken in der ersten oder vierten Gleichung $\eta'$ und $\zeta'$ durch $\xi'$ aus, in der zweiten oder fünften $\zeta'$ und $\xi'$ durch $\eta'$, in der dritten oder sechsten $\xi'$ und $\eta'$ durch $\zeta'$; diess giebt

$$b\eta - c_1\zeta = \frac{B_1b - D_1c_1}{B} = B_1C_1 - DD_1,$$

$$c\zeta - a_1\xi = \frac{C_1c - E_1a_1}{C} = C_1A_1 - EE_1,$$

$$a\xi - b_1\eta = \frac{A_1a - F_1b_1}{A} = A_1B_1 - FF_1.$$

Eliminirt man $\zeta$ aus den beiden ersten Gleichungen, multiplicirt die hierdurch entstehende Gleichung mit $\frac{a}{a_1 c_1}$ und macht von der Relation $a_1 b_1 c_1 = abc$ Gebrauch, so gelangt man zu

$$a\xi - b_1 \eta = -\frac{a}{a_1 c_1}\left\{b(B_1 C_1 - DD_1) + c_1 (C_1 A_1 - EE_1)\right\};$$

diese Gleichung würde der letzten von den vorigen drei Gleichungen widersprechen, wofern nicht die rechten Seiten beider Gleichungen identisch sind oder

$$\text{III)}\quad a_1 c_1 (A_1 B_1 - FF_1) + ab(B_1 C_1 - DD_1) + ac_1 (C_1 A_1 - EE_1) = 0$$

ist. Setzen wir diese Gleichung als erfüllt voraus, so bleibt eine der Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, etwa $\xi$, willkührlich und die anderen sind

$$\text{IV)}\qquad \eta = \frac{a}{b_1}\xi - \frac{A_1 B_1 - FF_1}{b_1}, \quad \zeta = \frac{a_1}{c}\xi + \frac{A_1 C_1 - EE_1}{c}.$$

Endlich hat man aus den ersten sechs der zwölf früheren Gleichungen

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C;$$

$$U' = \frac{A_1 - A\xi}{\xi'}, \quad V' = \frac{B_1 - B\eta}{\eta'}, \quad W' = \frac{C_1 - C\zeta}{\zeta'}.$$

Diesen Entwickelungen zufolge kann das astatische Gleichgewicht nur dann durch eine Kraft und ein Kräftepaar herbeigeführt werden, wenn die Resultante der gegebenen Kräfte nicht verschwindet und wenn die beiden angegebenen Bedingungsgleichungen I) und III) erfüllt sind; die Einzelkraft ist der Resultante gleich und, wie man aus Nr. VI ersieht, kann ihr Angriffspunkt willkührlich auf einer bestimmten Geraden gewählt werden; diese im Körper feste Gerade heisst die a s t a t i s c h e  M i t t e l l i n i e desselben. Die eine Projection $\xi'$ des Paararmes bleibt gleichfalls beliebig, der Arm des Paares ist parallel zur Mittellinie.

Für parallele Kräfte, deren Resultante nicht verschwindet, sind alle $Z = 0$, folglich

$$C = 0, \quad C_1 = 0, \quad D = 0, \quad E_1 = 0,$$
$$c = 0, \quad c_1 = 0, \quad b = 0, \quad b_1 = 0$$

die Bedingungsgleichungen I) und III) sind dann erfüllt.

Wenn die Resultante der gegebenen Kräfte, mithin auch jede der Grössen $A$, $B$, $C$ verschwindet, so gehen die früheren Gleichungen in die folgenden über

$$0 = D\zeta' - C_1\eta', \quad 0 = B_1\zeta' - D_1\eta',$$
$$0 = E\xi' - A_1\zeta', \quad 0 = C_1\xi' - E_1\zeta',$$
$$0 = F\eta' - B_1\xi', \quad 0 = A_1\eta' - F_1\xi',$$

welche nur unter den Bedingungen

$$B_1C_1 = DD_1, \quad C_1A_1 = EE_1, \quad A_1B_1 = FF_1, \quad DEF = D_1E_1F_1$$

zusammenbestehen können; man hat dann

$$U = V = W = 0, \quad \eta' = \frac{F_1}{A_1}\xi' \quad \zeta' = \frac{E}{A_1}\xi',$$
$$U' = \frac{A_1}{\xi'}, \quad V' = \frac{B_1}{\eta'}, \quad W' = \frac{C_1}{\zeta'}.$$

Die gegebenen Kräfte lassen sich in diesem Falle durch ein Paar ersetzen, dessen Arm einen beliebigen Anfangspunkt und eine willkührliche Länge hat, dessen Richtung aber constant ist.

Die vorigen Bedingungen werden z. B. durch parallele Kräfte erfüllt, die weder eine Resultante haben, noch einander das Gleichgewicht halten.

75. Wenn die Bedingungsgleichungen I) und II) nicht statt finden, so kann man das astatische Gleichgewicht nicht durch zwei Kräfte herbeiführen und wir haben dann zu untersuchen, ob drei Kräfte oder, was Dasselbe ist, eine Einzelkraft und zwei Kräftepaare das Verlangte leisten. Die Componenten der am Punkte $\xi\eta\zeta$ angreifenden Einzelkraft $R$ seien $U, V, W$; das erste Paar habe die Kraft $R'$ mit den Componenten $U'$, $V'$, $W'$ und die Projectionen seines Armes seien $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$; für das zweite Paar mögen $U''$, $V''$, $W''$, $\xi''$, $\eta''$, $\zeta''$ die entsprechenden Grössen bedeuten; die Bedingungen für das Gleichgewicht sind jetzt:

$$A - U = 0, \quad B - V = 0, \quad C - W = 0;$$
$$A_1 - \xi U - \xi' U' - \xi'' U'' = 0, \quad B_1 - \eta V - \eta' V' - \eta'' V'' = 0,$$
$$C_1 - \zeta W - \zeta' W' - \zeta'' W'' = 0;$$
$$D - \eta W - \eta' W' - \eta'' W'' = 0, \quad E - \zeta U - \zeta' U' - \zeta'' U'' = 0,$$
$$F - \xi V - \xi' V' - \xi'' V'' = 0;$$
$$D_1 - \zeta V - \zeta' V' - \zeta'' V'' = 0, \quad E_1 - \xi W - \xi' W' - \xi'' W'' = 0,$$
$$F_1 - \eta U - \eta' U' - \eta'' U'' = 0.$$

Eliminirt man zunächst die Grössen $U$, $V$, $W$, $U'$, $V'$, $W'$, $U''$, $V''$, $W''$ und setzt dabei zur Abkürzung

$$\eta'\zeta'' - \eta''\zeta' = \lambda, \quad \zeta'\xi'' - \zeta''\xi' = \mu, \quad \xi'\eta'' - \xi''\eta' = \nu,$$
$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = \sigma,$$

so erhält man die drei Gleichungen

$$A_1\lambda + F_1\mu + E\nu = A\sigma,$$
$$F\lambda + B_1\mu + D_1\nu = B\sigma,$$
$$E_1\lambda + D\mu + C_1\nu = C\sigma;$$

hieraus ergeben sich die Werthe der Verhältnisse $\frac{\lambda}{\sigma}$, $\frac{\mu}{\sigma}$, $\frac{\nu}{\sigma}$ und zwar gelten bei Benutzung der Abbreviaturen

$$L = A(B_1C_1 - DD_1) + B(DE - C_1F_1) + C(D_1F_1 - B_1E),$$
$$M = A(D_1E_1 - C_1F) + B(A_1C_1 - EE_1) + C(EF - A_1D_1),$$
$$N = A(DF - B_1E_1) + B(E_1F_1 - A_1D) + C(A_1B_1 - FF_1),$$
$$S = A_1B_1C_1 - A_1DD_1 - B_1EE_1 - C_1FF_1 + DEF + D_1E_1F_1$$

die folgenden Formeln

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{L}{S}, \quad \frac{\mu}{\sigma} = \frac{M}{S}, \quad \frac{\nu}{\sigma} = \frac{N}{\sigma},$$

bei denen vorausgesetzt ist, dass die Resultante der gegebenen Kräfte nicht verschwindet also auch nicht gleichzeitig $A = B = C = 0$ ist. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\xi$, die zweite mit $\eta$, die dritte mit $\zeta$ und addirt, so findet man zufolge des Werthes von $\sigma$ die Relation

$$L\xi + M\eta + N\zeta = S;$$

auf analoge Weise ergeben sich die entsprechenden Gleichungen

$$L\xi' + M\eta' + N\zeta' = 0,$$
$$L\xi'' + M\eta'' + N\zeta' = 0.$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass der Angriffspunkt $\xi\eta\zeta$ auf einer bestimmten im Körper festen Ebene beliebig gewählt werden kann und das die Arme der beiden Kräftepaare jener Ebene parallel liegen; die bezeichnete Ebene heisst die **astatische Mittelebene** des Körpers. Wählt man $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$, $\xi''$, $\eta''$, willkührlich, so bestimmen die obigen drei Gleichungen $\zeta$, $\zeta'$ und $\zeta''$; die neun Componenten der drei Kräfte $R$, $R'$ und $R''$ finden sich nachher leicht, nämlich

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C,$$
$$U' = \frac{A_1\eta'' - F_1\xi'' - A(\xi\eta'' - \xi''\eta)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$
$$V' = \frac{F\eta'' - B_1\xi'' - B(\xi\eta'' - \xi''\eta)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$
$$W' = \frac{E_1\eta'' - D\xi'' - C(\xi\eta'' - \xi''\eta)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'};$$

$$U'' = \frac{F_1\xi' - A_1\eta' - A(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

$$V'' = \frac{B_1\xi' - F\eta' - B(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

$$W'' = \frac{D\xi' - E_1\eta' - C(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}.$$

Wenn demnach auf einen Körper Kräfte wirken, deren Resultante nicht verschwindet, so kann durch Einführung von einer Kraft und zwei Kräftepaaren jederzeit der astatische Zustand hergestellt werden.

Die vorigen Ergebnisse modificiren sich, wenn die Resultante der ursprünglichen Kräfte verschwindet, also $A = B = C = 0$ ist; die Gleichungen

$$A_1\lambda + F_1\mu + E\nu = 0,$$
$$F\lambda + B_1\mu + D_1\nu = 0,$$
$$E_1\lambda + D\mu + C_1\nu = 0$$

können dann nur unter der Bedingung

$$S = A_1B_1C_1 - A_1DD_1 - B_1EE_1 - C_1FF_1 + DEF + D_1E_1F_1 = 0$$

zusammenbestehen, und wenn diese erfüllt ist, hat man

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{D_1F_1 - B_1E}{A_1B_1 - FF_1}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{EF - A_1D_1}{A_1B_1 - FF_1};$$

ferner

$$\lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta' = 0, \quad \lambda\xi'' + \mu\eta'' + \nu\zeta'' = 0;$$

die Arme der beiden Kräftepaare sind dann wieder parallel. Die Bestimmung der Kräfte $U', V', W', U'', V'', W''$ hat keine Schwierigkeit.

Wenn endlich $A = B = C = 0$, die Bedingung $S = 0$ aber nicht erfüllt ist, so bedarf man dreier Kräftepaare zur Herstellung des Gleichgewichtes; diese müssen folgenden Bedingungen genügen:

$$A_1 - \xi' U' - \xi'' U'' - \xi''' U''' = 0,$$
$$B_1 - \eta' V' - \eta'' V'' - \eta''' V''' = 0,$$
$$C_1 - \zeta' W' - \zeta'' W'' - \zeta''' W''' = 0;$$
$$D - \eta' W' - \eta'' W'' - \eta''' W''' = 0,$$
$$E - \zeta' U' - \zeta'' U'' - \zeta''' U''' = 0,$$
$$F - \xi' V' - \xi'' V'' - \xi''' V''' = 0;$$
$$D_1 - \zeta' V' - \zeta'' V'' - \zeta''' V''' = 0,$$
$$E_1 - \xi' W' - \xi'' W'' - \xi''' W''' = 0,$$
$$F_1 - \eta' U' - \eta'' U'' - \eta''' U''' = 0.$$

Hier bleiben $\xi', \eta', \zeta', \xi'', \eta'', \zeta'', \xi''', \eta''', \zeta'''$ unbestimmt, es können also die Arme der Kräftepaare sowohl der Grösse als der Lage nach beliebig gewählt werden, und die vorstehenden neun Gleichungen bestimmen nachher die neun Componenten der drei Kräfte $R'$, $R''$, $R'''$.

## Gleichgewichtsbedingungen für einen nicht völlig freien astatischen Körper.

76. Besitzt ein Körper einen festen Punkt, um den er beliebig gedreht werden kann, so sind nicht alle in Nr. 71 erwähnten Bedingungen zum astatischen Zustande erforderlich, vielmehr reicht es hin, wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte bei jeder Lage desselben auf eine Einzelkraft zurückkommen, die durch den festen Punkt geht. Die Sache verhält sich demnach ebenso, als wenn der Körper durch Hinzufügung einer neuen einzelnen Kraft astatisch gemacht werden sollte, d. h. mit andern Worten, es ist im vorliegenden Falle nothwendig und hinreichend, dass der Körper einen astatischen Mittelpunkt besitzt und dass dieser mit dem vorhandenen festen Punkte zusammenfällt.

Anders gestalten sich die Bedingungen für einen Körper mit einer festen Achse. Nehmen wir letztere zur Achse der $z$ und drehen das System um die feste Achse, so finden zwischen den alten und neuen Coordinaten eines Punktes die Gleichungen statt

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi, \quad y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi, \quad z = \zeta,$$

und indem wir diese Werthe in die sechs allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes substituiren, erhalten wir

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$
$$\sin\varphi\, \Sigma(\xi Z) + \cos\varphi\, \Sigma(\eta Z) - \Sigma(\zeta Y) = 0,$$
$$\sin\varphi\, \Sigma(\eta Z) - \cos\varphi\, \Sigma(\xi Z) + \Sigma(\zeta X) = 0,$$
$$\cos\varphi\, [\Sigma(\xi Y) - \Sigma(\eta X)] - \sin\varphi\, [\Sigma(\xi X) + \Sigma(\eta Y)] = 0.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden neun Bedingungen, in denen wir wieder $x, y, z$ statt $\xi, \eta, \zeta$ geschrieben haben:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$
$$\Sigma(xZ) = 0, \quad \Sigma(yZ) = 0, \quad \Sigma(zX) = 0, \quad \Sigma(zY) = 0,$$
$$\Sigma(xX) + \Sigma(yY) = 0, \quad \Sigma(xY) - \Sigma(yX) = 0;$$

d. i.

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$
$$E_1 = 0, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad D_1 = 0,$$
$$A_1 + B_1 = 0, \quad F - F_1 = 0.$$

77. Wenn die vorstehenden Gleichungen nicht erfüllt sind, so lässt sich wie früher die Frage stellen, ob der astatische Zustand nicht durch Hinzufügung neuer Kräfte bewirkt werden kann; demgemäss versuchen wir zunächst diesen Zweck durch eine Einzelkraft zu erreichen. Die Componenten derselben mögen $U$, $V$, $W$ heissen, ihr Angriffspunkt habe die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, dann gelten die Gleichungen

$$A - U = 0, \quad B - V = 0, \quad C - W = 0;$$
$$D - \eta W = 0, \quad D_1 - \zeta V = 0, \quad E - \zeta U = 0, \quad E_1 - \xi W = 0,$$
$$A_1 + B_1 - \xi U - \eta V = 0, \quad F - F_1 - \xi V + \eta U = 0.$$

Durch Elimination von $U$, $V$, $W$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ erhält man unter der Voraussetzung, dass $A$, $B$, $C$ nicht verschwinden, die Bedingungen

$$BE = AD_1,$$
$$C(A_1 + B_1) = AE_1 + BD,$$
$$C(F - F_1) = BE_1 - AD,$$

und, die Erfüllung derselben vorausgesetzt,

$$U = A, \quad V = B, \quad W = C,$$
$$\xi = \frac{E_1}{C}, \quad \eta = \frac{D}{C}, \quad \zeta = \frac{D_1}{B} = \frac{E}{A}.$$

Der hiermit bestimmte feste Punkt heisst der astatische Mittelpunkt in Beziehung auf die $z$-Achse. — Die zu seiner Existenz nöthigen Bedingungen sind z. B. bei Kräften in der $xy$-Ebene vorhanden, weil dann alle $z$ und $Z$ verschwinden.

Wenn $A = B = 0$, dagegen $C$ von Null verschieden ist, d. h. wenn die gegebenen Kräfte eine zur $z$-Achse parallele Resultante haben, so werden die Bedingungsgleichungen

$$D_1 = 0, \quad E = 0, \quad A_1 + B_1 = 0, \quad F - F_1 = 0,$$

und man erhält

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = C,$$
$$\xi = \frac{D}{C}, \quad \eta = \frac{E_1}{C},$$

während $\zeta$ beliebig bleibt.

78. Sobald die vorigen Bedingungen nicht erfüllt sind, also auch der astatische Zustand durch Hinzunahme einer Einzelkraft

nicht herbeigeführt werden kann, ist weiter zu untersuchen, ob eine Kraft und ein Kräftepaar das Verlangte leisten. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Nr. 74 haben wir für diesen Fall die Gleichungen

$$A - U = 0,\quad B - V = 0,\quad C - W = 0;$$
$$D - \eta W - \eta' W' = 0,\ D_1 - \zeta V - \zeta' V' = 0,$$
$$E - \zeta U - \zeta' U' = 0,\quad E_1 - \xi W - \xi' W' = 0,$$
$$A_1 + B_1 - \xi U - \xi' U' - \eta V - \eta' V' = 0,$$
$$F - F_1 - \xi V - \xi' V' + \eta U + \eta' U' = 0.$$

Durch Elimination von $U, V, W, U', V', W'$ ergeben sich hieraus die drei Gleichungen

$$(D - C\eta)\,\xi' - (E_1 - C\xi)\,\eta' = 0,$$
$$(A\zeta - E)\,\xi' + (B\zeta - D_1)\,\eta' + (A_1 + B_1 - A\xi - B\eta)\,\zeta' = 0,$$
$$(B\zeta - D_1)\,\xi' + (E - A\zeta)\,\eta' + (F - F_1 + A\eta - B\xi)\,\zeta' = 0;$$

sobald nun $A$, $B$, und $C$ nicht gleichzeitig verschwinden führen diese Gleichungen durch Elimination von $\xi', \eta', \zeta'$ zu der folgenden Bedingungsgleichung

$$c\,(\xi^2 + \eta^2) + b\,\xi\zeta + a\,\eta\zeta + a_1\xi + b_1\eta - c_1\zeta + d = 0,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}
c &= C(BE - AD_1),\\
b &= C[A(F - F_1) - B(A_1 + B_1)] + (A^2 + B^2)\,D,\\
a &= C[A(A_1 + B_1) + B(F - F_1)] - (A^2 + B^2)\,E_1,\\
a_1 &= A(D_1E_1 - DE) - B(DD_1 + EE_1) + C[(A_1 + B_1)D_1 - E(F - F_1)],\\
b_1 &= A(DD_1 + EE_1) + B(D_1E_1 - DE) - C[(A_1 + B_1)E + D(F - F_1)],\\
c_1 &= (AD - BE_1)(A_1 + B_1) + (AE_1 + BD)(F - F_1),\\
d &= (DE - D_1E_1)(A_1 + B_1) + (DD_1 + EE_1)(F - F_1).
\end{aligned}$$

Der angegebenen Bedingungsgleichung zufolge kann der Punkt $\xi, \eta, \zeta$ willkührlich auf einer Fläche zweiten Grades genommen werden, deren Gleichung jene Bedingungsgleichung selber ist; man findet mittelst bekannter Criterien leicht, dass diese Fläche unter die mit einem Mittelpunkte versehenen Umdrehungsflächen gehört. Hat man $\xi, \eta, \zeta$ dieser Bedingung entsprechend gewählt, so bestehen die vorhergehenden drei Gleichungen zwischen $\xi', \eta', \zeta'$ zusammen und bestimmen die Verhältnisse $\frac{\eta'}{\xi'}, \frac{\zeta'}{\xi'}$; es bleibt daher eine der Projectionen $\xi', \eta', \zeta'$ willkührlich. Demgemäss kann man dem Arme des Kräftepaares $(R', -R')$ einen beliebigen Anfangspunkt und eine beliebige Länge geben; zweckmässig ist es dabei, diesen Anfangspunkt mit dem Punkte $\xi\eta\zeta$ zusammenfallen zu lassen, so dass der Endpunkt des Paararmes die Coordinaten $\xi+\xi', \eta+\eta'$, $\zeta+\zeta'$ erhält. Bezeichnen wir diese mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$, so haben wir

$$\xi'=\xi_1-\xi, \quad \eta'=\eta_1-\eta, \quad \zeta'=\zeta_1-\zeta;$$

durch Substitution dieser drei Werthe in die drei für $\xi', \eta', \zeta'$ geltenden Bedingungsgleichungen erhalten wir drei neue Gleichungen, welche in Beziehung auf $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ so symmetrisch sind, dass sie ungeändert bleiben, wenn gleichzeitig $\xi$ und $\xi_1$, $\eta$ und $\eta_1$, $\zeta$ und $\zeta_1$ gegen einander vertauscht werden; demgemäss gilt von dem Punkte $\xi_1\eta_1\zeta_1$ dasselbe wie vom Punkte $\xi\eta\zeta$, d. h. der Punkt $\xi_1\eta_1\zeta_1$ liegt gleichfalls in der erwähnten Rotationsfläche. Weil ferner der Arm des Paares $(R', -R')$, d. i. die Entfernung der Punkte $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$ beliebig ist, so liegt nun auch der ganze Arm in der Fläche, woraus folgt, dass letztere ein einfaches Umdrehungshyperboloid sein muss. — Für die Kräfte hat man endlich noch die Werthe

$$U=A, \quad V=B, \quad W=C,$$

$$U'=\frac{E-A\zeta}{\zeta'}, \quad V'=\frac{D_1-B\zeta}{\zeta'}, \quad W'=\frac{D-C\eta}{\eta'}=\frac{E_1-C\xi}{\xi'}.$$

Wenn die Resultante der gegebenen Kräfte parallel zur $z$-Achse liegt, also $A=B=0$, hingegen $=C$ von Null verschieden ist, so verschwinden $c$, $b$, $a$ und das einfache Hyperboloid geht in eine der $xy$-Ebene parallele Ebene über.

In dem Falle, wo die Resultante der gegebenen Kräfte verschwindet, d. h. $A=B=C=0$ ist, wird $c=b=a=a_1=b_1=c_1=0$ und es bleibt nur die Bedingung $d=0$, d. h.

$$(DE-D_1E_1)(A_1+B_1)+(DD_1+EE_1)(F-F_1)=0.$$

Die Erfüllung derselben vorausgesetzt, erhalten wir

$$\xi'=\frac{(A_1+B_1)E-D_1(F-F_1)}{D_1^2+E^2}\zeta', \quad \eta'=\frac{(A_1+B_1)D_1-E(F-F_1)}{D_1^2+E^2}\zeta'$$

$$U'=\frac{E}{\zeta'}, \quad V'=\frac{D_1}{\zeta'}, \quad W'=\frac{D}{\eta'}=\frac{E_1}{\xi'},$$

womit das zur Herstellung des astatischen Zustandes erforderliche Kräftepaar soweit als möglich bestimmt ist.

Wenn endlich die Resultante des Kräfteystemes verschwindet und die Bedingung $d=0$ nicht erfüllt ist, so muss man den astatischen Zustand des Körpers durch zwei Kräftepaare herbei zuführen versuchen. Unter Beibehaltung der in Nr. 74 gebrauchten Zeichen sind die hierzu nöthigen Bedingungen

$$D - \eta' W' - \eta'' W'' = 0, \quad D_1 - \zeta' V' - \zeta'' V'' = 0,$$
$$E - \zeta' U' - \zeta'' U'' = 0, \quad E_1 - \zeta' W' - \zeta'' W'' = 0;$$
$$A_1 + B_1 - \xi' U' - \xi'' U'' - \eta' V' - \eta'' V'' = 0,$$
$$F - F_1 - \xi' V' - \xi'' V'' + \eta' U' + \eta'' U'' = 0.$$

Hier kann man die Grössen $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $\xi''$, $\eta''$, $\zeta''$, also auch die Grössen und Lagen der beiden Paararme willkührlich nehmen, und die obigen sechs Gleichungen bestimmen dann die noch übrigen sechs Unbekannten $U'$, $V'$, $W'$, $U''$, $V''$, $W''$, sodass also die Aufgabe immer lösbar ist.

## Achtes Capitel.

# Gleichgewicht eines veränderlichen Complexes starrer Körper.

### Allgemeine Grundsätze.

79. Die Zerlegungen und Zusammensetzungen, mittelst deren sich alle an einem starren Körper wirkenden Kräfte auf eine Einzelkraft und auf ein Kräftepaar zurückführen lassen, verlieren ihre Allgemeingültigkeit, sobald nicht alle Punkte fest unter einander verbunden sind. Besteht aber das ganze Punktesystem aus einzelnen gegen einander beweglichen kleineren Systemen, deren jedes für sich genommen starr ist, so kann man diesen Fall auf den vorigen reduciren, wenn man zu den gegebenen Kräften die aus den Verbindungen der einzelnen Theile entspringenden Kräfte hinzufügt; wie leicht erhellt, ist es dann zum Gleichgewichte des ganzen Systemes nothwendig und hinreichend, dass jeder bewegliche Theil desselben unter dem Einflusse aller Kräfte zusammen im Gleichgewichte steht. Jene Verbindungen der einzelnen beweglichen Theile wollen wir uns, um bestimmte Fälle vor Augen zu haben, entweder durch biegsame aber unausdehnbare Fäden oder durch feste Stäbe hergestellt denken, deren Endpunkte mit zwei verschiedenen beweglichen Theilen des Systemes verbunden sind; auch können wir uns vorstellen, dass die einzelnen Theile durch feste Flächen begrenzt werden und dass sich die zu zwei verschiedenen Theilen gehörenden Flächen berühren und gegenseitig drücken.

Bei stattfindendem Gleichgewichte des ganzen Systemes ist auch jeder einzelne Faden im Gleichgewichte und folglich müssen längs desselben zwei gleichgrosse und entgegengesetzte Kräfte wirken, deren eine den ersten und deren andere den zweiten Theil sollicitirt, so dass jeder Theil von dem anderen gezogen, mithin jeder Faden gespannt wird.

Bestehen die Verbindungsstücke aus festen Stäben, die sich ebensowenig dehnen als zusammendrücken lassen, so müssen bei stattfindendem Gleichgewichte wiederum zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte längs jedes Stabes zusammentreffen; nur braucht hier nicht nothwendig (wie im vorigen Falle) jeder Theil an dem anderen zu ziehen, es könnten vielmehr die Kräfte auch in umgekehrtem Sinne wirken, so dass jeder Stab von zwei Seiten her in seiner Längenrichtung gedrückt wird.

Da eine Fläche nur die zu ihr normalen Kräfte aufheben kann, so müssen bei dem gegenseitigen in der Berührung erfolgenden Drucke zweier Flächen zwei Kräfte aufgehoben werden, welche einander gleich sind und längs der gemeinschaftlichen Normale beider Flächen in entgegengesetztem Sinne wirken. Dabei strebt die Fläche, welche zu dem einen Körpertheile gehört, die entgegenstehende Fläche des anderen Theiles zu verdrängen, und es verhält sich die Sache umgekehrt wie bei der Verbindung durch Fäden.

Bei allen drei genannten Arten der Verbindung (durch Fäden, Stäbe oder Berührungsflächen) treten also zwischen je zwei Körpertheilen unbekannte Kräfte auf, die zu zweien von gleicher Grösse und einander entgegengesetzt sind. Andere Verbindungsweisen pflegt man gewöhnlich nicht zu betrachten, doch bleibt für alle Fälle die Bemerkung gültig, dass die von den Verbindungen herrührenden Kräfte aus gleichen Wirkungen und Gegenwirkungen bestehen müssen, da überhaupt eine Kraft nur durch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben werden kann.

Bestehen die einzelnen starren Theile des ganzen Systemes aus einfachen Maschinen, wie Hebel, Rolle etc., so heisst das Ganze eine zusammengesetzte Maschine.

80. Nach diesen Bemerkungen kann man (unter Mitzählung der aus den Verbindungen entspringenden Kräfte) leicht die Bedingungsgleichungen aufstellen, die zum Gleichgewichte jedes einzelnen Systemtheiles erforderlich sind und deren Anzahl von 1 bis incl. 6 gehen kann. Durch Elimination der unbekannten von den Verbindungen herrührenden Kräfte erhält man daraus die zum

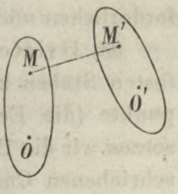
Gleichgewichte des ganzen Systemes erforderlichen Bedingungsgleichungen; nachher führen auch die Gleichungen, welche zur Elimination gedient haben, zur Bestimmung der Intensitäten und Richtungen jener Verbindungskräfte, wenn dieselben nicht unmittelbar gegeben sein sollten.

In dem speciellen Falle, wo die Bedingung für das Gleichgewicht jedes einzelnen Systemtheiles aus nur einer Gleichung besteht und der erste Systemtheil mit dem zweiten, der zweite mit dem dritten etc. verbunden und keine weitere Verbindung vorhanden ist, kann man sich leicht überzeugen, dass auch nur eine einzige Gleichung als Bedingung für das Gleichgewicht des ganzen Systemes übrig bleiben kann. Bezeichnet nämlich $m$ die Anzahl der einzelnen Theile, so hat man $m$ Gleichgewichtsgleichungen zwischen den gegebenen und den $m-1$ unbekannten Kräften, welche aus der Verbindung des ersten mit dem zweiten, des zweiten mit dem dritten etc., des $(m-1)^{\text{ten}}$ mit dem $m^{\text{ten}}$ Theile entstehen; diese unbekannten Kräfte mögen $X_1$, $X_2$, $X_3 \ldots X_{m-1}$ heissen. Nun enthält die erste Gleichung $X_1$, die zweite $X_1$ und $X_2$, die dritte $X_2$ und $X_3$ u. s. f., die $m^{\text{te}}$ $X_{m-1}$; durch Substitution von $X_1$ aus der ersten in die zweite Gleichung, von $X_2$ aus der zweiten in die dritte Gleichung u. s. f. gelangt man schliesslich zu einer letzten von $X_1, X_2 \ldots X_{m-1}$ freien Gleichung. Diese ist die einzige Bedingung des Gleichgewichtes, und die vorigen Gleichungen bestimmen nachher $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$.

## Beispiele.

81. Erstes Beispiel. Um jeden von zwei festen Punkten $O$ und $O'$ sei ein starrer Körper frei drehbar und zwischen zwei Punkten $M$ und $M'$ dieser Körper, die man als Hebel betrachten kann, sei ein biegsamer Faden ausgespannt; man verlangt die Bedingungen des Gleichgewichtes, wenn beliebige Kräfte auf die beiden Hebel wirken und zugleich der Faden eine gewisse vorläufig noch unbekannte Spannung erhält.

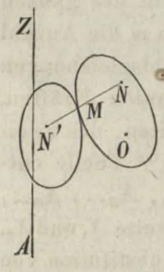
Fig. 23.




Der Hebel $MO$ muss unter dem Einflusse aller an ihm thätigen gegebenen Kräfte zusammen mit der Spannung des Fadens, welche $X$ heissen möge, im Gleichgewicht sein und es ist dabei $X$ als eine von $M$ nach $M'$ wirkende Kraft in Rechnung zu ziehen; dies giebt nach Nr. 53 drei Gleichgewichtsbedingungen, welche $X$ in der ersten Potenz enthalten. Auf analoge Weise erhält man drei entsprechende Gleichungen für das Gleichgewicht des Hebels $M'O'$, wobei $X$ als eine von $M'$ nach $M$ wirkende Kraft zu betrachten ist. Entwickelt man $X$ aus der ersten Gleichung, so hat man die Spannung des Fadens und indem man den gefundenen Werth von $X$ in die übrigen fünf Gleichungen einsetzt, erhält man die fünf zum Gleichgewichte erforderlichen und ausreichenden Bedingungen.

82. Zweites Beispiel. Ein um den Punkt $O$ frei drehbarer Hebel berühre in $M$ einen um die Achse $AZ$ frei drehbaren Körper (Göpel); auf beide Körper mögen beliebige gegebene Kräfte wirken, und es werden die Bedingungen des Gleichgewichts und die Grösse des gegenseitigen Druckes gesucht.

Fig. 24.

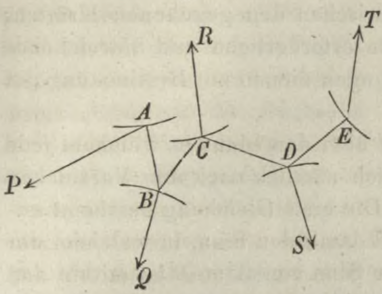



Nennen wir $X$ die Intensität dieses unbekannten Druckes, so ist derselbe für den Hebel als eine von $M$ nach $N$ wirkende Kraft zu betrachten; unter Einrechnung derselben in die übrigen auf den Hebel unmittelbar wirkenden Kräfte muss nun erstens der Hebel im Gleichgewichte sein. Dies giebt drei lineare Gleichungen mit der Unbekannten $X$. Zweitens wird erfordert, dass der Göpel ebenfalls im Gleichgewichte sei unter Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte verbunden mit dem Drucke $X$, welcher hier als eine von $M$ nach $N'$ wirkende Kraft zu betrachten ist; diess giebt gemäss Nr. 54 eine einzige Gleichung. Man hat also zusammen vier Gleichungen; eine derselben bestimmt den unbekannten Druck $X$, und die übrigen sind nach Substitution des Werthes von $X$ die zum Gleichgewichte des ganzen Systemes erforderlichen und hinreichenden Bedingungen.

83. Drittes Beispiel. Wir denken uns ein Polygon aus festen Stäben zusammengesetzt, die sich um ihre Verbindungspunkte (die Ecken des Polygones) frei drehen können; ferner setzen wir die Bedingung hinzu, dass diese Eckpunkte auf vorgeschriebenen Curven bleiben müssen, und denken uns endlich beliebige Kräfte an den Ecken des Polygones wirkend. Die Bedingungen des Gleichgewichtes ergeben sich dann auf folgende Weise.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, betrachten wir ein aus fünf Punkten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ bestehendes Polygon und

Fig. 25.




stellen uns die an jeder Ecke thätigen Kräfte zu ihrer Resultante vereinigt vor, so dass wir nur mit fünf Kräften zu thun haben, welche der Reihe nach $P, Q, R, S, T$ heissen mögen.

Zunächst muss nun an jedem einzelnen Punkte Gleichgewicht stattfinden, und dieses kann, weil der betreffende Punkt auf einer bestimmten Curve zu bleiben gezwungen ist, nur dann eintreten, wenn die Resultante der an diesem Punkte zusammenkommenden Kräfte normal auf der Curve steht, welche dem Punkte angewiesen ist.

Ferner muss jede Polygonseite im Gleichgewichte sein unter dem Einflusse aller an ihr wirkenden Kräfte; hierzu gehört z. B. bei der Seite $AB$, dass die Resultante aller an $A$ zusammentreffenden Kräfte gleich und entgegengesetzt ist der Resultante aller an $B$ zusammenkommenden Kräfte, dass mithin diese Resultanten längs $AB$ selber wirken. Ebenso verhält es sich mit den anderen Seiten $BC$, $CD$, $DE$.

Diess vorausgesetzt bezeichnen wir mit $X, Y, Z, U$ die aus den vorhandenen Verbindungen entspringenden Kräfte, d. h. die Pressungen oder dehnenden Kräfte, welche auf die Polygonseiten in deren Längsrichtungen wirken; ferner mögen $a, b, c, d, e$ die Winkel heissen, welche die Richtungen der Kräfte $P, Q, R, S, T$ mit den im bestimmten Sinne genommenen Curventangenten an $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ einschliessen; endlich sei $\alpha$ der Winkel zwischen der Richtung von $X$ und der Tangente an $A$, sowie $\alpha'$ der Winkel zwischen $X$ und der Tangente an $B$, und entsprechend die Bedeutung von $\beta$ und $\beta'$, $\gamma$ und $\gamma'$ etc. Das Gleichgewicht des Punktes $A$ giebt jetzt die Bedingung

$$P \cos a + X \cos \alpha = 0,$$

ferner ist für das Gleichgewicht des Punktes $B$

$$X \cos \alpha' + Q \cos b + Y \cos \beta = 0;$$

dem entsprechend hat man in Beziehung auf die übrigen Punkte

$$\begin{aligned} Y \cos \beta' + R \cos c + Z \cos \gamma &= 0, \\ Z \cos \gamma' + S \cos d + U \cos \delta &= 0, \\ U \cos \delta' + T \cos e \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von $X$, $Y$, $Z$, $U$ folgt aus diesen fünf Gleichungen eine einzige Gleichung zwischen den gegebenen Kräften; diese ist die zum Gleichgewichte erforderliche und hinreichende Bedingung. Die übrigen Gleichungen dienen zur Bestimmung der Kräfte $X$, $Y$, $Z$, $U$.

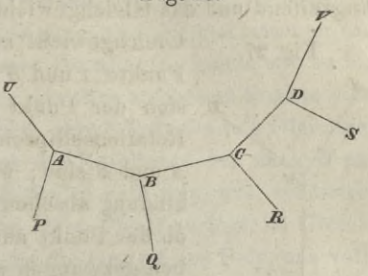
Auch entscheidet man leicht über den Sinn, in welchem jede dieser Kräfte wirkt; er richtet sich nämlich nach den Vorzeichen der Cosinus von $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ etc. Die erste Gleichung bestimmt zunächst das Zeichen von $\cos\alpha$ und damit den Sinn, in welchem die Kraft $X$ an $A$ zu nehmen ist; der Sinn von $X$ an $B$ ist mithin der entgegengesetzte, woraus das $\cos\alpha'$ gehörige Vorzeichen von selber folgt. Die zweite Gleichung giebt nachher das Zeichen von $\cos\beta$, d. h. den Sinn von $Y$ an $B$, wodurch wieder der Sinn von $Y$ an $C$, d. h. das Vorzeichen von $\cos\beta'$ bestimmt wird u. s. w. Man erfährt hierdurch, ob jedes der starren Verbindungsstücke (die Polygonseiten) von beiden Seiten her einen Druck oder nach beiden Seiten hin einen Zug erleidet.

Bemerkenswerth ist noch die Modification, welche die vorigen allgemeinen Formeln in dem speciellen Falle erleiden, wo eine der starren Polygonseiten normal zu einer der Curven liegt. Ist z. B. $BC$ senkrecht auf der durch $B$ gehenden Curve, so wird $\cos\beta = 0$, und die beiden ersten Gleichungen führen nach Elimination von $X$ zu einer Bedingungsgleichung, welche sagt, dass die beiden an den Endpunkten von $AB$ angebrachten Kräfte $P$ und $Q$ einander gerade so ins Gleichgewicht zu setzen sind als wenn überhaupt nur die eine Gerade $AB$ zwischen den beiden ersten Curven vorhanden wäre. In der That wird in diesem Falle die Kraft $Y$ durch den Widerstand der Curve aufgehoben und ist also für die vorherliegenden Punkte nicht zu beachten.

Die drei übrigen Gleichungen liefern durch Elimination von $Z$ und $U$ eine neue Gleichung, welche dieselbe ist, als wenn das System $CDE$ für sich allein existirte; die darin vorkommende Kraft $Y$ wirkt auf $C$ längs $BC$ in dem einen oder anderen Sinne. In der That kann auch die Gerade $BC$ durch eine in ihrer Längsrichtung wirkende Kraft nicht verschoben oder gedreht werden, weil die Festigkeit der Curve an $B$ jede derartige Kraft aufhebt.

84. Viertes Beispiel. Wir denken uns die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ durch biegsame Fäden von unveränderlichen Längen verbunden; an $A$, $B$, $C$, $D$ bringen wir der Reihe nach die Kräfte $U$, $P$, $Q$,

Fig. 26.




*R*, *S*, *V* an, deren äusserste mittelst der Fäden *AU* und *DV* wirken. Die einzelnen festen Theile des Systemes reduciren sich in diesem Falle auf die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und das Ganze bildet ein sogenanntes Seilpolygon.

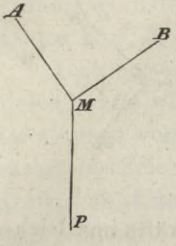
Zum Gleichgewichte des Systemes wird nun erfordert, dass jeder einzelne der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* unter dem Einflusse aller auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sei. So wird z. B. der Punkt *B* von drei Kräften sollicitirt, nämlich durch die beiden von den Seilverbindungen mit *A* und *C* herrührenden Kräfte und durch die gegebene Kraft; diese drei Kräfte müssen folglich in einer und derselben Ebene enthalten und jede von ihnen muss dem Sinus des Winkels zwischen den beiden übrigen proportional sein. Ausserdem ist aber zum Gleichgewichte aller Seile noch erforderlich, dass jedes einzelne Seil von zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften gezogen werde, deren gemeinsame Intensität die Spannung des betreffenden Seiles heissen möge. Aus diesen Bedingungen kann man die Spannungen aller Seile, sowie die Verhältnisse der Kräfte für den Gleichgewichtszustand ableiten.

85. Die Spannung *T* irgend eines Seiles *CD* lässt sich leicht durch die Bemerkung bestimmen, dass zwischen *T* und dem auf irgend einer Seite von *CD* liegenden Theile des Systemes Gleichgewicht stattfinden muss; das Gleichgewicht zwischen *U*, *P*, *Q*, *R* und *T* wird aber nicht gestört, wenn man das Polygon *ABC* unbiegsam macht und es ist daher *T* gleich und entgegengesetzt der Resultante aus *U*, *P*, *Q*, *R*. Da ferner Kräfte ohne Aenderung ihres Effectes an einem beliebigen Punkt ihrer Resultante verlegt werden dürfen, so gilt nunmehr der Satz: Die Spannung irgend eines Seiles ist die Resultante aller auf derselben Seite dieses Seiles liegenden und parallel an irgend einen Punkt desselben versetzten Kräfte.

86. Anders gestaltet sich die Sache, wenn eine der Kräfte an einem auf dem Seile beweglichen Punkte wirkt, z. B. an einem Ringe, der an dem Seile frei hin und her gleiten könnte. Um die für diesen Fall geltende besondere Bedingung kennen zu lernen,

denken wir uns die Kraft $P$ an einem Punkte $M$ des Seiles $AMB$ angreifend und das Gleichgewicht hergestellt. Nun wird aber das Gleichgewicht nicht gestört, wenn wir uns die Punkte $A$ und $B$ als fest vorstellen und dann kann sich der Punkt $M$ nur auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides bewegen, dessen Brennpunkte $A$ und $B$ sind; wir können jetzt von der Seilverbindung absehen und die Sache so auffassen, als ob der Punkt auf der genannten Fläche zu bleiben gezwungen wäre. Zu seinem Gleichgewichte ist dann erforderlich, dass die an ihm thätige Kraft normal auf dem Ellipsoide steht und folglich den Winkel $AMB$ halbirt. Wenn also einer von den Angriffspunkten der Kräfte längs des Fadens gleiten kann, so muss bei der Gleichgewichtslage die Kraftrichtung den Winkel halbiren, welcher von den beiden Theilen des Seiles eingeschlossen wird.

Fig. 27.

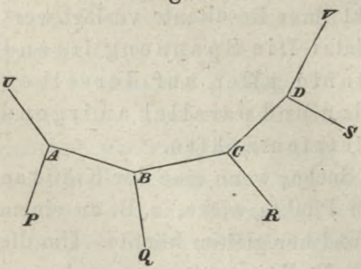



Dieselbe Bedingung gilt für den Fall, wo der Ring befestigt und das Seil ungehindert durch ihn hindurch gleiten kann; das Gleichgewicht findet nämlich statt, wenn längs $MA$ und $MB$ gleiche Spannungen im Seile wirken, folglich würde eine Aenderung in dem Verhältnisse dieser Spannungen auch eine Bewegung hervorbringen.

87. Das Gleichgewicht an dem Polygon wird, einmal hergestellt, dadurch nicht gestört, dass man das Polygon fest macht, und es müssen daher alle äusseren daran wirkenden Kräfte den Gleichgewichtsbedingungen für ein festes System genügen. Verlegt man also die genannten Kräfte parallel zn sich selbst an einen beliebigen Punkt, so muss die entstehende Resultante verschwinden; hieraus ergeben sich drei Gleichungen des Gleichgewichtes.

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so kann man dem Polygon auch immer eine solche Gestalt ertheilen, dass die ihrer Grösse und Richtung nach gegebenen Kräfte an demselben im Gleichgewichte sind. Um diess nachzuweisen, nehmen wir den Punkt $A$ beliebig und ertheilen dem Seile $AB$ eine der Resultante

Fig. 26.



aus $U$ und $P$ entgegengesetzte Richtung und eine dieser Resultante gleiche Spannung; ferner legen wir das Seil $BC$ entgegengesetzt der Resultante aus $Q$ und der Spannung von $AB$ und nehmen die Spannung in $BC$ gleich der letzteren Resultante; indem wir so bis zur letzten Ecke fortgehen, haben wir aber an diesem Punkte eine solche Kraft anzubringen, dass das ganze Polygon in's Gleichgewicht kommt. Diese Kraft muss die Resultante der nach $D$ parallel verlegten Kräfte $U$, $P$, $Q$, $R$, $S$ also $= V$ sein, weil vorausgesetzt war, dass $U$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $V$ an einen Punkt verlegt, im Gleichgewicht sein würden. Hiermit ist die Gestalt des Polygons vollständig bestimmt.

Diese Betrachtungen sind, wie man bemerken wird, unabhängig von der Anzahl der Polygonseiten und behalten daher ihre Gültigkeit für den Grenzfall, bei welchem die Anzahl der Seiten unendlich wächst, jede einzelne Seite unausgesetzt abnimmt und das Vieleck in eine stetig gekrümmte Linie übergeht.

88. Wenn die beiden Endpunkte des Seiles fest sind, so kennt man die Kräfte $U$ und $V$ nicht, und es bleibt dann die Aufgabe, die Gestalt des Polygones in der Gleichgewichtslage und die Werthe jener zwei Kräfte zu bestimmen.

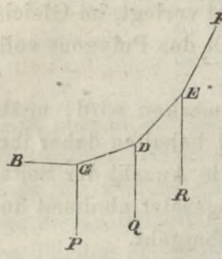
Zu diesem Zwecke geht man von dem ersten festen Endpunkte $U$ aus, sieht vorläufig die drei Componenten von $U$ als bekannt an und bestimmt daraus die Lage des Punktes $A$, sowie der Reihe nach die Lagen der anderen Punkte und die Spannungen aller Seile. Die Coordinaten des Endpunktes des letzten Seiles erhält man jetzt ausgedrückt durch die Coordinaten des ersten Punktes $U$, die man gleich Null setzen kann, und durch die drei Componenten der Kraft $U$. Vergleicht man die erhaltenen Werthe mit den drei Coordinaten von $V$, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der vorhin in Rechnung gebrachten drei Componenten der Kraft $U$; vermöge dieser Werthe sind nachher auch die Lagen aller Ecken sowie die Spannungen aller Seile vollständig bekannt.

89. In dem Falle, wo die Richtungen der beiden äussersten Seile sich schneiden, haben die Kräfte $U$ und $V$ eine Resultante, woraus folgt, dass nun auch die Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S$ eine gleiche und entgegengesetzte Resultante besitzen. Befindet sich demnach das mit zwei festen Endpunkten versehene Polygon in der Gleichgewichtslage, so kann man die auf die Endpunkte ausgeübten Wirkungen dadurch erkennen, dass man die dort endigenden Seiten

bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, die gegebenen Kräfte an diesen Punkt versetzt und sie in zwei Kräfte zerlegt, die nach den Richtungen derselben Seiten wirken. Jede solche Componente misst die Spannung des entsprechenden Seiles und zugleich die Wirkung auf den festen Punkt, an welchen es geknüpft ist.

90. Wenn die Kräfte *P*, *Q*, *R*, *S* parallel sind, so ist, wie leicht zu bemerken, das ganze System in einer Ebene enthalten. Dabei kann eines der Seile, z. B. *BC* senkrecht zur Richtung der Kräfte liegen, wir ersetzen es dann durch eine seiner Spannung gleiche Kraft und betrachten nur die auf der einen Seite des Seiles liegenden Kräfte. Die Spannung irgend eines Seiles *DE* kommt jetzt der Resultante aller auf der einen Seite von *DE* liegenden und parallel nach *D* versetzten Kräfte gleich, mithin bleibt die auf den Kraftrichtungen senkrechte Componente constant für alle Seile und gleich der Spannung von *BC*; die zu den Kraftrichtungen parallele Componente ist die Summe aller Kräfte von *B* bis *D*.

Fig. 28.




91. Wir betrachten endlich noch den Fall, wenn der Angriffspunkt einer Kraft an mehrere Seile zugleich geknüpft ist. Man erhält dann die Spannung jedes einzelnen Seiles durch Zerlegung der Kraft in einzelne nach den Richtungen der Seile wirkende Componenten. Dabei findet aber eine Unbestimmtheit statt, sobald die Anzahl der in einem Punkte zusammenlaufenden Fäden mehr als drei beträgt und die Voraussetzung der Unausdehnbarkeit der Seile aufrecht erhalten wird. Einem ähnlichen Falle sind wir früher bei der Stützung eines mit mehr als drei Punkten auf einer Ebene ruhenden Körpers begegnet; auch dort waren die Pressungen auf die Stützpunkte unbestimmt, wenn die Anzahl der letzteren grösser als drei war. In der Wirklichkeit dagegen sind diese Druckkräfte ebenso bestimmt, wie jene Seilspannungen, weil jede stützende Ebene mehr oder weniger nachgiebt und jedes Seil in gewissem Grade dehnbar ist. Beachtet man diese Umstände, indem man in jedem besonderem Falle auf die physikalische Beschaffenheit der betreffenden Körper näher eingeht, so lassen sich auch alle einzelnen Kräfte vollständig bestimmen; diese Untersuchungen liegen uns aber zu fern, als dass wir sie durchführen könnten.

## Gleichgewichtsbedingungen für eine Seilcurve.

92. Auf jeden Punkt eines biegsamen und unausdehnbaren Fadens mögen gegebene Kräfte wirken und an demselben im Gleichgewichte sein; es entsteht dann die doppelte Frage nach der Gestalt des Fadens in der Gleichgewichtslage und nach der Spannung in jedem einzelnen Punkte desselben.

Mit Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mögen $X$, $Y$, $Z$ die rechtwinkligen Componenten derjenigen Kraft bedeuten, welche auf die Längeneinheit des Fadens wirken würde, wenn die letztere im Punkte $xyz$ concentrirt wäre; das vom Punkte $xyz$ ab gerechnete Bogenelement $ds$ wird dann durch eine Kraft afficirt, deren Componenten $Xds$, $Yds$, $Zds$ sind. Ausserdem wirken auf das Fadenelement $ds$ noch zwei Spannungen, welche an den Enden desselben angreifen und nach den Tangenten an diesen Punkten in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind. Die Spannung $T$ im Punkte $xyz$ ändert sich continuirlich mit diesem Punkte, ist also eine stetige Funktion von $x, y, z$; dasselbe gilt von den Cosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ der Winkel, welche die Tangente im Punkte $xyz$ mit den drei Coordinatenachsen einschliesst. Die drei Componenten der Spannung im Punkte $xyz$ sind demnach

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds};$$

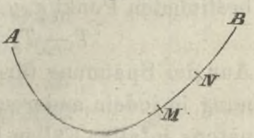
die am anderen Endpunkte von $ds$, d. h. am Punkte $x+dx, y+dy, z+dz$ auftretende Spannung $T+dT$ hat dem entsprechend die Componenten

$$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right), \; T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right), \; T\frac{dz}{ds}+d\left(T\frac{dz}{ds}\right),$$

wobei nicht zu übersehen ist, dass die vorhin genannten Componenten das negative Zeichen erhalten müssen, wenn man die letzten drei Componenten positiv nimmt.

Den Bogen $s$ denken wir uns vom Punkte $A$ aus gezählt und bezeichnen mit $MN$ das Bogenelement; die Richtungen der beiden an $M$ und $N$ wirkenden tangentialen Spannungen schneiden sich ohne Zweifel, wenn die Curve in einer Ebene liegt, sie können aber auch bei einer doppelt gekrümmten Linie als sich

Fig. 29.



schneidend angesehen werden, weil dann ihr kürzester Abstand unendlich klein in Beziehung auf $ds$ ist. Jene Spannungen haben also eine Resultante und folglich müssen alle zwischen $M$ und $N$ wirkenden Kräfte gleichfalls eine Resultante besitzen, welche der ersten gleich und entgegengesetzter Richtung ist und in der Krümmungsebene der Curve liegt. Die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen sind jetzt die nämlichen wie für Kräfte an einem Punkte und bestehen darin, dass die Summen der den einzelnen Coordinatenachsen parallelen Componenten für sich verschwinden. Mit Rücksicht auf den oben erwähnten Gegensatz der Vorzeichen der Componenten von $T$ und $T + dT$ erhalten wir nunmehr folgende Gleichungen

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0,$$
$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0,$$
$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0.$$

Die erste multipliciren wir mit $\frac{dx}{ds}$, die zweite mit $\frac{dy}{ds}$, die dritte mit $\frac{dz}{ds}$ und addiren die Producte; unter Beachtung der Relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

aus welcher

$$\frac{dx}{ds}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

folgt, finden wir als Summe die Gleichung

$$dT + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

welche jede der früheren Gleichungen vertreten kann.

Meistentheils ist $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ das Differential einer Funktion $\varphi(x, y, z)$, dann haben wir für diesen Fall

$$T = -\varphi(x, y, z) + \text{Const.}$$

Die Constante ist leicht zu bestimmen, wenn man für einen bestimmten Punkt $x_0 y_0 z_0$ die Spannung $T_0$ kennt; man findet

$$T - T_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0) - \varphi(x, y, z).$$

Aus der Spannung für einen Punkt erhält man hiernach die Spannung in jedem anderem Punkte ausgedrückt durch dessen Coordinaten; in allen Fällen hängt die Differenz der Spannungen in zwei verschiedenen Punkten nur von den Coordinaten dieser Punkte ab. Durch Substitution von $T$ in früheren Gleichungen gelangt man zu den Gleichungen der gesuchten Seilcurve.

93. Wenn die Kraft, deren Componenten mit $X, Y, Z$ bezeichnet wurden in allen Punkten des Fadens die Richtung der Normale besitzt, so gilt die Gleichung

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

woraus folgt, dass $\varphi\,(x, y, z)$ mithin auch $T$ constant ist; der Faden hat dann an allen Stellen dieselbe Spannung. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn der Faden über eine Fläche gespannt ist, die keine Reibung erzeugt. Wegen der Unveränderlichkeit von $T$ gehen die ersten drei Gleichungen jetzt in die folgenden über

$$T\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) = -X\,ds, \quad T\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) = -Y\,ds, \quad T\,d\left(\frac{dz}{ds}\right) = -Z\,ds;$$

diese geben

$$T^2\left\{\left[d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]^2\right\} = (X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2,$$

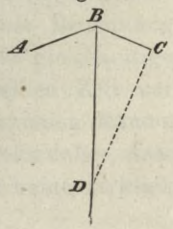
oder, wenn $P$ die Kraft und $r$ den Krümmungshalbmesser bezeichnet,

$$T^2 = P^2 r^2, \qquad P = \frac{T}{r}.$$

Wie also auch die normale Kraft beschaffen sein möge, so erhält der Faden immer eine solche Gestalt, dass jene Kraft im umgekehrten Verhältnisse zum Krümmungsradius steht. Hiernach ist z. B. die Fadencurve ein Kreis, sobald alle normalen Kräfte von gleicher Grösse sind und in einer Ebene liegen.

Wenn die normale Kraft aus dem Widerstande einer krummen Fläche herrührt, so steht die Krümmungsebene der Curve, in welcher Ebene die Kraftrichtung immer enthalten sein muss, senkrecht auf jener Fläche; die krumme Linie ist dann die kürzeste Curve zwischen zwei Flächenpunkten.

Fig. 29.




Den auf die Fläche ausgeübten Druck kann man leicht durch folgende geometrische Betrachtungen ermitteln. Betrachten wir nämlich die Fadencurve als ein Polygon aus unendlich vielen gleichen unendlich kleinen Seiten, so fällt die Resultante der Spannungen zweier Nachbarseiten $AB$ und $BC$ in die Gerade $BD$, welche den Winkel $ABC$ halbirt und ist ihrer Grösse nach

$$2\,T\cos CBD = 2\,T\,\frac{BC}{BD}, \text{ wenn } CD \perp BC.$$

Die Hälfte von $BD$ giebt den Radius $r$ des durch die Punkte $A$, $B$, $C$ gehenden Kreises, welcher beim Uebergange zur Grenze der Krümmungskreis wird; es ist daher jener Druck

$$= T\frac{BC}{r}.$$

Bei verschwindenden $BC$ nähert sich auch der Druck der Null; für ein unendlich kleines Fadenstück ist $BC = ds$ und der von dem Fadenstücke $ds$ auf die Fläche ausgeübte Druck

$$= T\frac{ds}{r},$$

also umgekehrt proportional dem zu jenem Fadenelemente gehörigen Krümmungshalbmesser.

## Neuntes Capitel.

# Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

### Einfachste Fälle des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

94. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems von Punkten oder festen Körpern, die irgendwie mit einander verbunden und der Einwirkung irgend welcher Kräfte ausgesetzt sind, lassen sich auf eine einzige ganz allgemeine Formel zurückführen, deren Gebrauch sowohl in der Statik als in der Dynamik von dem grössten Nutzen ist. Der betreffende allgemeine Ausdruck bietet nämlich den wesentlichen Vortheil, dass er die jedem speciellen Punktesysteme eigenthümlichen Bedingungen nach einem durchaus gleichförmigen Verfahren entwickeln lehrt, weshalb man auch sagen kann, dass in ihm die ganze Statik irgendwie verbundener Punkte implicite enthalten ist. Der Aufstellung jenes Theoremes und seines Beweises lassen wir einige Definitionen vorausgehen.

Wenn ein System im Gleichgewichte ist und jeder Punkt desselben in eine neue, von der früheren unendlich wenig verschiedenen Lage gebracht wird, welche aber mit den Bedingungen des Systems verträglich sein muss, so versteht man unter der virtuellen Geschwindigkeit eines Punktes die gerade Verbindungslinie seiner ersten und zweiten Lage. Diese Benennung schreibt sich einerseits davon her, dass man die gleichzeitige Verrückung aller Punkte als in einer und derselben Zeit vor sich gehend betrachten kann, wobei die durchlaufenen Räume den Geschwindigkeiten proportional sind, andererseits daher, dass jede solche Verrückung nur eine mögliche aber keine wirklich eintretende ist.

Unter der virtuellen Geschwindigkeit eines Punktes, bezogen auf eine gegebene Gerade, verstehen wir die Projection seiner virtuellen Geschwindigkeit auf jene Gerade; diese Projection gilt als positiv oder negativ, jenachdem die Bewegungsrichtung des Punktes, der von der ersten in die zweite Lage übergeht, mit jener gegebenen Geraden einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet; man erhält folglich die auf eine bestimmte Gerade bezogene virtuelle Geschwindigkeit eines Punktes, sowohl der Grösse als der Richtung nach, wenn man die absolute Grösse des vom Punkte zurückgelegten Weges mit dem Cosinus des Winkels zwischen diesem Wege und jener Geraden multiplicirt.

Endlich nennt man virtuelles Moment einer Kraft das Produkt aus ihrer Intensität in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes bezogen auf die Richtung der Kraft.

Nach dem hiermit festgesetzten Sprachgebrauche lässt sich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten folgendermaassen ausdrücken:

Wenn irgend ein System von Punkten im Gleichgewichte ist und jeder Punkt eine mit den sonstigen Bedingungen des Systemes verträgliche unendlich kleine Verrückung erleidet, so ist, wie auch diese Verrückungen geschehen mögen, doch immer die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte gleich Null; findet umgekehrt diese Bedingung bei allen virtuellen Verrückungen statt, so ist das System auch im Gleichgewichte.

In dieser Fassung werden die unendlich kleinen Grössen auf die gewöhnliche Weise angesehen. Die Gleichung ist nämlich genau, wenn man sie durch eine der vorhandenen unendlich kleinen Grössen dividirt und von den entstehenden Verhältnissen die Grenzwerthe nimmt; mit andern Worten die Summe der virtuellen Momente ist unendlich klein im Vergleich zu jedem einzelnen derselben.

Dem allgemeinen Beweise des obigen Theoremes schicken wir die Betrachtung einiger speciellen Fälle voraus.

95. Virtuelle Bewegung eines einzigen Punktes. Zum Gleichgewicht eines ganz freien Punktes ist erforderlich, dass die Summe der auf eine beliebige Richtung bezogenen (projicirten) Kräfte verschwindet, auch findet umgekehrt, wenn diese

Bedingung erfüllt ist, das Gleichgewicht statt. Sei nun $P$ irgend eine der auf den Punkt wirkenden Kräfte und $\mu$ der Winkel zwischen ihrer und einer beliebig gewählten festen Richtung, so hat man die zum Gleichgewichte nothwendige und hinreichende Bedingungsgleichung

$$\Sigma (P \cos \mu) = 0,$$

oder, wenn man alle einzelnen Glieder dieser Summe mit einem und demselben Factor $m$ multiplicirt,

$$\Sigma (P m \cos \mu) = 0.$$

Nun ist $m \cos \mu$ die Projection der Grösse $m$, sobald man diese von dem gegebenen Punkte aus auf der festen Richtung abträgt und auf die Richtung der Kraft $P$ projicirt. Da ferner der Punkt vollkommen frei ist, so darf man sich $m$ als die Entfernung seiner ursprünglichen von einer etwaigen späteren Lage denken und indem man $m$ unendlich klein nimmt, wird es zur virtuellen Geschwindigkeit des betrachteten Punktes. Dann bedeutet aber $\Sigma (P m \cos \mu)$ die Summe der virtuellen Momente aller Punkte und verschwindet bei eintretendem Gleichgewichte. Dasselbe gilt umgekehrt, weil die obige Bedingung nicht nur erforderlich, sondern auch hinreichend war. Im vorliegenden Falle darf man übrigens statt der virtuellen Geschwindigkeit irgend eine endliche Grösse nehmen, auch beträgt die Summe aller virtuellen Momente genau Null und nicht bloss eine im Verhältniss zu jedem einzelnen Momente unendlich kleine Grösse.

Im Fall das Gleichgewicht nicht vorhanden ist, kann man es durch Anbringung einer der Resultante gleichen und entgegengesetzten Kraft herbeiführen. Da nunmehr die Summe der virtuellen Momente verschwindet und da ferner zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gleiche und mit entgegengesetzten Zeichen versehene Momente geben, so folgt, dass das virtuelle Moment der Resultante, sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach, gleich ist der Summe der virtuellen Momente aller Componenten.

Hierbei sind alle Kräfte im absoluten Sinne gewonnen und es bedarf daher noch einer Untersuchung, ob die allgemeine Gleichung in dem Falle eine Modification erleidet, wo die Kräfte entgegengesetzter Zeichen fähig sind, wie z. B. wenn es sich um eine Kraft $P$ handelt, welche parallel zu drei rechtwinkligen Coordinatenachsen in die Componenten $x$, $y$, $z$ zerlegt wird. Betrachtet man $x$, $y$, $z$ zuerst positiv, so sind die Variationen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ der drei Coordinaten des Punktes $xyz$, sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach, die virtuellen Geschwindigkeiten jener Kräfte und man hat

$$P\,\delta p = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z,$$

wobei $\delta p$ die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes $xyz$ bedeutet. Wird nun eine der Componenten, z. B. $Y$, negativ, so ist ihr absoluter Werth $= -Y$, zugleich verwandelt sich die entsprechende virtuelle Geschwindigkeit in $-\delta y$ und das virtuelle Moment ist wieder $Y\delta y$; bei gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen der Componenten und Coordinaten bleibt also die vorige Gleichung allgemein richtig. Direct gelangt man zu dem nämlichen Resultate, wenn man die aus $\delta x$, $\delta y$ und $\delta z$ bestehende gebrochene Linie auf die Resultante projicirt.

Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass bei einem schiefwinkligen Coordinatensysteme $X\,\delta x$ nicht mehr das virtuelle Moment von $x$ ist, weil in diesem Falle $\delta x$ nicht die Projection der virtuellen Geschwindigkeit des Punktes $xyz$ bedeutet. Dasselbe gilt für die übrigen Componenten, mithin besteht auch die vorige Gleichung nicht für schiefwinklige Achsensysteme.

96. Bei einem Punkte, der auf einer festen Fläche bleiben muss, ist es zum Gleichgewichte nothwendig und hinreichend, dass die Resultante aller gegebenen Kräfte senkrecht auf der Fläche steht, mithin $\Sigma\,(P \cos \mu) = 0$ ist für alle in der Tangentialebene liegende Richtungen. Man hat jetzt wie früher

$$\Sigma\,(P m \cos \mu) = 0,$$

aber man darf hier $m$ nicht als die Entfernung zweier Lagen des Punktes betrachten, weil der Endpunkt der Linie $m$ nicht auf der Fläche liegt.

Wählt man dagegen auf der Fläche selbst einen Punkt in unendlich kleiner Entfernung $\delta s$ vom ersten Punkte, so fällt die Richtung der Sehne $\delta s$ mit der Richtung der Tangente zusammen und dann wird $\Sigma\,(P\,\delta s \cos \mu)$ unendlich klein im Vergleich zu $\delta s$, folglich ist in dem gewöhnlichen Sinne von Infinitesimalgleichungen

$$\Sigma\,(P m \cos \mu) = 0.$$

Demnach verschwindet auch hier die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte bei solchen unendlich kleinen Verrückungen, die mit den Bedingungen des vorliegenden Falles vereinbar sind. Dasselbe gilt umgekehrt.

Für einen Punkt der auf einer festen Curve bleiben muss, besteht die zum Gleichgewichte nothwendige und ausreichende Bedingung darin, dass die Resultante normal zur Curve ist und dass folglich die Summe aller auf die Tangente projicirten Kräfte verschwindet. Bezeichnet man mit $\delta s$ ein Bogenelement der Curve, so findet man wie vorhin

$$\Sigma (P \,\delta s \cos \mu) = 0,$$

wobei die unendlich kleinen Grössen zweiter und höherer Ordnung nach gewöhnlicher Regel weggelassen sind. Wiederum ist es hier zum Gleichgewichte nothwendig und ausreichend, dass die Summe der virtuellen Momente sich für alle Verrückungen annullirt, welche nach den vorhandenen Bedingungen zulässig sind.

97. Wäre der Punkt so auf die Fläche oder Curve gelegt, dass er sich nach der einen oder andern Seite davon entfernen könnte, so würde die normale Lage der Resultanten zwar erforderlich, nicht aber hinreichend zum Gleichgewichte sein, wie schon früher (Nr. 23.) bemerkt wurde. Die so eben entwickelte Bedingungsgleichung würde dann gleichfalls nothwendig sein, ohne zu genügen.

Um dies gleich nachher zu untersuchen, machen wir darauf aufmerksam, dass bei dem Gleichgewichte eines nach beschriebener Art auf die Fläche gelegten Punktes die Summe der virtuellen Momente nicht mehr verschwindet, wenn der Punkt in einer gegen die Tangentialebene geneigten Richtung verschoben wird, obgleich diese Bewegung mit den gegebenen Bedingungen harmonirt. Jene Summe ist nämlich gleich dem virtuellen Moment der Resultante, letzteres aber negativ, weil die Resultante den Punkt gegen die Oberfläche drücken muss. Demgemäss verschwindet im vorliegenden Falle die Momentensumme so lange als die Verrückungen des Punktes in der Tangentialebene vor sich gehen; sie wird dagegen negativ bei jeder anderen Verschiebung.

98. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für eine starre Gerade. An den Endpunkten einer festen Geraden denken wir uns beliebige Kräfte wirkend und jedes dieser zwei Kräftesysteme auf seine Resultante reducirt; das virtuelle Moment jeder solchen Resultante ist immer gleich der Summe der virtuellen Momente ihrer Componenten und wir brauchen daher nur die

Resultanten in Betracht zu nehmen. Zu untersuchen wäre nun, ob im Zustande des Gleichgewichts die Summe der virtuellen Momente der beiden noch übrigen Kräfte verschwindet.

*a*) Wir betrachten die Gerade zunächst als vollkommen frei, nennen $x, y, z, x', y', z'$ die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Endpunkte $M$, $M'$, und bezeichnen mit $l$ ihre Länge; dann ist zunächst

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=l^2,$$

und es folgt daraus

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')=0,$$

wobei $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$ die unendlichen kleinen Zunahmen bedeuten, welche die Coordinaten der Endpunkten $M$ und $M'$ bei irgend einer virtuellen Bewegung erleiden. Für die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ zwischen der Geraden $MM'$ und den Coordinatenachsen haben wir ferner

$$\cos\alpha=\frac{x-x'}{l},\ \cos\beta=\frac{y-y'}{l},\ \cos\gamma=\frac{z-z'}{l};$$

die vorige Gleichung wird dann

$$\delta x\cos\alpha+\delta y\cos\beta+\delta z\cos\gamma=\delta x'\cos\alpha+\delta y'\cos\beta+\delta z'\cos\gamma,$$

d. h. die virtuellen Geschwindigkeiten der Endpunkte liefern gleiche Projectionen auf die Gerade $MM'$. Zum Gleichgewichte gehört nun, dass die beiden an $M$ und $M'$ thätigen Kräfte von gleicher Grösse sind und dass die eine in der Richtung von $M'$ nach $M$ und die andere im entgegengesetzten Sinne von $M$ nach $M'$ wirkt. Die virtuellen Momente sind daher gleich und von entgegengesetztem Zeichen, mithin geben sie die Summe Null. Ebenso verhält es sich mit der Summe der virtuellen Momente aller Kräfte, weil diese Summe für alle Kräfte dieselbe ist wie für die zwei resultirenden Kräfte.

*b*) Wir betrachten zweitens den Fall, wo die Endpunkte $M$, $M'$ auf gegebenen Flächen oder Curven zu bleiben genöthigt sind. Aus dieser Bedingung entspringen neue Kräfte normal auf den Oberflächen oder Curven, wobei wir von jeglicher Reibung absehen. Nach Einführung der neuen unbekannten Kräfte, welche zu den gegebenen Kräften hinzukommen, dürfen wir die Gerade $MM'$ als völlig frei betrachten, und dann ist im Gleichgewichtszustande die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte gleich Null für alle willkürlichen Verrückungen der Geraden. Verlangt man, dass in dieser Summe nur die gegebenen Kräfte vorkommen, so macht es sich nothwendig und genügt, wenn die Verrückung jedes

Endpunktes auf der entsprechenden Oberfläche oder Curve vor sich geht, damit das virtuelle Moment jeder normalen Kraft verschwindet. D. h. also: Wenn die an den Endpunkten einer festen Geraden wirkende Kräfte im Gleichgewichte und die Endpunkte gezwungen sind auf festen Flächen oder Curven zu bleiben, so verschwindet die Summe der virtuellen Momente jener Kräfte für alle Verrückungen der Geraden, welche mit der angegebenen Bedingung verträglich sind.

Der umgekehrte Satz gilt gleichfalls, doch können wir seinen Beweis um so eher weglassen, als derselbe in dem allgemeinen Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten inbegriffen ist.

### Allgemeiner Beweis des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten.

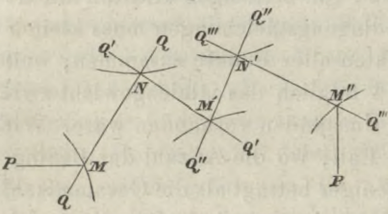
99. Wir betrachten ein System von Punkten, die irgend welchen durch Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückten Bedingungen unterworfen und von beliebigen Kräften afficirt werden. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen muss kleiner sein als die Anzahl der Coordinaten aller Punkte zusammen, weil ausserdem jeder Punkt fest und folglich das Gleichgewicht zwischen den Kräften unter allen Umständen vorhanden wäre. Wir untersuchen nun zunächst den Fall, wo die Anzahl der Bedingungsgleichungen eine Einheit weniger beträgt als die Gesammtzahl der Coordinaten. Aus dem Werthe einer einzigen Coordinate folgen dann die Werthe aller übrigen Coordinaten, und die Punkte bewegen sich auf gewissen Curven in der Weise, dass die Bewegung eines einzigen Punktes die Bewegung aller übrigen Punkte bestimmt.

Welcher Art nun auch die wirklichen Verbindungen zwischen den Punkten $M$, $M'$, $M''$ ... sein mögen, so können dafür doch immer andere Verbindungen substituirt werden, welche die nämlichen Bewegungen erlauben würden. So darf man sich z. B. die Punkte $M$ und $M'$ durch zwei Gerade von constanten Längen $MN$ und $M'N$ verbunden denken, die gezwungen sind, sich auf einer bestimmten Fläche zu schneiden, wodurch die Curve bestimmt wird, welche der Punkt $N$ auf dieser Fläche beschreiben muss. Ebenso kann man $M'$ und $M''$ durch feste Gerade $M'N'$

$M''N'$ verbinden und den Punkt $N'$ zum Verbleiben auf einer gewissen Fläche zwingen; in ähnlicher Weise wird man $M''$ mit einem ferneren Punkte des Systems verbinden und damit bis zum letzten Punkte fortfahren. Einer jeden von den verschiedenen Lagen, die man dem gegebenen Punktesysteme anweisen kann, entspricht eine bestimmte Stellung der Punkte $N, N' N'' \ldots$, mithin müssen sich letztere auf vollkommen bestimmten Curven bewegen. Wir dürfen jetzt von den ursprünglich vorhanden gewesenen Verbindungen abstrahiren und brauchen nur noch die gegebenen Punkte zu betrachten, die auf ihren festen Curven bleiben, nebst den neuen Punkten $N$, $N' N''$, die gleichfalls auf bestimmte Curven angewiesen, aber mit jenen durch die eingeführten festen Geraden verbunden sind. Den Curven, worauf sich $M, M', M'' \ldots, N, N', N''$ bewegen, legen wir einen unbegrenzten normalen Widerstand bei.

Wir bezeichnen mit $P$, $P'$, $P'' \ldots$ die Resultanten der an den einzelnen Punkten $M, M', M'' \ldots$ zusammentreffenden Kräfte, und mit $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \ldots$ die Coordinaten der Punkte;

Fig. 30.



ferner bringen wir an den Endpunkten von $MN$ zwei gleiche längs dieser Geraden im entgegengesetzten Sinne wirkende Kräfte an und ertheilen ihnen eine solche Intensität $Q$ und eine solche Richtung, dass der Punkt $M$ durch die Wirkung der Kräfte $P$, $Q$ und den Widerstand der ihm angewiesenen Curve in's Gleichgewicht kommt. Dies wäre nur dann unmöglich, wenn die Gerade $MN$ senkrecht auf der Curve stünde, was sich aber durch passende Wahl der beliebigen Längen $MN$ und $M'N$ leicht vermeiden lässt. Ebenso kann man verhüten, dass $M'N$ normal zur Ortscurve von $M'$ wird; es ist dann auch keine der Geraden $MN$, $M'N$ senkrecht zu der vom Punkte $N$ beschriebenen Curve. Denn wenn eine Gerade von constanter Länge so verschoben wird, dass ihre beiden Endpunkte unendlich kleine Bögen derselben Ordnung durchlaufen, deren einer normal gegen die Gerade liegt, so muss auch der andere Bogen senkrecht zur Geraden sein; nun sind hier die Geraden $MN$ und $M'N$ nicht senkrecht auf den von $M$ und $M'$ beschriebenen Curven, sie können es daher ebensowenig auf der von $N$ beschriebenen Curve sein. Alle übrigen Längen wählen wir gleichfalls so, dass keine der festen Verbindungsgeraden zwischen den Punkten normal auf den Curven ist, welche ihre Endpunkte durchlaufen können.

Dem Vorigen entsprechend, bringen wir an $NM'$ zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $Q'$, $Q'$ so an, dass der Punkt $N$ durch die Wirkung der Kräfte $Q$, $Q'$ im Gleichgewicht ist; an $M'N'$ lassen wir ferner zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $Q''$ angreifen, welche das Gleichgewicht an $M'$ herbeiführen, und setzen diese Operation bis zum letzten Punkte fort. Durch Anbringung dieser zu je zweien sich aufhebenden Kräfte wird das Gleichgewicht nicht gestört und es sind daher alle Punkte mit Ausnahme des letzten im Gleichgewichte; die zum Gleichgewichte nothwendige hinreichende Bedingung ist daher einerlei mit der Bedingung für das Gleichgewicht des letzten Punktes.

Um eine übersichtliche Bezeichnung zu haben, wählen wir auf der Verlängerung der Kraft $P$ einen bestimmten Punkt $O$ und nennen $p$ den Abstand $OM$; ebenso verfahren wir mit den übrigen Kräften. Bei einer unendlich kleinen Verrückung des Punktes $M$ ändert sich $OM$ um eine unendlich kleine Grösse, die mit der Projection jener virtuellen Bewegung auf die Richtung von $P$ identificirt werden kann; diese Aenderung von $OM = p$ nennen wir $\delta p$ und geben ihr das positive oder negative Zeichen, je nachdem der Winkel zwischen der virtuellen Geschwindigkeit und der Kraftrichtung ein spitzer oder stumpfer ist. In diesem Sinne bedeuten $\delta p$, $\delta p'$, $\delta p''$,..., $\delta q$, $\delta q'$, $\delta q''$ ... die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte von $P$, $P'$, $P''$ ..., $Q$, $Q'$, $Q''$ ... bezogen auf die Richtungen der zugehörigen Kräfte. Beachten wir noch, dass die virtuellen Geschwindigkeiten der beiden an jeder festen Geraden einander entgegengesetzt wirkenden Kräfte von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen sind, so erhalten wir für das Gleichgewicht auf jeder Curve und in jeder festen Geraden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
P\,\delta p + Q\,\delta q &= 0,\\
-Q\,\delta q + Q'\,\delta q' &= 0,\\
P'\,\delta p' - Q'\,\delta q' + Q''\,\delta q'' &= 0,\\
-Q''\,\delta q'' + Q'''\,\delta q''' &= 0,\\
P''\,\delta p'' - Q'''\,\delta q''' + Q^{IV}\,\delta q^{IV} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

und hierbei sind die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta p$, $\delta p'$, $\delta p''$ ... dieselben wie bei den ursprünglichen Verbindungen der Punkte, weil die neu eingeführten Verbindungen genau die nämlichen Bewegungen wie jene gestatten.

Die Anzahl der obigen Gleichungen übersteigt die Zahl der Kräfte $Q$, $Q'$, $Q''$ ... um eine Einheit. Aus der ersten Gleichung bestimmt sich $Q$, nach Substitution dieses Werthes giebt die zweite Gleichung $Q'$ u. s. w.; die letzte Gleichung enthält keine der Hülfskräfte $Q$, $Q'$, $Q''$ ... und ist die zum Gleichgewichte des ganzen Systemes nothwendige und hinreichende Bedingung. Um dieselbe sofort zu erhalten, bedarf es nur der Addition aller obigen Gleichungen, weil sich dabei die mit entgegengesetzten Zeichen vorkommenden virtuellen Momente $Q\,\delta q$, $Q'\,\delta q'$, $Q''\,\delta q''$ ... paarweis aufheben; es bleibt

$$P\,\delta p + P'\,\delta p' + P''\,\delta p'' + \ldots = 0.$$

In dem betrachteten Falle ist es also zum Gleichgewichte des Systemes nothwendig und ausreichend, dass die Summe der virtuellen Momente aller gegebenen Kräfte verschwindet bei jeder von den beiden entgegengesetzten Verrückungen, die hier allein möglich sind und Momente mit entgegengesetzten Vorzeichen geben.

**100.** Es bleibt nun noch zu untersuchen übrig, ob der so eben ausgesprochene Satz auch dann seine Gültigkeit behält, wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen kleiner als im vorigen Falle und überhaupt eine beliebige ist.

Betrachten wir irgend eine gleichzeitige Verrückung aller Punkte eines Systems der letzten Art, so können wir uns zu den bisherigen Verbindungen immer neue Verbindungen hinzudenken, welche gerade nur diese Verrückungen erlauben; das Gleichgewicht wird hierdurch nicht gestört wenn es vorher bestand. Wählen wir aber die Zahl der neuen Verbindungen so gross, dass die Anzahl der gegebenen Bedingungen mit der Zahl der neuen Bedingungen zusammen eine Einheit weniger beträgt als die Anzahl der vorhandenen Coordinaten, so befinden wir uns wieder im vorigen Falle und es bleibt daher das obige Theorem gültig.

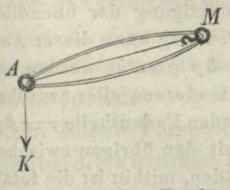
Wenn umgekehrt die Summe aller virtuellen Momente bei jeder möglichen Verrückung verschwindet, so muss auch Gleichgewicht vorhanden sein. Im Gegenfalle nämlich würden die gegebenen Kräfte das System in Bewegung setzen, mithin alle Punkte gewisse Curven beschreiben, die man ohne Beeinträchtigung der Bewegung als fest ansehen darf. Man könnte sich ferner Verbindungen denken, welche gerade nur diese Bewegung erlauben und zwar so, dass die Bewegung eines einzigen Punktes die Bewegung aller übrigen nach sich zöge. Damit wäre man aber auf die Verbindungsweise des ersten Falles (Nr. 99.) zurückgekommen und es verschwände die Summe der virtuellen Momente ohne bestehendes Gleichgewicht, was dem früher Bewiesenen widerspricht. Demnach gilt allgemein der Satz:

Welcher Art auch die Gleichungen zwischen den Coordinaten eines Punktesystemes sein mögen, auf welches beliebige Kräfte wirken, so ist es zum Gleichgewichte desselben doch immer erforderlich und ausreichend, dass die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte Null sei bei allen mit den Bedingungen des Systemes verträglichen unendlich kleinen Verrückungen*).

101. Dem Vorigen lag die Annahme zu Grunde, dass die festen Curven nur normale Kräfte aufheben; sind sie dagegen im Stande,

*) Einen wenigstens durch grosse Einfachheit der zu Grunde liegenden Anschauungen ausgezeichneten Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten findet man in der Mecanique analytique von Lagrange; er beruht auf der Möglichkeit, dass alle an einem Punktesysteme thätigen Kräfte durch eine einzige Kraft repräsentirt werden können, die auf besondere sogleich näher zu erläuternde Weise wirkt.

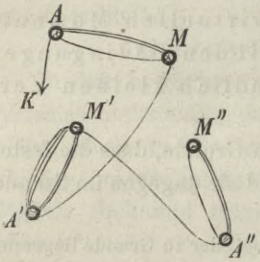
Fig. 31.




Wenn der Punkt $M$ durch die längs $AM$ thätige Kraft $P$ getrieben wird, so kann man sich vorstellen, dass diese Kraft mittelst eines Seiles $MA$ wirke; letzteres lässt sich wieder durch einen Faden ersetzen, der abwechselnd durch einen festen und durch einen beweglichen Ring geht und dessen Ende an dem einen oder andern Ringe befestigt ist. Dabei entspricht der feste Ring dem Punkte $A$, der bewegliche dem Punkte $M$. Eine am freien Ende des Fadens angebrachte Kraft $K$ (z. B. ein Gewicht) ertheilt dem ganzen Faden eine gleiche Spannung, die an jeder Stelle $= K$ ist, und wenn nun der Faden zwischen $A$ und $M$ mehrmals etwa $n$ mal hin- und hergeht, so ist die Gesammtspannung zwischen $A$ und $M$ gleich $nK$. Dieser Ausdruck lässt sich durch passende Wahl von $n$ und $K$ gleich $P$ machen, also $P$ durch die Kraft $K$ ausdrücken. Dasselbe gilt für die übrigen Kräfte $P'$, $P''$ ..., die an den Punkten $M'$, $M''$ ... in den Richtungen $M'A'$, $M''A''$ ... wirken; endlich auch tangentiale Kräfte aufzuheben, indem sie die Bewegung in dem einen Sinne hemmen, so kann das Gleichgewicht stattfinden, ohne dass die Summe der virtuellen Momente verschwindet. Um zu entscheiden, ob in diesem Falle die genannte Summe positiv oder negativ ist, bemerken wir zunächst, dass jenes Hinderniss wie eine Kraft wirkt, die nach der Seite gerichtet ist, wohin der Punkt verschoben werden kann; nach Einführung dieser Kraft unter gleichzeitiger Weglassung des Hindernisses verschwindet die Summe der virtuellen Momente, weil jetzt die Sache sich wie früher verhält. Für die virtuelle Verrückung, welche mit der Annahme des Hindernisses verträglich ist, fällt aber das virtuelle

---

Fig. 32.



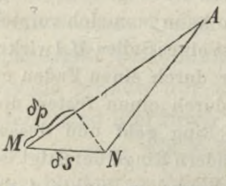

kann man, wie Figur 32 zeigt, einen und denselben Faden durch alle festen sowie durch alle beweglichen Ringe hindurchziehen und schliesslich alle Kräfte durch die eine Kraft $K$ ersetzen, indem man $n$, $n'$, $n''$ . . so bestimmt, dass

$$nK = P,\ n'K' = P'\ n''K'' = P'' \ldots.$$

Diese Gleichungen setzen zwar commensurabele Verhältnisse zwischen $P$, $P'$, $P''$ . . . voraus, da aber das gemeinschaftliche Maas $K$ beliebig klein und nöthigenfalls unendlich klein genommen werden kann, so liegt in jener Voraussetzung nichts Beschränkendes.

Nach dieser Vorbereitung denken wir uns $MN$, $M'N'$, $M''N''$ . . . als die virtuellen unter den Bedingungen des Systemes zulässigen Bewegungen, welche sowohl in dem einen als im anderen Sinne für möglich gelten sollen.

Fig. 33.




Jeder zwischen $A$ und $M$ liegende Fadentheil erleidet hierbei eine Verkürzung resp. Verlängerung um $AM - AN$; bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung kann dieser Ausdruck $= MN \cos AMN = \delta p$ gesetzt werden und es ist folglich die Gesammtänderung aller zwischen $A$ und $M$ hin- und hergehenden Fadentheile $= n\,\delta p$. Ebenso verhält es sich mit den übrigen zwischen $A'$ und $M'$, $A''$, $M''$ etc. hin- und hergehenden Fäden, mithin ist die totale Aenderung des ganzen durch das System sich hindurchziehenden Fadens

$$= n\,\delta p + n'\,\delta p' + n''\,\delta p'' + \ldots.$$

Soll nun Gleichgewicht vorhanden sein, so darf die Kraft $K$ keine Bewegung hervorrufen und es muss daher die obige Summe verschwinden. Durch Multiplication mit $K$ folgt hieraus

$$P\,\delta p + P'\,\delta p' + P''\,\delta p'' + \ldots = 0;$$

diese bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung genaue Gleichung ist in der That das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Moment der eingeführten Kraft positiv aus, mithin muss die Summe der virtuellen Momente aller gegebenen Kräfte immer negativ sein. Mit dem Hindernisse würde auch die Momentensumme gleichzeitig verschwinden, weil die ersetzende Kraft dann $= 0$ wird.

102. Aus dem allgemeinen Principe folgt, dass das virtuelle Moment der Resultante irgend welcher Kräfte immer gleich kommt der Summe der virtuellen Momente aller Componenten. Das Gleichgewicht tritt nämlich ein, wenn man eine der Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft zu jenen Componenten hinzu und damit die Momentensumme zum Verschwinden bringt; es ist also das Moment der Hülfskraft gleich und entgegengesetzt der Summe der Momente der Componenten, und da zwei gleichen und direkt entgegengesetzten Kräften gleiche und entgegengesetzte Momente entsprechen, so folgt, dass jene Momentensumme dem Momente der Resultante gleich ist.

103. Meistentheils bringt man nicht die gegebenen Kräfte in Rechnung sondern ihre, zu drei rechtwinkligen Coordinatenachsen parallelen Componenten; das virtuelle Moment einer Kraft setzt sich dann aus den virtuellen Momenten ihrer Seitenkräfte zusammen. Sind nämlich $X$, $Y$, $Z$ die Componenten einer Kraft $P$ und $x$, $y$, $z$ die Coordinaten ihres Angriffspunktes $M$, so ändern sich $x$, $y$, $z$ bei einer unendlich kleinen Verrückung des Punktes $M$ um die Variationen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$; die virtuellen Momente von $X$, $Y$, $Z$ sind $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$, und das virtuelle Moment von $P$ wird

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten besteht dann in der für das Gleichgewicht geltenden Bedingungsgleichung

$$1) \qquad \Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0;$$

hierbei erstreckt sich das Summenzeichen auf alle Kräfte und Variationen der Coordinaten ihrer Angriffspunkte, vorausgesetzt, dass nur solche Verschiebungen der Punkte betrachtet werden, bei welchen die zwischen den Coordinaten bestehenden Verbindungsgleichungen ungestört bleiben.

104. Die Gleichung 1) kann auf folgende Weise benutzt werden, um die Gleichgewichtsbedingungen eines beliebigen Systemes zu entwickeln. Zwischen den Coordinaten der $m$ Punkte des Systemes mögen $n$ Gleichungen stattfinden, die wir kurz durch

$$L = 0,\ L' = 0,\ L'' = 0\ldots$$

darstellen. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind gegebene

Funktionen von einigen oder allen der Coordinaten $x, y, z, x', y', z', x''$, $y'', z''$ etc., so dass man z.B. statt der ersten Gleichung schreiben könnte

$$L = F(x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0.$$

Soll nun die Gleichung $L = 0$ auch für die neuen Lagen der Punkte richtig bleiben, so muss

$$F(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z,\ x' + \delta x',\ y' + \delta y', \ldots) = 0$$

sein; die Differenz der beiden Gleichungen giebt die totale Aenderung der Funktion $F$ und ist bekanntlich einerlei mit

$$\frac{d\,F(x, y, \ldots)}{dx}\,\delta x + \frac{d\,F(x, y, \ldots)}{dy}\,\delta y + \ldots = 0$$

worin alle vorkommenden Differentialquotienten partiell zu nehmen sind. Die Variationen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta x'$ etc. haben daher folgenden Gleichungen zu genügen

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\,\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dL'}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL'}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL'}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL'}{dx'}\,\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dL''}{dx}\,\delta x + \dfrac{dL''}{dy}\,\delta y + \dfrac{dL''}{dz}\,\delta z + \dfrac{dL''}{dx'}\,\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese $n$ Gleichungen liefern die Werthe von $n$ Variationen (ausgedrückt durch die $3m-n$ übrigen Variationen) und nach Substitution dieser Werthe in die Gleichung 1) enthält letztere noch $3m-n$ Variationen. Da nun die Gleichung 1) für alle unter den Bedingungen des Systemes zulässigen Variationen der Coordinaten gelten muss und da ferner die gegebenen Bedingungen durch die Gleichungen 2) und die daraus folgenden Variationenwerthe schon in Rechnung gebracht sind, so bleiben die noch übrigen $3m-n$ in der erwähnten Gleichung enthaltenen Variationen völlig unbestimmt und können ganz beliebige Werthe erhalten. Soll aber trotzdem die Gleichung bestehen, so ist dies nur möglich, wenn der Coefficient von jeder der $3m-n$ willkührlichen Variationen für sich verschwindet; dies giebt $3m-n$ zum Gleichgewichte nothwendige und hinreichende Bedingungen. Durch Verbindung derselben mit den $n$ gegebenen Bedingungsgleichungen entstehen ebensoviel Gleichungen als Coordinaten vorhanden sind, nämlich $3\,m$. Diese Gleichungen werden benutzt, um die Lagen einer gewissen Zahl von Angriffspunkten, sowie die Grössen und Richtungen einer gewissen Anzahl von Kräften für den Gleichgewichtszustand zu bestimmen.

Wenn die Variabelen, von denen die Lage des Systemes abhängt, nicht die Coordinaten der einzelnen Punkte sind, so ändert sich zwar die Form der Gleichungen 1) und 2), doch bleibt das Verfahren in so fern dasselbe, als man mittelst der gegebenen Bedingungsgleichungen soviel Variationen als möglich eliminirt und die Coefficienten der übrig bleibenden Variationen gleich Null setzt.

105. Die Elimination von $n$ Variationen aus den Gleichungen 1) und 2) kann auf verschiedene Weise geschehen, und das nächstliegende wäre, die Gleichungen 2) als Gleichungen mit $n$ Unbekannten anzusehen, letztere daraus zu bestimmen und ihre Werthe in die Gleichung 1) zu substituiren. Empfehlenswerther ist aber folgendes Verfahren. Man multiplicirt die Gleichungen 2) mit gewissen, vor der Hand noch unbestimmten Coefficienten $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots$ und addirt die erhaltenen Producte zur Gleichung 1); hierauf setzt man die Coefficienten der zu eliminirenden $n$ Variationen gleich Null, wodurch man $n$ Gleichungen zur Bestimmung von $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots$ bekommt und hat schliesslich noch die Coefficienten der übrigen Variationen ebenfalls $= 0$ zu nehmen. Die letzten Gleichungen sind die Gleichgewichtsbedingungen des Systemes, in denen für $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots$ die vorhin ermittelten Werthe zu nehmen sind.

Diese Methode gewährt zwar keine kürzere Rechnung als die erste, sie bietet aber den Vortheil, dass sie die aus den Verbindungen des Systemes entstehenden Gegenwirkungen, d. h. die Kräfte kennen lehrt, welche jene Verbindungen ersetzen könnten. Man erhält nämlich die $3\,m$ Gleichungen

$$
3)\quad \begin{cases}
X + \lambda \dfrac{dL}{dx} + \lambda' \dfrac{dL'}{dx} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dx} + \ldots = 0, \\[2mm]
Y + \lambda \dfrac{dL}{dy} + \lambda' \dfrac{dL'}{dy} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dy} + \ldots = 0, \\[2mm]
Z + \lambda \dfrac{dL}{dz} + \lambda' \dfrac{dL'}{dz} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dz} + \ldots = 0, \\[2mm]
X' + \lambda \dfrac{dL}{dx'} + \lambda' \dfrac{dL'}{dx'} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dx'} + \ldots = 0, \\[2mm]
Y' + \lambda \dfrac{dL}{dy'} + \lambda' \dfrac{dL'}{dy'} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dy'} + \ldots = 0 \\[2mm]
Z' + \lambda \dfrac{dL}{dz'} + \lambda' \dfrac{dL'}{dz'} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dz'} + \ldots = 0, \\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen sind ganz dieselben, als wenn die durch

$$L = 0,\ L' = 0,\ L'' = 0 \ldots$$

ausgedrückten Verbindungen nicht existirten, d. h. alle Punkte völlig frei wären und wenn statt jener Verbindungen an den Punkten $M$, $M'$ Kräfte wirken, deren Componenten der Reihe nach sind

$$\text{an } M:\quad \lambda\frac{dL}{dx},\ \lambda\frac{dL}{dy},\ \lambda\frac{dL}{dz},\ \lambda\frac{dL'}{dx'}\ldots$$

$$\text{an } M':\quad \lambda\frac{dL}{dx'},\ \lambda\frac{dL}{dy'},\ \lambda\frac{dL}{dz'},\ \lambda\frac{dL'}{dx'}\ldots$$

u. s. w. für alle übrigen Punkte. Um die Richtungen dieser Kräfte kennen zu lernen, achten wir zunächst nur auf die Kräfte, welche durch die partiellen Differentialquotienten der Funktion $L$ ausgedrückt sind; am Punkte $M$ wirkt dann eine Kraft, deren Componenten $\lambda\frac{dL}{dx}$, $\lambda\frac{dL}{dy}$, $\lambda\frac{dL}{dz}$ sind, die also senkrecht auf der Fläche $L = 0$ steht; ebenso findet sich an $M'$ eine Kraft mit den Componenten $\lambda\frac{dL}{dx'}$, $\lambda\frac{dL}{dy'}$, $\lambda\frac{dL}{dz'}$, folglich normal zur Fläche $L = 0$ u. s. w. bei allen Punkten. Was wir hier für die Fläche $L = 0$ gesagt haben, gilt analog für die Flächen $L' = 0$, $L'' = 0$ u. s. w.; sind also $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ auf die angegebene Weise bestimmt, so kennt man auch die Grössen und Richtungen aller der Kräfte, welche die Gesammtheit der gegebenen Verbindungen des Systemes vertreten.

106. Man kann übrigens noch weiter gehen und die Kräfte bezeichnen, welche jede einzelne der Verbindungsgleichungen $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0 \ldots$ ersetzen könnten. Lassen wir z. B. die erste dieser Gleichungen weg mit Beibehaltung der übrigen, und bringen wir zu den ursprünglichen Kräften neue Kräfte hinzu, deren Componenten sind

$$\text{an } M;\quad \lambda\frac{dL}{dx},\ \lambda\frac{dL}{dy},\ \lambda\frac{dL}{dz},$$

$$\text{an } M':\quad \lambda\frac{dL}{dx'},\ \lambda\frac{dL}{dy'},\ \lambda\frac{dL}{dz'},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

so erhalten wir statt des früheren Systemes der Kräfte $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z' \ldots$ mit den Verbindungen $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0 \ldots$ ein neues System, dessen Kräfte sind

$$X+\lambda\frac{dL}{dx},\quad Y+\lambda\frac{dL}{dy},\quad Z+\lambda\frac{dL}{dz},\quad X'+\lambda\frac{dL}{dx'}\ldots$$

und in welchen die durch

$$L'=0,\quad L''=0,\quad L''=0\ldots$$

ausgedrückten Verbindungen statt finden. Die Gleichgewichtsbedingungen für dieses System ergeben sich nach derselben Methode wie früher und bestehen in Gleichungen von folgender Form

$$4)\quad \begin{cases} \left(X+\lambda\frac{dL}{dx}\right)+\lambda_1\frac{dL'}{dx}+\lambda_2\frac{dL''}{dx}+\ldots=0, \\ \left(Y+\lambda\frac{dL}{dy}\right)+\lambda_1\frac{dL'}{dy}+\lambda_2\frac{dL''}{dy}+\ldots=0, \\ \left(Z+\lambda\frac{dL}{dz}\right)+\lambda_1\frac{dL'}{dz}+\lambda_2\frac{dL''}{dz}+\ldots=0, \\ \left(X'+\lambda\frac{dL}{dx'}\right)+\lambda_1\frac{dL'}{dx'}+\lambda_2\frac{dL''}{dx'}+\ldots=0, \\ \left(Y'+\lambda\frac{dL}{dy'}\right)+\lambda_1\frac{dL'}{dy'}+\lambda_2\frac{dL''}{dy'}+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hier besitzt $\lambda$ den nämlichen Werth wie in den Gleichungen 3), und es leuchtet daher unmittelbar ein, dass die Gleichungen 4) erfüllt werden, wenn man den Faktoren $\lambda_1$, $\lambda_2\ldots$ die Werthe von $\lambda'$, $\lambda''$ giebt. Da nun die Gleichungen 3) und 4) zusammenfallen, so besteht das Gleichgewicht in dem neuen Systeme unter ganz denselben Bedingungen wie in dem früheren, folglich sind es die oben bezeichneten an $M$, $M'$, $M''\ldots$ wirkenden Kräfte, welche die erste durch $L=0$ ausgedrückte Verbindung ersetzen können.

Denn analog darf man auch die zweite Verbindungsgleichung $L'=0$ weglassen, sobald man den bisherigen Kräften neue an den Punkten $M$, $M'$, $M''\ldots$ wirkende Kräfte hinzufügt, deren Componenten die Producte aus $\lambda'$ in die, partiell nach den Coordinaten jener Punkte genommenen Differentialquotienten von $L'$ sind. So fortfahrend kann man einzeln die Kräfte aufzeigen, wodurch sich die einzelnen Verbindungen ersetzen lassen.

Zu berücksichtigen ist indessen, dass die Gleichungen $L=0$, $L'=0$, $L''=0$ etc. von sehr verschiedenen materiellen Verbindungen herrühren können und dass man folglich bei der Bestimmung der Einwirkungen, welche diese Verbindungen erleiden, auf die specielle Natur der letzteren achten muss. Die obige Bestimmung bezieht sich nur auf die Kräfte, welche zufolge der Verbindungen an den Punkten $M$, $M'$, $M''$ ... auftreten.

107. Zwei Systeme von Kräften an einem Systeme unter einander verbundener Punkte nennt man äquivalent, wenn sie einzeln durch eine und dieselbe Kraft aufgehoben werden können; im Allgemeinen bleibt diese Eigenschaft nur so lange ungestört, als sich die Natur der Verbindungen nicht ändert. Aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten folgt, dass die Summe der virtuellen Momente zweier äquivalenten Systeme dieselbe ist, weil sie gleich und von entgegengesetzten Zeichen mit einer und derselben Momentensumme sein muss.

Wenn zwei Systeme einzeln durch ein drittes aufgehoben werden können, so muss jedes andere System, welches das eine von beiden aufhebt, auch das andere aufzuheben im Stande sein, weil zufolge der ersten Bedingung seine Momentensumme dieselbe ist.

Ebenso erhellt umgekehrt, dass zwei Systeme mit gleichen Momentensummen denselben Kräftesystemen Gleichgewicht halten.

## Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf das Gleichgewicht eines biegsamen Fadens.

108. Bei einem biegsamen Faden, dessen einzelne Punkte von beliebigen Kräften afficirt werden, bilden die Angriffspunkte der Kräfte eine stetige Folge und es geht daher die in dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten vorkommende Summe von Momenten in ein bestimmtes Integral über; es handelt sich dann um die Bestimmung einer Curve mittelst der Bedingung, dass jenes Integral bei dem Uebergange der Curve zu einer unendlich nahen Curve verschwindet. Diesen Uebergang haben wir uns wegen der Undehnbarkeit des Fadens so zu denken, dass zwar alle Punkte der ursprünglichen Curve verschoben werden, aber die Bogenelemente ungeändert bleiben. In dieser Fassung gehört das Problem zur Variationsrechnung.

Die Componenten der auf das Bogenelement $ds$ wirkenden Kraft mögen wie in Nr. 91 mit $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ bezeichnet werden; an die Stelle von $X$, $Y$, $Z$ in Nr. 103 treten dann $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$, das Summenzeichen ist gegen das Integralzeichen zu vertauschen, mithin giebt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\int ds\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0,$$

wobei sich die Integration auf die ganze Länge des Fadens erstreckt. Die Variationen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sind an die Bedingung gebunden, dass $ds$ immer dieselbe Grösse behält, also

$$\delta\, ds = 0 \text{ oder } \frac{dx}{ds}\, d\,\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\,\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\,\delta z = 0$$

ist. Diese Bedingungsgleichung gilt für alle Fadenelemente, mithin existiren ebensoviel Bedingungsgleichungen als Elemente, d. h. unendlich viele. Der vorigen Theorie gemäss, hat man diese Gleichungen mit Faktoren zu multipliciren, die von einer Gleichung zur anderen variiren können und folglich von $s$ abhängen; irgend ein solcher Factor heisse wie früher $\lambda$. Ferner sind jene Producte zur Summe der virtuellen Momente zu addiren und nacher die Coefficienten aller Variationen gleich Null zu setzen. Die erwähnte Summe wird wieder zu einem bestimmten Integrale zwischen denselben Grenzen und überhaupt ergiebt sich die nachstehende Gleichgewichtsgleichung, worin $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der Endpunkte des Fadens und $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ die Componenten der an denselben thätigen Kräfte bezeichnen:

$$X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 + X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} \left[ ds\left(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z\right) + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y + \frac{dz}{ds}\,d\,\delta z\right)\right] = 0.$$

Man hat weiter

$$\int \lambda \frac{dx}{ds}\, d\,\delta x = \lambda \frac{dx}{ds}\,\delta x - \int \delta x\, d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right),$$

$$\int \lambda \frac{dy}{ds}\, d\,\delta y = \lambda \frac{dy}{ds}\,\delta y - \int \delta y\, d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right),$$

$$\int \lambda \frac{dz}{ds}\, d\,\delta z = \lambda \frac{dz}{ds}\,\delta z - \int \delta z\, d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right),$$

substituirt man diese Werthe unter Einführung der Integrationsgrenzen, so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$\left[X_1-\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_1\right]\delta x_1+\left[Y_1-\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_1\right]\delta y_1+\left[Z_1-\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_1\right]\delta z_1$$
$$+\left[X_2+\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_2\right]\delta x_2+\left[Y_2-\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_2\right]\delta y_2+\left[Z_2-\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_2\right]\delta z_2$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\begin{array}{c}\left[X\,ds-d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x+\left[Y\,ds-d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y\\ +\left[Z\,ds-d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z\end{array}\right\}$$
$$=0.$$

Indem man die Coefficienten aller Variationen gleich Null setzt, erhält man als Bedingungsgleichungen für irgend einen Punkt des Fadens:

$$1)\quad\left\{\begin{array}{l}X\,ds-d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)=0,\\ Y\,ds-d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)=0,\\ Z\,ds-d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)=0,\end{array}\right.$$

und für die Endpunkte

$$2)\quad\left\{\begin{array}{ll}X_1-\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_1=0, & X_2+\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_2=0,\\ Y_1-\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_1=0, & Y_2+\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_2=0,\\ Z_1-\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_1=0, & Z_2+\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_2=0,\end{array}\right.$$

Die Gleichungen 1) stimmen mit denen in Nr. 91 überein, wenn $T$ in $-\lambda$ umgeändert wird; durch Elimination von $\lambda$ aus denselben erhält man die beiden Gleichungen der Curve und den Werth von $\lambda$. Die Gleichungen 2) bestimmen der Grösse und Richtung nach die Kräfte, welche an die Endpunkte gehören.

Die Gleichungen 1) sind die nämlichen, als wäre jedes Element frei und als wirkten ausser den Kräften $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ noch zwei Kräfte an seinen Endpunkten; die eine von diesen hat $\lambda\frac{dx}{ds}$, $\lambda\frac{dy}{ds}$, $\lambda\frac{dz}{ds}$ zu Componenten und ist folglich eine Tangentialkraft $=\lambda$, welche im Sinne des Elementes wirkt; die andere Kraft ist die Tangentialkraft $\lambda+d\lambda$ im entgegengesetzten Sinne genommen.

Der Ausdruck $-\lambda$ bedeutet folglich die Spannung im Punkte $xyz$ was mit dem in Nr. 91 Gesagten übereinstimmt.

## Allgemeine Theoreme über das Gleichgewicht eines beliebigen Systemes.

109. Wenn der Ausdruck $\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$ die Variation einer gewissen Funktion der, als unabhängige Variabelen betrachteten, Coordinaten $x, y, z, x', y', z' \ldots$ ausmacht, so zeigt die Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, dass diese Funktion bei der Gleichgewichtslage im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum erreicht im Vergleich mit allen den Werthen, die sie bei allen anderen Verrückungen annehmen kann. Dabei entspricht das Minimum dem nur augenblicklichen (labilen), das Maximum dem dauernden, (stabilen) Gleichgewichte. Eine genauere Untersuchung dieses Gegenstandes würde uns aber zu weit führen und wir beschränken uns daher auf die Betrachtung des einfachsten Falles, wenn nämlich ein System materieller Punkte unter dem Einflusse von parallelen Kräften steht, die den Massen proportional sind.

Die Achse der $z$ nehmen wir im entgegengesetzten Sinne dieser Kräfte und bezeichnen mit $dM$ die Masse eines Elementes; wir haben dann

$$X = 0,\ \ Y = 0,\ \ Z = -g\,dM,$$

wo $g$ einen constanten Factor bezeichnet, ferner $\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = -g\,(\Sigma\,dM\,\delta z)$, mithin als Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma(dM\,\delta z) = 0 \text{ oder } \delta\,\Sigma(z\,dM) = 0.$$

Diese zeigt, dass im vorliegenden Falle $\Sigma(z\,dM)$ oder besser $\int z\,dM$ entweder zu einem Maximum oder Minimum wird. Nun bedeutet aber $z\,g\,dM$ das Moment der Kraft $g\,dM$ in Beziehung auf die $xy$-Ebene, folglich $\int z\,g\,dM$ die Summe der Momente aller genannten Parallelkräfte, und diese Summe ist gleich dem Momente der Resultante also $= z_1 \int g\,dM$, wenn $z_1$ die Coordinate des Mittelpunktes der parallelen Kräfte bezeichnet. Bei Weglassung des auf beiden Seiten vorkommenden Factors ist $\int z\,dM = z_1 \int dM = z_1 M$ d. h. gleich dem Producte aus der Gesammtmasse des Systemes in die Höhe des Kräftemittelpunktes über der $xy$-Ebene, wobei wir uns der Anschaulichkeit wegen die $xy$-Ebene horizontal vorstellen. Da nun $\int z\,dM$ im Gleichgewichtszustande ein Maximum oder Minimum ist, so folgt, dass in diesem Falle der Mittelpunkt der parallelen Kräfte entweder so hoch oder so tief als möglich liegt. Die erste Lage entspricht dem dauernden, die zweite dem augenblicklichen Gleichgewichte.

110. Um zu einer andern auf Maxima und Minima bezüglichen Eigenschaft eines im Gleichgewichte befindlichen Kräftesystemes zu gelangen, denken wir uns von den Punkten $M$, $M'$, $M''$ ... aus auf den daselbst angreifenden Kräften $P$, $P'$, $P''$ ... Strecken $MN = p$, $M'N' = p'$, $M''N'' = p''$ ... abgeschnitten, welche den Kräften proportional sind, also durch

$$p = kP,\ p' = kP',\ p'' = kP'' \ldots$$

ausgedrückt werden können; eine solche Strecke sei $MN = p$ in

Fig. 34.

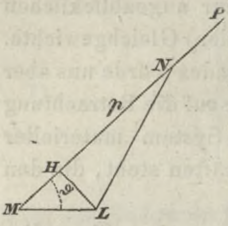


Fig. 34, ferner $ML = \delta s$ eine unendlich kleine Verrückung des Punktes $M$, $MH = \delta p$ ihre Projection auf die Kraftrichtung und $\angle NML = \vartheta$, also $\delta p = \delta s \cos \vartheta$. Unter der Voraussetzung, dass die virtuelle Verrückung $\delta s$ dieses wie jedes anderen Punktes mit den Bedingungen des Systemes verträglich ist, haben wir nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\Sigma(P\,\delta p) = 0,$$

ferner durch Multiplication mit $k$

1) $$\Sigma(p\,\delta p) = 0,$$

oder

2) $$\delta\, \Sigma p^2 = 0,$$

und hieraus folgt, dass $\Sigma p^2$ im Gleichgewichtszustande zu einem Maximum oder Minimum wird.

Um zu entscheiden, in welchen Fällen das Maximum und in welchen das Minimum vorhanden ist, berechnen wir die Zunahme von $p$. Bezeichnen wir mit $p_1$ den Werth, welchen $p$ nach der virtuellen Verrückung erhält, so ist

$$p_1^2 = p^2 - 2p\,\delta s \cos \vartheta + \delta s^2$$

also

$$\Sigma p_1^2 = \Sigma p^2 - 2\,\Sigma(p\ \delta s \cos \vartheta) + \Sigma\,\delta s^2;$$

die Zunahme von $\Sigma p^2$ beträgt folglich

$$\delta\, \Sigma p^2 = -2\,\Sigma(p\,\delta s \cos \vartheta) + \Sigma\,\delta s^2$$

oder

3) $$\delta\, \Sigma p^2 = -2\,\Sigma(p\,\delta p) + \Sigma\,\delta s^2.$$

Aus dem Beweise des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten geht nun hervor, dass $\Sigma(P\,\delta p)$ mithin auch $\Sigma(p\,\delta p)$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist (vergl. z. B. Nr. 100); sie gilt daher auch für Null solange sie allein vorkommt, nicht aber, wenn noch andere unendlich kleine Grössen derselben Ordnung vorhanden sind, mit denen sie sich vergleichen lässt. Dies ist in der Gleichung 3) zu berücksichtigen, weil hier $\Sigma\,\delta s^2$ gleichfalls der zweiten Ordnung angehört. Im Allgemeinen lässt sich daher das Vorzeichen der rechten Seite von Nr. 3) nicht bestimmen, gleichwohl sind in dieser Hinsicht einige folgenreiche Bemerkungen zu machen.

Wenn erstens $\Sigma\,(P\,\delta p)$ für alle virtuellen Verschiebungen dasselbe Zeichen behält, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Bei negativen $\Sigma(P\,\delta p)$ also auch negativen $\Sigma(p\,\delta p)$ werden beide Glieder der rechten Seite von Nr. 3) positiv und mithin ist $\Sigma p^2$ für alle Werthe des positiven $k$ ein Minimum. Bei positiven $\Sigma(P\,\delta p)$ wird das erste Glied der rechten Seite von Nr. 3) negativ, und sein absoluter Werth ist um so grösser, je grösser $k$ genommen wird. Lassen wir nun $k$ wachsen, so muss es einen Werth $\varkappa$ von $k$ geben, für welchen $2\,\Sigma\,(p\,\delta p) = \Sigma\,\delta s^2$ wird, und dann ist für alle grösseren $k$ die rechte Seite der Gleichung 3) negativ, mithin $\Sigma p^2$ ein Maximum für $\varkappa < k < \infty$. Dagegen kann für $k < \varkappa$ die erwähnte rechte Seite bald positiv bald negativ sein, je nach der Beschaffenheit von $\delta s$ und $\vartheta$; es findet dann für $k < \varkappa$ weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Wenn zweitens das Vorzeichen von $\Sigma\,P\,\delta p$ bei verschiedenen virtuellen Verrückungen verschieden ist und überhaupt in allen Fällen kann man doch die Verhältnisszahl $k$, mithin auch die Strecken $p$, $p'$, $p''$ ... so klein wählen, dass $2\,\Sigma(p\,\delta p)$ beliebig vielmal kleiner als $\Sigma\,\delta s^2$ wird; es reicht hierzu schon hin, für $p, p', p''$ ... unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung zu nehnehmen, weil dann $2\,\Sigma\,(p\,\delta p)$ von der dritten Ordnung also unendlich vielmal kleiner als $\Sigma\,\delta s^2$ wird. Das Vorzeichen der rechten Seite von Nr. 3) ist dann immer einerlei mit dem von $\Sigma\,\delta s^2$, d. h. positiv, und folglich erreicht $\Sigma p^2$ immer ein Minimum. Dieser Satz bildet einen speciellen Fall eines allgemeinen von Gauss gefundenen Theoremes, das für jede beliebige Bewegung eines Systems materieller Punkte gilt. Das so eben erwähnte Minimum findet übrigens nicht nur für unendlich kleine $k$ statt sondern auch von da ab für grössere $k$ bis zu derjenigen Stelle, wo $2\,\Sigma(p\,\delta p)$ aufhört kleiner als $\Sigma\,\delta s^2$ zu sein.

Kennt man irgend einen Werth von $k$, welcher $\Sigma\,p^2$ zu einem Maximum macht, so kann man leicht einen andern finden, wodurch $\Sigma\,p^2$ zu einem Minimum wird. Man braucht zu diesem Zwecke die Strecken $p$ nur in der entgegengesetzten Richtung abzutragen, d. h. $k$ mithin auch $P$ negativ zu nehmen, weil dabei die rechte Seite der Gleichung 3) positiv wird. Die neuen Kräfte sind dann den früheren gleich und entgegengesetzt und daher auch im Gleichgewichte.

## Zehntes Capitel.

# Theorie des Schwerpunktes.

---

### Allgemeine Betrachtungen über die Schwere und den Schwerpunkt.

111. Alle sich selbt überlassenen Körper bewegen sich erfahrungsmässig nach dem Innern der Erde zu in einer auf der Oberfläche ruhender Gewässer senkrechten, d. h. in vertikaler Richtung; an dieser Bewegung verhindert, üben sie auf das entgegenstehende Hemmniss einen Druck nach derselben Richtung aus. Ist z. B. ein Körper an einem Faden aufgehangen so nimmt letzterer die vertikale Richtung an, und wenn sich der Körper losreisst, so fällt er in der Verlängerung dieser Geraden. Ferner zeigt die Beobachtung, dass der Faden durch den angehangenen Körper allerseits mit derselben Stärke gespannt wird. Diess alles zusammen berechtigt zu dem Schlusse, dass jeder ruhende Körper unter dem Einflusse einer Kraft steht, die in vertikaler Richtung mit constanter Intensität wirkt; ob die Intensität auch bei der Bewegung ungeändert bleibt, ist eine andere Frage, die wir in der Dynamik beantworten werden.

Die Ursache der angeführten Erscheinungen heisst die Schwere. Da die Oberfläche der Erde, oder besser des Meeres, nahebei kugelförmig ist, so geht jede verticale Gerade ziemlich genau durch den Mittelpunkt der Erde und ändert also beim Uebergange von einem Punkte zum anderen ihre absolute Lage im Raume; die Richtungen der an verschiedenen Punkten wirkenden Verticalkräfte convergiren folglich gegen den Mittelpunkt der Erde. Ferner variirt, wie die Beobachtung gezeigt hat, auch die Intensität der Schwere, jenachdem man dem Erdmittelpunkte näher kommt oder sich von ihm entfernt. Diese Aenderungen sind jedoch innerhalb einer kleinen Ausdehnung nicht merklich, und man kann daher die Vertikalen als parallel und die Schwere als constant betrachten, vorausgesetzt, dass man nur solche Punktesysteme betrachtet, deren grösste Dimensionen immer noch sehr klein im Vergleich zum Erdhalbmesser sind. Uebrigens lassen sich der Parallelismus der Vertikalen und die Unveränderlichkeit der Schwere auch unabhängig von der Gestalt der Erde durch Beobachtung erkennen, wenn man die erwähnte Bedingung einhält.

Die Schwere wirkt sowohl auf die inneren als die äusseren Theile eines Körpers. Es verursacht dieselbe Mühe, den ganzen Körper oder seine einzelnen Theile zu tragen; die in einem Hohlkörper eingeschlossenen Stücke üben dieselbe Wirkung aus, als wenn sie auf der äusseren Oberfläche desselben angebracht wären. Wir betrachten daher die Schwere als auf alle Theile eines Körpers wirkend, eine Voraussetzung, die sich später bei der Theorie der verticalen Bewegungen durchaus bestätigen wird.

Durch Anwendung der Lehre von den Parallelkräften auf die von der Schwere herrührenden Kräfte ergiebt sich zunächst, dass die letzteren eine Resultante besitzen, die ihnen parallel und gleich ihrer Summe ist; sie heisst das *Gewicht* des Körpers. Zweitens hat diese Resultante einen von der Richtung der parallelen Kräfte unabhängigen Angriffspunkt; er ist der Mittelpunkt der von der Schwere erzeugten Parallelkräfte und wird deshalb der *Schwerpunkt* genannt.

112. Bei einem homogenen Körper haben gleiche Raumtheile desselben auch gleiche Gewichte; bestehen dagegen zwei homogene Körper aus verschiedenen Substanzen, so sind im Allgemeinen die Gewichte zweier gleichen Volumina, die nicht demselben Körper angehören, verschieden. Um diese Verschiedenheit auszudrücken, nennt man *specifisches Gewicht* einer homogenen Substanz das Gewicht ihrer Volumeneinheit oder, was Dasselbe ist, das Verhältniss des Gewichtes eines beliebigen Volumens dieser Substanz zu dem Volumen selbst. In den dafür existirenden Tafeln bezieht sich das specifische Gewicht einer Substanz immer auf das des destillirten Wassers von grösster Dichtigkeit, welche letztere ungefähr bei $+ 4^0$ C. eintritt; die übrigen Körper werden dabei von der Temperatur $0^0$ vorausgesetzt. Die Mittel zur Bestimmung der

specifischen Gewichte verschiedener Körper gehören nicht hierher sondern in die Physik.

Das Gewicht, welches zur vergleichenden Einheit dient, ist das eines Cubikcentimeters destillirten Wassers beim Maximum seiner Dichtigkeit; es heisst ein G r a m m. Die in den Tafeln der specifischen Gewichte angegebenen Werthe bezeichnen also die Anzahl von Grammen, welche ein Cubikcentimeter der betreffenden Substanz bei $0^0$ wiegt.

Für nicht homogene Körper sind Gewicht und Volumen nicht mehr einander proportional, und es bedarf dann einer genaueren Angabe über Das, was unter dem specifischen Gewichte einer derartigen Substanz verstanden werden soll. Zu diesem Zwecke denken wir uns um einen beliebigen Punkt des Körpers herum einen unendlich kleinen Körpertheil beschrieben und betrachten das Verhältniss von dem Gewichte dieses Theiles zu seinem Volumen; nähert sich nun das Volumen des Theiles der Null, so nähert sich das erwähnte Verhältniss einer bestimmten Grenze, welche wir das specifische Gewicht der Substanz i n d i e s e m P u n k t e nennen. Man pflegt diess in der kurzen Formel auszudrücken, dass ein unendlich kleiner Theil eines nicht homogenen Körpers immer noch als homogen gelten darf. Aendert sich die Beschaffenheit der Substanz continuirlich von Punkt zu Punkt, so bildet das specifische Gewicht eine stetige Funktion der Coordinaten der verschiedenen Punkte, und es kann nun wie früher die Aufgabe gestellt werden, das Gewicht und den Schwerpunkt des Körpers zu ermitteln.

113. Obschon Flächen und Curven nur Grenzen sind, die keinen materiellen Inhalt und daher auch kein Gewicht haben können, so schreibt man ihnen dennoch einen Schwerpunkt zu. Man denkt sie sich nämlich der Wirkung paralleler Kräfte ausgesetzt, welche entweder gleichförmig oder ungleichförmig vertheilt sein können. Im ersten Falle erleiden gleichgrosse Theile der Flächen oder Curven gleiche Einwirkungen, und es bedarf nur einer Angabe über die Intensität der auf die Einheit der Fläche oder Länge wirkenden Kraft, die man als das specifische Gewicht der Fläche oder Curve ansehen kann. Im zweiten Falle denkt man sich um einen Punkt herum einen unendlich kleinen Flächen- oder Curventheil beschrieben und betrachtet das Verhältniss der Resultante aller auf diesen Theil wirkende Kräfte zu seinem Inhalte. Die Grenze dieses Verhältnisses ist eine bestimmte und mag, der Analogie

nach, das specifische Gewicht der Fläche oder Curve in jenem Punkte heissen; dieses specifische Gewicht bildet eine Funktion der Coordinaten des betreffenden Punktes. Hiernach ist in allen Fällen der Schwerpunkt vollkommen bestimmt.

114. Der atomistischen Ansicht gemäss sollen die Körper in Wirklichkeit aus sehr kleinen getrennten Theilen bestehen, gleichwohl darf man sich erlauben, die Formeln der Integralrechnung ebenso anzuwenden, als wenn die Körper stetig mit Masse erfüllt wären; denn es hat diess zur Folge, dass die Angriffspunkte der Kräfte um unmerkliche Grössen geändert werden, was keinen merklichen Einfluss auf die Resultate haben kann.*)

115. Aus den Gewichten und Schwerpunkten einer begrenzten Anzahl getrennter Körper bestimmt sich mittelst des Satzes von den Momenten sofort die Lage des Schwerpunktes des ganzen Systemes; bedeuten nämlich für irgend einen Körper $P$ das Gewicht und $x$, $y$, $z$ die Coordinaten seines Schwerpunktes, so gelten für die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ des Schwerpunktes von dem ganzen Systeme die Formeln

$$x_1 = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma P}.$$

Diese bestehen bei jeder noch so grossen Anzahl der Körper und für jede noch so kleine Ausdehnung der letzteren. Lässt man die Anzahl der Systemtheile ins Unendliche wachsen und jeden einzelnen Theil unendlich abnehmen, so kann die Summe derselben sich einer bestimmten Grenze nähern, welche nunmehr irgend ein continuirlich erfülltes Volumen, eine Fläche oder Curve bedeutet, von der jeder auch noch so kleine Theil von der Schwere afficirt wird; die Grenzen von $x_1$, $y_1$, $z_1$ sind jetzt die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Volumens respective dieser Fläche oder Curve.

---

*) Diese Behauptung ist nur so lange richtig, als die Zwischenräume zwischen den Atomen ausserordentlich klein im Vergleich zu den Atomen sind; wären dagegen jene Zwischenräume den Atomen nahezu gleich oder grösser (wie manche Atomistiker wollen), so würde die Nichtberücksichtigung derselben zu sehr unrichtigen Resultaten führen. Aus der Uebereinstimmung der Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungen darf man wohl schliessen, dass die erste Voraussetzung die richtigere ist.

### Allgemeine Regel für die Schwerpunktsbestimmung.

116. Wenn ein Körper von einer durchaus convexen Oberfläche umschlossen ist, so liegt sein Schwerpunkt nothwendig im Innern; geht man nämlich bei der Zusammensetzung aller Parallelkräfte von einem im Innern befindlichen Punkte aus, so bleiben die Angriffspunkte der successiv auftretenden Resultanten beständig innerhalb der Oberfläche und folglich gilt diess auch von dem Angriffspunkte der letzten Resultante d. h. vom Schwerpunkte. Mittelst dieser Bemerkung kann die Bestimmung des Schwerpunktes beliebiger Körper auf eine allgemeine der Rechnung leicht zugängliche Regel gebracht werden.

Theilt man nämlich den gegebenen Körper in Elemente, deren sämmtliche Dimensionen unendlich klein sind, so liegt der Schwerpunkt eines solchen Elementes irgendwo im Innern desselben und selbst wenn man die Coordinaten irgend eines Punktes der Oberfläche des Elementes mit den Coordinaten seines Schwerpunktes identificirt, so beträgt der Fehler nur Bruchtheile von den Dimensionen des Elementes. Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes mögen z. B. $x$, $y$, $z$ heissen und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die eines zweiten Punktes desselben Körpers. Das Volumenelement ist dann ein rechtwinkliges Parallelepiped aus den Kanten $dx$, $dy$, $dz$; reducirt sich der Körper auf eine Fläche, so besteht das Element aus einem unendlich kleinen Viereck, dessen Projection auf die $xy$-Ebene das aus $dx$ und $dy$ construirte Rechteck ist; bei einer krummen Linie wird das Element zu einem unendlich kleinen Bogen, dessen Projection auf die $x$-Achse durch $dx$ ausgedrückt wird. Bezeichnen wir nun in jedem Falle das Element mit $dV$, so sind die Coordinaten seines Schwerpunktes nur unendlich wenig von $x$, $y$, $z$ verschieden und können der Reihe nach $= x + \alpha dx$, $y + \beta dy$, $z + \gamma dz$ gesetzt werden, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gewisse nicht näher bekannte ächte Brüche bedeuten. Ferner ist, wenn $p$ das specifische Gewicht im Punkte $xyz$ bezeichnet, $p\,dV$ das Gewicht des Elementes $dV$ und folglich sind

$$(x + \alpha\,dx)\,p\,dV, \quad (y + \beta\,dy)\,p\,dV, \quad (z + \gamma\,dz)\,p\,dV$$

die Momente des Elementargewichtes in Beziehung auf die Ebenen $yz$, $xz$, $xy$ genommen; für die Coordinaten des Schwerpunktes haben wir jetzt die Formeln

$$x_1 = Lim \frac{\Sigma(xp\,dV + \alpha p\,dx\,dV)}{\Sigma(p\,dV)},$$
$$y_1 = Lim \frac{\Sigma(yp\,dV + \beta p\,dy\,dV)}{\Sigma(p\,dV)},$$
$$z_1 = Lim \frac{\Sigma(zp\,dV + \gamma p\,dz\,dV)}{\Sigma(p\,dV)};$$

beim Uebergange zur Grenze verschwinden aber die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung und unter gleichzeitiger Anwendung von $\int$ statt $\Sigma$ wird nun

$$x_1 \int p\,dV = \int x\,p\,dV, \quad y_1 \int p\,dV = \int y\,p\,dV,$$
$$z_1 \int p\,dV = \int z\,p\,dV.$$

Unter Beachtung des Umstandes, dass $\int p\,dV$ die Summe aller Elementargewichte d. h. das Gesammtgewicht des Körpers bedeutet, erhalten wir nun folgenden allgemeinen Satz:

Das Produkt aus dem Gewichte eines Körpers in die Entfernung seines Schwerpunktes von einer beliebigen Ebene bildet den Grenzwerth der Summe von allen den Producten, welche entstehen, wenn man das Gewicht jedes einzelnen Körperelementes mit der Entfernung eines seiner Punkte von jener Ebene multiplicirt.

Wie sich die Formeln für Curven, Flächen und Körper gestalten, wird man im Folgenden sehen.

## Schwerpunkte der Curven.

117. Die Gleichungen einer Curve im Raume bestimmen zwei Coordinaten als Funktionen der dritten, z. B. $y$ und $z$ ausgedrückt durch $x$. An die Stelle von $dV$ in den vorigen Formeln tritt jetzt das Bogenelement

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2};$$

nennen wir ferner $P$ das Gewicht der ganzen Linie, $x_0$ und $X$ die $x$ ihrer Endpunkte, so haben wir die Formeln

$$P = \int_{x_0}^{X} p\,ds,$$

$$Px_1 = \int_{x_0}^{X} p\,x\,ds,\quad Py_1 = \int_{x_0}^{X} p\,y\,ds,\quad Pz = \int_{x_0}^{X} p\,z\,ds,$$

in denen $p$, $y$, $z$ und $ds$ bekannte Funktionen von $x$ sind.

Für eine homogene Linie ist $p$ constant, $\frac{P}{p}$ die Länge $s$ des Bogens, mithin einfacher

$$s = \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$$s\,x_1 = \int_{x_0}^{X} x\,ds,\quad s\,y_1 = \int_{x_0}^{X} y\,ds,\quad s\,z_1 = \int_{x_0}^{X} z\,ds.$$

Ist die Curve in einer Ebene enthalten, so nimmt man letztere zur Ebene $xy$ und dann braucht man nur alle $z$ gleich Null zu setzen; demnach hat man für eine homogene ebene Curve

$$s = \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad s\,x_1 = \int_{x_0}^{X} x\,ds,\quad s\,y_1 = \int_{x_0}^{X} y\,ds.$$

Beispiele hierzu sind folgende.

118. Kreisbogen. Legt man den Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten in den Mittelpunkt uud nimmt als Ordinatenachse den Radius, welcher den Bogen halbirt, so werden die Endpunkte irgend eines Bogens durch zwei gleichgrosse und entgegengesetzte Abscissen bestimmt, die $-a$ und $+a$ heissen mögen. Es ist jetzt

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad ds = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$s\,x_1 = \int_{-a}^{a} \frac{r\,x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0,\quad s\,y_1 = \int_{-a}^{a} r\,dx = 2ar;$$

da $2a$ die Sehne des Bogens bedeutet, so liegt hier der Schwerpunkt auf dem halbirenden Radius in einer Entfernung vom Mittelpunkte, welche durch die Proportion

$$s : c = r : y_1, \qquad (c = \text{Chord } s)$$

bestimmt wird. Dasselbe Resultat kann man leicht durch Anwendung von Polarcoordinaten finden.

119. Parabelbogen. Für $p$ als Halbparameter ist

$$y^2 = 2px, \qquad y\,dy = p\,dx,$$

und für einen beliebigen im Scheitel anfangenden Bogen, welcher also gleichzeitig mit $x$ und $y$ verschwindet,

$$s = \int_0^y dy \sqrt{\frac{y^2}{p^2}+1}$$

$$= \frac{1}{2p}\left[y\sqrt{y^2+p^2} + p^2\, l\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right)\right].$$

Ferner hat man

$$s y_1 = \int_0^y y\,dy \sqrt{\frac{y^2}{p^2}+1} = \frac{1}{3p}\left[\sqrt{(y^2+p^2)^3} - p^3\right];$$

$$s x_1 = \int_0^y x\,dy \sqrt{\frac{y^2}{p^2}+1} = \int_0^x \sqrt{x}\,dx \sqrt{x+\tfrac{1}{2}p}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{4}p)\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}px} + \tfrac{1}{32}p^2\, l\left(\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}px}}{p}\right);$$

daraus sind $y_1$ und $x_1$ leicht herzuleiten.

120. Cycloidenbogen. Mit Hülfe des Wälzungswinkels $\omega$ lassen sich die vom Anfangspunkte der Bewegung ab gerechneten Coordinaten folgendermaassen ausdrücken

$$x = r(\omega - \sin\omega), \qquad y = r(1 - \cos\omega);$$

diess giebt

$$ds = r\sqrt{2 - 2\cos\omega}\,d\omega = 2r \sin\tfrac{1}{2}\omega\,d\omega;$$

mithin ist, wenn der Bogen $s$ gleichfalls vom Anfange der Bewegung ab gerechnet wird

$$s = 2r\int_0^\omega \sin\tfrac{1}{2}\omega\,d\omega = 4r(1 - \cos\tfrac{1}{2}\omega).$$

Ferner erhält man

$$s x_1 = 2r^2 \int_0^\omega (\omega - \sin\omega)\sin\tfrac{1}{2}\omega\,d\omega$$

und durch theilweise Integration

$$s x_1 = 4 r^2 \left[ -(\omega - \sin\omega) \cos\tfrac{1}{2}\omega + \int_0^\omega (1 - \cos\omega) \cos\tfrac{1}{2}\omega \, d\omega \right]$$

$$= 4 r^2 \left[ -(\omega - \sin\omega) \cos\tfrac{1}{2}\omega + 2 \int_0^\omega \sin^2\tfrac{1}{2}\omega \cos\tfrac{1}{2}\omega \, d\omega \right]$$

d. i.

$$s x_1 = 4 r^2 \left[ \tfrac{4}{3} \sin^3\tfrac{1}{2}\omega - (\omega - \sin\omega) \cos\tfrac{1}{2}\omega \right].$$

Die zweite Formel wird

$$s y_1 = 2 r^2 \int_0^\omega (1 - \cos\omega) \sin\tfrac{1}{2}\omega \, d\omega = 4 r^2 \int_0^\omega (1 - \cos^2\tfrac{1}{2}\omega) \sin\tfrac{1}{2}\omega \, d\omega$$

und giebt bei Ausführung der Integration

$$s y_1 = 4 r^2 \left[ 1 - \cos\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{2}{3}(1 - \cos^3\tfrac{1}{2}\omega) \right].$$

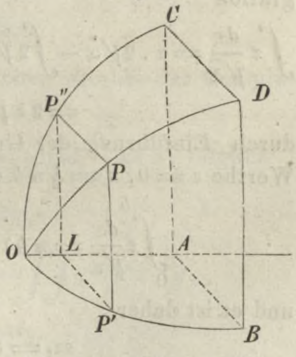
Der Schwerpunkt der ganzen Cycloide bestimmt sich hieraus durch $\omega = 2\pi$, nämlich

$$s = 8 r, \quad s x_1 = 8 \pi r^2, \quad s y_1 = \tfrac{8}{3} r^2,$$

liegt also auf der Scheitelordinate in der Höhe $\frac{1}{3} r$ über der Basis.

121. Durchschnitt eines parabolischen und cycloidischen Cylinders. In der $xy$-Ebene sei eine Parabel $OP'B$ construirt, deren Achse die $x$-Achse und deren Halbparameter $= 2a$ sein möge, so dass $a$ den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel bezeichnet; in der Vertikalebene $xz$ befinde sich eine Cycloide $OP''C$, von welcher $O$ der Scheitel, $OA = b$ der Durchmesser des erzeugenden Kreises und $AC$ die halbe Basis sei; die Parabel werde als Horizontalprojection, die Cycloide als Verticalprojection einer räumlichen Curve $OPD$ betrachtet und der Schwerpunkt der letzteren gesucht. Für $OL = x$, $LP' = y$, $P'P = LP'' = z$ haben wir dann als Gleichung der Parabel

Fig. 35.




$$y = 2\sqrt{ax}, \text{ mithin } \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}};$$

ferner gilt bekanntlich für die Cycloide die Formel

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{b-x}{x}},$$

es ist daher

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b-x}{x}} = dx\sqrt{\frac{a+b}{x}},$$

und für den ganzen Bogen $OPD = s$,

$$s = \int_0^b dx\sqrt{\frac{a+b}{x}} = 2\sqrt{(a+b)\,b}$$

Ferner erhält man

$$s x_1 = \int_0^b x\,dx\sqrt{\frac{a+b}{x}} = \tfrac{2}{3}\,b\sqrt{(a+b)\,b},$$

$$s y_1 = \int_0^b 2\sqrt{a\,x}\,dx\sqrt{\frac{a+b}{x}} = 2b\sqrt{a\,(a+b)},$$

$$s z_1 = \int_0^b z\,dx\sqrt{\frac{a+b}{x}} = \sqrt{a+b}\int_0^b z\,\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

für die letzte Gleichung giebt die unbestimmte theilweise Integration

$$\int z\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = z\,.\,2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\,dz = 2\,z\sqrt{x} - 2\int\sqrt{x}\sqrt{\frac{b-x}{x}}\,dx$$
$$= 2\,z\sqrt{x} + \tfrac{4}{3}\sqrt{(b-x)^3};$$

durch Einführung der Grenzen $x = 0$ und $x = b$, denen die Werthe $z = 0$, $z = \frac{1}{2}\pi\,b$ entsprechen, wird hieraus

$$\int_0^b z\frac{dx}{\sqrt{x}} = \pi\,b\sqrt{b} - \tfrac{4}{3}\sqrt{b^3} = (\pi - \tfrac{4}{3})\,b\sqrt{b},$$

und es ist daher

$$s z_1 = (\pi - \tfrac{4}{3})\,b\sqrt{(a+b)\,b}.$$

Der gesuchte Schwerpunkt hat demgemäss folgende Coordinaten:

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\,b = \tfrac{1}{3}\,OA, \quad y_1 = \sqrt{a\,b} = \tfrac{1}{2}\,AB,$$
$$z_1 = (\pi - \tfrac{4}{3})\,\tfrac{1}{2}\,b = AC - \tfrac{2}{3}\,OA,$$

deren Construction sehr einfach sein würde.

## Schwerpunkte von Flächen.

122. Zerlegt man eine Fläche in unendlich kleine Theile zweiter Ordnung, indem man sie durch zwei Reihen Ebenen schneidet, von denen die einen parallel zur $xz$- und die andern parallel zur $yz$-Ebene liegen, so ist ein solches Element ein krummliniges Viereck, dessen Projection auf die $xy$-Ebene das Rechteck aus $dx$ und $dy$ ist; die Grösse jenes Elementes wird ausgedrückt durch

$$U\,dx\,dy, \quad \text{wenn } U = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Die ganze Fläche heisse $S$, ihr Gewicht $P$, und das specifische Gewicht im Punkte $xyz$ werde durch $p$ bezeichnet, es gelten dann die Formeln von Nr. 116, wenn man $U\,dx\,dy$ an die Stelle von $dV$ treten lässt und gleichzeitig doppelte Integration statt einfacher vorschreibt, weil die verlangten Summirungen im vorliegenden nach zwei verschiedenen Richtungen hin auszuführen sind. Demnach ist

$$P = \iint p\,U\,dx\,dy,$$

$$Px_1 = \iint p\,x\,U\,dx\,dy, \quad Py_1 = \iint p\,y\,U\,dx\,dy,$$

$$Pz_1 = \iint p\,z\,U\,dx\,dy;$$

die Integrationsgrenzen sind die nämlichen wie bei der Complanation dar Flächen.

Für homogene Flächen ist $p$ constant und $\frac{P}{p} = S$, folglich

$$S = \iint U\,dx\,dy,$$

$$Sx_1 = \iint x\,U\,dx\,dy, \quad Sy_1 = \iint y\,U\,dx\,dy,$$

$$Sz_1 = \iint z\,U\,dx\,dy.$$

Diese Formeln vereinfachen sich sehr, wenn die Fläche eben ist oder unter die Rotationsflächen gehört.

123. Ebene Flächen. Nimmt man die Ebene der Fläche zur Ebene $xy$, so sind alle $z = 0$, $U$ wird $= 1$ und es bleibt

$$P = \iint p\,dx\,dy,$$

$$Px_1 = \iint p\,x\,dx\,dy, \quad Py_1 = \iint p\,y\,dx\,dy.$$

Die auf $y$ bezügliche Integration geschieht hier zwischen zwei Grenzen $y = y_0$ und $y = Y$, welche gegebene Funktionen von $x$ sind nämlich die zur Abscisse $x$ gehörenden Ordinaten der beiden Grenzcurven der Fläche; nach Ausführung dieser Integrationen bleiben unter dem Integralzeichen Funktionen von $x$, deren Integration zwischen zwei gegebenen Grenzen $x = x_0$ und $x = X$ vorzunehmen ist.

Für homogene ebene Flächen erhält man

$$S = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} dx\,dy,$$

$$Sx_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} x\,dx\,dy, \quad Sy_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} y\,dx\,dy,$$

d. i. weil hier die auf $y$ bezüglichen Integrationen sofort bewerkstelligt werden können,

$$S = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\,dx,$$

$$Sx_1 = \int_{x_0}^{X} x\,(Y - y_0)\,dx, \quad Sy_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\,dx.$$

124. Rotationsflächen. Wenn sich eine in der $xy$-Ebene liegende Curve, deren Gleichung $Y = f(x)$ sein möge, um die $x$-Achse dreht, so ist die Gleichung der von ihr beschriebenen Rotationsfläche

$$y^2 + z^2 = Y^2, \text{ oder } z = \sqrt{Y^2 - y^2};$$

hieraus folgen, $\frac{dY}{dx}$ mit $Y'$ bezeichnet, die Werthe

$$\frac{dz}{dx} = \frac{YY'}{\sqrt{Y^2 - y^2}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{Y^2 - y^2}}, \quad U = \frac{Y\sqrt{1 + Y'^2}}{\sqrt{Y^2 - y^2}};$$

für den Quadranten einer homogenen Rotationsfläche, die sich von $x = x_0$ bis $x = X$ erstreckt, ist demnach

$$S = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{Y\sqrt{1+Y'^2}}{\sqrt{Y^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

$$Sx_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{x\,Y\sqrt{1+Y'^2}}{\sqrt{Y^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

$$Sy_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{y\,Y\sqrt{1+Y'^2}}{\sqrt{Y^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

$$Sz_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{0}^{Y} Y\sqrt{1+Y'^2}\,dx\,dy.$$

Da $Y$ und mithin auch $Y'$ eine Funktion von $x$ allein bedeutet, so hat man bei der auf $y$ bezüglichen Integration die Faktoren $Y$ und $\sqrt{1+Y'^2}$ nicht zu beachten; wegen

$$\int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{Y^2-y^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^Y \frac{y\,dy}{\sqrt{Y^2-y^2}} = Y, \quad \int_0^Y dy = Y$$

bleibt daher

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{x}^{X} Y\sqrt{1+Y'^2}\,dx,$$

$$Sx_1 = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{X} x\,Y\sqrt{1+Y'^2}\,dx, \quad Sy_1 = \int_{x_0}^{X} Y^2\sqrt{1+Y'^2}\,dx,$$

$$Sz_1 = \int_{x_0}^{X} Y^2\sqrt{1+Y'^2}\,dx,$$

oder wenn wir wieder $y$ für $Y$ schreiben, wo nun $y$ die zur Abscisse $x$ gehörende Ordinate der rotirenden Curve bezeichnet,

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{X} y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$Sx_1 = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{X} x\,y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$Sy_1 = Sz_1 = \int_{x_0}^{X} y^2\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hat die Curve statt einer Viertelumdrehung eine vollständige Rotation ausgeführt, so liegt der Schwerpunkt der beschriebenen Fläche auf der $x$-Achse, es ist dann $y_1 = z_1 = 0$ und nur die beiden ersten Formeln bleiben übrig. In diese kann man statt der Fläche des Quadranten die ganze beschriebene Fläche $S_1 = 4S$ durch Multiplication mit 4 einführen und es ist dann

$$S_1 = 2\pi \int_{x_0}^{X} y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$S_1 x_1 = 2\pi \int_{x_0}^{X} xy\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Für alle diese Fälle geben wir im Folgenden Beispiele.

125. Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Zum Coordinatenanfang nehmen wir eine Ecke des Dreiecks und zur $x$-Achse die Senkrechte zur gegenüberliegenden Seite; letztere betrachten wir als die Grundlinie $a$ und jene Senkrechte als die Höhe $h$ des Dreiecks; nennen wir ferner $b_1$ und $b_0$ die Ordinaten der Punkte, in welchen die beiden übrigen Seiten die Grundlinie schneiden, so haben wir in den Formeln von Nr. 123

$$y_0 = \frac{b_0}{h}\, x, \quad Y = \frac{b_1}{h}\, x$$

zu setzen, und erhalten dadurch

$$S = \int_0^h \frac{b_1 - b_0}{h}\, x\, dx = \tfrac{1}{2}(b_1 - b_0)\, h = \tfrac{1}{2}\, ah,$$

$$Sx_1 = \int_0^h \frac{b_1 - b_0}{h}\, x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\,(b_1 - b_0) h^2 = \tfrac{1}{3}\, ah^2,$$

$$Sy_1 = \tfrac{1}{2} \int_0^h \frac{b_1^2 - b_0^2}{h^2}\, x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\,(b_1 - b_0)\, \frac{b_1 + b_0}{2}\, h = \tfrac{1}{3}\, a\, p\, h,$$

wo $p$ die Ordinate des Mittelpunktes der Basis bezeichnet. Es ist nun

$$x_1 = \tfrac{2}{3} h, \quad y_1 = \tfrac{2}{3} p, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{p}{h};$$

die letzte Gleichung sagt, dass der Schwerpunkt auf der Geraden liegt, welche die Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkte der Gegenseite verbindet; aus der ersten Gleichung erhellt, dass er um $\frac{2}{3}$ dieser Linie von der Spitze oder um $\frac{1}{3}$ derselben von der Basis entfernt ist.

126. Schwerpunkt der Kreisfläche. Wir nehmen $Y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y_0 = 0$ und suchen den Schwerpunkt desjenigen Theiles der Kreisfläche, der sich von $x = x_0$ bis $x = r$ zu beiden Seiten der Abscissenachse erstreckt. Wir haben für diesen Fall $y_1 = 0$, und, wenn $F$ die ganze Fläche des in Rede stehenden Segmentes bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2} F = \int_{x_0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx, \qquad F = r^2 \, Arc \, cos \frac{x_0}{r} - x_0 \sqrt{r^2 - x_0^2},$$

$$\tfrac{1}{2} F x_1 = \int_{x_0}^{r} x \sqrt{r^2 - x^2}\, dx, \quad F x_1 = \tfrac{2}{3} \sqrt{(r^2 - x_0^2)^3}.$$

In Beziehung auf den Halbkreis wird $x_0 = 0$, folglich

$$F = \tfrac{1}{2} \pi r^2, \quad F x_1 = \tfrac{2}{3} r^3, \quad x_1 = \frac{4}{3\pi} r.$$

Verlangt man statt des Schwerpunktes eines Segmentes den eines Sectors, so kann man die Untersuchung sofort auf die Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisbogens zurückführen. Der Sector lässt sich nämlich als Grenze einer unendlichen Anzahl von Dreiecken betrachten, deren Grundlinien Sehnen sind und deren gemeinschaftliche Spitze in den Mittelpunkt fällt; die Schwerpunkte dieser Elementardreiecke liegen in gleichen Abständen auf einem Kreisbogen, dessen Centriwinkel der nämliche, und dessen Halbmesser $= \frac{2}{3} r$ ist. Der Schwerpunkt dieses Bogens ist zugleich der Schwerpunkt jenes Sectors.

127. Parabelfläche. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = 2px$ und $S$ die Fläche zwischen der $x$-Achse, der Ordinate und dem vom Scheitel am gerechneten Parabelbogen; es ist dann

$$S = \tfrac{2}{3} x \sqrt{2px}$$

$$S x_1 = \int_0^x x\sqrt{2px}\,dx = \tfrac{2}{5}\,x^2\sqrt{2px},$$

$$S y_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^x 2\,p\,x\,dx = \tfrac{1}{2}\,p\,x^2,$$

woraus

$$x_1 = \tfrac{3}{5}\,x,\quad y_1 = \tfrac{3}{8}\sqrt{2px} = \tfrac{3}{8}\,y.$$

128. **Fläche einer Kugelzone.** Nach den in Nr. 124 gegebenen Formeln ist für $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ die Fläche der zwischen den Abscissen $x = x_0$ und $x = x$ enthaltenen Zone

$$S_1 = 2\pi\int_{x_0}^{x} r\,dx = 2\pi r\,(x - x_0),$$

und

$$S_1 x_1 = 2\pi\int_{x_0}^{x} r\,x\,dx = \pi r\,(x^2 - x_0{}^2),$$

folglich die Coordinate des Schwerpunktes

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\,(x_0 + x).$$

129. **Fläche des Rotationsparaboloides.** Nehmen wir $y^2 = 2px$ also $y\,dy = p\,dx$ und betrachten die Kappe, welche von $x = 0$ bis $x = x$ reicht, so erhalten wir, wenn $dx$ durch $dy$ ausgedrückt wird,

$$S_1 = \frac{2\pi}{p}\int_0^y y\,dy\sqrt{y^2 + p^2} = \frac{2\pi}{3p}\left[\sqrt{(y^2 + p^2)^3} - p^3\right],$$

$$S_1 x_1 = \frac{\pi}{p^2}\int_0^y y^3\,dy\sqrt{y^2 + p^2}$$

$$= \frac{\pi}{15\,p^2}\left[5\,y^2\sqrt{(y^2 + p^2)^3} - 2\sqrt{(y^2 + p^2)^5} + 2p^5\right].$$

130. **Fläche eines elliptischen Paraboloides.** Ein elliptisches Paraboloid, dessen Gleichung

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

heissen soll, werde von einem elliptischen Cylinder geschnitten, welcher die $z$-Achse zur Achse und eine aus den Halbachsen $\lambda a$ und $\lambda b$ construirte Ellipse zur Leitlinie haben möge, wobei $\lambda$ irgend einen constanten Factor bedeuten soll; die Fläche von dem vierten Theile der entstehenden Kappe sei $S$, ihre Projection auf die $xy$-Ebene ist dann die Quadrantenfläche jener Ellipse und man hat in Beziehung auf Nr. 122

$$U = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

und als Integrationsgrenzen für $x$:

$$x = 0, \quad x = \lambda a,$$

und für $y$:

$$y = 0, \quad y = \lambda b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\lambda a}\right)^2}$$

Demnach gelten zur Schwerpunktsbestimmung folgende vier Formeln

$$S = \int_0^{\lambda a} \int_0^{\lambda b \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda a}\right)^2\right]}} dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$Sx_1 = \int_0^{\lambda a} \int_0^{\lambda b \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda a}\right)^2\right]}} x\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$Sy_1 = \int_0^{\lambda a} \int_0^{\lambda b \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda a}\right)^2\right]}} y\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$Sz_1 = \int_0^{\lambda a} \int_0^{\lambda b \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda a}\right)^2\right]}} \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}\right) dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Durch Einführung neuer Variabelen mittelst der Substitutionen $x = a\xi$, $y = b\eta$ wird hieraus

$$S = ab\int_0^\lambda\int_0^{\sqrt{(\lambda^2-\xi^2)}} d\xi\, d\eta \sqrt{1+\xi^2+\eta^2},$$

$$Sx_1 = a^2b\int_0^\lambda\int_0^{\sqrt{(\lambda^2-\xi^2)}} \xi\, d\xi\, d\eta \sqrt{1+\xi^2+\eta^2},$$

$$Sy_1 = ab^2\int_0^\lambda\int_0^{\sqrt{(\lambda^2-\xi^2)}} \eta\, d\xi\, d\eta \sqrt{1+\xi^2+\eta^2},$$

$$Sz_1 = \tfrac{1}{2}\, ab\int_0^\lambda\int_0^{\sqrt{(\lambda^2-\xi^2)}} (a\xi^2+b\eta^2)\, d\xi\, d\eta \sqrt{1+\xi^2+\eta^2};$$

betrachtet man $\xi$ und $\eta$ wieder als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes und drückt dieselben durch die zugehörigen Polarcoordinaten aus, indem man

$$\xi = \varrho \cos\vartheta, \quad \eta = \varrho \sin\vartheta, \quad d\xi\, d\eta = \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$$

setzt, so gehen die obigen Formeln in folgende über

$$S = ab\int_0^\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{1+\varrho^2},$$

$$Sx_1 = a^2b\int_0^\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^2 \cos\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{1+\varrho^2},$$

$$Sy_1 = ab^2\int_0^\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{1+\varrho^2},$$

$$Sz_1 = \tfrac{1}{2}\, ab\int_0^\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^3 (a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta)\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{1+\varrho^2}.$$

nach Ausführung der sehr leichten auf $\vartheta$ bezüglichen Integrationen bleibt

$$S = \tfrac{1}{2}\pi\, ab\int_0^\lambda \varrho\, d\varrho \sqrt{1+\varrho^2},$$

$$Sx_1 = a^2 b \int_0^\lambda \varrho^2\, d\varrho \sqrt{1+\varrho^2},$$

$$Sy_1 = ab^2 \int_0^\lambda \varrho^2\, d\varrho \sqrt{1+\varrho^2},$$

$$Sz_1 = \tfrac{1}{8}\pi\, ab\,(a+b) \int_0^\lambda \varrho^3\, d\varrho \sqrt{1+\varrho^2}.$$

Die noch übrigen drei Integrationen können nach bekannten Regeln vorgenommen werden, was weiter keiner Erörterungen bedarf.

Handelt es sich um den Schwerpunkt der ganzen Kappe, deren Fläche $S_1 = 4S$ ist, so verschwinden $x_1$, $y_1$ und es bleibt nur

$$S_1 = 2\pi\, ab \int_0^\lambda \varrho\, d\varrho \sqrt{1+\varrho^2}, \quad S_1 z_1 = \tfrac{1}{2}\pi\, ab\,(a+b) \int_0^\lambda \varrho^3\, d\varrho \sqrt{1+\varrho^2},$$

131. Fläche des dreiachsigen Ellipsoides. Die Halbachsen des Ellipsoides mögen $a$, $b$, $c$ heissen, wobei wir $a > b > c$ voraussetzen, ferner sei

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}, \quad (\alpha > \beta)$$

und $S$ der Flächeninhalt eines Octanten des Ellipsoides; aus der Gleichung der Fläche

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

findet sich

$$U = \sqrt{\left\{\frac{1 - \left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 - \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}$$

und als Integrationsgrenzen für $x$ und $y$

$$x = 0, \quad x = a; \quad y = 0, \quad y = b\sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}.$$

Hiernach sind die zur Flächen- und Schwerpunktsbestimmung dienenden Formeln

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} dx\,dy \sqrt{\left\{\frac{1-\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}$$

$$Sx_1 = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} x\,dx\,dy \sqrt{\left\{\frac{1-\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}},$$

$$Sy_1 = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} y\,dx\,dy \sqrt{\left\{\frac{1-\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}},$$

$$Sz_1 = c\int_0^a \int_0^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} dx\,dy \sqrt{1-\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2};$$

mittelst der schon vorhin benutzten Substitutionen $x = a\xi = a\varrho\, cos\, \vartheta$ und $y = b\eta = b\,\varrho\, sin\, \vartheta$ erhält man hieraus

$$S = ab\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{\left\{\frac{1-\Theta^2\varrho^2}{1-\varrho^2}\right\}},$$

$$Sx_1 = a^2 b\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^2 cos\,\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{\left\{\frac{1-\Theta^2\varrho^2}{1-\varrho^2}\right\}}.$$

$$Sy_1 = ab^2\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^2 sin\,\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{\left\{\frac{1-\Theta^2\varrho^2}{1-\varrho^2}\right\}},$$

$$Sz_1 = abc\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \sqrt{1-\Theta^2\varrho^2},$$

wobei zur Abkürzung

$$\Theta = \sqrt{\alpha^2 cos^2\,\vartheta + \beta^2 sin^2\,\vartheta}$$

gesetzt worden ist.

Um zunächst das erste Doppelintegral auf ein einfaches zurückzubringen, führen wir statt $\varrho$ eine neue Variabele $u$ ein, indem wir

$$\frac{1-\varrho^2}{1-\Theta^2\varrho^2}=u^2$$

also

$$\varrho=\sqrt{\left\{\frac{1-u^2}{1-\Theta^2u^2}\right\}},\quad d\varrho=-\frac{(1-\Theta^2)\,u\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\Theta^2u^2)^3}}$$

setzen; wir erhalten dann

$$S=ab\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1-\Theta^2}{(1-\Theta^2u^2)^2}\,du\,d\vartheta$$

d. i. vermöge der Bedeutung von $\Theta$

$$S=ab\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(1-\alpha^2)\cos^2\vartheta+(1-\beta^2)\sin^2\vartheta}{[(1-\alpha^2u^2)\cos^2\vartheta+(1-\beta^2u^2)\sin^2\vartheta]}\,du\,d\vartheta.$$

Die auf $\vartheta$ bezügliche Integration ist mittelst der bekannten Formeln

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\vartheta\,d\vartheta}{(m\cos^2\vartheta+n\sin^2\vartheta)^2}=\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{m\sqrt{mn}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{(m\cos^2\vartheta+n\sin^2\vartheta)^2}=\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{n\sqrt{mn}}$$

leicht ausführbar und giebt

$$S=\tfrac{1}{4}\pi ab\int_0^1\left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2}+\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich das für $Sx_1$ angegebene Doppelintegral reduciren; man findet mittelst der nämlichen Substitution

$$Sx_1=a^2b\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(1-\Theta^2)\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{(1-\Theta^2u^2)^5}}\cos\vartheta\,du\,d\vartheta$$

$$=a^2b\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-u^2}\,\frac{(1-\alpha^2)\cos^2\vartheta+(1-\beta^2)\sin^2\vartheta}{\sqrt{[(1-\alpha^2u^2)\cos^2\vartheta+(1-\beta^2u^2)\sin^2\vartheta]^5}}\cos\vartheta\,du\,d\vartheta,$$

woraus unter Anwendung der Formeln

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(m\cos^2\vartheta + n\sin^2\vartheta)^5}} = \tfrac{2}{3}\,\frac{1}{m^2\sqrt{n}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(m\cos^2\vartheta + n\sin^2\vartheta)^5}} = \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{mn\sqrt{n}}$$

erhalten wird

$$Sx_1 = \tfrac{1}{3}\,a^2b\int_0^1 \left\{2\,\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\}\frac{1}{1-\alpha^2u^2}\sqrt{\left\{\frac{1-u^2}{1-\beta^2u^2}\right\}}\,du.$$

Zur Transformation von $Sy_1$ bedarf es keiner neuen Rechnung sondern nur der gegenseitigen Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$; es ist daher

$$Sy_1 = \tfrac{1}{3}\,ab^2\int_0^1 \left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + 2\,\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\}\frac{1}{1-\beta^2u^2}\sqrt{\left\{\frac{1-u^2}{1-\alpha^2u^2}\right\}}\,du.$$

Endlich kann man in dem für $Sz_1$ angegebenen Doppelintegrale die auf $\varrho$ bezügliche Integration sofort ausführen und erhält dadurch

$$Sz_1 = \tfrac{1}{3}\,abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1-\sqrt{(1-\Theta^2)^3}}{\Theta^2}\,d\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{3}\,abc\left\{\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\alpha\beta} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{(1-\Theta^2)^3}}{\Theta^2}\,d\vartheta\right\}$$

d. i. vermöge der Bedeutung von $\Theta$

$$Sz_1 = \tfrac{1}{3}\,abc\left\{\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\alpha\beta} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{[(1-\alpha^2)\cos^2\vartheta + (1-\beta^2)\sin^2\vartheta]^3}}{\alpha^2\cos^2\vartheta + \beta^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta\right\}.$$

Die einfachen Integrale, von denen $S$, $x_1$, $y_1$, $z_1$ noch abhängen, lassen sich auf elliptische Funktionen zurückführen, oder in unendliche Reihen auflösen, welche um so besser convergiren, je kleiner die Excentricitäten $\alpha$ und $\beta$ sind, oder endlich direkt nach der Methode der Quadraturen berechnen.

Bei einem gestreckten Rotationsellipsoide wird $\beta = 0$, bei einem abgeplatteten $\beta = \alpha$, für die Kugel $\alpha = \beta = 0$; in diesen speciellen Fällen können die genannten Integrale leicht durch Logarithmen und Kreisbögen ausgedrückt werden.

### Schwerpunkt der Volumina.

132. Durch eine Reihe senkrecht auf der $x$-Achse stehender Ebenen zerlegen wir den Körper vorerst in eine unendliche Anzahl paralleler Schichten, schneiden diese durch eine Reihe zur $y$-Achse senkrechter Ebenen und theilen somit das Volumen in unendlich dünne Parallelepipede, von denen irgend eines das Rechteck aus $dx$ und $dy$ zur Basis hat. Legen wir noch eine dritte Reihe von Ebenen senkrecht zur $z$-Achse, so zerfällt der Körper in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipede, von denen irgend eines die Kanten $dx$, $dy$, $dz$ besitzt. Das Volumenelement $dV$ ist $= dx\, dy\, dz$ und nach Nr. 116 gelten nun folgende Formeln zur Bestimmung des Körpergewichtes $P$ und der Schwerpunktscoordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$:

$$P = \int\!\!\int\!\!\int p\, dx\, dy\, dz,$$

$$Px_1 = \int\!\!\int\!\!\int p\, x\, dx\, dy\, dz, \quad Py_1 = \int\!\!\int\!\!\int p\, y\, dx\, dy\, dz,$$

$$Pz_1 = \int\!\!\int\!\!\int p\, z\, dx\, dy\, dz.$$

Die Integrationen sind hier dreifache, weil man, wie bei der Bestimmung des Volumens oder der Masse, die vorhandenen Elemente successiv in den Richtungen der drei Coordinatenachsen zusammennehmen muss. Will man diese Integrationen in der Reihenfolge $z$, $y$, $x$ ausführen, so hat man sich zunächst zwei den Körper begrenzende Flächen vorzustellen, deren Gleichungen etwa $z_0 = f(x, y)$ und $Z = F(x, y)$ sein mögen; die auf $z$ bezüglichen Integrationsgrenzen sind dann $z = z_0$ und $z = Z$. Denkt man sich ferner den gegebenen Körper auf die, gewöhnlich horizontale Ebene $xy$ projicirt, so erhält man eine Figur, einerseits begrenzt durch zwei Curven, deren Gleichungen $y_0 = \varphi(x)$ und $Y = \Phi(x)$ heissen mögen, andrerseits begrenzt durch zwei in gegebenen Entfernungen $x_0$ und $X$ parallel zur $y$-Achse gelegte Gerade; die Integrationsgrenzen für $y$ sind dann $y = y_0$ und $y = Y$, sowie die Grenzen für $x$, $x = x_0$ und $x = X$; demgemäss ist:

$$P = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} p\,dx\,dy\,dz,$$

$$Px_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} p\,x\,dx\,dy\,dz,$$

$$Py_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} p\,y\,dx\,dy\,dz,$$

$$Pz_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} p\,z\,dx\,dy\,dz.$$

Durch ähnliche Betrachtungen würde man die Integrationsgrenzen in dem Falle bestimmen, wo man bei der einen oder andern Formel eine andere Anordnung der Integrationen befolgen wollte.

Für homogene Körper ist $p$ constant und $\frac{P}{p}$ gleich dem Volumen $V$ des Körpers, mithin bei der obigen Reihenfolge der Integrationen

$$V = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} dx\,dy\,dz,$$

$$Vx_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$Vy_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} y\,dx\,dy\,dz,$$

$$Vz_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} z\,dx\,dy\,dz;$$

hier lassen sich die auf $z$ bezüglichen Integrationen ausführen und die Formeln werden dann:

$$V = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dx\, dy,$$

$$Vx_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} x(Z - z_0)\, dx\, dy,$$

$$Vy_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} y(Z - z_0)\, dx\, dy,$$

$$Vz_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} (Z^2 - z^2_0)\, dx\, dy.$$

133. Nicht selten ist es von Vortheil, Polarcoordinaten statt rechtwinkliger Coordinaten anzuwenden; man hat in diesem Falle wie schon in Nr. 4 erwähnt wurde

$$x = r \cos\vartheta, \quad y = r \sin\vartheta \cos\omega, \quad z = r \sin\vartheta \sin\omega,$$
$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, dr$$

zu setzen, wodurch die allgemeinen Formeln in folgende übergehen:

$$P = \int\int\int p\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, dr,$$

$$Px_1 = \int\int\int p\, r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, dr,$$

$$Py_1 = \int\int\int p\, r^3 \sin^2\vartheta \cos\omega\, d\vartheta\, d\omega\, dr,$$

$$Pz_1 = \int\int\int p\, r^3 \sin^2\vartheta \sin\omega\, d\vartheta\, d\omega\, dr.$$

Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, denken wir uns den Radiusvector $r$ ohne Aenderung der Winkel $\vartheta$ und $\omega$ verlängert bis er die Oberfläche des Körpers schneidet; die Vectoren, welche den entstandenen Durchschnittspunkten angehören, mögen $r_0$ und $R$ heissen, sie sind die Grenzen für $r$ und ergeben sich aus der Polargleichung der Oberfläche. Was die Grenzen für $\vartheta$ und $\omega$ betrifft, so bestehen dieselben in gewissen Winkeln, welche von der Grösse des zu betrachteten Körpersectors abhängen und daher für jeden Fall besonders zu ermitteln sind.

Bei einem homogenen Körper ist $p$ constant und dann werden die auf $r$ bezüglichen Integrationen allgemein ausführbar, nämlich

$$V = \tfrac{1}{3}\iint (R^3 - r_0^3)\, sin\, \vartheta\, d\vartheta\, d\omega,$$

$$Vx_1 = \tfrac{1}{4}\iint (R^4 - r_0^4)\, cos\, \vartheta\, sin\, \vartheta\, d\vartheta\, d\omega,$$

$$Vy_1 = \tfrac{1}{4}\iint (R^4 - r_0^4)\, sin^2 \vartheta\, cos\, \omega\, d\vartheta\, d\omega,$$

$$Vz_1 = \tfrac{1}{4}\iint (R^4 - r_0^4)\, sin^2 \vartheta\, sin\, \omega\, d\vartheta\, d\omega.$$

134. Schwerpunkt eines Rotationskörpers. Handelt es sich um den Schwerpunkt des Körpers, welcher entsteht, wenn eine durch die Gleichung $Y = \Phi(x)$ gegebene Curve sich um die $x$-Achse dreht bis sie aus der $xy$-Ebene in die $xz$-Ebene gelangt, so ist in den Formeln von Nr. 132

$$z_0 = 0, \quad Z = \sqrt{Y^2 - y^2}, \quad y_0 = 0, \quad Y = Y$$

zu setzen; bei homogenen Rotationskörpern wird dann

$$V = \int_{x_0}^{X}\int_{0}^{Y} \sqrt{Y^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

$$Vx_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{0}^{Y} x\sqrt{Y^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

$$Vy_1 = \int_{x_0}^{X}\int_{0}^{Y} y\sqrt{Y^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

$$Vz_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{X}\int_{0}^{Y} (Y^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $Y$ zwar von $x$ nicht aber von $y$ abhängt, lassen sich die auf $y$ bezüglichen Integrationen leicht ausführen; schreibt man nachher $y$ für $Y$, wo nun $y$ die zur Abscisse $x$ gehörige Ordinate der rotirenden Curve bezeichnet, so ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{4}\pi \int_{x}^{X} y^2\, dx, \qquad V x_1 = \tfrac{1}{4}\pi \int_{x_0}^{X} x y^2\, dx,$$

$$V y_1 = V z_1 = \tfrac{1}{3} \int_{x_0}^{X} y^3\, dx.$$

Bei einer vollständigen Umdrehung entsteht ein Volumen $V_1 = 4V$, zugleich sind dann $y_1$ und $z_1 = 0$ und es bleibt einfacher

$$V_1 = \pi \int_{x_0}^{X} y^2\, dx, \quad V_1 x_1 = \pi \int_{x_0}^{X} x y^2\, dx.$$

Für einen hohlen Rotationskörper entstanden durch Rotation zweier Curven, deren eine die Ordinate $y_0$ und deren andere die Ordinate $Y$ besitzt, findet man hieraus leicht:

$$V_1 = \pi \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, dx, \quad V_1 x_1 = \pi \int_{x_0}^{X} x\,(Y^2 - y_0^2)\, dx.$$

135. Schwerpunkt eines Cylinders. Stellt man einen geraden Cylinder von der Höhe $h$ so, dass seine Basis mit der $xy$-Ebene zusammenfällt, mithin seine erzeugenden Geraden der $z$-Achse parallel laufen, so ist in den Formeln von Nr. 132 $z_0 = 0$, $Z = h$ zu setzen und dann wird bei Ausführung der auf $y$ bezüglichen Integrationen

$$V = h \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\, dx,$$

$$V x_1 = h \int_{x_0}^{X} x (Y - y_0)\, dx,$$

$$V y_1 = \tfrac{1}{2} h \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, dx,$$

$$V z_1 = \tfrac{1}{2} h^2 \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\, dx.$$

Für den Flächeninhalt $S$ der Basis und die Coordinaten $x'$, $y$

ihres Schwerpunktes gelten nun die Formeln von Nr. 123) wenn man die dortigen $x_1$ und $y_1$ durch $x'$ und $y'$ ersetzt; es ist daher durch Vergleichung

$$V = h\,S, \quad Vx_1 = h\,S\,x', \quad Vy_1 = h\,S\,y', \quad Vz_1 = \tfrac{1}{2}h^2 S,$$

woraus folgt:

$$x_1 = x', \quad y_1 = y', \quad z_1 = \tfrac{1}{2}h.$$

Der Schwerpunkt des Cylinders liegt daher auf der Mitte der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden ebenen Begrenzungsflächen des Cylinders verbindet. Dieses Resultat ist durch eine sehr einfache Ueberlegung leicht auf den schiefen Cylinder auszudehnen.

136. In vielen Fällen kann man den gegebenen Körper in unendlich dünne parallele Schichten zerlegen, deren Schwerpunkte unmittelbar bekannt sind; die stetige Folge dieser Schwerpunkte bildet dann eine Curve, auf welcher der Schwerpunkt des Körpers liegen muss (eine sogenannte Schwerlinie), folglich braucht man nur noch eine der Grössen $x_1$, $y_1$, $z_1$ zu ermitteln. Nehmen wir z. B. die Parallelebenen senkrecht zur $x$-Achse und finden wir dabei, dass eine in der Entfernung $x$ von der Coordinatenebene $yz$ parallel zu letzterer gelegte Ebene mit dem Körper einen Querschnitt bildet, dessen Flächeninhalt $Q$ und dessen Schwerpunkt seiner Lage nach bekannt sind, so ist $Q\,dx$ das Volumen der unendlich dünnen Schicht, welche als ein Cylinder mit der Basis $Q$ und der Höhe $dx$ betrachtet werden kann; das Gewicht derselben beträgt $p\,Q\,dx$, vorausgesetzt, dass das specifische Gewicht $p$ wenigstens innerhalb der Schicht sich nicht ändert, endlich ist $x\,p\,Q\,dx$ das Moment von $p\,Q\,dx$ in Beziehung auf die $yz$-Ebene. Hieraus folgt

$$P = \int_{x_0}^{X} p\,Q\,dx, \qquad Px_1 = \int_{x_0}^{X} p\,x\,Q\,dx$$

und bei einem homogenen Körper

$$V = \int_{x_0}^{X} Q\,dx, \quad Vx_1 = \int_{x_0}^{X} x\,Q\,dx.$$

Der Schwerpunkt des Körpers bestimmt sich als Durchschnitt der schon bekannten Schwerlinie mit einer in dem Abstande $x_1$ parallel zur Coordinatenebene $xy$ gelegten Ebene.

137. Schwerpunkte von Pyramiden und Kegeln. Die Spitze einer dreiseitigen Pyramide sei der Coordinatenanfang, die $x$-Achse senkrecht auf der Grundfläche, $b$ der Flächeninhalt der Basis, $h$ die Höhe der Pyramide; denken wir uns jetzt die Pyramide durch Ebenen geschnitten, die der Basis parallel, also senkrecht zur $x$-Achse sind, so erhalten wir lauter ähnliche Dreiecke und der Flächeninhalt eines solchen in der Entfernung $x$ von der Spitze liegenden Dreiecks ist $Q = \frac{b x^2}{h^2}$. Die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke bilden in ihrer stetigen Folge eine Gerade, welche von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Basis geht, und auf dieser Schwerlinie ist der Schwerpunkt der Pyramide zu suchen. Nach Nr. 136 erhalten wir jetzt

$$V = \int_0^h \frac{b x^2}{h^2}\, dx = \tfrac{1}{3} b h, \qquad V x_1 = \int_0^h \frac{b x^3}{h^2}\, dx = \tfrac{1}{4} b h^2,$$

mithin

$$x_1 = \tfrac{3}{4} h.$$

Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide liegt demgemäss auf der Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Basis verbindet, und ist um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze entfernt. Da jede Seitenfläche der Pyramide als deren Basis gelten kann, so ist der Schwerpunkt der gemeinsame Durchschnitt der vier Geraden von den Ecken nach den Schwerpunkten der Gegenflächen.

Man kann den ersten Satz sehr leicht auf mehrseitige Pyramiden ausdehnen, indem man sie in dreiseitige Pyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze zerlegt. Hierbei kommt auf die Anzahl der Seitenflächen nichts an und es bleibt demnach der Satz auch für Kegel richtig, deren Grundflächen von beliebigen Curven begränzt werden.

138. Elliptisches Paraboloid. Die Gleichungen der Schnitte, welche die Fläche mit den Ebenen $xy$ und $xz$ bildet, mögen

$$y^2 = 2px, \quad z^2 = 2qx$$

heissen, so dass

$$x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q}$$

die Gleichung des Paraboloides ist; gesucht werde der Schwerpunkt der Viertelkappe, welche zwischen den Ebenen $xy$, $xz$, der Fläche und einer in der Entfernung $x$ parallel zur $yz$-Ebene gelegten Ebene enthalten ist. In den Formeln von Nr. 132 haben wir jetzt

$$x_0 = 0, \quad X = x, \quad y_0 = 0, \quad Y = \sqrt{2px},$$
$$z_0 = 0, \quad Z = z\sqrt{2q\left(x - \frac{y^2}{2p}\right)}$$

zu nehmen und bekommen

$$V = \sqrt{2q}\int_0^x\int_0^{\sqrt{2px}}\sqrt{x - \frac{y^2}{2p}}\,dx\,dy,$$

$$Vx_1 = \sqrt{2q}\int_0^x\int_0^{\sqrt{2px}} x\sqrt{x - \frac{y^2}{2p}}\,dx\,dy,$$

$$Vy_1 = \sqrt{2q}\int_0^x\int_0^{\sqrt{2px}} y\sqrt{x - \frac{y^2}{2p}}\,dx\,dy,$$

$$Vz_1 = q\int_0^x\int_0^{\sqrt{2px}}\left(x - \frac{y^2}{2p}\right)dx\,dy,$$

Durch Einführung einer neuen Variabelen $t$ mittelst der Substitution $y = t\sqrt{2px}$ werden diese Ausdrücke einfacher, nämlich

$$V = 2\sqrt{pq}\int_0^x\int_0^1 x\sqrt{1-t^2}\,dx\,dt = \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{pq}\,.\,x^2,$$

$$Vx_1 = 2\sqrt{pq}\int_0^x\int_0^1 x^2\sqrt{1-t^2}\,dx\,dt = \tfrac{1}{6}\pi\sqrt{pq}\,.\,x^3,$$

$$Vy_1 = 2p\sqrt{2q}\int_0^x\int_0^1 x\sqrt{x}\,.\,t\sqrt{1-t^2}\,dx\,dt = \tfrac{4}{15}p\,x^2\sqrt{2qx},$$

$$Vz_1 = q\sqrt{2p}\int_0^x\int_0^1 x\sqrt{x}\,.\,(1-t^2)\,dx\,dt = \tfrac{4}{15}q\,x^2\sqrt{2px};$$

hieraus folgen die Werthe

$$x_1 = \tfrac{2}{3}x, \quad y_1 = \frac{16}{15\pi}\sqrt{2px}, \quad z_1 = \frac{16}{15\pi}\sqrt{2qx},$$

deren geometrische Bedeutung leicht zu finden ist.

Bei einer vollständigen Kappe $= 4V$ liegt der Schwerpunkt auf der $x$-Achse und es bedarf dann nur der ersten Formel.

139. Dreiachsiges Ellipsoid. Die Gleichung der Fläche sei

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

und $V$ das Volumen zwischen der $xy$-Ebene, der $xz$-Ebene, der Fläche, und zwei in den Entfernungen $x_0$ und $x$ parallel zur $yz$-Ebene gelegten Ebenen, mithin $V$ gleich dem vierten Theile einer Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der $x$-Achse stehen, und deren Dicke oder Höhe $= x - x_0$ ist. Nach den in Nr. 132 gegebenen Formeln haben wir

$$V = c\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy,$$

$$Vx_1 = c\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy,$$

$$Vy_1 = c\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} y\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy,$$

$$Vz_1 = \tfrac{1}{2}c^2\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{b\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} \left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right\} dx\, dy,$$

ferner mittelst der Substitution

$$\frac{y}{b} = u\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

wo $u$ die neue, an die Stelle von $y$ tretende Variabele bezeichnet,

$$V = b\,c\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1-u^2}\,dx\,du = \tfrac{1}{4}\pi b\,c\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

$$Vx_1 = b\,c\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{1}x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1-u^2}\,dx\,du = \tfrac{1}{4}\pi b\,c\int_{x_0}^{x}x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

$$Vy_1 = b^2 c\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{1}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^3}\,u\sqrt{1-u^2}\,dx\,du = \tfrac{1}{3}b^2 c\int_{x_0}^{x}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^3}\,dx,$$

$$Vz_1 = \tfrac{1}{2}\,b\,c^2\int_{x_0}^{x}\int_{0}^{1}\sqrt{\left(1-\frac{x}{a^2}\right)^3}(1-u^2)\,dx\,du = \tfrac{1}{3}bc^2\int_{x_0}^{x}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^3}\,dx.$$

Die Ausführung der noch übrigen auf $x$ bezüglichen Integrationen bietet nicht die geringste Schwierigkeit dar.

Für eine vollständige Zone $V_1$, welche mit $x_0 = 0$ anfängt, ist durch Multiplication mit 4

$$V_1 = \pi\,b\,c\left(x - \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{a^2}\right),\quad V_1 x_1 = \pi\,b\,c\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{a^2}\right),$$

$$x_1 = \tfrac{3}{4}\,\frac{2a^2 - x^2}{3a^2 - x^2}\,x,\quad y_1 = 0,\quad z_1 = 0;$$

handelt es sich um den Octanten des Ellipsoides, so hat man in den vorhergehenden Formeln $x_0 = 0$ und die obere Integrationsgrenze $= a$ zu nehmen; diess giebt

$$x_1 = \tfrac{3}{8}a,\quad y_1 = \tfrac{3}{8}b,\quad z_1 = \tfrac{3}{8}c.$$

140. Kugelsector. Ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser $= r$ und dessen Centriwinkel $= \Theta$ sein möge, drehe sich um den einen begrenzenden Halbmesser, den wir zur $x$-Achse nehmen; bei einer vollständigen Rotation beschreibt jener Kreisausschnitt einen Kugelsector, dessen Schwerpunkt auf der $x$-Achse liegt, so dass also $y_1 = z_1 = 0$ und nur $x_1$ zu bestimmen ist. Nach den in Nr. 133 gegebenen Formeln haben wir $r_0 = 0$, $R = r$, als Integrationsgrenzen für $\vartheta$, $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \Theta$, und für $\omega$, $\omega = 0$ und $\omega = 2\pi$ zu nehmen, mithin

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\int_{0}^{\Theta}\int_{0}^{2\pi} r^3 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\omega,\quad V_1 x_1 = \tfrac{1}{4}\int_{0}^{\Theta}\int_{0}^{2\pi} r^4 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\omega,$$

oder, weil $r$ für alle $\vartheta$ und $\omega$ constant bleibt,

$$V_1 = \tfrac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos\Theta), \quad V_1 x_1 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 (1 - \cos^2\Theta),$$

mithin

$$x_1 = \tfrac{3}{8} r (1 + \cos\Theta).$$

141. Nichthomogenes dreiachsiges Ellipsoid. Wir denken uns ein mit den Halbachsen $a$, $b$, $c$ versehenes Ellipsoid aus einer Substanz gebildet, deren specifisches Gewicht an verschiedenen Stellen verschieden und zwar in der Entfernung $r$ vom Mittelpunkte des Körpers gleich $\frac{1}{r}$ ist; der Körper besteht dann aus einer stetigen Folge sphärischer Schichten, deren jede für sich homogen ist, während das specifische Gewicht von einer Schicht zur nächst grösseren abnimmt. Um möglichst leichte Rechnung zu haben, benutzen wir Polarcoordinaten, und wenn es auf einen Octanten des Körpers ankommt, so haben wir in den Formeln von Nr. 133 $p = \frac{1}{r}$ zu nehmen; die Integration in Beziehung auf $\vartheta$ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, die auf $\omega$ bezügliche von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$, endlich die Integration nach $r$ von $r = 0$ bis $r = R$ auszudehnen, wo $R$ durch die Polargleichung der Oberfläche bestimmt wird. Diese Polargleichung ist

$$\left(\frac{R\cos\vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\vartheta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\vartheta\sin\omega}{c}\right)^2 = 1,$$

folglich

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\sin\omega}{c}\right)^2}}.$$

Für das Gewicht $P$ haben wir jetzt

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^R \frac{1}{r}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, dr = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega}{\left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\sin\omega}{c}\right)^2};$$

geben wir dem hier vorkommenden Nenner die Form

$$\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\cos^2\omega + \left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)\sin^2\omega,$$

so können wir die auf $\omega$ bezügliche Integration mittelst der Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{m\cos^2\omega + n\sin^2\omega} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{mn}}$$

ausführen, und erhalten

$$P = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)}}.$$

Mit Hülfe der Substitution $\cos\vartheta = t$ und unter Benutzung der Abbreviaturen

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \beta, \quad \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} = \gamma,$$

finden wir nun

$$P = \tfrac{1}{4}\pi b c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-\beta^2 t^2)(1-\gamma^2 t^2)}},$$

wobei sich das Integral leicht auf ein elliptisches Integral erster Art zurückführen lässt, wenn man $a > b > c$, mithin $\beta < \gamma$ voraussetzt.

Zur Bestimmung der drei Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ haben wir ferner wegen $p = \frac{1}{r}$ und nach Ausführung der jedesmaligen ersten auf $r$ bezüglichen Integration

$$Px_1 = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega,$$

$$Py_1 = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^3 \sin^2\vartheta \cos\omega\, d\vartheta\, d\omega,$$

$$Pz_1 = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^3 \sin^2\vartheta \sin\omega\, d\vartheta\, d\omega,$$

wo $R$ den schon vorhin gegebenen Werth besitzt. Es ist übrigens nicht nöthig, diese drei Doppelintegrale zu reduciren, vielmehr reicht die Kenntniss von einer Coordinate hin, um durch blosse

Vertauschung $a$ mit $b$, $b$ mit $c$ etc. die übrigen Coordinaten zu erhalten; der grösseren Leichtigkeit der Integration wegen gehen wir dabei von $Py_1$ aus. Es ist

$$Py_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{\left[\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2} + \left(\frac{\sin^2\vartheta}{c^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\sin^2\omega\right]^3}};$$

für $\sin\omega = w$ erhält das auf $\omega$ bezügliche Integral die Form

$$\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{[h + k w^2]^3}} = \frac{1}{h\sqrt{h+k}},$$

worin $h$ und $k$ leicht verständliche Abkürzungen bedeuten; demnach wird $Py_1$ durch das folgende einfache Integral ausgedrückt

$$Py_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\sqrt{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)}}.$$

Durch gehörige Buchstabenvertauschung ergeben sich hieraus $Px_1$ und $Pz_1$; überhaupt sind die fraglichen drei Werthe

$$Px_1 = \frac{1}{3}a^2bc^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(a^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)\sqrt{b^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta}},$$

$$Py_1 = \frac{1}{3}a^3b^2c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)\sqrt{c^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta}},$$

$$Pz_1 = \frac{1}{3}ab^3c^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(c^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}}.$$

Die noch übrigen Integrale sind vollständige elliptische Integrale dritter Art, die sich bekanntlich auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zurückführen lassen.

Wenn zwei oder alle drei Halbachsen gleich werden, vereinfachen sich die für $P$, $Px_1$, $Py_1$, $Pz_1$ gefundenen Ausdrücke soweit, dass mindestens eines der betreffenden Integrale durch Logarithmen oder Kreisbögen dargestellt werden kann; bei dem abgeplatteten Rotationsellipsoid z. B., wo $b = a > c$, wird $\beta = 0$ und

$$P = \frac{1}{4}\pi a c \frac{Arcsin\,\gamma}{\gamma},$$

$$Px_1 = \frac{1}{3} a^3 c^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(a^2 cos^2\vartheta + c^2 sin^2\vartheta)^3}},$$

$$Py_1 = \frac{1}{3} a^3 c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 sin^2\vartheta + c^2 cos^2\vartheta}},$$

$$Pz_1 = \frac{1}{3} a^3 c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2\vartheta\, d\vartheta}{a^2 sin^2\vartheta + c^2 cos^2\vartheta} = \frac{1}{6}\pi \frac{a^2 c^2}{a+c},$$

mithin ist für den Schwerpunkt des halben Ellipsoides, der auf der $z$-Achse liegt,

$$z_1 = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{Arcsin\,\gamma} \frac{a c}{a+c}.$$

Aehnlich verhält es sich für das gestreckte Rotationsellipsoid; bei dem Kugeloctanten wird $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{1}{3}a$.

### Verschiedene Eigenschaften des Schwerpunktes.

**142.** Wir denken uns eine beliebige Anzahl von Körpern, deren Gewichte $p, p', p'' \ldots$ heissen und deren Schwerpunkte um die Strecken $\varrho, \varrho', \varrho'' \ldots$ vom Schwerpunkte des ganzen Körpersystemes entfernt sein mögen; wir nehmen ferner den letzteren Schwerpunkt zum Anfangspunkte dreier rechtwinkliger Achsen, mit denen die Geraden $\varrho, \varrho', \varrho'' \ldots$ der Reihe nach die Winkel $\alpha, \beta, \gamma,\ \alpha', \beta', \gamma' \ldots$ bilden, und wenden nun den Satz von den statischen Momenten in Beziehung auf die drei Coordinatenebenen an; er giebt hier, wo die drei Coordinaten des Schwerpunktes von dem ganzen Systeme $= 0$ sind,

$$\Sigma(p\,\varrho\, cos\,\alpha) = 0, \quad \Sigma(p\,\varrho\, cos\,\beta) = 0, \quad \Sigma(P\,\varrho\, cos\,\gamma) = 0.$$

Bringt man also im Schwerpunkte des Systemes Kräfte an, welche nach den Geraden $\varrho, \varrho', \varrho'' \ldots$ wirken und deren Intensitäten proportional den Produkten $p\varrho, p'\varrho', p''\varrho'' \ldots$ sind, so halten diese Kräfte einander das Gleichgewicht. Die Umkehrung dieses Satzes ist ohne Weiteres klar.

Bei gleichen Gewichten $p, p', p'' \ldots$ werden die Kräfte proportional den Abständen des Schwerpunktes des ganzen Systemes von den Schwerpunkten der einzelnen Theile.

143. Durch Addition der Quadrate der obigen drei Gleichungen erhalten wir

$$\Sigma(p^2\varrho^2) + 2\Sigma[pp'\varrho\varrho' \cos(\varrho\varrho')] = 0,$$

wo $(\varrho\varrho')$ den Winkel zwischen den Strecken $\varrho$ und $\varrho'$ bezeichnet; nennen wir ferner $r$ den Abstand der Schwerpunkte der Körper $p$ und $p'$, so ist

$$\varrho^2 + \varrho'^2 - 2p\,\varrho\varrho' \cos(\varrho\varrho') = r^2,$$

mithin durch Substitution in die vorige Gleichung

$$\Sigma(p^2\varrho^2) + \Sigma[pp'(\varrho^2 + \varrho'^2 - r^2)] = 0.$$

Hier lassen sich die mit $\varrho^2$ behafteten Glieder in den Ausdruck $p\varrho^2(p + p' + p'' + \ldots)$ zusammenziehen und auf ähnliche Weise auch die Glieder mit $\varrho'^2$, $\varrho''^2 \ldots$; setzt man daher das Gesammtgewicht des Systemes $p + p' + p'' + \ldots = P$, so wird aus der vorigen Gleichung

$$P\Sigma(p\varrho^2) = \Sigma(pp'r^2).$$

Bei $m$ gleichen Gewichten hat man noch einfacher

$$\Sigma r^2 = m\,\Sigma\varrho^2.$$

Der erwähnte Satz ist übrigens in einem allgemeineren enthalten, zu welchem die Annahme eines beliebigen Coordinatenanfanges führt. Bezeichnet nämlich $R$ die von letzterem Punkte nach dem Schwerpunkte des Systemes gezogene Gerade, und sind ferner $a$, $b$, $c$ die Winkel zwischen $R$ und den Coordinatenachsen, so giebt der Satz von den Momenten:

$$P R \cos a = \Sigma(p\varrho \cos\alpha),$$
$$P R \cos b = \Sigma(p\varrho \cos\beta),$$
$$P R \cos c = \Sigma(p\varrho \cos\gamma).$$

Durch Addition der Quadrate dieser Gleichungen und unter Beachtung des Umstandes, dass die rechten Seiten derselben mit den linken Seiten der früheren Gleichungen übereinstimmen, zieht man hieraus

$$P^2 R^2 = P\Sigma(p\varrho^2) - \Sigma(pp'r^2);$$

so lange in dieser Gleichung $R$ und alle mit $r$ bezeichneten Strecken constant bleiben, muss auch $\Sigma(p\varrho^2)$ denselben Werth behalten, die obige Gleichung führt daher zu dem Satze:

Wenn ein System von unveränderlicher Gestalt seinen Ort im Raume so ändert, dass der Abstand seines Schwerpunktes von einem bestimmten festen Punkte ungestört bleibt, so ändert sich auch die Summe der Produkte nicht, die aus dem Gewichte jedes Theiles und dem Quadrate der Entfernung seines Schwerpunktes von jenem festen Punkte gebildet sind.

Man bemerkt noch, dass $\Sigma(p\varrho^2)$ am kleinsten wird für $R=0$, d. h.

Die vorhin genannte Summe von Produkten erreicht ihren Minimalwerth, wenn der feste Punkt in den Schwerpunkt des Systemes fällt.

### Die Guldin'sche Regel.

144. Sind $x_0$ und $X$ die Abscissen der Endpunkte eines ebenen Curvenbogens $s$, so bestimmt sich die Ordinate des Schwerpunktes von $s$ durch die aus Nr. 117) bekannte Formel

$$sy_1 = \int_{x_0}^{X} y\,dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

lässt man denselben Bogen um die $x$-Achse rotiren, so beschreibt er eine Fläche, deren Inhalt $U$ durch die Formel

$$U = 2\pi\int_{x_0}^{X} y\,dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

gegeben ist; aus der Vergleichung beider Formeln ergiebt sich

$$U = 2\pi y_1 s,$$

d. h.

Der Inhalt der Rotationsfläche, welche ein ebener Curvenbogen bei Umdrehung um eine in seiner Ebene liegende Achse beschreibt, ist gleich dem Produkte aus der Länge des erzeugenden Bogens in die von seinem Schwerpunkte durchlaufene Kreisperipherie.

145. Eine ebene Fläche $S$ werde einerseits durch zwei in den Entfernungen $x_0$ und $X$ parallel zur $y$-Achse gelegte Gerade, andererseits durch zwei Curven begrenzt, deren zur Abscisse $x$ gehörende Ordinaten $y_0$ und $Y$ heissen mögen; die Ordinate des Schwerpunktes von $S$ ist dann nach Nr. 123 durch die Formel

$$Sy_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{X}(Y^2 - y_0^2)\,dx$$

bestimmt; lässt man ferner die Fläche $S$ um die $x$-Achse rotiren, so beschreibt sie einen Körper, dessen Volumen

$$V = \pi\int_{x_0}^{X}(Y^2 - y_0^2)\,dx$$

ist. Aus beiden Formeln zusammen ergiebt sich

$$V = 2\pi y_1 S,$$

d. h.

Der Inhalt des Rotationskörpers, den eine ebene Fläche bei Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende Achse beschreibt, ist gleich dem Produkte aus der erzeugenden Fläche in die von ihrem Schwerpunkte durchlaufene Kreisperipherie.

Diese beiden Sätze zusammen bilden die sogenannte Guldin-sche Regel, nach welcher man Complanationen von Umdrehungsflächen und Cubaturen von Rotationskörpern leicht ausführen kann sobald der Schwerpunkt der erzeugenden Curve oder Fläche ohne besondere Rechnung aus einfachen geometrischen Betrachtungen ermittelbar ist. Dreht sich z. B. eine aus den Halbachsen $a$ und $b$ construirte Ellipse um eine Gerade, die in ihrer Ebene enthalten und vom Mittelpunkte der Ellipse um $c$ entfernt ist, so weiss man unmittelbar, dass der Schwerpunkt der Ellipsenperipherie sowie der Ellipsenfläche mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt, und hat nun für die Oberfläche des entstandenen elliptischen Ringes

$$U = 2\pi c E,$$

wo $E$ den Umfang der Ellipse bedeutet, ferner für das Volumen des Ringes

$$V = 2\pi^2 abc.$$

146. Bei einer theilweisen Umdrehung sind die beschriebenen Flächen oder Volumina proportional dem Winkel, um welchen sich die erzeugende Curve oder Curvenfläche gedreht hat; daraus folgt, dass die Guldin'sche Regel auch für theilweise Rotationen gilt, wenn man statt des ganzen Kreisumfanges nur den vom Schwerpunkte durchlaufenen Kreisbogen in Rechnung bringt.

Dreht sich eine ebene Fläche der Reihe nach um mehrere

Achsen, so erhält man das erzeugte Volumen durch Multiplication des Inhaltes der bewegten Fläche mit der Summe der successiv von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Bögen. Hierbei kommt auf den Abstand der Drehungsachsen nichts an und daher bleibt der Satz auch bei unendlich kleinen Entfernungen der Achsen noch richtig, vorausgesetzt, dass letztere immer in der Ebene der bewegten Figur bleiben; in diesem Falle können zwei auf einander folgende Drehungsachsen ebensowohl parallel sein als sich schneiden.

Ein Beispiel hierzu giebt die Bewegung einer ebenen Figur, wenn diese immer normal auf einer bestimmten Plancurve bleibt, von letzterer immer in dem nämlichen Punkte getroffen wird, und wenn alle ihre Punkte Curven beschreiben, die jener Directrix parallel liegen. Die Bewegung besteht in diesem Falle aus einer stetigen Folge unendlich kleiner Drehungen, deren Mittelpunkte die Krümmungsmittelpunkte der Leitcurve sind; auch kann man sich die Bewegung so vorstellen, als wäre die erzeugende Planfigur erst um einen Cylinder herumgelegt gewesen, dessen Basis die Evolute der Directrix ist, und würde nachher abgewickelt. Der vorigen Bemerkung zufolge behält die Guldin'sche Regel ihre Gültigkeit auch für diesen Fall.

Dasselbe findet noch allgemeiner statt, wenn man eine Planfigur so fortbewegt, dass sie von einer gegebenen Curve doppelter Krümmung in immer demselben Punkte normal geschnitten wird und wenn man zu Achsen der auf einander folgenden Drehungen die Perpendikel nimmt, welche in den Krümmungsmittelpunkten der Directrix auf den entsprechenden osculirenden Ebenen derselben errichtet sind. Denn obschon die successiven Drehungsachsen sich in diesem Falle nicht schneiden, so verschwindet doch beim Uebergange zur Grenze der entstandene Fehler, weil die Entfernung zweier Nachbarachsen eine unendlich kleine Grösse von höherer als erster Ordnung ist. Man kann die genannte Bewegung dadurch veranschaulichen, dass man sich die Planfigur erst auf die Fläche gelegt denkt, welche den geometrischen Ort der successiven Drehungsachsen bildet, und nachher die Figur ohne Gleitung abwickelt. Bei diesen auf einander folgenden Drehungen beschreibt die Planfigur ein Volumen, welches, der Guldin'schen Regel zufolge, dem Produkte aus dem Inhalte der Figur in den Weg ihres Schwerpunktes gleichkommt. Der Satz modificirt sich jedoch in dem Falle, wo die erzeugende Fläche von den successiven Drehungsachsen geschnitten wird.

### Volumen des abgestumpften Cylinders.

147. Das Volumen $V$ eines abgestumpften Cylinders, dessen Grundfläche in der $xy$-Ebene liegt und dessen erzeugende Geraden senkrecht auf dieser Ebene stehen, wird ausgedrückt durch

$$V = \int\int z \, dx \, dy;$$

dabei ist $z$ die zu $x$ und $y$ gehörende dritte Coordinate eines Punktes $xyz$ der Ebene, und die Integrationsgrenzen bestimmen sich durch die Peripherie der gerad- oder krummlinig begrenzten Basis. Nennen wir $\varphi$ den Neigungswinkel der oberen Begrenzungsebene gegen die Grund- oder $xy$-Ebene, so ist $\frac{dx\,dy}{\cos\varphi}$ das Element der oberen Fläche, mithin deren Gesammtinhalt $= \frac{B}{\cos\varphi}$, wenn $B$ den Inhalt der Basis bezeichnet; ferner wird der Schwerpunkt der oberen Fläche durch die Formel

$$\frac{B}{\cos\varphi} z_1 = \int\int \frac{z\,dx\,dy}{\cos\varphi} \text{ oder } Bz_1 = \int\int z\,dx\,dy$$

bestimmt, woraus in Verbindung mit dem Vorigen $V = Bz_1$ folgt. Das Volumen ist also gleich dem Produkte aus der Basis in die Höhe des Schwerpunktes der oberen Fläche über der Basis.

Für die übrigen Coordinaten $x_1$ und $y_1$ des Schwerpunktes der oberen Begrenzungsebene hat man

$$\frac{B}{\cos\varphi} x_1 = \int\int \frac{x\,dx\,dy}{\cos\varphi} \text{ oder } Bx_1 = \int\int x\,dx\,dy,$$

$$\frac{B}{\cos\varphi} y_1 = \int\int \frac{y\,dx\,dy}{\cos\varphi} \text{ oder } By_1 = \int\int y\,dx\,dy;$$

die Formeln rechter Hand sind ganz dieselben, als wenn es sich um den Schwerpunkt der Basis handelte, folglich liegen die Schwerpunkte der beiden Begrenzungsebenen in einer und derselben Senkrechten auf der Basis.

Einen abgestumpften Cylinder, dessen erzeugende Gerade schief gegen beide Begrenzungsebenen gerichtet sind, kann man als den Unterschied zweier Cylinder ansehen, welche den Normalquerschnitt zur gemeinschaftlichen Basis haben; die Differenz der beiden Perpendikel von den Schwerpunkten der Begrenzungsebenen des ursprünglichen Cylinders auf die gemeinsame Basis der neuen Cylinder ist nichts Anderes als die Verbindungslinie jener Schwerpunkte. Daraus folgt der Satz:

Das Volumen eines beliebigen abgestumpften Cylinders ist gleich dem Produkte aus dem Normalquerschnitte des Körpers in die Verbindungslinie der Schwerpunkte seiner Begrenzungsebenen.

Man kann dieses Theorem auf einen anderen Ausdruck bringen, wenn man berücksichtigt, dass das Verhältniss des Normalschnittes zu einer der Begrenzungsebenen gleich ist dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Ebenen oder gleich dem Sinus des Winkels zwischen einer erzeugenden Geraden und jener ersten Begrenzungsebene, oder endlich gleich dem Verhältnisse, in welchem der Abstand des Schwerpunktes der zweiten Begrenzungsebene von der ersten zur Entfernung beider Schwerpunkte steht. Der Satz lautet nunmehr:

Das Volumen eines abgestumpften Cylinders ist gleich dem Produkte aus der einen Begrenzungsebene in das Perpendikel vom Schwerpunkte der zweiten Begrenzungsebene auf jene erste Ebene.

## Elftes Capitel.

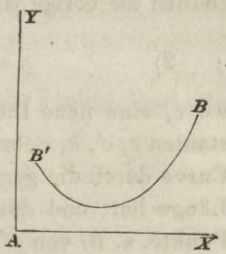
# Theorie der Ketten- und Kettenbrückenlinien.

---

### Die gemeine Kettenlinie.

148. Ein vollkommen biegsamer und unausdehnbarer Faden der mit seinen Enden an zwei festen Punkten $B$ und $B'$ aufgehangen und nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist, bildet eine gewisse Curve die sogen. gemeine Kettenlinie; wegen des Parallelismus aller Kräfte liegt sie in der durch die Aufhängepunkte gehenden Verticalebene. In derselben Ebene nehmen wir zwei rechtwinklige Coordinatenachsen $AX$, $AY$, die letztere vertical und der Richtung der Schwere entgegengesetzt; wir sehen ferner den Faden als homogen an und bezeichnen mit $\mu$ das Gewicht seiner Längeneinheit, woraus folgt, dass $\mu s$ das Gewicht des Bogens $s$ ist; die in Nr. 91 mit $X$ und $Y$ bezeichneten Kräfte sind nunmehr

Fig. 36.




$$X = 0, \quad Y = -\mu,$$

und folglich haben wir als Gleichungen des Gleichgewichts;

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \mu\, ds = 0.$$

Daraus ergeben sich zunächst die Gleichungen

$$1) \qquad T\frac{dx}{ds} = c, \quad T\frac{dy}{ds} = \mu s + cc', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{c} s + c',$$

worin $c$ und $c'$ willkührliche Constanten bedeuten. Die erste dieser Gleichungen sagt, dass die horizontale Componente der Spannung $T$ in allen Punkten dieselbe ist.

Durch Differenziation der letzten Gleichung erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{c}\frac{ds}{dx} = \frac{\mu}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder auch, wenn $\frac{dy}{dx}$ wie gewöhnlich mit $y'$ bezeichnet wird,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\mu}{c} \sqrt{1 + y'^2}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung giebt

$$l(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \frac{\mu}{c} x + k,$$

wo $k$ die Integrationsconstante bedeutet; ferner ist

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = e^{\frac{\mu}{c} x + k},$$

und durch Auflösung dieser Gleichung und Restitution des Werthes von $y'$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} \left( e^{\frac{\mu x}{c} + k} - e^{-\frac{\mu x}{c} - k} \right)$$

Die dritte der Gleichungen 1) giebt jetzt

$$s = \frac{c}{2\mu} \left( e^{\frac{\mu x}{c} + k} - e^{-\frac{\mu x}{c} - k} \right) - \frac{cc'}{\mu},$$

endlich die vorige Gleichung durch Integration

$$2) \qquad y = \frac{c}{2\mu} \left( e^{\frac{\mu x}{c} + k} + e^{-\frac{\mu x}{c} - k} \right) + c_1,$$

wo $c_1$ eine neue Integrationsconstante bezeichnet. Die vier Constanten $c$, $c'$, $k$, $c_1$ bestimmen sich durch die Bedingungen, dass die Curve durch die gegebenen Punkte $B'$ und $B$ geht, eine bestimmte Länge hat, und dass ferner der Bogen $s$ von einem bestimmten Punkte, z. B. von $B'$ aus gezählt wird.

Nehmen wir der Einfachheit wegen $B'$ zum Coordinatenanfang, bezeichnen die Coordinaten von $B$ mit $a$ und $b$, sowie mit $L$ die Länge des Fadens, so erhalten wir für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = a$, $y = b$ zunächst folgende Bedingungsgleichungen:

$$\frac{c}{2\mu} \left( e^k + e^{-k} \right) + c_1 = 0, \qquad b = \frac{c}{2\mu} \left( e^{\frac{\mu a}{c} + k} + e^{-\frac{\mu a}{c} - k} \right)$$

daher

$$3) \qquad b = \frac{c}{2\mu} \left( e^{\frac{\mu a}{c} + k} + e^{-\frac{\mu a}{c} - k} - e^k - e^{-k} \right)$$

Die Gleichung, welche sagt, dass $s$ mit $x$ gleichzeitig verschwindet, ist

$$e^k - e^{-k} = 2c',$$

und damit endlich $s = L$ werde für $x = a$ muss noch die Gleichung

$$L = \frac{c}{2\mu}\left(e^{\frac{\mu a}{c}+k} - e^{-\frac{\mu a}{c}-k}\right) - \frac{cc'}{\mu}$$

stattfinden. Diese verwandelt sich durch Substitution des vorigen Werthes von $c'$ in

$$4)\qquad L = \frac{c}{2\mu}\left(e^{\frac{\mu a}{c}+k} - e^{-\frac{\mu a}{c}-k} - e^{k} + e^{-k}\right);$$

und wenn man die Gleichungen 3) und 4) einmal durch Addition, das andere Mal durch Subtraction verbindet, so erhält man

$$L + b = \frac{c}{\mu}e^{k}\left(e^{\frac{\mu a}{c}} - 1\right),\quad L - b = \frac{c}{\mu}e^{-k}\left(1 - e^{-\frac{\mu a}{c}}\right);$$

aus diesen Gleichungen eliminirt man $k$ durch Multiplication und gelangt damit zu einer Gleichung, welche nur $c$ enthält. Nach Ausziehung der Quadratwurzel ist dieselbe

$$\mu\sqrt{L^2 - b^2} = c\left(e^{\frac{\mu a}{2c}} - e^{-\frac{\mu a}{2c}}\right)$$

oder wenn $\frac{\mu a}{2c} = \zeta$ gesetzt wird

$$\frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{\zeta} = \frac{2\sqrt{L^2 - b^2}}{a}$$

Der Werth von $\zeta$, welcher dieser Gleichung genügt, lässt sich entweder aus dem Durchschnitte der Curve

$$\eta = e^{\zeta} - e^{-\zeta}$$

mit der Geraden

$$\eta = \frac{2\sqrt{L^2 - b^2}}{a}\zeta$$

herleiten oder auch durch successive Substitutionen und Correctionen ermitteln. Kennt man $\zeta$ mithin auch

$$c = \frac{\mu a}{2\zeta},$$

so findet man $k$ mittelst einer der beiden Gleichungen für $L \pm b$ oder noch besser aus der Gleichung, welche sich ergiebt, wenn man die beiden erwähnten Gleichungen dividirt und die Logarithmen nimmt, nämlich

$$k = \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{L+b}{L-b}\right) - \zeta;$$

ferner erhält man $c'$ aus der Gleichung

$$c' = \tfrac{1}{2}\left(e^{k} - e^{-k}\right),$$

endlich $c_1$ mittelst der Formel

$$c_1 = -\frac{c}{2\mu}\left(e^k + e^{-k}\right).$$

Nachdem die Constanten bestimmt sind, hat es keine Schwierigkeit die Coordinaten des tiefsten Curvenpunktes zu bestimmen; für diesen ist nämlich

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } \frac{\mu x}{c} + k = -\frac{\mu x}{c} - k, \text{ folglich } x = -\frac{ck}{\mu}.$$

Legen wir die Achse der $y$ durch diesen Punkt, so haben wir $x - \frac{ck}{\mu}$ an die Stelle von $x$ zu setzen und es wird dann aus Nr. 2)

$$y = \frac{c}{2\mu}\left(e^{\frac{\mu x}{c}} + e^{-\frac{\mu x}{c}}\right) + c_1;$$

die rechte Seite bleibt für positive und negative $x$ dieselbe, mithin liegt die Kettenlinie symmetrisch zu beiden Seiten der Verticalen durch den tiefsten Punkt. Um endlich den Anfangspunkt neuer Coordinaten in den tiefsten Punkt zu bringen, haben wir $y + c_1$ für $y$ zu setzen, dies giebt, wenn gleichzeitig $m$ zur Abkürzung für $\frac{c}{\mu}$ dient

5) $$y = \tfrac{1}{2} m \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Wenn die Punkte $B$ und $B'$ in derselben Horizontalen liegen, ist $b = 0$ und die zur Bestimmung der Constanten dienenden Formeln werden dann einfacher

$$\frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{\zeta} = \frac{2L}{a}, \quad c = \frac{\mu a}{2\zeta}, \quad k = -\zeta,$$

$$c' = \tfrac{1}{2}\left(e^k - e^{-k}\right) = -\frac{\zeta L}{a}.$$

149. Die Kettenlinie, deren Gleichung in 5) gegeben ist, besitzt verschiedene merkwürdige geometrische Eigenschaften, deren Entwickelung aber nicht hierher gehört; wir erwähnen nur die Formeln:

$$tan\, \tau = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m},$$

$$N = R = \frac{y^2}{m} = m\, sec^2 \tau,$$

$$s = m\, tan\, \tau = \sqrt{y^2 - m^2},$$

$$S = m^2\, tan\, \tau = m\sqrt{y^2 - m^2},$$

in denen $\tau$ den Neigungswinkel der Tangente im Punkte $xy$ gegen den Horizont bezeichnet, $N$ die Normale, $R$ den Krümmungshalbmesser in diesem Punkte, $s$ den vom tiefsten Punkte bis zum Punkte $xy$ gerechneten Bogen, $S$ die über der Abscisse $x$ stehende Fläche der Curve. Endlich besitzt die Kettenlinie noch die Eigenthümlichkeit, dass ihr Schwerpunkt tiefer liegt als der Schwerpunkt jeder anderen gleich langen Curve zwischen denselben Endpunkten; auch hiervon übergehen wir den Beweis, da er in jedem Lehrbuche der Variationsrechnung zu finden ist.

150. Obschon im Vorigen bereits einige Mittel zur Auflösung der transcendenten Gleichung

$$\frac{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}{\zeta}=\frac{2\sqrt{L^2-b^2}}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}\zeta=\frac{a}{\sqrt{L^2-b^2}}$$

angedeutet sind, so dürfte es doch nicht überflüssig sein, die einfachste Auflösungsmethode anzugeben, welche auf einer blossen Interpolation beruht. Führt man nämlich einen Hilfswinkel $\Theta$ ein, indem man

$$\frac{2}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}=\tan\Theta \quad \text{oder} \quad \frac{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}{2}=\cot\Theta$$

setzt, so findet sich

$$\frac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{2}=\sqrt{1+\cot^2\Theta}=\frac{1}{\sin\Theta},$$

und durch Addition der beiden Gleichungen

$$e^{\zeta}=\frac{\cos\Theta+1}{\sin\Theta}=\cot\tfrac{1}{2}\Theta, \text{ woraus } \zeta=l\cot\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Die fragliche Gleichung lautet jetzt

$$\tan\Theta\,.\,l\cot\tfrac{1}{2}\Theta=\frac{a}{\sqrt{L^2-b^2}},$$

und dabei ist die rechte Seite ein ächter Bruch, weil der Bogen $L$ mehr als seine Sehne $\sqrt{a^2+b^2}$ betragen muss, wenn überhaupt die Aufgabe möglich sein soll. Die Werthe von $\tan\Theta . l\cot\frac{1}{2}\Theta$ sind in folgender Tafel zusammengestellt.

| $\Theta$ | $tg\,\Theta\,.\,l\,ct\,\frac{1}{2}\Theta$ | $\Theta$ | $tg\,\Theta\,.\,l\,ct\,\frac{1}{2}\Theta$ | $\Theta$ | $tg\,\Theta\,.\,l\,ct\,\frac{1}{2}\Theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0,000 0000 | | | | |
| $1^0$ | 0,082 7605 | $31^0$ | 0,770 6440 | $61^0$ | 0,954 7970 |
| $2^0$ | 0,141 3637 | $32^0$ | 0,780 5621 | $62^0$ | 0,958 0277 |
| $3^0$ | 0,190 8971 | $33^0$ | 0,790 1180 | $63^0$ | 0,961 1207 |
| $4^0$ | 0,234 5816 | $34^0$ | 0,799 3269 | $64^0$ | 0,964 0789 |
| $5^0$ | 0,273 9534 | $35^0$ | 0,808 1834 | $65^0$ | 0,966 9054 |
| $6^0$ | 0,309 9209 | $36^0$ | 0,816 7626 | $66^0$ | 0,969 6020 |
| $7^0$ | 0,343 0870 | $37^0$ | 0,825 0162 | $67^0$ | 0,972 1722 |
| $8^0$ | 0,373 8817 | $38^0$ | 0,832 9766 | $68^0$ | 0,974 6174 |
| $9^0$ | 0,402 6276 | $39^0$ | 0,840 6560 | $69^0$ | 0,976 9402 |
| $10^0$ | 0,424 5760 | $40^0$ | 0,848 0640 | $70^0$ | 0,979 1419 |
| $11^0$ | 0,454 9278 | $41^0$ | 0,855 2110 | $71^0$ | 0,981 2250 |
| $12^0$ | 0,478 8481 | $42^0$ | 0,862 1070 | $72^0$ | 0,983 1919 |
| $13^0$ | 0,501 4738 | $43^0$ | 0,868 7606 | $73^0$ | 0,985 0420 |
| $14^0$ | 0,522 9216 | $44^0$ | 0,875 1800 | $74^0$ | 0,986 7800 |
| $15^0$ | 0,543 2910 | $45^0$ | 0,881 3736 | $75^0$ | 0,988 4044 |
| $16^0$ | 0,562 6683 | $46^0$ | 0,887 3486 | $76^0$ | 0,989 9190 |
| $17^0$ | 0,581 1289 | $47^0$ | 0,893 1120 | $77^0$ | 0,991 3230 |
| $18^0$ | 0,598 7393 | $48^0$ | 0,898 6714 | $78^0$ | 0,992 6192 |
| $19^0$ | 0,615 5587 | $49^0$ | 0,904 0318 | $79^0$ | 0,993 8070 |
| $20^0$ | 0,631 6396 | $50^0$ | 0,909 2008 | $80^0$ | 0,994 8897 |
| $21^0$ | 0,647 0293 | $51^0$ | 0,914 1824 | $81^0$ | 0,995 8632 |
| $22^0$ | 0,661 7701 | $52^0$ | 0,918 9828 | $82^0$ | 0,996 7367 |
| $23^0$ | 0,675 9013 | $53^0$ | 0,923 6072 | $83^0$ | 0,997 5047 |
| $24^0$ | 0,689 4576 | $54^0$ | 0,928 0606 | $84^0$ | 0,998 1689 |
| $25^0$ | 0,702 4710 | $55^0$ | 0,932 3472 | $85^0$ | 0,998 7277 |
| $26^0$ | 0,714 9713 | $56^0$ | 0,936 4720 | $86^0$ | 0,999 1860 |
| $27^0$ | 0,726 9850 | $57^0$ | 0,940 4379 | $87^0$ | 0,999 5426 |
| $28^0$ | 0,738 5717 | $58^0$ | 0,944 2500 | $88^0$ | 0,999 7957 |
| $29^0$ | 0,749 6504 | $59^0$ | 0,947 9120 | $89^0$ | 0,999 9552 |
| $30^0$ | 0,760 3460 | $60^0$ | 0,951 4259 | $90^0$ | 1,000 0000 |

Geht man mit dem gegebenen Werthe von $\frac{a}{\sqrt{L^2-b^2}}$ in diese Tafel ein, so erhält man $\Theta$ durch Interpolation und nachher $\zeta = l\,cot\,\frac{1}{2}\Theta = 2,3026\ log\ cot\,\frac{1}{2}\Theta$.

## Die gleichgespannte Kettenlinie.

151. Bei der vorigen Untersuchung wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass der zwischen zwei gegebenen Punkten aufgehangene Faden überall gleichen Querschnitt besitze; anders aber gestaltet sich die Sache, wenn der Querschnitt von Punkt zu Punkt veränderlich, also auch das Gewicht $\mu$ der Längeneinheit verschieden ist, je nachdem man sich diese Länge verschiedenen Theilen des Fadens entnommen denkt. Um möglichst einfache Formeln zu erhalten, legen wir die Coordinatenachsen durch den tiefsten Punkt der Curve und zwar die $x$-Achse horizontal; ferner nennen wir $q_0$ den Querschnitt des Fadens im Scheitel, $q$ den Querschnitt im Punkte $xy$, $T_0$ die Spannung im tiefsten Punkte, $T$ die Spannung im Punkte $xy$, endlich $\gamma$ das Gewicht der Volumeneinheit der homogen vorausgesetzten Fadensubstanz. Das Gewicht des Fadenelementes $ds$ ist jetzt $\gamma\, q\, ds$ statt des früheren $\mu\, ds$ und dabei haben wir $q$ als veränderliche Grösse anzusehen. Wäre das Gesetz gegeben, nach welchem sich der Querschnitt ändert, so würde $q$ eine bekannte Funktion von $s$ sein und man hätte diesem Umstande bei Integration der Gleichungen

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\gamma\, q\, ds$$

Rechnung zu tragen. — Von grösserem Interesse ist es aber, das Aenderungsgesetz des Querschnittes einstweilen als unbekannt anzusehen und es aus der Bedingung zu bestimmen, dass die auf die Flächeneinheit des Querschnittes fallende Spannung in allen Punkten dieselbe sein soll, oder, was Dasselbe ist, dass der Querschnitt in demselben Verhältnisse wie die Spannung wachsen soll, wenn man vom Scheitel nach den Aufhängepunkten zu fortschreitet. Dieser Bedingung entsprechend muss an jeder Stelle

$$1)\qquad \frac{T}{q}=\frac{T_0}{q_0} \quad \text{oder} \quad q=\frac{q_0}{T_0}\,T$$

sein und die obigen Differentialgleichungen sind daher:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\frac{\gamma\, q_0}{T_0}\,T\, ds.$$

Die erste Gleichung giebt

$$T\frac{dx}{ds}=c \quad \text{oder} \quad T=c\,\frac{ds}{dx};$$

hier bestimmt sich die Constante $c$ durch die Bemerkung, dass im tiefsten Punkte $T = T_0$ und $\frac{dx}{ds} = 1$ wird; es ist daher $T_0 = c$ und

2) $$T = T_0 \frac{ds}{dx}.$$

Nach Substitution dieses Werthes in die zweite Gleichung geht letztere über in

$$T_0\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \gamma q_0 \frac{ds^2}{dx} = \gamma q_0 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx$$

oder

$$\frac{T_0\, dy'}{1 + y'^2} = \gamma q_0\, dx;$$

man zieht hieraus

$$T_0\, Arctan\, y' = \gamma q_0\, x,$$

wo keine Integrationsconstante beizufügen ist, weil für $x = 0$ auch $y'$ verschwindet. Reducirt man die vorstehende Gleichung auf $y' = \frac{dy}{dx}$, so ist weiter

$$\frac{dy}{dx} = tan \frac{\gamma q_0 x}{T_0}$$

und durch Integration

3) $$y = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{\gamma q_0 x}{T_0};$$

auch hier bedarf es keiner Integrationsconstante, da $x$ und $y$ gleichzeitig zu Null werden.

Kennt man $q_0$ und $T_0$ — ihre Bestimmung wird gleich nachher gezeigt werden — so lehrt die Gleichung 3) die Gestalt der Linie kennen; die Formel 2) wird

4) $$T = T_0 \sec \frac{\gamma q_0 x}{T_0}$$

und bestimmt die Spannung im Punkte $xy$, endlich giebt die erste Gleichung

5) $$q = q_0 \sec \frac{\gamma q_0 x}{T_0}.$$

Aus der Gleichung 3) geht hervor, dass die sogenannte g l e i c h g e s p a n n t e Kettenlinie eine Curve ist, die von der $y$-Achse in zwei congruente Zweige getheilt wird. Soll dieselbe ausser durch den Coordinatenanfang noch durch einen zweiten

Punkt gehen, dessen Coordinaten $a$ und $b$ heissen mögen, so muss die Gleichung

$$b = \frac{T_0}{\gamma q_0}\, l \sec \frac{\gamma q_0 a}{T_0}$$

stattfinden, wofür wir schreiben

$$\frac{b}{a} = \frac{l \sec \omega}{\omega}, \qquad \omega = \frac{\gamma q_0 a}{T_0}.$$

Durch Auflösung dieser transcendenten Gleichung erhält man $\omega$, nachher

$$\frac{q_0}{T_0} = \frac{\omega}{a \gamma},$$

wo nun eine der Grössen $q_0$ und $T_0$ willkührlich bleibt. Fügt man noch die Bedingung hinzu, dass der von $x = 0$ bis $x = a$ reichende Faden ein gegebenes Gewicht $\Gamma$ haben soll, so wird die Aufgabe völlig bestimmt. Das Gewicht eines Fadenelementes ist nämlich

$$\gamma q \,.\, ds = \gamma q_0 \sec \frac{\gamma q_0 x}{T_0} \,.\, \sec \frac{\gamma q_0 x}{T_0}\, dx,$$

mithin

$$\Gamma = \gamma q_0 \int_0^a \sec^2 \frac{\gamma q_0 x}{T_0}\, dx = T_0 \tan \frac{\gamma q_0 a}{T_0} = T_0 \tan \omega;$$

hieraus ergiebt sich

$$T_0 = \Gamma \cot \omega$$

und nachher

$$q_0 = \frac{\Gamma}{a \gamma}\, \omega \cot \omega.$$

## Die gemeine Kettenbrückenlinie.

152. Denken wir uns einen gewichtlosen Faden als Träger einer horizontal gleichförmig verbreiteten Last mithin die vertikale auf das Fadenelement $ds$ wirkende Kraft nicht proportional $ds$ sondern proportional $dx$, so erhält der Faden eine andere Gestalt, welche mit der Form der Tragkette einer Hängebrücke übereinstimmen würde, wenn es erlaubt wäre, das Gewicht der Kette als verschwindend klein gegen das Gewicht der Fahrbahn zu betrachten.

Das Gewicht eines der Längeneinheit gleichkommenden Stückes der angehangenen Last sei $\mu$ mithin $\mu\, dx$ das von dem Bogenelemente $ds$ zu tragende Gewicht; die auf das Fadenelement

$ds$ wirkende Kraft $Y\,ds$ ist dann $= -\mu\,dx$, und folglich sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \mu\,dx = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$T\frac{dx}{ds} = c, \quad T\frac{dy}{ds} = \mu x + c c_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{c}x + c_1,$$

worin $c$ und $c_1$ beliebige Constanten bedeuten.

Die erste Gleichung zeigt, das auch im vorliegenden Falle die Horizontalcomponente der Spannung in allen Punkten dieselbe ist; die letzte Gleichung giebt durch Integration und unter der Voraussetzung, dass einer der Aufhängepunkte zum Coordinatenanfang genommen wird,

1) $$y = \frac{\mu}{2c}x^2 + c_1 x.$$

Der Faden hat demnach die Gestalt einer Parabel mit vertikaler Achse.

Die Constanten $c$ und $c_1$ bestimmen sich durch die Bedingung, dass der Faden noch durch einen zweiten festen Punkt geht und zwischen beiden Aufhängepunkten eine gegebene Länge hat. Nehmen wir z. B. an, dass sich die Aufhängepunkte in einer und derselben Horizontalen befinden, dass ihr Abstand $= 2a$, und die Länge des Fadens $= L$ sei, so haben wir erstens für $x = 2a$ und $y = 0$

$$0 = \frac{\mu}{2c}(2a)^2 + c_1\,2a,$$

mithin

$$c_1 = -\frac{\mu\,a}{c}$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in Nr. 1)

$$y = \frac{\mu}{2c}(x^2 - 2ax)$$

oder auch, wenn wir den Coordinatenanfang in die Mitte zwischen beide Aufhängepunkte legen, d. h. $x - a$ für $x$ setzen,

2) $$y = \frac{\mu}{2c}(x^2 - a^2).$$

Ferner haben wir

$$L = 2\int_0^a dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{2\mu}{c}\int_0^a dx \sqrt{\frac{c^2}{\mu^2}+x^2}$$

$$= a\sqrt{1+\frac{\mu^2 a^2}{c^2}} + \frac{c}{\mu}\, l\left(\frac{\mu a}{c} + \sqrt{1+\frac{\mu^2 a^2}{c^2}}\right),$$

und finden aus dieser Gleichung $c$ sowie nachher $c_1$.

Bei scharfgespanntem Faden, d. h. wenn $L$ nicht viel mehr als $2a$ beträgt mithin $\frac{\mu a}{c}$ ein kleiner Bruch ist, kann man die auf der rechten Seite der vorigen Gleichung stehenden Ausdrücke in stark convergirende Reihen entwickeln und daraus einen Näherungswerth für $c$ ableiten. Unter Benutzung der Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1+z^2} &= 1 + \tfrac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2\,.\,4} z^4 + \dots \\ l(z+\sqrt{1+z^2}) &= \frac{z}{1} - \tfrac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{z^5}{5} - \dots \end{aligned}\right\} 1 > z > -1$$

erhält man nämlich

$$L = 2a + \tfrac{1}{3}\frac{\mu^2 a^3}{c^2} + \dots$$

mithin näherungsweis

$$c = \frac{\mu a \sqrt{a}}{\sqrt{3L - 2a}}.$$

153. Bei Hängebrücken sind die Lasten nicht stetig längs der ganzen Kette vertheilt sondern an einzelnen Punkten angehangen, deren Horizontalprojectionen in gleichen Entfernungen liegen. Denken wir uns die tiefste Seite des Kettenpolygones horizontal und nehmen ihren Mittelpunkt zum Coordinatenanfang, nennen wir ferner $x$ und $y$ die Coordinaten des Anfangspunktes einer Seite, $x + \varDelta x$ und $y + \varDelta y$ die Coordinaten ihres Endpunktes, endlich $\alpha$ den Neigungswinkel dieser Seite gegen den Horizont, so haben wir nach Nr. 90)

$$T \cos\alpha = Const., \quad T \sin\alpha = \mu\,(x + \tfrac{1}{2}\varDelta x)$$

und wenn wir noch $k$ statt $Const.$ schreiben

$$\tan\alpha = \frac{\mu(x + \frac{1}{2}\varDelta x)}{k}.$$

Andererseits ist

$$\tan\alpha = \frac{\varDelta y}{\varDelta x},$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von $\tan\alpha$

$$\varDelta y = \frac{\mu}{k}(x + \tfrac{1}{2}\varDelta x)\,\varDelta x$$

und durch endliche Integration

$$y = \frac{\mu}{2k}x^2 + c.$$

Für $x = \frac{1}{2}\varDelta x$ wird $y = 0$, folglich $c = -\frac{\mu}{8k}(\varDelta x)^2$ und

$$y = \frac{\mu}{2k}\left[x^2 - \tfrac{1}{4}(\varDelta x)^2\right].$$

Die Ecken des Kettenpolygones liegen demnach auf einer Parabel, deren Achse vertikal durch die Mitte der horizontalen Seite geht. Dieser Satz ist leicht auf den Fall auszudehnen, wo keine horizontale Seite vorkommt.

Man darf indessen nicht übersehen, dass auch dieses Resultat nur soweit gilt, als man das Gewicht der Kette gegen das der Fahrbahn vernachlässigen darf.

## Die gleichgespannte Kettenbrückenlinie.

154. Will man die in Nr. 152 behandelte Aufgabe genauer nehmen, so muss man das eigene Gewicht der Tragkette und zugleich die Möglichkeit eines etwaigen veränderlichen Querschnittes derselben berücksichtigen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Unter Beibehaltung desselben Coordinatensystemes und der nämlichen Bezeichnung wie in Nr. 151 nennen wir $G$ das Gewicht der Längeneinheit der Belastung; auf das Kettenelement $ds$ wirken jetzt zwei Kräfte, nämlich sein eigenes Gewicht $\gamma\, q\, ds$ und das Gewicht $G\,dx$ desjenigen Theiles der Fahrbahn etc., welchen das Kettenelement zu tragen hat. In den allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0$$

ist daher

$$X = 0, \quad Y = -(\gamma\, q\, ds + G\,dx)$$

zu setzen und diess giebt

$$1)\qquad d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\gamma\, q\, ds+G\, dx$$

als Gleichgewichtsbedingungen für die belastete Kette. Die erste Gleichung liefert

$$T\frac{dx}{ds}=c \text{ oder } T=c\frac{ds}{dx};$$

es ist also auch im vorliegende Falle die Horizontalcomponente der Spannung immer dieselbe nämlich gleich der Spannung im Scheitel, die wir, wie früher, mit $T_0$ bezeichnen, so dass

$$2)\qquad T=T_0\frac{ds}{dx}.$$

Die zweite Gleichung in 1) wird durch Substitution dieses Werthes

$$T_0\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\gamma\, q\, ds+G\, dx$$

oder für $\frac{dy}{dx}=y'$

$$T_0\, dy'=(\gamma\, q\sqrt{1+y'^2}+G)\, dx,$$

und daraus folgt durch Sonderung der Variabelen und Integration

$$3)\qquad T_0\int\frac{dy'}{G+\gamma\, q\sqrt{1+y'^2}}=x+Const.$$

Für die weiteren Schritte der Rechnung ist nun zu unterscheiden, ob der Querschnitt $q$ constant bleibt oder sich ändert. Im ersten Falle hat die Ausführung der angedeuteten Integrationen zwar keine Schwierigkeit, aber die nachfolgenden Operationen werden sehr unbequem. Aus der nach geschehener Integration übrig bleibenden Gleichung würde nämlich $y'$ als Funktion von $x$ zu entwickeln und durch nochmalige Integration die endliche Gleichung der Kettenbrückenlinie herzuleiten sein; von diesen Operationen ist aber die erste (die Reduction auf $y'$) ohne unendliche Reihen nicht ausführbar weil der Werth des in Nr. 3 verzeichneten Integrales Potenzen und Logarithmen von $y'$ zugleich enthält. Man begnügt sich daher gewöhnlich mit Näherungen indem man entweder $q\sqrt{1+y'^2}$ ganz und gar gegen $G$ vernachlässigt, wodurch man auf die Resultate von Nr. 152 zurückkommt, oder indem man bei scharf gespannten Ketten $y'^2$ gegen 1 weglässt, oder endlich etwas genauer $\sqrt{1+y'^2}$ durch $1+\frac{1}{2}y'^2$ ersetzt.

155. Viel einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man der Kette einen in der Weise veränderlichen Querschnitt giebt, dass die auf

die Flächeneinheit des Querschnittes fallende Spannung $\frac{T}{q}$ überall dieselbe also $= \frac{T_0}{q_0}$ ist, wo $q_0$ den Scheitelquerschnitt der Kette bezeichnet. Es wird dann

$$4)\qquad q = \frac{q_0}{T_0}\, T = q_0 \frac{ds}{dx} = q_0\sqrt{1+y'^2}$$

und hierdurch geht die Gleichung 3) über in

$$\int \frac{dy'}{G+\gamma q_0 (1+y'^2)} = x + Const.$$

d. i. bei Ausführung der Integration

$$\frac{T_0}{\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}\, Arctan \frac{y'\sqrt{\gamma q_0}}{\sqrt{G+\gamma q_0}} = x + Const.$$

Da der Coordinatenanfang im tiefsten Punkte liegt, verschwinden $x$ und $y'$ gleichzeitig, mithin ist $Const. = 0$. Aus der vorstehenden Gleichung folgt weiter

$$5)\qquad y' = \sqrt{\frac{G+\gamma q_0}{\gamma q_0}} . tan \frac{x\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0},$$

und durch Multiplikation mit $dx$ und nochmalige Integration

$$6)\qquad y = \frac{T_0}{\gamma q_0}\, l\, sec \frac{x\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0},$$

wo keine Integrationsconstante hinzuzufügen ist, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ werden muss. Die vorstehende Gleichung, welche man unter der einfachen Form

$$y = k\, l\, sec \frac{x}{m}$$

$$k = \frac{T_0}{\gamma q_0}, \quad m = \frac{T_0}{\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}$$

darstellen kann, enthält zwei constante Grössen $T_0$ und $q_0$ (oder $k$ und $m$), die sich aus den Nebenbedingungen der Aufgabe bestimmen lassen. Diese Nebenbedingungen wollen wir so wählen, wie sie bei der Construction einer Hängebrücke zu erfüllen sein würden.

156. Wir setzen erstens fest, das die Curve durch einen Punkt gehen soll, dessen Abscisse $a$ und dessen Ordinate $b$ gegeben sind ($a$ ist dann die halbe Spannweite, $b$ der Pfeil der Kettenbrückenlinie); diess giebt

$$b = \frac{T_0}{\gamma q_0}\, l\, sec \frac{a\sqrt{\gamma q_0 (G+\gamma q_0)}}{T_0}.$$

Wenn zweitens verlangt wird, dass die Kette überall die $n$-fache Sicherheit darbiete, so muss die auf die Flächeneinheit des Querschnittes fallende Spannung $\frac{T}{q} = \frac{T_0}{q_0}$ der $n$te Theil von der absoluten Festigkeit des Kettenmateriales sein; letztere sei $F$ und $\frac{F}{n} = f$, so ist die zweite Bedingung

$$\frac{T_0}{q_0} = f \text{ oder } T_0 = q_0 f.$$

Um aus den beiden Bedingungsgleichungen die Unbekannten $q_0$ und $T_0$ zu finden, substituiren wir den Werth $T_0 = q_0 f$ in die erste Gleichung und erhalten

$$\frac{b\gamma}{f} = l \sec \frac{a\sqrt{\gamma\, q_0 (G + \gamma\, q_0)}}{q_0 f};$$

hieraus ergiebt sich erst ein Hilfswinkel $\Theta$ nach der Formel

$$7) \qquad l \sec \Theta = \frac{b\gamma}{f},$$

nachher

$$8) \qquad q_0 = \frac{\frac{G}{\gamma}}{\left(\frac{\Theta f}{\gamma\, a}\right)^2 - 1} \text{ und } T_0 = q_0 f,$$

womit die gesuchten Grössen bestimmt sind. Für die Grössen $k$ und $m$ hat man

$$9) \qquad k = \frac{f}{\gamma}, \quad m = \frac{a}{\Theta};$$

und die ganze Rechnung geht dann nach den Formeln

$$10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = k\, l \sec \frac{x}{m}, \quad \tan \tau = \frac{k}{m} \tan \frac{x}{m}, \\ q = q_0 \sec \tau, \quad T = q f, \end{array} \right.$$

worin $\tau$ den Neigungswinkel der Tangente im Punkte $xy$ gegen den Horizont bezeichnet.

## Zwölftes Capitel.

# Von der Reibung.

157. Bei der Untersuchung über die Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte, die an beliebig mit einander verbundenen Punkten wirken, haben wir immer vorausgesetzt, dass feste Curven oder Oberflächen nur normale Kräfte erzeugen könnten; in der Wirklichkeit verhält sich aber die Sache anders und die Erfahrung zeigt, dass der Widerstand einer Curve oder Fläche nicht blos normale Kräfte, sondern auch zwischen gewissen Grenzen liegende Tangentialkräfte aufheben kann. Diese letzteren sind um so geringer, je mehr Glätte die Curven oder Flächen besitzen und sie würden ohne Zweifel gar nicht existiren, wenn die Curven oder Flächen absolut glatt wären, wie wir es früher stillschweigend voraussetzten. Die Verhältnisse, wie sie unseren Betrachtungen zu Grunde lagen, bezogen sich demnach auf einen idealen in der Natur nicht vorkommenden Fall, und es bedarf daher bei allen praktischen Anwendungen der Theorie einer besondern Untersuchung über die Modificationen, welche die Gleichgewichtsbedingungen durch Rücksichtnahme auf die genannten Kräfte erleiden. Diese tangentialen Kräfte entspringen aus der Reibung der bewegten Punkte an den Curven oder Flächen, auf denen sie sich bewegen; die für sie geltenden Gesetze können nur aus der Erfahrung hergeleitet werden und bestehen im Folgenden.

Wenn alle Punkte der ebenen Seitenfläche eines Körpers mit einer gewissen Kraft gegen eine Ebene gedrückt werden, so lässt sich derselbe durch eine zur Ebene parallele Kraft nicht eher in Bewegung setzen, als bis diese eine bestimmte Grenze überschreitet. Diese Grenze, welche erst bei längerer Berührung ihr Maximum erreicht, ist das Maass der Reibung, welche der Druck des des Körpers auf die Ebene hervorbringt. Jedoch wird die Reibung nur dann merklich, wenn man den Körper durch eine Kraft antreibt, die eine in der berührenden Ebene liegende Componente hat, und sie ist letzterer gleich und entgegengesetzt so lange der Körper nicht in Bewegung kommt. Sie kann also der Richtung und Intensität nach variiren, bleibt aber dabei an die beiden Bedingungen gebunden, immer in der Berührungsebene zu liegen und jene vorhin erwähnte Grenze nicht zu überschreiten, die wir überhaupt nur betrachten. Wir fügen noch hinzu, dass sie sich auf den Fall bezieht, wo alle Punkte des Körpers eine gleiche parallele Bewegung erhalten.

Die Reibung hebt nicht nur eine Einzelkraft auf, sondern auch beliebig viele Kräfte mögen diese auf eine Einzelkraft zurückführbar sein oder nicht; die Kräfte, welche sie repräsentirt, sind also von denen abhängig, die man in der Berührungsebene wirken lässt.

Nach diesen Erörterungen beschäftigen wir uns mit der grössten von der Reibung erzeugten Kraft, die wir als Maass der Reibung selbst nehmen. Die Erfahrung hat über sie Folgendes kennen gelehrt:

1) die Reibung ändert sich unter sonst gleichen Umständen proportional dem Drucke;
2) besitzt die Oberfläche keine Spitzen oder Kanten, so hängt die Reibung nicht von der Grösse der sich reibenden Fläche ab sondern nur von der Beschaffenheit und grösseren oder geringeren Politur der in Contact befindlichen Flächen;
3) bei dem Fortgleiten des einen Körpers auf dem anderen bleibt die Reibung unabhängig von der Art der Bewegung; ihre Grösse bestimmt sich nur durch den Druck und die Natur der Flächen, ihre Richtung ist in Beziehung auf jeden Körper entgegengesetzt seiner relativen Geschwindigkeit.

Man begreift leicht, durch welche Versuche die beiden ersten Gesetze zu entdecken waren. Legt man nämlich einen Körper auf eine horizontale Ebene und befestigt an ihm einen horizontalen Faden, der über eine Rolle geht und am anderen Ende ein bekanntes Gewicht trägt, so kann man mit grosser Genauigkeit das kleinste Gewicht ermitteln, welches den Körper in Bewegung setzt; dieses ist das Maass der Reibung. Bei verschiedenen Belastungen des Körpers sind zur Bewegung verschiedene kleinste Gewichte erforderlich, diese stehen aber in immer gleichem Verhältnisse zu den Gewichten, welche den Druck des Körpers gegen seine Unterlage messen. Indem man ferner die Berührungsflächen verkleinerte oder denselben Körper mit einer anderen aber gleich gut polirten Seitenfläche auf der nämlichen Unterlage gleiten liess, fand man, dass das Verhältniss der Reibung zum Drucke dasselbe blieb. Diese sehr oft und an den verschiedensten Körpern wiederholten Versuche haben immer zu denselben Folgerungen geführt. Das Verhältniss der Reibung zum Drucke, welches im Allgemeinen mit der Natur der Substanzen variirt, nennt man den Reibungscoefficienten.

Was das dritte Gesetz anlangt, so ist es durch Versuche bewiesen, deren Deutung einige dynamische Begriffe erfordert. Diese Einzelheiten würden ihre Stelle besser in einem Cursus über Maschinenlehre finden, und wir begnügen uns daher mit der blossen Aufstellung des Gesetzes.

158. Reibungswinkel. Stützt sich ein Körper, der allein der Wirkung der Schwere unterworfen ist, mit einer ebenen Fläche auf eine horizontale Ebene, und lässt man diese Ebene sich um eine horizontale Gerade drehen, so fängt der Körper zu gleiten an, sobald die Neigung der Ebene einen gewissen Werth erreicht; letzterer bestimmt sich auf folgende Weise. Wenn $P$ das Gewicht des Körpers und $\alpha$ die Neigung der beweglichen Ebene gegen den Horizont ist, so ist der Druck des Körpers auf die Ebene, oder die senkrecht auf dieser stehende Componente des Gewichts $= P \cos \alpha$, und die mit der Ebene parallele Componente $= P \sin \alpha$. Hat nun die veränderliche Neigung $\alpha$ den besonderen Werth $\mu$ erreicht, bei welchem der Körper zu gleiten anfängt, so ist die Reibung genau gleich der zur geneigten Ebene parallelen Componente, und wenn man mit $f$ das Verhältniss der Reibung zum Drucke bezeichnet, so besteht die Gleichung

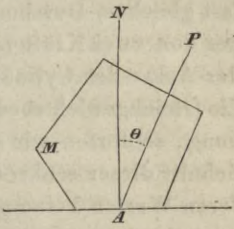
$$f = \frac{P \sin \mu}{P \cos \mu} = \tang \mu.$$

Demnach fangen alle Körper von derselben Natur und mit derselben Politur, überhaupt alle diejenigen, welche in Bezug auf eine bewegliche Ebene denselben Reibungscoefficienten haben, bei einem und demselben Winkel zu gleiten an, dessen trigonometrische Tangente gleich dem Reibungscoefficienten ist, und welchen man mit dem Namen Reibungswinkel bezeichnet.

Dieser Versuch kann auch dazu dienen, um die beiden ersten Gesetze der Reibung zu bestimmen. Legt man nämlich einen Körper auf eine um eine horizontale Drehungsachse bewegliche Ebene, so erkennt man, dass er bei einer und derselben Neigung der Ebene anfängt zu gleiten, welches auch die Grösse der Berührungsfläche ist, und mit welchem Gewicht man auch den Körper belastet. Man schliesst daraus, dass die Reibung dem Drucke proportional und unabhängig von der Ausdehnung der Berührungsfläche bleibt, so lange die Beschaffenheit und die Politur der Oberflächen sich nicht ändern. Der Winkel, unter welchem das Gleiten beginnt, bestimmt den Reibungscoefficienten, der seine trigonometrische Tangente ist.

159. Gleichgewicht eines Körpers, welcher gegen eine Ebene gedrückt wird. Sei $P$ eine an den Körper $M$ angebrachte Kraft, $A$ der Durchschnitt ihrer Richtung mit der Berührungsfläche, und $\vartheta$ der Winkel, welchen sie mit der Normalen $AN$ bildet. Der Druck des Körpers gegen die Ebene ist $= P \cos \vartheta$, die Reibung $= fP \cos \vartheta$, wenn $f$ der Reibungscoefficient ist, und diejenige Kraft in der festen Ebene, welche den Körper in Bewegung zu setzen strebt, ist $= P \sin \vartheta$. Zum Gleichgewichte gehört nun die Bedingung

Fig. 37.




$$P \sin \vartheta < f P \cos \vartheta,$$

oder

$$\tan \vartheta < f.$$

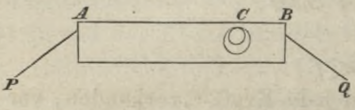
Das Gleichgewicht ist demnach für jede Kraft $P$ vorhanden, vorausgesetzt, dass sie mit der Normalen einen Winkel bildet, welcher den Reibungswinkel nicht übersteigt. Uebrigens unterscheidet sich der so eben untersuchte Fall von dem vorigen nur dadurch, dass die Kraft $P$ von beliebiger Richtung und Grösse ist, statt das Gewicht des Körpers selbst zu sein.

160. Gleichgewicht am Hebel mit Rücksicht auf die Reibung. Auf einen beliebigen Körper ruhe ein Hebel, dessen Stützpunkt nicht unveränderlich mit jenem Körper verbunden ist, also auf diesem gleiten kann; der Hebel werde von zwei beliebigen

Kräften angegriffen, die man sich sofort durch zwei gleiche und parallel im Stützpunkte angebrachte Kräfte und durch zwei Kräftepaare ersetzt denkt. Bei nicht vorhandener Reibung würden nun die Paare sich aufheben und die beiden am Stützpunkt wirkenden Kräfte eine zur widerstehenden Oberfläche normale Resultante geben müssen, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Die hinzutretende Reibung setzt sich mit den am Stützpunkte wirkenden Kräften zusammen, weil sie an demselben Punkte angreift, und wenn daher das Gleichgewicht unter Rücksicht auf die Reibung stattfinden soll, so müssen sich einerseits die Kräftepaare wie früher aufheben, andererseits aber brauchen die parallel an den Stützpunkt verlegten Kräfte nicht mehr eine zur widerstehenden Oberfläche normale Resultante zu geben, vielmehr reicht es aus, wenn der Winkel zwischen der Resultante und der Normale weniger als der Reibungswinkel beträgt.

161. G l e i c h g e w i c h t e i n e s K ö r p e r s, w e l c h e r s i c h u m e i n e f e s t e A c h s e d r e h e n k a n n. Ein Körper sei in einer cylindrischen Oeffnung durchbohrt und durch diese ein Cylinder von fast gleichem Durchmesser gesteckt. Denken wir uns diesen Körper von zwei Kräften angegriffen, welche in einer senkrecht auf der Achse des Cylinders stehenden Ebene liegen, und suchen wir die Gleichgewichtsbedingungen unter Rücksichtnahme auf die Reibung, so dürfen wir annehmen, dass das ganze System auf den Schnitt dieser senkrechten Ebene zurückgeführt sei, oder mit anderen Worten keine merkliche Dicke habe.

Fig. 38.

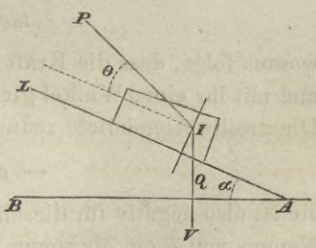



Bezeichnet $C$ den Berührungspunkt des festen Kreises, dessen Mittelpunkt in $O$ liegt, mit dem beweglichen Kreise, welcher dem Körper angehört, so muss Gleichgewicht zwischen den zwei gegebenen Kräften $P$ und $Q$ und der Reibung $F$ stattfinden, welche in $C$ tangential am Kreise wirkt. Es ist also nothwendig und genügend, dass die beiden Kräfte $P$ und $Q$ eine Resultante haben, welche durch $C$ geht und mit der Normale einen Winkel bildet, der weniger als der Reibungswinkel beträgt. Besitzen demnach die gegebenen Kräfte eine Resultante, welche durch irgend einen Punkt $C$ des dem Körper angehörigen Kreises geht, und mit der Normale einen Winkel einschliesst, der kleiner oder gleich dem Reibungswinkel ist, so befindet sich der Körper im Gleichgewichte, wenn man ihm eine solche Stellung giebt, dass die Berührung mit dem festen Kreise im Punkte $C$ stattfindet.

In dem Grenzfalle, wo das Gleichgewicht auf dem Punkte ist, aufgehoben zu werden, bildet die Resultante $R$ der Kräfte $P$ und $Q$ mit der Normale des Kreises einen Winkel, welcher dem Reibungswinkel gleichkommt; der auf den Cylinder ausgeübte normale Druck ist die Projection der Resultante $R$ auf den Radius, oder $= \frac{R}{\sqrt{1+f^2}}$, mithin kleiner als die Resultante $R$. Die tangentiale an dem festen Cylinder angebrachte Kraft erhält man folglich, wenn man den Druck mit dem Coefficienten $f$ multiplicirt, und sie ist $= \frac{Rf}{\sqrt{1+f^2}}$. Die Resultante beider Kräfte ist $R$, wie es offenbar der Fall sein muss, da die Resultante $R$ der gegebenen Kräfte durch den Widerstand des festen Cylinders aufgehoben wird.

162. Gleichgewicht eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Wir betrachten einen schweren Körper, der auf eine gegen den Horizont geneigte Ebene gelegt ist und von einer Kraft angegriffen wird, welche in der durch den Schwerpunkt des Körpers und durch die Normale der schiefen Ebene bestimmten Verticalebene wirkt; wir reduciren das ganze Systeme auf den durch diese Ebene gebildeten Schnitt und suchen die Gleichgewichtsbedingungen unter Bezugnahme auf die Reibung.

Fig. 39.




Sei $IV$ die durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Verticale, $PI$ die Richtung der Kraft $P$, $Q$ das Gewicht des Körpers, und $\alpha$ die Neigung der Ebene $LA$ gegen die Horizontalebene $AB$, so hat man die Bedingung auszudrücken, dass die Resultante durch den normalen Widerstand der Ebene $AL$ und durch die Reibung aufgehoben werde. Der Winkel zwischen der Kraft $P$ und der schiefen Ebene heisse $\vartheta$; der auf die letztere ausgeübte Druck ist dann $= Q \cos \alpha - P \sin \vartheta$, wobei der Winkel $\vartheta$ als positiv oder negativ betrachtet wird, je nachdem er oberhalb oder unterhalb der Richtung $AL$ liegt. Wenn das Gleichgewicht auf dem Punkte steht aufzuhören, so ist die Reibung $= f\,(Q \cos\alpha - P \sin\vartheta)$; im Allgemeinen aber beträgt sie irgend einen Bruchtheil $k$ derselben. Die Gesammtcomponente in dem Sinne der Ebene wird durch $Q \sin\alpha - P\cos\vartheta$ ausgedrückt, und es ist nun zum Gleichgewichte nöthig und genügend, dass dieser positive oder negative Ausdruck mit der Reibung übereinkommt, nämlich

$$Q \sin\alpha - P\cos\vartheta = k\,f\,(Q\cos\alpha - P\sin\vartheta),$$

wo $k$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt und $=-1$ oder $=+1$ wird, wenn das Gseichgewicht in der einen oder anderen Richtung aufhört.

Aus dieser Gleichung zieht man:

$$P = \frac{(Q\sin\alpha - kf\cos\alpha)}{\cos\vartheta - kf\sin\vartheta}.$$

Für $k=0$ und $\vartheta=0$ kommt man auf den bekannten Ausdruck $P = Q\sin\alpha$ zurück.

163. Wir wollen noch die Richtung bestimmen, nach welcher man die Kraft $P$ wirken lassen muss, um den grösstmöglichen Vortheil zu erlangen, wenn man voraussetzt, dass der Körper von selbst gleitet; zu diesem Behufe suchen wir den Werth von $\vartheta$, welcher bei der Annahme $k=1$ das Minimum von $P$ oder das Maximum des Nenners giebt. Die beiden ersten Derivirten nach $\vartheta$ sind

$$-\sin\vartheta - f\cos\vartheta \text{ und } -\cos\vartheta + f\sin\vartheta;$$

setzt man den ersten Ausdruck $=0$, so wird

$$\tang\vartheta = -f;$$

woraus folgt, dass die Kraft abwärts von der Ebene gerichtet sein und mit ihr einen Winkel gleich dem Reibungswinkel bilden muss. Die zweite Abgeleitete reducirt sich dann auf

$$-\cos\vartheta\,(1+f^2);$$

sie ist also negativ für diesen Werth von $\vartheta$, woraus folgt, dass der Nenner von $P$ ein Maximum und folglich $P$ ein Minimum ist.

Man könnte auch die Neigung $\vartheta$ suchen, welche den kleinsten Werth von $P$ giebt, der fähig ist, den Körper steigen zu lassen. Man muss dann $k=-1$ setzen und das Minimum von $\dfrac{1}{\cos\vartheta + f\sin\vartheta}$ oder das Maximum von $\cos\vartheta + f\sin\vartheta$ suchen; man findet

$$-\sin\vartheta + f\cos\vartheta = 0, \quad \tan\vartheta = f;$$

welche Gleichungen zeigen, dass die Kraft aufwärts von der schiefen Ebene gerichtet sein und mit ihr einen Winkel gleich dem Reibungswinkel bilden muss, welche auch die Neigung $\alpha$ sein möge.

Der für das Heraufziehen eines Körpers auf einer schiefen Ebene vortheilhafteste Winkel heisst der Zugwinkel; er kommt mit dem Reibungswinkel überein.

Wir verbreiten uns nicht weiter über die Theorie der Reibung, da unsere Absicht nur war, eine Vorstellung von der Art und Weise zu geben, wie Kräfte dieser Gattung die Gleichgewichtsbedingungen modificiren, was in der Anwendung von der grössten Wichtigkeit ist. Rücksichtlich der Einzelheiten verweisen wir auf die Werke über Maschinenlehre.

---

## Dreizehntes Capitel.

# Theorie der Attraction.

### Anziehung sphärischer Körper.

164. Die Gesammtheit der Himmelserscheinungen wird uns später zu der Annahme führen, dass die kleinsten Bestandtheile der Körper sich proportional ihren Massen und indirect proportional dem Quadrate ihrer Entfernungen anziehen. Als Vorbereitung zur Discussion der das Weltsystem betreffenden Fragen betrachten wir hier schon einige aus dieser allgemeinen Anziehung entspringende Wirkungen und zwar bei solchen Körpern, deren Gestalt sich am meisten der äussern Form der Himmelskörper nähert.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die gegenseitige Anziehung zweier Kugeln zu berechnen, die aus homogenen concentrischen Schalen gebildet sind, deren Dichtigkeit durch ihren Abstand vom Centrum bestimmt wird. Wir nehmen an, dass jeder Punkt der einen Kugel jeden Punkt der andern anzieht, mithin Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, und dass also, wenn man zwei Punkte durch eine unbiegsame Gerade verbände, die gegenseitige Wirkung dieser Punkte keine Bewegung hervorbringen würde. Diese Wirkung kann sich nach irgend einem Gesetze mit der Entfernung beider Punkte ändern, wir setzen jedoch voraus, dass sie im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung stehe.

Wäre die gesammte Materie, welche die Einheit der Masse bildet, sowohl von der einen als von der andern Substanz, in einem

Punkte vereinigt ohne etwas von ihrer Wirkung zu verlieren, wären ferner diese beiden Punkte um die Längeneinheit von einander entfernt, so würden sie eine gleiche Anziehungskraft auf einander ausüben, welche wir mit $f$ bezeichnen wollen, und die eines der nothwendigen Data der Aufgabe ist. Verbindet man damit die Voraussetzung, dass alle Punkte sich gegenseitig im directen Verhältnisse der Massen und in umgekehrtem Verhältnisse des Quadrates der Entfernung anziehen, so ist die Aufgabe völlig bestimmt.

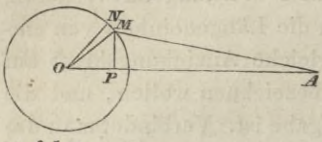
Wir betrachten zuerst die gegenseitige Anziehung von zwei unendlich kleinen Elementen $dm$ und $dm'$ und bezeichnen mit $u$ den Abstand irgend eines Punktes in $dm$ von irgend einem Punkte in $dm'$. Da nach der Annahme alle gleichen Theile dieselbe Wirkung auf einen Punkt in derselben Entfernung ausüben, so wirkt die in der Masse $dm$ enthaltene Materie auf $dm'$ mit einer Intensität, die in dem Verhältniss von $dm : 1$ zu der Kraft steht, welche die in der Einheit der Masse enthaltene und in dem Punkte $dm$ concentrirte Materie auf $dm'$ ausüben würde. Diese letztere Wirkung verhält sich wie $dm' : 1$ zu derjenigen, welche stattfinden würde, wenn man statt $dm'$ die Masseneinheit in diesem Punkte vereinigte; letztere Wirkung steht zu der vorhin mit $f$ bezeichneten in dem Verhältnisse $1 : u^2$, mithin ist die Wirkung der beiden Elemente $dm, dm'$ ausgedrückt durch

$$\frac{f\,dm\,dm'}{u^2},$$

indem man die unendlich kleine Grösse einer höheren Ordnung, welche von der Differenz der Werthe von $u$ herrührt, vernachlässigt, weil sie beim Uebergange zur Grenze ohnehin verschwinden würde.

Betrachten wir hiernach eine unendlich dünne sphärische Schicht von der Dichtigkeit $\varrho$ und begrenzt von zwei aus dem Mittelpunkte $O$ mit den Radien $r$ und $r+dr$ beschriebenen Kugelflächen, so ist ihre Wirkung auf ein Element $dm'$, das in $A$ um $\alpha$ von ihrem Mittelpunkt entfernt liegt, nach der Geraden $AO$ gerichtet, um welche herum Symmetrie stattfindet, und es genügt, die Summe der Componenten aller Kräfte nach dieser Richtung zu bilden, um die gesuchte Resultante zu erhalten.

Fig. 40.




Sei $M$ irgend ein Punkt des mit dem Radius $r$ beschriebenen Kreises, ferner

$$MOA = \vartheta, \quad MON = d\vartheta, \quad MA = u, \quad OA = \alpha;$$

so folgt

$$u^2 = \alpha^2 + r^2 - 2\alpha r \cos\vartheta.$$

Verlängert man die beiden Radien $OM$, $ON$ bis zu dem mit dem Halbmesser $r + dr$ construirten Kreise, und lässt die unendlich kleine Fläche $r d\vartheta\, dr$ um die Achse $OA$ rotiren, so erzeugt sie das Volumen

$$2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr;$$

die Masse desselben zieht $dm'$ mit einer Kraft an, deren nach der Achse $AO$ gerichtete Componente ist

$$\frac{\pi\varrho f r^2 dr\, dm'}{\alpha} \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{u^3} (u^2 + \alpha^2 - r^2).$$

Man erhält also die Anziehung der sphärischen Schicht auf $dm'$, wenn man die Summe der analogen Ausdrücke bildet, wobei $\vartheta$ von 0 bis $\pi$ variirt und folglich $u$ von $\alpha - r$ bis $\alpha + r$, wenn der Punkt ein äusserer ist, und von $r - \alpha$ bis $r + \alpha$, wenn er innerhalb des umschlossenen Hohlraumes liegt.

Zunächst drücken wir das vorhandene Differential als Funktion von $u$ allein aus. Die Gleichung zwischen $u$ und $\vartheta$ giebt

$$u\, du = \alpha r \sin\vartheta\, d\vartheta;$$

der obige Ausdruck wird also:

$$\frac{\pi\varrho f r\, dr}{\alpha^2} dm' \left(\frac{u^2 + \alpha^2 - r^2}{u^2}\right) du,$$

und sein Integral ist:

$$\frac{\pi\varrho f r\, dr}{\alpha^2} dm' \left(u + \frac{r^2 - \alpha^2}{u}\right) + C.$$

Für einen äusseren Punkt erhält dieses Integral, zwischen den Grenzen $\alpha - r$ und $\alpha + r$ genommen, den Werth

$$\frac{4\pi\varrho f r^2\, dr\, dm'}{\alpha^2};$$

was derselbe Ausdruck ist, als wenn die ganze anziehende Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Um die Anziehung zu berechnen, welche ein aus homogenen concentrischen sphärischen Schichten von verschiedener Dichtigkeit zusammengesetzten Körper ausübt, muss man die Summe der Wirkungen aller dieser Schichten bilden, und da jede Schicht ebenso wirkt, als wenn ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre, so erhält man folgenden Satz:

„Ein aus homogenen concentrischen sphärischen Schichten von verschiedener Dichtigkeit zusammengesetzter Körper, dessen Elemente einen äussern Punkt nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernungen anziehen, übt auf diesen Punkt dieselbe Wirkung aus, als wenn seine gesammte Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.“

Für eine homogene Kugel mit dem Radius $R$ ist diese Wirkung:

$$\frac{4}{3}\frac{\pi\varrho f R^3 dm'}{\alpha^2}.$$

Liegt der Punkt inneralb des von der Schicht umschlossenen Hohlraumes, so sind $r-\alpha$ und $r+\alpha$ die Grenzen von $u$, und der Werth des Integrales verschwindet. Daraus folgt ein zweiter Satz:

„Bei demselben Gesetze der Anziehung ist die Wirkung desselben Körpers auf jeden in der umschlossenen Hohlkugel liegenden Punkt der Null gleich; für einen innerhalb der anziehenden Masse befindlichen Punkt reducirt sich die Wirkung auf die eines Körpers, welcher zwischen der inneren Begrenzungsfläche und der durch den angezogenen Punkt gelegten concentrischen Kugelfläche enthalten ist.“

Es folgt daraus, dass die Wirkung einer ganzen Kugel auf einen Punkt in ihrem Innern auf die Wirkung der concentrischen Kugel zurückkommt, deren Oberfläche durch diesen Punkt geht. Sind alle Schichten von derselben Dichtigkeit, so ist die Wirkung der Kugel, wenn $R$ ihren Radius und $r$ den Abstand des angezogenen Punktes vom Centrum bezeichnet:

$$= \tfrac{4}{3}\pi\varrho fr\, dm';$$

sie hängt nicht mehr von $R$ ab und ist der Entfernung vom Centrum proportional.

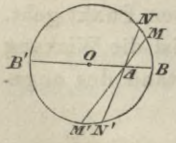
165. Nunmehr lässt sich die gegenseitige Anziehung zweier ausser einander liegender Kugeln leicht berechnen. Erstens ist die Wirkung des Elementes $dm'$ auf die erste Kugel gleich und entgegengesetzt derjenigen, welche diese Kugel auf $dm'$ ausübt, weil alle elementaren Wirkungen, welche sie gegenseitig bilden, gleich und der Annahme nach entgegengesetzt sind; daraus folgt, dass die Resultante der Wirkungen der ersten Kugel auf alle Elemente $dm'$ der zweiten gleich und entgegengesetzt ist der Resultante aus allen Wirkungen der Elemente der zweiten Kugel auf die erste, d. h. dass die Wirkungen der beiden Kugeln auf einander gleich und entgegengesetzt sind. Nun ist nach dem Vorhergehenden die Wirkung von $dm'$ auf die erste Kugel dieselbe, als wenn ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Die Frage, kommt also darauf zurück, die Wirkung der zweiten Kugel auf diesen Punkt zu berechnen; wir wissen aber schon, dass sie dieselbe ist, als wenn die ganze Masse der zweiten Kugel in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre; hieraus folgt:

„Zwei aus irgend welchen homogenen concentrischen Schichten gebildete Kugeln, deren Punkte sich gegenseitig proportional ihren Massen und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates ihrer Entfernung anziehen, üben auf einander dieselbe Wirkung aus, als wenn die Masse jeder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre."

Derselbe Satz gilt offenbar für zwei hohle Kugeln, die ebenfalls aus homogenen Schichten zusammengesetzt sind.

166. Auch geometrisch lässt sich sehr einfach beweisen, dass die Wirkungen, welche von allen Punkten einer sphärischen homogenen unendlich dünnen Schicht auf einen in der umschlossenen Hohlkugel liegenden Punkt ausgeübt werden, sich aufheben. Sei nämlich $O$ der Mittelpunkt der innern Oberfläche der Schicht, $OB$ ihr Radius und $A$ der angezogene innere Punkt. Legen wir durch $OA$ irgend eine Ebene, nennen wir ferner $M$ und $N$ zwei unendlich nahe Punkte auf dem Kreise, in welchem die Ebene die Oberfläche schneidet, und ziehen wir endlich die Geraden $MAM'$, $NAN'$, $MN$, $M'N'$, so sind die Dreiecke $AMN$ und $AM'N'$ ähnlich. Bei der Rotation der Ebene um $OB$ erzeugen die Sehnen oder die Bögen $MN$, $M'N'$ Oberflächen, welche

Fig. 41.



nach Multiplication durch die unendlich kleine Dicke der Schicht die Elemente ihres Volumens geben. Die Wirkungen dieser beiden Elemente sind gleich und entgegengesetzt, denn sie sind den $MN$ und $M'N'$ erzeugten Flächen proportional und stehen in umgekehrtem Verhältniss des Quadrats der Entfernungen, jene Flächen aber verhalten sich direct wie

$$\overline{AM}^2 : \overline{AM'}^2,$$

wie man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke leicht schliessen kann.

167. Anderes Anziehungsgesetz. Ist die Anziehung zweier Punkte proportional ihrer Entfernung, so ergiebt sich die Anziehung eines Körpers von beliebiger Gestalt auf irgend einen willkührlich liegenden Punkt aus folgenden Betrachtungen. Durch den Schwerpunkt des Körpers legen wir drei rechtwinklige Achsen und lassen die Achsen des $x$ durch den angezogenen Punkt gehen. Bezeichnen jetzt $x$, $y$, $z$ die Coordinaten irgend eines Molecüls $dm$ des Körpers, $\alpha$ den Abstand des angezogenen Molecüls $dm'$ vom Anfang, so sind die drei Componenten der Anziehung von $dm$

$$f(x - \alpha)\, dm\, dm', \quad fy\, dm\, dm', \quad fz\, dm\, dm'.$$

Bildet man die Summe dieser elementaren Werthe, indem man für $dm$ successive alle Elemente des Körpers nimmt und beachtet, dass nach den Eigenschaften des Schwerpunkts

$$\Sigma x dm = 0, \quad \Sigma y dm = 0, \quad \Sigma z dm = 0$$

ist, so gelangt man zu dem Ergebnisse, dass die den Achsen der $z$ und $y$ parallelen Componenten der Gesammtanziehung verschwinden und dass die dritte Componente, nämlich die Resultante, den Werth

$$-f M \alpha\, dm'$$

besitzt, wo $M$ die ganze Masse des Körpers oder des Systems irgend welcher anziehender Punkte bedeutet; d. h.

„Bei dem angenommenen Gesetze ist die Anziehung irgend eines Systems von Punkten auf einen beliebigen Punkt diesebe, als wenn die ganze anziehende Masse in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre.“

Für die gegenseitige Anziehung zweier beliebigen Körper folgt daraus, dass sie dieselbe ist, als wenn die Masse eines jeden Körpers in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre.

**Anziehung irgend eines Körpers auf einen materiellen Punkt.**

168. Wir wollen jetzt die Frage in so fern allgemeiner fassen als wir annehmen, die Anziehung zweier Elemente sei ihren Massen proportional und irgend eine Funktion ihrer Entfernung $r$; dabei betrachten wir einen Körper von beliebiger Form, dessen Dichtigkeit, von Punkt zu Punkt veränderlich, durch $\varrho$ dargestellt sei, und suchen die drei Componenten seiner Wirkung auf einen materiellen Punkt, dessen Masse $\mu$ und dessen Coordinaten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sein mögen. Das Element des Volumens $dx\, dy\, dz$ enthält die Masse $\varrho\, dx\, dy\, dz$, und ihre Wirkung auf $\mu$ wird ausgedrückt durch

$$\mu\varrho\, dx\, dy\, dz\, F(r),$$

wenn man mit $F(r)$ die gegenseitige Wirkung von zwei Masseneinheiten in dem Abstande $r$ von einander bezeichnet. Die Componenten $X$, $Y$, $Z$ der Anziehung des ganzen Körpers parallel den Coordinatenachsen sind demnach

$$X = \mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \frac{x-\alpha}{r} F(r)\, dx\, dy\, dz$$

$$Y = \mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \frac{y-\beta}{r} F(r)\, dx\, dy\, dz$$

$$Z = \mu \int\!\!\int\!\!\int \varrho \frac{z-\gamma}{r} F(r)\, dx\, dy\, dz$$

und zugleich ist

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = r.$$

Eine Aenderung des Vorzeichens würde genügen um zu dem Falle der Abstossung überzugehen. Diese Integrale, welche sich auf die ganze Masse des Körpers beziehen, können übrigens auf ein einziges reducirt werden. Die Differentialquotienten von $r$, partiell nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ genommen, sind nämlich

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right) = -\frac{x-\alpha}{r},\quad \left(\frac{dr}{d\beta}\right) = -\frac{y-\beta}{r},\quad \left(\frac{dr}{d\gamma}\right) = -\frac{z-\gamma}{r};$$

sei ferner $\varphi(r)$ die Funktion, deren Derivirte in Bezug auf $r$ die Function $F(r)$ ist, und

$$\int\!\!\int\!\!\int \varrho\, \varphi(r)\, dx\, dy\, dz = U,$$

so können wir beide Theile dieser Gleichung partiell nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ differenziren, zu welchem Zwecke es hinreicht, unter dem Integralzeichen zu differenziren, wenn nämlich $\varphi(r)$ nicht unendlich wird; wir erhalten dadurch folgende Formeln:

$$X = -\mu\left(\frac{dU}{d\alpha}\right), \quad Y = -\mu\left(\frac{dU}{d\beta}\right), \quad Z = -\mu\left(\frac{dU}{d\gamma}\right),$$

welche $X$, $Y$, $Z$ bestimmen, wenn erst das eine Integral $U$ bekannt ist.

Bei einem ins Unendliche gehenden Körper kann zwar das Integral $U$ einen unendlichen Werth bekommen, ohne dass die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right), \quad \left(\frac{dU}{d\beta}\right), \quad \left(\frac{dU}{d\gamma}\right)$$

unendlich werden, doch bleiben die vorhergehenden Werthe von $X$, $Y$, $Z$ immer noch genau. Betrachten wir nämlich zuerst einen begrenzten Theil des Körpers, so werden die Componenten seiner Anziehung durch die Produkte von $-\mu$ in die partiellen Differentialquotienten der endlichen Funktion $U$ ausgedrückt; wächst nun der Körper ins Unendliche, so haben die Ausdrücke

$$-\mu\left(\frac{dU}{d\alpha}\right), \quad -\mu\left(\frac{dU}{d\beta}\right), \quad -\mu\left(\frac{dU}{d\gamma}\right),$$

entweder endliche oder unendliche Grössen zu Grenzen. Im ersten Falle müssen diese Grenzen immer noch die Componenten der Anziehung des unendlichen Körpers sein; im zweiten Falle wird man schliessen, dass die Anziehung ohne Grenze in dem Maasse wächst, als man einen grösseren Theil des Körpers betrachtet, d. h. die Anziehung des Körpers wird unendlich. Demnach genügt es immer, die Derivirten zu kennen, welche in dem Ausdrucke für die Componenten $X$, $Y$, $Z$ vorkommen, ohne sich darüber zu beunruhigen, ob die Funktion $U$ selbst endlich oder unendlich ist. Man würde auf ähnliche Weise schliessen, wenn $U$ unendlich würde, ohne dass der Körper es wäre.

169. In dem Falle, wo die Anziehung im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkt, ist

$$F(r) = \frac{f}{r^2}, \quad \varphi(r) = -\frac{f}{r};$$

setzt man hier

$$\iiint \frac{\varrho \, dx \, dy \, dz}{r} = V, \text{*)}$$

so wird

$$X = \mu f \left(\frac{dV}{d\alpha}\right), \quad Y = \mu f \left(\frac{dV}{d\beta}\right), \quad Z = \mu f \left(\frac{dV}{d\gamma}\right).$$

Ist der angezogene Punkt ein Theil des Körpers, so geht die Funktion $\varphi(r)$ durch das Unendliche hindurch; aber die Formeln bestehen immer. Sie bieten in der That keine Schwierigkeiten dar, wenn man sie auf den ganzen Körper weniger einer unendlich kleinen Kugel, welche den Punkt einschliesst, anwendet. Nun hat $V$ eine Grenze, sobald diese Kugel sich der Null nähert; denn das Element des in Polarcoordinaten ausgedrückten Volumens ist, den angezogenen Punkt als Anfang genommen, $= r^2 \, dr \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi$; wenn man nun durch $r$ dividirt und in der ganzen Ausdehnung der unendlich kleinen Kugel integrirt, so wird man eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung erhalten. Daraus folgt, dass die Funktion $V$, über den ganzen Körper ausgedehnt, endlich ist und es folglich ihre Abgeleiteten nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gleichfalls sind. Man sieht ebenso, dass $X$, $Y$, $Z$ gewisse Grenzen haben; wenn aber die beiden Glieder einer Gleichung Grenzen besitzen, so sind diese Grenzen gleich, mithin die Formeln für $X$, $Y$, $Z$ noch in dem Falle richtig, wo man den ganzen Körper betrachtet, von dem der Punkt einen Theil macht.

170. Die Anziehung auf den Punkt $\alpha\beta\gamma$, in der Richtung des Radiusvectors $r$, der den Anfang mit diesem Punkt verbindet, hat den Werth

$$Y\frac{\alpha}{r} + Y\frac{\beta}{r} + Z\frac{\gamma}{r} = -\mu\left(\frac{dU}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha}{r} + \frac{dU}{d\beta}\cdot\frac{\beta}{r} + \frac{dU}{d\gamma}\cdot\frac{\gamma}{r}\right).$$

Betrachtet man $U$ als Funktion $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und diese Coordinaten als Funktionen von $r$ und den beiden Winkeln $\vartheta$, $\psi$, so erhält man

$$\frac{dU}{dr} = \frac{dU}{d\alpha}\,\frac{\alpha}{r} + \frac{dU}{d\beta}\,\frac{\beta}{r} + \frac{dU}{d\gamma}\,\frac{\gamma}{r},$$

---

*) Tiefere Untersuchungen über die Eigenschaften des obigen Integrales (des sogen. Potentiales der Anziehung eines Körpers auf einen Punkt) enthält die Schrift von Gauss: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte.“ Leipzig 1840.

indem man beachtet, dass die partiellen Abgeleiteten von $\alpha, \beta, \gamma$ in Bezug auf $r$ der Reihe nach $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\beta}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$ sind. Demnach ist die Componente der Anziehung nach dem Radiusvector

$$= -\mu \frac{dU}{dr},$$

wobei die beiden andern Componenten in der auf $r$ senkrechten Ebene angenommen sind. In dem Falle von

$$F(r) = \frac{f}{r^2}$$

wird dieser Ausdruck zu $\mu f \frac{dV}{dr}$.

171. Um eine Anwendung dieser Formeln für den Fall $F(r) = \frac{f}{r^2}$ zu geben, wollen wir eine hohle Kugel betrachten, für welche $\varrho$ irgend eine Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt ist. Zur Achse der $x$ nehmen wir die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem angezogenen Punkte verbindet, und welche offenbar die Richtung der Resultante der Anziehungen ist. Bezeichnen wir mit $a$ und $A$ die Radien der beiden Oberflächen, welche den Körper begrenzen, durch $u$ den innern Radius einer sphärischen Schicht von der Dicke $du$, und durch $\vartheta$ den Winkel eines beliebigen Radius mit der Achse der $x$, so bestimmt sich $V$ durch die Gleichung

$$V = 2\pi \int\int \frac{\varrho u^2\, du \sin\vartheta\, d\vartheta}{r},$$

wo die Integration in Bezug auf $\vartheta$, zwischen 0 und $\pi$ ausgeführt, den Theil von $V$ giebt, welcher der Schicht von der Dicke $du$ entspricht, und die nachherige auf $u$ bezügliche Integration den ganzen Werth von $V$ bestimmt; dabei ist

$$r^2 = u^2 - 2\alpha u \cos\vartheta + \alpha^2;$$

woraus

$$r\, dr = \alpha u \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

und folglich

$$V = \frac{2\pi}{\alpha} \int\int \varrho u\, du\, dr.$$

Was die Grenzen von $r$ für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ betrifft, so muss man den Fall, wo der Punkt ausserhalb des Körpers liegt, von demjenigen unterscheiden, wenn er im Innern desselben enthalten ist.

1) Für einen äusseren angezogenen Punkt hat man

$$a > A$$

und folglich $a > u$ für alle in Frage kommenden Schichten; diess giebt

$$\int dr = 2u \text{ und } V = \frac{4\pi}{\alpha}\int_a^A \varrho u^2\, du.$$

Bezeichnet man mit $M$ die Masse des Körpers, so ist

$$4\pi\int_a^A \varrho u^2\, du = M;$$

mithin

$$V = \frac{M}{\alpha}, \text{ woraus } X = -\frac{\mu f M}{\alpha^2}.$$

Die Anziehung ist also dieselbe, als wäre die ganze Masse der Hohlkugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

2) Wenn der angezogene Punkt innerhalb der kleineren Oberfläche liegt, so hat man

$$\alpha < a$$

also auch $\alpha < u$ in der ganzen Ausdehnung der Werthe von $u$; diess giebt

$$\int dr = 2\alpha \text{ und } V = 4\pi\int \varrho u\, du.$$

Da diese Grösse unabhängig von $\alpha$ ist, so wird

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \text{ und folglich } X = 0.$$

D. h. Bei demselben Gesetze der Anziehung übt die Hohlkugel keine Anziehung auf einen innerhalb ihrer kleineren Oberfläche liegenden Punkt aus.

Die Wirkung einer Hohlkugel auf einen in der anziehenden Masse selber liegenden Punkt reducirt sich hiernach auf die Anziehung einer Hohlkugel, welche zwischen der Kugelfläche mit dem Radius $a$ und der durch den angezogenen Punkt gehenden concentrischen Fläche enthalten ist. Die Masse dieses letzten Theiles muss man sich im Centrum vereinigt und nach demselben

Gesetze auf den Punkt wirkend denken. Verlangt man z. B. die Wirkung einer vollen homogenen Kugel auf einen in ihrem Innern um $a$ vom Centrum entfernt liegenden Punkt, so hat man

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho a^3$$

zu nehmen, und die Anziehung ist

$$= \tfrac{4}{3}\pi\varrho f\mu a$$

d. h. dem Abstande vom Centrum direct proportional.

172. Wirkung irgend eines Körpers auf einen sehr entfernten Punkt. Wenn ein Körper von beliebiger Form und Dichtigkeit auf einen Punkt wirkt, der von allen Punkten des Körpers in Bezug auf dessen Dimensionen sehr grosse Abstände hat, so lässt sich die Anziehung auf folgende Weise berechnen.

Wir nehmen die Anziehung im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung, den Schwerpunkt des Körpers zum Coordinatenanfang und die durch den angezogenen Punkt gehende Gerade zur Achse der $x$. Sei $\delta$ der Abstand beider Punkte, $u$ der Radiusvector irgend eines Punktes des Körpers, $dm$ seine Masse, $x$ seine Abscisse, $\mu$ die Masse des angezogenen Punktes, so ist die Entfernung dieses letzten Punktes von irgend einem Punkte des Körpers

$$= \sqrt{\delta^2 - 2\delta x + u^2}$$

und dem entsprechend

$$V = \Sigma\, dm\, (\delta^2 - 2\delta x + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta}\,\Sigma\, dm \left(1 - \frac{2x}{\delta} + \frac{u^2}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch Entwickelung der Potenz des Trinomes (z. B. nach dem binomischen Satze) erhält man eine nach Potenzen von $\frac{u}{\delta}$ fortschreitende Reihe, die um so convergenter ist, je kleiner $\frac{u}{\delta}$ ausfällt; bezeichnet man ferner mit $M$ die ganze Masse des anziehenden Körpers und beachtet, dass $\Sigma x dm$ wegen der Eigenschaften des Schwerpunktes verschwindet, so bleibt

$$V = \frac{M}{\delta} + \frac{1}{2\delta^3}\,\Sigma\,(3x^2 - u^2)\, dm + \text{etc.}$$

und man kann sich darauf beschränken $V = \frac{M}{\delta}$ zu nehmen, indem man $\frac{1}{\delta^3}$ gegen $\frac{1}{\delta}$ vernachlässigt. Betrachten wir jetzt ein System von Achsen, die immer durch den Schwerpunkt gehen, und bezeichnen mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten des angezogenen Punktes, so ist $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, folglich

$$V = M\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die drei Componenten der Anziehung sind daher

$$-\frac{\mu f M\alpha}{\delta^3},\quad -\frac{\mu f M\beta}{\delta^3},\quad -\frac{\mu f M\gamma}{\delta^3},$$

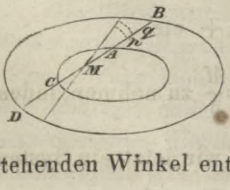
woraus man ersieht, dass ihre Resultante durch den Coordinatenanfang d. h. durch den Schwerpunkt der ganzen anziehenden Masse geht, und dass sie denselben Werth hat, als wenn die ganze Masse in diesem Punkte vereinigt wäre. Diess Resultat, welches für einen beliebigen Körper nur ein angenähertes ist, gilt für den Fall einer Kugel genau, wie gross auch die Entfernung des angezogenen Punktes sein mag, vorausgesetzt nur, dass er ausserhalb der Kugel liegt. In diesem Falle würden bei der Integration alle Glieder mit Ausnahme des ersten verschwinden.

Die vorhergehende Rechnung ist mit Zugrundelegung eines speciellen Anziehungsgesetzes geführt, man wird sich aber leicht überzeugen, dass das Resultat in dem Falle dasselbe bleibt, wo die Anziehung im umgekehrten Verhältnisse irgend einer andern Potenz der Entfernung und selbst nach verwickelteren Gesetzen wirkt.

## Anziehung einer ellipsoidischen Schicht auf einen innern Punkt.

173. Der Satz, welchen wir hinsichtlich der Wirkung einer sphärischen Schicht auf einen innern Punkt entwickelt haben, lässt sich geometrisch auf den allgemeineren Fall ausdehnen, wo die anziehende Masse zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden liegt, deren Achsen zusammenfallen. Wir setzen zunächst den Körper als homogen voraus, nennen $M$ den angezogenen Punkt, $\mu$ seine Masse, und betrachten ihn als den Scheitel einer unendlichen Menge körperlicher Winkel, welche den ganzen Raum um ihn herum erfüllen; vorerst suchen wir die Resultante der Wirkung zweier Theile, die in irgend einem dieser Winkel und dem gegenüberstehenden Winkel enthalten sind.

Fig. 42.




Sei $DCAB$ eine der Kanten dieses Winkels, so ist wegen der Aehnlichkeit der beiden Ellipsoide $AB = CD$. Bezeichnen wir mit $\omega$ das Maass des körperlichen Winkels, so können wir den Körper $AB$ in Elemente zerlegen, deren Dicken $pq$ die Gerade $AB$ ausmachen und deren Grösse $\omega r^2 dr$ ist; durch Multiplication mit $\frac{\varrho f \mu}{r^2}$ erhält man die Anziehung welche dieses Element auf den Punkt ausübt; man findet sie $= \varrho f \mu \omega dr$, und die Summe $\varrho f \mu \omega . AB$ giebt die Anziehung der in $AB$ enthaltenen Masse. Ebenso ist $\varrho f \mu \omega . CD$ die Anziehung der in $CD$ enthaltenen Masse; wegen der Gleichheit von $AB$ und $CD$ sind auch diese Anziehungen gleich und heben sich folglich auf. Dasselbe gilt für alle andern körperlichen Winkel um $M$ und daher übt der homogene zwischen zwei beliebigen ähnlichen Ellipsoiden enthaltene Körper keine Anziehung auf einen Punkt aus, der innerhalb seiner kleinern Oberfläche liegt.

Dieser Satz ist unabhängig von der Dicke und gilt daher auch für eine unendlich dünne Schicht. Deshalb bleibt er weiterhin richtig für einen Körper von beliebiger Dicke, der zusammengesetzt ist aus homogenen Schichten, die zwischen ähnlichen Ellipsoiden enthalten sind, und deren Beschaffenheit sich auf irgend eine Weise von der einen zur andern Schicht ändert.

174. Für einen Körper, welcher einen Punkt nach irgend einem Gesetze anzieht, ist nach dem Vorhergehenden

$$X = -\mu \frac{dU}{d\alpha}, \quad Y = -\mu \frac{dU}{d\beta}, \quad Z = -\mu \frac{dU}{d\gamma};$$

denken wir uns den Punkt $\alpha\beta\gamma$ auf einer Fläche beweglich und stellen die Bedingung, dass die Resultante senkrecht auf der Fläche bleibe, so ist für alle Verrückungen auf dieser Fläche die Bedingung

$$X d\alpha + Y d\beta + Z d\gamma = 0$$

oder

$$\frac{dU}{d\alpha} d\alpha + \frac{dU}{d\beta} d\beta + \frac{dU}{d\gamma} d\gamma = 0$$

erforderlich, welche beweist, dass $U$ constant ist. Die Gleichung der fraglichen Fläche einer sogenannten Niveaufläche ist also

$$U = c,$$

wo $c$ eine willkürliche Constante bezeichnet. Für die Anziehung nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wird diese Gleichung:

$$V = c.$$

175. Eine merkwürdige Eigenschaft des Integrales $V$, die von grossem Nutzen zur Bestimmung seines Werthes ist, findet man auf folgendem Wege. Vermöge des Werthes von $r$ ist:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha} = \frac{x-\alpha}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\beta} = \frac{y-\beta}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\gamma} = \frac{z-\gamma}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2} = \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2} = \frac{3(y-\beta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2} = \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2} = 0.$$

Andererseits hat man

$$V = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varrho\, dv}{r},$$

wo $dv$ das Element des Volumens bezeichnet; ferner ist bekannt, dass die Differentiation eines Integrales in Beziehung auf eine in dessen Grenzen nicht enthaltene Constante unter dem Integralzeichen geschieht; man hat daher für den vorliegenden Fall

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2}\, \varrho\, dv,$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2}\, \varrho\, dv,$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2}=\int\!\!\int\!\!\int\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2}\varrho\,dv;$$

dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Funktion $\frac{1}{r}$ nicht unendlich werde für irgend einen zwischen den Grenzen des Integrals liegenden Werth, denn in diesem Falle könnte die Differentiation unter dem Integralzeichen falsche Resultate geben. Wenn demnach der Punkt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ keinen Theil des anziehenden Körpers ausmacht, so findet die Beziehung statt:

1) $$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=0.$$

Bildet der angezogene Punkt einen Theil des Körpers, so beschreibe man eine unendlich kleine Kugel um den Punkt herum; die Funktion $V$, für den ganzen übrigen Theil des Körpers betrachtet, genügt dann immer noch der obigen Gleichung. Sei $\varrho$ die Dichtigkeit des Körpers im angezogenen Punkte, also auch die der kleinen Kugel, so sind die Componenten der Anziehung der Kugel auf diesen Punkt, welcher in ihrem Innern liegt:

$$-\tfrac{4}{3}\pi\mu f\varrho\,(\alpha-a),\quad -\tfrac{4}{3}\pi\mu f\varrho\,(\beta-b),\quad -\tfrac{4}{3}\pi\mu f\varrho\,(\gamma-c),$$

wo $a$, $b$, $c$ die Coordinaten des Centrums der kleinen Kugel sind; man hat daher, wenn $V'$ den auf die Kugel bezogenen Theil von $V$ bezeichnet

$$\frac{dV'}{d\alpha}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho\,(\alpha-a),$$

$$\frac{dV'}{d\beta}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho\,(\beta-b),$$

$$\frac{dV'}{d\gamma}=-\tfrac{4}{3}\pi\varrho\,(\gamma-c),$$

woraus

$$\frac{d^2V'}{d\alpha^2}+\frac{d^2V'}{d\beta^2}+\frac{d^2V'}{d\gamma^2}=-4\pi\varrho;$$

und folglich

2) $$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi\varrho,$$

wo $\varrho$ die Dichtigkeit im angezogenen Punkte ist.

Wir wollen jetzt an einigen sehr einfachen Beispielen zeigen, wie die Gleichungen 1) und 2) dazu dienen können die Funktion $V$ zu bestimmen und aus ihr die drei Componenten der Anziehung herzuleiten.

176. Anwendung auf die Kugel. Wenn die Kugel als aus homogenen Schichten gebildet vorausgesetzt wird, so ist $V$ eine Funktion der Entfernung $r$ des Centrums der Kugel von dem angezogenen Punkte; die Resultante der Anziehung fällt in die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet und ist $= \mu f \frac{dV}{dr}$. Die Gleichung $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ giebt

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\alpha}{r}, \quad \frac{dr}{d\beta} = \frac{\beta}{r}, \quad \frac{dr}{d\gamma} = \frac{\gamma}{r}$$

und man hat folglich

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\alpha^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \frac{\beta^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\beta^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\gamma^2}{r^3}\frac{dV}{dr}.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen wird für einen äussern Punkt:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

Die Function $V$ hängt also von einer Gleichung ab, welche keine partiellen Differentiale enthält. Multiplicirt man sie mit $r^2$, so wird ihr erster Theil der Differentialquotient von $r^2 \frac{dV}{dr}$, mithin giebt die Integration, wenn $c$ eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r^2}.$$

Setzen wir zuerst die Kugel als hohl voraus und nehmen den angezogenen Punkt innerhalb der kleineren Oberfläche, deren Radius $R_1$ sei, so muss die Anziehung offenbar $=0$ werden für $r = 0$, was nur möglich ist für

$$c = 0 \text{ und folglich } \frac{dV}{dr} = 0.$$

Also sind die Componenten der Anziehung immer Null, und der Punkt befindet sich im Gleichgewicht, welche Lage in dem leeren

Theile der Hohlkugel er auch einnehmen mag. Betrachten wir zweitens den Punkt als einen Theil der anziehenden Masse, so ist

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=-4\pi\varrho,$$

wo $\varrho$ eine gegebene Funktion von $r$ bedeutet. Multiplicirt man mit $r^2$ und integrirt von $r=R_1$ an, so kommt unter der Bemerkung, dass $\frac{dV}{dr}$ für alle Punkte des Innern mithin auch an der Grenze $R_1$ verschwindet,

$$r^2\frac{dV}{dr}=-4\pi\int_{R_1}^{r}\varrho r^2\,dr.$$

Hier bedeutet $\int_{R_1}^{r}4\pi r^2\varrho dr$ die Masse zwischen dieser und der durch den angezogenen Punkt gehenden Fläche; bezeichnet man sie mit $M'$, so wird

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{M'}{r^2}.$$

Demnach ist der absolute Werth der Anziehung

$$=\frac{\mu f M'}{r^2},$$

oder derselbe, als wenn die Masse $M'$ allein wirkte und in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Liegt der angezogene Punkt auf der äusseren Oberfläche, deren Radius $R$ sein möge, und bezeichnet $M$ die ganze Masse der hohlen Kugel, so wird

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{M}{R^2},$$

und die Anziehung auf den Punkt

$$=\frac{\mu f M}{R^2}.$$

Endlich wollen wir einen Punkt ausserhalb der Kugel betrachten d. h. einen solchen, für den $r>R$; man erhält dann wie in dem ersten Falle

$$\frac{dV}{dr}=\frac{c}{r};$$

aber wegen der Discontinuität, die von den Punkten der Masse herrührt, braucht die Constante $c$ nicht denselben Werth wie für die inneren Punkte zu haben. Um sie zu bestimmen, nimmt man $r = R$ und findet nach dem vorigen Falle

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{R^2} \text{ also } c = -M,$$

mithin ist für alle äusseren Punkte

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r^2},$$

und die Anziehung

$$= \frac{M\mu f}{r^2},$$

d. h. eine hohle aus concentrischen Schichten bestehende Kugel übt auf äussere Punkte dieselbe Wirkung, als wenn ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

177. Anwendung auf einen unendlichen Cylinder. Einen unendlichen hohlen Cylinder denken wir uns zusammengesetzt aus homogenen Schichten, deren Dichtigkeit nur eine Funktion der Entfernung von der Achse sein möge, die wir zur Achse der $z$ nehmen; seine Wirkung auf irgend einen Punkt ist gegen die Stelle gerichtet, wo die Achse von einer auf ihr senkrechten durch den angezogenen Punkt gelegten Ebene geschnitten wird. Diesen Durchschnitt wählen wir zum Coordinatenanfang und bezeichnen mit $r$ seine Entfernung vom angezogenen Punkte. Die Anziehung ist nur von $r$ abhängig und zwar

$$\mu f \frac{dV}{dr}.$$

Für alle Punkte, welche keinen Theil der Cylindermasse ausmachen, erhält man, weil $V$ unabhängig von $\gamma$ ist,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = 0;$$

woraus

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

Mit $r$ multiplicirt, giebt diess

$$d\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0;$$

und durch Integration

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r}.$$

wo $c$ die willkürliche Constante ist. Diese hat aber, wie früher bei der Hohlkugel, für äussere und innere Punkte nicht denselben Werth und es sind daher die Fälle zu unterscheiden, ob $r$ kleiner als der innere oder grösser als der äussere Radius des Cylinders ist.

Im ersten Falle muss $c = 0$ sein für $r = 0$, also erhält man für alle Punkte des Innern

$$\frac{dV}{dr} = 0,$$

d. h. „ein hohler unendlicher aus homogenen concentrischen Schichten gebildeter Cylinder übt auf einen innerhalb des umschlossenen Hohlraumes liegenden Punkt keine Anziehung aus." Direct würde man diesen Satz auf dieselbe Art wie für das hohle Ellipsoid beweisen.

Suchen wir jetzt den Werth von $\frac{dV}{dr}$ für die zur Masse des Cylinders gehörigen Punkte; für diese hat man:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho;$$

und man findet durch Integration, indem man durch $R_1$ den Radius der inneren Fläche bezeichnet,

$$r\frac{dV}{dr} = -4\pi\int_{R_1}^{r}\varrho r\, dr.$$

Dabei ist keine Constante hinzuzufügen, weil $\frac{dV}{dr} = 0$ wird für $r = R_1$, indem $\frac{dV}{dr}$ Null ist für alle Punkte innerhalb der Oberfläche mit dem Radius $R_1$. Für $r = R$ wird

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi}{R}\int_{R_1}^{R}\varrho r\, dr$$

Für die äusseren Punkte erhält man

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r}.$$

Nimmt man $r = R$, so giebt die vorige Gleichung

$$C = -4\pi \int_{R_1}^{R} \varrho r \, dr.$$

Da hiermit die Constante bestimmt ist, so hat man für alle $r > R$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r};$$

und die Anziehung des Cylinders ist:

$$\frac{\mu f C}{r};$$

wie man sieht, ändert sie sich im umgekehrten Verhältnisse der Entfernung des Punktes von der Achse des Cylinders.

## Anziehung der Ellipsoide.

178. Um die drei Componenten der Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen Punkt zu finden, zerlegt man diesen Körper in unendlich dünne Schichten und zwar durch eine Reihe von Flächen, welche der Begrenzungsfläche ähnlich sind; man sucht ferner die Componenten der Anziehung irgend einer Schicht, indem man dieselben als Functionen der Dicke und des Parameters ansieht, welcher eine der Oberflächen dieser Schicht bestimmt, endlich integrirt man die drei Differentiale, wobei man den Parameter zwischen den Grenzen variiren lässt, welche den äussersten Oberflächen entsprechen.

Bei einem vollen Ellipsoid sind die Grenzflächen die äussere Fläche des Ellipsoids und sein Mittelpunkt; ist der anziehende Körper zwischen den Oberflächen zweier ähnlichen Ellipsoide eingeschlossen, so sind diese Flächen die beiden Grenzen; befindet sich endlich der angezogene Punkt im Innern des Körpers, so braucht man den Theil, welcher ausserhalb der Oberfläche des durch den Punkt gehenden ähnlichen Ellipsoids liegt, nicht zu beachten, weil man weiss, dass er keine Wirkung ausübt. In allen Fällen kommt man auf das Problem zurück, die Componenten der

Anziehung zu berechnen, welche eine zwischen zwei ähnlichen unendlich nahen Oberflächen enthaltene ellipsoidische Schicht auf einen ausser ihr oder auf ihrer Oberfläche liegenden Punkt ausübt.

Wir werden zunächst dieses Problem auf den Fall zurückführen, wenn der angezogene Punkt auf der äusseren Grenzfläche der Schicht liegt. Die hierzu nöthigen Entwickelungen sind den Arbeiten von Chasles entnommen.

## Vergleichung der Anziehung zweier confocalen Schichten auf einen und denselben äusseren Punkt.

179. *Bei* einer homogenen zwischen zwei ähnlichen unendlich nahen Ellipsoiden enthaltenen Schicht sind die Componenten ihrer Wirkung auf einen äusseren Punkt $xyz$ proportional den nach $x$, $y$, $z$ genommenen partiellen Differentialquotienten einer Funktion $V$, welche die Summe aller Massenelemente der Schicht, jedes dividirt durch seine Entfernung vom Punkte $xyz$, darstellt. Wir betrachten zweitens eine homogene Schicht von beliebiger Dichtigkeit zwischen zwei einander ähnlichen Ellipsoiden, von denen das äussere durch den angezogenen Punkt $xyz$ oder $M$ geht, und welche confocal sind mit den Begrenzungsflächen der ersten Schicht, so dass beide Ellipsoide vollkommen bestimmt sind und die gleichnamigen Achsen beider in demselben Verhältnisse stehen. Ferner wollen wir mit dem Ausdrucke correspondirende oder entsprechende Punkte auf den Oberflächen zweier beliebiger Ellipsoide solche Punkte bezeichnen, deren Coordinaten sich unter einander wie die ihnen parallelen Achsen verhalten. Man erkennt leicht, dass bei confocalen Ellipsoiden die Entfernung irgend eines Punktes des einen Ellipsoides von irgend einem Punkte des andern gleich ist der Entfernung der jenen Punkten entsprechenden Punkte. Dieser Satz folgt unmittelbar aus den zwei nachstehenden Theoremen, deren Beweis wir wegen ihrer Einfachheit übergehen:

1) „Die Differenz der Quadrate der Entfernungen zwischen zwei entsprechenden Punkten einerseits und dem Mittelpunkte zweier confocalen Ellipsoide andererseits ist constant;“

2) „Das Product aus irgend einem Radiusvector des einen und irgend einem Vector des andern Ellip-

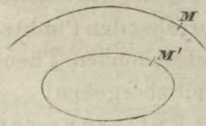
soides und aus dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Vectoren bleibt dasselbe für die entsprechenden Punkte."

Auch ist die Summe der Quadrate dieser Radien vermöge des ersten Satzes auf beiden Seiten dieselbe, woraus der in Rede stehende Satz folgt.

Man sieht nun leicht, indem man diese Sätze auf die vorhin erwähnten confocalen Schichten anwendet, dass jedem in der Dicke der einen Schicht genommenen Punkte ein in der andern Schicht liegender Punkt entspricht und dass ferner zwei auf den Oberflächen begrenzte Stücke, von denen sich alle Punkte in beiden Schichten entsprechen, proportional sind den Produkten der drei Coordinaten der correspondirenden Punkte, oder den Produkten der Achsen der inneren oder äusseren Ellipsoide und folglich den Rauminhalten der beiden Schichten. Denn man kann diese Volumina in unendlich kleine Parallelepipeda zerlegen, deren Kanten den Achsen parallel sind und deren Ecken in den entsprechenden Punkten liegen; die Kanten dieser Parallelepipeda sind den parallelen Achsen proportional, die Volumina also den Produkten der drei gleichnamigen Achsen, und folglich werden ihre Summen oder die beiden fraglichen Volumina gleichfalls in der angegebenen Weise proportional.

Das Volumen der vorliegenden Schicht theilen wir in unendlich kleine Elemente, dividiren die Masse eines jeden durch seine Entfernung vom Punkte $M$ und erhalten so alle Elemente des Potentiales $V$. Das Volumen der zweiten Schicht zerlegen wir in entsprechende Elemente und dividiren die Masse eines jeden durch seine Entfernung vom Punkte $M'$, welcher dem Punkte $M$ auf der äusseren Grenzfläche der gegebenen Schicht entspricht. Da zwei entsprechende Elemente sich unter einander wie die ganzen Schichten verhalten, und ihre Entfernungen von den correspondirenden Punkten $M$, $M'$ gleich sind, so müssen die beiden Summen oder die beiden Funktionen $V$ den Massen der beiden Schichten gleichfalls proportional sein. Nun ist das Potential $V$, welches sich auf die durch $M'$ gehende Schicht bezieht, constant für alle Punkte in ihrem Innern, und folglich auch für alle Punkte der äusseren Grenzfläche der durch $M'$ gehenden Schicht, also wird auch das Potential

Fig. 43.



$V$ für die vorliegende Schicht constant sein, welche Lage man dem Punkte $M$ auf dem confocalen durch $M$ gehenden Ellipsoide auch geben mag. D. h. „die Resultante der Anziehung der gegebenen Schicht auf den Punkt $M$ ist normal zu dem confocalen durch diesen Punkt gehenden Ellipsoide.“

Wir können jetzt die Anziehung der ersten Schicht auf den Punkt $M$ mit der Wirkung einer andern Schicht vergleichen, deren zwei ähnliche Grenzoberflächen mit denen der ersten confocal und zwischen jenen und der durch $M$ gehenden Fläche enthalten sind. In der That geben ihre beiden Potentiale, in Bezug auf den Punkt $M$, durch ihre respectiven Massen dividirt, dasselbe Resultat, was aus dem vorhin Gesagten hervorgeht. Daraus folgt, dass die partiellen Differentialquotienten der beiden Potentiale wie sie selbst, in dem Verhältniss der Massen ihrer Schichten stehen, und dass mithin „die Resultanten der Anziehungen dieser beiden Schichten auf einen und denselben äusseren Punkt dieselbe Richtung haben und ihren Massen proportional sind.“ *)

Mittelst dieses Satzes gelangen wir zu der angekündigten Reduction. Wir können nämlich voraussetzen, dass die Schicht, deren Wirkung wir so eben mit Anziehung der gegebenen Schicht verglichen haben, zusammenfalle mit jener, deren äussere Oberfläche durch den Punkt $M$ geht. Da diese beiden Wirkungen in demselben Sinne geschehen und den Massen der beiden Schichten proportional sind, so bestimmt die eine von ihnen die andere. D. h. „Um die Wirkung einer Schicht auf einen äusseren Punkt zu finden, berechnet man die auf den nämlichen Punkt gerichtete Anziehung einer confocalen Schicht, welche aus derselben Substanz besteht und deren äussere Oberfläche durch diesen Punkt geht; diese Anziehung multiplicirt man durch das Verhältniss

---

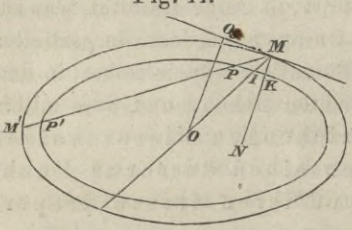
*) Dieser Satz führt, wie Chasles gezeigt hat und wir bald sehen werden, zu dem berühmten Maclaurin'schen Theorem, welches die Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen äussern Punkt finden lehrt, wenn die Anziehung eines andern Ellipsoids auf einen Punkt seiner Oberfläche bekannt ist. Diese Reduction hat ihren Werth darin, dass die letztere Anziehung leichter ermittelt werden kann.

des Volumens der ersten zur zweiten Schicht, ohne etwas an ihrer Richtung zu ändern."

## Berechnung der Wirkung einer ellipsoidischen Schicht auf einen Punkt ihrer Oberfläche.

180. Sei $M$ irgend ein Punkt der äusseren Oberfläche einer homogenen Schicht zwischen zwei ähnlichen und unendlich nahen Ellipsoiden; die Anziehung der Schicht auf diesen Punkt geschieht in der Richtung der Normalen $MN$ auf dem äussern Ellipsoide, so dass man jede elementare Wirkung durch ihre Componente nach $MN$ ersetzen kann. Zugleich betrachten wir den Punkt $M$ als den Scheitel einer unendlichen Anzahl körperlicher Winkel, welche den Raum auf einer und derselben Seite der Tangentialebene erfüllen.

Fig. 44.




Ist $d\omega$ irgend einer dieser Winkel und $MM'$ die Richtung einer seiner Kanten, so kann man den von ihm eingeschlossenen Theil der Schicht in Elemente zerlegen, deren Volumen durch $r^2\, dr\, d\omega$ ausgedrückt wird, wo $r$ ihren Abstand vom Punkte $M$ bezeichnet. Multiplicirt man mit der Dichtigkeit $\varrho$, mit der Attractionskraft $f$ der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung, mit der Masse $\mu$ des in $M$ angenommenen Punktes und dividirt durch das Quadrat der Entfernung, so erhält man die Anziehung des Elements der Schicht auf die Masse $\mu$; ihr Werth ist

$$\varrho\, f\, \mu\, dr\, d\omega;$$

durch Integration von $M$ bis $P$ wird hieraus

$$\varrho\, f\, \mu\, . MP.\, d\omega$$

und bei nochmaliger Integration von $P'$ bis $M'$

$$\varrho\, f\, \mu . M'P'.\, d\omega.$$

Nun ist $M'P' = MP$ wegen der Aehnlichkeit der beiden Ellipsoide, also reducirt sich die Anziehung des in dem Winkel $d\omega$ enthaltenen Theils auf

$$2\varrho\, f\, \mu\, . MP\, . d\omega.$$

Durch Multiplication mit $\cos(PMK)$ erhält man ihre Componente in der Richtung der Normale; wegen $MP . \cos PMK = MK$ hat man dafür

$$2\varrho f \mu \,.\, MK \,.\, d\omega.$$

Dieser Ausdruck ist nur genau unter der Voraussetzung eines unendlich kleinen Bogens $PK$, die hier wegen der unendlichen Kleinheit von $MK$ stattfindet.

Der grösste Winkel $KMP$ ist ein rechter, weil $PK$ ein unendlich Kleines von niedrigerer Ordnung als $MK$ ist, sodass man durch Summirung aller ähnlichen Ausdrücke für alle Elemente $d\omega$ als Wirkung der ganzen Schicht erhält

$$4\pi \varrho f \mu \, MK.$$

Statt der Dicke $MK$ der Schicht im Punkte $M$, ist es besser die Differenz der grossen Halbachsen $a$ und $a + da$ der beiden Oberflächen einzuführen. In dieser Beziehung man

$$\frac{MK}{MI} = \frac{QO}{MO}, \quad \text{woraus } MK = QO \, \frac{MI}{MO};$$

hier lässt sich $\frac{MI}{MO}$ durch $\frac{MI}{IO}$ oder durch $\frac{da}{a}$ ersetzen, mithin ist die Anziehung der Schicht:

$$4\pi \varrho f \mu \, P \frac{da}{a},$$

wo $P$ die Senkrechte vom Mittelpunkt auf die in $M$ berührende Ebene bezeichnet.

Die mit den positiven Achsen der $x$, $y$, $z$ parallelen Componenten dieser Wirkung erhält man durch Multiplication mit den Cosinus der Winkel, welche die innere Richtung der Normale mit den Achsen bildet. Bezeichnen wir mit $a$, $b$, $c$ die Halbachsen des Ellipsoids und mit $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $M$, so haben diese Cosinus folgende Werthe:

$$\frac{-Px}{a^2}, \quad \frac{-Py}{b^2}, \quad \frac{-Pz}{c^2}.$$

Die drei Componenten sind daher

$$-4\pi \varrho f \mu \frac{P^2 x \, da}{a^3}, \quad -4\pi \varrho f \mu \frac{P^2 y \, da}{ab^2}, \quad -4\pi \varrho f \mu \frac{P^2 z \, da}{ac^2};$$

wo $P^2$ den Werth hat:

$$P^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Man kann noch beachten, dass wegen

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c}$$

die Ausdrücke der beiden letzten Componenten sich aus dem ersten durch Vertauschung von $x$ und $a$ mit $y$ und $b$ oder mit $z$ und $c$ herleiten lassen.

**Berechnung der Componenten der Anziehung eines Ellipsoids auf einen äusseren Punkt.**

181. Von den Halbachsen $A$, $B$, $C$ eines homogenen Ellipsoids sei $A$ die kleinste und zur Abkürzung

$$\frac{B^2 - A^2}{A^2} = \lambda^2, \qquad \frac{C^2 - A^2}{A^2} = \lambda'^2.$$

Bezeichnen wir mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten eines äusseren Punktes, so handelt es sich darum, die Componenten $X$, $Y$, $Z$ der Anziehung des Ellipsoids auf diesen Punkt zu berechnen, in welchem wir uns die Einheit der Masse vereinigt denken. Zerlegen wir den Körper durch ähnliche Ellipsoide in unendlich dünne Schichten und nennen $a$ und $a - da$ die Halbachsen der beiden Oberflächen, welche irgend eine Schicht begrenzen, so folgen hieraus auch die andern Achsen; und da wir die Componenten der Wirkung dieser Schicht berechnet haben, so genügt es, sie in Bezug auf $a$ von $a = 0$ bis $a = A$ zu integriren, wenn das Ellipsoid ein volles ist. In dem Falle, wo es sich um einen hohlen von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Körper handelte, würde man von dem Werthe für $a$, der sich auf die innere Grenzfläche bezieht, bis zu dem Werthe von $a = A$ integriren.

Der in Rede stehenden Schicht substituiren wir eine andere, welche von ähnlichen Ellipsoiden begrenzt ist; diese Ellipsoide nehmen wir confocal den Begrenzungsflächen der ersten Schicht und so, dass das grössere durch den Punkt $M$ geht. Sind $a'$, $b'$, $c'$ und $a' - da'$, $b' - db'$, $c' - dc'$ die Halbachsen dieser beiden Ellipsoide, so hat man folgende Beziehungen zwischen ihnen:

1) $$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2,$$

$$\frac{da}{a} = \frac{da'}{a'}, \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C};$$

2) $$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} = 1;$$

die Componenten der Wirkung dieser Schicht auf den Punkt $M$ sind

$$-4\pi\varrho f\alpha\,\frac{P'^2\,da'}{a'^3},\quad -4\pi\varrho f\beta\,\frac{P'^2\,da'}{a'b'^2},\quad -4\pi\varrho f\gamma\,\frac{P'^2\,da'}{a'c'^2};$$

multiplicirt man sie mit $\frac{abc}{a'b'c'}$, so ergeben sich die Componenten der Wirkung der in Rede stehenden Schicht, und indem man $\frac{da}{a}$ für $\frac{da'}{a'}$ setzt, findet man

$$dX = -4\pi\varrho f\alpha\,\frac{P'^2\,bc\,da}{a'^3b'c'},$$

$$dY = -4\pi\varrho f\beta\,\frac{P'^2\,bc\,da}{b'^3a'c'},$$

$$dZ = -4\pi\varrho f\gamma\,\frac{P'^2\,bc\,da}{c'^3a'b'}.$$

Nehmen wir $\frac{a}{a'} = u$, woraus $a' = au^{-1}$, so ist vermöge der Gleichungen 1)

$$b' = a\sqrt{u^{-2}+\lambda^2},\quad c' = a\sqrt{u^{-2}+\lambda'^2}$$

$$b = a\,\frac{B}{A}\qquad c = a\,\frac{C}{A}$$

und die Gleichung 2) liefert nun

$$3)\qquad \alpha^2u^2 + \frac{\beta^2}{u^{-2}+\lambda^2} = \frac{\gamma^2}{u^{-2}+\lambda'^2} = a^2.$$

Demnach hängt $a$ und folglich $a'$, $b'$, $c'$ von $u$ ab, und es ist daher nöthig $P'^2$ als Funktion von $u$ auszudrücken und somit die Componenten $dX$, $dY$, $dZ$ auf diese einzige Variebele zurückzuführen.

Nun hat man:

$$P'^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a'^4}+\frac{\beta^2}{b'^4}+\frac{\gamma^2}{c'^4}} = \frac{a^4}{\alpha^2u^4 + \frac{\beta^2}{(u^{-2}+\lambda^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(u^{-2}+\lambda'^2)^2}}.$$

Indem man die Gleichung 3) differentiirt, um $da$ mit Hülfe von $du$ auszudrücken, und dabei auf den Werth von $P'^2$ Rücksicht nimmt, ergiebt sich

$$P'^2\,da = a'^3\,du,$$

woraus

$$dX = -4\pi\varrho f\alpha \frac{bc\,du}{b'c'}$$

$$dY = -4\pi\varrho f\beta \frac{a'^2 bc}{b'^3 c'} du,$$

$$dZ = -4\pi\varrho f\gamma \frac{a'^2 bc}{c'^3 b'} du.$$

Ersetzen wir $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ durch ihre Werthe in $a$ und $u$, so geht $a$ heraus, und es kommt, wenn man noch die Masse $M = \frac{4}{3}\pi\varrho ABC$ einführt,

$$4)\quad \begin{cases} dX = -\dfrac{3Mf\alpha}{A^3}\dfrac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dY = -\dfrac{3Mf\beta}{A^3}\dfrac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dZ = -\dfrac{3Mf\gamma}{A^3}\dfrac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Durch Integration von $u = 0$ bis $u = \frac{A}{A'}$, wo $A'$ die in der Richtung der $x$ liegende Halbachse des confocalen durch den gegebenen Punkt gehenden Ellipsoids bezeichnet, erhält man die Componenten der totalen Anziehung, nämlich:

$$5)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mf\alpha}{A^3}\displaystyle\int_0^{\frac{A}{A'}}\dfrac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ Y = -\dfrac{3Mf\beta}{A^3}\displaystyle\int_0^{\frac{A}{A'}}\dfrac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ Z = -\dfrac{3Mf\gamma}{A^3}\displaystyle\int_0^{\frac{A}{A'}}\dfrac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

darin ist $A'$ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{\alpha^2}{A'^2} + \frac{\beta^2}{A'^2 + B^2 - A^2} + \frac{\gamma^2}{A'^2 + C^2 - A^2} = 1.$$

Diese Gleichung kann nur einen einzigen positiven Werth für $A'^2$

liefern; die beiden negativen Werthe beziehen sich auf die confocalen Hyperboloide.

Liegt der angezogene Punkt in der Oberfläche des Ellipsoids selbst, so hat man $A' = A$, und die zweite Grenze der Integrale ist $= 1$; diess giebt für die Componenten der Wirkung auf einen Punkt in der Oberfläche folgende Ausdrücke:

$$6)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mf\alpha}{A^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y = -\dfrac{3Mf\beta}{A^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Z = -\dfrac{3Mf\gamma}{A^3}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

Befindet sich der Punkt im Innern des Ellipsoids, so braucht man nur die Wirkung eines ähnlichen Ellipsoides zu betrachten, das durch diesen Punkt geht. Nun ist aber das Verhältniss seiner Masse zum Cubus seiner Halbachse der $x$ dasselbe wie für das vorliegende Ellipsoid; man lässt daher in den Formeln 6) $\frac{M}{A^3}$ ungeändert, und erhält immer noch die gesuchten Componenten.

Man erkennt hieraus die merkwürdige Eigenschaft, dass jede Componente der Anziehung eines Ellipsoids auf einen innern Punkt nur von der parallelen Coordinate des Punktes abhängt und ihr proportional ist.

Uebrigens lassen sich die Formeln 5) aus dem Integrale, welches in der ersten dieser Formeln vorkommt, ganz allein ableiten. Sei nämlich

$$L = \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

so giebt die Differentiation von $L\lambda$ nach $\lambda$:

$$\frac{d(\lambda L)}{d\lambda} = \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\,(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

und die Differentiation von $\lambda' L$ nach $\lambda'$:

$$\frac{d(\lambda' L)}{d\lambda'} = \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \; (1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}};$$

wodurch die Gleichungen 5) in folgende übergehen:

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^3} L,$$

$$Y = -\frac{3Mf\beta}{A^3} \frac{d(\lambda L)}{d\lambda},$$

$$Z = -\frac{3Mf\gamma}{A^3} \frac{d(\lambda' L)}{d\lambda'},$$

Wäre $\lambda' = \lambda$, so darf diese Specialisirung erst nach geschehener Differentiation vorgenommen werden.

174. Abgeplattetes Rotationsellipsoid. Für $B = C$ hat man ein an beiden Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid, ferner $\lambda' = \lambda$ und:

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^3} \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{1+\lambda^2 u^2},$$

$$Y = -\frac{3Mf\beta}{A^3} \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2},$$

$$Z = -\frac{3Mf\gamma}{A^3} \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2}.$$

Vermöge der bekannten Integralformeln

$$\int_0^u \frac{u^2 du}{1+\lambda^2 u^2} = \frac{1}{\lambda^3} (\lambda u - arc\ tng\ \lambda u),$$

$$\int_0^u \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^3} \left( arc\ tng\ \lambda u - \frac{\lambda u}{1+\lambda^2 u^2} \right)$$

findet man

$$7)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mf\alpha}{\lambda^3 A^3}\left(\dfrac{\lambda A}{A'} - arc\ tng\ \dfrac{\lambda A}{A'}\right), \\ Y = -\dfrac{3Mf\beta}{2\lambda^3 A^3}\left(arc\ tng\ \dfrac{\lambda A}{A'} - \dfrac{\lambda A A'}{A'^2 + \lambda^2 A^2}\right), \\ Z = -\dfrac{3Mf\gamma}{2\lambda^3 A^3}\left(arc\ tng\ \dfrac{\lambda A}{A'} - \dfrac{\lambda A A'}{A'^2 + \lambda^2 A^2}\right). \end{cases}$$

Ist $A' = A$, so liegt der Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoides selbst; für $\lambda = 0$ reducirt sich das Ellipsoid auf eine Kugel, und die Formeln 7) fallen mit den früher für diesen Fall entwickelten Resultaten zusammen.

175. Gestrecktes Rotationsellipsoid. Für $A = B$ ist das Ellipsoid gleichfalls durch Umdrehung entstanden aber gegen die Pole verlängert; man hat dann $\lambda = 0$, und die Formeln 5) werden:

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3Mf\beta}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = -\frac{3Mf\gamma}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2 du}{(1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\int_0^u \frac{u^2 du}{(1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u\sqrt{1 + \lambda'^2 u^2}}{2\lambda'^2} - \frac{1}{2\lambda'^3}\, l\,(\lambda' u + \sqrt{1 + \lambda'^2 u^2}),$$

und das in $Z$ vorkommende Integral lässt sich aus diesem ableiten, wenn man es mit $\lambda'$ multiplicirt und das Produkt nach $\lambda'$ differentiirt; man findet so

$$\int_0^u \frac{u^2 du}{(1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda'^3}\left[\, l\,(\lambda' u + \sqrt{1 + \lambda'^2 u^2}) - \frac{\lambda' u}{\sqrt{1 + \lambda'^2 u^2}}\right],$$

und folglich

$$8)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mf\alpha}{2\lambda'^3 A^2}\left[\dfrac{\lambda' A}{A'}\sqrt{1+\dfrac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}} - l\left(\dfrac{\lambda' A}{A'}+\sqrt{1+\dfrac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}\right)\right], \\ Y = -\dfrac{3Mf\beta}{2\lambda'^3 A^3}\left[\dfrac{\lambda' A}{A'}\sqrt{1+\dfrac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}} - l\left(\dfrac{\lambda' A}{A'}+\sqrt{1+\dfrac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}\right)\right], \\ Z = -\dfrac{3Mf\gamma}{\lambda'^3 A^3}\left[l\left(\dfrac{\lambda' A}{A'}+\sqrt{1+\dfrac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}\right) - \dfrac{\dfrac{\lambda' A}{A'}}{\sqrt{1+\dfrac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}}\right]. \end{cases}$$

Das Ellipsoid wird zu einer Kugel für $C = A$ oder $\lambda' = 0$; die Formeln 8) nehmen dann die Form $\frac{0}{0}$ an, und liefern nach gewöhnlicher Behandlung diejenigen, welche dieser Fall erfordert.

Wir wollen jetzt die Methoden kennen lehren, mittelst deren man dasselbe Problem löste, bevor die Untersuchung von Chasles bekannt war.

## Andere Methode zur Berechnung der Attraction des Ellipsoids.

176. Die directe Berechnung der Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen Punkt ist viel leichter, wenn dieser Punkt in seinem Innern oder auf seiner Oberfläche, als wenn er ausserhalb liegt. Den ersten Fall hat man zunächst behandelt und die Formeln auf einfache Quadraturen gebracht; nachher waren alle Bemühungen dahin gerichtet, den zweiten Fall auf den ersten zu reduciren. Die Ergebnisse dieser Arbeiten bestehen in zwei Reductionstheoremen; das eine trägt den Namen Maclaurin's, obgleich dieser Geometer es nur in einem speciellen Falle bewiesen hat, das andere wurde von Jvory aufgestellt. Später ist Poisson nach vielen Anstrengungen dazu gelangt, die Ausführung der Integration für den äusseren Punkt direct herzustellen; letztere Untersuchung werden wir hier nicht anführen, weil die Rechnungen zu verwickelt sind und uns für die Sache selbst weniger wichtig erscheinen.

Die Gleichung des Ellipsoids schreiben wir in der gewöhnlichen Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

und bezeichnen mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten des inneren angezogenen Punktes $\mu$, welchem wir eine der Einheit gleiche Masse beilegen, mit $\varrho$ die Dichtigkeit der homogenen Materie, woraus das Ellipsoid besteht, mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Winkel zwischen der Richtung irgend eines durch den Punkt $\mu$ gehenden Radiusvector und den Achsen, endlich mit $d\omega$ einen unendlich kleinen körperlichen Winkel, welcher die Richtung dieses Radius und seinen Scheitel in $\mu$ hat. Zerlegen wir den Theil des Ellipsoids, welcher in diesem körperlichen Winkel enthalten ist, durch Kugelflächen, deren Mittelpunkte in $\mu$ liegen und deren Radien $r$ um unendlich kleine Differenzen $dr$ wachsen, so ist irgend eines der entstandenen Volumenelemente $= r^2\, d\omega\, dr$, und da die Anziehung im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkt, so wird die Anziehung des Elementes auf den Punkt $\mu$ durch $f\varrho\, d\omega\, dr$ ausgedrückt. Bildet man die Summe der Wirkungen aller Elemente, welche den körperlichen Winkel von dem Scheitel $\mu$ bis zu seinem Zusammentreffen mit dem Ellipsoid ausfüllen, so erhält man $f\varrho\, r\, d\omega$, wo $r$ den Radius $\mu M$ bezeichnet. Die drei Componenten der Wirkung dieses Theils des Körpers sind:

$$f\varrho\, r \cos \xi\, d\omega, \quad f\varrho\, r \cos \eta\, d\omega, \quad f\varrho\, r \cos \zeta\, d\omega.$$

Sei jetzt $r'$ der negative Werth des Radius $\mu M'$ der Oberfläche des Ellipsoids, welcher denselben Winkeln $\xi, \eta, \zeta$ entspricht. Verlängert man den ersten Winkel in entgegengesetztem Sinne, so würde eine der vorigen ähnliche Rechnung entstehen; nur die Winkel, welche sich auf seine Richtung beziehen, wären die Supplemente zu $\xi, \eta, \zeta$ und der absolute Werth des Radiusvector würde $= -r'$ sein; die Componenten der Kraft, welche von dem zweiten in dem gegenüberliegenden Winkel enthaltenen Theile des Ellipsoides ausgeht, sind demnach

$$f\varrho\, r' \cos \xi\, d\omega, \quad f\varrho\, r' \cos \eta\, d\omega, \quad f\varrho\, r' \cos \zeta\, d\omega.$$

Mit jenen zusammen geben sie:

$$f\varrho\, (r+r') \cos \xi\, d\omega, \quad f\varrho\, (r+r') \cos \eta\, d\omega, \quad f\varrho\, (r+r') \cos \zeta\, d\omega,$$

und wenn man die Summe von Ausdrücken dieser Art bildet, indem man für $d\omega$ alle Elemente einer Halbkugel nimmt, deren Centrum in $\mu$ liegt und deren Radius die Einheit ist, so erhält man die Componenten $X$, $Y$, $Z$ der Wirkung des ganzen Ellipsoids auf den Punkt $\mu$. Um die Werthe von $r$ und $r'$ zu bekommen, muss man das Ellipsoid auf Polarcoordinaten beziehen mittelst der Formeln:

$$x = \alpha + r \cos \xi, \quad y = \beta + r \cos \eta, \quad z = \gamma + r \cos \zeta,$$

was als Gleichung des Ellipsoids ergiebt:

1) $$pr^2 + 2qr = l$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\frac{\cos^2 \xi}{a^2} + \frac{\cos^2 \eta}{b^2} + \frac{\cos^2 \zeta}{c^2} = p,$$

$$\frac{\alpha \cos \xi}{a^2} + \frac{\beta \cos \eta}{b^2} + \frac{\gamma \cos \zeta}{c^2} = q,$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = l.$$

Man erkennt sofort[1], dass die beiden Werthe von $r$, welche durch die Gleichung 1) für einen Werth der Winkel $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gegeben werden, entgegengesetzte Zeichen besitzen, weil $p$ und $l$ wesentlich positiv sind; man hat folglich

$$r + r' = -\frac{2q}{p}.$$

Aus der Bemerkung, dass für zwei entgegengesetzte Richtungen $\frac{q}{p}$ bis auf das Zeichen denselben Werth hat, und dass folglich die Produkte

$$\frac{q \cos \xi}{p}, \quad \frac{q \cos \eta}{p}, \quad \frac{q \cos}{p}$$

der Grösse und Richtung nach für diese beiden Richtungen dieselben sind, folgt augenblicklich, dass man statt jener Richtungen $\mu M$ des körperlichen Winkels, welche auf einer und derselben Seite einer durch $\mu$ gehenden Ebene liegen, auch alle um diesen Punkt herumliegenden Richtungen nehmen kann, vorausgesetzt, dass das Resultat mit 2 dividirt wird. Beziehen wir also $\Sigma$ auf alle Richtungen um den Punkt $\mu$, so erhalten wir

$$X = -f\varrho \, \Sigma \frac{q \cos \xi}{p} d\omega,$$

$$Y = -f\varrho \, \Sigma \frac{q \cos \eta}{p} d\omega,$$

$$Z = -f\varrho \, \Sigma \frac{q \cos \zeta}{p} d\omega.$$

Unter den einzelnen Summen, aus welchen sich die Werthe von

$X$, $Y$, $Z$ zusammensetzen, wenn man für $q$ seinen Werth substituirt, finden sich u. A. die drei folgenden:

$$\Sigma \frac{\cos\xi \cos\eta \, d\omega}{p}, \quad \Sigma \frac{\cos\xi \cos\zeta \, d\omega}{p}, \quad \Sigma \frac{\cos\eta \cos\zeta \, d\omega}{p}.$$

Diese sind offenbar Null, weil sie aus Elementen bestehen, die zu zwei gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. Denn wenn man irgend welche passend gewählte zwei Werthe von den drei Winkeln festhält, so kann der dritte zwei supplementäre Werthe haben, und der Nenner bleibt in beiden Fällen derselbe. Nach dieser Bemerkung ist

$$X = -\frac{f\varrho\alpha}{a^2} \Sigma \frac{\cos^2\xi \, d\omega}{p},$$

$$Y = -\frac{f\varrho\beta}{b^2} \Sigma \frac{\cos^2\eta \, d\omega}{p},$$

$$Z = -\frac{f\varrho\gamma}{c^2} \Sigma \frac{\cos^2\zeta \, d\omega}{p}.$$

Um diese Rechnungen auszuführen, müsste man den einen der drei Winkel $\xi$, $\eta$, $\zeta$ mittelst der beiden andern ausdrücken; aber es ist besser, die beiden Winkel in Rechnung zu bringen, welche man gewöhnlich bei Polarcoordinaten anwendet, nämlich den Winkel zwischen dem Radiusvector und der $x$-Achse, und den Winkel, welchen die Projection des Radiusvector auf die $yz$-Ebene mit der Achse der $y$ bildet. Bezeichnet man den ersten mit $\vartheta$ und den zweiten mit $\psi$, so hat man bekanntlich

$$\cos\xi = \cos\vartheta, \quad \cos\eta = \sin\vartheta \cos\psi, \quad \cos\zeta = \sin\vartheta \sin\psi.$$

Wir berechnen zuerst den Werth von $X$; die Formeln für $Y$ und $Z$ lassen sich nachher durch einfache Umtauschung der Buchstaben aus demselben herleiten. In dem neuen Systeme von Variabeln ist nun

$$d\omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi,$$

und

$$X = -\frac{f\varrho\alpha}{a^2} \int\!\!\int \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi}{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta \cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta \sin^2\psi}{c^2}};$$

das Integral wird in Bezug auf $\psi$ zwischen den Grenzen 0 und $2\pi$, und in Bezug auf $\vartheta$ zwischen 0 und $\pi$ genommen; das erste kann man auch von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ nehmen und das Resultat vervierfachen, das zweite wird man gleichfalls von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ nehmen und das Resultat verdoppeln.

Beginnen wir damit, die Integration nach $\psi$ auszuführen, und setzen

$$tang\,\psi = u,$$

woraus

$$sin^2\,\psi = \frac{u^2}{1+u^2},\quad cos^2\psi = \frac{1}{1+u^2},\quad d\psi = \frac{du}{1+u^2},$$

so erhalten wir leicht

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{p} = a^2b^2c^2\int_0^{\infty}\frac{du}{c^2\,(a^2\,sin^2\,\vartheta + b^2\,cos^2\,\vartheta) + b^2\,(a^2\,sin^2\,\vartheta + c^2\,cos^2\,\vartheta)\,u^2}$$

$$= \frac{\pi\,a^2\,bc}{2\sqrt{(a^2\,sin^2\,\vartheta + b^2\,cos^2\,\vartheta)\,(a^2\,sin^2\vartheta + c^2\,cos^2\,\vartheta)}}.$$

Es bleibt noch die Integration nach $\vartheta$ übrig, die in endlicher Form nicht ausführbar ist, so lange die drei Achsen des Ellipsoides ungleich sind. Um den Werth von $Y$ aus dem für $X$ abzuleiten reicht die Bemerkung aus, dass, wenn man den Winkel des Radiusvector mit der Achse der $y$ statt mit jener der $x$ in das Polarcoordinatensystem eingeführt hätte, die Rechnung in Bezug auf $Y$ von der so eben ausgeführten nur durch die Umtauschung von $a$ und $b$ verschieden gewesen wäre; dieselbe Bemerkung ist auf $c$ anwendbar und man zieht daraus folgende Formeln:

$$X = -4\pi f\varrho\,b\,c\,\alpha\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{cos^2\,\vartheta\,sin\,\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(a^2\,sin^2\,\vartheta + b^2\,cos^2\,\vartheta)\,(a^2\,sin^2\,\vartheta + c^2\,cos^2\,\vartheta)}},$$

$$Y = -4\pi f\varrho\,a\,c\,\beta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{cos^2\,\vartheta\,sin\,\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(b^2\,sin^2\,\vartheta + a^2\,cos^2\,\vartheta)\,(b^2\,sin^2\,\vartheta + c^2\,cos^2\,\vartheta)}},$$

$$Z = -4\pi f\varrho\,a\,b\,\gamma\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{cos^2\,\vartheta\,sin\,\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(c^2\,sin^2\,\vartheta + b^2\,cos^2\,\vartheta)\,(c^2\,sin^2\,\vartheta + a^2\,cos^2\,\vartheta)}}.$$

Mittelst der Substitution $cos\,\vartheta = u$ kann man diesen Gleichungen eine bessere Gestalt ertheilen; sie werden dann mit den Formeln 6) identisch, in welchen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Innern oder auf der Oberfläche des Ellipsoids bezeichnen.

Da die Vorzeichen von $X$, $Y$, $Z$ denen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entgegengesetzt sind, so strebt jede Componente den Punkt nach dem Anfangspunkte der Coordinaten zu ziehen. Ferner bleiben die Werthe von $X, Y, Z$ dieselben, wenn man die Grössen $a$, $b$, $c$ mit einer und derselben Zahl multiplicirt; die Anziehung wird also nicht geändert durch Addition oder Subtraction irgend einer Schicht, die zwischen der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids und einer ähnlichen grösseren oder kleineren Oberfläche enthalten ist, vorausgesetzt, dass der Punkt $\mu$ sich in ihrem Inneren befinde, denn unsere Rechnungen sind allein auf diese Ausnahme gegründet. Daraus schliesst man, dass der homogene Körper zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden, deren Achsen der Richtung nach zusammenfallen, auf einen Punkt innerhalb seiner kleineren Oberfläche keine Wirkung ausübt.

Nachdem das Problem für einen Punkt im Innern oder auf der Oberfläche des Ellipsoides gelöst ist, würde es nur nöthig sein, die Anziehung auf einen äusseren Punkt durch eine Anziehung der vorigen Art auszudrücken. Dies hat Maclaurin auszuführen gesucht mit Hülfe des nach ihm genannten Theorems; da ein genügender Beweis desselben den damaligen Geometern Mühe machte und nichts weniger als einfach war, so fuhr man fort, diese wichtige Theorie zu vervollkommnen, und Jvory hat ein anderes sehr elegantes Theorem entdeckt, welches den Gegenstand auf eine andere Weise erschöpfte, und woraus er das Maclaurin'sche in seiner ganzen Allgemeinheit herleitete. Nach ihm hat Rodrigues einen anderen analytischen sehr einfachen Beweis dieses letzten Theorems gefunden, und endlich hat Chasles dafür noch einen einfacheren und ganz geometrischen Beweis gegeben, auf den wir schon aufmerksam gemacht haben und den wir jetzt entwickeln wollen. *)

---

*) Auch von Seiten der deutschen Mathematiker hat die Theorie der Anziehungen wesentliche Bereicherungen erfahren; m. s. hierüber die beiden berühmten Abhandlungen:

C. J. Gauss: Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta etc. Commentat. soc. reg. Gotting. rec. Vol. IV. Gott. 1820, pag. 21.

G. Lejeune Dirichlet: Ueber eine neue Methode die Werthe vielfacher Integrale zu finden; Abhandl. der K. Akad. d. Wissensch. zu Berlin; aus dem Jahre 1839, erschienen 1841, S. 61 der mathem. Abhandl.

177. Der Maclaurin'sche Satz. Wenn man darauf ausgeht, die Wirkungen zweier confocalen homogenen Ellipsoide von beliebigen Dichtigkeiten auf einen und denselben ausserhalb beider gelegenen Punkt zu vergleichen, so kann man jeden dieser Körper in unendlich dünne Schichten zerlegen, und zwar durch ellipsoidische Oberflächen, welche der begrenzenden Fläche ähnlich und mit ihr confocal sind. Wir haben früher bewiesen, dass zwei homologe Schichten dieser beiden Körper auf den äusseren Punkt Wirkungen ausüben, die von gleicher Richtung und den Massen dieser Schichten, mithin auch denen der gegebenen Ellipsoide proportional sind. Es folgt daraus, dass man durch Zusammensetzung aller dieser elementaren Wirkungen, welche ein constantes Verhältniss zu einander und dieselbe Richtung haben, zwei Resultanten von derselben Richtung erhalten wird, welche unter einander in demselben Verhältnisse stehen. Daraus geht folgender Satz hervor:

„Zwei confocale homogene Ellipsoide üben auf irgend einen und denselben äusseren Punkt Wirkungen aus, welche von gleicher Richtung und den Massen dieser Körper proportional sind."

Dieser Satz gilt noch, wenn die Oberfläche des einen Ellipsoids durch denselben Punkt geht, und man erkennt leicht, dass die Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen äusseren Punkt gefunden wird, wenn man das confocale Ellipsoid bestimmt, das durch diesen Punkt geht und dieselbe Dichtigkeit wie das erste besitzt. Die Formeln 6) liefern die Componenten seiner Wirkung auf diesen Punkt, und es genügt, sie mit dem Verhältniss des Volumens des gegebenen Ellipsoids zu dem des zweiten zu multipliciren, um die Componenten der Wirkung des ersten zu erhalten. Wir wollen diese Rechnung sofort ausführen.

178. Anwendung des Maclaurin'schen Satzes. Seien $A$, $B$, $C$ die drei Halbachsen des gegebenen, $A'$, $B'$, $C'$ die des confocalen Ellipsoides, welches durch den äusseren Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ geht. Die Componenten der Wirkung des letzteren auf diesen Punkt werden direct ohne Schwierigkeit berechnet, und sind:

$$X' = -\frac{3M'f\alpha}{A'^3}\int_0^1 \frac{v^2dv}{\left(1+\frac{B'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y' = -\frac{3M'f\beta}{A'^3}\int\limits_0^1 \frac{v^2 dv}{\left(1+\frac{B'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z' = -\frac{3M'f\gamma}{A'^3}\int\limits_0^1 \frac{v^2 dv}{\left(1+\frac{B'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

beachtet man, dass

$$B'^2 - A'^2 = B^2 - A^2,\quad C'^2 - A'^2 = C^2 - A^2,\quad \frac{M'}{M} = \frac{A'B'C'}{ABC},$$

und setzt

$$\frac{v}{A'} = \frac{u}{A},$$

woraus für $u$ die Grenzen $u = 0$ und $u = \frac{A}{A'}$ folgen, und multiplicirt man ferner die drei Componenten $X'$, $Y'$, $Z'$ mit $\frac{ABC}{A'B'C'}$ so erhält man nach dem Maclaurin'schen Satze die Componenten der Anziehung des gegebenen Ellipsoids, wie sie durch die Formeln 5) gegeben sind.

179. Jvory'scher Satz. Mittelst dieses Theoremes kann man die Anziehung eines homogenen Ellipsoides auf einen äusseren Punkt aus der Anziehung eines andern Ellipsoids auf einen Punkt seines Innern herleiten. Es bietet keinen grössern Vortheil als der Maclaurin'sche Satz; aber, wie schon gesagt, erschien es zu einer Zeit, wo der erste Satz noch nicht streng oder wenigstens nicht sehr einfach erwiesen war, und es wurde daher von den Geometern mit Recht als eine wichtige Entdeckung im Gebiete der Attractionstheorie angesehen.

Bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten eines äusseren Punktes bei einem Ellipsoid mit den Halbachsen $A$, $B$, $C$, so ist die Componente $X$ seiner Anziehung auf diesen Punkt:

$$X = f\varrho \iiint \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

welche Integrale sich auf das ganze Volumen erstrecken. Integrirt man nach $x$ und bezeichnet mit $r_1$ und $r_2$ die Abstände des angezogenen Punktes von den äussersten Punkten der Linie des Ellipsoides, längs welcher man die Integration ausgeführt hat, so wird:

$$X = -f\varrho \int\int dy\, dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Wir construiren jetzt ein dem ersten confocales Ellipsoid, das durch den gegebenen Punkt geht, und suchen seine Anziehung auf den Punkt, welcher diesem letzten auf der Oberfläche des gegebenen Ellipsoides entspricht. Zu diesem Behuf nehmen wir das Rechteck $dy'\, dz'$, dessen Punkte die entsprechenden von denen des Rechteckes $dy\, dz$ sind, und integriren in der Ausdehnung der Linie des zweiten Ellipsoides, welche sich in $dy'\, dz'$ auf die Ebene $YZ$ projicirt. Für die Componente der Anziehung dieses letzten Körpers auf den dem gegebenen Punkte correspondirenden Punkt finden wir

$$X' = -f\varrho \int\int dy'\, dz' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$

die Radien $r_1$, $r_2$ sind dieselben wie für das erste Ellipsoid, weil ihre Endpunkte mit denen der andern correspondiren. Nun verhält sich $dy'\, dz' : dy\, dz = B'C' : BC$; und da dieser Satz für die Theile der Integrale stattfindet, welche sich auf irgend zwei correspondirende Linien der Integration beziehen, so gilt er auch für die Integrale selbst, woraus folgt:

$$X : X' = BC : B'C'$$

und ebenso:

$$Y : Y' = AC : A'C',$$
$$Z : Z' = AB : A'B'.$$

Man kann also folgenden Satz, welcher eben der Ivory'sche ist, aussprechen:

„Die Anziehungen, welche zwei confocale Ellipsoide parallel jeder Achse auf zwei correspondirende auf den betreffenden Flächen liegende Punkte ausüben, verhalten sich wie die Produkte aus den beiden auf jeder Componente senkrecht stehenden Achsen."

Poisson hat bemerkt, dass dieser Satz unabhängig von dem Gesetze der Anziehung gilt. Denn wenn die Function der Entfernung, welche die Anziehung ausdrückt, mit $F(r)$ bezeichnet wird, so ist:

$$X = f\varrho \int\!\!\int\!\!\int \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz\,F(r)}{r};$$

integrirt man nach $x$ den Ausdruck $(x-\alpha)\,F(r)\,\dfrac{dx}{r}$, oder $F(r)\,dr$, und bezeichnet das Resultat mit $\varphi(r)$, so erhält man:

$$X = f\varrho \int\!\!\int dy\,dz\,[\varphi(r_1) - \varphi(r_2)].$$

Für das zweite Ellipsoid ist ebenso:

$$X' = f\varrho \int\!\!\int dy'\,dz'\,[\varphi(r_1) - \varphi(r_2)];$$

woraus man schliesst

$$X : X' = BC : B'C',$$

und ebenso für die andern Componenten.

180. Anwendung des Ivory'schen Satzes. Man sieht, dass man nach diesem Satze die Componenten der Anziehung eines Ellipsoids auf einen äussern Punkt kennen lernt, wenn man durch diesen Punkt ein confocales Ellipsoid legt, die Componenten seiner Anziehung auf den correspondirenden Punkt der Oberfläche des ersten Ellipsoides bestimmt, und letztere Componenten mit den Verhältnissen der Produkte der darauf senkrechten Achsen multiplicirt.

Wir bezeichnen mit $A$, $B$, $C$ die Halbachsen des gegebenen Ellipsoids, mit $A'$, $B'$, $C'$ die des confocalen durch den gegebenen Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ gehenden und mit $A''$, $B''$, $C''$ die eines Ellipsoids, welches dem zweiten ähnlich und durch den Punkt $(\alpha', \beta', \gamma')$, welcher dem Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondirt, gelegt ist, endlich mit $M$, $M'$, $M''$ die Massen dieser drei Körper. Die Componenten der Anziehung des dritten Ellipsoids auf den Punkt $(\alpha', \beta', \gamma')$ sind dieselben wie die des zweiten; nach den für Punkte der Oberfläche geltenden Formeln hat man folglich

$$X' = -\frac{3M''f\alpha'}{A''^3}\int_0^1 \frac{v^2dv}{\sqrt{1+\dfrac{B''^2-A''^2}{A''^2}v^2}\sqrt{1+\dfrac{C''^2-A''^2}{A''^2}v^2}}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der beiden letzten Ellipsoide finden aber die Gleichungen statt:

$$\frac{B''^2-A''^2}{A''^2}=\frac{B'^2-A'^2}{A'^2},\quad \frac{C''^2-A''^2}{A''^2}=\frac{C'^2-A'^2}{A'^2},$$

$\frac{M''}{A''^3}=\frac{M'}{A'^3}$, und ferner $\alpha'=\frac{\alpha A}{A'}$; beachtet man noch die Gleichungen

$$B'^2-A'^2=B^2-A^2,\quad C'^2-A'^2=C^2-A^2,$$

so erhält man

$$X'=-\frac{3M'f\alpha A}{A'^4}\int\limits_0^1\frac{v^2dv}{\sqrt{1+\frac{B^2-A^2}{A'^2}v^2}\sqrt{1+\frac{C^2-A^2}{A'^2}v^2}}.$$

Setzt man endlich

$$\frac{v}{A'}=\frac{u}{A}$$

und multiplicirt mit $\frac{BC}{B'C'}$, so ergiebt sich

$$X=-\frac{3Mf\alpha}{A^3}\int\limits_0^{\frac{A}{A'}}\frac{u^2du}{\left(1+\frac{B^2-A^2}{A^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{C^2-A^2}{A^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ebenso verhält es sich mit den beiden andern Componenten und man kommt damit auf die Formeln 5) zurück.

## Uebergang von dem Ivory'schen Satze zu dem Maclaurin'schen.

181. Wir bezeichnen mit $X$, $Y$, $Z$ die Componenten der Anziehung des aus den Halbachsen $A, B, C$ construirten Ellipsoids auf den äusseren Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$, mit $X''$, $Y''$, $Z''$ die Componenten der Anziehung des confocalen, durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden, auf den correspondirenden Punkt, welcher zu Coordinaten $\frac{\alpha A}{A'}$, $\frac{\beta B}{B'}$, $\frac{\gamma C}{C'}$ hat, wo $A'$, $B'$, $C'$ die Halbachsen dieses Ellipsoids sind, endlich mit $X'$, $Y'$, $Z'$ die Componenten der Anziehung des zweiten Ellipsoids auf den Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ seiner Oberfläche. Der Satz von Ivory giebt

$$\frac{X}{X''}=\frac{BC}{B'C'},\quad \frac{Y}{Y''}=\frac{AC}{A'C'},\quad \frac{Z}{Z''}=\frac{AB}{A'B'};$$

aber für jeden Punkt im Innern eines Ellipsoids sind die Componenten der Anziehung der parallelen Coordinate proportional, also:

$$\frac{X''}{X'}=\frac{A}{A'},\quad \frac{Y''}{Y'}=\frac{B}{B'},\quad \frac{Z''}{Z'}=\frac{C}{C'};$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{X}{X'}=\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{Y}{Y'}=\frac{Z}{Z'}.$$

Betrachten wir ebenso ein confocales Ellipsoid mit den Halbachsen $A_1$, $B_1$, $C_1$, in Bezug auf welches der Punkt $\alpha\beta\gamma$ ein äusserer ist, und nennen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, die Componenten seiner Wirkung auf diesen Punkt, so erhalten wir

$$\frac{X_1}{X'}=\frac{A_1B_1C_1}{A'B'C'}=\frac{Y_1}{Y'}=\frac{Z_1}{Z'};$$

woraus

$$\frac{X}{X_1}=\frac{Y}{Y_1}=\frac{Z}{Z_1}=\frac{ABC}{A_1B_1C_1},$$

was nichts andres als der Maclaurin'sche Satz ist. Durch die umgekehrte Betrachtung würde man von letzterem zu dem Ivory'schen Satze übergehen.

182. Merkwürdige Folge des Ivory'schen Satzes. Auf zwei concentrische homogene Kugeln mit den Radien $a$ und $A$ angewendet, zeigt der Ivory'sche Satz, dass die Wirkung $P$ der Kugel $A$ auf einen Punkt $m$ der Oberfläche der innern Kugel sich zur Wirkung $p$ der Kugel $a$ auf einen Punkt $M$ der andern Fläche verhält wie $A^2$ zu $a^2$, d. h.

$$P=p\,\frac{A^2}{a^2}.$$

Diess Resultat ist unabhängig von dem Gesetze der Anziehung. Verlangen wir nun ein solches Gesetz, dass eine sphärische homogene Schicht keine Wirkung auf einen Punkt ihres Innern ausübt, so muss die Wirkung der Kugel $A$ auf den Punkt $m$ unabhängig von $A$ sein; was erfordert, dass

$$p=\frac{c}{A^2}$$

sei, wo $c$ eine Constante bedeutet; daraus folgt, dass die Wirkung irgend einer Kugel auf äussere Punkte, die in beliebigen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte liegen, in umgekehrtem Verhältnisse der Quadrate dieser Entfernungen steht, und da man die Kugel beliebig klein annehmen kann, so gilt dasselbe Gesetz auch für die Wirkung eines materiellen Punktes auf irgend welche Punkte; daraus folgt der wichtige Satz:

„Das einzige Anziehungsgesetz, für welches eine sphärische homogene Schicht keine Wirkung auf die Punkte ihres Innern ausübt, ist das des ungekehrten Verhältnisses des Quadrates der Entfernung."

Zweites Buch.

# Phoronomie.

# Erstes Capitel.

## Bewegung eines einzelnen Punktes.

### Einleitung.

1. Im vorigen Buche haben wir die allgemeinen Gesetze für das Gleichgewicht von Kräften an beliebigen Punktesystemen entwickelt; es bleibt uns daher noch die Aufgabe übrig, die Bewegungen zu untersuchen, welche die einzelnen Punkte eines solchen Systemes in dem Falle annehmen, wo jene Kräfte nicht im Gleichgewichte sind.

Bevor wir aber die von gegebenen Kräften erzeugten Bewegungen zu bestimmen versuchen, betrachten wir erst die Bewegung überhaupt, unabhängig von ihrer etwaigen Ursache. Es ist nämlich unmittelbar klar, dass die Einsicht in die Wirkungsweise der Kräfte leichter sein wird, wenn man die Theorie der Bewegung selber genauer kennt; man trennt gewissermaassen die Schwierigkeiten statt sie beisammen zu lassen.

Schon in der Geometrie wird nicht selten der Begriff der Bewegung zur Erzeugung von Raumgebilden benutzt, dabei aber auf die Zeit keine Rücksicht genommen; vielmehr reicht es hin, wenn nur die einzelnen Theile des bewegten Gebildes ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Stellung in die neue Lage gebracht werden, und es bleibt dabei gleichgültig, ob dieser Uebergang in einer kürzeren oder längeren Zeit geschieht. Dagegen haben wir es mit vollkommen bestimmten Bewegungen zu thun, bei denen die Zeit eine wesentliche Rolle spielt und zwar in der Weise, dass die einzelnen Punkte des bewegten Systemes in jedem bestimmten Augenblicke eine bestimmte Lage haben. Unsere nächsten Untersuchungen gehören daher nicht zur reinen Geometrie und könnten sogar in ihrer Gesammtheit eine besondere Wissenschaft (Phoronomie) bilden; doch betrachten wir sie nur als einen Theil der Mechanik und zwar als Einleitung in die Dynamik.

### Geradlinige Bewegung eines Punktes.

2. Wenn auch der Begriff der Zeit unter die Grundvorstellungen gehört, die sich in keine einfacheren Merkmale zerlegen lassen, so muss man doch die Gleichheit zweier Zeiten erklären um Zeitgrössen der Messung und folglich auch der Rechnung unterwerfen zu können. Zwei Zeitintervalle nennen wir gleich, wenn zwei identische Körper, die sich am Anfange dieser Intervalle unter ganz gleichen Umständen befanden und unter gleichen Einwirkungen bewegten, am Ende jener Intervalle die nämlichen Strecken zurückgelegt haben. Der Begriff der Gleichheit zweier Zeiten führt leicht weiter zu dem Begriffe des beliebigen Verhältnisses zweier Zeiten.

Bewegt sich nun ein Punkt so, dass er in gleichen Zeiten gleiche Wege durchläuft, wie klein auch diese Zeiten sein mögen, so nennt man seine Bewegung eine gleichförmige; dagegen heisst die Bewegung ungleichförmig oder veränderlich, wenn sie weder gleichförmig noch aus gleichförmigen Bewegungen von endlicher Dauer zusammengesetzt ist.

3. Geschwindigkeit. Gleichförmige Bewegungen auf einer und derselben Bahn können sich nur durch die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume unterscheiden; aus dieser Bemerkung entspringt der vorläufig noch etwas unbestimmte Begriff der Geschwindigkeit. Um denselben schärfer zu fassen und in die Rechnung einzuführen, verstehen wir unter der Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Punktes die Strecke, welche er in der Zeiteinheit durchläuft, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, das Verhältniss des zurückgelegten Weges zu der dabei verflossenen Zeit. Hiernach durchläuft ein mit der Geschwindigkeit 1 bewegter Punkt die Längeneinheit während der Zeiteinheit.

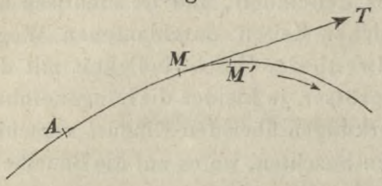
Dieser Definition zufolge ist die Geschwindigkeit einer gegebenen gleichförmigen Bewegung um so grösser, je grösser die Zeiteinheit gewählt wird, was allerdings mit der gewöhnlichen Vorstellung nicht übereinstimmt, in so fern letztere die Geschwindigkeit mehr im absoluten Sinne nimmt; dagegen bleibt das Verhältniss der Geschwindigkeiten zweier verschiedenen Bewegungen unabhängig von der Wahl der Zeiteinheit, und ist identisch mit dem Verhältnisse der in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege. Ebenso ändert sich der Zahlwerth der Geschwindigkeit mit der Längeneinheit und ist um so grösser, je kleiner die Längeneinheit genommen wird. Diese Bemerkungen über den Einfluss verschiedener Einheiten hat man da zu beachten, wo es auf die Beurtheilung der Homogenität dynamischer Formeln ankommt.

4. Will man den Begriff der Geschwindigkeit als einen ursprünglichen nicht weiter definirbaren gelten lassen, so braucht man nur die Gleichheit zweier Geschwindigkeiten zu erklären. Man versteht dann unter zwei gleichen Geschwindigkeiten solche, bei denen zwei in gleichförmigen Bewegungen begriffene Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegen. Weiter erklärt sich die Addition zweier Geschwindigkeiten durch die Addition der durchlaufenen Räume, und schliesslich gelangt man dahin, das Verhältniss zweier Geschwindigkeiten dem Verhältnisse der zurückgelegten Wege gleichzusetzen, woraus wiederum folgt, dass die Geschwindigkeit durch den in der Zeiteinheit durchlaufenen Raum gemessen wird, wenn man für die Einheit der Geschwindigkeiten diejenige Geschwindigkeit nimmt, bei welcher die Längeneinheit während der Zeiteinheit durchlaufen wird.

5. Bei einer veränderlichen Bewegung kann man die Definition der in einem bestimmten Augenblicke stattfindenden Geschwindigkeit nicht mehr auf den in der nächstfolgenden Zeiteinheit zurückgelegten Weg basiren, weil man sonst die Geschwindigkeit von allen den mehr oder weniger regelmässigen Bewegungsänderungen abhängig machen würde, die in der folgenden Zeiteinheit vor sich gehen können; man befindet sich vielmehr bei dieser Frage in einem ähnlichen Falle wie da, wo man nach Erledigung der Quadratur und Rectification ebener Polygone zur Quadratur und Rectification ebener Curven übergehen will, oder wie bei der Definition des in einem bestimmten Punkte einer nicht homogenen Substanz stattfindenden specifischen Gewichtes u. s. w. Auch das Mittel zur Aushülfe ist hier dasselbe und besteht in dem Uebergange zur Grenze des Verhältnisses zweier unendlich abnehmender Grössen.

Befindet sich nämlich der in irgend einer veränderlichen Bewegung begriffene Punkt am Ende der Zeit $t$ an der Stelle $M$ und nach Verlauf einer weiteren Zeit $\Delta t$ (d. h. am Ende von $t + \Delta t$) im $M'$, so drückt das Verhältniss des zurückgelegten Weges zu der hierzu verwendeten Zeit, also $\frac{MM'}{\Delta t}$,

Fig. 1.




die mittlere Geschwindigkeit aus, womit jener Bogen durchlaufen wurde, d. h. den Raum, welchen der Punkt in der nächsten Zeiteinheit durchlaufen würde, wenn seine Bewegung gleichförmig und so beschaffen wäre, dass der bewegliche Punkt innerhalb der Zeit $\Delta t$ von $M$ nach $M'$ gelangte. Eine fortwährende Verkleinerung von $\Delta t$ zieht nun eine successive Aenderung von $\frac{MM'}{\Delta t}$ nach sich, bei welcher $\frac{MM'}{\Delta t}$ einer bestimmten Grenze näher und näher kommt; letztere nennen wir die am Ende der Zeit $t$ vorhandene Geschwindigkeit des bewegten Punktes. Nach der kurzen Redeweise der Infinitesimalrechnung kann man daher auch sagen, dass jene Geschwindigkeit gleich ist einem von $M$ aus gerechneten unendlich kleinem Theile des Weges, dividirt durch die entsprechende unendlich kleine Zeit. Bezeichnen wir mit $s$ den von irgend einem beliebigen festen Anfangspunkte $A$ gerechneten Bogen $AM$, so ist $MM' = \Delta s$, und wenn ferner $v$ die Geschwindigkeit heisst, so haben wir nun die Formel

$$v = Lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Hieraus folgt noch $ds = v\,dt$ oder in Worten, der in irgend einem unendlich kleinen Zeitintervalle durchlaufene Bogen ist das Produkt aus der am Anfange jenes Intervalles vorhandenen Geschwindigkeit in die verflossene Zeit; ferner hat man

$$s = \int v\,dt,$$

d. h. der in irgend einer endlichen Zeit zurückgelegte Weg ist die Summe aller der unendlich kleinen Bögen, welche in den einzelnen unendlich kleinen Theilen jener Zeit beschrieben worden sind.

6. Endliche Gleichung der gleichförmigen Beweg-

ung. Auf einer unendlichen geraden oder krummen Linie $XX'$ denken wir uns einen Punkt in gleichförmiger Bewegung begriffen, in der Linie einen festen Punkt $O$, und nennen $x$ den auf der Linie selbst gerechneten Abstand, in welchem sich der bewegliche Punkt am Ende der Zeit $t$ befindet; die Zeit zählen wir von einem festen Augenblicke an, welcher dadurch kenntlich wird, dass wir voraussetzen, der bewegliche Punkt habe sich zu jener Zeit, d. h. zur Zeit $t = 0$, in der Entfernung $OA = a$ vom Coordinatenanfange befunden; endlich sei $v$ die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung und nunmehr die Aufgabe gestellt, eine Gleichung zwischen $x$ und $t$ zu finden, vermöge deren man für jede gegebene Zeit die Lage des beweglichen Punktes finden könnte.

Da der Punkt während der Zeiteinheit den Weg $v$ zurücklegt, so durchläuft er in der Zeit $t$ den Raum $tv$; geschieht nun die Bewegung im Sinne der positiven $x$, so hat man augenblicklich

$$x = a + vt.$$

Dabei sind $x$ und $a$ positive oder negative Strecken je nach ihrer Lage gegen den Coordinatenanfang; $v$ ist eine absolute Grösse, $t$ endlich positiv so lange es sich um solche Zeiten handelt, die nach jener Epoche folgen, von wo aus die Zeiten gezählt wurden. Die obige Gleichung kann aber auch, wie man sogleich bemerkt, zur Bestimmung der Lage des Punktes für solche Zeiten dienen, welche dem Anfange der Zeitzählung vorausgehen; in der That braucht man für diesen Fall $t$ nur negativ zu nehmen.

Wenn zweitens die Bewegung im entgegengesetzten Sinne, d. h. in der Richtung der negativen $x$ vor sich geht, so erhält man

$$x = a - vt = a + (-v)\,t.$$

Zu dieser Gleichung gelangt man aber auch dadurch, dass man in der ersten Gleichung $-v$ an die Stelle von $v$ treten lässt; die Gleichung

$$1) \qquad x = a + vt$$

kann daher als allgemeine Gleichung jeder gleichförmigen Bewegung gelten, sobald man dem $v$ die Möglichkeit entgegengesetzter Vorzeichen gestattet, d. h. die Geschwindigkeit als positiv oder negativ in Rechnung bringt, je nachdem die Bewegung im Sinne der positiven oder der negativen $x$ geschieht.

7. Differentialgleichung der gleichförmigen Bewegung. Da bei jeder Bewegung die Geschwindigkeit durch $\frac{ds}{dt}$

ausgedrückt wird, so haben wir im vorliegenden Falle $\frac{dx}{dt}$ für die Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t$. Dabei denken wir uns die Zeit als unabhängige Variabele und continuirlich wachsend, mithin $dt$ als positiv; das Vorzeichen des Quotienten $\frac{dx}{dt}$ hängt jetzt von dem Vorzeichen des Zählers ab und ist positiv oder negativ jenachdem $dx$ positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem die Bewegung im Sinne der positiven oder der negativen $x$ vor sich geht. In Uebereinstimmung mit dem Vorigen giebt also die Formel

$$2)\qquad v = \frac{dx}{dt}$$

positive oder negative $v$ je nach den beiden entgegengesetzten Richtungen der Bewegungen. Setzen wir noch $v$ als constant voraus, wie diess für eine gleichförmige Bewegung nöthig ist, so erhalten wir

$$x = \int v\, dt = v\, t + a,$$

worin $a$ die Integrationsconstante und zwar denjenigen Werth von $x$ bezeichnet, welcher dem Specialwerthe $t = 0$ entspricht. Damit kommt man auf die Gleichung 1) zurück.

8. Gleichförmig veränderte Bewegung. Der gleichförmigen Bewegung steht am nächsten die gleichförmig veränderte Bewegung; bei dieser ist die Geschwindigkeit nicht mehr constant, sondern auf die einfachste Weise veränderlich, nämlich so, dass die Zunahme der Geschwindigkeit proportional der Zunahme der Zeit ist. Da diese Bewegung zur Vergleichung complicirterer veränderlicher Bewegungen dient, so verlangt sie eine genauere Betrachtung.

Der angegebenen Bedingung entsprechend muss $dv = a\, dt$ oder $\frac{dv}{dt} = a$ sein, wo $a$ irgend eine positive oder negative Constante bezeichnet; man hat daher

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \qquad \left(\text{weil } v = \frac{dx}{dt}\right)$$

und zieht daraus durch Integration die Gleichung

$$v = at + b = \frac{dx}{dt},$$

die man auch direct erhalten kann; eine zweite Integration giebt

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c,$$

und dabei sind $b$ und $c$ die Constanten der Integrationen.

Die Zunahme der Geschwindigkeit ($dv$) ist positiv oder negativ, je nachdem die Constante $a$ positiv oder negativ ist; im ersten Falle hat man eine gleichförmig beschleunigte, im zweiten eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Zwei verschiedenen Zeiten $t$ und $t + \varDelta t$ entsprechen zwei verschiedene Geschwindigkeiten $v$ und $v + \varDelta v$ nach den Formeln

$$v = at + b, \quad v + \varDelta v = a(t + \varDelta t) + b,$$

mithin ist
$$a = \frac{\varDelta v}{\varDelta t}$$

d. h. gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeitszunahme zur Zunahme der Zeit oder auch (für $\varDelta t = 1$) gleich der Zunahme, welche die Geschwindigkeit während der Zeiteinheit erleidet. Man nennt deshalb $a$ die Beschleunigung (Acceleration), wobei nicht gerade immer an eine beschleunigte Bewegung zu denken ist, weil die Beschleunigung auch negativ sein darf.

9. Beliebig veränderliche geradlinige Bewegung. Für die bisherigen Betrachtungen war es gleichgültig, ob man sich die Bahn des beweglichen Punktes als gerade oder als gekrümmt vorstellte; im Folgenden aber beschränken wir uns, um die Schwierigkeiten nicht zu häufen, auf die Betrachtung eines geradlinigen Weges.

Der im vorigen entwickelte Begriff der Acceleration lässt nun eine ähnliche Ausdehnung zu, wie der Begriff der Geschwindigkeit. Bezeichnet nämlich $\varDelta v$ den Zuwachs, welchen die am Ende der Zeit $t$ vorhandene Geschwindigkeit erhält, wenn die Zeit $t$ um $\varDelta t$ zunimmt, so können wir uns ausser der beliebigen Bewegung noch eine gleichförmig beschleunigte Bewegung denken, bei welcher den Epochen $t$ und $t + \varDelta t$ gleichfalls die Geschwindigkeiten $v$ und $v + \varDelta v$ entsprechen; die Acceleration dieser zweiten Bewegung wird dann (nach Nr. 8) durch den Quotienten $\frac{\varDelta v}{\varDelta t}$ gemessen. Bei unendlich abnehmenden $\varDelta t$ und $\varDelta v$ convergirt dieser Quotient gegen eine gewisse Grenze

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

und unter dieser verstehen wir jetzt die zur Zeit $t$ stattfindende Acceleration der ursprünglichen Bewegung.

Man bemerkt leicht, dass der Ausdruck $\frac{dv}{dt}$, welcher $u$ heissen möge, für die beliebig veränderliche Bewegung Dasselbe ist wie $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, sobald man nur unendlich kleine Incremente der Zeit betrachtet. Aus der angegebenen Gleichung folgt nämlich $dv = u\,dt$ und diess ist Dasselbe, als wenn die ungleichförmig veränderliche Bewegung während des Zeitintervalles $dt$ eine gleichförmig beschleunigte wäre; je kleiner aber das Intervall genommen wird (und diess ist schon durch den Gebrauch von $dt$ statt des früheren $\Delta t$ ausgedrückt) desto genauer findet auch diese Voraussetzung statt.

### Krummlinige Bewegung eines Punktes.

10. Richtung der Geschwindigkeit. Bei der früheren Definition der Geschwindigkeit wurde nur auf die Grösse und den Sinn derselben nicht aber auf die Krümmung der Curve Rücksicht genommen, welche der bewegliche Punkt durchläuft. Ist diese Bahn (Trajectorie) eine gerade Linie, so fällt die Bewegungsrichtung immer mit der Richtung der Geraden zusammen und es bedarf dann keiner weiteren Unterscheidung; bei einer gekrümmten Bahn dagegen ändert sich die Bewegungsrichtung während der Zeit, und man kann daher nur von einer augenblicklichen Bewegungsrichtung reden. Befindet sich nun der bewegliche Punkt nach Ablauf der Zeit $t$ am Ende des Curvenbogens $s$, so würde er im nächsten unendlich kleinen Zeitintervalle $dt$ das Bogenincrement $ds$ durchlaufen; die Richtung dieses Bogenelementes, d. h. die Richtung der Tangente am Endpunkte von $s$, im Sinne der Bewegung genommen, bezeichnen wir als die in diesem Augenblicke vorhandene Richtung der Bewegung oder der Geschwindigkeit. Gewöhnlich bezieht man die Bahn auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, worin $x$, $y$, $z$ die Coordinaten desjenigen Curvenpunktes heissen, in welchem sich der bewegliche Punkt am Ende der Zeit $t$ befindet und der zugleich der Endpunkt des Bogens $s$ ist; die Cosinus der drei Winkel zwischen der Richtung der Geschwindigkeit und den drei Coordinatenachsen sind dann

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

vorausgesetzt, dass $ds$ im absoluten Sinne genommen wird und $dx$,

$dy$, $dz$ die positiven oder negativen Aenderungen bedeuten, welche $x$, $y$, $z$ während des unendlich kleinen Zeitintervalles $dt$ erhalten.

11. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten. Die Zusammensetzung mehrer auf einen Punkt wirkender Kräfte geschieht bekanntlich nach einer einfachen geometrischen Construction sobald die Kräfte, ihren Grössen und Richtungen nach, durch gerade Linien dargestellt werden. Diese Construction kann man auch unabhängig von der statischen Bedeutung jener Geraden beibehalten, lediglich um eine kurze Ausdrucksweise für complicirtere Linienverbindungen zu gewinnen. Wenn wir daher im Folgenden sagen, die Strecke $AD$ sei aus den Strecken $AB$ und $AC$ zusammengesetzt oder $AD$ sei die Resultante von $AB$ und $AC$, so verstehen wir darunter nichts weiter, als dass $AD$ die Diagonale desjenigen Parallelogrammes ist, welches aus den, der Grösse und Richtung nach gegebenen Geraden $AB$ und $AC$ gebildet werden kann. Umgekehrt nennen wir die Strecken $AB$ und $AC$ die Componenten von $AD$.

In gleichem Sinne reden wir auch von der Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten. Wir zerlegen z. B. eine Geschwindigkeit in drei Componenten von gegebenen Richtungen, wenn wir die erste Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung durch eine gerade Linie darstellen und ein Parallelepiped construiren, von welchem jene Gerade die Diagonale ist, und dessen Kanten die gegebenen drei Richtungen haben; ebenso verfahren wir umgekehrt bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. Die Componente einer Geschwindigkeit ist demnach nichts Anderes als die schiefwinklige oder rechtwinklige Projection der gegebenen Geschwindigkeit auf die gegebene Richtung; nicht selten braucht man dafür den Ausdruck „die nach einer bestimmten Richtung genommene (projicirte) Geschwindigkeit“, oder kürzer die Seitengeschwindigkeit nach dieser Richtung.

12. Die Seitengeschwindigkeiten nach den Coordinatenachsen. Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystem ergeben sich aus der Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt}$$

die drei Seitengeschwindigkeiten in den Richtungen der Coordinatenachsen, wenn man $v$ mit den Cosinus der drei Winkel multiplicirt, welche die Richtung von $v$ mit den Coordinatenachsen einschliesst; jene Cosinus sind aus Nr. 10 bekannt, mithin die drei verlangten Seitengeschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Sie können ebensowohl positiv als negativ sein, jenachdem die Richtung von $v$ spitze oder stumpfe Winkel mit den Coordinatenachsen einschliesst.

13. Um zu untersuchen, ob diese Formeln auch für ein schiefwinkliges Coordinatensystem ihre Gültigkeit behalten, denken wir uns den Punkt $M$ als Ort des beweglichen Punktes am Ende der Zeit $t$ und $M'$ als seinen Ort nach Verlauf der weiteren Zeit $\Delta t$, ferner $x, y, z$ als Coordinaten von $M$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ als Coordinaten von $M'$. Das Parallelepiped mit den Kanten $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ und der Diagonale $MM'$ nähert sich bei abnehmenden $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, $\Delta t$ mehr und mehr einem Parallelepipede, dessen Kanten den Achsen parallel sind und dessen Diagonale mit der Tangente an $M$ zusammenfällt; das letztere Parallelepiped ist aber einem dritten Parallelepipede ähnlich, welches die Geschwindigkeit $v$ zur Diagonale und die Seitengeschwindigkeiten $v_x$, $v_y$, $v_z$ zu Kanten hat, mithin gelten die Gleichungen

$$\frac{v_x}{v} = Lim \frac{\Delta x}{MM'} = \frac{dx}{ds},$$

$$\frac{v_y}{v} = Lim \frac{\Delta y}{MM'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\frac{v_z}{v} = Lim \frac{\Delta z}{MM'} = \frac{dz}{ds},$$

Durch Multiplication mit der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ ergeben sich hieraus die Formeln

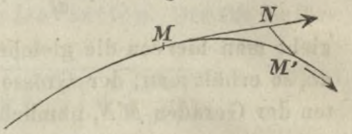
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt},$$

welche mit den vorigen übereinstimmen.

Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass $\frac{dx}{dt}$ als die Geschwindigkeit eines Punktes angesehen werden kann, der sich auf der $x$-Achse bewegt und immer dasselbe $x$ wie der Punkt $M$ besitzt, und dass von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ etwas Aehnliches gesagt werden kann. Die Seitengeschwindigkeiten eines beweglichen Punktes sind daher nichts Anderes als die Geschwindigkeiten, mit denen sich die rechtwinkligen oder schiefwinkligen, auf die Coordinatenachsen gefällten Projectionen jenes Punktes geradlinig bewegen.

14. Die Deviation. Wir denken uns einen Punkt in einer beliebig veränderlichen Bewegung begriffen und $M$ als Ort desselben in irgend einem Augenblicke; an die Bahn des beweglichen Punktes legen wir im Punkte $M$ eine Tangente und stellen uns vor, dass ein zweiter beweglicher Punkt den Ort $M$ in demselben Augenblicke wie jener Punkt und auch mit der nämlichen Geschwindigkeit verlasse, sich aber auf der Tangente weiter bewege. Nach irgend einer Zeit wird nun der erste Punkt an eine andere Stelle $M'$ seiner Bahn und gleichzeitig der zweite Punkt an eine bestimmte Stelle $N$ der Tangente gekommen sein, und die Gerade $M'N$ zeigt dann, sowohl der Grösse als der Richtung nach, die Abweichung der einen Bewegung von der andern. In dem Falle, wo das betrachtete Zeitintervall unendlich klein ist, bezeichnen wir diese Abweichung mit dem Namen der Deviation; sie spielt eine Hauptrolle bei der Untersuchung über die beliebig veränderliche krummlinige Bewegung eines Punktes. Um sie der Grösse und Richtung nach kennen zu lernen, bedarf es nur der Ermittelung ihrer Componenten d. h. ihrer Projectionen auf drei rechtwinklige Coordinatenachsen.

Fig. 2.




15. Denken wir uns die Bewegung d. h. die Coordinaten $x$, $y$, $z$ als bekannte Funktionen der Zeit $t$, so befindet sich der bewegliche Punkt am Ende der Zeit $t$ an der Stelle $xyz$; seine drei Seitengeschwindigkeiten sind in diesem Augenblicke $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, und wenn sich nun ein Punkt mit denselben Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Tangente bewegt, so sind nach der Zeit $\vartheta$ die Coordinaten seines Ortes $N$:

$$x + \frac{dx}{dt}\vartheta, \qquad y + \frac{dy}{dt}\vartheta, \qquad z + \frac{dz}{dt}\vartheta.$$

Um ferner die Coordinaten von $M'$ zu ermitteln, erinnern wir, dass $x$ als Funktion von $t$ angesehen wird also etwa $x = f(t)$ ist; das $x$ des neuen Punktes ist dann $f(t + \vartheta)$ oder nach dem Taylorschen Satze

$$= f(t) + f'(t)\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\,[f''(t) + \alpha\vartheta]\,\vartheta^2$$
$$= x + \frac{dx}{dt}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2x}{dt} + \alpha\vartheta\right]\vartheta^2,$$

wo $\alpha$ eine endliche von $f'''$ abhängige Grösse bezeichnet, auf deren Betrag es nicht weiter ankommt. Die Coordinaten von $M'$ sind folglich

$$x + \frac{dx}{dt}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\,\vartheta\right)\vartheta^2,$$
$$y + \frac{dy}{dt}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \beta\,\vartheta\right)\vartheta^2,$$
$$z + \frac{dz}{dt}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\,\vartheta\right)\vartheta^2;$$

zieht man hiervon die gleichnamigen Coordinaten des Punktes $N$ ab, so erhält man, der Grösse und Richtung nach, die Componenten der Geraden $M'N$, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\,\vartheta\right)\vartheta^2,\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \beta\,\vartheta\right)\vartheta^2,\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\,\vartheta\right)\vartheta^2.$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich und gehen in die Componenten der Deviation über, wenn man $\vartheta$ als unendlich klein voraussetzt; die Grössen $\alpha\vartheta$, $\beta\vartheta$, $\gamma\vartheta$ werden dann unendlich klein im Vergleich zu den endlichen Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, und es bleiben daher als Componenten der Deviation folgende Werthe übrig:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{\vartheta^2}{2},\quad \frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{\vartheta^2}{2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{\vartheta^2}{2}.$$

Bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme ist hiernach die *Grösse* der Deviation

$$\frac{\vartheta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

16. Unter *Richtung* der Deviation verstehen wir die Grenze, welcher sich die Richtung der Geraden $NM'$ mehr und mehr nähert je kleiner $NM'$ wird. Die Cosinus der Richtungswinkel von $NM'$ sind nun bei rechtwinkligen Coordinaten proportional den Componenten von $NM'$ und mit denselben Zeichen versehen; die Cosinus der Richtungswinkel der Deviation sind daher proportional den Grössen

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

und von denselben Zeichen. Man erhält diese Cosinus, wenn man jeden der vorstehenden Differentialquotienten durch den Ausdruck

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

dividirt, wobei die Wurzel im absoluten Sinne zu nehmen ist.

Bei einer geradlinigen Bewegung fallen $N$ und $M'$ in dieselbe Gerade und die Richtung von $NM'$ ist dann einerlei mit der Richtung der Bewegung; in der That sind jetzt $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ proportional $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

17. Beschleunigung in der Deviation. Der für die Deviation gefundene Ausdruck

$$NM'=\frac{\vartheta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

wächst mit der Zeit $\vartheta$ ebenso, wie der Weg eines von der Ruhelage $M$ ausgehenden Punktes, der in einer gleichförmig beschleunigten, und zwar mit der Acceleration

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

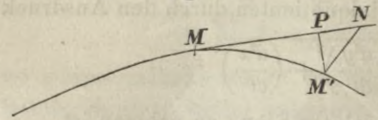
versehenen Bewegung begriffen ist. Denkt man sich also die Deviation durch die Bewegung eines Punktes beschrieben, so kann man letztere als eine, während einer unendlich kleinen Zeit gleichförmig beschleunigte ansehen, deren Acceleration die vorstehende ist. Durch Multiplication derselben mit den Cosinus der Richtungswinkel der Deviation ergeben sich für die Componenten dieser Acceleration die folgenden Ausdrücke

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass die obige Beschleunigung in der Deviation nicht mit der Beschleunigung in der wirklichen Bahn zu verwechseln ist; letztere Acceleration würde mit $\frac{dv}{dt}$ bezeichnet werden müssen.

18. Tangentiale und normale Componente der Deviation. Die nach den Coordinatenachsen gerichteten Componenten der Deviation waren bis auf solche Grössen, die gegen sie selbst verschwinden,

Fig. 3.



$$\frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2};$$

bezeichnet nun $NM'$ die Deviation und $M'P$ das von $M'$ auf die Tangente an $M$ herabgelassene Perpendikel, so ist $NP$ die tangentiale und $PM'$ die normale Componente der Deviation.

Man erhält die erste dieser Componenten, sowohl der Grösse als der Richtung nach, wenn man die drei Achsencomponenten von $NM'$ auf die Tangente projicirt; die Cosinus der Winkel, unter welchen diese Projectionen geschehen, sind bekannt, nämlich

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}$$

und man hat daher

$$NP = \frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{ds}$$
$$= \frac{\vartheta^2}{2}\,\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\,dt^2}.$$

Andererseits zieht man aus der bekannten Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

durch Differentiation die folgende

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s,$$

und unter Benutzung derselben erhält man für die tangentiale Componente der Deviation

$$NP = \frac{\vartheta^2}{2}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\vartheta^2}{2}\frac{dv}{dt}.$$

Behufs der Ermittelung der normalen Componente $M'P$ erinnern wir zunächst an den bekannten Satz, dass der zum Curvenpunkte $M$ gehörige Krümmungshalbmesser $r$ mit $M'P$ und $MM'$ durch die Gleichung

$$M'P = \frac{MM'^2}{2r}$$

verbunden ist, wobei nur die in Beziehung auf $M'P$ unendlich kleinen Grössen vernachlässigt sind. Da nun $MM'$ den während der Zeit $\vartheta$ durchlaufenen Weg darstellt, so hat man bei demselben Genauigkeitsgrade $MM' = v\vartheta$, mithin für die normale Componente der Deviation

$$M'P = \frac{\vartheta^2}{2}\frac{v^2}{r}.$$

Nicht selten bezeichnet man die beiden berechneten Componenten schlechthin als die tangentiale und normale (centripetale) Deviation.

Leicht bemerkt man noch, dass bei einer gleichförmigen Bewegung die Deviation normal auf der Bahn und bei einer geradlinigen Bewegung $r = \infty$, mithin die Deviation immer im Sinne der Bewegung ist.

19. Beschleunigung in der tangentialen und normalen Deviation. Der in der tangentialen Deviation durchlaufene Weg $NP$ hat dieselbe Grösse als wenn sich ein von der Ruhelage ausgehender Punkt während der Zeit $\vartheta$ mit der constanten Acceleration $\frac{dv}{dt}$ bewegt hätte; es ist daher

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

die Beschleunigung in der tangentialen Deviation.

Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$\frac{v^2}{r}$$

als Beschleunigung in der normalen Deviation.

Gewöhnlich nennt man diese Beschleunigungen kürzer die tangentiale und normale (centripetale) Acceleration.

---

## Zweites Capitel.

# Geometrische Bewegung eines starren Punktesystemes.

### Die verschiedenen Arten der Bewegung.

20. Wenn man sich einen und denselben starren Körper nach einander in zwei verschiedenen Lagen vorstellt und dabei von den Kräften abstrahirt, wodurch der Körper in die neue Lage gebracht worden ist, sowie von der Zeit, innerhalb welcher der Uebergang geschah, so bemerkt man zunächst, dass die Ueberführung aus der einen in die andere Lage auf unendlich viel verschiedene Weisen möglich sein würde; dann liegt aber auch die Aufgabe sehr nahe, die einfachsten oder für manche Zwecke vortheilhaftesten Bewegungen zu bestimmen, mittelst deren jene Ueberführung bewerkstelligt werden könnte.

Der Uebergang aus irgend einer Lage in irgend eine andere lässt sich nun immer auf folgende Weise ausführen. Man denke sich zunächst die Gerade zwischen den beiden verschiedenen Lagen eines und desselben entweder dem Körper angehörenden oder fest mit ihm verbundenen Punktes, und benutze diese Gerade als Leitlinie einer Verschiebung, bei welcher alle Punkte des Körpers gleiche und jener Geraden parallele Wege beschreiben; darauf stelle man sich den Endpunkt jener Leitlinie als fest vor und drehe den Körper so lange um diesen Punkt, bis irgend zwei andere mit diesem Centrum nicht in gerader Linie liegende Punkte die gegebenen neuen Lagen erhalten haben. Die beiden erwähnten

Bewegungen, nämlich die Verschiebung und die Drehung, verdienen eine nähere Untersuchung.

Der zuerst betrachtete Punkt kann aus seiner ursprünglichen Lage auch dadurch in die nachherige Lage übergeführt werden, dass man ihn ein Polygon durchlaufen lässt, welches in jenem Punkte anfängt und in diesem endigt. Die progressive Bewegung längs einer Geraden ist demnach durch eine Reihenfolge von Verschiebungen ersetzbar, deren Grössen und Richtungen durch die Seiten eines Vielecks dargestellt werden. Diese Substitution werden wir künftig die Zerlegung einer Verschiebung nennen; die umgekehrte Operation, bei welcher mehrere Verschiebungen durch eine einzige progressive Bewegung ersetzt werden, mag die Zusammensetzung der Verschiebungen heissen. Die Zusammensetzung und Zerlegung von Verschiebungen geschieht daher auf gleiche Weise wie die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften an einem Punkte.

Was die Drehung um ein festes Centrum anbelangt, so ist leicht einzusehen, dass sie sich immer, und zwar auf unendlich viel verschiedene Weisen, durch zwei Drehungen um feste Achsen ersetzen lässt. Bezeichnet nämlich $P$ einen Punkt, welcher mittelst einer Drehung um das feste Centrum $O$ in die neue Lage $P_1$ gebracht werden soll, so ist $OP = OP_1$ und es folgt hieraus, dass $P$ und $P_1$ gleichweit entfernt sind von jeder Geraden $g$, welche sich in der durch $O$ senkrecht zur Verbindungslinie $PP_1$ gelegten Ebene befindet; eine Drehung des Körpers um eine solche Gerade $g$ bringt daher $P$ nach $P_1$. Nachdem auf diese Weise zwei entsprechende Punkte $P$ und $P_1$ zur Coindicenz gekommen sind, bedarf es nur noch einer zweiten Drehung um die Gerade $OP_1$, um das Zusammenfallen aller übrigen Punkte herbeizuführen. Die Drehung um einen Punkt lässt sich daher auf Drehungen um zwei durch diesen Punkt gehende Achsen zurückführen. Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung derartiger Drehungen werden wir nachher die wichtigsten der zuerst von Poinsot in der *Théorie nouvelle de la rotation des corps* entwickelten Sätze mittheilen; wir schicken aber denselben eine zwar einfache, doch für die Folge nutzbringende Bemerkung voraus.

Wenn die Drehung eines Körpers um eine feste Achse so gering ist, dass dabei nur ein unendlich kleiner Winkel beschrieben wird, so ändern sich auch die Coordinaten irgend eines Punktes $P$

des Körpers nur um solche Grössen, welche im Vergleich zu den Coordinaten selber unendlich klein und zwar der ersten Ordnung sind. Dasselbe gilt für einen unendlich nahen Punkt $P'$, aber die Unterschiede zwischen den Coordinatenänderungen von $P$ und denen von $P'$ sind unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung. Bezeichnen nämlich $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $P$ vor der Drehung und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten nach der Drehung, so würde man die ursprünglichen Coordinaten eines unendlich nahen Punktes $P'$ durch $x + \alpha dx$, $y + \beta dy$, $z + \gamma dz$ ausdrücken können, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ irgend welche endliche Zahlen bedeuten und dann sind die Coordinaten von $P'$ nach der Drehung $x + \alpha dx + d(x + \alpha dx)$, $y + \beta dy + d(y + \beta dy)$, $z + \gamma dz + d(z + \gamma dz)$; die Unterschiede zwischen den Aenderungen $d(x + \alpha dx)$, $d(y + \beta dy)$, $d(z + \gamma dz)$, einerseits und den Aenderungen $dx$, $dy$, $dz$ andererseits betragen $d(\alpha dx)$, $d(\beta dy)$, $d(\gamma dz)$ und sind unendlich klein in Beziehung auf jene sechs Aenderungen. Bei der Untersuchung über unendlich kleine Achsendrehungen darf man sich daher vorstellen, dass der Körper nicht von der gegebenen Anfangslage, sondern von einer ihr unendlich nahen Lage ausgegangen sei, denn die nach der zweiten Voraussetzung berechneten Coordinatenänderungen differiren von den eigentlichen Coordinatenänderungen nur um solche Grössen, welche im Vergleich zu ihnen unendlich klein sind und daher verschwinden. Handelt es sich also z. B. um eine endliche Anzahl successiver unendlich kleiner Drehungen, so kann man sich jede derselben so denken, als wäre sie von der Anfangslage des Körpers ausgegangen, und die Summe aller auf diese Weise entstandenen Coordinatenänderungen giebt die gesammte Variation der Coordinaten, welche in Folge jener successiven Drehungen eingetreten ist. Ebenso kann man die Achse einer unendlich kleinen Drehung durch eine unendlich nahe liegende Achse ersetzen. Die eigentlichen Coordinatenänderungen sind nämlich Produkte aus dem unendlich kleinen Drehungswinkel in diejenigen endlichen Grössen, wodurch die Lage der Achse bestimmt wird; einer unendlich kleinen Lagenänderung dieser Achse entsprechen unendlich kleine Aenderungen jener endlichen Faktoren, woraus folgt, dass die neuen Incremente der Coordinaten sich von den früheren nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung unterscheiden, welche gegen die Coordinatenänderungen selber, diese als Unendlichkleine erster Ordnung gedacht, wegzulassen sind.

Wenn daher ein starrer Körper eine endliche Anzahl von unendlich kleinen Drehungen um verschiedene Achsen erhalten soll, so darf man statt eines beliebigen Punktes desselben einen unendlich nahen Punkt und statt der gegebenen Achsen unendlich nahe liegende Achsen nehmen, und es bleiben dabei die Coordinatenänderungen immer noch richtig bis auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung; ebenso kann auch die Reihenfolge der Drehungen beliebig abgeändert werden. Um dieser Vortheile willen pflegt man gewöhnlich die während einer endlichen Zeit vor sich gehenden Drehungen in eine unendlich grosse Menge unendlich kleiner successiver Drehungen zu zerlegen. Daher beziehen sich auch die meisten der folgenden Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Drehungen auf den besonderen Fall unendlich kleiner Drehungen.

21. Winkelgeschwindigkeit. Einen in continuirlicher Drehung befindlichen Körper denken wir uns mit einer durch die Drehungsachse gehenden Ebene verbunden, welche ihre Lage gegen den Körper nicht ändern und mit diesem rotiren möge. Die jedesmalige Stellung des Körpers wird dann durch die Lage der genannten Ebene bestimmt, und die Lage der letzteren hängt nur von dem Winkel $\psi$ ab, den sie mit einer unveränderlichen durch die Achse gehenden Ebene einschliesst; zur letzteren Ebene nimmt man gewöhnlich die Anfangslage der beweglichen Ebene. Wenn der Winkel $\psi$ proportional der Zeit wächst, so ist die Winkelbewegung des Körpers gleichförmig; zugleich ist auch die Bewegung eines jeden Punktes gleichförmig und seine Geschwindigkeit proportional seiner Entfernung von der Drehungsachse. In diesem Falle nennt man Winkelgeschwindigkeit des Körpers den Winkel, welchen die bewegliche Ebene während der Zeiteinheit beschreibt; diese Winkelgeschwindigkeit ist zugleich die Geschwindigkeit eines solchen Punktes, dessen Entfernung von der Drehungsachse die Längeneinheit beträgt.

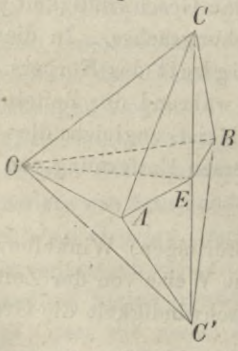
Bei einer veränderlichen (ungleichförmigen) Winkelbewegung hängt der Winkel $\psi$ auf irgend eine Weise von der Zeit ab, und man versteht dann unter Winkelgeschwindigkeit die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$ d. h. $\frac{d\psi}{dt}$. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnungen ist also der in einer unendlich kleinen Zeit beschriebene Winkel gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit in jener Zeit.

22. Nicht selten schreibt man einem Körper gleichzeitig mehrere Bewegungen zu; man versteht darunter, dass der Körper, gegen ein als fest betrachtetes Punktesystem gehalten, in Bewegung sei, dass aber jenes Punktesystem sich selbst wieder in Beziehung auf ein anderes Punktesystem bewegt, dieses gegen ein weiteres System u. s. f., bis endlich das letzte dieser Systeme als absolut unbeweglich gilt. Zugleich entspringt hieraus die Aufgabe, die absolute Bewegung zu ermitteln, welche aus diesen gleichzeitigen relativen Bewegungen entspringt. Will man nun den Ort kennen lernen, an welchem sich der Körper nach irgend einer Zeit befindet, so kann man sich vorstellen, der Körper vollende zuerst seine Bewegung in Beziehung auf das erste Punktesystem, nachher werde er mit diesem fest verbunden und führe mit diesem zusammen die Bewegung gegen das zweite System aus u. s. w.; in der That erhält jetzt der Körper zuletzt die gesuchte Lage, und zwar ist die Endlage dieselbe, man mag nun jene Bewegungen gleichzeitig oder nach einander vornehmen.

## Die unendlich kleinen Bewegungen.

23. Drehungen um zusammentreffende Achsen. Es sei $AO$ die Richtung einer Achse, um welche sich ein starrer Körper dreht und dabei den Winkel $2\alpha$ beschreibt (die Drehungsrichtung nehmen wir wie früher so, dass ein von $A$ nach $O$ sehender Beobachter die Drehung von der Linken nach der Rechten erfolgen sieht), ferner sei $BO$ eine zweite Achse, um welche der Körper den Winkel $2\beta$ mit derselben Drehungsrichtung beschreibt, nachdem er die erste Drehung ausgeführt hat; wir untersuchen nun, ob es möglich sein würde, den Körper durch Drehung um eine einzige noch zu bestimmende Achse in dieselbe Lage zu bringen, wie durch jene zwei successiven Drehungen.

Fig. 4.



Durch die Gerade $AO$ legen wir eine Ebene $AOC$, welche mit der Ebene $AOB$ nach $BO$ hin den Winkel $EAC = \alpha$ einschliesst, ferner durch $BO$ nach $AO$ hin eine Ebene, welche mit $AOB$ den Winkel $EBC = \beta$ bildet; beschreibt nun das System bei seiner Drehung um $AO$ den Winkel $2\alpha$, so gelangt die Durchschnittslinie $CO$ in die symmetrisch entgegengesetzte Lage $C'O$, nach der zweiten Drehung um $BO$ kommt die Durchschnittslinie wieder in die ursprüngliche Lage $CO$. Beide Drehungen zusammen ändern daher die Lage von $CO$ nicht, und muss also der Körper auch dadurch in seine neue Lage gebracht werden können, dass man ihn um $CO$ dreht, und zwar in demselben Sinne, in welchem jene beiden Drehungen vorgenommen wurden.

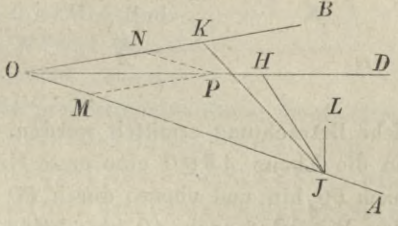
Dies gilt für beliebige Drehungswinkel $2\alpha$ und $2\beta$, von Wichtigkeit ist es aber, den besonderen Fall unendlich kleiner $\alpha$ und $\beta$ näher zu betrachten. In der aus den Kanten $AO$, $BO$, $CO$ gebildeten dreiseitigen Ecke hat man

$$\sin BOC : \sin AOC = \sin\alpha : \sin\beta = \alpha : \beta,$$

weil $\alpha$ und $\beta$ unendlich klein sind; ferner erhebt sich ebendeswegen die neue Drehungsachse $CO$ nur unendlich wenig über die Ebene $AOB$ und man kann daher statt $CO$ eine ihr unendlich nahe Gerade $DO$ nehmen, welche in der Ebene $AOB$ selber und zwar so liegt, dass

$$\sin BOD : \sin AOD = \alpha : \beta.$$

Fig. 5.




Diese Gerade $DO$ ist nichts Anderes, als die Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten $\alpha$ und $\beta$ oder diesen proportionale Strecken $OM$ und $ON$ sind.

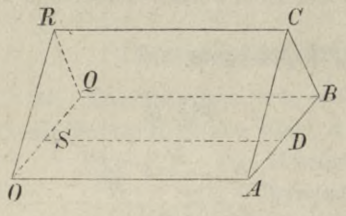
Nachdem hiermit die Achse und der Sinn der resultirenden Drehung bestimmt sind, handelt es sich noch um die Grösse der Drehung. Irgend ein Punkt $J$ auf der ersten Achse $AO$ ändert seine Lage erst bei der zweiten Drehung und zwar beschreibt er dann einen unendlich kleinen auf der Ebene $AOB$ senkrechten Kreisbogen $JL$; fällen wir noch auf $BO$ und $DO$ die Senkrechten $JK$ und $JH$, so haben wir für die unendlich kleinen Drehungswinkel die Proportion

$\angle JKL : \angle JHL = JH : JK = \sin HOJ : \sin KOJ = ON : OP,$
woraus sich $\angle JHL$ bestimmt. Dies giebt zusammen den Satz: Zwei unendlich kleine Drehungen um sich schneidende Achsen können durch eine einzige Drehung ersetzt werden, und wenn man auf jenen Achsen von ihrem Durchschnitte aus Strecken abschneidet, welche die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten darstellen, so bestimmt die Diagonale des aus diesen Strecken construirten Parallelogrammes sowohl die Lage der Achse als die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Drehung.

Die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen um beliebig viele in einem Punkte zusammentreffende Achsen geschieht demnach auf dieselbe Weise wie bei Kräften, deren Richtungen mit den Richtungen jener Achsen übereinstimmen und deren Intensitäten den Winkelgeschwindigkeiten der entsprechenden Drehungen gleichkommen.

24. Drehungen um parallele Achsen. Sind $AO$ und $BQ$ zwei parallele Achsen, um welche ein Körper nacheinander so gedreht werden soll, dass er bei der ersten Rotation den Winkel $2\alpha$ und bei der zweiten den Winkel $2\beta$ beschreibt, so kann die Zusammensetzung beider Drehungen durch eine der vorigen ganz ähnliche Betrachtung ermittelt werden.

Fig. 6.

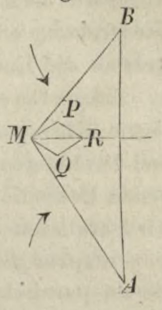



Man legt nämlich durch $AO$ an die Ebene $ABQO$ eine erste Hilfsebene unter dem Winkel $\alpha$ nach $BQ$ hin und ebenso durch $BO$ eine zweite Hilfsebene unter dem Winkel $\beta$ nach $AO$ hin; beide Ebenen schneiden sich in der zu $AO$ und $BQ$ parallelen Geraden $CR$. Dreht man nun den Körper auf die angegebene Weise nacheinander um $AO$ und $BQ$, so kommt die Gerade $CR$ nach der zweiten Drehung wieder in ihre ursprüngliche Lage, mithin können jene Drehungen durch eine einzige um $CR$ gehende Drehung ersetzt werden.

Bei unendlich kleinen $\alpha$ und $\beta$ fällt $CR$ in die Ebene beider Achsen nach $DS$, und wenn $AB$ senkrecht auf $AO$ und $BQ$ steht, so verhält sich $AD : BD = \beta : \alpha$. Um noch die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Drehung zu finden, bezeichnen wir mit $AE$ den unendlich kleinen Kreisbogen, den $A$ bei der zweiten Drehung beschreibt und der von $A$ auch bei der resultirenden Drehung beschrieben wird; die Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um $BQ$ verhält sich jetzt zur Winkelgeschwindigkeit bei der resultirenden Drehung um $DS$ umgekehrt wie $AB : AD$. Man erkennt hieraus, dass Drehungen um Parallelachsen auf dieselbe Weise wie parallele Kräfte zusammengesetzt werden. Dies gilt auch für den Fall von Drehungen entgegengesetzten Sinnes, wie man leicht aus dem Vorigen herleiten kann.

25. Die Drehungspaare. Zwei gleichgrosse, in entgegengesetztem Sinne vor sich gehende Drehungen um Parallelachsen bilden zusammen ein sogenanntes Drehungspaar. Um die Wirkung desselben kennen zu lernen, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt $M$ des Körpers eine zu beiden Achsen normale Ebene gelegt, welche jene Achsen in $A$ und $B$ schneidet. Bei der Drehung um die erste Achse beschreibt $M$ den unendlich kleinen Bogen $MP$, bei der zweiten Drehung den unendlich kleinen Bogen $PR$, und es sind diese Bögen wegen ihrer unendlichen Kleinheit als gerade Linien anzusehen, deren Längen sich wie $AM$ und $BM$ verhalten. Der Punkt $M$ gelangt daher von $M$ nach $R$, d. h. an den Endpunkt der Diagonale des aus $MP$ und $MQ = PR$ construirten Parallelogrammes. Ferner

Fig. 7.

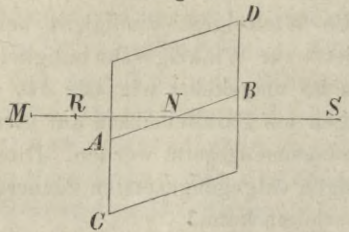



ist $\triangle\, MPR \sim \triangle\, AMB$, weil die proportionalen Seiten beider Dreiecke denselben Winkel zwischen sich fassen, mithin steht $MR$ senkrecht auf $AB$. Ein Drehungspaar bewirkt daher eine progressive Bewegung aller Punkte des Körpers nach Geraden, welche auf der Ebene des Paares senkrecht stehen; die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist für alle Punkte dieselbe, nämlich gleich dem Produkte aus der Entfernung der Achsen in den Drehungswinkel.

Ferner bemerkt man leicht, dass jedes Drehungspaar in seiner Ebene gedreht, verschoben oder auch in eine Parallelebene verlegt werden darf, ohne die von demselben bewirkte progressive

Bewegung zu ändern. Ueberhaupt können Drehungspaare ebenso wie Kräftepaare behandelt werden; trägt man nämlich auf jeder von beiden Achsen eines Drehungspaares eine Strecke $AC = BD$ auf, welche dem Drehungswinkel gleichkommt, so erscheint $CABD$ wie ein Kräftepaar, dessen Moment $= AB \,.\, BD$ ist; ebensoviel beträgt auch die progressive Bewegung $MR$ in der auf $CABD$ senkrechten Richtung $MRNS$ und daher verhält sich das Drehungspaar wie ein Kräftepaar, dessen Moment oder Achse durch $MR$ dargestellt wird.

Fig. 8.



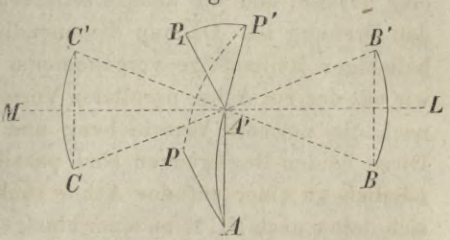

Dem bekannten Satze, dass jede an einem Punkte $A$ wirkende Kraft durch eine parallele und gleiche Kraft an einem Punkte $B$ durch ein Kräftepaar ersetzt werden darf, entspricht in der Theorie der Drehungspaare der Satz, dass eine Drehung um eine Achse $a$ ersetzt werden kann durch eine gleiche und gleichgerichtete Drehung um eine Parallelachse $b$ und durch ein Drehungspaar, welches die Entfernung der Achsen $a$ und $b$ zur Breite hat.

26. Allgemeine Reduction jeder Bewegung. Wenn einem Körper irgend wie viel unendlich kleine Verschiebungen und Drehungen ertheilt werden sollen, so kann man immer folgende Reduction vornehmen. Durch einen festen Punkt $O$ ziehen wir Parallelen zu den vorhandenen Drehungsachsen und zerlegen jede ursprünglich vorgeschriebene Drehung in eine Drehung um die ihr parallele Achse und in ein Drehungspaar, d. h. eine Verschiebung; alle parallel verlegten Drehungen um die durch $O$ gehenden Achsen lassen sich zu einer resultirenden Drehung zusammensetzen und zwar bleibt die Achse derselben ihrer Richtung nach unveränderlich, wo man auch den Punkt $O$ gewählt haben möge. Die noch übrigen ursprünglich geforderten Verschiebungen lassen sich mit den hinzugekommenen Drehungspaaren, die gleichfalls Verschiebungen sind, zusammensetzen und liefern eine resultirende Verschiebung, deren Grösse und Richtung von der Lage des Punktes $O$ abhängt.

27. Bewegung parallel zu einer Ebene. Wir betrachten noch den speciellen Fall, wo alle Punkte des Körpers unendlich kleine gerade Linien oder Kreisbögen beschreiben, welche

einer bestimmten Ebene parallel sind; es reicht in diesem Falle hin, durch den Körper einen zu jener Ebene parallelen Schnitt zu führen und die Bewegung dieser Planfigur zu untersuchen. Sind nun $A$ und $P$ zwei Punkte dieses Querschnittes in seiner ursprünglichen Lage und $A'$, $P'$ die neuen Stellungen derselben nach irgend einer Bewegung, so erhellt zunächst, dass man $A$ und $P$ nach $A'$ und $P'$ bringen kann, wenn man erst eine Verschiebung vornimmt, bei welcher $A$ nach $A'$, $P$ nach $P_1$ kommt, und darauf eine Drehung um $A'$ folgen lässt, bis $A'P_1$ mit $A'P'$ zusammenfällt.

Fig. 9.




Dies gilt für jede beliebige Lage von $A'P'$ gegen $AP$; um aber zu untersuchen, ob bei unendlich naher Lage von $AP$ und $A'P'$ eine blosse Drehung zur Ueberführung von $AP$ in $A'P'$ hinreichen würde, legen wir durch $A'$ die Gerade $LM$ senkrecht zu $AA'$, ziehen zwei Gerade $BA'C'$ und $CA'B'$, die mit $LM$ den halben Drehungswinkel $P_1A'P'$ einschliessen und ziehen endlich zwischen den zwei genannten Geraden die Linien $BB'$ und $CC'$ so, dass sie parallel und gleich $AA'$ sind. Denken wir uns die Punkte $B$ und $C$ mit der Figur fest verbunden, so kommen sie bei der änfänglichen Verschiebung nach $B'$ und $C'$; durch die nachherige Drehung gelangt entweder $B'$ wieder nach $B$ oder $C'$ nach $C$ zurück, je nachdem die Rotation in dem einen oder anderen Sinne vor sich geht. Im ersten Falle, welcher unserer Figur entspricht, kann man also die Punkte $A$ und $P$ und überhaupt den ganzen Querschnitt aus der ersten in die zweite Lage überführen, ohne die Lage des Punktes $B$ zu ändern und da ferner die Linien $AA'$, $PP'$ unendlich klein sind, so ist die Wirkung jener Verschiebung und Drehung dieselbe, als wäre die Figur um den seiner Lage nach bestimmten Punkt $B$ oder der Körper um eine Achse gedreht worden, welche in $B$ senkrecht auf der Ebene der Figur steht.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch auf sphärische Figuren ausdehnen, wie es bereits von Euler geschehen ist.

28. Reduction jeder unendlich kleinen Bewegung auf eine schraubenförmige Bewegung. Bereits haben wir jede unendlich kleine Bewegung auf zwei andere Bewegungen

zurückgeführt, nämlich auf die Drehung um eine ihrer Grösse und und Richtung nach constante Achse und auf eine Verschiebung, welche von dem gewählten Anfangspunkte aller parallel verlegten Rotationsachsen abhängt. Die letztere Bewegung können wir weiter zerlegen, nämlich in zwei Verschiebungen, von denen die eine parallel und die andere senkrecht zur Achse der resultirenden Drehung ist. Da nun die unendlich kleinen Bewegungen in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden dürfen, so fangen wir mit der zur Achse parallelen Verschiebung an und haben dann noch die normale Verschiebung und die Drehung auszuführen. Diese beiden Bewegungen sind parallel zu einer und derselben, nämlich zu einer auf der Achse senkrechten Ebene und lassen sich daher nach Nr. 27 zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, deren Achse der vorigen Achse parallel liegt. Jede Bewegung kann also auf eine Verschiebung und auf eine Drehung zurückgeführt werden, deren Achse parallel zu jener Verschiebung ist, d. h. auf eine Bewegung, wie die der Schraube in der Schraubenmutter.

Um die Verschiebung zu erhalten, verlegt man erst alle gegebenen Drehungsachsen nach einem Punkte, construirt die resultirende Drehung, sowie die resultirende Verschiebung und projicirt letztere auf die Achse der resultirenden Drehung; die Projection ist die erwähnte Verschiebung und constant gleich der gemeinschaftlichen Strecke, um welche sich alle Punkte des Körpers bei ihrem Uebergange von der ersten zur letzten Lage von derjenigen Ebene entfernen, welche auf der resultirenden Drehungsachse senkrecht steht. Zugleich stellt sie das Minimum der Verschiebung dar, weil sie die Projection aller übrigen Verschiebungen ist.

Zu demselben Resultate führt auch die Analogie zwischen den Drehungen und den Kräften. In der Statik haben wir nämlich gezeigt, dass ein Kräftesystem auf eine Einzelkraft und auf ein Kräftepaar reducirt werden kann, dessen Achse jener Einzelkraft parallel ist; ein System von Drehungen und Verschiebungen (welche letztere immer durch Drehungspaare ersetzt werden können) lässt sich daher auf eine Einzeldrehung und auf ein Drehungspaar, d. h. eine Verschiebung, parallel zur Achse seiner Einzeldrehung zurückführen. Doch gilt dies immer nur unter der Voraussetzung unendlich kleiner Bewegungen.

## Endliche Bewegungen.

29. Continuirliche Bewegung parallel einer festen Ebene. Wenn es sich um eine während einer endlichen Zeit continuirlich vor sich gehende Bewegung der genannten Art handelt, so denken wir uns die Zeit in eine unendlich grosse Menge unendlich kleiner Intervalle getheilt und wenden auf die innerhalb jedes solchen Intervalles vor sich gehende unendlich kleine Bewegung den in Nr. 27 entwickelten Satz an, zufolge dessen jede solche Bewegung als Drehung um einen bestimmten Punkt gelten kann, wenn man überhaupt nur einen Parallelschnitt des Körpers betrachtet. Jeder solche Drehpunkt ist jetzt nur ein momentaner Mittelpunkt der Drehung und alle diese Mittelpunkte bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine bestimmte in derselben Ebene liegende Ortscurve. Diese geht der Reihe nach durch gewisse Punkte des beweglichen Querschnittes des Körpers, und es erhellt unmittelbar, dass wenn man alle diese Punkte, welche successiv zu momentanen Drehpunkten werden, bestimmen könnte, auch die Bewegung des Körpers vollständig bekannt wäre.

Die successiven augenblicklichen Drehpunkte mögen $A$, $B$, $C$, $D$ etc. sein, und $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ etc. diejenigen mit dem beweglichen Querschnitte verbundenen Punkte, welche der Reihe nach mit jenen zusammenfallen; die Bewegung geschieht dann so, dass wenn anfangs $A'$ auf $A$ liegt, die Drehung um $A$ soweit fortzusetzen ist, bis $B'$ mit $B$ zusammenfällt, worauf weiter eine Drehung um $B$ folgt, bis $C'$ nach $C$ kommt u. s. w. Beide Polygone besitzen gleiche Seiten und rollen ohne Gleitung aufeinander, wobei der bewegliche Querschnitt successiv alle verlangten Lagen erhält; da aber die Zeitintervalle, und mithin auch die Polygonseiten, unendlich klein sind, so werden jene Polygone zu zwei ohne Gleitung aufeinander rollenden Curven. Demnach kann man sich die continuirliche Bewegung eines Körpers parallel zu einer festen Ebene durch die Abwickelung eines beweglichen Cylinders auf einem festen Cylinder vorgestellt denken, wobei die Querschnitte dieser Cylinder durch die vorhin erwähnten Curven gegeben sind.

30. Continuirliche Drehung um einen festen Punkt. Denken wir uns wiederum die Zeit in unendlich kleine Intervalle

getheilt, so kann jede innerhalb eines solchen Zeitelementes vor sich gehende unendlich kleine Bewegung des Körpers als eine blosse Drehung angesehen werden, deren Achse durch den festen Punkt geht; alle diese successiven augenblicklichen Drehungsachsen bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt ist. Denkt man sich jede von diesen Geraden in der Stellung fixirt, wo sie wirklich als augenblickliche Drehungsachse fungirt, so erhält man einen zweiten Kegel, welcher den ersten immer längs einer erzeugenden Geraden berührt, und während der erste Kegel zwar in dem Körper fest ist, aber sich mit ihm bewegt, bleibt der zweite völlig unbeweglich; die Berührungslinie beider Kegel ist die augenblickliche Drehungsachse, welche im absoluten Raume den Mantel des festen Kegels und im Körper den Mantel des beweglichen Kegels beschreibt. Jede Drehung eines Körpers um einen Punkt ist also dieselbe wie die Bewegung eines Kegels, dessen Spitze in jenem festen Punkte liegt, und der ohne Gleitung auf einem festen mit derselben Spitze versehenen Kegel hinrollt.

Lässt man den festen Punkt unendlich weit wegrücken, so kommt man auf den in Nr. 29 besprochenen Fall zurück.

31. Allgemeine continuirliche Bewegung. Denkt man sich irgend eine Bewegung wie früher in eine unendliche Menge unendlich kleiner Bewegungen getheilt, so können letztere auf verschiedene Weise in Verschiebungen und Drehungen zerlegt werden, wobei wir uns auf den Hauptfall beschränken, dass die Verschiebung jedesmal parallel zur Drehungsachse ist. Alle augenblicklichen Achsen der Drehung (und Verschiebung) bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge zwei sich berührende Regelflächen, von denen die eine im Körper fest ist, aber sich mit ihm bewegt, während die zweite im absoluten Raume unbeweglich bleibt. Alle Erzeugungslinien der ersten Fläche fallen der Reihe nach zusammen mit allen Erzeugungslinien der zweiten, und zwar geschieht dies so, dass sich eine Gerade der ersten Fläche zunächst durch Drehung auf die entsprechende Gerade der zweiten Fläche legt und dann längs derselben gleitet, worauf eine zweite Drehung und Verschiebung folgt u. s. f. Die continuirliche Bewegung des Körpers ist also dieselbe, als wenn eine bewegliche Regelfläche auf einer festen Regelfläche rollt und gleichzeitig längs der jedesmaligen gemeinschaftlichen Berührungslinie gleitet.

Das Verhältniss des Gleitens zum Rollen hängt von der Natur der Bewegung ab und es kann auch eine der beiden Bewegungen verschwinden. Bei der Drehung um einen festen Punkt ist das Gleiten unmöglich, die Regelflächen werden dann zu Kegelflächen und die Bewegung gestaltet sich wie es in Nr. 30 angegeben wurde.

### Analytische Herleitung der vorigen Sätze.

32. Um die Ergebnisse der vorigen geometrischen Betrachtungen auf dem Wege der Rechnung zu erhalten, bestimmen wir die Lage eines Punktes $O$ des Körpers durch seine drei rechtwinkeligen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, bezogen auf ein im Raume festes Coordinatensystem $AX$, $AY$, $AZ$; ferner legen wir durch $O$ ein secundäres rechtwinkeliges Coordinatensystem $OX'$, $OY'$, $OZ'$, welches zwar im Körper fest, aber mit diesem beweglich ist; nennen wir endlich $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines beliebigen Körperpunktes $M$ in Beziehung auf das erste, und $x'$, $y'$, $z'$ seine Coordinaten in Beziehung auf das zweite Coordinatensystem, so haben wir zwischen diesen sechs Coordinaten die bekannten drei Gleichungen:

$$1) \qquad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z', \end{cases}$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\begin{aligned} a &= \cos(x'x), & b &= \cos(y'x), & c &= \cos(z'x), \\ a' &= \cos(x'y), & b' &= \cos(y'y), & c' &= \cos(z'y), \\ a'' &= \cos(x'z), & b'' &= \cos(y'z), & c'' &= \cos(z'z). \end{aligned}$$

Während der Bewegung behält der Punkt $M$ seine Lage gegen das secundäre Coordinatensystem unverändert bei, mithin sind $x'$, $y'$, $z'$ unabhängig von der Zeit, dagegen ändern sich alle übrigen Grössen mit der Zeit, und zwar mögen der Zeitzunahme $\Delta t$ die Incremente $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, $\Delta \xi$, $\Delta \eta$, $\Delta \zeta$, $\Delta a$, $\Delta b$ etc. entsprechen. Die Gleichungen 1) ziehen dann folgende Relationen nach sich:

$$2) \qquad \begin{cases} \Delta x = \Delta \xi + x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c, \\ \Delta y = \Delta \eta + x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c', \\ \Delta z = \Delta \zeta + x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c''; \end{cases}$$

in diesen stehen linker Hand die drei, nach den festen Coordinatenachsen genommenen Componenten des vom Punkte $M$ durchlaufenen Weges; rechter Hand sind $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ die gleichnamigen Componenten der Verrückung von $O$, und es kommt noch auf eine Interpretation der übrigen Grössen an. Denkt man sich für den Augenblick $O$ als festen Punkt und ändert dagegen $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ etc. so, dass sie in der Zeit $\Delta t$ gleichfalls die Incremente $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$, $\Delta a'$, $\Delta b'$ etc. erhalten, so bleiben in den Gleichungen 1) $\xi$, $\eta$, $\zeta$ constant, mithin sind $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ der Null gleich, und wenn die nunmehrigen Aenderungen von $x$, $y$, $z$ mit $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ bezeichnet werden, so erhält man für diesen Fall die Gleichungen

$$\begin{aligned}\delta x &= x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c,\\ \delta y &= x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c',\\ \delta z &= x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c'',\end{aligned}$$

mithin

$$\Delta x = \Delta\xi + \delta x, \quad \Delta y = \Delta\eta + \delta y, \quad \Delta z = \Delta\zeta + \delta z.$$

Die Aenderungen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sind aber die Componenten der Verrückung, welche der Punkt $M$ erleidet, wenn dem Körper eine solche Drehung um den festen Punkt $O$ ertheilt wird, dass $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ etc. die nämlichen Incremente wie bei der wirklich eingetretenen Bewegung annehmen. Die letzten Gleichungen bedeuten daher, dass man alle Punkte des Körpers durch zwei successive Bewegungen in ihre neuen Lagen bringen kann, wobei die erste Bewegung $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ und die zweite $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ zu Componenten hat. Dies giebt den allgemeinen Satz:

Jede endliche Lagenveränderung eines Körpers kann dadurch hervorgebracht werden, dass man zuerst den Körper soweit verschiebt, bis einer seiner Punkte in die verlangte neue Lage kommt und darauf dem Körper eine Drehung um diesen Punkt ertheilt; die letztere Bewegung ist unabhängig von der Wahl jenes Punktes und nur von den Richtungsänderungen der Linien im Körper abhängig.

Es erhellt übrigens leicht, dass man diese Bewegungen auch in umgekehrter Reihenfolge vornehmen darf.

33. Vereinfachung der Drehung um einen Punkt. Um zu untersuchen, ob die Drehung um den festen Punkt $O$ auf eine Drehung um eine feste, durch jenen Punkt gehende Achse zurückführbar ist, stellen wir die Frage, ob es solche Punkte $xyz$ giebt, welche vor und nach der Drehung dieselbe Lage haben.

In diesem Falle müssen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ verschwinden, mithin folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$3)\quad \begin{cases} x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c = 0, \\ x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c' = 0, \\ x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man hieraus $x'$ und $y'$, so fällt $z'$ von selber weg und es bleibt eine Bedingungsgleichung übrig, von welcher zu untersuchen ist, ob ihr genügt werden kann oder nicht. Im ersten Falle würde es eine unendliche Menge von $x'$, $y'$, $z'$ geben, welche in die Gleichungen 3) passen, und zwar würde man eine der Grössen $x'$, $y'$, $z'$ willkührlich wählen dürfen, was geometrisch bedeutet, dass alle ihre Lage nicht ändernden Punkte auf einer Geraden liegen, welche die gesuchte Drehungsachse ist; im zweiten Falle würden die Gleichungen 3) nur durch die Werthe $x' = y' = z' = 0$, d. h. nur von den Coordinaten des Punktes $O$ befriedigt werden können.

Zwischen den neun Cosinus $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ etc. bestehen die bekannten sechs Gleichungen:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$
$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0;$$

dieselben gelten auch für die neuen Werthe $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$, $a' + \Delta a'$ etc., und wenn man von den so entstehenden sechs Gleichungen die obigen abzieht, so bleiben folgende Beziehungen übrig:

$$4)\quad \begin{cases} (a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta a + (a' + \tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta a' + (a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta a'' = 0, \\ (b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta b + (b' + \tfrac{1}{2}\Delta b')\Delta b' + (b'' + \tfrac{1}{2}\Delta b'')\Delta b'' = 0, \\ (c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta c + (c' + \tfrac{1}{2}\Delta c')\Delta c' + (c'' + \tfrac{1}{2}\Delta c'')\Delta c'' = 0; \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} a\Delta b + b\Delta a + a'\Delta b' + b'\Delta a' + a''\Delta b'' + b''\Delta a'' \\ \qquad + \Delta a\Delta b + \Delta a'\Delta b' + \Delta a''\Delta b'' = 0, \\ a\Delta c + c\Delta a + a'\Delta c' + c'\Delta a' + a''\Delta c'' + c''\Delta a'' \\ \qquad + \Delta a\Delta c + \Delta a'\Delta c' + \Delta a''\Delta c'' = 0, \\ b\Delta c + c\Delta b + b'\Delta c' + c'\Delta b' + b''\Delta c'' + c''\Delta b'' \\ \qquad + \Delta b\Delta c + \Delta b'\Delta c' + \Delta b''\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Wir multipliciren jetzt die Gleichungen 3) der Reihe nach mit

$$a + \tfrac{1}{2}\Delta a, \quad a' + \tfrac{1}{2}\Delta a', \quad a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'',$$

und addiren die Produkte; unter Rücksicht auf die erste der Relationen unter Nr. 4) erhalten wir

$$y'\left[(a+\tfrac{1}{2}\varDelta a)\,\varDelta b+(a'+\tfrac{1}{2}\varDelta a')\,\varDelta b'+(a''+\tfrac{1}{2}\varDelta a'')\,\varDelta b''\right]$$
$$+\,z'\left[(a+\tfrac{1}{2}\varDelta a)\,\varDelta c+(a'+\tfrac{1}{2}\varDelta a')\,\varDelta c'+(a''+\tfrac{1}{2}\varDelta a'')\,\varDelta c''\right]=0.$$

Zwei entsprechende Gleichungen finden wir, wenn wir die Gleichungen 3) das eine Mal mit

$$b+\tfrac{1}{2}\varDelta b,\quad b'+\tfrac{1}{2}\varDelta b,\quad b''+\tfrac{1}{2}\varDelta b'',$$

das andere Mal mit

$$c+\tfrac{1}{2}\varDelta c,\quad c'+\tfrac{1}{2}\varDelta c',\quad c''+\tfrac{1}{2}\varDelta c''$$

multipliciren und in jedem Falle addiren. Demnach können die Gleichungen 3) durch die folgenden vertreten werden:

$$6)\left\{\begin{array}{l} \quad y'\left[a\varDelta b+a'\varDelta b'+a''\varDelta b''+\tfrac{1}{2}(\varDelta a\varDelta b+\varDelta a'\varDelta b'+\varDelta a''\varDelta b'')\right] \\ +\,z'\left[a\varDelta c+a'\varDelta c'+a''\varDelta c''+\tfrac{1}{2}(\varDelta a\varDelta c+\varDelta a'\varDelta c'+\varDelta a''\varDelta c'')\right]=0, \\ \quad z'\left[b\varDelta c+b'\varDelta c'+b''\varDelta c''+\tfrac{1}{2}(\varDelta b\varDelta c+\varDelta b'\varDelta c'+\varDelta b''\varDelta c'')\right] \\ +\,x'\left[b\varDelta a+b'\varDelta a'+b''\varDelta a''+\tfrac{1}{2}(\varDelta b\varDelta a+\varDelta b'\varDelta a'+\varDelta b''\varDelta a'')\right]=0, \\ \quad x'\left[c\varDelta a+c'\varDelta a'+c''\varDelta a''+\tfrac{1}{2}(\varDelta c\varDelta a+\varDelta c'\varDelta a'+\varDelta c''\varDelta a'')\right] \\ +\,y'\left[c\varDelta b+c'\varDelta b'+c''\varDelta b''+\tfrac{1}{2}(\varDelta c\varDelta b+\varDelta c'\varDelta b'+\varDelta c''\varDelta b'')\right]=0. \end{array}\right.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$7)\left\{\begin{array}{l} c\varDelta b+c'\varDelta b'+c''\varDelta b''+\tfrac{1}{2}(\varDelta c\varDelta b+\varDelta c'\varDelta b'+\varDelta c''\varDelta b'')=p, \\ a\varDelta c+a'\varDelta c'+a''\varDelta c''+\tfrac{1}{2}(\varDelta a\varDelta c+\varDelta a'\varDelta c'+\varDelta a''\varDelta c'')=q, \\ b\varDelta a+b'\varDelta a'+b''\varDelta a''+\tfrac{1}{2}(\varDelta b\varDelta a+\varDelta b'\varDelta a'+\varDelta b''\varDelta a'')=r, \end{array}\right.$$

so geben die Gleichungen 5):

$$8)\left\{\begin{array}{l} b\varDelta c+b'\varDelta c'+b''\varDelta c''+\tfrac{1}{2}(\varDelta b\varDelta c+\varDelta b'\varDelta c'+\varDelta b''\varDelta c'')=-p, \\ c\varDelta a+c'\varDelta a'+c''\varDelta a''+\tfrac{1}{2}(\varDelta c\varDelta a+\varDelta c'\varDelta a'+\varDelta c''\varDelta a'')=-q, \\ a\varDelta b+a'\varDelta b'+a''\varDelta b''+\tfrac{1}{2}(\varDelta a\varDelta b+\varDelta a'\varDelta b'+\varDelta a''\varDelta b'')=-r, \end{array}\right.$$

und die Gleichungen 6) verwandeln sich in folgende:

$$9)\qquad\left\{\begin{array}{l} qz'-ry'=0, \\ rx'-pz'=0, \\ py'-px'=0. \end{array}\right.$$

Hier ist die dritte Gleichung eine blosse Folge der beiden vorhergehenden, wie man sogleich bemerkt, wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit $p$, $q$, $r$ multiplicirt und die Produkte addirt. Man darf also eine der Grössen $x'$, $y'$, $z'$ willkührlich wählen und die Gleichungen 9) bestimmen dann die übrigen Grössen, d. h. geometrisch die fest bleibende Gerade. Demnach gilt der Satz: *Jede Lagenänderung eines starren Körpers kann dadurch hervorgebracht werden, dass man den Körper erst soweit verschiebt, bis einer seiner Punkte in die verlangte neue Lage kommt, und nachher den Körper* um eine durch diesen Punkt gehende Achse dreht; die Lage der Drehungsachse ist unabhängig von der Wahl jenes Punktes.

Die Cosinus der Winkel zwischen der Drehungsachse und den Coordinaten der $x'$, $y'$, $z'$ sind proportional $p$, $q$, $r$, und daher

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Hieraus ergeben sich leicht die Cosinus der Winkel, welche dieselbe Achse mit den Coordinatenachsen der $x, y, z$ einschliesst; sie sind:

$$\frac{ap+bq+cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{a'p+b'q+c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{a''p+b''q+c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

34. Grösse der Drehung. Fällt man von irgend einem Punkte des Körpers eine Senkrechte auf die Drehungsachse, so giebt der Winkel, den dieses Perpendikel bei der Rotation beschreibt, die Grösse der Drehung an. Am bequemsten wählt man jenen Punkt, wenn man ihn auf einer der secundären Achsen, etwa auf der $z'$-Achse, in dem Abstande $=1$ vom Coordinatenanfange $O$ annimmt. Seine Entfernung $\varrho$ von der Drehungsachse ist dann der Sinus des Winkels zwischen dieser Achse und der Coordinatenachse $OZ'$, mithin

$$\varrho = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Die Verbindungslinie $\sigma$ der ersten und zweiten Lage unseres Punktes, dessen primitive Coordinaten $x$, $y$, $z$ heissen mögen, hat die Länge

$$\sigma = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$$

und dabei ergeben sich $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ aus den Gleichungen in Nr. 32, wenn man dort $x'=y'=0$ und $z'=1$ setzt; man findet nach dieser Bemerkung

$$\sigma = \sqrt{\Delta c^2 + \Delta c'^2 + \Delta c''^2}.$$

Das gleichschenkelige Dreieck, welches $\sigma$ zur Basis, $\varrho$ und $\varrho$ zu Schenkeln hat, bestimmt nun den zwischen beiden Schenkeln liegenden Drehungswinkel $\omega$ und zwar ist

$$2 \sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\sqrt{\Delta c^2 + \Delta c'^2 + \Delta c''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Wäre man von einem auf der $y'$- oder $x'$-Achse gewählten Punkte ausgegangen, so würde man zwar denselben Drehungswinkel aber in anderer Form ausgedrückt erhalten haben, nämlich

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \omega = \frac{\sqrt{\Delta b^2 + \Delta b'^2 + \Delta b''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+r^2}},$$

und

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \omega = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta a'^2 + \Delta a''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{q^2+r^2}},$$

und um hieraus eine symmetrische Formel für $\sin \frac{1}{2} \omega$ zu bilden, quadriren wir diese drei Gleichungen, multipliciren sie der Reihe nach mit

$$p^2+q^2, \quad p^2+r^2, \quad q^2+r^2$$

und addiren die Produkte; nach Ausziehung der Quadratwurzel finden wir

10) $$\sin \tfrac{1}{2} \omega = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta a'^2 + \Delta a''^2 + \Delta b^2 + \Delta b'^2 + \Delta b''^2 + \Delta c^2 + \Delta c'^2 + \Delta c''^2}}{2\sqrt{2}}.$$

35. Projection auf die Drehungsachse. Bei der allen Punkten des Körpers gemeinsamen Verschiebung nähern oder entfernen sich jene Punkte um gleiche Strecken von einer auf der Rotationsachse senkrechten Ebene; die nachherige Drehung ändert die nunmehrigen Abstände der Punkte von jener Ebene nicht weiter, mithin geben alle Verrückungen der Punkte gleiche Projectionen auf die Drehungsachse und zwar sind diese Projectionen einerlei mit den Projectionen der blossen Verschiebungen. Zieht man also durch einen festen Punkt im Raume gerade Linien, welche den Verrückungen aller Punkte parallel und gleich sind, so liegen die Endpunkte jener Geraden in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene. Man kann daher die Richtung dieser Achse auch auf die Weise bestimmen, dass man durch einen Punkt drei Strecken zieht, welche gleich und parallel sind drei nicht einer und derselben Ebene parallelen Verrückungen, ferner durch die Endpunkte jener drei Strecken eine Ebene legt, und schliesslich auf dieser Ebene eine Normale errichtet.

Verschiebt man den Körper zuerst parallel der Drehungsachse um ein Stück, welches den Projectionen der Verrückungen auf diese Achse gleich ist, so bleibt nur noch die Drehung, d. h. eine

Bewegung übrig, bei welcher alle Punkte des Körpers parallel zu einer auf der Drehungsachse senkrechten Ebene bleiben. Jede Bewegung eines festen Körpers kann also in zwei Bewegungen zerlegt werden, von denen die eine senkrecht, die andere parallel zu einer festen Ebene ist.

36. Bewegung parallel einer Ebene. Der früher geometrisch bewiesene Satz, dass jede Bewegung dieser Art, wofern sie nicht eine blosse Verschiebung ist, auf eine Drehung zurückkommt, kann auch analytisch folgendermaassen hergeleitet werden.

Nehmen wir die Achsen der $x$, $y$, $x'$, $y'$ der gegebenen Ebene parallel, so finden die bekannten Gleichungen statt:

$$x = \xi + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = \eta + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

worin $\alpha = \angle(xx')$ ist. Man kann nun leicht einen Punkt $xy$ finden, der vor und nach der Verrückung des Körpers dieselbe Lage hat, in der That braucht man nur $x'$ und $y'$ aus den beiden Bedingungen $\varDelta x = 0$ und $\varDelta y = 0$, d. h.

$$\varDelta\xi + x'\varDelta\cos\alpha - y'\varDelta\sin\alpha = 0,$$
$$\varDelta\eta + x'\varDelta\sin\alpha + y'\varDelta\cos\alpha = 0,$$

zu bestimmen. Diess giebt

$$x' = -\frac{\varDelta\xi\,.\,\varDelta\cos\alpha + \varDelta\eta\,.\,\varDelta\sin\alpha}{(\varDelta\cos\alpha)^2 + (\varDelta\sin\alpha)^2}, \quad y' = \frac{\varDelta\xi\,.\,\varDelta\sin\alpha - \varDelta\eta\,.\,\varDelta\cos\alpha}{(\varDelta\cos\alpha)^2 + (\varDelta\sin\alpha)^2}$$

also zwei völlig bestimmte Werthe, die nur in dem Falle unendlich werden, wo gleichzeitig $\varDelta\cos\alpha = 0$ und $\varDelta\sin\alpha = 0$, d. h. $\alpha$ constant ist und folglich eine blosse Verschiebung stattfindet. Aus $x'$ und $y'$ erhält man $x$ und $y$, und wenn man in diesem Punkte eine auf der festen Ebene senkrechte Gerade errichtet, so kann das System durch Drehung um letztere aus der ursprünglichen in die neue Lage gebracht werden.

37. Reduction auf eine Schraubenbewegung. Jede Lagenänderung eines festen Körpers zerfällt in eine Verschiebung und in eine Drehung um eine feste Achse; die Verschiebung lässt sich in zwei Verschiebungen zerlegen, deren eine parallel zur Achse und von unveränderlicher Grösse ist, während die andere senkrecht zur Achse geschieht und von dem Punkte abhängt, welcher zur Bestimmung der Verschiebung gewählt wurde. Die normale Verschiebung setzt sich mit der noch übrigen Drehung zu einer neuen Drehung um eine parallele Achse zusammen, mithin

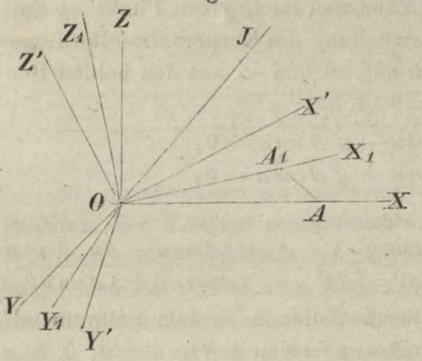
kommt jede Lagenänderung eines festen Körpers auf eine Verschiebung längs einer Geraden und auf eine Drehung um dieselbe zurück.

Diese Reduction jeder Bewegung auf eine schraubenförmige Bewegung wurde früher nur für unendlich kleine Bewegungen hergeleitet; hier zeigt sie sich auch für jede endliche Bewegung gültig.

38. Zwischen den mit $p$, $q$, $r$ bezeichneten Grössen finden einige Beziehungen statt, welche bisweilen zu einer Vereinfachung der Formeln führen und desshalb entwickelt werden sollen.

Wie früher bezeichne $O$ den Anfang des beweglichen Coordinatensystemes der $x'$, $y'$, $z'$; wir denken ihn uns fest und legen durch denselben drei Achsen $OX$, $OY$, $OZ$ parallel zu den primitiven Achsen der $x$, $y$, $z$. Ferner sei $OJ$ die Achse der Drehung, welche den Körper in die neue, die Grössen $\varDelta a$, $\varDelta b$ etc. bestimmte Lage bringt; die Cosinus der Winkel $JOX'$, $JOY'$, $JOZ'$ sind dann proportional $p$, $q$, $r$. Endlich denken wir uns mit den Achsen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ drei

Fig. 10.




neue Achsen fest und zwar so verbunden, dass sie bei der ursprünglichen Lage des Körpers mit $OX$, $OY$, $OZ$ zusammenfielen; nach der Drehung erhalten die erwähnten neuen Achsen andere Lagen, die wir mit $OX_1$, $OY_1$, $OZ_1$ bezeichnen wollen, und nehmen wir auf $OX$ und $OX_1$ die Strecken $OA = OA_1 = 1$, so ist der Punkt $A$ durch die Drehung nach $A_1$ gekommen und die Gerade $AA_1$ kreuzt sich rechtwinklig mit der Drehungsachse $OJ$.

Wegen der festen Verbindung der Achsen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ mit den Achsen $OX_1$, $OY_1$, $OZ_1$ bleiben die Winkel $X'OX_1$, $Y'OY_1$, $Z'OZ_1$ während der ganzen Bewegung unverändert, und zwar dieselben wie bei der Anfangslage, wo $OX_1$, $OY_1$, $OZ_1$ mit $OX$, $OY$, $OZ$ zusammenfielen; die Cosinus jener Winkel sind daher $a$, $b$, $c$. Nach der Drehung bilden $OX'$, $OY'$, $OZ'$ mit der festen Achse $OX$ Winkel, deren Cosinus $a + \varDelta a$, $b + \varDelta b$, $c + \varDelta c$ sind; diese Cosinus kann man als die Projectionen von $OA$ auf $OX'$, $OY'$, $OZ'$ betrachten, ebenso die Cosinus $a$, $b$, $c$ als die Projectionen von $A_1$ auf $OX'$, $OY'$, $OZ'$, mithin sind $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$ die Projectionen von $AA_1$ auf die in ihrer neuen Lage befindlichen Achsen $OX'$, $OY'$, $OZ'$, und die Cosinus der Winkel, welche $AA_1$ mit diesen Achsen einschliesst, proportional $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$. Man hat nun wegen der senkrechten Lage von $AA_1$ gegen $OJ$

$$p\Delta a + q\Delta b + r\Delta c = 0,$$

und wenn man auch auf den Achsen der $y$ und der $z$ entsprechende Punkte $B$ und $B_1$, $C$ und $C_1$ betrachtet, so erhält man zwei analoge Gleichungen, mithin zusammen

$$11)\quad \begin{cases} p\Delta a + q\Delta b + r\Delta c = 0, \\ p\Delta a' + q\Delta b' + r\Delta c' = 0, \\ p\Delta a'' + q\Delta b'' + r\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Wählt man ferner auf den Achsen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ drei Punkte in den Entfernungen 1 und drückt aus, dass die Verbindungslinie der ursprünglichen und der neuen Lage jedes solchen Punktes die Drehungsachse senkrecht kreuzt, so gelangt man zu drei neuen Gleichungen, von denen nur eine entwickelt werden möge. Auf der $x'$-Achse liege in der Entfernung 1 der Punkt $A'$, welcher nach der Drehung an den Ort $A''$ kommt; die Projectionen von $A'A''$ auf die Achsen $OX$, $OY$, $OZ$ sind $\Delta a$, $\Delta a'$, $\Delta a''$ und proportional den Cosinus der Winkel zwischen $A'A''$ und den ebengenannten Achsen. Hieraus findet man

$$\Delta a \,.\, \cos JOX + \Delta a' \,.\, \cos JOY + \Delta a'' \,.\, \cos JOZ$$

als Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen von $A'A''$ und $JO$, d. h. Null wegen $\angle(A'A'', JO) = 90^0$. Setzt man für $\cos JOX$, $\cos JOY$, $\cos JOZ$ ihre bekannten Werthe und die erhaltene Summe $=0$, so gelangt man zur ersten der gesuchten Gleichungen, woraus die übrigen durch Buchstabenvertauschung folgen, nämlich

$$12)\quad \begin{cases} (ap+bq+cr)\,\Delta a + (a'p+b'q+c'r)\,\Delta a' \\ \qquad\qquad + (a''p+b''q+c''r)\,\Delta a'' = 0, \\ (ap+bq+cr)\,\Delta b + (a'p+b'q+c'r)\,\Delta b' \\ \qquad\qquad + (a''p+b''q+c''r)\,\Delta b'' = 0, \\ (ap+bq+cr)\,\Delta c + (a'p+b'q+c'r)\,\Delta c' \\ \qquad\qquad + (a''p+b''q+c''r)\,\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

39. Die Achse der gleichen Projectionen. Obschon früher geometrisch gezeigt wurde, dass alle Verrückungen, auf

die Achse der resultirenden Drehung projicirt, gleiche Projectionen geben, so ist es doch nicht überflüssig, dasselbe Theorem analytisch abzuleiten.

Projicirt man den Weg $MM'$ irgend eines Punktes auf die Achsen der $x'$, $y'$, $z'$, so erhält man für die Projectionen

$$13)\qquad \begin{cases} a\Delta x + a'\Delta y + a''\Delta z, \\ b\Delta x + b'\Delta y + b''\Delta z, \\ c\Delta x + c'\Delta y + c''\Delta z, \end{cases}$$

und daraus ergiebt sich wieder die Projection von $MM'$ auf irgend eine Gerade, welche mit den Achsen der $x'$, $y'$, $z'$ die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ einschliesst; die gesuchte Projection ist

$$(a\Delta x + a'\Delta y + a''\Delta z)\cos\lambda + (b\Delta x + b'\Delta y + b''\Delta z)\cos\mu \\ + (c\Delta x + c'\Delta y + c''\Delta z)\cos\nu.$$

Hier sind nun $\lambda$, $\mu$, $\nu$ so zu bestimmen, dass der vorliegende Ausdruck constant bleibt für alle beliebigen Werthe von $x'$, $y'$ $z'$; man erreicht dies, wenn man für $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ ihre in 2) angegebenen Werthe einführt und die Coefficienten der drei unabhängigen Variabelen $x'$, $y'$, $z'$ einzeln gleich Null setzt. Die hieraus entspringenden Bedingungsgleichungen sind:

$$14)\quad \begin{cases} (a\Delta a + a'\Delta a' + a''\Delta a'')\cos\lambda + (b\Delta a + b'\Delta a' + b''\Delta a'')\cos\mu \\ \qquad + (c\Delta a + c'\Delta a' + c''\Delta a'')\cos\nu = 0, \\ (a\Delta b + a'\Delta b' + a''\Delta b'')\cos\lambda + (b\Delta b + b'\Delta b' + b''\Delta b'')\cos\mu \\ \qquad + (c\Delta b + c'\Delta b' + c''\Delta b'')\cos\nu = 0, \\ (a\Delta c + a'\Delta c' + a''\Delta c'')\cos\lambda + (b\Delta c + b'\Delta c' + b''\Delta c'')\cos\mu \\ \qquad + (c\Delta c + o'\Delta c' + c''\Delta c')\cos\nu = 0, \end{cases}$$

und diese bestimmen die Verhältnisse der Grössen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Die Gleichungen 14) werden aber mit den Gleichungen 12) identisch, wenn man $\cos\lambda = kp$, $\cos\mu = kq$, $\cos\nu = kr$ setzt, wo $k$ irgend einen constanten Factor bedeutet, mithin verhalten sich $\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$, aus Nr. 14) bestimmt, wie $p : q : r$ und daraus geht hervor, dass die durch die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ festgestellte Richtung mit der Richtung der Drehungsachse zusammenfällt.

40. Gleichungen für die Achse der Drehung und Verschiebung. Die Punkte der genannten Achse unterscheiden sich von allen übrigen Punkten des Körpers dadurch, dass sie nur Verschiebungen in der Richtung der Achse selber erleiden, und sind hiernach leicht zu ermitteln. Bezeichnet nämlich $MM'$ die

Verbindungslinie der ersten und zweiten Lage eines Punktes, so gelten die Gleichungen

$$\cos(MM', x) = \frac{\Delta x}{MM'}, \quad \cos(MM', y) = \frac{\Delta y}{MM'}, \quad \cos(MM', z) = \frac{\Delta z}{MM'};$$

ferner bestimmt sich die Lage der Drehungsachse $OJ$ durch die Formeln

$$\cos(OJ, x) = \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos(OJ, y) = \frac{a'p + b'q + c'r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos(OJ, z) = \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

für Punkte der Drehungsachse muss nun die Richtung von $MM'$ mit der Richtung der Drehungsachse zusammenfallen, mithin $\cos(MM', x) = \cos(OJ, x)$, $\cos(MM', y) = \cos(OJ, y)$ und daher auch $\cos(MM', z) = \cos(OJ, z)$ sein. Durch Elimination des Verhältnisses $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} : MM'$ erhält man aus diesen Gleichungen die folgenden

$$15)\qquad \frac{\Delta x}{ap + bq + cr} = \frac{\Delta y}{a'p + b'q + c'r} = \frac{\Delta z}{a''p + b''q + c''r},$$

und wenn man in diesen für $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ ihre unter Nr. 2) angegebenen Werthe einsetzt, so gelangt man zu zwei Gleichungen ersten Grades zwischen $x'$, $y'$, $z'$, womit die Lage der Drehungsachse gegen das secundäre Coordinatensystem bestimmt ist.

Um diese Gleichungen auf die einfachste Form zu bringen, schreiben wir statt der Gleichungen 15) erst die folgenden:

$$\frac{(a + \frac{1}{2}\Delta a)\,\Delta x}{(a + \frac{1}{2}\Delta a)\,(ap + bq + cr)} = \frac{(a' + \frac{1}{2}\Delta a')\,\Delta y}{(a' + \frac{1}{2}\Delta a')\,(a'p + b'q + c'r)}$$

$$= \frac{(a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')\,\Delta z}{(a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')\,(a''p + b''q + c''r)}$$

und wenden den bekannten Satz an, dass sich aus drei gleichen Brüchen durch Addition der Zähler sowie der Nenner ein neuer Bruch von demselben Werthe bilden lässt*). Mit-

*) Besitzen nämlich die Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{B'}{A'}$, $\frac{B''}{A''}$ etc. den gemeinschaftlichen Werth $\varkappa$, so ist gleichzeitig

$$B = A\varkappa, \quad B' = A'\varkappa, \quad B'' = A''\varkappa, \; \ldots .$$

mithin

telst der ersten Gleichung in Nr. 12) und unter Beachtung der Relationen

$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0$$

findet man leicht, dass die Summe der Nenner auf $p$ zurückkommt; die Summe der Zähler wird vermöge der Gleichungen 2) zu

$$h + qz' - ry',$$

wobei zur Abkürzung $h$ für $(a + \frac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi + (a' + \frac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta + (a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta$ geschrieben ist. Jeder von den drei in Nr. 15) angegebenen Quotienten besitzt also den Werth

$$\frac{h + qz' - ry'}{p}.$$

Wiederholt man das benutzte Verfahren, indem man $a$ das eine Mal durch $b$ und das andere Mal durch $c$ ersetzt, so gelangt man zu dem Ergebnisse, dass die in Nr. 15) vorkommenden Quotienten auch unter den Formen

$$\frac{i + rx' - pz'}{q} \text{ und } \frac{k + py' - qx'}{r}$$

dargestellt werden können, wobei $h$, $i$ und $k$ folgende Werthe haben:

$$16) \begin{cases} h = (a + \frac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi + (a' + \frac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta + (a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta, \\ i = (b + \frac{1}{2}\Delta b)\Delta\xi + (b' + \frac{1}{2}\Delta b')\Delta\eta + (b'' + \frac{1}{2}\Delta b'')\Delta\zeta, \\ k = (c + \frac{1}{2}\Delta c)\Delta\xi + (c' + \frac{1}{2}\Delta c')\Delta\eta + (c'' + \frac{1}{2}\Delta c'')\Delta\zeta. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Drehungsachse lauten demnach:

$$\frac{h + qz' - ry'}{p} = \frac{i + rx' - pz'}{q} = \frac{k + py' - qx'}{r}.$$

Wir multipliciren Zähler und Nenner des ersten Bruches mit $p$, des zweiten mit $q$, des dritten mit $r$ und bilden durch Addition so wohl der Zähler als der Nenner den neuen gleichwerthigen Bruch

$$\frac{ph + qi + rk}{p^2 + q^2 + r^2};$$

der Zähler desselben ist vermöge der Werthe von $h$, $i$, $k$

$$\begin{aligned} & ph + qi + rk \\ = & (ap + bq + cr)\Delta\xi + (a'p + b'q + c'r)\Delta\eta + (a''p + b''q + c''r)\Delta\zeta \\ = & \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\left\{\Delta\xi . \cos(OJ, x) + \Delta\eta . \cos(OJ, y) + \Delta\zeta . \cos(OJ, z)\right\} \end{aligned}$$

---

$$B + B' + B'' + \ldots = (A + A' + A'' + \ldots)\,\varkappa$$

und

$$\frac{B + B' + B'' + \ldots}{A + A' + A'' + \ldots} = \varkappa,$$

wie oben behauptet wurde.

und hier bedeutet der in Parenthesen stehende Ausdruck die Projection der Verrückung von $O$ auf die Drehungsachse. Diese Projection bezeichnen wir mit $\nu$ und haben jetzt

$$\frac{h+qz'-ry'}{p}=\frac{i+rx'-pz'}{q}=\frac{k+py'-qx'}{r}=\frac{\nu}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

mithin als Gleichungen der Drehungsachse

$$17)\quad \begin{cases} qz'-ry'=\dfrac{p\nu}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}-h, \\ rx'-pz'=\dfrac{q\nu}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}-i, \\ py'-qx'=\dfrac{r\nu}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}-k, \end{cases}$$

$$18)\ \nu=\frac{(ap+bq+cr)\Delta\xi+(a'p+b'q+c'r)\Delta\eta+(a''p+b''q+c''r)\Delta\zeta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

41. Aus den bisherigen Relationen kann man leicht diejenigen Gleichungen ableiten, welche sich auf eine unendlich kleine Bewegung des Körpers beziehen. Denkt man sich nämlich die Lagenänderung innerhalb einer unendlich kleinen Zeit ausgeführt, so werden auch die mit $\Delta$ bezeichneten Aenderungen unendlich klein, um aber mit endlichen Grössen zu rechnen, dividirt man die vorhandenen Gleichungen erst mit dem Zeitincremente $\Delta t$ und geht nachher zur Grenze für verschwindende $\Delta$ über, wodurch die Differenzenquotienten zu Differentialquotienten werden. Die phoronomische Bedeutung der hierbei zum Vorschein kommenden Ausdrücke $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ist schon früher erörtert worden und wir können uns daher im Folgenden etwas kurz fassen.

### Unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers.

42. Die Seitengeschwindigkeiten. Dividirt man beide Seiten der Gleichungen 2) durch $\Delta t$ und geht zur Grenze für verschwindene $\Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots$ über, so gelangt man zu den Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d\xi}{dt}+x'\dfrac{da}{dt}+y'\dfrac{db}{dt}+z'\dfrac{dc}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d\eta}{dt}+x'\dfrac{da'}{dt}+y'\dfrac{db'}{dt}+z'\dfrac{dc'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{d\zeta}{dt}+x'\dfrac{da''}{dt}+y'\dfrac{db''}{dt}+z'\dfrac{dc''}{dt}; \end{cases}$$

in diesen bedeuten die linker Hand stehenden Differentialquotienten die Seitengeschwindigkeiten des Punktes $xyz$, bezogen auf das unveränderliche primitive Coordinatensystem der $x, y, z$, ebenso $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ die Seitengeschwindigkeiten des Anfangspunktes $O$ der secundären Coordinaten in Beziehung auf eben jenes System.

Um die Seitengeschwindigkeiten von $O$ in Beziehung auf das bewegliche Coordinatensystem kennen zu lernen, hat man die absolute Geschwindigkeit von $O$ auf $OX'$, $OY'$, $OZ'$ zu projiciren, was bekanntlich auf die Weise geschehen kann, dass man jene Geschwindigkeit erst auf $OX$, $OY$, $OZ$ und nachher diese Projectionen auf $OX'$, $OY'$, $OZ'$ projicirt. Für die nach den Achsen der $x', y', z'$ genommenen Seitengeschwindigkeiten von $O$, welche $h, i, k$ heissen mögen, findet man auf diese Weise

$$2)\qquad \begin{cases} h = a\dfrac{d\xi}{dt} + a'\dfrac{d\eta}{dt} + a''\dfrac{d\zeta}{dt}, \\ i = b\dfrac{d\xi}{dt} + b'\dfrac{d\eta}{dt} + b''\dfrac{d\zeta}{dt}, \\ k = c\dfrac{d\xi}{dt} + c'\dfrac{d\eta}{dt} + c''\dfrac{d\zeta}{dt}. \end{cases}$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch aus den Gleichungen 16), wenn man darin $h, i, k$ durch $h\Delta t$, $i\Delta t$, $k\Delta t$ ersetzt, mit $\Delta t$ dividirt und zur Grenze für verschwindende $\Delta t$ übergeht.

Weiter können wir jetzt die nach den Achsen der $x', y', z'$ genommenen Seitengeschwindigkeiten des Punktes $xyz$ ermitteln; bezeichnen wir dieselben mit $u, v, w$, so ist den Gleichungen 2) analog

$$u = a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}$$

u. s. w.

vermöge der Werthe von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und unter Einführung der Abbreviaturen

$$3)\qquad \begin{cases} p = c\dfrac{db}{dt} + c'\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{db''}{dt}, \\ q = a\dfrac{dc}{dt} + a'\dfrac{dc'}{dt} + a''\dfrac{dc''}{dt}, \\ r = b\dfrac{da}{dt} + b'\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{da''}{dt} \end{cases}$$

ergeben sich hiernach die Formeln

$$4)\qquad \begin{cases} u = h + qz' - ry', \\ v = i + rx' - pz', \\ w = k + py' - qx'. \end{cases}$$

Durch eine der in Nr. 32) angestellten ähnliche Betrachtung findet man leicht, dass $h$, $i$, $k$ die Componenten der Geschwindigkeit sind, womit die allen Punkten gemeinsame unendlich kleine Verschiebung vor sich geht; die Seitengeschwindigkeiten der drehenden Bewegung sind daher

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx'.$$

Die Grössen $p$, $q$, $r$ stimmen mit denen überein, welche man aus den Gleichungen 7) erhält, wenn man in letzteren $p\Delta t$, $q\Delta t$, $r\Delta t$ für $p$, $q$, $r$ setzt, mit $\Delta t$ dividirt und zur Grenze für verschwindende $\Delta t$ übergeht.

43. Die augenblickliche Drehungsachse. Denkt man sich den Punkt $O$ als fest, so verschwinden $h$, $i$, $k$ und es werden nachher diejenigen Punkte, welche bei der Drehung um $O$ in Ruhe bleiben, durch folgende drei Gleichungen bestimmt:

$$5)\qquad qz' - ry' = 0, \quad rx' - pz' = 0, \quad py' - qx' = 0.$$

Diese Gleichungen charakterisiren eine durch den festen Punkt $O$ gehende Gerade; sie bildet mit den Achsen der $x'$, $y'$, $z'$ Winkel, deren Cosinus sind

$$\frac{\pm p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{\pm q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{\pm r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

wobei man gleichzeitig die oberen oder unteren Zeichen und die Wurzel im absoluten Sinne zu nehmen hat. Die gefundene Gerade ist keine andere als die augenblickliche Drehungsachse, weil die während einer unendlich kleinen Zeit vor sich gehende Lagenänderung des Körpers als eine Drehung um jene Gerade betrachtet werden darf.

44. Die Winkelgeschwindigkeit. Bei der Bewegung um die augenblickliche Drehungsachse ist die Winkelgeschwindigkeit gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeit irgend eines Punktes getheilt durch seine Entfernung von der Drehungsachse. Wählen wir diesen beliebigen Punkt auf der $z'$-Achse in der Entfernung $= 1$ vom festen Punkte $O$, so ist

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 1;$$

nash den Formeln 5) sind weiter seine Seitengeschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ in den Richtungen von $OX'$, $OY'$, $OZ'$

$$u = q, \quad v = -p, \quad w = 0;$$

seine Geschwindigkeit beträgt daher $\sqrt{p^2 + q^2}$. Ferner ist der Abstand des Punktes von der Drehungsachse gleich dem Sinus des Winkels zwischen der $z'$-Achse und der Drehungsachse, mithin

$$= \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 + r^2}};$$

hieraus ergiebt sich für die Winkelgeschwindigkeit die Formel

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

45. Die Drehungsrichtung. Wir haben endlich noch zu ermitteln, in welchem Sinne die Drehung vor sich geht. Zu diesem Zwecke legen wir durch den Coordinatenanfang eine zur Drehungsachse senkrechte Ebene, betrachten in derselben einen Punkt $x'y'z'$ und untersuchen, nach welcher Seite der Ebene hin die Drehungsachse zu ziehen ist, wenn die Bewegung des Punktes $x'y'z'$, vom Endpunkte der Achse aus gesehen, als eine Drehung von links nach rechts erscheinen soll. Bezeichnen wir den Radiusvector dieses Punktes mit $\varrho$ und nennen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, die $\varrho$ mit den Achsen der $x'$, $y'$, $z'$ einschliesst, so haben wir erstens

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\varrho}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\varrho}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{\varrho}.$$

Der genannte Punkt bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, deren Richtung mit den Coordinatenachsen die Winkel $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ einschliessen möge; die Cosinus dieser Winkel sind proportional den Grössen $u$, $v$, $w$, etwa

$$\cos\alpha' = \frac{u}{\sigma}, \quad \cos\beta' = \frac{v}{\sigma}, \quad \cos\gamma' = \frac{w}{\sigma},$$

wo $\sigma$ eine positive Grösse bezeichnet. Aus den beiden Richtungen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ lässt sich wieder die Richtung der auf beiden senkrecht stehenden Drehungsachse ableiten; ist nämlich $V$ der Winkel zwischen den Richtungen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ und $OJ$ die Drehungsachse, so hat man nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie (s. Anhang)

$$\cos JOX' = \frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\sin V},$$

$$\cos JOY' = \frac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin V},$$

$$\cos JOZ' = \frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin V},$$

d. i. im vorliegenden Falle:

$$\cos JOX' = \frac{y'w - z'v}{\varrho\sigma\sin V}, \quad \cos JOY' = \frac{z'u - x'w}{\varrho\sigma\sin V},$$

$$\cos JOZ' = \frac{x'v - y'u}{\varrho\sigma\sin V}.$$

Diese Werthe müssen mit den schon bekannten Werthen

$$\cos JOX' = \frac{\pm p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \cos JOY' = \frac{\pm q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

$$\cos JOZ' = \frac{\pm r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

übereinstimmen, und hieraus lässt sich entscheiden, ob man in den letzteren Formeln die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen hat. Für den speciellen Fall $z = 0$ ist nun nach Nr. 4)

$$u = -ry', \quad v = rx',$$

mithin

$$\cos JOZ' = \frac{r(x'^2 + y'^2)}{\varrho\sigma\sin V};$$

dieser Ausdruck hat das nämliche Vorzeichen wie $r$, daher ist in der zweiten Formel für $\cos JOZ'$ das obere Zeichen zu nehmen. Man ersieht hieraus, dass überhaupt die Cosinus der Richtungswinkel der augenblicklichen Drehungsachse, sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach, durch die Ausdrücke

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^3+q^2+r^2}}$$

dargestellt werden, wenn man die Wurzel im absoluten Sinne nimmt. Multiplicirt man noch mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, so ergeben sich

$$p, \quad q, \quad r$$

als die, sowohl der Grösse als der Richtung nach, völlig bestimmten Componenten der Winkelgeschwindigkeit, bezogen auf die Achsen der $x'$, $y'$, $z'$.

46. Die augenblickliche Achse der Drehung und Verschiebung. Der in Nr. 37) erwiesene Satz gilt für jede Lagenänderung eines Körpers, mithin auch für eine unendlich kleine Bewegung desselben; dies giebt den schon früher durch geometrische Betrachtungen abgeleiteten Satz, dass jede unendlich kleine

Bewegung eines starren Körpers auf eine Verschiebung längs einer festen Achse und auf eine Drehung um die nämliche Achse zurückgeführt werden kann.

Dieses Theorem gestattet noch eine andere Ausdrucksweise, wenn man die unendlich kleinen durchlaufenen Wege durch die Geschwindigkeiten ersetzt; es lautet dann folgendermaassen: Die augenblickliche Geschwindigkeit jedes Punktes kann als Resultante zweier Geschwindigkeiten angesehen werden; die erste Componente ist von gleicher Grösse und von gleicher Richtung für alle Punkte des Körpers; die zweite Componente ist dieselbe, welche der Punkt bei einer gewissen Drehung um eine, jener Richtung parallele Achse erhalten würde.

Die erste Componente bestimmt sich dadurch, dass man die Geschwindigkeit des beweglichen Coordinatenanfangs auf die augenblickliche Drehungsachse projicirt; die zweite Componente, nämlich die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, ist $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ und ihre Richtung schliesst mit den Achsen der $x'$, $y'$, $z'$ Winkel ein, deren Cosinus den Grössen $p$, $q$, $r$ proportional und mit ihnen von gleichen Vorzeichen sind.

47. Die Gleichungen der momentanen Verschiebungs- und Drehungsachse. Da wir die betreffenden Gleichungen schon für eine endliche Bewegung kennen gelernt haben (Nr. 17), so brauchen wir nur noch die für eine unendlich kleine Bewegung nöthige Modification derselben anzugeben. Wir ersetzen $p, q, r$ durch $p\Delta t$, $q\Delta t$, $r\Delta t$, dividiren mit $\Delta t$ und gehen zur Grenze für verschwindende $\Delta t$ über; die neuen $p$, $q$, $r$ sind dann dieselben, wie wir sie bereits in den Formeln 3) definirt haben. Aus $\frac{h}{\Delta t}, \frac{i}{\Delta t}, \frac{k}{\Delta t}$ werden die Ausdrücke

$$a\frac{d\xi}{dt}+a'\frac{d\eta}{dt}+a''\frac{d\zeta}{dt},$$

$$b\frac{d\xi}{dt}+b'\frac{d\eta}{dt}+b''\frac{d\zeta}{dt},$$

$$c\frac{d\xi}{dt}+c'\frac{d\eta}{dt}+c''\frac{d\zeta}{dt},$$

die wieder $h$, $i$, $k$ heissen mögen; da endlich $v$ die Projection der Verrückung von $O$ auf die Drehungsachse bezeichnete, so wird

$Lim \frac{v}{\Delta t}$ die Geschwindigkeit, womit sich die Projection von $O$ auf die Drehungsachse längs dieser bewegt, d. h. kürzer, die Geschwindigkeit der gleitenden Bewegung. Wir bezeichnen sie wieder mit $v$ und ihre Seitengeschwindigkeiten längs der Achsen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ mit $v'$, $v''$, $v'''$. Die Gleichungen der augenblicklichen Verschiebungs- und Drehungsachse, bezogen auf das Coordinatensystem der $x'$, $y'$, $z'$, sind hiernach

$$6)\qquad \begin{cases} qz' - ry' = v' - h, \\ rx' - pz' = v'' - i, \\ py' - qx' = v''' - k. \end{cases}$$

Will man sie auf das unbewegliche Coordinatensystem beziehen, so braucht man nur $x'$, $y'$, $z'$ durch $x$, $y$, $z$ auszudrücken. Die momentane Lage der Achse ist hiernach sowohl gegen das bewegliche als gegen das unbewegliche Coordinatensystem, d. h. ebensowohl gegen den Körper als gegen den absoluten Raum, vollständig orientirt, wenn man $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $a'$ etc. als gegebene Funktionen der Zeit betrachtet.

Eliminirt man die Zeit aus den obigen oder aus den daraus folgenden drei Gleichungen der momentanen Achse, so erhält man die Gleichung derjenigen Regelfläche, welche den geometrischen Ort aller successiven Achsen darstellt.

48. Die virtuelle Bewegung eines Körpers und die Gleichgewichtsbedingungen. Die Formeln

$$u = h + qz' - ry',$$
$$v = i + rx' - pz',$$
$$w = k + py' - qx',$$

welche die Seitengeschwindigkeiten eines bewegten Körperpunktes angeben, führen unmittelbar zu den Componenten der virtuellen Geschwindigkeiten aller Punkte, und daraus lassen sich mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten wieder die Gleichgewichtsbedingungen für einen freien und starren Körper herleiten. Geht nämlich der Körper aus irgend einer Lage in eine unendlich nahe Lage über, so beschreiben alle Punkte desselben unendlich kleine gerade Linien, und zwar mit Geschwindigkeiten, die den Längen jener Linien, d. h. den virtuellen Verrückungen, proportional sind. Bezeichnet $\vartheta$ die Zeit, während welcher die Bewegung vor sich ging, so sind $u\vartheta$, $v\vartheta$, $w\vartheta$ die Componenten irgend einer virtuellen Verrückung und $Xu\vartheta$, $Yv\vartheta$, $Zw\vartheta$ die virtuellen Kraftmomente, welche entstehen, wenn man an dem Punkte $x'y'z'$ eine Kraft anbringt, deren Componenten $X$, $Y$, $Z$ heissen; die Summe aller virtuellen Momente ist daher

$$\vartheta\Sigma\,[X\,(h+qz'-ry')+Y(i+rx'-pz')+Z\,(k+py'-qx')].$$

Vermöge des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten muss im Gleichgewichtszustande diese durch $\vartheta$ dividirte Summe verschwinden, welcher Art auch die virtuelle Verrückung gewesen sein möge; in diesem Falle sind aber die sechs Grössen $h$, $i$, $k$, $p$, $q$, $r$ vollkommen willkührlich und es kann daher die obige Summe, d. h.

$$h\Sigma X+i\Sigma Y+k\Sigma Z$$
$$+p\Sigma(y'Z-z'X)+q\Sigma(z'X-x'Z)+r\Sigma(x'Y-y'X)$$

nur dann zu Null werden, wenn der Coefficient jeder einzelnen der genannten sechs Grössen für sich verschwindet; man hat demgemäss die sechs Gleichungen:

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0,$$
$$\Sigma(y'X-z'Y)=0,\quad \Sigma(x'Y-x'Z)=0,\quad \Sigma\,(x'Y-y'X)=0.$$

Dabei ist die Lage des beweglichen Cordinatensystemes der $x'$, $y'$, $z'$ vollkommen willkührlich; lässt man es mit dem ursprünglichen Coordinatensysteme zusammenfallen, so findet man die früheren sechs Gleichgewichtsbedingungen wieder*).

---

*) Ueber die geometrische Bewegung eines starren Körpers sehe man auch die (nach Poinsot's Arbeiten erschienene) Abhandlung von Rodrigues: „*Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide etc.*“ *Journal de Liouville, tome V., page* 380.

## Drittes Capitel.

# Geschwindigkeit und Deviation bei der zusammengesetzten Bewegung.

### Geometrische Betrachtung der relativen Bewegung.

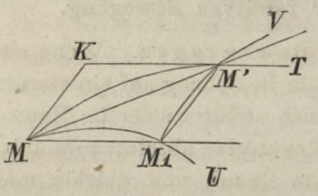
49. Zusammensetzung der Bewegungen. Wenn ein Punkt irgend eine stetige Bewegung in Beziehung auf ein starres Punktesystem besitzt und letzteres sich selbst wieder im Raume continuirlich bewegt, so erhält jener Punkt eine absolute continuirliche Bewegung in Beziehung auf den Raum, von welcher man sagt, dass sie aus jenen beiden Bewegungen zusammengesetzt sei. Wir haben bereits in Nr. 22 das Verfahren angegeben, mittelst dessen man die nach Verlauf einer bestimmten Zeit stattfindende Lage des Punktes ermitteln kann; man denkt sich nämlich den Punkt zunächst mit jenem Systeme fest verbunden, so dass er an der Bewegung dieses letzteren Theil nimmt, und giebt dem Systeme die während jener Zeit ihm zukommende Bewegung; darauf stellt man sich das System in seiner neuen Lage fixirt vor, und lässt in ihm den Punkt sich bewegen, bis er in die verlangte relative Lage kommt. Auch könnte man diese beiden Bewegungen in der umgekehrten Reihenfolge vor sich gehen lassen.

Zur Bestimmung der beiden gegebenen Bewegungen dient am besten ein Coordinatensystem, welches man sich mit dem beweglichen Punktesysteme fest verbunden denkt. Die relative Lage des Punktes wird dann in jedem Falle durch seine Coordinaten in Beziehung auf jenes Achsensystem angegeben, und die Bewegung des Punktesystems durch die successiven Lagen der Achsen bestimmt. Kennt man die beiden zusammensetzenden Bewegungen, so sind sowohl die Coordinaten des Punktes in Beziehung auf die beweglichen Achsen, als auch die auf ein absolut festes Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Anfanges der beweglichen Achsen, sowie endlich die Neigungen der beweglichen gegen die festen Achsen sammt und sonders bekannte Funktionen der Zeit und man kann daher die absoluten Coordinaten des Punktes gleichfalls durch die Zeit ausdrücken, d. h. die absolute Bewegung angeben.

Wir wollen nun untersuchen, wie man für die resultirende Bewegung die beiden wichtigsten Elemente, nämlich Geschwindigkeit und Deviation bestimmen kann.

50. Die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung. In einem bestimmten Augenblicke sei $M$ der Ort des Punktes, $MU$ die Bahn desjenigen zu dem beweglichen Systeme

Fig. 11.




gehörenden Punktes, welcher in jenem Augenblicke mit $M$ zusammenfällt, und $M_1$ seine Lage nach Verlauf einer unendlich kleinen Zeit $\vartheta$; ferner bedeute $M_1V$ die Stellung, in welche die relative Trajectorie des Punktes nach derselben Zeit gekommen ist, und $M_1M'$ den vom beweglichen Punkte während der Zeit $\vartheta$ durchlaufenen Theil von $M_1V$. Es leuchtet dann unmittelbar ein, dass der bewegliche Punkt am Ende der Zeit $\vartheta$ sich in der absoluten Lage $M'$ befinden und dass seine absolute Bahn eine durch $M$ und $M'$ gehende Linie $MM'T$ sein muss.

Verbindet man die Punkte $M, M', M_1$ durch Gerade, so nähern sich die Richtungen derselben, bei unendlich abnehmende $\vartheta$, mehr und mehr den Richtungen von Tangenten an den Curven $MU$, $MT$, $M_1V$, letztere in der Grenzlage gedacht, bei der $M_1$ mit $M$ zusammenfällt. Ferner nähern sich die Verhältnisse der Seiten des Dreiecks $MM'M_1$ denselben Grenzen, wie die Verhältnisse der in gleichen Zeiten durchlaufenen Bögen $MM_1$, $M_1M'$, $MM'$, von denen der erste die absolute Bewegung des Punktesystemes, der zweite die relative Bewegung des Punktes gegen das System, und der dritte die zusammengesetzte oder resultirende Bewegung des Punktes darstellt. Dividirt man diese drei Bögen durch die Zeit $\vartheta$, so sind die Grenzwerthe der Quotienten gleich den Geschwindigkeiten der genannten Bewegungen, und die Grenzwerthe der Seiten-verhältnisse in dem Dreiecke $MM_1M'$ werden identisch mit den Verhältnissen jener Geschwindigkeiten.

Um dieses Ergebniss auf einen einfachen Ausdruck zu bringen, construiren wir das Parallelogramm $MM_1M'V$. Dieses wird bei abnehmenden $\vartheta$ mehr und mehr ähnlich einem Parallelogramm, dessen Seiten in $M$ Tangenten an den beiden Curven sind, von denen die eine die absolute Bewegung des Systemes (d. h. eines ursprünglich mit $M$ zusammenfallenden Punktes desselben) und die andere die relative Bewegung des Punktes darstellt, während die Längen der Parallelogrammseiten proportional den Geschwindigkeiten in jenen Curven sind. Diess giebt folgenden Satz:

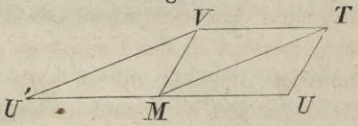
Die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung wird, sowohl der Grösse als der Richtung nach, durch die Diagonale desjenigen Parallelogrammes dargestellt, dessen Seiten, der Grösse und Richtung nach, die absolute Geschwindigkeit eines mit dem beweglichen Punkte zusammenfallenden Systempunktes und die relative Geschwindigkeit des beweglichen Punktes sind.

Vermöge der in Nr. 11 gegebenen Definition von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten kann man noch kürzer sagen:

Die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung ist die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit des Systemes und der relativen Geschwindigkeit des Punktes.

51. Die relative Geschwindigkeit. In Fig. 12 sei $MU$ Tangente an der Trajectorie eines ursprünglich mit $M$ zusammenfallenden Systempunktes, $MV$ Tangente an der relativen Trajectorie des Punktes und $MUTV$ das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, mithin $MT$, der Grösse und Richtung nach, die Geschwindigkeit der resultirenden absoluten Bewegung des Punktes; nimmt man auf der Rückverlängerung von $MU$ die Strecke $MU' = MU$, so kann $MV$ auch als Diagonale des Parallelogrammes aus den Seiten $MU$ und $MT$ angesehen und daher folgender Satz ausgesprochen werden:

Fig. 12.

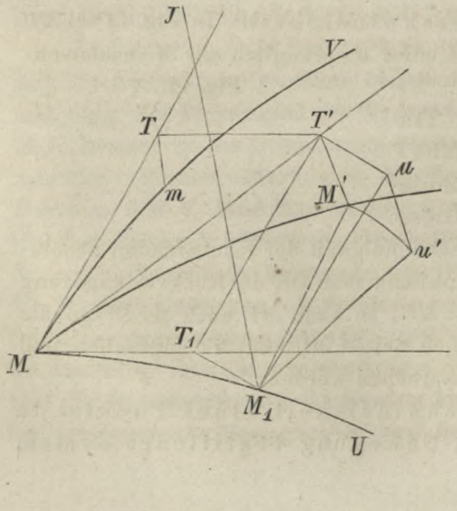



Die relative Geschwindigkeit eines Punktes in Beziehung auf ein in Bewegung begriffenes System ist die Resultante aus seiner absoluten Geschwindigkeit und der im entgegengesetzten Sinne genommenen absoluten Geschwindigkeit des coincidirenden Systempunktes.

52. Die Deviation in der zusammengesetzten Bewegung. Für eine bestimmte Epoche sei $M$ die Lage des beweglichen Punktes, $MV$ seine relative Trajectorie, $MU$ die Curve, welche ein anfangs mit $M$ zusammenfallender Systempunkt beschreibt (die absolute Bewegung des Systems). Nach Verlauf einer unendlich kleinen Zeit $\vartheta$ befinde sich der bewegliche Punkt auf seiner relativen Trajectorie in $m$, und der Systempunkt $M$ in $M_1$; endlich mögen $MT$ und $MT_1$ diejenigen Strecken bedeuten, welche durchlaufen worden wären, wenn sich die Punkte mit den in $M$ ihnen zukommenden Geschwindigkeiten nicht auf den genannten Curven, sondern auf den Tangenten an diesen gleichförmig fortbewegt hätten. Die Deviation in der relativen Bewegung ist dann $Tm$, und die Deviation in der absoluten Bewegung des Systems $= T_1M_1$.

Die Diagonale $MT'$ des Parallelogramms $MT_1T'T$ bestimmt die Richtung der in $M$ an die absolute Trajectorie gelegten Tangente, und die Länge von $MT'$ stellt zugleich die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung, d. h. die Strecke dar, welche der bewegliche Punkt in der Zeit $\vartheta$ auf der Tangente an der absoluten Trajectorie durchlaufen würde. Um nun die Deviation in der absoluten Bewegung zu erhalten, braucht man nur den Punkt $T'$ mit dem Orte $M'$ zu verbinden, wo sich der bewegliche Punkt nach der Zeit $\vartheta$ auf der absoluten Trajectorie befindet, welcher Ort nichts Anderes als die wirkliche (absolute) neue Lage des Punktes ist. Der Ort $M'$ kann aber auf folgende Weise bestimmt werden.

Fig. 13.



Lassen wir zunächst das System während der Zeit $\vartheta$ unbeweglich, so gelangt der bewegliche Punkt von $M$ nach $m$; hier denken wir uns denselben fest mit dem Systeme verbunden und ertheilen dem letzteren diejenige Bewegung, die es in der That während der Zeit $\vartheta$ ausführen sollte. Wie nun auch diese Lagenänderung beschaffen sein mag, so können wir sie doch immer in eine Verschiebung, bei welcher $M$ nach $M_1$ kommt, und in eine Drehung um eine gewisse Achse $M_1J$ zerlegen, wobei die Lage dieser Achse und die Grösse des Drehungswinkels nur von den Richtungsänderungen der Linien des Systemes abhängt. Ferner dürfen wir $M_1J$, wegen der unendlichen Kleinheit von $\vartheta$, als die momentane Drehungsachse ansehen, und dann ist der Drehungswinkel das Product aus der Zeit $\vartheta$ in die entsprechende Winkelgeschwindigkeit des Systems. Wir haben nun zu untersuchen, wie sich der mit dem Systeme verbundene Punkt $m$ unter den angegebenen Umständen bewegt.

Die Verschiebung $MM_1$ zerlegen wir in die zwei Verschiebungen $MT_1$ und $T_1M_1$; die Gerade $MT$ kommt dabei der Reihe nach in die Lagen $T_1T'$ und $M_1\mu$, wobei die letzten zwei Geraden parallel und gleich $MT$ sind. Zieht man noch $\mu\mu'$ parallel und gleich $Tm$, so ist $\mu'$ die Lage, welche $m$ am Ende der beiden genannten Verschiebungen d. h. durch die gleichgeltende Verschiebung $MM_1$ erhalten hat. Bei der darauf folgenden Drehung um $M_1J$ beschreibt der Punkt $\mu'$ einen gewissen auf der Ebene $JM_1\mu'$ senkrecht stehenden Kreisbogen $\mu'M'$, dessen Halbmesser gleich dem Perpendikel von $\mu'$ auf $JM_1$ ist. Am Ende dieser Drehung befinden sich alle Punkte in den Lagen, welche sie bei der wirklichen Bewegung am Ende der Zeit $\vartheta$ erhalten haben würden, mithin ist $M'$ die gesuchte absolute Lage des beweglichen Punktes und $T'M'$ die zugehörige Deviation.

Betrachten wir den unendlich kleinen Kreisbogen $\mu'M'$ als gerade Linie mithin $T'\mu\mu'M'$ als geschlossenes Polygon, so erkennen wir in $T'M'$ die Resultante der drei Linien $T'\mu$, $\mu\mu'$, $\mu'M'$, deren Richtungen in dem Sinne zu nehmen sind wie sie von $T'$ aus durchlaufen werden. Die erste Gerade $T'\mu$ ist die parallel zu sich selbst verlegte Deviation $T_1M_1$, die zweite $\mu\mu'$ die auf gleiche Weise verlegte Deviation $Tm$. Was die dritte Gerade $\mu'M'$ betrifft, so fällt die Grenzlage ihrer Richtung mit der Senkrechten auf einer Ebene zusammen, die einerseits durch die Grenzlage von $M_1J$, d. h. durch die momentane Drehungsachse, andererseits durch die Grenzlage von $M_1\mu'$ bestimmt wird; letztere ist gleichzeitig auch die Grenzlage von $M_1\mu$, weil $M_1\mu'$ von erster und $\mu\mu'$ von zweiter Ordnung unendlich kleiner Grössen ist. Die Linie $\mu'M'$ kann daher als Senkrechte zu derjenigen Ebene gelten, welche die Parallelen zur augenblicklichen Drehungsachse und zur Richtung der relativen Geschwindigkeit des Punktes enthält. Der Sinn dieser Geraden stimmt überein mit dem Sinne der momentanen Drehung des Systems; wollte man sie daher als Achse einer directen Drehung in der zu ihr senkrechten Ebene betrachten, so würde diese Drehung von der augenblicklichen Drehungsachse nach der Richtung der relativen Geschwindigkeit hin vor sich gehen.

Um endlich die Grösse von $\mu'M'$ zu bestimmen, nennen wir $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems, $v_r$ die relative Geschwindigkeit, $\delta$ den Winkel zwischen ihrer Richtung und der momentanen Drehungsachse, und bemerken erstens, dass der Radius des vom Punkte $\mu'$ beschriebenen Kreisbogens $= M_1\mu' \sin\delta$ ist, wofür $M_1\mu . \sin\delta$ oder $\vartheta v_r \sin\delta$ genommen werden darf, sowie zweitens, dass der Centriwinkel $= \vartheta\omega$ ist. Wir haben dann

$$\mu'M' = \vartheta^2 \omega v_r \sin\delta$$

d. h. in Worten folgendes Resultat:

Die Deviation in der zusammengesetzten Bewegung eines Punktes ist die Resultante dreier Geraden. Von diesen sind die beiden ersten die Deviation in der relativen Bewegung des Punktes gegen das bewegliche System, und die Deviation in der Bewegung desjenigen Systempunktes, der zu Anfang des vorausgesetzten unendlich kleinen Zeitintervalles mit jenem Punkte zusammenfällt. Die dritte Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, welche sowohl der augenblicklichen Drehungsachse des Systemes als auch der relativen Geschwindigkeit des Punktes parallel liegt, und ist im Sinne der augenblicklichen Drehung zu nehmen; mit anderen Worten, sie hat die Richtung der Achse einer Drehung, welche die augenblickliche Drehungsachse auf dem kürzesten Wege in die Richtung der relativen Geschwindigkeit überführen würde. Die Länge der dritten Componente ist das Product aus dem Quadrate der unendlich kleinen Zeit, aus der

Winkelgeschwindigkeit des Systems und aus der Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur momentanen Drehungsachse senkrechte Ebene.

Während die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung nur von den gegebenen Geschwindigkeiten (der absoluten Geschwindigkeit des Systems und der relativen Geschwindigkeit des Punktes) abhängt, ist dagegen die Deviation in der zusammengesetzten Bewegung durch die Deviationen in den gegebenen einzelnen Bewegungen nicht völlig bestimmt; sie würde es nur dann sein, wenn die Bewegung des Systemes sich auf eine blosse Verschiebung reducirte. Die vorhandene Drehung übt aber einen Einfluss von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, die man hier nicht vernachlässigen darf, weil die Deviation eine Grösse von derselben Ordnung ist.

53. Specielle Fälle. 1) Besteht die Bewegung des Systemes in einer blossen Verschiebung, so verschwindet die Winkelgeschwindigkeit, folglich auch die dritte Componente, und die Deviation in der zusammengesetzten Bewegung wird zur Resultante aus den Deviationen der gegebenen Bewegungen, wie schon vorhin bemerkt wurde.

2) Erfolgt die progressive Bewegung des Systemes gleichförmig und geradlinig, so findet in der Bewegung des Systems keine Deviation statt, mithin wird die Deviation für die absolute Bewegung des Punktes identisch mit der Deviation in seiner relativen Bewegung.

3) Besteht die Bewegung des Systemes nur aus einer gleichförmigen Drehung um eine Achse, so ist die Deviation in der Bewegung eines Systempunktes nach dem Mittelpunkt des beschriebenen Kreises gerichtet, und identisch mit der centripetalen Deviation.

54. Die Deviation in der relativen Bewegung. In jedem geschlossenen Polygone kann irgend eine Seite als Resultante aller übrigen Seiten betrachtet werden, mithin in dem Vielecke $T'\mu\mu'M'$ die Seite $\mu\mu'$ als Resultante von $\mu T'$, $T'M'$, $M'\mu'$, wenn man sich diese Linien in der angegebenen Bezeichnung von $\mu$ aus durchlaufen denkt. Dabei wird die Richtung der Deviation $T'M'$ in ihrem wahren Sinne genommen, die Deviation $T_1M_1$ oder $T'\mu$ dagegen im umgekehrten Sinne, und die Gerade $M'\mu'$ ist der in voriger Nummer betrachteten gleich aber entgegengesetzten

Sinnes. Zufolge dieser Bemerkungen gelangen wir zu dem wichtigen Satze:

Wenn ein Punkt eine bekannte absolute Bewegung im Raume besitzt und ausserdem ein gleichfalls in absoluter Bewegung begriffenes starres System vorhanden ist, so hat der Punkt auch eine relative Bewegung gegen das System in so fern er in diesem eine stetige Folge von Lagen erhält, welche ein in dem System stehender mit der Bewegung desselben unbekannter Beobachter für die absoluten Lagen des Punktes halten würde; die Deviation in dieser relativen (scheinbaren) Bewegung ist die Resultante dreier Geraden, nämlich erstens der Deviation in der absoluten Bewegung des Punktes, zweitens der in entgegengesetztem Sinne genommenen Deviation in der Bewegung des anfänglich mit jenem Punkte zusammenfallenden Systempunktes, drittens einer Geraden, deren Länge gleich ist dem Producte aus der unendlich kleinen Zeit, aus der Winkelgeschwindigkeit und aus der Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur momentanen Drehungsachse normalen Ebene. Diese dritte Componente steht senkrecht auf einer durch die genannte Achse und die relative Geschwindigkeit gehende, der Sinn ihrer Richtung ist entgegengesetzt dem Sinne der augenblicklichen Drehung des Systemes; sie kann daher als Achse einer Drehung betrachtet werden, welche die Richtung der relativen Geschwindigkeit auf dem kürzesten Wege in die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse überführt.

## Analytische Herleitung der vorigen Resultate.

55. Wie früher denken wir uns im Raume ein primitives unbewegliches Coordinatensystem der $x$, $y$, $z$, und mit dem beweglichen Punktesystem ein Coordinatensystem der $x'$, $y'$, $z'$ fest verbunden, dessen Anfang $O$ die primitiven Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ besitzt; der Zusammenhang zwischen den beiderseitigen Coordinaten des beweglichen Punktes $M$ wird dann durch die bekannten Formeln

$$1)\quad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \zeta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \eta + a''x' + b''y' + c''z' \end{cases}$$

vermittelt. Differenzirt man diese Gleichungen mit Rücksicht auf den Umstand, dass nicht nur die Lage des secundären Coordinatensystemes, sondern auch die Lage des Punktes $M$ gegen dieses System mit der Zeit eine andere wird, dass folglich alle vorhandenen Grössen von der Zeit $t$ abhängen, so gelangt man zu den Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} + x'\dfrac{da}{dt} + y'\dfrac{db}{dt} + z'\dfrac{dc}{dt} \\ \qquad\qquad + a\dfrac{dx'}{dt} + b\dfrac{dy'}{dt} + c\dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + x'\dfrac{da'}{dt} + y'\dfrac{db'}{dt} + z'\dfrac{dc'}{dt}, \\ \qquad\qquad + a'\dfrac{dx'}{dt} + b'\dfrac{dy'}{dt} + c'\dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt} + x'\dfrac{da''}{dt} + y'\dfrac{db''}{dt} + z'\dfrac{dc''}{dt}, \\ \qquad\qquad + a''\dfrac{dx'}{dt} + b''\dfrac{dy'}{dt} + c''\dfrac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

In diesen stehen linker Hand die nach den Achsen der $x, y, z$ genommenen Componenten der absoluten Geschwindigkeit des beweglichen Punktes. Rechter Hand sind die jedesmaligen vier ersten Summanden einerlei mit den Werthen, welche $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ bei constanten $x'$, $y'$, $z'$ annehmen würden; sie bedeuten also die, nach den Achsen der $x$, $y$, $z$ genommenen Seitengeschwindigkeiten eines mit dem Systeme fest verbundenen Punktes, der zur Zeit $t$ mit dem beweglichen Punkte zusammenfällt. Da endlich $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ die nach den Achsen der $x', y', z'$ genommenen Componenten der relativen oder scheinbaren Geschwindigkeit sind, so bemerkt man augenblicklich, dass die jedesmaligen letzten drei Summanden die nach den Achsen der $x$, $y$, $z$ genommenen Componenten der relativen Geschwindigkeit darstellen. Damit kommt man wieder auf den früheren Satz, dass die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung aus der Geschwindigkeit der absoluten Bewegung des coincidirenden Systempunktes und aus der relativen Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zusammengesetzt ist, woraus weiter folgt, dass die relative Geschwindigkeit des beweglichen Punktes die Resultante ist aus der Geschwindigkeit seiner absoluten Bewegung und aus der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des coincidirenden Systempunktes.

56. Durch Differentiation der Gleichungen 2) ergiebt sich weiter

$$3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2b}{dt^2} + z'\frac{d^2c}{dt^2}\right)\\
&\quad + \left(a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2} + c\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc}{dt}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + x'\frac{d^2a'}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2} + z'\frac{d^2c'}{dt^2}\right)\\
&\quad + \left(a'\frac{d^2x'}{dt^2} + b'\frac{d^2y'}{dt^2} + c'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc'}{dt}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\frac{d^2a''}{dt^2} + y'\frac{d^2b''}{dt^2} + z'\frac{d^2c''}{dt^2}\right)\\
&\quad + \left(a''\frac{d^2x'}{dt^2} + b''\frac{d^2y'}{dt^2} + c''\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc''}{dt}\right),
\end{aligned}\right.$$

und wenn man diese Gleichungen mit $\frac{1}{2}\vartheta^2$ multiplicirt, so erhält man linker Hand die drei, nach den Achsen der $x, y, z$ genommenen Componenten der Deviation in der absoluten Bewegung des Punktes. Die rechten Seiten der obigen Gleichungen haben wir durch Parenthesen in jedesmal drei Theile getheilt, die wir zur Abkürzung $X_1$, $X_2$, $X_3$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ nennen wollen; es sind daher auch die Componenten der Deviation aus jedesmal drei Producten zusammengesetzt, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2\frac{d^2x}{dt^2} = \tfrac{1}{2}\vartheta^2X_1 + \tfrac{1}{2}\vartheta^2X_2 + \vartheta^2X_3,$$

$$\tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 Y_1 + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 Y_2 + \vartheta^2 Y_3,$$

$$\tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 Z_1 + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 Z_2 + \vartheta^2 Z_3,$$

Bei constanten $x'$, $y'$, $z'$ reduciren sich die rechten Seiten auf $\frac{1}{2}\vartheta^2 X_1$, $\frac{1}{2}\vartheta^2 Y_1$, $\frac{1}{2}\vartheta^2 Z_1$; letztere Grössen sind also diejenigen Werthe, welche die Deviationscomponenten in dem Falle erhalten würden, wo der Punkt $xyz$ mit dem Systeme fest verbunden, d. h. ohne relative Bewegung wäre, oder mit anderen Worten, $\frac{1}{2}\vartheta^2 X_1$, $\frac{1}{2}\vartheta^2 Y_1$, $\frac{1}{2}\vartheta^2 Z_1$ sind die Componenten der Deviation in der Bewegung des zur Zeit $t$ mit dem beweglichen Punkte coincidirenden Systempunktes. Bei constanten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $a'$ etc. bleiben rechter Hand nur die zweiten Theile $\frac{1}{2}\vartheta^2 X_2$, $\frac{1}{2}\vartheta^2 Y_2$, $\frac{1}{2}\vartheta^2 Z_2$ stehen; letztere sind also die drei, nach den Achsen der $x$, $y$, $z$ genommenen Componenten der Deviation in der relativen Bewegung des Punktes. Um endlich die Bedeutung der letzten Theile $\vartheta^2 X_3$, $\vartheta^2 Y_3$, $\vartheta^2 Z_3$ zu erfahren, fragen wir erst nach der Geraden, von welcher die Grössen $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ die Projectionen auf die primitiven Achsen der $x$, $y$, $z$ sein würden.

Denken wir uns die Linie, von welcher $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ die primitiven Projectionen sind, auf die Achsen der $x'$, $y'$, $z'$ projicirt und nennen $X_3'$, $Y_3'$, $Z_3'$ diese secundären Projectionen, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} X_3' &= X_3 \cos(x'x) + Y_3 \cos(x'y) + Z_3 \cos(x'z) \\ &= X_3\, a + Y_3\, a' + Z_3\, a'' \end{aligned}$$

d. i. vermöge der Werthe von $X_3$, $Y_3$, $Z_3$

$$\begin{aligned} X_3' = &\left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right)\frac{dz'}{dt} \\ &+ \left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)\frac{dy'}{dt} \\ &+ \left(a\frac{da}{dt} + a'\frac{da'}{dt} + a''\frac{da''}{dt}\right)\frac{dx'}{dt}; \end{aligned}$$

der Coefficient von $\frac{dz'}{dt}$ ist $q$, der von $\frac{dy'}{dt}$ ist $-r$, und der Coefficient von $\frac{dx'}{dt}$ verschwindet. Die secundären Projectionen sind daher

$$X_3' = q\frac{dz'}{dt} - r\frac{dy'}{dt}, \qquad Y_3' = r\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt},$$

$$Z_3' = p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt}.$$

Legt man durch den Punkt $O$ zwei Gerade $OJ$ und $OV$, deren erste $p$, $q$, $r$ und deren zweite $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ zu Componenten hat, und projicirt man ferner das aus $OJ$ und $OV$ construirte Parallelogramm auf die drei secundären Coordinatenebenen, so erhält man für die Projectionen drei mit $X_3'$, $Y_3'$, $Z_3'$ übereinstimmende Ausdrücke; letztere sind daher proportional den Cosinus der Winkel, welche die Normale jener Fläche mit den Coordinatenachsen der $x', y', z'$ einschliesst, und ihre Vorzeichen entsprechen einer um diese Normale gehenden Drehung, bei welcher $OJ$ auf dem kürzesten Wege nach $OV$ gelangt.

Die Fläche des erwähnten Parallelogrammes ist das Product aus den beiden in einer Ecke zusammenstossenden Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; betrachten wir daher $X_3'$, $Y_3'$, $Z_3'$ als Projectionen einer Geraden, so hat letztere die Richtung jener Normalen und die Länge $\omega v_r \sin\delta$, wenn $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit, $v_r$ die relative Geschwindigkeit des Punktes, und $\delta$ den Winkel zwischen der Richtung dieser Geschwindigkeit und der momentanen Drehungsachse bezeichnet. Durch Multiplication mit $\vartheta^2$ ergiebt sich daraus die dritte Componente der Deviation $=$ $\vartheta^2 \omega v_r \sin\delta$ übereinstimmd mit dem früheren Satze.

57. Kennt man die Bewegung des starren Systemes, sind also $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ gegebene Funktionen der Zeit, so kann man aus der absoluten Bewegung des Punktes seine relative Bewegung und umgekehrt jene aus dieser ableiten. Im ersten Falle sind in den Gleichungen 1) $x$, $y$, $z$ bekannte Funktionen der Zeit, und die Gleichungen selbst geben dann $x'$, $y'$, $z'$; im zweiten Falle verhält es sich umgekehrt.

Ferner lässt sich aus einer der beiden Trajectorien die andere ableiten. Sind z. B. zwischen $x'$, $y'$, $z'$ zwei Gleichungen gegeben, wodurch die absolute Trajectorie des Punktes bestimmt ist, so eliminirt man $t$ aus den Gleichungen 1) und gelangt damit zu zwei Gleichungen zwischen $x'$, $y'$, $z'$ d. h. zu den Gleichungen der relativen Trajectorie; ebenso verfährt man im umgekehrten Falle.

Diese Bemerkungen sind leicht dahin zu verallgemeinern, dass man an die Stelle des bewegten Punktes einen Körper treten lässt, dessen Bewegung durch die Bewegung von dreien seiner Punkte oder auf andere Weise bestimmt wird. In jedem Falle kann man seine relative Bewegung aus seiner absoluten Bewegung oder diese aus jener ableiten, was wir nicht näher auseinandersetzen wollen.

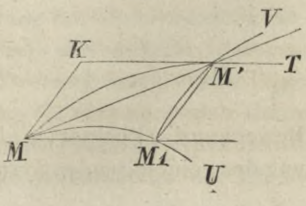
## Andere Betrachtungsweise der relativen Bewegung.

58. Bei den vorigen Untersuchungen haben wir die relative Bewegung als eine der Componenten angesehen, aus denen sich die absolute Bewegung des Punktes oder Körpers zusammensetzte; wir können aber die relative Bewegung auch direct betrachten und hierzu ein Verfahren anwenden, dessen Grundgedanke sich bei allen ähnlichen Fragen wiederholt und am natürlichsten darbietet, um die relative Bewegung auf die absoluten Bewegung zurückzuführen.

Das Verfahren besteht darin, dass man die beiden gegebenen absoluten Bewegungen (des Punktes und des Punktesystemes) ohne Weiteres ausführt, darauf den Punkt mit dem Systeme fest verbindet, und zuletzt dem Ganzen eine Bewegung ertheilt, welche das System in seine ursprüngliche Lage zurückbringt; die resultirende absolute Bewegung ist dann die gesuchte relative Bewegung des Punktes gegen das System. Der Punkt erhält nämlich durch diesen Process die verlangte Lage gegen das System, zugleich wird letzteres unbeweglich gemacht und daher ist die Verbindungslinie der ersten und zweiten Lage des Punktes nichts Anderes als der Weg, den der Punkt innerhalb des Systems zurückgelegt hat, d. h. die relative Trajectorie. Diese schon länger bekannte Methode wollen wir zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit und Deviation benutzen.

59. Die relative Geschwindigkeit. In Fig. 14 sei $MM'$ die Strecke, welche der bewegliche Punkt innerhalb der unendlich kleinen Zeit $\vartheta$ zurücklegt, und $MM_1$ der während derselben Zeit von dem ursprünglich mit $M$ zusammenfallenden Systempunkte beschriebene absolute Weg; wir haben nun $M'$ mit $M_1$ fest zu verbinden und dem Ganzen eine Bewegung zu ertheilen,

Fig. 14.

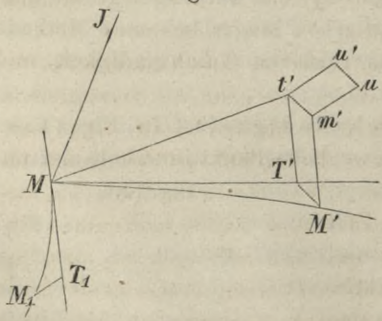


wodurch das System in seine anfängliche Lage zurückkommt. Hierzu gehört erstens eine allen Punkten gemeinsame Verschiebung, welche $M_1$ nach $M$ und $M'$ nach $K$ führt, sowie zweitens eine unendlich kleine Drehung um $M$, wodurch sich die neue Lage $K$ des Punktes $M'$ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ändert, weil schon $MK$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist.

Da die Geschwindigkeit nur von den unendlich kleinen Grössen erster Ordnung abhängt, so ist hier der Einfluss der Drehung unberücksichtigt zu lassen und dann bildet $MK$ die eine Seite eines Parallelogrammes, wovon $MM'$ die Diagonale und $MM_1$ die andere Seite ist. Hierbei sind, wie es sich bei unendlich kleinen Curvenstücken von selbst versteht, die Bogenelemente mit ihren Sehnen oder Tangenten vertauscht worden. Erinnert man sich nun, dass die Parallelogrammseite $MK$ auch als Diagonale eines anderen Parallelogrammes angesehen werden kann (s. Fig. 12, worin $MU = MM_1$, $MV = MK$ und $MT = MM'$), so gelangt man zu dem früheren Satze, wonach die relative Geschwindigkeit die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit des Punktes und aus der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des coincidirenden Systempunktes ist.

60. Die relative Deviation. Während wir vorhin den Einfluss der Drehung bei Seite setzen konnten, müssen wir hier genau darauf achten, weil die zu berechnende Grösse von der zweiten Ordnung also gleichartig mit den von der Drehung herrührenden Grössen ist. Es sei wieder $MM'$ die während der unendlich kleinen Zeit $\vartheta$ zurückgelegte absolute Strecke des beweglichen Punktes und $T'$ der Ort, wohin nach derselben Zeit ein Punkt gekommen sein würde, der gleichzeitig mit jenem von $M$ ausging und sich mit derselben Geschwindigkeit auf der Tangente fortbewegte, mithin $T'M'$ die Deviation in der absoluten Bewegung des Punktes; in gleicher Weise sei $MM_1$ die absolute Bewegung des coincidirenden Systempunktes und $T_1M_1$ die zugehörige De-

Fig. 15.



viation. Um hieraus die Deviation der relativen Bewegung abzuleiten, legen wir in $M$ eine Tangente an die relative Trajectorie, lassen auf ihr einen Punkt sich gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit während der Zeit $\vartheta$ bewegen, wobei gleichzeitig auch diese mit dem Systeme verbundene Tangente fortrückt, und verbinden schliesslich die absolute Endlage des Punktes mit $M'$; die Verbindungslinie ist der Grösse und Richtung nach, die gesuchte relative Deviation. Verbinden wir nun den Punkt $M'$ fest mit dem Systeme und bringen letzteres in seine ursprüngliche Lage zurück, so kommt die relative Deviation in eine Lage, welche sich auf folgende Weise bestimmen lässt.

Wir ertheilen dem Systeme zunächst zwei Verschiebungen $M_1T_1$ und $T_1M$, welche den Punkt $M_1$ in seine anfängliche Stellung zurückführen; ziehen wir $M'm'$ parallel und $= T_1M$, sowie $m'\mu$ parallel und $= M_1T_1$, so ist $\mu$ die Lage, welche $M'$ nach beiden Verschiebungen erhalten hat. Hierauf drehen wir das System um die momentane Drehungsachse während der Zeit $\vartheta$ und mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$; der Punkt $\mu$ beschreibt dann einen unendlich kleinen Kreisbogen $\mu\mu'$, dessen Grösse wir nachher ermitteln werden, und $\mu'$ ist nun die Lage, welche der bewegliche Punkt, oder $M'$, nach der Zurückführung des Systemes in seine ursprüngliche Stellung eingenommen hat. Dabei ist die Tangente an der relativen Trajectorie nach $Mt'$ gekommen und zugleich stellt $Mt'$ den während der Zeit $\vartheta$ gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit durchlaufenen Weg dar, während innerhalb derselben Zeit auch die Strecken $MT'$ und $MT_1 = T't$ auf den Tangenten der beiden absoluten Trajectorien zurückgelegt wurden. Die Gerade $t'\mu'$ ist daher die relative Deviation.

Nun erscheint $t'\mu'$ als Resultante der drei Geraden $t'm' = T'M'$, $m'\mu = M_1T_1$ und $\mu\mu'$, von denen die erste die Deviation in der absoluten Bewegung des Punktes und die zweite die in entgegengesetztem Sinne genommene Deviation der Bewegung des coincidirenden Systempunktes ist. Was die dritte Linie $\mu\mu'$ betrifft, welche der Punkt $\mu$ bei der Drehung um die momentane Rotationsachse $MJ$ beschreibt, so bemerken wir zunächst, dass sie durch die vom Punkte $t'$ bei derselben Drehung beschriebene Linie ersetzt werden kann, weil die Entfernung $t'\mu'$ eine unendlich kleine Linie zweiter Ordnung, mithin der begangene Fehler von der dritten Ordnung ist. Ihre Richtung steht also senkrecht zu der Ebene

$JMt'$, welche die momentane Drehungsachse und die relative Geschwindigkeit enthält, und ist im Sinne jener Drehung zu nehmen. Die Länge der in Rede stehenden Linie oder der Linie $\mu\mu'$ kommt gleich dem Producte aus dem Drehungswinkel $\omega\,\vartheta$ in den Abstand des Punktes $t'$ von der Drehungsachse $MJ$, oder gleich dem Producte aus $v\,\vartheta$ und $Mt'.\sin JMt'$; nun ist aber, wenn $v_r$ die relative Geschwindigkeit bezeichnet, $Mt = \vartheta\, v_r$ mithin $\mu\mu' = \vartheta^2 \omega\, v_r \sin JMt'$, und damit kommt man auf den in Nr. 54 bewiesenen Satz zurück.

Drittes Buch.

# Dynamik fester Körper.

## Erstes Capitel.

# Allgemeine Grundsätze.

---

### Gesetz der Trägheit.

1. Während wir im vorigen Buche die Bewegungen unabhängig von ihren etwaigen Ursachen betrachteten, nehmen wir jetzt auf die letzteren Rücksicht, d. h. wir suchen den Zusammenhang zwischen den Kräften und den von ihnen hervorgerufenen Bewegungen zu ermitteln. In allen Fällen, wo wir einen Körper aus der, wenn auch nur relativen, Ruhe in Bewegung übergehen sehen, schreiben wir diese Aenderung des Zustandes nicht einer willkührlichen Selbstbestimmung des Körpers, sondern einer äusseren Ursache zu, welche entweder in jenem Augenblicke plötzlich auf den Körper einwirkte oder auch schon vorher vorhanden aber bis zu jenem Augenblicke durch ein Hinderniss aufgehoben war. Ob wir diese Ursache erkennen oder ob uns die Mittel zu dieser Erkenntniss fehlen, ist gleichgültig; in jedem Falle halten wir die Existenz jener Ursache für gewiss.

Wir sehen ferner, dass sich jede Bewegung um so mehr einer gleichförmigen und geradlinigen Bewegung nähert, je freier sie von äusseren Einflüssen wird; wir schliessen daraus, dass jede von solchen Einflüssen und Widerständen freie Bewegung genau eine gleichförmige und geradlinige sein muss.

Die beiden genannten Grundsätze begreifen wir zusammengenommen unter dem Namen „Gesetz der Trägheit“; dasselbe lässt sich daher folgendermaassen aussprechen:

Jeder in Ruhe befindliche materielle Punkt beharrt in diesem Zustande so lange als keine äussere Ursache, d. h. keine Kraft, auf ihn wirkt; und ein in

Bewegung befindlicher materieller Punkt, auf welchen keine Kräfte wirken, bewegt sich immer geradlinig und gleichförmig; oder noch kürzer: ein materieller Punkt kann den Zustand, in welchem er sich gerade befindet — sei letzterer der Zustand der Ruhe oder der Bewegung — selbstthätig nicht ändern.

Dabei ist übrigens noch zu bemerken, dass Kräfte, die aus dem leeren Raume heraus auf materielle Punkte wirken, ganz undenkbar sein würden und dass man sich folglich die Kräfte an bestimmte Sitze d. h. an Massen gebunden denken muss, von wo aus sie ihre Thätigkeit auf andere Massen erstrecken. Man kann daher auch sagen, ein materieller Punkt beharrt so lange in dem gerade vorhandenen Zustande, als keine anderen materiellen Punkte da sind, die auf ihn wirken.

2. Wir erörtern noch ein allgemeines Princip, worauf man durch eine Menge von Beobachtungen und Erfahrungen geführt worden ist, und welches durch eine beständige Uebereinstimmung zwischen seinen Consequenzen und der directen Beobachtung der Erscheinungen bestätigt wird. Dies Princip lautet:

Wenn sich alle Punkte eines Systems in parallelen Geraden gleichförmig bewegen, und einer der Punkte von einer Kraft angegriffen wird, so ist seine relative Bewegung in Bezug auf die andern dieselbe, als wenn die dem Systeme gemeinsame Bewegung nicht existirte und der fragliche Punkt von eben derselben und in derselben Richtung wirkenden Kraft afficirt worden wäre.

Man erräth leicht, welche Gattung von Beobachtungen die Wahrheit dieses Princips beweisen könnte, wenn die Erde unbeweglich wäre. Man würde einem System von Punkten, die in Beziehung auf einander beweglich sind, eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilen, man würde dann an den einen von ihnen eine Kraft anbringen, deren Richtung und Intensität sich ändern liesse, und die relative Bewegung dieses Punktes beobachten. Man könnte dieselben Versuche wiederholen, indem man die gemeinschaftliche gleichförmige Bewegnng abänderte, und würde finden, dass die relative Bewegung durchaus unabhängig von der gemeinschaftlichen gleichförmigen Bewegung ist, und zwar dieselbe, als wenn letztere nicht vorhanden wäre.

Diese Versuche sind angestellt worden, liefern aber keinen vollständigen Beweis; das System nämlich, welchem man eine rücksichtlich fester irdischer Gegenstände gleichförmige Bewegung ertheilen wollte, würde ausserdem noch an der ungleichförmigen Bewegung der Erde im Raume participiren und dadurch selbst eine ungleichförmige Bewegung erhalten. Da aber die Beobachtungen zu verschiedenen Zeiten des Jahres, also bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Erde, immer dieselben Resultate liefern, so schliesst man nach Analogie, dass die Sache auch bei ruhender Erde sich noch so verhalten würde, womit man zu dem obigen Principe gelangt. In Wahrheit kann man daher nicht sagen, dass letzteres streng durch die Erfahrung bewiesen sei, es folgt nur aus Versuchen verbunden mit Inductionsschlüssen; aber es stellt sich mit hinlänglicher Wahrscheinlichkeit dar, um zur Grundlage einer Theorie zu dienen. Wenn man findet, dass die Aussagen dieser Theorie immer in Uebereinstimmung mit der Beobachtung sind, so wird dieser Umstand demselben eine grössere und grössere Wahrscheinlichkeit verleihen, die für uns mit der Gewissheit fast gleichen Werth hat. Wir finden dieselbe Schlussweise bei andern Principien wieder, zu welchen wir durch wiederholte Versuche geleitet werden, deren Resultate wir ausdehnen und verallgemeinern.

## Bewegung durch eine constante Kraft.

3. Unter einer constanten Kraft verstehen wir eine solche, die auf den Körper, an welchem sie angebracht wird, immer dieselbe Wirkung ausübt wie auch die Bewegung des Körpers beschaffen sein möge. Lassen wir nun auf einen in geradliniger und gleichförmiger Bewegung begriffenen materiellen Punkt eine derartige Kraft im Sinne seiner Bewegung wirken, so muss sich die Geschwindigkeit desselben in gleichen Zeiten um gleiche Grössen vermehren, weil, dem vorigen Principe gemäss, die Zunahme der Geschwindigkeit unabhängig von der schon erlangten Geschwindigkeit ist. Die gleichförmig geradlinige Bewegung des Punktes wird daher in eine neue geradlinige Bewegung umgewandelt, bei welcher die Geschwindigkeit proportional der Zeit wächst. Wirkt dagegen die constante Kraft im umgekehrten Sinne, d. h. der Bewegung entgegen, so vermindert sich die Geschwindigkeit proportional der

Zeit, wird zu einem bestimmten Termine gleich Null und nachher negativ, was einer rückläufigen Bewegung des Punktes entspricht. Mit einem Worte: jede constante Kraft erzeugt eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche durch die beiden aus Nr. 8 des vorigen Buches bekannten Gleichungen

$$v = at + b = \frac{dx}{dt},$$
$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c$$

ausgedrückt wird. In diesen bedeutet $a$ die von der constanten Kraft herrührende positive oder negative Acceleration, $b$ die anfängliche, d. h. die zur Zeit $t = 0$ stattfindende Geschwindigkeit, endlich $c$ den Anfangswerth des $x$, welcher die Anfangslage des beweglichen Punktes zu erkennen giebt.

4. Wäre die Kraft nicht constant, also während der Bewegung selbst irgend wie veränderlich, so würde die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten nicht mehr um gleiche Grössen zunehmen, es würde also jedenfalls eine ungleichförmige Bewegung entstehen. Zufolge dieser Bemerkung kann man den vorigen Satz umkehren und sagen: wenn sich ein materieller Punkt geradlinig mit gleichförmiger Acceleration bewegt, so steht er nothwendig unter dem Einflusse einer constanten Kraft.

5. Dass im Vorigen bei der Beurtheilung einer Kraftwirkung auf die Zeit Rücksicht genommen werden musste, hat einen sehr einfachen Grund. Es ist nämlich undenkbar, dass eine Kraft plötzlich, d. h. ohne irgend eine wenn auch noch so geringe Zeit zu brauchen, einem Körper eine endliche Geschwindigkeit mittheilen sollte, vielmehr kann man letztere nur als das in einer endlichen Zeit aufgesammelte Resultat der Krafteinwirkung ansehen. Daher lässt sich auch die hier und da vorkommende Eintheilung der Kräfte in momentane und in continuirliche Kräfte nicht vertheidigen sobald das Wort momentan im streng mathematischen Sinne genommen wird; dagegen versteht man nicht selten unter momentanen Kräften solche, die schon während einer sehr kleinen, kaum noch messbaren Zeit eine endliche Geschwindigkeit hervorbringen, wie diess bei sogenannten Stössen der Fall ist.

6. Wenn zwei mit gleichen Massen versehene materielle Punkte durch gleiche und parallele Kräfte aus dem Zustande der Ruhe in

den der Bewegung übergeführt werden, so bewegen sie sich in parallelen Geraden und haben zu denselben Zeiten die nämlichen Geschwindigkeiten. Dieser Zustand erleidet keine Aenderung, wenn man die beiden Massen fest verbindet und in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte die doppelte Kraft als Resultante jener beiden Einzelkräfte anbringt. Dasselbe würde für eine grössere Anzahl solcher einzelner Massentheile gelten und man gelangt damit zu dem Satze: Eine Masse $M$, welche durch eine an ihrem Schwerpunkte wirkende Kraft $P$ getrieben wird, erhält dieselbe Bewegung wie die Masse $M'$ durch die in gleicher Weise wirkende $P'$, sobald sich die Kräfte $P$ und $P'$ wie die Massen $M$ und $M'$ verhalten; die Punkte beider Massen beschreiben dann parallele Gerade.

Im Fall $P$ oder $P'$ einen anderen Werth hätte als ihn die Proportion $M : M' = P : P'$ liefert, würde auch die Bewegung der einen Masse nicht mehr mit der Bewegung der anderen übereinstimmen. Dieser Bemerkung zufolge kann man den vorigen Satz umkehren und sagen: Wenn zwei ungleiche Massen dieselbe Bewegung haben, so müssen sich die auf sie wirkenden Kräfte wie die Massen verhalten.

7. Anwendung auf die Schwere. Die Erfahrung lehrt, dass alle Körper, die im leeren Raume der freien Einwirkung der Schwere überlassen werden, identische Bewegungen annehmen, ohne Rücksicht auf ihre Grösse, ihre Beschaffenheit und folglich auch ihre Masse. Man muss hieraus schliessen, dass alle von der Schwere herrührenden Kräfte sich wie die Massen der betreffenden Körper verhalten, abgesehen davon, ob diese Kräfte constant oder veränderlich sind.

Ausserdem hat man noch zwei Thatsachen erkannt, von denen die eine die andere bedingt, nämlich: die von einem Körper durchlaufenen Räume, der von der Ruhelage ausgehend der freien Einwirkung der Schwere überlassen wird, sind den Quadraten der Zeit proportional, und die erlangten Geschwindigkeiten wachsen in demselben Verhältnisse wie die Zeiten. Aus beiden Erfahrungen schliesst man nach der vorhergehenden Erörterung, dass der Körper während der ganzen Dauer seiner Bewegung einer Kraft von beständig gleicher Grösse unterworfen bleibt.

Man kann auch durch den Versuch nachweisen, dass ihre Intensität dieselbe ist, als wenn der Körper sich in Ruhe befindet.

Ertheilt man nämlich mit Hilfe eines der Atwoodschen Maschine ähnlichen Apparates einem Körper eine gleichförmige verticale Bewegung, so wird in diesem Falle die durch die Schwere hervorgebrachte Kraft aufgehoben, und man kann ihr Maass genau durch die Spannung einer Feder erhalten, an welcher der Körper aufgehängt ist und die an der verticalen Bewegung Theil nimmt. Der Versuch lehrt dann, dass diese Spannung dieselbe bleibt, als wenn der Körper in Ruhe wäre, und es folgt hieraus, dass das Gewicht eines Körpers im Zustande der Ruhe dasselbe ist wie in dem der Bewegung. Wenn also die Massen der Körper ihren Gewichten proportional sind, so können die nämlichen Instrumente, welche zur Gewichtsbestimmung dienen, auch zur Vergleichung der Massen benutzt werden, und es lassen sich nun diese letzteren Grössen durch Zahlen darstellen, indem man die Masse eines bestimmten Volumens einer beliebig gewählten Substanz bei einer festgesetzten Temperatur zur Einheit nimmt. Vor den Versuchen Galilei's über den Fall der Körper konnte man nicht wissen, dass die Massen den Gewichten proportional sind; und es würde sich z. B. ganz anders damit verhalten, wenn die Schwere eine Kraft von der Art der magnetischen Anziehung wäre, die auf verschiedene Körper eine sehr ungleichmässige Wirkung äussert.

8. Die Geschwindigkeit, welche die schweren Körper durch den freien Fall im leeren Raume während einer gegebenen Zeit erlangen, hängt von dem Orte ab, wo der Fall geschieht; sie unterliegt kleinen Veränderungen je nach der geographischen Breite und der Erhebung über das Niveau des Meeres. Es ist hier nicht unsere Aufgabe, diese Aenderungen zu untersuchen; wir beschränken uns lediglich auf die Angabe der von einem Körper beim freien Fall im leeren Raume auf dem Pariser Observatorium während der Zeiteinheit erlangten Geschwindigkeit.

Wir theilen hierzu den mittleren Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, und wählen als Zeiteinheit die Secunde oder den 86400sten Theil des mittleren Tages. (Der Sterntag oder die Dauer einer Rotation der Erde um sich selbst, ist wegen der eignen Bewegung der Sonne kürzer als der Sonnentag; er beträgt nämlich nur 86164,09 Secunden.) Bezeichnen wir nun mit $g$ die Geschwindigkeit, welche ein auf dem Pariser Observatorium frei im leeren Raume fallender Körper nach

Verlauf einer Secunde erlangt hat, so ergiebt sich nach genauen Beobachtungen, von welchen wir später sprechen wollen,

$$g = 9^m{,}80896,$$

wobei der Meter als Längeneinheilt genommen ist.

9. Nach den für die gleichförmig veränderliche Bewegung gültigen Formeln erhalten wir bei einem im leeren vertical fallenden Körper, sobald wir die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ setzen, ferner den Anfang der $x$ in den Ausgangspunkt der Bewegung legen, und die $x$ im Sinne der Schwere positiv nehmen,

$$v = gt, \; x = \tfrac{1}{2} gt^2,$$

folglich auch

$$v^2 = 2gx, \text{ oder } v = \sqrt{2gx}.$$

Der letzte Ausdruck heisst gewöhnlich die der Höhe $x$ entsprechende Geschwindigkeit, und umgekehrt $x$ oder $\frac{v^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit $v$ entsprechende Höhe.

Wird der Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit $a$ vertical von unten nach oben geworfen, so erhält man, wenn der Anfangspunkt der Bewegung zum Anfang der $x$ und die Richtung der positiven $x$ in entgegengesetztem Sinne mit der Richtung der Schwere genommen wird,

$$v = a - gt, \quad x = at - \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Die Geschwindigkeit wird zu Null für

$$t = \frac{a}{g}, \text{ woraus } x = \frac{a^2}{2g}.$$

Der Körper steigt daher eben so lange als er fallen müsste, um die Anfangsgeschwindigheit $a$ durch den freien Fall zu erlangen, und der Raum, den er während des Steigens zurücklegt, ist demjenigen gleich, durch welchen er in derselben Zeit ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen würde. Nach Verlauf der Zeit $\frac{a}{g}$ kehrt der Körper um, indem seine Geschwindigkeit ihr Zeichen ändert, und er muss nach dem eben Gesagten, sobald er im Ausgangspunkte seiner Bewegung wieder angekommen ist, die Geschwindigkeit $-a$ besitzen, nachdem er den Zeitraum $\frac{a}{g}$ hindurch gefallen war. In der That geben auch die vorausgehenden Formeln für $t = \frac{2a}{g}$ die Werthe

$v = -a; \;\; x = 0,$

### Proportionalität der Kraft und Geschwindigkeit.

**10.** Das in der Ueberschrift ausgesprochene Princip der Dynamik besteht in dem Satze, dass, wenn irgend zwei constante Kräfte während einer und derselben Zeit auf gleiche Massen wirken, sie ihnen Geschwindigkeiten ertheilen, die sich wie jene Kräfte verhalten.

Nicht selten hat man dieses Princip als Grundsatz gelten lassen und seine Richtigkeit durch die Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der darauf gegründeten Theorien und den Versuchen oder directen Beobachtungen bestätigt; da es aber eine der Hauptgrundlagen der Dynamik ist, so glauben wir nachweisen zu müssen, wie man seine Richtung durch verschiedene Experimente ermitteln und diese Versuche selbst wieder auf beliebig viele verschiedene Werthe der constanten beschleunigenden Kraft ausdehnen kann. Es wird diess nicht hindern, nachher noch diejenigen Bestätigungen beizubringen, mit denen man sich sonst gewöhnlich begnügte.

**11.** Wir erinnern zunächst an den früher aufgestellten Grundsatz, dass die gemeinschaftliche Bewegung eines Systems von Punkten an der Erdoberfläche keinen Einfluss auf die relative Bewegung äussert, welche in einer besonderen auf einen dieser Punkte wirkenden Kraft ihre Ursache findet. Hiernach dürfen wir die Erde als unbeweglich betrachten, so lange es sich darum handelt, die absoluten Bewegungen zu untersuchen, welche Körpern an ihrer Oberfläche durch verschiedene Kräfte ertheilt werden; denn es kann sich die beobachtete relative Bewegung nicht von der absoluten Bewegung unterscheiden, welche durch die nämlichen Kräfte hervorgebracht werden würde, wenn die ihr unterworfenen Körper von der absoluten Ruhelage ausgingen.

Um das Gesetz zu untersuchen, nach welchem sich die Bewegung einer und derselben Masse ändert, wenn sie nach einander von verschiedenen constanten Kräften ergriffen wird und dabei immer vom Zustande der Ruhe ausgeht, kann man die Atwoodsche Maschine anwenden. Sie liefert das Mittel, um die an eine Masse angebrachte Kraft auf unendlich verschiedene Arten zu variiren und dabei die in der Zeiteinheit hervorgebrachte Geschwindigkeit zu messen; sie kann also zur Bestimmung des Gesetzes dienen, nach welchem sich diese Geschwindigkeit mit der sie erzeugenden

Kraft ändert. Es bezeichne $M$ die Masse eines der beiden im Gleichgewicht stehenden Gewichte, und $m$ die des Auflagegewichtes $p$. Wenn alle Punkte des Systems dieselbe Bewegung haben, so sind gleiche Massen von gleichen Kräften afficirt; $m$ wird daher nicht mehr durch die Kraft $p$, sondern durch die Kraft $p\,\dfrac{m}{2M+m}$ oder $\dfrac{p}{1+2\dfrac{M}{m}}$ in Bewegung gesetzt. Man kann nun das Verhältniss $\dfrac{M}{m}$ so wählen, dass die Masse $m$ einer Kraft ausgesetzt ist, die eine beliebige zwischen 0 und $p$ enthaltene Grösse hat. Durch genaue Versuchsmethoden, deren detaillirte Beschreibung nicht hierher gehört, lassen sich die jedesmal nach einer Secunde erlangten Geschwindigkeiten messen, und man findet dann, dass diese Geschwindigkeiten den erzeugenden Kräften mit einer um so grösseren Annäherung proportional sind, je mehr man die sich dabei ergebenden fremdartigen Widerstände beseitigt hat.

Man kann sogar nachweisen, dass die auf die Masse $2M$ wirkende Kraft während der Bewegung constant bleibt. Es genügt, zu diesem Zwecke die Gewichtszulage mittelst einer Feder aufzuhängen, welche einen Theil derselben ausmacht oder in einer der im Gleichgewichte befindlichen Massen mit enthalten ist. Man findet dann, dass diese Feder während der Bewegung immer gleich gespannt bleibt; die Kraft, mit welcher die Masse $2M$ von ihr gezogen wird, durch $\dfrac{2M}{m}$ dividirt, giebt die an der Masse $m$ wirksame Kraft, und muss mit derjenigen, welche wir schon gefunden haben, nämlich mit $\dfrac{p}{1+2\dfrac{M}{m}}$, zusammenfallen. Dies würde auch der Versuch lehren, wenn man das Gewicht nachwiese, welches der Feder eine eben solche Spannung giebt, wie sie während der beobachteten Bewegung statt fand.

12. Man kann die Schwere auch dadurch in einem bekannten beliebigen Verhältnisse vermindern, dass man einen Körper auf einer schiefen Ebene herabgleiten lässt. Bezeichnet nämlich $\alpha$ den Winkel der Verticalen mit dieser Ebene, so geht das Gewicht $p$ des Körpers in $p \cos \alpha$ über und kann alle Werthe von 0 bis $p$

annehmen. Die nach einer Secunde eingetretene Geschwindigkeit findet man durch Beobachtung proportional der wirksamen Kraft und zwar um so genauer, je mehr man die von der normalen Kraft $p \sin \alpha$ hervorgebrachte Reibung beseitigt hat.

Wir betrachten jetzt das in Rede stehende Princip als erwiesen, und es ist nun Gegenstand der rationellen Mechanik, aus den bisherigen der Naturbeobachtung entnommenen Daten alle Gesetze der Bewegung, selbst unter den verwickelsten Umständen, herzuleiten. Die Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der directen Beobachtung der Erscheinungen und den Resultaten der auf die vorigen Grundsätze basirten Rechnung gewährt eine Bestätigung, welche keinen weitern Zweifel gestattet.

## Vergleichung der Kräfte, die auf beliebige Massen wirken.

13. Wenn ein Körper von der Masse $m$ unter dem Einflusse einer constanten Kraft $p$ steht, so wird jede Masseneinheit von der Kraft $\frac{p}{m}$ sollicitirt; für eine zweite Masse $m'$, worauf die Kraft $p'$ wirkt, ist in gleicher Weise $\frac{p'}{m'}$ die auf die Masseneinheit wirkende Kraft. Da sich nun die Massen ebenso wie ihre Theile bewegen, und da ferner gleiche Massen am Ende derselben Zeit Geschwindigkeiten annehmen, welche den beschleunigenden Kräften proportional sind, so gilt die Proportion

$$v : v' = \frac{p}{m} : \frac{p'}{m'} \text{ oder } p : p' = mv : m'v',$$

worin $v$ und $v'$ die Geschwindigkeiten der Massen $m$ und $m'$ bezeichnen. Man hat daher den Satz:

Zwei constante Kräfte verhalten sich wie die Produkte aus den Massen, worauf sie wirken, in die Geschwindigkeiten, welche sie denselben in gleicher Zeit mittheilen.

Der vorigen Proportion kann man auch folgende Form geben

$$\frac{p}{p'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{v}{v'},$$

und wenn man hier $p'$, $m'$, $v'$ als Einheiten ihrer Art wählt, so wird einfacher

$$p = mv$$

d. h. Das Maas einer constanten Kraft ist das Product aus der Masse des bewegten Körpers in die Geschwindigkeit, welche er unter dem Einflusse jener Kraft in der Zeiteinheit erlangt hat. Die Einheit der Kraft ist dann die Kraft, durch deren Einwirkung die Masseneinheit während der Zeiteinheit eine der Längeneinheit gleichkommende Geschwindigkeit erhält.

14. Will man die Intensitäten von zwei Kräften $p$ und $p'$ vergleichen, welche in verschiedenen Zeiten $t$, $t'$ den Massen $m$, $m'$ die Geschwindigkeiten $v$, $v'$ ertheilt haben, so muss man erst auf gleiche Zeiten, z. B. auf die Zeiteinheit, zurückgehen, ehe man den vorigen Satz anwenden kann. Die Masse $m$ erhält dann die Geschwindigkeit $\frac{v}{t}$, die Masse $m'$ die Geschwindigkeit $\frac{v'}{t'}$; mithin ergiebt sich:

$$p : p' = \frac{mv}{t} : \frac{m'v'}{t'};$$

und, wenn man wieder $p'$, $v'$, $m'$, $t'$ als Einheiten ihrer Art wählt:

$$p = \frac{mv}{t},$$

wo die Krafteinheit dieselbe wie im vorigen Falle ist.

Versteht man, wie es üblich ist, unter „Quantität der Bewegung eines Körpers" das Product aus seiner Masse in seine Geschwindigkeit, so kann man sagen: Irgend eine constante Kraft wird durch die Quantität der Bewegung gemessen, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

15. Einheiten der Kraft und der Masse. Bis hieher haben wir nur die Längen- und Zeiteinheit (Meter und Secunde) fixirt, dagegen die Einheiten der Massen und Kräfte unbestimmt gelassen und sie nur durch die Bedingung an einander gebunden, dass die Krafteinheit, sobald sie auf die Masseneinheit wirkt, ihr während der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit mittheilt, die ebenfalls als Einheit gilt. Wir nehmen nun als Einheit der Kraft das Kilogramm, d. i. das Gewicht eines Cubikdecimeters destillirten Wassers bei der Temperatur des Maximums seiner Dichtigkeit, wie es sich auf dem Pariser Observatorium zeigt, und haben dann zu untersuchen, was hiernach die Masseneinheit, d. h. diejenige Masse sein wird, die eine Geschwindigkeit von 1 Meter in der Secunde erlangt, sobald sie diese Zeiteinheit hindurch der Einwirkung

einer constanten dem Gewichte von 1 Kilogramm gleichen Kraft ausgesetzt wird.

Die Masse eines Cubikdecimeters Wasser erlangt, wenn sie durch eine Kraft von 1 Kilogramm in Bewegung gesetzt wird, in einer Secunde die Geschwindigkeit $g$. Eine Masse von $g$ Cubikdecimeter Wasser, derselben Kraft von 1 Kilogramm ausgesetzt, würde daher in derselben Zeit eine der Einheit gleiche Geschwindigkeit erreichen; folglich ist sie die gesuchte Masseneinheit. Nimmt man also die Secunde zur Zeiteinheit, den Meter zur Längen- und das Kilogramm zur Krafteinheit, so dient als Einheit der Masse die von 9,80896 Cubikdecimeter destillirten Wassers bei der Temperatur von 4°.

In dieser Weise lassen sich die Massen immer durch Gewichte vertreten, was deshalb bequemer ist, weil letztere unmittelbar mit den dazu geeigneten Instrumenten gemessen werden können. Man hat dabei nur zu beachten, dass zwischen dem Gewichte $P$ und der Masse $m$ eines Körpers die Gleichung

$$P = gM$$

besteht, insofern $g$ Krafteinheiten das Gewicht der Masseneinheit ausdrücken. Hieraus folgt:

$$M = \frac{P}{g},$$

wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass sich Alles auf das von uns zu Grunde gelegte Einheitensystem bezieht.

16. Dichtigkeit. Wie schon früher erwähnt wurde, nennt man Dichtigkeit einer homogenen Substanz die in der Volumeneinheit enthaltene Masse. Die Dichtigkeiten der verschiedenen Körper sind daher ihren specifischen Gewichten proportional, und wenn man dieselbe Substanz als Vergleichungsmittel wählt, so wird die Tafel der specifischen Gewichte identisch mit einer Zusammenstellung der Dichtigkeitsverhältnisse. Hieraus folgt, wenn $V$ das Volumen eines homogenen Körpers, $D$ seine Dichtigkeit, $M$ seine Masse, und $P$ sein Gewicht bezeichnet,

$$M = VD, \quad P = VDg.$$

Das specifische Gewicht, oder das Gewicht der Volumeneinheit*) ist daher $= gD$. Nimmt man das Wasser zum Maassstabe der Ver-

*) Es ist nicht zu übersehen, dass die Identität des specifischen Gewichtes mit dem Gewichte der Volumeneinheit nur für das französische Maasssystem gilt.

gleichung und drückt die Gewichte in Kilogrammen aus, so hat man zur Volumeneinheit den Cubikdecimeter zu wählen, insofern nämlich dieses Wasservolumen 1 Kilogramm wiegt. Die Tafel der specifischen Gewichte enthält dann das Gewicht eines Cubikdecimeters der verschiedenen Substanzen in Kilogrammen.

Was die Dichtigkeitstafel betrifft, so würde man eine solche erhalten, indem man alle Zahlen der Tafel für die specifischen Gewichte durch $g$ dividirte, da wir gesehen haben, dass man bei der oben bestimmten Masseneinheit immer die Masse eines Körpers erhält, wenn man sein Gewicht durch $g$ dividirt.

### Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung bei der Bewegung.

17. Ist ein materieller Punkt der Wirkung einer constanten Kraft unterworfen, die ihn nöthigt, mit gleichförmig beschleunigter Bewegung eine gerade Linie zu durchlaufen, so kann man diese Kraft, von welcher Art sie auch sein möge, durch einen Körper ersetzen, der im Stande ist, dem materiellen Punkte durch Stoss oder Zug eine gleiche Bewegung zu verleihen. Die durch die Verbindung beider Körper erzeugte Kraft muss in diesem Falle die nämliche wie die erste sein. Führt man z. B. einen derartigen Versuch aus, indem man einen Körper mittelst einer Feder stösst oder zieht, so wird man dieselbe immer zu einem dauernden Zustande der Spannung gelangen sehen, so dass sie in jedem Augenblicke durch Kräfte afficirt erscheint, welche im Gleichgewichte und folglich gleich und entgegengesetzt sind. Die an dem einen Endpunkte der Feder hervortretende Wirkung, durch welche die Beschleunigung erzeugt wird, ist also immer von einer andern gleichen und entgegengesetzten Kraft begleitet, die an demjenigen Ende wirkt, wo der Körper angebracht ist. Diese letzte Kraft wird die Gegenwirkung des Körpers genannt, und Versuche der angegebenen Art beweisen, dass die Wirkung beständig gleich ist der Gegenwirkung bei jeder Bewegung, die durch eine constante Kraft hervorgebracht wird, folglich auch in dem Falle, wenn die Kraft veränderlich ist, weil man sie dann immer während eines unendlich kleinen Zeitraumes als constant ansehen darf.

Da das Princip für alle Fälle gilt, wo die Kraft durch materielle Verbindungsmittel ihre Wirkung äussert, so wird man von selbst darauf geführt, es auch auf den Fall auszudehnen, wo keine solche Vermittelung zwischen zwei auf einander wirksamen Punkten bemerkbar ist. Eine solche gegenseitige Thätigkeit hat man sich immer in der Geraden stattfindend vorzustellen, welche die beiden Punkte verbindet. Diese Erweiterung des ausgesprochenen Gesetzes ist durch die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten Erscheinungen und den auf die Hypothese gegründeten Rechnungen bestätigt, und kann überdies allemal experimentell nachgewiesen werden, wenn die Körper, zwischen denen die gegenseitige Wirkung statt hat, mit einander so verbunden werden können, dass sie ein starres System bilden. Man erkennt dann an der Unbeweglichkeit dieses Systems, dass die beiden Kräfte gleich und entgegengesetzt sind.

Wir werden demnach als allgemeines Gesetz annehmen, dass, so oft ein materieller Punkt eine Wirkung auf einen andern hervorbringt, dieser letztere immer eine gleiche und entgegengesetzte Wirkung auf den ersteren ausüben muss, so dass, wenn beide Punkte unveränderlich mit einander verbunden wären, die beiden Wirkungen sich vollkommen aufheben würden.

**Ausdruck der Kraft bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung.**

18. Wir haben gesehen, dass zwei constante Kräfte sich unter einander verhalten wie die von ihnen in gleichen Zeiten hervorgebrachten Quantitäten der Bewegung. Daraus folgte, dass eine constante Kraft durch diejenige Bewegungsquantität gemessen werden kann, die von ihr in der Zeiteinheit erzeugt wird, wenn man nämlich die Krafteinheit so bestimmt, dass dadurch die Masseneinheit in der Zeiteinheit eine der Einheit gleiche Geschwindigkeit erlangt. Wir wollen nun sehen, wie man auf diesen Fall den einer solchen Kraft zurückführen kann, die sich in jedem Augenblicke nach einem beliebigen Gesetze ändert. Die Frage besteht nur darin, die Geschwindigkeit zu ermitteln, welche eine solche Kraft der Masseneinheit während der Zeiteinheit mittheilen würde, wenn sie die in dem betrachteten Zeitpunkte ihr innewohnende Intensität beibehielte.

In einer beliebigen geradlinigen Bewegung sei $v$ die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, dem wir eine der Einheit gleiche Masse geben wollen, ferner $x$ seine Entfernung vom Anfange der Bewegung und $t$ die von irgend einer Epoche an gezählte

Zeit. Mit $\varphi$ bezeichnen wir die veränderliche Kraft, welche an dem Punkte in jedem Augenblicke angreift, oder auch ihr Verhältniss zur Krafteinheit, und das Maass dafür ist bekanntlich die Geschwindigkeit, welche sie der in Rede stehenden Masseneinheit in der Zeiteinheit mittheilt. Wenn die Kraft constant wäre, so hätte man die Geschwindigkeit, welche der Punkt in irgend einer Zeit erlangt hat, durch diese Zeit zu dividiren, um die in der Zeiteinheit mitgetheilte Geschwindigkeit zu erhalten. Aber in dem gegenwärtigen Falle, wo die Kraft nur in einem gewissen Augenblicke $= \varphi$ ist, wird sie nach der Zeit $\Delta t$ um eine Grösse $\Delta \varphi$ vermehrt sein, und der Zuwachs $\Delta v$ der Geschwindigkeit gehört nicht der Kraft $\varphi$ an, sondern einer zwischen $\varphi$ und $\varphi + \Delta \varphi$ enthaltenen Kraft $\varphi'$, die man sich während derselben Zeit $\Delta t$ mit einer constanten Intensität wirksam vorstellen kann. Diese Zwischenkraft $\varphi'$ ist $= \frac{\Delta v}{\Delta t}$, d. h. dieser Ausdruck misst die Geschwindigkeit, die ihr von dem Punkte in der Zeiteinheit mitgetheilt werden würde. Da nun die streng richtige Gleichung $\varphi = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ stattfindet, welche Grösse auch das Zeitintervall $\Delta t$ haben möge, und da $\varphi'$ sich dem $\varphi$ unendlich nähert, sobald man $\Delta t$ in Null übergehen lässt, weil dann $\Delta \varphi$ ebenfalls sich der Null unendlich nähern muss, so folgt daraus, wenn beide Theile der Gleichung ihren Grenzwerth annehmen,

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Dies ist das genaue Maass der auf die Einheit der Masse wirkenden Kraft für eine beliebige geradlinige Bewegung. Der Ausdruck hat dasselbe Zeichen wie $dv$, so dass man bei Anwendung der Formel die Kraft als positiv betrachtet, wenn sie die Geschwindigkeit zu vergrössern strebt, und als negativ, wenn das Gegentheil eintritt. Nun war aber der Ausdruck für die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$, und daher dieselbe positiv, wenn die Bewegung in dem Sinne der positiven $x$ vor sich geht, folglich ist auch die Kraft positiv, wenn sie in demselben Sinne wirkt, indem sie dann den algebraischen Werth von $\frac{dx}{dt}$ oder $v$ vergrössert; im entgegengesetzten Falle ist sie negativ.

Ersetzt man in dem Werthe von $\varphi$ die Grösse $v$ durch $\frac{dx}{dt}$, so entsteht:

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

19. Bei einem mit der Masse $m$ versehenen Punkte wird die Kraft, welche auf ihn wirkt, durch $m\frac{dv}{dt}$ gemessen, weil der Punkt, welcher mit der Einheit der Masse behaftet dieselbe Bewegung haben sollte, durch die Kraft $\frac{dv}{dt}$ getrieben werden müsste, und bei identischen Bewegungen die Kräfte sich wie die Massen verhalten.

Man ist übereingekommen, bewegende Kraft diejenige zu nennen, welche an irgend eine gegebene Masse angebracht ist; ihr Maass ist demnach

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Beschleunigende Kraft nennt man dagegen diejenige, welche bei der betrachteten Bewegung auf die Masseneinheit wirkt; sie ist daher

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Derselbe Ausdruck misst, wenn man die Bewegung an sich betrachtet, deren positive oder negative Beschleunigung.

### Anwendung der allgemeinen Formeln für die veränderliche Bewegung.

20. Die im Vorigen bewiesenen allgemeinen Formeln für die veränderliche Bewegung sind

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

oder auch, wenn man für $dt$ seinen aus der ersten Gleichung gezogenen Werth einsetzt:

$$\varphi = v\frac{dv}{dx}.$$

Wir wollen die verschiedenen Fragen untersuchen, zu denen diese Gleichungen Veranlassung bieten.

1. Wenn das Bewegungsgesetz, mithin $x$ als Funktion der Zeit gegeben ist, etwa $x = F(t)$, so findet man die Geschwindigkeit und die Kraft durch blosse Differentiationen in Beziehung auf $t$, nämlich $v = F'(t)$ und $\varphi = F''(t)$.

2. Es kann ferner die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, also $v = f(t)$ gegeben sein; die beschleunigende Kraft erhält man in diesem Falle wieder durch Differentiation, nämlich $\varphi = f'(t)$ dagegen bestimmt sich die Lage des beweglichen Punktes durch die Integralformel

$$x = \int v\, dt = \int f(t)\, dt.$$

Die zum Integral gehörende Constante lernt man durch die Anfangslage des Punktes kennen.

3. Ist die Kraft auf gegebene Weise von der Zeit abhängig, etwa $\varphi = F(t)$, so erhält man die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = \int F(t)\, dt,$$

wobei die Integrationsconstante aus dem Anfangswerthe von $v$ hergeleitet wird. Nachdem man auf diese Weise $v$ als Funktion von $t$, etwa $v = f(t)$, kennen gelernt hat, findet man weiter

$$x = \int f(t)\, dt;$$

die neue Integrationsconstante bestimmt man mittelst des Anfangswerthes von $x$.

4. In dem Falle, wo das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich die Geschwindigkeit mit dem zurückgelegten Wege ändert, hat man eine Gleichung von der Form $v = f(x)$ und zieht daraus

$$dx = f(x)\, dt, \qquad t = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Nachdem man die Integrationsconstante mittelst der Anfangslage des Punktes bestimmt hat, behält man eine endliche Gleichung zwischen $t$ und $x$, welche man nöthigenfalls auch nach $x$ auflösen kann. Die beschleunigende Kraft ist

$$= v\frac{dv}{dx} = f(x)\, f'(x).$$

5. Sehr häufig kennt man den Zusammenhang zwischen der beschleunigenden Kraft und dem zurückgelegten Wege, ausge-

drückt in einer Gleichung von der Form $\varphi = F(x)$; ersetzt man hier $\varphi$ durch $v\frac{dv}{dx}$, so wird $v\,dv = F(x)\,dx$, und hieraus folgt

$$v^2 = 2\int F(x)\,dx.$$

Die Integrationsconstante bestimmt man aus den Anfangswerthen von $v$ und $x$ und hat dann eine endliche Gleichung zwischen $v$ und $x$, welche $v$ als Funktion von $x$, etwa $v = \psi(x)$, kennen lehrt. Wegen $v = \frac{dx}{dt}$ ist nun weiter

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x), \quad \text{mithin } t = \int \frac{dx}{\psi(x)},$$

wobei sich die Integrationsconstante durch den Anfangswerth von $x$ bestimmt.

6. Es sei die beschleunigende Kraft eine Funktion der Geschwindigkeit und zwar $\varphi = F(v)$; es ist dann

$$\frac{dv}{dt} = F(v), \quad \text{folglich } t = \int \frac{dv}{F(v)}.$$

Der Werth der Integrationsconstante ergiebt sich aus dem Anfangswerthe von $v$, und dann hat man eine endliche Gleichung zwischen $t$ und $v$. Wenn sich diese nach $v$ auflösen lässt, so kann man ihr die Form

$$v = f(t) \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dt} = f(t)$$

ertheilen und dann weiter $x$ finden, nämlich

$$x = \int f(t)\,dt.$$

Im entgegengesetzten Falle ersetzt man in der ursprünglichen Gleichung $\varphi$ durch $v\frac{dv}{dx}$ und erhält

$$v\frac{dv}{dx} = F(v), \quad x = \int \frac{v\,dv}{F(v)}$$

d. h. eine Gleichung zwischen $x$ und $v$. Verbindet man diese mit der vorigen Gleichung zwischen $t$ und $v$, so gelangt man durch Elimination von $v$ zu einer Gleichung zwischen $x$ und $t$.

7. Nicht selten hängt die beschleunigende Kraft sowohl von der Geschwindigkeit als von dem zurückgelegten Wege ab, d. h. es ist

$$\varphi = F(v, x);$$

man ersetzt in diesem Falle $\varphi$ durch $v\frac{dv}{dx}$, integrirt die nunmehrige Differentialgleichung

$$v\frac{dv}{dx}=F(v,x)$$

und drückt $v$ durch $x$ aus in der Form $v=\chi(x)$. Weil ferner $v=\frac{dx}{dt}$, so ist weiter

$$\frac{dx}{dt}=\chi(x),\quad \text{mithin } t=\int\frac{dx}{\chi(x)};$$

man hat jetzt zwei Gleichungen zwischen den drei Variabelen $v$, $x$ und $t$ und kann daher auch alle auf die Bewegung bezüglichen Fragen beantworten.

Die Integration der oben aufgestellten Differentialgleichung gelingt immer, wenn $F(v,x)$ von der Form $f(x)+v^2\psi(x)$ ist*). Setzt man nämlich in der Gleichung

$$v\frac{dv}{dx}=f(x)+v^2\psi(x)$$

$v^2=u$, so wird daraus

$$\frac{du}{dx}-2u\psi(x)=2f(x)$$

und ihr Integral ist bekanntlich

$$u=v^2=\left\{e^{2\int\psi(x)\,dx}\right\}\left\{2\int f(x)\,e^{-2\int\psi(x)\,dx}\,dx+C\right\}.$$

Wenn sich diese Integrationen ausführen lassen, so hat auch die weitere Verfolgung des angedeuteten Weges keine Schwierigkeit.

## Bewegung eines schweren materiellen Punktes in einem widerstehenden Mittel.

21. Da die Gesetze des Widerstandes der Mittel zur Zeit noch nicht genau bekannt sind, so müssen wir die angenäherten Resultate, zu welchen vielfache Versuche über diesen Gegenstand

---

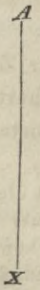
*) Wie man aus den nächsten Abschnitten ersehen wird, tritt dieser Fall ein, wenn sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer anziehenden oder abstossenden Kraft in einem widerstehenden Mittel bewegt und der Widerstand direct proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit und der Dichtigkeit des Mittels gesetzt wird, welche letztere an verschiedenen Stellen eine verschiedene sein kann.

geführt haben, vor der Hand als richtig betrachten. Wir setzen demnach voraus, dass dieser Widerstand sich als eine auf den Oberflächen in jedem Punkte normale Kraft äussert, die einmal dem Quadrate der in der Richtung der Normale gerechneten Geschwindigkeit dieses Punktes gegen das Mittel, und zweitens der Dichtigkeit des Fluidums proportional ist. Es folgt daraus, dass der auf eine bewegte Kugel ausgeübte Widerstand der Bewegung des Mittelpunktes gerade entgegengesetzt und dem Quadrate ihres Radius proportional ist. Dividirt man diesen Widerstand durch die Masse der Kugel, so erhält man die Kraft, welche sich daraus für die Masseneinheit ergiebt.

Es sei $\varrho$ die Dichtigkeit des Fluidums, welches wir als ruhend annehmen wollen, $D$ die der Kugel, $r$ ihr Radius und $v$ ihre Geschwindigkeit, so ist die auf die Einheit der Masse wirkende Kraft $\gamma \frac{\varrho v^2}{D r}$, wo $\gamma$ irgend einen constanten Coefficienten bezeichnet. Zur grösseren Bequemlichkeit der Rechnung wollen wir diese Kraft mit der Schwere vergleichen, und mit $k$ die Geschwindigkeit bezeichnen, welche man der gegebenen Kugel ertheilen müsste, damit der Widerstand, welchen sie erfährt, gleich ihrem Gewichte, also $\gamma \frac{\varrho k^2}{D r} = g$ werde. Der auf die Masseneinheit wirkende Widerstand ist dann $g \frac{v^2}{k^2}$ und unter dieser homogenen Form wollen wir ihn in den folgenden Rechnungen darstellen.

22. Bewegung des freien Falles. Wir beginnen mit dem speciellen Beispiele, wo der materielle Punkt sich nach der Richtung der Schwere bewegt. Es sei $A$ der Ausgangspunkt und $x$ der Abstand des bewegten Körpers von diesem Punkte nach irgend einer Zeit $t$, an deren Ende er die Geschwindigkeit $v$ erlangt hat. Für die beschleunigende Kraft haben wir jetzt die Gleichung

Fig. 16.




$$\varphi = g - g \frac{v^2}{k^2} = \frac{g}{k^2} (k^2 - v^2) = \frac{dv}{dt},$$

woraus

$$dt = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dv}{k^2 - v^2}.$$

Durch Integration folgt:

$$t = \frac{k}{2g} l \frac{k+v}{k-v}.$$

Einer Integrationsconstanten bedarf es hier nicht, weil wir die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ angenommen haben.

Weiter ist nun

$$\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2gt}{k}},$$

woraus

1) $$v = k \frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}} = \frac{dx}{dt},$$

und folglich

$$x = k \int \frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}} dt = \frac{k^2}{g} l \left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) + C.$$

Da $x$ gleichzeitig mit $t$ verschwindet, so hat man

$$C = -\frac{k^2}{g} l 2,$$

woraus folgt:

2) $$x = \frac{k^2}{g} l \left(\frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}\right).$$

Man erhält so die Lage und Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte, womit die vollständige Lösung der Aufgabe geliefert ist.

Will man $x$ als Funktion von $v$ ausdrücken, so benutzt man die Substitution $\varphi = v \frac{dv}{dx}$ und erhält

$$\frac{v\,dv}{dx} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2),$$

woraus

$$x = \frac{k^2}{g} \int \frac{v\,dv}{k^2 - v^2} = -\frac{k^2}{2g} l (k^2 - v^2) + C;$$

da gleichzeitig $v = 0$ und $x = 0$ ist, so folgt

$$C = \frac{k^2}{2g} l (k^2),$$

mithin

3) $$x = \frac{k^2}{2g}\, l\left(\frac{k^2}{k^2 - v^2}\right).$$

Aus der Formel 1) erkennt man, dass $v$ immer kleiner als $k$ ist, sich aber der Grenze $k$ mehr und mehr nähert, je grösser $t$ wird, weil dabei die Exponentialgrösse $e^{-\frac{gt}{k}}$ der Null beliebig nahe kommt. Die Bewegung strebt also gleichförmig zu werden, und die Geschwindigkeit hat einen Grenzwerth, bei welchem die beschleunigende Kraft gleich der verzögernden ist. Dieser Zustand wird zwar, genau genommen, niemals eintreten, aber der bewegte Körper nähert sich demselben unendlich, und zwar um so schneller, je geschwinder $e^{-\frac{gt}{k}}$ abnimmt, oder je kleiner $k$ ist. Da nun $k$ den Werth

$$k = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\sqrt{\frac{Dr}{\varrho}}$$

besitzt, so wird die Bewegung um so eher und bei einer um so geringeren Geschwindigkeit gleichförmig, je dichter das Mittel, je kleiner der Radius der bewegten Kugel und je geringer ihre Dichtigkeit ist, wie dies auch die Erfahrung bestätigt.

23. Wenn die Dichtigkeit des Mittels Null gesetzt wird, so ist der fallende Körper nur der Wirkung der Schwere unterworfen, die Grösse $k$ wird unendlich und man hat, in der Voraussetzung, dass gleichzeitig $t = 0$, $v = 0$ und $x = 0$ sind,

$$\varphi = g = \frac{dv}{dt}, \quad \text{oder } v = gt = \frac{dx}{dt},$$

und folglich

$$x = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{und } v^2 = 2gx.$$

Diese schon früher aufgestellten Formeln können aus den vorigen hergeleitet werden, wenn man $k$ unendlich werden lässt. Entwickelt man nämlich die Exponentialgrössen, so giebt die Gleichung 1), wenn man $\frac{1}{k} = 0$ setzt, $v = gt$. Die Gleichung 3), welche sich unter die Form

$$x = -\frac{k^2}{2g}\, l\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$$

bringen lässt, führt, wenn man den Logarithmus in eine Reihe entwickelt, zu

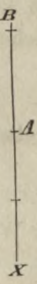
$$x = -\frac{k^2}{2g}\left(-\frac{v^2}{k^2} - \frac{v^4}{2k^4} - \ldots\right).$$

Unterdrückt man hierin den gemeinsamen Faktor $k^2$ und nimmt dann $k = \infty$, so bleibt:

$$x = \frac{v^2}{2g}, \text{ oder } v^2 = 2gx.$$

24. Aufsteigende Bewegung. $A$ sei der Ausgangspunkt des bewegten Körpers; die Richtung $AX$ der Schwere nehmen wir wieder als die Richtung der positiven $x$, und es sei daher $-a$ die Anfangsgeschwindigkeit des aufgeworfenen Körpers, so ist

Fig. 17.




$$\frac{dv}{dt} = g + g\frac{v^2}{k^2} = \frac{g}{k^2}(v^2 + k^2),$$

woraus

$$dt = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dv}{v^2 + k^2}.$$

Beachtet man bei der Integration, dass gleichzeitig $t = 0$ und $v = -a$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{gt}{k} = arc\ tang\ \frac{v}{k} + arc\ tang\ \frac{a}{k} = arc\ tang\ \frac{kv + ka}{k^2 - va},$$

woraus

$$\frac{kv + ka}{k^2 - va} = tang\ \frac{gt}{k},$$

und folglich

$$v = k\,\frac{k \sin \frac{gt}{k} - a \cos \frac{gt}{k}}{a \sin \frac{gt}{k} + k \cos \frac{gt}{k}} = \frac{dx}{dt}.$$

Hiernach ist

$$x = k\int \frac{k \sin \frac{gt}{k} - a \cos \frac{gt}{k}}{a \sin \frac{gt}{k} + k \cos \frac{gt}{k}}\,dt$$

$$= -\frac{k^2}{g}\, l\left(a \sin \frac{gt}{k} + k \cos \frac{gt}{k}\right) + C.$$

Die Constante muss so beschaffen sein, dass man gleichzeitig $t = 0$ und $x = 0$ erhält; dies giebt

$$x = -\frac{k^2}{g}\, l\left(\frac{a}{k}\, sin\, \frac{gt}{k} + cos\, \frac{gt}{k}\right).$$

Das Problem ist jetzt vollständig gelöst, weil man für jeden Werth von $t$ den Ort und die Geschwindigkeit des Punktes angeben kann, und folglich auch die Kraft, welche ihn antreibt.

Der Körper hört auf zu steigen, wenn $v$ Null geworden ist. Die Kraft ist in diesem Augenblicke gleich $g$ und nöthigt ihn zum Fallen. Dabei ändert aber der Widerstand seine Richtung und man kommt auf das vorige Problem zurück. Der Werth $\vartheta$ von $t$, welcher diesem Augenblicke entspricht, ist durch die Gleichung:

$$k\, sin\, \frac{g\vartheta}{k} - a\, cos\, \frac{g\vartheta}{k} = 0,$$

gegeben, woraus man erhält:

$$tang\, \frac{g\vartheta}{k} = \frac{a}{k}, \quad \text{oder } \vartheta = \frac{k}{g}\, arc\, tang\, \frac{a}{k}.$$

Der Werth von $x$ wird dann

$$x = -\frac{k^2}{2g}\, l\left(\frac{a^2 + k^2}{k^2}\right).$$

Dies ist der Abstand des Punktes $A$ von dem höchsten Punkte $B$. Von diesem Punkte rückwärts kann die Bewegung durch die auf den ersten Fall bezüglichen Formeln bestimmt werden, wenn man $B$ als Anfangspunkt nimmt.

Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, womit der Körper nach $A$ zurückkehrt, sowie die Zeit, während welcher er fällt, nehmen wir die Strecke $AB$ oder $\frac{k^2}{2g}\, l\left(\frac{a^2 + k^2}{k^2}\right)$ gleich dem durch die Formel 3) gegebenen Werthe von $x$; dies giebt

$$\frac{a^2 + k^2}{k^2} = \frac{k^2}{k^2 - v^2}, \quad \text{woraus } v^2 = a^2\, \frac{k^2}{k^2 + a^2}.$$

Der Körper kommt also in $A$ mit einer Geschwindigkeit an, welche kleiner ist als die, womit er beim Aufsteigen den Punkt $A$ verliess, und zwar um so geringer, je kleiner $k$ ist.

Um den Werth $\vartheta'$ von $t$ zu kennen, der diesem Augenblicke zugehört, muss man in die Gleichung 2) für $x$ den besonderen Werth

$$\frac{k^2}{2g}\, l\left(\frac{a^2 + k^2}{k^2}\right)$$

substituiren, und erhält dann

$$\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{a^2+k^2}{k^2}\right)=l\left(\frac{e^{\frac{g\vartheta'}{k}}+e^{-\frac{g\vartheta'}{k}}}{2}\right)$$

und hieraus

$$e^{\frac{g\vartheta'}{k}}+e^{-\frac{g\vartheta'}{k}}=\frac{2\sqrt{a^2+k^2}}{k},$$

oder, wenn man die erste Exponentialgrösse mit $z$ bezeichnet,

$$z^2-\frac{2\sqrt{a^2+k^2}}{k}z+1=0.$$

Diese reciproke Gleichung liefert den Werth

$$z=e^{\frac{g\vartheta'}{k}}=\frac{a+\sqrt{a^2+k^2}}{k},$$

woraus

$$\vartheta'=\frac{k}{g}\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2+k^2}}{k}\right).$$

Die Frage, ob $\vartheta'$ grösser oder kleiner als $\vartheta$ ist, lässt sich auf folgende Weise beantworten. Da die Differenz

$$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}-\frac{1}{1+\xi^2}$$

immer positiv bleibt, so muss auch das Integral

$$\int_0^\xi\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}-\frac{1}{1+\xi^2}\right\}d\xi=l\left(\xi+\sqrt{1+\xi^2}\right)-arc\ tang\ \xi$$

einen positiven Werth haben; hieraus folgt

$$l\left(\xi+\sqrt{1+\xi^2}\right)>arc\ tang\ \xi$$

und ferner, wenn $\xi=\frac{a}{k}$ gesetzt und beiderseits mit $\frac{k}{g}$ multiplicirt wird,

$$\vartheta'>\vartheta.$$

Der Körper braucht also unter gleichen Umständen längere Zeit zum Herabfallen als zum Aufsteigen.

Für die ganze zwischen Abgang und Rückkehr verflossene Zeit hat man

$$\vartheta+\vartheta'=\frac{k}{g}\left[arc\ tang\ \frac{a}{k}+l\left(\frac{a+\sqrt{a^2+k^2}}{k}\right)\right].$$

25. Anderes Gesetz des Widerstandes. Wir wollen jetzt annehmen, dass der Widerstand der Geschwindigkeit proportional, und zwar durch $g\frac{v}{k}$ ausgedrückt sei, wo $k$ wieder die Geschwindigkeit bezeichnet, welche den Widerstand gleich dem Gewichte des Körpers machen würde. Geschieht dann die Bewegung in der Richtung der Schwere, so ist

$$\varphi = \frac{g}{k}(k-v) = \frac{dv}{dt},$$

folglich

$$t = \frac{k}{g}\int\frac{dv}{k-v} = -\frac{k}{g}\,l\,(k-v) + C.$$

War die Anfangsgeschwindigkeit Null, so erhält man:

$$C = \frac{k}{g}\,lk,$$

mithin

$$t = -\frac{k}{g}\,l\left(\frac{k-v}{k}\right),$$

und

$$\frac{k-v}{k} = e^{-\frac{gt}{k}},\ v = k\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right) = \frac{dx}{dt}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$x = k\int\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right)dt = kt + \frac{k^2}{g}e^{-\frac{gt}{k}} + C,$$

und da $x = 0$ ist für $t = 0$, so wird

$$C = -\frac{k^2}{g},$$

und folglich

$$x = kt + \frac{k^2}{g}\left(e^{-\frac{gt}{k}} - 1\right).$$

Der Werth von $v$ lehrt, dass die Geschwindigkeit der Grenze $k$ zustrebt wie im vorigen Falle; die Variable $x$ wächst ins Unendliche.

26. Wenn der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit $a$ besitzt und nicht der Wirkung der Schwere, sondern nur dem Widerstande des Mittels unterworfen ist, so wird einfach

$$\varphi = -g\frac{v}{k} = \frac{dv}{dt}, \quad dt = -\frac{kdv}{gv}, \quad t = -\frac{k}{g}lv + C;$$

und da $v = a$ für $t = 0$ ist, so folgt hieraus:

$$C = \frac{k}{g}la, \quad \text{und } t = -\frac{k}{g}l\frac{v}{a},$$

mithin

$$v = ae^{-\frac{gt}{k}} = \frac{dx}{dt}.$$

Man erhält ferner

$$x = a\int e^{-\frac{gt}{k}}dt = -\frac{ak}{g}e^{-\frac{gt}{k}} + C,$$

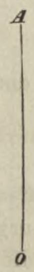
und da gleichzeitig $t = 0$ und $x = 0$ ist, so wird

$$C = \frac{ak}{g}, \text{ folglich } x = \frac{ak}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right).$$

Man sieht, dass die Geschwindigkeit im jetzigen Falle die Null zum Grenzwerth hat, wenn die Zeit ins Unendliche wächst; $x$ erlangt dabei den Grenzwerth $\frac{ak}{g}$. Der Punkt nähert sich demnach einer bestimmten Lage, ohne sie jedoch je erreichen zu können.

27. Verticale Bewegung eines Punktes im leeren Raume. Ein materieller Punkt befinde sich zur Zeit $t = 0$ in $A$ über der Erdoberfläche und werde gegen den Mittelpunkt $O$ der Erde nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung angezogen; der Ausgangspunkt $A$ möge der Anfang der $x$ sein, die wir positiv im Sinne der Schwere nehmen; die auf die Einheit der Masse wirkende Kraft heisse $g$, wenn der Körper auf der Oberfläche der Erde, in der Entfernung $r$ von ihrem Mittelpunkte liegt; der Voraussetzung zufolge ist dann die beschleunigende Kraft

Fig. 18.




$$\varphi = \frac{gr^2}{(a-x)^2},$$

wobei $OA = a$ gesetzt wurde. Die zu integrirende Gleichung lautet jetzt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Nach Multiplication mit $2dx$ hat man

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = 2gr^2\,\frac{dx}{(a-x)^2},$$

und hier ist die linke Seite das Differential von $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, die rechte das von $\frac{2gr^2}{a-x}$. Die Integration giebt daher:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gr^2}{a-x} + C = v^2.$$

Nehmen wir die Anfangsgeschwindigkeit $=0$, so wird

$$C = -\frac{2gr^2}{a},$$

und folglich

$$1)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2gr^2}{a}\cdot\frac{x}{a-x} = v^2.$$

Um ferner $x$ als Funktion von $t$ auszudrücken beachten wir, dass $dx$ und $dt$ dasselbe Zeichen haben und ziehen aus der Gleichung 1) die folgende

$$dt = \frac{dx}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \frac{dx}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}},$$

durch Integration erhalten wir

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{(\frac{1}{2}a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

und endlich

$$2)\qquad t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\,arc\cos\frac{a-2x}{a}\right).$$

Da $x=0$ für $t=0$ werden muss, so verschwindet die Constante, vorausgesetzt, dass man Null als den Bogen nimmt, dessen Cosinus die Einheit ist.

Die Formeln 2) und 1) enthalten insofern die Lösung des Problemes, als sie die Zeit kennen lehren, welche der Körper braucht, um eine beliebige Strecke $x$ zurückzulegen, sowie die Geschwindigkeit $v$, womit er am Ende jener Strecke ankommt. Will man dagegen umgekehrt für irgend einen Werth von $t$ die zugehörigen

Werthe von $x$ und $v$ bestimmen, so muss man die transcendente Gleichung 2) nach $x$ auflösen und dann die Formel 1) anwenden. Am bequemsten macht sich dies, wenn man einen Hilfswinkel $\Theta$ mittelst der Substitution

$$arc\ cos\ \frac{a-2x}{a}=\Theta \quad \text{oder } cos\ \Theta=\frac{a-2x}{a}$$

einführt; es folgt daraus

$$\sqrt{ax-x^2}=\tfrac{1}{2}a\sin\Theta,$$

mithin durch Substitution in Nr. 2)

$$\Theta+\sin\Theta=rt\sqrt{\frac{8g}{a^3}}.$$

Nach Auflösung dieser Gleichung hat man

$$x=\tfrac{1}{2}a(1-\cos\Theta)=a\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta,$$

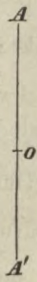
und schliesslich aus Nr. 1)

$$v=r\sqrt{\frac{2g}{a}}\,tang\,\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Uebrigens können die angegebenen Formeln nur so lange angewendet werden, als der Körper nicht in das Innere der Erde eindringt, d. h. sie gelten nur bis $x=a-r$. Ueber diesen Punkt hinaus ist die Kraft proportional der Entfernung vom Mittelpunkte und die Bewegung wird durch andere Gleichungen dargestellt, die wir im Folgenden behandeln wollen.

28. Der grösseren Einfachheit wegen nehmen wir an, dass der bewegte Punkt von dem Orte $A$ an der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit Null ausgehe; den Anfang der $x$ verlegen wir, um die Rechnung symmetrischer zu gestalten, in den Mittelpunkt, und betrachten die $x$ als positiv in der Richtung $OA$. Der Ausdruck für die Kraft ist dann:

Fig. 19.




$$\varphi=-g\frac{x}{r}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Multiplicirt man mit $2dx$ und integrirt, so kommt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\frac{gx^2}{r}+C=v^2,$$

und da $v=0$ für $x=r$, so wird $C=gr$, folglich

$$3)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{g}{r}(r^2-x^2)=v^2.$$

Um noch eine Gleichung zwischen $x$ und $t$ aufzustellen ziehen wir aus Nr. 3)

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

wo das negative Zeichen für die Wurzel deshalb zu nehmen war, weil $dx$ und $dt$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so lange die Bewegung in dem entgegengesetzten Sinne der positiven $x$ vor sich geht. Durch Integration entsteht:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot arc\cos\frac{x}{r}.$$

Die Constante ist Null, weil für $t = 0$ $x = r$ werden muss. Nach $x$ aufgelöst giebt die vorige Gleichung:

4) $$x = r\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{r}}\right).$$

Der Werth für $v^2$ zeigt, dass die Geschwindigkeit ein Maximum ist, wenn der Punkt das Centrum passirt, und dass sie für $x = -r$, d. h. am entgegengesetzten Ende des Durchmessers, zu Null wird. Der Punkt befindet sich dann wieder in den nämlichen Verhältnissen wie anfangs; er kommt in seine ursprüngliche Lage durch eine mit der ersteren identische Bewegung zurück und macht überhaupt eine unendliche Anzahl gleicher Schwingungen. Da die Geschwindigkeit nur von $x^2$ abhängt, so ist sie dieselbe für solche Orte, welche sich in gleichem Abstande vom Centrum befinden.

Aus der Gleichung zwischen $x$ und $t$ sieht man, dass der Punkt nach der Zeit $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ im Centrum ankommt, dass für gleichweit von diesem Zeitpunkte abstehende Epochen die Abstände vom Centrum gleich sind, und dass der Punkt das Ende des Durchmessers nach der Zeit $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ erreicht; der letztere Ausdruck bestimmt daher die Dauer einer Schwingung.

29. Die vorigen Formeln gehen in die für eine gleichförmig beschleunigende Bewegung über, wenn man den durchlaufenen Raum als sehr klein im Vergleich mit der Entfernung vom Centrum annimmt, was darauf hinauskommt, die Kraft zu einer Con-

stanten werden zu lassen. Die Gleichung 1) lässt sich nämlich auf die Form bringen

$$v^2 = 2gx \frac{r^2}{a^2 - ax},$$

und wenn man hier

$$a = r + h$$

setzt, wo $h$ eine in Bezug auf $r$ sehr kleine Grösse, nämlich die Erhebung des Punktes $A$ über die Erdoberfläche, bezeichnen soll, so reducirt sich $\frac{r^2}{a^2 - ax}$ auf die Einheit, wenn man die Grössen von der Ordnung $\frac{h}{r}$ vernachlässigt; für diesen Grad der Annäherung ist daher

$$v^2 = 2gx.$$

Aus Formel 2) erhalten wir

$$\frac{1}{r}\sqrt{ax - x^2} = \frac{a}{r}\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{x}}{r}\left(1 - \frac{1 \,.\, x}{2a} - \ldots\right).$$

Setzen wir hier wieder $r + h$ für $a$ und vernachlässigen die Glieder, in welchen die Quotienten $\frac{x}{r}$ und $\frac{h}{r}$ vorkommen, so bleibt $\sqrt{x}$, und der erste Theil von $t$ wird zu $\sqrt{\frac{x}{2g}}$. Ferner ergiebt sich, wenn $arc\ cos \frac{a}{a - 2x}$ oder besser $arc\ sin \frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}$ in eine Reihe entwickelt wird, dass auch der zweite Theil von $t$ auf $\sqrt{\frac{x}{2g}}$ zurückkommt, mithin

$$t = 2\sqrt{\frac{x}{2g}}, \quad \text{oder } x = \frac{gt^2}{2}.$$

Bei Behandlung der zweiten Frage sind die durchlaufenen Räume $r - x$, und wenn man sie sehr klein in Rücksicht auf $r$ annimmt, geht die Gleichung 3), welche sich auf die Form

$$v^2 = g(r - x)\frac{r + x}{r}$$

bringen lässt, nahezu in die folgende über:

$$v^2 = 2g(r - x).$$

Die Formel 4) giebt, in eine Reihe entwickelt,

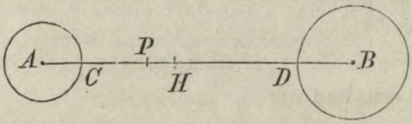
$$x = r\left(1 - \frac{gt^2}{2r} + \ldots\right),$$

und bei Vernachlässigung der Glieder, welche $r$ im Nenner enthalten, wird daraus

$$r - x = \frac{gt^2}{2}.$$

30. Bewegung eines Punktes, der von zwei Kugeln angezogen wird. In nachstehender Figur mögen $A$ und $B$ die Mittelpunkte, $AC = r$ und $BD = R$ die Halbmesser zweier

Fig. 20.




materieller Kugeln bedeuten, von denen wir voraussetzen, dass sie entweder homogen sind, oder aus homogenen concentrischen Kugelschaalen bestehen; die Entfernung $AB$ sei unveränderlich und heisse $e$. Von dem Punkte $C$, in welchem die Centrale $AB$ die erste Kugel schneidet, gehe ein materieller Punkt mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit aus und bewege sich geradlinig von $C$ nach $B$ im leeren Raume. Die beschleunigende Kraft ist in diesem Falle der Unterschied zwischen der die Bewegung fördernden Anziehung der zweiten Kugel und der die Bewegung verzögernden Anziehung der ersten Kugel; bezeichnet demnach $CP = x$ den am Ende der Zeit $t$ zurückgelegten Weg, $m$ die Masse der ersten, $M$ die Masse der zweiten Kugel, und $f$ die Anziehung der Masseneinheit auf die um eine Längeneinheit entfernte gleiche Masse, so wird die beschleunigende Kraft ausgedrückt durch

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{fM}{(e-r-x)^2} - \frac{fm}{(r+x)^2},$$

oder auch, wenn $r + x = z$, $fm = \alpha^2$ und $fM = \beta^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\beta^2}{(e-z)^2} - \frac{\alpha^2}{z^2}.$$

Durch Multiplication mit $dz$ und Integration zieht man hieraus

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \gamma = \frac{\beta^2}{e-z} + \frac{\alpha^2}{z},$$

wo $\gamma$ die Integrationsconstante bezeichnet. Wegen $dz = dx$ ist hier $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} = v$, mithin auch

$$1)\qquad \tfrac{1}{2}v^2 + \gamma = \frac{\beta^2}{e-z} + \frac{\alpha^2}{z}.$$

Die Constante $\gamma$ bestimmt sich aus der Bedingung, dass die Geschwindigkeit für $x = 0$, d. h. $z = r$, einen bekannten Anfangswerth, etwa $c$, erhalten muss; dies giebt

$$2)\qquad \gamma = \frac{\beta^2}{e-r} + \frac{\alpha^2}{r} - \tfrac{1}{2}c^2$$

und durch Substitution in Nr. 1)

$$3)\qquad \frac{c^2 - v^2}{2} = \frac{\beta^2}{e-r} + \frac{\alpha^2}{r} - \left(\frac{\beta^2}{e-z} + \frac{\alpha^2}{z}\right).$$

Aus der Gleichung 1) folgt weiter, wenn auf $v$ reducirt und $\frac{dz}{dt}$ für $v$ gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{z(e-z)}\,dz}{\sqrt{\alpha^2 e - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma e)z + \gamma z^2}} = \sqrt{2}\,dt;$$

integrirt man diese Gleichung unter Rücksicht auf den Umstand, dass $z = r$ der Minimalwerth von $z$ ist, welchem $t = 0$ entspricht, so erhält man

$$4)\qquad \int_r^z \frac{\sqrt{z(e-z)}\,dz}{\sqrt{\alpha^2 e - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma e)z + \gamma z^2}} = \sqrt{2}\,t.$$

Das hier vorkommende Integral ist ein elliptisches, man muss daher die Tafeln für elliptische Integrale benutzen, wenn zu einem bestimmten $z$ das entsprechende $t$, oder umgekehrt das einem gegebenen $t$ zugehörige $z$ berechnet werden soll.

Um die verschiedenen Fälle, welche bei der in Rede stehenden Bewegung möglich sind, unterscheiden zu können, bemerken wir vorerst, dass es zwischen $A$ und $B$ einen Punkt $H$ giebt, welcher von beiden Kugeln gleich stark angezogen wird; seine Lage bestimmt sich, wenn man $AH = h$ setzt und von der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{h^2} = \frac{\beta^2}{(e-h)^2}$$

die positive Wurzel nimmt, nämlich

$$5)\qquad h = \frac{\alpha e}{\alpha + \beta}.$$

Ist nun die Anfangsgeschwindigkeit $c$ so beschaffen, dass der bewegliche Punkt in dem Augenblicke die Geschwindigkeit $v = 0$ erhält, wo er an der Stelle $H$ anlangt, so findet eine weitere Bewegung nicht statt, weil der Punkt an jener Stelle weder eine Geschwindigkeit besitzt, noch von irgend einer Seite her eine Anziehung erleidet. Der hierzu gehörige besondere Werth der Anfangsgeschwindigkeit heisse $c_0$; es muss dann $v = 0$ sein für $c = c_0$ und $z = h$, also nach Nr. 3)

$$\tfrac{1}{2} c_0^2 = \frac{\alpha^2}{r} + \frac{\beta^2}{e - r} - \left(\frac{\alpha^2}{h} + \frac{\beta^2}{e - h}\right)$$

d. i. vermöge des Werthes von $h$

$$6)\qquad \tfrac{1}{2} c_0^2 = \frac{\alpha^2}{r} + \frac{\beta^2}{e - r} - \frac{(\alpha + \beta)^2}{e}.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $c$ kleiner als der hieraus folgende Werth von $c_0$, so kann der bewegliche Punkt die Stelle $H$ nicht erreichen und fällt dann auf die erste Kugel zurück; für $c > c_0$ überschreitet der bewegliche Punkt die Stelle $H$ und fällt auf die zweite Kugel.

Hinsichtlich der Formel 4) wollen wir noch bemerken, dass es zwei Specialwerthe von $\gamma$ giebt, bei denen die Integration in geschlossener Form möglich ist. Diese Fälle treten ein, sobald die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse ein vollständiges Quadrat ausmacht, also

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma e)^2 = 4 \alpha^2 \gamma e$$

ist. Für $\gamma$ ergeben sich hieraus die Werthe

$$\gamma = \frac{(\alpha \pm \beta)^2}{e},$$

und als entsprechende Werthe von $c$ findet man nach Nr. 2)

$$\tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\alpha^2}{r} + \frac{\beta^2}{e - r} - \frac{(\alpha \pm \beta)^2}{e}.$$

Der eine Werth von $c$ ist identisch mit $c_0$, der andere, den wir $c_1$ nennen wollen, beträgt mehr als $c_0$. Vermöge der Werthe von $\gamma$ ist nun

$$\frac{\sqrt{z(e - z)}\, dz}{\alpha e - (\alpha \pm \beta) z} = \sqrt{\frac{2}{e}}\, dt,$$

wobei man die Wurzeln immer mit solchen Vorzeichen zu nehmen hat, dass $\frac{dz}{dt} = v$ positiv wird, weil die Bewegung in beiden Fällen eine nur progressive von $C$ nach $D$ hin ist. Nimmt man das obere Zeichen, welches der Anfangsgeschwindigkeit $c_0$ entspricht, und dehnt das Integral von $z = r$ bis $z = h$ aus, so erhält man die gesammte Zeit, welche der bewegliche Punkt braucht, um von $C$ nach $H$ zu gelangen; diese Zeit ist übrigens unendlich gross, wie sich leicht voraussehen liess.

Beispielsweis wollen wir die Formel 6) zur Beantwortung der Frage benutzen, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper von der Mondoberfläche ausgehen müsste, um auf die Erde zu fallen, vorausgesetzt, dass Mond und Erde in Ruhe wären. Da die Mondmasse ungefähr $\frac{1}{81}$ der Erdmasse beträgt, so hat man jetzt

$$\alpha^2 : \beta^2 = m : M = \tfrac{1}{81} : 1,$$

mithin

$$\alpha = \tfrac{1}{9}\beta \text{ und } h = \tfrac{1}{10} e,$$

oder weil $e = 60 R$,

$$h = 6 R.$$

Ferner ist $r = \frac{3}{11} R$, folglich, wenn man in Nr. 6 die Werthe von $\alpha$, $e$ und $r$ einsetzt,

$$c_0^2 = (0{,}04147) \frac{2\beta^2}{R}.$$

An der Erdoberfläche hat man

$$\frac{\beta^2}{R^2} = g, \text{ mithin } \frac{\beta^2}{R} = gR = \frac{9^m{,}809 \,.\, 20\,000\,000^m}{\pi},$$

folglich in Metern

$$c_0 = \sqrt{\frac{(0{,}04147) \,.\, (9{,}809) \,.\, 40\,000\,000}{\pi}} = 2275$$

als die Anfangsgeschwindigkeit, welche überschritten werden muss, wenn der Körper auf die Erde fallen soll.

31. Bemerkung über die singulären Lösungen. Die Differentialgleichung der Bewegung eines Punktes, in Verbindung mit seinen Anfangszuständen, reicht hin, um seine Bewegung während einer beliebigen Zeit vollständig zu bestimmen. Bei der Integration dieser Gleichung darf man aber keine ihrer Lösungen übersehen, und man hat den singulären Lösungen nicht weniger Rechnung zu tragen als den allgemeinen. Das

folgende Problem soll als Beispiel von einer Bewegung dienen, welche bis zu einem gewissen Zeitpunkte durch das allgemeine Integral und von dieser Epoche an durch das singuläre dargestellt wird.

Wir denken uns einen Punkt sich in einem Fluidum bewegend, dessen Widerstand der $m$ten Potenz seiner Geschwindigkeit proportional ist, wobei $m$ zwischen 0 und 1 liegen soll; er gehe vom Anfange der $x$ mit einer Geschwindigkeit $a$ im Sinne der positiven Abscissen aus und sei keiner andern Kraft als dem Widerstande des Mittels unterworfen. Die Gleichung seiner Bewegung ist dann

$$1) \qquad \frac{dv}{dt} = -kv^m,$$

wo $k$ eine bekannte Constante bezeichnet. Man zieht aus dieser Gleichung

$$v^{-m} dv = -k dt,$$

und folglich

$$2) \qquad v^{1-m} = a^{1-m} - (1-m) kt.$$

Wir dürfen hierbei nicht aus den Augen lassen, dass die gebrochene Potenz $v^m$ in der Differentialgleichung keinen Falles ein doppeltes Zeichen gestattet und zwar immer als positiv betrachtet wird, weil ohne diesen Umstand die Gleichung 1) die Bedingungen der mechanischen Aufgabe nicht darstellen würde. Ebendeswegen sind auch im Verlaufe der weiteren Rechnung $v$ und die Potenzen von $v$ als positiv zu betrachten, und wenn sich eine Gleichung ergeben sollte, bei welcher $v$ oder eine Potenz von $v$ negativ würde, so wäre sie als nicht zur Sache gehörig zu beseitigen.

Wir haben gesagt, dass man alle Lösungen der Gleichung 1) betrachten müsse, folglich ist auch das singuläre Integral

$$3) \qquad v = 0$$

zu berücksichtigen. Die vollständige Lösung des Problems ist also in den Gleichungen 2) und 3) gegeben und es handelt sich nur noch um die Entscheidung, welche von beiden in jedem gegebenen Augenblicke zu nehmen ist.

Für den Anfang der Bewegung wird man die Gleichung 3) nicht anwenden dürfen, weil die Anfangsgeschwindigkeit $= a$ ist und erst in einer endlichen Zeit vernichtet werden kann. Man muss also die Gleichung 2) nehmen. Aber man darf von ihr nur bis zu dem Zeitpunkte Gebrauch machen, für welchen man

$$(1-m)\,kt = a^{1-m}, \quad \text{oder } t = \frac{a^{1-m}}{(1-m)\,k}$$

erhält, weil darüber hinaus der Werth für $v^{1-m}$ negativ werden würde, ein Fall, der, wie wir nachgewiesen haben, der vorliegenden mechanischen Frage fremd ist. Wenn also auch zu diesem Werthe von $t$ die Gleichung 3) nicht passt, so wird sie doch in diesem Zeitpunkte erfüllt, und wird es von da an fortwährend sein müssen, weil die Gleichung 2) nicht mehr genügt und das Problem bestimmt eine Lösung hat, welche nur durch die eine oder andere Gleichung dargestellt werden kann.

Es folgt daraus, dass von $t=0$ bis $t=\frac{a^{1-m}}{(1-m)\,k}$ die Gleichung

$$v = \left[a^{1-m} - (1-m)\,kt\right]^{\frac{1}{1-m}}$$

stattfindet, von $t=\frac{a^{1-m}}{(1-m)\,k}$ bis $t=\infty$ aber immer $v=0$ zu nehmen ist; d. h. der Punkt wird unbeweglich an dem Orte verharren, den er am Ende der Zeit $\frac{a^{1-m}}{(1-m)\,k}$ eingenommen hat.

Wir können jetzt die Gleichung 3) integriren, nachdem wir $\frac{dx}{dt}$ für $v$ gesetzt haben, und wir wissen, bis zu welchem Werthe von $t$ sie den Werth von $x$ giebt, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so dass keine weitere Erörterung nöthig ist. Man erhält auf die angegebene Weise:

$$\frac{dx}{dt} = \left[a^{1-m} - (1-m)\,kt\right]^{\frac{1}{1-m}}$$

und folglich, in Berücksichtigung, dass für $t=0$ auch $x=0$ ist,

$$x = -\frac{\left[a^{1-m} - (1-m)\,kt\right]^{\frac{2-m}{1-m}}}{(2-m)\,k} + \frac{a^{2-m}}{(2-m)\,k}.$$

Der Punkt, wo der bewegte Körper anhält, und für den die Gleichung $a^{1-m} = (1-m)\,kt$ stattfindet, hat zur Abscisse $\frac{a^{2-m}}{(2-m)\,k}$. Auch auf andere Weise wäre leicht *a priori* einzusehen, dass, wenn die Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit Null geworden ist, der Punkt beständig in der Lage bleiben muss, in welcher er sich dann befindet. Wenn nämlich ein Punkt ohne Geschwindigkeit in ein Fluidum versetzt ist, das nach irgend einer Funktion seiner Geschwindigkeit der Bewegung widersteht, so wird er beständig in der Lage verharren, in welche man ihn gebracht hat, weil keine Kraft auf ihn einwirkt; er hat kein Bestreben, sich nach irgend einer Seite hin zu bewegen, und muss daher fortwährend in Ruhe bleiben.

---

## Zweites Capitel.

# Krummlinige Bewegung eines freien Punktes.

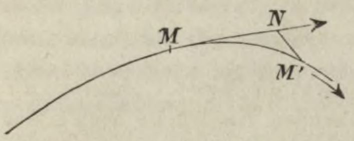
### Die beschleunigende Kraft.

32. Die krummlinige Bewegung eines materiellen Punktes ist zufolge des Trägheitsgesetzes nur dann möglich, wenn der Punkt unter dem Einflusse einer oder mehrerer Kräfte steht, welche letztere sich aber immer wieder zu einer resultirenden Kraft vereinigen lassen würden. Wenn diese Kraft plötzlich aufhörte thätig zu sein, so fiele in demselben Augenblicke auch jede fernere Veranlassung zu einer Aenderung der Richtung und der Geschwindigkeit weg und der materielle Punkt würde sich nach jenem Augenblicke fort und fort so bewegen wie in dem vor jenem Momente unmittelbar vorhergehenden unendlich kleinen Zeittheile. Mit anderen Worten: Nach dem plötzlichen Erlöschen der Kraft bewegt sich der Punkt gleichförmig auf der Tangente an seiner Bahn und zwar mit derjenigen Geschwindigkeit, welche er in diesem Augenblicke hatte.

Befindet sich nun ein materieller Punkt, dem wir die Masse 1 beilegen, am Ende der Zeit $t$ an der Stelle $M$ seiner Bahn und besitzt er in diesem Augenblicke die Geschwindigkeit $v$, so würde er, wenn die Kraft in diesem Momente aufhörte, während der nächsten Zeit $\Delta t$ die Strecke $MN = v \Delta t$ auf der Tangente an $M$ zurücklegen; wenn dagegen die Einwirkung der Kraft fortdauert, so beschreibt er während derselben Zeit $\Delta t$ ein weiteres Stück $MM'$ seiner krummlinigen Bahn. Die Kraft bewirkt demnach eine

Ablenkung des Punktes von jenem geradlinigen Wege, den er ausserdem beschreiben würde. Nehmen wir die Zeit unendlich klein, so können wir den Bogen $MM'$ als gerade Linie ansehen und die Kraft als eine während dieser Zeit constante Grösse betrachten; die wirkliche Bewegung von $M$ nach $M'$ ist dann zusammengesetzt aus den beiden Bewegungen $MN$ und $NM'$, und zugleich stellt $NM'$ den Weg dar, den der materielle Punkt während der Zeit $dt$ beschreiben würde, wenn er keine Geschwindigkeit besässe und nur der Wirkung der Kraft allein unterworfen wäre. Dies giebt den Satz:

Fig. 21.




Für einen materiellen Punkt, dessen Masse der Einheit gleich ist, wird die in irgend einem Augenblicke auf ihn wirkende Kraft sowohl der Grösse als der Richtung nach, durch die Beschleunigung seiner Deviation dargestellt.

Da die Linie $N'M$ immer einen Punkt der Curve mit einem Punkte ihrer Tangente verbindet, so fällt ihre Grenzlage in die osculirende Ebene der Curve; man hat daher weiter den Satz:

Die Richtung der Kraft liegt jedesmal in der zu jenem Curvenpunkte gehörenden osculirenden Ebene.

33. Um diese Ergebnisse analytisch auszudrücken, beziehen wir die Bahn des materiellen Punktes auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und nennen $x, y, z$ die Coordinaten des Ortes $M$, an welchem sich der bewegliche Punkt zur Zeit $t$ befindet; für die Deviation haben wir dann die früher bewiesene Formel

$$NM' = \frac{dt^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

und da andererseits $NM' = \frac{1}{2}\varphi dt^2$ sein muss, wenn $\varphi$ die Kraft bezeichnet, so folgt

$$1) \qquad \varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Die nach den Achsen der $x, y, z$ genommenen Componenten dieser Kraft ergeben sich, wenn man $\varphi$ mit den Cosinus der Winkel multiplicirt, welche $NM'$ mit den Coordinatenachsen einschliesst; nach dem Früheren haben diese Cosinus die Werthe

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2},$$

mithin sind die rechtwinkligen Componenten der Kraft

$$2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Besitzt der bewegliche Punkt nicht die Masse 1, sondern die Masse $m$, so muss man die vorstehenden Ausdrücke noch mit $m$ multipliciren, um die Componenten der auf die Masse $m$ wirkenden, d. h. der bewegenden Kraft zu erhalten. Es gelten daher, wenn $X$, $Y$, $Z$ die Componenten der bewegenden Kraft bedeuten, folgende Gleichungen zwischen der Kraft und den Coordinaten:

$$3)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Für die Masseneinheit vereinfachen sie sich und werden

$$4)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

34. Gebrauch der Bewegungsgleichungen. Die Gleichungen 3) und 4) liefern das Mittel, um alle auf die Bewegung eines Punktes bezüglichen Fragen durch Rechnung beantworten zu können. Am einfachsten würde sich die Sache in dem Falle gestalten, wo das Bewegungsgesetz bekannt wäre, also $x$, $y$, $z$ gegebene Funktionen von $t$, oder wenigstens drei endliche Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, $t$ vorhanden wären. Es würde dann nur einer Differentiation in Beziehung auf $t$ bedürfen, um die Seitengeschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ zu erhalten und dann würde eine zweite Differentiation zur Kenntniss der Componenten $X$, $Y$, $Z$ führen; endlich könnte man durch Elimination von $t$ zwischen den drei gegebenen Gleichungen die beiden Gleichungen der Trajectorie entwickeln. Meistentheils ist aber die Sache complicirter und zwar stellt sich die Aufgabe gewöhnlich so, dass die bewegende Kraft gegeben ist und die Gesetze der Bewegung ermittelt werden sollen. Man kennt in diesem Falle $X$, $Y$, $Z$ als Funktionen von $x$, $y$, $z$, $t$ und hat dann drei Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,y,z,t),\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\Phi(x,y,z,t),\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\Psi(x,y,z,t).$$

Die Integration dieser drei Differentialgleichungen führt zu drei endlichen Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, $t$ und den sechs

Integrationsconstanten, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechend bestimmt werden müssen. Zu diesem Zwecke bedarf es nur der Bemerkung, dass die blosse Kenntniss der Kraft noch nicht hinreicht, um für jede gegebene Zeit die Lage und Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zu ermitteln, dass man vielmehr noch ausserdem den Anfangsort und die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes kennen muss. Jene anfängliche Lage des Punktes, welche einer bestimmten Epoche, gewöhnlich der Zeit $t=0$, entspricht, wird durch ihre drei rechtwinkligen Coordinaten, und die Anfangsgeschwindigkeit durch ihre drei rechtwinkligen Componenten bestimmt; man weiss also, welche Werthe $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ für $t=0$ annehmen. Setzt man daher in den gefundenen drei Integralgleichungen, sowie in den drei, durch Differentiation daraus entspringenden Gleichungen $t=0$ und substituirt für $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ihre für diesen Fall bekannten Specialwerthe, so hat man sechs Bedingungsgleichungen, in denen nur die sechs Constanten der Integration als Unbekannte auftreten; letztere können daher aus diesen Gleichungen selbst gefunden werden. Man erhält endlich noch die Gleichungen der Trajectorie durch Elimination von $t$ aus je zweien der drei Integralgleichungen.

Etwas einfacher wird die Sache, wenn man vorher weiss, dass die Trajectorie eine ebene Curve ist. Man nimmt dann ihre Ebene zu einer der Coordinatenebenen und hat nur zwei Differentialgleichungen zwischen drei Variabelen, etwa $x$, $y$ und $t$. Durch Integration folgen hieraus zwei endliche Gleichungen zwischen $x, y, t$ und vier Constanten, deren Bestimmung auf ähnliche Weise wie vorhin geschieht. Die Elimination von $t$ aus den beiden Integralgleichungen giebt die Gleichung der Bahn.

## Tangentiale und normale Componenten der beschleunigenden Kraft und der Reaction.

35. Wir zeigten früher, dass die Beschleunigung der Deviation, deren Grösse

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

ist, in eine tangentiale und normale Componente zerlegt werden kann; die tangentiale Beschleunigung war $\frac{d^2 s}{dt^2}$, die normale $= \frac{v^2}{r}$, wo $r$ den Krümmungshalbmesser bedeutet. Da nun die beschleunigende Kraft dieselbe Richtung wie die Deviation oder deren Beschleunigung hat, so kann die nämliche Zerlegung auf jene Kraft angewendet werden, und vermöge der Identität der Beschleunigung in der Deviation mit der beschleunigenden Kraft ändert sich hierbei nur die Benennung. Dies giebt folgende Sätze:

Die beschleunigende Kraft kann in eine tangentiale Componente $= \frac{d^2 s}{dt^2}$ und in eine normale Componente $= \frac{v^2}{r}$ zerlegt werden, ebenso die bewegende Kraft, welche auf die Masse $m$ wirkt, in die tangentiale Componente $m \frac{d^2 s}{dt^2}$ und in die normale Componente $m \frac{v^2}{r}$.

Die normale Componente führt nicht selten den Namen „Centripetalkraft", weil sie den beweglichen Punkt nach dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der Bahn treiben würde, wenn sie allein vorhanden wäre.

36. Bei jeder Einwirkung eines Körpers auf einen zweiten findet, wie früher gezeigt wurde, eine Reaction des letzteren Körpers auf den ersten statt und zwar besteht dieselbe in einer gleich grossen im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kraft. Wenn sich beide Körper unmittelbar berühren oder wenigstens durch einen materiellen Apparat mit einander verbunden sind, so tritt die Reaction an den Berührungspunkten auf; bei Wirkungen aus der Ferne, wie z. B. bei Anziehungen und Abstossungen, erleidet jeder Körper eine Reaction von demjenigen Körper, auf welchen er wirkt; der Angriffspunkt der Reaction liegt also in dem zuerst genannten Körper. Wenn nun ein mit der Masse $m$ versehener materieller Punkt unter dem Einflusse einer von einem andern Körper ausgehenden Kraft eine Curve beschreibt, so können wir uns vorstellen, dass dieser Körper mittelst eines zwischengelegten Fadens eine Anziehung oder durch einen zwischengelegten Körper einen Druck auf den Punkt ausübe; die Reaction des letzteren erscheint dann im entgegengesetzten Sinne und kann wie die ihr gleiche

bewegende Kraft in eine tangentiale und normale Componente zerlegt werden. Die tangentiale Componente der Reaction ist hiernach $= m \frac{d^2 s}{dt^2}$, die normale $= m \frac{v^2}{r}$.

Die letztere Componente hat man die „Centrifugalkraft" genannt, weil sie der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt ist und daher das Bestreben hat, den beweglichen Punkt längs der Normale von dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte zu entfernen.

37. Die Centripetalkraft ist zuerst beim Kreise untersucht worden, und ihr Ausdruck wird dabei durch sehr einfache Betrachtungen bestimmt. Wenn man nämlich die auf den bewegten Punkt wirkende beschleunigende Kraft, welche nothwendig in der Ebene des Kreises liegt, in zwei andere Kräfte zerlegt, von denen die eine tangential, die andere normal zu dem Kreise ist, so kann die Bewegung der Projection des Punktes auf die Normale einzig und allein von der normalen Componente herrühren. Nimmt man nun diese Componente während der Zeit $dt$ nach Grösse und Richtung constant an, so lehrt die Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung, dass ihr Werth dem doppelten in der Normale durchlaufenen Raume, dividirt durch das Quadrat der Zeit, gleich sein muss. Dieser Raum ist gleich dem Quadrate der Sehne oder des Bogens $ds$, dessen Projection er bildet, dividirt durch den Durchmesser $2r$; also ist die normale Componente gleich $\frac{\frac{ds^2}{dt^2}}{r}$ oder gleich $\frac{v^2}{r}$. Dies ist nun beim Kreise der Ausdruck der Centripetal- oder auch Centrifugalkraft; für einen Punkt mit der Masse $m$ hat sie den Werth $\frac{mv^2}{r}$.

Bezeichnet $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punktes, so ist

$$v = \omega r,$$

mithin die Centripetal- und Centrifugalkraft

$$= m\omega^2 r = \frac{4\pi r^2 m}{T^2},$$

wenn $T$ die Zeit bedeutet, innerhalb welcher der bewegliche Punkt die Peripherie des Kreises einmal durchläuft.

Um den beweglichen Punkt zur Beschreibung eines Kreises zu nöthigen, kann man ihn mit dem festen Centrum durch einen möglichst gewichtslosen und unausdehnbaren Faden verbinden; die Centripetalkraft wirkt dann längs des Fadens vom Punkte nach dem Centrum, die Centrifugalkraft in entgegengesetztem Sinne. Diese im Gleichgewichte befindlichen Kräfte bestimmen die Spannung des Fadens und den Druck, welchen das Centrum erleidet. Man könnte sich auch den Faden wegdenken und vorstellen, dass der materielle Punkt in einem kreisförmigen Canale zu bleiben gezwungen wäre; die äussere Canalwand übt dann einen Druck auf den Punkt und dieser einen Druck auf die Canalwand aus. Der erste Druck ist die Centripetal-, der zweite die Centrifugalkraft.

38. Einfluss der Erdrotation auf die Schwere. Betrachten wir einen Körper von unveränderlicher Gestalt, dessen Punkte beliebige Wirkungen auf einander ausüben mögen, welche durch die gegenseitige Verbindung aufgehoben werden, und geben wir ihm eine gleichförmige Rotationsbewegung um eine Achse, so dürfen wir die Verbindungen des Systems so auffassen, als zerstörten sie in jedem Augenblicke die gegenseitigen Wirkungen, denen es in seinem anfänglichen Zustande unterliegt, in Verbindung mit der Centrifugalkraft, welche sich auf seine Masse und Bewegung bezieht.

In der That kann man zu allen ursprünglichen Wirkungen die auf jeden Punkt bezügliche Centripetal- und Centrifugalkraft addiren, weil diese beiden Kräfte sich gegenseitig aufheben. Nun würde die Centripetalkraft die Bewegung des Punktes hervorbringen, wenn er frei wäre; die andern müssen also nothwendig alle vernichtet sein. Es folgt hieraus, dass die Resultante aus den ursprünglichen gegenseitigen Wirkungen, die auf jeden Punkt ausgeübt werden, und der Centrifugalkraft, welche dann als an demselben Punkte angreifend zu betrachten ist, durch die Art der Verbindung aufgehoben wird.

Sei $r$ der Abstand irgend eines Punktes des Körpers von der Achse und $T$ die Zeit einer ganzen Umdrehung, so ist die Geschwindigkeit dieses Punktes $= \frac{2\pi r}{T}$ und die Centrifugalkraft $= \frac{4\pi^2 r}{T^2}$. Man sieht, dass sie dem Abstande von der Achse proportional ist;

sie muss also $= 0$ an den Endpunkten der Achse und am grössten für den von der Achse entferntesten Punkt sein.

Die Erde hat eine Rotationsbewegung, welche, wie wir soeben entwickelt haben, unter diejenigen Kräfte, welche durch die Verbindung der Punkte aufgehoben werden, eine Centrifugalkraft einführt, die nicht existiren würde, wenn lediglich eine fortschreitende Bewegung stattfände, vermöge welcher alle ihre Punkte in derselben unendlich kleinen Zeit gleiche und parallele Gerade beschreiben müssten. Diese Rotationsbewegung wird einmal in 86164 Secunden vollendet, und man hat also

$$T = 86164.$$

Am Aequator, wo die Anziehung der Erde der Centrifugalkraft gerade entgegenwirkt, hat die Schwere einen Werth, welcher demjenigen, den sie ohne die Existenz der Rotation haben würde, vermindert um die Centrifugalkraft, gleich ist. Wenn man nun von der kleinen Aenderung der Schwere an der Oberfläche der Erde absieht, so kann man sie als dem $g$ am Aequator gleich betrachten, und wenn man mit $G$ diejenige Schwere bezeichnet, welche ohne die Rotation der Erde stattfinden würde, so erhält man:

$$g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Es ist aber $2\pi r = 40000000$ Meter, und es ergiebt sich hieraus nahezu

$$\frac{4\pi^2 r}{gT^2} = \frac{1}{289} \quad \text{und} \quad g = G - \frac{g}{289}$$

oder ziemlich genau

$$g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right).$$

Die Gravitation wird also ungefähr um $\frac{1}{289}$ ihres Werthes durch die Centrifugalkraft am Aequator vermindert. Da nun 289 das Quadrat von 17 ist, und die Centrifugalkraft dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so würde bei einer 17mal grösseren Rotationsgeschwindigkeit die Schwere am Aequator Null sein.

Auf einem beliebigen Parallelkreise ist die Centrifugalkraft der Anziehung der Erde nicht gerade entgegengesetzt, aber jene ändert die Richtung dieser Anziehung oder der Schwerkraft nur sehr wenig, und die Verminderung ihrer Intensität ist fast der Projection der Centrifugalkraft auf die Normale der Kugel, oder

$\frac{4\pi^2 r' \cos\lambda}{T^2}$ gleich, wo $r'$ den Radius des Parallelkreises und $\lambda$ die geographische Breite bezeichnet. Nehmen wir die Erde als Kugel, so erhalten wir

$$r' = r \cos\lambda,$$

und die Verminderung der Schwere in diesem Breitenkreise ist dann

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} \cos^2\lambda.$$

Sie ändert sich vom Aequator zum Pole hin proportional dem Quadrate des Cosinus der Breite. Aber da die Erde nicht ganz kugelförmig ist, so findet noch eine andere, dem Quadrate des Cosinus der Breite proportionale Verminderung statt, welche zu der ersten hinzugefügt werden muss, so dass das Gewicht eines Körpers, vom Pol an den Aequator versetzt, um $\frac{1}{200}$ statt um $\frac{1}{289}$ abnimmt.

---

## Drittes Capitel.

# Beispiele für die krummlinige Bewegung eines freien Punktes.

---

### Bewegungen durch tangentiale, normale und centrale Kräfte.

39. Bewegung durch eine tangentiale Kraft. Bei jeder beliebigen Lage des beweglichen Punktes sind die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der beschleunigenden Kraft mit den Coordinatenachsen einschliesst, proportional den Grössen

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

soll nun die beschleunigende Kraft immer die Richtung einer Tangente an der Trajectorie besitzen, so müssen sich dieselben Cosinus verhalten wie die Grössen

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt},$$

und man hat daher die zwei Gleichungen

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{dz}{dt}}.$$

Durch Integration derselben ergiebt sich, wenn $a$, $b$, $c$ die Integrationsconstanten bedeuten,

$$l\left(a\frac{dx}{dt}\right) = l\left(b\frac{dy}{dt}\right) = l\left(c\frac{dz}{dt}\right),$$

oder

1) $$a\frac{dx}{dt} = b\frac{dy}{dt} = c\frac{dz}{dt},$$

Integrirt man von Neuem und bezeichnet die weiteren Integrationsconstanten mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so erhält man

2) $$ax + \alpha = by + \beta = cz + \gamma.$$

Die Bahn ist daher eine gerade Linie.

Aus den Anfangswerthen von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ bestimmen sich nach Nr. 1) die Verhältnisse $a : b : c$; die Coordinaten des Anfangspunktes der Bewegung geben einen Punkt der Geraden und folglich ist letztere durch einen Punkt und ihre Richtung völlig bestimmt. Kennt man im Uebrigen das Gesetz der Kraftänderung, so hat man es nur noch mit der Bewegung eines Punktes auf einer Geraden zu thun und kann die Aufgabe weiter nach Capitel II. behandeln.

40. Bewegung durch eine normale Kraft. Die bekannte Bedingung für die senkrechte Lage zweier Geraden gegeneinander liefert im vorliegenden Falle die Gleichung

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Sie ist identisch mit der folgenden

$$\frac{1}{2}\frac{d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}{dt} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt} = 0,$$

und lässt erkennen, dass

$$\tfrac{1}{2}v^2 = const.$$

sein muss. Die eine vorhin aufgestellte Bedingungsgleichung reicht, wie man sieht, zur vollständigen Bestimmung der Aufgabe nicht aus, vielmehr würden hierzu noch zwei Gleichungen (z. B. zwei weitere Eigenschaften der beschleunigenden Kraft) erforderlich sein; wir geben dafür keine Beispiele, weil es uns hauptsächlich nur auf den in der obigen Gleichung liegenden Satz ankommt, dass nämlich jede durch eine Normalkraft hervorgerufene Bewegung eine gleichförmige sein muss.

Der erwähnte Fall tritt unter Anderem ein, wenn sich ein Punkt auf einer festen Curve oder Fläche ohne Reibung bewegt und dabei von keiner anderen Kraft als dem Widerstande der Curve oder der Fläche sollicitirt wird. Da dieser Widerstand immer in normaler Richtung wirkt, so ist jede Bewegung dieser Art gleichförmig.

Zu dem obigen und dem in vorhergehender Nummer enthaltenen Resultate kann man übrigens noch kürzer mittelst der beiden Formeln für die tangentiale und normale Componente der beschleunigenden Kraft gelangen. Ist nämlich die Kraft eine tangentiale, so hat die normale Componente $\frac{v^2}{r}$ den Werth Null, woraus folgt, dass $r = \infty$, mithin die Trajectorie eine Gerade sein muss. Ist zweitens die Kraft normal, so verschwindet die tangentiale Componente $\frac{d^2 s}{dt^2}$, folglich ist $\frac{ds}{dt}$ oder $v$ eine Constante.

41. Allgemeine Eigenschaften der Centralbewegungen. Wenn die beschleunigende Kraft immer nach einem festen Punkte gerichtet ist, den wir der Einfachheit wegen zum Coordinatenanfang nehmen, so verhalten sich die Cosinus der Richtungswinkel der beschleunigenden Kraft wie die Coordinaten $x$, $y$, $z$ des beweglichen Punktes; man hat daher

$$1)\qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die folgenden bilden

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

und diese geben durch Integration

$$2)\quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

wo $A$, $B$, $C$ die drei Constanten der Integration bezeichnen. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x$, $y$, $z$ und addirt die Produkte, so gelangt man zu der Relation

$$3)\qquad 0 = Ax + By + Cz,$$

welche zeigt, dass sich der Punkt in einer durch das Centrum gehenden Ebene bewegt, was leicht vorauszusehen war.

Um ferner die Gleichungen 2) interpretiren zu können, denken wir uns den Radiusvector des beweglichen Punktes auf die

$xy$-Ebene projicirt und nennen $r$ die erhaltene Projection, sowie $\vartheta$ den Winkel, welchen sie mit der $x$-Achse einschliesst; diesen Winkel zählen wir im Sinne einer von der positiven Seite der $x$-Achse nach der positiven Seite der $y$-Achse fortschreitenden Drehung, welche, von einem Punkte des positiven Theiles der $z$-Achse aus gesehen, als eine Drehung von der Linken zur Rechten erscheinen würde. Die Projection $r$ beschreibt bei dieser Drehung eine ebene Fläche $W$, die wir in demselben Sinne als wachsend betrachten. Unter diesen Voraussetzungen ist allgemein

$$tan\,\vartheta = \frac{y}{x}, \text{ mithin } \frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{cos^2\vartheta} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

und

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{cos^2\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = 2\frac{dW}{dt};$$

ähnliche Beziehungen ergeben sich für die Flächen $V$ und $U$, welche von den Projectionen des Radiusvector auf die Ebenen $zx$ und $zy$ in diesen Ebenen beschrieben werden. Nach Nr. 2) ist nun

$$\frac{dU}{dt} = \frac{A}{2}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{B}{2}, \quad \frac{dW}{dt} = \frac{C}{2},$$

und hieraus ergeben sich durch Integration die Gleichungen

$$4) \qquad U = \tfrac{1}{2}At, \quad V = \tfrac{1}{2}Bt, \quad W = \tfrac{1}{2}Ct,$$

bei denen vorausgesetzt wurde, dass die Flächen $U$, $V$, $W$ mit der Zeit zugleich anfangen. Die Gleichungen 4) enthalten den Satz: die von den Projectionen des Radiusvector beschriebenen Sectoren wachsen proportional der Zeit, und da die Bewegung des Punktes in einer Ebene vor sich geht, so folgt hieraus weiter, dass der vom Radiusvector des Punktes beschriebene Sector proportional der Zeit wächst. Die Grösse dieses Sectors, welcher $S$ heissen möge, bestimmt sich aus der bekannten Formel

$$S = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2},$$

und ist

$$S = \tfrac{1}{2}t\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Wenn umgekehrt die von den Projectionen des Radiusvector beschriebenen Flächen $U$, $V$, $W$ proportional der Zeit sind, also die Gleichungen 4) gelten, so bestehen auch die von ihnen nicht verschiedenen Gleichungen 2), und aus diesen erhält man durch Differentiation die Gleichungen 1), welche ausdrücken, dass die fragliche Bewegung von einer Centralkraft herrührt.

Die hiermit bewiesenen zwei Sätze bilden zusammen das sogenannte Princip der Flächen für einen freien materiellen Punkt.

Wenn sich der materielle Punkt unter dem Einflusse zweier Kräfte bewegt, deren jede nach einem festen Centrum gerichtet ist, so bestehen die drei in Nr. 1) verzeichneten Gleichungen nicht mehr zusammen, doch bleibt die erste von ihnen immer noch richtig, sobald man die Verbindungslinie beider Centra zur $z$-Achse nimmt. Die Resultante beider Kräfte schneidet nämlich jederzeit die $z$-Achse und daher müssen die zu den Achsen der $x$ und $y$ parallelen Componenten proportional den gleichnamigen Coordinaten sein, woraus folgt:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Das Princip der Flächen gilt daher für alle auf der Verbindungslinie der beiden Centra senkrechten Ebenen.

Dasselbe würde auch weiter in dem Falle stattfinden, wo mehrere in gerader Linie liegende Centra vorhanden wären.

42. Bewegung durch eine auf dem Radiusvector senkrechte Kraft. Die genannte Bewegung kann man dadurch zur Anschauung bringen, dass man eine Gerade sich um einen ihrer Punkte nach einem beliebigen Gesetze drehen und auf ihr einen beweglichen Punkt fortrücken lässt, der keiner anderen Kraft als einem normal gegen die Gerade wirkenden Drucke unterworfen ist. Die Bedingungsgleichung für diese Annahme lautet:

$$1)\qquad x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Bezeichnen wir den Radiusvector mit $r$, so ist

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

und hieraus folgt durch Differentiation:

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt};$$

ine zweite Differentiation führt zu der Gleichung

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

welche sich zufolge der Gleichung 1) auf

$$2)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

reducirt. Andererseits hat man, wenn $\omega$ den Winkel bezeichnet, welchen der Radiusvector im Raume beschreibt,

$$ds^2=dr^2+r^2d\omega^2,$$

mithin durch Substitution dieses Werthes von $ds^2$ in die vorige Gleichung

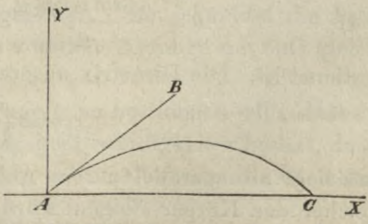
$$3)\qquad \frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Diese Beziehung gilt für jede Kegelfläche, welche der Radiusvector beschreiben kann und deren Individualität sich bestimmen lässt, wenn man das Bewegungsgesetz des Radiusvector durch eine zweite Gleichung zwischen $\omega$ und $t$ näher charakterisirt. Aus der Verbindung beider Gleichungen erhält man die einem beliebigen $t$ entsprechenden $\omega$ und $r$. Da übrigens die Grösse des Radiusvector unabhängig von der Natur der beschriebenen Kegelfläche ist, so kann man letztere auch zu einer Ebene degeneriren lassen und es bleibt die Gleichung zwischen $r$ und $\omega$ dieselbe, vorausgesetzt, dass die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen $\omega$ und $t$ ausgedrückt, nicht geändert worden ist.

## Bewegung schwerer Projectile.

43. Bewegung im leeren Raume. Ein materieller Punkt, dessen Masse $=1$ sein möge, gehe von dem Punkte $A$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $a$ in der Richtung der Geraden $AB$ aus und sei während seiner Bewegung keiner anderen Kraft als der Schwere unterworfen; der bewegliche Punkt bleibt dann, wie leicht zu sehen ist, immer in der Ebene, welche die Gerade $AB$ und die durch $A$

Fig. 22.



gelegte Vertikale enthält. Nehmen wir $A$ zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, die Achse der $y$ im entgegengesetzten Sinne der Schwere und die Achse der $x$ nach derjenigen Seite zu, nach welcher hin die Bewegung geht, so haben wir folgende Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

Die ersten Integrale derselben sind

$$\frac{dx}{dt}=c, \quad \frac{dy}{dt}=-gt+c_1,$$

wobei $c$ und $c_1$ die Integrationsconstanten bedeuten. Wir bestimmen sie durch die Bemerkung, dass die linken Seiten dieser Gleichungen die Componenten der Geschwindigkeit $v$ sind und daher für $t=0$ in die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit $a$ übergehen müssen. Es ist folglich für $t=0$ und $\angle BAX=\alpha$

$$a \cos \alpha = c, \quad a \sin \alpha = c_1,$$

mithin

$$1) \qquad \frac{dx}{dt}=a \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt}=-gt+a \sin \alpha.$$

Durch eine zweite Integration ergeben sich hieraus die Coordinaten

$$2) \qquad x=at \cos \alpha, \quad y=-\tfrac{1}{2}gt^2+at \sin \alpha,$$

wobei keine Integrationsconstanten hinzugefügt wurden, weil $x$ und $y$ gleichzeitig mit $t$ verschwinden müssen.

Die Elimination von $t$ aus den beiden Gleichungen 2) führt zur Gleichung der Bahn, nämlich

$$3) \qquad y=x \tan \alpha - \frac{g}{2a^2 \cos^2 \alpha} x^2;$$

diese Gleichung entspricht einer Parabel, deren Achse vertikal liegt und deren Scheitel durch die Coordinaten

$$4) \qquad h=\frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad k=\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

bestimmt ist. Die Directrix unserer Parabel hat zur Gleichung

$$y=\frac{a^2}{2g},$$

und liegt also parallel zur $x$-Achse in derjenigen Höhe, bis zu welcher der Körper steigen würde, wenn er mit derselben Anfangsgeschwindigkeit vertikal in die Höhe geworfen worden wäre. Für $y = 0$ giebt die Gleichung der Trajectorie die beiden Werthe

$$5)\qquad x = 0 \text{ und } x = \frac{2a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g},$$

von denen die zweite die sogenannte Wurfweite $AC$ darstellt; letztere erreicht ihr Maximum für $\alpha = 45^0$.

Lässt man den Körper unter verschiedenen Winkeln aber immer mit derselben Anfangsgeschwindigkeit $a$ von $A$ ausgehen, so erhält man verschiedene Parabeln von gemeinschaftlicher Directrix. Den geometrischen Ort aller Parabelscheitel findet man durch Elimination von $\alpha$ aus den Gleichungen 4); die resultirende Gleichung ist

$$4k^2 + h^2 - \frac{2a^2}{g} k = 0,$$

und gehört zu einer Ellipse, deren kleine Achse $= \frac{a^2}{2g}$ ist und vom Coordinatenanfange aus sich längs der Achse der $y$ erstreckt; die grosse Achse ist das Doppelte der kleinen nämlich $\frac{a^2}{g}$.

Man erhält die umhüllende Curve für alle den verschiedenen Werthen von $\alpha$ entsprechende Parabeln, wenn man $\alpha$ aus der allgemeinen Gleichung dieser Linien und ihrem ersten nach $\alpha$ genommenen Differentialquotienten eliminirt; es ergiebt sich für die Umhüllungscurve

$$y = \frac{a^2}{2g} - \frac{gx^2}{2a^2},$$

oder, wenn man mit $h$ die der Geschwindigkeit $a$ entsprechende Höhe bezeichnet,

$$x^2 = 4h(h - y).$$

Die gesuchte Curve ist also eine Parabel, welche die Achse der $y$ zur Achse hat, und deren Scheitel auf der Seite der positiven $y$ in einer Entfernung $h$ vom Anfange liegt. Sie schneidet die Achse der $x$ in zwei Punkten, welche von dem Anfange um eine gleiche Grösse $2h$ abstehen.

44. Wenn man die Neigung $\alpha$ so bestimmen will, dass der geworfene Punkt, der die Anfangsgeschwindigkeit $a$ besitzt, durch einen gegebenen Punkt $x'y'$ gehen soll, so hat man die Gleichung

$$y' = x' \tang\alpha - \frac{gx'^2}{2a^2 \cos^2\alpha}$$

nach $\alpha$ aufzulösen, und erhält:

$$tang\,\alpha = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2gy' - g^2x'^2}}{gx'}.$$

Es giebt also zwei Winkel, welche der Gleichung genügen, sobald

$$a^4 > 2a^2gy' + g^2x'^2$$

eine einzige, wenn

$$a^4 = 2a^2gy' + g^2x'^2$$

und keine, wenn

$$a^4 < 2a^2gy' + g^2x'^2.$$

Die Gleichung

$$a^4 = 2a^2gy' + g^2x'^2$$

drückt nun aus, dass der gegebene Punkt auf der oben bestimmten umhüllenden Parabel liegt; folglich ist das Problem unmöglich, wenn der gegebene Punkt sich ausserhalb dieser Parabel befindet, wie es leicht vorher zu sehen war; es giebt dagegen zwei Lösungen, wenn der Punkt im Innern, und eine, wenn er auf der Umhüllung liegt. Im letzten Falle ist es ersichtlich, dass der Punkt so geworfen werden muss, dass er eine Parabel beschreibt, welche die einhüllende in diesem Punkte berührt, und dies erkennt man leicht aus dem Werthe von $tang\,\alpha$, welcher sich auf $\frac{a^2}{gx'}$ reducirt.

45. Bewegung in der Luft. Die Bahn des in einem widerstehenden Mittel geworfenen schweren Punktes muss immer in der Vertikalebene enthalten sein, die durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt ist. Die Kräfte, welche den Punkt in jedem Augenblicke angreifen, sind die Schwere und der Widerstand des Mittels, den wir durch $\frac{gv^2}{k^2}$ darstellen wollen, und welcher längs der Tangente im entgegengesetzten Sinne mit der Richtung der Bewegung thätig ist. Die horizontale Componente dieser Kraft wirkt immer in dem Sinne der negativen $x$, ihre vertikale Componente dagegen im Sinne der Schwere oder der negativen $y$ so lange der Punkt steigt, und im entgegengesetzten, wenn er fällt.

Wir haben gesehen, dass die Beschleunigung der Bewegung der Projection eines Punktes auf irgend eine Gerade von der Kraft herrührt, die parallel mit dieser Geraden gerichtet ist. Gewöhnlich bezieht man die Projectionen dieses Punktes auf rechtwinklige

Gerade; man kann jedoch eben so gut schiefe Achsen dazu wählen, sobald es einen Vortheil gewährt, da die Bewegung des Punktes vollkommen bestimmt ist, wenn man die seiner orthogonalen Projectionen auf drei einen beliebigen körperlichen Winkel bildende Gerade kennt, oder noch einfacher auf zwei Gerade, wenn die Bahncurve eine ebene ist.

In der gegenwärtigen Aufgabe wollen wir mit Coriolis annehmen, dass in irgend einem Zeitpunkte die Kraft successive nach einer zur Achse der $x$ Parallelen und nach der Normalen der Trajectorie zerlegt werde. Diese beiden Kräfte sind allerdings nicht die ursprünglichen Componenten im gewöhnlichen Sinne; sie geben aber die Beschleunigung nach der Richtung der Normalen und der Achse der $x$, und es lassen sich daraus zwei Beweggungsgleichungen bilden. Durch sie kann man diejenigen beiden Gleichungen ersetzen, welche durch die Projection der Resultante auf die beiden Achsen erhalten werden und die beiden Componenten dieser Kraft im gewöhnlichen Sinne darstellen; jene sind aber in so fern einfacher, als in ihnen Widerstand und die Schwere nicht in derselben Gleichung vorkommen, weil die beiden von uns gewählten Richtungen senkrecht zu den Richtungen dieser beiden Kräfte sind.

Wenn man mit $v$ die Geschwindigkeit bezeichnet, und mit $\alpha$ den Winkel, welchen ihre Richtung mit der Achse der $x$ bildet, und ferner beachtet, dass

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt},$$

so giebt die parallel zur $x$-Achse genommene Kraft:

$$1) \qquad \frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt} = -\frac{g}{k^2}\, v^2 \cos \alpha.$$

Die auf die Normale projicirte Kraft, welche von dem betrachteten Punkte aus nach dem Krümmungsmittelpunkte hin wirksam anzunehmen ist, reducirt sich auf $g \cos \alpha$, und die Componente in dieder Richtung hat zum allgemeinen Ausdruck $\frac{v^2}{\varrho}$, wenn $\varrho$ den Krümmungshalbmesser bezeichnet. Wegen des negativen $d\alpha$ hat man

$$\varrho = \frac{ds}{-d\alpha},$$

mithin entsteht folgende zweite Gleichung:

2) $$g \cos \alpha = - v^2 \frac{d\alpha}{ds},$$

oder

3) $$g \cos \alpha = - v \frac{d\alpha}{dt},$$

d. i.

$$g \cos \alpha = \frac{ds\, d\alpha}{dt^2}.$$

Die Gleichungen 1) und 3) hat Cauchy angewendet. Er gelangt jedoch zu der zweiten durch eine Elimination aus den Gleichungen, welche von den parallel zu den beiden Achsen geschätzten Kräften herrühren. Die von uns befolgte Methode ist von Coriolis; sie ist directer und einfacher, und auf das oft nützliche Verfahren gegründet, die Kräfte nach variabelen Richtungen zu zerlegen, wobei man diejenigen Richtungen wählt, welche die einfachsten Rechnungen bedingen.

Die Gleichung 1) lässt sich auf folgende Form bringen:

$$\frac{d(v \cos \alpha)}{v \cos \alpha} = - \frac{g}{k^2} v\, dt = - \frac{g}{k^2} ds,$$

und giebt durch Integration

$$l(v \cos \alpha) = - \frac{gs}{k^2} + C.$$

Sind nun $a$ und $\vartheta$ die gegebenen Anfangswerthe von $v$ und $\alpha$, so erhält man:

$$l(a \cos \vartheta) = C,$$

und folglich

$$\frac{v \cos \alpha}{a \cos \vartheta} = - \frac{gs}{k^2},$$

oder

$$v \cos \alpha = a \cos \vartheta \,.\, e^{-\frac{gs}{k^2}} = \frac{dx}{dt}.$$

Nehmen wir den Werth von $v$ aus dieser Gleichung und setzen denselben in die Gleichung 2), so giebt letztere

4) $$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{g}{a^2 \cos^2 \vartheta} e^{\frac{2gs}{k^2}}.$$

Diese Gleichung enthält nur noch $\alpha$ und $s$ und ist also eine Differentialgleichung für die Bahncurve. Setzt man, um sie zu integriren,

$$tang\,\alpha = p,$$

so wird sie zu

$$5)\qquad dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{a^2 \cos^2\vartheta} e^{\frac{2gs}{k^2}}\,ds,$$

und man erhält hieraus:

$$6)\qquad p\sqrt{1+p^2} + l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = -\frac{k^2}{a^2 \cos^2\vartheta} e^{\frac{2gs}{k^2}} + \gamma,$$

wo $\gamma$ eine willkürliche Constante ist, die man dadurch bestimmen kann, dass für $s = 0$, $p = tang\,\vartheta$ wird. Dies giebt:

$$\gamma = tang\,\vartheta\sqrt{1+tang^2\vartheta} + l\left(tang\,\vartheta + \sqrt{1+tang^2\vartheta}\right) + \frac{k^2}{a^2\cos^2\vartheta};$$

der Einfachheit wegen wollen wir jedoch die Bezeichnung $\gamma$ beibehalten.

Man findet jetzt $s$, wenn $p$ gegeben ist; die hierzu dienende Gleichung ist aber zur Construction der Curve wenig bequem; wir wollen daher $x$ und $y$ statt $s$ einführen. Nun hat man bekanntlich

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}}$$

und die Gleichung 5) giebt mithin

$$dx = -\frac{a^2\cos^2\vartheta}{g} e^{-\frac{2gs}{k^2}}\,dp.$$

Eliminirt man hieraus die Exponentialgrösse mittelst der Gleichung 6), so kommt

$$7)\qquad dx = \frac{k^2}{g}\cdot\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) - \gamma},$$

und da $dy = p\,dx$, so entsteht:

$$8)\qquad dy = \frac{k^2}{g}\cdot\frac{p\,dp}{p\sqrt{1+p^2} + l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) - \gamma}.$$

Durch näherungsweise Integration dieser beiden Gleichungen erhält man $x$ und $y$ für jeden Werth von $p$, und damit so viele Punkte der Trajectorie als man eben will.

Wünscht man zu erfahren, in welchem Augenblicke der Körper durch irgend einen dieser Punkte geht, so muss man $t$ als Function von $p$ kennen. Nun giebt die Gleichung 3)

$$dt = \sqrt{-\frac{ds\, d\alpha}{g \cos \alpha}},$$

oder, wenn man den Werth für $ds$ aus der Gleichung 4) herbeizieht und beachtet, dass $dt$ und $d\alpha$ entgegengesetzte Zeichen haben,

$$dt = -\frac{a \cos \vartheta}{g} e^{-\frac{gs}{k^2}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{a \cos \vartheta}{g} e^{-\frac{gs}{k^2}} dp.$$

Eliminiren wir endlich noch die Exponentialgrösse mit Hilfe der Gleichung 6), so kommt

$$9)\quad dt = -\frac{k}{g} \frac{dp}{\left[-p\sqrt{1+p^2} - l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) + \gamma\right]^{\frac{1}{2}}},$$

Das Problem ist jetzt darauf zurückgeführt, gegebene Functionen einer einzigen Variabelen näherungsweise zu integriren.

Die Geschwindigkeit des Punktes lässt sich genau als Function von $p$ ausdrücken. Wenn man nämlich die Werthe von $dx^2$ und $dy^2$ addirt und diese Summe durch den Werth von $dt^2$ dividirt, so erhält man

$$10)\qquad v^2 = \frac{k^2(1+p^2)}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}.$$

Den Scheitel der Curve erhält man durch Substitution von $p=0$; die Curve wird aber nicht symmetrisch in Bezug auf die durch diesen Punkt gelegte Verticale. Die Wurfweite ergiebt sich aus der Annahme $y=0$; sie ist geringer als in dem früheren Falle, und ihr Maximum in Beziehung auf $\vartheta$ entspricht einem Winkel unter $45^0$.

46. Der niedersteigende Zweig der Bahncurve ist unendlich und hat eine verticale Asymptote, wie wir gleich zeigen wollen.

Erstens kann man aus der Gleichung 9) schliessen, dass $p$ unendlich wächst. Denn der Nenner ihres zweiten Theiles ist aus positiven Gliedern zusammengesetzt, sobald $p$ negativ ist; er wird also für keinen Werth von $p$ zu Null, und das Integral könnte nicht unendlich wachsen, wenn $p$ begrenzt wäre; daraus würde nämlich hervorgehen, dass die Zeit eine Grenze hätte, was absurd ist. Also nähert sich die Tangente unendlich der vertikalen Richtung.

Wenn man jetzt $p = -q$ setzt, um das Zeichen klarer herauszustellen, und annimmt, dass $q$ schon sehr gross geworden sei, so lässt sich $\sqrt{1+q^2}$ durch $q$ ersetzen, und man kann $\gamma$ nebst $lp$ gegen $q$ vernachlässigen. Dies giebt:

$$dx = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dq}{q^2}, \quad dy = -\frac{k^2}{g} \cdot \frac{dq}{q};$$

integriren wir von einem Punkte $x_1\, y_1$ an, so kommt

$$x - x_1 = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q}\right), \quad y_1 - y = \frac{k^2}{g}\, l\, \frac{q}{q_1},$$

wo $q_1$ dem Werthe von $q$ im Punkte $x_1\, y_1$ entspricht.

Die zweite dieser Gleichungen zeigt, dass der negative Werth von $y$ ohne Grenzen wächst und folglich der Punkt beständig fällt. Die erste lehrt, dass $x$ eine Grenze $x_1 + \frac{k^2}{g q_1}$ und folglich die Curve diejenige Vertikale zur Asymptote hat, welche diesem Werthe von $x$ entspricht. Da jedoch gewisse Glieder vernachlässigt wurden, so ist diese Grenze nicht genau die Abscisse der Asymptote, und um dieselbe zu erhalten, müsste man den Werth von $dx$ bis $p = \infty$ integriren.

Was den Endwerth der Geschwindigkeit betrifft, so giebt die Gleichung 10), in welcher nichts vernachlässigt ist, $k^2$ zur Grenze des zweiten Theils, wenn $p$ wächst. Die Geschwindigkeit des Punktes nähert sich also unendlich derjenigen, welche den Widerstand gleich seinem Gewichte machen würde, und die Bewegung nähert sich mehr und mehr der Gleichförmigkeit.

47. Wenn der Wurfwinkel $\vartheta$ sehr klein ist, so erhebt sich der Körper nur zu einer sehr geringen Höhe über die Achse der $x$, und da die Tangente dann sehr geneigt gegen diese Achse sein wird, so kann man $p^2$ vernachlässigen; dies giebt näherungsweis

$$ds = dx \text{ und } s = x.$$

Die Gleichung 5) reducirt sich jetzt auf

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{a^2 \cos^2 \vartheta} e^{\frac{2gx}{k^2}},$$

woraus

$$p = -\frac{k^2}{2\, a^2 \cos^2 \vartheta} e^{\frac{2gx}{k^2}} + C,$$

und da man gleichzeitig $x = 0$ und $p = tang\,\vartheta$ hat, so folgt

$$C = tang\,\vartheta + \frac{k^2}{2\,a^2\,cos^2\,\vartheta},$$

mithin

$$p = \frac{dy}{dx} = tang\,\vartheta - \frac{k^2}{2\,a^2\,cos^2\,\vartheta}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right).$$

Integrirt man und beachtet, dass zugleich $x = 0$, $y = 0$, so kommt

$$y = x\left(tang\,\vartheta + \frac{k^2}{2\,a^2\,cos^2\,\vartheta}\right) - \frac{k^4}{4g\,a^2\,cos^2\,\vartheta}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right).$$

Die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = a\,cos\,\vartheta\;e^{-\frac{gs}{k^2}}$$

giebt, wenn man $x$ für $s$ setzt,

$$dt = \frac{e^{\frac{gx}{k^2}}\,dx}{a\,cos\,\vartheta},\text{ woraus } t = \frac{k^2}{ga\,cos\,\vartheta}\left(e^{\frac{gx}{k^2}} - 1\right).$$

Kennt man Punkte, durch welche der geworfene Körper geht, so hat man auch Gleichungen, die zur Bestimmung der Constanten dienen können.

## Die Gleichung der lebendigen Kraft.

48. Bezeichnen $X$, $Y$, $Z$ die rechtwinkligen Componenten der beschleunigenden Kraft, welche auf einen mit der Masse 1 versehenen materiellen Punkt wirkt, so sind die allgemeinen Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Wir multipliciren dieselben der Reihe nach mit $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$ und addiren die Produkte; in der entstehenden Gleichung

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 2\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)$$

ist die linke Seite ein vollständiger Differentialquotient, nämlich

$$= \frac{d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}{dt} = \frac{d(v^2)}{dt},$$

und man hat daher

$$1) \qquad \frac{d(v^2)}{dt} = 2\,\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{dt}.$$

Es kann sich nun treffen, dass die Componenten $X$, $Y$, $Z$ die partiellen Differentialquotienten einer Funktion $F(x, y, z)$, der sogenannten Kräftefunktion, sind, nämlich

$$X = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z};$$

dann bildet auch der Ausdruck

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

$$= \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\,dz$$

ein vollständiges Differential

$$= dF(x, y, z),$$

welches so genommen ist, als wenn $x$, $y$, $z$ drei von einander unabhängige Variabele wären. Die Gleichung 1) wird jetzt einfacher

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2\,\frac{dF(x, y, z)}{dt} \quad \text{oder} \quad d(v^2) = 2dF(x, y, z)$$

und gestattet unmittelbar die Integration, woraus folgt

$$v^2 = 2F(x, y, z) + const.$$

Die Constante bestimmt sich durch die Voraussetzung, dass der bewegliche Punkt zu der Zeit, wo er sich an einer bekannten Stelle $abc$ befand, eine bekannte Geschwindigkeit $k$ besass; man hat daher

$$k^2 = 2F(a, b, c) + const.$$

und durch Elimination der Constanten

$$2) \qquad v^2 - k^2 = 2F(x, y, z) - 2F(a, b, c).$$

Diese Relation wird (aus später anzugebenden Gründen) die Gleichung der lebendigen Kraft für einen freien materiellen Punkt genannt; sie enthält einen merkwürdigen Satz, den man auf folgende Weise aussprechen kann.

Wenn die Componenten $X$, $Y$, $Z$ der beschleunigenden Kraft der Art sind, dass die Summe $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differential einer Funktion von $x$, $y$, $z$ ausmacht, so ist die Zunahme, welche das Quadrat der Geschwindigkeit bei dem Uebergange des Punktes von irgend einer Stelle zur anderen erleidet, einzig und allein von den Coordinaten beider Orte abhängig, und es ist daher gleichgültig, auf welchem Wege und in welcher Zeit der Punkt von der einen zur anderen Stelle gelangt.

Hieran knüpft sich noch eine bemerkenswerthe Consequenz, sobald der erste Punkt $abc$ als Punkt einer Fläche angesehen wird, deren Gleichung $F(x,y,z) = C$ ist, ebenso der zweite Punkt $xyz$ als zur Fläche $F(x,y,z) = C_1$ gehörig betrachtet wird. Man hat dann folgenden Satz: „Wenn der bewegliche Punkt von einer gegebenen Stelle der Fläche $F(x,y,z) = C$ mit einer gegebenen Geschwindigkeit $k$ in beliebiger Richtung ausgeht, so lässt sich die Geschwindigkeit $v$, womit er eine Stelle der Fläche $F(x,y,z) = C_1$ erreicht, aus den gegebenen Daten allein, unabhängig von der Zeit und von dem beschriebenen Wege, bestimmen; auch kommt dabei nichts darauf an, ob der bewegliche Punkt die zweite Fläche ein- oder mehrmal durchdringt." Aus der Gleichung dieser Flächen $F(x,y,z) = C$ folgt die Differentialgleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

und diese zeigt, dass die Richtung der Kraft, deren Componenten $X$, $Y$, $Z$ sind, senkrecht auf der durch den Punkt $xyz$ gehenden Fläche steht; daher würde, wenn man eine solche Fläche als widerstandsfähig betrachtete, jeder ohne Anfangsgeschwindigkeit auf dieselbe versetzte bewegliche Punkt in Ruhe bleiben. Aus diesem Grunde hat man jene Flächen Niveauflächen genannt.

Wenn die Funktion $F(x,y,z)$ sich für keine reellen und endlichen Werthe von $x$, $y$, $z$ auf $\frac{0}{0}$ reduciren kann, so haben zwei Niveauflächen offenbar keinen gemeinschaftlichen Punkt. Im entgegengesetzten Falle wird, wie man aus einer Abhandlung von Bertrand ersehen kann, der materielle Punkt nicht immer dieselbe Geschwindigkeit haben, wenn er auf eine und dieselbe Niveaufläche zurückkehrt; es ist vielmehr dazu erforderlich, dass er eine gerade Anzahl Mal jede der passirten Niveauflächen durchdringt, bevor er auf die zurückkehrt, von welcher er ausgegangen ist.

49. Wenn die Resultante der den Punkt angreifenden Kräfte beständig normal gegen die Trajectorie ist, so hat man

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Die Funktion $F$ reducirt sich dann auf eine Constante und es wird

$$v^2 - k^2 = 0.$$

Die Geschwindigkeit eines Punktes ist also constant, wenn die auf ihn wirkende Kraft in jedem Augenblicke normal zur Richtung seiner Bewegung steht. Daraus folgt, dass ein Punkt, welcher sich ohne Reibung auf einer festen Curve oder Oberfläche bewegt und von keiner äusseren Kraft angegriffen wird, beständig dieselbe Geschwindigkeit beibehält.

Im Fall die resultirende Kraft nur an einigen Stellen der Bahn senkrecht zur letzteren ist, so gilt für diese Punkte die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \text{ oder } d(v^2) = 0;$$

die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes erreicht also an jeder solchen Stelle entweder einen Minimal- oder einen Maximalwerth.

50. Wenn ausser den auf der Bahncurve normal stehenden Kräften noch andere nach irgend welchen Richtungen wirken, so werden die ersten immer aus dem zweiten Theile der Gleichung 1) verschwinden, und wenn die anderen so beschaffen sind, dass ihre totalen Componenten $X$, $Y$, $Z$ die partiellen Differentialquotienten einer Funktion der als unabhängig betrachteten Variabelen $x$, $y$, $z$ ausmachen, so bleibt die Gleichung 2) ungestört. Das Princip der lebendigen Kraft gilt demnach für einen Punkt, welcher gezwungen ist, sich auf einer festen Curve oder Oberfläche zu bewegen, und ausserdem durch solche Kräfte angegriffen wird, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ ein exactes Differential in Beziehung auf $x$, $y$, $z$ bildet. Das Letztere kann niemals stattfinden, wenn Reibung oder der Widerstand eines Mittels vorhanden ist, weil diese Kräfte keine gegebenen Funktionen von $x$, $y$, $z$ sind.

51. Der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ ist immer ein totales Differential, wenn die auf den Punkt wirkenden Kräfte gegen feste Mittelpunkte gerichtet sind, und ihre Intensitäten nur durch seinen Abstand von diesen verschiedenen festen Punkten bedingt werden.

Bezeichnen nämlich $a$, $b$, $c$ die constanten Coordinaten irgend eines dieser Mittelpunkte, $x$, $y$, $z$ die variabelen Coordinaten des beweglichen Punktes, $r$ ihren gegenseitigen Abstand, und $R$ eine Funktion von $r$, welche das Gesetz der Kraft ausdrückt, die auf den gegebenen Punkt in derjenigen Geraden wirkt, welche ihn mit dem betrachteten Centrum verbindet, so sind die Componenten dieser Kraft:

$$\pm R\frac{a-x}{r},\quad \pm R\frac{b-y}{r},\quad \pm R\frac{c-z}{r},$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen sind, je nachdem die Kraft anziehend oder abstossend wirkt. Die Glieder, welche in dem Ausdrucke $Xdx + Ydy + Zdz$ von dieser Kraft herrühren, sind

$$\pm R\frac{(a-x)\,dx + (b-y)\,dy + (c-z)\,dz}{r}.$$

Nun hat man

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = r^2,$$

woraus

$$(a-x)\,dx + (b-y)\,dy + (c-z)\,dz = -r\,dr,$$

was den vorhergehenden Ausdruck auf $\mp R dr$ reducirt. Vollführt man dieselbe Rechnung in Beziehung auf die Kräfte $R'$, $R''$ etc., welche den andern festen Mittelpunkten entsprechen, so ergiebt sich:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \mp R dr \mp R' dr' \mp R'' dr'' \mp \ldots,$$

was in Beziehung auf die unabhängigen Variabelen $x$, $y$, $z$ ein exactes Differential ausmacht, weil $R$ eine Funktion von $r$, $R'$ von $r'$ etc. ist. Man erhält also:

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - k^2) = \mp \int_{r_0}^{r} R dr \mp \int_{r'_0}^{r'} R' dr' \mp \text{ etc.},$$

wo $r_0$, $r'_0$ etc. die der Anfangslage entsprechenden Werthe von $r$, $r'$ etc. sind. Daraus geht hervor, dass der Zuwachs an lebendiger Kraft, oder des Quadrats der Geschwindigkeit, gleich der Summe derjenigen Zunahmen ist, die stattfinden würden, wenn jede der Kräfte allein auf den bewegten Punkt wirkte, während er von der einen Lage zu der andern übergeht.

52. Wenn der Punkt von einer Kraft getrieben wird, die beständig senkrecht auf einer festen Ebene und blos von dem Abstande von dieser Ebene abhängig ist, so müssen dieselben Folgerungen stattfinden, weil dies, genau betrachtet, nichts Anderes ist, als der besondere Fall, wo einer der Mittelpunkte in eine unendliche Entfernung von bestimmter Richtung hinausrückt. Es dürfte jedoch gut sein, die betreffende Rechnung auch direct anzustellen.

Die Gleichung irgend einer Ebene sei

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

in welcher $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel bezeichnen, welche das durch den Anfang gelegte auf die Ebene gefällte Perpendikel mit den Achsen bildet, und $p$ die Länge dieses Perpendikels darstellt. Ist nun $u$ die von dem Punkte $(x, y, z)$ auf dieselbe Ebene herabgelassene Senkrechte, so hat man

$$u = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p.$$

Die Componenten der Kraft $U$, welche auf diesen Punkt wirkt, sind $\mp U \cos\alpha$, $\mp U \cos\beta$, $\mp U \cos\gamma$. Die Glieder, welche von der Kraft $U$ in den Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ eingeführt werden, sind daher:

$$\mp U (dx \cos\alpha + dy \cos\beta + dz \cos\gamma) = \mp U du$$

und bilden immer ein exactes Differential einer Funktion von $x$, $y$, $z$, weil $U$ eine Funktion von $u$ allein ist.

Wäre die Kraft immer gegen die Ebene gerichtet, so würde sie ihren Sinn ändern, wenn der Punkt auf die andere Seite dieser Ebene gelangt; die Cosinus von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ wechseln dann ihre Zeichen, und man müsste in der Rechnung hierauf Rücksicht nehmen. Noch ist zu beachten, dass der Werth von $u$ positiv ist, sobald der Punkt nicht auf derselben Seite mit dem Coordinatenanfange liegt, negativ im entgegengesetzten Falle, so dass die Zunahmen von $u$ in demselben Sinne immer positiv gezählt werden.

Wenn es sich um die Schwerkraft handelt und die durchlaufenen Räume sehr klein im Vergleich mit dem Erdhalbmesser sind, so kann diese Kraft als senkrecht auf der Horizontalebene angesehen werden; sie ist aber der Grösse und Richtung nach constant, auf welcher Seite dieser Ebene der Punkt auch liegen mag. Nimmt man nun die Horizontalebene zur Ebene der $x$ und $y$, und die Achse der $z$ im entgegengesetzten Sinne mit der Schwere, so hat man

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Die Gleichung 1) wird dann

$$\frac{d(v^2)}{dt} = -2g\frac{dz}{dt},$$

woraus

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z),$$

wenn $h$ die Höhe der $z$ bezeichnet, welche der Geschwindigkeit $k$ entspricht. Die Oberflächen, deren allgemeine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ sein soll, sind hier horizontale Ebenen, und man sieht also, dass ein materieller Punkt, welcher frei ist oder gezwungen wird, sich auf einer festen Curve oder Oberfläche zu bewegen, und welcher von irgend einem Punkte einer gegebenen Horizontalebene mit einer gewissen Geschwindigkeit ausgeht, zu irgend einer anderen Horizontalebene mit einer Geschwindigkeit gelangen wird, welche durchaus nicht von der Natur der Curve abhängt, worauf er dorthin gekommen ist, sondern einzig und allein von der Entfernung seines Ausgangspunktes von dieser Ebene.

---

## Viertes Capitel.

# Bewegung eines Punktes auf einer festen Curve.

---

### Allgemeine Sätze.

53. Wir wollen die Bewegung eines Punktes auf einer festen Curve betrachten, deren Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

sind. $N$ bezeichne die unbekannte Normalkraft, welche durch den Widerstand der Curve auf die Einheit der Masse ausgeübt wird, und $\lambda$, $\mu$, $\nu$ seien die Winkel, welche sie mit den Achsen bildet. Da die Curve keine andere Wirkung auf den bewegten Punkt hat, als die genannte Normalkraft hervorzubringen, so kann man von ihr absehen, wenn man diese Kraft in die Rechnung einführt. Vereinigt man letztere mit den gegebenen Kräften, so darf der Punkt als frei betrachtet werden, und die allgemeinen Gleichungen seiner Bewegung sind, wenn man mit $X$, $Y$, $Z$ die Componenten der beschleunigenden Kraft bezeichnet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu.$$

Die durch die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bestimmte Richtung ist senkrecht auf der Tangente, mithin

$$dx\cos\lambda + dy\cos\mu + dz\cos\nu = 0,$$

und ferner

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Man erhält also sieben Gleichungen zwischen den acht Grössen $x$, $y$, $z$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $N$, $t$, und es wird immer möglich sein, die sieben ersten als Funktionen von $t$ darzustellen, womit die Aufgabe gelöst ist.

Gilt die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi\,(x, y, z)$$

so erhält man aus den vorhergehenden

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = d\varphi\,(x, y, z)$$

und durch Integration

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2\varphi\,(x, y, z) + C = v^2.$$

Die Constante $C$ bestimmt sich hierbei durch den Anfangswerth der Geschwindigkeit $v$. Die Gleichungen der Curve nach $x$ und $y$ aufgelöst geben

$$x = f(z), \quad y = f_1(z).$$

Hiermit wird die vorhergehende Gleichung zu:

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left[1 + [f'(z)]^2 + [f'_1(z)]^2\right] = 2\varphi\,[f(z), f_1(z), z] + C$$

und hieraus:

$$dt = dz\,\psi\,(z),$$

wo $\psi\,(z)$ eine bekannte Function von $z$ bezeichnet. Man erhält dann:

$$t = \int dz\,\psi\,(z) + C',$$

wo $C'$ durch den Anfangswerth von $z$ bestimmt ist. Man lernt auf diese Weise $z$ als Function von $t$, und folglich auch $x$ und $y$ aus den Gleichungen der Curve kennen. In dem Falle, wo $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, kann also das Problem immer auf eine Quadratur zurückgeführt werden.

54. Druck auf die Curve. Da der bewegliche Punkt als frei gelten kann, wenn ausser der beschleunigenden Kraft noch der Widerstand $N$ in Rechnung gebracht wird, so haben wir es nur mit zwei Kräften zu thun, wobei wir die beschleunigende Kraft in ihre tangentiale Componente und in ihre normale Componente $Q$ zerlegen wollen. Die Centripetalkraft $\frac{v^2}{r}$ muss in diesem Falle die Resultante von $Q$ und $N$ sein, d. i., weil die Kräfte $Q$ und $N$ längs derselben Geraden wirken,

$$N + Q = \frac{v^2}{r}.$$

Daraus folgt

$$-N = -\frac{v^2}{r} + Q;$$

hier ist $-N$ das Entgegengesetzte des von der Curve ausgeübten Widerstandes, d. h. der Druck, den die Curve erleidet; $-\frac{v^2}{r}$ das Entgegengesetzte der Centripetalkraft, d. h. die Centrifugalkraft; der Druck auf die Curve ist demnach die Resultante aus der Centrifugalkraft und der normalen Componente der auf den beweglichen Punkt wirkenden Kraft. Für $Q = 0$ wird der Druck gleich der Centrifugalkraft.

Die vorige Erörterung bezieht sich zunächst nur auf den Fall, wo der bewegliche Punkt die Masse 1 besitzt, kann aber auf jeden anderen Fall ausgedehnt werden, wenn man beide Seiten der obigen Gleichungen mit der Masse $m$ multiplicirt.

### Gezwungene Bewegung eines schweren Punktes.

55. Als specielle Anwendung der allgemeinen Formeln des vorigen Abschnittes möge die Bewegung eines Punktes dienen, der nur der Einwirkung der Schwere unterworfen und gezwungen ist auf einer durch die Gleichungen

$$x = F(z), \quad y = f(z)$$

bestimmten festen Curve zu bleiben; die Achse der $z$ sei vertical im entgegengesetzten Sinne der Schwere. Unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnung haben wir jetzt die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + N\cos\nu.$$

Multiplicirt man die erste mit $2dx$, die zweite mit $2dy$, die dritte mit $2dz$, und addirt, so kommt:

$$d(v^2) = -2g\,dz, \quad \text{woraus} \quad v^2 = 2gz + C.$$

Sei $k$ die der Höhe $h$ entsprechende Geschwindigkeit des Punktes, so erhält man hieraus:

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z).$$

Dies ist die Gleichung der lebendigen Kräfte, welche wir schon bewiesen haben und unmittelbar hätten aufstellen können.

Wenn man für $v^2$ seinen Werth

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

oder

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left\{1 + [F'(z)]^2 + [f'(z)]^2\right\}$$

setzt, so ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung nach $t$ und unter der Annahme, dass der Punkt fällt, mithin $\frac{dz}{dt}$ negativ ist,

$$dt = -\frac{dz\sqrt{1 + [F'(z)]^2 + [f'(z)]^2}}{\sqrt{k^2 + 2gh - 2gz}}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich $t$ als Function von $z$ bestimmen; kann man sie nach $z$ auflösen, so erhält man für jedes $t$ den zugehörigen Werth von $z$, sowie nachher $x$ und $y$. Das Problem ist dann vollständig gelöst. Aber selbst in dem Falle, wo man den vorstehenden Ausdruck nicht integriren kann, kennt man die Geschwindigkeit in jedem Punkte, folglich die Centrifugalkraft und damit den auf die Curve ausgeübten Druck, welcher die Resultante aus der Centrifugalkraft und der normalen Componente der Schwere ist.

56. Wir wollen diese Rechnungen in dem Falle durchführen, wo die gegebene Curve ein verticaler Kreis ist. Legen wir die Achse der $x$ in dieser Ebene so, dass sie den Kreis in seinem tiefsten Punkte berührt, so sind die Gleichungen dieser Curve:

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 - 2az = 0,$$

wo $a$ der Radius ist. Man leitet hieraus ab:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{a^2}{2az - z^2} \cdot \frac{dz^2}{dt^2},$$

und die Gleichung

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z)$$

wird zu:

$$\frac{a^2}{2az - z^2} \cdot \frac{dz^2}{dt^2} = k^2 + 2gh - 2gz,$$

woraus folgt

$$dt = \frac{\pm\, a\,dz}{\sqrt{2az - z^2}\,\sqrt{k^2 + 2gh - 2gz}}.$$

Man nimmt das negative Zeichen, sobald der Punkt fällt, das positive, wenn er steigt.

Das Quadrat der Geschwindigkeit ist

$$k^2 + 2gh - 2gz,$$

für $z = 0$, d. h. im tiefsten Punkte des Kreises erhält es seinen Maximalwerth

$$k^2 + 2gh.$$

Die Geschwindigkeit wird Null, wenn

$$k^2 + 2gh - 2gz = 0, \quad \text{oder } z = h + \frac{k^2}{2g},$$

vorausgesetzt, dass

$$h + \frac{k^2}{2g} < 2a,$$

da die Grösse von $z$ den Kreisdurchmesser nicht übersteigen kann. Bei dieser Voraussetzung wird der Punkt, sobald er diese Höhe erreicht hat, zurückfallen. Seine Geschwindigkeit muss auf der andern Seite für denselben Werth von $z$ verschwinden, und diese schwingende Bewegung wird unaufhörlich fortdauern. Wenn andererseits

$$h + \frac{k^2}{2g} > 2a$$

ist, so hat die Geschwindigkeit im höchsten Punkte des Kreises ihr Minimum; sie wird niemals zu Null und die Bewegung geht beständig in derselben Richtung fort.

Ist endlich

$$h + \frac{k^2}{2g} = 2a,$$

so wird die Geschwindigkeit im höchsten Punkte zu Null, und der Punkt würde dort im Gleichgewicht bleiben, wenn er dahin gelangen könnte; wir werden aber sehen, dass dies eine Grenzlage ist, welcher er sich zu nähern sucht, ohne sie je erreichen zu können. Dieser Fall ist übrigens der einzige, wo die Integration sich in endlicher Form ausführen lässt; man hat dann:

$$dt = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{(2a - z)\sqrt{z}}.$$

Durch Anwendung der Zerlegung

$$\frac{1}{2a - z} = \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left( \frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}} \right)$$

erhält man für die niedersteigende Bewegung

$$dt = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a}+\sqrt{z}} + \frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}}\right),$$

woraus

$$t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\; l\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}}\right) + C.$$

Die Constante bestimmt sich durch die Bedingung, dass gleichzeitig $t=0$ und $z=h$ ist; es wird daher

$$t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\; l\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\; l\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}\right).$$

Bei der Ankunft des Körpers im tiefsten Punkte hat man

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\; l\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}\right).$$

Da beim Ausgange von diesem Augenblick $\frac{dz}{dt}$ positiv ist, so muss man das Zeichen des ersten Werthes für $t$ ändern, was giebt

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\; l\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\; l\left(\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}\right).$$

Wenn $t$ zunimmt, wächst auch $z$ nothwendig, aber es ist immer kleiner als $2a$, und man würde $t=\infty$ finden, wenn man $z=2a$ nehmen wollte. Der Punkt gelangt also niemals an die höchste Stelle des Kreises, nähert sich ihr aber ins Unendliche.

57. Wenn der Punkt von der einen Seite der tiefsten Stelle des Kreises zur andern hin und her schwingt, so können wir die Anfangsgeschwindigkeit $=0$ setzen, denn dies kommt darauf zurück, als Ausgangspunkt der Bewegung einen höher liegenden Punkt des Kreises zu nehmen. Man hat dann während der niedergehenden Bewegung:

$$dt = -\frac{a}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{2az-z^2}\sqrt{h-z}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dz}{\sqrt{hz-z^2}}\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und da $\frac{z}{2a}$ kleiner als die Einheit ist, so kann man den letzten Factor folgendermassen entwickeln:

$$\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{2a}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2a}\right)^2+\ldots.$$
$$+\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\left(\frac{z}{2a}\right)^n+\text{etc.}$$

Nach einer bekannten Formel der Integralrechnung ist weiter

$$\int\frac{z^n dz}{\sqrt{hz-z^2}}=-\frac{z^{n-1}\sqrt{hz-z^2}}{2}+\frac{(2n-1)h}{2n}\int\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{hz-z^2}}$$

und folglich kann man zwischen irgend welchen Grenzen beliebig viele Glieder der Reihe für $dt$ integriren.

Wir wollen uns darauf beschränken, die Zeit zu berechnen, welche der Körper zur Erreichung des tiefsten Punktes gebraucht, und welche dieselbe ist, deren er bedarf, um wieder zu der Höhe $h$ emporzusteigen, wo die Schwingung endet; denn diese Intervalle werden durch dasselbe Integral zwischen denselben Grenzen 0 und $h$ ausgedrückt.

Die erwähnte Reductionsformel giebt zwischen den Grenzen $z=0$ und $z=h$

$$\int_0^h\frac{z^n dz}{\sqrt{hz-z^2}}=\frac{(2n-1)h}{2n}\int_0^h\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{hz-z^2}},$$

und wenn man allgemein $\int_0^h\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{hz-z^2}}$ mit $A_n$ bezeichnet, so ist

$$A_n=\frac{(2n-1)h}{2n}A_{n-1}.$$

Beachtet man, dass $A_0=\pi$, so führt die vorige Formel zur folgenden:

$$A_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}h^n\pi.$$

Für die absteigende Halbschwingung sind die Integrationsgrenzen zu vertauschen, man muss also das Zeichen des zweiten Gliedes ändern, wenn man von der Formel Gebrauch machen will. Bezeichnet $T$ die Dauer der ganzen Schwingung, so ist vorläufig

$$T=\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\begin{array}{l}A_0+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)A_1+\ldots\\ \quad+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^n A_n+\ldots\end{array}\right\}$$

oder

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \dots \\ + \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots . 2n}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^n + \dots \end{array} \right\}$$

Diese Reihe convergirt gut bei sehr kleinem $\frac{h}{2a}$ und man kann den Fehler leicht berechnen, welcher durch das Abbrechen bei irgend einem Gliede entsteht. Enthält der Centriwinkel $2\alpha$, der die Amplitude der Schwingungen misst, nur eine kleine Zahl von Graden, so darf man sich meistens auf das erste Glied beschränken und hat

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}};$$

diese Dauer ist unabhängig von der Höhe $h$. Nimmt man die beiden ersten Glieder, so wird die Dauer von $h$ abhängig und zwar

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{h}{8a}\right).$$

Das Verhältniss $\frac{h}{a}$ ist der *sinus versus* des Winkels $\alpha$, also hat man

$$\frac{h}{a} = 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Dieser letzte Werth von $T$ ist nur um eine Grösse 4ter Ordnung in Bezug auf den Winkel $\alpha$ fehlerhaft, der vorhergehende um eine Grösse zweiter Ordnung.

58. Das Mittel, um diese Bewegung zu realisiren, besteht darin, dass man ein Gewicht an einem sehr feinen Faden von unveränderlicher Länge aufhängt, von dem das eine Ende fest ist. Wenn dieser unausdehnbare Faden jeder Masse beraubt und der schwingende Körper auf einen Punkt reducirt wäre, so würde man ein sogenanntes einfaches Pendel haben. Es ist aber vortheilhafter, einen körperlichen Apparat statt eines Fadens anzuwenden; die Bewegung dieses zusammengesetzten Pendels kann aber nicht mehr nach der vorhergehenden Theorie berechnet werden. Im letzten Falle nennt man Pendellänge die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungsdauer mit der des betreffenden zusammengesetzten Pendels übereinstimmen würde.

Mittelst einer Formel, welche wir später beweisen werden, kann man diese Länge aus der Gestalt des schwingenden Körpers bestimmen, und die Schwingungsdauer wird somit durch die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

gegeben, in welcher $a$ die bekannte Länge dieses Pendels bezeichnet. Heisst $n$ die Anzahl der Schwingungen, welche in einer Zeit $\vartheta$ ausgeführt werden, so ist

$$\vartheta = n\,T, \text{ woraus } \vartheta = n\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ und } g = \frac{\pi^2 n^2 a}{\vartheta^2},$$

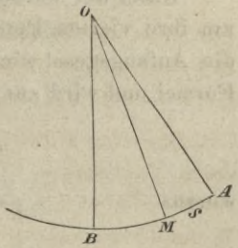
eine Gleichung, welche den Werth der Schwere erkennen lässt. Nach den auf dem Observatorium zu Paris gemachten Beobachtungen hat man gefunden

$$g = 9{,}80896.$$

Aehnliche Versuche, an verschiedenen Orten der Erde angestellt, lehren das Gesetz kennen, nach welchem die Schwere variirt.

59. Man kann die Bewegung des Pendels auch mittelst der Formel bestimmen, welche den Ausdruck der Tangentialkraft giebt.

Fig. 23.




Sei $OB$ (Fig. 23) der verticale Radius des Kreises, auf welchem sich der schwere Punkt bewegt, $A$ die Lage, von welcher er mit der Geschwindigkeit $k$ ausgeht, $M$ seine Lage nach der Zeit $t$, und

$$OB = L,\; BOA = \alpha,\; BOM = \vartheta,\; AM = s.$$

Die Tangentialcomponente der beschleunigenden Kraft wird der Grösse und dem Zeichen nach durch $\frac{d^2 s}{dt^2}$ ausgedrückt, wobei das positive Zeichen im Sinne der wachsenden $s$, das negative im Sinne der abnehmenden $s$ gebraucht wird. Betrachtet man $\vartheta$ als negativ, wenn der Radius $OM$ auf die andere Seite der Verticalen übergeht, so ist allgemein:

$$s = L(\alpha - \vartheta), \quad \frac{ds}{dt} = -L\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -L\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Die Tangentialcomponente der Schwere ist $g \sin \vartheta$; dem vorigen Ausdrucke gleich gesetzt, giebt sie

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta,$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $2d\vartheta$ und integrirt, so kommt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\cos\vartheta + C.$$

Die Constante $C$ bestimmt sich durch die Bedingung, dass gleichzeitig $\vartheta = \alpha$ und $-L\dfrac{d\vartheta}{dt} = k$ ist, woraus folgt

$$\frac{k^2}{L^2} = \frac{g}{L}\cos\alpha + C,$$

mithin

$$1)\qquad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{L^2} + \frac{2g}{L}(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Man schliesst hieraus, weil $d\vartheta$ von entgegengesetztem Zeichen mit $dt$ ist, so lange die Bewegung in demselben Sinne verharrt,

$$2)\qquad dt = \frac{-L\,d\vartheta}{\sqrt{k^2 + 2gL(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Man würde auf die vorige Rechnung zurückkommen, wenn man $\vartheta$ durch die Ordinate des Kreises, vom Punkte $B$ an gerechnet, ausdrücken wollte.

Unter der Voraussetzung, dass $\alpha$ und $\vartheta$ hinlänglich klein sind, um ihre vierten Potenzen vernachlässigen zu können, und dass die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist, vereinfacht sich die vorige Formel und wird zur folgenden

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}$$

woraus

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\,arc\cos\frac{\vartheta}{\alpha}.$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil gleichzeitig $t = 0$ und $\vartheta = \alpha$ sein muss.

Die Geschwindigkeit wird Null für $\vartheta = -\alpha$; daraus folgt

$$t = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

und dies ist die Schwingungsdauer. Nach dieser Zeit beginnt die Bewegung in entgegengesetztem Sinne auf identische Weise, der Punkt kommt nach $A$ mit der Geschwindigkeit Null zurück in derselben Zeit $\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, dann befindet er sich in denselben Verhältnissen wie im Anfange der Bewegung, und diese doppelte Schwingung wiederholt sich unaufhörlich, wenn man von allen äusseren Widerständen absieht.

60. Will man das Problem der Pendelbewegung genauer behandeln, so hat man die Theorie der elliptischen Funktionen zu Hilfe zu nehmen, wie wir im Folgenden zeigen werden.

Aus der Gleichung 2) ziehen wir durch Integration zwischen den Grenzen $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \vartheta$

$$t = -\int_\alpha^\vartheta \frac{L\,d\vartheta}{\sqrt{k^2 + 2gL\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)}},$$

wo nun $t$ die Zeit bedeutet, innerhalb deren sich der ursprüngliche Ausschlagwinkel $\alpha$ bis auf $\vartheta$ verringert. Statt der vorstehenden Gleichung betrachten wir die mit ihr identische

$$t = \int_\vartheta^\alpha \frac{L\,d\vartheta}{\sqrt{k^2 + 4gL\sin^2\frac{1}{2}\alpha - 4gL\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}$$

und unterscheiden in letzterer die beiden Fälle, ob $k^2 + 4gL\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ mehr oder weniger als $4gL$ beträgt, d. h. ob die Anfangsgeschwindigkeit $k$ grösser oder kleiner als $2\sqrt{gL}\cos\frac{1}{2}\alpha$ ist.

Im ersten Falle setzen wir den ächten Bruch

$$\frac{4gL}{k^2 + 4gL\sin^2\frac{1}{2}\alpha} = \varkappa^2$$

und erhalten

$$t = \varkappa\sqrt{\frac{L}{g}}\int_\vartheta^\alpha \frac{\frac{1}{2}d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}$$

oder einfacher mittelst der Substitution $\vartheta = 2\varphi$

$$t = \varkappa\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\frac{1}{2}\vartheta}^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}}.$$

Nach der Legendre'schen Bezeichnung für die elliptischen Integrale erster Art, nämlich

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}} = F(\varkappa, \varphi)$$

erhält man jetzt

$$t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\alpha) - F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\vartheta) \right\}.$$

Für die Zeit, welche vom Anfange bis zum Durchgange durch den tiefsten Punkt verstreicht, ist $\vartheta = 0$ und

$$t_1 = \varkappa \sqrt{\frac{L}{g}}\, F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ mithin } t_1 - t = \varkappa \sqrt{\frac{L}{g}}\, F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\vartheta).$$

Nach den in Nr. 56 befindlichen Auseinandersetzungen erhellt übrigens sehr leicht, dass im vorliegenden Falle keine Schwingungen im gewöhnlichen Sinne des Wortes, sondern vollständige Umläufe um den festen Punkt des Pendels ausgeführt werden; die Zeit eines solchen Umlaufs ergiebt sich, wenn man $\alpha - \vartheta$ von 0 bis $2\pi$ oder $\vartheta$ von $\alpha$ bis $\alpha - 2\pi$ ausdehnt. Man hat daher zunächst

$$T = \varkappa \sqrt{\frac{L}{g}} \int\limits_{-\pi + \frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}.$$

oder wenn man $-\varphi$ an die Stelle von $\varphi$ treten lässt

$$T = \varkappa \sqrt{\frac{L}{g}} \int\limits_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\pi - \frac{1}{2}\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}};$$

das hier vorkommende Integral kann in drei Theile zerlegt werden, in ein Integral von $-\frac{1}{2}\alpha$ bis 0, in ein zweites von 0 bis $\pi$, und in ein drittes von $\pi - \frac{1}{2}\alpha$ bis $\pi$, welches letztere aber von der Summe der beiden ersten abzuziehen ist; man findet nun leicht (z. B. mittelst der Substitution $\varphi = \pi - \psi$), dass das letzte Integral dem ersten gleichkommt und es aufhebt, sodass nur das zweite Integral übrig bleibt, dessen Werth $= F(\varkappa, \pi) = 2F(\varkappa, \frac{1}{2}\pi)$ ist; man hat so

$$T = 2\varkappa \sqrt{\frac{L}{g}}\, F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\pi).$$

Will man umgekehrt den Winkel $\vartheta$ und die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ durch $t$ ausdrücken, so hat man sich der Jacobi'schen Zeichen zu bedienen, indem man die Gleichung $\varphi = am\,(u, \varkappa)$ als die Umkehrung von $u = F(\varkappa, \varphi)$ ansieht. Aus dem für $t_1 - t$ angegebenen Werthe folgt auf diese Weise

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = am\left(\frac{t_1-t}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{L}},\ \varkappa\right) \text{ und } \sin\tfrac{1}{2}\vartheta = \sin am\left(\frac{t_1-t}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{L}},\varkappa\right)$$

womit der Winkel bestimmt ist. Vermöge der Formel

$$d\, am\, u = \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 am\, u}\, du = \varDelta\, am\, u\, du$$

erhält man sogleich weiter

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\varDelta\, am\left(\frac{t_1-t}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{L}},\ \varkappa\right).$$

Im zweiten der erwähnten Fälle setzen wir den ächten Bruch

$$\frac{k^2 + 4gL\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{4gL} = \varkappa^2$$

und bekommen so

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\vartheta}^{\alpha}\frac{\frac{1}{2}d\vartheta}{\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}.$$

Führen wir statt $\vartheta$ und $\alpha$ zwei neue Winkel $\varphi$ und $\beta$ der Art ein, dass

$$\sin\tfrac{1}{2}\vartheta = \varkappa\sin\varphi,\ \ \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \varkappa\sin\beta,$$

so wird

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\varphi}^{\beta}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

und in elliptischen Integralen ausgedrückt:

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\left\{F(\varkappa,\beta) - F(\varkappa,\varphi)\right\}.$$

Die Zeit des ersten Niederganges vom Anfangspunkte bis zum tiefsten Punkte ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{L}{g}}\,F(\varkappa,\beta) \text{ mithin } t_1 - t = \sqrt{\frac{L}{g}}\,F(\varkappa,\varphi).$$

Dehnt man $\vartheta$ von $\alpha$ bis zu demjenigen Werthe von $\vartheta$ aus, für welchen zum ersten Mal

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -2\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta} = 0$$

wird, so erhält man die Zeit, in der das Pendel von seiner ursprünglichen Stellung aus zur nächsten Ruhelage gelangt; der betreffende Werth von $\vartheta$ bestimmt sich durch die Gleichung

$\sin\frac{1}{2}\vartheta = = \varkappa$, es folgt daraus $\sin\varphi = -1$, $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$, und mithin ist die entsprechende Zeit

$$= \sqrt{\frac{L}{g}}\left\{F(\varkappa, \beta) - F(\varkappa, -\tfrac{1}{2}\pi)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{g}}\left\{F(\varkappa, \beta) + F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\pi)\right\}.$$

Vermindert man diese Zeit um $t_1$, so bleibt die Zeit übrig, welche das Pendel braucht, um vom tiefsten Punkte bis zur Ruhelage zu gelangen; diese Zeit ist

$$t_2 = \sqrt{\frac{L}{g}}\,F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\pi).$$

Von jetzt ab macht das Pendel Schwingungen, bei welchen die Zeit eines Nieder- und Aufganges (Pendelschlages) durch $2t_2$ und folglich die Zeit einer vollständigen Schwingung durch $4t_2$ oder

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\,F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\pi)$$

ausgedrückt wird. Am einfachsten gestalten sich diese Formeln in dem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit $k = 0$ ist; es ergiebt sich nämlich $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\alpha$, $\beta = 90^0$, $t_2 = t_1$, die Zeit eines Pendelschlages

$$2t_2 = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\,F(\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \tfrac{1}{2}\pi)$$

und die einer vollen Schwingung

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\,F(\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \tfrac{1}{2}\pi).$$

Die Werthe von $F(\sin\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\pi)$ oder kurz $F$ sind von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 40^0$ von 2 zu 2 Grad folgende

| $\alpha$ | $F$ | $\alpha$ | $F$ | $\alpha$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,57080 | 14 | 1,57667 | 28 | 1,59456 |
| 2 | 1,57091 | 16 | 1,57848 | 30 | 1,59814 |
| 4 | 1,57127 | 18 | 1,58054 | 32 | 1,60197 |
| 6 | 1,57187 | 20 | 1,58284 | 34 | 1,60608 |
| 8 | 1,57271 | 22 | 1,58539 | 36 | 1,61045 |
| 10 | 1,57379 | 24 | 1,58819 | 38 | 1,61509 |
| 12 | 1,57511 | 26 | 1,59125 | 40 | 1,62002 |

u. s. w.

Um $\vartheta$ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ durch $t$ auszudrücken, hat man nur die für $t_1 - t$ gefundene Gleichung umzukehren; man erhält

$$\varphi = am\left((t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{L}},\, \varkappa\right)$$

und wegen $\sin \frac{1}{2}\vartheta = \varkappa \sin \varphi$

$$\sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \varkappa \sin am\left((t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{L}},\, \varkappa\right).$$

Mit Hilfe der Differentialformel

$$d\, Arcsin\, (\varkappa \sin am\, u) = \varkappa \cos am\, u\, du$$

zieht man daraus

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -2\varkappa\sqrt{\frac{g}{L}} \cos am\left((t_1 - t)\sqrt{\frac{g}{L}},\, \varkappa\right),$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

61. In dem Vorhergehenden haben wir von dem Widerstande der Luft abstrahiren können. Diese Einwirkung modificirt indessen die Resultate nur wenig und erfordert geringe Correctionen der Formeln. Wir wollen hier auf die Einzelheiten dieses Gegenstandes nicht weiter eingehen und nur zeigen, inwiefern irgend ein Hinderniss die allgemeinen Formeln der Bewegung eines Punktes auf einer Curve ändern würde.

Sei $F(v)$ irgend eine gegebene Function der Geschwindigkeit des bewegten Punktes, welche den Widerstand ausdrückt, der durch irgend ein Medium oder durch die Reibung erzeugt wird; die Gleichungen der Bewegung des schweren materiellen Punktes sind dann

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N \cos \lambda - F(v)\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = N \cos \mu - F(v)\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = N \cos \nu - F(v)\frac{dz}{ds} - g;$$

woraus man leicht erhält

$$d(v^2) = -2g\,dz - 2F(v)\,ds.$$

Nun kann man mittelst der Gleichungen der Curve $ds$ durch $z$ und $dz$ ausdrücken, $v$ lässt sich ebenfalls als Function von $z$, $dz$ und $dt$ darstellen, und man gelangt so zu einer Differentialgleichung zwischen $z$ und $t$ allein. Kann man sie integriren, so finden sich $x$, $y$, $z$ als Functionen von $t$, und die Bewegung ist vollkommen bestimmt.

Die vorhergehende Gleichung giebt durch Integration

$$v^2 - k^2 = 2g(h-z) - 2\int_h^z F(v)\,ds;$$

hieraus ersieht man, dass das Integral $2\int_h^z F(v)\,ds$ den Verlust ausdrückt, welchen das Quadrat der Geschwindigkeit von dem durch $F(v)$ dargestellten Widerstand erleidet.

62. Bewegung auf der Cycloide. Wählt man zur Achse der $x$ die Tangente des Scheitels und zur Achse der $z$ das auf die Basis gefällte Perpendikel, so ist die Differentialgleichung der Cycloide

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{z}{2a-z}},$$

wo $a$ den Radius des erzeugenden Kreises bedeutet; zugleich nehmen wir an, dass die Ebene dieser Curve vertical stehe und dass die Achse der $z$ die der Schwere entgegengesetzte Richtung habe. Die oben gefundene Gleichung für den Fall einer beliebigen Curve war

$$v^2 - k^2 = 2g(h-z)$$

oder

$$\frac{ds^2}{dt^2} = k^2 + 2gh - 2gz.$$

Man darf $k=0$ nehmen, wenn man den Ausgangspunkt auf der Cycloide auf passende Weise erhöht, vorausgesetzt, dass nicht $k^2 + 2gh > 4ga$ ist. Einerseits hat man nun die allgemeine Gleichung

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h-z),$$

andererseits vermöge der Gleichung der Cycloide

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2a}{z}\frac{dz^2}{dt^2};$$

mithin

$$dt = \pm\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{hz-z^2}};$$

in welcher Gleichung das negative Zeichen für die niedersteigende und das positive Zeichen für die aufsteigende Bewegung gilt.

Im Falle der niedersteigenden Bewegung giebt die Integration

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\ cos\, \frac{2z - h}{h}.$$

Die Constante ist Null, weil gleichzeitig $t = 0$ und $z = h$ sein muss; für $z = 0$ findet sich

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}};$$

von welchem Punkte also der bewegte Körper auch ausgehen möge, so gelangt er zu dem tiefsten Punkte der Cycloide doch immer in einer und derselben Zeit; man hat deshalb der Cycloide den Namen Tautochrone gegeben. Integrirt man den Werth für $dt$ von dem tiefsten Punkte an in dem einen oder dem andern Sinne, so erhält man immer gleiche Elemente, woraus hervorgeht, dass von diesem Punkte an gerechnet, die Lage des Körpers in gleichen Zeitintervallen gleichen Werthen von $z$ entspricht. Er steigt also bis zur Höhe $h$, wo seine Geschwindigkeit Null wird, und geht in derselben Zeit zurück, die er zum Hinabsteigen gebrauchte; die Schwingungsdauer ist immer

$$2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ oder } \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Nun ist $4a$ der Krümmungsradius der Cycloide im tiefsten Punkte, mithin die Schwingungsdauer auf der Cycloide für jede Amplitude dieselbe, wie sie auf dem Krümmungskreise des tiefsten Punktes, freilich nur für unendlich kleine Amplituden, eintreten würde.

Schwingt ein Körper in einer verticalen ebenen Curve, so darf man die letztere in einer unendlich kleinen Ausdehnung zu beiden Seiten ihres tiefsten Punktes als mit dem Krümmungskreise zusammenfallend betrachten, und die Schwingungsdauer auf dieser Curve ist $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, wenn $a$ den Krümmungshalbmesser bezeichnet und die Amplitude unendlich klein genommen wird.

Bildet die Schwingungsebene mit der Verticalen einen Winkel $\alpha$, so kann die Schwere in zwei Kräfte zerlegt werden; die eine auf der Ebene senkrechte wird durch den Widerstand der letzteren aufgehoben, die andere liegt in der Ebene und parallel mit der Projection einer Verticalen auf dieselbe. Letztere Componente ist $= g \cos \alpha$ und folglich die Schwingungsdauer $=$ $\pi \sqrt{\frac{a}{g \cos \alpha}}$, also dieselbe, wie auf einer Curve, deren Ebene vertical und deren Krümmungsradius $= \frac{a}{g \cos \alpha}$ wäre; sie ist endlich die nämliche wie auf derjenigen Curve, welche in einer Verticalebene durch die Tangente im tiefsten Punkte der gegebenen Curve liegt und die Projection jener Curve auf diese Verticalebene bildet.

63. Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Cycloide die einzige Tautochrone ist, wenn man von jedem Widerstande absieht.

Zu diesem Zwecke stellen wir die allgemeinere Frage nach der Gleichung derjenigen Curve, bei welcher die Fallzeit eine gegebene Function der Fallhöhe sein würde.

Den Coordinatenanfang legen wir auf die gesuchte Curve und haben nach der bisherigen Bezeichnung, wenn keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist,

$$v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(h-z)}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-z}},$$

wo $T$ die Zeit bedeutet, welche der Punkt braucht, um den Coordinatenanfang zu erreichen. Dabei ist $s$ eine Function von $z$, etwa $s = \varphi(z)$, und die vorstehende Gleichung liefert $T$ als Function von $h$, etwa $T = \psi(h)$; umgekehrt haben wir nun $s = \varphi(z)$ zu bestimmen, wenn $T = \psi(h)$ gegeben ist. Hierzu dient folgende aus der Theorie der Doppelintegrale bekannte Formel*):

$$\int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu - h}} \int_0^h \frac{\varphi'(z)\, dz}{\sqrt{h-z}} = \pi [\varphi(\mu) - \varphi(0)];$$

multiplicirt man nämlich die Gleichung

*) Mittelst der Substitution $z = h - y^2$ verwandelt sich das obige Doppelintegral in

$$2 \int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu - h}} \int_0^{\sqrt{h}} \varphi'(h - y^2)\, dy$$

und daraus wird durch Einführung von $x^2 = \mu - h$ oder $h = \mu - x^2$,

$$4 \int_0^{\sqrt{\mu}} dx \int_0^{\sqrt{\mu - x^2}} \varphi'(\mu - x^2 - y^2)\, dy.$$

1) $$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\varphi'(z)\,dz}{\sqrt{h-z}}$$

mit $\dfrac{dh}{\sqrt{\mu - h}}$ und integrirt zwischen den Grenzen $h = 0$ und $h = \mu$, so kommt man rechts auf das erwähnte Doppelintegral und erhält daher

$$\int_0^\mu \frac{T\,dh}{\sqrt{\mu - h}} = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} [\varphi(\mu) - \varphi(0)],$$

d. i. wenn $\psi(h)$ für $T$, $z$ für $\mu$ gesetzt und beachtet wird, dass im vorliegenden Falle $\varphi(0) = 0$ ist,

2) $$\varphi(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^z \frac{\psi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Aus der hiermit gefundenen Bogengleichung $s = \varphi(z)$ ergiebt sich die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

3) $$x = \int_0^z dz \sqrt{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 - 1},$$

und damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Die Annahme $\psi(h) = Const.$ bildet den einfachsten Fall; die Formel 2) liefert dann

$$\varphi(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} C \int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}} \quad \text{d. h. } s = A\sqrt{z},$$

wo $A$ eine neue Constante bezeichnet. Durch diese Gleichung wird bekanntlich eine Cycloide charakterisirt, deren Scheitel der Coordinatenanfang und deren Pfeil die $z$-Achse ist. Es giebt daher im leeren Raume nur diese eine Tautochrone.

---

Setzt man ferner

$$x = \varrho \cos\vartheta, \quad y = \varrho \sin\vartheta \quad \text{folglich} \quad dx\,dy = \varrho\,d\varrho\,d\vartheta,$$

so gestaltet sich das vorstehende Integral zu

$$4\int_0^{\sqrt{\mu}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi'(\mu - \varrho^2)\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta = \pi \int_0^{\sqrt{\mu}} \varphi'(\mu - \varrho^2)\,2\varrho\,d\varrho = \pi[\varphi(\mu) - \varphi(0)],$$

wie im Texte angegeben wurde.

Als zweites Beispiel diene die Specialisirung $\psi(h) = C\sqrt[4]{h}$; es wird in diesem Falle

$$\varphi(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} C \int_0^z \frac{\sqrt[4]{h}\,dh}{\sqrt{z-h}}$$

oder durch Einführung der neuen Variabelen $u$ mittelst der Substitution $h = zu$, $dh = z\,du$,

$$\varphi(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \cdot C\sqrt[4]{z^3} \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{u}\,du}{\sqrt{1-u}}.$$

Das noch übrige Integral ist eine numerische Constante, die sich entweder in Form einer unendlichen Reihe darstellen oder aus der Theorie der Euler'schen Integrale bestimmen lässt; in jedem in jedem Falle hat $\varphi(z)$ d. h. $s$ die Form

$$s = B\sqrt[4]{z^3}.$$

Hieraus zieht man als Gleichung der gesuchten Curve

$$x = \int_0^z dz \sqrt{\frac{9}{16} B^2 \frac{1}{\sqrt{z}} - 1} = \int_0^z dz \sqrt{\frac{A}{\sqrt{z}} - 1},$$

und es hat hier keine Schwierigkeit die noch übrige Integration mit Hilfe der Substitution

$$\frac{A}{\sqrt{z}} - 1 = \zeta^2 \text{ oder } z = \frac{A^2}{(1+\zeta^2)^2}$$

auszuführen, wodurch man auf eine transscendente Curve kommt.

Aehnliche Beispiele lassen sich leicht in beliebiger Menge angeben; in vielen Fällen findet man für $x$ einen imaginären Werth, welcher beweist, dass das entsprechende Fallgesetz unmöglich ist.

# Fünftes Capitel.

# Bewegung eines Punktes auf einer festen Oberfläche.

## Allgemeine Sätze.

64. Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der festen Oberfläche, $N$ die Intensität des normalen Widerstandes, welchen sie darbietet, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ mögen die Winkel zwischen der Richtung von $N$ und den Achsen, endlich $X$, $Y$, $Z$ die totalen Componenten der äusseren beschleunigenden Kräfte sein, so hat man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \lambda, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \mu, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu,$$

$$\cos \lambda = V \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos \mu = V \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \nu = V \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Das doppelte Zeichen von $V$ entspricht den beiden Richtungen der Normale, und die Rechnung wird in jedem Punkte das passende Zeichen erkennen lassen.

Substituirt man in die ersten Gleichungen die Werthe von $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$, so wird

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + N V \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + N V \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + N V \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Durch Elimination von $N$ aus diesen drei Gleichungen ergeben sich zwei Gleichungen, welche, mit $F(x, y, z) = 0$ verbunden, die Coordinaten $x$, $y$, $z$ als Functionen von $t$ und somit alle Umstände der Bewegung bestimmen. Diese im Allgemeinen unausführbaren Rechnungen vereinfachen sich, wenn $X dx + Y dy + Z dz$ ein vollständiges Differential bildet, also

$$X dx + Y dy + Z dz = d\varphi(x, y, z),$$

und folglich

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C$$

ist, wo die willkürliche Constante $C$ durch den Anfangszustand bestimmt wird.

In der That liefern die Gleichungen 1) unmittelbar die beiden folgenden:

$$2)\left\{\begin{aligned} dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2} &= Y dx - X dy + NV\left(\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy\right), \\ dx\frac{d^2z}{dt^2} - dz\frac{d^2x}{dt^2} &= Z dx - X dz + NV\left(\frac{\partial F}{\partial z}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dz\right). \end{aligned}\right.$$

Differentiirt man nun nach irgend einer Variabeln die identische Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

so findet sich

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

woraus

$$dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

und ebenso

$$dx\frac{d^2z}{dt^2} - dz\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung 2), ersetzt $v^2$ durch $2\varphi(x, y, z) + C$ und eliminirt $NV$, so entsteht eine Differentialgleichung zwischen $x$, $y$, $z$, welche $t$ nicht enthält, und die in Verbindung mit $F(x, y, z) = 0$ die Trajectorie bestimmt. Kennt man $y$ und $z$ als Function von $x$, und $\frac{ds}{dt}$ als Function von $x, y, z$, so wird man leicht zu einer Gleichung von der Form

$$dt = \psi(x)\, dx$$

gelangen, woraus sich $x$ als Function von $t$ und somit alle Umstände der Bewegung ableiten lassen.

65. Druck auf die Fläche. Die Resultante aller an dem Punkte thätigen Kräfte, mit Einschluss der von der Fläche herrührenden Kraft, ist der Grösse nach $= \frac{v^2}{r}$ und in der osculirenden Ebene der Bahn enthalten. Der Ausdruck $\frac{v^2}{r}$ stellt daher auch die Resultante zweier andern Kräfte dar, nämlich der von der Fläche erzeugten Normalkraft und der normalen Componente der äusseren auf den Punkt wirdenden Kraft. Bezeichnet $Q$ die letztere Componente, $\vartheta$ den Winkel zwischen der osculirenden Ebene und der Normale, endlich $\psi$ den Winkel, welchen die Kraft $Q$ mit derselben Normalen einschliesst, so hat man

$$\frac{v^2}{r} : Q = \sin\psi : \sin\vartheta.$$

Diese Relation bestimmt die Lage der osculirenden Ebene, sobald $v$, $r$, $Q$ und $\psi$ bekannt sind. In dem speciellen Falle $Q = 0$ wird $\vartheta = 0$, d. h. die osculirende Ebene ist dann normal zur Fläche. Die äussere Kraft reducirt sich in diesem Falle entweder auf Null oder auf eine blosse Tangentialkraft, wie z. B. bei der Reibung oder dem Widerstande eines Mittels. Da unter diesen Voraussetzungen die osculirende Ebene der Bahn immer senkrecht auf der Fläche steht, so ist die Bahn die kürzeste, welche auf der Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten gezogen werden kann.

Uebrigens ersieht man auch unmittelbar leicht, dass in dem Falle, wo die äussere Kraft entweder nicht vorhanden oder tangential gerichtet ist, die osculirende Ebene der Trajectorie normal zur Fläche sein muss. Die genannte Ebene muss nämlich die Tangente an der Bahn und ausserdem die gesammte Resultante, d. h. eine der Componenten und die Resultante enthalten; sie enthält daher auch die andere Componente, welche normal zur Fläche ist, und steht daher selbst auf der Fläche senkrecht.

## Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugel.

66. Die Gleichung der Kugel sei

1) $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

so sind die Gleichungen der Bewegung

2) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm \frac{Nx}{a}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \pm \frac{Ny}{a}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g \pm \frac{Nz}{a},$$

wo die $z$-Achse die Richtung der Schwere hat. Aus diesen Gleichungen folgt für die Geschwindigkeit

3) $$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c + 2gz,$$

wo die Constante durch die anfängliche Höhe und Geschwindigkeit des bewegten Punktes bestimmt wird.

Das Princip der Flächen gilt zwar nicht für alle Ebenen, weil aber die Resultante der Kräfte, welche auf den Punkt wirken, immer die Achse der $z$ schneidet, so muss es für die Ebene der $x$ und $y$ stattfinden, wie wir früher gezeigt haben. Demnach ist, wenn $c'$ eine neue willkürliche Constante bezeichnet

4) $$x\,dy - y\,dx = c'\,dt;$$

bringt man die Gleichung 3) auf die Form

5) $$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2gz,$$

so genügen die Gleichungen 1), 4), 5), um $x, y, z$ als Functionen von $t$ zu bestimmen.

Die Differentiation der Kugelgleichung giebt

6) $$x\,dx + y\,dy = -z\,dz;$$

durch Addition der Quadrate der Gleichungen 4) und 6) folgt weiter

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = z^2dz^2 + c'^2dt^2,$$

und bestimmen wir $x^2 + y^2$ und $dx^2 + dy^2$ aus den Gleichungen 1) und 5), so erhalten wir zwischen $z$ und $t$ die Gleichung

$$(a^2 - z^2)\,[(c + 2gz)\,dt^2 - dz^2] = z^2dz^2 + c'^2dt^2;$$

daraus geht schliesslich folgende Gleichung hervor:

7) $$dt = \frac{\pm\, a\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(c + 2gz) - c'^2}},$$

wobei das negative Zeichen dem Steigen, das positive dem Fallen des Punktes entspricht. Durch Ausführung der Integration würde man hieraus herleiten

$$t = F(z) \text{ oder } z = F_1(t),$$

und es bliebe noch die horizontale Projection des bewegten Punktes zu bestimmen, was entweder durch die Coordinaten $x$ und $y$ oder durch Polarcoordinaten geschehen kann; wir wählen das Letztere.

Die Gleichung $x\,dy - y\,dx = c'dt$ wird, wenn man mit $r$ den Radiusvector der Projection und mit $\psi$ den Winkel bezeichnet, welchen er mit der Achse der $x$ einschliesst,

8) $$r^2 d\psi = c'dt \text{ und } r^2 = a^2 - z^2;$$

und, indem man sich auf das obere Zeichen beschränkt,

9) $$d\psi = \frac{c'dt}{a^2 - z^2} = \frac{ac'dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(c + 2gz) - c'^2}}.$$

Substituirt man für $dt$ seinen Werth durch $z$ und $dz$ ausgedrückt, oder denkt man sich $z$ mittelst der vorigen Integration durch $c$ bestimmt, so giebt eine neue Quadratur $\psi$ als Function von $z$ oder von $t$; da endlich

$$r^2 = a^2 - z^2 = F_2(t),$$

so sind nunmehr alle Coordinaten des bewegten Punktes als Functionen von $t$ bekannt. Die angedeuteten Integrationen können aber nur annäherungsweise ausgeführt werden.

Will man den Winkel $\vartheta$ kennen lernen, welchen der Radiusvector vom Centrum der Kugel an den bewegten Punkt mit der Verticalen bildet, so hat man sich nur zu erinnern, dass

$$\cos\vartheta = \frac{z}{a},$$

ist, also mit $z$ gleichzeitig bekannt wird.

67. Um noch die Constante $c'$ zu bestimmen, zerlegen wir die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes in zwei andere Geschwindigkeiten, deren eine senkrecht auf der Verticalebene steht, welche durch diesen Punkt und das Centrum der Kugel geht, und deren andere in dieser Ebene liegt. Die erste ist die Componente der Geschwindigkeit der horizontalen Projection des Punktes nach der Senkrechten auf den Radiusvector $r$ der durch diese Projection beschriebenen Curve; denn diese Senkrechte ist normal auf der Verticalebene, in welcher sich die zweite totale Componente der absoluten Geschwindigkeit des Punktes befindet, und folglich giebt diese Componente die Projection Null auf das Perpendikel des Radiusvector der Horizontalprojection.

In der anfänglichen Lage des Punktes sei $d$ der Werth von $z$, $k$ die Geschwindigkeit tangential an der Kugel, und $\alpha$ der Winkel, welchen ihre Richtung mit dem Perpendikel auf die Verticalebene macht, die durch den Punkt und das Centrum der Kugel geht, so erhält man nach dem soeben Gesagten:

$$r\frac{d\psi}{dt} = k\cos\alpha,$$

und indem man für $\frac{d\psi}{dt}$ seinen aus der Gleichung 8) gezogenen Werth substituirt,

$$\frac{c'}{r} = k\cos\alpha;$$

da im Anfangspunkte der Bewegung

$$r = \sqrt{a^2 - d^2}$$

ist, so wird der Werth von $c'$

10) $$c' = k\sqrt{a^2 - d^2}\cos\alpha.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, so wird $c' = 0$, und man findet die Gleichungen der Bewegung des einfachen Pendels in einer Verticalebene wieder.

68. Es bleibt noch übrig, die Grösse und Richtung des Widerstandes $N$ zu berechnen. Um seinen Werth auf die einfachste Weise zu erhalten, multipliciren wir von den Gleichungen 3) die erste mit $x$, die zweite mit $y$, die dritte mit $z$, und addiren die entstandenen Producte; wir finden so

11) $$\frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2} = \pm Na + gz.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

ist andererseits

$$x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z = -dx^2 - dy^2 - dz^2 = -ds^2;$$

und hiernach geht die Gleichung 11) in die folgende über

$$-v^2 = \pm Na + gz,$$

woraus

12) $$\pm N = -\frac{v^2 + gz}{a},$$

und da $N$ wesentlich positiv ist, so wird man aus den Werthen von $v$ und $z$ in jedem Augenblicke sehen, welches von beiden Zeichen des ersten Theils genommen werden muss, damit die Gleichung nicht unmöglich sei, man kennt folglich den Sinn des von der Oberfläche ausgeübten Widerstandes. Bei positivem $z$ ist der zweite Theil der Gleichung 12) negativ, und man muss in dem ersten Theile das untere Zeichen nehmen; daraus geht hervor, dass die Oberfläche auf den Punkt eine Kraft ausübt, welche von der Oberfläche gegen das Centrum gerichtet ist, so lange der Punkt unter der durch das Centrum der Kugel gelegten Horizontalebene liegt. Bei negativem $z$, d. h. wenn der Punkt sich über jener Horizontalebene befindet, haben die beiden Glieder des zweiten Theils der Gleichung 12) verschiedene Zeichen, und das Resultat kann negativ, Null oder positiv sein. Man wird das untere Zeichen von $N$ nehmen, wenn

$$-gz < v^2;$$

die Kraft $N$ verschwindet für

$$-gz = v^2,$$

endlich gilt das obere Zeichen, wenn

$$-gz > v^2;$$

in dem letzten Falle übt die Oberfläche auf den Punkt einen Druck aus, der gegen das Aeussere der Kugel gerichtet ist, und folglich sucht sich der Punkt dem Centrum zu nähern.

Man kann diese verschiedenen für die Richtung von $N$ geltenden Bedingungen unmittelbar aus der Bemerkung ableiten, dass der Widerstand der Fläche, auf der ein Punkt sich bewegt, jede normale Kraft aufhebt, gleichviel ob sie von den an den Punkt angebrachten Kräften oder von der Centrifugalkraft herrührt.

Dies angenommen, sei $R$ der Radius des Kreises, in welchem die osculirende Ebene irgend eines Punktes der Trajectorie die Kugel schneidet, mithin $R$ der Krümmungskreis dieser Curve, so ist $\frac{v^2}{R}$ die Centrifugalkraft und man muss sie mit $\frac{R}{a}$ multipliciren, um ihre Componente nach demjenigen Radius der Kugel zu erhalten, welcher durch diesen Punkt geht; man hat also $\frac{v^2}{a}$ und diese Kraft ist nach dem äusseren Theile der Normalen auf der Kugel gerichtet. Was die normale Componente der Schwere betrifft, so ist sie nach dem äusseren Theile der Normalen gerichtet, wenn der Punkt sich in der unteren Halbkugel, und gegen das Centrum, wenn der Punkt in der oberen Halbkugel liegt. Betrachtet man also die Richtung nach aussen als positiv und die entgegengesetzte als negativ, so ist $\frac{gz}{a}$ diese Componente, ferner $\frac{v^2+gz}{a}$ der durch die Oberfläche aufgehobene Druck, und das Zeichen dieses Ausdrucks bestimmt in der angedeuteten Weise den Sinn dieser Kraft. Es folgt daraus, dass die Oberfläche eine gleiche und entgegengerichtete Kraft ersetzt, oder einen Widerstand $= -\frac{v^2+gz}{a}$ darbietet, wo das Zeichen in derselben Weise verstanden sein soll. In der unteren Halbkugel ist dieser Ausdruck negativ, mithin die durch die Oberfläche hervorgerufene Kraft nach dem Centrum gerichtet; auf der oberen Halbkugel bleibt sie gegen das Centrum gerichtet, wenn

$$v^2+gz>0;$$

sie erhält aber die entgegengesetzte Richtung, wenn

$$v^2+gz<0$$

ist. Man kommt hiermit auf die erhaltenen Resultate zurück.

69. Bewegung eines Pendels, das sich sehr wenig von der Verticalen entfernt. Die Bewegung eines Punktes auf der Kugel kann dadurch verwirklicht werden, dass man diesen Punkt mit dem Centrum durch einen massenlosen unbiegsamen Faden verbindet; das vorhin behandelte Problem ist folglich das des einfachen Pendels in etwas allgemeinerer Auffassung. Die Rechnungen können vollständig ausgeführt werden, wenn das Pendel einen sehr kleinen Winkel mit der durch den Aufhängepunkt gehenden Verticalen bildet.

Wir nennen $\vartheta$ den variablen Winkel, welchen die Richtung des Pendels mit jener der Schwere einschliesst, $\alpha$ seinen Anfangswerth, der Coordinate $z=d$ entsprechend, und setzen die Anfangsgeschwindigkeit $k$ in horizontaler Richtung voraus, in welchem Falle

$$c'=k\sqrt{a^2-d^2}$$

wird, endlich vernachlässigen wir die sehr kleinen Grössen der dritten und höheren Ordnungen gegen die der zweiten Ordnung, und erhalten so

$$-z=a\cos\vartheta=a-\frac{a\vartheta^2}{2},\quad -d=a\cos\alpha=a-\frac{a\alpha^2}{2},$$

$$=k^2-2ga+ga\alpha^2,\quad c'^2=k^2a^2\sin^2\alpha=k^2a^2\alpha^2.$$

Die Formel 7) wird dann

$$dt = \mp \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{-\vartheta^4 + \left(\frac{k^2}{ga} + \alpha^2\right)\vartheta^2 - \frac{k^2\alpha^2}{ag}}};$$

setzt man zur Abkürzung $\frac{k^2}{ga} = \beta^2$, so erhält die vorstehende Gleichung die einfachere Gestalt

13) $$dt = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\alpha^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \beta^2)}},$$

woraus man schon sieht, dass $\vartheta$ beständig zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegt. Man erkennt ferner, dass für $\alpha = \beta$ auch $\vartheta$ beständig gleich $\alpha$ ist; das Pendel beschreibt also einen Rotationskegel um die Verticale, und der materielle Punkt einen horizontalen Kreis. Was den Winkel $\psi$ betrifft, so giebt die allgemeine Formel

$$r^2 d\psi = c' dt, \quad d\psi = \frac{k\alpha}{a\vartheta^2} dt,$$

und da $\vartheta = \alpha = \beta$, so reducirt sie sich auf

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}}\, dt,$$

woraus man, wenn $\psi$ gleichzeitig mit $t$ anfängt, $\psi = t\sqrt{\frac{g}{a}}$ ableitet. In diesem Falle bewegt sich das Pendel gleichförmig und beschreibt die ganze conische Oberfläche in der Zeit $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Gehen wir auf die offenbar integrabele Gleichung 13) zurück, bringen sie auf die Form

$$dt = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{-\left(\vartheta^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{4}}}$$

und setzen

$$2\vartheta^2 - \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\, u,$$

so erhalten wir

$$dt = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$$

woraus

$$t + c_1 = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\cos u;$$

für $t = 0$ wird $\vartheta = \alpha$ folglich $u = 1$; die Constante $c_1$ ist mithin $= 0$ und

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot arc\, cos\, u,$$

oder

$$u = cos\left(2\, t \sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

woraus man für $\vartheta^2$ folgenden Werth erhält:

$$\vartheta^2 = \alpha^2 \, cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \beta^2 \, sin^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right). \tag{14}$$

Man erkennt sofort, dass $\vartheta^2$ periodisch und dass die Dauer der Periode $= \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ ist. Für $t = 0$ hat man

$$\vartheta^2 = \alpha^2;$$

für $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$, d. h. in der Mitte der Periode, wird

$$\vartheta^2 = \beta^2,$$

und wenn $t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, so findet man wieder

$$\vartheta^2 = \alpha^2.$$

Demnach würde ein Beobachter, welcher sich mit der das Pendel enthaltenden Verticalebene bewegte, das Pendel zwischen denjenigen zwei Richtungen schwingen sehen, die mit der Verticalen auf einer und derselben Seite die Winkel $\alpha$ und $\beta$ einschliessen. Die Zeit, innerhalb deren das Pendel von der einen zur andern Richtung gelangt, ist $\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, jedoch würde es in der Mitte dieser Zeit nicht in gleicher Entfernung von beiden Geraden sein, denn es ist in diesem Momente

$$\tfrac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2),$$

was für $\vartheta$ einen grössern Werth als das Mittel $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ giebt.

Um noch $\psi$ als Function von $t$ zu bestimmen, wenden wir uns an die Gleichung

$$r^2 d\psi = c' dt \text{ oder } d\psi = \frac{k\, \alpha\, dt}{a\, \vartheta^2} = \frac{\alpha \beta \sqrt{\frac{g}{a}}\, dt}{\vartheta^2}.$$

Restituiren wir für $\vartheta^2$ seinen durch $t$ ausgedrückten Werth, so kommt

$$15)\quad d\psi = \alpha\beta\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{dt}{\alpha^2\cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)+\beta^2\sin^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)}.$$

Die Integration dieser Gleichung geschieht durch die gewöhnliche Substitution $tang\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) = v^2$; sie giebt

$$d\psi = \frac{\alpha\beta dv}{\alpha^2+\beta^2v^2},$$

woraus folgt

$$\psi = arc\ tang\ \frac{\beta v}{\alpha}.$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil $\psi$ mit $v$ gleichzeitig verschwinden muss. Umgekehrt ist

$$16)\qquad tang\,\psi = \frac{\beta}{\alpha}\,v = \frac{\beta}{\alpha}\,tang\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Man erkennt hieraus, dass der Winkel $\psi$ nicht gleichförmig wächst; er nimmt nach einander die Werthe $\pi$, $2\pi$, $3\pi$, ... $n\pi$ für die auf einander folgenden Werthe von $t$ an, welche den zweiten Theil der Gleichung 16) zum Verschwinden bringen; letztere Werthe sind $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \ldots\ldots, n\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In den Mitten dieser verschiedenen Zeitintervalle wird das zweite Glied unendlich, ebenso das erste, und die Werthe von $\psi$ sind dann $\frac{1}{2}\pi$, $\pi+\frac{1}{2}\pi, \ldots$, so dass die Verticalebene, welche das Pendel enthält, jedesmal senkrecht auf ihrer Anfangslage steht. Demnach werden die vier Viertel der Drehung dieser Ebene in gleichen Zeitintervallen, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, durchlaufen, und während eines jeden von ihnen vollendet das Pendel in seiner Verticalebene eine Schwingung, welche es von der einen jener durch die Winkel $\alpha$ und $\beta$ bestimmten äussersten Richtungen zu der andern überführt. Noch ist zu bemerken, dass die Verticalebene des Pendels immer dieselbe Zeit gebraucht, um zwei rechte Winkel zu durchlaufen, wenn man von irgend einer ihrer Lagen ausgeht.

70. Will man die Bewegung der Projection des Punktes auf die Horizontalebene kennen lernen, so muss man entweder $r$ und $\psi$ oder $x$ und $y$ als Function von $t$ darstellen.

Zuerst liefert die Gleichung 16) $\psi$, um $r$ zu erhalten, braucht man nur auf die Formel

$$r^2 d\psi = c' dt = k a \alpha dt$$

zurückzugehen und für $\frac{dt}{d\psi}$ seinen aus der Gleichung 15) gezogenen Werth zu substituiren; man findet so

$$17) \qquad r^2 = a^2 \left[\alpha^2 \cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \beta^2 \sin^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right];$$

die Formeln 16) und 17) beantworten die Frage. Die Gleichung der Projection der Trajectorie auf die Horizontalebene ergiebt sich dadurch, dass man $t$ zwischen diesen Gleichungen eliminirt, was auf folgende Gleichung führt:

$$r^2 = \frac{a^2 \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 \sin^2\psi + \beta^2 \cos^2\psi};$$

man erkennt in ihr die Gleichung einer Ellipse uud kann sie mittelst der Substitutionen $x = r \cos\psi$ und $y = r \sin\psi$ in rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken; sie lautet dann

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = a^2 \alpha^2 \beta^2.$$

Die Halbachsen $a\alpha$ und $a\beta$ dieser Ellipse sind von zwei rechtwinkligen Verticalebenen eingeschlossen, von denen die eine durch den Anfangspunkt der Bewegung geht.

Will man endlich $x$ und $y$ als Functionen von $t$ darstellen, so genügt es, den durch die Gleichung 17) gegebenen Werth von $r$ und die Werthe von $\cos\psi$ und $\sin\psi$ aus der Formel 16) in die Gleichungen $x = r\cos\psi$ und $y = r\sin\psi$ einzuführen; man findet

$$x^2 = a^2 \alpha^2 \cos^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right), \quad y^2 = a^2 \beta^2 \sin^2\left(t\sqrt{\frac{a}{g}}\right).$$

Daran knüpft sich eine Bemerkung, die mit einem später vorkommenden allgemeinen Principe zusammenhängt. Da nämlich der Werth für $x$ nicht von $\beta$, und der für $y$ nicht von $\alpha$ abhängt, so geschieht die auf die Achse der $x$ projicirte Bewegung ebenso, als wenn $\beta$ Null wäre und das Pendel, von der Verticalen um den Winkel $\alpha$ entfernt, ohne Anfangsgeschwindigkeit der Einwirkung der Schwere überlassen bliebe; ebenso ist die auf die Achse der $y$

projicirte Bewegung dieselbe, als ginge das Pendel von der Verticalen mit der gegebenen gegen die Achse der $y$ gerichteten Anfangsgeschwindigkeit aus. Demnach bringen die beiden Ursachen der Bewegung, nämlich die Entfernung aus der Verticalen und die Anfangsgeschwindigkeit, getrennt ihre Wirkungen hervor, und man erhält in irgend einem Augenblicke immer die genaue Lage des bewegten Punktes, wenn man die diesem Augenblicke entsprechenden Verrückungen in jenen beiden Bewegungen zusammensetzt, welche durch jede der beiden wirkenden Ursachen isolirt hervorgebracht werden würden.

## Sechstes Capitel.

# Die Arbeit einer Kraft. Die lebendige Kraft.

### Die Arbeit einer Kraft.

71. Auf den Begriff der Arbeit einer Kraft ist man durch die praktischen Fälle gekommen, bei denen es sich um eine nützliche Verwendung von Menschen- oder Thierkräften handelt. Lässt man z. B. durch einen Menschen irgend einen schweren Körper in geradliniger und gleichförmiger Bewegung aus der Tiefe eines Schachtes zu Tage fördern, so wird der Arbeiter eine Zeit lang constant angestrengt, und zwar ist diese Anstrengung sowohl dem Gewichte des zu hebenden Körpers als auch der Höhe proportional, auf welche der Körper gehoben werden muss. Man schätzt daher die mechanische Leistung eines Menschen nach dem Produkte aus dem bewältigten Gewichte in die Höhe, auf welche letzteres gehoben wurde; dem entsprechend versteht man überhaupt unter der Arbeit oder Leistung einer Kraft das Produkt aus der Kraft in den Weg, welchen ihr Angriffspunkt zurücklegt, wenn er im Sinne der Kraft verschoben wird. Diese Definition ist aber noch für den Fall zu verallgemeinern, wo sich der Angriffspunkt der Kraft in einer andern Richtung als jener der Kraft bewegt. Wie sich später zeigen wird, ist dann die aufgewendete Arbeit gleich dem Produkte aus der Kraft in die Projection des Weges auf die Kraftrichtung, und hierin besteht die allgemeinere Definition der Arbeit einer Kraft.

Dieser Erklärung zufolge wird die Arbeit einer Kraft durch die Zahl 1 dargestellt, wenn die Kraft gleich der Einheit ist und ihr Angriffspunkt um eine Längeneinheit im Sinne der Kraft verschoben wird. Mit anderen Worten, die Einheit der Leistung einer

Kraft ist diejenige Arbeit, womit 1 Kilogramm um 1 Meter vertical gehoben wird, d. h. kurz ein Kilogrammmeter. (In den Fällen, wo auf die Zeit Rücksicht genommen werden muss, setzt man voraus, dass die zu vergleichenden Arbeiten in einer und derselben Zeit, gewöhnlich in einer Secunde, verrichtet werden.)

Aus der obigen Definition geht ferner hervor, dass die Arbeit einer Kraft als positiv oder negativ in Rechnung zu bringen ist, jenachdem der Weg des Angriffspunktes der Kraft einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der Kraftrichtung einschliesst; ist dieser Winkel ein rechter, so findet weder in dem einen noch im anderen Sinne eine Bewegung nach der Kraftrichtung statt, und die Arbeit der Kraft ist dann gleich Null.

Im Vorigen wurde immer vorausgesetzt, dass die Kraft während der Bewegung constant bleibe; ist dies nicht der Fall, so theilt man die Bewegung in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Intervalle, so dass während jedes einzelnen Intervalles die Kraft als constant gelten kann. Die Leistung der Kraft bildet dann die Summe aller ihrer elementaren Leistungen und wird durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt. Bezeichnet nämlich $P$ die veränderliche Kraft, $ds$ ein Element der von ihrem Angriffspunkte beschriebenen Curve, und $\varphi$ den Winkel zwischen $ds$ und der Kraftrichtung, so ist $P\,ds\cos\varphi$ die elementare Arbeit, folglich

$$\int P\cos\varphi\,ds$$

die gesammte Arbeit. Integrationsgrenzen sind hier nicht angegeben worden, weil sie davon abhängen, ob man eine der Grössen $P$, $\varphi$, $s$ oder die Zeit als unabhängige Variabele betrachtet.

72. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Das virtuelle Moment einer Kraft ist, dem Vorigen zufolge, identisch mit der elementaren Arbeit dieser Kraft in Beziehung auf die virtuelle Verrückung ihres Angriffspunktes; man kann daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in folgender Form aussprechen:

Wenn ein System von materiellen Punkten im Gleichgewichte ist, so verschwindet die algebraische Summe der elementaren Arbeiten aller Kräfte bei jeder unter den Bedingungen des Systemes zulässigen virtuellen Verrückung der Punkte.

Auch findet umgekehrt das Gleichgewicht statt, sobald die erwähnte Summe verschwindet.

73. Arbeit der Resultante mehrerer Kräfte. Wenn die auf ein starres System wirkenden Kräfte eine Resultante haben, so können sie durch Einführung einer der Resultante gleichen und entgegengesetzten Kraft ins Gleichgewicht gesetzt werden; dann verschwindet aber die Summe der elementaren Arbeiten aller vorhandenen Kräfte, und es ist daher die Elementararbeit der neu eingeführten Kraft gleich und entgegengesetzt der algebraischen Summe der Elementararbeiten aller gegebenen Kräfte. Da ferner gleichen und entgegengesetzten Kräften gleiche und entgegengesetzte Arbeiten entsprechen, so hat man auch die Arbeit der Resultante, nämlich:

Die elementare Arbeit der Resultante mehrerer an einem starren Systeme wirkender Kräfte ist bei jeder virtuellen Verrückung der Punkte gleich der algebraischen Summe der Elementararbeiten der Componenten.

Denkt man sich eine Kraft $P$, deren virtuelles Moment oder deren Elementararbeit $= P\,dp$ ist, in ihre rechtwinkligen Componenten zerlegt, so hat man wie in Nr. 95 S. 92 die Gleichung

$$Pdp = Xdx + Ydy + Zdz;$$

der Ausdruck

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

stellt demnach die elementare Arbeit einer Kraft dar, deren Componenten $Y$, $X$, $Z$ sind und deren Angriffspunkt um die aus den Strecken $dx$, $dy$, $dz$ zusammengesetzte Strecke verschoben wird.

## Die lebendige Kraft.

74. Für die geradlinige Bewegung eines Punktes, dessen Masse $= m$ ist und auf welchen die bewegende Kraft $F$ wirkt, gilt die Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F;$$

dem Wege $dx$ entspricht die elementare Arbeit $Fdx$, und zufolge der vorigen Gleichung ist

$$1)\qquad Fdx = m\frac{d^2x}{dt^2}dx = \tfrac{1}{2}\,d\,(mv^2),$$

wobei $v$ die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ bezeichnet. Die erhaltene Gleichung lehrt, dass die elementare Arbeit, oder das unendliche kleine Increment der von $F$ überhaupt verrichteten Arbeit, gleich ist dem halben Zuwachs des Produktes $mv^2$. Letzteres nennt man die lebendige Kraft der bewegten Masse, und spricht daher die obige Gleichung in folgendem Satze aus: Bei der geradlinigen Bewegung eines freien Punktes ist die elementare Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem halben Incremente der lebendigen Kraft der bewegten Masse.

Dieses Theorem ändert sich nicht wesentlich, wenn die Kraft $F$ mit der Lage des Punktes oder mit der Zeit varriirt; man kann nämlich den durchlaufenen Weg oder die hierzu gebrauchte Zeit in unendlich kleine Theile zerlegen, den obigen Satz auf jedes einzelne Intervall anwenden und somit vom Anfange bis zum Ende einer beliebigen endiichen Strecke oder Zeit fortschreiten, d. h. die Gleichung 1) integriren. Man erhält

$$2)\qquad \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^{x} F dx,$$

wo $v_0$ und $v$ die Geschwindigkeiten zu Anfang und Ende einer bestimmten Strecke, $x_0$ und $x$ die entsprechenden Werthe von $x$ bedeuten. Die rechter Hand angedeutete Integration kann unmittelbar in dem Falle ausgeführt werden, wo $F$ nur von $x$ abhängt, und führt zu einem Resultate von der Form

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v^2 = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

In jedem Falle aber bedeutet das Integral von $F dx$ die Summe aller der positiven oder negativen Elementararbeiten, welche in den einzelnen unendlich kleinen Intervallen verrichtet wurden, d. h. die gesammte innerhalb der ganzen Zeit producirte Arbeit der Kraft $F$. Man hat daher den Satz:

Bei der geradlinigen Bewegung eines freien materiellen Punktes ist die von der bewegenden Kraft innerhalb irgend einer Zeit verrichtete Arbeit gleich dem halben Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen die bewegte Masse während dieser Zeit erhalten hat.

75. Um das entsprechende Theorem für die beliebig veränderliche krummlinige Bewegung eines freien Punktes zu entwickeln, denken wir uns eine die Masse $m$ bewegende Kraft $F$ in ihre rechtwinkligen Componenten $X$, $Y$, $Z$ zerlegt, und bilden die allgemeinen drei Gleichungen

$$1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Nach dem Früheren ist nun $Xdx+Ydy+Zdz$ die elementare Arbeit der Kraft $F$ und nach dem Obigen

$$Xdx+Ydy+Zdz=m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)$$

d. i.

$$2)\qquad Xdx+Ydy+Zdz=\tfrac{1}{2}d\,(mv^2);$$

dies giebt folgendes Theorem:

Bei der Bewegung jedes freien Punktes ist die elementare Arbeit der bewegenden Kraft, oder die Summe der elementaren Arbeiten ihrer Componenten, gleich dem halben Increment der lebendigen Kraft der bewegten Masse.

Durch Addition der Elementararbeiten, sowie der entsprechenden Incremente, d. i. durch Integration der Gleichung 2) gelangt man zu dem weiteren Satze:

Bei der Bewegung jedes freien Punktes ist die während irgend einer Zeit verrichtete Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem halben Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen die bewegte Masse während derselben Zeit erhalten hat.

Im Fall $X$, $Y$, $Z$ die, partiell nach $x$, $y$, $z$ genommenen Differentialquotienten einer Function von $x$, $y$, $z$ sind, bildet der Ausdruck $Xdx+Ydy+Zdz$ ein vollständiges Differential, etwa $d\varphi\,(x,y,z)$; die Gleichung 2) giebt in diesem Falle

$$3)\qquad \tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2=\varphi\,(x,y,z)-\varphi\,(x_0,y_0,z_0),$$

wo $v_0$ und $v$ die Geschwindigkeiten am Anfange und Ende des betrachteten Zeitintervalles, $x_0, y_0, z_0$ und $x, y, z$ die entsprechenden Coordinaten bedeuten.

76. Wir untersuchen endlich noch, wie sich die obigen Resultate in dem Falle gestalten, wo der bewegliche Punkt auf einer festen Curve oder Fläche zu bleiben gezwungen ist, setzen aber dabei

voraus, dass die Bewegung auf der Curve oder Fläche ohne Reibung geschieht. Die Curve oder Fläche erzeugt dann nur eine normale Kraft, deren Componenten zu den Componenten $X$, $Y$, $Z$ hinzugefügt werden müssen, wenn man den Punkt als frei betrachten will. Die Gleichungen der Bewegung sind jetzt

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+N\cos\lambda,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+N\cos\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+N\cos\nu;$$

multiplicirt man sie der Reihe nach mit $dx$, $dy$, $dz$ und addirt die die Produkte, so kommt

$$\tfrac{1}{2}d(mv^2)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$
$$+N(dx\cos\lambda+dy\cos\mu+dz\cos\nu).$$

Wegen der normalen Richtung von $N$ gegen die Trajectorie ist

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda+\frac{dy}{ds}\cos\mu+\frac{dz}{ds}\cos\nu=0,$$

und es verschwindet daher der Coefficient $N$, wie auch unmittelbar aus der Bemerkung hervorgeht, dass die Arbeit einer zur Trajectorie normalen Kraft $N$ verschwindet, weil die Projection von $ds$ auf die Kraftrichtung gleich Null ist. Die vorigen Sätze bleiben daher ungeändert, wenn sich ein Punkt auf einer festen Curve oder Fläche ohne Reibung bewegt.

Für den Fall, wo die Schwere die einzige äussere Kraft ist, hat man

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-gm,$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2=mg(z_0-z),$$

wie schon früher in Nr. 55 gefunden wurde.

## Siebentes Capitel.

# Das Princip der kleinsten Wirkung.

### Allgemeines Theorem.

77. Wenn ein Punkt, mag er frei oder gezwungen sein, sich auf einer festen Oberfläche zu bewegen, der Wirkung solcher Kräfte unterworfen ist, dass die Relation

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi(x, y, z)$$

besteht, folglich

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C$$

ist, so besitzt die Curve, welche er beschreibt, eine merkwürdige Eigenschaft in Beziehung auf das Integral $\int v\,ds$; nach Substitution des Werthes $v = \sqrt{2\varphi(x, y, z) + C}$ ist nämlich der Werth des obigen zwischen zwei Curvenpunkten $A$ und $B$ genommenen Integrales kleiner als für jede andere von den zwei Punkten $A$ und $B$ begrenzte Curve, welche auf der nämlichen festen Oberfläche, worauf sich der Punkt bewegt, gezogen wäre. Es handelt sich also darum, nachzuweisen, dass das Integral $\int ds\sqrt{2\varphi(x,y,z) + C}$ zu einem Minimum wird, wenn $x$, $y$, $z$ den Gleichungen der Trajectorie genügen, und man muss zu diesem Zwecke zeigen, dass die Variation $\delta\int v\,ds$ verschwindet. Fixirt man die beliebige Curve zwischen $A$ und $B$, auf welcher der materielle Punkt bleiben muss, so wird übrigens seine Geschwindigkeit immer durch dieselbe Formel

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C$$

ausgedrückt. Nun liefert die Variationsrechnung

$$\delta\int v\,ds = \int \delta(v\,ds) = \int (\delta v\,ds + v\,\delta ds),$$

wo alle diese Integrale zwischen den Grenzen $A$ und $B$ genommen sind. Weiter hat man

$$\delta v\,.\,ds = v\,\delta v\,dt = \tfrac{1}{2}\delta\,(v^2)\,dt,$$

und die Gleichung

$$v^2 = 2\varphi\,(x, y, z) + C$$

giebt

$$\tfrac{1}{2}\delta\,(v^2) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z;$$

wobei zu beachten ist, dass in den Ausdrücken $X$, $Y$, $Z$ die Werthe von $x$, $y$, $z$ sich auf die Punkte der Trajectorie beziehen, und dass $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ die entsprechenden Coordinaten der unendlichen nahen Curve bedeuten.

Ist der Punkt gezwungen, auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so hat man in jedem Augenblicke:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu;$$

bei einem freien Punkte ist $N = 0$ zu setzen, mithin können die vorstehenden Formeln für beide Fälle dienen. Man leitet aus ihnen folgende Gleichung her:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$
$$- N\,(\delta x\cos\lambda + \delta y\cos\mu + \delta z\cos\nu).$$

Das letzte Glied des zweiten Theils verschwindet, wenn der Punkt frei ist, weil dann $N = 0$; es annullirt sich gleichfalls, wenn ausserdem, dass der Punkt auf einer festen Oberfläche zu bleiben genöthigt ist, die unendlich nahe Curve auch auf ihr liegt, weil die Gerade, welche zwei entsprechende Punkte verbindet, senkrecht auf der Normalen steht, welche mit den Achsen die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bildet, und weil ebendesswegen

$$\delta x\cos\lambda + \delta y\cos\mu + \delta z\cos\nu = 0$$

sein muss. In diesen beiden Fällen ist also

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z,$$

folglich

$$\delta v\,.\,ds = dt\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

Aus der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

erhält man weiter

$$ds\,\delta ds = dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz,$$

welche durch Division mit $dt$ und Vertauschung der Zeichen $\delta$ mit $d$ zur folgenden wird

$$v\,\delta\,ds = \frac{dx}{dt}\,d\delta x + \frac{dy}{dt}\,d\delta y + \frac{dz}{dt}\,d\delta z.$$

Die Vereinigung der beiden Theile der Variation von $\int v\,ds$ giebt

$$\delta\int v\,ds = \int d\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)$$
$$= \frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z,$$

und dieser letzte Ausdruck muss zwischen den beiden Grenzen des Integrals genommen werden. Er verschwindet aber an den Grenzen, weil für die festen Endpunkte $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ der Null gleich sind; es genügt sogar, dass die Verrückung dieser beiden Punkte nach einer zur Trajectorie senkrechten Richtung geschieht, um in beiden Fällen die Gleichung

$$\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z = 0$$

zu erhalten. Da die Variation $\delta\int v\,ds$ verschwindet, so wird das Integral $\int v\,ds$ im Allgemeinen zu einem Maximum oder Minimum; man sieht jedoch, dass ein Maximum nicht eintreten kann.

78. Wird der Punkt gezwungen, sich auf einer festen Oberfläche zu bewegen, und durch keine äussere Kraft getrieben, so bleibt seine Geschwindigkeit constant, und $\int v\,ds = vs$; mithin ist der durchlaufene Bogen ein Minimum zwischen irgend zweien seiner Punkte, und folglich ist auch die zum Durchlaufen gebrauchte Zeit ein Minimum.

### Anwendungen des vorigen Theoremes.

79. Da die von einem freien Punkte beschriebene Trajectorie, oder auch die Curve, welche ein Punkt durchläuft, der sich auf

einer Oberfläche bewegen muss, der Bedingung des Minimums von $\int v\,ds$ genügt, sobald die Bedingung

$$X dx + Y dy + Z dz = d\varphi(x, y, z)$$

erfüllt ist, so kann man dadurch, dass man diese Relation ausdrückt, zu den Gleichungen jener Curve gelangen. Betrachten wir zuerst einen freien Punkt. Setzt man für $v$ seinen aus der Gleichung

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C$$

gezogenen Werth, so ist das Integral

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,\sqrt{2\varphi(x,y,z) + C}$$

zu einem Minimum zu machen. Die Regeln der Variationsrechnung liefern dann folgende Gleichungen:

$$\frac{X ds}{v} = d\left(v\frac{dx}{ds}\right), \quad \frac{Y ds}{v} = d\left(v\frac{dy}{ds}\right), \quad \frac{Z ds}{v} = d\left(v\frac{dz}{ds}\right).$$

Diese drei Gleichungen reduciren sich auf zwei und sind die der Trajectorie, wenn man $v$ durch $x$, $y$, $z$ ausdrückt. Die Ausführung der Differentiationen giebt, indem man $v$ als unabhängige Variable ansieht,

$$X = v^2\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

$$Y = v^2\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

$$Z = v^2\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right).$$

Multiplicirt man die erste mit $\frac{dy}{ds}$, die zweite mit $\frac{dx}{ds}$, und subtrahirt sie, multiplicirt man dann die erste mit $\frac{dz}{ds}$ und die dritte mit $\frac{dx}{ds}$ und subtrahirt sie ebenfalls, so erhält man die beiden folgenden Beziehungen, welche als Gleichungen der Trajectorie gelten können:

$$Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds},$$

$$Z\frac{dx}{ds} - X\frac{dz}{ds} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{ds}.$$

Betrachtet man $x$ als unabhängige Variable und multiplicirt die beiden Theile dieser Gleichungen mit $\frac{ds}{dx}$, so wird

$$Y - X\frac{dy}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$Z - X\frac{dz}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Diese Gleichungen verwandeln sich in die früheren für die Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche, sobald man die von der Oberfläche herrührende Kraft gleich Null setzt. Die Integration geschieht, nachdem man für $v^2$ seinen Werth $2\varphi(x, y, z) + C$ und für $X$, $Y$, $Z$ ihre als Functionen von $x$, $y$, $z$ gegebenen Werthe substituirt hat.

Das Princip der kleinsten Wirkung würde ebenfalls die Gleichungen der Trajectorie geben, wenn der Punkt gezwungen ist, sich auf einer festen Oberfläche zu bewegen.

80. Bewegt sich ein freier Punkt vermöge einer nur von der Entfernung abhängigen Centralkraft, so ist die Curve eine ebene, und es bedarf nur zweier Coordinaten $x$ und $y$; ferner ist $Xdx + Ydy$ ein exactes Differential, so dass das Princip der kleinsten Wirkung stattfindet und zur Bestimmung der Trajectorie angewendet werden darf. Doch ist es in diesem Falle einfacher, Polarcoordinaten $r$ und $\vartheta$ zu gebrauchen, indem man zum Pole das Centrum der Wirkung nimmt.

Nennt man $\varphi$ die gegen das Centrum gerichtete Kraft und rechnet die Constante in das unbestimmte Integral ein, so hat man

$$v^2 = -2\int \varphi\, dr, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2},$$

und das Integral, welches zu einem Minimum werden soll, ist

$$\int \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}\sqrt{-2\int\varphi\, dr}.$$

Die Variationsrechnung führt zu der Gleichung

$$d\,\frac{r^2 d\vartheta\sqrt{-2\int\varphi\, dr}}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}} = 0,$$

oder

$$\frac{r^2 d\vartheta\sqrt{-2\int\varphi\, dr}}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}} = c,$$

wo $c$ eine willkürliche Constante bezeichnet.

Daraus leitet man ab

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{dr^2}{r^4\, d\vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

oder

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta}\right)^2\right].$$

Kennt man die Kraft $\varphi$ als Function von $r$, so bildet $\int \varphi\, dr$ eine bekannte Function von $r$, und man kann so die Polargleichung der Trajectorie erhalten, welche wir später auf einem andern Wege wiederfinden werden.

## Achtes Capitel.

# Bestimmung der Kräfte bei der relativen Bewegung eines Punktes.

### Relative Bewegung eines freien Punktes.

81. Die relative beschleunigende Kraft. Das allgemeine Problem, mit dessen Lösung wir uns beschäftigen wollen, ist folgendes: „man kennt einerseits die Kräfte und sonstigen Bedingungen, wodurch die absolute Bewegung eines materiellen Punktes bestimmt wird, andererseits die absolute Bewegung eines starren Punktesystemes, und will nun neue Kräfte und Bedingungen so bestimmen, dass die hieraus resultirende absolute Bewegung jenes Punktes dieselbe ist wie seine relative Bewegung gegen das erwähnte System". Mit anderen Worten, wir suchen die relative Bewegung eines Punktes auf eine absolute Bewegung zurückzuführen, und stellen deshalb die Frage, wie die Bestimmungsdata der zwei gegebenen absoluten Bewegungen modificirt oder mit einander combinirt werden müssen, um die Data einer mit der relativen Bewegung identischen absoluten Bewegung zu erhalten.

Wie früher denken wir uns zwei rechtwinklige Coordinatensysteme $AX$, $AY$, $AZ$ und $A'X'$, $A'Y'$, $A'Z'$, von denen das erste im Raume unbeweglich und das zweite mit dem Punktesysteme fest verbunden, also mit diesem beweglich ist; die absolute Lage des beweglichen Punktes bestimmt sich dann jederzeit durch die Coordinaten $x$, $y$, $z$, seine relative Lage gegen das System durch die Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$. Die Anfangszustände der gegebenen Bewegungen kennt man, mithin auch den Anfangszustand der absoluten Bewegung, welche mit der relativen Bewegung des Punktes gegen das System identisch ist, man hat daher nur noch die beschleunigende Kraft zu ermitteln, welche für sich allein die letztere Bewegung hervorbringen würde.

Dem Früheren zufolge wird bei jeder absoluten Bewegung die beschleunigende Kraft, sowohl der Grösse als der Richtung nach, durch die Deviation gemessen. Wenden wir dieses Gesetz auf die relative Deviation des Punktes an, die mit der Deviation in der gesuchten absoluten Bewegung identisch ist, so erhalten wir die beschleunigende Kraft, um die es sich gerade handelt, die sogenannte relative beschleunigende Kraft. Wir haben daher auf die in Nr. 54 der Phoronomie entwickelte Zerlegung der Deviation zurückzugehen. Diese Zerlegung geschieht analog der Zerlegung von Kräften und ist dabei nur zu berücksichtigen, dass die beschleunigende Kraft erhalten wird, wenn man die Deviation durch $\frac{1}{2}\vartheta^2$ dividirt, wobei $\vartheta$ das unendlich kleine der Deviation entsprechende Zeitintervall bezeichnet. Die Componenten der relativen Deviation, dividirt durch $\frac{1}{2}\vartheta^2$, geben demnach die Componenten der relativen beschleunigenden Kraft; überhaupt gelangt man zu folgendem Satze:

Die relative beschleunigende Kraft bildet die Resultante von drei anderen beschleunigenden Kräften. Von diesen ist die erste die beschleunigende Kraft in der absoluten Bewegung des Punktes, d. h. die gegebene Kraft selber; die zweite Componente ist die im entgegengesetzten Sinne genommene beschleunigende Kraft in der absoluten Bewegung des mit dem beweglichen Punkte zusammenfallenden Systempunktes (die Reaction dieses Punktes). Die dritte Componente wird durch $2\omega v \sin\delta$ ausgedrückt, und zwar bezeichnet hier $v_r$ die relative Geschwindigkeit des beweglichen Punktes, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit, womit das System um seine momentane Drehungsachse rotirt, und $\delta$ den Winkel zwischen der Richtung von $v_r$ und der augenblicklichen Drehungsachse. Die letztere Componente steht senkrecht auf der Ebene, welche $v_r$ und die momentane Drehungsachse enthält, und der Sinn ihrer Richtung ist entgegengesetzt dem Sinne der augenblicklichen Drehung des Systemes; sie kann daher als Achse einer

Drehung betrachtet werden, welche die Richtung der relativen Geschwindigkeit auf dem kürzesten Wege in die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse überführt.

Diese Zerlegung wurde zuerst von Coriolis gefunden, welcher der zweiten Componente, im entgegengesetzten Sinne genommen, den Namen „*force d'entraînement*“ und der dritten den Namen „zusammengesetzte Centrifugalkraft“ gegeben hat. Specielle Fälle dieses Satzes, wie wir sie nachher anführen werden, waren schon vorher von Newton und Clairaut behandelt worden.

Man darf übrigens nicht vergessen, dass die drei Componenten der relativen beschleunigenden Kraft nicht unmittelbar gegeben sind, und sogar von der relativen Bewegung selber abhängen, weil $v_r$ und $\delta$ erst dann bekannt sind, wenn die relative Bewegung völlig bestimmt ist. Die angegebene Zerlegung wird daher selten von praktischem Nutzen sein, vielmehr hat sie nur einen theoretischen Werth als anschauliche Interpretation der Differentialgleichungen für die relative Bewegung. In der That ist auch Coriolis von diesen Gleichungen ausgegangen und durch Analyse ihrer einzelnen Bestandtheile zu jener Zerlegung gelangt, wie es auf ähnliche Weise in Nr. 56 der Phoronomie geschehen ist.

Wenn sich die absolute Bewegung des Punktes aus den vorhandenen Daten unmittelbar bestimmen lässt, so bedarf es keiner Untersuchung der relativen beschleunigenden Kraft; vielmehr hat man es dann nur mit der Combination zweier bekannten absoluten Bewegungen, d. h. mit einer phoronomischen Aufgabe zu thun. Meistentheils besteht aber das zu behandelnde Gleichungensystem aus den drei Gleichungen der absoluten Bewegung des Punktes und einer oder zwei Bedingungsgleichungen, worin sowohl $x, y, z$ als $x', y', z'$ und auch noch andere von der Bewegung des starren Systemes abhängige Grössen vorkommen können, ausserdem gelten immer die Gleichungen, welche $x, y, z$ mit $x', y', z'$ verbinden und deren Coefficienten gegebene Functionen der Zeit sind. Bei einem freien Punkte, sowie in dem Falle, wo die Bedingungsgleichungen nur $x, y, z$ enthalten, lässt sich die absolute Bewegung des Punktes für sich bestimmen; dies kann aber nicht mehr geschehen, sobald jene Gleichungen auch von der Bewegung des starren Systemes abhängen, wie es gewöhnlich der Fall ist.

82. Progressive Bewegung des Systemes. Wenn das System der $x'$, $y'$, $z'$ nur eine fortschreitende Bewegung hat, bei welcher alle Punkte desselben mit einer gemeinschaftlichen, wenn auch nicht constanten Geschwindigkeit parallele und gleiche Curven beschreiben, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$ und mithin verschwindet die dritte Componente der relativen beschleunigenden Kraft. Das allgemeine Theorem kommt dann auf folgendes speciellere zurück:

Bei der progressiven Bewegung des starren Systemes besteht die relative beschleunigende Kraft aus zwei Componenten, deren erste gleich der gegebenen beschleunigenden Kraft des Punktes, und deren zweite gleich und entgegengesetzt der beschleunigenden Kraft ist, welche die Bewegung irgend eines Systempunktes bestimmt.

Dieser specielle Fall, auf den man sich in den meisten Lehrbüchern beschränkt, genügt z. B. für die relative Bewegung der Planeten und kann leicht unmittelbar abgeleitet werden.

Ist die progressive Bewegung des Systemes geradlinig und gleichförmig, so verschwindet auch die zweite Componente, und die relative beschleunigende Kraft wird dann identisch mit der gegebenen Kraft.

83. Drehende Bewegung des Systemes. Wenn das starre System nur eine Rotationsbewegung hat, welche wir als gleichförmig voraussetzen wollen, so ist die zweite Componente der relativen beschleunigenden Kraft identisch mit der Centrifugalkraft des coincidirenden Systempunktes; die dritte Componente behält ihren Werth $2\omega v_r \sin\delta$. Was dieser Ausdruck bedeutet, wollen wir an dem Falle zeigen, wo das rotirende System die Erde ist.

Die Bewegung der Erde um die Sonne wird von der Anziehung der letzteren, d. h. von einer Kraft herbeigeführt, die bei jeder Lage der Erde auf gleiche Massen nahezu gleich wirkt; ebendesswegen ändert sie die relativen Bewegungen auf der Erde in einem so unmerklichen Grade, dass von ihr abgesehen werden kann. Wir dürfen daher die Erdachse als unbeweglich im Raume ansehen; um dieselbe dreht sich die Erde einmal in einem Sterntage $= 86164$ Secunden und es folgt daraus für $\omega$ der sehr kleine Werth

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073.$$

Der Winkel $\delta$ ist im vorliegenden Falle der Winkel zwischen der Richtung der relativen Geschwindigkeit und der Erdachse oder das Complement des Winkels zwischen der Richtung von $v_r$ und dem Aequator, $v_r \sin\delta$ bedeutet daher die Projection der relativen Geschwindigkeit auf den Aequator.

Bei einer nicht sehr beträchtlichen relativen Geschwindigkeit wird die Componente $2\omega v_r \sin\delta$ sehr klein im Vergleich zu den beiden ersten Componenten und kann deshalb für eine erste Annäherung vernachlässigt werden. Dies giebt folgenden Satz:

Die scheinbare Bewegung eines Punktes an der Erdoberfläche kann bei geringen Geschwindigkeiten näherungsweise so berechnet werden, dass man die Erde als unbeweglich ansicht und zu den gegebenen auf den Punkt wirkenden Kräften die Centrifugalkraft hinzufügt.

Ist die Anziehung der Erde die einzige auf den Punkt wirkende Kraft, so kommt man auf das in Nr. 38 entwickelte Resultat zurück.

Die im vorigen Theoreme vernachlässigte Componente $2\omega v_r \sin\delta$ bewirkt gewisse Modificationen, die wir nicht näher untersuchen wollen. In ihr liegt z. B. die Ursache der längst bekannten Erscheinung, dass frei fallende Körper bei grossen Fallhöhen merklich nach Osten abweichen; sie bewirkt ferner auch die Drehung der Schwingungsebene eines Pendels, welche Poisson wegen der Kleinheit der Kraft für unbeobachtbar hielt, die aber durch den Foucault'schen Versuch deutlich erkannt worden ist.

Nach dem Früheren stimmt die relative Bewegung überein mit einer absoluten Bewegung, welche von demselben Anfangszustande ausgeht und worin die beschleunigende Kraft durch die relative beschleunigende Kraft ersetzt ist; hieraus folgt, dass alle für die absolute Bewegung eines freien Punktes bewiesenen Sätze auch für die relative Bewegung giltig bleiben, wenn man die relative beschleunigende Kraft als die einzige auf den Punkt wirkende Kraft betrachtet. Diese Uebertragung früherer Theoreme wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

84. Princip der Flächen für die relative Bewegung. Die vorige Bemerkung führt unmittelbar zu folgendem Satze:

Wenn die relative beschleunigende Kraft immer durch einen und denselben Punkt des bewegten Systemes geht, so ist die relative Trajectorie des beweglichen Punktes eine ebene Curve, zugleich beschreibt der vom Kraftcentrum nach dem beweglichen Punkte gezogene Radiusvector Flächen, welche der Zeit proportional wachsen.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Wenn der von einem bestimmten, im Systeme unveränderlichen Punkte nach dem beweglichen Punkte gezogene Radiusvector Flächen beschreibt, deren Projectionen auf die mit dem Systeme verbundenen Coordinatenebenen proportional der Zeit wachsen, wenn also die relative Trajectorie des Punktes eine Plancurve ist, worin der Radiusvector gleichfalls den Zeiten proportionale Flächen beschreibt, so geht die relative beschleunigende Kraft immer durch jenen relativ festen Punkt.

85. Gleichung der lebendigen Kraft für die relative Bewegung. Bei der absoluten Bewegung des Punktes, die mit seiner relativen Bewegung gegen das System identisch ist, beträgt das in einer unendlich kleinen Zeit entstehende halbe Increment der lebendigen Kraft ebensoviel, als die während derselben Zeit verrichtete Arbeit der beschleunigenden Kraft; auf die relative Bewegung angewendet, gilt dieser Satz gleichfalls, wenn man die beschleunigende Kraft durch die relative beschleunigende Kraft ersetzt. Die letztere besteht aus drei Componenten, mithin ist ihre elementare Arbeit gleich der Summe von den elementaren Arbeiten ihrer Componenten. Da aber die dritte Componente senkrecht auf der relativen Geschwindigkeit steht, so ist ihre Arbeit $= 0$, und es setzt sich daher die Arbeit der relativen beschleunigenden Kraft nur aus den Arbeiten der beiden ersten Componenten zusammen. Wir gelangen damit zu folgendem Theoreme:

Bei der relativen Bewegung eines Punktes ist das innerhalb eines unendlich kleinen Zeitintervalles entstandene halbe Increment der lebendigen Kraft gleich der Summe zweier innerhalb derselben Zeit verrichteten Arbeiten, nämlich der Arbeit der gegebenen beschleunigenden Kraft des beweglichen

Punktes und der Arbeit einer Kraft, welche der beschleunigenden Kraft des in jenem Augenblicke mit dem beweglichen Punkte coincidirenden Systempunktes gleich und entgegengesetzt ist.

### Relative Bewegung eines nicht völlig freien Punktes.

86. Einem nicht ganz freien Punkte steht entweder eine Fläche oder eine Curve, d. h. der Durchschnitt zweier Flächen, als Spielraum frei; seine Bewegung bleibt also entweder an eine oder an zwei Bedingungsgleichungen gebunden, welche letztere sowohl die Zeit, als die absoluten oder relativen Coordinaten des Punktes enthalten können. Da sich die einen Coordinaten mittelst bekannter Transformationsgleichungen durch die anderen ausdrücken lassen, so kann man immer annehmen, dass in jenen Bedingungsgleichungen, ausser der Zeit, nur die einen Coordinaten, z. B. die relativen vorkommen. Vermöge einer solchen Gleichung ist nun der Punkt zum Verbleiben auf einer Fläche gezwungen, die sich mit der Zeit ändert, aber in jedem Augenblicke nach Gestalt und Lage gegen das bewegliche Coordinatensystem bestimmt ist. Diese Fläche bietet immer einen normalen Widerstand dar und wenn man diese Normalkraft mit den schon vorhandenen am Punkte wirkenden Kräften vereinigt, so darf man von der Fläche abstrahiren, d. h. den Punkt als vollkommen frei betrachten. Ist ferner dem Punkte eine bestimmte Curve angewiesen, so kann man letztere als Durchschnitt zweier Flächen ansehen und von letzteren abstrahiren, indem man gleichzeitig zwei neue Normalkräfte einführt, die sich wieder zu einer einzigen in die Normalebene der Curve fallende Kraft zusammensetzen lassen. Demnach gilt auch für die relative Bewegung eines nicht ganz freien Punktes die Regel, dass man ihn als völlig freien Punkt betrachten kann, wenn man zu der relativen beschleunigenden Kraft noch die aus dem Widerstande der Fläche oder Curve entspringende Normalkraft hinzunimmt.

Ist nur eine Bedingungsgleichung vorhanden, so kommt hiernach eine neue Unbekannte in Rechnung, zugleich aber auch eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes; bei zwei Bedingungsgleichungen vermehrt sich sowohl die Anzahl der Unbekannten, als die der Gleichungen um zwei Einheiten; man hat daher immer ebensoviel Unbekannte als Gleichungen.

Nach dem in Nr. 85 Gesagten bedarf es kaum der Bemerkung, dass der Satz von der lebendigen Kraft auch für eine relative Bewegung gilt, bei welcher der Punkt auf einer Fläche oder Curve bleibt, die von unveränderlicher Form und mit dem beweglichen Systeme fest verbunden ist. Da nämlich in diesem Falle die Normalkraft senkrecht auf der relativen Trajectorie steht, so verschwindet die von ihr verrichtete Arbeit und kommt nicht weiter in Rechnung.

---

## Anhang.

# Ueber einige Formeln der analytischen Geometrie des Raumes.

### 1. Senkrechte zu zwei Geraden.

Seien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ die Winkel, welche die gegebenen Geraden mit den positiven Achsen der $x$, $y$, $z$ bilden, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Richtungswinkel des auf jenen beiden Geraden errichteten Perpendikels, so hat man folgende zwei Bedingungen:

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = 0,$$
$$\cos\alpha' \cos\lambda + \cos\beta' \cos\mu + \cos\gamma' \cos\nu = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der drei unbekannten Cosinus und liefern:

$$\begin{aligned} ccs\,\lambda : \cos\mu : \cos\nu = (&\cos\beta' \cos\gamma - \cos\gamma' \cos\beta) \\ :(&\cos\gamma' \cos\alpha - \cos\alpha' \cos\gamma) \\ :(&\cos\alpha' \cos\beta - \cos\beta' \cos\alpha); \end{aligned}$$

da die Summe der drei Quadrate der Cosinus gleich der Einheit ist, so erhält man, wenn

$$\begin{aligned} (\cos\beta' \cos\gamma - \cos\gamma' \cos\beta)^2 + (\cos\gamma' \cos\alpha - \cos\alpha' \cos\gamma)^2 \\ + (\cos\alpha' \cos\beta - \cos\beta' \cos\alpha)^2 = D^2 \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta' \cos\gamma - \cos\gamma' \cos\beta}{\pm D}, \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma' \cos\alpha - \cos\alpha' \cos\gamma}{\pm D},$$
$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha' \cos\beta - \cos\beta' \cos\alpha}{\pm D},$$

wo der Nenner für alle drei Cosinus mit demselben Zeichen genommen werden muss, und diese in demselben Verhältnisse wie ihre Zähler stehen. Was den Werth von $D^2$ anbetrifft, so kann er unter folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') \\ - (\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma')^2; \end{aligned}$$

er ist also gleich:

$$1 - \cos^2 V = \sin^2 V,$$

wo $V$ den Winkel zwischen beiden Geraden bezeichnet; man hat demnach:

$$\cos\lambda = \pm \frac{\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma'}{\sin V},$$

$$\cos\mu = \pm \frac{\cos\gamma' \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha'}{\sin V},$$

$$\cos\nu = \pm \frac{\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta'}{\sin V}.$$

Die doppelten Vorzeichen entsprechen zwei entgegengesetzten Richtungen; in der That liegt auch in der vorigen Betrachtung nichts, was über den Sinn, in welchem das Perpendikel zu nehmen ist, eine Entscheidung gäbe.

### 2. Der Sinn einer Senkrechten zu zwei Geraden.

Legen wir durch den Coordinatenanfang zwei Gerade parallel den gegebenen Richtungen $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$ und wählen auf der ersten irgend einen Punkt, so sind seine Coordinaten $x$, $y$, $z$ den Cosinus der drei Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ proportional und mit denselben Vorzeichen versehen; wir ziehen ferner durch diesen Punkt eine Parallele zu der durch die Winkel $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ bestimmten Richtung und lassen auf dieser letzten Richtung sich einen Punkt bewegen. Denken wir uns einen Beobachter, der, mit den Füssen gegen die Ebene der beiden Geraden gestützt, in dem auf dieser Ebene errichteten Perpendikel steht, so wird demselben die Bewegung des Radiusvector von der Linken zur Rechten oder umgekehrt vor sich zu gehen scheinen, jenachdem er auf der einen oder andern Seite der Ebene steht. Wir unterscheiden diese beiden Arten der Bewegung so, dass wir die Drehung von der Linken zur Rechten als die d i r e c t e, und die entgegengesetzte Drehung als die r e t r o g a d e bezeichen; zugleich möge A c h s e n r i c h t u n g  d e r  E b e n e zweier Geraden die Richtung des Perpendikels heissen, für das jene Bewegung direct ist.

Die Werthe der Cosinus der Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$, welche das Perpendikel mit den Coordinatenachsen einschliesst, sind nach der vorhergehenden Formel, wenn man in dieselbe $x$, $y$, $z$ für $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ substituirt, folgende:

$$\cos\lambda = \frac{y\cos\gamma' - z\cos\beta'}{\pm p}, \quad \cos\mu = \frac{z\cos\alpha' - x\cos\gamma'}{\pm p},$$

$$\cos\nu = \frac{x\cos\beta' - y\cos\alpha'}{\pm p},$$

wo $p$ den Werth

$$\sqrt{(y\cos\gamma' - z\cos\beta')^2 + (z\cos\alpha' - x\cos\gamma')^2 + (x\cos\beta' - y\cos\alpha')^2}$$

hat, so dass $p$ nichts Anderes ist, als das Perpendikel vom Coordinatenanfang auf die durch den Punkt $x\,y\,z$ in der Richtung

($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$) gezogene Gerade. Es ist nun zu entscheiden, welches Zeichen dem $p$ gegeben werden muss, damit die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sich auf die definirte Achsenrichtung der Ebene beziehen. Zu diesem Zwecke bemerken wir erst Folgendes. Wenn in einer Ebene, die wir der Einfachheit wegen durch den Coordinatenanfang legen, ein Radiusvector sich um den letzteren Punkt in einem bestimmten Sinne bewegt, und nachher dieser Radiusvector auf irgend eine andere Ebene projicirt wird, so ist die Achse der letztern Bewegung diejenige von den beiden Richtuntungen des Perpendikels auf diese neue Ebene, welche einen spitzen Winkel mit der Achsenrichtung der ersteren Bewegung bildet.

Nachdem dies festgestellt, wollen wir zunächst die Projection des Radiusvector auf die Ebene $XY$ betrachten und mit $\vartheta$ den Winkel bezeichnen, welchen seine Richtung mit jener der positiven $x$ einschliesst, so dass die positive Achse der $y$ dem Werthe von $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ entspricht. Die Bewegung ist dann direct rücksichtlich der Achse der positiven $z$ wenn $\vartheta$ wächst, im entgegengesetzten Falle ist sie direct in Bezug auf die Achse der negativen $z$. Auch weiss man, dass ein Winkel immer gleichzeitig mit dem algebraischen Werth seiner Tangente wächst oder abnimmt.

Es bildet also die Projection des durch den Punkt $x\,y\,z$ gelegten Radiusvector auf die Ebene $XY$ mit der Achse der $x$ einen Winkel, dessen Tangente allgemein durch den Ausdruck $\frac{y}{x}$ dargestellt wird. Wenn der Punkt $x\,y\,z$ in der Richtung ($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$) um irgend eine Grösse $m$ fortrückt, so wird diese Tangente $= \frac{y + m\cos\beta'}{x + m\cos\alpha'}$; ihr Zuwachs beträgt also $\frac{m\,(x\cos\beta' - y\cos\alpha')}{x^2 + m\,x\cos\alpha'}$, und da man $m$ so klein nehmen kann, dass der Nenner positiv ausfällt, so muss das Vorzeichen dieses Zuwachses das des Zählers ($x\cos\beta' - y\cos\alpha'$) sein. Die Projection des Radiusvector auf $XY$ erhält demnach eine Bewegung, deren Achse die Achse der positiven $z$ ist, wenn

$$x\cos\beta' - y\cos\alpha' > 0;$$

und folglich muss die Achse der Bewegung im Raume einen spitzen Winkel mit der Achse der positiven $z$ bilden. Ebenso haben die Projectionen auf $YZ$ und $XZ$ eine directe Bewegung in Bezug auf die Achsen der positiven $x$ und $y$, wenn

$$y\cos\gamma' - z\cos\beta' > 0, \quad z\cos\alpha' - x\cos\gamma' > 0.$$

Findet eine dieser Ungleichungen im entgegengesetzten Sinne statt, so ist die entsprechende Bewegung direct in Bezug auf die negative Achse, und die Achse der Bewegung bildet einen stumpfen Winkel mit der zugehörigen positiven Achse.

Die Cosinus der Winkel, welche die von uns betrachtete Achse der Bewegung mit den Achsen der positiven $x$, $y$, $z$ einschliesst, haben also dieselben Zeichen wie die Zähler der vorhin gefundenen Werthe; mithin ist $p$ positiv zu nehmen, was folgende Formeln giebt:

$$1)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{y\cos\gamma' - z\cos\beta'}{p}, \\ \cos\mu = \dfrac{z\cos\alpha' - x\cos\gamma'}{p}, \\ \cos\nu = \dfrac{x\cos\beta' - y\cos\alpha'}{p}. \end{cases}$$

Substituirt man für $x, y, z$ die proportionalen Werthe $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, welche mit denselben Vorzeichen versehen sind, so erhält man:

$$2)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\sin V}, \\ \cos\mu = \dfrac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin V}, \\ \cos\nu = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin V}, \end{cases}$$

wo $V$ den Winkel zwischen beiden Richtungen bezeichnet. Diese Formeln beziehen sich auf die Achse einer Bewegung, die in der Ebene der beiden Richtungen $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$ von dem Radiusvector vollführt wird, wobei er sich um ihren Durchschnitt dreht und von der ersten nach der zweiten hingeht. Durch Vertauschung beider Richtungen erhält man eine Bewegung im umgekehrten Sinne, und wirklich ändern dann die obigen Cosinus ihre Zeichen nicht, aber ihre absoluten Zahlenwerthe.

Sind die beiden gegebenen Richtungen rechtwinklig auf einander, so erhält man:

$$3)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta', \\ \cos\mu = \cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma', \\ \cos\nu = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'. \end{cases}$$

Schneidet man vom Coordinatenanfang aus auf der Richtung $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ eine Strecke $q$ ab, so bestimmen sich die Coordinaten ihres Endpunktes durch die Formeln

$$x' = q\cos\alpha', \quad y' = q\cos\beta', \quad z' = q\cos\gamma',$$

und die Gleichungen 1) gehen über in

$$pq\cos\lambda = yz' - zy', \quad pq\cos\mu = zx' - xz', \quad pq\cos\nu = xy' - yx'.$$

Zufolge der Bedeutung von $p$ ist $pq$ die Fläche des Parallelogrammes, welches aus den beiden vom Coordinatenanfange nach den Punkten $xyz$ und $x'y'z'$ gezogenen Strecken construirt werden kann. Diese Fläche bezeichnen wir mit $P$ und haben dann die Gleichungen

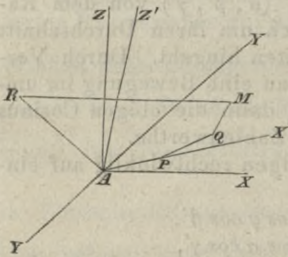
$$4)\quad P\cos\lambda = yz' - zy', \quad P\cos\mu = zx' - xz', \quad P\cos\nu = xy' - yx';$$

dabei beziehen sich $\lambda$, $\mu$, $\nu$ auf die Achse der Fläche, welche letztere durch einen, auf dem kürzesten Wege von der Richtung $\alpha\beta\gamma$ in die Richtung $\alpha'\beta'\gamma'$ übergehenden Radiusvector beschrieben wird. Denkt man sich auf dieser Achse eine der Fläche $P$ proportionale Strecke abgeschnitten, so bestimmen die Gleichungen 4) die Projectionen dieser Strecke auf die Coordinatenachsen.

### 3. Die Transformation der Coordinaten.

Wir stellen uns die Aufgabe, von einem rechtwinkligen Coordinatensystem $x$, $y$, $z$ zu irgend einem andern schiefen System $x'$, $y'$, $z'$ mit demselben Anfangspunkte überzugehen, und nehmen dabei, wie wir es immer thun wollen, die Lage der Achsen in der Weise an, dass ein Radiusvector, welcher sich um den Anfangspunkt in den drei Winkeln der positiven Achsen bewegt, von der Achse der $x$ ausgehend, zuerst gegen die Achse der $y$, nachher gegen die der $z$ fortrückt, und endlich zur Achse der $x$ zurückkehrt, dass also die Richtungen der positiven Achsen die Achsen dieser drei Bewegungen sind. Ferner nennen $a$, $a'$, $a''$ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der positiven $x'$ mit den Richtungen der positiven $x$, $y$, $z$ bildet, $b$, $b'$, $b''$ die Cosinus, welche sich auf die Richtung der positiven $y'$ beziehen, und $c$, $c'$, $c''$ die, welche der Richtung der positiven $z'$ entsprechen.

Fig. 24.




Die Coordinaten irgend eines Punktes $M$ mögen durch $AP = x'$, $PQ = y'$, $QM = z'$ dargestellt werden, $MR = x$ sei senkrecht auf der Ebene $YZ$, und $R$ mit $A$ durch die Gerade $RA$ verbunden; projicirt man nun das geschlossene Polygon $APQMRA$ auf $AX$, so findet man leicht die Gleichung

$$ax' + by' + cz' - x = 0$$

vorausgesetzt, dass die vier Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$, $x$ positiv sind. Ist eine von ihnen, z. B. $y'$, negativ, so ist die Seite des Polygons, die dem absoluten Werthe nach gerechnet werden muss, als $-y'$ zu bezeichnen, aber da sie dann im Sinne der negativen $y'$ durchlaufen wird, so muss der sie multiplicirende Cosinus sein Zeichen ändern und $-b$ sein; der Ausdruck, welchen man hinzuzuschreiben hat, bleibt dennoch immer $by'$, und die Gleichung ist allgemein, indem man die Coordinaten als negativ betrachtet, wenn sie im entgegengesetzten Sinne mit den durch die Cosinus gegebenen Achsen gerichtet sind.

Für die Coordinaten $y$ und $z$ findet man zwei analoge Gleichungen, mithin als allgemeine Gleichungen der Transformation

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}\right.$$

zu denen noch folgende Bedingungen hinzukommen:

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1. \end{array}\right.$$

Sind auch die neuen Achsen rechtwinklig, so gelten noch die ferneren Gleichungen

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \end{array}\right.$$

so dass man nur drei der neun Grössen $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ beliebig wählen darf.

Wenn beide Systeme rechtwinklig sind, so kann man vom zweiten zum ersten durch ähnliche Formeln übergehen, so dass die Gleichungen 1), 2), 3) die folgenden nach sich ziehen:

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z; \end{array}\right.$$

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{array}\right.$$

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen würden umgekehrt die ersten zur Folge haben, und die beiden Systeme 1), 2), 3) und 4), 5), 6) sind mithin identisch.

Die Grössen $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ genügen noch andern wichtigen Relationen, welche aus den vorhergehenden abgeleitet werden können, indem man zunächst eine Doppelsinnigkeit zulässt, welche mit geringer Mühe beseitigt werden kann. Wir wollen aber zeigen, wie man dieselben Resultate auf viel einfachere Weise und ohne irgend eine Ungewissheit über die Vorzeichen erhalten kann.

Zuerst müssen wir bemerken, dass die positiven Achsen beider Coordinatensysteme, die mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, zwei verschiedene Anordnungen zulassen. Dreht man nämlich das System der $x' y' z'$ so weit, dass die Achse der positiven $x'$ mit der Achse der positiven $x$, und gleichzeitig die Achse der positiven $y'$ mit der Achse der positiven $y$ zusammenfällt, so wird die Achse der positiven $z'$ entweder mit der Achse der positiven $z$ zusammenfallen oder die gerade entgegengesetzte Lage erhalten. Im ersten Falle sind die beiden Coordinatensysteme c o n g r u e n t, im zweiten Falle s y m m e t r i s c h - g l e i c h.

Da die Achse der $x'$ senkrecht auf der Ebene der Achsen der $y'$ und $z'$ steht, so können die Winkel, welche sie mit den drei Achsen der $x, y, z$ bildet, nach den Formeln 3) des vorhergehenden Abschnittes bestimmt werden, wobei man $sin\ V = 1$ zu setzen hat; überdies wird man zusehen müssen, ob die Achsen der $x', y', z'$ in derselben Ordnung wie jene der $x, y, z$ vorkommen. Bei dieser Voraussetzung ist die Achse der positiven $x'$ die Achse der Bewegung eines Radiusvector, der von $AY'$ ausgehend sich $AZ'$ nähert; die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der eben citirten Formeln 3) beziehen sich also auf $AY'$, und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ auf $AZ'$. Umgekehrt verhält sich die Sache, wenn die Reihenfolge der drei Achsen die entgegengesetzte ist.

Schreibt man nun in den Formeln 3) $a$, $a'$, $a''$ für $cos\ \lambda$, $cos\ \mu$, $cos\ \nu$, so erhält man für den ersten Fall

$$a = b'c'' - c'b'', \quad a' = cb'' - bc'', \quad a'' = bc' - cb',$$

für den zweiten Fall

$$a = c'b'' - b'c'', \quad a' = bc'' - cb'', \quad a'' = cb' - bc',$$

welche Gleichungen sich von den ersteren nur durch die Aenderung des Zeichens unterscheiden.

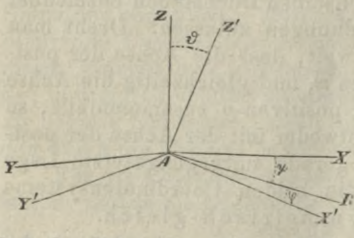
Indem man auf dieselbe Weise mit den Achsen der $y'$ und $z'$ verfährt, erhält man ähnliche Gleichungen, so dass die neun Grössen $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ in dem Falle, wo die Anordnung der Achsen in beiden Systemen dieselbe ist, durch folgende Relationen verbunden sind:

$$7) \quad \begin{cases} a = b'c'' - c'b'', & a' = cb'' - bc'', & a'' = bc' - cb', \\ b = c'a'' - a'c'', & b' = ac'' - ca'', & b'' = ca' - ac', \\ c = a'b'' - b'a'', & c' = ba'' - ab'', & c'' = ab' - ba'. \end{cases}$$

Bei symmetrischen Coordinatensystemen muss man die Zeichen der zweiten Theile dieser neun Gleichungen ändern.

Im Vorigen dienen immer neun Grössen, zwischen denen sechs Gleichungen stattfinden, zur Orientirung des secundären Coordinatensystemes der $x', y', z'$ gegen das primitive System der $x, y, z$; zu demselben Zwecke reichen aber auch drei von einander unabhängige Winkel aus, wie wir nach Euler's Vorgange zeigen wollen.

Fig. 25.




Wir setzen voraus, dass die neuen Achsen dieselbe Anordnung befolgen wie die ersten, und bestimmen sie durch Einführung des Winkels $\psi$ zwischen der Achse der positiven $x$ und dem Schnitte $AR$ der Ebenen $Y'X'$ und $XY$, dann des Winkels $\vartheta$ zwischen den Ebenen $X'Y'$ und $XY$ oder den Achsen $AZ$ und $AZ'$, und endlich des Winkels $\varphi$, den $AX'$ mit $AR$ einschliesst; dabei müssen wir aber genau den Sinn bezeichnen, in welchem jeder dieser Winkel gerechnet wird. Hierzu dient uns die einfache Bemerkung, dass das primitive System durch drei aufeinander folgende Drehungen in das secundäre System übergeführt werden kann. Man dreht nämlich das primitive System zuerst in directem Sinne um die Achse der $z$ bis $AX$ mit $AR$ zusammenfällt; mittelst einer zweiten directen Drehung um die Gerade $AR$ bringt man die Ebenen $XY$ und $X'Y'$ zur Coincidenz, wobei gleichzeitig $AZ$ mit $AZ'$ zusammenfällt; mittelst einer dritten directen Drehung um die gemeinschaftliche $z$-Achse bringt man endlich $AR$ nach $AX'$ und damit beide Systeme zur Congruenz. Diese Drehungen werden der Grösse nach durch die Winkel $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$ dargestellt und wenn wir letztere in demselben Sinne wie die entsprechenden Drehungen zählen, so sind sie in jeder Beziehung vollständig bestimmt. Nach der ersten Drehung haben die Achsen die Lagen $AR$, $AY_1$, $AZ$ und die hierauf bezüglichen Coordinaten des Punktes $xyz$ mögen $x_1$, $y_1$, $z$ heissen; nach der zweiten Drehung sind die Achsen in die Lagen $AR$, $AY_2$, $AZ'$ gekommen, denen die Coordinaten $x_1$, $y_2$, $z'$ entsprechen mögen; nach der letzten Drehung fallen beide Systeme zusammen und die vorhergehenden Coordinaten sind dann zu $x'$, $y'$, $z'$ geworden.

Um nun von einem ebenen rechtwinkligen Coordinatensysteme $u$, $v$ zu einem anderen gleichfalls rechtwinkligen und gleichartig liegenden d. h. zu einem solchen Systeme $u'$, $v'$ überzugehen, bei welchem das Zusammenfallen der positiven Richtungen von $u$ und $u'$ die Coincidenz der positiven Richtungen von $v$ und $v'$ nach sich zieht, bedarf es bekanntlich der beiden Formeln:

$$u = u' \cos\alpha - v' \sin\alpha,$$
$$v = u' \sin\alpha + v' \cos\alpha,$$

worin $\alpha$ den Winkel bezeichnet, um welchen man die Achse der $u$ in der Richtung von $u$ nach $v$ drehen muss, damit sie mit der Achse der positiven $u'$ zusammenfällt. Diese Formeln würden eine Aenderung der Zeichen erfahren, wenn die Lage der Achsen verkehrt wäre. Hiernach gelten folgende Gleichungen:

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \qquad y_1 = y_2 \cos\vartheta - z' \sin\vartheta,$$
$$x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi, \qquad z = y_2 \sin\vartheta + z' \cos\vartheta,$$
$$y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Indem man die Hilfsgrössen $x_1$, $y_1$, $y_2$ eliminirt, erhält man die gesuchten Formeln:

$$8)\quad \begin{cases} x = x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta) \\ \qquad + y' (-\sin\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta) + z' \sin\psi \sin\vartheta, \\ y = x' (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta) \\ \qquad + y' (-\sin\varphi \sin\psi + \cos\psi \cos\varphi \cos\vartheta) - z' \cos\psi \sin\vartheta, \\ z = x' \sin\vartheta \sin\varphi + y' \cos\varphi \sin\vartheta + z' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Vergleichung der Formeln 1) und 8) führt zu folgenden Gleichungen, welche dieselbe Allgemeinheit wie die vorigen haben

$$
9)\quad \left\{\begin{aligned}
a &= -\sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta + \cos\varphi \cos\psi\\
b &= -\sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta - \sin\varphi \cos\psi\\
c &= \sin\vartheta \sin\psi;\\
a' &= \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta + \cos\varphi \sin\psi\\
b' &= \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta - \sin\varphi \sin\psi\\
c' &= -\sin\vartheta \cos\psi;\\
a'' &= \sin\vartheta \sin\varphi\\
b'' &= \sin\vartheta \cos\varphi\\
c'' &= \cos\vartheta.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Formeln können auch direct mittelst der sphärischen Trigonometrie entwickelt werden, doch würde es einer etwas mühsamen Untersuchung bedürfen, um ihre Allgemeinheit streng nachzuweisen.

Aus den Gleichungen 9) folgen noch die Relationen

$$
10)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a''}{b''},\quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{c}{c'},
$$

deren Kenntniss für manche Zwecke nicht überflüssig ist.

## Druckfehler.

S. 282 Z. 14 v. u. ist hinter „gehende“ das Wort „Ebene“ einzuschalten.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

200,00