s
eisteswelt

559

N. Schmitt

# Aufgaben aus der technischen Mechanik

II. Dynamik und Hydraulik

Zweite Auflage

ubner·Leipzig·Berlin

# Die Sammlung
# „Aus Natur und Geisteswelt“

nunmehr über 800 Bände umfassend, bietet wirkliche „Einführungen“ in abgeschlossene Wissensgebiete für den Unterricht oder Selbstunterricht des Laien nach den heutigen methodischen Anforderungen und erfüllen so ein Bedürfnis, dem weder umfangreiche Enzyklopädien noch skizzenhafte Abrisse entsprechen können. Die Bände wollen jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie wollen ihn dabei zugleich unmittelbar im Beruf fördern, den Gesichtskreis erweiternd, die Einsicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend.

Die Sammlung bietet aber auch dem Fachmann eine rasche zuverlässige Übersicht über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des Forschers zu dienen, sich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten. In den Dienst dieser Aufgaben haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

Seit Herbst 1925 ist eine Neuerung insofern eingetreten, als neben den Bänden im bisherigen Umfange solche in erweitertem, etwa anderthalbfachem zu $1\frac{1}{2}$fachem Preise ausgegeben werden, weil abgeschlossene Darstellungen größerer Gebiete auf beschränkterem Raume heute schwer möglich sind. Diese Bände, die die Nummern von 1001 ab tragen, erscheinen, um die Einheitlichkeit der Sammlung zu wahren, in der gleichen Ausstattung wie die übrigen Bände. Sie sind nur auf dem Rückentitel durch je ein Sternchen über und unter der Nummer besonders gekennzeichnet.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

... Bände

... ich

Leipzig, i... G. Teubner

Bisher sind erschienen

# zur Technik und mechanischen Industrie:

## Geschichte und Grundlagen der Technik.

**Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit.** Von Ober- u. Geh. Reg.-Rat M. Geitel. 2. Aufl. Mit 32 Abbildungen. (Bd. 28.)

**Einführung in die Technik.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. H. Lorenz. Mit 77 Abb. im Text. (Bd. 729.)

## Mechanik.

**Mechanik.** Von Prof. Dr. G. Hamel. I. Grundbegriffe der Mechanik. Mit 38 Figuren. *II. Mechanik der festen Körper. *III. Mechanik der flüssigen u. luftförmigen Körper. (Bd. 684/86.)

**Aufgaben aus der technischen Mechanik.** Für den Schul- und Selbstunterricht. Von Prof. R. Schmitt. I. Bewegungslehre, Statik und Festigkeitslehre. 2. Aufl. 240 Aufgaben und Lösungen. Mit zahlreichen Figuren im Text. II. Dynamik und Hydraulik. 2. Aufl. besorgt von Studiendirektor Prof. Dr. G. Wiegner. 198 Aufgaben und Lösungen mit zahlreichen Figuren im Text. (Bd. 558/559.)

**Statik.** Von Gewerbeschulrat Oberstudiendirektor A. Schau. 2. Aufl. Mit 112 Fig. (Bd. 828.)

**Festigkeitslehre.** Von Gewerbeschulrat Oberstudiendirektor A. Schau. 2. Aufl. Mit 119 Fig. (Bd. 829)

**Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik).** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Auflage bearbeitet von Prof. Dr. F. Schmidt. Mit 46 Abbildungen im Text. (Bd. 516.)

**Praktische Thermodynamik.** Aufgaben und Beispiele zur technischen Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. herausg. v. Prof. Dr. Fr. Schmidt. Mit 40 Abb. im Text und auf 3 Tafeln. (Bd. 596.)

## Bergbau, Hüttenwesen und mechanische Technologie.

**Unsere Kohlen.** Von Bergassessor Privatdozent Dr. P. Kukuk. 3. Aufl. Mit 55 Abb. im Text und auf 3 Tafeln. (Bd. 396.)

**Das Eisenhüttenwesen.** Von Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 7. Aufl. von Bergassessor F. W. Wedding. Mit 22 Abb. (Bd. 20.)

**Maschinenelemente.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 5., erw. Aufl. bearbeitet von Prof. Dr. F. Schmidt. Mit 187 Abb. und 1 Normentafel. (Bd. 301.)

**Hebezeuge.** Hilfsmittel zum Heben fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3., erw. Aufl. bearb. von Prof. Dr. Fr. Schmidt. Mit 75 Abb. im Text. (Bd. 196.)

**Die Fördermittel.** Einrichtungen zum Fördern von Massengütern und Einzellasten in industriellen Betrieben. Von Oberingenieur O. Bechstein. Mit 74 Abb. im Text. (Bd. 726.)

**Die Spinnerei.** Von Direktor Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abbildungen. (Bd. 338.)

## Maschinenlehre.

**Die Dampfmaschine.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I. Bd.: Wirkungsweise des Dampfes im Kessel und in der Maschine. 6. Aufl. Von Prof. Dr. F. Schmidt. Mit 38 Abb. II. Bd.: Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. 4. Aufl. Von Prof. Dr. F. Schmidt. Mit 94 Abb. (Bd. 393/94.)

**Die neueren Wärmekraftmaschinen.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bände. I. Bd.: Einführung in die Theorie und den Bau der Gasmaschinen. 6. Aufl. Von Prof. Dr. F. Schmidt. Mit 45 Abb. (Bd. 21.) II. Bd.: Gaserzeuger, Großgasmaschinen, Dampf- u. Gasturbinen. 5. Aufl. bearb. von Prof. Dr. F. Schmidt. Mit 46 Abb. (Bd. 86.)

**Wasserkraftausnutzung und Wasserkraftmaschinen.** Von Dr.-Ing. F. Lawaczek. Mit 57 Abb. (Bd. 732.)

**Landwirtschaftliche Maschinenkunde.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. Mit 64 Abbildungen. 3. Auflage. (Bd. 316.)

## Elektrotechnik.

**Grundlagen der Elektrotechnik.** Von Obering. A. Rotth. 3. Aufl. Mit 70 Abb. (Bd. 391.)

**Die elektrische Kraftübertragung.** Von Ing. P. Köhn. 2. Aufl. Mit 133 Abb. (Bd. 424.)

**Drähte und Kabel,** ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Telegraphendirektor H. Brick. 2. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)

**Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung.** Von Telegraphendirektor H. Brick. 2. Aufl. Mit 65 Abb. (Bd. 235.)

**Das Telegraphen- und Fernsprechwesen.** 2. Aufl. Von Abteilungsdirektor O. Sieblist. (Bd. 183.)

**Die drahtlose Telegraphie und Telephonie.** Ihre Grundlagen und Entwicklung. Von Studienrat Dr. P. Fischer. Mit 48 Abb. im Text. (Bd. 822.)

## Hausbau und Wohnungswesen.

**Der Eisenbetonbau.** Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. 2. Aufl. Mit 82 Abbildungen im Text sowie 8 Rechnungsbeispielen. (Bd. 275.)

**Wohnungswesen.** Von Prof. Dr. R. Eberstadt. Mit 11 Abb. im Text. (Bd. 709.)

## Verkehrstechnik.

**Das Eisenbahnwesen.** Von Eisenbahnbau- und Betriebsinspektor a. D. Dr.-Ing. E. Biedermann. 3., verb. Aufl. Mit 62 Abbildungen. (Bd. 144.)

**Die Klein- und Straßenbahnen.** Von Oberingenieur a. D. Oberlehrer A. Liebmann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)

**Nautik.** Von Direktor Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit 64 Fig. im Text u. 1 Seekarte. (Bd. 255.)

## Graphische und Fein-Industrie.

**Wie ein Buch entsteht.** Von Reg.-Rat Prof. A. W. Unger. 6. Aufl. Mit 10 Tafeln und 26 Abbildungen im Text. (Bd. 1002†.)

**Die Schmucksteine und die Schmuckstein-Industrie.** Von Dr. A. Eppler. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 376.)

**Die Uhr.** Grundlagen und Technik der Zeitmessung. Von Prof. Dr.-Ing. H. Bock. 2., umgearbeitete Auflage. Mit 55 Abbildungen im Text. (Bd. 216.)

**Die Schreibmaschine und das Maschinenschreiben.** Von Berufsschulleiter H. Scholz. Mit 30 Textfig. (Bd. 694.)

## Zeichnen.

**Der Weg zur Zeichenkunst.** Ein Büchlein für theoretische und praktische Selbstbildung. Von Oberstudiendir. Dr. E. Weber. 4. Aufl. Mit 84 Abb. (Bd. 430.)

**Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Doehlemann. 3., durchges. Aufl. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)

**Geometrisches Zeichnen.** Von Oberschullehrer A. Schudeisky. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 568.)

**Projektionslehre.** Die rechtwinkl. Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung techn. Gebilde nebst Anhang über die schiefwinkl. Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstell. für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von Oberschullehrer A. Schudeisky. 2. Aufl. Mit 165 Fig. im Text. (Bd. 564.)

**Maße und Messen.** Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

† Bände ab 1000 erscheinen in erweitertem Umfang.

Die mit * bezeichneten und weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

559. Band

# Aufgaben aus der technischen Mechanik

für den Schul- und Selbstunterricht

Von

Prof. N. Schmitt
Studienrat in Dortmund †

## II. Dynamik und Hydraulik

198 Aufgaben und Lösungen
Mit zahlreichen Figuren im Text

Zweite Auflage, besorgt von
Prof. Dr. G. Wiegner
Oberstudienrat an der höh. Maschinenbauschule in Leipzig



Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1925

# Vorwort.

Die vorliegende zweite Auflage des zweiten Teiles der „Aufgaben aus der technischen Mechanik" hatte der Verfasser im Manuskript an den Verlag eingesandt, als er leider nach längerer Krankheit durch den Tod abgerufen und dadurch verhindert wurde, den Neudruck bis zur Fertigstellung zu besorgen.

Die neue Auflage enthält außer Aufgaben über Hydrostatik und Dynamik fester und flüssiger Körper aus den früheren Auflagen der beiden Bände auch eine Reihe völlig neuer Aufgaben aus diesen Gebieten. Dementsprechend ist der vorliegenden Auflage nun die Bezeichnung „Dynamik und Hydraulik" gegeben worden. Die Anzahl der Aufgaben ist von 140 der ersten Auflage auf 198 gestiegen.

Auf Wunsch des Verlags habe ich das Manuskript durchgesehen, dabei außer einigen unwesentlichen Veränderungen eine gleichmäßige Bezeichnung der technischen Abkürzungen durchgeführt und die gesamte Herstellung einschließlich der neuen Figuren überwacht.

Möge auch dieser Band die von seinem Verfasser in dem Vorwort zur zweiten Auflage des ersten Bandes gekennzeichneten Zwecke erfüllen und in den Kreisen angehender Techniker immer mehr Freunde finden.

Leipzig, im September 1924.

**Dr. Wiegner**

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

I. **Dynamik** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1. Die beschleunigte geradlinige Bewegung . . . . . . . . . . 5
2. Die beschleunigte Kreisbewegung . . . . . . . . . . . . . 9
3. Zusammengesetzte Bewegung . . . . . . . . . . . . . . . 11
4. Bewegung des Schwerpunktes . . . . . . . . . . . . . . 12
5. Die gleichförmige Kreisbewegung . . . . . . . . . . . . 13
6. Die Zentrifugalkräfte der Körper . . . . . . . . . . . . 15
7. Mechanische Energie . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
8. Absolute und relative Bewegung . . . . . . . . . . . . 24

II. **Hydraulik** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
9. Statik der Flüssigkeiten . . . . . . . . . . . . . . . 28
10. Auftrieb . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
11. Dynamik der Flüssigkeiten . . . . . . . . . . . . . . . 31

**Lösung der Aufgaben** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

# I. Dynamik.

**I.** Die Bewegung eines Körpers ist durch die Richtung und Größe seiner Geschwindigkeit gegeben; Richtung und Größe der Geschwindigkeit bestimmen den Bewegungszustand des Körpers.

Bewegt sich ein Körper gleichförmig und geradlinig, so bleibt er in demselben Bewegungszustand; er ist im Beharrungszustand. Auch der ruhende Körper ist im Beharrungszustand.

Jeder Körper zeigt das Bestreben in dem Beharrungszustand zu bleiben, in dem er sich befindet. Er setzt jeder Änderung dieses Zustandes einen Widerstand entgegen. Hierdurch zeigt er seine Trägheit.

Der Widerstand bzw. die Trägheitskraft eines Körpers ist die Resultante der Trägheitskräfte seiner Teilchen.

Die Trägheitskräfte sind innere Kräfte, die durch die Bewegungsänderung hervorgerufen werden.

Zur Bewegungsänderung sind äußere Kräfte nötig.

## 1. Die beschleunigte geradlinige Bewegung.

**II.** Die Bewegungsänderung eines geradlinig geführten Körpers kann nur eine Beschleunigung oder Verzögerung in der Führungsrichtung sein.

Die Trägheitskräfte der Teilchen eines geradlinig geführten Körpers sind parallel gerichtet, ihre Resultante geht durch den Schwerpunkt des Körpers; deshalb muß auch die Resultante der äußeren Kräfte durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

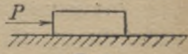
**III.** Bei einem frei fallenden Körper wirkt die äußere Kraft, die Schwerkraft bzw. das Körpergewicht in der Bewegungsrichtung. Die Resultante der Trägheitskräfte ist gleich dem Körpergewicht.

Beim freien Fall bewegt sich der Körper gleichförmig beschleunigt. Die Beschleunigung ist $g = 9{,}819 \sim 10\ \mathrm{m/sec^2}$. Ist $G$ das Gewicht des Körpers bzw. die Kraft, so wird das Verhältnis $\frac{G}{g} = M$ die Masse des Körpers genannt.

Allgemein ist: $\frac{P}{p} = \frac{G}{g} = M$, wenn $P$ die Kraft, $p$ die Beschleunigung ist. Hieraus folgt: $p = \frac{P}{M} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$.

$$P = Mp.$$

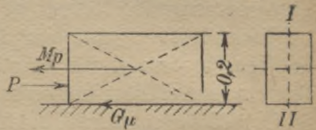
**1.** Eine horizontal wirkende Kraft $P = 20$ kg wirkt auf einen geradlinig geführten Körper von 50 kg Gewicht. Welche Beschleunigung erhält der Körper, wenn keine Reibung vorhanden ist?



Zu 1.

**2.** Wie groß wird die Beschleunigung des Körpers der Aufgabe 1, wenn zwischen Führung und Körper Reibung wirkt und $\mu = 0{,}2$ ist?

**3.** Der in den Aufgaben 1 und 2 gegebene Körper soll die Form eines Prismas von 0,2 m Höhe haben. Wo muß die Kraft $P$ wirken?

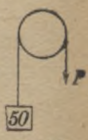


Zu 3.

**4.** Einem prismatischen Körper von 50 kg Gewicht wird auf einer wagerechten Bahn eine Anfangsgeschwindigkeit $v = 5$ m/sec durch Stoß gegeben.

Wie lange und wie weit bewegt sich der Körper, wenn zwischen Führung und Körper Reibung wirkt und $\mu = 0{,}2$ ist?

**5.** Wie hoch darf der in Aufgabe 4 gegebene Körper höchstens sein, damit er nicht umkippt?

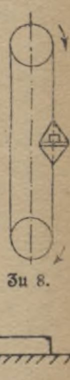


Zu 7.

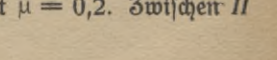
**6.** Welche Beschleunigung $p$ erteilt eine Zugkraft $P = 60$ kg einem Gewicht von 50 kg an einer festen Rolle?

**7.** An dem rechten Seilende soll eine Kraft $P$ so wirken, daß das Gewicht mit einer Beschleunigung $p = 2{,}5$ m/sec$^2$ abwärts geht. Wie groß ist $P$?

**8.** Ein in einem Fahrstuhl liegendes Gewicht von 100 kg wird mit einer Beschleunigung $p = 2$ m/sec$^2$ bewegt. Wie groß ist der Druck des Gewichtes auf den Fahrstuhl?


Zu 8.

**9.** Der Fahrstuhl (Aufgabe 8) und das daraufliegende Gewicht von 100 kg soll mit einer Beschleunigung $p =$ 12 m/sec$^2$ abwärts bewegt werden. Wie groß ist der Druck des Gewichtes auf den Fahrstuhl?



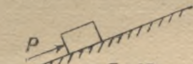
Zu 10.

**10.** Körper $I$ wiegt 50 kg, Platte $II$ 100 kg, der Reibungskoeffizient zwischen $I$ und $II$ ist $\mu = 0{,}2$. Zwischen $II$

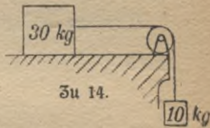
und Führung wirkt keine Reibung. $I$ wird auf der Platte mit der Geschwindigkeit $v = 1$ m/sec bewegt. Wie bewegt sich $II$?

**11.** Auf einer schiefen Ebene, die auf 1 m Bahn 0,4 m fällt, bewegt sich ein Gewicht $G$ durch sein eigenes Gewicht. Wie groß wird seine Beschleunigung, wenn keine Reibung wirkt?

**12.** Auf einer schiefen Ebene, die auf 1 m Bahnlänge 0,6 m steigt, bewegt sich ein Gewicht von 20 kg abwärts. Der Reibungskoeffizient zwischen Gewicht und Bahn ist $\mu = 0{,}25$. Wie groß wird die Beschleunigung des Gewichtes?



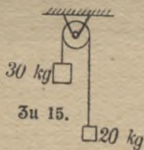

Zu 13.



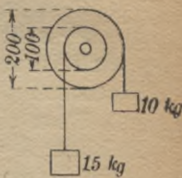

Zu 14.

**13.** Das in Aufgabe 12 gegebene Gewicht soll mit einer Beschleunigung $p = 2\ \mathrm{m/sec^2}$ aufwärts bewegt werden. Wie groß muß die Kraft $P$ sein?

**14.** Welche Beschleunigung erhalten die beiden Gewichte, wenn keine Reibung wirkt?



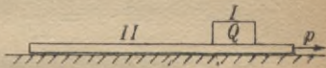

Zu 15.




Zu 16.

**15.** Welche Beschleunigung erhalten die beiden Gewichte?

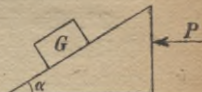
**16.** Welche Beschleunigungen erhalten die beiden Gewichte?




Zu 17.

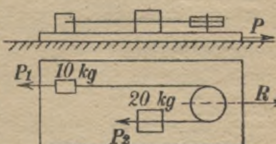
**17.** Platte $II$ soll mit der Beschleunigung $p$ verschoben werden. Wie bewegt sich $I$ auf $II$?

**18.** Zwischen Gewicht $G$ und der schiefen Ebene soll keine Reibung wirken. Mit welcher Beschleunigung $p$ muß die schiefe Ebene von rechts nach links bewegt werden, damit das Gewicht auf der schiefen Ebene stehen bleibt?

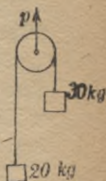



Zu 18.

**19.** Um eine Rolle, die auf einem Brett drehbar gelagert ist, liegt ein Seil, an dem zwei Gewichte 10 kg und 20 kg befestigt sind. Die Gewichte ruhen auf dem Brett, das mit einer Beschleunigung $p = 0{,}5\ \mathrm{m/sec^2}$ von links nach rechts bewegt wird. Wie bewegen sich die Gewichte?




Zu 19.




Zu 20.

**20.** Die Rolle wird mit einer Beschleunigung $p = 2\ \mathrm{m/sec^2}$ aufwärts bewegt. Wie bewegen sich die daranhängenden Gewichte?

**IV.** Nach Gleichung *III* ist $P = Mp$. Werden beide Seiten mit der Zeit $t$ multipliziert, so wird $P \cdot t = M \cdot p \cdot t$.

$$P \cdot t = M \cdot v.$$

Kraft · Zeit = Masse · Geschwindigkeit.

Dies ist der Satz vom Antrieb. Das Produkt $M \cdot v$ wird das Bewegungsmoment genannt.

Werden beide Seiten der letzten Gleichung mit $\frac{v}{2}$ multipliziert, so wird

$$P \cdot \frac{v}{2} \cdot t = \frac{1}{2} M v^2$$

oder

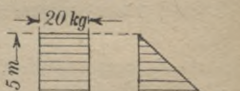
$$\mathbf{P \cdot s = \frac{1}{2} M \cdot v^2.}$$

$P \cdot s$ ist die von der Kraft $P$ geleistete Arbeit. $\frac{1}{2} Mv^2$ wird das Arbeitsvermögen der Masse $M$, die eine Geschwindigkeit $v$ hat, genannt.

Wenn ein Gewicht $G$ durch eine Höhe $h$ frei fällt, leistet es eine Arbeit: $A = G \cdot h$ und erreicht eine Geschwindigkeit $v$, die sich aus der Gleichung $G \cdot h = \frac{1}{2} Mv^2$ ergibt.

$$G \cdot h = \frac{G}{2g} v^2;\; v^2 = 2gh;\; v = \sqrt{2gh}.$$

**21.** Ein Gewicht von 20 kg fällt frei durch eine Höhe von 5 m. Mit welcher Geschwindigkeit kommt es an?




Zu 21.

**22.** Ein Gewicht von 50 kg wird mit einer Geschwindigkeit $v = 10$ m/sek lotrecht hoch geworfen. Wie hoch steigt es?

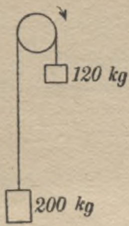
**23.** Wie groß ist die Geschwindigkeit des in Aufgabe 22 gegebenen Gewichtes, wenn dasselbe 3,2 m hoch gestiegen ist?

**24.** Einem Gewicht von 60 kg wird auf einer wagerechten Bahn eine Geschwindigkeit $v = 20$ m/sec durch Stoß erteilt. Zwischen Gewicht und Bahn wirkt Reibung ($\mu = 0{,}25$). Wie weit bewegt sich das Gewicht?

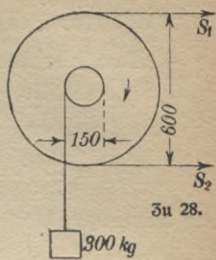
**25.** Wie groß ist die Geschwindigkeit des in Aufgabe 24 gegebenen Gewichtes, wenn es einen Weg von 60 m zurückgelegt hat?

**26.** Welche Arbeit muß die am Körper *I* (Aufgabe 10) wirkende Kraft $P$ leisten?

27. Die Rolle des Aufzuges dreht sich mit einer Umfangsgeschwindigkeit $v = 1$ m. Zwischen Seil und Rolle wirkt eine Reibung $P = 96$ kg. Wann haben die Gewichte die Geschwindigkeit der Rolle erreicht?



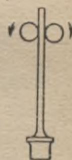
Zu 27.



Zu 28.

28. Der Treibriemen hat eine Geschwindigkeit $v = 6$ m/sec. Die größte Riemenkraft ist $S_1 = 160$ kg; wenn $S_1 = 2\,S_2$ ist. Wie wird die Last bewegt?

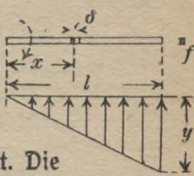
29. Ein Friktionshammer von 250 kg Gewicht wird durch zwei Reibungsrollen bewegt, die dem Hammer bei einer Hubhöhe von 0,3 m eine Geschwindigkeit $v = 2$ m/sec geben. Wenn der Hammer diese Geschwindigkeit erreicht hat, werden die Rollen ausgerückt. Wie hoch steigt der Hammer noch, und wie groß ist sein Arbeitsvermögen beim Aufschlagen?


Zu 29.

30. Der in Aufgabe 29 gegebene Hammer drückt das Schmiedestück um 5 mm zusammen. Wie groß wird der vom Hammer auf das Schmiedestück ausgeübte größte Druck?

## 2. Die beschleunigte Kreisbewegung.

V. Bilden die äußeren, an einem Körper wirkenden Kräfte ein Kräftepaar, so dreht sich der Körper gleichförmig beschleunigt um seinen Schwerpunkt.




Eine an einem drehbar gelagerten Körper wirkende Kraft dreht den Körper um den Drehpunkt gleichf. beschleunigt. Ein Teilchen $\mathfrak{d}$ einer Stange, die um ihren Endpunkt rotiert, hat eine Trägheitskraft $q = f\dfrac{\mathfrak{d}\gamma}{g}\,x \cdot p_0$, wenn $p_0$ die Winkelbeschleunigung ist. Die Trägheitskraft der ganzen Stange ist

$$Q = \frac{f\gamma}{g} \cdot p_0 \Sigma\, x\,\mathfrak{d} = \frac{f\gamma}{g} \cdot p_0 \cdot \frac{l^2}{2} = M \cdot \frac{l}{2} \cdot p_0.$$

Da die einzelnen Kräfte $q$ mit $x$ wachsen, lassen sie sich durch ein Dreieck darstellen, dessen Inhalt $Q = \dfrac{g\,l}{2} = \dfrac{M\,l}{g}\,p_0$ ist. Die Kraft $Q$

geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks, ihr Arm ist gleich $\frac{2}{3}l$, ihr Drehmoment $M_d = M \cdot \frac{l}{2} p_0 \cdot \frac{2}{3} l = M \cdot \frac{l^2}{3} p_0$.

Das Arbeitsvermögen des Stücks $\delta$ ist gleich $\frac{1}{2} f \cdot \frac{\gamma\delta}{g} \cdot x^2 w^2$, wenn $w$ die Winkelgeschwindigkeit der Stange ist. Dann ist das Arbeitsvermögen der *ganzen Stange*

$$A = \frac{1}{2} f \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot w^2 \cdot \Sigma x^2 \delta = \frac{1}{2} f \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot w^2 \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{1}{6} \cdot M v^2,$$

wenn $v$ die Umfangsgeschwindigkeit der Stange ist. Dreht ein Kräftepaar $Pa$ eine Stange um ihren Schwerpunkt, so bilden die Trägheitskräfte zwei Dreiecke. Das Drehmoment der Kräfte ist

$$M_d = P \cdot a = Q \cdot \frac{2}{3} l = \frac{M l^2}{12} \cdot p_0.$$

Das Drehmoment der Trägheitskräfte einer *zylindrischen Scheibe*, die um ihre Achse rotiert, ist

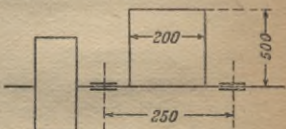
$$M_d = \frac{M}{8} d^2 \cdot p_0 \text{ und } A = \frac{M}{4} v^2.$$

Für eine *Kugel*, die um einen Durchmesser rotiert, ist

$$M_d = \frac{M}{10} d^2 \cdot p_0 \text{ und } A = \frac{M}{5} v^2,$$

wenn $v$ die Umfangsgeschwindigkeit des größten Kugelkreises ist.

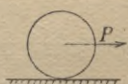
31. Eine auf einer Welle befestigte Platte von 45 kg Gewicht erreicht beim Anlaufen in 5 Sekunden eine Umfangsgeschwindigkeit von 10 m/sec. Wie groß ist das an der Welle wirkende Drehmoment, und wie groß wird das Arbeitsvermögen der Platte?



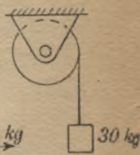
Zu 31.

32. Um einen drehbar gelagerten Zylinder von 120 kg Gewicht ist ein Seil gewickelt, an dem ein Gewicht von 30 kg hängt. Wie bewegen sich die Körper?

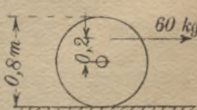
33. Im Mittelpunkt eines auf einer rauhen Bahn ruhenden Zylinders von 50 kg wirkt eine Kraft $P = 30$ kg parallel zur Bahn. Zwischen Zylinder und Bahn wirkt Reibung $\mu = 0{,}2$. Wie bewegt sich der Zylinder?



Zu 33.



Zu 32.

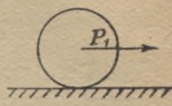


Zu 34.

34. Auf einen Zylinder, der auf einer

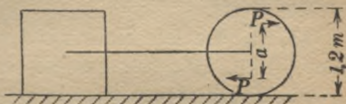
vollkommen glatten Bahn liegt, einen Durchmesser von 0,8 m und ein Gewicht von 120 kg hat, wirkt parallel zur Bahn eine Kraft von 60 kg 0,2 m vom Mittelpunkt. Wie bewegt sich der Zylinder?

**35.** Eine durch den Mittelpunkt wirkende Kraft $P$ gibt der Kugel eine Rollbewegung mit der Beschleunigung $p = 2{,}5$ m/sec². Es sind $P$ und $\mu$ zu bestimmen.




Zu 35.

**36.** An der Achse des Zylinders von 1,2 m Durchmesser und 300 kg Gewicht wirkt ein Kräftepaar $Pa$, das dem Zylinder und dem anhängenden Gewicht von 100 kg eine Beschleunigung von $p = 1$ m/sec² gibt. Wie groß muß $Pa$ sein, wenn $\mu = 0{,}2$ ist?




Zu 36.

**37.** Eine Stange von der Länge $l$ dreht sich um ihren Endpunkt $A$ aus der horizontalen Lage in ihrer vertikalen Ebene durch ihr Eigengewicht. Es ist das Biegungsmoment der Stange zu bestimmen.

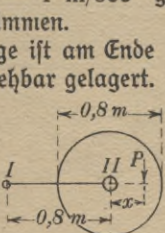
## 3. Zusammengesetzte Bewegung.

**VI.** Die Trägheitskraft der geradlinigen und das Kräftepaar der Drehbewegung haben eine Resultante, die gleich der Trägheitskraft der geradlinigen Bewegung ist.

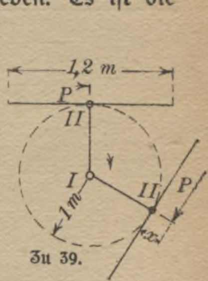
**38.** Eine Kraft $P$ soll einer Kugel von 1 m Durchmesser und 600 kg Gewicht auf einer glatten wagerechten Bahn eine Rollbewegung mit der Beschleunigung $p = 1$ m/sec² geben. Es ist die Größe und Lage der Kraft zu bestimmen.

**39.** Eine Stange von 1,2 m Länge ist am Ende der Kurbel $I\,II$, die 1 m lang ist, drehbar gelagert. Wo muß die Drehkraft $P$ wirken, damit die Stange eine volle Kreisbewegung macht?

**40.** Eine zylindrische Scheibe von 0,8 m Durchmesser ist am Ende einer 0,8 m langen Kurbel $I\,II$ drehbar gelagert. Wo muß die Drehkraft $P$ wirken, damit die Scheibe eine Kreisbewegung um $I$ macht?




Zu 40.




Zu 39.

**41.** Es ist nachzuweisen, wie groß der Neigungswinkel $\alpha$ einer schiefen Ebene sein muß, damit eine zylindrische Scheibe auf ihr rollt.

**42.** Dieselbe Aufgabe wie Nr. 41 ist für eine Kugel zu lösen.

## 4. Bewegung des Schwerpunktes.

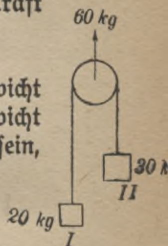
**VII.** Der gemeinschaftliche Schwerpunkt mehrerer miteinander verbundener Körper bewegt sich so, als wenn sämtliche Körper in diesem Punkte vereinigt wären und auf denselben die Resultante der äußeren Kräfte wirke.

**43.** Auf die lose Rolle wirkt eine aufwärts gerichtete Kraft von 60 kg. Wie bewegen sich die Gewichte?

**44.** Wie bewegen sich die Gewichte?

**45.** Auf dem 300 kg schweren Wagen *M* liegt ein Gewicht von 100 kg. Zwischen der Wagenplatte und dem Gewicht wirkt Reibung, $\mu = 0,2$. Wie groß darf die Kraft *P* nur sein, damit sich das Gewicht nicht auf der Platte verschiebt?

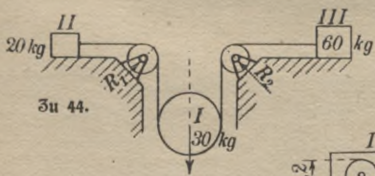
**46.** Wie groß werden die Beschleunigungen der Massen $M_1$ und $M_2$ in der vorigen Aufgabe, wenn $P = 120$ kg ist?




Zu 43.

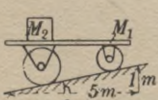
**47.** Auf einem 150 kg schweren Wagen liegt eine Last von 100 kg. Reibung wirkt nicht. Wie bewegen sich die Massen auf der schiefen Ebene?

**48.** An der Trommelwelle der Winde *I* wirkt ein Drehmoment von 15 mkg. Die Winde *I* wiegt 200 kg, das Gewicht *II* 150 kg. Zwischen Winde und Bahn wirkt Reibung $\mu = 0,15$. Wie bewegen sich die Teile?

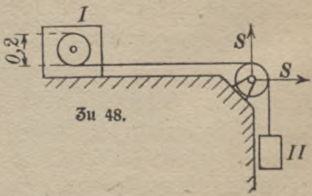



Zu 44.


Zu 45.



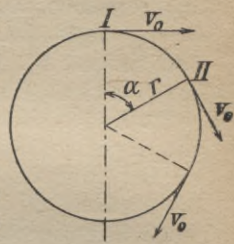

Zu 47.




Zu 48.

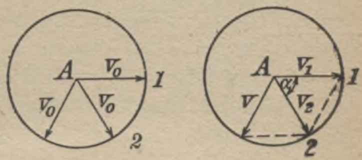
## 5. Die gleichförmige Kreisbewegung.

**VIII.** Ein Punkt, der sich mit einer Geschwindigkeit $v_0$ gleichförmig um einen festen Punkt dreht, von dem er den Abstand $r$ hat, bewegt sich jeden Augenblick in der Richtung der Tangente der Kreisbahn, er ändert fortwährend seine Richtung. Werden die Geschwindigkeiten $v_0$ des Punktes von einem festen Punkte $A$ aus nach Richtung und Größe aufgetragen, so liegen ihre Endpunkte auf einem Kreis mit dem Radius $v_0$, der das Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes darstellt.




Die Geschwindigkeit $v_2$ ist die Resultante von $v_1$ und $v$. Bei sehr kleinem Winkel $\alpha$ kann statt der geraden Strecke 1—2, die die Geschwindigkeit $v$ darstellt, die Bogenlänge 1—2 des Diagramms gesetzt werden. Es wird dann $v = v_0 \alpha$. Wird dieser Winkel $\alpha$ in einer kurzen Zeit $t$ durchlaufen, so ist

$$\alpha = wt, \quad v = v_0 wt = t \frac{v_0^2}{r} t.$$

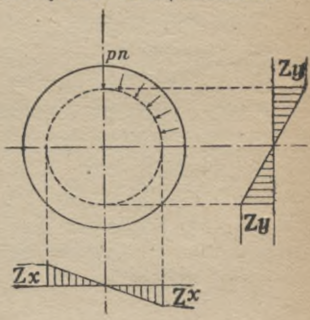



Für $t = 1$ ergibt sich die Geschwindigkeit $v$, die in der Zeiteinheit zugesetzt werden muß, oder die Beschleunigung:

$$p_n = \frac{v_0^2}{r} = r w^2.$$

$p_n$ ist die **Normal-** oder **Zentripetalbeschleunigung**. Sie steht als Bogenlinie des Diagramms immer senkrecht auf der Geschwindigkeit $v_0$, sie fällt immer in die Richtung des Drehradius.

Die Geschwindigkeit $v_0$ für einen Drehwinkel $\alpha$ hat die Komponenten: $x = v_0 \sin\alpha$, $y = v_0 \cos\alpha$, die Beschleunigung $p_n$ die Komponenten $p_x = p_n \cos\alpha$, $p_y = p_n \sin\alpha$. Die Diagramme dieser Komponenten sind Dreiecke. Hat der bewegte Punkt die Masse $M$, so ist die Kraft, die erforderlich ist, um dieser Masse die Beschleunigung $p_n$ zu geben,




$$Z = M p_n = M \frac{v_0^2}{r} = M r w^2.$$

Diese stets in der Richtung des Drehradius wirkende Kraft wird Zentripetalkraft genannt. Sie hat die Komponenten

$$Z_x = Mp_n \cos \alpha; \quad Z_y = Mp_n \sin \alpha.$$

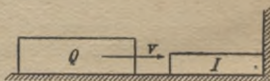
**49.** Auf einer glatten horizontalen Ebene bewegt sich eine 20 kg schwere Kugel mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 5$ m/sec gleichförmig und geradlinig. Von einem Punkte $A$ ab soll sie sich mit derselben Geschwindigkeit im Kreise um einen Punkt $B$ bewegen, der von $A$ 4 m entfernt ist. Wie groß muß die vom Punkte $A$ ab auf die Kugel wirkende Zentripetalkraft sein?

**50.** Kolben, Kolbenstange und Koulissenführung der Schubkurbel wiegen zusammen 40 kg. Es ist das Arbeitsdiagramm der zur Bewegung dieser Teile erforderlichen Kraft für 120 Touren der Kurbel darzustellen.

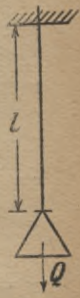
**51.** Eine liegende Dampfmaschine von 500 mm Hub hat ein Gestänge- und Kolbengewicht von 220 kg. Sie macht 240 Touren. Wie groß muß die Reibung zwischen Maschinenrahmen und Fundament, welche durch das Maschinengewicht und den Ankerdruck bewirkt wird, mindestens sein?

**52.** Das Gewicht $Q = 100$ kg stößt mit der Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec gegen den elastischen Stab $I$ in der Richtung der Stabachse und drückt ihn 5 cm zusammen. Wie bewegt sich $Q$?

**53.** Ein elastischer Stab von der Länge $l$ cm und dem Querschnitt $f$ cm² ist am oberen Ende befestigt, am unteren Ende mit einer Schale versehen, auf welche ein Gewicht $Q$ gelegt wird. Dieses Gewicht soll den Stab um ein Stück $\lambda$ dehnen. Die Dehnung soll innerhalb der Proportionalitätsgrenze liegen. Wie bewegt sich $Q$?



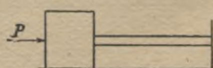
Zu 52.



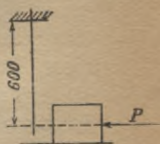
Zu 53.

**54.** Die Stablänge sei $l = 2000$ cm, Querschnitt $f = 10$ cm², das Gewicht $Q = 100$ kg, $E = 2000000$ kg/cm². Es sollen $v$, $r$ und $k_z$ bestimmt werden.

**55.** Eine Kraft von 500 kg drückt ein Gewicht von 1250 kg gegen einen elastischen Stab in der Richtung der Stabachse. Der Stab wird um 8 cm zusammengedrückt. Wie wird das Gewicht bewegt?



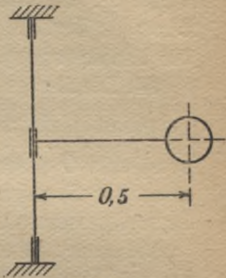
Zu 55.



Zu 56.

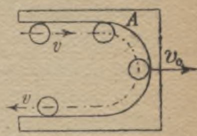
**56.** Gegen ein Gewicht von 1200 kg drückt eine wagerecht gerichtete Kraft von 120 kg. Das Gewicht ist wagerecht geführt und lehnt sich seitlich gegen eine Blattfeder von 150/12 mm Querschnitt und 600 mm Länge. Wie wird das Gewicht bewegt?

**57.** An einer um eine Achse drehbaren 0,5 m langen Stange ist eine Kugel von 50 kg Gewicht befestigt, die sich mit der Geschwindigkeit $v = 2$ m/sec horizontal dreht. Wie groß ist die in der Stange wirkende Zugkraft?



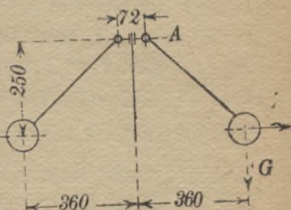
Zu 57.

**58.** Eine Kugel von 60 kg Gewicht, die sich auf einer horizontalen, glatten Ebene mit einer Geschwindigkeit $v = 3$ m/sec gleichförmig und geradlinig bewegt, tritt im Punkte $A$ in eine auf der Ebene liegende kreisförmige Führung. Von hier bewegt sich der Kugelmittelpunkt in einem Kreis von 0,8 m Radius. Wie groß wird der Druck gegen die Führung?



Zu 58.

**59.** Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des beistehenden Zentrifugalpendels, wenn die Kugeln die angegebene Stellung einnehmen?

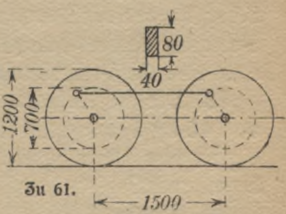


Zu 59.

**60.** Wie groß ist die im Querschnitt eines Ringes von 2 m mittlerem Durchmesser und 1200 kg Gewicht wirkende Zugkraft, wenn sich der Ring nach einer Umfangsgeschwindigkeit $v = 10$ m/sec dreht?

**61.** Eine Lokomotivkuppelstange ist 1500 mm lang, hat einen Querschnitt von 40/80 mm und wiegt 36 kg. Der Kolbenhub beträgt 700 mm, der Treibraddurchmesser 1200 mm. Wie groß wird die Biegungsspannung der Stange, wenn die Maschine 54 km läuft?

(Aus Föppl, Techn. Mechanik.)



Zu 61.

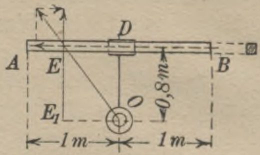
## 6. Die Zentrifugalkräfte der Körper.

**IX.** Die Zentrifugalkraft eines Körpers ist gleich der Zentrifugalkraft seiner im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse.

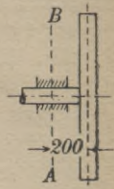
**62.** Wie groß ist die auf die Hälfte des in Aufgabe 60 gegebenen Ringes wirkende Zentrifugalkraft?

**63.** Der Ring eines Schwungrades von 2,4 m Durchmesser wiegt 1500 kg. Das Rad hat 6 Arme. Wie groß wird die in jedem Arm durch die Zentrifugalkraft des Ringes hervorgerufene Zugkraft, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Ringes $v = 12$ m/sec beträgt?

**64.** Die Stange $AB$ wiegt 25 kg und wird mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{20}{\text{sec}}$ um den Punkt $O$ gedreht. Wie groß wird die Spannung im mittleren Querschnitt $D$?



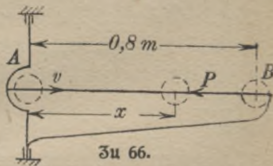
Zu 64.



Zu 65.

**65.** Der Schwungradkranz einer Dampfmaschine wiegt 1500 kg. Der Kranzquerschnitt ist ungleichmäßig, daher liegt sein Schwerpunkt 4 cm vom Mittelpunkt des Rades. Wie groß wird die Biegungsspannung der Welle im Querschnitt $AB$ von dem Gewicht und der Zentrifugalkraft des Kranzes, wenn die Welle 120 Touren macht und im Querschnitt $AB$ 100 mm stark ist?

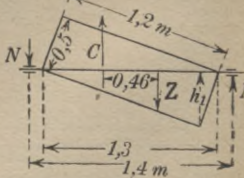
**66.** Der 10 kg schweren Kugel, die auf der an der Spindel befestigten Stange $AB$ verschiebbar ist, wird durch Stoß eine Geschwindigkeit $v = 2$ m/sec in der Stangenrichtung gegeben, wenn die Kugel in der Spindel steht, die mit $w = \frac{10}{\text{sec}}$ gedreht wird. Wie groß muß die auf die Kugel wirkende Kraft $P$ sein, die so wirkt, daß die Kugel die gegebene Geschwindigkeit behält?



Zu 66.

**67.** Wie groß ist die in der 60 kg schweren und 1,5 m langen Schubstange einer Dampfmaschine wirkende Zentrifugalkraft (Zugkraft), wenn die Kurbel durch den toten Punkt geht und eine Geschwindigkeit $v = 4$ m/sec hat?

**68.** Die in Aufgabe 31 gegebene Platte von 45 kg Gewicht soll eine Umfangsgeschwindigkeit von 10 m haben. Wie wird die Welle beansprucht?

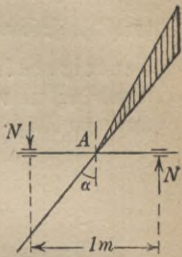


Zu 69.

**69.** Eine rechteckige Platte von 200 kg Gewicht dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$w = \frac{20}{\sec}$ um eine mit der Diagonale zusammen fallenden Achse. Wie groß werden die Lagerdrucke?

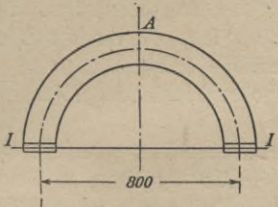
**70.** Eine Stange von 2 m Länge und 30 kg Gewicht ist auf einer Achse befestigt, mit der sie den Winkel $(90^0 - \alpha)$ bildet. Die Achse dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{10}{\sec}$. Wie wirkt die Stange auf die Achse?



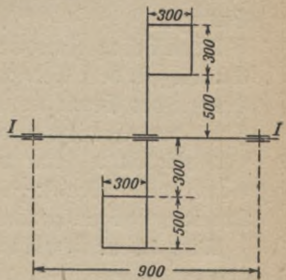
Zu 70.

**71.** Ein Halbkreisring von 800 mm Durchmesser und 50 kg Gewicht rotiert um die Achse *I I* (Durchmesser) mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{10}{\sec}$. Wie groß ist das Biegungsmoment im Scheitel *A* des Ringes?

**72.** Die beiden Platten von je 30 kg Gewicht drehen sich um die Achse *I I* mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{20}{\sec}$. Es ist die stehende Spindel *O* in Beanspruchung der Achse und der Arme, an denen die Platten befestigt sind, zu bestimmen.

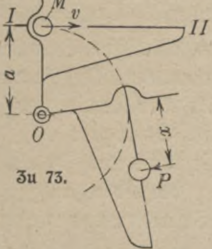


Zu. 71.

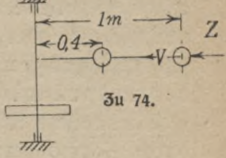


Zu 72.

**73.** Die Stange *I II* soll um die lotrecht stehende Spindel *O* in wagerechter Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $w$ gedreht werden. Der Kugel *M* wird eine Geschwindigkeit $v$ in der Stangenrichtung gegeben. Eine auf die Kugel wirkende Drehkraft *P* soll so wirken, daß die Kugel die gegebenen Geschwindigkeiten behält. Wie groß muß *P* sein?



Zu 73.



Zu 74.

74. Der Masse $M_1$, die ein Gewicht $Mg = 20$ kg hat, wird im Abstande 1 m von der Spindel eine Geschwindigkeit $v = 4$ m/sec auf der Stange nach der Spindel hin gegeben. Gleichzeitig erhält Stange und Masse eine Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{6}{\text{sec}}$ um die Spindel. Die Zentripetalkraft $Z$ wirkt so auf die Masse, daß diese die Geschwindigkeit $v$ behält. Welche Arbeit gibt die Masse an die Spindel auf dem Wege von 1 m bis 0,4 m Abstand von der Spindel an diese ab?

## 7. Mechanische Energie.

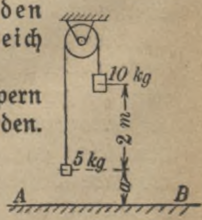
X. Die Energie eines Körpers ist sein Arbeitsvermögen. Man unterscheidet zwei Formen der mechanischen Energie: die Ruhe- oder potentielle Energie und die Bewegungs- oder kinetische Energie.

Beim Heben eines Gewichtes von $G$ kg um $h$ m wird eine Arbeit $Gh$ mkg in dem Gewicht aufgespeichert. Diese Arbeit, die potentielle Energie des Gewichtes, kann von dem Gewicht zurückgegeben werden. Fällt das Gewicht wieder um $h$ m, so erreicht es eine gewisse Geschwindigkeit $v$, seine potentielle Energie wird in kinetische umgewandelt. Dieselbe ist $\frac{1}{2} Mv^2$ oder $Gh$. In Satz *IV* wurde „$\frac{1}{2} Mv^2$" das Arbeitsvermögen genannt.

Wird einem Gewicht $G$ eine aufwärts gerichtete Geschwindigkeit $v$, also eine kinetische Energie $\frac{1}{2} Mv^2$ gegeben, so steigt das Gewicht, bis seine Geschwindigkeit gleich Null geworden, d. h. bis seine kinetische Energie in potentielle umgewandelt ist. Die Steighöhe $h$ kann wieder aus der letzten Gleichung bestimmt werden.

Sowohl bei der Fallbewegung wie beim Steigen besitzt das Gewicht potentielle und kinetische Energie, beim Ende der Bewegung nur die eine oder die andere. Die Summe der beiden Energiegrößen ist konstant und zwar gleich der ursprünglichen Energie.

Mechanische Arbeit kann auch in elastischen Körpern durch Formänderung derselben aufgespeichert werden. Diese Form- oder Spannungsenergie ist potentielle Energie.



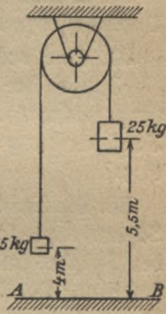
Zu 75 u. 76.

75. Wie groß ist die potentielle Energie der beiden Gewichte bezogen auf die Basis $AB$?

76. Wie groß ist die potentielle und kinetische Energie der Gewichte, wenn das obere Gewicht um 1 m gefallen, das andere um ebensoviel gestiegen ist?

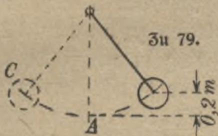
77. Einem Gewichte $G$ wird eine lotrechte aufwärts gerichtete Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec gegeben. Es ist das Energiediagramm zu zeichnen.

78. Die beiden Gewichte, die durch ihr Eigengewicht bewegt werden, haben in der angegebenen Stellung eine Geschwindigkeit $v = 2{,}5$ m/sec. Es ist die Anfangsstellung der Gewichte anzugeben.



Zu 78.

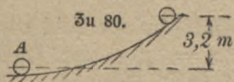
79. Ein Pendel wird in die in der Figur angegebene Lage gebracht und dann losgelassen. Wie groß wird seine Geschwindigkeit im tiefsten Punkte $A$?



Zu 79.

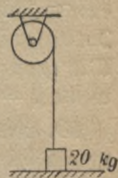
80. Mit welcher Geschwindigkeit kommt das Gewicht im Punkte $A$ an?

81. Einem Gewichte von 10 kg wird auf wagerechter Bahn eine Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec erteilt. Der Reibungskoeffizient zwischen Bahn und Gewicht ist $\mu = 0{,}2$. Wie weit läuft das Gewicht?



Zu 80.

82. Um eine drehbar gelagerte zylindrische Scheibe von 50 kg Gewicht ist ein Seil gewickelt, an dem ein Gewicht von 20 kg befestigt ist. Der Scheibe wird eine Umfangsgeschwindigkeit $v = 4$ m/sec gegeben, wenn das Seil noch nicht angespannt ist. Wie hoch steigt das Gewicht?

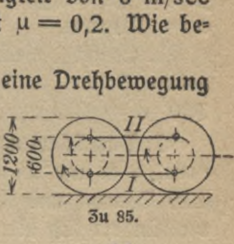


Zu 82.

83. Einer zylindrischen Scheibe von 40 kg Gewicht wird auf einer wagerechten Bahn eine geradlinige Geschwindigkeit von 6 m/sec durch Stoß gegeben. Der Reibungskoeffizient ist $\mu = 0{,}2$. Wie bewegt sich die Scheibe?

84. Einer Scheibe von 20 kg Gewicht wird eine Drehbewegung um ihre Achse mit einer Umfangsgeschwindigkeit $v = 6$ m/sec erteilt und in diesem Bewegungszustand auf eine wagerechte Bahn gelegt. Wie bewegt sich die Scheibe, wenn $\mu = 0{,}2$ ist?

85. Eine Lokomotivkuppelstange wiegt 25 kg,



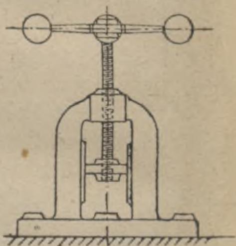
Zu 85.

die Geschwindigkeit der Lokomotive bzw. die Anfangsgeschwindigkeit der Treibräder ist $v_1 = 12$ m/sec. Welche Arbeit wird zur Bewegung der Stange aus der tiefsten Lage $I$ in die höchste Lage $II$ verbraucht?

**86.** Welche Arbeit ist erforderlich, um einem Schleifstein von 1 m Durchmesser und 250 kg Gewicht 120 Touren zu geben?

**87.** Eine volle Scheibe von 400 mm Durchmesser wiegt 50 kg, die Zapfen der Achse sind 40 mm stark. Wird der Scheibe eine Umfangsgeschwindigkeit von 6 m/sec erteilt, so wird sie durch die Zapfenreibung nach 15 sec zum Stillstehen gebracht. Wie groß ist $\mu$?

**88.** Die Spindel und der Stempelträger einer Schraubenpresse wiegen zusammen 120 kg. An der Spindel sind 4 Kugeln von je 20 kg Gewicht befestigt. Der Hub der Presse beträgt 200 mm. Befindet sich die Spindel in ihrer höchsten Stellung, so dreht der Arbeiter die Kugeln, bis sie eine Geschwindigkeit $v = 3$ m/sec erreicht haben. In dieser Zeit geht die Spindel 50 mm herunter. Wie groß wird das Arbeitsvermögen der Presse, wenn $\mu = 0{,}6$ ist?

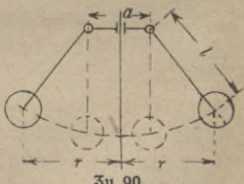


Zu 88.

**89.** Eine Dampfwinde hebt eine Last von 600 kg mit einer Geschwindigkeit $v = 1{,}5$ m/sec. Diese Geschwindigkeit erreichte die Last beim Anlauf in 3 Sekunden. Wieviel PS sind zum Antriebe der Winde erforderlich?

**90.** Welche Arbeit ist erforderlich, um das Zentrifugalpendel aus der Ruhestellung in die gezeichnete Stellung und in den Beharrungszustand zu bringen? Es sei $l = 400$, $r = 300$, $a = 120$ mm.

**91.** Es ist dieselbe Aufgabe für das angegebene Pendel zu lösen. Es sei $l = 350$, $r = 300$, $a = 180$ mm.

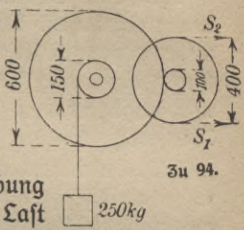



Zu 90.

**92.** Das Schwungrad einer Dampfmaschine hat einen Durchmesser von 2,8 m und ein Kranzgewicht von 1200 kg. Die Maschine macht 120 Touren und ihr Gleichförmigkeitsgrad ist gleich 50. Um wieviel ändert sich die kinetische Energie des Kranzes?

**93.** Zur gleichförmigen Bewegung eines Eisenbahnzuges auf wagerechter Bahn mit einer Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec ist pro Tonne eine Zugkraft $Z = 3$ kg/t erforderlich. Wieviel PS muß eine Maschine leisten können, die einem Zug von 360 t Gewicht in 50 sec die Geschwindigkeit von 10 m/sec erteilt?

**94.** Die Winde mit Reibungsrädern wird durch einen Riemen angetrieben, dessen Geschwindigkeit $v = 16$ m/sec beträgt. Die Reibung an den Triebrädern beträgt 65 kg. Wie wird die Last von 250 kg bewegt?




Zu 94.

**95.** An der Seilreibungsrolle, die mit einer Riemscheibe auf einer Welle sitzt, wirkt eine Reibung von 85 kg. Die an der losen Rolle hängende Last beträgt 300 kg, das Gegengewicht 100 kg. Wie bewegen sich die Gewichte bis zum Eintritt des Beharrungszustandes?

**96.** Auf einem Dampfhammer von 2000 kg Fallgewicht und 1 m Hubhöhe wirkt beim Abwärtsgehen ein mittlerer Dampfüberdruck des Oberdampfes von 1800 kg. Die Reibung beträgt 200 kg. Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Hammer auf?

**97.** Eine Damfmaschine leistet bei 120 Touren 30 PS. Der Schwungkranz hat einen mittleren Durchmesser von 2 m und ein Gewicht von 800 kg. Wie groß wird die Verzögerung des Kranzes, wenn die Kurbel durch den toten Punkt geht?

**98.** Der Kolben, die Kolbenstange und der Kreuzkopf einer liegenden Dampfmaschine wiegen zusammen 60 kg, die Kurbel wiegt 40 kg, die Pleuelstange 30 kg. Der Hub beträgt 400 mm und die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens $v = 2{,}5$ m/sec. Welche Arbeit wird zur Bewegung dieser Teile verbraucht, wenn die Kurbel von der untersten Stellung bis zur Mittelstellung geht?

**99.** Wie groß ist der Dampfüberdruck auf den oberen Zylinderdeckel der in voriger Aufgabe gegebenen Maschine, wenn die Kurbel durch den oberen toten Punkt geht?

**100.** Kolben, Kolbenstange und Kreuzkopf einer Lokomotive wiegen $G$ kg. Um wieviel ändert sich die kinetische Energie dieser Teile von der tiefsten bis zur höchsten Lage des Kurbelzapfens, wenn $v$ die Fahrgeschwindigkeit, $v_1$ die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist?

**101.** Bei nasser Schiene soll der Reibungskoeffizient zwischen dem Rad eines Eisenbahnwagens und der Schiene $\mu_1 = 0{,}01$, der Koeffizient der Zapfenreibung $\mu_2 = 0{,}05$ sein; der 100 mm starke Zapfen soll nur im obersten Punkte des Lagers anliegen und der Raddurchmesser 1000 mm betragen. Wie bewegen sich Wagen nnd Rad, wenn dem Wagen durch Stoß eine Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec gegeben wird?

**102.** Eine an einer Winde hängende Last von 600 kg wird 12 m heruntergelassen. Die Bremse wirkt erst, nachdem die Last 2 m herunter gegangen ist und zwar so, daß sich die Last durch die nächsten 8 m gleichförmig bewegt. In den letzten 2 m soll die Last gleichförmig verzögert werden und am Ende eine Geschwindigkeit Null haben. Wie groß muß die Reibung an der Bremsscheibe sein?

**103.** Zwei Wagen von je 1500 kg Gewicht haben auf der schiefen Ebene eine Geschwindigkeit $v = 12$ m/sec erreicht. Nun wird die Bremse am hinteren Wagen so stark angezogen, daß beide Wagen nach 10 Sekunden still stehen. Wie groß wird hierbei die Zugkraft $Z$ in der Kette?

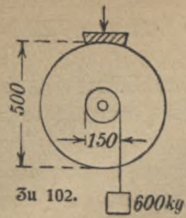
**104.** Über das Schwungrad eines Gasmotors ist ein Bremsband gelegt, das an dem einen Ende mit einer Federwage, an dem andern Ende mit einem einarmigen Hebel verbunden ist. Wage und Hebel sind am Boden befestigt. Der Hebel wiegt 5 kg. Der Motor kommt bei 150 Touren in den Beharrungszustand, wenn das auf dem Hebel verschiebbare Gewicht von 10 kg 21,5 cm vom Hebeldrehpunkt entfernt ist und die Federwage eine Zugkraft von 70 kg anzeigt. Wieviel PS leistet der Motor?

**105.** Es sei in der vorigen Aufgabe der Raddurchmesser gleich 1,5 m, die Tourenzahl 160, das Hebelgewicht 4,8 kg, die Entfernung des Gewichts vom Hebeldrehpunkt 36 cm, die Hebellänge wie oben und $S_1 = 120$ kg. Wieviel PS leistet der Motor?

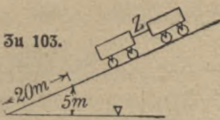
**106.** Auf einen lotrecht stehenden, seitlich geführten Stab wird ein Gewicht von 5000 kg gelegt. Hierdurch wird der Stab um 5 cm verkürzt, wobei die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird. Es ist das Energiediagramm zu zeichnen.

**107.** Das Gewicht $Q = 100$ kg stößt mit Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec gegen den elastischen Stab $I$ in der Richtung der Stabachse und drückt ihn 5 cm zusammen. Es ist das Energiediagramm zu zeichnen.

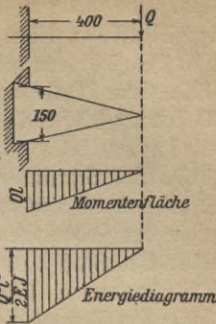
**108.** Die Kraft $P$ ruft in der Blattfeder eine größte Biegungsspannung von 4000 kg/cm² hervor, wobei die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird. Die Feder ist 400 mm lang, 150 mm breit und 11 mm stark. Es ist die Verteilung der Formenergie in der Feder darzustellen.



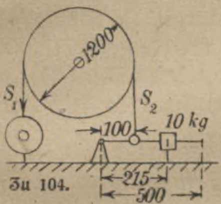

Zu 102.



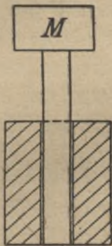

Zu 103.



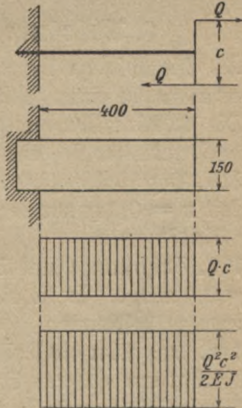

Zu 109.



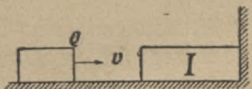

Zu 104.



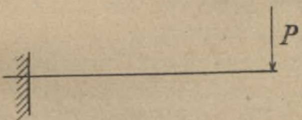

Zu 106.




Zu 110.




Zu 107.




Zu 108.

**109.** Die Dreiecksfeder ist 12 mm stark und hat eine Länge von 400 mm. Der Querschnitt an der Wand hat eine Breite von 150 mm. An der Spitze wirkt eine Last von 360 kg. Es ist die Formenergie der Feder zu bestimmen und ihre Verteilung über der Feder darzustellen.

**110.** An einer rechteckigen Blattfeder von 400 mm Länge, 150 mm Breite und 12 mm Stärke wirkt ein Kräftepaar, dessen Moment $Qc = 14\,400$ cmkg ist. Es ist die Formenergie der Feder zu bestimmen und darzustellen.

**111.** Eine 400 mm lange, 150 mm breite und 12 mm starke rechteckige Blattfeder trägt eine gleichmäßig verteilte Last von 720 kg. Es ist die Formenergie der Feder zu bestimmen.

**112.** Eine Welle von 60 mm Stärke und 20 m Länge soll bei 180 Touren 40 PS übertragen. Wie groß wird die Formenergie der Welle?

**113.** Eine Schraubenfeder hat eine Drehstärke von 5 mm, einen Radius von 30 mm und 5 Windungen. Wie groß wird die Formenergie der Feder, wenn eine Druckkraft $P = 25$ kg auf sie wirkt?

**114.** Ein Stab vom Volumen $V$ soll bei einer Geschwindigkeit $v$ N PS übertragen. Wie groß muß die Formenergie des Stabes sein?

**115.** Ein Riemen von der Gesamtlänge $l$ und dem Querschnitt $f$ wird mit der Spannung $s$ kg/cm$^2$ auf die Scheiben gelegt. Um wieviel ändert sich die Formenergie des Riemens beim Betrieb?

## 8. Absolute und relative Bewegung.

**XI.** Die absolute Bewegung eines Punktes ist die Bewegung des Punktes gegen einen feststehenden Punkt.

Die relative Bewegung eines Punktes ist seine Bewegung gegen einen Punkt, der sich ebenfalls bewegt.

**116.** Der Keil, dessen Anzug 1 : 10 ist, wird mit einer Geschwindigkeit $v = 0{,}1$ m/sec verschoben. Wie bewegt sich die Stange gegen den Keil?

**117.** Zahnstange und Rad bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}4$ m/sec. Es ist die relative Bewegung des Rades gegen die Stange zu bestimmen.

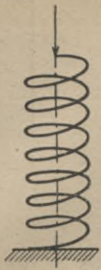
**118.** Das über die Rolle laufende Seil ist am linken Ende befestigt und trägt am anderen Ende ein Gewicht $Q$. Die Rolle wird mit der Geschwindigkeit $v$ aufwärts bewegt. Welche Geschwindigkeit $v_0$ erhält $Q$?

**119.** Der Zapfen einer Kurbelschleife dreht sich mit der Geschwindigkeit $v$, die Stange bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_0$. Wie bewegt sich der Zapfen gegen die Schleife?

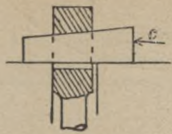
**120.** Es ist die relative Bewegung des Kurbelzapfens gegen den Pleuelkopf zu bestimmen.

**121.** Es ist die relative Bewegung des Kreuzkopfes gegen den Kurbelzapfen zu bestimmen.

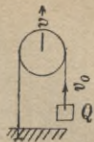
**122.** Die Punkte $I$ und $II$ drehen sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit $w$ um denselben Punkt. Ihre Drehradien $r_1$ und $r_2$ bilden



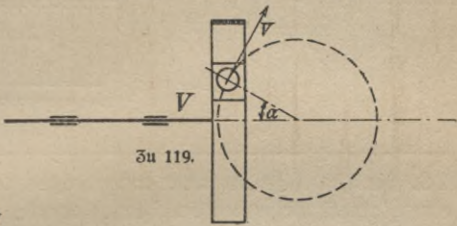
Zu 113.



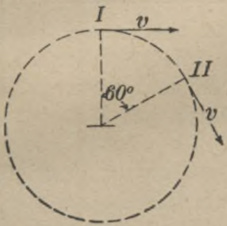

Zu 116.



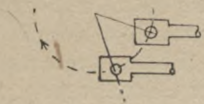

Zu 118.



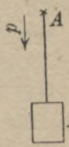

Zu 119.




Zu 123.



Zu 120.




Zu 124.

den Winkel $\alpha$ miteinander. Es ist die relative Geschwindigkeit des Punktes *II* gegen *I* zu bestimmen.

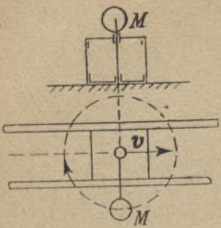
**123.** Zwei Punkte *I* und *II* bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit $v$ auf einem Kreise. Ihre Drehradien bilden einen Winkel von $60^0$ miteinander. Es soll die relative Bewegung von *II* gegen *I* bestimmt werden.

**124.** Der Endpunkt $A$ des Seils, an dem die Masse $M$ hängt, soll mit der Beschleunigung $p$ abwärts bewegt werden. Wie bewegt sich $M$?

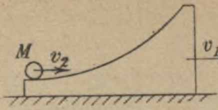
**125.** Der Punkt $A$ in der letzten Aufgabe wird mit der Geschwindigkeit $v$ abwärts bewegt. Wie bewegt sich $M$?

**126.** Der Punkt $A$ in der letzten Aufgabe wird mit der Beschleunigung $p$ wagerecht bewegt. Wie bewegt sich $M$?

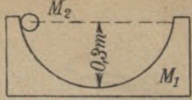
**127.** Der Punkt $A$ in der letzten Aufgabe wird mit der Geschwindigkeit $v$ wagerecht bewegt. Wie bewegt sich $M$?



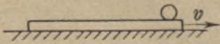

Zu 128.



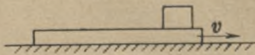

Zu 130.




Zu 132.




Zu 134.




Zu 135.

**128.** Die Kugel ist an einer wagerechten Stange und die Stange an einer lotrecht stehenden drehbar gelagerten Spindel befestigt. Das geführte Lagergehäuse wird mit einer Geschwindigkeit $v$ bewegt. Bei Beginn der Bewegung steht die Stange senkrecht zur Bewegungsrichtung. Wie bewegt sich die Kugel?

**129.** Wie bewegt sich die Kugel der letzten Aufgabe wenn das Lagergehäuse mit der Beschleunigung $p$ bewegt wird?

**130.** Die Kurve wird mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2$ m/sec bewegt und der Masse $M$ eine Geschwindigkeit $v_2 = 3{,}8$ m/sec gegeben. Wie bewegt sich $M$?

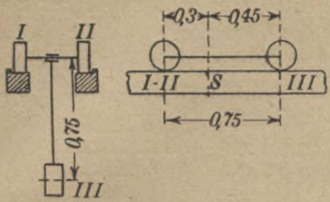
**131.** Die Geschwindigkeit der Masse $M$ in voriger Aufgabe sei $v_2 = 4$ m/sec. Wie groß muß die Geschwindigkeit $v_1$ der Kurve sein, damit die Masse ihre ganze Energie an die Kurve abgibt?

**132.** Die Masse $M_1$ mit der kreisförmigen Führungsfläche wiegt 20 kg, die Masse $M_2$ 10 kg. $M_1$ kann sich auf wagerechter Bahn bewegen. Die Masse $M_2$ wird im höchsten Punkt der Führungsfläche aufgesetzt und losgelassen. Wie bewegen sich die Massen?

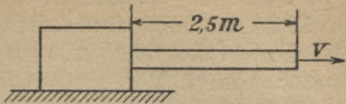
**133.** Welche Bahn beschreibt $M_2$ in der vorigen Aufgabe?

**134.** Einer 30 kg schweren Platte, auf der eine Kugel von 45 kg Gewicht liegt, wird durch Stoß eine Geschwindigkeit $v = 1{,}5$ m/sec gegeben. Der Reibungskoeffizient zwischen Kugel und Platte ist $\mu = 0{,}2$. Wie bewegen sich die Körper?

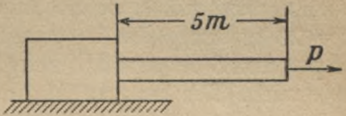
**135.** Einer 24 kg schweren Platte, auf der ein Gewicht von 30 kg liegt, wird durch Stoß eine Geschwindigkeit $v = 2$ m/sec gegeben. Es ist $\mu = 0{,}2$. Wie bewegen sich die Körper?




Zu 139.




Zu 140.




Zu 141.

**136.** Einer 20 kg schweren Platte, auf welcher eine zylindrische Scheibe von 40 kg liegt, wird durch Stoß eine Geschwindigkeit $v = 2{,}4$ m/sec gegeben. Wie bewegen sich die Körper, wenn $\mu = 0{,}2$ ist?

**137.** Einer Kugel von 20 kg Gewicht wird eine Umfangsgeschwindigkeit $v = 2{,}5$ m/sec um einen horizontalen Durchmesser erteilt und in diesem Bewegungszustande auf eine horizontale Platte von 30 kg Gewicht gelegt. Es sei $\mu = 0{,}2$. Wie bewegen sich die Körper?

**138.** Eine zylindrische Scheibe von 30 kg Gewicht wird mit einer Umfangsgeschwindigkeit $v = 2$ m/sec auf eine 15 kg schwere Platte gelegt. Wie bewegen sich die Körper, wenn $\mu = 0{,}2$ ist?

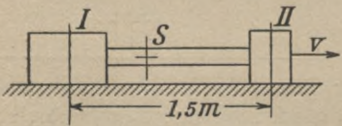
**139.** Die beiden Massen *I* und *II*, die je 30 kg wiegen, laufen auf wagerecht liegenden Trägern und sind durch eine Stange verbunden, um welche eine andere Stange drehbar ist. An dieser 0,75 m langen Stange hängt die Masse *III* von 40 kg Gewicht. Stange und Masse *III* werden in die wagerechte Lage gebracht und dann losgelassen. Wie bewegen sich die Körper?

**140.** An einem elastischen Stab von 2,5 m Länge und 5 cm$^2$ Querschnitt ist ein Gewicht von 1000 kg befestigt, das sich auf wagerechter Ebene bewegen kann. Das freie Stabende wird plötzlich mit einer Geschwindigkeit $v = 1$ m/sec bewegt. Wie bewegt sich das Gewicht?

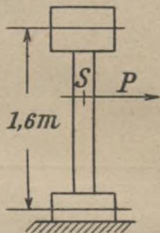
**141.** Das freie Ende des elastischen, 5 m langen Stabes soll mit einer Beschleunigung $p = 5$ m/sec$^2$ wagerecht bewegt werden. Das Gewicht soll 1000 kg, der Stabquerschnitt 2,5 cm$^2$ betragen. Wie bewegt sich das Gewicht auf wagerechter Bahn?

**142.** Zwei auf wagerechter Ebene liegende Gewichte von 100 kg und 50 kg sind durch einen elastischen, 1,5 m langen Stab verbunden. Dem Gewicht von 50 kg wird durch Stoß eine Geschwindigkeit $v =$ 3 m/sec gegeben. Wie bewegen sich die Gewichte?

**143.** Zwei Gewichte von 50 kg und 30 kg, die auf einer wagerechten Ebene liegen und durch einen elastischen Stab von 1,6 m Länge verbunden sind, werden durch eine Kraft $P = 20$ kg bewegt, die im gemeinschaftlichen Schwerpunkt $S$ der Gewichte senkrecht zur Stabachse wirkt. Wie bewegen sich die Gewichte?




Zu 142.




Zu 143.

# II. Hydraulik.

## 9. Statik der Flüssigkeiten.

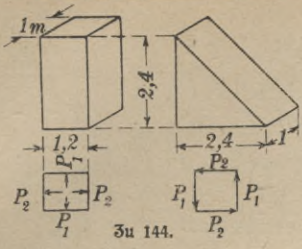
**XII.** Flüssigkeiten pflanzen jeden auf sie ausgeübten Druck nach allen Richtungen ungeschwächt fort. Eine wagerechte Schicht einer in einem Behälter eingeschlossenen Flüssigkeit erleidet den Druck des Gewichtes der über der Schicht stehenden Flüssigkeit und pflanzt den Druck nach den Seitenwänden und dem Boden des Behälters fort.

Der Druck auf ein Flächenteilchen einer Seitenwand eines Behälters ist gleich dem Gewichte des Flüssigkeitskörpers, dessen Grundfläche gleich dem Inhalt des Flächenteilchens und dessen Höhe gleich dem Abstand des Flächenteilchens vom Flüssigkeitsspiegel ist.

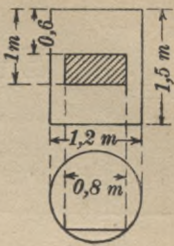
Der Druck einer Flüssigkeit auf ein Flächenteilchen einer Seitenwand ist gleich dem Produkt aus dem statischen Moment des Flächenteilchens bezogen auf den Flüssigkeitsspiegel und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit.

Der Flüssigkeitsdruck auf den Boden eines Behälters ist gleich dem Produkt aus der Bodenfläche, dem Abstand der Bodenfläche vom Flüssigkeitsspiegel und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit.

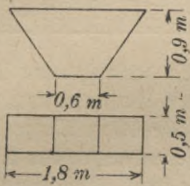
**144.** Wie groß sind die Drucke auf die Seitenwände des Wasserbehälters, und wo greifen sie an?



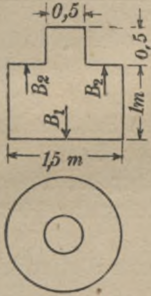

Zu 144.



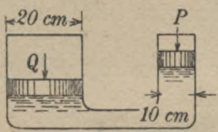

Zu 147.



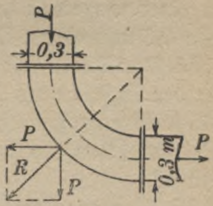

Zu 148.




Zu 149.




Zu 151.




Zu 152.

**145.** Wie groß sind die Drucke auf die Seitenwände eines Wasserbehälters, dessen Grundriß ein regelmäßiges Sechseck ist?

**146.** Wie groß ist der Druck auf den halben Mantel eines zylindrischen Wasserbehälters von 1,8 m Durchmesser und 1,5 m Höhe?

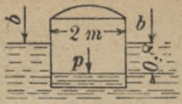
**147.** Wie groß ist der Druck auf das in der Figur schraffierte Stück des Mantels?

**148.** Es sind die Drucke auf die Seitenwände und den Boden des Wasserbehälters zu bestimmen.

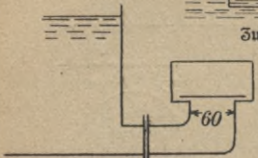
**149.** Es sind die Boden- und Seitendrucke des Behälters zu bestimmen.

**150.** Der Mantel des zylindrischen Wasserbehälters besteht aus zwei Ringen von je 0,9 m Höhe und 1,5 m Durchmesser. Wie groß sind die Drucke auf die halben Ringe, und wo greifen sie an?

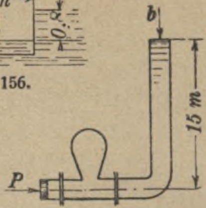
**151.** Auf den Kolben wirkt ein Druck $P = 50$ kg. Welche Last $Q$ kann $P$ heben?



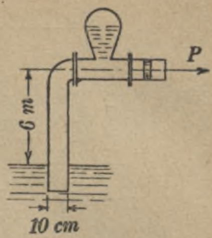

Zu 156.




Zu 153.




Zu 154.




Zu 155.

**152.** Wie groß ist der Druck des ruhenden Wassers auf den Krümmer einer wagerecht liegenden Wasserleitung, wenn die lichte Rohrweite 0,3 m und die Druckhöhe 15 m Wassersäule beträgt?

**153.** Das Ventil soll sich heben, wenn das Wasser im Behälter 2 m über der Sitzfläche des Ventils steht. Wie schwer muß das Ventil sein?

**154.** Wie groß muß der Kolbendruck $P$ sein, welcher der Wassersäule von 15 m das Gleichgewicht hält, wenn die Rohrweite 10 cm beträgt?

**155.** Wie groß muß die Kolbenkraft $P$ sein, die eine Wassersäule von 6 m im Saugrohr hält?

**156.** Wie groß ist das Gewicht der Glocke?

## 10. Auftrieb.

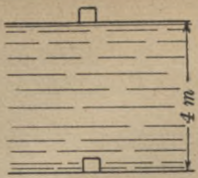
**XIII.** Ein in einer Flüssigkeit schwimmender Körper erleidet in jedem Flächenteilchen seiner benetzten Oberfläche einen senkrecht zu dem Flächenteilchen gerichteten Druck.

Die Resultante der wagerechten Komponenten der Flüssigkeitsdrucke ist gleich Null.

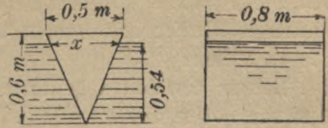
Die Resultante der lotrechten Komponenten ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeitsmenge, die der Körper verdrängt.

Diese lotrecht aufwärts gerichtete Resultante, Auftrieb genannt, hält dem Gewicht des schwimmenden Körpers das Gleichgewicht, ihre Richtung geht durch den Schwerpunkt der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.

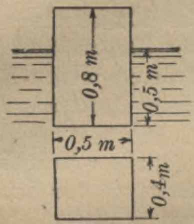
**157.** Welche Arbeit ist erforderlich, um einen würfelförmigen Körper von 0,8 m Kantenlänge und dem spezifischen Gewicht



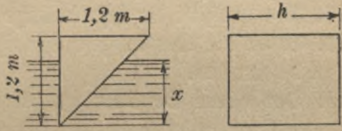

Zu 157.




Zu 159.




Zu 158.




Zu 160.

$\gamma = 2{,}2$ aus einer Tiefe von 4 m über den Wasserspiegel zu heben?

**158.** Das Prisma taucht im Wasser 0,5 m ein. Wie schwer ist das Prisma, und wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

**159.** Ein Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist, schwimmt so, wie in der Figur angegeben.

Wie groß ist das spezifische Gewicht des Körpers, und wie groß sind die auf die Seitenflächen wirkenden Wasserdrucke $N$?

**160.** Ein dreiseitiges Prisma, dessen spez. Gewicht $\gamma = 0{,}64$ ist, soll im Wasser so schwimmen wie die Figur zeigt. Welche äußere Kräfte müssen noch an dem Körper wirken, damit er die angebene Lage im Wasser behält?

**161.** Eine Kugel, die 10 kg wiegt und ein spezifisches Gewicht $\gamma = 0{,}8$ hat, wird durch eine Kraft $P$ 2 m unter den Wasserspiegel gedrückt. Dann soll die Kraft $P$ nicht mehr wirken. Wie groß muß $P$ und ihre Arbeit sein und wie bewegt sich die Kugel nachher?

## 11. Dynamik der Flüssigkeiten.

**XIV.** Die potentielle Energie der Flüssigkeiten wird auch **Druckenergie** genannt. Der **hydrostatische** Druck ist der Druck der ruhenden, der **hydraulische** Druck der Druck der fließenden Flüssigkeit.

**162.** Wie groß ist die Druckenergie des Wassers in beistehendem Behälter?

**163.** Die Pumpe *P* soll den Behälter mit Wasser füllen, das von dem unteren Wasser entnommen wird. Welche Nutzarbeit hat die Pumpe zu leisten?

**164.** Die an den Seiten geführte Wand *I* soll durch eine Kraft *P* um 1 m verschoben und der Wasserspiegel um 1 m gehoben werden. Welche Arbeit hat *P* zu leisten?

**165.** Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus?

**166.** Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser über?

**167.** Wie groß ist der hydraulische Druck im 6 cm weiten Rohre?

**168.** Es ist die Ausflußgeschwindigkeit und der Druck im Ausflußrohr zu bestimmen.

**169.** Der obere Behälter ist luftdicht verschlossen. Das Wasser fließt aus dem unteren in den oberen Behälter mit der Geschwindigkeit $v = 10$ m/sec. Wie groß ist der Luftdruck im oberen Behälter?

**170.** Das Rohr sitzt luftdicht auf dem Behälter, das Wasser fließt mit der Geschwindigkeit $v = 5$ m/sec oben aus. Wie groß ist der Luftdruck im Behälter?

**171.** Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit $v$?

**172.** Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit und der Druck im wagerechten Rohr?

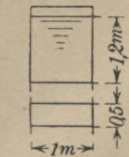
**173.** Wie groß wird die Ausflußgeschwindigkeit und der Druck im wagerechten Rohr bei Aufgabe 172, wenn die Mittellinie des wagerechten Rohres 10 m über dem unteren und 1,25 m unter dem oberen Wasserspiegel liegt?

**174.** Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser durch den Heber, und wie groß wird der Druck $p$ im wagerechten Rohr?

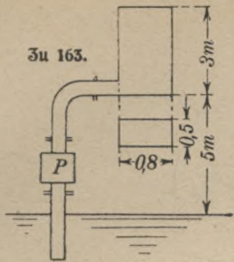
**175.** Für beistehenden Heber ist das Diagramm zu zeichnen, dann ist die Durchflußgeschwindigkeit und der Druck $p$ im wagerechten Rohr zu bestimmen.

**176.** Behälter und Rohr sind mit Wasser gefüllt, das Rohr ist geschlossen. Wie bewegt sich das Wasser im Rohr, wenn das Rohr geöffnet wird?

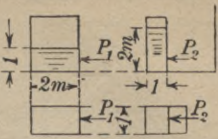
**177.** Die Saugleitung einer Pumpe ist 12,5 m lang, die Saughöhe beträgt 5 m, die Rohrweite 5 cm, der Kolbendurchmesser 10 cm. Welche Beschleunigung darf der Kolben bei Beginn des Hubes haben, damit das Wasser nicht vom Kolben abreißt?



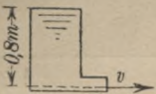

Zu 162.



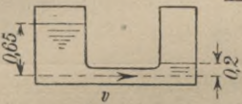

Zu 163.



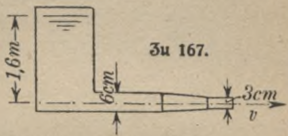

Zu 164.



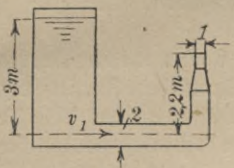

Zu 165.



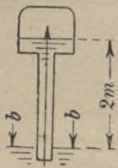

Zu 166.



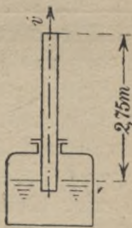

Zu 167.



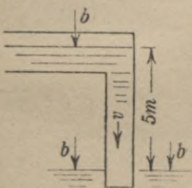

Zu 168.



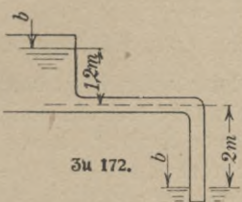

Zu 169.



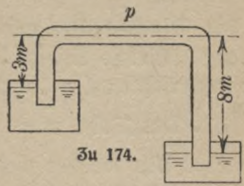

Zu 170.



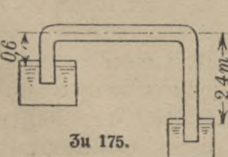

Zu 171.



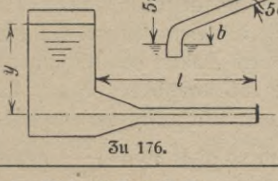

Zu 172.



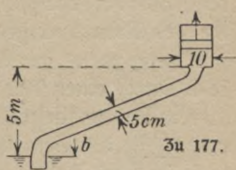

Zu 174.



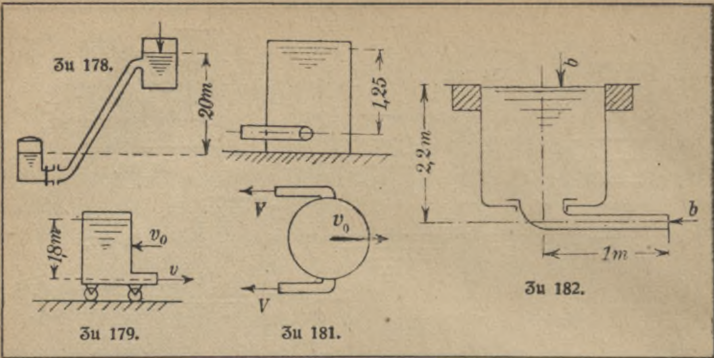

Zu 175.




Zu 176.




Zu 177.




**178.** Der untere Behälter ist luftdicht verschlossen, die Rohrleitung 25 m lang und gefüllt. Beim Öffnen des Schiebers soll das Wasser eine Beschleunigung $p_0 = 0{,}5$ m/sec$^2$ erhalten. Wie groß ist der Luftdruck im unteren Behälter?

**179.** Der mit Wasser gefüllte Behälter wird mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 4$ m/sec bewegt. Der Querschnitt des Ausflußrohres ist $f = 5$ cm$^2$. Welche Energie gibt das Wasser an den Behälter ab?

**180.** Der Behälter der vorigen Aufgabe soll mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 4$ m/sec in der Ausflußrichtung bewegt werden.

**181.** Der Behälter wird mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 4$ m/sec bewegt. Welche Arbeit leistet das ausfließende Wasser, wenn der Rohrquerschnitt $f = 20$ cm$^2$ ist?

**182.** Das Rohr wird mit einer Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{10}{\text{sec}}$ gedreht. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus?

**183.** Bei der vorigen Aufgabe soll das Rohr durch eine in der Mitte des Rohres angreifende Kraft $P$ gedreht werden. Wie groß muß $P$ sein, wenn der Rohrquerschnitt $f = 30$ cm$^2$ ist?

**184.** Durch einen Rohrkrümmer von 0,2 m lichter Weite und 1 m mittlerem Radius fließt Wasser mit einer Geschwindigkeit $v = 3$ m/sec. Wie groß ist der Zentrifugaldruck auf den Krümmer?

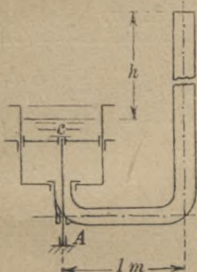
**185.** In den Boden des feststehenden Behälters mündet ein um die Spindel $AC$ drehbares Rohr. Wie hoch steigt das Wasser im Rohr über den Wasserspiegel im Behälter, wenn das Rohr mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{20}{\text{sec}}$ gedreht wird?

**186.** Wie hoch steigt das Wasser in beistehendem Rohr über den unteren Wasserspiegel, wenn das Rohr mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{15\sqrt{5}}{\mathrm{sec}}$ gedreht wird?

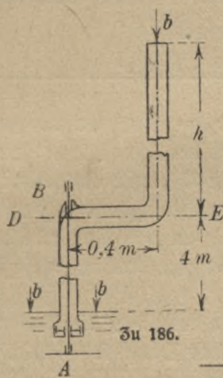
**187.** Durch die Schaufeln einer Aktionsturbine fließt in der Sekunde 1 $m^3$ Wasser mit einer Geschwindigkeit (relative Geschwindigkeit) $v_1 = 3{,}6$ m/sec. Die Schaufeln sollen kreisförmig gekrümmt sein. Wie groß wird der Druck des Wassers auf die Schaufeln und wieviel PS liefert die Turbine, wenn ihre mittlere Umfangsgeschwindigkeit $v = 2{,}75$ m/sec beträgt?

**188.** Über die Schaufeln eines Pelton-Rades fließen in der Sekunde 10 l Wasser mit einer Geschwindigkeit (relative Geschwindigkeit) $v_1 = 10$ m/sec. Wie groß wird der Druck des Wassers auf die Schaufeln und wieviel PS liefert das Rad, wenn seine Umfangsgeschwindigkeit $v = 8$ m/sec beträgt?

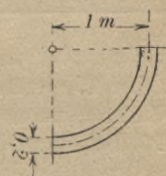
**189.** Bei einer Aktionsturbine tritt das Wasser ohne Druck mit



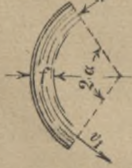
Zu 185.



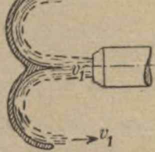
Zu 186.

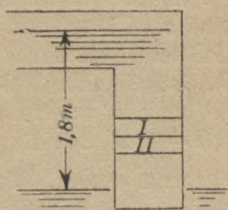


Zu 184.

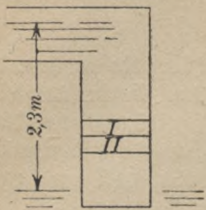


Zu 187.

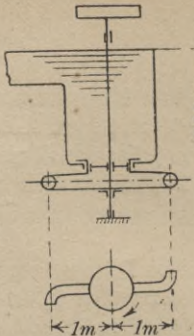

Zu 188.



Zu 189.

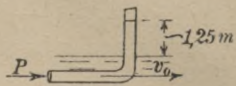



Zu 191.

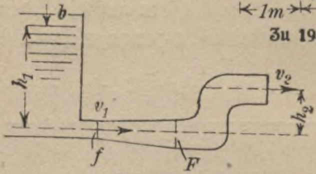



Zu 193.

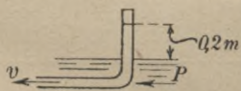

Zu 195.




Zu 196.




Zu 198.




Zu 197.

einer Geschwindigkeit $v_e = 6$ m/sec ein und mit $v_a = 2{,}3$ m/sec aus. Die Wassermenge beträgt 1,2 m³ pro Sekunde. Was leistet die Turbine, wenn keine Verluste eintreten?

**190.** Bei einem Pelton-Rad, dem in der Sekunde 15 l Wasser zufließen, tritt das Wasser in das Rad mit der Geschwindigkeit $v_e = 10$ m/sec. Das Rad hat eine Umfangsgeschwindigkeit $v = 8$ m/sec. Was leistet das Rad?

**191.** In eine Turbine tritt das Wasser mit einer Geschwindigkeit $v_e = 5$ m/sec und einem Druck $h = 1{,}05$ m ein. Es verläßt die Turbine ohne Druck mit einer Geschwindigkeit $v_a = 2$ m/sec. Wieviel PS leistet die Turbine, wenn $Q = 1200$ l/sec ist?

**192.** Bei Aufgabe 186 sei wieder die Höhe vom unteren Wasserspiegel bis zum wagerechten Teil des Rohres gleich 4 m, die andere Höhe $h = 7$ m. Das Rohr soll mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{40}{\text{sec}}$ gedreht werden. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus, und welche Arbeit muß die Drehkraft $P$ leisten?

**193.** Das gekrümmte Rohr soll mit einer Winkelgeschwindigkeit

$w = \frac{6}{\text{sec}}$ gedreht werden. Welche Arbeit gibt das Wasser an die Spindel ab?

**194.** Dieselbe Aufgabe ist für $h = 2{,}4$ m, $r = 1$ m, $w = \frac{4}{\text{sec}}$ zu lösen.

**195.** In das mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5$ m/sec fließende Wasser wird das gebogene Rohr gestellt. Mit welcher Geschwindigkeit $v$ fließt das Wasser oben aus?

**196.** Das Wasser steigt in dem gebogenen Rohr 1,25 m über die äußere Oberfläche. Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_0$ des Wassers?

**197.** In ruhendem Wasser wird das Rohr mit einer Geschwindigkeit $v = 2$ m/sec bewegt. Wie hoch steigt das Wasser im Rohr?

**198.** Das konische Ausflußrohr soll sich von $f$ cm² Querschnitt auf $F$ cm² erweitern, ein Energieverlust soll nicht eintreten.

Es sind die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ zu berechnen und das Druckdiagramm zu zeichnen.

## Lösung der Aufgaben.

**1.** Die Masse des Körpers ist: $M = \frac{G}{g} = \frac{50\ \text{kg} \cdot \text{sec}^2}{10\ \text{m}} = \frac{5\ \text{kg sec}^2}{\text{m}}$ und die Beschleunigung: $p = \frac{P}{M} = \frac{20\ \text{kg m}}{5\ \text{kg sec}^2} = 4\ \text{m/sec}^2$.

**2.** Zur Überwindung der Reibung ist eine Kraft $P_1 = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ kg erforderlich, mithin bleibt noch für die Beschleunigung:

$$P_2 = P - P_1 = 20 - 10 = 10\ \text{kg}.$$

Die Beschleunigung wird daher: $p = \frac{10\ \text{kg m}}{5\ \text{kg} \cdot \text{sec}^2} = 2\ \text{m/sec}^2$.

**3.** Die Trägheitskraft $P_2 = Mp$ geht durch den Schwerpunkt des Körpers und wirkt wagerecht. Die Kraft $P_1 = G \cdot \mu$ wirkt an der Gleitfläche. Die beiden Kräfte sind gleich groß und gleich gerichtet. Ihre Resultante wirkt daher in einer Höhe von 0,05 m über der Führung. In derselben Höhe muß die Kraft $P$ wirken in der Mittelebene $I\ II$.

**4.** Die Reibung ist hier $P = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ kg. Die Reibung ist die äußere Kraft, welche dem Körper die Verzögerung

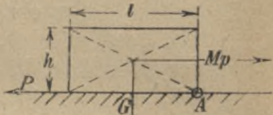
$$p = \frac{P}{M} = \frac{10}{5} = 2\ \mathrm{m/sec^2}$$

gibt. Da die Anfangsgeschwindigkeit $v = 5\ \mathrm{m/sec}$ ist, bewegt sich der Körper:

$$t = \frac{5\ \mathrm{m/sec}}{2\ \mathrm{m/sec^2}} = 2{,}5\ \mathrm{sec}$$

lang und legt einen Weg zurück: $s = \frac{5}{2}\ \mathrm{m/sec} \cdot 2{,}5\ \mathrm{sec} = 6{,}25\ \mathrm{m}$.

5. Im Schwerpunkt wirkt die Trägheitskraft $P = M \cdot p = 10$ kg wagerecht. Lotrecht wirkt $G = 59$ kg. Damit sich der Körper nicht um den Punkt $A$ dreht, muß sein



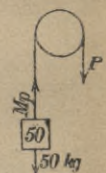

Zu 5.

$$P \cdot \frac{h}{2} = G \cdot \frac{l}{2};\quad \frac{h}{l} = \frac{G}{P};\quad \frac{h}{l} = \frac{50}{10} = 5.$$

Die Höhe darf höchstens die fünffache Länge betragen.

6. Um das Gewicht im Gleichgewicht zu halten, ist eine Zugkraft von 50 kg erforderlich. Es bleibt also noch eine überschüssige Kraft von 10 kg, die der Masse $M = \frac{50\ \mathrm{kg\ sec^2}}{10\ \mathrm{m}}$ eine Beschleunigung $p = \frac{10}{5} = 2\ \mathrm{m/sec^2}$ gibt. In jedem Seilende wirkt eine Zugkraft von 60 kg. Der Druck auf die Rollenachse beträgt 120 kg.

7. An dem Gewicht wirkt abwärts die Kraft $G = 50$ kg, aufwärts die Trägheitskraft $Mp = \frac{50}{10} \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ kg; mithin wirkt im Seil die Zugkraft $G - Mp = 50 - 12{,}5 = 37{,}5$ kg. Dieser Kraft muß $P$ das Gleichgewicht halten. Daher ist: $P = 37{,}5$ kg. Der Druck auf die Rollenachse $2P = 75$ kg.




Zu 7.

8. a) Bei der Aufwärtsbewegung ist: $P = 100 + \frac{100}{10} \cdot 2 = 120$ kg.
b) Bei der Abwärtsbewegung ist: $P = 100 - \frac{100}{10} \cdot 2 = 80$ kg.
Die Zugkraft im Seil ist: $Z_a = 120$ kg, $Z_b = 80$ kg.

9. Zur Abwärtsbewegung mit der Beschleunigung $p = 12\ \mathrm{m/sec^2}$ wird das ganze Gewicht verbraucht. Demnach muß auf das Gewicht noch eine abwärts gerichtete Kraft

$$P = \frac{100\ \mathrm{kg \cdot sec^2}}{10\ \mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m/sec^2},\quad P = 20\ \mathrm{kg}$$

wirken. Liegt das Gewicht lose auf dem Fahrstuhl, so hebt es sich ab, bleibt zurück. Es muß deshalb an dem Fahrstuhl befestigt werden.

In der Befestigung wirkt dann eine aufwärts gerichtete Zugkraft von 20 kg.

**10.** Die Reibung ist $W = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ kg. Diese Reibung gibt der Platte die Beschleunigung

$$p = \frac{W}{M} = \frac{10}{10} = 1 \text{ m/sec}^2.$$

In einer Sekunde erreicht die Platte die Geschwindigkeit $v = 1$ m/sec. In der ersten Sekunde verschiebt sich $II$ um

$$s = \frac{v}{2} \cdot t = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ m}.$$

Nach der ersten Sekunde bewegen sich beide Körper mit der Geschwindigkeit von 1 m/sec. Körper $II$ legt in der ersten Sekunde einen Weg von 1 m, $II$ einen Weg von 0,5 m zurück, also verschiebt sich $I$ auf $II$ um 0,5 m.

**11.** Das Gewicht $G$ wird in die Komponenten $P$ und $N$ zerlegt, $P$ parallel zur Bahn, $N$ senkrecht dazu. Die bewegende Kraft ist $P = 0{,}4\,G$, daher $p = \frac{P}{M} = \frac{0{,}4\,G \cdot g}{G} = 4 \text{ m/sec}^2$. Zu demselben Resultat kommt man, wenn man die Trägheitskraft $M \cdot p$ mit $G$ zusammensetzt. Diese Kräfte sind im Gleichgewicht, ihre Resultante muß senkrecht zur schiefen Ebene stehen. Die Kräfte sind: $G = M \cdot g$, $P = M \cdot p$. Also ist $\frac{G}{P} = \frac{g}{p}$. Statt der Kräfte können daher auch die Beschleunigungen $g$ und $p$ gezeichnet werden.

**12.** Wird das Gewicht wieder wie in Aufgabe 11 in $P$ und $N$ zerlegt, so wird $P : G = 0{,}6 : 1$; $P = 0{,}6\,G = 12$ kg. Ferner $N : G = a : 1$, $N = G \cdot a$.

Es ist aber $a = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$ m,

$$N = 0{,}8 \cdot 20 = 16 \text{ kg}.$$

Daher ist die Reibung $N\mu = 16 \cdot 0{,}25 = 4$ kg.

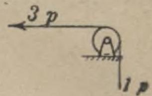
Daher ist die beschleunigte Kraft $P_1 = P - N\mu = 8$ kg und die Beschleunigung $p = \frac{P_1}{M} = \frac{8}{2} = 4 \text{ m/sec}^2$.

Bei der graphischen Bestimmung ist die Resultante von $G$ und $P$, bzw. $g$ und $p$ nicht senkrecht, sondern unter dem Reibungswinkel $\rho$ zu zeichnen. ($\operatorname{tg} \rho = 0{,}25$).

**13.** Die Kraft $P$ hat der Komponente $P_1$ und der Reibung $N\mu$ das Gleichgewicht zu halten und muß außerdem den Körper aufwärts beschleunigen; also ist:

$$P = P_1 + N\mu + Mp$$
$$P = 12 + 4 + \tfrac{20}{10} p$$
$$P = 16 + 4 = 20 \text{ kg.}$$

**14.** Die Masse $M = \dfrac{30 + 10}{10} = 4 \text{ kg/m/sec}^2$ wird von dem Gewicht oder der Kraft $P = 10$ kg bewegt.

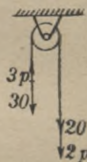



Die Beschleunigung ist:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{10 \text{ kg m}}{4 \text{ kg sec}^2} = 2{,}5 \text{ m/sec}^2.$$

Die Trägheitskräfte der beiden Gewichte sind $P_1 = 1\,p$, $P_2 = 3\,p$.
Daher $4\,p = 10$, $p = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ m/sec}^2$.
Im Seil wirkt die Zugkraft $Z = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ kg.

**15.** Zum Gleichgewicht müssen auf jeder Seite 20 kg hängen. Das linksseitige Übergewicht $P = 10$ kg hat die Masse $M = \dfrac{30 + 20}{10} = \dfrac{5 \text{ kg sec}^2}{1 \text{ m}}$ zu beschleunigen; also wird




$$p = \frac{P}{M} = \frac{10 \text{ kg} \cdot \text{m}}{5 \text{ kg sec}^2} = 2 \text{ m/sec}^2.$$

Auf der linken Seite wirken abwärts 30 kg, aufwärts $3p$, auf der rechten Seite 20 kg und $2p$ abwärts, also ist:

$$20 + 2p = 30 - 3p$$
$$5p = 10$$
$$p = 2 \text{ m/sec}^2.$$

**16.** Die Scheiben drehen sich rechts herum, wobei das Gewicht von 15 kg eine Aufwärtsbeschleunigung $p$, das andere Gewicht eine Abwärtsbeschleunigung $2p$ erhält.

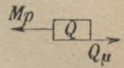
$$(10 - 2p) \cdot 100 = (15 + 1{,}5p) \cdot 50.$$
$$p = \tfrac{10}{11} \text{ m/sec}^2.$$

**17.** Wirkt keine Reibung zwischen $I$ und $II$, so bleibt $I$ stehen. Die relative Bewegung von $I$ gegen $II$ ist eine Verschiebung auf $II$ von rechts nach links mit der Beschleunigung $p$. Wirkt Reibung zwischen $I$ und $II$, so wirkt diese Reibung $Q\mu$ beschleunigend auf $I$ in der

Richtung von links nach rechts. Diese Beschleunigung ist:

$$p_1 = \frac{Q\mu}{M} = \frac{Q\mu \cdot g}{Q} = \mu \cdot g.$$

Daher ist die Beschleunigung der relativen Bewegung von $I$ gegen $II$: $p - p_1 = p - \mu g$.

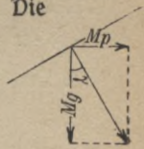



Die relative Bewegung mit der Beschleunigung $p$ bringt die Trägheitskraft $M \cdot p$ hervor. Es wirken also an $I$ zwei Kräfte: $M \cdot p$ und $Q \cdot \mu$, die die Beschleunigung:

$$\frac{Mp - Q\mu}{M} = \frac{Mp - Mg\mu}{M} = p - g\mu$$

hervorrufen.

18. Auf das Gewicht wirken die von links nach rechts gerichtete Trägheitskraft $M \cdot p$ und das Gewicht $G$ gleich $M \cdot g$. Die beiden Kräfte müssen im Gleichgewicht sein, ihre Resultante muß senkrecht zur schiefen Ebene stehen. Ist der Neigungswinkel $\alpha$, so ist:




$$Mp = M \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\mathbf{p = g \cdot tg}\, \alpha.$$

19. An den Gewichten wirken die Trägheitskräfte:

$$P_1 = \tfrac{10}{10} \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ kg}, \; P_2 = \tfrac{20}{10} \cdot 0{,}5 = 1 \text{ kg}.$$

Daher dreht an der Rolle eine Kraft von 0,5 kg, die den beiden Massen $M_1 + M_2 = 1{,}0 + 2 = 3$ die Beschleunigung

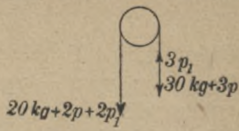
$$p_0 = \frac{0{,}5}{3} = \frac{1}{6} \text{ m/sec}^2 \text{ gibt.}$$

Diese Bewegung ist die relative Bewegung der Gewichte auf dem Brett. Das Gewicht von 10 kg erhält eine absolute Beschleunigung $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ m/sec$^2$, das andere $p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ m/sec$^2$. Die Seilspannung ist $S = \frac{10}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ kg oder $S = \frac{20}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ kg.

Die Seilspannungen müssen gleich sein. Der Druck auf die Rollenachse ist $P = 2S = \frac{4}{3}$ kg; so groß muß die äußere, auf das Brett wirkende Kraft sein, wenn die Masse des Brettes nicht berücksichtigt wird.

20. Beide Gewichte bekommen die Beschleunigung $p$, werden also um $Mp$ oder um $2p$ und $3p$ schwerer. Außerdem erhalten sie noch

eine relative Beschleunigung $p_1$ gegen die Rollenachse, die Rolle dreht sich rechts herum. Das linksseitige Gewicht wird um $2p_1$ schwerer, das andere um $3p_1$ leichter. Demnach ist:




$$20 + 2p + 2p_1 = 30 + 3p - 3p_1$$
$$5p_1 = 10 + p$$
$$p_1 = \frac{10+2}{5} = 2{,}4 \text{ m/sec}^2.$$

20 kg werden mit $p + p_1 = 4{,}4$ m/sec² aufwärts, 30 kg mit $p - p_1 = 0{,}4$ m/sec² abwärts beschleunigt. Der Druck auf die Achse wird:

$$P = 2\,(20 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2{,}4) = 2\,(30 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2{,}4)$$
$$= 2 \cdot 28{,}8 \qquad\qquad = 2 \cdot 28{,}8 = 57{,}6 \text{ kg}.$$

**21.** Hier ist die Arbeit: $A = G \cdot h = 20 \cdot 5 = 100$ kgm. Also ist $\frac{1}{2} M \cdot v^2 = 100$; $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5}$; $v = 10$ m.

**22.** Das Arbeitsvermögen des Gewichtes ist:

$$\tfrac{1}{2} M \cdot v^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{50}{10} \cdot 100 = 250 \text{ mkg}.$$

Damit kann es sein eigenes Gewicht von 50 kg auf die Höhe $h$ heben. Die Arbeitsgleichung lautet: $G \cdot h = \frac{1}{2} M v^2$,

$$50\,h = 250 \text{ mkg}; \quad h = 5 \text{ m}.$$

**23.** Von dem Arbeitsvermögen von 250 mkg sind in der Höhe von 3,2 m, $A_1 = 50 \cdot 3{,}2 = 160$ mkg zum Heben des Gewichtes verbraucht, der Rest steckt noch als Arbeitsvermögen im Gewicht. Ist $v_1$ die Geschwindigkeit dieser Höhe, so ist:

$$50 \cdot 3{,}2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{50}{10} \cdot v_1^2 = 250 \text{ mkg}, \quad v_1^2 = \frac{90 \text{ mkg} \cdot \text{m}}{2{,}5 \text{ kgsec}^2}$$
$$2{,}5\, v_1^2 = 250 - 160 \qquad v_1^2 = 36 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}$$
$$2{,}5\, v_1^2 = 90 \text{ mkg}; \qquad v_1 = 6 \text{ m/sec}.$$

In jeder Höhe ist die Summe aus Hubarbeit und Arbeitsvermögen gleich 250 mkg. Hieraus ergibt sich das Diagramm.

**24.** Das Arbeisvermögen ist: $A = \frac{1}{2} \frac{60}{10} \cdot 20^2 = 1200$ mkg. Diese Arbeit wird zur Überwindung der Reibung verbraucht auf dem Wege $s$:

$$60 \cdot 0{,}25\, s = 1200 \text{ mkg},$$
$$s = \tfrac{1200}{15} = 80 \text{ m}.$$

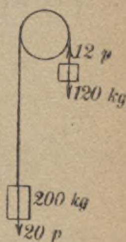
**25.** Von 1200 mkg sind verbraucht $A_1 = 60 \cdot 0{,}25 \cdot 60 = 900$ mkg; mithin bleibt $\frac{1}{2} \cdot \frac{60}{10} \cdot v^2 = 300$ mkg; $v^2 = 100$; $v = 10$ m/sec.

**26.** Am Körper *I* muß eine Kraft wirken, die gleich der Reibung ist, außerdem muß Körper *I* bei Beginn der Bewegung noch eine Geschwindigkeit $v = 1$ m/sec bzw. ein Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{10} \cdot 1 = 2{,}5$ mkg gegeben werden. Nach einer Sekunde besitzt die Platte ein Arbeitsvermögen: $\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{10} \cdot 1 = 5$ mkg. Der Körper *I* und die Kraft *P* durchlaufen in der ersten Sekunde den Weg $s = v \cdot t = 1 \cdot 1 = 1$ m. Die Kraft *P* leistet: $P \cdot s = 10 \cdot 1 = 10$ mkg. Also ist $10 = 5 + A_r$ wenn $A_r$ der Reibungsverlust: $A_r = 5$ mkg.

Körper *I* legt 1 m, Platte *II* $\frac{1}{2}$ m zurück. Die Verschiebung von *I* auf *II* beträgt 0,5 m und die Reibungsarbeit: $A_r = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ mkg.

Wenn die Platte die Geschwindigkeit von 1 m erreicht hat, gehen beide Körper mit dieser Geschwindigkeit geradlinig weiter, sie sind im Beharrungszustand. Die Kraft *P* ist dann gleich Null.

**27.** $P = 96 + 120 - 200 = 16$ kg; $p = \frac{16}{32} = 0{,}5$ m/sec$^2$; $t = 2$ sec. Die Reibungsarbeit an der Rolle ist $A = W \cdot v \cdot t = 96 \cdot 1 \cdot 2 = 192$ mkg, die Nutzarbeit $A_1 = (200 - 120) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 1^2 = 96$ mkg.




Die halbe Arbeit $\frac{A}{2}$ geht beim Schleifen des Seiles auf der Rolle verloren. Haben die Gewichte die Geschwindigkeit $v$ erreicht, so bleiben sie im Beharrungszustand und die Reibung braucht nur noch $W_1 = 200 - 120 = 80$ kg zu betragen.

**28.** Bewegt sich die Last gleichförmig beschleunigt, so lautet die Arbeitsgleichung für das Ende der Beschleunigung

$$80 \cdot \frac{6}{2} \cdot t = 300 \cdot \frac{1{,}5}{2} t + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1{,}5^2.$$

$$15\, t = 33{,}75.$$

$$t = 2{,}25 \text{ Sekunden}; \quad p = \frac{1{,}5}{2{,}25} = \frac{2}{3} \text{ m/sec}^2.$$

Die Last erreicht die Geschwindigkeit von 1,5 m/sec nach $t = \frac{v}{p} = \frac{1{,}5 \cdot 3}{2} = 2{,}25$ Sekunden. Dann kommt sie in den Beharrungszustand und die Riemenkräfte werden

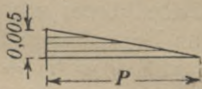
$$\begin{array}{rcl} S_1 + S_2 = 160 + 80 & = & 240 \text{ kg} \\ S_1 - S_2 = \frac{300 \cdot 150}{600} & = & 75 \text{ kg} \\ \hline 2S_1 = & & 315 \text{ kg.} \end{array}$$

$$S_1 = 157{,}5 \text{ kg}; \quad S_2 = 157 - 75 = 82{,}5 \text{ kg.}$$

**29.** Mit der Geschwindigkeit von 2 m besitzt der Hammer ein Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \frac{250}{10} \cdot 2^2 = 50$ mkg. Er kann sich dann selbst noch auf die Höhe $h$ heben: $250h = 50$, $h = \frac{50}{250} = 0{,}2$ m. Seine Fallhöhe beträgt dann $0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$ m und sein Arbeitsvermögen beim Aufschlagen

$$A = 250 \cdot 0{,}5 = 125 \text{ mkg.}$$

**30.** Der Widerstand des Schmiedestückes nimmt gleichmäßig mit der Zusammenpressung zu. Die an demselben geleistete Arbeit kann durch ein Dreieck dargestellt werden. Der Inhalt des Dreiecks ist gleich dem Arbeitsvermögen des Hammers.




$$P \cdot \frac{0{,}005}{2} = 125; \quad P = \frac{2 \cdot 125}{0{,}005} = 50\,000 \text{ kg.}$$

**31.** $$M_d = \frac{M}{3} l^2 \cdot p_0; \quad M = 4{,}5 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}}; \quad l = 0{,}5 \text{ m.}$$

$$p_0 = \frac{10}{5 \cdot 0{,}5} = \frac{4}{\text{sec}^2};$$

$$M_d = 1{,}5 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}} \cdot 0{,}5^2 \cdot m^2 \cdot \frac{4}{\text{sec}^2} \cdot$$

$$M_d = 1{,}5 \text{ mkg.}$$

$$A = \frac{1}{6} Mv^2 = \frac{1}{6} \cdot 4{,}5 \cdot 100 = 75 \text{ mkg} = M_d \cdot \frac{w}{2} \cdot t$$

$$w = \frac{75 \cdot 2}{1{,}5 \cdot 5} = \frac{20}{\text{sec}} \cdot$$

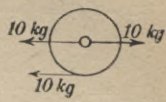
**32.** $$P = 30 \text{ kg} = M_1 \cdot p + \frac{M_2}{2} \cdot p.$$

$$(P - 3p) \frac{d}{2} = \frac{M_2}{4} \cdot d \cdot p$$

$$30 - 3p = \frac{12}{2} \cdot p = 6p$$

$$p = \frac{30}{9} = 3\frac{1}{3}\,\text{m/sec}^2;\; P = 30 - 3 \cdot 3\frac{1}{3} = 20\,\text{kg}.$$

**33.** $W = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ kg. Werden im Mittelpunkte zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte von je 10 kg angebracht, so wirkt an dem Zylinder eine Kraft $P_1 = 20$ kg und ein Drehmoment $P_2 \cdot \frac{d}{2} = 10 \cdot \frac{d}{2}$. Die Kraft $P_1$ gibt dem Zylinder die geradlinige Beschleunigung $p_1 = \frac{P_1}{M} = \frac{20}{5} = 5\,\text{m/sec}^2$. Das Drehmoment gibt ihm




die Umfangsbeschleunigung $p_2 = \dfrac{10\,\frac{d}{2}}{5\,\frac{d}{4}} = 4\,\text{m/sec}^2$. Da die Beschleunigungen gleich sind, rollt der Zylinder. Für die erste Sekunde gilt die Arbeitsgleichung:

$$P \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{2} Mp^2 + \frac{1}{4} Mp^2;\; P = \left(M + \frac{M}{2}\right) \cdot p;$$

$$p = \frac{30}{5 + 2{,}5} = 4\,\text{m/sec}^2.$$

**34.** Statt der gegebenen Kraft kann ein Drehmoment $Pa = 60 \cdot 0{,}2 = 12$ mkg und eine Achsenkraft $P = 60$ kg gesetzt werden. Es ist dann: $Pa = M\frac{d}{4}\,p_1;\; 12 = 12 \cdot 0{,}2p_1,$

$$p_1 = \frac{12}{2{,}4} = 5\,\text{m/sec}^2;\; p_2 = \frac{P}{M} = \frac{60}{12} = 5\,\text{m/sec}^2.$$

Der Zylinder bewegt sich geradlinig und dreht sich mit der Beschleunigung $p = 5\,\text{m/sec}^2$. Der Zylinder rollt. Die Arbeitsgleichung für die erste Sekunde lautet: $60 \cdot \frac{3p}{4} = \frac{3}{4} M \cdot p^2;\; 60 = 12p,$ $p = 5\,\text{m/sec}^2$. Der Weg von $P$ ist: $s = \frac{3}{4}p$.

**35.** Nach V ist ein Drehmoment $Pa = \frac{1}{5} M \cdot d \cdot p$ erforderlich. In diesem Falle ist: $Pa = M \cdot g \cdot \mu\,\frac{d}{2}$. Also wird:

$$Mg\mu \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{5} M \cdot d \cdot p;\; g \cdot \mu = \frac{2}{5} p;\; \mu = \frac{2\,[illegible]}{5\,g} = 0{,}[illegible]$$

Ferner ist: $P = M \cdot p; \; P_1 - M \cdot g \cdot \mu = M \cdot p,$

$$P_1 = M(p + g\mu); \;\; P_1 = 5\,(2{,}5 + 1) = 17{,}5 \text{ kg},$$

wenn $M = 5$ ist.

Die Arbeitsleistung für die erste Sekunde lautet:

$$P_1 \cdot \frac{p}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) M \cdot p^2, \;\; P_1 = 2 \cdot \frac{7}{10} \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 17{,}5 \text{ kg}.$$

**36.** Die Reibungen sind $W_1 = 300 \cdot 0{,}2 = 60$ kg, $W_2 = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ kg.

$$Pa - 60 \cdot 0{,}6 = \tfrac{1}{4} \cdot 30 \cdot 1{,}2 \cdot 1; \;\; Pa = 45 \text{ mkg}.$$

Die Schubkraft am Zylinder ist gleich $W_1 = 60$ kg. Diese Kraft gibt dem Zylinder und dem andern Körper die geradlinige Beschleunigung und überwindet die Reibung $W_2$.

$$60 = 30 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 20.$$

Ist $p_0$ die Winkelbeschleunigung des Zylinders, so ist $Pa \cdot \frac{p_0}{2} = \frac{3}{4} \cdot 30 \cdot (0{,}6 p_0)^2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0{,}6 p_0)^2 + 20 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{p_0}{2};$

$$p_0 = \frac{10}{6 \text{ sec}^2}.$$

**37.** Ist $p_0$ die Winkelbeschleunigung der Stange bei Beginn der Bewegung, so ist die Trägheitskraft der Stange

$$P = \Sigma \frac{f\delta \cdot \gamma}{g} \cdot r \cdot p_0 = \frac{f\gamma \cdot p_0}{g} \Sigma r\delta = \frac{f\gamma \cdot p_0}{g} \cdot \frac{l^2}{2}.$$

Diese Kraft greift im Abstand $\frac{2}{3} l$ vom Drehpunkt an und ist mit dem Gewicht $G$ im Gleichgewicht.

$$G \cdot \frac{l}{2} = P \cdot \frac{2}{3} l.$$

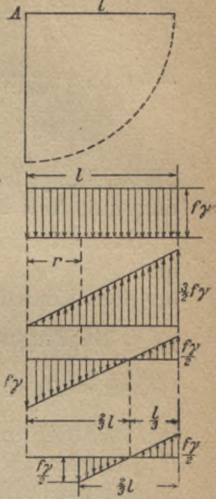
$$P = \frac{3}{4} G = \frac{3}{4} f\gamma \cdot l = \frac{f\gamma \cdot p_0}{g} \frac{l^2}{2}.$$

$$\frac{f\gamma}{g} p_0 \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{3}{4} f\gamma \cdot l; \;\; p_0 = \frac{3}{2} \frac{G}{l}.$$

Das gleichmäßig verteilte Eigengewicht $G$ stellt sich durch ein Rechteck mit der Höhe $f\gamma$ dar. Die nach dem freien Ende hin wachsenden

Trägheitskräfte, deren Summe $P = \frac{3}{4} G$ ist, bilden ein Dreieck, dessen Höhe

$$h = \frac{2P}{l} = \frac{6G}{4l} = \frac{3}{2} f\gamma$$




ist. Aus dem Rechteck und dem Dreieck ergibt sich eine aus zwei Dreiecken bestehende Figur, die die Belastung der Stange darstellt. Die Dreiecke haben die Seiten $\frac{f\gamma}{2}$ und $\frac{l}{3}$ bzw. $f\gamma$ und $\frac{2}{3}l$. Ihr Inhalt ist

$$\frac{1}{2}\left(f\gamma \cdot \frac{2}{3} l - \frac{f\gamma}{2} \cdot \frac{l}{3}\right) = \frac{f\gamma \cdot l}{4} = \frac{G}{4}.$$

Im Abstand $\frac{2}{3} l$ vom freien Ende ist die Schwerkraft gleich Null, dort wirkt das größte Biegungsmoment .

$$M_b = \frac{f\gamma}{2} \cdot \frac{l}{6}\left(\frac{l}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{3}\right) = \frac{4 f \cdot \gamma \cdot l^2}{12 \cdot 9}$$

$$M_b = \frac{f\gamma \cdot l^2}{27} = \frac{G \cdot l}{27} = \frac{M \cdot g \cdot l}{27}.$$

Bei einem Rundeisen von $d = 50$ mm, $l = 3$ m, $G = 45$ kg wird

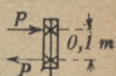
$$M_b = \frac{45 \cdot 300}{27}; \quad K_b = \frac{45 \cdot 300 \cdot 10}{27 \cdot 5^3} = 40 \text{ kg/cm}^2.$$

38. Diese Kraft ist die Resultante aus $P_1 = Mp$ und dem Kräftepaar $P_2 a = \frac{1}{5} M \cdot d \cdot p$. Die Resultante ist gleich $P_1 = Mp = 60 \cdot 1 = 60$ kg. Sie bildet mit der durch den Mittelpunkt gehenden Kraft $P_1$ ein Kräftepaar, dessen Moment

$$P_2 a = 60 x = \tfrac{1}{5} 60 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \text{ mkg ist}; \quad x = 0{,}2 \text{ m}.$$

Die Kraft von 60 kg wirkt im Abstand 0,2 m vom Kugelmittelpunkt.

39. Im Schwerpunkt muß eine Kraft $P_1 = Mr \cdot p_0$ wirken, die dem Schwerpunkt die Beschleunigung $rp_0$ gibt. Außerdem muß an der Stange ein Drehmoment $P_2 a = \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot p_0$ wirken, das sie mit derselben Winkelbeschleunigung um den Schwerpunkt dreht. Die Resultante von $P_1$ und $P_2 a$ ist gleich $P_1$, gegeben in der Gleichung:




$$P_1 \cdot x = P_2 \cdot a; \quad Mrp_0 x = \frac{Ml^2}{12} p_0; \quad x = \frac{l^2}{2r} = \frac{1{,}44}{12} = 0{,}12 \text{ m}.$$

Die Arbeitsgleichung lautet:

$$P_1\left(r+\frac{l^2}{12r}\right)\frac{p_0}{2}=\frac{1}{2}Mr^2p_0^2+\frac{1}{6}\cdot M\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot p_0^2;\quad P_1=M\cdot\gamma\cdot p_0.$$

Wäre $p_0=\frac{1}{\sec^2}$ und $M=3$, so wäre

$$P_2\cdot a=\frac{M}{3}\left(\frac{1{,}2^2}{4}\right)\cdot 1=\frac{3}{3}\,\frac{1{,}44}{4}=0{,}36\ \mathrm{mkg}.$$

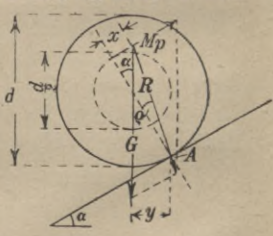
Ist die Stange in einer Hülse festgelagert, so führt sie diese Bewegung auch aus, und es ist: $P\cdot 0{,}1=0{,}36\ \mathrm{mkg}$, $P=3{,}6\ \mathrm{kg}$.

**40.** Die Kraft $P_1$, die dem Schwerpunkt die Beschleunigung $p=0{,}8\,p_0$ gibt, ist $P_1=M\cdot 0{,}8\cdot p_0$. Außerdem muß sich der Zylinder noch mit derselben Winkelbeschleunigung um seinen Schwerpunkt drehen; hierzu ist ein Drehmoment erforderlich: $P_2\cdot a=\frac{M}{8}d^2p_0$. Es muß nun

$$P_1\cdot x=P_2\cdot a;\quad x=\frac{P_2\cdot a}{P_1}=\frac{M\cdot d^2\cdot p_0}{8\cdot M\cdot 0{,}8\,p_0};\quad x=\frac{0{,}8^2}{8\cdot 0{,}8}=0{,}1\ \mathrm{m}$$

sein. Die Drehkraft $P$ wirkt an der Scheibe in einem auf der Richtung $I\,II$ gelegenen Punkte, der 0,1 m vom Mittelpunkt liegt. Wenn die Scheibe eine volle Kreisbewegung macht, bleibt der Angriffspunkt der Kraft $P$ immer auf der Richtung $I\,II$ liegen.

**41.** Wenn die Scheibe rollt, wirkt an ihr das Eigengewicht $G$ und die Trägheitskraft $M\cdot p$ im Abstand $\frac{d}{2}$ vom Mittelpunkt. Diese Kraft wirkt parallel zur Ebene. Die Resultante dieser beiden Kräfte muß durch den Berührungspunkt $A$ der Scheibe und Ebene gehen und mit der Normalen den Winkel $\rho$, gleich dem Reibungswinkel bilden. Aus der Figur ergibt sich dann:




$$x=\frac{3}{4}\cdot d\cdot\operatorname{tg}\rho;\quad x=\frac{d}{4}\operatorname{tg}\alpha;\quad \frac{3}{4}\operatorname{tg}\rho=\frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{tg}\alpha=3\operatorname{tg}\rho.$$

Die beiden Kräfte $M\cdot p$ und $G=M\cdot g$ müssen für den Punkt $A$ im Gleichgewicht sein.

$$G\cdot y=M\cdot p\cdot\frac{3}{4}d;\quad M\cdot g\cdot y=M\cdot p\cdot\frac{3}{4}d;\quad y=\frac{d}{2}\sin\alpha,$$

$$g\frac{d}{2}\sin\alpha=p\frac{3}{4}d;\quad p=\frac{2}{3}\cdot g\cdot\sin\alpha.$$

**42.** Hier ist die Trägheitskraft $M \cdot p$ im Abstande $\frac{d}{5}$ vom Mittelpunkt anzubringen. Im übrigen bleibt die Figur dieselbe wie in Nr. 41, und es wird: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2} \operatorname{tg} \rho$. Hier ergibt sich:

$$M \cdot g \cdot y = M \cdot p \cdot \frac{7}{10} d; \;\; g \cdot y = p \frac{7}{10} d; \;\; y = \frac{d}{2} \sin \alpha,$$

$$g \cdot \frac{d}{2} \sin \alpha = p \frac{7}{10} \cdot d; \;\; p = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha.$$

**43.** Die Resultante der äußeren Kräfte ist $P = 60 - (20 + 30) = 10$ kg. Daher wird die Beschleunigung des Schwerpunktes: $p = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/sec}^2$. Die Seilspannungen sind auf beiden Seiten gleich

$$20 + 2p_1 = 30 + 3p_2; \;\; 20 + 2p_1 + 30 + 3p_2 = 60,$$

$$40 + 4\, p_1 = 60; \;\; p_1 = \frac{20}{4} = 5 \text{ m/sec}^2; \;\; 60 + 6\, p_2 = 60; \;\; p_2 = 0.$$

Gewicht $I$ erhält eine Aufwärtsbeschleunigung von $5 \text{ m/sec}^2$; Gewicht $II$ steht still. Die Rolle wird mit einer Beschleunigung von $2{,}5 \text{ m/sec}^2$ bewegt.

Die Arbeitsgleichung lautet:

$$A = 60 \cdot \frac{2{,}5}{2} = 20 \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2; \;\; 75 = 50 + 25.$$

Die Seilspannungen sind: $S_1 = 20 + 2 \cdot 5 = 30$ kg; $S_2 = 30$ kg.

**44.** Die Gewichte von 20 kg und 60 kg werden von den Reaktionen der Führungen im Gleichgewicht gehalten. Als äußere Kräfte wirken demnach 30 kg und die Reaktionen $R_1$ und $R_2$ der Rollenlager. Die Horizontalkomponenten dieser Reaktionen sind gleich, weil die Seilspannungen gleich: $2\, p_2 = 6 \cdot p_3$; $p_2 = 3p_3$. Diese Kräfte heben sich.

Die Vertikalkomponenten sind auch gleich; ihre Resultante ist:

$$R = 2p_2 + 6p_3 = 4p_2.$$

Es ist aber auch:

$$30 - 3p_1 = 4p_2; \;\; p_2 = 7{,}5 - \tfrac{3}{4} p_1; \;\; p_3 = 2{,}5 - \tfrac{1}{4} p_1.$$

Da die Horizontalkomponente der Resultante der äußeren Kräfte gleich Null ist, kann sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt nur vertikal beschleunigen. Die Vertikalkraft ist:

$$P = 30 - 4p_2 = 30 - 4\,(7{,}5 - \tfrac{3}{4} p_1) = 3p_1.$$

Daher die Beschleunigung des Schwerpunktes:

$$p = \frac{P}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{3p_1}{3+2+6} = \frac{3}{11} p_1.$$

Es ist aber auch: $p_1 = \frac{p_2 + p_3}{2}$

$$2p_1 = p_2 + p_3 = 7{,}5 - \tfrac{3}{4} p_1 + 2{,}5 - \tfrac{1}{4} p_1 = 10 - p_1$$
$$3p_1 = 10;\;\; p_1 = \tfrac{10}{3}\,\mathrm{m/sec^2};\;\; p = \tfrac{3}{11} \cdot \tfrac{10}{3} = \tfrac{10}{11}\,\mathrm{m/sec^2}.$$
$$p_2 = 5\,\mathrm{m/sec^2},\;\; p_3 = \tfrac{5}{3}\,\mathrm{m/sec^2}.$$

Arbeitsgleichung:

$$30\,\frac{p_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\, 2 \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

$$A = 50\,\mathrm{mkg}.$$

**45.** Die Reibung ist: $W = 100 \cdot 0{,}2 = 20\,\mathrm{kg}$.

Die Beschleunigung beider Teile: $p = \frac{20}{10} = 2\,\mathrm{m/sec^2}$.

$$P = (M_1 + M_2) \cdot p = 40 \cdot 2 = 80\,\mathrm{kg}.$$

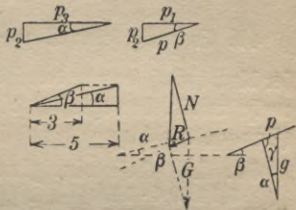
**46.** Die Beschleunigung des Schwerpunktes wird $p = \frac{120}{40} = 3\,\mathrm{m/sec^2}$, $M_2$ kann aber, da es durch die Reibung beschleunigt wird, nur eine Beschleunigung $p_2 = 2\,\mathrm{m/sec^2}$ erhalten, mithin ergibt sich die Beschleunigung $p_1$ des Wagens aus der Gleichung:

$$M_1 \cdot p_1 = (M_1 + M_2)\, p - M_2 p_2.$$
$$p_1 = \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 2}{30} = \frac{10}{3}\,\mathrm{m/sec^2}.$$

Das Gewicht $M_2$ verschiebt sich auf $M_1$ mit der Beschleunigung

$$p_1 - p_2 = \frac{4}{3}\,\mathrm{m/sec^2};\;\; p_1 = \frac{120-20}{30} = \frac{10}{3}\,\mathrm{m/sec^2};\;\; p_2 = \frac{6}{3}\,\mathrm{m/sec^2}.$$

**47.** Wenn die Last lose auf dem Wagen liegt, erhält sie nur eine vertikale Beschleunigung $p_2$, die gleichzeitig die vertikale Beschleunigung des Wagens, also auch die vertikale Beschleunigung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes ist. Ist die horizontale Beschleunigung des Wagens $p_3$, so ist die horizontale Beschleunigung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes $p_1 = \frac{15 p_3}{15 + 10} = \frac{3}{5} p_3$. Demnach bewegt sich der Schwerpunkt unter einem Neigungswinkel $\beta$, der durch die Gleichung bestimmt ist: $\operatorname{tg}\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{5p_2}{3p_3}$. Es ist aber auch $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p_2}{p_3}$. Daher $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}\operatorname{tg}\alpha$. Allgemein ist $\operatorname{tg}\beta = \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)\operatorname{tg}\alpha$. Hiernach kann der Winkel $\beta$ durch Rechnung und Zeichnung leicht bestimmt werden: $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$. In der Richtung des Winkels $\beta$ bewegt sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt abwärts, in dieser Richtung wirkt also auch die Resultante $P$ der äußeren Kräfte. Die Komponenten dieser Resultante sind die lotrecht wirkenden Gewichte $G = 150 + 100 = 250$ kg und die senkrecht zur Bahn wirkende Reaktion der Bahn. Das Kräfteparallelogramm kann gezeichnet und die Kraft $R$ bestimmt werden; auch die Reaktion $N$. Ebenso kann die Beschleunigung $p$ des Schwerpunktes gezeichnet werden.




Es ist $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle(90 + \beta)$.

$$g : p = \sin\gamma : \sin\alpha;\quad p = \frac{g\sin\alpha}{\cos\beta} = 2{,}06\ \text{m/sec}^2.$$

$$p_2 = p\sin\beta = g\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\alpha = \tfrac{10}{3}\sin\alpha = 0{,}65\ \text{m/sec}^2.$$

$$p_1 = \frac{p_2}{\operatorname{tg}\beta} = 10\sin\alpha = 1{,}95\ \text{m/sec}^2.$$

48. Das Drehmoment liefert eine Seilspannung $S = \frac{15}{0{,}1} = 150$ kg. Wird die Beschleunigung der Winde mit $p_1$ bezeichnet, so ist

$$S = M_1 p_1 + M_1\cdot g\cdot\mu;\quad 150 = 20p_1 + 30;\quad p_1 = 6\ \text{m/sec}^2.$$

Ist $p_2$ die Beschleunigung des Gewichtes, so ist

$$S = M_2\cdot(p_2 + g);\quad 150 = 15\,(p_2 + 10);\quad p_2 = 0.$$

Das Gewicht bleibt stehen. Die Arbeitsgleichung lautet:

$$S\cdot\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{1}{2}M_1 p_1^2 + M_1 g\mu\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}M_2 p_2^2 + M_2 g\frac{p_2}{2}.$$

$$150\cdot\frac{6}{2} = \frac{1}{2}\,20\cdot 6^2 + 30\cdot 3;\quad 450 = 360 + 90.$$

Ist $P\cdot a = 12$ mkg, so wird $S = \frac{12}{0{,}1} = 120$ kg.

$$120 = 20p_1 + 30;\quad p_1 = 4{,}5\ \text{m/sec}^2;\quad p_2 = -\,2\ \text{m/sec}^2.$$

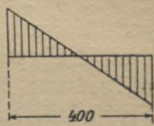
Das Gewicht geht mit einer Beschleunigung von 2 m/sec² abwärts.

$$A = 120\,\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{1}{2}\,(M_1 p_1^2 + M_2 p_2^2) + M_1 g \cdot \mu \cdot \frac{p_1}{2} - M_2 \cdot g \cdot \frac{p_2}{2}$$

$$= 120\,\frac{4{,}5 - 2}{2} = \frac{1}{2}\,(20 \cdot 4{,}5^2 + 15 \cdot 2^2) + 30 \cdot \frac{4{,}5}{2} - 150\,\frac{2}{2}$$

$$= 150\,\text{mkg} = 232{,}5 + 67{,}5 - 150.$$

**49.** Es muß sein: $Z = \frac{Mv^2}{r} = \frac{2{,}5^2}{4} = 12{,}5$ kg. Die Richtung dieser Kraft muß immer durch den Punkt $B$ gehen. Sobald die Kraft nicht mehr wirkt, bewegt sich die Kugel in der augenblicklichen Richtung (Tangentenrichtung) geradlinig weiter.



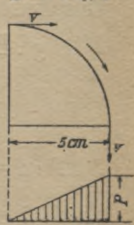

**50.** Die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist $v = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}4 \cdot 120}{60} \sim 2{,}5$ m/sec. Das gesuchte Arbeitsdiagramm besteht aus zwei gleichen Dreiecken. Das Dreieck für den ersten halben Hub ist positiv, das andere negativ. Ihre Inhalte sind

$$A = Z \cdot \frac{0{,}2}{2} = \frac{1}{2}\,M \cdot \frac{v^2}{r}\,0{,}2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2{,}5^2}{0{,}2} \cdot 0{,}2 = 12{,}5\,\text{mkg}.$$

**51.** Geht die Kurbel durch den toten Punkt, so wirkt auf den Zylinderdeckel der Dampfdruck $Q$ und auf das Kurbellager der Druck $Q - Z$. Die Kraft, welche die Maschine auf dem Fundament zu verschieben sucht, ist $Q - (Q - Z) = Z$. Ebenso groß muß die Reibung $W$ sein.

$$W = M\,\frac{v^2}{r} = \frac{22 \cdot 6{,}28^2}{0{,}25} = 3470\,\text{kg}.$$

**52.** Wird vorausgesetzt, daß die Formänderung des Stabes innerhalb der Proportionalitätsgrenze bleibt, so wird im Stab ein Widerstand hervorgerufen, der gleichmäßig mit dem Wege von $Q$ wächst, sich also durch ein Dreieck darstellen läßt. Das Gewicht $Q$ erleidet eine gleichmäßig mit dem Wege wachsende Verzögerung, seine Geschwindigkeit stimmt mit der Horizontalgeschwindigkeit eines Punktes überein, der sich mit $v = 10$ m/sec im Kreis von 0,05 m Radius dreht und einen Viertelkreis durchläuft. Ist der Stab vollkommen elastisch, so drückt er das Gewicht wieder um 5 cm zurück und erteilt ihm wieder die Anfangsgeschwindigkeit $v$ in



entgegengesetzter Richtung. Es ist $p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{100}{0,05} = 2000$ m/sec². Die größte Stabkraft ist $P = Mp_n = 10 \cdot 2000 = 20000$ kg.

53. Die Anfangsbeschleunigung des Gewichtes ist gleich $g$, die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null. Die Beschleunigung nimmt gleichmäßig mit dem Wege ab, so wie die innere Stabkraft mit dem Wege wächst. Ist die Stabkraft gleich $Q$ geworden, so ist die Beschleunigung des Gewichts gleich Null. Von hier ab wird die Beschleunigung negativ, bis sie gleich $-g$ geworden. Die Geschwindigkeit wächst von Null bis auf $v$ in dem Punkte, in dem die Beschleunigung gleich Null ist, dann nimmt die Geschwindigkeit wieder ab bis auf Null. Dieses tritt ein, wenn die Beschleunigung gleich $-g$ ist. Bis zu diesem Punkte sinkt $Q$. Ist das Stabmaterial vollkommen elastisch, so macht nun das Gewicht die umgekehrte Bewegung. Es steigt wieder, bis der Stab seine ursprüngliche Länge erreicht hat, dann geht es wieder abwärts usf. Die Bewegung des Gewichtes ist eine Kreisschwingung, seine Geschwindigkeit ist in jeder Lage gleich der lotrechten Geschwindigkeitskomponente eines Punktes, der sich gleichförmig in einem Kreise mit der Geschwindigkeit $v$ dreht. Der Mittelpunkt des Kreises bzw. der Schwingungsmittelpunkt fällt mit dem Punkte zusammen, in dem die Beschleunigung gleich Null ist, bzw. in welchem die Geschwindigkeit des Gewichts den größten Wert $v$ erreicht hat. Der Radius ist $r = \frac{\lambda}{2}$, die Anfangsbeschleunigung

$$p_n = g = \frac{v^2}{r}; \ Q : fE = r : l.$$

$$r = \frac{Ql}{fE}; \ v^2 = gr = \frac{Qlg}{fE}; \ v = \sqrt{\frac{Qlg}{fE}}.$$

54. $$v = \sqrt{\frac{Qlg}{fE}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 200 \cdot 1000}{10 \cdot 2000000}} = 1 \text{ cm/sec}.$$

$$r = \frac{Ql}{fE} = \frac{100 \cdot 200}{10 \cdot 2000000} = 0{,}001 \text{ cm}; \ 2r = 0{,}002 \text{ cm}.$$

$$k_z : E = 2r : l; \quad k_z = \frac{2000000 \cdot 0{,}002}{200} = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

**55.** Das Gewicht macht eine Kreisschwingung.

Es ist $r = 0{,}04$ m, die Anfangsbeschleunigung $p_n = \frac{P}{M} = \frac{500}{125}$ $= 4\ \mathrm{m/sec^2}$; $v^2 = r \cdot p_n = 0{,}04 \cdot 4$; $v = 0{,}4$ m/sec. Hat das Gewicht den Weg von 8 cm zurückgelegt, so ist seine Geschwindigkeit gleich Null, die Stabkraft beträgt jetzt 1000 kg. Die Kraft von $1000 - 500 = 500$ kg schiebt nun das Gewicht wieder zurück in seine Anfangsstellung usf.

**56.** Nach Seite 44 Bd. 1 ist die Durchbiegung der Feder am freien Ende $p = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{120 \cdot 60^3 \cdot 12}{130 \cdot 2000000 \cdot 15 \cdot 1{,}2^3}$; $p = 2$ cm. Das Gewicht macht eine Kreisschwingung, der Radius des Kreises ist $r = 2$ cm. Die Anfangsbeschleunigung des Gewichtes ist $p_n = \frac{P}{M} = \frac{120}{120} = 1\ \mathrm{m/sec^2}$. Die Drehgeschwindigkeit $v^2 = r \cdot p_n = 0{,}02 \cdot 1 = 0{,}02$; $v = 0{,}14$ m/sec.

**57.** Soll sich die Kugel gleichförmig im Kreise drehen, so muß auf dieselbe eine Zentrifugalkraft $Z = \frac{Mv^2}{r} = \frac{5 \cdot 2^2}{0{,}5} = 40$ kg wirken. In diesem Falle ist die Kraft $Z$ die Stangenkraft. Dieselbe wird von einer entgegengesetzt wirkenden äußeren Kraft, der Trägheitskraft der Kugel, hervorgerufen. Diese Trägheitskraft wird Zentrifugalkraft oder Fliehkraft genannt.

**58.** Die Kugel bewegt sich im Kreis, wenn eine Zentripetalkraft $Z = \frac{M \cdot v^2}{r} = \frac{6 \cdot 3^2}{0{,}8} = 67{,}5$ kg auf sie wirkt. Diese Kraft ist die Reaktion der Führung, die von der radial nach außen wirkenden Zentrifugalkraft der Kugel hervorgerufen wird. Der Druck auf die Führung ist also gleich 67,5 kg.

**59.** Die Zentrifugalkraft einer Kugel muß dem Kugelgewicht das Gleichgewicht halten. Die statischen Momente dieser beiden Kräfte für den Drehpunkt $A$ müssen gleich sein:

$$\frac{G}{g} = 0{,}36\, w^2.\ 0{,}25 = 0{,}342\, G.$$

$$w^2 = \frac{0{,}324 \cdot 10}{0{,}36 \cdot 0{,}25};\quad w^2 = 36;\quad w = \frac{6}{\mathrm{sec}}.$$

**60.** Die Zentrifugalkraft des ganzen Ringes ist:

$$Z = \frac{Mv^2}{r} = \frac{120 \cdot 100}{1} = 12000 \text{ kg.}$$

Die Zentrifugalkräfte der einzelnen Ringteilchen bilden, nach Richtung und Größe aneinander aufgetragen, einen Kraftkreis, dessen Umfang gleich 12000 kg ist. Die in jedem Ringquerschnitt wirkende Zugkraft ist gleich dem Halbmesser dieses Kreises, also

$$Z = \frac{12000}{2\pi} = 1910 \text{ kg.}$$

**61.** Die Geschwindigkeit der Maschine bzw. die Umfangsgeschwindigkeit der Treibräder ist

$$v = \frac{54000}{3600} = 15 \text{ m/sec}; \quad w = \frac{15}{0{,}6} = \frac{25}{\text{sec}}.$$

Die an der Treibstange wirkende Zentrifugalkraft ist

$$Z = M\,r \cdot w^2 = \frac{36}{10} \cdot 0{,}35 \cdot 25^2 \sim 790 \text{ kg.}$$

Diese Kraft ist gleichmäßig über die Stange verteilt und beansprucht die Stange auf Biegung. In der Mitte der Stange wirkt das größte Biegungsmoment $M_b = \frac{Zl}{8} = \frac{790 \cdot 150}{8} = 14\,800$ kgcm und die Spannung $k_b = \frac{14800}{W} = \frac{14800 \cdot 6}{4 \cdot 64} = 350 \text{ kg/cm}^2$.

**62.** Die Zentrifugalkraft ist gleich dem Durchmesser des Kraftkreises

$$Z = \frac{12000}{\pi} = 3820 \text{ kg.}$$

Es ist auch $Z = Mr_1 \cdot w^2$, wenn $r_1$ der Abstand des Schwerpunktes des halben Ringes von der Achse ist,

$$r_1 = \frac{rs}{b} = \frac{1 \cdot 2}{\pi \cdot 1} = \frac{2}{\pi}; \; Z = 60 \cdot \frac{2}{\pi}\,100 = 3820 \text{ kg.}$$

**63.** Der Kraftkreis hat einen Umfang

$$Z = Mrw^2 = 150 \cdot 1{,}2 \cdot 100 = 18000 \text{ kg.}$$

Ein Sechstel des Ringes hat eine Zentrifugalkraft gleich dem Halbmesser des Kraftkreises $Z = \frac{18000}{2\pi}$. Diese Kraft ist die in einem

Arme wirkende Zugkraft. Es ist auch $Z = \frac{M}{6} \cdot r_1 w^2$, wenn $r_1$ der Abstand des Schwerpunktes dieses Ringstückes von der Achse ist.

$$r_1 = \frac{r \cdot s}{b} = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 6}{\pi \cdot 2{,}4} = \frac{3{,}6}{\pi}.$$

$$Z = 25 \cdot \frac{3{,}6}{\pi} \cdot 100 = 2900 \text{ kg}.$$

**64.** Die Zentrifugalkraft in einem Punkte $E$ hat die Richtung $0E$. Sie kann in zwei Komponenten zerlegt werden, eine Komponente fällt in die Stangenrichtung, die andre steht senkrecht zur Stange. Die Bewegung des Punktes $E$ setzt sich aus zwei Kreisbewegungen zusammen. Punkt $E$ dreht sich um $E_1$ und um den Mittelpunkt $D$ der Stange. Beide Drehbewegungen haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit. Durch die Drehung der halben Stange um den Punkt $D$ entsteht im Querschnitt $D$ eine Zugkraft $Z_1 = 1{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 400 = 250$ kg. Durch die andere Drehung entsteht in der halben Stange eine senkrecht zur Stange wirkende Kraft $Z_2 = 1{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 400$ kg. Diese Kraft ist gleichmäßig über die halbe Stange verteilt, daher ist ihr Biegungsmoment im Punkte $D$

$$M_b = 400 \cdot 0{,}5 = 200 \text{ mkg} = 20\,000 \text{ cmkg}.$$

Hat die Stange einen quadratischen Querschnitt von 4/4 cm, so wird:

$$k_b = \frac{20\,000}{4^2} \cdot 6 = 1875 \text{ kg/cm}^2;\; k_z = \frac{250}{16} \sim 15 \text{ kg}.$$

Daher wird die Zugspannung $s = 1875 + 15 = 1890$ kg.

**65.** Die Zentrifugalkraft des Kranzes ist:

$$Z = M \cdot r \cdot w^2 = 150 \cdot 0{,}04 \cdot 12{,}56^2 \sim 948 \text{ kg}.$$

Daher ist die ganze Belastung der Welle

$$Z + G = 948 + 1500 = 2448 \text{ kg}$$

und das Biegungsmoment im Querschnitt $AB$:

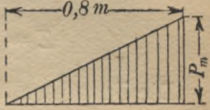
$$M_b = 2448 \cdot 20 = 48960 \text{ cmkg};$$

$$k_b = \frac{48960 \cdot 10}{10^3} = 489{,}6 \text{ kg/cm}^2.$$

**66.** $P$ muß gleich der Zentrifugalkraft der Kugel sein. Befindet sich die Kugel im Abstande $x$ von der Spindel, so ist

$$P = Mxw^2 = 1 \cdot 100 \cdot x = 100\,x \text{ kg.}$$

$P$ wächst also mit $x$, stellt sich durch ein Dreieck dar und ist am Ende der Stange $P_{max} = 100 \cdot 0{,}8 = 80$ kg.




Der Inhalt des Dreiecks ist gleich der Arbeit der Kraft $P$ bzw. der Zentrifugalkraft

$$A = \frac{80 \cdot 0{,}8}{2} = 32 \text{ mkg.}$$

Diese Arbeit wird als innere Arbeit (Formänderungsarbeit) in der Kugel aufgespeichert. (Corriolis, zusammengesetzte Zentrifugalkraft.)

**67.** Im toten Punkt dreht sich die Stange um den Kreuzkopfzapfen. Wird angenommen, daß die Stange eine durchgehende Stärke hat, so ist

$$Z = M \cdot r \cdot w^2 = 6 \cdot 0{,}75 \cdot \left(\frac{4}{1{,}5}\right)^2 = 32 \text{ kg.}$$

**68.** Hier wird $Z = Mrw^2 = 4{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 400 = 450$ kg. Die ganze Last wird $450 + 45 = 495$ kg. Diese Last ist gleichmäßig über die Welle auf 200 mm Länge verteilt. Das in der Wellenmitte wirkende Biegungsmoment ist

$$M_b = \tfrac{495}{2}(12{,}5 - 5) = 1856 \text{ cmkg.}$$

**69.** Die Zentrifugalkraft des halben Rechteckes ist nach dem Schwerpunktsatz: $Z = M \cdot r \cdot w^2 = 10 \cdot r \cdot 400$, wenn $r$ der Abstand des Dreieckschwerpunktes von der Drehachse, also $r = \frac{h_1}{3}$ ist.

Es ist: $h_1 \cdot 1{,}3 = 0{,}5 \cdot 1{,}2$; $h_1 = 0{,}46$ m; $Z = 614$ kg.

Diese Zentrifugalkraft geht durch den Schwerpunkt der Pyramide, welche das statische Moment des Dreieckes darstellt. Die Zentrifugalkräfte der beiden Dreiecke bilden ein Kräftepaar (vgl. ANuG Bd. 558: Statik, Schwerpunkt), dessen Arm

$$x = \frac{h^2 - b^2}{2d} = \frac{1{,}2^2 - 0{,}5^2}{2 \cdot 1{,}3^2} = 0{,}46 \text{ m ist.}$$

Daher ist das Moment des Kräftepaares

$$M_c = 614 \cdot 0{,}46 \sim 280 \text{ mkg.}$$

Die Auflagerdrucke müssen also auch ein Kräftepaar bilden:

$$N \cdot 1{,}4 = 280 \text{ mkg}; \quad N = 200 \text{ kg}.$$

**70.** Nach dem Schwerpunktsatz ist die Zentrifugalkraft der halben Stange

$$Z = \frac{M}{2} \cdot \frac{l}{4} \cos\alpha \cdot w^2,$$

$$Z = \frac{15}{10} \cdot 0{,}5 \cos\alpha \frac{100}{\sec^2} = 75 \cos\alpha \text{ kg}.$$

Die Zentrifugalkräfte der Stangenteile lassen sich durch ein Dreieck darstellen, dessen Schwerpunkt $x = \frac{2}{3}\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\alpha \cdot m$ vom Punkte $A$ liegt. Das Moment des von den beiden Zentrifugalkräften gebildeten Kräftepaares ist mithin:

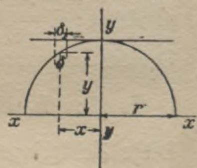
$$M_b = Z \cdot 2x = 75 \cos\alpha \tfrac{4}{3} \sin\alpha = 50 \sin 2\alpha \text{ mkg}.$$

Auf die Achse wirkt dann ein Biegungsmoment $M_b$. Die Zapfendrücke sind: $N = \frac{50 \sin 2\alpha}{1}$. Ist z. B. $\alpha = 5^0$, so wird

$$M_b = 50 \cdot 0{,}174 = 8{,}7 \text{ mkg}.$$

Das Arbeitsvermögen der Stange wäre $L = \frac{M}{3} v^2 = 100$ mkg. Also ist $M_b = \frac{L}{2} \sin 2\alpha$.

**71.** Wird die Zentrifugalkraft, die an einem kleinen Stückchen $\delta$ des Ringes wirkt, mit $z$ bezeichnet, so ist das statische Moment dieser Kraft bezogen auf die $y$-Achse $zx = \frac{f \cdot \delta \cdot \gamma}{g} y w^2 x$, wenn $f$ der Ringquerschnitt und $\gamma$ das spez. Gewicht ist. Nun ist $y\delta = r\delta_1$ (vgl. Bd. I, Schwerpunkt).




Demnach wird

$$zx = \frac{f\gamma}{g} r \cdot \delta_1 x w^2.$$

Das statische Moment der Zentrifugalkraft des Viertelringes

$$Za = rw^2 \frac{f\gamma}{g} \Sigma \delta_1 x = \frac{f\gamma}{g} \frac{r^3}{2} w^2,$$

$$\frac{f\gamma}{g} r = \frac{G}{\pi g}; \quad a = \frac{r}{2}; \quad Z = \frac{G}{\pi g} r w^2,$$

$$Z = \frac{50}{3{,}14 \cdot 10} \cdot 0{,}4 \cdot 100 = 63 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment im Scheitel

$$M_b = Z(r - a) = 63 \cdot 0{,}2 = 12{,}6 \text{ mkg} = 1260 \text{ cmkg}.$$

**72.** Die Zentrifugalkraft einer Platte ist

$$Z = Mrw^2 = 3 \cdot 0{,}55 \cdot 400 = 660 \text{ kg}.$$

Die Zentrifugalkräfte bilden ein Kräftepaar, dessen Arm gleich 30 cm ist. Die Auflagerdrucke der Achse bilden ebenfalls ein Kräftepaar

$$N \cdot 90 = 660 \cdot 30; \quad N = 220 \text{ kg},$$

$$M_b = N(45 - 15) = 220 \cdot 30 = 660 \text{ cmkg}.$$

Die Arme werden auf Biegung und Zug beansprucht. Das Biegungsmoment ist in allen Armquerschnitten $660 \cdot 15 = 9900$ cmkg, die Zugkraft gleich 660 kg.

**73.** Hier ergibt sich wie bei Aufgabe 66

$$P = 2Mvw.$$

**74.** Es wird $P = 2Mvw = 2 \cdot \frac{20}{10} 4 \cdot 6 = 96$ kg.

$$v_m = \frac{6 + 2{,}4}{2} = 4{,}2 \text{ m/sec}; \quad t = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15 \text{ sec}.$$

$$P \cdot v_m t = 96 \cdot 4{,}2 \cdot 0{,}15 = 60{,}48 \text{ mkg}.$$

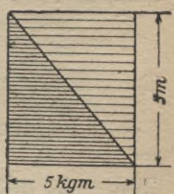
**75.** $A = 10(2 + a) + 5a = (15a + 20)$ mkg.

**76.** $A = 10(1 + a) + 5(a + 1) + \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot v^2$

$$= (15a + 15 + \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}5 v^2) \text{ mkg}.$$

**77.** Die Gewichtseinheit erhält eine kinetische Energie

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{100}{20} = 5 \text{ mkg}.$$

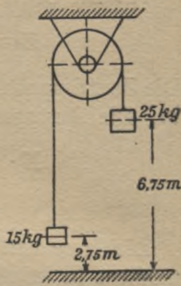



Das Gewicht kann 5 m steigen. Dann hat die Gewichtseinheit eine potentielle Energie von 5 mkg. In jeder Höhe ist die Summe aus der potentiellen und kinetischen Energie gleich 5 mkg.

**78.** In der angegebenen Stellung ist

$$A = 25 \cdot 5{,}5 + 15 \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}5^2 = 210 \text{ mkg}.$$

In der Anfangsstellung ist die kinetische Energie der beiden Gewichte gleich Null, die Summe der potentiellen Energien gleich 210 mkg. Steht im Anfang das kleine Gewicht um $x$ m tiefer, das andere um $x$ m höher, so ist:




$$15 \cdot (4 - x) + 25(5{,}5 + x) = 210.$$

$$10x = 210 - 197{,}5 = 12{,}5 \text{ m}.$$

$$x = \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25 \text{ m}.$$

Die Abstände der Gewichte von der Basis sind

$$a_1 = 4 - 1{,}25 = 2{,}75 \text{ m}; \quad a_2 = 5{,}5 + 1{,}25 = 6{,}75 \text{ m}.$$

**79.** Die potentielle Energie $A_1 = 10 \cdot 0{,}2 = 2$ mkg wird in kinetische umgewandelt.

$$A_2 = \tfrac{1}{2} M v^2 = 2 \text{ mkg}; \quad v^2 = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4 \text{ m}^2; \quad v = 2 \text{ m/sec}.$$

Bei der weiteren Bewegung nach $C$ hin nimmt die Geschwindigkeit wieder ab, die kinetische Energie wird wieder in potentielle umgewandelt. Im Punkt $C$ besitzt das Pendel die potentielle Energie $A = 2$ mkg.

**80.** Das Gewicht besitzt die potentielle Energie $A = G \cdot 3{,}2$ mkg, die in kinetische Energie umgesetzt wird. Die Geschwindigkeit im Punkte $A$ ist:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3{,}2} = 8 \text{ m/sec}.$$

**81.** Die kinetische Energie des Gewichts wird in Reibungsarbeit umgesetzt:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 = 50 \text{ mkg}; \quad 10 \cdot 0{,}2 \cdot s = 50; \quad s = 25 \text{ m}.$$

Die ganze Energie wird in Wärme umgesetzt, die verloren geht.

**82.** Die kinetische Energie der Scheibe $A = \frac{1}{4} M v^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{50}{10} \cdot 16 = 20$ mkg, wird in potentielle Energie des Gewichts umgewandelt: $20h = 20$ mkg, $h = 1$ m.

83. Die im Berührungspunkt zwischen Scheibe und Bahn wirkende Reibung hemmt die Scheibe in ihrer geradlinigen Bewegung und erteilt ihr eine Drehbewegung.

Die Energie der Scheibe $A = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 36 = 72$ mkg wird zum Teil durch gleitende Reibung, die zwischen Scheibe und Bahn wirkt, aufgezehrt; der andere Teil wird in Energie der Rollbewegung umgewandelt: $72\text{ mkg} = A_1 + \frac{3}{4} M \cdot v_1^2$, wenn $A_1$ die Reibungsarbeit, $v_1$ die Rollgeschwindigkeit ist. Die Gleitgeschwindigkeit fällt von $v$ bis auf Null, die mittlere Gleitgeschwindigkeit ist $v_m = \frac{v}{2} = 3$ m/sec und $A_1 = 40 \cdot 0{,}2 \cdot 3 \cdot t = 24\,t$ mkg. Die Reibung verzögert auch die Scheibe, bringt die geradlinige Geschwindigkeit von $v$ auf $v_1$.

$$40 \cdot 0{,}2 \left(\frac{v + v_1}{2}\right) t = \frac{1}{2} M (v^2 - v_1^2),$$

$$40 \cdot 0{,}2 t = \frac{40}{10} (v - v_1),$$

$$8 t = 4 (v - v_1),$$

$$t = \frac{v - v_1}{2}.$$

Die Energiegleichung lautet demnach:

$$72\text{ mkg} = 24 t + \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot v_1^2,$$

$$72 = 24 \frac{(v - v_1)}{2} + 3 v_1^2,$$

$$72 = 12 v - 12 v_1 + 3 v_1^2,$$

$$72 = 12 \cdot 6 - 12 v_1 + 3 v_1^2,$$

$$v_1^2 - 4 v_1 = 0,$$

$$v_1 = 4\text{ m/sec}.$$

Allgemein wird $v_1 = \frac{2}{3} v$. Hiernach wird $t = \frac{6 - 4}{2} = 1$ sec.

In einer Sekunde wird die geradlinige Bewegung der Scheibe in eine Rollbewegung mit der Geschwindigkeit $v_1 = 4$ m/sec umgewandelt, wobei eine Reibungsarbeit $A_1 = 24 t = 24 \cdot 1 = 24$ mkg verloren geht. Die Energiegleichung lautet dann:

$$72 = 24 + \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 4^2; \quad 72 = 24 + 48.$$

84. Die Energie der Scheibe $A = \frac{1}{4} M \cdot v^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 6^2 = 18$ mkg wird zum Teil in Energie der Rollbewegung umgewandelt, zum Teil durch die Reibung aufgezehrt.

$A = \frac{3}{4} M v_1^2 + A_1$, wenn $A_1$ die Reibungsarbeit ist. Die Reibung $W = 20 \cdot 0{,}2 = 4$ kg zehrt, so lange die Scheibe auf der Bahn gleitet, Energie. Die Gleitgeschwindigkeit fällt von 6 m bis auf Null. Die mittlere Geschwindigkeit ist also gleich 3 m/sec und die Reibungsarbeit:

$$A_1 = W \cdot \frac{v}{2} \cdot t = 4 \cdot 3t = 12t.$$

Die Reibung gibt ferner der Scheibe eine beschleunigte Bewegung in der Bahnrichtung, bis die Scheibe die Geschwindigkeit $v_1$ erreicht hat.

$$\alpha) \quad W \cdot \frac{v}{2} t = \frac{1}{2} M v_1^2 = 12.$$

Endlich gibt die Reibung der Scheibe eine verzögerte Drehbewegung. Die mittlere Umfangsgeschwindigkeit ist

$$v_m = \frac{v + v_1}{2}; \quad W \cdot \frac{v + v_1}{2} \cdot t = \frac{M}{4}(v^2 - v_1^2).$$

$$\beta) \quad W \cdot t = \frac{M}{2}(v - v_1) = 4.$$

Aus den Gleichungen $\alpha$ und $\beta$ ergibt sich: $v_1 = 2$ m/sec, $t = 1$ sec. Allgemein wird $v_1 = \frac{v}{3}$. Die Energie der Drehbewegung wird also teilweise in Energie der Rollbewegung umgewandelt, teilweise durch die Reibung aufgezehrt.

$$\tfrac{1}{4} M v^2 = 18 \text{ mkg} = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{20}{10} 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 1.$$

85. Die Umfangsgeschwindigkeit der Kurbel ist $v_2 = 6$ m/sec. Dann hat die Stange in Lage I die Geschwindigkeit

$\mu_1 = v_1 - v_2 = 6$ m/sec; in Lage II $\mu_2 = v_1 + v_2 = 18$ m/sec.

Außerdem wird die Stange um 0,6 m gehoben, ihre Energie ist also um

$$A = \tfrac{1}{2} M(18^2 - 6^2) + G \cdot 0{,}6 = 375 \text{ mkg}$$

gewachsen, soviel Arbeit wird verbraucht.

**86.** Die Umfangsgeschwindigkeit des Schleifsteins wird

$$v = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 120}{60} = 6{,}28 \text{ m/sec}$$

und seine kinetische Energie bzw. die erforderliche Arbeit

$$A = \tfrac{1}{4} M v^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{250}{10} \cdot 6{,}28^2 = 246 \text{ mkg.}$$

**87.** Die Energie der Scheibe $A = \frac{1}{4} \cdot \frac{50}{10} \cdot 6^2 = 45$ mkg wird von der Zapfenreibung aufgezehrt. Ist $W$ die Reibung, so ist auch: $A = W \cdot s$, wenn $s$ der Weg des Zapfenumfanges in 15 Sekunden ist. Die Umfangsgeschwindigkeit der Zapfen fällt von 0,6 m/sec auf Null; es ist also:

$$v_m = 0{,}3 \text{ m/sec},$$

$$s = v_w \cdot t = 0{,}3 \cdot 15 = 4{,}5 \text{ m},$$

$$W \cdot 4{,}5 = 45 \text{ mkg},$$

$$W = 10 \text{ kg},$$

$$W = 50 \cdot \mu = 10 \text{ kg},$$

$$\mu = \tfrac{10}{50} = 0{,}2.$$

**88.** Wird die Geschwindigkeit, welche Spindel und Stempelträger beim Andrehen erreichen, nicht berücksichtigt, so wird:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 20}{10} 3^2 + 4 \cdot 20 \cdot 0{,}15 + 120 \cdot 0{,}2,$$

$$A = 72 \text{ mkg},$$

$$A_1 = 72 \cdot 0{,}6 = 43{,}2 \text{ mkg.}$$

**89.** Wird angenommen, daß die Last in den ersten drei Sekunden gleichförmig beschleunigt bewegt wird, so ist ihre mittlere Geschwindigkeit in dieser Zeit $v_m = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ m/sec.

Die Energie der Last wächst also in dieser Zeit um

$$A = 600 \cdot 0{,}75 \cdot 3 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{600}{10} \cdot 1{,}5^2 = 1350 + 67{,}5 = 1417{,}5 \text{ mkg.}$$

Da die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist, die Leistung mit der Geschwindigkeit bzw. mit der Zeit wächst, ist das Arbeitsdiagramm auf der Zeitachse als Basis für die drei ersten Sekunden ein Dreieck, dessen Inhalt gleich $A$ sein muß.

$$\frac{L \cdot 3}{2} = 1417{,}5 \text{ mkg}; \quad L = \frac{1417{,}5 \cdot 2 \text{ mkg/sec}}{3} = 945 \text{ mkg/sec}$$

ist die größte erforderliche Nutzarbeit der Winde. Nach der dritten Sekunde tritt der Beharrungszustand ein; dann ist

$$L_1 = 600 \cdot 1{,}5 = 900 \text{ mkg/sec.}$$

Ist der Wirkungsgrad der Winde $\eta = 0{,}8$, so wird

$$N = \frac{945}{0{,}8 \cdot 75} = 15{,}75 \text{ PS}; \quad N_1 = \frac{900}{0{,}8 \cdot 75} = 15 \text{ PS.}$$

**90.** Die gegebene Stellung hat das Pendel bei einer Winkelgeschwindigkeit $w$, die sich aus der Gleichung ergibt:

$$\frac{10}{10} \cdot 0{,}3 \cdot w^2 \cdot 0{,}32 = 10 \cdot 0{,}24; \quad w^2 = \frac{10 \cdot 0{,}24}{0{,}3 \cdot 0{,}32}; \quad w = \frac{5}{\text{sec}}.$$

Dem Pendel muß eine Energie zugeführt werden:

$$A = 2[10(0{,}4 - 0{,}32) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{10}{10} \cdot 0{,}3^2 \cdot 5^2]; \quad A = 3{,}85 \text{ mkg.}$$

**91.** $w = \frac{5}{\text{sec}}$, $A = 2{,}5$ mkg.

**92.** Die Umfangsgeschwindigkeit des Kranzes ist $v = 17{,}6$ m/sec,

$$\frac{v}{50} = 0{,}35 \text{ m.}$$

Die größte Geschwindigkeit ist $v_1 = 17{,}6 + \frac{0{,}35}{2} \sim 17{,}8$ m/sec.
Die kleinste Geschwindigkeit ist $v_2 = 17{,}4$ m/sec.
Die Energieänderung beträgt

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1200}{10}(17{,}8^2 - 17{,}4^2) = 840 \text{ mkg.}$$

**93.** Unmittelbar vor Eintritt des Beharrungszustandes hat die Maschine den Zug mit der angegebenen Geschwindigkeit zu bewegen

$$L_1 = 360 \cdot 3 \cdot 10 = 10\,800 \text{ mkg/sec.}$$

Ferner hat die Maschine dem Zug in den 50 Sekunden die kinetische Energie $A = \frac{1}{2}\frac{360\,000}{10} \cdot 10^2 = 1\,800\,000$ mkg zu geben. Wird der Zug in dieser Zeit gleichförmig beschleunigt bewegt, so wächst die Leistung der Maschine gleichmäßig mit der Zeit, sie kann also durch ein Dreieck dargestellt werden

$$L_2 \cdot \tfrac{50}{2} = 1\,800\,000 \text{ mkg}; \quad L_2 = \frac{1\,800\,000}{25 \text{ sec}} = 72\,000 \text{ mkg/sec.}$$

Die höchste Leistung der Maschine ist also:

$$L_1 + L_2 = 82\,800 \text{ mkg/sec}; \quad N = \frac{82\,800}{75} = 1140 \text{ PS.}$$

Im Beharrungszustande hat die Maschine nur

$$N_1 = \frac{10\,800}{75} = 144 \text{ PS} \text{ zu leisten.}$$

**94.** Die Last wird gleichförmig beschleunigt, bis sie den Beharrungszustand erreicht. Nach den gegebenen Maßen erreicht die Last eine Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{16 \cdot 100}{400} \cdot \frac{150}{600} = 1 \text{ m/sec.}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit der Treibräder ist

$$v_2 = \frac{16 \cdot 100}{400} = 4 \text{ m/sec.}$$

Mit dieser Geschwindigkeit dreht sich das kleine Reibungsrad von Beginn der Bewegung, während das große Reibungsrad von Null bis auf $v_2$ beschleunigt und dann mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig gedreht wird. Die mittlere Geschwindigkeit des großen Rades während der Beschleunigung ist also gleich 2 m/sec, die mittlere Geschwindigkeit der Last gleich 0,5 m/sec. Dauert die Beschleunigung $t$ Sekunden, so ist:

$$65 \cdot 2t = 250 \cdot 0{,}5t + \tfrac{1}{2} \cdot 25{,}1^2; \quad t = 2{,}5 \text{ sec.}$$

Die Reibungskraft leistet also in dieser Zeit

$$A_1 = 65 \cdot 2 \cdot 2{,}5 = 325 \text{ mkg.}$$

Das kleine Rad dreht sich immer mit der Umfangsgeschwindigkeit von 4 m und am Umfang wirken 65 kg Reibung. Während der Beschleunigung werden also verbraucht

$$A_2 = 65 \cdot 4 \cdot 2{,}5 = 650 \text{ mkg.}$$

Die Hälfte der Arbeit, die in dieser Zeit auf die Winde übertragen wird, geht also verloren.

**95.** Die Gewichte werden gleichförmig beschleunigt bewegt. Ist $p$ die Aufwärtsbeschleunigung der Last von 300 kg, so ist die Abwärtsbeschleunigung des Gegengewichts gleich $2p$. Die Last wird in der ersten Sekunde um $\frac{p}{2}$ gehoben, das Gegengewicht um $p$ gesenkt. Die Arbeitsgleichung für die erste Sekunde lautet:

$$100 \cdot p + 85p - 300 \cdot \frac{p}{2} = \frac{10}{2} \cdot 4p^2 + \frac{30}{2} \cdot p^2.$$

$$100 + 85 - 150 = 35 = (20 + 15)p.$$

$$p = 1 \text{ m/sec}^2.$$

**96.** Der Hammer hat beim Aufschlagen die Energie:

$$A = (2000 + 1800 - 200) \cdot 1 = \tfrac{1}{2} Mv^2 = 100\, v^2.$$

$$v = 6 \text{ m/sec.}$$

**97.** Wenn die Kurbel durch den toten Punkt geht, ist die Kolbengeschwindigkeit gleich Null, mithin kann der Dampfdruck in diesem Augenblick keine Arbeit leisten. Der Schwungkranz muß die zu leistende Arbeit liefern. Dabei erleidet der Kranz, weil er Bewegungsenergie abgibt, eine Verzögerung, die Geschwindigkeit fällt von $v$ auf $v_1$. Es ist: $30 \cdot 75 \cdot t = \frac{1}{2} M (v^2 - v_1^2)$, wenn $t$ die sehr kurze Zeit ist.

$$v_1 = v - p\,t,$$

$$30 \cdot 75 \cdot t = \tfrac{1}{2} M [v^2 - (v - p\,t)^2]$$

$$30 \cdot 75 \cdot t = M \cdot v \cdot p \cdot t,$$

(Das Glied $p^2 t^2$ kann vernachlässigt werden.)

$$p = \frac{30 \cdot 75}{M \cdot v} = \frac{30 \cdot 75}{80 \cdot 12{,}56}; \; p = 2{,}25 \text{ m/sec}^2.$$

Zweite Lösung: Die Maschine hat ein Drehmoment

$$M_t = \frac{L}{w} = \frac{30 \cdot 75}{w}.$$

Das Drehmoment des Kranzes bei einer Verzögerung $p$ ist:

$$M_t = \frac{G}{g} p \cdot \frac{D}{2}.$$

Wenn die Kurbel durch den toten Punkt geht, muß der Kranz das erforderliche Drehmoment liefern:

$$\frac{G}{g}\cdot p\cdot\frac{D}{2}=\frac{30\cdot 75}{w};\quad p=\frac{30\cdot 75}{\frac{D}{2}\cdot w}\cdot\frac{g}{G};\quad p=\frac{30\cdot 75}{v\cdot 80}=2{,}25\ \mathrm{m/sec}^2.$$

Das Drehmoment $M_t = Mp\cdot\frac{D}{2} = 180$ mkg verteilt sich als Biegungsmoment auf die Radarme.

**98.** Geht die Kurbel durch den toten Punkt, so haben nur Kurbel und Pleuelstange Geschwindigkeiten. Daher ist die Energie der Teile $A_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{30+40}{10}\right) = 2{,}5^2 = 7{,}28$ mkg. Geht die Kurbel durch die Mittelstellung, so haben alle Teile die Geschwindigkeit $v$, außerdem liegen die Schwerpunkte von Pleuelstange und Kurbel 0,1 m höher wie vorher. Daher ist

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{90}{10}\cdot 2{,}5^2 + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{40}{10}\cdot 2{,}5^2 + 70\cdot 0{,}1 = 37\ \mathrm{mkg}.$$

Die Arbeit ist:

$$A_2 - A_1 = 37 - 7{,}28 \sim 30\ \mathrm{mkg}.$$

**99.** Kolben und Kreuzkopf wiegen zusammen 60 kg. Dieselben erhalten im toten Punkt eine Beschleunigung $p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{6{,}25}{0{,}2} = 31{,}25\ \mathrm{m/sec}^2$, wozu eine Dampfkraft $Mp_n = 6\cdot 31{,}25 \sim 188$ kg verbraucht wird. Wenn nun auf den Kolben bzw. Zylinderdeckel ein Dampfdruck $P$ wirkt, so überträgt die Kolbenstange nur $P - 188$ kg auf die Kurbel bzw. das Lager. Der Überdruck auf den Zylinderdeckel ist also 188 kg.

**100.** Die Energieänderung ist:

$$A = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\left[(v+v_1)^2-(v-v_1)^2\right] = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\cdot\ \left[v^2+2vv_1+v_1-v^2\right.$$
$$\left.+\,2vv_1-v_1\right] = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\cdot 4vv_1 = 2\frac{G}{g}\cdot vv_1.$$

**101.** Ist $Q$ der Zapfen- bzw. Raddruck, so ist $W = 0{,}01\,Q$ die Reibung zwischen Rad und Schiene, $W_2 = 0{,}05\,Q$ die Zapfenreibung. Das Moment der Reibungen ist

$$W_2\cdot 0{,}5 - W_1\cdot 0{,}05 = Mp\cdot 0{,}5,$$

wenn $M$ die Masse des Radkranzes, $p$ seine Beschleunigung ist.

$M \cdot p \cdot 0{,}5 = Q = 0{,}0025; \quad p = \frac{Q \cdot 0{,}0025}{M \cdot 0{,}5}; \quad p = \frac{Q}{M} \cdot 0{,}005.$

Ist nun $Q = \frac{30000}{4}$; $M = \frac{80}{4}$, so wird $p = \frac{30000}{80} \cdot 0{,}005 = 1{,}875$ m/sec$^2$

d. h. das Rad schleift im ersten Augenblick vollständig, wird mit $p$ beschleunigt bis es rollt, also eine Umfangsgeschwindigkeit erreicht hat, die gleich der Fahrgeschwindigkeit des Wagens ist. Der Wagen erleidet eine Verzögerung $p_2 = \frac{0{,}05\, Q \cdot g}{Q}$; $p_2 = 0{,}5$ m/sec$^2$. Ist $t$ die Zeit der Beschleunigung, so ist $10 - 0{,}5\, t = 1{,}875\, t$; $2{,}375\, t = 10$; $t = 4{,}2$ sec. Dann ist die Fahrgeschwindigkeit

$$10 - 0{,}5 \cdot 4{,}2 = 1{,}875 \cdot 4{,}2 = 7{,}9 \text{ m/sec.}$$

Die Rechnung würde sich etwas ändern, wenn der Luftwiderstand berücksichtigt würde.

**102.** Die Last verliert beim Heruntergehen eine Ruheenergie $A = 600 \cdot 12 = 7200$ mkg. Diese von der Last geleistete Arbeit muß, da die Endgeschwindigkeit der Last gleich Null sein soll, von der Bremse verzehrt werden. Zuerst bewegt sich die Last gleichförmig beschleunigt und erreicht eine Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{40}$; $v = 6{,}32$ m/sec. Mit dieser Geschwindigkeit geht nun die Last 8 m gleichförmig weiter, dann wird sie bis auf Null verzögert.

Die Zugkraft im Lastseil ist anfangs gleich Null, nachher $z_1 = 600$ kg; dann wird $z_2 \cdot 2 = 4 \cdot 600$; $z_2 = 1200$ kg. Die Bremswiderstände sind $W_1 = \frac{600 \cdot 150}{50} = 180$ kg; $W_2 = \frac{1200 \cdot 150}{500}{}_2 = 360$ kg.

**103.** Jeder Wagen hat die Energie $A = \frac{150 \cdot 12^2}{2} = 10\,800$ mkg. Wenn die Wagen nach 10 Sekunden stillstehen sollen, durchlaufen sie in dieser Zeit einen Weg $s = \frac{12}{2} \cdot 10 = 60$ m, ihre Schwerpunkte fallen dabei um 15 m. Deshalb ist

$$Z \cdot 60 = 10800 + 1500 \cdot 15 = 33300 \text{ mkg.}$$

$$Z = \frac{33300}{60} = 555 \text{ kg.}$$

**104.** Die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades ist

$$v = \frac{\pi \cdot 1{,}2 \cdot 150}{60} = 9{,}42 \text{ m/sec};$$

die Spannungen des Bremsbandes sind:

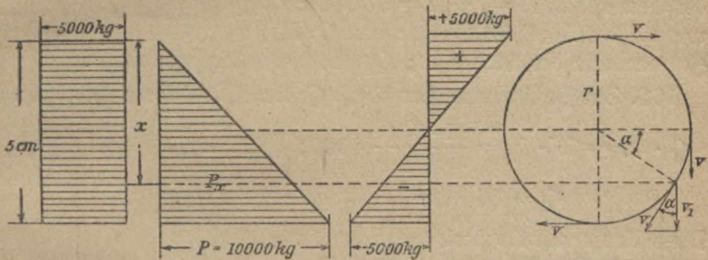
$$S_1 = 70 \text{ kg}. \quad S_2 = \frac{10 \cdot 21{,}5 + 5 \cdot 25}{10} = 34 \text{ kg}.$$

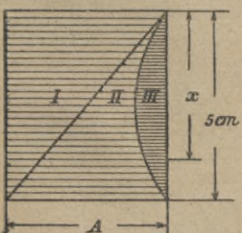
Daher ist die Reibung am Rad $S_1 - S_2 = 36$ kg. Der Motor ist im Beharrungszustand, wenn die von ihm geleistete Arbeit gleich der von der Bremse aufgezehrten ist. Die Leistung ist demnach:

$$L = 36 \cdot 9{,}42 = 339{,}12 \text{ mkg/sec}; \; N = \frac{339{,}12}{75} = 4{,}52\, PS.$$

**105.** $N \sim 12\, PS$.

**106.** Die erste Figur, das Rechteck, stellt das Arbeitsdiagramm bzw. die potentielle Energie des Gewichtes dar; sein Inhalt ist $5000 \cdot 5 = 25\,000$ cmkg. Die zweite Figur, das Dreieck, ist die Formenergie




des Stabes. Rechteck und Dreieck müssen gleichen Inhalt haben. $\frac{P \cdot 5}{2} = 25\,000$ cmkg. Hieraus ergibt sich die größte Stabkraft $P = \frac{2 \cdot 25\,000}{5} = 10\,000$ kg. Werden Rechteck und Dreieck aufeinander gelegt, so ergibt sich die dritte, aus zwei Dreiecken bestehende Figur. Das obere Dreieck ist positiv, es stellt die Beschleunigungskraft des Gewichtes dar. Das untere Dreieck ist negativ, es gibt die Verzögerungskraft des Gewichtes für jede

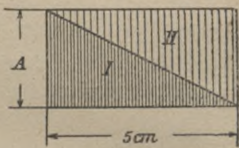
Höhe an. Hiernach macht das Gewicht eine Kreisschwingung, der Radius ist gleich 2,5 cm. Aus der Gleichung $\frac{1}{2}\,Mv^2 = \frac{5000 \cdot 0{,}025}{2}$ ergibt sich die Drehgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{5000 \cdot 0{,}025}{500}} = 0{,}5 \text{ m/sec.}$$

Die fünfte Figur ist das Energiediagramm.

In jeder Höhe besteht die Energie aus der potentiellen Energie $I$ des Gewichtes, der Formenergie $II$ des Stabes und der kinetischen Energie $III$ des Gewichts. In jeder Höhe ist $I + II + III = A = 5000 \cdot 5 = 25\,000$ cmkg; $A = 250$ mkg.

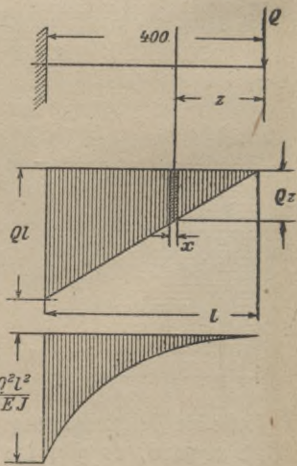
**107.** Beim Aufstoßen des Gewichts $Q$ besitzt es die kinetische Energie $A = \frac{1}{2}\,\frac{100}{10} \cdot 10^2 = 500 \text{ mkg} = 50\,000$ cmkg. Diese Energie gibt $Q$ an den Stab auf dem Wege von 5 cm ab, sie wird in Formenergie des Stabes umgewandelt. In jeder Stellung des Gewichts ist $A = I + II = 50\,000$ cmkg, wenn $I$ die kinetische Energie von $Q$, $II$ die Formenergie des Stabes ist; $Q$ macht eine Kreisschwingung.




**108.** Zur Bestimmung der Kraft $Q$ dient die Momentengleichung

$$Q \cdot 40 = W \cdot k_z = \frac{15 \cdot 1.2^2}{6} \cdot 4000;$$

$$Q = 360 \text{ kg.}$$

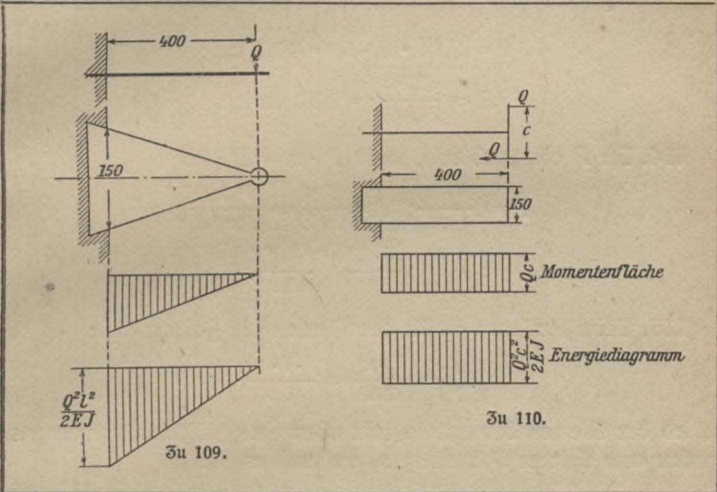



Diese Kraft ruft Normal- und Scherspannungen in der Feder hervor (vgl. Bd. 1, Seite 43), welche die Formänderung bewirken. Von der Wirkung der Scherspannungen soll einstweilen abgesehen werden. Die Formenergie in einem kleinen Balkenstück $\lambda$ ist gleich $\frac{1}{EJ} \cdot \frac{M_z^2}{2} \cdot \lambda = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Q^2 z^2}{2} \cdot \lambda$. Die Energie ist also vom Quadrat des Abstandes $z$ des Federstückes vom freien Ende abhängig. Die Verteilung der Energie über der Feder läßt sich durch eine Parabelfläche darstellen. Die ganze Energie in der Feder ist gleich dem Inhalt der Parabelfläche

$$A = \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Q^2 l^2}{2} = \frac{Q^2 l^3}{6EJ} = 320 \text{ cmkg.}$$

**109.** Hier läßt sich die Verteilung der Energie über der Feder durch eine Dreiecksfläche darstellen, deren Inhalt ist:

$$A = \frac{Q^2 l^2}{2EJ} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Q^2 l^3}{4EJ} = 480 \text{ cmkg.}$$




Zu 109.

Zu 110.

**110.** Die Verteilung der Energie über der Feder stellt sich hier durch ein Rechteck dar, dessen Inhalt

$$A = \frac{Q^2 c^2 l}{2EJ} = 960 \text{ cmkg ist.}$$

**111.** Hier ist $q = \frac{720}{40} = 18$ kg/cm. $A = \frac{q^2 l^5}{20\,EJ} = 384$ cmkg.

**112.** Es ist $w = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 180}{30} = \frac{18{,}84}{\text{sec}}$.

Die Leistung ist $L = M_t \cdot w = 40 \cdot 75$ mkg/sec.

$$M_t = \frac{40 \cdot 75}{18{,}84} \sim 160 \text{ mkg} = 16\,000 \text{ cmkg.}$$

Die Formarbeit ist

$$A = \frac{M_t^2 \cdot l}{2GJ_p}, \text{ wenn } G \text{ der Gleitmodul ist:}$$

$$A = \frac{16000^2 \cdot 1000 \cdot 5}{2 \cdot 800000 \cdot 64} = 400 \text{ cmkg.}$$

113. $P \cdot 3 = \frac{1}{5} \cdot 0{,}125 \cdot 3000;\ P = 25 \text{ kg.}$

$$M_t = 25 \cdot 3 = 75 \text{ cmkg};\ J_p = \frac{0{,}5^5}{10} = 0{,}03125 \text{ cm}^5;$$

$$l = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 5 = 94{,}2 \text{ cm};$$

$$A = \frac{M_t{}^2 l}{2GJ_p} = 9{,}72 \text{ cmkg.}$$

114. Ist $P$ die Stabkraft, so ist $P \cdot v = N \cdot 75$;

$$P = \frac{N \cdot 75}{v};\ A = \frac{P^2 l}{2fE} = \frac{N^2\, 75^2\, l}{2vfE};$$

$$P = \left(\frac{N \cdot 75}{f}\right)^2 \cdot \frac{V}{2vE}.$$

115. Beim Auflegen erhält der Riemen die Formenergie

$$A_0 = \frac{V \cdot s^2}{2E} = \frac{f \cdot l \cdot s^2}{2E}.$$

Wird der Riemen bewegt, so tritt oben eine größere Spannung $s_1$, unten eine kleinere Spannung $s_2$ auf und es ist:

$$s_1 = 2s_2;\quad s_1 + s_1 = 2s;$$

$$s_1 = \frac{4}{3} s;\quad s_2 = \frac{2}{3} s;$$

$$A_1 = \frac{fls_1^2}{4E} + \frac{fls^2}{4E} = \frac{5}{9} \cdot \frac{fls^2}{E}.$$

Demnach ist die Formenergie um $A_1 - A_0 = \frac{A_0}{9}$ gewachsen.

116. Stange und Keil wird eine Geschwindigkeit $-v$ gegeben. Der Keil steht dann still, die Stange verschiebt sich auf dem Keilrücken von links nach rechts mit der Geschwindigkeit

$$v_r = \sqrt{v^2 + \left(\frac{v}{10}\right)^2};\ v_r = 0{,}1005 \text{ m/sec.}$$

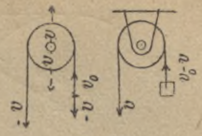
**117.** Die relative Bewegung des Rades gegen die Stange ist eine Rollbewegung des Rades auf der Stange mit der Geschwindigkeit $v$.

**118.** Wird der Rolle eine Geschwindigkeit $-v$ gegeben, so müssen auch die beiden Seilenden diese Geschwindigkeit erhalten. Die Rolle steht fest, das linke Seilende hat eine abwärts gerichtete Geschwindigkeit $v$, die Last hat die Geschwindigkeit $v_0 - v$. Bei einer festen Rolle haben aber beide Seilenden gleiche Geschwindigkeiten, daher ist

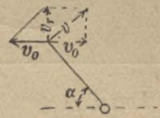
$$v_0 - v = v; \quad v_0 = 2\,v.$$

**119.** Die relative Geschwindigkeit des Zapfens gegen die Stange ist die Resultante von $-v_0$ und $v$, $v_r = v \sin \alpha$. Der Zapfen dreht sich außerdem um seinen Mittelpunkt.

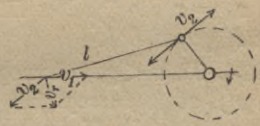
**120.** Bei jeder Umdrehung der Kurbel macht der Zapfen eine Umdrehung im Stangenkopf.



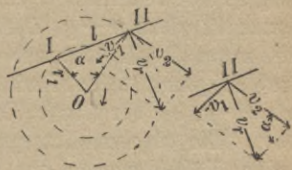
Zu 118.



Zu 119.



Zu 121.

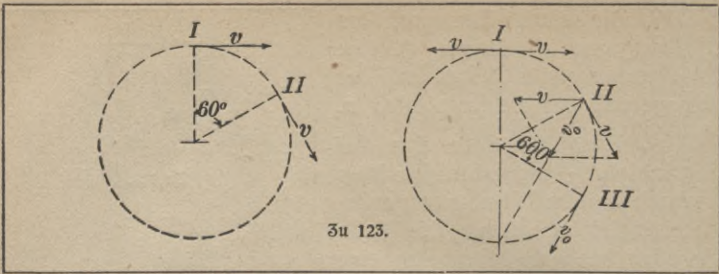


Zu 122.

**121.** Die relative Geschwindigkeit des Kreuzkopfes gegen den Kurbelzapfen ist die Resultante $v_r$ von $v_1$ und $-v_2$, wenn $v_1$ und $v_2$ die Geschwindigkeiten der beiden Teile sind. $v_r$ steht senkrecht zur Stange, die relative Bewegung des Kreuzkopfes ist also eine Drehung um den Kurbelzapfen.

**122.** Die relative Geschwindigkeit von *II* gegen *I* ist die Resultante von $v_2$ und $v_1$. $v_r$ steht auf der Stange senkrecht. Die relative Bewegung von *II* gegen *I* ist eine Drehung um *I*.

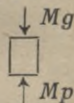
**123.** *I* wird stillgestellt, indem ihm noch eine Geschwindigkeit $-v$ gegeben wird, dann muß auch *II* diese Geschwindigkeit erhalten: die resultierende Geschwindigkeit von *II*; $v_0 = v$ ist die relative Geschwin-



Zu 123.

digkeit von *II* gegen *I*. Sie steht senkrecht auf dem Radius, der einen Winkel von $60^0$ mit dem Drehradius von *II* bildet. Die Geschwindigkeit $v_0 = v$ des Punktes *III* ist die gesuchte relative Geschwindigkeit von *II* gegen *I*.

**124.** Ist $p < g$, so bewegt sich $M$ wie $A$ mit der Beschleunigung $p$. Ist $p \geqq g$, so bewegt sich $M$ mit der Beschleunigung $g$. Ist nun $p > g$, so erhält $M$ eine relative Bewegung gegen $A$. Diese Bewegung ist eine beschleunigte Aufwärtsbewegung. Die Beschleunigung ist gleich $p - g$. Diese relative Beschleunigung ergibt sich, wenn $A$ still steht und auf $M$ eine aufwärts gerichtete Kraft $M \cdot p$ wirkt. An $M$ wirken dann die beiden Kräfte $M \cdot p$ und $M \cdot g$, die der Masse die Aufwärtsbeschleunigung: $p_r = p - g$ geben. Die absolute Bewegung von $M$ ist die freie Fallbewegung mit der Beschleunigung $g$.




**125.** $M$ bewegt sich gleichförmig beschleunigt abwärts, bis die Wege von $A$ und $M$ gleich sind.

$$\tfrac{1}{2} g t^2 = v \cdot t; \quad g t = 2v; \quad v_0 = 2v.$$

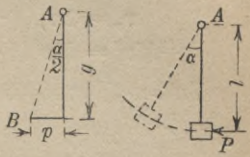
Wenn also die Wege gleich sind, das Seil angespannt ist, ist die Geschwindigkeit von $M$ gleich $2v$. $M$ übt einen Stoß auf das Seil aus. Von nun ab bewegt sich $M$ mit der Geschwindigkeit $v$.

Zur Bestimmung der relativen Bewegung von $M$ gegen $A$ wird $A$ festgestellt und $M$ wird eine aufwärtsgerichtete Geschwindigkeit $v$ bzw. ein Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} M \cdot v^2$ gegeben. $M$ steigt dann um $h$, das sich aus der Gleichung ergibt:

$$G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot v^2, \quad h = \frac{v^2}{2g} \cdot$$

Hat $M$ die Höhe $h$ erreicht, so fällt es wieder um $h$ und bewegt sich dann wie $A$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v$.

**126.** Zur Bestimmung der relativen Bewegung von $M$ gegen $A$ stellt man $A$ fest und läßt auf $M$ eine wagerechte Kraft $P = Mp$ wirken. Die Kraft $P$ dreht $M$ um $A$ um den Winkel $\alpha$. Für den Drehwinkel $\alpha$ lautet die Arbeitsgleichung:




$$P \cdot l \cdot \sin\alpha = M \cdot g \cdot l(1 - \cos\alpha)$$

$$Mp \cdot \sin\alpha = Mg(1 - \cos\alpha)$$

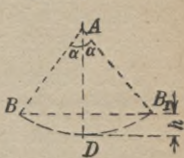
$$p \sin\alpha = g(1 - \cos\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{g}.$$

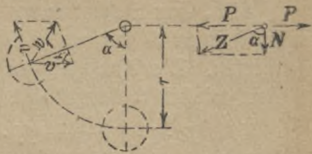
Die relative Bewegung von $M$ gegen $A$ ist eine Schwingung um die Mittellage $AB$. Außerdem bewegt sich $M$ wie $A$ gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung $p$. In der Mittellage halten sich die beiden Kräfte $Mg$ und $Mp$ das Gleichgewicht, ihre Resultante $Z$ fällt in die Seilrichtung, darum ist die Seilkraft

$$Z = M\sqrt{p^2 + g^2}.$$

**127.** Wird $A$ festgestellt und $M$ eine rückwärts gerichtete Geschwindigkeit $v$ bzw. eine kinetische Energie $\frac{Mv^2}{2}$ gegeben, so dreht sich $M$ um $A$ und steigt auf die Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$, dann fällt es wieder zurück in die Anfangsstellung. Die relative Bewegung von $M$ gegen $A$ ist eine Schwingung um den Winkel $\alpha$ bzw. $2\alpha$; $l(1 - \cos\alpha) = \frac{v^2}{2g}$ nach rechts und links. Im Punkte $B$ hat $M$ die absolute Geschwindigkeit $v$, auf dem Rückwege erlangt $M$ im Anfangspunkt $D$ die absolute Geschwindigkeit $2v$, im Endpunkte $B_1$ ist sie wieder gleich $v$, auf dem Rückwege wird sie in $D$ wieder gleich Null usf.




**128.** Wird das Lagergehäuse stillgestellt und der Kugel eine entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit $v$ bzw. eine kinetische Energie $\frac{Mv^2}{2}$ gegeben, so dreht sich die Kugel mit der Geschwindigkeit $v$. Dies ist die relative Bewegung der Kugel gegen das Gehäuse. Die absolute Geschwindigkeit der Kugel ist die Resultante $v_r$ aus der Drehgeschwindigkeit $v$ und der geradlinigen Geschwindigkeit $v$.



Bei Beginn der Bewegung ist $v_r$ gleich Null, mithin auch die Energie der Kugel. Hat sich die Stange um den Winkel $\alpha$ gedreht, so ist:

$$v_r = 2v^2(1 - \cos\alpha);$$
$$\tfrac{1}{2}Mv_r^2 = Mv^2(1 - \cos\alpha).$$

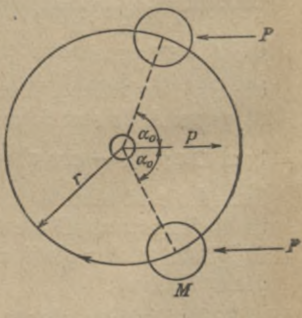
In der Richtung der Stange wirkt die Zentrifugalkraft $Z = \frac{Mv^2}{r}$, die die Komponenten $P = \frac{Mv^2}{r}\sin\alpha$, $N = \frac{Mv^2}{r}\cos\alpha$ hat.

Auf das Gehäuse muß eine Kraft, die gleich $P$ ist, in der Bewegungsrichtung wirken. Die Arbeit dieser Kraft ist gleich der Energie der Kugel. Der Kraft $N$ wird durch die Reaktion der Führung das Gleichgewicht gehalten.

Bei $\alpha = 180^0$ wird die Energie am größten.

$$E = \tfrac{1}{2}M(2v)^2 = 2M \cdot v^2.$$

Von da ab wirkt die Komponente $P$ in der Bewegungsrichtung, darum muß die äußere Kraft $P$ entgegenaesetzt wirken. Wenn dann die Kugel in ihrem Ausgangspunkt zurückkommt, ist $E = 0$. Nun wiederholt sich die Bewegung.



**129.** Bildet der Drehradius der Kugel bei Beginn der Bewegung mit der Bewegungsrichtung des Gehäuses einen Winkel $\alpha_0$, so ist die relative Bewegung der Kugel gegen das Gehäuse eine Drehung um die Spindel. Diese Bewegung wird durch eine der Bewegungsrichtung des Gehäuses entgegen wirkende Kraft $P = Mp$ bewirkt. Die Kugel dreht sich um den Winkel $360^0 - 2\alpha_0$, steht dann still und geht wieder zurück.

**130.** Die relative Geschwindigkeit der Masse $M$ gegen die Kurve ist $v_r = v_2 - v_1 = 1{,}8$ m/sec. Deshalb steigt die Kugel auf der Kurve um $h = \frac{v_r^2}{2g} = 0{,}162$ m. Wenn die Masse diese Höhe erreicht hat, ist ihre relative Geschwindigkeit gleich Null und ihre absolute Geschwindigkeit $v = 2$ m/sec. Nun geht die Masse $M$ wieder abwärts, kommt in ihrem Ausgangspunkt wieder mit der relativen Geschwindigkeit $v_r = 1{,}8$ m/sec und mit der absoluten, nach der Bewegung der Kurve gerichteten Geschwindigkeit $v_1 - v_r = 0{,}2$ m/sec an.

Bei Beginn der Bewegung ist die Energie der Masse:

$E_1 = \frac{1}{2} M \cdot 3{,}8^2 = 7{,}22 M.$ Im höchsten Punkt ist sie

$$E_2 = M \cdot g \cdot h = M \cdot g \cdot 0{,}162 = 1{,}62 M.$$

Die Masse hat also an die Kurve beim Aufsteigen die Energie $E_1 - E_2 = 5{,}60 M$ abgegeben. Auf dem Rückwege gibt die Masse die Energie $E_2 - E_3 = 1{,}62 M - \frac{1}{2} M \cdot 0{,}2^2 = (1{,}62 - 0{,}02) M = 1{,}6 M$ ab und behält noch $0{,}02 M$.

**131.** Die absolute Endgeschwindigkeit muß gleich Null sein.

$$v_1 = 2 \text{ m/sec.}$$

**132.** Die einzige äußere Kraft ist hier das Gewicht von 10 kg. Die innere Kraft ist der Druck von $M_2$ gegen $M_1$ bzw. die ebenso große Reaktion von $M_1$; diese Kräfte stehen senkrecht zur Führungsfläche. Nach dem Schwerpunktssatze ist: $M_1 v_1 = M_2 \cdot v_2$,

$$2 \cdot v_1 = 1 \cdot v_2.$$

Die potentielle Energie von $M_2$ ist: $E = 10 \cdot 0{,}3 = 3$ mkg.

Ist $M_2$ im tiefsten Punkt angelangt, so ist:

$$3 \text{ mkg} = \tfrac{1}{2} M_1 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot M_2 \cdot v_2^2 = \tfrac{1}{2}[2 v_1^2 + 1 (2 v_1)^2] = 3 v_1^2,$$

$$v_1 = 1 \text{ m/sec}; \qquad v_2 = 2 \text{ m/sec.}$$

Nun steigt $M_2$ auf der anderen Seite wieder auf die Höhe von 0,3 m. Dort angelangt ist ihre potentielle Energie wieder gleich 3 mkg, die Geschwindigkeiten beider Massen sind gleich Null. Jetzt beginnt die Bewegung wieder von neuem.

**133.** Da nur eine lotrechte äußere Kraft wirkt, muß der gemeinschaftliche Schwerpunkt wagerecht stehen bleiben.

**134.** Die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes ist

$$v = \frac{3 \cdot 1{,}5}{7{,}5} = 0{,}6 \text{ m/sec.}$$

Diese Geschwindigkeit behält der Schwerpunkt, weil keine äußere Kraft vorhanden.

Die Reibung, eine innere Kraft $W = 45 \cdot 0{,}2 = 9$ kg verzögert die Platte und gibt der Kugel eine beschleunigte Dreh- und geradlinige Geschwindigkeit, bis die Kugel auf der Platte rollt. Dann tritt der Beharrungszustand ein. Ist $v_1$ die Dreh- und $v_2$ die geradlinige Geschwindigkeit der Kugel, $v_3$ die Geschwindigkeit der Platte im Beharrungszustande, so ist: $v_1 + v_2 = v_3$,

$$\frac{4{,}5 v_2 + 3 v_3}{7{,}5} = 0{,}6 \text{ m}.$$

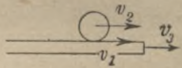
Die Beschleunigungen sind:

$$p_1 = \frac{5 \cdot 9}{2 \cdot 4{,}5} = 5 \text{ m/sec}^2; \qquad p_2 = \frac{9}{4{,}5} = 2 \text{ m/sec}^2;$$

$$p_3 = \frac{-9}{3} = -3 \text{ m/sec}^2.$$

Hiernach sind: $v_1 = 5t$; $v_2 = 2t$; $v_3 = v - 3t = 1{,}5 - 3t$.

Nach der ersten Gleichung wird dann:




$5t + 2t = 1{,}5 - 3t, \quad t = 0{,}15$ sec.

Der Beharrungszustand tritt nach 0,15 sec ein. Dann wird

$v_1 = 0{,}75$ m/sec; $v_2 = 0{,}3$ m/sec; $v_3 = 1{,}05$ m/sec.

Eingeführt wird die Energie:

$$E = \frac{M_1 \cdot v^2}{2} = \frac{3 \cdot 1{,}5^2}{2} = 3{,}375 \text{ mkg}.$$

Deshalb muß sein:

$$3{,}375 \text{ mkg} = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}05^2 + \tfrac{1}{5} \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}75^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}3^2 + W \cdot s.$$

Hier ist $W = 9$ kg und $s$ der Gleitweg der Kugel auf der Platte,

$$s = \frac{v}{2} t = \frac{1{,}5}{2} \cdot 0{,}15 = 0{,}1125 \text{ m}.$$

**135.** Vgl. Aufgabe 134. Hier wird $v_1 = v_2 = \frac{8}{9}$ m/sec.

**136.** Vgl. Aufgabe 134. Hier wird:

$v_1 = 0{,}96$ m/sec; $v_2 = 0{,}48$ m/sec; $v_3 = 1{,}44$ m/sec.

**137.** Die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes ist und bleibt gleich Null, da eine innere Kraft, die Reibung

$$W = 20 \cdot 0{,}2 = 4 \text{ kg}$$

zwischen den Körpern wirkt. Diese Kraft verzögert die Drehgeschwindigkeit der Kugel von $v$ auf $v_1$, erteilt ihr eine geradlinige Geschwindigkeit $v_2$ von links nach rechts und gibt der Platte eine Geschwindigkeit $v_3$ von rechts nach links. Wenn diese Geschwindigkeiten erreicht sind, die Kugel auf der Platte rollt, bleiben die Körper im Beharrungszustande. Beim Rollen ist:

$$v_1 = v_2 + v_3 .$$

Da die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich Null ist, so muß sein $2v_2 = 3v_3$. Aus den beiden Gleichungen ergibt sich:

$$v_2 = \tfrac{3}{5} v_1; \qquad v_3 = \tfrac{2}{5} v_1 .$$

Ferner ist: $$\frac{W}{3} \cdot t = v_3 = \frac{2}{5} v_1; \quad t = 0{,}3 v_1 .$$

Die Beschleunigung der Platte ist

$$p_3 = \frac{4}{3} \text{ m/sec}^2; \quad t = \frac{v_3}{p_3} = \frac{3}{4} v_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} v_1 = 0{,}3 v_1 .$$

Der Weg der Kugel auf der Platte ist:

$$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{2{,}5}{2} \cdot 0{,}3 v_1 = 0{,}375 v_1 .$$

Die eingeführte Energie ist: $\frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2{,}5^2 = 2{,}5$ mkg. Die Energiegleichung lautet:

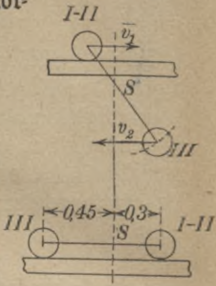
$$2{,}5 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\tfrac{3}{5} v_1)^2 + \tfrac{1}{5} \cdot 2 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot (\tfrac{2}{5} v_1)^2 + 4 \cdot 0{,}375 \cdot v_1 .$$

Hieraus ergibt sich:

$$v_1 = 1 \text{ m/sec}; \quad v_2 = 0{,}6 \text{ m/sec}; \quad v_3 = 0{,}4 \text{ m/sec}.$$

**138.** Hier wird $v_1 = 1{,}2$ m/sec; $v_2 = 0{,}4$ m/sec; $v_3 = 0{,}8$ m/sec.

**139.** Auf die Körper wirkt nur die äußere Kraft von 40 kg, die innere Kraft ist die Stangenkraft, welche auf die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes keinen Einfluß hat. Nach dem Schwerpunktsatze ist: $6 v_1 = 4 v_2$, $v_2 = \frac{3}{2} v_1$, wenn $v_1$ und $v_2$ die wagerechten Geschwindigkeiten sind. Steht die Stange lotrecht, so ist:



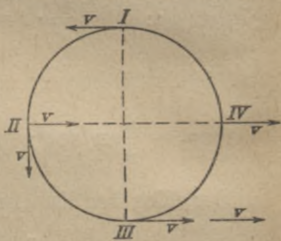

$$E = 40 \cdot 0{,}75 = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} 4 . \left(\tfrac{3}{2} v_1\right)^2,$$

$$v_1 = 2 \text{ m/sec}; \quad v_2 = 3 \text{ m/sec}$$

sind die größten Geschwindigkeiten.

Der gemeinschaftliche Schwerpunkt bewegt sich auf der lotrechten Geraden, die durch den Schwerpunkt $S$ der Anfangslage geht. Aus der tiefsten Stellung steigt *III*, bis die Stange wieder wagerecht steht, dann bewegen sich die Massen wieder zurück.

**140.** Das Gewicht bewegt sich wie das freie Stabende mit der Geschwindigkeit $v = f$ m/sec und hat außerdem noch eine relative Bewegung gegen das Stabende. Zur Bestimmung dieser relativen Bewegung wird das freie Stabende fest gehalten und dem Gewicht eine der gegebenen Bewegung entgegen gerichtete Geschwindigkeit $v = 1$ m/sec bzw. eine kinetische Energie $A = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{100}{2} \cdot 1 = 50 \text{ mkg} = 5000 \text{ cmkg}$ gegeben. Das Gewicht macht dann eine Kreisschwingung. Ist $P$ die größte Zugkraft im Stabe, die bei der Schwingung auftritt, und $r$ der Schwingungsradius, so ist:




$$\frac{Pr}{2} = 5000 \text{ cmkg}; \quad r : l = \frac{P}{f} : E; \quad r = \frac{Pl}{fE}; \quad Pr = \frac{P^2 l}{f \cdot E} = 10000,$$

$$P^2 = \frac{10000 \cdot fE}{l}; \quad P = 20000 \text{ kg}; \quad k_z = 4000 \text{ kg/cm}^2; \quad r = 0{,}5 \text{ cm}.$$

Die absolute Anfangsgeschwindigkeit des Gewichts ist $v_1 = 0$. Bei $\frac{1}{4}$ Kreisschwingung ist $v_2 = 1$ m/sec, bei $\frac{1}{2}$ Kreisschwingung $v_3 = 2$ m/sec, bei $\frac{3}{4}$ Kreisschwingung $v_4 = 1$ m/sec, bei $\frac{4}{4}$ Kreisschwingung $v_5 = 0$ usw.

**141.** Die relative Bewegung des Gewichts gegen das freie Stabende ergibt sich, wenn das Stabende still gestellt wird und auf das Gewicht eine Kraft $P = Mp = 100 \cdot 5 = 500$ kg wirkt. Die Kraft erteilt dem Gewicht eine Kreisschwingung, deren Radius

$$r = \frac{Pl}{Ef} = \frac{500 \cdot 500}{2000000 \cdot 2,5} = 0,05 \text{ cm},$$

die ganze Dehnung des Stabes $2r = 0,1$ cm, die größte Zugkraft

$$2P = 1000 \text{ kg}, \; k_z = \frac{1000}{2,5} = 400 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Gewicht erhält die beschleunigte Bewegung mit $p = 5 \text{ m/sec}^2$ und außerdem die Schwingungsbewegung.

**142.** Der gemeinschaftliche Schwerpunkt $S$ beider Massen erhält eine Geschwindigkeit

$$v_3 = \frac{M_2 v}{M_1 + M_2} = \frac{5 \cdot 3}{10 + 5} = 1 \text{ m/sec}.$$

Diese Geschwindigkeit erhalten auch die beiden Massen. Außerdem schwingen die Massen gegen den Schwerpunkt so, daß hierdurch der Schwerpunkt keine Bewegung erhält. Die relativen Anfangsgeschwindigkeiten der Massen gegen den Schwerpunkt sind $v_1 = 1$ m/sec; $v_2 = 3 - 1 = 2$ m/sec. Die bei den Schwingungen in Betracht kommenden Stablängen sind $l_1 = 0,3$ m, $l_2 = 1$ m. Die Schwingungsradien werden nach der Formel $r = v\sqrt{\frac{l \cdot M}{Ef}}$ berechnet.

**143.** Der Schwerpunkt erhält eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung ist $p = \frac{P}{M_1 + M_2} = \frac{20}{3 + 5} = 2,5 \text{ m/sec}^2$. Dieselbe Bewegung erhalten auch die Gewichte, welche außerdem noch gegen den Schwerpunkt senkrecht zur Stabachse schwingen. Diese Schwingungen werden durch die Kräfte $P_1 = M_1 p = 5 \cdot 2,5 = 12,5$ kg, $P_2 = 3 \cdot 2,5 = 7,5$ kg bewirkt, bei den Schwingungen in Betracht kommenden Stablängen sind $l_1 = 0,6$ m, $l_2 = 1$ m.

**144.** Die Drucke auf die Seitenwände sind gleich den statischen Momenten der Wandflächen bezogen auf den Wasserspiegel. Die Drucke lassen sich also durch Körper darstellen.

$$P_1 = 1,2 \cdot 2,4 \cdot \frac{2,4}{2} = 3,456 \text{ t}; \quad P_2 = 1,0 \cdot 2,4 \cdot \frac{2,4}{2} = 2,88 \text{ t}.$$

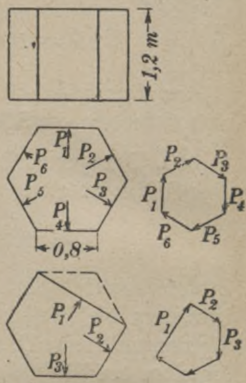
Die Kräfte wirken wagerecht in $\frac{2}{3}$ der Höhe (Schwerpunkte der Druckprismen), von Wasserspiegel also $x = \frac{2}{3} \cdot 2,4 = 1,6$ m. Die vier Kräfte sind im Gleichgewicht, sie bilden ein Viereck, das dem Grundriß des Behälters ähnlich ist.

**145.** Die Drucke sind gleich groß: $P = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}576\,\mathrm{t}$. Werden zwei Wände durch eine Wand ersetzt, so ist der Druck auf diese Wand gleich der Resultante der beiden früheren Drucke, aus dem Kraftsechseck wird ein Fünfeck.

Die Resultante der auf drei Wände wirkenden Drucke ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Kreises des Kraftsechsecks.

**146.** Beim zylindrischen Behälter bilden die Drucke auf den ganzen Mantel einen Kraftkreis. Die Resultante der auf den halben Mantel wirkenden Drucke ist gleich dem Durchmesser des Kraftkreises, also gleich dem Druck auf eine ebene Wand, deren Breite dem Durchmesser und deren Höhe gleich der Höhe des Behälters ist. Hier ist also:

$$P = 1{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1{,}5}{2} = 1{,}35\,\mathrm{t}.$$



Zu 145.

**147.** Der Druck auf ein beliebiges Stück eines zylindrischen Mantels ist gleich dem Druck auf eine ebene Fläche, deren Breite gleich der Sehne und deren Höhe gleich der Höhe des Stückes ist. Hier ist demnach:

$$P = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6)\left(0{,}6 + \frac{0{,}4}{2}\right); \quad P = 0{,}256\,\mathrm{t}.$$

**148.** Der Inhalt des Behälters ist

$$I = \frac{1{,}8 + 0{,}6}{2} \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}54\,\mathrm{m}^3.$$

Das Wassergewicht ist also $G = 0{,}54\,\mathrm{t}$. Der Bodendruck ist unabhängig von der Form des Behälters und gleich dem Gewicht des Wasserkörpers, dessen Grundfläche gleich der Bodenfläche und dessen Höhe gleich dem Abstand der Bodenfläche vom Wasserspiegel ist. Hier ist also der Bodendruck $B = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}27\,\mathrm{t}$. Demnach kommt auf jede schräge Seitenwand noch Vertikaldruck

$$V = \frac{G - B}{2} = \frac{0{,}54 - 0{,}27}{2}; \quad V = 0{,}135\,\mathrm{t}.$$

Außerdem kommt auf jede schräge Wand ein Horizontaldruck

$$P_1 = 0{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}45 = 0{,}2025\ \text{t}.$$

Auf die andere Seitenwand kommen Drücke

$$P_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}45 + \frac{1{,}2 \cdot 0{,}9}{2} \cdot 0{,}3 = 0{,}405\ \text{t}.$$

Die Resultante von $V$ und $P_1$ ist der wirkliche Druck auf eine schräge Wand; derselbe wirkt senkrecht zur Wand.

**149.**
$$B_1 = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{4} \cdot 1{,}5 = 2{,}65\ \text{t},$$
$$B_2 = \frac{\pi}{4}(1{,}5^2 - 0{,}5^2) \cdot 0{,}5 = 0{,}785\ \text{t}.$$

Das Wassergewicht $G = B_1 - B_2 = 1{,}865$ t. Die Seitendrücke auf den unteren Mantel bilden einen Kraftkreis, dessen Umfang $1 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 1 = \pi \cdot 1{,}5$ t; dessen Durchmesser $P_1 = \frac{\pi \cdot 1{,}5\,\text{t}}{\pi} = 1{,}5$ t der Druck auf den halben unteren Mantel ist. Der Druck auf den halben oberen Mantel ist $P_2 = 0{,}0625$ t.

**150.**
$$P_1 = 1{,}5 \cdot 09 \cdot 0{,}45 = 0{,}6075\ \text{t},$$
$$P_2 = 1{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}35 = 1{,}8225\ \text{t},$$
$$x_1 = 0{,}6\ \text{m},$$
$$P_2 \cdot x_2 = (P_1 + P_2) \cdot 1{,}2 - P_1 \cdot 0{,}6,$$
$$x_2 = 1{,}39\ \text{m}.$$

**151.** Es ist
$$\frac{P}{Q} = \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4},$$
$$Q = 4P = 100\ \text{kg}.$$

**152.** Die Drucke im Krümmer bilden einen Viertelkraftkreis, dessen Radius $P = \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} \cdot 15 = 1{,}06$ t beträgt. Der Druck auf den Krümmer ist gleich der Sehne des Viertelkreises $R = P \cdot \sqrt{2} = 1{,}5$ t.

**153.** Es muß sein $G = \frac{\pi \cdot 0{,}06^2}{4} \cdot 2 = 0{,}005652$ t; $G = 5{,}652$ kg.

**154.** Es muß sein $P = \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}1^2 \cdot 15$; $P = 118$ kg.

**155.** Der Luftdruck im Windkessel muß gleich 2,5 Atm. abs. sein.

$$P = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \cdot 6; \quad P = 47\,\text{kg}.$$

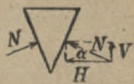
**156.** Das Gewicht der Glocke ist $G = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot 0{,}8 = 2{,}512\,\text{t}$. Der Luftdruck in der Glocke ist $p = 0{,}8 + 10 = 10{,}8$ m Wassersäule.

**157.** Das Körpergewicht ist $G = 0{,}8^3 \cdot 2{,}2 = 1{,}1264$ t. Der Auftrieb ist $A = 0{,}8^3 = 0{,}512$ t, mithin die erforderliche Hubkraft $P = 1{,}1264 - 0{,}512 = 0{,}6144$ t und die Arbeit $P \cdot 4 = 2{,}4576$ mt.

**158.** Das Gewicht des Prismas ist $G = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$ und sein spezifisches Gewicht $\gamma = \frac{0{,}1}{0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4} = 0{,}625$.

**159.** Es ist $x = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}54}{0{,}6} = 0{,}45$ m. Der Körperinhalt ist

$$V_1 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{2} \cdot 0{,}8 = 0{,}12\,\text{m}^3.$$




Das verdrängte Wasservolumen $V_2 = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}54}{2} \cdot 0{,}8 = 0{,}0972\,\text{m}^3$.

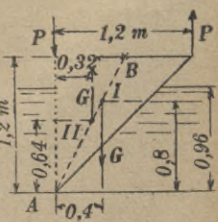
Das spezifische Gewicht $\gamma = \frac{0{,}0972}{0{,}12} = 0{,}81$. Ist $s$ die Seitenlänge des Dreiecks, so ist $N : V = s : 0{,}25$, wenn $V$ die Vertikalkomponente von $N$. Es ist aber $V$ gleich dem halben Gewicht des Körpers, also

$$V = 48{,}6\,\text{kg}; \qquad N = \frac{V \cdot s}{0{,}25} = \frac{48{,}6 \cdot 0{,}65}{0{,}25},$$

$$s = \sqrt{0{,}25^2 + 0{,}6^2} = 0{,}64\,\text{m}; \qquad N = 126{,}4\,\text{kg}.$$

**160.** Der Körper taucht um $x$ ein, das sich aus der Gleichung ergibt

$$\frac{x^2}{2} \cdot h = \frac{1{,}2^2}{2} \cdot h \cdot 0{,}65; \qquad x = 0{,}96\,\text{m}.$$




Die Richtung der Auftriebkraft geht durch den Schwerpunkt des verdrängten Wasserprismas und ist gleich dem Gewicht $G$ des Körpers. Die Richtung des Körpergewichts geht durch den Schwerpunkt des Körpers. Gewicht und Auftrieb bilden ein Kräftepaar, dessen Arm $a = 0{,}4 - 0{,}32 = 0{,}08$ m und dessen Moment $M = G \cdot 0{,}08$ mkg ist. Das

Kräftepaar sucht den Körper rechts herum zu drehen, daher muß an dem Körper ein zweites, linksdrehendes Paar $Pb = Ga$ wirken. In der Figur ist angenommen, daß die Kräfte $P$ an den Kanten des Prismas wirken.

**161.** Der an der Kugel wirkende Auftrieb ist $P_1 = \frac{10}{0{,}8} = 12{,}5$ kg. Daher muß sein $P = 12{,}5 - 10 = 2{,}5$ kg und ihre Arbeit $A = 2{,}5 \cdot 2 = 5$ mkg. Wenn $P$ nicht mehr wirkt, wirkt an der Kugel die aufwärts gerichtete Kraft $P_1$ und das Eigengewicht. Die Kraft $P_1$ bewegt die Kugel aufwärts und leistet die Arbeit

$$A_1 = P_1 \cdot 2 = 10\,(2 + h); \quad 12{,}5 \cdot 2 = 10\,(2 + h); \quad h = 0{,}5\text{ m};$$

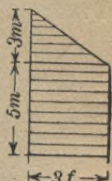
d. h. die Arbeit von $12{,}5 \cdot 2 = 25$ mkg wird verbraucht, um die Kugel 2,5 m hoch zu heben. Die Kugel steigt 0,5 m über den Wasserspiegel, dann fällt sie wieder.

**162.** Auf eine Wasserschicht in einer Höhe $x$ unter dem Wasserspiegel wirkt ein Druck $P = fx$.

Demnach lassen sich die in den einzelnen Schichten wirkenden Drucke durch ein Dreieck darstellen, dessen Inhalt gleich der ganzen Druckenergie ist:

$$A = f\frac{h^2}{2} = \frac{1 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2^2}{2} = 0{,}36\text{ m}^4,$$

$$A = 0{,}36\text{ tm}; \quad A = 360\text{ mkg}.$$




**163.** Die Arbeit ist gleich dem Energiezuwachs des Wassers.

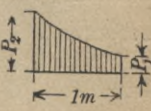
Hier ist $\quad f = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4\text{ m}^2,$

$$A = 3f(5 + \tfrac{3}{2}) = 1{,}2 \cdot 6{,}5 = 7{,}8\text{ m}^4,$$

$$A = 7800\text{ mkg}.$$

**164.** Die Arbeit ist gleich dem Energiezuwachs des Wassers.

$$A = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2^2}{2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 1^2}{2} = 1\text{ m}^4; A = 1000\text{ mkg}.$$




Bei Beginn der Arbeit ist der Druck $P$ gleich dem Seitendrucke $P_1 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 500$ kg. Am Ende ist:

$$P_2 = 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{2}{2} = 2000\text{ kg}.$$

Werden die Kräfte $P$ für verschiedene Wegpunkte bestimmt und dieselben in diesen Punkten senkrecht zum Wege aufgetragen, so ergibt sich das Arbeitsdiagramm, welches von einer Parabel begrenzt wird. Der Inhalt der Fläche ist gleich der Arbeit.

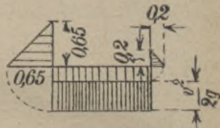
$$A = 1\,P_1 + \tfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot (P_2 - P_1) = 500 + \tfrac{1}{3} \cdot 1\,500 = 1\,000 \text{ mkg.}$$

**165.** Die Gewichtseinheit des ausfließenden Wassers hat eine Druckenergie $A = 0{,}8 \text{ m} \cdot 1 \text{ kg} = 0{,}8 \text{ mkg}$. Beim Ausfließen wird die Druckenergie in kinetische Energie umgewandelt.

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}8; \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot 0{,}8 = 16 \text{ m}^2/\text{sec}^2; \quad v = \sqrt{16} = 4 \text{ m/sec.}$$

Allgemein ist $\dfrac{v^2}{2g} = h$; $v = \sqrt{2g \cdot h}$.

**166.** Hier ist die kinetische Energie gleich der Differenz der Druckenergien.

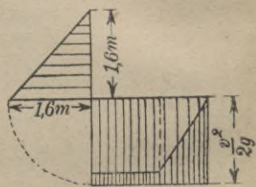



$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}65 - 0{,}2; \quad v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}45};$$

$$v = 3 \text{ m/sec.}$$

In dem Verbindungsrohr wirkt also ein Druck von 0,2 m. Dieser Druck des fließenden Wassers ist der hydraulische Druck.

**167.** Hier ist die Geschwindigkeit gleich $\frac{1}{4}$ der Ausflußgeschwindigkeit, mithin der verbrauchte Druck:

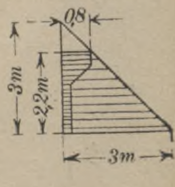



$$p = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\left(\frac{v}{4}\right)^2}{2g}; \; p = \frac{1}{16} \cdot 1{,}6 = 0{,}1 \text{ m.}$$

Es bleibt $h_1 = 1{,}5$ m.

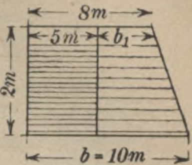
**168.** Hier wird $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8} = \sqrt{16} = 4$ m/sec.

Da sich die Rohrweiten wie $1:2$, die Rohrquerschnitte wie $1:4$ verhalten, ist die Geschwindigkeit im erweiterten Rohre $v_1 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ m/sec. Hierzu wird eine Druckhöhe $h_1 = \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{1}{16 \cdot 20} = 0{,}003$ m verbraucht.




Im wagerechten Rohr wirkt demnach noch ein Druck von 2,997 m.

**169.** Auf den unteren Wasserspiegel wirkt der äußere Luftdruck $b = 10$ m Wassersäule, der im Rohr um 2 m abnimmt, also am oberen Wasserspiegel noch 8 m beträgt. Diesem entgegen wirkt der Druck $b_1$ der eingeschlossenen Luft, mithin bleibt




$$8 - b_1 = \frac{v^2}{2g} = 5\text{ m},$$

$$b_1 = 3 \text{ m Wassersäule},$$

$$b_1 = 0{,}3 \text{ Atm.}$$

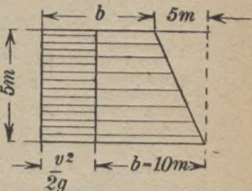
**170.** Zum Ausfluß ist eine Druckhöhe $h_1 = \frac{5^2}{20} = 1{,}25$ m erforderlich. Außerdem muß das Wasser noch um 2,75 m gehoben und der auf dem Ausflußquerschnitt wirkende Luftdruck $b$ überwunden werden. Die Druckhöhe im Behälter ist demnach:

$$h = 1{,}25 + 2{,}75 + 10,$$

$$h = 14 \text{ m Wassersäule},$$

$$h = 1{,}4 \text{ Atm.}$$

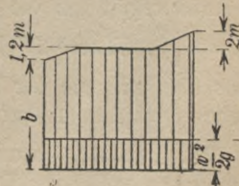
**171.** Der auf den unteren Wasserspiegel wirkende Luftdruck $b = 10$ m Wassersäule wirkt im Rohr aufwärts und nimmt bis zum Wasserspiegel um 5 m ab. Auf den oberen Wasserspiegel wirkt ebenfalls der Luftdruck $b$ abwärts. Es bleibt dann noch ein abwärts gerichteter Druck $h = b - 5 = 5$ m.




Demnach ist $\frac{v^2}{2g} = 5$ m; $v = 10$ m/sec.

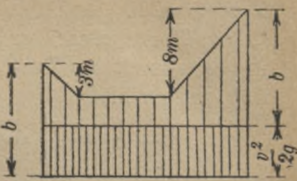
**172.** Auf den unteren Wasserspiegel wirkt der Luftdruck $b = 10$ m, der im unteren Rohre aufwärts wirkt und bis zum wagerechten Rohre um 2 m fällt, also noch 8 m = 0,8 Atm. beträgt.

Im Behälterboden wirkt also aufwärts der Druck von 8 m, der bis zum oberen Wasserspiegel auf $8 - 1{,}2 = 6{,}8$ m fällt. Diesem Druck wirkt der Luftdruck von 10 m entgegen. Es bleibt also ein abwärts gerichteter Druck von $10 - 6{,}8 = 3{,}2$ m, welcher in kinetische Energie verwandelt wird.




$$\frac{v^2}{2g} = 3{,}2; \qquad v = 8 \text{ m/sec.}$$

**173.** Der Druck im wagerechten Rohre wird gleich Null und die Ausflußgeschwindigkeit $v = 15$ m/sec.




**174.** $v = 10$ m/sec;

$p = 2$ m $= 0{,}2$ Atm.

**175.** $v = 6$ m/sec;

$p = 7{,}6$ m $= 0{,}76$ Atm.

**176.** Das Wasser im Rohre wird beschleunigt, seine Geschwindigkeit ist vorläufig eine wachsende. Das aus dem Behälter in das Rohr pro Sekunde fließende Wasser hat die Energie $A = f \cdot v \cdot h$, welche verwendet wird, um 1. Die Masse $\frac{f \cdot l}{g}$ um $p$ zu beschleunigen,

2. sich selbst, also der Masse $\frac{f \cdot v}{g}$ die Geschwindigkeit $v$ zu geben.

Also ist $$A = f \cdot v \cdot h = \frac{f \cdot l}{g} v \cdot p + \frac{1}{2} \frac{f \cdot v}{g} v^2,$$

hieraus ergibt sich $p = \frac{2g \cdot h - v^2}{2l}$.

Da die Geschwindigkeit $v$ wächst, nimmt die Beschleunigung ab und wird gleich Null, wenn $v^2 = 2g \cdot h$ ist. Dann tritt der Beharrungszustand ein, vorausgesetzt, daß die Druckhöhe $h$ dieselbe bleibt.

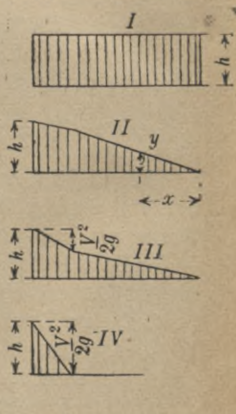



Diagramm *I* ist das Druckdiagramm bei geschlossenem Rohr. In *II* ist die Trägheit der Wassermassen im Rohr pro Flächeneinheit des Querschnittes bei Beginn der Bewegung dargestellt. In der Entfernung $x$ von der Mündung ist $I = \frac{p_0 \cdot x}{g}$, am Behälter $h = \frac{p_0 \cdot l}{g}$. Hieraus ergibt sich die Anfangsbeschleunigung $p_0 = \frac{h \cdot g}{l}$, *III* und *IV* stellen die Geschwindigkeitshöhe während der Beschleunigung und im Beharrungszustande dar.

**177.** Hier wird vorausgesetzt, daß die Rohrleitung bei Beginn der Bewegung gefüllt ist. Der Luftdruck $b$ auf den unteren Wasserspiegel hat dem Druck im Rohr das Gleichgewicht zu halten und dem Wasser die Beschleunigung $p_0$ zu geben,

$$b \cdot f = 5f + \frac{12{,}5f}{g} p_0; \qquad 10 = 5 + \frac{12{,}5}{10} \cdot p_0,$$

$$p_0 = \frac{(10-5) \cdot 10}{12{,}5} = 4 \text{ m/sec}^2.$$

Die Beschleunigung des Wassers im Rohr beträgt 4 m, dann beträgt die Kolbenbeschleunigung $p = \frac{f}{F} \cdot 4 = 1 \text{ m/sec}^2$.

178. Der Luftdruck im unteren Behälter hat dem Wasserdruck im Rohre und dem Luftdruck $b$ auf dem oberen Wasserspiegel das Gleichgewicht zu halten; außerdem hat er noch das Wasser im Rohre zu beschleunigen.

$$b_1 \cdot f = 20f + bf + \frac{25 \cdot f}{g} \cdot p_0,$$

$$b_1 = 20 + 10 + 1{,}25,$$

$$b_1 = 31{,}25 \text{ m Wassersäule},$$

$$b_1 = 3{,}125 \text{ Atm.}$$

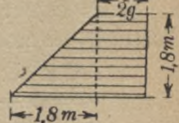
Das Wasser wird beschleunigt, bis es die Geschwindigkeit $v$ erreicht hat.

$$\frac{v^2}{2g} = b_1 - (20 + b) = 1{,}25 \text{ m}; \; v = 5 \text{ m/sec.}$$

179. Die Energie der Gewichtseinheit am Ausfluß ist

$$A = 1{,}8 + \frac{4^2}{20} = 2{,}6 \text{ mkg.}$$

Das ausfließende Wasser hat die absolute Geschwindigkeit $v - v_0$, also die Energie pro Gewichtseinheit




$$A_1 = \frac{(v - v_0)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{v_0}{2g} - \frac{2v\,v_0}{2g};$$

$$A_1 = 2{,}6 - \frac{v\,v_0}{g};$$

mithin gibt das Kilogramm Wasser an den Behälter die Energie:

$$A - A_1 = \frac{v \cdot v_0}{g} = \frac{6 \cdot 4}{10} = 2{,}4 \text{ mkg ab.}$$

Da pro Sekunde die Menge $f \cdot v$ ausfließt, so ist die ganze abgegebene Energie pro Sekunde

$$A = 2{,}4 \cdot f \cdot v = 2{,}4 \cdot 0{,}05 \cdot 60 = 7{,}2 \text{ mkg/sec}.$$

Das Wasser übt auf die Behälterwand einen Druck $P$ aus

$$P v_0 = 7{,}2 \text{ mkg}; \qquad P = \frac{7{,}2}{4} = 1{,}8 \text{ kg}.$$

Allgemein ist: $P \cdot v_0 = f \cdot v \dfrac{v \cdot v_0}{g}$; $P = \dfrac{f \cdot v^2}{g} = 2 f \cdot h.$

180. Hier ist wieder $A = \dfrac{v^2}{2g} + \dfrac{v_0}{2g} = 2{,}6$ mkg.

Das Wasser hat die absolute Ausflußgeschwindigkeit $v_0 + v$, mithin ist die Energie pro Gewichtseinheit:

$A_1 = \dfrac{(v_0 + v)^2}{2g} = \dfrac{v_0}{2g} + \dfrac{v^2}{2g} + \dfrac{2 v_0 v}{2g}$; mithin wächst die Energie um

$$A_1 - A = \frac{v_0 \cdot v}{g}.$$

Die Leistung pro Sekunde ist:

$$\begin{aligned} f \cdot v \cdot (A_1 - A) &= f \cdot \frac{v^2}{g} \cdot v_0, \\ &= 0{,}05 \cdot 3{,}6 \cdot 40, \\ &= 7{,}2 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

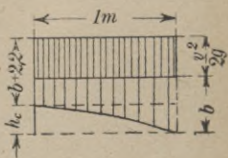
In diesem Falle muß eine äußere Kraft $P = 1{,}8$ kg auf den Behälter wirken.

Bei Aufgabe 179 gibt das Wasser Energie an den Behälter ab (Kraftmaschine); bei Aufgabe 180 wird dem Wasser Energie gegeben (Pumpe).

181. a) Die Aufgabe ist wie 180 zu lösen. Es wird $L = 40$ mkg/sec.

b) Es ist der Zentrifugaldruck des Wassers gegen die Rohre und hiernach die Arbeit zu bestimmen.

182. An der Drehachse wirkt im Rohr ein Druck $p_1 = b + 2{,}2$ m, der bis zum Rohrende auf $p_2 = b + 2{,}2 + h_c$ wächst. Hier wirkt ihm $b$ entgegen, also bleibt




$$p_2 - b = 2{,}2 + h_c = \frac{v^2}{2g}.$$

Es ist $$h_c = \frac{r^2 w^2}{2g} = \frac{1 \cdot 100}{20} = 5 \text{ m};$$

$$\frac{v^2}{2g} = 7{,}2; \quad v = 12 \text{ m/sec}\cdot$$

**183.** Das Wasser hat eine Ausflußgeschwindigkeit von 12 m, eine Drehgeschwindigkeit von 10 m, also eine Energie $\frac{12^2 + 10^2}{20} = 12{,}2$ mkg pro Gewichtseinheit. Beim Eintritt in das Rohr hat die Gewichtseinheit eine Energie von 2,2 mkg, dem Wasser muß demnach noch eine Energie von 10 mkg gegeben werden.

In der Sekunde fließen $q = 120 \cdot 0{,}3 = 36$ kg Wasser aus, mithin wird
$$A = 36 \cdot 10 = 360 \text{ mkg/sec}.$$

$$L = Pv = 360.$$

$$P = \frac{360}{v} = \frac{360}{5} = 72 \text{ kg}.$$

Nach Aufgabe 66: $P = 2\,M \cdot v \cdot w = 2 \cdot \frac{0{,}3 \cdot 10}{10} \cdot 12{,}10; P = 72 \text{ kg}.$

**184.** Das Wassergewicht im Krümmer kann zu 50 kg angenommen werden. Dann ist die ganze Zentrifugalkraft des Wassers:

$$Z_1 = \frac{M \cdot v^2}{r} = \frac{5 \cdot 9}{1} = 45 \text{ kg}.$$

Die Zentrifugalkräfte der einzelnen zwischen zwei Querschnitten liegenden Wasserteilchen bilden, nach Richtung und Größe aneinander getragen, einen Viertelkreis, dessen Umfang gleich $Z_1$ ist. Die Resultante $Z$ dieser Kräfte ist gleich der Sehne dieses Viertelkreises

$$Z = \frac{2 Z_1}{\pi} \sqrt{2}; \quad Z = \frac{90}{\pi} \sqrt{2} = 40 \text{ kg}.$$

Nach dem Schwerpunktsatze ist

$$Z = M \cdot r_1 \cdot w^2; \quad r_1 = \frac{r \cdot s}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}; \quad Z = \frac{5 \cdot 2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{3}{1}\right)^2,$$

$$Z = \frac{90}{\pi} \sqrt{2} = 40 \text{ kg}.$$

Diese Kraft wirkt in der Winkelhalbierungslinie des Krümmers auf die Flanschenschrauben.

**185.** Auf das Wasser im wagerechten Rohr wirkt die Zentrifugalkraft

$$Z = M \cdot r \cdot w^2 = f \frac{1}{g} \cdot 0{,}5 \cdot 400 = f \cdot h,$$

wenn $f$ der Rohrquerschnitt und $h$ die Steighöhe ist.

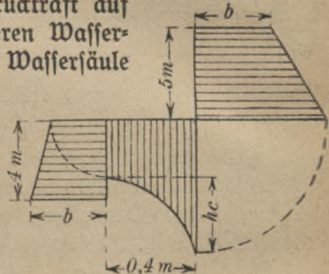
$$h = \tfrac{1}{10} \cdot 0{,}5 \cdot 400 = 20 \text{ m}.$$

Die Zentrifugalkraft der Wassermasse im wagerechten Rohre pflanzt sich als Druck auf das stehende Rohr fort und hält der Wassersäule $h$ das Gleichgewicht.

**186.** Hier muß vorausgesetzt werden, daß im unteren Rohrende ein Ventil sitzt, das ein Abwärtsfließen des Wassers verhindert. Vor der Drehung muß das Rohr bis zur Höhe $DE$ gefüllt werden. Bei der Drehung entsteht im wagerechten Rohr ein Zentrifugaldruck:

$$h_c = \frac{r^2 w^2}{2g} = \frac{0{,}16 \cdot 15^2 \cdot 5}{20} = 9 \text{ m}.$$

Im unteren Rohr steht das Wasser 4 m hoch, mithin steigt es im anderen Rohr über die Höhe $DE$ noch $h = 9 - 4 = 5$ m.




Die Zentrifugalkraft wirkt als Druckkraft auf das obere Rohr. Der auf den unteren Wasserspiegel wirkende Luftdruck $b$ hält der Wassersäule von 4 m das Gleichgewicht. Am linken Ende des wagerechten Rohres wirkt dann noch ein Druck von $b - 4$ m. Hinzu kommt die Druckhöhe $h_c$ der Zentrifugalkraft. Diese Drucke müssen zusammen der Druckhöhe $h$ und dem auf das obere Ende wirkenden Luftdruck $b$ das Gleichgewicht halten:

$$b - 4 + h_c = h + b; \quad h_c = h + 4 = 9 \text{ m}.$$

Wird das Rohr mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{10\sqrt{5}}{\text{sec}}$ gedreht, so ist $h_c = \frac{0{,}16 \cdot 10^2 \cdot 5}{20} = 4$ m. Dann wird $h = 0$.

Das Wasser steigt nicht über die Höhe $DE$.

**187.** Wenn in der Sekunde $Q$ m³ Wasser über die Schaufel fließt, so ist der Strahlquerschnitt $f = \frac{Q}{v_1}$.

Das auf die Schaufel wirkende Wassergewicht: $G = 2\,r\alpha f = 2r\alpha\frac{Q}{v_1}$ und die Masse: $M = 2r\alpha\frac{Q}{v_1 g}$. Daher ist die Summe der radialwirkenden Zentrifugalkräfte aller Wasserteilchen:

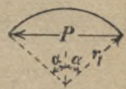
$$M \cdot \frac{v_1^2}{r} = 2\,\alpha\frac{Q}{g} \cdot v_1.$$

Diese Zentrifugalkräfte bilden einen Kreisbogen, dessen Radius

$$r_1 = \frac{2 \cdot \alpha\frac{Q}{g}v_1}{2\alpha} = \frac{Q}{g}v_1 \text{ ist.}$$

Die Sehne des Bogens ist der wagerechte Druck

$$P = 2r_1 \sin\alpha = 2\frac{Q}{g}v_1 \sin\alpha$$



und seine Leistung:

$$L = P \cdot v = 2 \cdot \frac{Q}{g}v_1 \cdot v \cdot \sin\alpha; \quad L = 2\frac{Q}{g}v^2.$$

In diesem Falle ist also:

$$L = 2 \cdot \tfrac{1000}{10} \cdot 2{,}75^2; \quad L = 1512 \text{ mkg/sec}; \quad N = 20 \text{ PS}.$$

**188.** Der Strahlquerschnitt ist: $f = \frac{0{,}01}{10} = 0{,}001 \text{ m}^2$. Haben die Schaufeln die Form eines Halbkreises, so ist die auf die Schaufeln drückende Wassermasse: $M = \frac{\pi \cdot r \cdot f}{g} = \pi \cdot r \cdot 0{,}0001$ und die Summe der Zentrifugalkräfte

$$\frac{M v_1^2}{r} = \pi \cdot 0{,}0001 \cdot 10^2 \text{t} = \pi \cdot 0{,}01\,\text{t} = \pi \cdot 10 \text{ kg}.$$

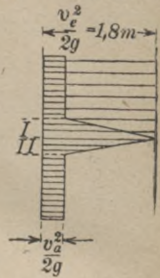
Diese Kräfte bilden einen Halbkreis, dessen Durchmesser

$$P = \frac{\pi \cdot 10}{\frac{\pi}{2}} = 20 \text{ kg},$$

der Druck auf die Schaufel ist. Daher ist die Leistung:

$$L = P \cdot v = 20 \cdot 8 = 160 \text{ mkg/sec}; \quad N = 2{,}1 \text{ PS}.$$

**189.** Zur Eintrittsgeschwindigkeit $v_e$ ist eine Druckhöhe $h_1 = \frac{6^2}{2g} = 1{,}8$ m, zur Austrittsgeschwindigkeit $h_2 = \frac{2{,}3^2}{2g} = 0{,}265$ m erforderlich.




Beim Eintritt hat die Gewichtseinheit die Energie: $A_1 = 1{,}8$ mkg, beim Austritt $A_2 = 0{,}265$ mkg. Die Gewichtseinheit gibt also ab: $A_1 - A_2 = 1{,}535$ mkg. Die Leistung der Turbine ist:

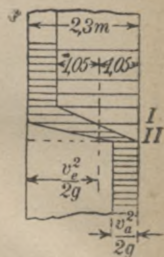
$$L = 1200 \cdot 1{,}535 = 1842 \text{ mkg/sec},$$

$$N = \frac{1842}{75} \sim 24 \text{ PS}.$$

In der Figur ist *I* der Leitapparat und *II* das Laufrad.

**190.** Die absolute Austrittsgeschwindigkeit ist:

$$v_a = 10 - 8 = 2 \text{ m/sec}.$$




Daher ist die Leistung:

$$L = 15 \cdot \frac{10^2 - 2^2}{20}; \quad L = 72 \text{ mkg/sec}.$$

**191.** Die Eintrittsenergie der Gewichtseinheit ist:

$$A_1 = \frac{5^2}{2g} + 1{,}05 = 2{,}3 \text{ mkg}.$$

Die Austrittsenergie $A_2 = \frac{2^2}{2g} = 0{,}2$ mkg, also bleibt in der Turbine

$$2{,}3 - 0{,}2 = 2{,}1 \text{ mkg}.$$

$$L = 1200 \cdot 2{,}1 = 2520 \text{ mkg/sec}.$$

$$N = \frac{2520}{75} = 33{,}6 \text{ PS}.$$

**192.** Hier wird:

$$h_c = \frac{r^2 w^2}{2g} = \frac{0{,}16 \cdot 1600}{20} = 12{,}8 \text{ m}.$$

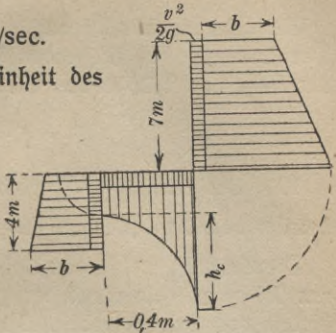
Da die Förderhöhe gleich 11 m ist, wird

$$\frac{v^2}{2g} = 12{,}8 - 11 = 1{,}8 \text{ m}.$$

$$v = 6 \text{ m/sec}.$$

Neben dieser Ausflußgeschwindigkeit hat das Wasser noch eine Drehgeschwindigkeit:

$$v_1 = r \cdot w = 0{,}4 \cdot 40 = 16 \text{ m/sec.}$$




Die kinetische Energie der Gewichtseinheit des ausfließenden Wassers ist also:

$$A_1 = \frac{6^2 + 16^2}{20} = 14{,}6 \text{ mkg.}$$

Die potentielle Energie oder Hebearbeit ist: $A_2 = 1 \cdot 11 = 11$ mkg. Die Kraft $P$ muß also leisten:

$$L = f(11 + 14{,}6) = 25{,}6 \cdot f \text{ mkg,}$$

wenn $f$ der Rohrquerschnitt ist.

**193.** Das Wasser fließt durch das Rohr mit der Geschwindigkeit $v$, die sich aus der Gleichung ergibt:

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{r^2 w^2}{2g}; \quad \frac{v^2}{2g} = 2{,}25 + \frac{1 \cdot 36}{20}; \quad v = 9 \text{ m/sec.}$$

Aus dem Rohr fließt das Wasser mit dieser Geschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit $r \cdot w = 6$ m/sec. Die Gewichtseinheit hat also noch die Energie: $A_1 = \frac{(9-6)^2}{2g} = 0{,}45$ mkg.

Demnach gibt die Gewichtseinheit an die Spindel ab:

$$A = 2{,}25 - 0{,}45 = 1{,}8 \text{ mkg.}$$

Hiernach wäre der Wirkungsgrad: $\eta = \frac{1{,}8}{2{,}25} = 0{,}8$.

Hier ist zu beachten, daß die durch Stoß und Reibung entstehenden Verluste nicht berücksichtigt sind.

**194.** Hier wird $v = 8$ m/sec; $A = 1{,}6$ mkg.

**195.** Die Energie des fließenden Wassers wird zum Teil in Ruheenergie umgewandelt, es wird um 0,45 m gehoben, der Rest bleibt als Bewegungsenergie.

$$\frac{v_0}{2g} = 0{,}45 + \frac{v^2}{2g},$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0}{2g} - 0{,}45 = 0{,}8 \text{ m,}$$

$$v = 4 \text{ m/sec.}$$

**196.** Hier ist $\frac{v_0}{2g} = 1{,}25\,\mathrm{m}$; $\quad v_0 = 5\,\mathrm{m/sec}$.

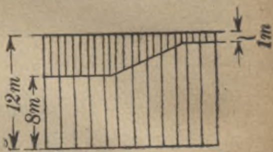
Nachdem das Wasser auf diese Höhe gestiegen ist, bleibt es stehen. Der Druck $P$ des fließenden Wassers auf die Rohrmündung hält der Höhe von 1,25 m das Gleichgewicht.

$$P = f \cdot 1{,}25 = f\,\frac{v_0}{2g}.$$

**197.** Die relative Geschwindigkeit des Wassers gegen das Rohr beträgt auch 2 m. Deshalb steigt das Wasser um $\frac{v_0}{2g} = \frac{4}{20} = 0{,}2\,\mathrm{m}$.

Die Kraft $P$, welche das Rohr bewegt, hat die Wassermasse $f \cdot 0{,}2$ um 0,1 m zu heben und der ganzen Masse im Rohr die Geschwindigkeit von 2 m zu geben. Ist das Wasser um 0,2 m gestiegen, so hat die Kraft $P$ nur den Gegendruck $f \cdot \frac{v_0}{2g} = f \cdot 0{,}2\,\mathrm{kg}$ zu überwinden.

**198.** Es ist $\frac{v_2^2}{2g} = h_1 - h_2$; $v_1 = \frac{F}{f} \cdot v_2$. Nun darf höchstens sein $\frac{v_1^2}{2g} = b + h_1$. Ist $h_1 = 2\,\mathrm{m}$, $h_2 = 1\,\mathrm{m}$, $F = 2f$, so wird




$$\frac{v_2^2}{2g} = 1\,\mathrm{m}; \quad \frac{v_1^2}{2g} = 4\,\mathrm{m}.$$

Demnach behält das Wasser im engen Rohr noch einen absoluten Druck $p = 12 - 4 = 8\,\mathrm{m}$.

**Natur und Werkstoff.** Grundlehren der Physik, Chemie, Werk- und Betriebsstoffkunde. Für Fachschulen, insbesondere Eisenbahnschulen und für den Selbstunterricht. Von Prof. *F. Titz,* Direktor der höheren Maschinenbauschule in Breslau. Mit 57 Abb. u. 2 Skizzentafeln. [IV u. 119 S.] Gr. 8. Kart. M. 1.75

„Der Wert des Buches für den Unterricht an Fachschulen liegt vorwiegend in seinem engen Zusammenhang mit der Technik und Praxis. Es ist einfach und klar geschrieben, regt Lehrer und Schüler zu selbständigem Arbeiten an und wird durch einfache gute Abbildungen unterstützt." **(Zeitschr. f. d. Berg-, Hütten- u. Salinenwesen im Preuß. Staate.)**

**Einführung in die technische Wärmelehre** (Thermodynamik). Von Geh. Bergrat *R. Vater,* weil. Prof. an d. Techn. Hochschule Berlin. 3., erw. Aufl. bearbeitet von Dr. *F. Schmidt,* Privatdozent an der Techn. Hochschule Berlin. Mit 46 Abb. i. T. [122 S.] 8. 1923. (ANuG Bd. 516.) Geb. M. 1.60

**Praktische Thermodynamik.** Aufgaben und Beispiele zur technischen Wärmelehre. Von Geh. Bergrat *R. Vater,* weil. Prof. an der Technischen Hochschule Berlin. 2. Aufl. Hrsg. von Dr. *F. Schmidt,* Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 40 Abb. im Text und 3 Tafeln. [IV u. 96 S.] 8. 1923. (ANuG Bd. 596.) Geb. M. 1.60

**Energiewirtschaft.** Von Dr.-Ing. *W. Pauer,* Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden. [45 S.] gr. 8. 1924. (Teubn. Handbuch der Staats- und Wirtschaftskunde Abt. II., Bd. II, 3. Heft.) Kart. M. 1.80

Infolge des Kriegsausganges für Deutschland hat sich aus der Frage der Energiewirtschaft in kurzer Zeit ein wissenschaftliches Sondergebiet entwickelt, das für viele Zweige der Technik und Wirtschaft von Bedeutung ist. Hier soll besonders dem Volkswirt die Kenntnis der hauptsächlichsten technischen Grundlagen vermittelt werden, die für die Beurteilung der mit der Gewinnung und Verwertung von Brennstoffen und deren Ersatzstoffen verknüpften wirtschaftlichen Fragen maßgebend sind.

**Unsere Kohlen.** Eine Einführung in die Geologie der Kohlen unter Berücksichtigung ihrer Gewinnung, Verwendung und wirtschaftl. Bedeutung. Von Bergassessor Dr. *P. Kukuk,* Privatdozent a. d. Univ. Münster. 3. Aufl. Mit 56 Abb. im Text und 3 Tafeln. [VIII u. 118 S.] 8. 1924. (ANuG Bd. 396.) Geb. M. 1.60

„Dies ist eine vortreffliche Darstellung alles Wissenswerten über die Kohlen mit Einschluß des Torfes. Auch Abbau und technische Verwertung sind dabei berücksichtigt. Das Büchlein kann jedem zur Lektüre empfohlen werden; selbst der Fachmann wird manches darin finden, was in den besten Lehrbüchern der Geologie nicht enthalten ist." **(Geologische Rundschau.)**

**Maschinenbau.** Von Ing. *O. Stolzenberg,* Direktor der Gewerbeschule u. der gewerbl. Fach- u. Berufsschulen zu Charlottenburg. 3 Bde. Bd. I: Werkstoffe u. ihre Bearbeitung auf warmem Wege. Mit 225 Abb. i. Text. [IV u. 177 S.] gr. 8. 1920. Geb. M. 4.—. Bd. II: Arbeitsverfahren. Mit 750 Abb. im Text. [IV u. 315 S.] gr. 8. 1921. Geb. M. 7.—. Bd. III: Methodik der Fachkunde u. Fachrechnen. Mit 30 Abb. im Text. [IV u. 99 S.] gr. 8. 1921. Kart. M. 2.40

„Das Bestreben, die ursächlichen Zusammenhänge in anschaulicher Art bei allen behandelten Hauptstücken klar hervorzukehren, bildet ein wesentliches Merkmal der Schrift. Zahlreiche Abbildungen unterstützen diese Absicht in bemerkenswerter Weise. Dem Buch ist eine weite Verbreitung zu wünschen, um die darin enthaltenen Früchte erfolgreicher Arbeit gleichsam als „Norm" dem Unterricht in den Fachgewerbe- und Werkschulen zugrunde zu legen."
**(Stahl und Eisen.)**

**Teubners technische Leitfäden.** Für Studierende an höh. technischen Lehranstalten. (Prospekt vom Verlag erhältlich.)

**Lehr- und Aufgabenbuch der Physik** für Maschinenbau und Gewerbeschulen sowie für verw. techn. Lehranstalten und zum Selbstunterricht von Prof. Dr. *G. Wiegner,* Oberstudienrat a. d. städt. Gewerbe- u. Maschinenbauschule in Leipzig und Regierungsbaumeister Dipl.-Ing. Prof. *P. Stephan,* Oberlehrer a. d. staatl. vereinigt. Maschinenbauschulen in Altona. In 3 Teilen. Mit zahlr. Fig. i. T. u. ausgeführten Musterbeispielen. (Teubners Unterrichtsbücher für maschinen-technische Lehranstalten. Bd. 1, 2, 3.)

I. Teil. Allgemeine Eigenschaften der Körper, Mechanik. 3., verb. Aufl. Mit 175 Fig. [IV u. 299 S.] gr. 8. 1923. Kart. M. 4.20 II. Teil: Lehre von der Wärme. Lehre vom Licht (Optik). Wellenlehre. 2., verb. Aufl. Mit 132 Fig. [IV u. 180 S.] gr. 8. 1921. Kart. M. 3.40 III. Teil. Elektrizität (einschl. Magnetismus). Einführung in die Elektrotechnik. 2., verb. u. verm. Aufl. Mit 233 Fig. [IV u. 210 S.] gr. 8. 1921. Kart. M. 4.—

**Grundriß der Physik.** Von Dr. *K. Hahn,* Direktor der Oberrealschule a. d. Uhlenhorst, Hamburg. I. Teil: Für Realschulen, Lyzeen, Mittelschulen und die Mittelstufe der Vollanstalten. 2. Aufl. Mit 231 Fig. [VI u. 184 S.] gr. 8. 1924. Kart. M. 3.—. II. Teil: Für die Oberstufe höherer Lehranstalten und für Fachschulen. 2. Aufl. Mit 336 Fig. [VIII u. 300 S.] gr. 8. 1924. Geb. M. 5.—

Der Grundriß der Physik entwickelt in „knappster Form“ und in „streng logischem Aufbau“ die physikalischen Gesetze und Theorien und führt bis zu den „neuesten Ergebnissen der Forschung“, um so „Verständnis für Wissen und Arbeitsmethode der exakten Wissenschaft“ zu wecken

**Mathematische Physik.** Ausgewählte Abschnitte und Aufgaben aus der theoretischen Physik. Für höh. Lehranstalten u. Fachschulen u. zum Selbstunterricht für Studierende. Von Dr. *K. Hahn,* Direktor d. Oberrealschule auf der Uhlenhorst, Hamburg. Mit 46 Fig. [IV u. 163 S.] gr. 8. 1924. Kart. M. 5.40

Das Buch will der verbindenden Behandlung der beiden Disziplinen dienen, durch die einerseits die Anwendung der Mathematik in ihrer Bedeutung so herausgestellt und veranschaulicht werden kann, wie es auf keinem andern Gebiet möglich ist, durch die andererseits die neuen, die Gebiete der Physik umfassenden und deren innere Zusammenhänge aufzeigenden Theorien nun dem Verständnis zugänglich gemacht werden können.

**Physikalisches Wörterbuch.** Von Dr. *G. Berndt,* Prof. an der Techn. Hochschule Berlin. Mit 81 Fig. im Text. [IV u. 200 S.] 8. 1920. (Teubners kleine Fachwörterb., Bd. 5.) Geb. M. 3.60

Will schnell und treffend, ohne größere Vorkenntnisse vorauszusetzen, über alle wichtigeren physikalischen Erscheinungen und Begriffe unterrichten. Besonders berücksichtigt sind die Anwendungen der Physik im täglichen Leben und in der Technik.

**Chemisches Wörterbuch.** Von Dr. *H. Remy,* Prof. an der Universität Hamburg. Mit 15 Abb. i. T. und 5 Tabellen im Anhang. [VIII u. 416 S.] 8. 1924. (Teubners kleine Fachwörterbücher. Bd. 10/11.) Geb. M. 8.60, auf holzfreiem Papier in Halbleinen M. 10.60

Unterrichtet in knapper, aber klarer Weise über alle wichtigen Begriffe und Stoffe der Chemie, die gebräuchlichsten Arbeitsverfahren und Apparate der chemischen Wissenschaft und Praxis sowie die hauptsächlichsten chemischen Produkte.

**Normschrift.** 1924. Kart. M. —.40. **Rundschrift.** 3. Aufl. 1924. Kart. M. —.60. **Steilschrift.** 2. Aufl. 1924. Kart. M. —.40. Lehr- und Übungshefte für Schul- und Selbstunterricht hrsg von Gewerbeschulrat Dr. *R. Schubert,* Leipzig.

**Verlag von G. B. Teubner in Leipzig und Berlin**

50-1