

SZKIC TEORJI
MOSTÓW ŁUKOWYCH

PODAŁ

Maksymilian Thullie,

dypl. inżynier i docent szk. politech. we Lwowie.

~~~~~  
Odbitka z Przeglądu Technicznego z trzema tablicami rysunków.  
~~~~~

WARSZAWA,
W Drukarni J. Sikorskiego, Warecka N. 6.

—
1882.

KD 624.6



II 32698

Дозволено Цензурою.
Варшава, 28 Июля 1882 года.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299771

K 975.61

Niniejszy krótki rys teorii mostów łukowych ułożyłem dla wykładów teorii mostów w lwowskiej szkole politechnicznej,—głównie więc chodziło mi w nim o treściwe zestawienie twierdzeń i metod, potrzebnych do obliczenia łuku w praktyce, a unikałem dochodzeń czysto teoretycznych, może bardzo zajmujących, lecz nie prowadzących wprost do obliczenia nateżeń, a na tej podstawie wymiarów łuku.

I. Wiadomości wstępne.

1. *Linie rdzenne.* Nazwijmy linią łączącą środki ciężkości wszystkich przekrojów łuku—*osią łuku* (Achse des Bogens) i przypuśćmy, że belkę łukową przecięliśmy prostopadłe do osi C_1C (Tabl. I, fig. 1) płaszczyzną AB i że R jest wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część łuku. Wypadkowa R nie będzie tu pionową, jak w belce prostej,—bo, w skutek odpowiednio urządzonych podpór, oddziaływania są ukośne, a belka działa na opory rozpięrająco, co jest główną cechą belek łukowych.

Wypadkową R rozkładamy na dwie składowe P i Q , z których pierwsza P działa w kierunku prostopadłym do przekroju, a więc równoległe do osi i nazywa się *siłą podłużną* (Axialkraft), a druga Q działa w kierunku prostopadłym do osi i nazywa się *siłą poprzeczną* (Transversalkraft). Te siły zewnętrzne muszą być w równowadze z siłami wewnętrznymi, działającymi w tym przekroju. Wszystkie te siły wewnętrzne możemy rozłożyć na siły prostopadłe do przekroju, t. j. *nateżenia normalne* (Normalspannungen) i siły działające w płaszczyźnie przekroju, t. j. *nateżenia ścinające* (Schubspannungen).

Umieścimy w punkcie C dwie siły równe sile P i działające wprost przeciwnie, a równoległe do osi. Przez to nie naruszamy równowagi systemu sił i otrzymamy:

1) siłę podłużną P przyczepioną w środku ciężkości przekroju C ,

2) parę sił czyli moment $M = Pc$,

3) siłę poprzeczną Q .

Siła podłużna P , rozkłada się jednostajnie na całym przekroju, więc nateżenie w skutek siły podłużnej: $N' = \frac{P}{F}$. . . 1), jeżeli F oznacza przekrój. To nateżenie jest tu ściskaniem, które oznaczamy znakiem $+$.

Chcąc oznaczyć nateżenie N'' , powstałe z działania momentu M , musielibyśmy uwzględnić także promień krzywizny osi $= r$. Jednak gdy promień krzywizny jest dość wielki, w stosunku do wysokości belki, — wtedy w przybliżeniu można użyć tych samych wzorów co dla belki prostej. Możemy więc napisać, nazwawszy N_v'' nateżenie we włóknie odległym o v od osi obojętnej, powstałe w skutek działania momentu:

$$N_v'' = \frac{Mv}{I} \dots \dots \dots 2)$$

jeżeli I oznacza moment bezwładności.

Nateżenie więc ogólne w odległości v od osi obojętnej będzie

$$N_v = N' + N_v'' = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{I} \dots \dots \dots 3).$$

Müller Breslau otrzymał po długim wywodzie na N_v dokładniejszą wartość:

$$N_v = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{I} + \frac{M}{rF} \dots \dots \dots 4).$$

Zważywszy jednak, że gdy r jest stosunkowo wielkie, to $\frac{M}{rF}$ jest bardzo małym, możemy przeto w praktyce wyraz ten opuścić, przez co otrzymamy równanie 3).

W przekroju AB nateżenie jest największe dla najbardziej oddalonych włókien i otrzymujemy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } v = e_1 \quad N_1 = \frac{P}{F} + \frac{Me_1}{I} \\ \text{a dla } v = -e_2 \quad N_2 = \frac{P}{F} - \frac{Me_2}{I} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Niech będzie $l=Fa^2$, to a będzie tak zwanym *promieniem bezwładności* (Trägheitsradius). Wstawmy tę wartość i wartość $M=Pc$ w równanie (5), a otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Pe_1}{Fa^2} \left(\frac{a^2}{e_1} + c \right) = \frac{Pe_1}{I} \left(\frac{a^2}{e_1} + c \right) \\ N_2 &= \frac{Pe_2}{Fa^2} \left(\frac{a^2}{e_2} - c \right) = \frac{Pe_2}{I} \left(\frac{a^2}{e_2} - c \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6).$$

Jeżeli w całym przekroju ma istnieć tylko rozciąganie lub tylko ściskanie, to N_1 i N_2 muszą mieć jednakowe znaki.

Jeżeli więc ma być tylko ściskanie, wtedy $P > 0$, więc

$$\frac{a^2}{e_1} + c > 0 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{e_2} - c > 0.$$

Nazwijmy $\frac{a^2}{e_1} = i_2$, $\frac{a^2}{e_2} = i_1$,

wtedy musi być $i_2 + c > 0$, $i_1 - c > 0$,

$$\text{więc } i_2 > c > -i_1 \dots \dots \dots (7)$$

i_1 i i_2 są ilościami pierwszego rzędu, czyli długościami, a mianowicie $i_1 = Cl_1$, $i_2 = Cl_2$, więc punkty I_1 i I_2 są odległe od osi o i_1 i i_2 .

Z równania (7) widzimy więc, że wypadkowa musi przecinać przekrój między punktami I_1 i I_2 , jeżeli cały przekrój ma być wystawiony na ciśnienie. Linia łącząca punkty I poszczególnych przekrojów nazywa się *linią rdzenną* (Kernlinie).

Powierzchnia zawarta między liniami rdzennymi nazywa się *rdzeniem* przekroju (Kern, Kernfläche).

Linia łącząca punkty przyczepienia siły wypadkowej nazywa się *linią ciśnienia* (Stützlinie). Powyższe twierdzenie możemy wyrazić także w następujący sposób:

Natężenia normalne w przekroju mają wszystkie ten sam znak, jeżeli linia ciśnienia nie wychodzi z rdzenia. Tu musimy zrobić uwagę, że linia ciśnienia różni się od wieloboku sznurowego tylko tem, że dla linii ciśnienia przekroje są prostopadłe do osi, a dla wieloboku sznurowego pionowe. Jednak jeżeli przekroje są dość bliskie, to w praktyce różnica między linją ciśnienia a wielobokiem sznurowym jest tak małą, że następnie będziemy uważać te dwie linie jako identyczne.

Jeżeli $P > 0$, wtedy w całym przekroju byłoby rozciąganie. Przy mostach i sklepieniach, gdy obciążenie jest tylko pionowe z góry na dół. P jest zawsze > 0 , a więc gdy linia ciśnienia nie wychodzi z rdzenia, w całym przekroju panuje ściskanie; jeżeli zaś linia ciśnienia wychodzi z rdzenia, to w tym przekroju nateżenia są i dodatnie i ujemne.

Nazwijmy M_2 moment sił zewnętrznych ze względu na punkt I_2 momentem rdzennym dolnym (unteres Kernmoment).

(8) $\left\{ \begin{array}{l} \text{to } M_2 = P(c + i_2), \text{ a odpowiednio będzie} \\ M_1 = P(c - i_1) \text{ moment rdzenny górny (oberes} \\ \text{Kernmoment).} \end{array} \right.$

Wtedy otrzymamy z równania (6)

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = \frac{Pe_1(i_2 + c)}{I} = \frac{M_2 e_1}{I} \\ N_2 = \frac{Pe_2(i_1 - c)}{I} = -\frac{M_1 e_1}{I} \end{array} \right\} \dots \dots (9),$$

a więc wzory takie same, jak dla belki prostej, jeżeli tylko zamiast momentów zwykłych wstawimy momenty rdzenne.

Dla przekroju prostokątnego (fig. 2), a więc i dla sklepienia, jest $I = \frac{1}{12} bh^3$, $F = bh$,

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = e_2 = \frac{h}{2}, \text{ więc } a^2 = \frac{I}{F} = \frac{1}{12} h^2, \\ \text{stąd } i_1 = \frac{a^2}{e_2} = \frac{1}{6} h \\ i_2 = \frac{a^2}{e_1} = \frac{1}{6} h \\ i_1 + i_2 = \frac{1}{3} h \dots \dots (10), \end{array} \right\} \dots \dots (11).$$

Widzimy więc, że w sklepieniu i wogóle w belce łukowej o przekroju prostokątnym, średnia trzecia część przekroju stanowi rdzeń, poza który nie powinna wychodzić linia ciśnienia, jeżeli w całej belce ma panować ściskanie.

Dla belek kratowych, których wysokość jest dość wielka, linie rdzenne popadają prawie w pasy.

2. *Sily zewnętrzne.* Niech będzie $A_1 O B_1$ linią ciśnienia dla danego obciążenia (fig. 3a). Wypadkowa wszystkich

sił zewnętrznych R przecina przekrój $K_1 K_2$ w punkcie a i jest styczną w punkcie a_1 , na pionowej przez O , do linii sznurowej, której odległością biegunową jest składowa pozioma H . Wypadkową R otrzymamy, składając oddziaływanie D z obciążeniem na długości $A'K'=C$, z czego wynika, że siły D , C i R przecinają się w jednym punkcie E . Moment sił zewnętrznych ze względu na punkt O jest równy momentowi wypadkowej R , albo jej składowych; możemy więc napisać: $M = Hr_1$, bo V przechodząc przez O nie daje żadnego momentu. Widzimy więc, że *odstęp pionowy, między osią a linią ciśnienia jest proporcjonalny do momentu sił zewnętrznych*, czyli innymi słowy: *oś łuku jest zamykającą linię ciśnienia*.

Jeżeli w odnośnym wieloboku sił poprowadzimy Oc równoległe do R (fig. 3b), a od równoległe do stycznej osi w punkcie O , wtedy:

$$Oc = R, \quad Od = P \text{ siła podłużna,}$$

$$cd = Q \text{ siła poprzeczna.}$$

Jeżeli więc znamy w łuku linię ciśnienia, to możemy oznaczyć wszystkie siły zewnętrzne. Zadaniem zatem naszym teraz będzie, wykreślić dla każdego danego obciążenia odpowiednią linię ciśnienia.

Na łuk AB (fig. 4) działa obciążenie dowolne i wywołuje oddziaływania A i B , które możemy rozłożyć na siły H, V, H' i V' . Mamy tu sześć niewiadomych, a mianowicie punkty A i B , na liniach ab i cd i cztery siły V, H, V' i H' .

Do oznaczenia tych niewiadomych mamy trzy równania:

1) Suma składowych pionowych $= 0$, więc $V + V' = \Sigma P$.

2) Suma składowych poziomych $= 0$, więc $H = H'$.

3) Suma momentów wszystkich sił zewnętrznych około jakiegobądź punktu $= 0$.

Dla oznaczenia sześciu niewiadomych mamy więc tylko trzy równania, brakuje nam jeszcze trzech równań, a do ich oznaczenia są dwa sposoby. Albo uciekamy się do prawideł sprężystości i badamy odkształcenie łuku, lub też budujemy łuk w ten sposób, aby trzem danym warunkom załość uczynił, urządzając *przeguby* (Gelenke, joints).

Przeguby, wprowadzone w użycie najprzód przez *Gerbera*, są to połączenia zawiasowe dwóch zupełnie odrębnych części, na które belka została podzieloną, albo właściwiej jeszcze możnaby powiedzieć, są to połączenia zawiasowe dwóch belek.

Jeżeli więc w któremkolwiek miejscu łuku urządzimy przegub, obie części mogą być tylko wtedy w równowadze, jeżeli w miejscu przegubu jest moment $= 0$, gdyż inaczej musiałaby się część jedna około osi przegubu obrócić. Stąd wynika, że linia ciśnienia musi przechodzić przez przegub. Urządziwszy więc n przegubów, otrzymujemy dla równowagi jeszcze n równań. A że, jak to przed tem udowodniliśmy, dla łuku brakują nam trzy równania, więc urządziwszy trzy przeguby w łuku, możemy siły zewnętrzne zupełnie dokładnie oznaczyć. W praktyce spotykamy łuki o trzech, o dwóch przegubach—i bez przegubu. Dla dwóch ostatnich konstrukcyj musimy się uciec do prawideł sprężystości, jak to już wyżej wspomnieliśmy.

3. *Odkształcenie łuku.* Niech będzie ACB (fig. 5) osią łuku, którego długość od pewnego punktu C nazwijmy $s=CD$, kąt zaś nachylenia stycznej w punkcie D do poziomu niech będzie φ . W skutek obciążenia, ilości φ i s zmieniają się o $\Delta\varphi$ i Δs . Nim je oznaczymy, określimy zależność ilości s i φ , a otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cos \varphi \\ dy &= -ds \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Przy odkształceniu (Deformation) zmieniają się te wszystkie długości,—gdy więc nazwalimy zmianę długości s przez Δs , to teraz nazwiemy zmianę długości ds przez Δds .

Różniczkując równanie (12) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta dx &= \Delta ds \cos \varphi - ds \Delta \varphi \sin \varphi \\ \Delta dy &= \Delta ds \sin \varphi - ds \Delta \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \right.$$

a wstawiwszy za $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$ wartość z (12) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta dx &= \frac{\Delta ds}{ds} dx + \Delta \varphi dy = d\Delta x \\ \Delta dy &= \frac{\Delta ds}{ds} dy - \Delta \varphi dx = d\Delta y \end{aligned} \right\} \dots \dots (13).$$

Całkujemy te równania:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \int \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int \Delta \varphi dy \\ \Delta y &= \int \frac{\Delta ds}{ds} dy - \int \Delta \varphi dx \end{aligned} \right\} \dots \dots (14).$$

Δds jest to zmiana długości nieskończenie małej cząstki łuku

ds , a iloczyn $\frac{\Delta ds}{ds}$ jest więc względną zmianą długości łuku, możemy zatem napisać:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{P}{EF} = -\frac{N'}{E} \dots \dots \dots (15).$$

Dajemy znak $-$, bo P oznaczając ciśnienie skraca łuk.

Dla wynalezienia $\Delta\varphi$ musimy oznaczyć działanie momentu M . W skutek działania momentu M zmienia się kąt $d\varphi$ o $\Delta d\varphi$ (fig. 6). Z tego wynika, że $D'L' = ds$ przedłuża się o Δds , a przedłużenie to możemy napisać analogicznie do równania (15):

$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{N_v''}{E}$, gdy N_v'' oznacza nateżenie w skutek działania momentu M , a wstawiwszy wartość za N_v'' z równania (2),

$$\Delta ds = -\frac{Mv}{EI} ds \dots \dots \dots (16)$$

Z figury widzimy, że $\Delta ds = v \Delta d\varphi$,

$$\text{więc } \Delta d\varphi = \frac{\Delta ds}{v}$$

$$\Delta d\varphi = -\frac{M}{EI} ds$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \dots \dots \dots (17).$$

Całkujemy teraz równania (15) i (17) i otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= - \int \frac{P}{EI} ds \\ \Delta \varphi &= - \int \frac{M}{EI} ds \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18).$$

Gdy kształt łuku jest dany, wtedy znana jest zależność między zmiennymi x, y, s i φ —i za pomocą powyższych równań możemy oznaczyć odkształcenie łuku.

II. Łuk bez przegubu.

4. *Oznaczenie trzech warunków.* Łuk bez przegubu (Bogenträger ohne Gelenke) jest to łuk, którego oba końce

są tak utwierdzone, że styczne podporowe się nie zmieniają. A że przytem obie opory są stałe, więc możemy napisać trzy następujące równania:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= 0 \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19).$$

Te trzy równania wystarczą nam do oznaczenia sił zewnętrznych, jak to udowodniliśmy wyżej.

Niech ACB (fig. 7) przedstawia nam linią ciśnienia, wtedy pierwsze równanie możemy ze względu na równanie (14) napisać:

$$\Delta x = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_A^B \Delta \varphi dy = 0,$$

albo całkując częściowo:

$$0 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx + (\Delta \varphi \cdot y)_A^B - \int_A^B y \frac{d\Delta \varphi}{ds} ds$$

y jest dla A i $B = 0$, więc drugi wyraz odpada i możemy napisać:

$$0 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx - \int_A^B y \frac{d\Delta \varphi}{ds} ds.$$

Wstawmy teraz wartości z równań (15) i (17), a otrzymamy.

$$0 = - \int_A^B \frac{P}{EF} dx - \int_A^B \frac{My}{EI} ds \dots \dots (20).$$

E jest liczbą stałą, a dla przekroju stałego I możemy także wyłączyć przed znak i napisać:

$$\int_A^B My ds - \frac{I}{F} \int_A^B P dx = 0 \dots \dots (21).$$

Dla łuków płaskich, gdy φ jest małe a r wielkie, siła podłużna P jest bardzo mała, drugi wyraz daje więc stosunkowo tak małe wartości, że w przybliżeniu napisać możemy.

$$\int_A^B My ds = 0 \dots \dots (22).$$

W ten sam sposób postępując, otrzymamy z drugiego równania (19):

$$\int_A^B M x ds = 0 \dots \dots (23).$$

Trzecie równanie brzmi: $\Delta \varphi = 0$.

Według równania (18)

$$0 = \Delta \varphi = - \int_A^B \frac{M}{EI} ds, \dots \dots \dots (24)$$

a dla przekroju stałego:

$$\int_A^B M ds = 0 \dots \dots \dots (25).$$

Na tych trzech zasadniczych równaniach polega cała dalsza teoria belek łukowych. Z powodu wielkiego znaczenia tych równań, podamy tu jeszcze inny dowód ich rzetelności według *Burra*.

Wiemy, że nateżenie włókna fg (fig. 8), w odległości $=1$ od osi obojętnej, spowodowane momentem sił zewnętrznych, jest:

$$q = \frac{M}{I},$$

stąd otrzymamy przedłużenie lub skrócenie względne tego włókna:

$$\frac{dl}{l} = \frac{q}{E} = \frac{M}{EI}; \dots \dots \dots (26),$$

więc przedłużenie na długość ds_2 :

$$\Delta ds_2 = \frac{M}{EI} ds_2 \dots \dots \dots (27).$$

Jeżeli $A'B'$ (fig. 9) jest owo włókno w odległości równej jednostce od osi i gdy $E'D' = ds_2$ przedłuży się o $\Delta ds_2 = D'G'$, to przekrój DD' przejdzie w położenie DG' , obróciwszy się o $\Delta d\varphi$ około punktu D .

Możemy więc napisać:

$$\Delta ds_2 = D'G' = 1 \cdot \Delta d\varphi = \Delta d\varphi.$$

W kierunku pionowym zmieni się przez to oddalenie punktu B od stycznej do włókna w punkcie danym o $FR = dy$.

Dalej mamy

$$dy = FK \cos(\varphi + \delta\varphi + \Delta d\varphi) = FK \cos \varphi,$$

opuściwszy nieskończenie małe $\delta\varphi$ i $\Delta d\varphi$, będzie:

$$dy = FK \cos \varphi = D'F \Delta d\varphi \cos \varphi = x \Delta d\varphi$$

$$dy = x \Delta ds_2 = \frac{Mx}{EI} ds_2.$$

Jeżeli dodamy dy pochodzące ze zmiany nachylenia wszystkich przekrojów, otrzymamy ugięcie belki w punkcie B :

$$\Delta y = \int_A^B dy = \int_A^B \frac{Mx}{EI} ds \dots \dots \dots (28)$$

a dla przekroju stałego:

$$\Delta y = \frac{1}{EI} \int_A^B Mx ds.$$

Dla łuku bez przegubu styczna na podporze jest stałą, więc $\Delta y = 0$, a zatem:

$$\int_A^B Mx ds = 0 \dots \dots \dots (29).$$

Ściśle rzecz biorąc, równanie (29) nie jest zupełnie rzetelne, gdyż nie uwzględniliśmy siły podłużnej P i

$$\int_A^B Mx dx \text{ nie będzie } = 0,$$

lecz bardzo małej liczbie. W praktyce jednak, jak wiemy z poprzedniego, możemy uznać równanie (29) za dostatecznie dokładne, gdyż wpływ siły podłużnej w porównaniu z wpływem momentu jest bardzo małym.

Zupełnie w taki sam sposób otrzymamy analogiczne równanie:

$$\int_A^B My ds = 0. \dots \dots \dots (30).$$

Trzecie równanie otrzymamy, zważywszy że:

$$\Delta \varphi = 0 = \int_A^B \Delta d\varphi = \int_A^B \Delta ds_2 = \int_A^B \frac{M}{EI} ds,$$

a dla przekroju stałego:

$$\int_A^B M ds = 0 \dots \dots \dots (31).$$

5. *Przybliżone oznaczenie prawdziwej linii ciśnienia.* Ta linia ciśnienia jest prawdziwą, która wypełnia wszystkie trzy powyżej podane warunki, a że jak to pierwej udowodniliśmy, brakowały nam tylko trzy równania, więc teraz mamy tyle równań, ile niewiadomych, a zatem niewiadome dadzą się ściśle oznaczyć. Linia ciśnienia jest więc zupełnie oznaczona temi równaniami.

Będziemy teraz szukać tej prawdziwej linii ciśnienia, odpowiadającej trzem warunkom,—a to w ten sposób, że na-przód wyszukamy linię ciśnienia odpowiadającą jednemu warunkowi, potem zmienimy ją tak, aby nie przestając od-powiadać pierwszemu warunkowi odpowiadała i drugiemu, a nareszcie i trzeciemu.

Każdy wielobok uważać możemy jako wielobok sznu-rowy dla pewnego obciążenia, a więc i oś ACB (fig. 10) niech będzie wielobokiem sznurowym dla pewnego obciążenia i pewnego parcia poziomego. Przypuśćmy dalej że LK jest linią zamykającą dla belki zwykłej, na obu końcach utwier-dzonej,—wtedy odstępki pionowe między LK a osią będą dla pewnego parcia poziomego równe momentom M_b , a na mocy równania (31), które tu także jest ważne:

$$\int_A^B M_b ds = 0.$$

Niech będzie wielobok oznaczony $a' a'_1 a'_2 \dots a'_{10}$ prawdziwą linię ciśnienia i przypuśćmy na chwilę, że jest także wielobokiem sznurowym dla tej samej belki zwykłej na obu końcach utwierdzonej, co wielobok b , ale dla danego rzeczywistego obciążenia i że linia LK jest znów linią zamy-kającą dla tego samego parcia poziomego. Wtedy odstępki między linią zamykającą a wielobokiem a będą równe mo-mentom M_a i tu także będzie:

$$\int_A^B M_a ds = 0.$$

Wiemy że dla łuku linią zamykającą jest oś łuku, więc momenty dla łuku będą $M = M_a - M_b$, (32). jak to z figury widzimy.

Pomnożywszy to równanie przez $x ds$ otrzymamy:
 $Mx ds = M_a x ds - M_b x ds$.

Całkujemy to równanie:

$$\int Mx ds = \int M_a x ds - \int M_b x ds = 0, \text{ według (29), a zatem:}$$

$$\int M_a x ds = \int M_b x ds \dots \dots \dots (33).$$

Analogicznie możemy napisać:

$$\int M_a y ds = \int M_b y ds \dots \dots \dots (34)$$

$$\text{i } \int M_a ds = \int M_b ds \dots \dots \dots (35).$$

Te trzy równania posłużą nam do wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia, a mianowicie w równaniu (33) i (35) zrobimy obie strony równania $= 0$, przez co będą też sobie równe. W tym celu dzielimy najprzód rozpiętość na równą liczbę części (na figurze 10 części). Ciężar stały takiego paska i ciężar ruchomy działa w praktyce dość dokładnie w pionowej połowiącej ten pasek. Wykreślamy więc te linie połowiące przez $e_1, e_2 \dots e_{10}$, jako kierunki sił działających i na linii pionowej przez A wykreślamy wielobok sił dla danego obciążenia (na figurze obciążona jest lewa strona łuku).

Przyjawszy tymczasowo jako odległość biegunową połowę rozpiętości i biegun w punkcie D , ciągniemy promienie i wykreślamy w zwykły sposób wielobok sznurowy ENF . Teraz szukamy linii zamykającej, któraby zadość uczyniła równaniu:

$$\int_A^B M_a ds = 0.$$

Przyjawszy w przybliżeniu $ds = dx$, otrzymujemy

$$\int_A^B M_a dx = 0,$$

co znaczy, że powierzchnia między linią zamykającą a wielobokiem sznurowym a ma być $= 0$, oczywiście gdy uwzględnimy znaki rzędnych.

Wykreślmy najprzód linią $L_2 K_2$ równoległą do EF , oceniwszy na oko, że powierzchnia między $L_2 K_2$ a $ENF = 0$. Dobrze także użyć w tym celu linii prostej wykreślonej na kalce, którą przesuujemy równoległe do linii EF , aż powierzchnie po obu stronach linii będą równe.

Teraz sprawdzimy, czy rzeczywiście $\int M_a dx = 0$, najlepiej dodając algebraicznie rzędne w punktach a_2 do a_9 , $3/4$ rzędnych w a_1 i a_{10} i $1/4$ rzędnych EL_2 i FK_2 , poczem su-

mę pomnożyć jeszcze mamy przez $e = \frac{l}{10}$. Licząc w przybliżeniu, możemy dodać algebraicznie wszystkie rzędne od 1 do 10 i pomnożyć sumę przez e .

Jeżeli powierzchnia nie jest $= 0$, lecz np. $= +f$, wtedy posuniemy linią $L_2 K_2$ do góry o długość $\Delta a = \frac{f}{l}$, w skutek czego powierzchnia będzie dokładnie $= 0$.

Chodzi teraz o to, aby $\int_A^B M_a x ds = 0$, albo w przybliżeniu $\int_A^B M x dx = 0$, t. j., aby moment statyczny tej powierzchni ze względu na AE był $= 0$. Obliczmy moment statyczny tej powierzchni, rozkładając ją na trapezy i przypuszczając, że środek ciężkości trapezu jest w połowie wysokości. Przypuśćmy że suma nie będzie $= 0$, lecz $= -s$.

W takim razie musimy moment statyczny powierzchni powiększyć o $+s$, przez to, że linią $L_2 K_2$ obrócimy około punktu I o pewien kąt, aż przyjdzie w położenie $L_1 K_1$.

Długość $L_1 L_2$ oznaczmy w następujący sposób: przez obrót linii zamykającej, pomniejszą się z lewej strony powierzchnia dodatnia, z prawej ujemna. Moment statyczny, jaki przez to powstanie, ma być:

$$\begin{aligned}
 +s &= -II_1 L_2 \frac{1}{6} l + IK_1 K_2 \frac{5}{6} l = + \frac{2}{3} l II_1 L_2 = \\
 &= \frac{2}{3} l \frac{1}{2} L_1 L_2 \frac{1}{2} l = + \frac{l^2}{6} L_1 L_2, \\
 \text{a stąd } L_1 L_2 &= \frac{6s}{l^2} \dots \dots \dots (36),
 \end{aligned}$$

a że $IK_1 K_2 = ILL_2$, więc warunek pierwszy nie został naruszony. Linia zamykająca $L_1 K_1$ odpowiada więc teraz dwóm pierwszym warunkom.

Teraz szukamy linii zamykającej dla osi łuku, jako wieloboku sznurowego, w ten sam sposób i znajdziemy $L K$ równoległą do AB , bo z powodu symetrii drugi warunek będzie już przez to także wypełniony. Środek ciężkości bowiem, tak ujemnej części płaszczyzny jak i dodatniej, leży

w linii CD , a że te płaszczyzny są równe, więc momenty statyczne muszą być równe z przeciwnym znakiem, a zatem:

$$\int_A^B M_b x dx = 0.$$

Chodzi nam jeszcze o wypełnienie trzeciego warunku:

$$\int_A^B M_a y ds = \int_A^B M_b y ds, \text{ czyli w przybliżeniu:}$$

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx.$$

Wyszukajmy najprzód wartości $\int_A^B M_a y dx$.

Rzędne ac wyobrażają nam jak wiemy momenty M_a . Uważajmy M_a jako siły działające poziomo w odpowiednich punktach osi b , oddalonych od linii AB o y , np, $a_1 c_1$ w b_1 , $a_2 c_2$ w b_2 i t. d., wtedy otrzymamy łatwo $\int_A^B M_a y dx$, wykreślając na linii BS wielobok sił, a potem wielobok sznurowy. Zaczawszy od C odcinamy $Cf_1 = a_1 c_1$, $f_1 f_2 = a_2 c_2$, $f_2 f_3$ w przeciwnym kierunku $= a_3 c_3$ i t. d., a ponieważ Σac powinna być $= 0$, albo mało się co różnić od 0 , więc ostatni punkt wieloboku f_{10} zejdzie się mniej lub więcej dokładnie z punktem C .

Weźmy tymczasowo jako odległość biegunową CD , połączmy D z wszystkimi punktami wieloboku sił, z punktów b_1, b_2 i t. d. poprowadźmy poziome i wykreślmy wielobok sznurowy DTU (fig. 10).

Niech będzie (fig. 11) mm_1 równoległe do $Dn+1$ (fig. 12) jednym bokiem wieloboku sznurowego. Dn niech będzie równoległe do poprzedniego boku, wtedy mamy proporcję:

$$pr : y_n = n n + 1 : h, \text{ czyli:}$$

$$pr : y_n = M_a : h, \text{ a stąd:}$$

$$pr = \frac{M_a y_n}{h}, \text{ więc na fig. 11:}$$

$$VC = UD = \frac{1}{6} \int_A^B M_a y dx \dots (37).$$

To samo robimy, chcąc oznaczyć $\int M_b y dx$. Tu M_b są równe rzędnym między osią łuku a linią zamykającą LK . Wykreślamy w ten sam sposób wielobok sznurowy, czyli właściwie z powodu symetrii tylko połowę wieloboku i otrzymujemy:

$$Ct = \frac{1}{2h} \int_A^B M_b y dx. \quad \dots \quad (38a).$$

Aby zadość uczynić równaniu (34) musiałyby być:

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx \text{ czyli } 2 Ct = h \cdot UD, \text{ albo:}$$

$$2 Ct = UD \quad \dots \quad (38b).$$

Faktycznie jednak $2 Ct \geq UD$, więc aby uzyskać równanie (38b), musimy, ponieważ $2 Ct$ jest dla danego kształtu łuku stałe, zmienić tak UD , aby $UD = 2 Ct$.

Przypuścimy np. że $2 Ct > UD$, a mianowicie że:

$$2 Ct = n \cdot UD,$$

że więc UD trzeba n razy powiększyć, — to ponieważ

$$UD = \frac{1}{h} \int_A^B M_a y dx, \text{ } UD \text{ będzie } n \text{ razy większe, jeżeli } M_a$$

czyli rzędne wieloboku sznurowego a powiększymy n razy. Rzędne zaś wieloboku tego będą n razy większe, jeżeli do wykreślenia go użyjemy odległości biegunowej n razy

mniejszej, a zatem $= \frac{AD}{n}$.

Teraz dwojaki jest sposób wykreślenia prawdziwej linii ciśnienia: albo mnożymy wszystkie rzędne wieloboku

a przez $n = \frac{2 Ct}{UD}$ i wykreślamy je według znaku, powyżej

lub poniżej linii LK , — albo oznaczywszy prawdziwą odległość biegunową, szukamy takiego bieguna, aby linie zamykające obu wieloboków zeszły się razem i aby można jeden na drugi położyć. Wykreślimy dowolną linią BD' , zrobmy $BP = UD$, $BP' = 2 Ct$, wykreślimy potem DD' równoległe do PP' , a będą

dziemy mogli napisać: $BD' = BD \cdot \frac{BP}{BP'} = AD \cdot \frac{2 Ct}{UD} = \frac{AD}{n}$.

Prawdziwą odległością biegunową jest więc BD' .

Według pierwszego sposobu mamy powiększyć wszystkie rzędne M_a w stosunku $BP : BP'$, co zrobić możemy za pomocą kąta proporcjonalnego PBP' . Sposób ten jest łatwy i dokładny,—jako próbę użyć możemy drugiego sposobu, a to jak następuje:

Ciągniemy DF_1 równoległe do L_1K_1 , przez co otrzymujemy $OF_1 = V$ i $F_1D'' = V'$, oddziaływania pionowe. Z punktu F_1 ciągniemy poziomą F_1D'' równoległą do zamykającej LK i robimy $F_1D'' = BD'$. D'' jest wtedy prawdziwym biegunem, gdyż odległość biegunowa $F_1D'' = BD'$, a równoległa do nowej zamykającej LK dzieli nam wielobok sił na V i V' . Teraz ciągniemy promienie i wielobok sznurowy α , punkt początkowy, a może i więcej punktów oznaczamy jako kontrolę, według poprzedniej metody.

W ten sposób otrzymujemy prawdziwą linię ciśnienia, a momenty ze względu na oś $M = F_1D''z = Hz$, jeżeli z oznacza pionowy odstęp między osią a linię ciśnienia.

Drugą próbą rzetelności konstrukcyi jest ta okoliczność, że punkty przecięcia się wieloboku α , z linią zamykającą m i n , leżą w pionowych punktów przecięcia się linii ciśnienia z LK — m' i n' . Dalej boki skrajne wieloboku sznurowego muszą się przecinać w pionowej przez środek ciężkości wszystkich ciężarów, GG' , a na koniec sumy powierzchni powyżej osi i poniżej osi muszą być sobie równe.

6. *Położenie powierzchni momentów.* Niech będzie ACB (fig. 13) osią łuku, A_1DB_1 prawdziwą linię ciśnienia,—rzędne więc między temi dwiema liniami będą, jak wiemy, proporcjonalne do momentów. Pierwszy warunek:

$$\int_A^B MDx = 0,$$

oznacza że suma powierzchni dodatnich jest równa sumie powierzchni ujemnych, t. j. poniżej osi leżących. Drugi i trzeci warunek brzmi:

$$\int_A^B Mxdx = 0 \quad \text{i} \quad \int_A^B Mydx = 0,$$

co da się słowami tak wyrazić: *moment statyczny powierzchni ujemnych musi być równy momentowi statycznemu powierzchni dodatnich, tak ze względu na oś odciętych jak i rzędnych.* Wiemy, że moment statyczny jest iloczynem z powierzchni przez odległość środka ciężkości od danej linii, a więc gdy po-

wierzchnie dodatnie i ujemne i ich momenty statyczne są równe, to i odległość środka ciężkości powierzchni ujemnych i dodatnich od obu osi musi być równa, czyli innymi słowy, środek ciężkości części ujemnych musi schodzić się ze środkiem ciężkości części dodatnich.

Aby ten ostatni warunek wypełnić, musi linia ciśnienia przecinać oś najmniej w trzech punktach (fig. 13), bo jeżeliby przecinała tylko w dwóch punktach, to otrzymalibyśmy dwie części o jednym znaku, a jedną część o przeciwnym, w różnych wysokościach, tak, że środki ciężkości nie mogłyby się schodzić.

Powyższa ulepszona metoda *Burra* da się w zupełności zastosować i do sklepień i jest lepszą od metody *Foeppla* i innych, gdyż jest bardzo przejrzystą i jasną, a nadewszystko ogólną. Dla jakiegokolwiek osi i dla dowolnego obciążenia da się ona zastosować, a nawet, jak to zobaczymy w dalszym ciągu, — z małymi zmianami i dla łuków z przegubami.

III. Łuk przegubowy

(Gelenkbogenträger, arched rib with joints).

7. *Luk o dwóch przegubach* (Bogenträger mit Kämpfergelenken, arched rib with free ends). Wiemy już, co to są przeguby i że w praktyce używamy łuków o dwóch i o trzech przegubach. Najprzód mówić tu będziemy o pierwszych. Jeżeli w łuku urządzamy dwa przeguby, to umieszczamy je przy oporach. Właściwie powiedziawszy, nie są to przeguby lecz łożyska kolebkowe ukośne.

Przez urządzenie dwóch przegubów pozyskujemy dwa równania wyrażające, że momenty w obu przegubach są równe zeru. Pozostaje nam więc jeszcze jeden warunek do oznaczenia, a warunkiem tym jest równanie $\Delta x = 0$, bo w punktach *A* i *B* (fig. 14) nie dopuszczamy przesunięcia poziomego. Wprawdzie w punktach *A* i *B* urządzenie przegubów nie dozwala nam i przesunięcia pionowego, ale do oznaczenia sił potrzebny jest nam tylko jeden warunek, a tym warunkiem jest $\Delta x = 0$. Z równania tego otrzymamy zupełnie w ten sam sposób, co pierwej:

$$\int_A^B My ds = 0, \text{ a w przybliżeniu:}$$

$$\int_A^B My dx = 0 \dots \dots \dots (39).$$

Konstrukcyja zaczyna się tak samo jak dla łuku bez przegubu: wykreślamy wielobok sznurowy a , tylko, że tu zamiast linii $L_1 K_1$ linią zamykającą będzie EF (fig. 10), bo momenty na podporach są $= 0$.

Tak samo dla osi łuku będzie linią zamykającą AB , konstrukcyja więc się bardzo upraszcza. Z wyjątkiem tych zmian, dalsza konstrukcyja pozostaje ta sama co dla łuku bez przegubu. Dla zadość uczynienia równaniu $\int_A^B My dx = 0$

wykreślamy wieloboki sznurowe DTu i Dt i w ten sam sposób, co pierwej, kładziemy wielobok a na b , aby linie zamykające schodziły się ze sobą, wyszukawszy wprzód prawdziwą odległość biegunową czyli parcie poziome. W ten sposób otrzymamy prawdziwą linią ciśnienia.

8. *Łuk o trzech przegubach* (Bogen mit 3 Gelenken, arched rib free at ends and jointed at the crown). Łuk o trzech przegubach, jest statycznie oznaczony, jak to wiemy już z poprzedniego. W przegubach A , B i C (fig. 15) momenty są równe zeru, więc linia ciśnienia musi przez te trzy punkty przechodzić. Oznaczenie linii ciśnienia przeprowadzimy w następujący sposób.

Wykreślamy naprzód wielobok sił (fig. 16) i przyjmujemy dowolnie biegun O . Ciągniemy promienie i kreślimy wielobok sznurowy z punktu A . Wielobok ten przetnie nam pionową przez B w punkcie B' . Prowadzimy OD równoległą do Ab' i otrzymujemy pionową składową oddziaływania, w A równą $V = D_0$, a w B równą $V' = D_3$. Ponieważ prawdziwą linią zamykającą jest AB , więc prowadzimy DO_1 równoległą do AB i wiemy, że biegun prawdziwy będzie w linii DO_1 , a znajdziemy go w następujący sposób. Jeżeli poprowadzimy przez O pionową i obierzemy w punkcie przecięcia O_1 biegun, wtedy rzędne wieloboku sznurowego pozostaną te same, bo odległość biegunowa się nie zmieniła. A zatem nie zmieni się też i wielkość rzędnej przechodzącej przez C , która więc będzie równa $C_1 C_2$. Jeżeli linia ciśnienia ma przechodzić przez biegun, to rzędna wieloboku sznurowego w C musi być równą $C_0 C = C_2 C_4$. Musimy więc tak zmienić odległość biegunową, aby zamiast $C_2 C_1$ otrzy-

mac $C_2C_4 = C_0C$, a mianowicie chcąc powiększyć rzędną, musimy zmniejszyć odległość biegunową DO_1 .

Wynieśmy $C_1C_4 = C_0C$, poprowadźmy C_4E równoległą do AB i C_1F równoległą do AB , zróbmy $C_4E = DO_1$ i połączmy F_2C_2 , a otrzymamy punkt F i długość C_1F będzie prawdziwą odległością biegunową. Z konstrukcyi bowiem wynika że $C_4E : C_1F = C_2C_4 : C_2C_1$, czyli:

$$DO_1 : C_1F = C_0C : C_2C_1.$$

Zróbmy teraz $DO_2 = C_1F$, to O_2 będzie prawdziwym biegunem. Poprowadźmy promienie, a odosny wielobok sznurowy przechodzić będzie przez punkty A, B i C . Przy konstrukcyi możemy też korzystać ze znanego twierdzenia statyki wykreślnej, na mocy którego boki odpowiednie obu projektów sznurowych będą się przecinać na linii AG równoległej do OO_2 .

9. *Oznaczenie analityczne oddziaływań w łuku o trzech przegubach.* Ponieważ łuk o trzech przegubach jest statycznie oznaczony, więc łatwo otrzymamy analityczne wyrażenia na pionowe i poziome składowe oddziaływania.

Przypuśćmy, że siła skupiona P działa na prawo od przegubu kluczowego (fig. 17) i że wywołuje oddziaływanie w A w kierunku AC , które rozkłada się na A i H . Wtedy możemy napisać ze względu na punkt B :

$$Al = Pb, \text{ więc } A = \frac{Pb}{l} \dots \dots \dots (40),$$

i ze względu na punkt C : $M = A \frac{l}{2} - Hh = 0$, a stąd:

$$H = \frac{Al}{2h} = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{l}{2h} = \frac{Pb}{2h} \dots \dots \dots (41).$$

Równania te są tylko ważne dla $l > a > \frac{l}{2}$, przyczem punkt D leży zawsze na przedłużeniu prostej Al . Gdy siła P porusza się od A do B , punkt D porusza się po linii $D'CD$, za pomocą której dadzą się natychmiast oznaczyć oddziaływania. Dlatego nazywamy tę linię *linią oddziaływania* (Kämpferdrucklinie), a składa się ona dla łuku o trzech przegubach z dwóch prostych CD' i CD .

Jeżeli siła P działa na lewo od przegubu kluczowego, więc dla $0 > a > \frac{l}{2}$ otrzymamy analogicznie:

$$A = \frac{Pb}{l} \dots \dots \dots (42),$$

$$H = \frac{Pa}{2h} \dots \dots \dots (43).$$

Równania (40) i (42) są ważne także i dla łuku o dwóch przegubach, bo dla ich udowodnienia nie potrzebujemy przypuszczać, że moment w C jest równy zeru.

Porównawszy (41) i (43) zrozumiemy, że linia wpływowa dla parcia poziomego H da się wykreslić, zrobiwszy $EF = \frac{Pl}{4h}$ i połączywszy punkty A i B z F .

Niech będą R i R_1 wypadkowe sił po lewej i po prawej stronie przegubu C (fig. 18), a u i u_1 odległości ich od niego, to:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2h} \left[R \left(\frac{l}{2} - u \right) + R_1 \left(\frac{l}{2} - u_1 \right) \right] = \\ &= \frac{(R + R_1)l}{4h} - \frac{Ru + R_1u_1}{2h} \dots \dots \dots (44). \end{aligned}$$

IV. Dokładniejsze oznaczenie linii ciśnienia.

10. *Przekrój zmienny.* Przy oznaczeniu trzech równań zasadniczych w § 5, przyjęliśmy, że El jest ilością stałą. Jeżeli jednak łuk ma przekrój zmienny ciągle lub stopniowo, to moment bezwładności nie jest ilością stałą i tę okoliczność teraz uwzględnić nam wypada.

Również uprościliśmy równania zasadnicze w ten sposób, że zamiast ds przyjęliśmy dx , przez co także pewna niedokładność wkradła się w naszą konstrukcję. Przy dokładniejszej konstrukcyi nie będziemy więc robić tego skrócenia, a zatem zasadnicze równania będą teraz brzmiały:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{M}{I} ds &= 0 \\ \int \frac{Mx}{I} ds &= 0 \\ \int \frac{My}{I} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (45) \text{ zamiast } \begin{aligned} \int M dx &= 0 \\ \int Mx dx &= 0 \\ \int My dx &= 0 \end{aligned}$$

Nazwijmy dowolny moment bezwładności np. w punkcie C (Tabl. II, fig. 19) przez I' , to możemy napisać $I = \frac{I'}{i}$, gdzie i jest zmiennym współczynnikiem. Wtedy równania (45) przyjmą kształt:

$$\int \frac{Mids}{I'} = 0, \quad \int \frac{Mixds}{I'} = 0, \quad \int \frac{Miyds}{I'} = 0, \quad \dots \quad (46),$$

czyli, ponieważ I' jest ilością stałą:

$$\int Mids = 0, \quad \int Mixds = 0, \quad \int Miyds = 0 \quad \dots \quad (47).$$

Porównawszy równania (47) z równaniami dawniejszemi, zobaczymy, że możemy konstrukcją przeprowadzić tak jak pierwiej, jeżeli tylko wszędzie zamiast Mdx weźmiemy $Mids = Mdx \sec \varphi$, czyli zamiast M weźmiemy $Mi \sec \varphi$.

W tym celu dzielimy najprzód rozpiętość AB na taką liczbę równych części (na fig. 19 dziesięć), abyśmy z dostateczną dokładnością mogli przyjąć w jednej takiej części przekrój stały.

Połowimy te części i wykreślamy jak pierwiej wielobok sił i wielobok sznurowy a . Ciągniemy potem L_2K_2 równoległe do EF na oko tak, aby płaszczyzny dodatnie i ujemne były równe i zmieniamy wielobok a odpowiednio do powyższych warunków. Mianowicie mnożymy każdą rzędną między linią zamykającą L_2K_2 a wielobokiem sznurowym przez $i \sec \varphi$. Przez i mnożymy w dowolny sposób, najlepiej za pomocą kąta proporcjonalnego, a przez $\sec \varphi$ — poprowadziwszy z punktu a (Tabl. I, fig. 20) równoległą do promienia w tym punkcie, przez co otrzymujemy $d = ab \sec \varphi = Mi \sec \varphi = ae$.

W ten sposób pomnożywszy wszystkie rzędne przez $i \sec \varphi$, otrzymujemy nowy wielobok $E'NF'$. Trzy punkty p_1 , N i r_1 będą wspólne obu wielobokom. Teraz próbujemy, czy powierzchnie dodatnie i ujemne są równe, jak w § 5. Otrzymamy pewną różnicę dodatnią lub ujemną i według

tego posuwamy do góry lub na dół w przybliżeniu o $\frac{\Delta'}{l}$ i teraz zamiast L_2K_2 mamy linią zamykającą L_3K_3 . Linia ta przecina nam pierwotny wielobok sznurowy w p_2 i r_2 . Rzędne między tym wielobokiem sznurowym a L_3K_3 mnożymy

znów przez $i \sec \varphi$ i otrzymujemy nowy wielobok $E_2 N F_2$ (który na fig. 19 schodzi się z $E' N F'$). Probujemy znów czy powierzchnie dodatnie i ujemne są sobie równe, a gdyby tak nie było, musielibyśmy jeszcze raz linią zamykającą nieco przesunąć.

Linia zamykająca czyni tu zadość dopiero pierwszemu równaniu, teraz musimy ją zmienić o tyle, aby i drugie równanie $\int M i \sec \varphi dx = 0$ zostało wypełnione.

Postępujemy tu zupełnie jak w § 5, obliczamy moment statyczny $M i \sec \varphi \cdot x$, a otrzymawszy pewną różnicę s , obracamy linią zamykającą około punktu I o pewien kąt. Wielkość obrotu nie da się wprowadzić oznaczyć równaniem (36), ale w danym wypadku da się obliczyć z danych i , φ i l . Zresztą równanie (36) da nam także dość przybliżone wyniki. W ten sposób otrzymamy prawdziwą linią zamykającą $l_1 k_1$.

To samo robimy teraz z osią łuku uważaną jako wielobok sznurowy. Z powodu symetrii równanie drugie wypełnia się samo przez się, gdy pierwszemu zadośćuczynimy, a zamykająca $l k$ jest tu poziomą. Dalej postępujemy zupełnie jak w § 5 i otrzymujemy w ten sposób dokładniejsze wyniki, z uwzględnieniem zmienności przekroju.

Zwrócić tu muszę uwagę, że mnożenie przez $i \sec \varphi$ służy tylko do oznaczenia prawdziwych linii zamykających, a potem prawdziwego parcia poziomego. Otrzymawszy to, wracamy znów do pierwotnych wieloboków sznurowych, t. j. wieloboku a i osi -- a zmieniawszy wielobok a według nowej odległości biegunowej, kładziemy jak pierwszej oba wieloboki, tak, aby linie zamykające schodziły się z sobą.

11. *Wpływ zmiany ciepłoty na tynią ciśnienia.* Zmiana ciepłoty sprowadza zmianę długości łuku, a w skutek tego odkształcenie i zmianę długości rzędnych osi łuku. Dokładne oznaczenie natężeń w skutek tego powstających jest dość zawile, w przybliżeniu jednak możemy łatwo w następujący sposób oznaczyć wpływ zmiany ciepłoty.

Weźmy naprzód pod uwagę łuk o dwóch przegubach nieobciążony (fig. 21). Przypuśćmy, że ciepłota podwyższyła się o t stopni, a przez to łuk przedłużył się o $\Delta s = \pm \alpha t s$ (48), gdzie s oznacza długość łuku, a α współczynnik rozszerzalności (Ausdehnungscoefficient). Ponieważ łuk usiłuje zatrzymać dawny kształt, więc gdyby był wolnym, zmieniłyby się

wszystkie jego wymiary odpowiednio, a zatem i rozpiętość l o Δl . Z powodu urządzenia przegubów w A i B nie dozwalamy się przedłużyć rozpiętości l , a skutek będzie ten sam, jeżeli usunąwszy podpory umieścimy w A i B siły poziome H'

Mamy tu więc przed sobą łuk o dwóch przegubach, na który działają siły, więc warunki zasadnicze, które pierwej określiliśmy, muszą i tu być wypełnione.

W łuku bez przegubu (fig. 22) powstaje w skutek zmiany ciepłoty także oddziaływanie poziome H' , lecz tu nie może ono działać w linii AB , bo trzeci warunek $\int_A^B d\varphi = 0$, z którego, jak wiemy, otrzymujemy równanie $\int_A^B M ds = 0$, wyznacza inne położenie kierunku oddziaływania, a mianowicie linią LK .

Widzimy więc, że wpływ zmiany ciepłoty ogranicza się do tego, że wywołuje oddziaływanie poziome H' , które wypełnić musi także i trzy zasadnicze równania:

$$\int_A^B M ds = 0, \quad \int_A^B Mx ds = 0 \quad \text{i} \quad \int_A^B My ds = 0.$$

Müller Breslau, oznaczając dokładnie wpływ zmiany ciepłoty, otrzymuje podobne równania, których uproszczeniem są nasze równania zasadnicze. po opuszczeniu wyrazów zależnych od siły podłużnej, której dla płaskich łuków nie uwzględniliśmy także w § 5. Opuściwszy więc konsekwentnie te wyrazy, otrzymujemy nasze równania zasadnicze, a możemy to uczynić tem snadniej, że wielka subtelność w oznaczeniu nateżeń łuków sprężystych jest tylko urojona, bo inne czynniki i uproszczenia, konieczne dla zmniejszenia zawiłości zadania, nie pozwalają zupełnie dokładnie oznaczyć nateżeń.

Sposób obliczenia jest następujący:

Obliczamy naprzód zniżenie lub podwyższenie łuku w kluczu. Niech będzie ACB (fig. 23) łukiem parabolicznym, wtedy możemy napisać w przybliżeniu:

$$s = l \left(1 + \frac{8}{3} \left(\frac{l}{l} \right)^2 \right) \dots \dots \dots (49);$$

$$\text{a stąd } f = \sqrt{\frac{3}{8} l (s-l)}.$$

Różniczkujemy to równanie, a otrzymamy:

$$df = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} l (s-l)}} \cdot \frac{3}{8} l ds = \frac{l ds}{\sqrt{\frac{32}{3} l (s-l)}}$$

a wstawivszy wartość na ds z (48), otrzymamy:

$$df = \pm \frac{\alpha l t s}{\sqrt{\frac{32}{3} l (s-l)}} \dots \dots \dots (50),$$

co użyć możemy także dla płaskich łuków kołowych.

Spółczynnik rozszerzalności α możemy przyjąć:

dla drzewa . . .	$\alpha = 0.000004$	
dla żelaza lanego	$\alpha = 0.000011$	
dla żelaza kutego	$\alpha = 0.0000122$	
dla stali	$\alpha = 0.0000124$	dla podziałki <i>Celsiusza</i> .

t jest to różnica ciepłoty w czasie złożenia łuku i w czasie danym. Jeżeli przyjmiemy jako średnią ciepłotę w czasie złożenia $+10^{\circ}\text{C}$., a najwyższą i najniższą ciepłotę $+40^{\circ}\text{C}$. i -40°C ., to otrzymamy $t = +30^{\circ}$ lub $t = -50^{\circ}$. Jeżeli jednak składamy łuk w lecie, wtedy ciepłota może być około $+30^{\circ}$, więc $t = -70^{\circ}$. W ten sposób obliczyć możemy zniżenie lub podwyższenie klucza.

Wiemy z drugiej strony, że znając momenty, otrzymać możemy ugięcie belki, jeśli powierzchnię momentów uważać będziemy jako powierzchnię obciążenia, a drugi wielobok sznurowy da nam ugięcie łuku, jeżeli drugą odległość biegunową d przyjmiemy $= lI$.

Aby uzyskać powierzchnię momentów, wynajdujemy linię zamykającą LK (Tabl. II, fig. 24) za pomocą równań $\int_A^B M ds = 0$ i $\int_A^B M x ds = 0$. Linia ta będzie ta sama co na fig. 19, bo i tam oznaczaliśmy ją na mocy tych samych równań.

Powierzchnię zawartą między osią łuku a LK uważamy teraz jako powierzchnię obciążenia, a więc wyносimy $d_1 b_1 = A1$ (jeżeli chcemy być dokładniejszymi, to zrobimy

$A1 = d_1 b + \frac{1}{4} (AL - d_1 b)$, jak to w § 5 udowodniliśmy),
 $d_2 b_2 = 1, 2, \dots, d_5 a_5 = 4, 5$. Punkt 5 zejść się musi z punktem A , bo powierzchnia ujemna musi być równa dodatniej. Przyjawszy tymczasowo jako biegun punkt D , więc $d = AD$, prowadzimy promienie i kreslimy wielobok sznurowy $D a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 F$. Jest to właściwie tylko pół wieloboku sznurowego, który zupełnie będzie symetryczny po drugiej stronie punktu D . Linia zamykająca będzie więc pozioma FG , bo punkty A i B zostają w miejscu, a odstęp pionowy między wielobokiem sznurowym a FG będą proporcjonalne do ugięcia łuku.

Jeżeli H' jest szukane oddziaływanie poziome, to momenty otrzymamy mnożąc rzędne db przez H' , więc $M_1 = H' d_1 b_1$, $M_2 = H' d_2 b_2$ i t. d. H' jednak jeszcze nie znamy, przyjmujemy więc dowolnie H'' , które później oznaczymy, więc:

$$M_1 = H'' d_1 b_1 = A1, \quad M_2 = H'' d_2 b_2 = 1, 2 \text{ i t. d.}$$

Odcinki $A1, 1 2, \text{ i t. d.}$ odczytać musimy według tej samej podziałki co i drugą odległość biegunową $d = EI$, obieamy więc taką podziałkę, aby $EI = AD$ i w tej podziałce odczytujemy $A1, 1 2$ i t. d.; odcinki db odczytujemy w podziałce długości, a z równania $M = H'' db$ otrzymamy wartość na H'' , które będzie zawsze zawielkiem. Teraz odczytujemy dla H'' ugięcie belki w podziałce długości. Przypuśćmy, że otrzymane ugięcie jest n razy większe od rzeczywistego, któreśmy z (50) otrzymali, to wiemy, że $H'' = nH'$, a stąd $H' = \frac{H''}{n}$ (51).

Do obliczenia podziałki momentów, a stąd H'' , potrzebne nam są wartości na E , które możemy przyjąć jak następuje:

dla drzewa . . .	$E = 100\ 000$
dla żelaza lanego .	$E = 1\ 000\ 000$
dla żelaza kutego .	$E = 2\ 000\ 000$
dla stali	$E = 2\ 500\ 000$

w kilogramach na centymetr kwadratowy.

Dla łuku o dwóch przegubach konstrukcyja jest taka sama, z tym jedynym wyjątkiem, że linią zamykającą nie jest LK lecz AB , przez co cały tok konstrukcyi się upraszcza.

W łuku o trzech przegubach (Tabl. II, fig. 25) przy zmianie ciepłoty nie powstają żadne oddziaływania, gdyż łuk wydłużając się, podnosi się swobodnie w C . Zmienia się wprowadzie przez to CC' , a więc według równania (43) i parcie poziome H , ale zmiana ta jest tak mała, że zwykle jej nie uwzględniamy. Jeżeli zaś chcemy być bardzo dokładnymi, to obliczamy H dla $h = CC'$ przy najniższej ciepłocie, przez co otrzymamy największe wartości na H .

W łuku o dwóch przegubach lub bez przegubu otrzymujemy więc parcie poziome H' wywołane zmianą ciepłoty. Parcie to dodajemy algebraicznie do parcia poziomego, wywołanego siłami zewnętrznymi H - i wykreślamy potem ostatecznie linią ciśnienia na podstawie parcia poziomego $H + H'$.

V. Najniekorzystniejsze obciążenie.

12. *Ogólne uwagi o liniach wpływowych.* Do obliczenia wymiarów łuku potrzebne są nam przedewszystkiem maxima i minima nateżeń każdej części łuku, a te otrzymujemy najłatwiej za pomocą linii wpływowych, z których zarazem bardzo łatwo poznamy najniekorzystniejsze obciążenie ciężarem ruchomym.

Dla łuków z blachy wykreślamy zwykle linie wpływowe dla momentów i sił poprzecznych, gdyż na podstawie tych danych dadzą się łatwo obliczyć wymiary belki i nity. Dla łuków kratowych możemy jednak wykreślić wprost linie wpływowe dla nateżenia każdej części pasa i każdego krzyżulca.

Ponieważ przeguby wpływają stanowczo na kształt linii wpływowych, więc mówić będziemy osobno o liniach wpływowych dla łuków o trzech, dwóch przegubach i bez przegubu.

13. *Linie wpływowe momentów dla łuków o trzech przegubach.* Linią wpływową dla parcia poziomego wykreśliliśmy już na fig. 17 (Tabl. II) w § 9. Tu możemy jeszcze tylko dodać, że w razie, gdy ciężar pomostu i ciężar ruchomy przenoszą się na łuk tylko w pewnych punktach, wtedy spuszczaamy pionowe z wszystkich tych punktów i punkty przecięcia się z linią wpływową łączymy liniami prostymi, jak to wynika z ogólnych własności linii

wpływowych. W razie więc, jeżeli w przegubach nie urządzimy słupów, które ciężar na nie przenoszą, linia wpływo-
wa dla H będzie jak na fig. 26 (Tabl. III).

Do wykreślenia linii wpływowych posłuży nam bar-
dzo oznaczenie punktu obojętnego na innej drodze. I tak,
weźmy pod uwagę przekrój w punkcie F (fig. 27). Niech
 g i d oznaczają górny i dolny punkt rdzeny. Połączmy
 A z g aż do przecięcia się w D z linią oddziaływania $A'C$, a zo-
baczymy, że oddziaływanie w kierunku AD , z powodu siły
 P , działającej w pionowej D , nie daje żadnego momentu ze
względu na punkt g , — że więc moment górny rdzeny
 $M_g = 0$.

Gdy siła P posunie się na prawo i przejdzie w poło-
żenie P' , wtedy oddziaływanie daje moment ujemny,—gdy P
posunie się na lewo, otrzymany moment dodatni. Z tego
wypływa, że punkt D jest dla górnego momentu rdzenego
punktem obojętnym i że dla $\max (+ M_g)$ musi być obciążo-
ny łuk na długości AD , a dla $\max (- M_g)$ —na długości DB .

To samo da się powiedzieć o dolnym momencie rdzen-
nym ze względu na punkt d . Jeżeli punkt g leży powyżej
linii BC , wtedy każdy ciężar sprawia moment ujemny, gdyż
 P rozdziela się na D i D' (fig. 28). D znosi się z oddziały-
waniem, a D' daje moment ujemny. Dla takiego więc punk-
tu g otrzymamy $\max (- M_g)$, gdy cały łuk jest obciążony,
a $\max (+ M_g) = 0$, gdy łuk nie jest obciążony.

Odwrotnie, gdy punkt d leży poniżej AC , każdy ciężar
daje moment dodatni, który jest największy dla zupełnego
obciążenia.

Teraz łatwo nam będzie wykreślić linią wpływową dla
momentu rdzenego górnego lub dolnego. Gdy bowiem siła
 P działa na prawo od g (fig. 29a), wtedy $M_g = Ax' - Hy'$, a

$$M'_g = \frac{M_g}{y'} = \frac{Ax'}{y'} - H \dots \dots \dots (52).$$

Gdy siła P działa na lewo od g (fig. 29b), wtedy
 $M_g = Ax' - Hy' - P(x' - x)$, a

$$M'_g = \frac{M_g}{y'} = \frac{Ax'}{y'} - H - P \frac{x' - x}{y'} \dots \dots (53).$$

Z tych równań widzimy, że M'_g jest różnicą dwóch funkcyj x , z których pierwsza ma kształt $\frac{Ax'}{y'}$ od punktu g do B , względnie $\frac{Ax'}{y'} - P \frac{x' - x}{y'}$ na lewo od punktu g , a więc da się przedstawić dwiema liniami prostymi,—a druga jest $= H$.

Wykreślmy więc najprzód funkcją H (Tabl. V, fig. 30), czyli jak wiemy z poprzedniego linie AC''' i BC''' , znajdźmy punkt obojętny E' , gdzie $M'_g = 0$, jak poprzednio, wykreślmy BE' aż do k' i AK' , a rzędne między liniami $AC'''B$ i $AK'B$ dają nam M'_g .

Powierzchnię wpływową możemy inaczej jeszcze wykreślić sprowadzając wszystkie rzędne do poziomej $a'b'$, gdy zrobimy $c'e'' = C'C'''$, połączymy c'' z e' i przedłużymy prostą aż do k'' , wtedy $a'k''c''b'$ jest linią wpływową dla górnego momentu rdzennego. Zupełnie analogicznie znajdziemy linią wpływową dla dolnego momentu rdzennego (fig. 31).

Dla przekrojów, w których punkt rdzenny górny leży powyżej BC (fig. 28), lub dolny poniżej AC , nie ma odnośnych punktów obojętnych, lecz konstrukcja pozostaje ta sama (fig. 32), z tą tylko różnicą, że punkt e' służący, jak pierwiej, do konstrukcyi, nie jest tu punktem obojętnym, jak to z figury jasno wypływa.

Z kształtu linii wpływowej możemy bardzo łatwo oznaczyć w wiadomy sposób najniekorzystniejsze położenie systemu ciężarów skupionych, a z powierzchni wpływowej możemy oznaczyć maximum i minimum momentów dla ciężaru jednostajnie ciągłego.

I tak z figury 31 otrzymamy dla $P = 1$:

$$\xi : \frac{l}{2} = E'E'' : \frac{l}{4h} \quad \frac{l}{2} : (l - \xi) = C'C''' : E'E''$$

a z tych dwóch proporcyj:

$$\xi : (l - \xi) = C'C''' : \frac{l}{4h}, \text{ więc } C'C''' = \frac{\xi l}{4h(l - \xi)}$$

$$\text{a } C'C''' = c'e'' = \frac{l}{4h} - \frac{\xi l}{4h(l - \xi)} = \frac{l(l - 2\xi)}{4h(l - \xi)}$$

Teraz otrzymamy $\max (-M) = -y p e' c' b' =$
 $= -y p \frac{1}{2} (l - \xi) \frac{l(l - 2\xi)}{4h(l - \xi)}$, czyli:

$$\max (-M) = -\frac{p l y (l - 2\xi)}{8h} \dots \dots \dots (54).$$

Dla oznaczenia $\max (+M)$ mamy z figury (31):

$$e' c' : K' K'' = e' e' : e' K'$$

$$\frac{l(l - 2\xi)}{4h(l - \xi)} : K' K'' = \left(\frac{l}{2} - \xi\right) : (\xi - x),$$

$$\text{a stąd } K' K'' = \frac{(\xi - x) l (l - 2\xi)}{4h(l - \xi) \left(\frac{l}{2} - \xi\right)} = \frac{l(\xi - x)}{2h(l - \xi)};$$

$$\text{a } \max (+M) = y p a' K' c' = y p \frac{1}{2} \xi \frac{l(\xi - x)}{2h(l - \xi)} =$$

$$= \frac{p l y \xi (\xi - x)}{4h(l - \xi)} \dots \dots \dots (55)$$

Z fig. 31 widzimy też, że:

$$x : y = \xi : EE'' \quad (l - \xi) : \frac{l}{2} = EE'' : h$$

a z tych proporcji otrzymujemy:

$x(l - \xi) : y \frac{l}{2} = \xi : h$, więc $2h(l - \xi) = \frac{l y \xi}{x}$. Wsta-
 wiwszy to w równanie (55), otrzymamy:

$$\max (+M) = \frac{1}{2} p x (\xi - x) \dots \dots \dots (56),$$

a z równania (54) otrzymamy:

$$\max (-M) = -\frac{p x (l - \xi) (l - 2\xi)}{4\xi} \dots \dots \dots (57).$$

Dla przekrojów blisko klucza, dla których niema punktu obojętnego (fig. 32), mamy z figury:

$$K'K'' : c'c'' = (x - \xi) : \left(\frac{l}{2} - \xi\right) \quad e'e'' : K'K'' = : x$$

$$\text{a stąd: } e'e'' : c'c'' = \xi(x - \xi) : x \left(\frac{l}{2} - \xi\right),$$

$$\begin{aligned} \text{więc } e'e'' = c'c'' \frac{\xi(x - \xi)}{x \left(\frac{l}{2} - \xi\right)} &= \frac{l}{4h} \frac{l - 2\xi}{l - \xi} \frac{2\xi(x - \xi)}{x(l - 2\xi)} = \\ &= \frac{l\xi(x - \xi)}{2hx(l - \xi)}, \end{aligned}$$

a wstawivszy $2h(l - \xi) = \frac{ly\xi}{x}$, otrzymamy:

$$e'e'' = \frac{x - \xi}{y}, \text{ a stąd:}$$

$$\max(-M) = -py(e'c''b' + a'e'K'') = -py(e'c''b' + a'e''K'),$$

$$\text{ze względu zaś na równ. (57): } \max(-M) = -\frac{px(l - \xi)(l - 2\xi)}{4\xi} -$$

$$-py \frac{1}{2} e'e'' \cdot x = -\frac{px(l - \xi)(l - 2\xi)}{4\xi} - \frac{px(x - \xi)}{2} \quad (58),$$

$$\max(+M) = 0 \dots \dots \dots (59).$$

Dla punktu rdzennego d , który leży poniżej linii AC (fig. 33) nie ma także, jak wiemy, punktu obojętnego i moment jest dla każdego położenia siły dodatnim. I tu konstrukcyja linii wpływowej jest taka sama, a z powierzchni $a'k''e''b'$ możemy otrzymać łatwo $\max(+M)$.

$$\text{Z figury otrzymujemy, jak poprzednio, } C'c''' = \frac{\xi l}{4h(l - \xi)},$$

$$\text{więc } C''c''' = c'c'' = \frac{\xi l}{4h(l - \xi)} - \frac{l}{4h} = \frac{l(2\xi - l)}{4h(l - \xi)}.$$

Dalej otrzymamy z figury 33:

$$c'c'' : e'e'' = \frac{l}{2} : (l - \xi), \text{ a stąd } e'e'' = c'c'' \frac{l - \xi}{\frac{l}{2}} =$$

$$= \frac{l(2\xi - l)}{4h(l - \xi)} \cdot \frac{2(l - \xi)}{l} = \frac{2\xi - l}{2h}.$$

Wiemy, że $\max(+M) = y p (a' K'' e' + c'' e' b')$, a uwzględniając równanie (56) mamy:

$$\max(+M) = \frac{1}{2} p x (\xi - x) + \frac{1}{2} p y \frac{l}{2} \cdot \frac{2\xi - l}{2h},$$

$$\text{albo wstawwszy } 2h = \frac{l y \xi}{x(l - \xi)}$$

$$\max M = \frac{1}{2} p x \left[(\xi - x) + \frac{(2\xi - l)(l - \xi)}{\xi} \right]. \quad (60).$$

Ponieważ obciążenia dla $\max M$ i $\min M$ uzupełniają się do obciążenia zupełnego, więc otrzymamy moment dla ciężaru własnego, jeżeli dodamy $\min M$ do $\max M$ algebraicznie.

14. *Linie wpływowe sił poprzecznych dla łuków o trzech przegubach.* Najprzód będziemy szukać tak jak dla momentów punktu obojętnego. Jeżeli mamy oznaczyć linią wpływową dla punktu F (fig. 34), wykreślimy z A równoległą do stycznej w F aż do przecięcia się z linią BC w punkcie E . Punkt E jest punktem obojętnym, bo gdy w E działa siła P , wywołuje oddziaływanie D równoległe do osi w F , więc $Q=0$.

Niech P' i P'' oznaczają wypadkowe ciężarów na długości AF i FB , wtedy otrzymamy siłę poprzeczną w F :

$$Q = (A - P') \cos \varphi - H \sin \varphi = \sin \varphi [(A - P') \cot \varphi - H]. \quad (61).$$

Jeżeli więc siła $P = 1$ (fig. 35) działa na prawo od F , wtedy:

$$P' = 0, \text{ więc } Q = \sin \varphi (A \cot \varphi - H) = Q' \sin \varphi. \quad (62),$$

$$\text{gdy } Q' = A \cot \varphi - H = \frac{P(l - x)}{l} \cot \varphi - H \quad (63),$$

Kąt φ jest dla danego punktu F stałym, więc linią wpływową wykreślić możemy na mocy równania (63), z mnożnikiem $\sin \varphi$ w następujący sposób.

Wykreslmy najprzód ACB linią wpływową dla H (fig. 36), spuśmy z E pionową, która przetnie AC w punkcie e'

i połączmy Be' aż do a' , a wtedy rzędne między $f'B$ a ACB są proporcjonalne do siły poprzecznej Q , co łatwo poznamy z równania (63).

$$\text{Dla długości } Af \text{ mamy } Q' = (A - P) \cot \varphi - H = -\frac{Px}{l} \cot \varphi - H,$$

tu więc poprowadzić musimy Af'' równoległe do Ba' , aby otrzymać linię wpływową dla Q . Jeżeli ciężar przenosi się na łuk tylko w pewnych punktach za pomocą słupów, wtedy zmienia się linia wpływowa o tyle tylko, że zamiast stycznej w punkcie F bierzemy linię Fk (fig. 37a) i że zamiast linii pionowej f''/f' otrzymujemy tu prostą $f''k'$, którą znajdujemy spuściwszy z F i k pionowe, przez co otrzymujemy drugi punkt obojętny i . Linia ta wpływowa jest ważną dla całego pola Fk . Na figurze 37b widzimy konstrukcyę na wypadek, gdy E jest poniżej C . Dla przekrojów blisko klucza konstrukcyę staje się niepraktyczną, gdyż $\cot \varphi$ staje się dla małych φ bardzo wielką ilością, a mnożnik $\sin \varphi$ bardzo małym. Z równania (62) mamy wtedy $Q = Q' \sin \varphi = A \cos \varphi - H \sin \varphi$, więc dla bardzo małego φ będzie

$$Q = A \dots \dots \dots (64).$$

Linia wpływową możemy więc wykreślić jak dla belki zwykłej.

O liniach wpływowych dla łuków kratowych o trzech przegubach mówić tu nie będę, gdyż odnośna praca moja ogłoszoną była w „Dźwigni“, w r. 1879.

15. *Linie wpływowe momentów dla łuku o dwóch przegubach.* Równanie (52) $M'_g = \frac{M_g}{y'} = A \frac{x'}{y'} - H$ jest i tu

ważne. Linia wpływowa dla A składa się z dwóch prostych wedle równań (40) i (42), ale linia wpływowa dla H nie jest już prostą, ale linią krzywą, której dokładne oznaczenie jest dość żmudne. Nie pozostaje nam bowiem nic innego, jak dla rozmaitych położeń siły $P = 1$ wykreślać w sposób wyżej podany linie ciśnienia, oznaczać parcie poziome i na tej podstawie wykreślić linię wpływową dla parcia poziomego.

Znając dla pewnego położenia siły $P = 1$ linię ciśnienia, możemy według § 3 oznaczyć dla dowolnego przekroju wszystkie siły zewnętrzne, możemy więc w ten sposób otrzymać odrazu linie wpływowe dla momentów, sił poprzecznych

i parcia poziomego. Linie te wpływowe nie będą się już składać z prostych, gdyż łuk nie jest statycznie oznaczony.

Jeżelibyśmy znali linię wpływową dla H , to wykreślenie linii wpływowych dla momentów i sił poprzecznych dałoby się bardzo uprościć, jak to zaraz zobaczymy.

Wspomnieć tu musimy, że *Müller Breslau* otrzymuje dla łuku o dwóch przegubach w przybliżeniu $H = \frac{3}{4} \cdot \frac{Pab}{hl}$ (64) (fig. 38). Linia wpływowa dla parcia poziomego byłaby więc parabolą, której rzędna w środku wynosiłaby $\frac{3}{16} \frac{Pl}{H}$. Jest to jednak tylko przybliżenie, — dla dokładnego oznaczenia trzeba postępować w sposób wyżej wskazany.

Aby jednak poznać kształt linii wpływowej, przypuśćmy, że oznaczyliśmy linię wpływową dla H czy to według (64) czy też dokładnie, to wtedy według (52) możemy napisać $M'_g = \frac{M_g}{y'} = \frac{Ax'}{y'} - H$, gdy wszystkie litery zastrzymują to samo znaczenie.

Przypuśćmy, że acb (fig. 39) jest linię wpływową dla H , odetnijmy $aa' = P = 1$ i wykreślmy ba' , wtedy $ff' = P \frac{l-x}{l} = A$. Spuśćmy z g pionową i poprowadźmy z f' pionową, połączmy g' i p i zrobmy mn równoległe do pg , wtedy $an : x' = A : y'$, więc $an = \frac{Ax'}{y'}$.

Zrobmy $ff'' = an = \frac{Ax'}{y'}$, to otrzymamy M'_g odciągnąwszy od tego $H = ff''$, więc $M'_g = f''f''$. Ponieważ $\frac{Ax'}{y'}$ jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej x , więc da się przedstawić prostymi bk i ak , a powierzchnia kreskowana jest powierzchnią wpływową.

Zupełnie tak samo oznaczyliśmy linię wpływową dla M_a na figurze 40. Dla oznaczenia linii wpływowej dla sił poprzecznych zrobimy $aa' = P \cot \varphi = 1 \cdot \cot \varphi$ (fig. 41) i połączmy a' z b , a wtedy rzędne tej linii będą $A \cot \varphi$, a gdy od tego odciągniemy H , otrzymamy według (63) Q' .

Dla łuku bez przegubu jest linia wpływowa nie tylko dla H , ale także i dla A krzywą, więc najlepiej będzie,

gdy wprost na podstawie linii ciśnienia oznaczymy linie wpływowe dla momentów i sił poprzecznych, jak to na wstępie tego paragrafu wykazaliśmy.

VI. Obliczenie przekroju.

16. *Tymczasowe obliczenie przekroju.* W konstrukcji łuków statycznie nieoznaczonych ważną odgrywa rolę zmiana ciepłoty, gdyż w skutek niej powstaje parcie poziome, które uwzględnić musimy. Parcie to poziome zależne jest od przekroju i momentu bezwładności, którego chcąc obliczać łuk, jeszcze nie znamy. Zresztą do obliczenia każdego łuku, nawet i łuku o trzech przegubach, potrzebne są momenty rdzenne, a do znalezienia punktów rdzennych musimy znać przekrój. Dlatego musimy najpierw przyjąć tymczasowo pewien przekrój, obliczamy dlań punkty rdzenne i momenty rdzenne, uwzględnivszy dla łuków bez przegubu kluczowego zmianę ciepłoty, nakoniec obliczamy z równania (9) dokładny przekrój.

Ponieważ momenty M_e i M_d nie są w ogólności sobie równe, więc właściwie wypadałoby urządzić przekrój niesymetryczny, przez co oś nie byłaby w środku wysokości przekroju. Jednak nie uwzględniamy tego zwykle w obliczeniu i albo pomimo przekroju niesymetrycznego przypuszczamy oś w środku ścianki, albo też przyjmujemy przekrój symetryczny.

Dla tymczasowego przekroju możemy przyjąć M_r równe większemu z momentów i otrzymamy, jak dla belki

$$\text{zwyklej, } F' = \frac{M_r}{K h_1} - \frac{2 I_1}{h_1^2} \dots \dots \dots (65).$$

jeżeli F' oznacza przekrój nakładek (fig. 42), h_1 wysokość ścianki, a I_1 moment bezwładności ścianki i kątowników. Wiemy, że $M_r = M + P i$, więc:

$$F' = \frac{M + P i}{K h_1} - \frac{2 I_1}{h_1^2} \dots \dots \dots (66).$$

Dla łuku o trzech przegubach możemy dokładnie oznaczyć $\max M$ i $\max P$. Oznaczywszy te dwie wartości przyjmujemy ściankę i kątowniki, obliczamy I_1 i F_1 powierzchnię

ścianki i kątowników. Wartość na i przyjmujemy trochę większą niż $\frac{2 I_1}{h_1 F_1}$, wstawiamy w (66) i obliczamy przekrój nakładki F' , przyjmąwszy tymczasowo $K = 650$ kgr.

$$\text{Teraz mamy } I = I_1 + 2 F' a^2 \dots \dots \dots (67)$$

$$F = F_1 + 2 F' \dots \dots \dots (68)$$

$$i = \frac{2 I}{h F} \dots \dots \dots (69),$$

a tę wartość na i wstawiamy znowu w (66) i otrzymujemy dokładniejszą wartość na F' , poczem możemy wyrysować linie rdzenne i obliczać po kolei przekroje.

Dla łuków o dwóch przegubach lub bez przegubu obliczamy $\max M$ i $\max P$ w przybliżeniu, albo według przybliżonych wzorów *Müllera*, które wyżej podałem,—albo przypuszczając trzy przeguby, przyjmujemy jak wyżej kątowniki i ściankę i obliczamy z (66) przekrój i nakładki. Mając teraz przybliżony przekrój, możemy dokładnie obliczyć siły zewnętrzne z powodu obciążenia i z powodu zmiany ciepłoty, a z tego obliczyć dokładnie przekrój.

17. *Obliczenie dokładne przekroju.* Przy dokładnem obliczeniu przekroju używamy tych samych wzorów, co w poprzednim paragrafie, tylko liczymy osobno przekrój górnej i dolnej nakładki, a potem wykreslnie oznaczamy, jak dla belki zwykłej, długości nakładek.

Takie nateżenie dopuszczalne nie będzie już stałe, tylko według *Weyrauch*a przyjmiemy dla żelaza kutego:

$$K = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M_r \min}{M_r \max} \right) \dots \dots \dots (70).$$

Nity obliczamy zupełnie jak dla belki zwykłej, oznaczywszy według poprzedniego maximum siły poprzecznej.

18. *Cieźar własny mostów łukowych.* Pozostaje nam jeszcze podać przybliżony cieźar własny mostów łukowych, gdyż przy obliczeniu łuku musimy go także uwzględnić, *Müller* podaje zawiłe wzory, według których możemy w każdym wypadku cieźar własny obliczać.

Zamiast tego ograniczymy się tu na podaniu następnej tabliczki według *Engessera*, sądząc, że zbyt subtelne ocenienie cieźaru własnego nie stoi w żadnym stosunku z dokła-



dnością, którą osiągnąć możemy przy obliczaniu mostów łukowych.

Według *Engessera* możemy przyjąć jako ciężar własny belek głównych, wraz z usztywnieniem poziomem, bez ciężaru pomostu następujące wartości.

Dla mostów kolejowych na metr bieżący jednego toru:

$l = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$ m.
 $g = 450, 750, 1050, 1350, 1650, 1950, 2250, 2560, 2890, 3280$ kgr.

Dla mostów drogowych na metr bieżący mostu:

$$g = \gamma b + 35 \text{ z kgr.} \quad (71),$$

gdzie γ jest współczynnikiem, b szerokością mostu w metrach, z zaś oznacza ilość belek głównych.

Współczynnik γ możemy oznaczyć z następującej tabliczki:

dla l	= 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 m.
γ dla pomostu żwirowego	= 32, 62, 94, 129, 168, 209, 255, 300, 350, 410
γ „ „ z bali	= 28, 53, 80, 110, 144, 180, 220, 260, 305, 355

Dla mostów łukowych o trzech przegubach poleca *Engesser* przyjęcie ciężaru własnego o 15% mniejszego.

VII. Literatura.

19. *Literatura mostów łukowych.* Na zakończenie niniejszej pracy podam tutaj chronologiczne zestawienie tytułów wielu najnowszych prac o mostach łukowych, bez względu na to, czy z nich przy układaniu tego szkicu korzystałem czy nie:

- 1) *Scheffler.* Gitter- und Bogentreger. 1862.
- 2) *Winkler.* Elasticitäts und Festigkeitslehre. 1867.
- 3) *Fränkel.* Artykuł w „Civilingenieur“. 1867.
- 4) *Winkler.* „ „ „Mittheilungen des Ing. und Arch. Ver. f. Böhmen“. 1868.
- 5) *Winkler.* Artykuł w „Zeitschrift des österr. Ing. und Arch. Vereins“. 1872.
- 6) *Grasshof.* Theorie der Elasticität und Festigkeit. 1873.
- 7) *Mohr.* Artykuł w „Zeitschrift des hann. Ing. und Arch. Vereins“. 1874.



- 8) *Keck*. Artykuł tamże.
- 9) *Steiner*. „ w „Allgemeine E
- 10) *Levy*. La statique graphique et constructions. 1879.
- 11) *Schäffer*. Artykuł w „*Erbkam's* wesen“. 1875.
- 12) *Culmann*.. Graphische Statik. I.
- 13) *Ritter*. Artykuł w „*Erbkam's* Z sen“. 1876.
- 14) *Steiner*. Artykuł w „Allgemeine Bauzeitung“. 1878.
- 15) *Klasen*. Graphische Statik. 1878.
- 16) *Perrodil*. Resistance des voûtes et des arcs metalliques. 1879.
- 17) *Winkler*. Artykuł w „Zeitschrift des Ing. und Arch. Ver. zu Hannover“. 1879.
- 18) *Thullie*. Mosty łukowe o trzech zawiasach. „Dźwignia). 1879.
- 19) *Hulewicz*. Obliczenie wytrzymałości łuków sztywnych, artykuł w „Pamiętniku tow. nauk ścisłych w Paryżu“ z r. 1879.
- 20) *Engesser*. Theorie und Berechnung der Bogenfachwerksträger ohne Schertelgelenk. 1880.
- 21) *Müller-Breslau*. Bogenbrücken. 1880.
- 22) *Eddy*. Constructionen aus der graphischen Statik (tłómaczenie z angielskiego). 1880.
- 23) *Burr*. On the stresses in roof and bridge trusses 1880.
- 24) *Am. Eude*. The theory of arches — artykuł w „Engineering“. 1881.

KSIĘGARNIA

ANTYKWARIAT


 B 44420

 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX


POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



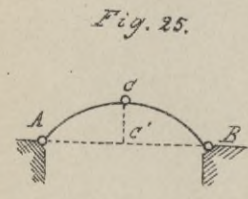
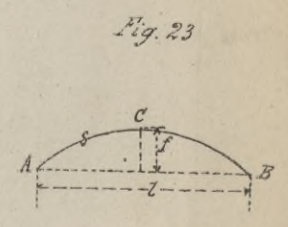
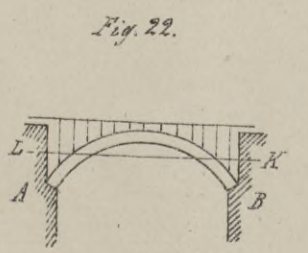
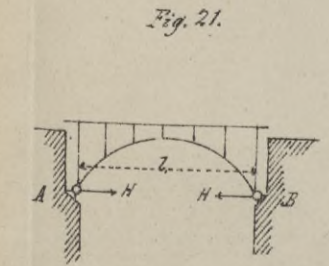
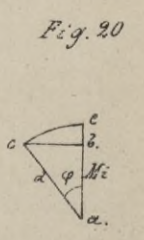
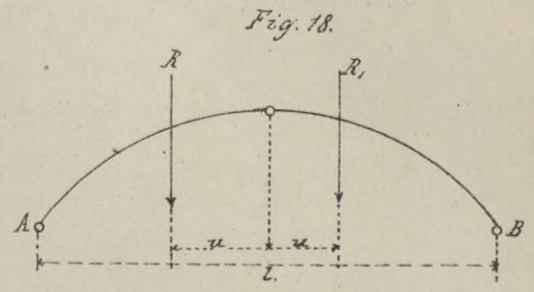
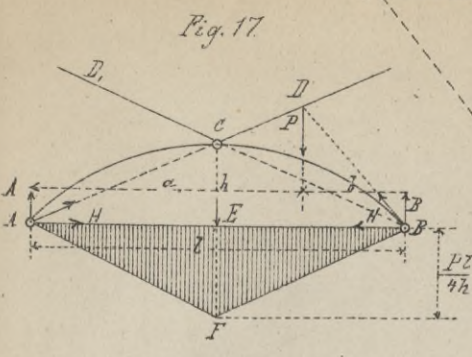
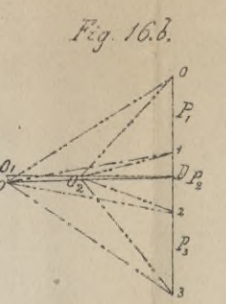
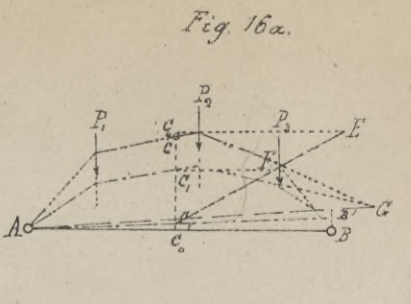
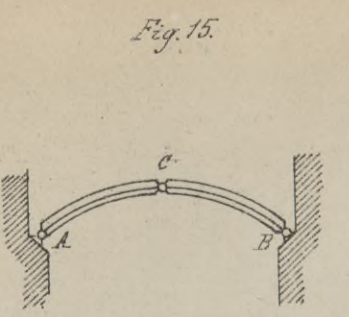
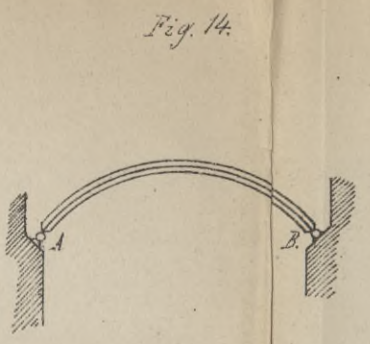
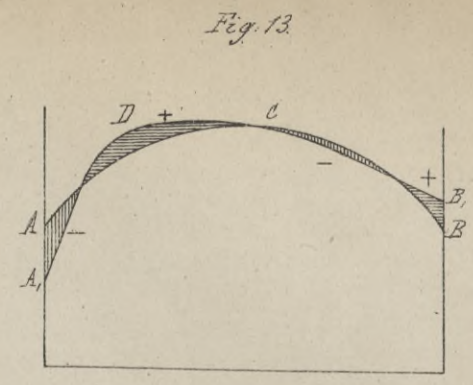
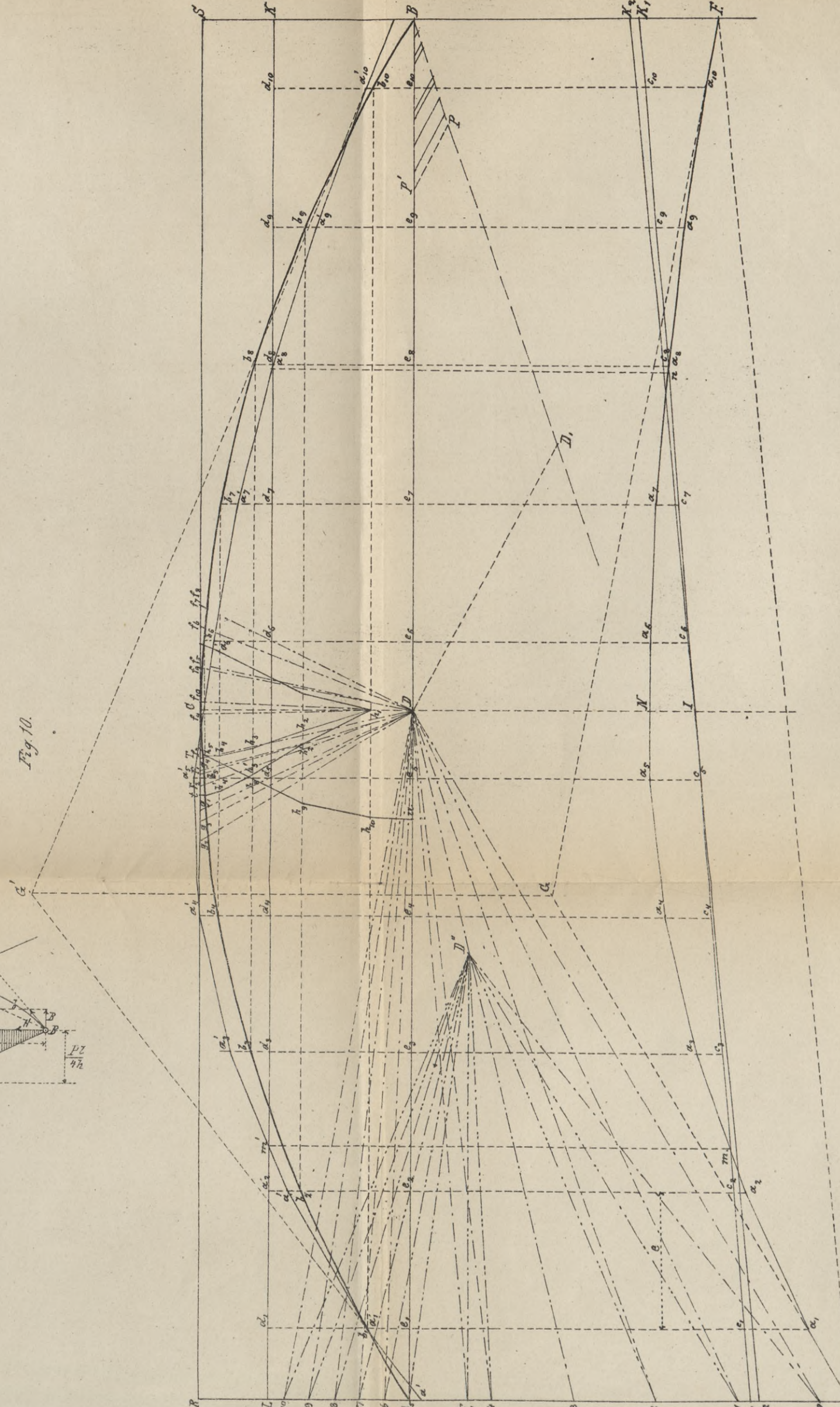
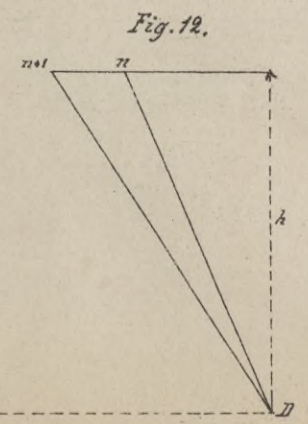
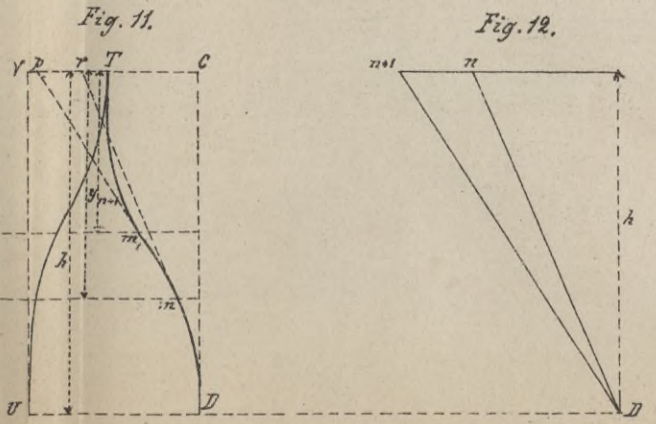
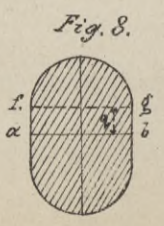
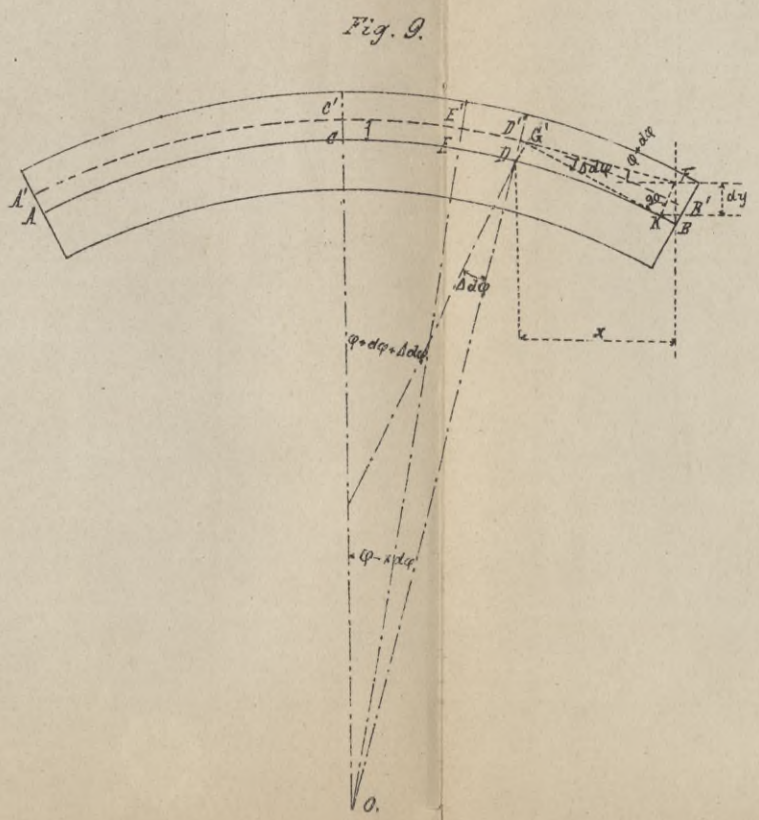
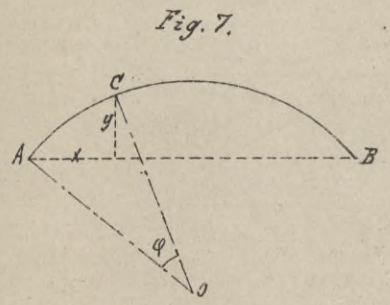
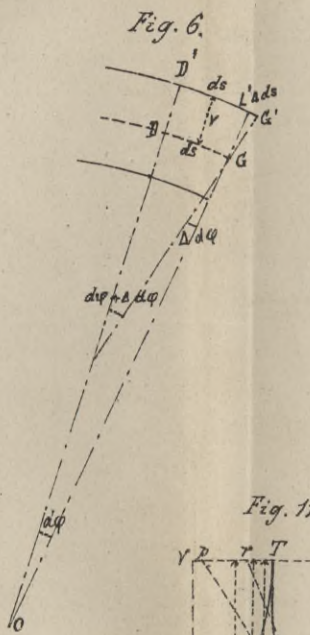
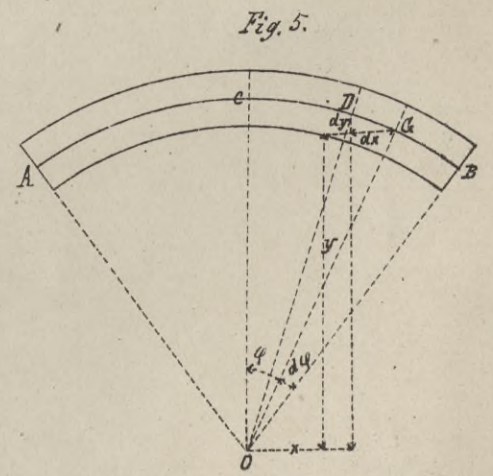
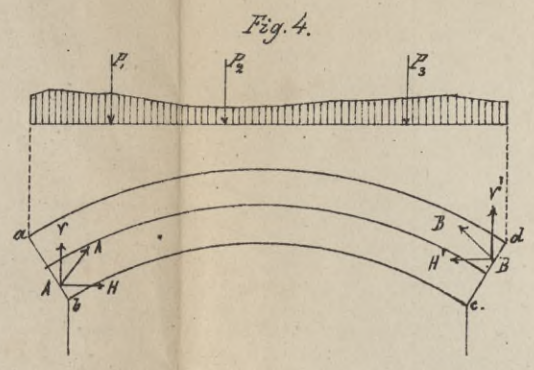
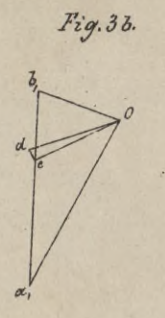
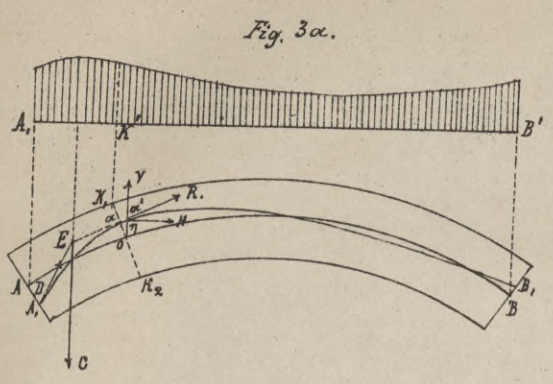
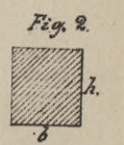
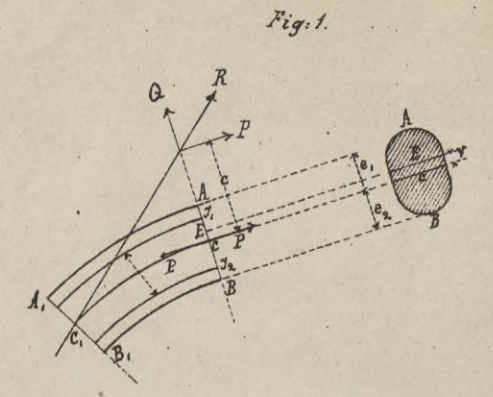
L. inw.

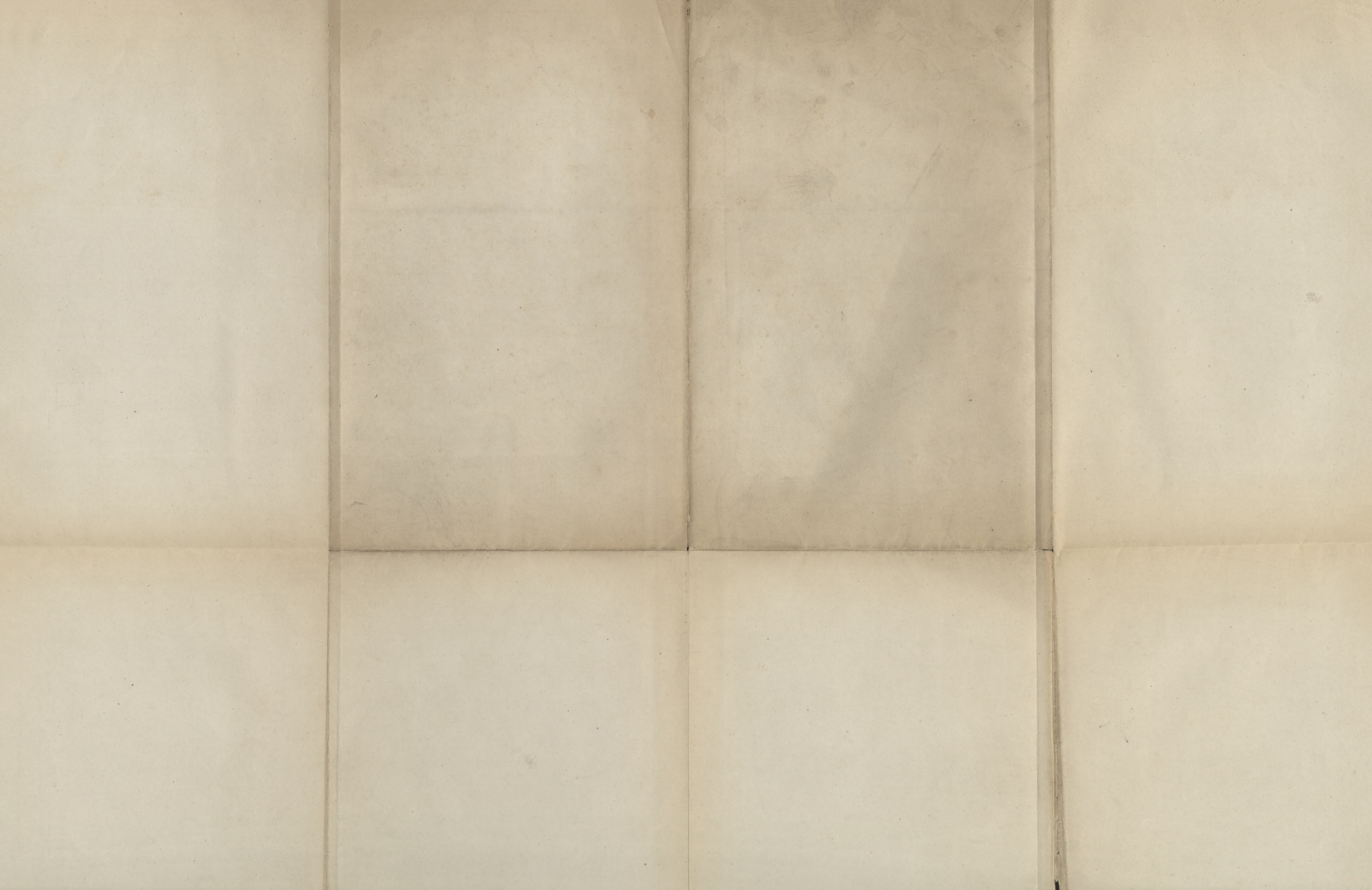
32698

Kdn. Zam. 480/55 20.000

482

MOSTY ŁUKOWE.







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-32698

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299771