WEBERS ILLUSTRIRTE KATECHISMEN.

No 71

Schurig.

Algebra.

4. Auflage.

3 Mark.

LEIPZIG, VERLAG von J. J. WEBER.

Metzger.

Katechismus der Algebra.

Katechismus

der

Algebra.

Vierte Auflage.

Vollständig neu bearbeitet

von

Richard Schurig.

Leipzig.
Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber.
1895.

Vorwort.

Das bisher unter dem Titel „Katechismus der Algebra“ erschienene Buch ist in seinen vorangegangenen drei Auflagen von den verdienstvollen Mathematikern Herrmann und Heym bearbeitet worden. Nach dem Tode der genannten Verfasser wurde dann seitens der Verlagshandlung mit Neubearbeitung und Herausgabe einer vierten Auflage der Unterzeichnete betraut. Letzterer hat bei Übernahme dieses Auftrags aus guten Gründen von der rein katechetischen Form, welche er überhaupt für die Darstellung mathematischer Wahrheiten nicht geeignet erachtet, absehen zu müssen geglaubt. Jedenfalls dürfte das Buch in vorliegender Gestalt sowohl hinsichtlich seiner theoretischen Gliederung als seiner praktischen Durchführung nur gewonnen haben.

Noch mag bemerkt sein, daß der Verfasser bei gegenwärtiger Arbeit sich nicht nur von besonderer Rücksichtnahme auf das Selbststudium leiten ließ, sondern daß er auch anderseits eine nutzreiche Grundlage für den mathematischen Unterricht an Gymnasien und verwandten Lehranstalten hat schaffen wollen.

Richard Schurig.

Inhaltsverzeichnis.

Berichtigungen.

Seite 16, 5. Zeile von unten: (d. i. $^{20}/_{1}$), statt (d. i. $^{1}/_{20}$).

Seite 32, 9. Zeile von oben: $= + {}^{1}/_{6}$, statt $= + {}^{1}/_{6}$;

Seite 48, Zeile vor §18: folglich $= \frac{3a^2}{4b^3} \cdot \frac{2}{b}$, statt: folglich $= \frac{3a^2}{2b^3} \cdot \frac{2}{b}$

Seite 56, 7. Zeile v. ob.: $-\frac{3}{4(4x+5)}$, statt $-\frac{3}{4(4x-5)}$.

Seite 65, 2. Zeile von unten: $\sqrt{2}$, statt $\sqrt{3}$.

Seite 66, 2. Zeile von oben: $\sqrt{2} = 1._{41421} \ldots$, statt $\sqrt{3} = 1._{73205} \ldots$

Seite 71, genau in der Mitte der Seite: …(innerhalb der Wurzel!)], statt (innerhalb der Wurzel!].

Seite 137, 2. Zeile von oben: In letzterem …., statt In ersterem …

Seite 137, 3. Zeile von oben: in ersterem …., statt in letzterem ….

Katechismus der Algebra.

§ 1. Einleitende Begriffe.

I. Größe heißt alles, was größer oder kleiner gedacht werden kann.

Mathematik ist die Lehre von den Größen. Der Einteilung der Größen in Zahlgrößen (diskrete Größen) und Raumgrößen (stetige Größen — Körper, Flächen, Linien) gemäß teilt man die Mathematik ein in Arithmetik, Lehre von den Zahlgrößen, und in Geometrie, Lehre von den Raumgrößen.

II. Addieren (im allgemein mathematischen Sinne) heißt eine Größe suchen, die so groß ist als mehrere andere gegebene Größen zusammengenommen. Diese zu addierenden Größen werden Summanden (Addenden, Posten) genannt. Das Resultat der Addition (der Inbegriff der Summanden) heißt Summe. Das Zeichen für die Addition ist $+$, gelesen „plus". Das Zeichen für die Gleichheit zweier Größen ist $=$ (Gleichheitszeichen).

III. Die Einheit als Zahl wird mit 1 (eins) bezeichnet. Zahl ist eine Summe von (gleichartigen) Einheiten. Aus $1 + 1 + 1$ entsteht die Zahl 3.

IV. Die Form, durch welche die Gleichheit zweier Größen veranschaulicht wird, heißt Gleichung. Eine solche ist z. B. $7 + 2 = 9$, gelesen: „7 plus 2 ist gleich 9". Die Zeichen für die Ungleichheit sind $>$ (größer als) und $<$ (kleiner als).

z. B. $7 > 3$ (7 ist größer als 3). Die Formen $7 > 3$, $4 < 10$ werden Ungleichungen genannt.

V. Denkt man sich eine Größe als Summe mehrerer anderen Größen, so nennt man jene Ganzes, letztere Teile (des Ganzen). 12 ist daher Ganzes, wenn man sich diese Zahl z. B. als $9 + 3$ denkt; 9 und 3 sind alsdann die Teile der 12.

VI. Durch Addition der abstrakten Einheiten entsteht die natürliche (reine) Zahl. Die Reihe, welche durch successives Addieren von Einheiten entsteht, also die Reihe 1, 2, 3, 4, 5 ... wird natürliche Zahlenreihe genannt. Die Zahlen sind speziell (bestimmt), wenn sie unveränderlich dieselbe Größe beibehalten. Man schreibt dieselben gewöhnlich mit den „arabischen Ziffern"; z. B. $5^6/_7$. Allgemeine Zahlen, oder „Buchstaben", sind dagegen Zeichen (gewöhnlich Buchstaben), unter welchen man sich jede spezielle Zahl vorstellen kann. So kann $a + a + a = 3 \text{mal } a$ z. B. $7 + 7 + 7 = 3 \text{mal } 7$ oder $^5/_6 + {}^5/_6 + {}^5/_6 = 3 \text{mal } {}^5/_6$ bedeuten. So lange noch nicht ein spezieller Fall vorliegt, bleibt es noch unbestimmt, welche spezielle Zahl der Buchstabe vorstellt. Multipliziert man z. B. die Länge eines Rechtecks mit der Breite, so erhält man den Flächeninhalt des Rechtecks. Bezeichnet man daher die Länge mit a, die Breite mit b, so ist „a mal b" der Ausdruck für den Flächeninhalt eines jeden Rechtecks. Ist nun der Inhalt eines Rechtecks zu bestimmen, dessen Länge 18 m und dessen Breite 10 m beträgt, so geht der Ausdruck „a mal b" in „18 mal 10", also 180 (Quadratmeter) über.

VII. Es giebt zweierlei Arten von Gleichungen: 1) unbedingte (analytische, identische), bei welchen die linke Seite (links vom Gleichheitszeichen) der rechten gleich ist, ohne besondere Bedingungen in Bezug auf den Wert der Größen; z. B. $4 + 9 = 13$; $x + x + x = 3 \text{mal } x$; $a = a$. Mit Ausnahme der zuletzt aufgeführten einfachsten unbedingten Gleichung ist die rechte Seite nur eine andere Form der linken, daher ist auch $x + x + x = 3 \text{mal}\ x$ für jeden nur möglichen Wert von x richtig. 2) **Bedingte** (synthetische, algebraische Gleichungen, Bestimmungsgleichungen) sind solche, bei welchen die linke Seite der rechten nur für gewisse Werte der vorläufig durch einen Buchstaben (z. B. x) ausgedrückten unbekannten Zahl gleich ist. So ist $x + 3 = 7$ eine bedingte Gleichung, bei welcher die linke Seite der rechten nur für $x = 4$ gleich ist (nur $x = 4$ „genügt der Gleichung"). Eine (bedingte) Gleichung **auflösen** heißt einen Wert für die darin enthaltene Unbekannte (x) finden, der die linke Seite der rechten gleich macht; z. B. ist $x + 3 = 7$ aufgelöst, wenn $x = 4$ gefunden ist.

VIII. Dieser Einteilung der Gleichungen gemäß wird die Arithmetik eingeteilt in

A. **Zahlenlehre**, die Lehre von den unbedingten Gleichungen. Dieselbe zerfällt in:

1) Spezielle Zahlenlehre (Zifferrechnen, Elementarrechnen): das Rechnen mit speziellen Zahlen (z. B. $5 + 3 = 8$).

2) **Allgemeine Zahlenlehre** (oder „Buchstabenrechnung"): das Rechnen mit allgemeinen Zahlen (z. B. $x + x = 2 \text{mal}\ x$).

B. **Algebra** (lies: álgĕbrā, das g wie im Worte Gold) ist die Lehre von den bedingten Gleichungen (z. B. $x + 3 = 7$). Da die „Auflösung der Gleichungen" unmittelbar mit dem Begriff „bedingte Gleichung" zusammenhängt, so kann Algebra auch als Lehre von der Auflösung der Gleichungen erklärt werden.

Algebra und Buchstabenrechnung sind mithin verschiedene Begriffe, dennoch ist es gebräuchlich, Algebra als den Inbegriff von Buchstabenrechnung und Auflösung der Gleichungen zu verstehen. Dies läßt sich nur insofern rechtfertigen, als die Buchstabenrechnung doch nur Vorbereitung zur Algebra ist.

§ 2. Die sieben Grundrechnungsarten (Spezies).

I. Addition. Addieren heißt (im arithmetischen Sinne) eine Zahl suchen, die eben so groß ist, als mehrere gegebene Zahlen zusammengenommen. „Summand, Summe, +“ haben dieselbe Bedeutung wie in § 1, II. Da der Ausdruck $7 + 3$ die Einheiten schon enthält, welche addiert werden sollen, so unterscheidet man $7 + 3$ als formelle (oder theoretische) Summe, 10 als materielle (oder praktische) Summe.

II. Subtraktion. Aus der Addition (z. B. $7 + 2 = 9$) kann durch Umkehrung eine neue Spezies, die Subtraktion, abgeleitet werden, wenn man das Resultat (die Summe 9) und einen beliebigen Summand (z. B. 2) als gegeben betrachtet und den anderen Summand (7) sucht. Geschrieben: $9 - 2 = 7$. Die in der Addition als Summe auftretende Zahl (9) heißt in der Subtraktion: Minuend, der gegebene Summand (2): Subtrahend, das Resultat der Subtraktion (7): Rest (oder Differenz, Unterschied). Das Zeichen für die Subtraktion ist — (gelesen: minus). $9 - 2$ der formelle Rest. Subtrahieren heißt (der Entwickelung zufolge) eine Zahl (7) suchen, die zum Subtrahend (2) addiert, den Minuend giebt.

III. Multiplikation. 1) Bei der Addition sind die Summanden gewöhnlich verschieden. Sind sie gleich, z. B. $7 + 7 + 7 = 21$, so kürzt dies die Multiplikation durch $7 . 3 = 21$ (oder $7 \times 3 = 21$) ab; gelesen: „7 mal 3 = 21“. Multiplikation ist mithin die abgekürzte Addition gleicher Summanden. Der Summand (7) geht alsdann über in den Multiplikand, die Anzahl der Summanden (3) wird zum Multiplikator, die Summe (21) zum Produkt (Resultat der Multiplikation); $7 . 3$ das formelle Produkt. Das Nebeneinanderstellen der Zahlen zeigt ihre Multiplikation an; der Punkt dient nur ausnahmsweise als Zeichen für die Multiplikation, um etwaige Verwechselungen zu vermeiden. Um z. B. 3 mit a zu multiplizieren, schreibt man 3 a („3 mal a"); 3 . 8 schreibt man nur, um dieses Produkt von der Zahl 38 zu unterscheiden. Multiplikand und Multiplikator werden gewöhnlich nicht unterschieden, sondern mit dem Ausdruck Faktoren bezeichnet. In $2 . 3 . 5 = 30$ ist 2 der erste, 3 der zweite, 5 der dritte Faktor.

2) Die Multiplikation ist zuweilen auf eine Addition zurückzuführen; z. B. kann 3 . 4 als $3 + 3 + 3 + 3$ oder auch als $4 + 4 + 4$ aufgefaßt werden; 2 . a (oder 2 a) als $a + a$.

3) Um einen zusammengesetzten Ausdruck, z. B. $8 - 3$, als Ganzes (als etwas Zusammengehöriges, als eine Zahl) aufzufassen, setzt man denselben in Klammer: ( ), [ ], { }. Soll z. B. 3 mit $8 + 5$ multipliziert werden, so schreibt man $3 (8 + 5)$ mit der Bedeutung $3 . 13 = 39$; $3 . 8 + 5$ würde $24 + 5 = 29$ bedeuten. Soll $7 - 4$ mit 5 multipliziert, das Produkt von 21 subtrahiert und der Rest mit 10 multipliziert werden, so ist zu setzen $10 . [21 - 5 (7 - 4)]$, d. i. $10 (21 - 5 . 3) = 10 (21 - 15) = 10 . 6$.

IV. Division. 1) Kehrt man die Multiplikation in gleicher Weise um, wie die Addition behufs der Bildung der Subtraktion, so würde aus dem Produkt und einem beliebigen Faktor der andere Faktor zu suchen sein. Aus $7 . 3 = 21$ bildet daher diese neue Spezies, die Division genannt wird,

entweder $21 : 7 = 3$, oder $21 : 3 = 7$.

Das Produkt (21 in der 1. Gleichung) geht hierbei über in den Dividend, der gegebene Faktor (7) in den Divisor, der gesuchte Faktor (3) in den Quotient (das Resultat der Division). 21 : 7 ist der formelle Quotient. Das Zeichen der Division ist :, gelesen „dividiert durch". Als Divisionszeichen dient auch der Bruchstrich, jedoch hat dieser eine speziellere Bedeutung, indem er die zu dividierenden Zahlen als einen Wert hinstellt, also die Klammer vertritt. $^5/_8$ (gelesen: „5 Achtel") bedeutet daher (5 : 8). Ein mit dem Bruchstrich geschriebener Quotient wird „Bruch" (z. B. $^5/_8$), der Dividend alsdann Zähler (5), der Divisor: Nenner (8) genannt. $\frac{a}{b}$ liest man kurzhin „a durch b".

2) Aus der Additionsgleichung 7 ₰ + 7 ₰ + 7 ₰ = 21 ₰ bildet die Multiplikation 7 ₰ . 3 = 21 ₰. Diese führt zu zwei verschiedenen Divisionen, jenachdem man 21 ₰ und 3 oder 21 ₰ und 7 ₰ als gegeben betrachtet und den anderen Faktor sucht. Daher:

a) 21 ₰ : 3 = 7 ₰. Ist der Divisor (3) unbenannt, so ist der Quotient (7 ₰) gleichartig mit dem Dividend (21 ₰) und drückt alsdann einen Teil aus (der 3. Teil von 21 ₰ ist 7 ₰).

b) 21 ₰ : 7 ₰ = 3. Ist mithin der Divisor gleichartig mit dem Dividend, so ist der Quotient (3) eine unbenannte Zahl und drückt ein Enthaltensein oder Messen aus (7 ₰ ist in 21 ₰ 3mal enthalten, oder das Maß 7 ₰ liegt 3mal in 21 ₰).

c) Einen solchen „Quotient aus 2 gleichartigen Größen" (z. B. 21 ₰ : 7 ₰, oder $\frac{AB}{CD}$, wenn AB und CD beliebige Linien vorstellen) nennt man Verhältnis. Da 3 = 21 ₰ : 7 ₰ und auch 3 = 12 ℳ : 4 ℳ, so geht in diesem Falle die Gleichung 3 = 3 über in: „21 ₰ : 7 ₰ = 12 ℳ : 4 ℳ". Eine solche „Gleichung zwischen zwei Verhältnissen wird Proportion" genannt.

V. Das Potenzieren. 1) Wie die Multiplikation die abgekürzte Addition gleicher Summanden, so ist das Potenzieren die abgekürzte Multiplikation gleicher Faktoren. Statt 7 . 7 . 7 = 343 schreibt das Potenzieren:
$7^3 = 343$, gelesen „7 zur dritten = 343" (statt 7 zur 3. Potenz), oder auch „7 mit 3 potenziert = 343".

Der Faktor (7) wird zur Basis (Grundzahl, Dignand), die Anzahl der Faktoren (3) zum Exponent, das Produkt (343) zur Potenz. (7^3 die formelle Potenz.) Den Exponent schreibt man gewöhnlich mit kleinerer Schrift rechts oben an die Basis. Statt $9 . 9 . 9 . 9$ (berechnet $81 . 9 . 9 = 729 . 9 = 6561$), $a . a . a$ (oder aaa), $(b + c)(b + c)$ schreibt man also 9^4, a^3, $(b + c)^2$; gelesen: „9 zur vierten“, „a zur dritten“. Die 2. Potenz wird auch Quadrat, die dritte Kubus, die 4. Biquadrat genannt. $(a + b)^2$ liest man gewöhnlich „a + b Quadrat“ und nur ausnahmsweise „a + b zur zweiten“. a^3 gelesen: „a zur dritten“ oder „Kubus von a“. Quadrieren oder „auf die 2. Potenz erheben“ heißt die 2. Potenz einer Zahl berechnen (11 quadriert giebt $11 . 11 = 121$); kubieren heißt die 3. Potenz berechnen (10 kubiert giebt $10 . 10 . 10 = 1000$). Um unbequemes Lesen zu vermeiden, benutzt man das Wort „hoch“; z. B. a^{1-z}, gelesen: „a hoch 1 minus z“.

2) Das Potenzieren ist zuweilen auf eine Multiplikation zurückzuführen. Z. B. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$.

VI. Das Radizieren. Da $7 + 3 = 3 + 7$, $7 . 3 = 3 . 7$, so läßt das Addieren nur eine Umkehrung: die Subtraktion, die Multiplikation nur eine Umkehrung: die Division zu. Weil aber 3^2 nicht $= 2^3$ (denn jenes ist 9, dieses 8), so muß das Potenzieren (z. B. der Ausdruck $10^3 = 1000$) zu zwei verschiedenen Umkehrungen führen. Sucht man aus der Potenz (1000) und dem Exponent (3) die Basis (10), so heißt die Rechnungsart: Radizieren oder Wurzelausziehen; wird dagegen aus der Potenz (1000) und der Basis (10) der Exponent (3) gesucht, so heißt die Rechnungsart: Logarithmieren (siehe VII).

Das Radizieren bildet aus der Potenz $10^3 = 1000$ den Ausdruck $\sqrt[3]{1000} = 10$, gelesen: „dritte Wurzel aus 1000 = 10“, oder „1000 mit 3 radiziert = 10“. Die Potenz (1000) wird hierbei zur Wurzelbasis (Radikand), der Potenzexponent (3) zum Wurzelexponent (oder Radikator), die Basis (10) der Potenz zur Wurzel. ($\sqrt[3]{1000}$ die formelle Wurzel.) Radizieren heißt also eine

Zahl suchen, die, mit dem Wurzelexponent potenziert, die Wurzelbasis giebt. $\sqrt[5]{100\,000}$ ist $= 10$, weil $10^5 = 100\,000$; $\sqrt[4]{^1/_{16}} = {^1/_2}$, weil $(^1/_2)^4 = {^1/_2} \cdot {^1/_2} \cdot {^1/_2} \cdot {^1/_2} = {^1/_{16}}$. Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ist aus dem r des Wortes radix (Wurzel) entstanden. Statt $\sqrt[2]{}$ schreibt man stets nur $\sqrt{}$ und liest dieses Zeichen „Quadratwurzel". Aus $8^2 = 64$ z. B. entsteht $\sqrt{64} = 8$ (d. i. $\sqrt[2]{64}$), gelesen: „Quadratwurzel aus 64", auch wohl nur „Wurzel aus 64", wenn andere Wurzeln nicht in Betracht kommen. $\sqrt[3]{125} = 5$ wird „dritte Wurzel aus 125" oder „Kubikwurzel aus 125" gelesen.

VII. Das Logarithmieren (oder Exponentiieren) sucht aus der Potenz (in Bezug auf $10^3 = 1000$, also aus 1000) und der Basis (10) den Exponent (3). Geschrieben: ${}^{10}\lg 1000 = 3$; gelesen: „Der Zehn-Logarithmus von $1000 = 3$" oder „1000 mit 10 logarithmiert $= 3$". Die Potenz (1000) wird zum Numerus (oder absoluten Zahl, Logarithmand), die Basis (10) zur Basis (oder Grundzahl) des Logarithmus, der Exponent (3) zum Logarithmus. Die Basis schreibt man links oben an die Buchstaben lg (Abkürzung für Logarithmus). Logarithmieren heißt also eine Zahl (3) suchen, welche als Exponent die Basis (10) auf eine Potenz (die 3. Potenz) erhebt, welche dem Numerus (1000) gleich ist. Daher ${}^6\lg 36 = 2$, weil $6^2 = 36$; ${}^{\frac{1}{3}}\lg {^1/_{81}} = 4$, weil $(^1/_3)^4 = {^1/_3} \cdot {^1/_3} \cdot {^1/_3} \cdot {^1/_3} = {^1/_{81}}$.

Anmerkung. Setzt man wieder die Elemente der Potenz einander gleich (z. B. $s^{8^{8}}$), so ließe sich wohl der Ausdruck abkürzen, jedoch könnte man nicht mit dieser Abkürzung rechnen, da 3^2 nicht $= 2^3$ ist. Mithin giebt es nur drei sogen. „direkte Spezies": Addition, Multiplikation und Potenzieren, und vier „indirekte": Subtraktion, Division, Radizieren, Logarithmieren.

§ 3. Die Hauptsätze der Spezies.

Die Lehrsätze der ersten Spezies sind zwar schon in dem als bekannt vorausgesetzten elementaren Rechnen in Anwendung gekommen, jedoch im allgemeinen mit so wenig mathematischer Begründung, daß sie hier, wo es erforderlich, mit strengerer Beweisführung als notwendige Grundlage für die Lehren der Buchstabenrechnung und Algebra wiederholt werden müssen. — „Bew.“ bedeute stets Beweis.

I. Addition. 1) Die mehrere Summanden einschließende Klammer kann beliebig weggelassen und mehrere Summanden beliebig in Klammer gestellt werden. $5 + (4 + 3) = 5 + 4 + 3 = (5 + 4) + 3$. Um eine Summe zu berechnen, hat man daher immer je 2 Summanden in eine Zahl zu vereinigen; z. B. $3 + 5 + 9 = 8 + 9 = 17$.

2) Die Summanden einer Summe können beliebig angeordnet werden; z. B. $6 + 7 + 4 = 6 + 4 + 7$.

3) Nur gleichartige Größen können addiert werden; z. B. 8 ℳ + 3 ₰ + 12 ℳ + 4 ₰ = 20 ℳ + 7 ₰.

II. Subtraktion. Vorbemerkung. Die Beweise für die Sätze der indirekten Spezies sind ohne Ausnahme dadurch zu führen, daß man auf die zugehörige direkte Spezies zurückgeht. Die Subtraktion ist daher richtig, wenn „Rest + Subtrahend = Minuend“.

1) Ein Summand hebt sich mit dem ihm nachfolgenden gleichen Subtrahend. Z. B. $(8 + 3) - 3 = 8$, oder $8 + 3 - 3 = 8$. Bew. Rest (8) + Shd. (3) $= 8 + 3$ = Minuend.

2) Ein Summand hebt sich mit dem ihm vorausgehenden gleichen Subtrahend. $(9 - 4) + 4 = 9$, oder $9 - 4 + 4 = 9$. Bew. Da die Subtraktion $9 - 4 = (9 - 4)$ unbedingt richtig ist, so muß auch „Rest + Shd. = Min.“ sein, d. i. (mit dem Rest $9 - 4$ der rechten Seite, dem Min. 9 und Shd. 4 links): $(9 - 4) + 4 = 9$.

3) Die Anordnung der Summanden und Subtrahenden ist beliebig. $13 + 11 - 3 = 13 - 3 + 11$; $17 - 8 - 7$

$= 17 - 7 - 8$. Denn Rest $13 - 3 + 11$ + Shd. 3 = Minuend $13 + 11$.

4) Bildet man nach einem Additionszeichen eine Klammer, so bleiben die in die Klammer zu setzenden Zahlen unverändert. $7 + 14 - 4 = 7 + (14 - 4)$. Bew. Rest $7 + (14 - 4)$ + Shd. $4 = 7 + [(14 - 4) + 4]$ $= 7 + 14$ (nach Satz 2) = Min.

5) Daher ist auch umgekehrt $7 + (14 - 4)$ unverändert $= 7 + 14 - 4 = (7 + 14) - 4$.

6) Löst man nach einem Subtraktionszeichen eine Klammer auf, so verwandeln sich die in der Klammer befindlichen Summanden (additiven Zahlen) in Subtrahenden (subtraktive Zahlen), die Subtrahenden in Summanden. Z. B. $29 - (9 - 4 + 1) = 29 - 9 + 4 - 1$. Bew. Rest $29 - 9 + 4 - 1$ + Shd. $(9 - 4 + 1) = 29$ (nach Satz 1 und 2) = Min.

7) Umgekehrt: Bildet man nach einem Subtraktionszeichen eine Klammer, so verwandeln sich die Summanden in der Klammer zu Subtrahenden, die Subtrahenden zu Summanden. $23 - 9 + 4 - 1 = 23 - (9 - 4 + 1)$.

III. Multiplikation. 1) Nur ein Faktor eines Produkts kann benannt sein; denn 8 ₰ + 8 ₰ = 8 ₰ . 2.

2) $3 . 10 = 10 + 10 + 10$,	$8 + 8 + 8 = 3 . 8$,
$2 . 10 = 10 + 10$, daher	$8 + 8 = 2 . 8$, daher
$1 . 10 = 10$;	$8 = 1 . 8$.

Oder: Der Faktor 1 kann beliebig weggelassen oder hinzugefügt werden.

3) Eine Summe oder Differenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summand und Subtrahend mit dieser Zahl multipliziert. Bew.: Es ist $15 . 3 = 15 + 15 + 15$. Setzt man für 15 den Ausdruck $20 + 4 - 9$, so entsteht $(20 + 4 - 9) . 3 = 20 + 4 - 9 + 20 + 4 - 9 + 20 + 4 - 9 = 20 + 20 + 20 + 4 + 4 + 4 - 9 - 9 - 9 = 20 . 3 + 4 . 3 - (9 + 9 + 9)$. Folglich ist $(20 + 4 - 9) . 3 = 20 . 3 + 4 . 3 - 9 . 3$.

4) Umgekehrt: $20.3 + 4.3 - 9.3 = (20 + 4 - 9).3$. Oder: Sind mehrere Produkte addiert oder subtrahiert und haben dieselben einen gemeinsamen Faktor (hier 3), so kann man diesen Faktor aus den Produkten entfernen, den zurückbleibenden Ausdruck (hier $20 + 4 - 9$) in Klammer setzen und diese dann mit jenem weggelassenen Faktor multiplizieren. Um in $89 + 49.89 - 47.89$ die Zahl 89 „auszuheben", setzt man (nach Satz 2) $1.89 + 49.89 - 47.89$. Wird 89 weggelassen, so bleibt $1 + 49 - 47$ zurück, folglich ist der gegebene Ausdruck $= (1 + 49 - 47).89 = 3.89 = 267$.

5) Um ein Produkt zu multiplizieren, darf nur einer der Faktoren multipliziert werden. Soll z. B. 5.4 mit 3 multipliziert, d. h. $(5.4).3$ berechnet werden, so hat man entweder nur 5, oder nur 4 mit 3 zu multiplizieren. Das Resultat ist also entweder 15.4 oder 5.12, d. i. $(5.3).4$ oder $5.(4.3)$.

2. Beispiel: $(3^1/_2 . 4^1/_2)$ giebt mit 2 multipliziert entweder $7.4^1/_2$ oder $3^1/_2.9$; (nicht aber 7.9).

Bew. $(5.4).3 = (5 + 5 + 5 + 5).3$ [nach § 2, III, 2] $= (5.3) + (5.3) + (5.3) + (5.3)$ nach dem 3. Satz $= (5.3).4$. Oder $(5.4).3 = (4 + 4 + 4 + 4 + 4).3$ $= (4.3) + (4.3) + (4.3) + (4.3) + (4.3) = 5.(4.3)$.

Falsch wäre es daher, um 5.4 mit 3 zu multiplizieren, 15.12 als Resultat zu setzen, die Aufgabe also mit $(5 + 4).3$ $= 5.3 + 4.3$ zu verwechseln. Man würde ein 3 mal zu großes Resultat erhalten.

6) Die mehrere Faktoren eines Produkts einschließende Klammer kann beliebig weggelassen oder hinzugefügt werden. Bew. Wie auch $3.4.5$ berechnet wird, ob als $(3.4).5$ oder $(4.5).3$ ꝛc., immer muß man dasselbe Resultat erhalten.

7) Aus dem 5. und 6. Satze folgt:

a) Die Anordnung der Faktoren ist beliebig, z. B. $4.3.5 = 4.5.3$.

b) Ein Produkt berechnet man, indem man immer je 2 Faktoren in eine Zahl vereinigt. Denn $5.4.3.2 = (5.4).3.2 = 20.3.2$

$= (20 . 3) . 2 = 60 . 2$ oder kürzer $5 . 4 . 3 . 2 = (5 . 4) . (3 . 2) = 20 . 6 = 120$; $11^3 = 11 . 11 . 11 = 121 . 11 = 1331$.

IV. Division. 1) Die Division ist richtig, wenn „Quotient mal Divisor = Dividend“ (siehe die Vorbemerkung in § 3, II). Z. B. ist $1001 : 13 = 77$ richtig, weil $77 . 13 = 1001$. In den Beweisen der folgenden Sätze mag Q: Quotient, Ds: Divisor, Dd: Dividend bedeuten.

2) Der Divisor 1 kann beliebig weggelassen oder hinzugefügt werden. $5 : 1 = 5$, $^8/_1 = 8$; $3 = ^3/_1$. Bew. Q. 5 mal Ds. 1 = Dd. 5.

3) Eine Zahl durch sich selbst dividiert, giebt 1. Z. B. $43^5/_7 : 43^5/_7 = 1$, $\frac{a - b}{a - b} = 1$. Bew. Q. 1 $\times$ Ds. $43^5/_7$ = Dd. $43^5/_7$.

4) Durch die Umkehrung des vorstehenden Satzes kann 1 in einen Bruch mit beliebigem Nenner verwandelt werden. Z. B. $1 = ^7/_7$.

5) Ein Produkt durch einen seiner Faktoren dividiert, giebt den andern Faktor. $\frac{5 . 9}{5} = 9$ oder $\frac{8 . 7}{7} = 8$. Bew. Q. 9 $\times$ Ds. 5 = Dd. 5 . 9.

6) Umgekehrt $9 = \frac{5 . 9}{5}$. Um z. B. 6 in Achtel zu verwandeln $= \frac{6 . 8}{8} = ^{48}/_8$.

7) Ein Bruch mit seinem Nenner multipliziert, giebt den Zähler. Z. B. $^{37}/_{59} . 59 = 37$, oder $37 : 59 . 59 = 37$; $43 . ^{36}/_{43} = 36$. Bew. $37 : 59 = ^{37}/_{59}$ ist unbedingt richtig, da links derselbe Ausdruck wie rechts steht. Ist aber die Division richtig, so muß auch Q. $\times$ Ds. = Dd. sein, d. i. $^{37}/_{59} . 59 = 37$.

8) Umgekehrt $37 = 59 . ^{37}/_{59}$. Um z. B. 18 in ein Produkt zu verwandeln, von welchem 24 der erste Faktor ist, setzt man $18 = 24 . ^{18}/_{24} = 24 . ^3/_4$.

9) Ein Produkt bleibt unverändert, wenn ein Faktor mit einer beliebigen Zahl multipliziert, der andere durch

dieselbe dividiert wird. $15 . 32 = 15 . 2 . {}^{32}/_2 = (15 . 2) . {}^{32}/_2$ $(= 30 . 16)$.

10) Um ein Produkt zu dividieren, darf man nur einen Faktor dividieren. $\frac{15 . 35}{5}$? Entweder $^{15}/_5 . 35 = 3 . 35$, oder $15 . {}^{35}/_5 = 15 . 7$. (Nicht aber $^{15}/_5 . {}^{35}/_5 = 3 . 7$.) Bew. $\frac{15 . 35}{5} = {}^{15}/_5 . 35$, denn Q. $^{15}/_5 . 35 \times$ Ds. 5 (links unten) $= {}^{15}/_5 . 5 . 35 = 15 . 35 =$ Dd. (links oben). Es ist also auch $15 . 35 : 5 = 15 : 5 . 35$. Oder: Die Anordnung der Faktoren und Divisoren ist beliebig.

11) Um einen Bruch mit irgend einer Zahl zu multiplizieren, multipliziert man den Zähler mit dieser Zahl. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden, denn $^{15}/_5 . 35 = \frac{15 . 35}{5}$.

12) Gleiche Faktoren des Zählers und Nenners heben sich. $\frac{5 . 7}{9 . 7} = {}^5/_9$. Bew. Q. $\times$ Ds. $= {}^5/_9 . 9 . 7 = 5 . 7 =$ Dd.

13) Erweitert man einen Bruch, d. h. multipliziert man Zähler und Nenner mit derselben Zahl, so ist der neue Bruch dem ursprünglichen gleich. $^5/_9 = \frac{5 . 7}{9 . 7} = {}^{35}/_{63}$ (Umkehrung des 12. Satzes).

14) Gleiche Divisoren im Zähler und Nenner heben sich. $\frac{5 : 3}{7 : 3} = {}^5/_7$. Bew. Q. $\times$ Ds. $= {}^5/_7 . 7 : 3 = 5 : 3 =$ Dd.

15) Kürzt man einen Bruch, d. h. dividiert man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl, so ist der neue Bruch dem ursprünglichen gleich (Umkehrung des vorhergehenden Satzes). $^{15}/_{27} = \frac{15 : 3}{27 : 3} = {}^5/_9$.

16) $\frac{7 . 5}{9 . 6} = {}^7/_9 . {}^5/_6$. Bew. Q. $^7/_9 . {}^5/_6 \times$ Ds. $9 . 6$ $= {}^7/_9 . 9 \times {}^5/_6 . 6 = 7 . 5 =$ Dd.

17) Zwei Brüche multipliziert man, wenn man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multipliziert (Umkehrung des 16. Satzes). $^7/_9 \,.\, ^5/_6 = \frac{7\,.\,5}{9\,.\,6} = {^{35}/_{54}}$.

18) Einen Bruch dividiert man durch eine ganze Zahl, indem man

entweder den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert;

z. B. $^7/_9 : 5 = \frac{7}{9\,.\,5}$ ($= {^7/_{45}}$), denn Q. $\times$ Ds. $= \frac{7}{9\,.\,5} \cdot 5 = \frac{7\,.\,5}{9\,.\,5} = {^7/_9} =$ Dd.;

oder den Zähler durch die ganze Zahl dividiert;

z. B. $^{12}/_{17} : 4 = \frac{12:4}{17}$ ($= {^3/_{17}}$), denn Q. $\times$ Ds. $= \frac{12:4}{17} \cdot 4 = \frac{12:4\,.\,4}{17} = {^{12}/_{17}}$ (siehe 7. Satz) $=$ Dd.

19) Man kann aus dem Nenner eines Bruches einen Faktor entfernen und denselben als Divisor für den übrigbleibenden Bruch setzen; denn $\frac{7}{9\,.\,5} = {^7/_9} : 5$ (s. 18. Satz).

20) Multipliziert man 1 mit einer beliebigen Zahl und dividiert man 1 zugleich durch dieselbe Zahl (z. B. $1\,.\,8 = 8$ und $1:8 = {^1/_8}$), so entstehen zwei mit Rücksicht auf Multiplikation und Division einander entgegengesetzte Zahlen ($^8/_1$ und $^1/_8$), die man reziproke oder umgekehrte Zahlen nennt. Aus $^8/_1$ und $^1/_8$ folgt: Den reziproken Wert einer Zahl erhält man, wenn man sich diese in der Form eines einfachen Bruches denkt und den Zähler mit dem Nenner vertauscht. Die Reziproke von $^2/_{15}$ ist daher $^{15}/_2 = 7^1/_2$;
20/1 von 20 (d. i. $^1/_{20}$) ist sie $^1/_{20}$; von $3^7/_8$ (d. i. $^{31}/_8$) ist sie $^8/_{31}$.

21) Eine beliebige Zahl dividiert man durch einen Bruch, indem man jene Zahl mit dem reziproken Bruch multipliziert. Z. B. $12 : {^5/_7} = 12 \,.\, {^7/_5} = \frac{12\,.\,7}{5} = {^{84}/_5} = 16^4/_5$;

$3^1/_8 : 4^1/_2 = {^{25}/_8} : {^9/_2} = {^{25}/_8} \,.\, {^2/_9} = \frac{25\,.\,1}{4\,.\,9} = {^{25}/_{36}}$;

$^1/_{30} : {}^1/_{10} = {}^1/_{30} \cdot {}^{10}/_1 = {}^1/_{30} \cdot 10 = {}^{10}/_{30} = {}^1/_3$.

22) Eine Summe oder Differenz dividiert man, indem man jeden Summand und Subtrahend dividiert. $\frac{9+7-5}{8} = {}^9/_8 + {}^7/_8 - {}^5/_8$. Bew. Q. $\times$ Ds. $= ({}^9/_8 + {}^7/_8 - {}^5/_8) \cdot 8 = {}^9/_8 \cdot 8 + {}^7/_8 \cdot 8 - {}^5/_8 \cdot 8 = 9 + 7 - 5 =$ Dd.

23) Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) addiert oder subtrahiert man, indem man einen neuen Bruch herstellt, dessen Zähler durch Addition, bezw. Subtraktion der gegebenen Zähler entsteht und dessen Nenner der gegebene Nenner ist; denn nach dem 22. Satze ist ${}^9/_8 + {}^7/_8 - {}^5/_8 = \frac{9+7-5}{8}$. Ungleichnamige Brüche sind zuvor gleichnamig zu machen; z. B. ${}^5/_6 + {}^1/_4 - {}^2/_3 = {}^{10}/_{12} + {}^3/_{12} - {}^8/_{12} = {}^5/_{12}$.

24) Es ist ${}^{37}/_7 = 5 + {}^{37}/_7 - 5 = 5 + {}^{37}/_7 - \frac{5 \cdot 7}{7}$ (siehe den 6. Satz) $= 5 + \frac{37 - 5 \cdot 7}{7}$ (siehe den 23. Satz). Um also eine Zahl (37 im vorstehenden Beispiel) durch eine andere (7) zu dividieren, kann man einen beliebigen Quotient (5) wählen, wenn man diesen um einen Bruch $\left(\frac{37 - 5 \cdot 7}{7}\right)$ vermehrt, bei welchem der Zähler dadurch entsteht, daß man den ursprünglichen Dividend (37) um das Produkt aus dem Quotient (5) und dem ursprünglichen Divisor (7) vermindert, als zugehörigen Nenner aber den ursprünglichen Divisor (7) setzt. 2. Beispiel. ${}^{100}/_{13} = 7 + \frac{100 - 7 \cdot 13}{13} = 7 + {}^9/_{13}$ $(= 7{}^9/_{13})$. Da durch diese Division immer nur ein Teil des Quotient berechnet wird (erst 7, dann ${}^9/_{13}$), so nennt man dieselbe Partialdivision.

V. Potenzieren. 1) $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ 2c. 1 giebt also in jeder Potenz wieder 1.

2) $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$,	$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$,
$7 \cdot 7 = 7^2$,	$10^2 = 10 \cdot 10$, folglich
folglich $7 = 7^1$;	$10^1 = 10$.

Man kann also jeder Zahl 1 als Exponent beliebig hinzufügen oder den Exponent 1 wegnehmen.

§ 4. Null und die unendlich große Zahl.

I. In der niederen Mathematik bedeutet 0 so viel als „nichts". Es ist daher $8 + 0 = 8$. Daraus folgt: 1) $8 - 0 = 8$ und 2) $8 - 8 = 0$; allgemein $a - a = 0$. Die natürliche Zahlenreihe erweitert sich damit zu: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ....

II. Aus $0 + 0 = 0$, $0 + 0 + 0 = 0$ folgt $2 . 0 = 0$, $3 . 0 = 0$. Allgemein: 0 mit jeder beliebigen Zahl multipliziert, giebt wieder 0. Daher muß das Produkt $= 0$ sein, wenn einer der Faktoren $= 0$ ist; z. B. $8 . 73 . 0 . {}^5/_6$, denn $(8 . 73 . {}^5/_6) . 0 = 0$.

III. 0 durch jede Zahl dividiert, giebt 0; denn ${}^0/_{13} = 0$, weil Q. $0 \times$ Ds. $13 =$ Dd. 0 (s. II).

IV. **Endliche Zahlen** sind solche, die aus einer bestimmt abgegrenzten Menge von Einheiten bestehen, z. B. 13 oder 100 Trillionen. ${}^2/_{567}$ ist eine endliche Zahl, denn 2 und 567 sind bestimmt abgegrenzt, also auch ${}^2/_{567}$.

V. Denkt man sich dagegen in $1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ die Einheiten nach rechts hin (oder auch nach beiden Seiten hin) ohne Grenze, also bis ins Unendliche fortgesetzt, so erhält man als Summe sämtlicher Einheiten die „unendlich große Zahl", die man mit ∞ bezeichnet. Geht man nach rechts hin bis 1 Trillion, so ist man der Zahl ∞ noch keineswegs um ein bemerkenswertes Stück näher gekommen. Denn setzt man an die Stelle von 1 sogleich 1 Trillion, also

$$1 \text{ Tr.} + 1 \text{ Tr.} + 1 \text{ Tr.} + 1 \text{ Tr.} + 1 \text{ Tr.} \ldots$$

so bleibt die unendlich große Zahl noch immer in unendlicher Entfernung rechts. Es verschwindet daher jede auch noch so große Zahl vollkommen gegen die Zahl ∞.

VI. ∞ um irgend eine endliche Zahl vermehrt, giebt immer nur ∞ als Summe. Obgleich der Satz schon aus V folgt, sei hier doch ein 2. Beweis gegeben.

$$\begin{array}{lrcl} \text{A} & & & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \text{B} & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + & & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \end{array}$$

Denkt man sich in der Reihe A unendlich viele Einheiten, so stellt sie die Zahl ∞ vor. Setzt man nun vor A noch 7 Einheiten, so entsteht die Reihe B, die für sich betrachtet (wenn A nicht vorhanden wäre), wieder die Zahl ∞ vorstellt. Folglich ist $\infty + 7 = \infty$. Der Satz bleibt aber für jede endliche Zahl richtig, auch wenn statt 7 die Zahl Trillion gesetzt worden wäre.

VII. Aus der Gleichung: „$\infty +$ endliche Zahl $= \infty$“ folgt (nach § 2, II): $\infty -$ endliche Zahl $= \infty$.

VIII. Setzt man zu den Einheiten in A noch einmal so viel Einheiten, so ist die Summe sämtlicher Einheiten wieder ∞. Es ist also $2 \cdot \infty = \infty$, $3 \cdot \infty = \infty$ ꝛc. Allgemein: Das Produkt aus irgend einer endlichen Zahl und ∞ ist wieder $= \infty$, daher auch $^1/_{1000} \cdot \infty = \infty$, $\frac{\infty}{1000000} = \infty$.

IX. Eine endliche Zahl durch 0 dividiert, giebt die Zahl ∞; z. B. $^{12}/_0 = \infty$.

Bew. $12 : 1 = 12$,

$12 : {}^1/_{1000} = 12 \,.\, {}^{1000}/_1 = 12000$,

$12 : {}^1/_{1000000} = 12\,000\,000$.

Wird der Ds. immer kleiner, so nimmt der Q. immer mehr zu. Hat der Ds. 0 erreicht, so muß der Q. $= \infty$ sein, denn wäre der Ds. noch nicht ganz 0, sondern eine sehr kleine endliche Zahl $\left(\text{z. B. } \frac{1}{\text{Trillion}}\right)$, so wäre auch der Q. noch nicht $= \infty$ (sondern erst $=$ Trillion). Daher $12 : 0 = \infty$ oder $^{12}/_0 = \infty$.

X. Aus $10 : 10 = 1$,

$10 : 1000 = {}^1/_{100}$,

$10 : 1\,000\,000 = {}^1/_{1000000}$ ꝛc. ergiebt sich in gleicher Weise als Grenze $10 : \infty = 0$ oder $\frac{10}{\infty} = 0$.

Jede endliche Zahl durch ∞ dividiert, giebt mithin den Quotient 0. Man setzt daher 0 (namentlich in der höheren Mathematik) gleichbedeutend mit $\frac{1}{\infty}$ (unendlich klein).

§ 5. Von den entgegengesetzten Zahlen.

(Positive und negative Zahlen.)

I. Einleitung.

g f N a b c d e

1) A B

In vorstehender Linie mögen die einzelnen Abschnitte Einheiten vorstellen, so daß rechts von N die Strecke Na = 1 Einheit, Nd = 4 Einheiten vorstellt. Von N aus gemessen würde daher der Punkt a die Zahl 1, der Punkt d die Zahl 4 bedeuten. Geht man mithin von 4 (Punkt d) aus, so ergiebt sich mit $4 + 1$ der Punkt e, rechts von d, mit $4 - 1$ der Punkt c, links von d. Durch Hinzufügen von $+1$ würde man also immer den nächsten Punkt rechts, durch Hinzufügen von -1 den nächsten Punkt links erhalten. Wird BN über N hinaus nach links verlängert, so daß die Strecke NA der Strecke NB genau entgegengesetzt liegt, so würde nun auch von 0 (Punkt N) aus der Punkt a (rechts von N): $0 + 1$, und der Punkt f (links von N): $0 - 1$ bezeichnen. Von a (d. i. $0 + 1$) aus erhielt man ferner den nächsten Punkt rechts, also b, durch Hinzufügen von $+1$ und mithin wäre $b = (0 + 1) + 1 = 0 + 2$. Von f (d. i. $0 - 1$) aus würde sich der nächste Punkt links, also g, durch Hinzufügen von -1 ergeben und mithin wäre $g = (0 - 1) - 1 = 0 - 2$. So erhielte man folgendes Bild:

0—3 0—2 0—1 0 0+1 0+2 0+3 0+4 0+5

A N B

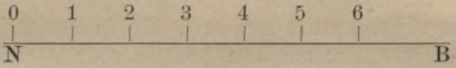
Diese Summen $0 + 1$, $0 + 2$, ... kürzt man mit $+1$, $+2$, $+3$...., die Differenzen $0 - 1$, $0 - 2$, $0 - 3$ mit -1, -2, -3.... ab. Somit ergiebt sich die folgende Darstellung:

—4 —3 —2 —1 0 +1 +2 +3 +4 +5 .

P N Q

2) Fügt man diese Zahlen $+1, +2\ldots, -1, -2\ldots$, anderen Zahlen hinzu, z. B. der Zahl 10, so würde $10+2$ eine Vermehrung der 10 um 2, $10-2$ eine Verminderung der Zahl 10 um 2 bezeichnen. Man hat deshalb die in der Linie PQ befindlichen Zahlen rechts von N additive, links von N subtraktive Zahlen genannt. Allgemein gebräuchlich sind jedoch dafür die Namen: positive Zahlen (rechts von N) und negative Zahlen (links von N). Da diese Zahlen von 0 aus entgegengesetzt liegen, so hat man ihnen den gemeinsamen Namen „entgegengesetzte Zahlen“ gegeben.

3) Bisher (im elementaren Rechnen) rechnete man nur mit den Zahlen, wie man sie in jener Linie NB von N aus nach B hin abzählte; bildlich also:



wobei es keine entgegengesetzte Richtung NA gab (Satz 1), vielmehr konnte die eine bestimmte Zahl vorstellende Länge in jeder nur möglichen Richtung liegen, wie z. B. die Radien eines Kreises, die Seiten eines Dreiecks. Solche „richtungslosen“ Zahlen werden absolute genannt. Mißt man in jener Linie PQ vom Nullpunkt N aus mit der absoluten Länge von 3 Einheiten nach rechts, so gelangt man zur positiven Zahl $+3$, von N aus entgegengesetzt nach links: zur negativen Zahl -3. Man unterscheidet daher in $+3$ und -3 die absolute Zahl 3 und das Vorzeichen $+$ oder $-$, durch welches eine der beiden einander unbedingt entgegengesetzten Richtungen bezeichnet wird.

4) Da die absolute Zahl 5 um 1 größer ist, als die absolute Zahl 4, die positive Zahl $+5$ aber auch um 1 größer als die positive Zahl $+4$, so sind die absoluten Zahlen gleich den positiven; daher 7 so viel als $+7$.

5) Aus Vorstehendem folgt, daß jede in der Linie PQ enthaltene Zahl größer ist, als eine links liegende. Daher ist $+8$ um 8 größer als 0, -12 um 12 kleiner als 0, $+3$ um 2 größer als $+1$, $+3$ um 10 größer als -7,

-11 um 30 größer als -41, $+1$ um 2 größer als -1, $-1/4$ um $1/4$ größer als $-1/2$. Zuweilen sieht man vom Vorzeichen ab und sagt: -13 ist „absolut genommen“ größer als -4.

6) Die Beweise für das Rechnen mit entgegengesetzten Zahlen werden leicht dadurch geführt, daß man (siehe Satz 1) z. B. für die positive Zahl $\underset{v}{+}8$ $\left(\underset{v}{+}\text{ als Vorzeichen}\right)$ die Summe $0 \underset{a}{+} 8$ $\left(\underset{a}{+}\text{ als Additionszeichen}\right)$ und für die negative Zahl $\underset{v}{-}5$ $\left(\underset{v}{-}\text{ als Vorzeichen}\right)$ die Differenz $0 \underset{s}{-} 8$ $\left(\underset{s}{-}\text{ als Subtraktionszeichen}\right)$ setzt.

7) Mit den positiven und negativen Zahlen ist nun der Zahlenbegriff wesentlich erweitert. Da in der Algebra der Buchstabe jede nur mögliche positive oder negative Zahl vorstellen kann, so werden diese Zahlen auch algebraische genannt.

II. Addition mit entgegengesetzten Zahlen.

A. Formelle Addition. Fügt man der Zahl 8 die positive Zahl $+2$ oder die negative Zahl -2 hinzu, so bedeutet $8+2$ das Fortschreiten in der Linie PQ von $+8$ um 2 Einheiten nach rechts (bis zu $+10$) und $8-2$ das Fortschreiten von $+8$ aus um 2 Einheiten nach links ($=+6$). $-10+3$ würde also das Fortschreiten von -10 aus um 3 Einheiten nach rechts ($=-7$) und $-10-3$ das Fortschreiten von -10 aus um 3 Einheiten nach links ($=-13$) vorstellen. Ist daher 8 und -2 zu addieren, so schreibt man nicht $8 \underset{a}{+} \left(\underset{v}{-}2\right)$, sondern nur $8-2$; -10 um -3 vermehrt, schreibt man nicht $\left(\underset{v}{-}10\right) \underset{a}{+} \left(\underset{v}{-}3\right)$, sondern nur $-10-3$. Man läßt mithin das Additionszeichen weg und stellt nur die zu addierenden entgegengesetzten Zahlen neben einander. Eine solche Summe entgegengesetzter Zahlen wird auch

„algebraische Summe" genannt. Die algebraische Summe $-5+11-19$ bedeutet demnach $\left(\underset{v}{-}5\right)\underset{a}{+}\left(\underset{v}{+}11\right)\underset{a}{+}\left(\underset{v}{-}9\right)$ oder noch vollständiger $\left(0\underset{s}{-}5\right)\underset{a}{+}\left(0\underset{a}{+}11\right)\underset{a}{+}\left(0\underset{s}{-}9\right)$.

B. Aus Vorstehendem folgt zugleich, daß $+(+\cdots)$ in $+$, $+(-\cdots)$ in $-$ übergeht. Statt $10+(-17)+(+5)$ schreibt man daher $10-17+5$.

C. Materielle Addition. 1) Haben die Summanden gleiche Vorzeichen, so addiert man die absoluten Zahlen und giebt der Summe das Vorzeichen der gegebenen Summanden. Daher $8+4$ (d. i. $+8+4$) $=+12$; $-9-7=-16$; $-1-2-3=-6$;

$$\begin{array}{r} +5 \\ +11 \\ +23 \\ \hline +39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -41 \\ -28 \\ -6 \\ \hline -75 \end{array}$$

Bew. $-9-7=\left(\underset{v}{-}9\right)\underset{a}{+}\left(\underset{v}{-}7\right)=\left(0\underset{s}{-}9\right)\underset{a}{+}\left(0\underset{s}{-}7\right)=0-9+0-7=0-9-7$ $=0-(9+7)=0-16=$ der negativen Zahl -16 (siehe I, 1 und 6). s

2) Zwei Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen. Sind die absoluten Zahlen gleich, z. B. $-8+8$ oder $13-13$, so heben sich die Summanden und das Resultat ist $=0$; denn $(-8)\underset{a}{+}(+8)=\left(0\underset{s}{-}8\right)+\left(0\underset{a}{+}8\right)$ $=0\underset{s}{-}8+\underset{a}{0}+8=0$ (s. § 3, II, 1 u. 2). Sind die absoluten Zahlen verschieden, z. B. $-13+7$ oder $-4+9$, so vermindert man (ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) die größere absolute Zahl um die kleinere und giebt dieser absoluten Differenz das Vorzeichen des mit der größeren

absoluten Zahl behafteten Summanden. Daher $-13+7 = -6$, $-4+9=+5=5$;

$$\begin{array}{r}-8\\+2\\\hline-6\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}+0.73\\-4.126\\\hline-3.396\end{array}$$

Beweis. Nach dem 1. Satz ist $-13 = -6-7$; daher $-13+7=-6-7+7=-6$. Oder einfacher: Die größere absolute Zahl vorangesetzt und nach dem ersten Zeichen eine Klammer gebildet; daher $8-13=-13+8 = -(13-8) = -5$.

3) Bei mehr als zwei verschiedenen Summanden kann man die positiven für sich, eben so die negativen für sich addieren und dann beide Summen vereinigen. Z. B. $-12+31-23-18+5=+31+5 -12-23-18=+36-53=-17$.

III. Subtraktion mit entgegengesetzten Zahlen.

A. Die Subtraktion wird durch den Satz § 3, II, 6 stets auf eine Addition zurückgeführt.

1. Beispiel. Von $-11+3$ soll $-19-8+2$ subtrahiert werden. Man schreibt zunächst

$-11+3\underset{s}{-}(-19-8+2)$, nach jenem Satz in § 3 ergiebt sich alsdann

$-11+3\quad+19+8-2$. Jetzt ist die Aufgabe zur Additionsaufgabe geworden; daher $=-13+30=17$.

2. Beispiel. 28 um $12-23+46$ vermindert, d. i. $+28$ um $+12-23+46$ vermindert, folglich

$+28\underset{s}{-}(+12-23+46)$

$=+28\quad-12+23-46=51-58=-7$.

B. Da $7-(+3)=7-3$, und $7-(-3)=7+3$, so geht also stets $-(+\cdots)$ in $-$, $-(-\cdots)$ in $+$ über.

(Vergl. II, B.) Z. B. $11 - (-5) + (+3) - (+19) + (-1) = 11 + 5 + 3 - 19 - 1 = -1$.

C. Die Subtraktionsaufgaben $\begin{array}{r} -7 \\ -2 \\ \hline \end{array}$ oder $\begin{array}{r} +8 \\ +19 \\ \hline \end{array}$ haben den Sinn $(-7) \underset{s}{-} (-2) = -7 + 2$ und $+8 \underset{s}{-} (+19) = +8 - 19$. Anstatt also $\begin{array}{r} -7 \\ -2 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} +8 \\ +19 \\ \hline \end{array}$ zu subtrahieren, kann man $\begin{array}{r} -7 \\ +2 \\ \hline \end{array}$ und $\begin{array}{r} +8 \\ -19 \\ \hline \end{array}$ addieren. Folglich: Man nimmt den Subtrahend (die untere Zahl) entgegengesetzt und addiert.

IV. Multiplikation mit entgegengesetzten Zahlen.

A. Zwei Faktoren.

Gleiche Zeichen geben $+$, verschiedene Zeichen $-$; z. B. $(+8)(+3)$ oder auch geschrieben $+8 . +3 = +24$, $-7 . -2 = +14$; $-9 . +3 = -27$; $+1 . -1 = -1$.

Bew. $+8 . +3 = 8 . 3$ (s. I, 4) $= 24 = +24$; $(-9)(+3) = (-9) . 3 = (-9) + (-9) + (-9) = -27$; $(-7)(-2) = (0 \underset{s}{-} 7) . (-2)$. Da nun (-2) nach § 3, III, 3 mit (0) und auch mit (7) multipliziert werden muß, so ergiebt sich $(0)(-2) \underset{s}{-} (7)(-2) = 0 \underset{s}{-} (-14) = 0 \underset{a}{+} 14 = \underset{v}{+} 14$.

B. Mehr als zwei Faktoren.

Die Anzahl der negativen Faktoren allein bestimmt das Vorzeichen. Ist die Anzahl derselben gerade, so ist das Resultat positiv, bei ungerader Anzahl: negativ. Z. B. $(-3)(+2)(-1)(-5) = ?$ Drei negative Faktoren geben $-$, daher $-3 . 2 . 1 . 5 = -30$; oder $2 . (-6) . (+10) . (-4) . (-5) . (-1) = ?$ Vier neg. Faktoren geben $+$, daher $= +2 . 6 . 10 . 4 . 5 . 1 = 2400$.

Bew. Je zwei neg. Faktoren geben $+$, daher bleibt im 1. Beispiel ein Minus, im 2. kein Minus übrig.

V. Division mit entgegengesetzten Zahlen.

A. Werden nur 2 Zahlen durch einander dividiert, so gilt dieselbe Regel wie in IV, A. Z. B. $\frac{+12}{+3} = +4$, $\frac{+12}{-3} = -4$, $\frac{-6}{2} \left(\text{d. i. } \frac{-6}{+2}\right) = -3$; $\frac{-4}{-6} = +{}^4/_6 = {}^2/_3$. Bew. Q. $\times$ Ds. $= {}^2/_3 \cdot (-6) = -4 =$ Dd.

B. Es ist daher $-\frac{(-5)\ (+4)}{(-7)\ (-3)} = -\frac{-20}{+21} = -(-{}^{20}/_{21}) = +{}^{20}/_{21}$. Daher kürzer: Enthält der Ausdruck nur multiplizierende und dividierende Zahlen, so zählt man die Minuszeichen allein ab, und zwar auch das Zeichen vor dem Bruche, wenn es ein Minuszeichen ist. Ergiebt sich hierbei die Anzahl der Minuszeichen gerade oder ungerade, so ist das Resultat positiv, bezw. negativ.

Die letzte Aufgabe hatte 4 Minuszeichen, daher $= +$. 2. Beisp. $+\frac{4\ (-5)}{(-2)\ (-10)}$? 3 Minus geben $-$, daher $= -\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 10} = -1$. 3. Beisp. $-\frac{20}{-50}$? 2 Minus geben $+$, daher $= +{}^{20}/_{50} = +{}^2/_5$.

C. Befinden sich Summen oder Differenzen in den Quotienten, so sind diese vorher in eine Zahl zu verwandeln. Z. B. $(-4) \cdot \frac{(-6+1) \cdot 10}{(-3)\ (8-16)} = (-4) \cdot \frac{(-5) \cdot 10}{(-3)\ (-8)}$. Da jetzt 4 Minuszeichen vorhanden sind, das Resultat also (nach B) positiv ist, so hat man $+4 \cdot \frac{5 \cdot 10}{3 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10}{3 \cdot 8} = +8{}^1/_3$.

§ 6. Einleitung in die Buchstabenrechnung.

Hinsichtlich der Bedeutung des Buchstaben als Zahl sei hier auf § 1, VI zurückverwiesen. Ein Buchstabenausdruck umfaßt also alle speziellen Fälle, die in gleicher Weise entstanden sind, wie diese letzteren. Als allgemeine Zahlen benutzt man am häufigsten die kleinen lateinischen Buchstaben (a, x z. B.), zuweilen aber auch die großen lateinischen, die kleinen griechischen Buchstaben (α = alpha, β = beta, γ = gamma 2c.). Als bekannte Zahlen führt man die ersten Buchstaben des Alphabets ein (a, b, c...), als unbekannte Zahlen die letzten (x, y, z, u, v, w). Daß ein Buchstabe, z. B. a, eine bekannte Zahl vorstellen kann, auch wenn wir den speziellen Wert desselben gegenwärtig noch nicht kennen, mag folgende Aufgabe zeigen. Welche Zahl giebt mit 3 multipliziert, die Zahl 21? Um diese Aufgabe zu lösen, setzt man die unbekannte (zu suchende) Zahl = x; folglich ist $3 . x = 21$, woraus sich durch Rechnung $x = {}^{21}/_{3} = 7$ ergiebt. Die Aufgabe würde allgemein in folgender Weise gestellt werden können. Welche Zahl giebt mit a multipliziert, die Zahl b? Setzt man auch hier die Unbekannte = x, so ist $a x = b$ und die Rechnung würde $x = \frac{a}{b}$ ergeben. Folglich sind hier a und b nicht unbekannte, sondern bekannte (gegebene) Zahlen.

Große Übersicht gewähren oft gestrichene und bezifferte Buchstaben; z. B. a', a'', a^{V} oder a_1, a_2, a_3, gelesen: „a Strich, „a 2 Strich, a 5 Strich, a eins, a zwei, a drei. Dabei hat man sich z. B. a_2 und a_3 als eben so einfache Zeichen wie b und c vorzustellen, auch sind sie dem Werte nach eben so verschieden wie a und b. Bei $A^2\, b'^3$ sind die großen und kleinen Buchstaben zu unterscheiden. Man liest daher „Groß A Quadrat mal klein b Strich zur dritten".

§ 7. Glied. Koeffizient.

I. Glieder (Termen) sind Zahlenausdrücke, die unter sich durch + und — getrennt sind. Ein Glied ist entweder eine einfache Zahl oder ein durch höhere Rechnungsarten als Addition und Subtraktion entstandener Ausdruck. $x - 1^1/_2 + \frac{2\,a}{3\,b^4} - \frac{7}{\sqrt{x}}$ ist daher ein aus 4 Gliedern bestehender (ein viergliedriger oder vierteiliger) Ausdruck.

Ein eingliedriger Ausdruck wird auch Monom genannt. n oder $-3ab^2$ oder $\frac{b}{2\sqrt{3}}$ sind Monomien. Ein mehrgliedriger Ausdruck heißt Polynom, ein zweigliedriger: Binom, ein dreigliedriger: Trinom.

Die Elemente eines Gliedes ordnet man so an, daß das Spezielle dem Allgemeinen, das Bekannte dem Unbekannten, das Einfache dem Zusammengesetzten vorausgeht. Die Buchstaben werden alphabetisch angeordnet. Also nicht $xa2$, sondern $2ax$, nicht $3x(b+a)$, sondern $3(a+b)x$.

II. In dem Gliede $4x$ (welches aus $x+x+x+x$ entstanden ist), hat man die spezielle Zahl (4) zu unterscheiden, welche mit der allgemeinen (x) multipliziert ist. Jene nennt man Koeffizient, diese Hauptgröße. Von großer Wichtigkeit ist es, in jedem Gliede den Koeffizient von der Hauptgröße trennen zu können. Beide hat man richtig unterschieden, wenn sie multipliziert das Glied wiedergeben.

In $6a^2$ ist 6 der Koeff., a^2 (d. i. aa) die Hauptgr.; denn $6 . a . a = 6a^2$ das gegebene Glied.

$-7xz$? -7 der Koeff., xz die Hauptgr.; denn $-7 . x . z = -7xz$.

$-n$? 1 der K., n die H.; denn $-1 . n = -n$ (s. § 3, III, 2).

$\frac{3x}{4}$? $^3/_4$ der K., x die H.; denn $^3/_4 . x = \frac{3 . x}{4}$ (s. § 3, IV, 11). Statt $\frac{3x}{4}$ findet man häufig die Form $^3/_4 x$ vor, offenbar ist aber erstere praktischer.

$-\frac{11a}{4}$? $-^{11}/_4$ (oder $-2^3/_4$) der K., a die H.; denn $-^{11}/_4 . a = -\frac{11 . a}{4} = -\frac{11a}{4}$. Manche schreiben $-2^3/_4 a$, doch ist $-\frac{11a}{4}$ entschieden vorzuziehen.

$-\frac{ab}{3}$? $\frac{1}{3}$ der K., ab die H.; denn $-\frac{1}{3} \cdot ab$
$$= -\frac{1 \cdot a \cdot b}{3} = -\frac{ab}{3}.$$

$\frac{a^2}{4}$? $\frac{1}{4}$ der K., a^2 die H. In $\frac{14a}{9b}$ ist $\frac{14}{9}$ (oder $1\frac{5}{9}$) der K., $\frac{a}{b}$ die H.

In $-\frac{8}{x}$ ist -8 der K., $\frac{1}{x}$ die H. In $\frac{1}{2mn}$ ist $\frac{1}{2}$ der K., $\frac{1}{mn}$ die H.

In $\frac{14}{3a}$ ist $\frac{14}{3}$ (oder $4\frac{2}{3}$) der K., $\frac{1}{a}$ die H.; unpraktisch wäre $4\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a}$. Hierzu ist zu bemerken, daß $4\frac{2}{3a}$ nicht $4 + \frac{2}{3a}$ oder $4\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a}$, sondern $4 \cdot \frac{2a}{3}$ bedeutet, da eine spezielle Zahl neben einer allgemeinen steht; auch $4\frac{2a}{3}$ bedeutet nicht $4 + \frac{2a}{3}$ oder $4\frac{2}{3} \cdot a$, sondern $4 \cdot \frac{2a}{3}$.

III. Anordnung der Glieder eines Polynoms.

1) **Während der Rechnung** ist es oft von Vorteil, zuweilen aber sogar unerläßlich, die Glieder streng lexikographisch und die Hauptgrößen nach regelmäßig ab- oder aufsteigenden Potenzen anzuordnen.

Nicht $a + c - b$ oder $y + z - x$, sondern $a - b + c$ oder $-x + y + z$;

nicht $8a^3 + 7a - 6a^2$, sondern entweder $8a^3 - 6a^3 + 7a$, oder $7a - 6a^2 + 8a^3$;

nicht $3ab - 2b^2 - 5a^2$, sondern $-5a^2 + 3ab - 2b^2$, denn aa, ab, bb.

2) Das **Resultat** einer Rechnung hat man stets so zu schreiben, daß man es bequem berechnen kann, wenn die Buchstaben spezielle Zahlen werden. Daher nicht $x = -2a + 3b$, sondern gewöhnlich das Positive vor, also $x = 3b - 2a$.

Negative Klammern, Zähler und Nenner vermeidet man stets, insbesondere läßt man diese nicht mit einem negativen Gliede beginnen; daher nicht $\frac{-a+b}{2}$, sondern $\frac{b-a}{2}$. Auch muß das Resultat vollständig berechnet sein, mithin nicht $x = \frac{-3}{4}$, oder $x = \frac{3}{-4}$, sondern $x = -\,{}^3/_4$.

§ 8. Addition mit Buchstaben.

I. Sind die zu addierenden Glieder gleichartig, die Hauptgröße also in allen Gliedern dieselbe, so addiert man ihre Koeffizienten und multipliziert die erhaltene Summe mit der einmaligen Hauptgröße. $3a + 4a = ?$ Die Summe $+3+4=+7$ mit der Hauptgröße a multipliziert, giebt das gesuchte Resultat 7a. Bew. $3a + 4a = (a+a+a)+(a+a+a+a) = a+a+a+a+a+a+a = 7a$.

$2x - 5x = ?$ $+2-5=-3$ mult. mit $x = -3 . x = -3x$. Beweis. $x + x - (x+x+x+x+x) = x+x-x-x-x-x-x = -x-x-x = -(x+x+x) = -3x$ (s. § 3, II, 7).

$5ab - 19ab - ab = 5 . ab - 19 . ab - 1 . ab = ?$ $+5 - 19 - 1 = -15$ mit ab mult. $= -15ab$.

$\frac{7}{4x} - \frac{3}{x} = {}^7/_4 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{1}{x} = ?$ ${}^7/_4 - 3 = {}^7/_4 - {}^{12}/_4 = -\,{}^5/_4$ mult. mit der Hauptgr. $\frac{1}{x} = -\,{}^5/_4 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{5}{4x}$.

$a^2 - \frac{a^2}{5} = 1 . a^2 - {}^1/_5 . a^2 = {}^4/_5\, a^2 = \frac{4a^2}{5}$.

II. Sind die Glieder ungleichartig, so können sie nicht in ein Glied zusammengezogen werden. Die Summe von a und b ist $= a + b$; die Summe von a und $-b$ $= a + (-b) = a - b$ (s. § 5, II, B). Die Glieder werden also auch hier, wie bei den entgegengesetzten Zahlen

(s. § 5, II, A) einfach neben einander geschrieben. $-2a + 7b$ um $-c-d$ vermehrt $= -2a + 7 - c - d$. Auch $3a^2 + 2a$ kann nicht in ein Glied zusammengezogen werden, denn $a^2 + a^2 + a^2 + a + a = aa + aa + aa + a + a$ ist weder $5a^2$ noch $5a$ &c.

III. Die Summe vereinfacht sich jedoch, wenn einige der Glieder gleichartig sind. $5a - 11b - 8a + 19b = 5a - 8a - 11b + 19b = -3a + 8b = 8b - 3a$.

Aufgabe. A besitzt $\frac{2x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{7z}{6}$, bekommt von B $-2x + \frac{3y}{10} - \frac{z}{9}$, von C $\frac{9x}{4} - \frac{3y}{2} - \frac{5}{4z}$. Wieviel hat nun A? Auflösung. Zunächst schreibt man nach II als formelles Resultat:

$$\frac{2x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{7z}{6} - 2x + \frac{3y}{10} - \frac{z}{9} + \frac{9x}{4} - \frac{3y}{2} - \frac{5}{4z}.$$

Hier können nur das 1., 4. und 7. Glied (mit der Hauptgröße x), dann das 2., 5. und 8. Glied (mit y) und das 3. und 6. Glied (mit z) addiert werden. Das letzte Glied hat die Hauptgr. $\frac{1}{z}$; dasselbe muß daher einfach der Summe der übrigen Glieder hinzugefügt werden.

Für x sind die Koeff. $\frac{2}{3} - 2 + \frac{9}{4} = \frac{8-24+27}{12} = \frac{11}{12}$,

folglich $\frac{11x}{12}$;

für y: $-\frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{20} + \frac{6}{20} - \frac{30}{20}$
$= \frac{-5+6-30}{20} = \frac{-29}{20} = -\frac{29}{20}$, folglich $-\frac{29y}{20}$;

für z: $\frac{7}{6} - \frac{1}{9} = \frac{21-2}{18} = \frac{19}{18}$, daher $+\frac{19z}{18}$.

Die gesuchte Summe ist mithin $\frac{11x}{12} - \frac{29y}{20} + \frac{19z}{18} - \frac{5}{4z}$.

IV. Zuweilen stehen die zu addierenden Glieder unter einander:

$$\begin{array}{lllll} 5a - \frac{4b}{3} + \frac{10c}{3d} & & - \frac{21}{10n} \\ -8a + 2b - \frac{c}{d} & & + \frac{1}{15n} \\ -\frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{13c}{4d} & & + \frac{3n}{4} \\ \hline = -\frac{13a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{11c}{12d} - \frac{61}{30n} + \frac{3n}{4}; \end{array}$$

denn für a war zu addieren: $5 - 8 - \frac{1}{4} = -3\frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$; für b: $-\frac{4}{3} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{-8+12-3}{6} = +\frac{1}{6}$; daher $\frac{1}{6} . b = \frac{1.b}{6} = \frac{b}{6}$; für $\frac{c}{d}$: $+\frac{10}{3} - 1 - \frac{13}{4} = \frac{40-12-39}{12} = -\frac{11}{12}$; für $\frac{1}{n}$: $-\frac{21}{10} + \frac{1}{15} = \frac{-63+2}{30} = -\frac{61}{30}$; das letzte Glied hat die Hauptgröße n, die von den übrigen verschieden ist.

§ 9. Subtraktion mit Buchstaben.

I. Die Subtraktion muß stets durch das Subtraktionszeichen angezeigt sein. Soll 5 a — 9 b um 11 a — 13 b vermindert werden, so ist daher 5a — 9b — (11a — 13b) zu schreiben, wo das Minuszeichen vor der Klammer das Subtraktionszeichen ist und nicht etwa Vorzeichen zu 11 a; denn die Aufgabe ist vollständig: „Von 5 a — 9 b soll + 11 a — 13 b subtrahiert werden“ und folglich hat man sich + 5 a — 9 b — (+ 11 a — 13 b) zu denken. Die Subtraktion verwandelt man stets in eine Addition, indem man die Klammer nach § 3, II, 6 auflöst. Vorstehende Aufgabe ist daher zu rechnen:

$$+5a - 9b - (+11a - 13b)$$
$$= +5a - 9b \quad -11a + 13b \text{ und nach § 8} = 4b - 6a.$$

2. Beispiel. $\frac{5a}{3} - \frac{7}{2b} - c$ sei um $-2a + \frac{8}{3b} - \frac{9c}{7}$ zu vermindern.

Auflösung. $\frac{5a}{3} - \frac{7}{2b} - c - \left(-2a + \frac{8}{3b} - \frac{9c}{7}\right)$

$= \frac{5a}{3} - \frac{7}{2b} - c \quad + 2a - \frac{8}{3b} + \frac{9c}{7}$

$= \frac{11a}{3} - \frac{37}{6b} + \frac{2c}{7}$; denn für a ist $^5/_3 + 2$,

für $\frac{1}{b}$: $- ^7/_2 - ^8/_3$ und für c: $-1 + ^9/_7$

zu addieren.

3. Beispiel. Von $a - 1$ soll $-\frac{a}{2} + 1^1/_3 - \left(\frac{6a}{5} + 2^1/_4\right)$ subtrahiert werden.

Auflösung. $a - 1 - \left[-\frac{a}{2} + 1^1/_3 - \left(\frac{6a}{5} + 2^1/_4\right)\right]$.

Am besten löst man gewöhnlich zuerst die innere Klammer auf. Daher $= a - 1 - \left[-\frac{a}{2} + 1^1/_3 - \frac{6a}{5} - 2^1/_4\right]$

$= a - 1 + \frac{a}{2} - 1^1/_3 + \frac{6a}{5} + 2^1/_4 = 2{,}7\,a - ^1/_{12}$.

II. Stehen Minuend und Subtrahend unter einander, so denkt man sich die Glieder des Subtrahend (des unteren Ausdrucks) entgegengesetzt und addiert. Z. B.

$$\left.\begin{array}{r} 3a - 14b - c + 8d \\ -4a - 23b + 7c + d^2 \end{array}\right\} \text{subt.}$$

Dafür gedacht:

$$\left.\begin{array}{r} 3a - 14b - c + 8d \\ +4a + 23b - 7c - d^2 \end{array}\right\} \text{addiert}$$

$$= 7a + 9b - 8c + 8d - d^2.$$

Denn der Sinn der Aufgabe ist: $3a - 14b - c + 8d$ um $-4a - 23b + 7c + d^2$ zu vermindern $= 3a - 14b - c + 8d - (-4a - 23b + 7c + d^2) = 3a - 14b - c + 8d + 4a + 23b - 7c - d^2$, welche Glieder zu addieren sind.

Multiplikation, Division und Potenzieren mit Monomien.

§ 10. Multiplikation eines Monoms mit einem Monom.

I. $3ac \cdot -5ab = ?$ Zuerst berechnet man stets das Zeichen, hier $+ \cdot - = -$ (s. § 5). Daher $= -3ac . 5ab$. Dies ist nun $-3 . a . c . 5 . a . b = -3 . 5 . a . a . b . c = -15a^2bc$.

II. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ und $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ (siehe § 3, IV, 11).

$-7ab \cdot -\frac{2}{9b} = ?$ Zunächst $- \cdot - = +$, daher $+7ab \cdot \frac{2}{9b} = \frac{7ab . 2}{9b} = \frac{2 . 7 . a . b}{9 . b} = \frac{14a}{9}$; hier hebt sich b nach § 3, IV, 12 und 5.

$-\frac{15x}{14a} \cdot 21a = ?$ $- \cdot + = -$, daher $-\frac{15x . 21a}{14a} = -\frac{15 . x . 21 . a}{14 . a} = -\frac{45x}{2}$.

$2^1/_9 . 6a = {}^{19}/_9 . 6a = \frac{19 . 6 . a}{9} = \frac{19 . 2 . a}{3} = \frac{38a}{3}$.

III. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a . c}{b . d}$ (siehe § 3, IV, 17). Z. B. $-\frac{5a}{6bc} \cdot -\frac{9}{4ab} = +\frac{5a . 9}{6bc . 4ab} = \frac{15}{8b^2c}$.

§ 11. Division eines Monoms durch ein Monom.

I. $a : b = \frac{a}{b}$. Das Resultat schreibt man mit dem Bruchstrich, da dieser den Quotient als **einen** Wert hinstellt (s. § 2, IV, 1). Z. B. $12ab : 3b = \frac{12ab}{3b} = 4a$; $15a : -30ac = -\frac{15a}{30ac} = -\frac{15 . a}{30 . a . c} = ?$ Wird hier (nach § 3, IV, 12 und 15) gekürzt, so erhält man $-\frac{1}{2\,.\,c}$ daher $= -\frac{1}{2\,c}$.

II. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b\,.\,c}$ (siehe § 3, IV, 18). Z. B. $-\frac{9}{10\,x} : -3\,x = +\frac{9}{10\,x\,.\,3\,x} = \frac{3}{10\,x^2}$; $3^3/_5 : 27a = {}^{18}/_5 : 27a = \frac{18}{5\,.\,27\,.\,a} = \frac{2}{15\,a}$.

III. $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b}$ (s. § 3, IV, 18). Z. B. $\frac{20\,x}{7} : 5 = \frac{20\,x:5}{7} = \frac{4\,x}{7}$; $-\frac{57}{2\,x} : 19 = -\frac{57:19}{2\,x} = -\frac{3}{2\,x}$.

IV. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$ (s. § 3, IV, 21). Z. B. $\frac{x}{3} : -\frac{x}{6} = -\frac{x}{3} \cdot \frac{6}{x} = -2$; $3^1/_5 : \frac{14}{15\,a} = {}^{16}/_5 \cdot \frac{15\,a}{14} = \frac{24\,a}{7}$; $10\,a : 1^1/_4 = 10\,a : {}^5/_4 = 10\,a\,.\,{}^4/_5 = \frac{10\,a\,.\,4}{5} = 8\,a$; $1 : \frac{1}{a\,b} = 1 \cdot \frac{a\,b}{1} = a\,b$.

V. Da man den reziproken Wert einer Zahl erhält, wenn man 1 durch den ursprünglichen dividiert (s. § 3, IV, 20), so ist die Reziproke von $-a = 1 : -a = -\frac{1}{a}$; von $\frac{3\,a}{4} = 1 : \frac{3\,a}{4} = 1 \cdot \frac{4a}{3} = \frac{4a}{3}$; der rez. Wert von $a - b = 1 : (a - b) = \frac{1}{a-b}$; von $\frac{3+n}{2-n} = \frac{2-n}{3+n}$.

§ 12. Potenzrechnung mit Monomien.

I. 1) Hinsichtlich der Entstehung, des Lesens und Schreibens der Potenz sei hier auf § 2, V und § 3, V zurückverwiesen. Es ist also

$a\,.\,a\,.\,a\,.\,a = a^4$;	$m^3 = m\,.\,m\,.\,m$;
$(x-1)(x-1)(x-1) = (x-1)^3$;	$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)$;
$n\,.\,n = n^2$;	$x^1 = x$.
$n = n^1$;	

Während der Rechnung denkt man sich mithin jede Zahl als 1. Potenz derselben, als Resultat jedoch wird man nicht die 1. Potenz schreiben, sondern nur die Zahl selbst. Z. B. $x = (a - b)^1 = a - b$; $3 - (5 - 4a)^1 + 9 + a = 3 - (5 - 4a) + 9 + a = 3 - 5 + 4a + 9 + a = 7 + 5a$; $x . x^2 = x . x . x = x^3$; $(-5^1/_2)^1 = -5^1/_2$.

2) 5 um 3^2 vermehrt $= 5 + 3^2 = 5 + 9 = 14$; dagegen $5 + 3$ quadriert $= (5 + 3)^2 = 8^2 = 8 . 8 = 64$.

3) 2 mit 10^2 multipliziert $= 2 . 10^2 = 2 . 10 . 10 = 200$; dagegen: $(2.10)^2 = (2.10).(2.10) = 2.10.2.10 = 400$. Ebenso bedeutet $ab^2 = abb$. Soll dagegen ab auf die 2. Potenz (auf das Quadrat) erhoben werden, so ist $(ab)^2 = ab . ab = a^2b^2$ zu schreiben. Der Exponent bezieht sich also nur auf die Basis, mit welcher er unmittelbar verbunden ist, ja sogar nicht auf das Vorzeichen. Soll -9^2 berechnet werden, so erhält man $-9 . 9 = -81$; soll dagegen -9 auf das Quadrat erhoben werden, so hat man $(-9)^2$ zu schreiben $= (-9).(-9) = +81$.

4) 5^2 durch 4 dividiert $= \frac{5^2}{4}$ mit dem Sinn $^{25}/_4$; dagegen $^5/_4$ quadriert $= (^5/_4)^2 = {^5/_4} . {^5/_4} = {^{25}/_{16}} = 1^9/_{16}$.

5) 10^7 ist $= 1$ mit 7 Nullen $= 10\,000\,000$; $10^{13} = 1$ mit 13 Nullen.

A. Gleiche und positive Basen.

II. $a^3 . a^4 = a . a . a . a . a . a . a = a^7$; allgemein $a^n . a^r = a^{n+s}$. Um Potenzen mit gleicher Basis zu multiplizieren, addiert man ihre Exponenten. Beispiele. $8^4 . 8^2 . 8 = 8^4 . 8^2 . 8^1$ (s. I, 1) $= 8^{4+2+1} = 8^7$; $a^3 . a^{-6} . a^9 = a^{3-6+9} = a^6$; $(x - n)(x - n)^4 = (x - n)^1 (x - n)^4 = (x - n)^{1+4} = (x - n)^5$; $x^{3n-2} . x . x^{-7n+5} = x^{3n-2+1-7n+5} = x^{4-4n}$.

III. Umgekehrt ist $a^{n+r} = a^n . a^r$. Die einzelnen Glieder des Exponent der gegebenen Potenz werden also Exponenten der einzelnen Faktoren. Z. B. $10^{3+x} = 10^3 . 10^x = 1000 . 10^x$ (bedeutet nicht etwa $10\,000^x$ — siehe I, 3); $2^{n+1} = 2^n . 2^1 = 2 . 2^n$; $5^{n+4} = 5^n . 5^4 = 625 . 5^n$.

IV. $a^n : a^r = a^{n-r}$, oder $\frac{a^n}{a^r} = a^{n-r}$. Um Potenzen mit gleicher Basis durch einander zu dividieren, vermindert man den Exponent des Dividend um den Exponent des Divisor. Bew. Q. $a^{n-r} \times$ Ds. $a^r = a^{n-r+r}$ (nach II) $= a^n =$ Dd.! Beispiele. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$ (der Ungeübte denkt sich dies auch $\frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$); $\frac{10^6}{10^5}$ $= 10^{6-5} = 10^1 = 10$; $\left(\frac{8a}{5b}\right)^4 : \left(\frac{8a}{5b}\right)^9 = \left(\frac{8a}{5b}\right)^{4-9} = \left(\frac{8a}{5b}\right)^{-5}$.

$$\frac{7^{-3}}{7^{-4}} = 7^{-3-(-4)} = 7^{-3+4} = 7^1 = 7.$$

$$\frac{a^{n-3} \cdot a^{8-4n}}{a^{6n-1} \cdot a^{2-5n}} = \frac{a^{n-3+8-4n}}{a^{6n-1+2-5n}} \text{ (s. II)}$$

$$= a^{n-3+8-4n-(6n-1+2-5n)} = a^{n-3+8-4n-6n+1-2+5n}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem gegebenen, so ergiebt sich folgende praktische Regel: Sind Potenzen mit gleichen Basen zu multiplizieren und zu dividieren, so setzt man eine einzige Potenz, deren Exponent aus den unveränderten Exponenten des Zählers und den entgegengesetzten Exponenten des Nenners besteht. Z. B.

$$\frac{x^{2n-5} \cdot x^{3-n}}{x \cdot x^{n-4} \cdot x^{5-6n}} = x^{2n-5+3-n-1-n+4-5+6n} = x^{6n-4}.$$

V. Anwendung des vorigen Satzes. Da man im Resultat in der Regel negative Exponenten vermeidet, so kürzt man Potenzen enthaltende Brüche stets mit der Potenz, welche den niedrigsten Exponent hat. Z. B. $\frac{5a^2b^3}{7a^4b}$ durch a^2 gekürzt

$$\frac{\frac{5a^2b^3}{a^2}}{\frac{7a^4b}{a^2}} = \frac{5b^3}{7a^2b}, \text{ dann noch durch } b \text{ gekürzt} = \frac{5b^2}{7a^2}.$$

(Mechanisch: $\frac{5aabbb}{7aaaab}$, oben und unten aa, ferner b gestrichen $= \frac{5bb}{7aa}$.); $\frac{75n^6x}{90n^2x^2} = \frac{5n^4}{6x}$.

VI. $a^{n-r} = \frac{a^n}{a^r}$ oder $a^n : a^r$ (Umkehrung des Satzes IV). Der positive Exponent wird Exponent im Zähler, der negative Exponent dagegen positiver Exponent im Nenner. Z. B. $5^{2-x} = \frac{5^2}{5^x} = \frac{25}{5^x}$; $10^{n-1} = \frac{10^n}{10^1} = \frac{10^n}{10}$; $2^{x-y-z} = \frac{2^x}{2^y \cdot 2^z}$.

VII. $a^0 = 1$. Bew. $a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1}$ (s. IV) $= \frac{a}{a} = 1$; oder $(-8)^0 = (-8)^{1-1} = \frac{(-8)^1}{(-8)^1} = \frac{-8}{-8} = +1$. Jede beliebige (positive oder negative) Zahl giebt also in der 0^{ten} Potenz $+1$. Z. B. $8 - 3(a - b - c)^0 = 8 - 3.1 = 8 - 3 = 5$; $\frac{x^{2-3n}}{x^{4n-5} . x^{7-7n}} = x^{2-3n-4n+5-7+7n} = x^0 = 1$; das Resultat konnte hier nicht x geschrieben werden, denn dies bedeutet bekanntlich nicht x^0, sondern x^1.

VIII. $\frac{a c^{-n}}{b d^{-r}} = \frac{a d^r}{b c^n}$. Jede Potenz kann mit entgegengesetztem Exponent aus dem Zähler in den Nenner und umgekehrt aus dem Nenner in den Zähler gesetzt werden. Beweis. $\frac{a . c^{-n}}{b . d^{-r}}$ mit $c^n d^r$ erweitert $= \frac{a . c^{-n} . c^n . d^r}{b . d^r . d^{-r} . c^n} = \frac{a c^{n-n} d^r}{b d^{r-r} c^n} = \frac{a c^0 d^r}{b d^0 c^n} = \frac{a . 1 . d^r}{b . 1 . c^n} = \frac{a d^r}{b c^n}$. Mittels dieses Satzes beseitigt man negative Exponenten, die man vorzüglich im Resultat vermeidet. Z. B. $\frac{6^{-2}}{4^{-3}} = \frac{4^3}{6^2} = \frac{4.4.4}{6.6} = {}^{16}/_9 = 1\,{}^7/_9$; $\frac{1}{5^{-3}} = \frac{1}{1 . 5^{-3}}$ gedacht $= \frac{1 . 5^3}{1} = 125$; $6^{-1} a^{-4} = \frac{1 . 6^{-1} . a^{-4}}{1} = \frac{1}{1 . 6^1 a^4} = \frac{1}{6 a^4}$. Insbesondere ist $a^{-n} = \frac{1 . a^{-n}}{1} = \frac{1}{1 . a^n} = \frac{1}{a^n}$. Z. B. $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = {}^1/_{49}$; $2^{-4} x^{-1} = \frac{1}{2^4 x^1} = \frac{1}{16 x}$.

Um $2a - \frac{3}{a} + 4$ streng nach absteigenden Potenzen von a anzuordnen, denke man sich $2a^1 - 3a^{-1} + 4a^0$; geordnet (1, 0, —1): $2a^1 + 4a^0 - 3a^{-1}$, daher $2a + 4 - \frac{3}{a}$.

IX. $(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3}$; allgemein: $(a^n)^r = a^{nr}$. Eine Potenz potenziert man, indem man die Exponenten multipliziert. Z. B. $(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$ (nicht zu verwechseln mit $a^5 . a^2 = a^7$). $((x^{-6})^{-1})^{-2} = x^{(-6)(-1)(-2)} = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$; $(10^{-2})^3 = 10^{(-2) \cdot 3} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000}$.

Zusatz. $1000^4 = (10^3)^4 = 10^{12}$, d. i. 1 mit 12 Nullen; daher auch $10\,000^2 = 1$ mit (4 Nullen $\times$ 2) = 1 mit 8 Nullen.

Anmerkung. Die Rechnung mit Potenzen erniedrigt sich hinsichtlich der Exponenten um eine Spezies.

Man beachte:

Multiplikation $a^3 . a^4 = a^{3+4}$ Addition.

Division $a^5 : a^2 = a^{5-2}$ Subtraktion.

Potenzieren $(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3}$ Multiplikation.

(später) Radizieren $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}}$ Division.

X. Umgekehrt: $a^{nr} = (a^n)^r = (a^r)^n$. Z. B. $10^{4n} = (10^4)^n = 10000^{4n}$; $7^{2n-3} = \frac{7^{2n}}{7^3} = \frac{(7^2)^n}{7^3} = \frac{49^n}{343}$. $12^{3x+1} = 12^{3x} . 12^1 = 12 . (12^3)^x = 12 . 1728^x$.

B. Gleiche und negative Basen.

XI. $(-a)^0 = +1$; $(-a)^1 = -a$; $(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$; $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$; $(-a)^{17} = -a^{17}$; $(-a)^{44} = +a^{44}$; $(-1)^{14} = +1$; $(-1)^{27} = -1$; denn eine gerade Anzahl negativer Faktoren giebt +, eine ungerade Anzahl — (siehe § 5, IV, B).

Anmerkung. Ganze Zahlen bezeichnet man gewöhnlich mit n, m, k, h, r (mit einem der mittleren Buchstaben des Alphabets). Ist daher

n eine der Zahlen $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots.$
so ist $2n = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12 \ldots.$
$2n + 1 = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13 \ldots.$

Folglich bedeutet $2n$ eine gerade Zahl, $2n + 1$ (oder $2n - 1$) eine ungerade Zahl. Nun läßt sich auch das Zeichen der Potenz einer negativen Zahl allgemein wiedergeben. Es ist $(-a)^{2n} = + a^{2n}$, $(-a)^{2n+1} = - a^{2n+1}$.

Beispiele. $5(-2)^4(-6)^3 = +5(+2^4)(-6^3) = -5 . 2^4 . 6^3 = -5 . 16 . 216 = -17280$; $-7 + (-2)(-3)^2 + (-5)^3 . (-4) . (-1)^6 = -7 + (-2)(+3^2) + (-5^3)(-4)(+1) = -7 - 2 . 3^2 + 5^3 . 4 = -7 - 2 . 9 + 125 . 4 = -7 - 18 + 500 = 475$; $(-9)^{-4} = \frac{1}{(-9)^4} = \frac{1}{+9^4} = +9^{-4}$; $(-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = \frac{1}{-10^3} = -\frac{1}{10^3} = -(10^{-3})$. Daher ist $(-a)^{-n}$ für ein gerades $n = +(a^{-n})$, für ein ungerades $n = -(a^{-n})$. In $(-a^4)^5$ und $(-a^7)^2$ bezieht sich 4, bezw. 7, nicht auf das Vorzeichen (s. I, 3), daher $= -a^{20}$, bezw. $+a^{14}$.

C. Verschiedene Basen.

XII. $a^3 b^3 = aaabbb = ab . ab . ab = (ab)^3$; allgemein: $a^n b^n = (ab)^n$. Um Potenzen mit gleichen Exponenten zu multiplizieren, potenziert man das Produkt ihrer Basen mit dem für jede Potenz gegebenen Exponent. Z. B. $5^2 . 4^2 = (5 . 4)^2 = 20^2 = 20 . 20 = 400$; $a^5 . n^5 . x^5 = (anx)^5$; $(^3/_4)^3 . (1^1/_6)^3 . (2^2/_7)^3 = (^3/_4 . ^7/_6 . ^{16}/_7)^3 = 2^3 = 8$; $\left(-\frac{5a}{6}\right)^5 \left(-\frac{9}{10a^2}\right)^5 \left(-\frac{4a^4}{3}\right)^5 = \left[\left(-\frac{5a}{6}\right)\left(-\frac{9}{10a^2}\right)\left(-\frac{4a^4}{3}\right)\right]^5 = (-a^3)^5 = -a^{15}$.

XIII. Umgekehrt: $(a\,b)^n = a^n\,b^n$. Um ein Produkt zu potenzieren, potenziert man jeden einzelnen Faktor mit dem gegebenen Exponent. Z. B. $(3\,x)^2 = 3^2 \,.\, x^2 = 9\,x^2$; $(-\,2\,a\,b^4\,c^{-5})^3 = -\,(2\,a\,b^4\,c^{-5})^3 = -\,2^3 . a^3 . (b^4)^3 . (c^{-5})^3 = -\,\frac{8\,a^3 b^4}{c^{15}}$; $29000^4 = (29 . 10^3)^4 = 29^4 . 10^{3 \cdot 4}$, folglich berechnet man $29^4 = 707\,281$ und hängt $3 . 4 = 12$ Nullen an.

XIV. $\frac{a^4}{b^4} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$; allgemein: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $a^n : b^n = (a : b)^n$. Um 2 Potenzen mit gleichen Exponenten zu dividieren, dividiert man die Basen und potenziert den Quotient mit dem für jede Potenz gegebenen Exponent. Bew. Q. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \times$ Ds. $b^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^4 . b^4 = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^4 = a^4 =$ Dd. Z. B. $\frac{18^3}{9^3} = \left(\frac{18}{9}\right)^3 = 2^3 = 8$; $(48\,a^2\,b^3)^4 : (-\,16\,b^2)^4 = (48\,a^2\,b^3 : -\,16\,b^2)^4 = (-\,3\,a^2\,b)^4 = +\,(3\,a^2\,b)^4 = 81\,a^8\,b^4$.

XV. Umgekehrt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Einen Bruch potenziert man, indem man den Zähler und Nenner, überhaupt jede multiplizierende und dividierende Zahl potenziert; denn $\left(\frac{3\,a}{5\,b\,c^2}\right)^4 = \frac{(3\,a)^4}{(5\,b\,c^2)^4} = \frac{3^4 \,.\, a^4}{5^4 . b^4 . (c^2)^4} = \frac{81\,a^4}{625\,b^4\,c^8}$; $({}^5/_7)^2 = \frac{5^2}{7^2} = {}^{25}/_{49}$; $(-\,{}^1/_{11})^3 = -\,({}^1/_{11})^3 = -\,\frac{1^3}{11^3} = -\,{}^1/_{1331}$; $\left(-\,\frac{4\,a^{-5}}{b^2}\right)^3 = -\,\left(\frac{4\,a^{-5}}{b^2}\right)^3 = -\,\frac{4^3 \,.\, a^{-15}}{b^6} = -\,\frac{64}{a^{15} b^6}$. Gemischte Zahlen richtet man ein; z. B. $(3\,{}^4/_5)^2 = ({}^{19}/_5)^2 = \frac{19^2}{5^2} = {}^{361}/_{25} = 14._{44}$; also nicht $(3 + {}^4/_5)^2 = 3^2 + ({}^4/_5)^2 = 9 + {}^{16}/_{25} = 9\,{}^{16}/_{25}$.

1. Zusatz. Nimmt man die Basis reziprok, so wird der Exponent entgegengesetzt. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$; denn $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$. Z. B. $(^3/_7)^{-2} = (^7/_3)^2 = {}^{49}/_9 = 5^4/_9$; $(^1/_4)^{-3} = (^4/_1)^3 = 4^3 = 64$; $(2^1/_2)^{-4} = (^5/_2)^{-4} = (^2/_5)^4 = {}^{16}/_{625}$.

2. Zusatz. $\frac{18^7}{24^7} = (^{18}/_{24})^7 = (^3/_4)^7 = \frac{3^7}{4^7}$. Man kann die Basen also nur bei gleichen Exponenten kürzen; falsch wäre daher $\frac{40}{15^2} = \frac{8}{3^2}$ oder $\frac{12^n}{8^r} = \frac{3^n}{2^r}$.

3. Zusatz. $0{\cdot}014^5 = (^{14}/_{1000})^5 = \frac{14^5}{(10^3)^5}$, folglich berechnet man $14^5 = 537\,824$ und setzt diese Zahl (wegen der gegebenen 3 Dezimalen) in die $3 \cdot 5^{\text{te}}$, d. i. 15. Dezimalstelle.

XVI. Aufsteigende Potenzen. $89^{2^{2^{2^2}}}$ berechnet man von oben nach unten, daher $89^{2^{2^4}} = 89^{2^{16}} = 89^{4096} = 5028832\ldots$ (Zahl von 7985 Stellen). Also nicht zu verwechseln mit $(((89^2)^2)^2)^2 = 89^{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 89^{16} = 1549673\ldots.$ (Zahl von 32 Stellen).

§ 13. Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom.

Nach § 3, III, 3 ist jedes einzelne Glied des Polynom mit dem Monom zu multiplizieren.

Beispiele. $2a(5a - 7b - bc) = 2a \cdot 5a - 2a \cdot 7b - 2a \cdot bc = 10a^2 - 14ab - 12ac$; $3x - 4(5 - 6x) = ?$ Zu $3x$ soll das -4fache von $5 - 6x$ addiert werden (oder: von $3x$ ist das 4fache von $5 - 6x$ zu subtrahieren), folglich ist -4 mit 5 und -4 mit $-6x$

zu multiplizieren $= 3x - 20 + 24x = 27x - 20$; $\left(4\frac{1}{2} - \frac{3a}{10} + \frac{2}{5a}\right) \cdot - \frac{5a}{6} = - \frac{5a}{6}\left(\frac{9}{2} - \frac{3a}{10} + \frac{2}{5a}\right)$ $= - \frac{5a}{6} \cdot \frac{9}{2} + \frac{5a}{6} \cdot \frac{3a}{10} - \frac{5a}{6} \cdot \frac{2}{5a} = - \frac{15a}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{3}$ $= \frac{a^2}{4} - \frac{15a}{4} - \frac{1}{3}$; $\frac{5a}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3a}{4}\left(\frac{5}{9a} + 1\frac{7}{9}\right)$ $+ \frac{5}{6a}\left(\frac{3a^2}{2} - a\right) = \frac{5a}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3a}{4} \cdot \frac{5}{9a} - \frac{3a}{4} \cdot 1\frac{7}{9}$ $+ \frac{5}{6a} \cdot \frac{3a^2}{2} - \frac{5}{6a} \cdot a = \frac{5a}{6} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} - \frac{4a}{3} + \frac{5a}{4}$ $- \frac{5}{6} = \frac{3a}{4} - 1$; $16\,(x - \frac{1}{4})^2 = 4^2\,(x - \frac{1}{4})^2$ $= [4\,(x - \frac{1}{4})]^2$ (s. § 12, XII) $= (4x - 1)^2$.

$(a - b - c + d) \cdot (-1) = - a + b + c - d$. Multipliziert man also ein Polynom mit -1, so verwandeln sich alle Zeichen in die entgegengesetzten.

§ 14. Ausheben (des gemeinsamen Faktors).

Diese Operation, die auch „Herausstellen, Absondern, Zerlegen in Faktoren, Ausklammern" genannt wird, lernten wir schon in § 3, III, 4 kennen. Um in $dx - ex + fx$ den gemeinsamen Faktor x auszuheben, läßt man ihn zunächst weg, setzt dann den zurückbleibenden Ausdruck $d - e + f$ in Klammer und multipliziert diese alsdann mit jenem Faktor x; daher $= (d - e + f)\,x$.

$a - 3ab = ?$ In solchen Fällen hat man sich 1 als Faktor zu denken $= 1 \cdot a - 3ab = a\,(1 - 3b)$.

$- 6ax - 9bx - 15cx = ?$ Ist nach einem Minuszeichen der gemeinsame Faktor auszuheben, so bilde man zuvor nach diesem Zeichen eine Klammer (s. § 3, II, 7); daher $= -(6ax + 9bx + 15cx) = - 3x\,(2a + 3b + 5c) = - 3\,(2a + 3b + 5c)\,x$.

Das Ausheben vereinfacht die Rechnung; denn $49 . 58 - 49 . 48 = 49 (58 - 48) = 49 . 10$.

Noch einige Beispiele: $(a - b) x - (5 a - 9 b) x = ?$ Läßt man x weg, so bleibt $a - b - (5 a - 9 b)$ zurück, folglich $= [a - b - (5 a - 9 b)] x = (a - b - 5 a + 9 b) x = (8 b - 4 a) x = 4 (2 b - a) x$;

$^5/_{56} - {}^3/_{70} = {}^1/_{14} . {}^5/_4 - {}^1/_{14} . {}^3/_5$, daher $= {}^1/_{14} ({}^5/_4 - {}^3/_5) = {}^1/_{14} . {}^{13}/_{20} = {}^{13}/_{280}$;

$$- \frac{7 a b}{12} - \frac{9 b c}{16} = - \frac{b}{4} . \frac{7 a}{3} - \frac{b}{4} . \frac{9 c}{4}$$
$$= - \frac{b}{4} \left(\frac{7 a}{3} + \frac{9 c}{4}\right);$$

$$\frac{3}{2 x} - \frac{a}{5 x} = \frac{3}{2} . \frac{1}{x} - \frac{a}{5} . \frac{1}{x} = \left(\frac{3}{2} - \frac{a}{5}\right) . \frac{1}{x};$$

$7 (3 a - 5 b)^6 - (3 a - 5 b)^5 (2 a + 3 b) = (3 a - 5 b)^5 . 7 (3 a - 5 b) - (3 a - 5 b)^5 (2 a + 3 b) = ?$ Läßt man den gemeinsamen Faktor $(3 a - 5 b)^5$ weg, so bleibt $7 (3 a - 5 b) - (2 a + 3 b)$ zurück, folglich

$[7 (3 a - 5 b) - (2 a + 3 b)] (3 a - 5 b)^5 = (21 a - 35 b - 2 a - 3 b) (3 a - 5 b)^5 = (19 a - 38 b) (3 a - 5 b)^5 = 19 (a - 2 b) (3 a - 5 b)^5$.

$6 (5 a - 4 n) - 15 a^2 + 12 a n = 6 (5 a - 4 n) - 3 a (5 a - 4 n) = (6 - 3 a) (5 a - 4 n) = 3 (2 - a) (5 a - 4 n)$; $(7 a - 4 b) (5 a + 8 b) - 4 (3 a + b) (7 a - 4 b) = [5 a + 8 b - 4 (3 a + b)] (7 a - 4 b) = (- 7 a + 4 b) (7 a - 4 b)$, auf den 1. Faktor § 3, II, 7 angewandt $= - (7 a - 4 b) (7 a - 4 b) = - (7 a - 4 b)^2$.

$35 a^2 - 63 a b - 30 a b + 54 b^2 = ?$ Man hebe in den ersten Gliedern $7 a$, in den beiden letzten $6 b$ aus, folglich $= 7 a (5 a - 9 b) - 6 b (5 a - 9 b) = (7 a - 6 b) (5 a - 9 b)$.

$(15 - 10 x)^2 = [5 (3 - 2 x)]^2 = 5^2 . (3 - 2 x)^2$ (siehe § 12, XIII) $= 25 (3 - 2 x)^2$.

§ 15. Vereinfachen der Brüche durch Erweitern.

I. $\dfrac{5 - \dfrac{7\,a}{6}}{1^1/_4 + \dfrac{11\,a}{15}} = ?$ Um derartige „Doppelbrüche“ zu vereinfachen, multipliziert man den Hauptzähler und Hauptnenner mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der in denselben enthaltenen Spezialnenner. Hier ist daher mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von 6, 4 und 15, d. i. mit 60 zu erweitern. Man erhält $\dfrac{\left(5 - \dfrac{7\,a}{6}\right) \cdot 60}{\left(1^1/_4 + \dfrac{11\,a}{15}\right) \cdot 60} = \dfrac{300 - 70\,a}{75 + 44\,a}$ $= \dfrac{10\,(30 - 7\,a)}{75 + 44\,a}$; $\dfrac{5}{\dfrac{3}{8\,b} - \dfrac{1}{12\,a}}$ mit $24\,a\,b$ erweitert

$$= \frac{5 \,.\, 24\,a\,b}{\left(\dfrac{3}{8\,b} - \dfrac{1}{12\,a}\right) \cdot 24\,a\,b} = \frac{120\,a\,b}{9\,a - 2\,b}.$$

II. Durch Erweitern mit -1 verwandelt man die Glieder des Bruches in die entgegengesetzten. $\dfrac{a - b}{c - d}$ mit -1 erweitert $= \dfrac{-a + b}{-c + d} = \dfrac{b - a}{d - c}$; $(8\,a - 4\,b) \cdot \dfrac{7\,a - 5}{3\,b - 6\,a}$ $= (8\,a - 4\,b) \cdot \dfrac{5 - 7\,a}{6\,a - 3\,b} = 4\,(2\,a - b) \cdot \dfrac{5 - 7\,a}{3\,(2\,a - b)}$ $= \dfrac{4\,(2\,a - b)\,(5 - 7\,a)}{3\,(2\,a - b)}$ (siehe § 3, IV, 11) $= \dfrac{4\,(5 - 7\,a)}{3}$ (siehe § 3, IV, 12).

§ 16. Multiplikation eines Polynoms mit einem Polynom.

Setzt man in $m(c + d) = mc + md$ an die Stelle von m das Binom $a + b$, so entsteht: $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$. Um also einen mehrgliedrigen Ausdruck mit einem mehrgliedrigen zu multiplizieren, hat man jedes Glied des einen Faktor mit jedem Gliede des andern zu multiplizieren, hier c mit a und b, d mit a und b.

Beispiele: $41a - (5a - 6b)(3a + 5) - 4(b + 4)(a - 7b) = ?$ Da das ganze erste Produkt (die beiden ersten Klammern) von $41a$ subtrahiert werden soll, so hat man dasselbe auch noch nach der ausgeführten Multiplikation in Klammer zu setzen; ferner enthält die Aufgabe noch ein Produkt von 3 Faktoren, bei dem man am besten die zusammengesetzten zuerst multipliziert und einschließt, um das Produkt alsdann noch mit -4 zu multiplizieren. Daher

$$= 41a - (15a^2 - 18ab + 25a - 30b) - 4(ab + 4a - 7b^2 - 28b)$$
$$= 41a - 15a^2 + 18ab - 25a + 30b - 4ab - 16a + 28b^2 - 112b$$
$$= -15a^2 + 14ab + 28b^2 - 82b.$$

2. Beispiel. $(5a - 4b)\left[3^1/_4 - \frac{5a + 6b}{5a - 4b} - \frac{19b - 11a}{4b - 5a}\right] = ?$ Man denke sich hier die Multiplikation eines Monoms (die 1. Klammer) mit einem Trinom (in der 2. Klammer), so daß also $(5a - 4b)$ zuerst mit $3^1/_4$, dann mit dem 1. zusammengesetzten Bruch und schließlich mit dem letzten Bruch multipliziert wird. Damit dieser letzte gleichfalls den Nenner $5a - 4b$ erhält, erweitert man denselben mit -1. Daher

$$= (5a - 4b)\left[3^1/_4 - \frac{5a + 6b}{5a - 4b} - \frac{11a - 19b}{5a - 4b}\right]$$

$= {}^{13}/_4\,(5a - 4b) - (5a - 4b) \cdot \frac{5a + 6b}{5a - 4b} - (5a - 4b)$
$\cdot \frac{11a - 19b}{5a - 4b} = \frac{65a}{4} - 13b - (5a + 6b) - (11a - 19b)$;
hier kam § 3, IV, 7 in Anwendung, wobei zu berücksichtigen ist, daß der Bruchstrich den Zähler als Klammer einschließt.

Das Resultat ist nun $= \frac{65a}{4} - 13b - 5a - 6b - 11a$
$+ 19b = \frac{a}{4}$.

3. Beispiel. Der Übersicht wegen stellt man zuweilen die Partialprodukte unter einander; z. B.

$$
\begin{array}{l}
\underline{(5a \;-\; 7b \;+\; 3c)}\,(6a + 9b - 2c) \\
30a^2 - 42ab + 18ac \\
\qquad\quad + 45ab - 63b^2 + 27bc \\
\qquad\qquad\qquad - 10ac + 14bc - 6c^2 \\
\hline
= 30a^2 + 3ab + 8ac - 63b^2 + 41bc - 6c^2.
\end{array}
$$

§ 17. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

I. Das Produkt aus der Summe zweier Zahlen und ihrer Differenz ist gleich der Differenz ihrer Quadrate. Bew. $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Beispiele: $\left(3a + \frac{5b^3}{x}\right)\left(3a - \frac{5b^3}{x}\right) = (3a)^2 - \left(\frac{5b^3}{x}\right)^2 = 9a^2 - \frac{25b^6}{x^2}$; $83.77 = (80 + 3)(80 - 3) = 80^2 - 3^2 = 6400 - 9 = 6391$; $({}^1/_3 - 2x)({}^1/_3 + 2x) = ({}^1/_3)^2 - (2x)^2 = {}^1/_9 - 4x^2$.

II. Umgekehrt ist $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Um also eine Differenz in das Produkt zweier binomen Faktoren zu verwandeln, stellt man zunächst die beiden Zahlen als Quadrate dar. Addiert man alsdann die Basen dieser Quadrate, so erhält man den einen Faktor, subtrahiert man sie: den andern. Z. B. $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2$; die Basen sind x^2 und 1, folglich $= (x^2 + 1)\,(x^2 - 1)$;

$$2^1/_4 - \frac{x^6}{25} = (^3/_2)^2 - \left(\frac{x^3}{5}\right)^2 = \left(^3/_2 + \frac{x^3}{5}\right)\left(^3/_2 - \frac{x^3}{5}\right).$$

III. Ähnliche Produkte.

$$(a^2 + ab + b^2)\,(a - b) = a^3 - b^3;$$
$$(a^2 - ab + b^2)\,(a + b) = a^3 + b^3;$$
$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,(a - b) = a^4 - b^4;$$
$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)\,(a + b) = a^4 - b^4.$$

Der Beweis durch die ausgeführte Multiplikation.

Allgemein: Das Produkt aus einem Polynom und einem Binom giebt ein zweigliedriges Produkt, wenn jedes Glied des Polynoms, durch das folgende dividiert, immer denselben Quotient giebt, das 1. Glied des binomen Faktors aber durch das 2. dividiert den entgegengesetzten Quotient. Das 1. der beiden Glieder des Produkts ist alsdann das Produkt aus dem 1. Gliede des Polynoms und dem 1. Gliede des Binoms, das 2. Glied des Produkts aber das Produkt aus dem letzten Gliede des Polynoms und dem letzten Gliede des Binoms. Z. B.

$$\propto\ \frac{3a^2}{2b^3} - \frac{2}{a}\left(\cancel{\frac{3a^2}{4b^3}} - \frac{a}{2b} + \frac{b}{3} - \frac{2b^3}{9a}\right)\left(\frac{2}{b} + \frac{4b}{3a}\right)$$

Quotienten: $-\frac{3a}{2b^2},\ -\frac{3a}{2b^2},\ -\frac{3a}{2b^2} \qquad +\frac{3a}{2b^2}$

folglich $= \frac{3a^2}{2b^3}\cdot\frac{2}{b} + \left(-\frac{2b^3}{9a}\right)\cdot\frac{4b}{3a} = \frac{3a^2}{2b^4} - \frac{8b^4}{27a^2}.$

§ 18. Das Quadrat eines Binoms.

I. $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$ oder $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Das Quadrat eines zweiteiligen Ausdrucks besteht also aus 3 Teilen: 1) Das Quadrat des 1. Teils; 2) das doppelte Produkt aus beiden Teilen; 3) das Quadrat des

2. Teils. Setzt man $b = -c$, so geht die letzte Gleichung über in: $[a + (-c)]^2 = a^2 + 2a(-c) + (-c)^2$ d. i.

$$(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2.$$

Das 1. und das 3. Glied ist also in beiden Ausdrücken positiv, das 2. positiv oder negativ, jenachdem die Zeichen der beiden Glieder gleich oder verschieden sind.

Beispiele. $(7a + 6b)^2 = (7a)^2 + 2.7a.6b + (6b)^2 = 49a^2 + 84ab + 36b^2$;

$$\left(\frac{5x}{6} - \frac{9}{10x^2}\right)^2 = \left(\frac{5x}{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{5x}{6}\cdot\frac{9}{10x^2} + \left(\frac{9}{10x^2}\right)^2$$
$$= \frac{25x^2}{36} - \frac{3}{2x} + \frac{81}{100x^4}.$$

$(11a - 3b + 4c)(11a + 3b - 4c) = [11a - (3b - 4c)][11a + (3b - 4c)] = (11a)^2 - (3b - 4c)^2$ (s. § 17, I) $= 121a^2 - (9b^2 - 24bc + 16c^2) = 121a^2 - 9b^2 + 24bc - 16c^2$.

$$997^2 = (1000 - 3)^2 = 1000000 - 6000 + 9.$$

II. Um zu bestimmen, ob ein dreigliedriger Ausdruck ein vollständiges Quadrat eines zweigliedrigen ist, ordne man denselben und stelle dann das 1. und 3. Glied als Quadrate dar. Ist das doppelte Produkt der beiden Basen dieser Quadrate = dem Mittelgliede des Trinoms, so ist das Trinom das Quadrat der Summe oder Differenz der Basen, jenachdem das 2. Glied des Trinoms positiv oder negativ ist. (Folgt aus I.) Z. B. $25a^6 + \frac{9}{4a^2} - 15a^2 = ?$ Geordnet (a^6, a^2, a^{-2}!): $25a^6 - 15a^2 + \frac{9}{4a^2}$. Nun ist $25a^6 = (5a^3)^2$, $\frac{9}{4a^2} = \left(\frac{3}{2a}\right)^2$ und da $2.5a^3\cdot\frac{3}{2a} = 15a^2$, das 2. Glied des Trinoms ($-15a^2$) aber negativ ist, so ist der gegebene Ausdruck $= \left(5a^3 - \frac{3}{2a}\right)^2$.

§ 19. Das Quadrat des Polynoms.

$(a + b + c + d)^2 = [(a + b) + (c + d)]^2$, folglich nach § 18 $= (a + b)^2 + 2 . (a + b)(c + d) + (c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$. Das Quadrat eines vielgliedrigen Ausdrucks besteht also aus den Quadraten sämtlicher Glieder (die stets positiv sein müssen) und aus den doppelten Produkten von je 2 Gliedern. Z. B. $(3a - 4a^2 - 5a^3)^2 = ?$ Man denke sich:

$[3a + (-4a^2) + (-5a^3)]^2 = (3a)^2 + (-4a^2)^2 + (-5a^3)^2 + 2 . 3a . (-4a^2) + 2 . 3a . (-5a^3) + 2(-4a^2)(-5a^3) = 9a^2 + 16a^4 + 25a^6 - 48a^3 - 30a^4 - 40a^5 = 9a^2 - 48a^3 - 14a^4 - 40a^5 + 25a^6$.

§ 20. Der Kubus eines Binoms.

$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)^1 = (a^2 + 2ab + b^2) . (a + b)$. Die Multiplikation giebt

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

und mit $b = -c$: $(a - c)^3 = a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$.

Die Potenzen des 1. Teils a nehmen also regelmäßig ab: a^3, a^2, a^1, a^0, die von b regelmäßig zu und die Koeffizienten, die man bei jeder Potenz **Binomialkoeffizienten** nennt, sind die symmetrischen 1, 3, 3, 1.

Z. B. $\left(\frac{5a^2}{6} - \frac{4}{a}\right)^3 = \left(\frac{5a^2}{6}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{5a^2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{a} + 3 \cdot \frac{5a^2}{6} \cdot \left(\frac{4}{a}\right)^2 - \left(\frac{4}{a}\right)^3 = \frac{125a^6}{216} - \frac{3 . 25a^4 . 4}{36 . a} + \frac{3 . 5a^2 . 16}{6a^2} - \frac{64}{a^3} = \frac{125a^6}{216} - \frac{25a^3}{3} + 40 - \frac{64}{a^3}$.

§ 21. Die höheren Potenzen eines Binoms.

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b)$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
= (a^3 + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3) (a + b) & & \\
\hline
1.a^4 + & 3.a^3b & + & 3.a^2b^2 & + & 1.ab^3 & & \\
+ & 1.a^3b & + & 3.a^2b^2 & + & 3.ab^3 & + & 1.b^4 \\
\hline
\end{array}$$

$$= 1.a^4 + (1+3).a^3b + (3+3)a^2b^2 + (3+1)ab^3 + 1.b^4.$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Aus den Binomialkoeffizienten einer Potenz entstehen also diejenigen der nächsthöheren Potenz durch Addition von je 2 neben einander stehenden Koeffizienten, wenn man sich 0 vor= und nachgesetzt denkt. Z. B.

3. Potenz: 0 1 3 3 1 0

4. Potenz: 1 4 6 4 1.

So erhält man folgende Tafel (das Dreieck von Pascal):

1 .... $(a+b)^0 = 1.$

1 1 .... $(a+b)^1 = 1.a + 1.b.$

1 2 1 .... $(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2.$

1 3 3 1 u. s. w.

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1 u. s. w.

Da die Potenzen von a regelmäßig ab=, die von b regelmäßig zunehmen, die Glieder bei einer Summe alle positiv sein müssen, bei einer Differenz aber regelmäßig abwechseln, so kann man z. B. $(a - b)^7$ leicht in folgender Weise herstellen:

$$\begin{array}{cccccccc}
+ & - & + & - & + & - & + & - \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
a^7 & a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & \\
 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & b^6 & b^7 \\
\hline
\end{array}$$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7.$$

1. Zusatz. Aus $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \ldots$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \ldots$
$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + \ldots$
ꝛc. ergiebt sich $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots$
und für $a = 1$: $(1+b)^n = 1 + nb \quad + \ldots$

2. Zusatz. Der echte Bruch (der kleiner als 1 und größer als 0) mit dem Exponent ∞ potenziert, muß $= 0$ werden. Denn z. B. ist $(^{98}/_{99})^n$ durch 98 gekürzt $= \left(\frac{1}{1+{}^1/_{98}}\right)^n$ $= \frac{1}{(1+{}^1/_{98})^n} = \frac{1}{1+{}^1/_{98}\cdot n}$ (siehe vorstehenden 1. Zusatz).

Ist nun $n = \infty$, so ist $(^{98}/_{99})^\infty = \frac{1}{1+{}^1/_{98}\cdot\infty} = \frac{1}{1+\infty}$ $= \frac{1}{\infty} = 0$ (siehe § 4, VIII und X).

§ 22. Die Zeichen der Basis einer Potenz.

I. Eine Potenz mit geradzahligem Exponent bleibt unverändert, wenn man die Basis mit -1 multipliziert. Bew. $(+a)^2 = (-a)^2 = (a\cdot -1)^2$; $(+a)^4 = (-a)^4 = (a\cdot -1)^4$; z. B. $(1-5x)^2 = (5x-1)^2$.

II. Eine Potenz mit ungeradzahligem Exponent bleibt unverändert, wenn man die Basis mit -1 multipliziert und zugleich das Vorzeichen der Potenz ändert. Bew. $+a^3 = -(-a^3) = -(-a)^3 = -(a\cdot -1)^3$. Z. B. $8(3-14x)^3 - 2(14x-3)^3 = 8(3-14x)^3 + 2(3-14x)^3 = 10(3-14x)^3$.

§ 23. Division eines Polynoms durch ein Monom.

I. Jedes Glied des Polynoms ist durch das Monom zu dividieren (s. § 3, IV, 22).

Beispiele. $\frac{a-b+c}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$; $\frac{3x-4x^2+9x^3}{6x^2}$

$$= \frac{3x}{6x^2} - \frac{4x^2}{6x^2} + \frac{9x^3}{6x^2} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{3} + \frac{3x}{2};$$

$-\frac{15a - 8b + 12ab}{10ab} = ?$ Der Bruchstrich ist stets als Klammer aufzufassen, daher $= -\left(\frac{15a - 8b + 12ab}{10ab}\right)$ $= -\left(\frac{15a}{10ab} - \frac{8b}{10ab} + \frac{12ab}{10ab}\right) = -\frac{3}{2b} + \frac{4}{5a} - 1^1/_5$; $\left(2^2/_5 - \frac{3ab}{4} + \frac{9a^2}{10}\right) : -\frac{6a}{5b} = \left({}^{12}/_5 - \frac{3ab}{4} + \frac{9a^2}{10}\right)$ $\cdot -\frac{5b}{6a}$ (s. § 3, IV, 21 u. § 11, V) $= -\frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{8} - \frac{3ab}{4}$.

II. Um $\frac{4a}{3} - \frac{a^2}{6} + \frac{2a^3}{9}$ in ein Produkt aus einem Monom und einem mit 1 als erstes Glied beginnenden Polynom zu verwandeln, setzt man nach § 3, IV, 6 jenen Ausdruck $= \frac{4a}{3} \cdot \frac{\frac{4a}{3} - \frac{a^2}{6} + \frac{2a^3}{9}}{\frac{4a}{3}} = \frac{4a}{3}\left(1 - \frac{a}{8} + \frac{a^2}{6}\right)$.

§ 24. Veränderung des Produktes nach dem Satze $a.b = an \cdot \frac{b}{n}$.

I. Ein Produkt bleibt unverändert, wenn der eine Faktor mit einer beliebigen Zahl multipliziert, der andere durch diese dividiert wird (s. § 3, IV, 9). Beispiel. $(8a - 4) \cdot \left(3^1/_2 - \frac{5a}{4}\right) = ?$ Der 1. Faktor durch 4 dividiert, der zweite mit 4 multipliziert $= (2a - 1)(14 - 5a)$.

II. $(a - b)(c - d) = ?$ Der 1. Faktor mit -1 multipliziert, der 2. durch -1 dividiert $= (-a + b)(-c + d) = (b - a)(d - c)$. Man könnte also auch sagen: Multipliziert man jeden von 2 Faktoren mit -1, so bleibt das Produkt unverändert. $a + (2 - x^3) \cdot (-3 - 4x) = a + (x^3 - 2)(4x + 3)$.

III. Man kann mithin auch einen der Faktoren mit -1 multiplizieren, wenn man das Vorzeichen des Produkts ändert. Denn z. B. $n - (5 + 6a)(-3 - 2a) = n - 1.(5 + 6a)(-3 - 2a)$; multipliziert man nun den 1. Faktor -1 mit -1 und dividiert den 3. durch -1, so entsteht $n + 1.(5 + 6a)(3 + 2a) = n + (5 + 6a)(3 + 2a)$.

§ 25. Zeichenänderung des Zählers oder Nenners.

Man kann den Zähler oder den Nenner eines Bruches mit -1 multiplizieren, wenn man das Vorzeichen des Bruches ändert; denn $+\frac{a}{b} = -\left(-\frac{a}{b}\right)$; dies aber ist entweder $-\left(\frac{-a}{+b}\right) = -\frac{a \cdot -1}{b}$, oder $-\left(\frac{+a}{-b}\right) = -\frac{a}{b \cdot -1}$. Beim Erweitern des Bruches multipliziert man den Zähler und Nenner mit -1, dann aber muß das Vorzeichen des Bruches unverändert bleiben (s. § 15, II).

1. Beispiel. $\frac{5(2a-1)}{1-2a} = -\frac{5(2a-1)}{2a-1} = -5.$

2. Beispiel. $(4a^2 - 9)\left[\frac{5a+7}{2a+3} - \frac{23+4a^2}{72-32a^2} + \frac{3a+1}{9-6a} - 2^1/_8\right] = ?$ Bei solchen Multiplikationen ordnet man zuerst die mehrgliedrigen Ausdrücke (gewöhnlich mit Ausnahme der Zähler) in gleicher Weise an.

Hier z. B. wird man die Hauptgröße a absteigend anordnen, die Glieder mit a also voranstellen. Daher:

$$(4a^2 - 9)\left[\frac{5a+7}{2a+3} + \frac{23+4a^2}{32a^2-72} - \frac{3a+1}{6a-9} - {}^{17}/_8\right].$$

Im 3. Bruch hätte man $6a - 9$ auch durch Erweitern mit -1 bekommen; jedoch wäre $+\frac{-3a-1}{9-6a}$ für das Rechnen sehr unpraktisch gewesen (s. § 7, III, 2!). Nun zerlegt man dieselben mehrgliedrigen Ausdrücke in Faktoren, zunächst durch Ausheben des gemeinsamen Faktors. Daher:

$$(4a^2 - 9)\left[\frac{5a+7}{2a+3} + \frac{23+4a^2}{8(4a^2-9)} - \frac{3a+1}{3(2a-3)} - {}^{17}/_8\right].$$

Alsdann versucht man eine Zerlegung in mehrgliedrige Faktoren, da sich dann oft Kürzungen erkennen lassen. Hier findet man $4a^2 - 9 = (2a)^2 - 3^2 = (2a+3)(2a-3)$. Jetzt erst wird die Multiplikation ausgeführt, also $4a^2 - 9$ mit jedem der vier Hauptglieder der eckigen Klammer multipliziert, wobei man jenen Faktor nötigenfalls als $(2a+3) \cdot (2a-3)$ sich denkt. Daher:

$$\frac{(2a+3)(2a-3)(5a+7)}{2a+3} + \frac{(23+4a^2)(4a^2-9)}{8(4a^2-9)}$$
$$- \frac{(3a+1)(2a+3)(2a-3)}{3(2a-3)} - {}^{17}/_8\,(4a^2-9)$$
$$= (2a-3)(5a+7) + \frac{23+4a^2}{8} - \frac{(3a+1)(2a+3)}{3} - \frac{17a^2}{2} + 19^1/_8$$
$$= 10a^2 - a - 21 + 2^7/_8 + \frac{a^2}{2} - \frac{6a^2+11a+3}{3} - \frac{17a^2}{2} + 19^1/_8$$
$$= 10a^2 - a - 21 + 2^7/_8 + \frac{a^2}{2} - 2a^2 - \frac{11a}{3} - 1 - \frac{17a^2}{2} + 19^1/_8 = -\frac{14a}{3}.$$

§ 26. Das Kürzen zusammengesetzter Brüche.

$\dfrac{15a^2 - 12a}{9a^2 + 21a} = ?$ Da $3a$ in allen Gliedern enthalten ist, so läßt sich der Bruch durch $3a$ kürzen. Nach § 3, IV, 15:

$$\frac{(15a^2 - 12a) : 3a}{(9a^2 + 21a) : 3a} = \frac{5a-4}{3a+7}.$$

$\frac{10a-8}{6a+5}$ läßt sich nicht durch 2 (oder a) kürzen; denn $\frac{(10a-8):2}{(6a+5):2} = \frac{5a-4}{3a+{}^5\!/_2}$. Man erhielte mithin einen Doppelbruch, den man stets vermeidet (s. § 15).

$$\frac{x-2}{2-x} = -\frac{x-2}{x-2} \text{ (s. § 25) } = -1 \text{ (s. § 3, IV, 3).}$$

$$\frac{12x-15}{100-64x^2} = -\frac{12x-15}{64x^2-100} \text{ (s. § 24, III, 2. Beisp.)}$$
$$= -\frac{3(4x-5)}{4(16x^2-25)} = -\frac{3(4x-5)}{4(4x+5)(4x-5)} \text{ (s. § 17, II)}$$
$$= -\frac{3}{4(4x+5)}.$$

$\frac{2x-4}{10(6x-12)^2} = ?$ Zunächst durch 2 gekürzt $= \frac{x-2}{5(6x-12)^2}$

$$\text{(s. § 3, IV, 10)} = \frac{x-2}{5[6(x-2)]^2} = \frac{x-2}{5 \cdot 36 \cdot (x-2)^2}$$
$$= \frac{1}{180(x-2)}.$$

$$\frac{21a^2-14ab+15ac-10bc}{15a^2-10ab-27ac+18bc} = \frac{7a(3a-2b)+5c(3a-2b)}{5a(3a-2b)-9c(3a-2b)}$$

durch $3a-2b$ gekürzt $= \frac{7a+5c}{5a-9c}$.

§ 27. Vereinigung von Quotienten.

I. Gleichnamige Brüche. Nach § 3, IV, 23 ist $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a-b+c}{m}$.

$$\frac{9b^2}{a^2-b^2} - \frac{6a}{a^2-b^2} - \frac{9a^2}{a^2-b^2} - \frac{6b}{a^2-b^2} = \frac{9b^2-6a-9a^2-6b}{a^2-b^2}$$
$$= \frac{9(b^2-a^2)-6(a+b)}{a^2-b^2} = -\frac{9(a^2-b^2)+6(a+b)}{a^2-b^2},$$

durch $a + b$ gekürzt $= - \frac{9(a-b)+6}{a-b}$ und nach § 23

$$= -\left[9 + \frac{6}{a-b}\right] = -3\left(3 + \frac{2}{a-b}\right).$$

$- \frac{2}{7a} - \frac{8b}{7a} - \frac{5}{7a} + \frac{b}{7a} = ?$ Nach dem 1. Minus ist zunächst eine Klammer zu bilden (§ 3, II, 7) $= -\left(\frac{2}{7a} + \frac{8b}{7a} + \frac{5}{7a} - \frac{b}{7a}\right) = - \frac{2+8b+5-b}{7a} = - \frac{7+7b}{7a}$

$$= - \frac{1+b}{a}.$$

II. Ungleichnamige Brüche.

1. Beisp. $\frac{3}{4a} - \frac{8}{21ab} + \frac{5}{6b} - \frac{11}{14b^2} = ?$ Zunächst ist der Generalnenner zu suchen. Hier ist

die höchste Potenz der Primzahl $2 = 4$ $\left(\text{in } \frac{3}{4a}\right)$,
" " " " " $3 = 3$ (im 2. u. 3. Bruch),
" " " " " $7 = 7$ (im 2. u. 4. Bruch),
" " " " " $a = a^1$
" " " " " $b = b^2$

Daher $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a \cdot b^2 = 84ab^2$ der Generalnenner.

$\frac{3}{4a}$ ist nun mit $84ab^2 : 4a = 21b^2$, $\frac{8}{21ab}$ mit $84ab^2 : 21ab = 4b$ zu erweitern, ꝛc. Daher

$$= \frac{63b^2}{84ab^2} - \frac{32b}{84ab^2} + \frac{70ab}{84ab^2} - \frac{66a}{84ab^2}$$

$$= \frac{63b^2 - 32b + 70ab - 66a}{84ab^2} = \frac{7b(10a+9b) - 66a - 32b}{84ab^2}.$$

2. Beispiel. $\frac{11+20x}{48x+36}+\frac{13+24x^2}{32x^2-18}+\frac{19+25x}{45-60x}$ $-1^1/_6=?$ Zunächst sind dieselben Veränderungen vorzunehmen, wie in § 25, 2. Beispiel

$$=\frac{11+40x}{48x+36}+\frac{13+24x^2}{32x^2-18}-\frac{19+25x}{60x-45}-1^1/_6$$

$$=\frac{11+40x}{12(4x+3)}+\frac{13+24x^2}{2(16x^2-9)}-\frac{19+25x}{15(4x-3)}-{}^7/_6=?$$

Da der 2. Nenner $=2(4x+3)(4x-3)$, so ist der Generalnenner $=60(16x^2-9)=60(4x+3)$ $.(4x-3)$. Daher

$$=\frac{5(4x-3)(11+40x)}{60(16x^2-9)}+\frac{30(13+24x^2)}{60(16x^2-9)}$$

$$-\frac{4(4x+3)(19+25x)}{60(16x^2-9)}-\frac{10.7(16x^2-9)}{60(16x^2-9)}$$

$$=\frac{800x^2-380x-165+390+720x^2-400x^2-604x-228-1120x^2+630}{60(16x^2-9)}$$

$$=\frac{-984x+627}{60(16x^2-9)}=\frac{209-328x}{20(16x^2-9)}.$$

§ 28. Partialdivision.

Division durch ein Polynom.

I. Nach § 3, IV, 24 könnte zwar für jedes Glied des Quotient eine beliebige Zahl genommen werden, um aber die allein passende Zahl zu bestimmen, mag hier ein beliebiges Produkt angenommen werden. Aus $(5x+4)(7x+9)$ $=35x^2+37x+36$ folgt $\frac{35x^2+37x+36}{5x+4}=7x+9$. Da hier $35x^2$ aus $5x.7x$ entstanden ist, so muß auch das 1. Glied des Quotient $7x$ offenbar $=35x^2:5x$ sein, folglich ist allgemein das 1. Glied des gesuchten Quotient

= dem 1. Gliede des Dividend dividiert durch das 1. Glied des Divisors. Aus dieser Bestimmung und jenem Satze § 3, IV, 24, der allgemein $\frac{D}{d} = q + \frac{D - dq}{d}$ lautet, ergeben sich die folgenden Regeln für die Partialdivision:

1) Dividend und Divisor sind zunächst streng nach einerlei Prinzip (z. B. beide nach absteigenden Potenzen der Hauptgröße) anzuordnen.

2) Das 1. Glied des Quotient (und daher auch später jedes neue Glied) ist = dem 1. Gliede des Dividend (und später des in gleicher Weise geordneten Restes) dividiert durch das 1. Glied des Divisors.

3) Das für den Quotient gefundene Glied ist hierauf mit dem ganzen Divisor zu multiplizieren und das Produkt vom Dividend abzuziehen. Der Rest ist in gleicher Weise wie der 1. Dividend zu dividieren.

1. Beisp. $\frac{18ac - 27b^2 - 14c^2 + 20a^2 + 39bc - 21ab}{3b + 4a - 2c} = ?$

Lexikographisch (aa, ab, ac, bb, bc, cc) angeordnet:

$$
\begin{array}{lllll}
 & (20a^2 - 21ab + 18ac & - 27b^2 + 39bc & - 14c^2) & : (4a + 3b - 2c) \\
\text{A)} & \underline{20a^2 + 15ab - 10ac} & & & = 5a - 9b + 7c. \\
\text{B)} & \quad - 36ab + 28ac & - 27b^2 + 39bc & & \\
\text{C)} & \quad \underline{- 36ab \qquad\quad} & \underline{- 27b^2 + 18bc} & & \\
 & \qquad\quad 28ac & \qquad + 21bc & - 14c^2 & \\
 & \qquad\quad 28ac & \qquad + 21bc & - 14c^2 &
\end{array}
$$

Erklärung hierzu.

Das 1. Glied des Quotient ist $20a^2 : 4a = 5a$. Dieses Glied mit den 3 Gliedern des Divisors multipliziert, giebt das Produkt A, welches vom Dividend (nach § 9, II) subtrahiert den Rest B giebt. (Man zieht immer nur so viel Glieder vom Dividend herunter, als für das nächste Glied des Quotient gebraucht werden.) Das 1. Glied von B, also $- 36ab$, durch das 1. Glied des Divisors (durch 4a) dividiert, giebt $- 9b$ als 2. Glied des Quotient. $- 9b$ mit dem Divisor multipliziert, giebt C 2c.

2. Beispiel. $\frac{3a}{10} : \left(1^1/_2 - \frac{6a}{5}\right) = ?$ Geordnet:

$$\frac{3a}{10} : \left(-\frac{6a}{5} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{5}{16a} - \frac{25}{64a^2} \ldots \text{in inf.}$$

$$\frac{3a}{10} - \frac{3}{8}$$

Das 1. Glied d. Quot. $= \frac{3a}{10} : -\frac{6a}{5} = -\frac{3a}{10} \cdot \frac{5}{6a} = -\frac{1}{4}$;

$$+\frac{3}{8}$$

Das 2. Glied d. Quot. $= \frac{3}{8} : -\frac{6a}{5} = -\frac{5}{16a}$;

$$+\frac{3}{8} - \frac{15}{32a}$$

" 3. " " " $= \frac{15}{32a} : -\frac{6a}{5} = -\frac{25}{64a^2}$.

$$+\frac{15}{32a}$$

$$+\frac{15}{32a} - \frac{75}{128a^2}$$

$$+\frac{75}{128a^2}$$

u. s. w.

Die Division geht nicht auf; der Quotient erhält daher unendlich viele Glieder, die man nur so weit fortsetzt, als es der Zweck der Aufgabe erfordert. Eine solche unendliche Reihe deutet man durch Punkte, oder auch durch .... in inf. (d. i. in infinitum — bis ins Unendliche) an.

II. Da die unendliche Reihe meist sehr unpraktisch ist (man denke sich die Glieder des vorstehenden Quotient z. B. mit $a = 1$ berechnet!) und man das Resultat der Division doch auch vollständig haben möchte, so setzt man am besten die Division nur so weit fort, bis der Rest von kleinerem Gliederumfange (s. nachstehende Erklärung) ist, als der Divisor, um dann den bisherigen Gliedern des Quotient einen Bruch hinzuzufügen, bei welchem der Zähler dieser Rest, der Nenner aber der ursprüngliche Divisor der Aufgabe ist. Diese Ergänzung ist jener Bruch $\frac{D - dq}{d}$ (siehe oben I).

Erklärung. Der Gliederumfang eines Polynoms richtet sich nach dem Abstand der Exponenten der Hauptgröße des 1. und letzten Gliedes. $7x^3 + ax^2 - bx - 2$ ist von größerem Gliederumfange als $100x^3 + abx^2 + 24x$, denn ersteres geht von x^3 bis x^0 (s. § 12, VIII, letztes Beisp.), letzteres von x^3 bis x^1, $3 - 0$ aber ist $> 3 - 1$. Daher ist auch $x^4 - 1$ von größerem Gliederumfange als $x^3 + ax^2 + bx + c$, da man sich jenes Polynom: $x^4 + 0 . x^3 + 0 . x^2 + 0 . x - 1$ denken muß.

Hätte man als Auflösung einer Aufgabe

$$x = \frac{10a^4 - 23a^3 - 41a^2 + 55a - 29}{5a^2 + 6a - 7},$$

so ist die Partialdivision unbedingt anzuwenden, auch wenn dieselbe nicht aufgeht, weil dann die 4. und 3. Potenz von a verschwinden:

$$\begin{array}{l}
10a^4-23a^3-41a^2+55a-29 : 5a^2+6a-7 = 2a^2-7a+3 \\
\underline{10a^4+12a^3-14a^2} \\
\quad -35a^3-27a^2+55a \\
\quad \underline{-35a^2-42a^2+49a} \\
\qquad\qquad +15a^2+\ \ 6a-29 \\
\qquad\qquad \underline{+15a^2+18a-21} \\
\qquad\qquad\qquad -12a-8.
\end{array}$$

Da die Division nicht aufgeht, und die Reihe $2a^2 - 7a + 3 - \frac{12}{5a} - \frac{32}{5a^2} \cdots$ sehr unpraktisch wäre, so ist mit dem Rest $-12a - 8$ die Division zu schließen, weil derselbe von kleinerem Gliederumfange ist als der Divisor $5a^2 + 6a - 7$. Folglich ist nun x durch folgenden „geschlossenen Ausdruck“ bestimmt:

$$x = 2a^2 - 7a + 3 + \frac{-12a - 8}{5a^2 + 6a - 7}$$

$$= 2a^2 - 7a + 3 - \frac{4(3a + 2)}{5a^2 + 6a - 7}.$$

III. Aus § 17, III folgt, daß die Division $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ stets aufgeht, wenn n ganz und positiv ist (z. B. $\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$); daß ferner $\frac{x^n + a^n}{x + a}$ aufgeht, wenn n ganz, positiv und ungerade ist; daß auch $\frac{x^n - a^n}{x + a}$ aufgeht, wenn n ganz, positiv und gerade ist.

§ 29. Das größte gemeinsame Maß zweier Polynomien.

I. Zur Bestimmung eines solchen Maßes wendet man dasselbe Verfahren (die sogenannte Kettendivision) an, wie beim Aufsuchen desselben bei speziellen Zahlen, indem man die größere Zahl durch die kleinere, jeden Divisor durch den Rest dividiert. Ist z. B. von 481 und 1079 (behufs des Kürzens von $\frac{481}{1079}$) das größte gemeinsame Maß zu suchen, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{l} 1079 : 481 = 2 \\ \underline{\ \ 962} \\ 481 : 117 = 4 \\ \underline{468} \\ 117 : 13 = 9 \\ \underline{117} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

Der letzte Divisor 13 ist das gr. gem. Maß jener Zahlen.

Um daher das größte gemeinsame Maß zweier Polynomien zu finden, dividiert man das größere Polynom durch das kleinere nach Art der Partialdivision, bis der Rest von kleinerem Umfange ist, als der Divisor. Zu berücksichtigen ist hierbei, um unbequeme Zahlen zu vermeiden, daß 2 Polynomien, die, durch einander dividiert, aufgehen, auch dann noch aufgehen müssen, wenn sie mit beliebigen Monomien multipliziert oder dividiert werden, und daß z. B. in $a^2 - b^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$ das gemeinsame Maß $(a + b)$ auch dann noch unverändert bleibt, wenn jeder der beiden Ausdrücke mit einem beliebigen Monom multipliziert oder dividiert wird.

II. Das Bestimmen des größten gemeinsamen Maßes zweier Polynomien erfordert daher, wenn die Rechnung nicht zu mühsam werden soll, folgende Operationen:

a) Die beiden Polynomien sind, wie bei der Partialdivision, nach einerlei Prinzip anzuordnen.

b) Das Polynom mit dem größeren Gliederumfange ist als Dividend, das andere als Divisor zu nehmen. Bei gleichem Umfange ist es gleichgültig, welches als Dividend genommen wird.

c) Enthält ein solches Polynom Brüche, so multipliziert man es noch vor der Division mit dem Generalnenner.

d) Ein mit einem negativen Gliede beginnendes Polynom multipliziert man mit -1.

e) Jedes der beiden Polynomien (vor allen Dingen der Divisor) ist durch den in allen Gliedern enthaltenen gemeinsamen Faktor zu dividieren.

f) Sind somit die Glieder des Dividend und Divisor auf die kleinsten ganzen Zahlen gebracht, so dividiert man die Polynomien ganz so, wie bei der Partialdivision, indem man zunächst ein Glied des Quotient bestimmt, mit diesem den ganzen Divisor multipliziert 2c.

g) Giebt das 1. Glied des Dividend (bezw. des Restes, wenn derselbe noch nicht kleiner als der Divisor), durch das 1. Glied des Divisors dividiert, keine ganze Zahl, sondern einen Bruch, so multipliziert man den Dividend noch vor der Division mit dem Nenner dieses Bruches.

h) Bei der Subtraktion des Produktes aus dem Divisor und dem gefundenen Gliede des Quotienten zieht man stets sämtliche Glieder des Dividend (bezw. Restes) herunter.

i) Die Partialdivision ist stets so weit fortzusetzen, bis der Rest von kleinerem Umfange ist, als der Divisor, um alsdann diesen durch jenen Rest zu dividieren.

k) Diese Kettendivision ist so lange fortzusetzen, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist das größte gemeinsame Maß der beiden Polynomien.

Z. B. $5^2/_3 - \frac{23\,a}{3} + \frac{5\,a^2}{2} - \frac{8}{a}$ und $11a + 8 - \frac{21\,a^2}{4}$. Das 1. Polynom mit 6a, das 2. mit 4 mult.: $34a - 46a^2 + 15a^3 - 48$ und $44a + 32 - 21a^2$. Beide geordnet:

$15a^3 - 46a^2 + 34a - 48$ und $-21a^2 + 44a + 32$; das 2. Pol. mit -1 multipliziert und als Divisor benutzt, da es von kleinerem Umfange:

$(15a^3 - 46a^2 + 34a - 48) : (21a^2 - 44a - 32) = ?$

Hier läßt $\frac{15\,a^3}{21\,a^2} = \frac{5\,a}{7}$ den Nenner 7 erscheinen, folglich ist der Dividend mit 7 zu multiplizieren:

$$\begin{array}{l} (105a^3 - 322a^2 + 238a - 336) : (21a^2 - 44a - 32) = 5a \\ \underline{\;105a^3 - 220a^2 - 160a\;} \\ \qquad -102a^2 + 398a - 336 : 21a^2 - 44a - 32 = ? \end{array}$$

Der Divid. mit -1 mult.

$$102a^2 - 398a + 336 : 21a^2 - 44a - 32 = ?$$

Wegen $\frac{102\,a^2}{21\,a^2} = \frac{34}{7}$ ist der Dividend mit 7 zu multiplizieren.

$$\begin{array}{l} 714a^2 - 2786a + 2352 : 21a^2 - 44a - 32 = 34 \\ \underline{714a^2 - 1496a - 1088} \\ \qquad -1290a + 3440. \end{array}$$

Da jetzt der Rest kleiner als der Divisor:

$21a^2 - 44a - 32 : -1290a + 3440.$ Der Divisor mit -1 mult. u. durch 430 div.

$$\begin{array}{l} 21a^2 - 44a - 32 : 3a - 8 = 7a + 4 \\ \underline{21a^2 - 56a} \\ \quad +12a - 32 \\ \quad \underline{+12a - 32} \\ \qquad\qquad 0. \end{array}$$

Die Divis. geht auf, folglich ist $3a - 8$ das größte gemeinsame Maß der gegebenen Polynomien.

§ 30. Wurzellehre.

A. Einleitende Sätze.

I. Aus der Entstehung der Wurzel (s. § 2, VI) folgt: $\sqrt[n]{a} = b$ ist richtig, wenn die Wurzel b mit dem Wurzelexponent n potenziert, die Wurzelbasis a giebt. Es ist $\sqrt[3]{1000} = 10$, weil $10^3 = 1000$; $\sqrt{1/9} = 1/3$ (d. i. $\sqrt[2]{1/9} = 1/3$, s. § 2, VI), weil $(1/3)^2 = 1/9$; $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$ (wofür auch $\sqrt{}(a^2 - 2ab + b^2)$ geschrieben wird), weil $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Anmerkung. Bei den Beweisen mag Wurzel mit W., Wurzelexponent mit Wt., Wurzelbasis mit Wb. abgekürzt werden.

1. Zusatz. $\sqrt[1]{a} = a$, denn $W^{Wt.} = a^1 = a =$ Wb.!

2. Zusatz. $\sqrt[n]{1} = 1$, denn $W^{Wt.} = 1^n = 1 =$ Wb.!

3. Zusatz. $\sqrt[n]{0} = 0$, denn $W^{Wt.} = 0^n = 0 =$ Wb.!

4. Zusatz. Die Wurzel aus einer ganzen Zahl oder aus einem gemeinen Bruch ist entweder rational (durch ganze Zahlen vollkommen genau abgrenzbar, z. B. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt[3]{8/343} = 2/7$) oder irrational (durch ganze Zahlen nicht abgrenzbar, also nur durch einen unendlichen unperiodischen Dezimalbruch darstellbar). Ist die Wurzel aus einer ganzen Zahl nicht wieder eine ganze Zahl, so muß sie irrational sein. Wäre z. B. $\sqrt{3} = 1\,5/12$, so müßte $(17/12)^2 = \frac{17.17}{12.12} = 2$ sein. Dies aber ist unmöglich, denn wenn sich $17/12$ nicht

kürzen läßt, so kann sich auch $\frac{17.17}{12.12}$ nicht (bis zur ganzen Zahl 2) kürzen lassen. Ferner kann $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ kein periodischer Dezimalbruch sein, da jeder periodische Dezimalbruch in einen gemeinen verwandelt werden kann.

B. Einerlei Wurzelbasen.

II. $\sqrt[n]{a^n} = a$. Bew. $\text{W}^{\text{Wt.}} = a^n = \text{Wb.}$

Z. B. $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt[2]{(-5)^2} = -5$.

III. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Bew. Unterscheidet man in $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ links: Wurzelexponent n und Wurzelbasis a, rechts als Wurzel $\sqrt[n]{a}$, so muß auch, da diese Gleichung unbedingt richtig ist, $\text{W}^{\text{Wt.}} = \text{Wb.}$ sein, d. i. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Die beiden letzten Sätze lassen sich in folgender Weise aussprechen: Der Potenzexponent hebt sich mit dem ihm gleichen Wurzelexponent, gleichviel ob er sich außerhalb oder innerhalb der Wurzel befindet. Z. B. $\left(\sqrt[3]{ab}\right)^3 = ab$; $\left(\sqrt{a-b}\right)^2 = a - b$; $\left(\sqrt[5]{-x}\right)^5 = \sqrt[5]{(-x)^5} = -x$.

Zusatz. $(\sqrt{a})^3 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{a})^1 = a\sqrt{a}$.

IV. $\sqrt[n]{a^r} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r$. Der Potenzexponent kann beliebig innerhalb oder außerhalb der Wurzel stehen.

Bew. $\text{W}^{\text{Wt.}} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^r\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^r = a^r = \text{Wb.}$

Z. B. $\sqrt[4]{625^3} = \left(\sqrt[4]{625}\right)^3 = 5^3 = 125$; $\left(\sqrt[6]{2}\right)^7 = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{128}$.

V. $\sqrt[-n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ (vergleiche § 12, XV, 1. Zusatz).

Bew. $W^{Wt.} = \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{-n} = \left(\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{n}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{b}$.

$= Wb$. Z. B. $\sqrt[-2]{4/_7} = \sqrt[2]{7/_4} = \sqrt{1._{75}}$.

VI. $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$, also auch $\left(\sqrt[n]{a}\right)^r = a^{\frac{r}{n}}$ (n. Satz III). Statt der Wurzel kann ein gebrochener Potenzexponent gesetzt werden, der dadurch entsteht, daß man den ursprünglich unter der Wurzel befindlichen Potenzexponent durch den Wurzelexponent dividiert. Bew. $W^{Wt.} = \left(a^{\frac{r}{n}}\right)^n = a^{\frac{r}{n}\cdot n}$

$= a^r = Wb$. Z. B. $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/_3}$; $\sqrt[40]{a^{25}} = a^{25/_{40}} = a^{5/_8}$; $\sqrt[-1^1/_2]{x^6} = x^{6:-3/_2} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$; $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{1/_2}$; $\sqrt[3]{a} = a^{1/_3}$; $\sqrt[4]{x^{12}} = x^{12/_4} = x^3$; $\sqrt[3]{(2/_5)^9} = (2/_5)^{9/_3}$ $= (2/_5)^3 = 8/_{125}$.

VII. Umgekehrt ist $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$. Der Nenner des gebrochenen Potenzexponent wird zum Wurzelexponent.

Z. B. $100^{1/_2} = \sqrt[2]{100^1} = \sqrt{100} = 10$; $a^{1/_3} = \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a}$;

$(a - b)^{1/_4} = \sqrt[4]{(a-b)^1} = \sqrt[4]{a - b}$.

Resultate schreibt man gewöhnlich mit dem Wurzelzeichen und nicht mit gebrochenem Potenzexponent. Z. B. $x = 7^{-3/_4}$ $= \frac{1}{7^{3/_4}}$ (den negativen Exponent beseitigt man immer zuerst — s. § 12, VIII) $= \frac{1}{\sqrt[4]{7^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{343}}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x^5}} = \frac{x^{2/3}\cdot x^{1/4}}{x^{5/6}} = x^{2/3+1/4-5/6} = x^{1/12}$$

$$= \sqrt[12]{x^1} = \sqrt[12]{x}.$$

$$8\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{8^{-2}} = 8^1\cdot 8^{1/2}\cdot 8^{-2/3} = 8^{1+1/2-2/3} = 8^{5/6}$$

$$= \sqrt[6]{8^5} = \sqrt[6]{32768}.$$

$$\sqrt[-4]{\frac{\sqrt[-3]{a^4}\,\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}\,\sqrt[5]{a^{-1}}}}{a\sqrt[10]{a^{-1/3}}\cdot\sqrt[2^1/_2]{a^{-7^1/_3}}}} = \sqrt[-4]{\frac{a^{-3/4}\cdot a^{5/6}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}\;a^{-1/5}}}{a^1\;\cdot\;a^{-1/30}\;\cdot\;a^{-7^1/_3:2^1/_2}}}$$

$$= \sqrt[-4]{\frac{a^{-3/4}\;\cdot\;a^{5/6}\;\sqrt[4]{a^{-3^1/_5}}}{a^1\cdot a^{-1/30}\cdot a^{-44/15}}} = \sqrt[-4]{a^{-3/4+5/6-4/5-1+1/30+44/15}}$$

$$= \sqrt[-4]{a^{5/4}} = a^{5/4:-4} = a^{-5/16} = \frac{1}{a^{5/16}} = \frac{1}{\sqrt[16]{a^5}}.$$

VIII. Die Potenz- und Wurzelexponenten können gegenseitig gekürzt und erweitert werden.

Bew. $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r:k}{n:k}} = \sqrt[n:k]{a^{r:k}}$. Z. B. $\sqrt[12]{a^8}$ $= \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{10^2} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$; $\left(\sqrt[9]{n}\right)^6 = \sqrt[9]{n^6} = \sqrt[3]{n^2}$; $\sqrt[3/4]{7^{-1^1/_2}}$ (mit 4 erweitert) $= \sqrt[3]{7^{-6}} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = {}^1/_{49}$; $\left(\sqrt[8]{x}\right)^4 = \left(\sqrt[2]{x}\right)^1 = \sqrt{x}$.

IX. $\sqrt[nr]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$ und umgekehrt $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[nr]{a}$

Bew. $W^{Wt.} = \left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^{nr} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^{n}\right)^{r} = \left(\sqrt[r]{a}\right)^{r}$

$= a =$ Wb. Z. B. $\sqrt[4]{100} = \sqrt[2.2]{100} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{100}}$

$= \sqrt{\sqrt{100}} = \sqrt{10}$; $\sqrt[6]{125} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$;

$$\sqrt[6]{144} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{144}} = \sqrt[3]{\sqrt{144}} = \sqrt[3]{12};$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[9]{a};\ \sqrt[-4]{\sqrt[-5]{2}} = \sqrt[20]{2}.$$

X. Ist der Wurzelexponent ungerade, so kann man die Wurzelbasis mit -1 multiplizieren, wenn man das Vorzeichen der Wurzel ändert. $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.

Bew. $W^{Wt.} = \left(-\sqrt[3]{a}\right)^3 = -\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = -a =$ Wb.

Beispiel. $\sqrt[5]{-a-b} = -\sqrt[5]{a+b}$. Jedoch gilt dies nicht für geradzahlige Exponenten. Es ist $\sqrt[4]{-a}$ nicht $= -\sqrt[4]{a}$, denn $W^{Wt.} = \left(-\sqrt[4]{a}\right)^4 = +\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$ $= +a$ und dies ist der Wb. nicht gleich.

XI. Die Quadratwurzel hat stets zwei einander entgegengesetzte Werte. Z. B. $\sqrt{49} = +7$ oder $= -7$; denn $(+7)^2 = 49 =$ Wb., aber auch $(-7)^2 = +49 =$ Wb. Man schreibt daher $\sqrt{49} = \pm 7$; $-\sqrt{121} = -(\pm 11)$

$= \mp 11$. Daher ist auch $2\sqrt{9} - 3\sqrt{100} + 6\sqrt{36} + 13$ vollständig $2(\pm 3) - 3(\pm 10) + 6(\pm 6) + 13 = \pm 6 \mp 30 \pm 36 + 13$ und bedeutet entweder (mit dem oberen Zeichen) $+ 6 - 30 + 36 + 13 = 25$, oder (mit dem unteren Zeichen) $- 6 + 30 - 36 + 13 = + 1$.

XII. $\sqrt{-49}$ ist weder $+ 7$, noch $- 7$, da beide im Quadrat $+ 49$ geben; auch kann es keine andere positive oder negative Zahl geben, welche im Quadrat $- 49$ giebt. Eben so giebt es keine Zahl, welche $\sqrt[4]{-3/7}$, $\sqrt[6]{-1000}$, $\sqrt[8]{-1}$ vorstellt, da jede positive oder negative Zahl in geradzahliger Potenz kein negatives Resultat ($- 3/7$ ꝛc.) geben kann. Diese unmöglichen Zahlen nennt man **imaginäre** (das g wie im Worte Gold). Der Gegensatz von diesen Zahlen sind die **reellen** (möglichen) Zahlen, d. i. die positiven und negativen Zahlen, mit denen wir bisher rechneten.

C. Verschiedene Basen.

XIII. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$. Aus einem Produkt kann man die Wurzel ziehen, wenn man sie aus jedem Faktor zieht. **Bew.** $W^{Wt.} = \left(\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n . \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \,.\, b = Wb$.

Beisp. $\sqrt[3]{8 \,.\, 125} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{125} = 2 \,.\, 5 = 10$; $\sqrt{16a^4 b} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{a^4} \,.\, \sqrt{b} = 4a^2\sqrt{b}$;

$$\sqrt[3]{8xy^6} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{x} \,.\, \sqrt[3]{y^6} = 2y^3\sqrt[3]{x}.$$

Anmerkung. $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist nicht $= \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$; denn $(a + b)^2$ ist nicht $= a^2 + b^2$ (s. § 18); eben so ist $\sqrt{a^2 - b^2}$ nicht $= a - b$.

XIV. Verkleinern der Wurzelbasis nach dem Satze $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}$.

Beispiele. $\sqrt[5]{n^{13}} = \sqrt[5]{n^{10} \cdot n^3} = n^2 \sqrt[5]{n^3}$. (Oder: $\sqrt[5]{n^{13}} = n^{13/5} = n^{2+3/5} = n^2 \cdot n^{3/5} = n^2 \sqrt[5]{n^3}$.)

Bei $\sqrt[5]{8{\cdot}97356^{13}}$ hätte man die vielstellige Zahl 13mal mit sich selbst zu multiplizieren, bei $8{\cdot}97356^2 \sqrt[5]{8{\cdot}97356^3}$ nur höchstens 3mal. Es ist daher gewöhnlich von Vorteil, den Potenzexponent unter der Wurzel kleiner als den Wurzelexponent zu haben. $\sqrt[4]{2a^5 b^{10}} = \sqrt[4]{a^4 \cdot b^8 \cdot 2ab^2} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^8} \cdot \sqrt[4]{2ab^2} = ab^2 \sqrt[4]{2ab^2}$.

$\sqrt[6]{a^{29}} = a^4 \sqrt[6]{a^5}$ [29 : 6 = 4 (außerhalb der Wurzel), Rest 5 (innerhalb der Wurzel!)].

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Um keine planlosen Versuche zu machen, zerlegt man die Basis in Primfaktoren, z. B. $\sqrt{1080} = \sqrt{108 \cdot 10} = \sqrt{9 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}$, und bildet alsdann bei der n^{ten} Wurzel n^{te} Potenzen, hier also Quadrate $= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \sqrt{30} = 6\sqrt{30}.$$

$$\sqrt[3]{51840} = \sqrt[3]{6 \cdot 864 \cdot 10} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 108 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5}$$
$$= \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5} = 12 \sqrt[3]{30}.$$

$$5\sqrt{45} + 6\sqrt{20} - 2\sqrt{245} = 5\sqrt{9 \cdot 5} + 6 \cdot \sqrt{4 \cdot 5}$$
$$- 2\sqrt{49 \cdot 5} = 5 \cdot 3\sqrt{5} + 6 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 7\sqrt{5}$$
$$= (15 + 12 - 14)\sqrt{5} = 13\sqrt{5}.$$

$$2\sqrt[3]{a^4b^5} - 3\sqrt[3]{a^7b^2} + 4\sqrt[3]{ab^8} = 2ab\sqrt[3]{ab^2}$$
$$- 3a^2\sqrt[3]{ab^2} + 4b^2\sqrt[3]{ab^2} = (2ab - 3a^2 + 4b^2)\sqrt[3]{ab^2}.$$

XV. Sätze in Bezug auf imaginäre Zahlen.

1) Die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet man mit i.

2) Die Potenzen von i. $i^0 = 1$ (siehe § 12, XI); $i^1 = i$; $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$; $i^3 = i^2 . i^1 = -1 . i = -i$. Die höheren Potenzen sind auf die vorstehenden leicht zurückgeführt, indem man den Exponent durch 4 dividiert und den Rest allein behält. Z. B. $i^{25} = ?$ $25 : 4 = 6$, Rest 1; daher $i^{25} = i^1 = i$; $i^{43} = ?$ $43 : 4 = 10$, Rest 3, daher $i^{43} = i^3 = -i$; $i^{20} = i^0 = +1$. Denn $i^{43} = i^{40} . i^3 = (i^4)^{10} . i^3 = 1^{10} . (-i)$.

Anwendung. $(3 - 5i)(7 + 2i) = 21 - 35i + 6i - 10i^2 = 21 - 29i - 10(-1) = 31 - 29i$; $(7 - 4i)^3 = 7^3 - 3 . 7^2 . 4i + 3 . 7 . (4i)^2 - (4i)^3 = 343 - 3 . 49 . 4 . i + 21 . 16 . (-1) - 64 . (-i) = 343 - 588i - 336 + 64i = 7 - 524i$.

3) $\sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a} . \sqrt{-1} = \sqrt{a} . i$. Jede imaginäre Quadratwurzel kann also als ein Produkt aus einer reellen Zahl und i dargestellt werden.

Z. B. $(5 - 4\sqrt{-6})^2 = (5 - 4\sqrt{6} . i)^2 = 5^2 - 2 . 5 . 4 . \sqrt{6} . i + (4\sqrt{6} . i)^2 = 25 - 40\sqrt{6} . i + 16 . 6 . (-1) = -71 - 40\sqrt{6} . i$.

4) Die 3. Wurzel aus einer beliebigen reellen Zahl hat stets 3 verschiedene Werte. Z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, außerdem noch $-1 + \sqrt{3} . i$ und $-1 - \sqrt{3} . i$. Denn 1) $2^3 = 8 =$ Wb.

$\left(\sqrt[3]{8}\right.$ ist nicht $= -2$, denn $\left.(-2)^3 = -8\right)$.

2) $(-1+\sqrt{3}\,.\,i)^3 = (-1)^3 + 3\,.\,(-1)^2\,.\,\sqrt{3}\,.\,i + 3\,.\,(-1)\,.\,(\sqrt{3}\,.\,i)^2 + (\sqrt{3}\,.\,i)^3 = -1 + 3\,.\,(+1)\,.\,\sqrt{3}\,.\,i - 3\,.\,(\sqrt{3})^2\,.\,i^2 + (\sqrt{3})^3\,.\,i^3 = -1 + 3\sqrt{3}\,.\,i - 3\,.\,3\,(-1) + 3\sqrt{3}\,.\,(-i)$ (s. III, Zusatz) $= -1 + 3\sqrt{3}\,.\,i + 9 - 3\sqrt{3}\,.\,i = +8 =$ Wb.

Eben so $(-1-\sqrt{3}\,.\,i)^3 = +8$.

$\sqrt[3]{-8}$ hat die drei Werte: -2, $1+\sqrt{3}\,.\,i$, $1-\sqrt{3}\,.\,i$.

$\sqrt[4]{1}$ hat vier Werte: $+1$, -1, i, $-i$; z. B. $(-i)^4 = +(i^4) = +1 =$ Wb.

$\sqrt[6]{1}$ hat sechs Werte: $+1$, -1, $\frac{-1+\sqrt{3}\,.\,i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}$,

$$\frac{1+\sqrt{3}\,.\,i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Allgemein: Die n^{te} Wurzel aus einer einfachen Zahl (s. den nachfolgenden Satz) hat n verschiedene Werte.

5) $\sqrt[n]{a^n}$ hat jedoch nicht n Werte, sondern nur den einen a (die Basis); denn $\sqrt{(-a)^2}$ kann nur den einen Wert $-a$ haben, da durch die $\sqrt{\ }$ nur die 2. Potenz beseitigt und der ursprüngliche Wert $-a$ wieder hergestellt ist. Auch muß $\sqrt{(-a)^2} = (-a)^{2/2} = (-a)^1 = -a$ sein. Man darf also nicht rechnen $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{+81} = \pm 9$. Folglich hat auch $\sqrt[12]{a^8}$ nicht 12 Werte, vielmehr müssen die Exponenten

erst gegenseitig gekürzt werden. Bew. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^2)^4}} = \sqrt[3]{a^2}$, also nur drei Werte.

6) $\sqrt[3]{8}$ kann nur den einen reellen Wert 2 haben (siehe vorstehenden 4. Satz), folglich müssen die beiden anderen Werte $-1 \pm \sqrt{3}\,.\,i$ imaginär sein, was sich schon aus dem i erklären läßt.

Daraus folgt nun, daß die imaginären Werte nicht bloß als Quadratwurzeln aus negativen Zahlen allein auftreten, sondern auch als Summen von reellen Zahlen und imaginären Quadratwurzeln in der Form $a + bi$ (oder $a - bi$). Man nennt daher diese imaginären Zahlen **komplexe**.

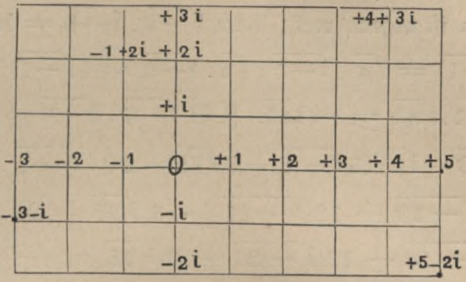
7) **Geometrische Darstellung der imaginären Zahlen.**

Ist KL eine beliebige Senkrechte auf dem Durchmesser des Halbkreises AHB, so gilt nach einem bekannten Lehrsatze der Geometrie folgende Relation: $KL^2 = KA\,.\,KB$ oder $KL = \sqrt{KA\,.\,KB}$. Ist nun $CD = +1$, also $CE = -1$, so ist nach diesem geom. Satze: $CF = \sqrt{CD\,.\,CE} = \sqrt{+1\,.\,-1}$ $= \sqrt{-1} = +i$, folglich die entgegengesetzte Strecke $CG = -i$. Ist $CA = +2$, $CB = -2$, so ist CH

$= \sqrt{CA\,.\,CB} = \sqrt{+2\,.\,-2} = \sqrt{-4} = +2i$, entgegengesetzt: $CJ = -2i$ rc.

So ergiebt sich folgendes Bild:

Linie der reellen Zahlen:



Die imaginären Zahlen liegen also in der Ebene oberhalb und unterhalb der Linie der reellen Zahlen.

XVI. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$. (Umkehrung von XIII.) Um Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten zu multiplizieren, zieht man dieselbe Wurzel aus dem Produkt der Wurzelbasen.

Z. B. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$; $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{5bc}$

$$= \sqrt[3]{10 \cdot 2ab \cdot 5bc} = \sqrt[3]{100\,ab^2c};$$

$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{6})\,(8\sqrt{5} - 3\sqrt{7}) = 16\,(\sqrt{5})^2 + 24\sqrt{30}$
$-6\sqrt{35} - 9\sqrt{42} = 80 + 24\sqrt{30} - 6\sqrt{35} - 9\sqrt{42}$;
$(9\sqrt{7} - 11\sqrt{3})^2 = (9\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 9\sqrt{7} \cdot 11\sqrt{3} + (11\sqrt{3})^2$
$= 81 \cdot 7 - 198\sqrt{21} + 121 \cdot 3 = 930 - 198\sqrt{21}$;
$2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} = ?$ Man denke sich $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

$$= 6\sqrt{15} \cdot (\sqrt{2})^2 = 12\sqrt{15};\; 4\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{35}$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = 60\sqrt{21};$$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^3\,b^9} = \sqrt[12]{a^{11}b^9}.$$

Zusatz. Das Produkt aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist negativ reell; denn $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a(-1)} \cdot \sqrt{b(-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{ab} = -1 \cdot \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$. Z. B. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} = -\sqrt{30}$; $(4\sqrt{-3} - \sqrt{5})(5\sqrt{-2} + 3\sqrt{7}) = 20 \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2} - 5\sqrt{-10} + 12\sqrt{-21} - 3\sqrt{35} = 20(-\sqrt{6}) - 5\sqrt{-10} + 12\sqrt{-21} - 3\sqrt{35} = -20\sqrt{6}$

$$- 3\sqrt{35} - 5\sqrt{10} \cdot i + 12\sqrt{21} \cdot i = -20\sqrt{6}$$

$$- 3\sqrt{35} + (12\sqrt{21} - 5\sqrt{10})\, i.$$

Berechnet man die Wurzeln (siehe § 31), so erhält man: $-66_{.73803} + 39_{.17952}\, i$. Die imaginären Auflösungen sind stets in dieser Form $(a \pm b i)$ zu geben.

XVII. Vereinigung von rationalen Faktoren der Wurzel mit der Wurzelbasis.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

Z. B. $5\sqrt{7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}$;

$$2a\sqrt[3]{7ab} = \sqrt[3]{(2a)^3} \cdot \sqrt[3]{7ab} = \sqrt[3]{56a^4b};$$

$$1^1/_5 \sqrt[4]{2^1/_2} = \sqrt[4]{(^6/_5)^4 \cdot {}^5/_2} = \sqrt[4]{5_{.184}};$$

$$(3\sqrt{5} - 4\sqrt{2})\sqrt{5\sqrt{5} + 7\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{5} - 4\sqrt{2})^2}$$

$$\cdot \sqrt{5\sqrt{5} + 7\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{5} - 4\sqrt{2})^2 (5\sqrt{5} + 7\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{(9.5 - 24\sqrt{10} + 16.2)(5\sqrt{5} + 7\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{(77 - 24\sqrt{10})(5\sqrt{5} + 7\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{385\sqrt{5} - 600\sqrt{2} + 539\sqrt{2} - 336\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{49\sqrt{5} - 61\sqrt{2}}.$$

XVIII. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Aus einem Bruche kann man die Wurzel ziehen, indem man sie aus dem Zähler und dem Nenner zieht. Bew. $W^{Wt.} = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b} = Wb.$

Z. B. $\sqrt{9/25} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = 3/5$; $\sqrt{12^1/_4} = \sqrt{49/4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$;

$\sqrt[3]{1/512} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{512}} = 1/8$; $\sqrt{\frac{7a^4}{81b^6}} = \frac{\sqrt{7a^4}}{\sqrt{81b^6}} = \frac{a^2\sqrt{7}}{9b^3}$

1. Zusatz. Die Wurzel aus einem Bruch verwandelt man gern in einen Bruch mit rationalem Nenner, bei welchem nur der Zähler jene Wurzel aus einer ganzen Zahl enthält.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-1}}{b^1 \cdot b^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{a\,b^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a b^{n-1}}}{b}.$$

Z. B. $\sqrt{5/7} = ?$ Der Bruch mit 7 erweitert, um im Nenner die dem Wt. entsprechende Potenz herzustellen

$$= \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7^2}} = \frac{\sqrt{35}}{7}; \quad \sqrt[3]{3^1/_2} = \sqrt[3]{^7/_2} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 2^2}{2 \cdot 2^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 4}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{28}}{2}; \quad \sqrt[5]{\frac{4\,a}{27\,b^2}} = \sqrt[5]{\frac{4\,a}{3^3 \cdot b^2}} = ?$$

Um $3^5 . b^5$ zu erhalten, ist der Bruch mit $3^2 . b^3$ zu erweitern

$$= \sqrt[5]{\frac{4\,a \cdot 9\,b^3}{3^5 \cdot b^5}} = \frac{\sqrt[5]{36\,a\,b^3}}{3\,b}; \quad \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}} = \sqrt[4]{\frac{1 \cdot a}{a^3 \cdot a}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{a}{a^4}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{a}.$$

2. Zusatz. Ist der Wurzelexponent größer als 1, z. B. $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$ ... und

a) die Wurzelbasis größer als 1, so muß die Wurzel kleiner als die Wb. werden; z. B. $\sqrt[3]{1000000} = 100$, also $100 < 1000000$; denn das Produkt aus 3 Zahlen, die > 1 sind, muß offenbar $>$ jeder Faktor werden.

b) Ist jedoch die Wb. kleiner als 1, so muß die Wurzel größer als die Wb. werden; z. B $\sqrt{^9/_{100}} = {^3/_{10}}$, also $^3/_{10} > {^9/_{100}}$; denn kürzt man den Bruch so, daß sich der Zähler in 1 verwandelt, so hat man $\sqrt{^9/_{100}} = \sqrt{\frac{1}{11^1/_9}}$ $= \frac{1}{\sqrt{11^1/_9}}$. Da nun $\sqrt{11^1/_9} < 11^1/_9$ (siehe Satz a), so muß $\frac{1}{\sqrt{11^1/_9}}$ größer als $\frac{1}{11^1/_9}$ sein, denn je kleiner der Nenner, desto größer der Wert des Bruches, d. i. aber:

$\sqrt{\frac{1}{11^1/_9}}$ größer als $\frac{1}{11^1/_9}$, oder $\sqrt{^9/_{100}}$ größer als $^9/_{100}$. Die Wurzel nähert sich mithin stets (in beiden Fällen a und b) der Einheit.

XIX. Umgekehrt ist $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten dividiert man, indem man ihre Basen dividiert und aus dem Quotient dieselbe Wurzel zieht.

Z. B. $\frac{\sqrt{93}}{\sqrt{3}} = \sqrt{^{93}/_3} = \sqrt{31}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{^7/_8} = \sqrt{0{\cdot}875}$;

$$\frac{\sqrt[3]{26\,a^2\,b}}{\sqrt[3]{4\,a\,b}} = \sqrt[3]{\frac{26\,a^2\,b}{4\,a\,b}} = \sqrt[3]{6{\cdot}5\,a}.$$

1. Zusatz. Oft ist es von Vorteil, einen Bruch, der nur im Zähler oder nur im Nenner eine Wurzel enthält, in die Wurzel aus einem Bruch zu verwandeln.

Z. B. $\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4^2}} = \sqrt{^5/_{16}} = \sqrt{0{\cdot}3125}$; $\frac{\sqrt[3]{11}}{2} = \frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{2^3}}$

$$= \sqrt[3]{^{11}/_8} = \sqrt[3]{1{\cdot}375}; \quad \frac{a\,b}{\sqrt[3]{a^2\,b}} = \frac{\sqrt[3]{a^3\,b^3}}{\sqrt[3]{a^2\,b}} = \sqrt[3]{a\,b^2};$$

$$\frac{6}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{6^2}}{\sqrt{15}} = \sqrt{^{36}/_{15}} = \sqrt{2{\cdot}4}.$$

2. Zusatz. Soll daher eine Quadratwurzel durch n dividiert werden, so hat man die Wb. durch n^2 zu dividieren,

denn $\frac{\sqrt{20\,b + (6\,e)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20\,b + (6\,e)^2}}{\sqrt{2^2}} = \sqrt{\frac{20\,b + (6\,e)^2}{4}}$

$= \sqrt{5\,b + (3\,e)^2}$; nicht $\left(\frac{3\,e}{2}\right)^2$, da $\frac{(6\,e)^2}{4} = \frac{(6\,e)^2}{2^2} = \left(\frac{6\,e}{2}\right)^2$.

XX. Rationalmachen des Wurzeln enthaltenden Nenners.

1) Eingliedrige Nenner. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ würde als $\frac{1}{1{\cdot}41421356}$ wegen der Division durch eine vielstellige Zahl eine sehr mühsame Rechnung erfordern. Erweitert man dagegen

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ mit $\sqrt{2} = \frac{1\,.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{\cdot}41421356}{2}$

$= 0{\cdot}70710678$, so wird zwar das Wurzelausziehen nicht erspart, aber die mühsame Division. Das Verfahren ist also ähnlich dem im 1. Zusatz von XVIII. Allgemein: $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$ mit $\sqrt[n]{b^{n-1}}$ erweitert

$$= \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{1+n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}.$$

Beispiele. $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$ mit $\sqrt{6}$ erweitert $= \frac{3\sqrt{5}\,.\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\,.\sqrt{6}}$

$$= \frac{3\sqrt{30}}{2\,.\,6} = \frac{\sqrt{30}}{4};$$

$$\frac{9}{\sqrt[3]{15}} = \frac{9\sqrt[3]{15^2}}{\sqrt[3]{15}\,.\sqrt[3]{15^2}} = \frac{9\sqrt[3]{225}}{\sqrt[3]{15^3}} = \frac{3\sqrt[3]{225}}{5};$$

$$\frac{35}{\sqrt{-10}} = \frac{35\sqrt{-10}}{(\sqrt{-10})^2} = \frac{35\sqrt{-10}}{-10} = -\frac{7\sqrt{-10}}{2}$$

$$= -\frac{7\sqrt{10}\,.\,i}{2}$$ (oder auch gerechnet: $\frac{35}{\sqrt{-10}} = \frac{35}{\sqrt{10}\,.\,i}$

$$= \frac{35\sqrt{10}\,.\,i}{10\,.\,i^2} = \frac{35\sqrt{10}\,.\,i}{10\,(-1)} = -\frac{7\sqrt{10}\,.\,i}{2});$$

$$\frac{6\,a\,c}{\sqrt{3bc}} = \frac{6\,a\,c\sqrt{3bc}}{3\,b\,c} = \frac{2\,a}{b}\sqrt{3\,b\,c};$$

$$\frac{a\,b^2}{\sqrt[4]{a^3 b}} = \frac{a\,b^2\sqrt[4]{a\,b^3}}{\sqrt[4]{a^3 b}\,.\,\sqrt[4]{a\,b^3}} = \frac{a\,b^2\sqrt[4]{a\,b^3}}{a\,b} = b\sqrt[4]{ab^3}.$$

2) Mehrgliedrige Nenner mit Quadratwurzeln. Hier wendet man den Satz $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ an, denn enthält der Nenner $a + b$ oder $a - b$ Quadratwurzeln, so müssen diese in $a^2 - b^2$ verschwinden.

Z. B. $\frac{10}{\sqrt{11} - 2\sqrt{3}}$ mit $\sqrt{11} + 2\sqrt{3}$ erweitert

$$= \frac{10\,(\sqrt{11} + 2\sqrt{3})}{(\sqrt{11} - 2\sqrt{3})\,(\sqrt{11} + 2\sqrt{3})} = \frac{10\,(\sqrt{11} + 2\sqrt{3})}{(\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{10\,(\sqrt{11} + 2\sqrt{3})}{11 - 4\,.\,3} = \frac{10\,(\sqrt{11} + 2\sqrt{3})}{-1}$$

$$= -10\,(\sqrt{11} + 2\sqrt{3});$$

$$\frac{111}{10 + 3\sqrt{7}} = \frac{111\,(10 - 3\sqrt{7})}{10^2 - (3\sqrt{7})^2} = \frac{111\,(10 - 3\sqrt{7})}{100 - 9\,.\,7}$$

$$= 3\,(10 - 3\sqrt{7});$$

$\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}{9\sqrt{5}+6\sqrt{2}}$ (den gemeinsamen Faktor stets ausgehoben)

$= \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3(3\sqrt{5}+2\sqrt{2})}$ (daher nur mit $3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ erweitert)

$$= \frac{(3\sqrt{5}+\sqrt{2})(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{3\left[(3\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2\right]}$$

$$= \frac{45+3\sqrt{10}-6\sqrt{10}-4}{3(9.5-4.2)} = \frac{41-3\sqrt{10}}{111};$$

$\frac{a+2\sqrt{-b}}{3a-5\sqrt{-b}} = \frac{a+2\sqrt{b}.i}{3a-5\sqrt{b}.i}$ mit $3a+5\sqrt{b}.i$ erweitert

$$= \frac{(a+2\sqrt{b}.i)(3a+5\sqrt{b}.i)}{(3a)^2-(5\sqrt{b}.i)^2}$$

$$= \frac{3a^2+6a\sqrt{b}.i+5a\sqrt{b}.i+10bi^2}{9a^2-25bi^2}$$

$$= \frac{3a^2+10b(-1)+11a\sqrt{b}.i}{9a^2-25b(-1)} = \frac{3a^2-10b+11a\sqrt{b}.i}{9a^2+25b}.$$

Zusatz. Ist der Nenner von der Form $\sqrt[n]{A \pm B}$, wo A oder B Quadratwurzeln enthalten, so beseitigt man nicht zuerst die n^{te} Wurzel, sondern erweitert mit $\sqrt[n]{A \mp B}$;

z. B. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{8+3\sqrt{6}}}$ erweitert mit $\sqrt{8-3\sqrt{6}}$

$$= \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{6}}}{\sqrt{8+3\sqrt{6}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.\,\sqrt{8-3\sqrt{6}}}{\sqrt{(8+3\sqrt{6})(8-3\sqrt{6})}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{6})\,(8-3\sqrt{6})}}{\sqrt{8^2-(3\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{76-31\sqrt{6}}}{\sqrt{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{76-31\sqrt{6}}{10}} = \sqrt{7._6 - 3._1\sqrt{6}}\,;$$

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{(5+2\sqrt{3})\,\sqrt{4-\sqrt{3}}}$ mit $\sqrt{4+\sqrt{3}}$ erweitert

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)\,(4+\sqrt{3})}}{(5+2\sqrt{3})\,\sqrt{(4+\sqrt{3})\,(4-\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}-1}}{(5+2\sqrt{3})\sqrt{16-3}}$$

$= \dfrac{\sqrt{3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{13}\,.\,(5+2\sqrt{3})}$ mit $5-2\sqrt{3}$ erweitert

$$= \frac{(5-2\sqrt{3})\,\sqrt{3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{13}\,.\,[5^2-(2\sqrt{3})^2]} = \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{3})^2\,(3\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{13}\,.\,13}$$

$$= \frac{\sqrt{(37-20\sqrt{3})\,(3\sqrt{3}-1)}}{13\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{131\sqrt{3}-217}}{13\sqrt{13}}$$

$$= {}^1/_{13}\sqrt{\frac{131\sqrt{3}-217}{13}}.$$

$\dfrac{1}{2\sqrt{10}-3\sqrt{5}+\sqrt{2}} = ?$ Man denke sich im Nenner zwei Glieder, z. B. $\dfrac{1}{(2\sqrt{10}-3\sqrt{5})+\sqrt{2}}$, erweitert mit $(2\sqrt{10}-3\sqrt{5})-\sqrt{2}$

$$= \frac{1 \cdot (2\sqrt{10} - 3\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(2\sqrt{10} - 3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{10} - 3\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(85 - 60\sqrt{2}) - 2}$$

$$= \frac{2\sqrt{10} - 3\sqrt{5} - \sqrt{2}}{83 - 60\sqrt{2}}$$ und nun erwt. mit $83 + 60\sqrt{2}$.

3) Zwei Kubikwurzeln. Man benutze die Sätze: $(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$ und $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$.

Z. B. $$\frac{10}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}} = \frac{10 \cdot \left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]\left(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}\right)}$$

$$= \frac{10\left(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{10\left(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}\right)}{7 - 2}$$

$$= 2\left(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}\right).$$

4) Zwei vierte Wurzeln. Hier ist nur $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ mit denselben Wurzeln anzuwenden.

Z. B. $$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt[4]{10} + \sqrt[4]{3}}$$ mit $\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3}$ erweitert

$$= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})\left(\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3}\right)}{\left(\sqrt[4]{10}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{3}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{4}\right)\left(\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3}\right)}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{250} - \sqrt[4]{40} - \sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{12}}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$$ mit $\sqrt{10} + \sqrt{3}$ erweitert

$$= \frac{\left(\sqrt[4]{250} - \sqrt[4]{40} - \sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{12}\right)\left(\sqrt[4]{100} + \sqrt[4]{9}\right)}{10 - 3}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{25000} - \sqrt[4]{4000} - \sqrt[4]{7500} + \sqrt[4]{1200} + \sqrt[4]{2250} - \sqrt[4]{360} - \sqrt[4]{675} + \sqrt[4]{108}}{7}$$

$$= \frac{5\sqrt[4]{40} - 2\sqrt[4]{250} - 5\sqrt[4]{12} + 2\sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{2250} - \sqrt[4]{360} - \sqrt[4]{675} + \sqrt[4]{108}}{7}.$$

XXI. $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$ (vereinfacht man nach dem Satze $c = \sqrt{c^2}$, daher)

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a + \sqrt{b}}\right)^2 \pm 2\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b}} + \left(\sqrt{a - \sqrt{b}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} + a - \sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - (\sqrt{b})^2}} = \sqrt{2\left[a \pm \sqrt{a^2 - b}\right]}.$$

Es ist nun nicht nötig, für ein gegebenes spezielles Beispiel $\sqrt{11 + 2\sqrt{10}} - \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$, welches in gleicher Weise vereinfacht werden soll, die ganze Rechnung zu wiederholen, denn mit der vorstehenden „Formel“ (so nennt man einen allgemeinen Ausdruck, der alle speziellen Fälle gleicher Art einschließt) erhält man unmittelbar die Lösung. Da jedoch dieser spezielle Fall noch nicht die Form jenes gegebenen allgemeinen Ausdrucks hat, da dort $\sqrt{b}$ ohne Faktor ist, so ist erst noch in dieser speziellen Aufgabe der Faktor von $\sqrt{10}$ in die Wurzel zu bringen.

$\sqrt{11 + \sqrt{40}} - \sqrt{11 - \sqrt{40}}$ hat nun die gewünschte Form. Vergleicht man jetzt damit jenen zuerst gegebenen Ausdruck, so erkennt man sofort, daß an die Stelle von a: 11 und an die Stelle von b: 40 treten muß. Die Lösung ist mithin $\sqrt{2[a - \sqrt{a^2 - b}]} = \sqrt{2[11 - \sqrt{11^2 - 40}]}$

$$= \sqrt{2(11 - \sqrt{81})} = \sqrt{2(11 - 9)} = 2.$$

XXII. Nach dem vorstehenden Satze ist

$$\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}},$$

oder $\sqrt{2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4b}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}.$

Setzt man hier $a = \frac{m}{2}$, so entsteht:

$$\sqrt{2 \cdot \frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(2 \cdot \frac{m}{2}\right)^2 - 4b}} = \sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{b}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2} - \sqrt{b}}, \text{ d. i.}$$

$$\sqrt{m \pm \sqrt{m^2 - 4b}} = \sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{4b}{4}}} \pm \sqrt{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{4b}{4}}}.$$

Hier noch $m^2 - 4b = n$ gesetzt, also $4b = m^2 - n$ (denn der Minuend um den Rest vermindert, muß den Subtrahend geben):

$$\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2 - n}{4}}} \pm \sqrt{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2 - n}{4}}}, \text{ d. i.}$$

$$* \sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - n}}{2}}.$$

Ist nun $\sqrt{m^2 - n}$ eine rationale Zahl ($m^2 - n$ also ein vollständiges Quadrat), so wird ein Ausdruck von der

Form $\sqrt{m \pm \sqrt{n}}$ durch vorstehende Formel wesentlich vereinfacht. Z. B. $\sqrt{19 - 4\sqrt{15}} = ?$ Zuerst stellt man vorstehende Form her, indem man den Faktor 4 in die Wurzel bringt $= \sqrt{19 - \sqrt{240}}$. Mit $\sqrt{m - \sqrt{n}}$ verglichen, ist $m = 19$, $n = 240$. Dies in die Formel ✳ eingesetzt und das untere der Zeichen $\pm$ genommen, giebt:

$$\sqrt{19 - \sqrt{240}} = \sqrt{\frac{19 + \sqrt{19^2 - 240}}{2}}$$

$$- \sqrt{\frac{19 - \sqrt{19^2 - 240}}{2}} = \sqrt{\frac{19 + \sqrt{361 - 240}}{2}}$$

$$- \sqrt{\frac{19 - \sqrt{121}}{2}} = \sqrt{\frac{19 + 11}{2}} - \sqrt{\frac{19 - 11}{2}} = \sqrt{15} - 2.$$

XXIII. Wird in vorstehender Formel $n = -r^2$ gesetzt, so entsteht:

$$\sqrt{m \pm \sqrt{-r^2}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - (-r^2)}}{2}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - (-r^2)}}{2}} \text{ d. i.}$$

$$\sqrt{m \pm \sqrt{r^2} \,.\, i} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 + r^2}}{2}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + r^2} - m}{2} \cdot (-1)} \text{ oder}$$

$$✳ \sqrt{m \pm ri} = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + r^2} + m}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + r^2} - m}{2}} \,.\, i.$$

Diese Formel wendet man stets an, auch wenn $\sqrt{m^2+r^2}$ nicht rational ist, um i aus der Wurzel herauszuschaffen. Z. B. $\sqrt{-5+2i} = ?$ Hier ist $m = -5$, $r = 2$ und von den Doppelzeichen das obere zu nehmen. Daher

$$\sqrt{-5+2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{(-5)^2+2^2}-5}{2}}$$

$$+\sqrt{\frac{\sqrt{(-5)^2+2^2}+5}{2}}\cdot i = \sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{29}+5}{2}}\cdot i$$

$$= \sqrt{\frac{5_{\cdot 38516}-5}{2}} + \sqrt{\frac{5_{\cdot 38516}+5}{2}}\cdot i = \sqrt{\frac{0_{\cdot 38516}}{2}}$$

$$+\sqrt{\frac{10_{\cdot 38516}}{2}}\cdot i = \sqrt{0_{\cdot 19258}} + \sqrt{5_{\cdot 19258}}\cdot i = 0_{\cdot 439} + 2_{\cdot 279}\, i.$$

§ 31. Quadratwurzelausziehen.

A. Aus speziellen Zahlen.

I. Die Quadratwurzel (d. i. die 2. Wurzel — s. § 2, VI) ist diejenige Zahl, welche, auf das Quadrat erhoben, die Wurzelbasis giebt. Es ist $\sqrt{0_{\cdot 0256}} = 0_{\cdot 16}$, weil $0_{\cdot 16}{}^2 = 0_{\cdot 0256}$ ist. Aus $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10000} = 100$ 2c. folgt, daß die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweistelligen ganzen Zahl eine einstellige Zahl, die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierstelligen Zahl eine zweistellige Zahl ist 2c. $\sqrt{5776}$ muß daher eine zweistellige Zahl geben, die aus z Zehnern und e Einern bestehen mag. Aus $\sqrt{5776} = 10\,z + e$ aber folgt: $5776 = (10\,z + e)^2 = (10\,z)^2 + 2 \,.\, 10\,z \,.\, e + e^2 = 100\,z^2 + 20\,z \,.\, e + e^2$. Setzen wir zunächst $100\,z^2 = 5776$, so muß der 100. Teil, d. i. $z^2 = 57$ und daher die Zahl der Zehner $z = 7$ sein. $\sqrt{5776}$ kann in der That noch nicht 80 sein, da $80^2 = 6400$, Noch sind die Einer e unbekannt. Da die Zehner 7 bekannt sind, so ist $\sqrt{5776} = 10 . 7 + e = 70 + e$ oder $5776 = 4900 + 2 . 70 . e + e^2$. Mithin ist $5776 - 4900 = 2 . 70 e + e^2$ oder $876 = 2 . 70 e + e^2$. Da nun e^2 gegen $2 . 70 e$ sehr klein ist, so mag dieses Glied einstweilen vernachlässigt werden, und man findet annähernd aus $2 . 70 e = 876$ die Einer $e = \frac{876}{2 . 70} = 6$. Da 5776 zuerst um 70^2 $(= 4900)$, dann um $2 . 70 . 6 + 6^2 = (140 + 6) . 6 = 146 . 6 = 876$ vermindert, den Rest 0 läßt, so ist $70 + 6 = 76$ die $\sqrt{}$ aus 5776.

II. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich für das Quadratwurzelausziehen folgende Regeln:

1) Die Zahl, aus welcher die $\sqrt{}$ gezogen werden soll, ist vom Komma an nach links und rechts in Klassen von je zwei Ziffern abzuteilen. Die erste, einer ganzen Zahl angehörende Klasse kann mithin aus einer oder zwei Ziffern bestehen, jede folgende jedoch muß aus zwei Ziffern bestehen.

Z. B. $\sqrt{269} = \sqrt{2|69,|00|}$; $\sqrt{93{,}746} = \sqrt{93,|74|60|}$;

$$\sqrt{0{,}00008} = \sqrt{0,|00|00|80|}.$$

Enthält die Basis gemeine Brüche, so verwandelt man dieselben entweder in Dezimalbrüche,

z. B. $\sqrt{{}^{11}/_{410}} = \sqrt{0,|02|68|29|26|82|92|\cdots}$

oder man wendet § 30, XVIII, 1. Zusatz an,

z. B. $\sqrt{2^3/_5} = \sqrt{{}^{13}/_5} = \sqrt{\frac{13 . 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{65}}{5}$,

hat man dann $\sqrt{65} = 8_{\cdot 06226}$ berechnet, so dividiert man diese Zahl noch durch 5.

2) Aus der ersten, Einheiten enthaltenden Klasse zieht man hierauf die $\sqrt{\ }$ nach folgender Tabelle:

$n =$	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
$\sqrt{n} =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9

In der Folge giebt jede Klasse eine Stelle für die Wurzel. Daher

$$\sqrt{490000} = \sqrt{49|00|00} = 7\ 0\ 0 \qquad \sqrt{1{,}69} = \sqrt{1,|69|} = 1,\ 3$$

$$\sqrt{0{,}00005} = \sqrt{0,|00|00|50|} = 0,\ 0\ 0\ 7$$

3) Das Quadrat der aus vorstehender Tabelle für die Wurzel erhaltenen ersten Stelle ist von der betreffenden Klasse abzuziehen und dem Rest die folgende Klasse anzuhängen. Die folgende (zunächst also zweite) Stelle der Wurzel erhält man nun annähernd, wenn man den so vergrößerten Rest nach Streichung der letzten Stelle durch das Doppelte der bisher erhaltenen (als ganze Zahl gedachten) Wurzel dividiert. Z. B.

$$\sqrt{{}^{13}/_{31}} = \sqrt{0,|41|93|54|83|} \ldots = 0{,}6$$
$$6^2 = 36$$
$$\overline{593}$$

Der um die letzte Stelle 3 verkürzte Rest (593) durch das Doppelte der bisherigen Wurzel (durch $2 . 6 = 12$) dividiert, giebt annähernd die neue Stelle der Wurzel. Daher $59 : (2 . 6) = 59 : 12 = 4$. Bis jetzt ist $\sqrt{{}^{13}/_{31}} = 0{,}64$.

4) Hierauf ist das Produkt der folgenden zwei Faktoren von dem unverkürzten Rest (593) abzuziehen:

1. Faktor: Die Zehner desselben = dem Doppelten der frühern Wurzel (also = dem soeben benutzten Divisor);
   die Einer = der neuen Stelle.
2. Faktor: Die neue Stelle selbst.

In vorstehendem Beispiele sind mithin die Zehner des 1. Faktors = 2 . 6 = 12, die Einer desselben = der neuen Stelle 4; der 1. Faktor ist also 124. Der 2. Faktor ist = der neuen Stelle 4. Folglich ist von 593 das Produkt 124 . 4 = 496 zu subtrahieren und dem Rest die folgende Klasse anzuhängen. Bisher:

$\sqrt{0{,}41|93|54|83|}\ldots = 0{,}64$
36
593; 59 : (2 . 6) = 59 : 12 = 4 (die 2. Stelle der $\sqrt{\ }$).
496 = 124 . 4
9754.

Die 3. und 4. Regel hat man so lange zu wiederholen, bis entweder die $\sqrt{\ }$ aufgeht, oder eine genügende Anzahl von Stellen berechnet sind.

Das letzte Beispiel noch einige Stellen fortgesetzt:

$\sqrt{0{,}|41|93|54|83|87|09|}\ldots = 0{,}647576$
36
593; 59 : 12 = 4 (2. Stelle der Wurzel)
496 = 124 . 4
9754; 975 : (2 . 64) = 975 : 128 = 7 (3. Stelle d. W.)
9009 = 1287 . 7
74583; 7458 : (2 . 647) = 7458 : 1294 = 5 (4. Stelle d. W.)
64725 = 12945 . 5
985887; 98588 : 12950 = 7 (5. Stelle der W.)
906549 = 129507 . 7
7933809; 793380 : 129514 = 6 (6. Stelle der Wurzel).

5) Ist das durch die vierte Regel berechnete Produkt größer als jener Rest, die Subtraktion also unmöglich, so ist der durch die dritte Regel mittels Division gefundene Quotient für die neue Stelle zu groß und diese daher kleiner anzunehmen.

Z. B. $\sqrt{7^1/_2} = \sqrt{7,|50|00|} = 2$
$2^2 = 4$
350; 35 : (2 . 2) = 35 : 4 = 8?

Da das mit diesem Quotient 8 nach der dritten Regel gebildete Produkt 48 . 8 = 384 von jenem Rest 350 nicht abgezogen werden kann, so ist 8 zu groß und folglich versucht man nun die nächst kleinere Zahl 7, die sich auch als die richtige erweist, da das Produkt 47 . 7 = 329 von 350 abgezogen werden kann. Die Rechnung ist nun folgende:

$\sqrt{7,|50|00|} = 2,73861$
$2^2 = 4$
350; 35 : 4 = 7 (2. Stelle der W.)
329 = 47 . 7
2100; 210 : 54 = 3 (3. Stelle der W.)
1629 = 543 . 3
47100; 4710 : 546 = 8 (4. Stelle der W.)
43744 = 5468 . 8
335600; 33560 : 5476 = 6 (5. Stelle der W.)
328596 = 54766 . 6
700400; 70040 : 54772 = 1 ꝛc.

6) Zur Vermeidung von Fehlern ist dem Ungeübten anzuraten, mit 0 in der Wurzel so zu verfahren, wie mit jeder andern Stelle. Z. B $\sqrt{291^3/_4} =$

$\sqrt{2|91,|75|00|} = 17,080\ldots$
$1^2 = 1$
191; 19 : (2 . 1) = 19 : 2 = 7 (2. Stelle der W.)
189 = 27 . 7 (8 und 9 als 2. Stelle der W. ist zu groß, da schon 28 . 8 > 191!)
275; 27 : 34 = 0
0 = 270 . 0
27500; 2750 : 340 = 8 (3. Stelle der W.)
27264 = 3408 . 8
23600; 2360 : 3416 = 0 (4. Stelle der W.)
0 = 34160 . 0
23600 ꝛc.

7) Hat man schon etliche Stellen der Wurzel berechnet, so findet man noch eine weniger als bisher berechnet waren, wenn man den um die erste Stelle der folgenden Klasse vergrößerten Rest durch das Doppelte der bisherigen Wurzel dividiert. Im letzten Beispiel blieb nach der Berechnung der fünf Stellen 17,080 der Rest 23600. Man wird also durch 236000 : (2 . 17080) = 236000 : 34160 noch weitere vier Stellen erhalten.

Da nun 23600 : 3416 = 6909
20496
31040
30744
29600

so ist $\sqrt{291,75} = 17,0806909$.

III. Ist $\sqrt{a}$ annähernd = n, so findet man die Wurzel durch den folgenden (vom Verfasser R. Sch. gefundenen) Ausdruck mit großer Genauigkeit (auf mindestens 3mal so viel Stellen richtig, als n).

$$\sqrt{a} = \frac{n}{3}\left(1 + \frac{8a}{a + 3n^2}\right).$$

1. Beispiel. $\sqrt{44} = 6,63$. Mit a = 44, n = 6,63 erhält man $\sqrt{44} = \frac{6,63}{3}\left(1 + \frac{8 \,.\, 44}{44 + 3 \,.\, 6,63^2}\right) = 2,21$
$\cdot\left[1 + \frac{352}{44 + 3 \,.\, 43,9569}\right] = 2,21\left[1 + \frac{352}{175,8707}\right]$
$= 2,21 \,.\, 3,001470398 = 6,633249580$.
(Sämtliche 9 Dezimalen sind richtig.)

2. Beispiel. $\sqrt{42} = 6,48$. Nimmt man nur den weniger genauen Wert $6^1/_2$, so erhält man $\sqrt{42} =$
$$\frac{6^1/_2}{3}\left[1 + \frac{8 \,.\, 42}{42 + 3 \,.\, (^{13}/_2)^2}\right] = 2^1/_6\left[1 + \frac{8 \,.\, 14 \,.\, 4}{14 \,.\, 4 + 169}\right]$$
$= 6,4807407$.
(Sämtliche 7 Dezimalen sind richtig.)

B. Quadratwurzel aus vielgliedrigen Buchstabenausdrücken.

Aus $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ ergiebt sich folgendes Verfahren:

Zunächst ist die Wurzelbasis streng anzuordnen (z. B. streng nach absteigenden Potenzen der Hauptgröße). Die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede dieser Wurzelbasis ist alsdann das erste Glied der gesuchten Wurzel. Das Quadrat dieses ersten Gliedes ist vom ersten Gliede der Wurzelbasis zu subtrahieren. Es bleiben die folgenden Glieder der Wurzelbasis als Rest. Das erste Glied dieses Restes durch das Doppelte der Wurzel dividiert, giebt das zweite Glied der Wurzel. Von jenem Rest ist hierauf das Produkt aus dem neuen Gliede und dem soeben als Divisor benutzten Doppelten der Wurzel, außerdem aber noch das Quadrat des neuen Gliedes zu subtrahieren. Aus dem jedesmaligen Rest und der ganzen bisher erhaltenen Wurzel findet man nun stets ein neues Glied der Wurzel, wenn man das Doppelte der bisherigen Wurzel als Divisor benutzt und das erste Glied des Restes durch das erste Glied dieses Divisors dividiert. Ist hierauf vom Rest das Produkt aus dem neuen Gliede und dem ganzen Divisor und außerdem noch das Quadrat des neuen Gliedes subtrahiert worden, so verfährt man mit dem neuen Rest auf gleiche Weise. Z. B.

$$\sqrt{70an + 9x^2 - 42nx - 30ax + 49n^2 + 25a^2} = ?$$

Geordnet:

$$\sqrt{9x^2 - 30ax + 25a^2 - 42nx + 70an + 49n^2} = 3x - 5a - 7n.$$

$(3x)^2 = \underline{9x^2}$

$-30ax + 25a^2$: $6x$ (das Doppelte d. W.) $= -5a$ (das 2. Glied der W.)

$\underline{-30ax + 25a^2}$ = Divis. $6x \times$ n. Gld. $+$ (n. Gld.)^2

$-42nx + 70an + 49n^2$: $6x - 10a$ (das Dopp. d. W.) $= -7n$ (3. Glied der W.)

$\underline{-42nx + 70an + 49n^2}$

0

Die vorletzte Zeile nämlich = Ds. $(6x - 10a) \times$ n. Gl. $(-7n)$ + (n. Gl.)^2.

2. Beispiel. $\sqrt{\frac{2a}{3} - \frac{5}{4a}} = ?$ Geht die Wurzel aus dem ersten Gliede des Polynoms nicht auf, so trennt man dasselbe nach § 23, II, um es in 1 zu verwandeln.

$\sqrt{\frac{2a}{3}\left(1 - \frac{15}{8a^2}\right)} = \sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{15}{8a^2}}$. Nun zieht man aus dem Binom allein die $\sqrt{\ }$, die schließlich mit $\sqrt{\frac{2a}{3}}$ zu multiplizieren ist.

$$\sqrt{1 - \frac{15}{8a^2}} = 1 - \frac{15}{16a^2} - \frac{225}{512a^4} - \frac{3375}{8192a^6} \cdots \text{ in inf.}$$

$$1^2 = 1$$

$$-\frac{15}{8a^2} \quad : 2 \text{ (das Dopp. der W.)} = -\frac{15}{16a^2} \text{ (2. Glied der W.)}$$

$$-\frac{15}{8a^2} + \frac{225}{256a^4} = (\text{Divisor } 2) \times \left(\text{n. Gld.} - \frac{15}{16a^2}\right) + (\text{n. Gl.})^2$$

$$-\frac{225}{256a^4} \; : 2 - \frac{15}{8a^2} \text{ (das Dopp. der W.)} = -\frac{225}{512a^4}$$

(3. Gld. der W.)

$$-\frac{225}{256a^4} + \frac{3375}{4096a^6} + \frac{50625}{262144a^8} = \left(2 - \frac{15}{8a^2}\right) \cdot -\frac{225}{512a^4} + \left(-\frac{225}{512a^4}\right)^2$$

$$-\frac{3375}{4096a^6} - \frac{50625}{262144a^8} \quad : 2 - \frac{15}{8a^2} - \frac{225}{256a^4}$$

$$= -\frac{3375}{8192a^6} \text{ (4. Gld. d. W.).}$$

Das Resultat der Aufgabe ist nun

$$= \sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \left(1 - \frac{15}{16a^2} - \frac{225}{512a^4} - \frac{3375}{8192a^6} \cdots\right).$$

§ 32. Kubikwurzel aus speziellen Zahlen.

I. Nach § 2, VI ist die Kubikwurzel (3. Wurzel) diejenige Zahl, welche, auf die 3. Potenz erhoben, die Wurzelbasis giebt. Es ist $\sqrt[3]{1000} = 10$, weil $10^3 = 1000$ ist; $\sqrt[3]{1/8} = 1/2$, weil $(1/2)^3 = 1/8$ ist. Nach § 20 ist ferner:
$(10z + e)^3 = 1000z^3 + 3 . 100z^2 . e + 3 . 10z . e^2 + e^3$,
folglich ist auch umgekehrt:

$$\sqrt[3]{1000z^3 + (3 . 100z^2 + 3 . 10z . e + e^2)\, e} = 10z + e.$$

Sind z die Zehner, e die Einer der 3. Wurzel aus einer Zahl, so ist durch die Glieder der linken Seite dieser Gleichung die Regel für das Ausziehen der Kubikwurzel aus speziellen Zahlen angedeutet.

II. Das Verfahren ist mithin folgendes:

1) Die Wurzelbasis ist vom Komma an nach links und rechts in Klassen von je 3 Ziffern abzuteilen. Aus der 1. Klasse, welche Einheiten enthält, ist sodann die 3. Wurzel nach folgender Tafel zu ziehen:

$n =$	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729
$\sqrt[3]{n} =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	9.

Jede Klasse giebt eine Stelle in der Wurzel.

Z. B. $\sqrt[3]{97386\tfrac{1}{2}} = \sqrt[3]{97|386,|500|}$

$= 4 \;\; . \;, \;\; .$ (denn $\sqrt[3]{64} = 4, \sqrt[3]{125} = 5$).

$$\sqrt[3]{0{,}00000006} = \sqrt[3]{0,|000|000|060|}$$
$$= 0,\; 0 \;\; 0 \;\; 3$$

2) Der Kubus der aus jener Tafel für die Wurzel gefundenen Stelle ist von der betreffenden Klasse abzuziehen und dem Reste die folgende Klasse anzuhängen.

3) Annähernd erhält man nun die folgende (2.) Stelle der Wurzel, wenn man den so vergrößerten Rest nach Streichung der beiden letzten Stellen durch das dreifache

Quadrat der bisher erhaltenen (als ganze Zahl gedachten) Wurzel dividiert. Z. B.

$$\sqrt[3]{77\tfrac{1}{7}} = \sqrt[3]{77,|142|857|142|} = 4,2$$

$$4^3 = 64$$

$$13142; \quad 131 : (3 \,.\, 4^2) = 131 : 48 = 2$$

(die 2. Stelle der W.).

4) Hierauf sind folgende 3 Zahlen zu bilden:

Die 1. ist der soeben benutzte Divisor (das dreifache Quadrat der früheren W.);

die 2. ist das dreifache Produkt aus der früheren Wurzel und der neuen Stelle;

die 3. ist das Quadrat der neuen Stelle.

Diese 3 Zahlen sind, nachdem jede nachfolgende um eine Stelle nach rechts ausgerückt ist, zu addieren, die Summe mit der neuen Zahl selbst zu multiplizieren, das Produkt von jenem (unverkürzten) Rest zu subtrahieren und dem neuen Rest die folgende Klasse anzuhängen.

Z. B. $\sqrt[3]{77,|142|857|142|} = 4,2$

$$\begin{array}{lll}
4^3 = 64 & & \\
13142; & 131 : 48 = 2 & \\
 & 3 \,.\, 4^2 \quad = 48\,.\,. & \\
 & 3\,.\,4\,.\,2 = \;\; 24\,. & A \\
 & \qquad 2^2 = \quad\;\; 4 & B \\
10088 = \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. & 5044\,.\,2 & \\
3054857 & &
\end{array}$$

5) Nun könnte man, wie es auch bisher gelehrt wurde, die 3. und 4. Regel wiederholt anwenden, um die folgenden Stellen der Wurzel zu erhalten. Man würde also zunächst die 3. Stelle der Wurzel bekommen, wenn man von dem um die folgende Klasse vergrößerten Rest die beiden letzten Stellen streicht und die übrigbleibende Zahl durch das dreifache Quadrat der bisherigen Wurzel dividiert. Da aber die Wurzel immer mehr Stellen erhält, so wird das Berechnen des Quadrats einer solchen vielstelligen Zahl sehr mühsam.

Dies läßt sich nun durch das folgende (vom Verfasser R. Sch. gefundene) Verfahren vermeiden, durch welches der jedesmalige Divisor in sehr einfacher Weise berechnet wird. Man benutzt nämlich hierzu die drei Zahlen, welche bei der Berechnung der vorhergehenden Stelle nach der vierten Regel gefunden wurden, indem man die dort erhaltene Summe der drei Zahlen noch um die mittelste Zahl und das Doppelte der dritten Zahl vermehrt. Daher in Bezug auf das vorstehende Beispiel:

5044
 24 . die 2. Zahl A
  8 das Doppelte der 3. Zahl B
5292 der neue Divisor.

Zu bemerken ist noch, daß der durch die dritte Regel gefundene Quotient (namentlich bei der Berechnung der zweiten und zuweilen noch der dritten Stelle der W.) nicht immer die neue Stelle giebt, daß dieselbe vielmehr oft eine weit kleinere ist, als jener Quotient.

Beispiel:

$\sqrt[3]{77,|142|857|142|857|} = 4,2569 \ldots$

$4^3 = 64$
13142; $131 : (3 . 4^2) = 131 : 48 = 2$ (2. Stelle der W.)
$3 . 4^2 = 48 . .$ (der letzte Divisor)
$3 . 4 . 2 = 24 .$ 5044
$2^2 = 4$ 24 .
8
10088. .... 5044 . 2 5292 der folg. Ds.
3054857; 30548 : 5292 = 5 (3. Stelle der W.)
$3 . 42^2 = 5292 . .$ (der letzte Ds.)
$3 . 42 . 5 = 630 .$ 535525
$5^2 = . 25$ 630 .
50
2677625 .... 535525 . 5 541875 der folg. Ds.
377232142; 3772321 : 541875 = 6 (4. Stelle der W.)
541875 . . 54264036
$3 . 425 . 6 = 7650 .$ 7650 .
$6^2 = 36$ 72
325584216 ...... 54264036 . 6 54340608 der folg. Ds.
51647926857; 516479268 : 54340608 = 9 (5. St. d. W.) 2c.

II. Ist $\sqrt[3]{a}$ annähernd $= n$, so erhält man die dritte Wurzel durch folgende (vom Verfasser R. Sch. gefundene) Formel auf mindestens 3mal so viel Stellen richtig, als durch n bestimmt sind.

$$\sqrt[3]{a} = \frac{n}{2}\left[1 + \frac{3a}{a + 2n^3}\right].$$

Beispiel. $\sqrt[3]{37} = 3{,}332 \ldots$ Nimmt man nur $n = 3^1/_3$, $a = 37$, so ergiebt sich

$$\sqrt[3]{37} = \frac{3^1/_3}{2}\left[1 + \frac{3 \cdot 37}{37 + 2 \cdot (^{10}/_3)^3}\right] = {}^5/_3\left[1 + \frac{3 \cdot 37 \cdot 27}{37 \cdot 27 + 2000}\right]$$

$$= {}^5/_3 + \frac{5 \cdot 37 \cdot 27}{37 \cdot 27 + 2000}$$

$$= 3{,}33222185173 \text{ (statt } 3{,}33222185165!).$$

III. Mittels der Quadrat- und Kubikwurzel lassen sich nun auch folgende Wurzeln berechnen: $\sqrt[4]{} = \sqrt{\sqrt{}}$; $\sqrt[6]{} = \sqrt[3]{\sqrt{}} = \sqrt{\sqrt[3]{}}$; $\sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$; $\sqrt[9]{} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{}}$ ꝛc. z. B. $\sqrt[9]{^2/_{11}}$

$$= \sqrt[3]{\sqrt[3]{0{,}181818\ldots}} = \sqrt[3]{0{,}56651633} = 0{,}827442.$$

§ 33. Die Logarithmen. Einleitung.

I. Aus $a^n = b$ entstand, wie in § 2, VI und VII gezeigt wurde, der Ausdruck ${}^a\lg b = n$, gelesen: „a-Logarithmus von $b = n$“. Aus $10^5 = 100000$ z. B. folgt ${}^{10}\lg 100000 = 5$; aus $(^2/_3)^4 = {}^{16}/_{81}$: ${}^{\frac{2}{3}}\lg {}^{16}/_{81} = 4$. In ${}^5\lg 125 = 3$ unterscheidet man 5 als Basis (Grundzahl) des Logarithmus, 125 als Numerus (Logarithmand, absolute Zahl, natürliche Zahl), 3 als Logarithmus.

Da die Logarithmen mit der Basis 10 (die dekadischen oder Briggsschen Logarithmen) wesentliche Vorteile vor allen anderen Logarithmen bieten, so sind diese auch beim praktischen Rechnen allein im Gebrauch. Sie werden daher gemeine oder vulgäre genannt. Die Basis 10 wird stets weggelassen, mithin bedeutet $\lg 100000 = 5$ (gelesen: „der Logarithmus von 100000 ist $= 5$") so viel als $^{10}\lg 100000 = 5$. Der Erfinder der Logarithmen ist John Napier („Neper"). Von diesem schottländischen Mathematiker wurden zuerst (um 1610) die natürlichen (neperschen, hyperbolischen) Logarithmen aufgestellt, deren Basis 2,718281828459 ... ist, die aber nur in der höheren Mathematik gebraucht werden. Aus diesen leitete Henry Briggs (1618) die schon erwähnten gemeinen Logarithmen ab. Letztere bezeichnet man mit lg (oder log. oder lg. vulg. d. i. logarithmus vulgaris, gemeiner Logarithmus), die natürlichen Logarithmen mit l. (oder lg. nat. d. i. logarithmus naturalis, natürlicher Logarithmus). Obgleich der große Nutzen der Logarithmen in den folgenden §§ ersichtlich wird, mag doch hier schon darauf aufmerksam gemacht werden, daß dieselben in allen höheren Teilen der Mathematik nicht bloß wesentliche Vorteile bieten, sondern geradezu unentbehrlich werden. Viele Aufgaben, die jeden Augenblick in der Praxis vorkommen können, werden durch dieselben oft in wenig Sekunden gelöst, während sie ohne Logarithmen nicht bloß ungeheure Zeit erfordern, sondern außerdem noch besondere Schwierigkeiten bereiten können.

II. Die logarithmische Gleichung (bezw. der Logarithmus) ist richtig, wenn „Basis $^{\text{Logarithmus}}$ = Numerus" ist, denn $^{a}\lg b = n$ ist aus $a^n = b$ entstanden. Z. B. ist $^{10}\lg 100 = 2$, weil Bas. $^{\text{Log.}} = 10^2 = 100 =$ Num. ist; $^{10}\lg {}^1/_{10000} = -4$, also $\lg 0{,}0001 = -4$, weil $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0{,}0001$ ist; $^{6}\lg {}^1/_{216} = -3$, weil $6^{-3} = {}^1/_{216}$.

§ 34. Die vulgären Logarithmen.

Da die Zehn-Logarithmen allein im Gebrauch sind, so mögen auch nur diese von jetzt an berücksichtigt werden.

I. Es ist $\lg 10^n = n$ (also vollständig: $^{10}\lg 10^n = n$); denn $\text{Bas.}^{\text{Log.}} = 10^n = \text{Num.}$

$n = 0$ giebt $\lg 10^0 = 0$, d. i. (s. § 12, VII) $\lg 1 = 0$
$n = 1$ „ $\lg 10^1 = 1$ oder $\lg 10 = 1$
$n = 2$ „ $\lg 10^2 = 2$ „ $\lg 100 = 2$
$n = 3$ „ $\lg 10^3 = 3$ „ $\lg 1000 = 3$;
$\lg 10000 = 4$; $\lg 100000 = 5$ rc.

$$n = \infty \text{ giebt } \lg 10^\infty = \infty, \text{ d. i. } \lg \infty = \infty.$$

Schon hieraus folgt, daß $\lg 31{,}623$ zwischen 1 und 2 liegt. In der That ist $^{10}\lg 31{,}623 = 1{,}5$, denn $10^{1,5} = 10^{1\frac{1}{2}} = 10^1 \,.\, 10^{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{10} = 10 \,.\, 3{,}1623 = 31{,}623 = \text{Num.}$

II. In $\lg 10^n = n$:

$n = -1$ gesetzt, giebt $\lg 10^{-1} = -1$, oder $\lg \frac{1}{10^1} = -1$, oder $\lg 0{,}1 = -1$;

$n = -2$: $\lg 10^{-2} = -2$, oder $\lg \frac{1}{10^2} = -2$, oder $\lg 0{,}01 = -2$;

Ebenso $\lg 0{,}001 = -3$, $\lg 0{,}0001 = -4$ rc.

$n = -\infty$ giebt $\lg 10^{-\infty} = -\infty$, d. i. $\lg \frac{1}{10^\infty} = -\infty$, oder $\lg \frac{1}{\infty} = -\infty$, oder $\lg 0 = -\infty$.

III. Betrachtet man die in I und II gefundenen Werte:

$$\left.\begin{aligned} \lg \infty &= \infty \\ \lg 1 &= 0 \\ \lg 0 &= -\infty \end{aligned}\right\} (Z)$$

so ergiebt sich: Die Logarithmen der Zahlen, welche größer als 1 sind (zwischen 1 und ∞), liegen zwischen 0 und ∞, sind also **positiv**; die Logarithmen der Zahlen, welche kleiner als 1 und größer als 0 sind, liegen zwischen 0 und $-\infty$, sind also **negativ**.

IV. Aus Z (siehe III) ersieht man ferner: Wollte man links unterhalb 0 gehen, also negative Numeri annehmen, so müßte der Logarithmus (auf der rechten Seite) unterhalb $-\infty$ liegen. Da dies **unmöglich** ist, so wissen wir:

Die Logarithmen der negativen Zahlen sind imaginär.

V. $10^{\lg b} = b$ (oder vollständig: $10^{{}^{10}\lg b} = b$; gelesen: „10 hoch 10-Logarithmus von b ist $= b$“).

Bew. Da ${}^{10}\lg b = {}^{10}\lg b$ unbedingt richtig ist, und man links Basis 10, Numerus b, rechts Logarithmus ${}^{10}\lg b$ unterscheiden kann, so muß auch „Bas.$^{\text{Log.}}$ = Num.“ sein, d. i.

$$10^{{}^{10}\lg b} = b.$$

Beispiel. $10^{\lg 1000} = 1000$. In der That ist (s. I) $\lg 1000 = 3$ und daher jene Gleichung: $10^3 = 1000$.

VI. $\lg(a.b) = \lg a + \lg b$. (Vollständig: ${}^{10}\lg(a.b) = {}^{10}\lg a + {}^{10}\lg b$.)

Der Logarithmus eines Produkts ist = der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Bew. Unterscheidet man links: Basis 10, Num. a.b, rechts ${}^{10}\lg a + {}^{10}\lg b$ als Logarithmus, so ist Bas.$^{\text{Log.}}$ $= 10^{{}^{10}\lg a + {}^{10}\lg b} = 10^{{}^{10}\lg a} \,.\, 10^{{}^{10}\lg b}$ (s. § 12, 3) $= a.b$ (s. V) = Num.

Beispiel. $\lg(100 \,.\, 1000) = \lg 100 + \lg 1000 = 2 + 3 = 5$. In der That ist $\lg 100000 = 5$ (s. I).

Zusatz. Umgekehrt ist $\lg a + \lg b = \lg(ab)$.

VII. $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$. (Vollst.: ${}^{10}\lg \frac{a}{b} = {}^{10}\lg a - {}^{10}\lg b$.)

Der Logarithmus eines Quotient ist = dem Logarithmus des Dividend vermindert um den Log. des Divisor.

Bew. Bas.$^{\text{Log.}} = 10^{\,{}^{10}\lg a - {}^{10}\lg b} = 10^{\,{}^{10}\lg a} : 10^{\,{}^{10}\lg b}$ (s. § 12, VI) $= a : b$ (s. V) = Num.

Beispiel. $\lg {}^{10}/_{2} = \lg 10 - \lg 2 = 1 - 0{,}30103$ (s. die Wittsteinschen Logarithmen Seite 1, 1. Spalte) $= 0{,}69897$. In der That ist $\lg 5 = 0{,}69897$ (s. Wittstein S. 1).

1. Zusatz. $\lg \frac{1}{b} = -\lg b$; denn $\lg \frac{1}{b} = \lg 1 - \lg b = 0 - \lg b$ (s. I) $= -\lg b$.

Beispiel. $\lg 0{,}25 = \lg {}^{1}/_{4} = -\lg 4$.

2. Zusatz. $\lg \frac{a}{c} = -\lg \frac{c}{a}$. Bew. Setzt man im 1. Zus. $b = \frac{c}{a}$, so erhält man $\lg \frac{1}{\frac{c}{a}} = -\lg \frac{c}{a}$, d. i. $\lg \frac{a}{c} = -\lg \frac{c}{a}$.

Beisp. $\lg {}^{4}/_{7} = -\lg {}^{7}/_{4} = -\lg 1{,}75$.

3. Zusatz. Umgekehrt ist $\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$.

VIII. $\lg a^n = n \lg a$. (Vollst. ${}^{10}\lg a^n = n \,.\, {}^{10}\lg a$.)

Der Logarithmus einer Potenz ist = dem Exponent multipliziert mit dem Log. der Basis.

Bew. Bas.$^{\text{Log.}} = 10^{n \lg a} = (10^{\lg a})^n$ (s. V) $= a^n$ = Num.

Beisp. $\lg 2^6 = 6 \lg 2 = 6 \,.\, 0{,}30103$ (s. Wittst. S. 1) $= 1{,}80618$ (s. Wittst. S. 1). In der That findet man $\lg 64$ (denn das ist $\lg 2^6$) $= 1{,}80618$ (auf derselben S. 1, 3. Spalte).

Zus. Umgekehrt: $n \lg a = \lg (a^n)$.

IX. $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n}$. Der Logarithmus einer Wurzel ist der Log. der Wurzelbasis dividiert durch den Wurzelexponent.

Bew. Bas.$^{\text{Log.}} = 10^{\frac{\lg a}{n}} = \sqrt[n]{10^{\lg a}} = \sqrt[n]{a}$ = Num.

Z. B. $\lg \sqrt[3]{2^5/_7} = \lg \sqrt[3]{^{19}/_7} = \frac{\lg {}^{19}/_7}{3} = \frac{\lg 19 - \lg 7}{3}$ (s. VII)
$= \frac{1{,}27875 - 0{,}84510}{3}$ (s. Wittst. S. 1) $= \frac{0{,}43365}{3} = 0{,}14455$.
Wie aus den nächsten §§ folgt, findet man sehr leicht, daß 0,14455 der Log. von 1,3949. Folglich ist $\lg \sqrt[3]{2^5/_7} = 0{,}14455 = \lg 1{,}3949$ und mithin $\sqrt[3]{2^5/_7} = 1{,}3949$ sehr schnell berechnet.

Zus. $\frac{\lg a}{n} = \lg \sqrt[n]{a}$.

X. Nur die Logarithmen der ganzzahligen Potenzen von 10 sind rationale Zahlen; z. B. $\lg 1 = 0$, $\lg 10 = 1$, $\lg 10000 = 4$. Die Logarithmen aller übrigen ganzen Zahlen sind irrational, also unendliche, unperiodische Dezimalbrüche. Z. B. ist
$\lg 2 = 0{,}30102999566\ldots$; $\lg 700 = 2{,}84509804001\ldots$.

Jeder Logarithmus (d. i. in vorstehenden Gleichungen die Zahl rechts; denn die Zahl, vor welcher lg steht, ist stets der Numerus) besteht also aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruch. Die ganze Zahl nennt man Kennziffer (oder Charakteristik), den Dezimalbruch: Mantisse (d. i. wörtlich: Zugabe). In $\lg 700 = 2{,}8450980$ ist 700 der Numerus, 2,8450980 der Logarithmus, 2 die Kennziffer, 8450980 die Mantisse.

Da die logarithmischen Tafeln die Mantissen doch nur bis auf eine gewisse Anzahl von Dezimalstellen enthalten können, so sind die Mantissen ohne Ausnahme abgebrochene Dezimalbrüche. Die 7stelligen Logarithmen von Bruhns (die besten 7stelligen Logarithmen! 4. Auflage. 1894) enthalten z. B. $\lg 2 = 0{,}3010300$; $\lg 700 = 2{,}8450980$. Für die Zwecke dieses Buches genügen 5stellige Logarithmen, und zwar sind hier die von Wittstein (Hannover, Hahnsche Buchhandlung) gewählt worden. Diese wird also der

Leser zur Hand nehmen müssen, wenn er die nächsten §§ verstehen und mit Logarithmen rechnen lernen will.

XI. Die Logarithmen der Zahlen, welche größer als 1 sind.

Da $\lg 1 = 0$, $\lg 10 = 1$, so muß $\lg 2{,}603$ zwischen 0 und 1 liegen. Es ist in der That $\lg 2{,}603 = 0{,}41547$. Daraus lassen sich nun die $\lg 26{,}03$, $\lg 260{,}3$ u. s. w. ableiten, denn: $\lg 26{,}03 = \lg (10 . 2{,}603) = \lg 10 + \lg 2{,}603$ (siehe VI) $= 1 + 0{,}41547$ (siehe I) $= 1{,}41547$; $\lg 260{,}3 = \lg (100 . 2{,}603) = \lg 100 + \lg 2{,}603 = 2 + 0{,}41547 = 2{,}41547$; $\lg 2603 = \lg (1000 . 2{,}603) = \lg 1000 + \lg 2{,}603 = 3 + 0{,}41547 = 3{,}41547$.

$\lg 26030 = \lg (10000 . 2{,}603) = 4{,}41547$.

$\lg 26030000 = 7{,}41547$ 2c.

Die hier angegebenen Numeri bestehen alle aus denselben Ziffern, wenn man vom Komma absieht (2,6030 und 26030 z. B.), die Mantisse ist überall dieselbe: 41547, die Kennziffer ist bei $\lg 26{,}03 = 1$, bei $\lg 26030000 = 7$, bestehen also die Ganzen des Numerus aus zwei oder acht Stellen, so ist die Kennziffer 1, bezw. 7, also immer 1 kleiner als die Anzahl der Stellen der ganzen Zahl des Numerus. Es ergeben sich mithin die folgenden wichtigen Sätze:

A) Bestehen 2 Numeri ohne Rücksicht auf die Stellung des Komma aus gleichen Ziffern, so haben ihre Logarithmen gleiche Mantissen;

B) Bestehen die Ganzen des Numerus aus z Ziffern, so ist die Kennziffer $z - 1$;

C) Umgekehrt: Ist die Kennziffer eines Logarithmus $= k$, so bestehen die Ganzen des zugehörigen Numerus aus $k + 1$ Ziffern.

1. Beisp. $\lg 38{,}1$? Nach A ist die Mantisse des $\lg 38{,}1$ = der des $\lg 381$, nämlich 58092 (s. Wittstein S. 9, links ob.). Ferner sind die Ganzen (38) zweistellig, folglich ist (nach B) die Kennziffer $2 - 1 = 1$. Mithin $\lg 38{,}1 = 1{,}58092$.

2. Beispiel. $\lg 660000$? Die Mantisse ist nach A dieselbe wie von $\lg 66$, $\lg 660$, $\lg 6{,}6$ 2c., folglich ist sie 8195[illegible]

(s. Wittstein S. 16, links oben). Ferner bestehen die Ganzen des Num. (660000) aus 6 Ziffern, folglich ist nach B die Kennziffer 6 — 1 = 5.

Daher lg 660000 = 5,81954.

3. Beispiel. Es sei der lg einer unbekannten Zahl x bekannt, z. B. lg x = 0,87040. Wie groß ist x? Zur Mantisse 87040 findet man in Wittst. S. 18 links oben den Num. 742. Der gesuchte Numerus x besteht also aus den Ziffern 742. Da nun die Kennziffer 0 ist, so muß der Numerus nach C aus 0 + 1 Ziffern, d. i. aus einer Ziffer in den Ganzen bestehen. Daher x = 7,42.

Zusatz. Die logarithmischen Tafeln enthalten stets nur die Mantisse (s. Wittst. S. 2 bis 24), da die Kennziffern, wie soeben gezeigt worden ist, sich von selbst verstehen. Auch wäre die Kennziffer nur störend, denn da lg 82, lg 8,2, lg 82000 dieselbe Mantisse 91381 (s. Wittst. S. 20, links oben) haben müssen, so sucht man an derselben Stelle sowohl lg 82 = 1,91381, wie lg 8,2 = 0,91381 oder lg 82000 = 4,91381 auf.

XII. Die Logarithmen echter Brüche (der Numeri, die kleiner als 1 und größer als 0 sind).

a) Die Logarithmen echter Brüche sind negative Zahlen (s. II); z. B. ist lg 0,2603 = — 0,58453. Da man nun in den Tafeln zu dem Numerus 2603 die Mantisse 41547 findet (s. XI), so würde das in XI, A aufgestellte Gesetz keine allgemeine Geltung haben. Man stellt daher die Logarithmen der echten Brüche als Differenzen dar, bei welchen der Minuend dieselbe (positive) Mantisse enthält, die wir für die aus denselben Ziffern bestehenden Numeri schon in XI kennen lernten. Außerdem bekommt diese Mantisse noch als Ganze eine sogenannte „positive Kennziffer“. Der negative Teil dieser Differenz ist stets eine ganze Zahl, die negative Kennziffer genannt wird. Beispiel. lg 0,2603 = 9,41547 — 10. Hier ist die Mantisse 41547 (also die des lg 2,603 oder lg 26,03 — s. XI) die positive Kennziffer 9, die negative Kennziffer —10. Die übliche Darstellung dieser Log. ist aus den folgenden Abschnitten b und c ersichtlich.

b) Aus lg 2,603 = 0,41547 (s. XI) folgt:

$$\lg 0{,}2603 = \lg (2{,}603 : 10) = \lg 2{,}603 - \lg 10 \text{ (s. VII)}$$
$$= 0{,}41547 - 1;$$
$$\lg 0{,}02603 = \lg (2{,}603 : 100) = \lg 2{,}603 - \lg 100$$
$$= 0{,}41547 - 2;$$
$$\lg 0{,}002603 = 0{,}41547 - 3;$$
$$\lg 0{,}0002603 = 0{,}41547 - 4 \text{ etc.}$$

Hieraus folgt:

A) Die Logarithmen echter Brüche (Dezimalbrüche) haben dieselbe Mantisse, wie die Zahlen, welche größer als 1 sind und aus denselben Ziffern bestehen (s. XI);

B) Die positive Kennziffer (die ganze Zahl vor der Mantisse) ist stets 0.

C) Die negative Kennziffer ist — n (z. B. — 1, — 2, — 3, ...), wenn der Numerus in der n^{ten} Stelle des Dezimalbruches beginnt (also bezw. die 1., 2., 3. ... Stelle zuerst Einheiten enthält).

D) Umgekehrt: Hat ein negat. Log. die Form 0, ... — n, so beginnt der Numerus in der n^{ten} Dezimalstelle.

1. Beispiel. lg 0,07? lg 7, lg 70, lg 700 haben die Mantisse 84510 (s. Wittst. S. 17, links oben, oder Seite 1, 1. Spalte), folglich hat auch lg 0,07 diese Mantisse. Nach B ist die positive Kennziffer 0 und die negative — 2, weil der Num. in der 2. Dezimalstelle beginnt (7 in der 2. Dezimalstelle steht). Folglich lg 0,07 = 0,84510 — 2.

2. Beispiel. lg 0,00000302? lg 302 hat die Mantisse 48001 (s. Wittst. S. 7, links oben).

Die positive Kennziffer ist stets 0, die negat. Kennz. —6, weil zuerst in der 6. Dezimalstelle Einheiten (3 E.) enthalten sind. Folglich lg 0,00000302 = 0,48001 — 6.

c) Die im vorstehenden Abschnitt b abgeleitete Form der Logarithmen echter Brüche mit der unveränderlichen positiven Kennziffer 0 und der veränderlichen negativen Kennziffer (— 1, — 2, — 3, ...) zeigt sich in der Praxis äußerst unbequem. Dennoch ist diese Form in den meisten Lehranstalten eingeführt, da sich ihre Ableitung unmittelbar aufdrängt. Die Rechner (z. B. Astronomen), welche vorzugsweise mit Logarithmen zu rechnen haben, benutzen dieselbe jedoch nicht, sondern die Form, welche nachstehend entwickelt werden soll und die auch wir allein benutzen werden.

Man vermehre die in Abschnitt b erhaltenen Logarithmen in der positiven und negativen Kennziffer um so viel Einheiten, daß jedesmal die negat. Kennziffer — 10 entsteht.

Daher:

$$\lg 0{,}2603 = 0{,}41547 - 1 = 9 + 0{,}41547 - 1 - 9$$
$$= 9{,}41547 - 10;$$
$$\lg 0{,}02603 = 0{,}41547 - 2 = 8 + 0{,}41547 - 2 - 8$$
$$= 8{,}41547 - 10;$$
$$\lg 0{,}002603 = 0{,}41547 - 3 = 7 + 0{,}41547 - 3 - 7$$
$$= 7{,}41547 - 10;$$
$$\lg 0{,}0002603 = 6{,}41547 - 10 \text{ ꝛc.}$$

Mithin gelten folgende Regeln:

A) Die positive Mantisse ist auch hier dieselbe wie in XI.

B) Die negative Kennziffer ist unveränderlich — 10.

C) Beginnt der Num. in der

1., 2., 3., 4., ... n^{ten} Dezimalstelle, so ist bezw. die pos. Kennz. 9, 8, 7, 6, ... (10—n).

Die positive Kennziffer läßt sich auch leicht so bestimmen: Man zählt von der 1. Dezimalstelle an mit 9 beginnend rückwärts, also 9, 8, 7 ....; diejenige dieser Zahlen, die auf die Dezimalstelle trifft, mit der der Num. beginnt, ist die gesuchte positive Kennziffer.

1. Beisp. lg 0,0000078? lg 78 hat die Mantisse 89209 (s. Wittst. S. 19, links oben).

Die neg. Kennz. ist — 10 (s. B). Die positive Kenn-
9 8 7 6 5 4
ziffer ist durch 0,0000078 bestimmt, denn 4 trifft auf die Stelle (7 Einheiten), mit der der Num. beginnt. Daher lg 0,0000078 = 4,89209 — 10.

2. Beisp. lg 0,3? lg 3 hat die Mantisse 47712, außerdem
9
0,3; daher lg 0,3 = 9,47712 — 10.

§ 35. Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

Das Bestimmen eines lg aus dem gegebenen Num., oder eines Num. aus dem gegebenen lg ist stets mittels der in dem Wittsteinschen Buche S. 2 bis 24 enthaltenen Tafel auszuführen.

A. Das Aufsuchen des Logarithmus eines ein- bis vierstelligen Numerus.

Man denke sich den Numerus stets vierstellig, z. B. lg 73 = lg 73,00. Die drei ersten Stellen desselben sucht man in der mit N (Num.) bezeichneten Spalte, die vierte Stelle rechts von L (Log.) in der ersten und letzten Zeile der Seite. Die zwei ersten Stellen des gesuchten Log. befinden sich senkrecht unterhalb „L“, die drei letzten Stellen in der Spalte, welche jene 4. Stelle des Numerus enthält.

Beispiele. lg 94,07 = ? Seite 23, 1. Zeile: lg 94,07 = 1,97345.

lg 0,0365 = ? Man suche den vierstelligen Num. 3650 auf. S. 8 findet man als Mantisse zum Numerus 3650 : 56229, denn die 56 unterhalb L gilt vom Num. 364 bis 371. Daher: 0,0365 = 8,56229 — 10.

lg 8795000 = 6,94424 (s. S. 21, in der Mitte).

Befindet sich vor den drei letzten Stellen des lg (in den mit 1, 2 bis 9 überschriebenen Spalten) ein *, so sind diejenigen zwei ersten Stellen der Mantisse vorzusetzen, welche sich auf der folgenden Zeile befinden. Daher lg 1,867 = 0,27114 (s. Seite 4, 7. Zeile).

B. Das Aufsuchen des Numerus zu einem unmittelbar in den Tafeln enthaltenen Logarithmus.

Die ersten zwei Ziffern der Mantisse sind unterhalb L aufzusuchen, die drei letzten Ziffern in den dreistelligen Zahlen, welche sich in der mit 0, 1, 2 ... 9 bezeichneten Kolonnen befinden. In derselben Zeile, in welcher sich diese drei letzten Stellen der Mantisse befinden, findet man in der Spalte N die drei ersten Stellen des Numerus, die vierte Stelle des Num. aber am Kopfe oder Fuße der senkrechten Kolonne, welche dieselben drei Stellen der Mantisse enthält. Z. B.

lg x = 2,66408; x = 461,4 (siehe Seite 11, 2. Zeile).

lg y = 8,54020 — 10; aus Seite 8, 7. Zeile ergiebt sich y = 0,03469 (s. die letzten Zeilen von A).

lg z = 7,41296; z = 25880000 (siehe Seite 5, 3. Zeile von unten).

C. Der Log. eines Num. von mehr als vier Ziffern gesucht.

Es sei der Numerus 14,0763 gegeben, also lg 14,0763 gesucht. Da nur die Mantisse dieses lg zu suchen ist, so denke man sich stets die vier ersten Stellen des Numerus als Ganze; daher lg 1407,63? In den Tafeln sind zunächst die beiden Numeri aufzusuchen, zwischen welche der gegebene Numerus fällt. Seite 3 oben findet man:

lg 1407 = 14829

lg 1408 = 14860.

Bestimme nun die Differenz der diesen beiden Numeri zugehörenden, gleichfalls als ganze Zahl zu betrachtenden Mantissen (14860 — 14829 = 31), multipliziere diese (31) mit dem auf die vierstellige ganze Zahl des gegebenen Numerus folgenden Dezimalbruche (also 0,63 . 31) und addiere dieses Produkt (0,63 . 31 = 19,53 = 20, da stets nur die ganze Zahl zu berücksichtigen ist) zu dem nächstkleinern Logarithmus der Tafeln, womit die gesuchte Mantisse sich ergiebt:

lg 1407 $=$ 14829
0,63 . 31 $=$ 20
14849 als Mantisse des lg 1407,63.

Da jedoch der ursprünglich gegebene Numerus 14,0763 ist, so ist der zweistelligen ganzen Zahl wegen (s. XI, B) noch 1 als Kennziffer vorzusetzen.

$$\lg 14{,}0763 = 1{,}14849.$$

Die vorstehende Rechnung wird durch die mit P. P. (Partes proportionales = Proportionalteile) bezeichnete Spalte (auf Seite 3) wesentlich abgekürzt. Denn erstens braucht man nicht jene beiden Mantissen vollständig zu subtrahieren, um ihre Differenz zu finden, sondern zieht nur die letzte Stelle (9) der kleinern Mantisse von der letzten (0) der nächstgrößern ab, hier also (da geborgt werden muß) 9 von 10 = 1. Die Differenz muß sich mithin auf 1 endigen, folglich muß sie 31 sein, da unter P. P. 31 sich jenen Numeri und Mantissen zunächst befindet. Zweitens enthält die daselbst mit 31 überschriebene Tafel die Zahlen

1 (Zehntel) | 3,1
2 („) | 6,2 ꝛc. Die Zahlen links (1, 2, 3, . .)

beziehen sich auf die Zehntel (5. Stelle) des Numerus, die rechts geben für diese Zehntel die Zunahme der Mantisse. Für 6 Zehntel (5. Stelle von 1407,63) beträgt also diese Zunahme 18,6; für 3 Zehntel würde sie 9,3, für 3 Hundertstel (6. Stelle der Zahl 1407,63) daher 0,93 betragen. Doch ist diese Veränderung für die 6. Stelle des Numerus nicht nötig, da man ja nur 9,3 eine Stelle nach rechts zu rücken braucht. Um lg 1407,63 zu bestimmen, ist daher die einfache Rechnung folgende:

lg 1407, $=$ 14829
(5. Stelle) 6 18,6
(6. Stelle) 3 9,3
lg 14,0763 $=$ 1,14849 (nach XI, B).

2. Beispiel. lg 0,002759087 = ?

lg 2759, = 44075

0 . . . . 0,0 (Unter P.P. stets weggelassen)

8 . . . . 1 2,8

7 . . . . 1 1,2

lg 0,002759087 = 7,44076 — 10

D. Der gegebene Log. nicht unmittelbar in den Tafeln enthalten. Der Numerus gesucht.

Vermindere die Mantisse des gegebenen Logarithmus um die nächstkleinere in den Tafeln enthaltene Mantisse und behalte vorläufig den zu letzterer gehörenden vierstelligen Numerus. Zugleich bestimme (nach C) die Differenz der beiden Mantissen, zwischen welche die gegebene fällt, um in dem zu dieser Differenz gehörenden Täfelchen unter P.P. jenen Rest (zwischen der gegebenen und nächstkleineren Mantisse) auf der rechten Seite aufzusuchen. Die zugehörige Zahl links ist die 5. Stelle des Numerus. Ist der Rest nicht unmittelbar in dieser Tafel enthalten, so benutze nur die nächstkleinere Zahl, ziehe diese von jenem Rest ab, setze im neuen Rest das Komma eine Stelle weiter rechts und suche den so veränderten Rest wieder in dem Täfelchen rechts auf, um links die 6. Stelle des Num. zu finden. Z. B.

lg x = 2,19850

19838 = lg 1579

Aus der Tafel zur Diff. 28.
12,0
11,2 giebt 4 als 5. Stelle des Numerus
8,0 „ 3 „ 6. „ „ „

Daher x = 157,943.

2. Beispiel.

lg z = 6,28083 — 10;

28081 = lg 1909

Aus der Tafel zur Diff. 22.
2,0
0,0 giebt 0 als 5. Stelle des Numerus
20,0 „ 9 „ 6. „ „ „

Daher z = 0,000190909.

Offenbar kann man den Numerus nur auf 5, höchstens 6 Stellen bestimmen, da die bei der Benutzung der Differenztafel fortwährend angehängten Nullen nicht die richtigen Ziffern der gegebenen Mantisse sind, denn schon die 5. Stelle derselben ist durch Abbrechen des Dezimalbruches entstanden.

§ 36. Berechnung des Produkts.

A. $x = 23{,}76 \,.\, 5{,}89$ zu berechnen.

Es ist $\lg x = \lg (23{,}76 \,.\, 5{,}89) = \lg 23{,}76 + \lg 5{,}89$ (siehe § 34, VI), folglich

$$\begin{array}{rl} \lg 23{,}76 = & 1{,}37585 \\ \lg 5{,}89 = & \underline{0{,}77012} \\ \lg x = & 2{,}14597 \\ & \underline{\quad 582} = \lg 1399 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Aus der} \\ \text{Diff. 31} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 15{,}0 \\ \underline{12{,}4} \text{ giebt } 4 \\ \quad 26{,}0 \text{ giebt } 8 \end{array} \right.$$

$$x = 139{,}948.$$

2. Beispiel. $y = 386{,}92 \,.\, 0{,}00089745 \,.\, 1{,}3579;$

$$\begin{array}{ll} \lg 386{,}92 & = 2{,}58762 \\ \lg 0{,}00089745 & = 6{,}95301 - 10 \\ \lg 1{,}3579 & = \underline{0{,}13287 \qquad} \\ \lg y & = 9{,}67350 - 10 \\ y & = 0{,}471522. \end{array}$$

B. Der praktische Rechner läßt, wie es auch hier geschehen soll, bei allen Operationen mit Logarithmen die negative Kennziffer — 10 stets weg. Damit hängt jedoch eine gewisse, wenn auch sehr einfache Veränderung zusammen, die (wenn negative Logarithmen beteiligt sind) noch außerdem beim Addieren, Subtrahieren der Logarithmen rc. vorzunehmen ist. Beim Addieren der Logarithmen (behufs der Berechnung eines Produkts) besteht dieselbe darin, daß die etwa entstehenden Zehner der positiven Kennziffer wegzulassen sind. Ist alsdann die positive Kennziffer der Summe der Logarithmen eine nur kleine (0,... oder 1,... ꝛc.), so ist im allgemeinen der Logarithmus ein positiver, also ohne — 10. Ist dagegen die positive Kennziffer sehr groß (9,... oder 8,... ꝛc., wie im letzten Beispiel), so wird in der Regel — 10 zu ergänzen sein; denn in der Praxis kommen im allgemeinen so kleine Zahlen, wie sie zu den Logarithmen 0,... — 10 oder 1,.... — 10 ꝛc. gehören, aber auch so große Zahlen, wie sie zu den Logarithmen 9,..., 8,... (ohne — 10) gehören, nicht vor. Sollte dennoch eine Ausnahme stattfinden und ein Zweifel herrschen, ob der Logarithmus des Resultats ohne oder mit — 10 zu denken ist, so sieht man dies immer sehr leicht an der Aufgabe, im schlimmsten Falle aber würde die vollständige Rechnung darüber entscheiden.

Z. B. $z = 0{,}76943 \,.\, 28{,}865 \,.\, 0{,}0096154$;

$$\begin{aligned} \lg 0{,}76943 &= 9{,}88617 \\ \lg 28{,}865 &= 1{,}46038 \\ \lg 0{,}0096154 &= 7{,}98297 \\ \hline \lg z &= 9{,}32952. \end{aligned}$$

Offenbar fehlt hier — 10, da 1.) die Kennziffer eine sehr große ist, 2.) die Aufgabe sogleich erkennen läßt, daß das Produkt keine 10stellige ganze Zahl sein kann (s. § 34, XI, C); 3.) die vollständige Rechnung dies erweist:

$$\begin{aligned} &9{,}88617 - 10 \\ &1{,}46038 \\ &7{,}98297 - 10 \\ \hline \lg z = \; &19{,}22952 - 20. \end{aligned}$$

Da nun dem negativen Logarithmus stets die Kennziffer — 10 zu geben ist, so sind hier beide Kennziffern um 10 zu vermindern: daher $\lg z = 9{,}22952 - 10$; und folglich $z = 0{,}173588$.

Das 2. Beispiel unter A würde mithin auch nicht so, wie es dort ausgeführt ist, zu berechnen sein, sondern mit Weglassung von — 10.

§ 37. Berechnung eines Quotient.

A. $x = \frac{376,98}{4,5672}$; $\lg x = \lg 376,98 - \lg 4,5672$ (s. § 34, VI).

$$\begin{aligned} \lg 376,98 &= 2,57632 \\ \lg 4,5672 &= 0,65965 \\ \hline \lg x &= 1,91667; \quad x = 82,542. \end{aligned}$$

$$y = \frac{0,091678}{0,287554}; \quad \left.\begin{aligned} \lg 0,091678 &= 8,96226 - 10; \\ \lg 0,28754 &= 9,45870 - 10 \end{aligned}\right\} \text{subt.}$$

Da der Minuend größer als der Subtrahend, so vermehrt man, um subtrahieren zu können, beide Kennziffern des Minuend um 10, daher:

$$\begin{aligned} &18,96226 - 20 \\ &9,45870 - 10 \\ \hline \lg y = &9,50356 - 10; \quad y = 0,31883. \end{aligned}$$

B. Nach § 36 B ist die Berechnung, wie sie für das letzte Beispiel ausgeführt wurde, nicht die übliche; vielmehr rechnet man ohne -10. Dann aber hat man sich bei der Subtraktion der Logarithmen (behufs der Berechnung eines Quotient) folgende Regel zu merken: Ist die positive Kennziffer des Minuend kleiner als die des Subtrahend, so hat man, um subtrahieren zu können, jene stets um 1 Zehner zu vermehren. Außerdem gelten die in § 36 B gegebenen Regeln hinsichtlich des Resultates. Z. B.

$$m = \frac{3,6149}{722,95};$$

$$\begin{aligned} \lg 3,6\ldots &= 0,55810 \\ \lg 722,95 &= 2,85911 \\ \hline \lg m &= 7,69899 \\ m &= 0,00500022. \end{aligned}$$

$$n = \frac{4,6038}{0,098297};$$

$$\begin{aligned} \lg 4,6\ldots &= 0,66312 \\ \lg 0,098\ldots &= 8,99254 \\ \hline \lg n &= 1,67058 \\ n &= 46,836. \end{aligned}$$

$p = \frac{0{,}006948 \cdot 0{,}1998}{81{,}71 \cdot 0{,}0004256}$. Es ist lg p = lg Zähler — lg Nenner = lg (0,006948 . 0,1998) — lg (81,71 . 0,0004256) = lg 0,006948 + lg 0,1998 — [lg 81,71 + lg 0,0004256], daher:

$$\begin{array}{rlrl} \lg 0{,}006948 = & 7{,}84186 & \lg 81{,}71 = & 1{,}91228 \\ \lg 0{,}1998 = & \underline{9{,}30060} & \lg 0{,}0004256 = & \underline{6{,}62900} \\ & 7{,}14246 & & 8{,}54128 \end{array}$$

$$\text{Alsdann: } \left.\begin{array}{l} \lg \text{Zähler} = 7{,}14246 \\ \lg \text{Nenner} = \underline{8{,}54128} \end{array}\right\} \text{subt.}$$

$\lg p = 8{,}60118$. Offenbar fehlt — 10, wie auch aus der Aufgabe ersichtlich ist.

$$p = 0{,}039919.$$

§ 38. Dekadische Ergänzung.

Ein Quotient, der nicht die einfache Form $\frac{a}{b}$ hat, sondern zusammengesetzter ist, wie z. B. p in § 37, wird einfacher durch die dekadische Ergänzung berechnet.

Die dekadische Ergänzung (abgekürzt mit d. E.) eines Logarithmus erhält man, indem man 10,00000 — 10 um jenen Logarithmus vermindert. Z. B.

$$\begin{array}{rl} \lg 81{,}71 = & 1{,}91228; \text{ folglich} \\ & 10{,}00000 - 10 \\ & \underline{1{,}91228} \\ \text{d. E. } \lg 28{,}865 = & 8{,}08772 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lg 0{,}04256 = & 8{,}62900 - 10; \text{ folglich} \\ & 10{,}00000 - 10 \\ & \underline{8{,}62900 - 10} \\ \text{d. E. } \lg 0{,}04256 = & 1{,}37100 \end{array}$$

Wie aus diesen Beispielen folgt, kann die dekadische Ergänzung in sehr einfacher Weise dadurch gebildet werden, daß man alle Ziffern des Logarithmus (auch die positive

Kennziffer) von 9, die letzte Ziffer (welche Einheiten hat, s. das 2. Beispiel) von 10 abzieht. Außerdem erhält die d. E. die Kennziffer — 10, wenn der gegebene Log. positiv ist (s. 1. Beispiel). Ist dagegen der gegebene Logarithmus negativ mit der Kennziffer — 10 (der Num. also <1), so fällt — 10 weg und die d. E. ist ein positiver Logarithmus (s. d. 2. Beisp.).

Anwendung der dekadischen Ergänzung.

Anstatt den Log. einer im Nenner (Divisor) befindlichen Zahl abzuziehen, addiert man seine dekad. Ergänzung.

Bew. $\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b = \lg a + 10 - 10 - \lg b$ $= \lg a + [(10{,}00000 - 10) - \lg b]$. Dies aber ist (s. die vorausgehende Erklärung)

$$\lg\frac{a}{b} = \lg a + \text{d. E. } \lg b.$$

Beisp. $p = \frac{0{,}006948 \, . \, 0{,}1998}{81{,}71 \, . \, 0{,}0004256}$ (s. d. letzte Beisp. in § 37!).

$$\begin{array}{r} \lg 0{,}006948 = 7{,}84186 \\ \lg 0{,}1998 = 9{,}30060 \\ \text{d. E. } \lg 81{,}71 = 8{,}08772 \\ \text{d. E. } \lg 0{,}0004256 = 3{,}37100 \\ \hline \lg p = 8{,}60118; \; p = 0{,}039919. \end{array}$$

1. Zusatz. $\lg\frac{1}{b} = \lg 1 + \text{d. E. } \lg b = 0 + \text{d. E. } \lg b$ $= \text{d. E. } \lg b.$

Z. B. $y = \frac{1}{897{,}3 \, . \, 02571}$;

$$\left.\begin{array}{r} \text{d. E. } \lg 897{,}3 = 7{,}04706 \\ \text{d. E. } \lg 0{,}02571 = 0{,}58990 \end{array}\right\} \text{add.}$$

$$\lg y = 7{,}63696; \; y = 0{,}0043347.$$

2. Zus. $\lg\frac{a}{b} = \lg\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \text{d. E. } \lg\frac{b}{a}$ (nach d. 2. Zus.).

Z. B. $\lg {}^4/_7 = \text{d. E. } \lg {}^7/_4 = \text{d. E. } \lg 1{,}75 = 9{,}75696$; also weit einfacher, als durch $\lg 4 - \lg 7$.

§ 39. Berechnung einer Potenz.

A. $x = 2{,}0987^6$. Nach § 34, VIII:

$$\lg x = 6 \,.\, \lg 2{,}0987. \text{ Daher:}$$

$$\lg 2{,}0987 = \underline{0{,}32195 \;(.6}$$
$$\lg x = 1{,}93170; \quad x = 85{,}448$$

$$y = 0{,}076948^4; \; \lg 0{,}076948 = \underline{(8{,}88620 - 10)\,.\,4}\,.$$
$$\lg y = 35{,}54480 - 40$$

Da der negative Log. stets die negative Kennziffer —10 haben muß, so sind hier beide Kennziffern um 30 zu vermindern. Daher $\lg y = 5{,}54480 - 10$; folglich

$$y = 0{,}000035059.$$

B. Wird der einfacheren Rechnung wegen die Kennziffer —10 nicht geschrieben (s. § 36, B), so läßt man bei der Multiplikation eines negativen Log. die Zehner der positiven Kennziffer weg (also ganz wie bei der Addition der Logarithmen — s. § 36, B).

In Bezug auf das letzte Beispiel: $\underline{8{,}88620 \;(.4}\,.$

$$\lg y = 5{,}54480$$

Da hier eine negative Zahl mit 4 multipliziert ist, so muß auch 5,54480 negativ sein; folglich fehlt — 10.

2. Beisp. $z = \frac{3{,}915}{0{,}04938\,.\,7{,}654^2}$. Da sich 0,04938 und 7,654 im Nenner befinden, so ist der kürzern Rechnung wegen die dekadische Ergänzung dieser Logarithmen zu benutzen. Zugleich rechnet man in folgender Ordnung:

$$\begin{aligned}
\text{d. E.} \lg 7{,}654 &= \underline{9{,}11611} \;(.2 \\
&\; 8{,}23222 \\
\text{d. E.} \lg 0{,}04936 &= 1{,}30662 \\
\lg 3{,}915 &= \underline{0{,}59273} \\
&\; 0{,}13157 \;(.3 \\
\lg z &= 0{,}39471; \quad z = 2{,}4815.
\end{aligned}$$

§ 40. Berechnung einer Wurzel.

A. $x = \sqrt[3]{7{,}8912}$. Nach § 34, IX: $\lg x = \frac{\lg 7{,}8912}{3}$;

$\lg 7{,}8912 = 0{,}89714\ (:3$

$\lg x = 0{,}29905$ (die Mantisse stets fünfstellig!).

$x = 1{,}9909$.

$y = \sqrt{12^5/_7} = \sqrt[2]{^{89}/_7}$; folglich

$\lg 89 = 1{,}94939$

$\lg\ \ 7 = 0{,}84510$

$1{,}10429\ (:2$

$\lg y = 0{,}55215$; $y = 3{,}56575$.

$z = \sqrt[7]{^{37}/_{4469}}$; $\lg 37 = 1{,}56820$

$\lg 4469 = 3{,}65021$

$7{,}91799 : 7 = ?$

B. Bei einer derartigen Division eines lg hat man stets zunächst zu untersuchen, ob der lg ein positiver oder negativer ist. Wäre 7,91799 ein positiver Log. (also der einer 8stelligen ganzen Zahl), so ist unmittelbar zu dividieren: 7,91799 : 7 = 1,13114. Ist jedoch der zu dividierende lg ein negativer, fehlt also —10, wie es offenbar hier der Fall ist (da 3,65021 größer als 1,56820), so kann man nicht unmittelbar dividieren, denn man erhielte: $\frac{(7{,}91799 - 10):7}{1{,}13114 - 1{,}42857}$.

Da nun die negative Kennziffer nie gebrochen, dieselbe auch nie eine andere Zahl als —10 sein darf, so hätte man darauf zu sehen, daß nach der Division —10 als negative Kennziffer erscheint. Folglich ist (7,91799 — 10) : 7 in (67,91799 — 70) : 7 umzuändern.

$\lg z = 9{,}70257 - 10$; $z = 0{,}50416$.

Wäre derselbe Log. 7,91799 —10 durch 6 oder 5 zu dividieren, so hätte man zunächst (57,91799 — 60) : 6, bezw. (47,91799 — 50) : 5 setzen müssen.

Daraus folgt die Regel: Rechnet man, ohne die negative Kennziffer zu schreiben, und ist ein negat. Logarithmus, bei welchem -10 fehlt, durch die ganze Zahl n (Wurzelexponent) zu dividieren, so hat man zunächst vor die positive Kennziffer $n-1$ als Zehner zu setzen und dann erst die Division auszuführen.

Zusammengesetztere Beispiele zur Übung.

1. Beispiel. $u = \sqrt{\dfrac{8{,}4166}{0{,}09247 \,.\, 316{,}9^3}}$;

$$\begin{aligned} \text{d. E. lg } 316{,}9 &= \underline{7{,}49908\ (.3} \\ &\ 2{,}49724 \\ \text{d. E. lg } 0{,}09247 &= 1{,}03400 \\ \text{lg } 8{,}4166 &= \underline{0{,}92514} \\ &\ 4{,}45638\ (:2 = ? \end{aligned}$$

Wäre 4,45638 ein positiver Logarithmus, so würde unmittelbar durch 2 zu dividieren sein und man erhielte lg u = 2,22819. Da aber diese Zahl 4,45638 der Log. jenes Bruches unter der Wurzel der Aufgabe ist und dieser Bruch wegen der großen Zahl $316{,}9^3$ ein sehr kleiner echter Bruch sein muß, so fehlt offenbar -10. Daher ist (s. die letzte Regel) zu dividieren:

$$\begin{aligned} &\underline{14{,}45638\ (:2} \\ \text{lg } u = &\ \ 7{,}22819; \quad u = 0{,}0016912. \end{aligned}$$

2. Beispiel. $v = \sqrt[3]{\dfrac{0{,}9683 \sqrt[4]{0{,}066778}}{3{,}978^2}}$;

$$\begin{aligned} \text{lg } 0{,}066778 &= 8{,}82464\,(:4 \\ \text{Dafür}\quad &\ \underline{{}_{3}8{,}82464\,(:4} \\ &\ 9{,}70616 \\ \text{lg } 0{,}9683 &= 9{,}98601 \\ \text{d. E. lg } 3{,}978 = 9{,}40034\,(.2 &= \underline{8{,}80068} \\ &\ \underline{{}_{2}8{,}49285\,(:3} \\ \text{lg } v &= 9{,}49762; \quad v = 0{,}3145. \end{aligned}$$

3. Beispiel. $w = \sqrt[0,65]{\frac{0,9876}{\sqrt[6]{23,5}}}$. Hier wendet man die d. E. nicht an, denn man kann einfacher rechnen:

$$\lg 23,5 = 1,37107 : 6 \text{ (s. die 2. folgende Zeile!)}$$

$$\lg 0,9876 = \left.\begin{matrix} 9,99458 \\ 0,22851 \end{matrix}\right\} \text{subt.}$$

$$(9,76607 - 10) : 0,65.$$

In so zusammengesetzten Fällen verwandelt man den negat. Log. in eine rein negative Zahl;

$$\text{daher: } (-0,23393) : 0,65$$

$$\lg c = -0,35989.$$

Da nun negative Mantissen nicht benutzt werden können, sind die rein negativen Log. dadurch wieder in solche mit positiver Mantisse umzuwandeln, daß man 10 — 10 hinzufügt. Folglich:

$$\lg c = (10 - 0,35989) - 10, \text{ d. i.}$$

$$\lg c = 9,64011 - 10; \; c = 0,43663.$$

4. Beispiel. $t = \left(\sqrt[3]{-0,73845}\right)^5 = -\sqrt[3]{0,73845^5}$.

Man berechnet $\sqrt[3]{0,73845^5} = 0,6033$ und setzt alsdann

$$t = -0,6033.$$

§ 41. Einige besondere Fälle beim logarithmischen Rechnen.

A. Ein dem lg rechts unten angehängtes n bedeutet, daß der zugehörige Num. negativ ist. Da nun zwei negative Zahlen multipliziert oder dividiert, sowie eine negative Zahl in geradzahliger Potenz ein positives, eine ungeradzahlige Wurzel aus einer negativen Zahl ein negatives Resultat giebt, so muß bei der Addition oder Subtraktion von einer geraden Anzahl n, ferner bei der Multiplikation mit gerader Zahl (Potenzexponent) das n verschwinden.

Z. B. $x = \sqrt[7]{\frac{a\,b^3}{c^2\,d}}$ für $a = -8{,}9134$, $b = -0{,}6589$, $c = -23{,}76$, $d = -0{,}07288$ zu berechnen.

$$
\begin{array}{rl}
\lg b = & \underline{9{,}81882_n} \;(.3 \\
 & 9{,}45646_n \\
\lg a = & 0{,}95004_n \\
\text{d. E.} \lg c = 8{,}62415_n \;(.2 = & 7{,}24830 \\
\text{d. E.} \lg d = & \underline{1{,}13739_n} \\
 & \underline{{}_{6}8{,}79219_n} \;(:7 \\
\lg x = & 9{,}82746_n;\; x = -0{,}42409.
\end{array}
$$

B. Um für den Radius r den Inhalt k einer Kugel, d. i. den Ausdruck $\frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4 \,.\, 3{,}141593}{3} r^3$ zu berechnen, müßte man lg 4, lg 3, lg 3,141593, lg r benutzen. Da nun $\lg \frac{4\pi}{3} = 0{,}62209$ ist, so kürzt man die Rechnung durch $k = (0{,}62209)\, r^3$ ab, wofür auch $\overline{0{,}62209\, r^3}$ geschrieben wird, wo der Faktor von r^3 schon der Log. der Zahl ist, die an dieser Stelle stehen müßte.

C. Unlogarithmische (nichtlogarithmische) Ausdrücke. Da $\lg (a\,b) = \lg a + \lg b$, $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$ ist, so kann nicht auch $\lg (a \pm b) = \lg a \pm \lg b$ sein. Mithin sind in solchen Fällen die einzelnen Glieder eines Ausdrucks besonders zu berechnen. Z. B.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{0{,}4682} - \sqrt[4]{1{,}8892}}.$$

$\lg 0{,}4682 = 9{,}67043$ (:2

n lg 9,83522 = 0,68426. Lies: numerus logarithmi 9,83522 gleich 0,68426.

Dieser Ausdruck bedeutet: der Numerus, für welchen der Log. = 9,83522 ist, ist = 0,68426.

Für das 2. Glied: $\lg 1{,}8892 = 0{,}27628$ (:4

$$n \lg 0{,}06907 = 1{,}17238.$$

Die Aufgabe geht nun über in

$$\sqrt[3]{0{,}68426 - 1{,}17238} = \sqrt[3]{-0{,}48812} = -\sqrt[3]{0{,}48812}$$
$$= -0{,}78737.$$

§ 42. Algebra.

I. Algebra ist die Lehre von der Auflösung der (bedingten) Gleichungen (siehe § 1, VII und VIII). Die Algebra findet also für die Unbekannte (gewöhnlich mit x bezeichnet) aus den mit ihr verknüpften bekannten (konstanten) Zahlen einen Wert, der der Gleichung genügt, d. h. der, an die Stelle der Unbekannten gesetzt, die linke Seite der rechten gleich macht. Die Gleichung ist dann aufgelöst. So ist z. B. $5x - 13 = 15 - 2x$ aufgelöst, wenn $x = 4$ gefunden ist; denn in $5 . 4 - 13 = 15 - 2 . 4$, das ist $20 - 13 = 15 - 8$ ist die linke Seite gleich der rechten. Eine Gleichung kann auch mehrere Auflösungen haben, z. B. hat $x^2 + 55 = 16x$ die beiden Auflösungen $x = 5$ und $x = 11$, da $5^2 + 55 = 16 . 5$ und auch $11^2 + 55 = 16 . 11$ ist. Die Auflösung einer Gleichung nennt man auch „Wurzel". Die letztere Gleichung hat die beiden Wurzeln 5 und 11. Hier ist $x = 5$ die eine Auflösungsgleichung oder Wurzelgleichung.

II. Die Auflösung einer Gleichung ist gewöhnlich ein „bestimmter" Wert, der nur eine Deutung zuläßt, z. B. $x = 20$, $x = -3a$, $x = 0$. Zuweilen, wenn auch seltener, ist er jedoch ein sogenannter „unbestimmter Wert", der, unabhängig von den Gesetzen für endliche Zahlen, eine beliebige endliche Zahl vorstellen kann und nicht unmittelbar an dem Ausdruck selbst erkennbar ist. So ist z. B. für a als endliche Zahl stets $a - a = 0$, $\frac{a}{a} = 1$, $1^a = 1$. Dies gilt aber nicht unbedingt für Werte, die in gleicher Weise durch 0 (unendlich klein) oder ∞ (unendlich groß) ausgedrückt sind. Solche unbestimmte Werte sind z. B.

1) $\infty - \infty$. Bew. Nach § 4, VI und VII ist z. B. $\infty + 1000 = \infty$, folglich ist in diesem Fall $\infty - \infty = 1000$.

2) $\frac{0}{0}$. 1. Beispiel. $\frac{0}{0}$ kann aus $\frac{(-7) \cdot 0}{2 \cdot 0}$ entstanden sein, dann ist $\frac{0}{0} = -3^1/_2$.

2. Beispiel (!). Es sei $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ gegeben und für irgend einen Wert von x zu bestimmen. Ist $x = 7$, so ist der Wert des Bruches $= \frac{7^2 - 25}{7 - 5} = 12$. Nun soll aber in jenem Bruch $x = 5$ sein. Er wird damit $\frac{5^2 - 25}{5 - 5}$ oder $\frac{0}{0}$. Welche Zahl bedeutet jetzt $\frac{0}{0}$? Um sie zu finden, verwandelt man den Bruch in $\frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = x + 5$. Ist also $x = 5$, so ist der Wert des Bruches, d. i. der hier zum Vorschein gekommene Ausdruck $\frac{0}{0}$, $= 5 + 5 = 10$. Auch für $x = 7$ ist $x + 5$ der Wert des Bruches, nämlich $7 + 5 = 12$.

3) $\frac{\infty}{\infty}$; denn $\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$; 4) $0 \cdot \infty$; denn $0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$;

5) 0^0; denn $0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$; 6) ∞^0; denn $\infty^{1-1} = \frac{\infty^1}{\infty^1} = \frac{\infty}{\infty}$;

7) 1^∞ ist unbestimmt. Bew.

$$\begin{array}{rcr} 100^1 = 100 & \text{d. i.} & (1+99)^1 = 100 \\ 10^2 = 100 & & (1+9)^2 = 100 \\ 3^{4,19} = 100 & & (1+2)^{4,19} = 100 \\ 1{,}05^{94,38} = 100 & & (1+0{,}5)^{94,38} = 100 \\ 1{,}002^{346,92} = 100 & & (1+0{,}002)^{346,92} = 100 \end{array}$$

Setzt man dies fort, so nähert man sich immer mehr der Grenze: $(1+0)^\infty = 100$, d. i. $1^\infty = 100$. Wäre man von $64^1 = 64$ ausgegangen, also

$$(1+63)^1 = 64$$
$$(1+1)^6 = 64$$
$(1+0{,}01)^{418} = 64$, so würde $1^\infty = 64$ entstehen.

III. Um die gegebene Gleichung aufzulösen, hat man sie zunächst zu entwickeln, d. h. alle Klammern, Faktoren, Nenner, Wurzeln ꝛc. zu entfernen, in welchen die Unbekannte enthalten ist, bis sie auf eine algebraische Summe von Gliedern der Form mx^r gebracht ist, wo r eine ganze und positive Zahl, m eine beliebige bekannte Zahl ist. Z. B. ist $7{,}56 + \left(2a + \frac{b}{4}\right)x^3 = \frac{5x}{2} - 3x^4$ eine entwickelte (explicite) Gleichung; $(7x-3)(5x+a) = 2b$, $\frac{ax}{b-x} = c$; $\frac{3}{2x} - 5a = \frac{b}{x}$ sind unentwickelte (implicite) Gleichungen.

IV. Ist die Gleichung entwickelt, so läßt sich der „Grad“ derselben erkennen, der sich nach dem „Exponent der höchsten Potenz der Unbekannten“, nach dem sogen. „Exponent der Ordnung“, richtet.

$2x - 3a = bx + 1$ ist daher eine Gleichung vom 1. Grade, oder einfache oder lineare Gleichung;

$13 - x^2 = ax$ eine Gleich. 2. Grades oder „quadratische Gleichung“;

$x^3 = 125$ eine Gleich. 3. Grades oder „kubische Gleichung“;

die 1. Gleichung in III ist eine Gleichung 4. Grades oder „biquadratische Gleichung“.

V. Die Gleichungen 1. und 2. Grades nennt man niedere, diejenigen vom 3. und höheren Grade: höhere Gleichungen.

VI. Die Gleichungen sind entweder algebraisch (im engern Sinne — s. § 1, VII, 2) oder transscendent. Algebraisch sind solche, die eine endliche Anzahl von Gliedern der Form mx^r haben, wie die in IV aufgeführten Gleichungen. Transscendent ist eine Gleichung, welche aus unendlich vielen Gliedern dieser Form bestehen, z. B. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ in inf. $= {}^6/_7$. Daher ist auch eine Gleichung, die als „geschlossener Ausdruck", d. h. als ein Ausdruck von einer endlichen Anzahl Glieder auftritt, eine transscendente, wenn sie bei der Umwandlung in eine Summe von Gliedern der Form mx^r unendlich viele Glieder erhalten würde; z. B. $x^x = 10$; $3x + 4\lg x = 5$; $x \sin x = 2$. Denn die letzte Gleichung z. B. kann (mittels der Sätze des höhern Rechnens) nur in $x^2 - \frac{x^4}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.4.5} - \frac{x^8}{2.3\dots.7} + \cdots$ in inf. $= 2$ verwandelt werden.

Gleichungen mit unbekannten Exponenten werden Exponentialgleichungen genannt, z. B. $a^x + b^x = c$. Können dieselben mittels der logarithmischen Sätze auf algebraische Form gebracht werden, so nennt man sie auch „logarithmische Gleichungen", z. B. $2^x = 300$, denn nach § 34, VIII geht $\lg(2^x) = \lg 300$ über in $x.0{,}30103 = 2{,}47712$, welche Gleichung eine algebraische ist.

VII. Gleichungen, welche, außer bekannten Gliedern, x nur in einer Potenz enthalten, werden binomische oder reine Gleichungen genannt; z. B. ist $ax^2 = b$ eine reine quadratische Gleichung. Enthalten die Gleichungen außer bekannten Gliedern x in verschiedenen Potenzen, so heißen sie polynomische, gemischte oder unreine Gleichungen. $x^2 + ax = b$ ist z. B. eine gemischte quadratische Gleichung.

VIII. Alle Gleichungen vom 1., 2., 3. Grade 2c. können auf die allgemeine Form: $x = a$, $x^2 = a$, $x^3 + ax + b = 0$, $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$

$+ d = 0$ ꝛc. gebracht werden, wo also die Potenz von x fehlen kann, deren Exponent um 1 kleiner als der Exponent der Ordnung ist, außerdem aber alle Koeffizienten der unbekannten Potenzen (a, b, . . .) von einander verschieden und von einander unabhängig sind. Jedoch können nur die Gleichungen vom 1. bis 5. Grade allgemein aufgelöst werden, alle höheren Gleichungen nur durch Versuche (durch Näherung) und auch nur dann, wenn sie bloß spezielle Zahlen enthalten.

IX. Enthält die Gleichung außer der Unbekannten nur spezielle Zahlen, so ist sie eine numerische, z. B. $x^3 - 5{,}7\,x = \sqrt{\frac{3}{11}}$; $ax^2 = b$ oder $(3a - 2x)(5b + x) = abx$ dagegen ist eine literale oder Buchstabengleichung.

X. Es giebt Gleichungen mit einer oder mit mehreren Unbekannten. $ax + bx^3 = c$ ist eine Gleichung mit einer Unbekannten. Die Aufgabe dagegen: „Ich kenne zwei Zahlen, deren Produkt um 5 größer als ihre Summe und deren Quotient um $1^1/_2$ kleiner als ihre Differenz ist. Welche Zahlen sind es?“ führt auf Gleichungen mit zwei Unbekannten. Denn setzt man die eine Zahl $= x$, die andere $= y$, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\text{I. } xy = x + y + 5; \quad \text{II. } \frac{x}{y} = x - y - 1^1/_2.$$

§ 43. Auflösungssätze der binomischen Gleichung.

I. Eine Gleichung kann zwar nach der allgemeinen Regel aufgelöst werden: „Jede der beiden Seiten ist auf dieselbe Weise zu verändern, wenn die Gleichheit nicht gestört werden soll“, jedoch bedarf der Ungeübte einer speziellen Anleitung zur Auflösung, die sich auf die den 7 Spezies entsprechenden Sätze stützt:

1) Gleiches zu Gleichem add., giebt Gleiches;
2) Gleiches von Gleichem subt., giebt Gleich.; } (Nachstehender Satz II.)
3) Gleiches mit Gleichem mult., giebt Gleiches; (Satz III.)
u. s. w.

II. Man kann jedes Glied von einer Seite der Gleichung auf die andere mit entgegengesetzten Vorzeichen setzen. (Transposition — Transponieren der Glieder.)

Bew. $\left.\begin{array}{r} x-b=a \\ +b=+b \end{array}\right\}$ Gleiches zu Gleichem addiert:

$$x=a+b$$

$$\left.\begin{array}{r} x+b=a \\ b=b \end{array}\right\} \text{subt.}$$

$$x=a-b.$$

A. Mittels dieses Satzes setzt man alle unbekannten Glieder links und alle bekannten rechts.

1. Bsp. $11-25x-3=20x+23-46x$; folglich: (Z) $-25x-20x+46x=23-11+3$; d. i.

$$x=15 \text{ (Auflösung).}$$

Die Gleichung Z schreibt man nicht, summiert die Glieder vielmehr im Kopfe.

2. Beisp. $5(7-17x)-3(2x-3)^2$
$$=2(x+5)(5-6x)-52.$$

Da die Gleichung zuerst entwickelt werden muß, so sind selbstverständlich alle Klammern 2c. zu entfernen. Daher:
$$35-85x-12x^2+36x-27$$
$$=-12x^2-50x+50-52;$$
$$x=-10.$$

B. In vorstehender Gleichung sind zunächst die Glieder mit x^2 auf die linke Seite zu setzen (das Ordnen beginnt man stets mit der höchsten Potenz von x). Man hätte daselbst $+12x^2-12x^2=0$ erhalten. Allgemein:

Stehen auf beiden Seiten gleiche Glieder (mit gleichen Vorzeichen), so heben sich dieselben (verschwinden aus der Gleichung).

C. Setzt man alle Glieder der Gleichung auf eine (z. B. die linke) Seite, so ist die Gleichung annulliert (oder nullifiziert, auf Null gebracht). Ist z. B. $x^3 - ax = x^2 - b$ gegeben, so ist diese Gleichung mit

$$x^3 - x^2 - ax + b = 0$$

annulliert. Ist $x = 7$ die Auflösung irgend einer Gleichung, so ist $x - 7 = 0$ die annullierte Auflösungsgleichung oder annullierte Wurzelgleichung.

D. Hebt sich die höchste Potenz von x ganz, so hat die Gleichung eine Auflösung: $x = \infty$.

1. Beispiel. $5(x + 1) - 2x = 3x$;
$5x + 5 - 2x = 3x$.

Hier hebt sich x (d. i. x^1, die höchste Potenz der Unbekannten), folglich ist $x = \infty$.

Bew. In jene Gleichung $3x + 5 = 3x$ den Wert ∞ an die Stelle von x gesetzt, giebt $3 \cdot \infty + 5 = 3 \cdot \infty$ d. i. $\infty + 5 = \infty$. Da nun die linke Seite der rechten gleich ist (§ 4, VI), so ist die Auflösung $x = \infty$ richtig (§ 42, I).

2. Beispiel. $3x^2 + 7 = (x - 4)(3x + 11)$;
$3x^2 + 7 = 3x^2 - x - 44$.

Da sich x^2 hebt, so ist zunächst $x = \infty$. Es bleibt dann noch: $7 = -x - 44$;
$x = -51$ als 2. Auflösung der Gleichung.

Auch in A hat das 2. Beisp. eine 2. Auflösung: $x = \infty$.

E. Von Vorteil ist es, zusammengesetzte Ausdrücke (vielstellige Zahlen 2c.), die sich (ganz oder teilweise) wiederholen, einstweilen durch einfache Zeichen zu ersetzen.

Z. B. $(x + 5a - 6b + 7)^2$
$= (x - 5a + 6b - 7)(x + 15a - 18b + 22)$;

Da die Gleichung auch:

$$(x + 5a - 6b + 7)^2$$
$$= [x - (5a - 6b + 7)]\,[x + 3(5a - 6b + 7) + 1]$$

geschrieben werden kann, so setze man $5a - 6b + 7 = c$.

Folglich: $(x+c)^2=(x-c)(x+3c+1)$;

$x^2+2cx+c^2=x^2+3cx+x-cx-3c^2-c$;

Zunächst hebt sich x^2, daher $x=\infty$. Alsdann:

$x=-4c^2-c$; oder

$x=-c(4c+1)$, wo $c=5a-6b+7$.

In vorstehender Form ist die Auflösung einfacher gegeben, als wenn man den Wert für c wieder eingesetzt hätte:

$$x=(6b-5a-7)(20a-24b+29).$$

III. **Man kann beide Seiten mit derselben Zahl multiplizieren.**

Bew. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{b} = a \\ b = b \end{array}\right\}$ Gleiches mit Gleichem multipliziert giebt Gleiches.

$\frac{x}{b}\cdot b=ab$ d. i. $x=ab$.

A. Mittels dieses Satzes beseitigt man die Nenner der Gleichung, indem man dieselbe mit dem Generalnenner multipliziert.

1. Beispiel. $\frac{5x}{12}-2a=3^5/_9+\frac{7x}{18}$.

Jede der beiden Seiten mit dem Generalnenner 36 mult.:

$$15x-72a=128+14x;$$
$$x=72a+128;$$
$$x=8(9a+16).$$

2. Beispiel. $2^1/_3-\frac{21+6x}{20-30x}=\frac{2x+2}{3x-2}+1^5/_6$.

Hier ist zunächst $2^1/_3$ mit $1^5/_6$ zu vereinigen, um nicht zwei Zahlen mit dem zusammengesetzten Generalnenner zu multiplizieren. Ferner sind die in § 25 und § 27 erwähnten Operationen in Anwendung zu bringen, um den kleinsten Generalnenner bestimmen zu können; daher in den Nennern: x voran, Ausheben des gemeinsamen Faktors 2c.

$^1/_2+\frac{21+6x}{10(3x-2)}=\frac{2x+2}{3x-2}$; mit $10(3x-2)$ mult.

$5(3x-2)+21+6x=10(2x+2)$;

$$x=9.$$

B. Die mehrgliedrigen und zusammengesetzten Faktoren sind stets vor der Multiplikation mit dem Generalnenner auszumultiplizieren. Z. B.

$$\frac{2x}{3}\left(\frac{x}{7}-2\right)=150^1/_3-4^4/_5\left(3^1/_2-\frac{x}{14}\right)\left(\frac{5x}{18}+8^3/_4\right);$$

$$\frac{2x^2}{21}-\frac{4x}{3}=150^1/_3-\left(^7/_2-\frac{x}{14}\right)\left(\frac{4x}{3}+42\right);$$

$$\frac{2x^2}{21}-\frac{4x}{3}=150^1/_3-\frac{14x}{3}+\frac{2x^2}{21}-147+3x;\ x=\infty;$$

$$\frac{10x}{3}=3^1/_3+3x;$$

$$10x=10+9x;$$

$$x=10.$$

C. Bevor man mit dem Generalnenner multipliziert, vereinigt man die Glieder, bei welchen dies ohne zusammengesetzteres Rechnen geschehen kann, z. B. die gleichartigen ganzzahligen Glieder und die Brüche mit gleichen Nennern; Brüche mit verschiedenen Nennern jedoch nur dann, wenn hierdurch die Multiplikation mit dem mehrgliedrigen Generalnenner einfacher wird.

1. Beisp. $39a-59x-\frac{157x}{79}=49a-61x;$

$$2x-\frac{157x}{79}=10a;$$

$$158x-157x=790a;$$

$$x=790a.$$

2. Beisp.

$$2^1/_2+\frac{5x+7a}{8x-12a}+\frac{21x+22a}{36a-24x}=\frac{5}{6}+\frac{11x+4a}{8x-12a};$$

$$\frac{5}{3}+\frac{21x+22a}{36a-24x}=\frac{6x-3a}{8x-12a};$$

$$\frac{5}{3}-\frac{21x+22a}{12(2x-3a)}=\frac{6x-3a}{4(2x-3a)};\ \text{mit } 12(2x-3a)\text{ mult.}$$

$$20(2x - 3a) - 21x - 22a = 18x - 9a;$$
$$40x - 60a - 21x - 22a = 18x - 9a;$$
$$x = 73a.$$

D. Ist die Unbekannte auf der linken Seite negativ, so multipliziert man die Gleichung mit -1. Z. B.

$$7x + 11 = 8x - 17;$$
$$-x = -28; \text{ mit } -1 \text{ mult.}$$
$$x = 28.$$

(Oder: Man denkt sich die unbekannten Glieder auf die rechte Seite, die bekannten Glieder auf die linke; daher

$$28 = x$$

und vertauscht die Seiten:

$$x = 28.)$$

E. Sind die Glieder der Gleichung ohne Ausnahme Brüche und befindet sich in jedem Nenner die Unbekannte x in höheren Potenzen als im zugehörigen Nenner, so hat die Gleichung eine Auflösung: $x = \infty$. Z. B.

$$\frac{13x - 19}{x^2 - 4} = \frac{3}{x} + \frac{10}{x + 2}.$$

Hier ist in den Nennern x^2, x^1, x^1, in den Zählern nur x^1, x^0, x^0, folglich ist $x = \infty$.

Bew. Der 1. Bruch durch x gekürzt:

$$\frac{13 - \frac{19}{x}}{x - \frac{4}{x}} = \frac{3}{x} + \frac{10}{x+2}; \; x = \infty \text{ gesetzt:}$$

$$\frac{13 - \frac{19}{\infty}}{\infty - \frac{4}{\infty}} = \frac{3}{\infty} + \frac{10}{\infty + 2}; \text{ d. i. (s. § 4)}$$

$$\frac{13 - 0}{\infty - 0} = 0 + \frac{10}{\infty};$$

$0 = 0 + 0$. Da die linke Seite der rechten gleich ist, so ist auch $x = \infty$ eine Auflösung.

Die gegebene Gleichung ist noch aufzulösen, um die für die Praxis wichtigeren Auflösungen zu erhalten. Mit $x(x+2) \cdot (x-2)$ oder also $x(x^2-4)$ multipliziert:

$$x(13x-19)=3(x^2-4)+10x(x-2);$$
$$13x^2-19x=3x^2-12+10x^2-20x;$$

da sich x^2 hebt, so ist

$x=\infty$ (2. Auflösung); alsdann:

$$-19x=-12-20x;$$
$$x=-12.$$ (3. Auflösung.)

IV. Man kann beide Seiten durch dieselbe Zahl dividieren.

Bew. $\left.\begin{array}{r} bx=a \\ b=b \end{array}\right\}$ Gleiches durch Gleiches dividiert, giebt Gleiches.

$$\frac{bx}{b}=\frac{a}{b}$$

$$x=\frac{a}{b}.$$

A. Mittels dieses Satzes beseitigt man die Koeffizienten der Unbekannten (bringt dieselben auf $+1$).

1. Beisp. $\frac{5x}{3}-1\,^4/_5=3x-1\,^1/_{10}-\frac{7x}{2}$; mit 30 mult.

$$50x-54=90x-33-105x;$$
$$65x=21;$$ durch 65 div.:
$$x={}^{21}/_{65}.$$

2. Beisp. $\frac{3bx-a}{5a-b}-4=0$; mit $5a-b$ mult.

$$3bx-a-20a+4b=0;$$
$$3bx=21a-4b;$$ durch $3b$ div.
$$x=\frac{7a}{b}-1\,^1/_3.$$

B. In jeder Gleichung (von beliebigem Grade) müssen die mit einerlei Potenz von x multiplizierten Glieder in ein Glied zusammengezogen werden, da jede Potenz nur einmal in der entwickelten Gleichung vorkommen darf.

1. Beisp. $ax - b = cx - d;$

$ax - cx = b - d;$ d. i.

$(a - c)x = b - d;$ durch d. Faktor von x div.

$$x = \frac{b - d}{a - c}.$$

2. Beisp. $\frac{3a - 4bx}{4a - 6bx} - \frac{5b - 7ax}{12b + 6ax} = 1^5/_6;$ dafür:

$$\frac{3a - 4bx}{2(2a - 3bx)} - \frac{5b - 7ax}{6(2b + ax)} = {}^{11}/_6;$$

mit $6(2a - 3bx)(2b + ax)$ mult.

$$3(2b + ax)(3a - 4bx) - (2a - 3bx)(5b - 7ax)$$
$$= 11(2a - 3bx)(2b + ax);$$

$18ab + 9a^2x - 24b^2x - 12abx^2 - 10ab + 15b^2x + 14a^2x - 21abx^2 = 44ab - 66b^2x + 22a^2x - 33abx^2;$ $x = \infty$, da sich x^2 hebt. Nun vereinigt man zunächst die Glieder mit a^2x, dann die mit b^2x. Daher

$$a^2x + 57b^2x = 36ab;$$
$$(a^2 + 57b^2)x = 36ab$$
$$x = \frac{36ab}{a^2 + 57b^2}$$

C. Bevor man die Gleichung mit dem Generalnenner multipliziert, sieht man nach, ob sie sich durch eine bekannte Zahl dividieren läßt, um kleinere Zahlen zu erhalten. Z. B.

$\frac{253}{3x - 2a} = \frac{92}{2x - 3b} + \frac{115}{3x + 2c};$ durch 23 div. (s. §3, IV, 18)

$$\frac{11}{3x - 2a} = \frac{4}{2x - 3b} + \frac{5}{3x + 2c};$$

mit $(3x - 2a)(2x - 3b)(3x + 2c)$ mult.

$$11(2x - 3b)(3x + 2c) = 4(3x - 2a)(3x + 2c)$$
$$+ 5(3x - 2a)(2x - 3b);$$

$$66x^2 - 99bx + 44cx - 66bc = 36x^2 - 24ax + 24cx$$
$$- 16ac + 30x^2 - 20ax - 45bx + 30ab;\ x = \infty.$$

$$44ax - 44bx + 20cx = 30ab - 16ac + 66bc; \text{ durch 2 div.}$$

$$22ax - 22bx + 10cx = 15ab - 8ac + 33bc;$$

$$(22a - 22b + 10c)x = 15ab - 8ac + 33bc$$

$$x = \frac{3b(5a + 11c) - 8ac}{2[11(a - b) + 5c]}.$$

D. Befindet sich x nur in einem Zähler oder in einem Faktor, so entfernt man von demselben alle Glieder, Nenner, Faktoren, bis dieser Zähler oder Faktor allein bleibt. Z. B.

$$\frac{(3a - 2b)(5a + 4bx)}{a - 2b} - 16b = 3a;$$

$$\frac{(3a - 2b)(5a + 4bx)}{a - 2b} = 3a + 16b;$$

$$(3a - 2b)(5a + 4bx) = (a - 2b)(3a + 16b);$$

$$5a + 4bx = \frac{(a - 2b)(3a + 16b)}{3a - 2b};$$

$$4bx = \frac{(a - 2b)(3a + 16b)}{3a - 2b} - 5a;$$

$$x = \frac{1}{4b}\left[\frac{(a - 2b)(3a + 16b)}{3a - 2b} - 5a\right].$$

Anmerkung. Die Auflösung ist stets so zu geben, daß sie sich bequem berechnen läßt, wenn die Buchstaben spezielle Zahlen werden. Hiernach ist zunächst auf den Bruch in der Klammer die Partialdivision anzuwenden.

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 10ab - 32b^2 : 3a - 2b = a + 4b - \dfrac{24b^2}{3a - 2b} \\ \underline{3a^2 - 2ab} \qquad\qquad\qquad \text{(siehe § 28, II).} \\ + 12ab - 32b^2 \\ \underline{12ab - 8b^2} \\ - 24b^2 \end{array}$$

$$\text{Daher } x = \frac{1}{4b}\left[a + 4b - \frac{24b^2}{3a - 2b} - 5a\right]$$

$$= \frac{1}{4b}\left(4b - 4a - \frac{24b^2}{3a - 2b}\right) = 1 - \frac{a}{b} - \frac{6b}{3a - 2b}.$$

E. Befindet sich x nur in einem Nenner, so wendet man den Satz an: „Die reziproken Seiten einer Gleichung sind einander gleich". (Bew. Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a}{b} \cdot \frac{bd}{ac} = \frac{c}{d} \cdot \frac{bd}{ac}$, d. i. $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.) Z. B. $\frac{a}{x-a} = \frac{1}{a-4}$, die Seiten reziprok genommen:

$$\frac{x-a}{a} = \frac{a-4}{1};$$
$$x - a = a^2 - 4a;$$
$$x = a^2 - 3a = a(a-3).$$

F. Kann eine Gleichung durch einen unbekannten Ausdruck (z. B. durch x selbst) dividiert werden, ohne daß ein unbekannter Nenner entsteht, so erhält man aus diesem $= 0$ gesetzten unbekannten Divisor eine Auflösung der Gleichung.

1. Beispiel. $a(5x-4)^2 = b(5x-4)$; die Gleichung läßt sich durch $5x-4$ dividieren, ohne einen unbekannten Nenner entstehen zu lassen, folglich muß der unbekannte Divisor

$5x - 4 = 0$ gesetzt, eine Auflösung der Gleichung geben:

$$5x = 4$$
$$x = {}^4/_5.$$

Ist nach der Division durch den unbekannten Ausdruck die Unbekannte noch immer vorhanden, so hat die Gleichung auch noch andere Auflösungen. Die gegebene Gleichung daher durch jenen Divisor $5x - 4$ dividiert:

$$a(5x-4) = b;$$
$$5ax - 4a = b;$$
$$x = \frac{4a+b}{5a} = 0{,}8 + \frac{b}{5a}.$$

Beweis. Man annulliere die gegebene Gleichung und hebe diesen Divisor aus.

$$a(5x-4)^2 - b(5x-4) = 0;$$
$$(5x-4)[a(5x-4) - b] = 0.$$

Diese Gleichung kann nun sowohl durch $5x - 4$ als auch durch $a(5x - 4) - b$ div. werden. In ersterem Falle erhält man: $5x - 4 = 0$ oder $x = 4/5$; in letzterem Falle: $a(5x - 4) - b = 0$ d. i. jene Gleichung $a(5x - 4) = b$ mit der Auflösung $x = 0{,}8 + \frac{b}{5a}$.

2. Beispiel. $ax + bx = cx$; die Gleichung kann durch x dividiert werden, folglich ist $x = 0$.

Probe: $ax + bx - cx = 0$; d. i. $(a + b - c)x = 0$. Durch $(a + b - c)$ divid.: $x = 0$.

3. Beisp. $(2x - a)(3ax + 4b)(5x - 6a + 3b) = 0$.

Die Gleichung kann sowohl durch $2x - a$, als auch durch $3ax + 4b$ und endlich durch $5x - 6a + 3b$ dividiert werden. Folglich:

1) $2x - a = 0$ d. i. $x = \frac{a}{2}$.

2) $3ax + 4b = 0$ oder $x = -\frac{4b}{3a}$.

3) $5x - 6a + 3b = 0$ oder $x = \frac{3(2a - b)}{5}$.

V. Beide Seiten können auf dieselbe Potenz erhoben werden.

Bew. $\left.\begin{array}{r} \sqrt[n]{x} = a \\ n = n \end{array}\right\}$ Gleiches mit Gleichem potenziert giebt Gleiches.

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = a^n \text{ d. i.}$$
$$x = a^n.$$

A. Mittels dieses Satzes beseitigt man Wurzeln, welche die Unbekannte enthalten.

Z. B. $\sqrt{a - 3x} = b$; quadriert:

$$\left(\sqrt{a - 3x}\right)^2 = b^2; \text{ d. i.}$$
$$a - 3x = b^2,$$
$$-3x = b^2 - a; \text{ durch } -3 \text{ dividiert:}$$
$$x = \frac{a^2 - b}{3}.$$

B. Enthält die Gleichung nur eine unbekannte Wurzel, so ist diese zunächst auf einer Seite allein zu behalten und dann erst zu potenzieren. Z. B.

$$2^1/_2 + 1^1/_5 \sqrt[3]{\frac{5x+7}{4x-7}} = 4; \text{ mit 10 mult.}$$

$$25 + 12 \,.\, \sqrt[3]{\frac{5x+7}{4x-7}} = 40;$$

$$12 \sqrt[3]{\frac{5x+7}{4x-7}} = 15; \text{ durch 3 div.}$$

$$4 \sqrt[3]{\frac{5x+7}{4x-7}} = 5;$$

den ganzzahligen Faktor entfernt man nicht, daher sogleich kubiert:

$$64 \cdot \frac{5x+7}{4x-7} = 125;$$

$$64(5x+7) = 125(4x-7);$$

$$320x + 448 = 500x - 875;$$

$$180x = 1323; \text{ durch 9 div.}$$

$$20x = 147;$$

$$x = 7{,}35.$$

2. Beispiel.

$$2x + \sqrt[3]{4x^2(9\sqrt{2} - 2x)} = 3\sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{4x^2(9\sqrt{2} - 2x)} = 3\sqrt{2} - 2x; \text{ kubiert (§ 20)}$$

$$4x^2(9\sqrt{2} - 2x) = 27 \,.\, 2\sqrt{2} - 3 \,.\, 9 \,.\, 2 \,.\, 2x$$

$$+ 3 \,.\, 3\sqrt{2} \,.\, 4x^2 - 8x^3;$$

$$36\sqrt{2} \,.\, x^2 - 8x^3 = 54\sqrt{2} - 108x + 36\sqrt{2} \,.\, x^2 - 8x^3;$$

$$108x = 54\sqrt{2};$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Anmerkung. Enthält die Gleichung Wurzeln, so können nicht immer alle Wurzelwerte der Gleichung genügen. Ist z. B. $\sqrt{x} = -5$ gegeben, so giebt das Quadrat $x = +25$. Setzt man als Probe den Wert 25 in die gegebene Gleichung, so erhält man: $\sqrt{25} = -5$, d. i. vollständig $\pm 5 = -5$. Offenbar kann nur der eine Wurzelwert richtig sein.

C. Die Gleichung enthalte zwei unbekannte Quadratwurzeln.

1. Beispiel.

$$5\sqrt{2x+4} - \sqrt{x} = 10;$$ Die zusammengesetztere Wurzel behalte auf einer Seite und quadriere alsdann.

$$(5\sqrt{2x+4})^2 = (\sqrt{x}+10)^2;$$

$$25(2x+4) = x + 20\sqrt{x} + 100;$$

$$50x = x + 20\sqrt{x};$$

$$49x = 20\sqrt{x};$$ quadriert (s. B)

$$2401x^2 = 400x;$$ durch x div., folglich $x = 0$ (s. IV, F).

$$2401x = 400;$$

$$x = \frac{400}{2401} = 0{,}166597.$$ (Statt der unbequemen gemeinen Brüche besser Dezimalbrüche.)

2. Beispiel. $3 = 2\sqrt{2x+13} - \sqrt{8x+7}$. Hat das unbekannte Glied unter den beiden Wurzeln gleiche Vorzeichen (wie es hier der Fall ist: $2x$ und $8x$ positiv), so behalte eine Wurzel allein auf einer Seite.

$$3 + \sqrt{8x+7} = 2\sqrt{2x+13};$$ quadriert:

$$9 + 6\sqrt{8x+7} + (8x+7) = 4.(2x+13);$$ d. i.

$$16 + 6\sqrt{8x+7} = 52;$$

$$6\sqrt{8x+7} = 36;$$ durch 6 div.

$$\sqrt{8x+7} = 6;$$ quadriert (s. B)

$$8x + 7 = 36$$

$$x = 3^5/_8.$$

3. Beispiel.

$\sqrt{11-4x}=3-2\sqrt{x-\frac{1}{2}}$; hier läßt sich der Bruch $\frac{1}{2}$ beseitigen:

$\sqrt{11-4x}=3-\sqrt{4x-2}$. Hat das unbekannte Glied unter den beiden Wurzeln verschiedene Vorzeichen (hier $-4x$ und $+4x$), so setzt man beide Wurzeln auf eine Seite:

$$\sqrt{11-4x}+\sqrt{4x-2}=3;\ \text{quadriert:}$$

$$(\sqrt{11-4x})^2+2.\sqrt{11-4x}.\sqrt{4x-2}+(\sqrt{4x-2})^2=9;$$

d. i. $11-4x+2\sqrt{(11-4x)(4x-2)}+4x-2=9$;

$2\sqrt{(11-4x)(4x-2)}=0$; durch 2 div., dann quadriert: $(11-4x)(4x-2)=0$. Nach dem 3. Beisp. in IV, F:

1) $11-4x=0$ oder $x=2\frac{3}{4}$.
2) $4x-2=0$ oder $x=\frac{1}{2}$.

D. Enthält die Gleichung zwei unbekannte Kubikwurzeln, so sind diese allein auf einer Seite zu behalten und die Gleichung zu kubieren. Nach § 20 geben die beiden Wurzeln 4 Glieder. Hat man dann aus den beiden Mittelgliedern den gemeinsamen Faktor ausgehoben, so sind die mit diesem Faktor multiplizierten Wurzeln denen in der Aufgabe gleich und man kann daher auch für dieselben den durch die Aufgabe gegebenen Wert einsetzen. Z. B.

$2\sqrt[3]{x+9}=\sqrt[3]{8x-53}+5$; die Wurzeln auf eine Seite:

$$2\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{8x-53}=5;\ \text{kubiert:}$$

$$\left(2\sqrt[3]{x+9}\right)^3-3.\left(2\sqrt[3]{x+9}\right)^2.\sqrt[3]{8x-53}+3.2\sqrt[3]{x+9}$$
$$.\left(\sqrt[3]{8x-53}\right)^2-\left(\sqrt[3]{8x-53}\right)^3=125;$$

$$8(x+9)-3.2\sqrt[3]{x+9}.\sqrt[3]{8x-53}$$
$$.\left(2\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{8x-53}\right)-(8x-53)=125.$$

Da nun die beiden Wurzeln in der 2. Klammer den Wert 5 haben (siehe Seite 140, 5. Zeile von unten), so geht vorstehende Gleichung über in:

$$8x + 72 - 6\sqrt[3]{(x+9)(8x-53)}.5 - 8x + 53 = 125;$$

$$\text{d. i.} \quad -30\sqrt[3]{(x+9)(8x-53)} = 0;$$

durch — 30 div. und dann kubiert:

$$(x+9)(8x-53) = 0,$$

folglich (s. IV, F):

1) $x + 9 = 0;\ x = -9.$

2) $8x - 53 = 0;\ x = 6^5/_8.$

VI. **Aus beiden Seiten kann man dieselbe Wurzel ziehen.**

Bew. $\left.\begin{array}{r} x^n = a \\ n = n \end{array}\right\}$ Gleiches mit Gleichem radiziert giebt Gleiches.

$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \text{ d. i. } x = \sqrt[n]{a}.$$

A. Durch diesen Satz wird die n. Potenz der Unbekannten auf die 1. zurückgeführt.

1. Beispiel. $x^5 = 32$; die 5. Wurzel ausgezogen:

$$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32};$$
$$x = 2.$$

2. Beispiel. $\frac{5x^3 - 4}{6 - 7x^3} - \frac{9x^3 - 2}{x^3 + 1} = 1^1/_3;$

mit $3(6 - 7x^3)(x^3 + 1)$ mult.

$$3(5x^3 - 4)(x^3 + 1) - 3(9x^3 - 2)(6 - 7x^3)$$
$$= 4(6 - 7x^3)(x^3 + 1);$$

$$15x^6 + 3x^3 - 12 + 189x^6 - 204x^3 + 36$$
$$= -28x^6 - 4x^3 + 24;$$

$232x^6 - 197x^3 = 0$; durch x^3 div., folglich $x^3 = 0$;

und $x = 0$.

Nach der Division:

$$232x^3 - 197 = 0;$$

$$x^3 = \frac{197}{232};$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{197}{232}}$$

$$x = 0{,}94696;$$

$$\begin{aligned} \lg 197 &= 2{,}29447 \\ \lg 232 &= 2{,}36549 \text{ subt.} \\ \hline & {}_2 9{,}92898 : 3 \\ \lg x &= 9{,}97633 \end{aligned}$$

B. Um die Gleichung vollständig zu lösen, ist zu berücksichtigen, daß die n. Wurzel n verschiedene Werte hat.

Beispiel. $\frac{3x^4 - 5}{8x^4 - 18} = \frac{7 - 5x^2}{9 + 6x^2} - \frac{1}{2};$

$$\frac{3x^4 - 5}{2(4x^4 - 9)} = \frac{7 - 5x^2}{3(2x^2 + 3)} - \frac{1}{2}; \text{ es ist}$$

$(2x^2 + 3)(2x^2 - 3) = 4x^4 - 9$, daher mit $6(4x^4 - 9)$ mult.

$$3(3x^4 - 5) = 2(7 - 5x^2)(2x^2 - 3) - 3(4x^4 - 9);$$

$$9x^4 - 15 = -20x^4 + 58x^2 - 42 - 12x^4 + 27;$$

$41x^4 - 58x^2 = 0$; durch x^2 div. $(x = 0)$

$$41x^2 - 58 = 0;$$

$$41x^2 = 58;$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{58}{41}};$$

$$x = \pm 1{,}1894.$$

C. Ist x nur in der Basis einer Potenz enthalten, so ist diese Potenz allein auf einer Seite zu behalten und auch von allen äußeren Faktoren und Divisoren zu befreien. Dann erst sind die Seiten zu radizieren. Z. B.

$$2\tfrac{4}{5} - 2\tfrac{1}{2}\left(\frac{4x^2 - 9}{3x^2 + 7}\right)^2 = 1\tfrac{14}{15}; \text{ mit 30 mult.}$$

$$84 - 75\left(\frac{4x^2 - 9}{3x^2 + 7}\right)^2 = 58;$$

$$75\left(\frac{4x^2 - 9}{3x^2 + 7}\right)^2 = 26;$$

$$\left(\frac{4x^2 - 9}{3x^2 + 7}\right)^2 = \tfrac{26}{75}; \sqrt{}:$$

$$\frac{4x^2 - 9}{3x^2 + 7} = \pm 0{,}588784.$$

Folglich:

1) $\frac{4x^2-9}{3x^2+7}=0{,}588784;$

$$4x^2-9=1{,}766352\,x^2+4{,}121488;$$
$$2{,}233648\,x^2=13{,}121488;$$
$$x^2=\frac{13{,}121488}{2{,}233648}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{13{,}121488}{2{,}233648}};$$
$$x=\pm\,2{,}4238.$$

2) $\frac{4x^2-9}{3x^2+7}=-0{,}588784;$

u. s. w.

$$x=\pm\,0{,}91980.$$

$$\begin{aligned}\lg 13{,}12\ldots &= 1{,}11798\\ \lg 2{,}23\ldots &= 0{,}34901\\ &\overline{0{,}76897}:2\\ \lg x &= \overline{0{,}38449}.\end{aligned}$$

D. Übungsbeispiele:

1. Beisp. $8\sqrt[7]{5x^2}=3\sqrt[4]{11x^3};$

$$8\sqrt[7]{5}\,.\sqrt[7]{x^2}=3\sqrt[4]{11}\,.\sqrt[4]{x^3};$$

$$\frac{8\sqrt[7]{5}}{3\sqrt[4]{11}}=\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[7]{x^2}};$$

$$\frac{8\sqrt[7]{5}}{3\sqrt[4]{11}}=x^{3/4-2/7};$$

$$\sqrt[28]{x^{13}}=\frac{8\sqrt[7]{5}}{3\sqrt[4]{11}};$$

$$x=\sqrt[13]{\left(\frac{8\sqrt[7]{5}}{3\sqrt[4]{11}}\right)^{28}}$$

$$x=\sqrt[13]{\left(\frac{8}{3}\right)^{28}\cdot\frac{5^4}{11^7}};$$

$$\lg x = \frac{28\,(\lg 8 - \lg 3) + 4 \lg 5 + 7 \text{ d. E.} \lg 11}{13}$$
$$\lg x = 9{,}80256$$
$$x = 0{,}63469.$$

2. Bsp. $^1/_3 \left(\frac{5\,x - 1}{x + 4}\right)^3 + 3 \left(\frac{x + 4}{5\,x - 1}\right)^3 = 2$; mit 3 mult.

$$\left(\frac{5\,x - 1}{x + 4}\right)^3 + 9 \left(\frac{x + 4}{5\,x - 1}\right)^3 = 6.$$

Es sei $\left(\frac{5\,x - 1}{x + 4}\right)^3 = y$, folglich ist der reziproke Wert $\left(\frac{x + 4}{5\,x - 1}\right)^3 = \frac{1}{y}$. Diese Werte eingesetzt:

$$y + \frac{9}{y} = 6;$$
$$y^2 - 6\,y + 9 = 0; \text{ d. i. (s. § 18, II)}$$
$$(y - 3)^2 = 0; \ \sqrt{\ }:$$
$$y - 3 = 0$$
$$y = 3; \text{ d. i. (s. ob.)}$$
$$\left(\frac{5\,x - 1}{x + 4}\right)^3 = 3; \ \sqrt[3]{\ }:$$
$$\frac{5\,x - 1}{x + 4} = 1{,}44225;$$
$$5\,x - 1 = 1{,}44225\,x + 5{,}769;$$
$$3{,}55775\,x = 6{,}769;$$
$$x = 1{,}9026.$$

3. Beisp. $123\,(11\,x - 3)^7 = 17\,(14\,x + 5)^7$; stets durch den kleineren Koeff. div.

$$^{123}/_{17} \cdot (11\,x - 3)^7 = (14\,x + 15)^7; \ \sqrt[7]{\ }:$$
$$\sqrt[7]{^{123}/_{17}} \cdot (11\,x - 3) = 14\,x + 15;$$
$$1{,}3267\,(11\,x - 3) = 14\,x + 15;$$
$$x = 31{,}97.$$

4. Beisp. $$ax^6 = b\,(c - x^3)^2;$$

$$\frac{a}{b}x^6 = (c - x^3)^2;\ \sqrt{\ }:$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot x^3 = c - x^3;$$

$$\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)x^3 = c$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}}}.$$

VII. Man kann von beiden Seiten denselben (vulgären) Logarithmus nehmen.

Bew. $\left.\begin{array}{r} a^x = b \\ 10 = 10 \end{array}\right\}$ Gleiches mit Gleichem logarithmiert giebt Gleiches.

$^{10}\lg a^x = {}^{10}\lg b$ oder $\lg a^x = \lg b$, daher $x \lg a = \lg b$,

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$ (s. § 33, VIII).

Mittels dieses Satzes berechnet man unbekannte Exponenten.

A. Sind die Basen der Potenzen oder Wurzeln gleich, so müssen auch die Exponenten gleich sein.

Bew. $a^n = a^r$, folglich $\lg(a^n) = \lg(a^r)$, d. i. $n \lg a = r \lg a$, folglich $n = r$.

In diesem Falle bedarf es also keiner logarithmischen Tafeln.

1. Beisp. $a^2 \sqrt[4]{a^{5x-3}} = a^{\frac{7x}{6}} \sqrt[3]{a^{\frac{2x}{9}}}$; d. i.

$$a^2 . a^{\frac{5x-3}{4}} = a^{\frac{7x}{6}} . a^{\frac{2x}{27}};$$

$$a^{2 + \frac{5x-3}{4}} = a^{\frac{7x}{6} + \frac{2x}{27}};$$ da die Basen (a)

gleich sind: $2 + \frac{5x-3}{4} = \frac{7x}{6} + \frac{2x}{27}$; mit 108 mult. rc.

$$x = -135.$$

2. Beisp. $\sqrt[3]{243} \cdot \sqrt{27^{x-3}} = 81 \sqrt[5]{729^{4-11x}}$; hier lassen sich die Basen gleich machen:

$$\sqrt[3]{3^5} . \sqrt{(3^3)^{x-3}} = 3^4 . \sqrt[5]{(3^6)^{4-11x}};$$

$$3^{\frac{5}{3}} . 3^{\frac{3x-9}{2}} = 3^4 . 3^{\frac{24-66x}{5}};$$

$$3^{\frac{5}{3}+\frac{3x}{2}-\frac{9}{2}} = 3^{4+\frac{24}{5}-\frac{66x}{5}}; \text{ folglich}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{3x}{2} - \frac{9}{2} = 4 + \frac{24}{5} - \frac{66x}{5};$$

$$50 + 45x - 135 = 120 + 144 - 396x;$$

$$x = \frac{349}{441}.$$

B. Verschiedene Basen. Hier ist die Lösung nur mittels der logarithmischen Tafeln möglich.

1. Beisp. $7 . 5^{\frac{x}{2}-1} = \sqrt[3]{35^{x+1}}$; von beiden Seiten den lg genommen:

$$\lg\left(7 . 5^{\frac{x}{2}-1}\right) = \lg \sqrt[3]{35^{x+1}}; \text{ d. i.}$$

$$\lg 7 + \lg 5^{\frac{x}{2}-1} = \frac{\lg\left(35^{x+1}\right)}{3};$$

$$\lg 7 + \left(\frac{x}{2} - 1\right) \lg 5 = \frac{(x+1)\lg 35}{3};$$

$$\lg 7 + \frac{x \lg 5}{2} - \lg 5 = \frac{x \lg 35 + \lg 35}{3};$$

$$6 \lg 7 + 3x \lg 5 - 6 \lg 5 = 2x \lg 35 + 2 \lg 35;$$

$$(2 \lg 35 - 3 \lg 5)\, x = 6 \lg 7 - 6 \lg 5 - 2 \lg 35;$$

$x = \frac{6 \lg 7 - 6 \lg 5 - 2 \lg 35}{2 \lg 35 - 3 \lg 5}$. Entweder setzt man jetzt schon die Logarithmen ein, um x unmittelbar zu berechnen, oder man verfährt in folgender Weise. Da $\lg 35 = \lg(5.7) = \lg 5 + \lg 7$, so ist

$$x = \frac{6\lg 7 - 6\lg 5 - 2\lg 5 - 2\lg 7}{2\lg 5 + 2\lg 7 - 3\lg 5} = \frac{4\lg 7 - 8\lg 5}{2\lg 7 - \lg 5}.$$

Die Partialdivision giebt nun:

$$4\lg 7 - 8\lg 5 : 2\lg 7 - \lg 5 = 2 - \frac{6\lg 5}{2\lg 7 - \lg 5}.$$
$$\underline{4\lg 7 - 2\lg 5}$$
$$-6\lg 5.$$ Daher:

$$x = 2 - \frac{\lg 5^6}{\lg 7^2 - \lg 5}$$ (s. § 33, VIII, Zus.) $$= 2 - \frac{\lg 15625}{\lg(49:5)}$$
$$= 2 - \frac{\lg 15625}{\lg 9{,}8} = 2 - \frac{4{,}19382}{0{,}99123} = -2{,}23094.$$

2. Beisp. $x^{\lg x} = 123$; den Log. genommen:

$\lg x . \lg x = \lg 123$;

$(\lg x)^2 = 2{,}08991$; (Man schreibt auch $\lg^2 x$; $\lg x^2$ würde $2\lg x$ bedeuten!)

$\lg x = \pm\sqrt{2{,}08991} = \pm 1{,}44565$;

daher 1) $\lg x = 1{,}44565$; folglich $x = 27{,}903$.

2) $\lg x = -1{,}44565 = (10 - 1{,}44565) - 10$ (s. § 40, B, 3. Beisp.) $= 8{,}55435 - 10$; daher $x = 0{,}035839$.

§ 44. Proportionslehre.

I. Verhältnis. Über die Entstehung des Verhältnisses und der Proportion ist § 2, IV, 2, c nachzulesen.

A. Bei einem Verhältnis $a:b$ unterscheidet man: a als Vorderglied, b Hinterglied. Die unbenannte Zahl, welche dem Verhältnis gleich ist (s. § 2, IV), nennt man Exponent des Verhältnisses; in 12 ℳ : 8 ℳ ist $^{12}/_8 = 1^1/_2$ der Exponent; in 60 cm : 2 m ist er, da die beiden Verhältnis-glieder gleichbenannt sein müssen, also 60 cm : 200 cm gedacht werden muß, $= {}^{60}/_{200} = {}^{3}/_{10}$. 5 : 8 (der Exponent < 1) ist ein steigendes, 3 : 2 (der Exp. > 1) ein fallendes Verhältnis. 60 k : 20 k und 21 ℳ : 7 ℳ sind gleiche Verhältnisse, da sie gleiche Exponenten (3) haben.

B. Es ist $18 : 12 = {}^{18}/_{12} = {}^{3}/_{2} = 3 : 2$. Verhältnisse können also gekürzt und erweitert werden. Beispiel. Der Besitz des N verhalte sich zu dem des P wie $3^{3}/_{4} : 5^{5}/_{6}$ (lies $3^{3}/_{4}$ zu $5^{5}/_{6}$), folglich auch (mit 12 erweitert) wie 45 : 70, also auch (durch 5 gekürzt) wie 9 : 14. In dieser Form, ausgedrückt durch kleinste ganze Zahlen, ist das Verhältnis offenbar weit übersichtlicher. Zuweilen ist es noch praktischer, die kleinere Verhältniszahl auf 1 zu bringen. Hier also noch durch 9 gekürzt: $1 : 1^{5}/_{9}$. Man weiß jetzt, daß P $1^{5}/_{9}$mal so viel hat als N.

C. Wird N nmal so groß, während das von N abhängige P gleichfalls nmal so groß wird, so stehen N und P in direktem (oder geradem) Verhältnis, z. B. Gewicht und Preis einer Ware. Wird dagegen N nmal so groß, während das von N abhängige P nmal so klein wird, so stehen N und P in indirektem (oder umgekehrtem, reziprokem) Verhältnis. Verhält sich z. B. die Zahl der Arbeiter wie 3 : 5, so verhält sich die Zeit, welche sie zu einer Arbeit brauchen, umgekehrt wie 3 : 5, also direkt wie 5 : 3.

Allgemein: Verhält sich N zu P „umgekehrt wie a : b“, so verhalten sie sich direkt wie b : a, daher auch (durch a b gekürzt) direkt wie $\frac{b}{ab} : \frac{a}{ab}$, d. i. direkt wie $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$. Verhalten sich also 2 Größen umgekehrt wie a : b, so verhalten sie sich direkt wie die reziproken Verhältniszahlen $\left(\text{wie } \frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right)$.

II. Die Proportion (s. § 2, IV, c) ist nur eine besondere Form einer algebraischen Gleichung, denn es muß doch gleichgültig sein, ob eine Gleichung die Form $a : b = c : x$, oder z. B. $a : b = c + x$ hat.

1) Die Proportion $a:b = c:d$, die selbstverständlich auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben werden kann, wird gewöhnlich gelesen: „a verhält sich zu b wie c zu d". Sie besteht aus 2 Verhältnissen $a:b$ und $c:d$, die offenbar gleich sein, d. h. gleiche Exponenten haben müssen, da sonst das Gleichheitszeichen keinen Sinn hätte. Die 4 Glieder der Proportion werden auch Proportionalen (Proportionalzahlen, Proportionallinien ꝛc.) genannt. Da a das erste Glied (des 1. Verhältnisses), c gleichfalls das erste Glied (des 2. V.) ist, so nennt man a und c, daher auch b und d gleichnamige Glieder, a und d, oder b und c ungleichnamige. Letztere teilt man ein in äußere Glieder (a und d) und in innere oder mittlere (b und c).

2) Ist b nicht $= c$, so ist die Prop. eine diskrete. Ist $b = c$ (z. B. $4:6 = 6:9$), so nennt man die Prop. eine stetige (oder kontinuierliche) und das Mittelglied (6 in der letzten Prop., oder m in $a:m = m:d$) die „mittlere Proportionale" oder das „geometrische Mittel" zwischen a und d.

3) Verhält sich $A:B:C:D = a:b:c:d$, so nennt man diese Form „fortlaufende Proportion" und versteht dieselbe so, daß $A:B = a:b$, $B:C = b:c$, $C:D = c:d$, folglich auch z. B. $D:B = d:b$.

Aufgabe. Es verhalte sich A:B wie 8:9, B:C wie 24:25, C:D wie 10:7. Wie verhalten sich $A:B:C:D$?

Auflösung. $A:B:C:D$

$$\begin{array}{l} 8:9 \\ \quad 24:25 \end{array}$$

Man bringe zunächst 9 und 24 auf das kleinste gemeinsame Vielfache 72, erweitere daher das 1. Verhältnis mit 8, das 2. mit 3:

$$\begin{array}{l} 64:72:75 \\ \qquad\quad 10:7. \end{array}$$

Hierauf ist 75 und 10 auf das kleinste gem. Vielfache

150 zu bringen, daher die drei ersten Verhältniszahlen mit 2, das letzte Verhältnis mit 15 zu erweitern:

$$128:144:150:105 = A:B:C:D.$$

Z. B. ist $B:D = 144:105 = 48:35$.

III. Lehrsätze.

1) Das Produkt der inneren Glieder ist = dem Produkt der äußeren.

Bew. Ist $a:b = c:d$ gegeben, d. i. auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ergiebt sich durch Multiplikation mit bd: $\quad ad = bc$.

Mittels dieses Satzes berechnet man in der Prop. enthaltene Unbekannte.

1. Beispiel. $8:9 = 10:x$; folglich $8 . x = 9 . 10$;

$$x = \frac{9 . 10}{8} = 11^1/_4.$$

Das 4. Glied (welches man bei der Lösung von Aufgaben gewöhnlich unbekannt setzt) ist also = dem Produkt der Mittelglieder dividiert durch das 1. Glied.

2. Beispiel.

$$x + 5 : 3x - 7 = 2x + 1 : 6x - 11;$$
$$(x + 5)(6x - 11) = (3x - 7)(2x + 1);$$
$$6x^2 + 19x - 55 = 6x^2 - 11x - 7;\ (x = \infty)$$
$$30x = 48;$$
$$x = 1^3/_5.$$

3. Beisp. $a:x = x:b$;

$$x^2 = ab$$

$x = \sqrt{ab}$. Das geometrische Mittel zwischen zwei Zahlen ist also die Quadratwurzel aus ihrem Produkt. Umgekehrt ist $\sqrt{m . n}$ das geometrische Mittel zwischen m und n und es muß daher:

$$m : \sqrt{mn} = \sqrt{mn} : n \text{ sein.}$$

2) Die Proportion ist eine richtige, wenn entweder die Exponenten beider Verhältnisse einander gleich sind (s. II, 1), oder wenn das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren ist.

3) Aus zwei gleichen Produkten kann man eine Proportion bilden, wenn man die Faktoren des einen Produkts auf die äußeren, die des andern auf die inneren Glieder verteilt. Z. B. kann man aus $2ax = 3bc$ die Prop. $2a : 3b = c : x$ bilden.

4) Eine Proportion bleibt eine richtige, wenn man die inneren oder auch die äußeren Glieder gegenseitig vertauscht. Aus $a : b = c : d$ folgt z. B. $a : c = b : d$ oder $d : b = c : a$; denn immer bleibt $ad = bc$. Daher folgt auch aus II, 3 z. B. $A : a = D : d$.

5) Jedes äußere Glied einer Proportion kann mit einem innern erweitert oder gekürzt werden. Denn ist die Proportion $a : i = i' : a'$, so ist auch $aa' = ii'$. Wird nun links eins von den äußeren Gliedern dividiert, so muß auch rechts eins von den inneren Gliedern dividiert werden. Z. B.

$40 : 35 = 36 : x$; das 1. und 2. Glied durch 5, dann das 1. und 3. Glied durch 4 gekürzt:

$2 : 7 = 9 : x$.

6) $\left.\begin{array}{l}\text{Aus } a : b = c : d \\ \text{und } a : b = e : f\end{array}\right\}$ folgt: $c : d = e : f$.

7) Die beiden ersten Glieder einer Proportion können durch Addition und Subtraktion beliebig verändert werden, wenn dasselbe in gleicher Weise mit den beiden letzten Gliedern geschieht (die sogen. korrespondierende Addition). Ist z. B. $a : b = c : d$ gegeben und ändert man jedes Verhältnis in folgender Weise um: „1. + 1. — 2. Glied : 2. Glied — 1. Glied“, so entsteht:

$$a + a - b : b - a = c + c - d : d - c, \text{ d. i.}$$
$$2a - b : b - a = 2c - d : d - c.$$

Bew. $ae : a = be : b$ ist eine stets richtige Proportion, da der Exponent in beiden Verhältnissen e ist. Jene Veränderung auf diese Proportion angewandt, giebt:

$$ae + ae - a : a - ae = be + be - b : b - be, \text{ d. i.}$$
$$a(e + e - 1) : a(1 - e) = b(e + e - 1) : b(1 - e).$$

In beiden Verhältnissen ist der Exponent $\frac{e+e-1}{1-e}$, folglich ist die veränderte Proportion richtig.

Zusatz. Statt $a:b=c:d$ hätte man auch $a:c=b:d$ setzen können (s. 4. Satz); folglich kann jene Veränderung auch mit a und c einerseits und b und d anderseits, d. i. mit dem 1. und 3. Gliede und in gleicher Weise mit dem 2. und 4. Gliede vorgenommen werden.

8) Bisher teilte man die Verhältnisse und Proportionen in arithmetische und geometrische ein. Bei ersteren war die Differenz charakteristisch (z. B. $7-4=20-17$), bei letzteren der Quotient (z. B. $12:4=21:7$). Der Zweck der Einführung der arithmetischen Proportion war einzig und allein der, das arithmetische Mittel (die Durchschnittszahl) von zwei verschiedenen Zahlen zu finden. Dies kann aber viel einfacher und allgemeiner in folgender Weise geschehen.

Aufgabe. Es seien die Größen a, b, c, d gegeben und es soll das arithmetische Mittel derselben gesucht werden, d. h. eine Zahl, die, 4mal als Summand gesetzt, dieselbe Summe giebt, wie die der vier gegebenen Größen. Auflösung. Ist das gesuchte arithmetische Mittel m, so soll also $m+m+m+m=a+b+c+d$

d. i. $4m=a+b+c+d$ sein. Folglich ist

$$m=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Allgemein: Das arithmetische Mittel von n Zahlen ist = der Summe der Zahlen dividiert durch ihre Anzahl.

Beim geometrischen Mittel tritt an Stelle der Summe das Produkt. Ist z. B. m das geometrische Mittel zwischen den Zahlen a, b und c, so ist $m.m.m=a.b.c$, daher $m=\sqrt[3]{abc}$. (Vergl. III, 1, 3. Beisp.) Die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen werden durch diese einfache Ableitung vollkommen hinfällig, daher kann es für uns nur die geometrischen geben, die auch allein der Gegenstand des vorliegenden § sind.

IV. 1) Die **zusammengesetzte Proportion** entsteht durch Vereinigung mehrerer Proportionen in eine. Hier nennt man, abweichend von II, 1, diejenigen Glieder, welche in sämtlichen Proportionen in Bezug auf ein bestimmtes Glied dieselbe Stellung haben, **gleichnamig**, daher ist z. B. das 3. Glied einer Proportion nur gleichnamig mit jedem 3. Gliede einer andern Proportion.

2) Mehrere Proportionen können **stets** durch Multiplikation und Division der gleichnamigen Glieder vereinigt werden. Denn ist $a:b = c:d$
$e:f = g:h$ gegeben, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
$\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,

folglich durch Multipl.: $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$ d. i. $ae:bf = cg:dh$.

1. **Zusatz.** Aus

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ \underline{b : e = f : g} \text{ folgt daher:} \\ ab : be = cf : dg, \end{array}$$

d. i. (s. I, B) $a:e = cf:dg$, wofür man auch schreibt:

$$a:e = \begin{cases} c:d \\ f:g \end{cases} \text{ und sagt:}$$

Das Verhältnis $a:e$ ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen $c:d$ und $f:g$.

2. **Zus.** $\left.\begin{array}{r} a:b = c:u \\ d:e = u:v \\ f:g = v:x \end{array}\right\}$ geht in gleicher Weise über in $\left.\begin{array}{r} a:b \\ d:e \\ f:g \end{array}\right\} = c:x.$

3) Durch Addition und Subtraktion der gleichnamigen Glieder können mehrere Proportionen nur dann vereinigt werden, wenn alle Verhältnisse denselben Exponent haben.

Bew. Aus den gegebenen Proportionen $ae:a = be:b$
$cf:c = df:d$
entstände durch Addition $ae + cf : a + c = be + df : b + d$ und wenn in dieser Prop. die äußeren und inneren Glieder

multipliziert werden (s. III, 2), ergiebt sich: $(bc - ad)f = (bc - ad)e$. Diese Gleichung kann aber nur richtig sein, wenn $f = e$ ist, d. i. wenn alle Verhältnisse der beiden gegebenen Proportionen denselben Exponent haben. Beispiel:

$$\begin{array}{l} 20:10 = 26:13 \\ 12:\ \ 6 = 14:\ \ 7. \\ \hline \end{array}$$

Da der Exponent aller Verhältnisse 2 ist, so können die Proportionen durch Addition oder Subtraktion vereinigt werden, z. B. $32:16 = 40:20$.

Zusatz. Ist $a:b = m:n$

$c:d = m:n$ gegeben, so können diese Proportionen subtrahiert werden, da beide den Exponent $\frac{m}{n}$ haben. Um aber den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, hat man zuvor das 2. Verhältnis der 1. Proportion mit 2 zu erweitern.

$$\begin{array}{rcl} a:b & = & 2m:2n \\ c:d & = & m:n \\ \hline a - c : b - d & = & m:n. \end{array}$$

4) Sind etliche Verhältnisse einander gleich, z. B. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3$, so verhalten sich die beliebig durch Addition oder Subtraktion vereinigten ersten Glieder zu den in gleicher Weise vereinigten zweiten Glieder wie das 1. Glied irgend eines Verhältnisses zu dem 2. desselben. Z. B.

$$a_1 + a_2 - a_3 : b_1 + b_2 - b_3 = a_2 : b_2.$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Bew.} & a_1:b_1 & = & a_2 : b_2 \\ & a_2:b_2 & = & a_2 : b_2 \\ \hline \text{add.} & a_1 + a_2 : b_1 + b_2 & = & 2a_2 + 2b_2; \\ & a_3:b_3 & = & a_2 : b_2 \ \text{subt.:} \\ \hline & a_1 + a_2 - a_3 : b_1 + b_2 - b_3 & = & a_2 : b_2. \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{s. d. vorhergehend. Satz.}$$

5) Werden die Glieder einer fortlaufenden Proportion auf der linken Seite beliebig durch Addition und Subtraktion verbunden, alsdann auf der rechten Seite in gleicher Weise,

so verhalten sich die beiden Resultate wie jedes Glied links zum entsprechenden rechts. Ist z. B.

$$A : B : C : D : E = a : b : c : d : e$$

gegeben, so ist auch

$$A - B + C + D - E : a - b + c + d - e = D : d.$$

Bew.

$$\begin{array}{ll}
A:a \quad = D : d & \\
C:c \quad = D : d & B:b = D : d \\
D:d \quad = D : d & E:e = D : d \\
\hline
A+C+D:a+c+d = 3D:3d & B+E:b+e = 2D:2d. \\
B+E:b+e \quad = 2D:2d \text{ subt.} & \\
\hline
A-B+C+D-E:a-b+c+d-e = D:d. &
\end{array}$$

§ 45. Angewandte binomische Gleichung und Proportion.

Um eine Aufgabe (z. B. eine in Worte gekleidete Aufgabe, Textaufgabe) durch eine Gleichung lösen zu können, setzt man die gesuchte Größe = einem der letzten Buchstaben des Alphabetes (= x). Alsdann bildet man aus den Beziehungen der in der Aufgabe gegebenen (bekannten) Größen zu der Unbekannten zwei mathematische Ausdrücke, die dem Werte nach gleich, in analytischer Beziehung (also hinsichtlich des Rechnens) jedoch verschieden sind. Diese Werte, einander gleich gesetzt, geben die Fundamentalgleichung (angesetzte Gleichung), aus welcher nach den Regeln der letzten §§ die Unbekannte berechnet wird.

1. Aufgabe. Ein Vater sagt zu seinem Sohn: Vor 4 Jahren war ich 9mal so alt als du, nach 8 Jahren werde ich nur noch 3mal so alt sein. Wie alt ist jetzt der Vater und der Sohn?

Auflösung. Der Sohn sei jetzt x Jahre alt, folglich war er vor 4 Jahren $x - 4$ Jahre, der Vater $9(x - 4) = 9x - 36$ Jahre alt, mithin ist jetzt der Vater $9x - 36 + 4 = 9x - 32$ Jahre alt. Nach 8 Jahren ist der Sohn $x + 8$, der Vater $3(x + 8) = 3x + 24$ Jahre, der Vater jetzt $3x + 24 - 8 = 3x + 16$ Jahre. Da der Vater jetzt sowohl $9x - 32$, als auch $3x + 16$ Jahre alt ist, so hat man die Gleichung:

$$9x - 32 = 3x + 16;$$
$$6x = 48$$
$$x = 8$$ (Jahre das Alter des Sohnes, wie angenommen). Das jetzige Alter des Vaters z. B.

$$3x + 16 = 3 . 8 + 16 = 40 \text{ Jahre.}$$

2. Aufgabe. Ich kenne einen Bruch, dessen Zähler um 8 kleiner ist als der Nenner. Vermehre ich sowohl den Zähler als auch den Nenner um 9, so erhält der Bruch den Wert $^2/_3$. Welcher Bruch ist es?

Auflösung. Der Nenner des Bruches sei x, folglich ist der Zähler $x - 8$, der Bruch daher $\frac{x-8}{x}$, der veränderte Bruch (s. Aufgabe) $= \frac{x - 8 + 9}{x + 9} = \frac{x+1}{x+9}$. Da dieser den Wert $^2/_3$ haben soll, so ist

$$\frac{x+1}{x+9} = {}^2/_3; \text{ aufgelöst:}$$
$$3(x+1) = 2(x+9);$$
$$x = 15 \text{ (der Nenner).}$$

Der Zähler $= x - 8 = 15 - 8 = 7$, der Bruch also $^7/_{15}$.

3. Aufgabe. Ein Gefäß kann durch zwei Röhren a und b gefüllt werden. Läßt man die Röhre a allein laufen, so braucht sie zur Füllung des Gefäßes $7^1/_5$ Minuten mehr, als wenn man b allein laufen läßt. Öffnet man beide Röhren zugleich, so füllen sie das Gefäß in $3^3/_5$ Minuten. In welcher Zeit wird jede Röhre allein das Gefäß füllen?

Auflösung. Die Röhre b brauche allein zur Füllung x Minuten, daher a allein $x + 7^1/_5$ Min. Folglich füllt b allein in 1 Min. $\frac{1}{x}$ des Gefäßes, a allein in 1 Minute $\frac{1}{x + 7^1/_5} = \frac{5}{5x + 36}$, mithin beide zusammen in 1 Minute

$\frac{1}{x} + \frac{5}{5x+36}$. Nach der Aufgabe füllen aber auch beide in 1 Min. $\frac{1}{3^3/_5} = {}^5/_{18}$ des Gefäßes. Folglich ist

$${}^5/_{18} = \frac{1}{x} + \frac{5}{5x+36}; \text{ mit } 18x(5x+36) \text{ mult.}$$

$$5x(5x+36) = 18(5x+36) + 90x;$$
$$25x^2 + 180x = 90x + 648 + 90x;$$
$$25x^2 = 648;$$
$$x^2 = 25{,}92;$$
$$x = \sqrt{25{,}92} = \pm 5{,}09117.$$

Das Gefäß wird also von b in 5,09117 Min. gefüllt. Der andere Wert $-5{,}09$ Min. ist hier unmöglich.

4. Aufgabe. Eine Bauersfrau ging mit Eiern zu Markte. An A verkaufte sie die Hälfte derselben und $^1/_2$ Ei, jedes Stück für 8 ₰.; an B $^1/_3$ des Restes und $^1/_3$ Ei, das Stück für 7 ₰.; an C $^1/_4$ des jetzigen Restes und $^1/_4$ Ei, jedes Stück für 6 ₰. Sie löst 22 ₰. weniger, als wenn sie für jedes Ei, welches sie anfänglich besaß, 6 ₰. erhalten hätte. Wie viel Eier hatte sie zu Markte gebracht, wie viel behalten und wie viel ₰. hatte sie gelöst?

Auflösung. Sie hatte x Eier. An A verkaufte sie $\frac{x}{2} + {}^1/_2$ Eier. Sie behält, da sie x Eier gehabt und $\frac{x}{2} + {}^1/_2$ verkaufte, noch $x - \left(\frac{x}{2} + {}^1/_2\right) = \frac{x}{2} - {}^1/_2$ Eier. An B verkaufte sie $^1/_3$ dieses Restes und $^1/_3$ Ei, d. i. ${}^1/_3\left(\frac{x}{2} - {}^1/_2\right) + {}^1/_3 = \frac{x}{6} + {}^1/_6$ Eier. Sie behielt, da sie vorher $\frac{x}{2} - {}^1/_2$ gehabt, $\frac{x}{2} - {}^1/_2 - \left(\frac{x}{6} + {}^1/_6\right) = \frac{x}{3} - {}^2/_3$ Eier. An C verkaufte sie ${}^1/_4\left(\frac{x}{3} - {}^2/_3\right) + {}^1/_4 = \frac{x}{12} + {}^1/_{12}$ Eier. Sie löste $8 \cdot \left(\frac{x}{2} + {}^1/_2\right) + 7 \cdot \left(\frac{x}{6} + {}^1/_6\right) + 6 \cdot \left(\frac{x}{12} + {}^1/_{12}\right)$

$= \frac{17x}{3} + \frac{17}{3}$ ₰. Hätte sie jedes der x Eier zu 6 ₰. verkauft, so hätte sie $6x$ ₰. gelöst. Nach der Aufgabe ist nun

$$\frac{17x}{3} + 17/3 = 6x - 22;$$
$$17x + 17 = 18x - 66;$$
$$x = 83 \text{ (Eier hatte sie anfänglich).}$$

Sie behielt, da sie an C $\frac{x}{12} + 1/12$ Eier verkaufte und vorher $\frac{x}{3} - 2/3$ gehabt, noch $\frac{x}{3} - 2/3 - \left(\frac{x}{12} + 1/12\right) = \frac{x-3}{4}$ $= \frac{83-3}{4} = 20$ Eier. Sie löste $6x - 22$ ₰. $= 6 . 83 - 22$ $= 476$ ₰. (Die Probe zeigt, daß sie nicht $1/2$, $1/3$, $1/4$ Ei, sondern nur ganze Eier verkauft hatte.)

5. Aufgabe. Ich kenne eine dreiziffrige Zahl, bei welcher die 1. Stelle (links) um 1 größer als die letzte, die mittlere halb so groß als die erste. Setze ich die 1. Stelle hinter die letzte und multipliziere die so entstandene Zahl mit 3, so erhalte ich 587 mehr als die ursprüngliche Zahl. Welche Zahl ist es?

Auflösung. Angenommen, es sei die gesuchte Zahl 423, so würde ihr Wert $4 . 100 + 2 . 10 + 3$ sein. Ist daher die letzte Stelle x, so ist (nach der Aufgabe) die erste $x + 1$, die mittlere $\frac{x+1}{2}$. Der Wert der Zahl ist daher $(x + 1) . 100$ $+ \frac{x+1}{2} \cdot 10 + x = 106x + 105$. Setzt man die 1. Stelle hinter die letzte, so sind die 3 Ziffern: $\frac{x+1}{2}$, x, $x + 1$ und folglich der Wert dieser neuen Zahl $\frac{x+1}{2} \cdot 100 + x . 10$ $+ (x + 1) = 61x + 51$. Der Aufgabe gemäß ist nun:

$$3 . (61x + 51) = (106x + 105) + 587;$$
$$183x + 155 = 106x + 105 + 587;$$
$$x = 7 \text{ (die letzte Stelle).}$$

Die erste Stelle $7 + 1 = 8$, die mittlere $= 8/2 = 4$. Die gesuchte Zahl daher 847.

6. Aufgabe. Der Uhrenhändler A in Luxemburg verkaufte eine Anzahl Uhren; die Hälfte derselben und 9 Stück an den Deutschen D zu 9 ℳ das Stück, $^1/_3$ der ursprünglichen Anzahl und 11 Stück an den Franzosen F zu 11 Francs das Stück, den Rest an den Niederländer N zu 5 holländischen Gulden das Stück. Er löste 1159 ℳ 50 ₰. Wie viel Uhren hatte er verkauft?

Auflösung. Er verkaufte x Uhren; an D $\frac{x}{4}+9$ St., wofür er $9\left(\frac{x}{4}+9\right)$ ℳ löste. An F verkaufte er $\frac{x}{3}+11$ St. und bekam dafür $11\left(\frac{x}{3}+11\right)$ Francs. Da aber jedes Glied der Gleichung durch dasselbe Maß ausgedrückt sein muß (s. § 3, I, 3) und 1 Franc $= {}^4/_5$ ℳ ist, so löste er von F: ${}^4/_5 \cdot 11\left(\frac{x}{3}+11\right) = {}^{44}/_5\left(\frac{x}{3}+11\right)$ ℳ. An C verkaufte er den Rest, d. i. $x-\left(\frac{x}{4}+9\right)-\left(\frac{x}{3}+11\right)=\frac{5x}{12}-20$ Stück, wofür er $5\left(\frac{5x}{12}-20\right)$ Gulden bekam und da 1 Gulden $= 1^7/_{10}$ ℳ, so bekam er

$$5 \cdot 1^7/_{10}\left(\frac{5x}{12}-20\right) = {}^{17}/_2\left(\frac{5x}{12}-20\right) \text{ ℳ}$$

Der Aufgabe gemäß ist nun:

$$9\left(\frac{x}{4}+9\right)+{}^{44}/_5\left(\frac{x}{3}+11\right)+{}^{17}/_2\left(\frac{5x}{12}-20\right)=1159^1/_2;$$

$$\frac{9x}{4}+81+\frac{44x}{15}+{}^{484}/_5+\frac{85x}{24}-170=1159^1/_2; \text{ d. i.}$$

$$\frac{139x}{24}+\frac{44x}{15}=1248^1/_2-{}^{484}/_5; \text{ mit 120 mult.}$$

$$695x+352x=149820-11616;$$

$$1047x=138204;$$

$$x=132 \text{ (Stück besaß A anfangs).}$$

7. Aufgabe. A besitzt drei Sorten Kaffee, das Kilogramm zu 1,4 ℳ, 1,75 ℳ und 1,95 ℳ. Er will 8 Kilogr. einer Mischung haben, die 1,65 Kilogr. kosten soll, und dazu von der ersten Sorte $^1/_2$ Kilogr. weniger als das Doppelte der dritten nehmen. Wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen?

Auflösung. x Kilogr. von der dritten Sorte, daher von der ersten $2x - {}^1/_2$ Kilogr., von der zweiten $8-(2x-{}^1/_2)-x = 8^1/_2 - 3x$ Kilogr. Die drei zur Mischung verwandten Sorten kosten daher $1{,}4(2x-{}^1/_2) + 1{,}75(8^1/_2 - 3x) + 1{,}95x$ ℳ, die Mischung soll aber auch $8 . 1{,}65$ ℳ kosten. Daher ist

$$1{,}4(2x-0{,}5)+1{,}75(8{,}5-3x)+1{,}95x = 8 . 1{,}65;$$

$$2{,}8x - 0{,}7 + 14{,}875 - 5{,}25x + 1{,}95x = 13{,}2;$$

$$-0{,}5x = -0{,}975; \text{ durch } -0{,}5 \text{ div.}$$

$$x = 1{,}95 \text{ (Kilogr. von der dritten Sorte).}$$

Von der ersten $2 . 1{,}95 - 0{,}5 = 3{,}4$ Kilogr., von der zweiten $8 - 1{,}95 - 3{,}4 = 2{,}65$ Kilogr.

8. Aufgabe. A hat zwei Metalllegierungen a und b. In a kommen auf 5 Kilogr. Kupfer 3 Kilogr. Zink, in b auf 7 Kilogr. Kupfer 5 Kilogr. Zink. Er will 100 Kilogr. einer Mischung haben, in welcher auf je 3 Kilogr. Kupfer 2 Kilogr. Zink kommen sollen. Wie viel nimmt er von jeder Sorte?

Auflösung. Von a nimmt er x, folglich von b: $100 - x$ Kilogr. In a kommen auf $5 + 3$ Kilogramm Legierung 5 Kilogr. Kupfer, folglich auf 1 Kilogr. Legierung $^5/_8$ Kilogr. Kupfer, auf x Kilogr. der beabsichtigten Mischung $\frac{5x}{8}$ Kupfer. In b kommen auf $7 + 5$ Kilogr. Legierung 7 Kilogr. Kupfer, folglich auf 1 Kilogr. Leg. $^7/_{12}$ Kilogr. Kupfer, auf $100 - x$ Kilogr. Mischung $^7/_{12}(100-x)$ Kilogr. Kupfer. Folglich sind in der Mischung $\frac{5x}{8} + {}^7/_{12}(100-x)$ Kilogr. Kupfer. Es sollen aber auch in $3 + 2$ Kilogr. der

Mischung 3 Kilogr. Kupfer enthalten sein, d. i. in 1 Kilogr. der Mischung $^3/_5$ Kilogr. Kupfer und in den 100 Kilogr. der Mischung $100 \,.\, {}^3/_5 = 60$ Kilogr. Kupfer. Folglich ist:

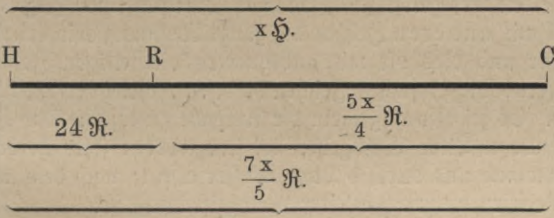
$$\frac{5x}{8} + {}^7/_{12}\,(100 - x) = 60;$$

$$15x + 1400 - 14x = 1440;$$

$x = 40$ Kilogr. (von a; daher von b: 60 Kilogramm).

9. Aufgabe. Ein Hund verfolgt ein Reh, welches 24 Schritte voraus hat. Wenn der Hund 4 Schritte macht, macht das Reh 5, der Hund kommt aber mit 5 Schritten so weit, wie das Reh mit 7. Wie viel Schritte muß der Hund noch thun, um das Reh einzuholen?

Auflösung.



Jetzt sei der Hund in H, das Reh in R; in C mögen sie sich treffen. Der Hund mache von H bis C x Schritte. Während der Hund 4 Schritte macht, macht das Reh 5, während daher der Hund 1 Schritt macht, macht das Reh $^5/_4$ Schr., während der Hund x Schritte macht von (H bis C), macht das Reh $\frac{5x}{4}$ Schritte (von R bis C).

Der Länge nach sind 5 Hundeschritte = 7 Rehschritte. 1 Hundeschritt = $^7/_5$ Rehschritt, x Hundeschritte (H C) $= \frac{7x}{5}$ Rehschr. (H C). Folglich ist H C durch Rehschritte in zweierlei Weise ausgedrückt:

$$\frac{7x}{5} = 24 + \frac{5x}{4};$$
$$28x = 480 + 25x;$$
$$x = 160$$ (Schritte muß der Hund noch thun).

10. Aufgabe. Ein Faß enthält 80 Liter Weingeist. N nimmt daraus $1^1/_2$ Liter und ersetzt dies durch $1^1/_2$ Liter Wasser. Hierauf nimmt er aus der jetzt im Fasse befindlichen Mischung von Weingeist und Wasser wieder $1^1/_2$ Liter heraus und ersetzt dies durch $1^1/_2$ Liter Wasser. Er setzt dieses Herausnehmen und Ersetzen durch Wasser so lange fort, bis nur noch 13 Liter Weingeist in dem Fasse sind. Wie oft hat er $1^1/_2$ Liter Wasser hineingegossen?

Auflös. Gewisse Aufgaben löst man oft lieber allgemein, stellt also eine Formel her, mit der alle speziellen Aufgaben derselben Art gelöst sind, da man sonst für einen speziellen Fall mit anderen Zahlen die ganze Rechnung wiederholen müßte und dies oft mit unbequemen vielstelligen Zahlen, während die einfachen Zeichen a, b, . . . viel übersichtlicher sind. Es sei also allgemein die Aufgabe zu lösen: Das Faß enthalte a Liter Weingeist, b Liter werden stets herausgenommen und durch b Liter Wasser ersetzt; nach dem xten Male seien nur noch c Liter Weingeist im Fasse.

Nach dem 1. Male ist

in a Liter Mischung:	$a - b$ Weingeist	und	b Wasser,
„ 1 „ „	$\frac{a-b}{a}$ „	„	$\frac{b}{a}$ „
„ b „ „	$\frac{a-b}{a} . b$ „		

Da diese b Liter (mit $\frac{a-b}{a} . b$ Weingeist) beim 2. Male herausgenommen werden und vorher $a - b$ Weingeist darin war, so ist nach dem 2. Male nur noch $a - b - \frac{a-b}{a} . b$ $= (a - b)\left(1 - \frac{b}{a}\right) = (a - b) . \frac{a-b}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}$ Weingeist darin. Da der Inhalt des Fasses stets a Liter bleibt, so ist also nach dem 2. Male

in a Liter Mischung: $\frac{(a-b)^2}{a}$ Weingeist,

„ 1 „ „ $\frac{(a-b)^2}{a^2}$ „

„ b „ „ $\frac{(a-b)^2}{a^2} \cdot b$ „

Dies wird nun herausgenommen und folglich ist

nach dem 3. Male in a Liter Mischung nur noch $\frac{(a-b)^2}{a}$ $- \frac{(a-b)^2}{a^2} \cdot b = (a-b)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\right) = \frac{(a-b)^3}{a^2}$ Weingeist.

In gleicher Weise findet man

nach dem 4. Male $\frac{(a-b)^4}{a^3}$, nach dem 5. Male $\frac{(a-b)^5}{a^{5-1}}$,

allgemein

nach dem x. Male $\frac{(a-b)^x}{a^{x-1}}$ und da dies $= c$ sein soll, so hat man die Gleichung:

$$\frac{(a-b)^x}{a^{x-1}} = c; \text{ mit a erweitert:}$$

$$\frac{a\,(a-b)^x}{a^x} = c;$$

$$\left(\frac{a-b}{a}\right)^x = \frac{c}{a};$$

$$x \lg \frac{a-b}{a} = \lg \frac{c}{a}$$

$$x = \frac{\lg \frac{c}{a}}{\lg \frac{a-b}{a}} = \frac{\lg c - \lg a}{\lg (a-b) - \lg a}; \text{ mit}$$

$$-1 \text{ erweitert: } x = \frac{\lg a - \lg c}{\lg a - \lg (a-b)}.$$

Jene spezielle Aufgabe ist nun sofort mit $a = 80$, $b = 1^1/_2$, $c = 13$ gelöst:

$$x = \frac{\lg 80 - \lg 13}{\lg 80 - \lg (80 - 1{,}5)} = \frac{\lg 80 - \lg 13}{\lg 80 - \lg 78{,}5}$$

$$= \frac{1{,}90309 - 1{,}11394}{1{,}90309 - 1{,}89487} = \frac{0{,}78915}{0{,}00822} = 96 \text{ (mal zu wiederholen).}$$

11. Aufgabe. A, B, C nehmen ein Lotterielos. A giebt hierzu $6^3/_4$, B $4^1/_2$, C $3^3/_5$ ℳ. Sie gewinnen 1650 ℳ. Wie viel erhält jeder?

Auflös. Ihre Anteile verhalten sich wie $6^3/_4 : 4^1/_3 : 3^3/_5$. Diese unbequemen Zahlen können nach § 44, I, B auf die kleinsten ganzen Zahlen gebracht werden. Mit 20 erweitert: $135 : 90 : 72$, noch durch 9 gekürzt verhalten sich ihre Anteile wie $15 : 10 : 8$. Ist ferner das Verhältnis unbekannter Größen gegeben, so setzt man am einfachsten diese Größen = den mit x multiplizierten Verhältniszahlen; denn $15x : 10x : 8x$ verhält sich auch wie: $15 : 10 : 8$. Es erhalte mithin A $15x$, B $10x$, C $8x$ ℳ. Folglich ist:

$$15x + 10x + 8x = 1650;$$
$$(15 + 10 + 8)x = 1650$$
$$x = \frac{1650}{15 + 10 + 8}.$$

A erhält nun $x . 15 = \frac{1650}{15 + 10 + 8} \cdot 15$, B erhält $x . 10 = \frac{1650}{15 + 10 + 8} \cdot 10$, C erhält $\frac{1650}{15 + 10 + 8} \cdot 8$.

Allgemein: Um eine Zahl nach gegebenen Verhältniszahlen zu teilen, dividiert man sie durch die Summe der Verhältniszahlen und multipliziert den Quotient der Reihe nach mit den einzelnen Verhältniszahlen. (Die sogenannte Gesellschaftsrechnung.)

12. Aufgabe. A hinterläßt seinen 3 Söhnen, die 21, $17^1/_2$ und 15 Jahre alt sind, 9000 ℳ, die sie nach dem umgekehrten Verhältnis ihres Alters teilen sollen. Wie viel erhält jeder?

Auflösung. Da sich die Anteile umgekehrt wie $21 : 17^1/_2 : 15$ verhalten sollen, so verhalten sie sich direkt wie $^1/_{21} : \frac{1}{17^1/_2} : {}^1/_{15}$ (s. § 44, I, C), d. i. wie $^1/_{21} : {}^2/_{35} : {}^1/_{15}$ oder (mit 105 erweitert) wie $5 : 6 : 7$. Folglich erhält nach der in der vorigen Aufgabe entwickelten Regel: der älteste Sohn $\frac{9000}{5+6+7} \cdot 5$, der zweite Sohn $\frac{9000}{5+6+7} \cdot 6$, der dritte $\frac{9000}{5+6+7} \cdot 7$ ℳ.

13. Aufgabe. $11^1/_4$ Liter kosten 2 ℳ 10 ₰. Was kosten 40 Liter?

Auflösung. x ℳ. Soll diese Aufgabe durch die einfache Proportion gelöst werden, so setze man x ℳ in das vierte Glied. Das dritte Glied ist mithin 2,1 ℳ, da ein Verhältnis nur gleichartige Glieder enthalten darf. Eine Frage entscheidet nun sehr einfach, ob das erste Verhältnis ein steigendes ($11^1/_4$ Liter : 40 Liter) oder ein fallendes ($40 : 11^1/_4$) sein muß. Folglich: $11^1/_4$ Liter kosten 2,1 ℳ, wie viel 40 Liter? Antwort: Mehr, d. h. x ist größer als 2,1 ℳ, daher dieses zweite Verhältnis steigend und folglich auch das erste, da beide denselben Exponent haben müssen. Es ist also:

$$11^1/_4 : 40 = 2{,}1 \text{ ℳ} : x \text{ ℳ}$$

$$x = \frac{40 \,.\, 2{,}1}{11^1/_4} = \frac{40 \,.\, 21 \,.\, 4}{10 \,.\, 45} = {}^{112}/_{15} = 7\,^7/_{15} \text{ ℳ} = 7 \text{ ℳ } 47 \text{ ₰}.$$

Zusatz. Die Proportion führt hier zu dem einfachen Ansatz: $x = 2{,}1 \text{ ℳ} \cdot \frac{40}{11^1/_4}$. Man multipliziert also die mit der gesuchten Zahl (hier x ℳ) gleichartige Zahl (2,1 ℳ) mit einem Quotient, der das bekannte Verhältnis der Aufgabe (hier das Verhältnis der Liter) ausdrückt und dessen Zähler mithin größer oder kleiner als der Nenner ist, jenachdem x größer oder kleiner als jene mit ihr gleichartige Zahl (2,1 ℳ) sein muß.

14. Aufgabe. Ein Kanal von 12500 m Länge, $7^1/_2$ m Breite, $2^2/_5$ m Tiefe wird von 4000 Arbeitern in 50 Wochen gegraben. Wie tief kann ein Kanal von 15000 m Länge werden, der bei einer Breite von $8^1/_3$ m von 5400 Arbeitern in 42 Wochen gegraben werden soll?

Auflösung. Nach dem Zusatz der vorhergehenden Aufgabe hat man zunächst:

x m Tiefe $= 2^4/_5$ m Tiefe $\times \frac{\cdots\cdot}{\cdots\cdot}$, wo der Quotient zur Aufnahme der Verhältnisse von Länge 2c. bestimmt ist. Um die Länge anzusetzen: Bei 15000 Länge kann der Kanal nicht so tief werden, als bei 12500 Länge (wenn in beiden Fällen die Breite, die Zahl der Arbeiter 2c. gleichgroß); daher der Zähler kleiner als der Nenner und folglich ist zunächst $x = 2^4/_5 \cdot \frac{12500\ldots}{15000\ldots}$. Bei $8^1/_3$ Breite weniger tief als bei $7^1/_2$ Breite; daher:

$x = 2^4/_5 \cdot \frac{12500 \,.\, 7^1/_2 \ldots}{15000 \,.\, 8^1/_3 \ldots}$. Von 5400 Arbeitern tiefer als von 4000 Arb. 2c. Daher: $x = 2^4/_5 \cdot \frac{12500 \,.\, 7^1/_2 \,.\, 5400 \,.\, 50}{15000 \,.\, 8^1/_3 \,.\, 4000 \,.\, 42}$ $= \frac{14 \,.\, 12500 \,.\, 15 \,.\, 5400 \,.\, 50 \,.\, 3}{5 \,.\, 15000 \,.\, 2 \,.\, 25 \,.\, 4000 \,.\, 42} = 3^3/_8$ m (Tiefe).

15. Aufgabe. (Prozente.) A kauft $1^1/_4$ Zentner Kaffee für 175 ℳ. Wie teuer muß er 6 Pfund verkaufen, wenn er $17^1/_2\,\%$ gewinnen will?

Anmerkung. 5% (5 Prozent) bedeutet: 100 giebt 5.

Auflösung. Zu x ℳ! $1^1/_4$ Zentner d. i. 125 Pfund kosten ihm im Einkaufe 175 ℳ, daher 1 Pfund $= 1{,}40$ ℳ, 6 Pfund $= 8{,}4$ ℳ; folglich 8,4 ℳ im Einkaufe, x im Verkaufe. Ferner will er sich für 100 ℳ (im Einkauf) $100 + 17^1/_2 = 117{,}5$, d. i. für 1 ℳ: 1,175 ℳ, für 8,4 ℳ: $8{,}4 \,.\, 1{,}175$ ℳ geben lassen. Folglich $x = 8{,}4 \,.\, 1{,}175$ $= 9{,}87$ ℳ.

16. Aufgabe. (Zinsrechnung.) Wie viel Zinsen (z) giebt ein Kapital c zu p % (p Prozent) in a Jahren?

Anmerkung. Die Zinsen werden auch Interessen genannt. Die Jahre sind hier mit a (anni!) abgekürzt. Die Prozente beziehen sich bei Zinsrechnungen stets auf 1 Jahr. Die Zahl der Prozente wird auch Zinsfuß genannt. Der gerichtliche Zinsfuß ist gewöhnlich 5%.

Auflösung.

Das	Kapital	100	giebt	in	einem	Jahre	p	Zinsen;
"	"	1	"	"	"	"	$\frac{p}{100}$	"
"	"	c	"	"	"	"	$\frac{cp}{100}$	"
"	"	c	"	"		a Jahren	$\frac{cap}{100}$	"

aber auch z Zinsen. Daher ist

$$* \quad z = \frac{cap}{100}.$$

Mit dieser Formel (der Zähler erinnert an das Wort Kapital) lassen sich alle Zinsrechnungen in einfachster Weise lösen. Z. B.

Wie viel Zinsen (x) geben 540 ℳ zu $3^3/_4$% in 8 Monaten?

Auflösung. In der Formel ist z durch x, c durch 540, a durch $^2/_3$ (Jahre), p durch $3^3/_4$ zu ersetzen.

Folglich: $x = \frac{540 \cdot {}^2/_3 \cdot 3^3/_4}{100} = \frac{540 \cdot 2 \cdot 15}{3 \cdot 4 \cdot 100} = 13^1/_2$ ℳ

Zusatz. Schreibt man die Formel * in der Form: $cap = 100z$, so ergiebt sich sofort eins der Elemente c, a oder p, wenn man das 100fache der Zinsen durch das Produkt der beiden anderen Elemente dividiert, z. B. die Zeit $a = \frac{100z}{cp}$ in Jahren.

17. Aufgabe. Wie groß ist ein Kapital c, welches zu p% in a Jahren auf k angewachsen ist? Auflösung: Kap. + Zinsen = angewachsenes Kap.; d. i.

$c + \frac{cap}{100} = k$; oder

$\ast\ k = c\left(1 + \frac{ap}{100}\right)$ als Formel für das angewachs. Kap.!

Daraus folgt unmittelbar: $\ast\ c = \frac{k}{1 + \frac{ap}{100}}$.

18. Aufgabe. N lieh am 1. April 1894 dem A ein Kapital zu 5%, am 1. Juni 1894 dem B ein Kapital, welches um 200 ℳ größer war als das des A, zu $4\frac{1}{2}$% und erhielt von beiden am 1. Jan. 1895 an Kapital und Zinsen $3507\frac{1}{4}$ ℳ zurück. Wie viel hatte er Jedem geliehen?

Auflösung. Er lieh dem A das Kapital x, dem B daher $x + 200$. Die Zinsen des 1. Kapitals betrugen in $\frac{3}{4}$ Jahren (s. 16. Aufg.) $= \frac{x \cdot \frac{3}{4} \cdot 5}{100} = \frac{3x}{80}$, des 2. Kapitals in $\frac{7}{12}$ Jahren $= \frac{(x + 200) \cdot 4\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}}{100} = \frac{21\,(x + 200)}{800}$.

Da nun Kap. des A + Zinsen des A + Kap. des B + Zinsen des B $= 3507\frac{1}{4}$; so ist

$$x + \frac{3x}{80} + x + 200 + \left(\frac{21x}{800} + 5\frac{1}{4}\right) = 3507\frac{1}{4};$$

$$2x + \frac{51x}{800} = 3302;$$

$$1600x + 51x = 800 \cdot 3302;$$

$$1651x = 800 \cdot 3302;$$

$$x = 800 \cdot 2 = 1600 \text{ ℳ}$$

(Kap. des A).

19. Aufgabe. Zahlt der Geschäftsmann ein Kapital früher als zu der festgesetzten Zeit, so wird ihm als Entschädigung ein Abzug gestattet, der Disconto (Rabatt, Interusurium) genannt wird. Eigentlich müßte an dem frühern Termin ein Kapital gezahlt werden, welches mit seinen Zinsen bis zu dem ursprünglich festgesetzten Zahlungstermin auf das zu zahlende Kapital anwächst. Üblich ist

es jedoch, den Diskont nicht auf diese rationelle Weise zu berechnen, sondern einfach die Zinsen des zu zahlenden Kapitals zu berechnen und von diesem abzuziehen.

Beisp. A hat am 1. März 1895 8500 ℳ zu zahlen. Wie viel zahlt er $1\frac{1}{2}$ Monate ($\frac{1}{8}$ Jahr) früher, wenn ihm $3\frac{1}{2}$ % Diskont bewilligt wird?

Auflösung. Er zahlt x = Kap. 8500 — Zinsen des Kap. 8500; folglich

$$= 8500 - \frac{8500 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3\frac{1}{2}}{100} = 8500 - \frac{8500 \cdot 7}{8 \cdot 2 \cdot 100}$$
$$= 8462{,}81 \text{ ℳ}$$

20. Aufgabe. Die Terminrechnung bestimmt für gegebene Zahlungstermine andere Termine, jedoch so, daß weder der Gläubiger noch der Schuldner dabei gewinnen oder verlieren. Die Zinsen von 500 ℳ in 3 Monaten verhalten sich zu den Zinsen von 700 ℳ in 4 Mon. (bei gleichem Zinsfuß) wie $500 \cdot 3 : 700 \cdot 4$. Soll daher A in 3 Mon. 500 ℳ zahlen, wünscht aber dafür 350 ℳ schon in 2 Mon. zu zahlen, so würde es sich fragen, nach wie viel Monaten (x Mon.) der Rest 150 ℳ zu zahlen ist. Offenbar müssen nun die Zinsen von 500 ℳ in 3 Monaten eben so viel betragen, wie die von 350 ℳ in $2\frac{1}{2}$ Monaten vermehrt um die Zinsen von 150 in x Monaten. Daher ist

$$350 \cdot 2\frac{1}{2} + 150x = 500 \cdot 3;$$
$$x = 4\frac{1}{6} \text{ Monat.}$$

Allgemein: Die Summe der Produkte aus Kapitalien und Zeiten (bei verschiedenem Zinsfuß: die Summe der Produkte aus Kapitalien, Zeiten und Prozenten) ist sowohl für die gegebenen Zeiten, als auch für die gesuchten (x enthaltenden) Zeiten zu berechnen und beide Summen einander gleich zu setzen (s. nachstehende Aufgabe). Daraus folgt zugleich, daß der sogenannte mittlere Zinsfuß = ist der Summe der Produkte der Kapitalien, Zeiten und (verschiedenen) Prozente dividiert durch die Summe der Produkte der Kapitalien und Zeiten.

21. Aufgabe. A hat in 6 Monaten 1000 ℳ, in 11 Mon. 1500 ℳ zu zahlen. Er will dafür die 2500 ℳ in vier Terminen abtragen, deren Zwischenzeiten 4 Monate betragen sollen und zwar will er am 1. Termin 400, am 2. 500, am 3. 700, am 4. den Rest von 900 ℳ zahlen. Nach wie viel Monaten fällt der 1. Termin? Auflösung. Nach x Mon., der 2. daher nach $x+4$, der 3. nach $x+8$, der 4. nach $x+12$ Monaten. Folglich:

$$400x + 500(x+4) + 700(x+8) + 900(x+12)$$
$$= 1000 . 6 + 1500 . 11; \text{ durch } 100 \text{ div.}$$
$$4x + 5x + 20 + 7x + 56 + 9x + 108$$
$$= 60 + 165;$$
$$x = {}^{41}/_{25} \text{ Mon.} = 1 \text{ Mon. } 19 \text{ Tage.}$$

Anmerkung. Auch diese „übliche" Berechnungsweise ist unrichtig, da jenes erste Kapital erst in 6 Mon. 1000 ℳ groß ist, jetzt z. B. mit 5 % nur 975,6 ℳ Folglich müßte es heißen: 975,6 ℳ geben in 6 Monaten eben so viel Zinsen ...., nicht aber: 1000 ℳ geben in 6 Monaten .....

22. Aufgabe. A leiht dem B ein Kapital c zu p % unter der Bedingung, daß B die Zinsen nach je n Jahren abtrage. Wenn nun B die Zinsen nicht abträgt, wird offenbar das Kapital nach je n Jahren um die aufgelaufenen Zinsen größer und es fragt sich, wie groß (k) wird auf diese Weise das Kapital nach a Jahren? (Dieses Anwachsen eines Kapitals nennt man Zinseszinsen, oder Zins auf Zins oder zusammengesetzte Zinsen.)

Auflösung. Das Kapital c wächst nach n Jahren auf $c\left(1+\frac{np}{100}\right)$ an (s. 17. Aufg.). Setzt man dieses angewachsene Kapital $= c'$ und wird dasselbe (c') wieder auf n Jahre ausgeliehen, so wächst es (nach der 17. Aufg.) auf $c'\left(1+\frac{np}{100}\right)$ an. Folgl. wächst das ursprüngl. Kapital c nach 2n Jahren auf $c'\left(1+\frac{np}{100}\right) = c\left(1+\frac{np}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right) = c\left(1+\frac{np}{100}\right)^2$

an. Wird dieses mit c'' abgekürzte angewachsene Kapital wieder auf n Jahre ausgeliehen, so wächst es auf $c''\left(1+\frac{np}{100}\right)$ an, d. i. c wächst nach 3n Jahren auf $c''\left(1+\frac{np}{100}\right)$

$$=c\left(1+\frac{np}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)=c\left(1+\frac{np}{100}\right)^3$$

an, in 4n Jahren auf $c\left(1+\frac{np}{100}\right)^4$, in en Jahren daher auf $c\left(1+\frac{np}{100}\right)^e$. Setzt man $en=a$, also $e=\frac{a}{n}$, so wächst c in a Jahren auf $c\left(1+\frac{np}{100}\right)^{\frac{a}{n}}$ an, welches Kapital mit k bezeichnet werden soll. Es ist also:

$$* \; k=c\left(1+\frac{np}{100}\right)^{\frac{a}{n}} \ldots\ldots (A).$$

Beispiel. Auf welche Summe (x) wachsen 2345 ℳ mit $4^3/_4\,\%$ in 30 Jahren an, wenn die Zinsen, welche vierteljährlich abgetragen werden sollten (also $n={}^1/_4$), nie abgetragen worden wären?

Auflösung. Nach vorstehender Formel ist

$$x=2345\,.\left(1+\frac{{}^1/_4\cdot 4^3/_4}{100}\right)^{\frac{30}{{}^1/_4}};\text{ d. i.}$$

$$x=2345\left(1+\frac{19}{1600}\right)^{120};$$

$$x=2345\left(\frac{1619}{1600}\right)^{120};$$

$$\begin{array}{rl} \lg 1619 = & 3{,}2092468 \\ \lg 1600 = & 3{,}2041200 \\ \hline & 0{,}0051268\;(.\,120 \\ \hline & 0{,}6152160 \\ \lg 2345 = & 3{,}3701428 \\ \hline \lg x = & 3{,}9853588 \end{array}$$

$x=9668{,}49$ ℳ

23. Aufgabe. Werden die Zinsen nicht abgetragen, obgleich dies am Ende jedes Jahres geschehen sollte, so ist

in der Formel A einfach $n = 1$ zu setzen. Dieselbe geht alsdann in die folgende (am häufigsten benutzte) über:

$$k = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a \ldots\ldots (B).$$

Beisp. N leiht dem P am 1. Januar 1880 7000 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$. Die Zinsen sollte P nach Ablauf eines jeden Jahres zahlen. Da P bis 1891 den 1. Juli keine Zinsen zahlte, so forderte N das mit Zinseszinsen angewachsene Kapital zurück. Wie viel (x) hat N zu bekommen?

Auflösung. Da man für einen Zeitraum von weniger als einem Jahre stets nur einfache Zinsen, aber keine Zinseszinsen berechnet, so ist zunächst das bis 1. Januar 1891 angewachsene Kapital (z) nach B zu berechnen. Daher

$$z = 7000\left(1 + \frac{4^1/_2}{100}\right)^{11} = 7000 \,.\, 1{,}045^{11};$$

$$\begin{aligned} \lg 1{,}045 &= 0{,}0191163 \,.\, 11 \\ & \overline{0{,}2102793} \\ \lg 7000 &= 3{,}8450980 \\ \lg z &= \overline{4{,}0553773} \end{aligned}$$

$$z = 11359{,}97 \text{ ℳ}$$

Dieses Kapital wächst noch bis zum 1. Juli mit einfachen Zinsen auf

$$x = 11359{,}97 \,.\left(1 + \frac{^1/_2 \,.\, 4^1/_2}{100}\right) \text{ an (s. 17. Aufg.)}$$

$$x = 11359{,}97 \,.\, 1{,}0225 = 11615{,}57 \text{ ℳ}$$

24. Aufgabe. Aus der Formel B das ausgeliehene Kapital c, die Prozente p und die Jahre a zu berechnen.

Auflösung. Dividiert man durch die Potenz, so erhält man unmittelbar:

$$c = \frac{k}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a} \ldots\ldots (C).$$

Dividiert man B durch c und zieht dann die a^{te} Wurzel aus, so ergiebt sich

$$1+\frac{p}{100}=\sqrt[a]{\frac{k}{c}}; \text{ folglich}$$

$$100+p=100\sqrt[a]{\frac{k}{c}};$$

$$p=100\sqrt[a]{\frac{k}{c}}-100 \ldots\ldots (D).$$

Ferner ergiebt sich aus $\left(1+\frac{p}{100}\right)^a=\frac{k}{c}$ (siehe B):

$$a\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)=\lg k-\lg c; \text{ oder}$$

$$a=\frac{\lg k-\lg c}{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)} \ldots (E).$$

25. Aufgabe. Die Stadt N hatte am 1. Jan. 1870: 56000, am 1. Jan. 1890: 90000 Einwohner. Wann wird sie, gleiches Wachstum vorausgesetzt, 200 000 Einwohner haben?

Auflösung. Da sich Bevölkerungen, der Bestand eines Waldes 2c. nach Art der Zinseszinsen vermehren, so hat man hier gleichfalls die Formeln A und B zu benutzen.

Die Stadt wachse von 1870 bis 1890 mit $p\%$ an. Folglich:

$$90000=56000\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20}; \text{ durch 56000 div.:}$$

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20}=\frac{45}{28};$$

$1+\frac{p}{100}=\sqrt[20]{\frac{45}{28}}$. Wie sich sogleich zeigen wird, ist es nicht nötig, p selbst zu suchen. Von 1890 an wachse sie in x Jahren auf 200 000 Ew. an. Folglich, da die % dieselben bleiben sollen:

$$200000=90000\left(1+\frac{p}{100}\right)^x; \text{ d. i.}$$

$$200000=90000\left(\sqrt[20]{\frac{45}{28}}\right)^x;$$

$$\left(\sqrt[20]{\frac{45}{28}}\right)^x = {}^{20}/_9;$$

$$x \lg \sqrt[20]{\frac{45}{28}} = \lg {}^{20}/_9;$$

$$x = \frac{\lg {}^{20}/_9}{\lg \sqrt[20]{\frac{45}{28}}} = \frac{\lg 20 - \lg 9}{\frac{\lg 45 - \lg 28}{20}} = \frac{20\,(\lg 20 - \lg 9)}{\lg 45 - \lg 28}$$

$$= \frac{20\,.\,0{,}3467875}{0{,}2060545} = 33{,}660 \text{ Jahre (29. Aug. 1923).}$$

26. Aufgabe. N legt am 1. Aug. 1884 480 ℳ in die Sparkasse, die mit $3^1/_2$ % berechnet, am 23. März 1888 noch 340 ℳ Am 17. April 1895 läßt er sich die Kapitalien nebst den aufgelaufenen Zinsen auszahlen. Wie viel (x) erhält er?

Auflösung. Bei den Sparkassen werden Zinseszinsen berechnet, jedoch nur vom 1. Januar an und auch nur für volle Jahre. Geschieht die Einzahlung der Gelder nach dem 31. Dezember eines Jahres, also im Laufe des folgenden Jahres, so werden bis zum 31. Dezember dieses laufenden Jahres nur einfache Zinsen berechnet, diese auch nur vom 1. des nächsten Monats an und nur für volle Monate. Bei der Kündigung von Geldern werden daher vom 1. Januar desselben Jahres an bis zu dem letzten Tage des vorhergehenden Monats gleichfalls einfache Zinsen berechnet.

Hiernach wächst das 1. Kapital 480 ℳ an

vom 1. Sept. bis 31. Dez. 1884 auf $480\left(1 + \frac{{}^1/_3\,.\,3^1/_2}{100}\right)$

$= 480\,(1 + {}^7/_{600}) = 485{,}6$ ℳ (s. 17. Aufg.);

vom 1. Jan. 1885 bis 31. Dez. 1894 auf $485{,}6\,.\,1{,}035^{10}$

$= 684{,}99$ ℳ (s. 23. Aufg.);

vom 1. Jan. bis 31. März 1895 auf $684{,}99\left(1 + \frac{{}^1/_4\,.\,3^1/_2}{100}\right)$

$= 684{,}99\,(1 + {}^7/_{800}) = 690{,}98$ ℳ (s. 17. Aufg.).

Das 2. Kapital 340 ℳ wächst an

vom 1. April bis 31. Dez. 1888 auf $340\left(1+\frac{{}^{3}/_{4}\cdot 3^{1}/_{2}}{100}\right)$

$= 340\,(1 + {}^{21}/_{800}) = 348{,}93$ ℳ;

vom 1. Jan. 1889 bis 31. Dez. 1894 auf

$348{,}93 \,.\, 1{,}035^{6} = 428{,}92$ ℳ;

vom 1. Jan. bis 31. März 1895 auf $428{,}92\left(1+\frac{{}^{1}/_{4}\cdot 3^{1}/_{2}}{100}\right)$

$= 428{,}92\,(1 + {}^{7}/_{800}) = 432{,}67$ ℳ.

Mithin erhält N am 17. April 1895:

$x = 690{,}98 + 432{,}67 = 1123{,}65$ ℳ.

§ 46. Einfache und binomische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

I. Einleitung.

1) Die Anzahl der aus der Aufgabe abgeleiteten, von einander unabhängigen Gleichungen muß eben so groß sein, wie die der Unbekannten, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll. Beispiel: Die Summe zweier Zahlen ist 23, ihre Differenz 7. Welche Zahlen sind es? Setzt man die Zahlen x und y, so ist I. $x + y = 23$, II. $x - y = 7$. Da Gleichung II nicht aus Gleichung I abgeleitet werden kann, die Gleichungen also unabhängig von einander sind, ferner eben so viel Gleichungen vorhanden sind, als Unbekannte, so ist diese Aufgabe bestimmt. Zugleich ergiebt sich hieraus, daß der Wert jeder Unbekannten in allen aus derselben Aufgabe abgeleiteten Gleichungen derselbe sein muß.

2) Ist die Anzahl der Gleichungen geringer als die der Unbekannten, so ist die Gleichung unbestimmt.

Ist z. B. $5x + 7y = 64$, so könnte x jeden beliebigen Wert, z. B. $-7^{1}/_{11}$, haben, denn immer würde sich dann aus dieser Gleichung für y ein Wert finden, der die linke Seite der rechten gleich macht. Die Auflösung einer solchen Gleichung wäre mithin unmöglich, wenn nicht — wie es in der Theorie der unbestimmten (oder diophantischen)

Gleichungen geschieht — die Zahl der Lösungen durch irgend eine Bestimmung eingeschränkt würde und zwar gewöhnlich durch die, daß die Auflösungen ganz und positiv sein müssen.

3) Sind 3 (allgemein n) einander gleiche Größen gegeben, z. B. $A = B = C$, so lassen sich daraus nur 2 (bezw. $n - 1$) von einander unabhängige Gleichungen bilden, z. B. $A = B$ und $A = C$, denn die 3. Gleichung $B = C$ ist schon in jenen beiden enthalten. Daraus folgt, daß in 3 einander gleichen Größen auch nur 2 Unbekannte enthalten sein dürfen.

4) Hätte man aus einer Aufgabe z. B. 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten abgeleitet und käme man bei der Auflösung auf $0 = 0$, so ist dies ein Zeichen, daß jene Gleichungen nicht unabhängig von einander waren. Denn hätte man z. B. aus einer Aufgabe $6x - 4y = 20$ und $9x - 6y = 30$ abgeleitet, so würde sowohl aus der 1. Gleich. $3x - 2y = 10$, als auch aus der zweiten $3x - 2y = 10$ folgen; aus diesen letzteren Gleichungen aber ergiebt sich $10 = 10$, d. i. $0 = 0$, ein Zeichen, daß jene beiden zuerst abgeleiteten Gleichungen nicht unabhängig von einander waren.

5) Giebt man in einer entwickelten Gleichung mit mehreren Unbekannten jeder Unbekannten den Faktor t, so bestimmt die Potenz von t die Dimension (den Grad) des Gliedes. Z. B. $x^3y^2 + xy^3 = a$; $x = xt$, $y = yt$ gesetzt, giebt $(xt)^3(yt)^2 + xt.(yt)^3 = a$ d. i. $x^3y^2t^5 + xyt^4 = a$; folglich ist das 1. Glied von der 5., das 2. von der 4. Dimension, die Gleichung selbst aber ist vom 5. Grade, da die höchste Potenz den Grad bestimmt. Die Gleich. $axy + bx + cy = d$ z. B. ist vom 2. Grade, denn das 1. Glied würde t^2 erhalten.

6) Hat man 2 Gleichungen mit mehreren Unbekannten, die eine vom n. Grade, die andere vom r. Grade, so kann die Auflösung nicht auf eine Gleichung mit einer Unbekannten führen, die den n r. Grad übersteigt. Z. B. ist jede der beiden Gleichungen I. $x^2 - xy = 10$ und II. $xy + y^2 = 30$ vom 2. Grade, daher kann die Auflösung höchstens auf eine Gleichung vom $2 . 2^{\text{ten}}$, d. i. 4. Grade mit einer Unbekannten führen.

7) Die Form $ax + by = c$ wird Normalform der Gleichungen vom 1. Grade mit 2 Unbekannten, $ax + by + cz = d$ Normalform der Gleichungen vom 1. Grade mit 3 Unbekannten genannt.

II. Die Auflösungsmethoden der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

A. Eliminieren.

Eliminieren heißt eine Unbekannte aus einer Gleichung entfernen. Hätte man z. B. die Gleichung $x + y = 7$ und wüßte man, daß $y = 2x - 5$ wäre, so könnte man den Ausdruck $2x - 5$ an die Stelle von y in der 1. Gleichung setzen und man erhielte $x + 2x - 5 = 7$. Somit wäre y aus der 1. Gleichung eliminiert worden. Die Gleichungen mit mehreren Unbekannten löst man dadurch, daß man eine Gleichung mit einer Unbekannten herstellt, indem man die übrigen Unbekannten eliminiert. Das vorstehende Beispiel zeigt, in welcher Weise die Elimination erfolgen kann.

Hier mögen die drei am häufigsten in Anwendung kommenden Eliminationsmethoden gelehrt werden:

1) Die Substitutionsmethode.
2) Die Koeffizientenmethode (Additions- und Subtraktionsmethode).
3) Die Komparationsmethode.

Es giebt zwar noch einige andere Eliminationsmethoden, durch welche die niederen Gleichungen mit mehreren Unbekannten gelöst werden können, z. B. die Bézoutsche Methode, doch erfolgt die Auflösung durch jene drei Methoden stets weit einfacher und sicherer.

B. Substitutionsmethode.

Die gegebenen (bezw. aus einer Aufgabe abgeleiteten) Gleichungen sind stets zunächst zu entwickeln und auf die geordnete Form $ax + by + cz \ldots = m$ mit ganzzahligen Gliedern zu bringen. Hierauf berechnet man eine Unbekannte aus irgend einer Gleichung, die daher nicht bloß durch die bekannten, sondern auch durch die übrigen unbekannten Größen derselben Gleichung ausgedrückt ist. Gewöhnlich ist die Unbekannte zu berechnen, welche den kleinsten Koeffizient hat, weil dann der entstehende Nenner am kleinsten ist. Den für die berechnete Unbekannte erhaltenen Ausdruck setzt man in alle übrigen Gleichungen an Stelle dieser Unbekannten ein, wodurch die Anzahl der Gleichungen und zugleich die der Unbekannten um eine geringer wird. Mit diesen Gleichungen verfährt man auf gleiche Weise (Entwickelung ꝛc.), bis man nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten hat.

1. Beispiel.

I. $\frac{5x - 3y}{4} = \frac{x + y}{6} - 9^2/_3$; II. $\frac{y - x}{5} - \frac{3x - 7y}{2} = 31$.

Die Gleichungen zunächst vereinfacht und geordnet:

$15x - 9y = 2x + 2y - 116;$	$2y - 2x - 15x + 35y = 310;$
I*. $13x - 11y = -116.$	II*. $-17x + 37y = 310.$

Die vereinfachten Gleichungen, die der Übersicht wegen mit I* und II* bezeichnet sind, sind nun erst aufzulösen. Der kleinste der 4 Koeffizienten ist -11. Man berechnet daher das zugehörige y;

$$-11y = -116 - 13x;$$
$$11y = 116 + 13x;$$
$$y = \frac{116 + 13x}{11} \ldots\ldots (A).$$

Da y aus I* berechnet ist, so ist der dafür erhaltene Wert in alle übrigen Gleichungen, d. i. in II*, einzusetzen.

$$-17x + 37 \cdot \frac{116 + 13x}{11} = 310; \text{ mit 11 mult.}$$
$$-187x + 37(116 + 13x) = 3410; \text{ (s. § 3, III, 5)}$$
$$-187x + 4292 + 481x = 3410;$$
$$294x = -882;$$
$$x = -3.$$

Diese Auflösung setzt man in den Ausdruck ein, welchen man für die vorhergehende Unbekannte erhalten hatte, also in A. Es ergiebt sich $y = \frac{116 + 13 . (-3)}{11} = 7$.

2. Beispiel.

$$\text{I.}\quad \frac{3x - 4y}{5} = \frac{x + z + 2}{3} + 21\tfrac{1}{2} - \frac{5y - 3z - 1}{2};$$

$$\text{II.}\quad 1 + \frac{x - y - 1}{2} + \frac{2y - z + 2}{3} : \frac{3y - z - 2x}{4} = 2:1; \text{ (Proportion!)}$$

$$\text{III.}\quad \frac{x + 7y - 5z - 1}{4} = \frac{5x - z}{2} + 2\tfrac{1}{4}.$$

Die Gleichungen sind zunächst zu ganzzahligen Gliedern zu entwickeln.

Aus I (mit 30 mult.)

$$18x - 24y = 10x + 10z + 20 + 645 - 75y + 45z + 15;$$

$$\text{I*.}\quad 8x + 51y - 55z = 680.$$

Aus II (s. § 44, III)

$$1 . \left(1 + \frac{x - y - 1}{2} + \frac{2y - z + 2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{3y - z - 2x}{4};$$

$$1 + \frac{x - y - 1}{2} + \frac{2y - z + 2}{3} = \frac{3y - z - 2x}{2};$$

$$6 + 3x - 3y - 3 + 4y - 2z + 4 = 9y - 3z - 6x;$$

$$\text{II*.}\quad 9x - 8y + z = -7.$$

Aus III (mit 4 mult.)

$$x + 7y - 5z - 1 = 10x - 2z + 9;$$

$$\text{III*.}\quad 9x - 7y + 3z = -10.$$

I*, II* und III* sind nun erst aufzulösen. Von den Unbekannten hat z in II* den kleinsten Koeffizient, daher ist diese Unbekannte aus II* zu berechnen. Man findet:

$$z = -9x + 8y - 7; \ldots \text{(A)}.$$

Da z aus II* berechnet ist, so ist der für diese Unbekannte gefundene Wert in I* und III* (also in die übrigen Gleichungen) einzusetzen, zunächst in I*:

$8x + 51y - 55(-9x + 8y - 7) = 680$; vereinfacht:
$8x + 51y + 495x - 440y + 385 = 680$;

$$\mathrm{I}^0.\ 503x - 389y = 295.$$

Nun auch A in III* substituiert:

$$9x - 7y + 3(-9x + 8y - 7) = -10;$$
$$9x - 7y - 27x + 24y - 21 = -10;$$
$$\mathrm{II}^0.\ 18x - 17y = -11.$$

Die vereinfachten Gleichungen I^0 und II^0 mit nur noch 2 Unbekannten x und y löst man nun auf gleiche Weise auf.

y aus II^0 berechnet: $y = \frac{18x + 11}{17} \cdots\cdots$ (B).

Dieser Wert in I^0 eingesetzt:

$$503x - 389 \cdot \frac{18x + 11}{17} = 295; \text{ mit 17 mult.}$$
$$8551x - 389(18x + 11) = 5015;$$
$$8551x - 7002x - 4279 = 5015;$$
$$1549x = 9294;$$
$$x = 6.$$

Aus B und A (stets zurückschreitend!) finden sich nun die übrigen Unbekannten. Aus B:

$$y = \frac{18.6 + 11}{17} = 7;\ \text{aus A}: z = -9.6 + 8.7 - 7 = -5.$$

3. Beispiel.
$$\begin{aligned} &\mathrm{I.}\ 5x + 4y = 27 \\ &\mathrm{II.}\ 7y - 3z = 13 \\ &\mathrm{III.}\ 11z + 5u = 6 \\ &\mathrm{IV.}\ 8u - 9x = 105. \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind schon in einfachster Form vorhanden, folglich kann die Auflösung sogleich beginnen. Um diese abzukürzen, berechne man, besonders wenn viele Gleichungen, jede mit nur wenig Unbekannten, gegeben sind, mehrere Unbekannte zugleich und zwar so, daß sie durch ein und dieselbe dritte ausgedrückt werden. Hier drücke man z. B. y aus I und auch u aus IV durch x aus. Folglich

$$y = \frac{27 - 5x}{4} \cdots\cdots \text{(A) und } u = \frac{105 + 9x}{8} \cdots\cdots \text{(B).}$$

Diese Werte an Stelle von y und u in die übrigen Gleichungen (II und III) eingesetzt:

Aus II: $7 \cdot \frac{27-5x}{4} - 3z = 13;$

$$189 - 35x - 12z = 52;$$

$$\mathrm{I}^0.\ 35x + 12z = 137.$$

Aus III: $11z + 5 \cdot \frac{105+9x}{8} = 6;$ vereinfacht:

$$88z + 525 + 45x = 48;$$

$$\mathrm{II}^0.\ 45x + 88z = -477.$$

Jetzt hat man nur noch die beiden Gleichungen I^0 und II^0 mit 2 Unbekannten (x, z). Aus I^0:

$z = \frac{137-35x}{12} \cdots$ (C); in II^0 substituiert:

$$45x + 88 \cdot \frac{137-35x}{12} = -477; \text{ dafür:}$$

$$45x + 22 \cdot \frac{137-35x}{3} = -477;$$

$$135x + 3014 - 770x = -1431;$$

$$635x = 4445;$$

$$x = 7.$$

In C eingesetzt: $z = \frac{137-35.7}{12} = -9;$

aus B: $u = \frac{105+9.7}{8} = 21;$ aus A: $y = \frac{27-5.7}{4} = -2.$

C. Koeffizientenmethode.

Diese wird auch Additions- und Subtraktionsmethode, oder englische Methode, algorithmische und unpassend: Eliminations-Methode genannt.

1) Die Koeffizienten derselben Unbekannten seien gleich. Dann verschwindet bei verschiedenen Vorzeichen diese Unbekannte durch Addition, bei gleichem Vorzeichen durch Subtraktion. Z. B.

$$\mathrm{I}.\ x + y = 23$$

$$\mathrm{II}.\ x - y = 7.$$

Durch Addition: $2x = 30$ oder $x = 15$; durch Subtraktion (s. § 8, IV): $2y = 16$ oder $y = 8$.

2) Sind die Koeffizienten derselben Unbekannten verschieden, so suche von beiden das kleinste gemeinsame Vielfache und multipliziere die Gleichungen so, daß sich die beiden Koeffizienten in jenes gemeinsame Vielfache verwandeln, um den vorausgehenden ersten Satz anwenden zu können.

1. Beispiel. I. $7x + 15y = 412$.
II. $9x - 10y = 149$.

Um x zu eliminieren, sind die Koeffizienten dieser Unbekannten gleichzumachen, also auf das kleinste gemeinsame Vielfache 63 zu bringen.

$$\begin{array}{lr} \text{I mit 9 multipl.} & 63x + 135y = 3708 \\ \text{II „ 7 „} & 63x - 70y = 1043 \\ \hline \text{durch Subtr.:} & 205y = 2665 \\ & y = 13. \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{I mit 2 multipl.} & 14x + 30y = 824; \\ \text{II „ 3 „} & 27x - 30y = 447; \\ \hline \text{durch Add.:} & 41x = 1271 \\ & x = 31. \end{array}$$

Bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ist es gewöhnlich einfacher, nur die eine Unbekannte mittels dieser Methode zu suchen und dann den für sie gefundenen Wert in eine der gegebenen Gleichungen einzusetzen. Ist also hier zunächst $y = 13$ gefunden, so setzt man diesen Wert in I ein:

$$7x + 195 = 412, \text{ also } x = 31.$$

Anmerkung. Da hier die Gleichungen multipliziert werden, wird diese Methode auch sehr unpassend Multiplikationsmethode genannt.

2. Beisp. I. $4a(x - 7a) + 3by = bx - 2ay$;
II. $3a(x + 5b) - 2ay = 4b(y - x) - 8b^2$.

Die Glieder, welche dieselben Unbekannten enthalten, sind stets zu vereinigen, da der Gleichung die Form $Ax + By + \ldots = M$ gegeben werden muß.

Daher I*. $(4a-b)x+(2a+3b)y=28a^2$;

II*. $(3a+4b)x-2(a+2b)y=-(15ab+8b^2)$.

Soll z. B. y zunächst eliminiert werden, so sind die beiden Glieder mit y auf das kleinste gemeinsame Vielfache $2(a+2b)$ $.(2a+3b)y$ zu bringen. Daher

I*. mit $2(a+2b)$ mult. $2(a+2b)(4a-b)x+2(a+2b)$ $.(2a+3b)y=56a^2(a+2b)$;

II*. mit $2a+3b$ mult. $(2a+3b)(3a+4b)x-2(a+2b)$ $.(2a+3b)y=-(15ab+8b^2)(2a+3b)$;

beide Gleichungen addiert und x links ausgehoben:

$(14a^2+31ab+8b^2)x=56a^3+82a^2b-61ab^2$ $-24b^3$. Daher

$x=\frac{56a^3+82a^2b-61ab^2-24b^3}{14a^2+31ab+8b^2}$, durch Partialdivision:

$$x=4a-3b.$$

Dies für x in I* eingesetzt:

$(4a-b)(4a-3b)+(2a+3b)y=28a^2$; folglich

$$y=\frac{12a^2+16ab-3b^2}{2a+3b},$$

durch Partialdivision: $y=6a-b$.

3) In der angewandten Mathematik kommen häufig Gleichungen von folgender Form vor:

I. $4{,}285714x-9{,}718543y+6{,}219374z\ldots.$

II. $-2{,}307692x+0{,}879456y+3{,}879266z\ldots.$ 2c.

Diese löst man am einfachsten dadurch auf, daß man jede Gleichung zunächst durch den Koeff. von x dividiert, womit man erhält:

I. $x-2{,}267660y+1{,}451187z\ldots.$

II. $x-0{,}380664y+1{,}681015z\ldots.$ 2c.

Nun zieht man Gleichung I von II, II von III, III von IV 2c. ab, womit die Unbekannte x verschwindet. In den neuen Gleichungen:

II — I: $1{,}886996y+0{,}229828z\ldots.$ 2c.

bringt man wieder (wie vorher bei x) alle Koeff. von y auf $+1$:

$$\text{I}^*.\ y + 0{,}12185z \ldots.$$
$$\text{II}^*.\ y + \ldots.$$

und entfernt wieder y durch $\text{II}^* - \text{I}^*$, $\text{III}^* - \text{II}^*$ .... 2c.

4) Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

$$\text{I.}\ 5x - 7y + 6z = 78$$
$$\text{II.}\ 4x + 8y - 9z = 22$$
$$\text{III.}\ 3x - 2y - 12z = 67.$$

Um z zu eliminieren, verbinde z. B. I mit II u. I mit III. Daher

$$\begin{array}{lrl} \text{I mit 3 mult.} & 15x - 21y + 18z & = 234 \\ \text{II „ 2 „} & 8x + 16y - 18z & = \ \ 44 \\ \hline \text{durch Abd.} & 23x - \ \ 5y \qquad & = 278.\ \ \text{I}^*. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Ferner I mit 2 mult.} & 10x - 14y + 12z & = 156 \\ \text{III:} & 3x - \ \ 2y - 12z & = \ \ 67 \\ \hline \text{durch Abd.} & 13x - 16y \qquad & = 223.\ \ \text{II}^*. \end{array}$$

Nun sind nur noch die Gleichungen I* und II* aufzulösen.

D. Komparationsmethode.

Diese Methode wird auch Kombinations-, Gleichsetzungs-, Äquations-, Reduktionsmethode genannt. Man berechnet aus allen Gleichungen dieselbe Unbekannte und setzt die für dieselben erhaltenen Ausdrücke einander gleich.

1. Beisp. $\text{I.}\ 7x + 15y = 412$
$\text{II.}\ 9x - 10y = 149$ (s. C, 2, 1. Beisp.)

Aus I: $y = \frac{412 - 7x}{15}$, aus II: $y = \frac{9x - 149}{10}$ ....(Y).

Folglich $\frac{412 - 7x}{15} = \frac{9x - 149}{10}$; mit 30 mult. 2c.

$x = 31$. Dies in I substituiert, giebt $y = 13$.

2. Beisp. Bei mehr als zwei Unbekannten ist § 46, 3 zu berücksichtigen. Z. B.

$$\text{I.}\ 5x - 7y + 6z = 78;\ \text{II.}\ 4x + 8y - 9z = 22;$$
$$\text{III.}\ 3x - 2y - 12z = 67.$$

Berechnet man aus jeder Gleichung x, so erhält man:

$$x = \frac{78 + 7y - 6z}{5} = \frac{22 - 8y + 9z}{4} = \frac{67 + 12z + 2y}{3}.$$

Daher z. B. I*. $\frac{78 + 7y - 6z}{5} = \frac{67 + 12z + 2y}{3}$ und

II*. $\frac{22 - 8y + 9z}{4} = \frac{67 + 12z + 2y}{3}$.

Diese beiden Gleichungen sind zu entwickeln, also auf die Form $ay + bz = c$ zu bringen und nach beliebiger Methode aufzulösen.

Schlußbemerkung. Der Ungeübte ist gewöhnlich in Zweifel, welche Methode er in einem vorliegenden Falle anzuwenden hat. Die nachstehenden Regeln werden die gewünschte Auskunft geben.

Sind die Koeffizienten kleinere spezielle Zahlen und in Bezug auf dieselbe Unbekannte verschieden, so ist die Substitutionsmethode anzuwenden, bei gleichen Koeffizienten jedoch die Koeffizientenmethode. Sind die Koeffizienten allgemein (Buchstaben) oder vielstellige spezielle Zahlen, so ist gleichfalls die Koeffizientenmethode anzuwenden, gegen den Schluß der Rechnung oft mit Vorteil die Substitutionsmethode. Die Komparationsmethode wendet man nur an, wenn die Gleichungen schon die Form der in vorstehendem 1. Beispiel vorkommenden Gleichungen Y haben.

E. Einige Kunstgriffe beim Auflösen der Gleichungen mit mehreren Unbekannten in Beispielen.

1. Aufgabe. I. $x^2 + y^2 = 3$; II. $6x = 2y^2 - 9$. Enthält eine der entwickelten Gleichungen eine Unbekannte nur in der 1. Potenz, so ist dieselbe aus dieser Gleichung zu berechnen und der gefundene Wert in die übrigen Gleichungen einzusetzen. Hier aus II: $x = \frac{2y^2 - 9}{6}$, in I eingesetzt:

$$\left(\frac{2y^2 - 9}{6}\right)^2 + y^2 = 3, \text{ d. i. } 4y^4 - 36y^2 + 81 + 36y^2 = 108,$$

$$\text{daher } y^4 = 6{,}75;\ y = \sqrt[4]{6{,}75} \text{ u. s. w.}$$

2. Aufgabe. I. $(2a-3b+5)x+(3a+5b+1)=6$; II. $(2a-3b+4)x+(3a+5b+2)y=5$.

Setze $2a-3b+5=d$, folglich $2a-3b=d-5$ und $2a-3b+4=d-5+4=d-1$; ebenso $3a+5b+1=e$, folglich $3a+5b=e-1$ und $3a+5b+2=e-1+2=e+1$.

Damit gehen die gegebenen Gleichungen über in: I*. $dx+ey=6$ und II*. $(d-1)x+(e+1)y=5$. II*. von I* subtrahiert giebt: $x-y=1$, folgl. $y=x-1$ und dies in I* substituiert:

$dx+e(x-1)=6$, woraus sich $x=\frac{e+6}{d+e}$

$=\frac{3a+5b+1+6}{2a-3b+5+3a+5b+1}=\frac{3a+5b+7}{5a+2b+6}$ ergiebt.

Aus $y=x-1$ (s. ob.) ergiebt sich nun

$$y=\frac{3a+5b+7}{5a+2b+6}-1=\frac{-2a+3b+1}{5a+2b+6}.$$

3. Aufgabe.

I. $5xy+7x-2y=10$; II. $4xy-6x+11y=21$. Enthält jede der gegebenen Gleichungen denselben zusammengesetzten Ausdruck (xy in den hier gegebenen Gleichungen), außer diesem aber die Unbekannten nur in einfacher Gestalt, so eliminiere man zunächst nur diesen Ausdruck aus einer der Gleichungen (s. auch die nächste Aufgabe).

$$\begin{array}{ll} \text{I mit 4 mult.} & 20xy+28x-\ \ 8y=\ \ 40 \\ \text{II mit 5 mult.} & \underline{20xy-30x+55y=105} \text{ subt.} \\ & \qquad\qquad 58x-63y=-65; \end{array}$$

also $x=\frac{63y-65}{58}$. Dies in II substituiert:

$4y\cdot\frac{63y-65}{58}-6\cdot\frac{63y-65}{58}+11y=21$, oder

$2y\cdot\frac{63y-65}{29}-3\cdot\frac{63y-65}{29}+11y=21$. Mit 29 mult. ꝛc., ergiebt sich $y=\pm\sqrt{\frac{23}{7}}=\pm\frac{\sqrt{161}}{7}$;

daher $x = \frac{63\,y - 65}{58}$ (s. ob.) $= \frac{63 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{161}}{7}\right) - 65}{58}$
$= \frac{\pm 9\sqrt{161} - 65}{58}$.

Folglich entweder $y = \frac{\sqrt{161}}{7}$ und $x = \frac{9\sqrt{161} - 65}{58}$ oder
$y = -\frac{\sqrt{161}}{7}$ und $x = \frac{-9\sqrt{161} - 65}{58}$.

4. Aufgabe.

I. $3 + 2\left(\frac{5\,x - 6}{2\,x + y}\right)^2 = 4\,y$; II. $6\,y = 5\left(\frac{5\,x - 6}{2\,x + y}\right)^2 + 3$.

Aus I: $\left(\frac{5\,x - 6}{2\,x + y}\right)^2 = \frac{4\,y - 3}{2}$. Dies in II substituiert:
$6\,y = 5 \cdot \frac{4\,y - 3}{2} + 3$; folglich $y = {}^9/_8$. Dies in I substituiert: $3 + 2 \cdot \left(\frac{5\,x - 6}{2\,x + {}^9/_8}\right)^2 = 4^1/_2$, d. i. $\left(\frac{40\,x - 48}{16\,x + 9}\right)^2 = {}^3/_4$;
daraus die $\sqrt{\ }$ gezogen: $\frac{40\,x - 48}{16\,x + 9} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $80\,x - 96$
$= 16\sqrt{3} \cdot x + 9\sqrt{3}$; $x = \frac{96 + 9\sqrt{3}}{80 - 16\sqrt{3}} = \frac{3\,(32 + 3\sqrt{3})}{16\,(5 - \sqrt{3})}$
mit $5 + \sqrt{3}$ erweitert (s. § 30, XX, 2) ꝛc.

5. Aufgabe. I. $\frac{7}{3x + 4\,y - 9} + 14\,x + 34 = 10\,y$;
II. $\frac{8}{3x + 4\,y - 8} = 21\,x - 15\,y + 69^1/_2$.

Man gebe den Gleichungen folgende Gestalt:

$$\text{I. } \frac{7}{3\,x + 4\,y - 9} + 2\,(7\,x + 17 - 5\,y) = 0;$$
$$\text{II. } \frac{8}{3x + 4y - 9 + 1} = 3\,(7\,x - 5\,y + 17) + 18^1/_2.$$

Nun setze man $3\,x + 4\,y - 9 = u$ und $7\,x - 5\,y + 17 = v$. Damit verwandeln sich die Gleichungen in folgende:

$$\text{I. } \frac{7}{u} + 2v = 0 \text{ oder I*. } 2uv = -7.$$

$$\text{II. } \frac{8}{u+1} = 3v + 18\tfrac{1}{2} \text{ oder II*. } 6uv + 6v + 37u = -21.$$

Von II* das 3fache der Gleichung I* subtrahiert, bleibt $6v + 37u = 0$, daraus $v = -\frac{37u}{6}$ und dies in I* eingesetzt: $2u\left(-\frac{37u}{6}\right) = -7$ oder $\frac{37u^2}{3} = 7$, $u = \sqrt{\frac{21}{37}}$ $= \pm 0,75337$.

Folglich $v = -\frac{37.(\pm 0,75337)}{6} = \mp 4,64579$. Diese Werte oben für u und v eingesetzt, erhält man die einfachen Gleichungen:

$3x + 4y - 9 = \pm 0,75337, 7x - 5y + 17 = \mp 4,64579.$

Es ergeben sich nun zwei verschiedene Auflösungen; die eine aus $3x + 4y - 9 = 0,75337$ und $7x - 5y + 17 = -4,64579$, die andere aus $3x + 4y - 9 = -0,75337$ und $7x - 5y + 17 = 4,64579$.

6. Aufgabe. I. $5xy - 6xz + 9yz = 240$; II. $4xy + 3xz - 2yz = -219$; III. $-xy + 2xz + yz = -34$.

Setze $xy = u$, $xz = v$, $yz = w$. Daher I. $5u - 6v + 9w = 240$ 2c.

Hat man $u = -21$, $v = -35$, $w = 15$ gefunden, so ist also I*. $xy = -21$; II*. $xz = -35$; III*. $yz = 15$.

Diese drei Gleichungen multipliziert: $x^2y^2z^2 = 11025$, folglich $xyz = \sqrt{11025} = \pm 105 \ldots\ldots$ (Z).

$$\text{Z durch I* div.: } z = \frac{\pm 105}{-21} = \mp 5;$$

$$\text{Z durch II* div.: } y = \frac{\pm 105}{-35} = \mp 3;$$

$$\text{Z durch III* div.: } x = \frac{\pm 105}{15} = \pm 7.$$

7. Aufgabe. I. $3xy + 4xz - 5yz = \frac{19xyz}{12}$; II. $7xy - 2xz + 4yz = \frac{145xyz}{12}$; III. $6xy + xz - 3yz = \frac{13xyz}{3}$.

Die Gleichungen durch xyz div., erhält man:

$$\text{I}^*.\ \frac{3}{z} + \frac{4}{y} - \frac{5}{x} = {}^{19}/_{12};\ \text{II}^*.\ \frac{7}{z} - \frac{2}{y} + \frac{4}{x} = {}^{145}/_{12};$$
$$\text{III}^*.\ \frac{6}{z} + \frac{1}{y} - \frac{3}{x} = {}^{13}/_{3}.$$

Man denke sich $\frac{3}{z} = 3 . \frac{1}{z}$ 2c. und setze $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = w$; dann erhält man die Gleichungen:

$$\text{I}^0.\ 3w + 4v - 5u = {}^{19}/_{12};\ \text{II}^0.\ 7w - 2v + 4u = {}^{145}/_{12};$$
$$\text{III}^0.\ 6w + v - 3u = {}^{13}/_{3}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:
$u = {}^3/_2$, $v = {}^4/_3$, $w = {}^5/_4$; d. i.
$\frac{1}{x} = {}^3/_2$, $\frac{1}{y} = {}^4/_3$, $\frac{1}{z} = {}^5/_4$; folgl. $x = {}^2/_3$, $y = {}^3/_4$, $z = {}^4/_5$.

8. Aufgabe.

$$\text{I.}\ 16y - 9\sqrt[3]{x^2} = 50;\ \text{II.}\ 4\sqrt{y} - 3\sqrt[3]{x} = 20.$$

Man setze $\sqrt[3]{x} = u$ u. $\sqrt{y} = v$, folgl. ist $\sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = u^2$; $y = (\sqrt{y})^2 = v^2$. Die gegebenen Gleichungen werden damit:

$$\text{I}^*.\ 16v^2 - 9u^2 = 50;\ \text{II}^*.\ 4v - 3u = 20.$$

I* durch II* dividiert, giebt $\frac{(4v + 3u)(4v - 3u)}{4v - 3u} = {}^{50}/_{20}$ oder $4v + 3u = 2^1/_2$. Aus dieser Gleichung in Verbindung mit $4v - 3u = 20$ ergiebt sich sehr leicht $u = -{}^{35}/_{12}$ und $v = 2^{13}/_{16}$, d. i.

$$\sqrt[3]{x} = -{}^{35}/_{12} \text{ oder } x = (-{}^{35}/_{12})^3 = -({}^{35}/_{12})^3 = -24{,}8119$$
$$\text{und } \sqrt{y} = 2^{13}/_{16} \text{ oder } y = ({}^{45}/_{16})^2 = 7{,}9102.$$

9. Aufgabe. I. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=11$

II. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{u}=4$

III. $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=-2$

IV. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=8.$

Alle vier Gleichungen addiert, erhält man:

$\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}+\frac{3}{u}=21$; durch 3 div.:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=7 \ldots\ldots (S).$

S um I vermindert, giebt $\frac{1}{u}=-4$; oder $u=-\,^1/_4$

S um II „ „ $\frac{1}{z}=3$; $z=\,^1/_3$ ꝛc.

10. Aufgabe. I. $6x=5\sqrt{3x+2y+4}-17$;

II. $4y=\sqrt{3x+2y+4}-5.$

Durch Addition beider Gleichungen:

$2(3x+2y)=6\sqrt{3x+2y+4}-12$; oder

$3x+2y+6=3\sqrt{3x+2y+4}$;

$3x+2y+4=u$ gesetzt: $u+2=3\sqrt{u}$;

quadriert: $u^2+4u+4=9u$ oder $u^2-5u+4=0.$

Denkt man sich dies $u^2-4u-u+4=0$ d. i. $u(u-4)-(u-4)=0$ oder $(u-1)(u-4)=0$, so ist also 1) $u-1=0$ oder $u=1$, d. i. $3x+2y+4=1$ und 2) $u-4=0$ oder $u=4$, d. i. $3x+2y+4=4.$

Mit dem ersten Wert erhält man aus I: $6x=5\sqrt{1}-17$ oder $x=\frac{\pm 5-17}{6}$ und aus II: $4y=\sqrt{1}+5$ oder

$y = \frac{\pm 1 + 5}{4}$; mit dem 2. Wert aus I: $6x = 5\sqrt{4} - 17$ oder $x = \frac{\pm 10 - 17}{6}$ und aus II: $4y = \sqrt{4} + 5$, oder $y = \frac{\pm 2 + 5}{4}$. Die Aufgabe hat also folgende 4 Auflös.:

1) $x = \frac{+5-17}{6}$, $y = \frac{1+5}{4}$; 2) $x = \frac{-5-17}{6}$, $y = \frac{-1+5}{4}$; 3) $x = \frac{10-17}{6}$, $y = \frac{+2+5}{4}$;
4) $x = \frac{-10-17}{6}$, $y = \frac{-2+5}{4}$.

11. Aufgabe. I. $5x - y = a + b + c - d$;
II. $4x - 3y = a - b + c - d$.

Oft werden die Gleichungen einfacher, wenn man sie addiert oder subtrahiert.

Subtrahiert man hier II von I, so ergiebt sich $x + 2y = 2b$, daher $x = 2b - 2y$ in I substituiert ꝛc.

12. Aufgabe. I. $2(8x - 3y)^2 y^3 = (x - 2y) x^3$;
II. $5(8x - 3y) x^3 = (x - 2y)^2 y^3$.

Man multipliziere die Gleichungen (die linke Seite mit der linken, die rechte mit der rechten).

$10(8x - 3y)^3 x^3 y^3 = (x - 2y)^3 x^3 y^3$; durch $x^3 y^3$ div.: $10(8x - 3y)^3 = (x - 2y)^3$; die $\sqrt[3]{\;}$ ausgezogen:

$\sqrt[3]{10} . (8x - 3y) = x - 2y$; folglich $y = \frac{8\sqrt[3]{10} - 1}{3\sqrt[3]{10} - 2} \cdot x$.

Um nun nicht mit diesem unbequemen Ausdruck zu rechnen, setze man vorläufig $y = ax$. Dies in II eingesetzt:

$5(8x - 3ax)x^3 = (x - 2ax)^2 a^3 x^3$; d. i. auch $5(8 - 3a)x^4 = a^3(1 - 2a)^2 x^5$; durch x^4 div. ($x = 0$!) giebt $x = \frac{5(8 - 3a)}{a^3(1-2a)^2}$. Man berechne nun a und setze den Wert in die Auflösung von x.

13. Aufgabe. I. $25x^2 - 4y^2 = 704$;
II. $5x + 2y = 44$.

Entweder denke man sich I als $(5x + 2y)(5x - 2y) = 704$ und setze II hier ein. Man erhält alsdann $44(5x - 2y) = 704$ oder $5x - 2y = 16$. Diese Gleich. löse man in Verbindung mit II auf. Oder dividiere I durch II und es ergiebt sich sofort $5x - 2y = 16$ ꝛc.

14. Aufgabe. I. $3(4x + 7y)^2 = 2(5x - 6y)^2$;
II. $2x + y = 139$.

Hier sind die Quadrate nicht in die bekannten drei Glieder aufzulösen, vielmehr wird Gleichung I durch Wurzelausziehen eine einfache, nämlich: $\sqrt{1{,}5} \,.\, (4x + 7y) = 5x - 6y$, daraus ergiebt sich

$$\sqrt{1{,}5} \,.\, 4x + 7\sqrt{1{,}5} \,.\, y = 5x - 6y \text{ oder}$$
$$(5 - 2\sqrt{6})x = (6 + 7\sqrt{1{,}5})y.$$

Man setze daher $x = \dfrac{6 + 7\sqrt{1{,}5}}{5 - 2\sqrt{6}} \cdot y$ in II ein.

15. Aufgabe. I. $\dfrac{7x}{a-b} - \dfrac{2(3a-b)y}{15} = 22a - 26b$;
II. $\dfrac{5x}{a+b} - \dfrac{(2a+b)y}{10} = 8a + 19b$.

Haben alle Gleichungen die Form $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} \cdots = K$, so wird die Auflösung gewöhnlich einfacher, wenn man jede Unbekannte = einem Produkt aus dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller zugehörigen Nenner und einer neuen Unbekannten setzt. Es sei hier $x = (a+b)(a-b)u = (a^2 - b^2)u$; $y = 30v$. Damit gehen die Gleichungen über in:

I*. $7(a+b)u - 4(3a-b)v = 22a - b$;
II*. $5(a-b)u - 3(2a+b)v = 8a + 19b$.

Die Lösung ist wie beim 2. Beispiel in C, 2 auszuführen. Man erhält $u = -2$, $v = -3$. Folglich ist

$$x = (a^2 - b^2)u = -2(a^2 - b^2) = 2(b^2 - a^2);$$
$$y = 30v = 30(-3) = -90.$$

16. Aufgabe. I. $4x^2 + 9xy = 12\sqrt{xy}$;
II. $5x - 6y = 7$.

Sind alle Glieder einer Gleichung unbekannt, so wird die Lösung oft dadurch einfacher, daß man die eine Unbekannte = einem Produkt aus der andern Unbekannten und einer neuen Hilfsunbekannten setzt. Dies ist besonders dann von wesentlichem Vorteil, wenn alle Glieder von gleicher Dimension sind (s. § 46, I, 5). Hier setze $y = xz$, folglich wird aus I: $4x^2 + 9x.xz = 12x\sqrt{x.xz}$; d. i. $4x^2 + 9x^2z = 12x^2\sqrt{z}$; durch x^2 div. und $\sqrt{z} = u$, also $z = u^2$ gesetzt, giebt $4 + 9u^2 = 12u$ oder $4 - 12u + 9u^2 = 0$, d. i. (s. § 18, II) $(2 - 3u)^2 = 0$. Die Wurzel giebt $2 - 3u = 0$ oder $u = {}^2/_3$; d. i. $\sqrt{z} = {}^2/_3$, folglich $z = {}^4/_9$. Nun ist $y = xz = \frac{4x}{9}$. Dies in II substit.: $5x - 6 \cdot \frac{4x}{9} = 7$, folglich $x = 3$; $y = \frac{4x}{9} = \frac{4.3}{9} = 1^1/_3$.

17. Aufgabe. I. $(x - 3y + 4)(5x - 2y - 6) = 0$;
II. $(7x + y - 1)(2x + 5y - 3) = 0$.

Nach § 43, IV, F ist z. B. $x - 3y + 4 = 0$ 2c. Da nun bei 2 Unbekannten 2 Gleichungen gegeben sein müssen, so ist z. B. mit $x - 3y + 4 = 0$ noch eine zweite zu verbinden; doch kann dies nicht $5x - 2y - 6 = 0$ sein, weil dann die Lösungen nur der Gleichung I genügen würden. Folglich ist aus jeder der beiden Gleichungen immer nur ein Faktor zu benutzen. Die Aufgabe hat mithin 4 Auflösungen. Die eine folgt aus $x - 3y + 4 = 0$ und $7x + y - 1 = 0$, die zweite aus $x - 3y + 4 = 0$ und $2x + 5y - 3 = 0$, die dritte aus $5x - 2y - 6 = 0$ und $7x + y - 1 = 0$, die vierte aus $5x - 2y - 6 = 0$ und $2x + 5y - 3 = 0$.

18. Aufgabe. I. $x^2 + y^2 = 34$; II. $x - y = 2$.

Aus $x + y$, $x - y$, xy, $x^2 + y^2$, $x^2 \pm nxy + y^2$ läßt sich durch passende Verbindung stets $(x \pm y)^2$, also auch $x \pm y$ herstellen. Z. B. $(x^2 + y^2) - 2 . xy = (x - y)^2$ oder $(x^2 - 5xy + y^2) + 7xy = (x + y)^2$ 2c.

Obige Aufgabe wird daher in folgender Weise gelöst:

$$\begin{array}{lrl} \text{II quadriert:} & x^2 - 2xy + y^2 = & 4; \\ \text{I:} & x^2 \qquad + y^2 = & 34 \\ \hline \text{durch Subtr.} & 2xy \qquad = & 30, \end{array}$$

oder $xy = 15$. Aus $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 34 \\ \;\;2xy \;\;= 30 \end{array}\right\}$ ergiebt sich nun durch Addition: $(x+y)^2 = 64$, folglich ist auch $x + y = \pm 8$ bekannt. Diese Gleichung ist mit II. $x - y = 2$ zur Auflösung zu benutzen.

19. Aufgabe. I. $x^3 + y^3 = 133$; II. $x + y = 7$.

Entweder: II kubiert: $x^3 + 3xy(x+y) + y^3 = 343$; die gegebenen Werte eingesetzt, ergiebt sich

$$133 + 3xy \cdot 7 = 343,$$

oder $xy = 10$. Diese Gleichung mit II: $x + y = 7$ führt zur Lösung (s. Aufgabe 18).

Oder: I in folgender Weise geschrieben:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 133 \text{ (s. § 17, III)};$$

d. i. $7(x^2 - xy + y^2) = 133$, oder $x^2 - xy + y^2 = 19$. Aus II folgt aber $x^2 + 2xy + y^2 = 49$. Diese Gleichung um die vorhergehende vermindert: $3xy = 30$, folglich $xy = 10$ 2c. (wie im 1. Falle).

§ 47. Angewandte einfache und binomische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1. Aufgabe. N leiht dem A ein Kapital zu 5 % auf 9 Monate, dem C ein Kapital zu $4\frac{1}{2}$ % auf 8 Monate und erhält von beiden $243\frac{3}{4}$ ℳ Zinsen. Hätte jeder das Kapital 1 Monat länger behalten und wäre bei beiden der Zinsfuß 1 % geringer gewesen, so hätte N nur 215 ℳ Zinsen erhalten. Wie groß waren die Kapitalien?

Auflösung. Er lieh dem A x, dem B y. Die Zinsen des A betragen $\frac{x \cdot {}^3/_4 \cdot 5}{100} = \frac{3x}{80}$, des B $\frac{y \cdot {}^2/_3 \cdot 4^1/_2}{100} = \frac{3y}{100}$.

Folglich I. $\frac{3x}{80} + \frac{3y}{100} = 243^3/_4$, oder (durch 3 div. und mit 400 mult.) I*. $5x + 4y = 32500$.

Im zweiten Falle betragen die Zinsen des A: $\frac{x \cdot {}^5/_6 \cdot 4}{100} = \frac{x}{30}$, des B $\frac{y \cdot {}^3/_4 \cdot 3^1/_2}{100} = \frac{21y}{800}$; folgl. II. $\frac{x}{30} + \frac{21y}{800} = 215$ und mit 2400 mult.: II*. $80x + 63y = 516000$. Wird I* mit 16 multipliziert und um II* vermindert, so ergiebt sich $y = 4000$ und dann aus I*: $x = 3300$.

2. Aufgabe. Eine Hausfrau nahm zwei Mägde in Dienst, jede für 180 ℳ jährlichen Lohn; außerdem sollte jede ein neues Kleid und ein Stück Leinwand erhalten. Die erste verließ nach 9 Monaten den Dienst, und weil sie schon das Kleid erhalten hatte, so bekam sie noch $138^3/_4$ ℳ. Die zweite verließ nach 10 Monaten den Dienst und, da sie schon die Leinwand erhalten, noch $158^1/_2$ ℳ Lohn. Wie hoch waren Kleid und Leinwand gerechnet?

Auflösung. Das Kleid x ℳ, die Leinwand y ℳ. Die erste sollte also für 1 Jahr $180 + x + y$, für $^3/_4$ Jahr also $^3/_4(180 + x + y)$ erhalten, sie bekam aber $138^3/_4 + x$. Folglich ist:

$$135 + \frac{3x}{4} + \frac{3y}{4} = 138^3/_4 + x; \text{ oder I. } 15 + x = 3y.$$

Die zweite sollte für $^5/_6$ Jahr: $^5/_6(180 + x + y)$ erhalten, erhielt aber $158^1/_2 + y$; folglich ist:

$$150 + \frac{5x}{6} + \frac{5y}{6} = 158^1/_2 + y; \text{ oder II. } 5x = 51 + y.$$

Aus II: $y = 5x - 51$, in I eingesetzt:

$$15 + x = 3(5x - 51), \text{ folglich } x = 12;$$
$$\text{daher } y = 5x - 51 = 60 - 51 = y.$$

3. Aufgabe. Ich kenne 3 Zahlen von folgender Beschaffenheit. Die 3. ist gleich der Summe der beiden ersten. Die Summe der Quadrate aller 3 Zahlen ist $= 2094$. Das Quadrat der 1. durch die 2. dividiert giebt die 3. als Quotient mit dem Rest 11. Welche Zahlen sind es?

Auflösung. Die 1. $= x$, die 2. $= y$, die 3. $= z$. Folglich I. $z = x + y$; II. $x^2 + y^2 + z^2 = 2094$; (III) $\frac{x^2}{y} = z + \frac{11}{y}$ (s. § 3, IV, 24), dafür also III. $x^2 = yz + 11$. Aus I folgt $x = z - y$, dies quadriert:

$$x^2 = z^2 - 2yz + y^2.$$

Aus II folgt: $2094 - x^2 = z^2 \qquad + y^2$; dies subtr.

$2x^2 - 2094 = \quad -2yz$ u. da $yz = x^2 - 11$ (s. III), so ist $2x^2 - 2094 = \quad -2(x^2 - 11)$; d. i. $4x^2 = 2116$, $x^2 = 529$; $x = 23$. Hier ist -23 jedenfalls nicht beabsichtigt. Nun ist also $z - y = 23$ (s. I), daher $z^2 - 2yz + y^2 = 529$. Wird hierzu $4yz = 2072$ (aus $yz = x^2 - 11 = 23^2 - 11$) addiert, so folgt $(z + y)^2 = 2601$, d. i. $z + y = 51$. Aus dieser Gleichung und $z - y = 23$ ergiebt sich nun $y = 14$, $z = 37$.

§ 48. Methode der unbestimmten Koeffizienten.

I. Soll für alle Werte von x die Gleichung
$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$
gelten, so muß $A = a$, $B = b$, $C = c$ 2c. sein, die Koeffizienten derselben Potenz von x müssen also einander gleich sein.

Beweis. Da jene Gleichung für alle Werte von x gelten soll, so muß dies auch für $x = 0$ der Fall sein, dann geht aber die Gleichung über in $A = a$. Damit wird aber auch die Gleichung:

$a + Bx + Cx^2 + \ldots = a + bx + cx^2 + \ldots$, folglich

$Bx + Cx^2 + \ldots = bx + cx^2 + \ldots$; durch x div.

$B + Cx + \ldots = b + cx + \ldots$ und da dies auch für $x = 0$ gelten soll: $B = b$; 2c.

II. Anwendung.

1. Aufgabe. $\frac{29 - 11x}{(5x - 2)(3x + 7)}$ in Partialbrüche zu zerlegen, von welchen der eine den Nenner $5x - 2$, der andere den Nenner $3x + 7$ hat.

Auflös. Es sei $\frac{29 - 11x}{(5x - 2)(3x + 7)} = \frac{m}{5x - 2} + \frac{n}{3x + 7}$, wo m und n noch zu bestimmende Koeffizienten sind. Die Gleichung mit $(5x - 2)(3x + 7)$ multipliziert:
$29 - 11x = m(3x + 7) + n(5x - 2)$, d. i.
$29 - 11x = 7m - 2n + (3m + 5n)x$. Nach I muß nun I. $7m - 2n = 29$, II. $3m + 5n = -11$ sein. Die Auflösung dieser Gleichungen giebt $m = 3$ und $n = -4$. Damit geht die obige Annahme über in:

$$\frac{29 - 11x}{(5x - 2)(3x + 7)} = \frac{3}{5x - 2} + \frac{-4}{3x + 7} = \frac{3}{5x - 2} - \frac{4}{3x + 7}.$$

2. Aufgabe. $\frac{6x^4 - 29x^3 + x^2 - 18x - 141}{(2x + 3)(x - 5)}$ in Partialbrüche zu zerlegen.

Auflösung. Da der Zähler von kleinerem Umfange als der Nenner sein muß (s. vorhergehendes Beispiel), so ist hier der Nenner in die einzelnen Glieder aufzulösen und durch Partialdivision jene Form zu erreichen. Man findet (s. § 28, II)

$$\frac{6x^4 - 29x^3 + x^2 - 18x - 141}{2x^2 - 7x - 15}$$
$$= 3x^2 - 4x + 9 - \frac{15x + 6}{2x^2 - 7x - 15}.$$

Nun setzt man den letzten Bruch, dessen Nenner $(2x + 3)$ $.(x - 5)$ ist, wie in der 1. Aufgabe $= \frac{m}{2x + 3} + \frac{n}{x - 5}$. Man findet $m = {}^{33}/_{15}$, $n = {}^{81}/_{13}$. Folglich ist der gegebene Ausdruck $= 3x^2 - 4x + 9 - \left[\frac{{}^{33}/_{13}}{2x + 3} + \frac{{}^{81}/_{13}}{x - 5}\right]$

$$= 3x^2 - 4x + 9 - {}^{3}/_{13}\left[\frac{11}{2x + 3} + \frac{27}{x - 5}\right].$$

3. Aufgabe. $71x - 63x^2 - 20$ in das Produkt zweier binomen Faktoren zu zerlegen.

Auflös. Geordnet und den Koeff. von x^2 auf $+1$ gebracht $= -63x^2 + 71x - 20 = -63\left(x^2 - \frac{71x}{63} + {}^{20}/_{63}\right).$

Es sei nun $x^2 - \frac{71x}{63} + {}^{20}/_{63} = (x+m)(x+n)$, folglich $x^2 - \frac{71x}{63} + {}^{20}/_{63} = x^2 + (m+n)x + mn$.

Nach dem 1. Satz ist I. $m + n = -{}^{71}/_{63}$; II. $mn = {}^{20}/_{63}$.

$$\begin{array}{lll} \text{I quadriert:} & m^2 + 2mn + n^2 & = ({}^{71}/_{63})^2; \\ \text{Aus II:} & 4mn & = {}^{80}/_{63} \\ \hline \text{Durch Subtr.} & (m-n)^2 & = ({}^{71}/_{63})^2 - {}^{80}/_{63}; \end{array}$$

folglich $m - n = \sqrt{\frac{71^2 - 80 \,.\, 63}{63^2}} = {}^{1}/_{63}$. Aus dieser Gleich. und I folgt nun $m = -{}^{5}/_{9}$ und $n = -{}^{4}/_{7}$. Diese Werte in den angenommenen Ausdruck eingesetzt: $x^2 - \frac{71x}{63} + {}^{20}/_{63} = (x - {}^{5}/_{9})(x - {}^{4}/_{7})$, folglich (s. S. 197, letzte Zeile) $71x - 63x^2 - 20 = -63\ (x - {}^{5}/_{9})\ (x - {}^{4}/_{7}) = 9 \,.\, (x - {}^{5}/_{9}) \,.\, (-7)(x - {}^{4}/_{7}) = (9x - 5)(4 - 7x)$.

§ 49. Gemischte quadratische Gleichung.

I. Die reine quadratische Gleichung von der Form $ax^2 = b$ ist schon durch § 43, VI aufgelöst. Um die gemischte quadratische Gleichung von der Form $Ax^2 + Bx = C$ aufzulösen, hat man zunächst den Koeffizient von x^2 auf $+1$ zu bringen, also die „Normalform“

$$x^2 + ax = b$$

herzustellen, wo a und b bekannte, aber beliebige positive oder negative Zahlen sind.

Man denke sich diese Gleichung in der Form

$$x^2 + 2 \,.\, \frac{a}{2} \,.\, x = b \ldots (Y).$$

Vergleicht man die linke Seite dieser Gleichung mit

$$x^2 + 2 \,.\, e \,.\, x + e^2 = (x + e)^2 \text{ (s. § 18)},$$

so würde die linke Seite der Gleichung Y offenbar zu einem dreigliedrigen Quadrat eines Binoms, wenn man noch $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ hinzufügte, denn es ist

$$x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Vermehrt man aber die linke Seite von Y um $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, so muß auch nach § 43, I die rechte Seite um dieses Glied vermehrt werden, wenn die Gleichheit nicht gestört werden soll. Dann entsteht (aus Y)

$$x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

wofür also, wie beabsichtigt war,

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

geschrieben werden kann. Zieht man nun auf jeder Seite die $\sqrt{}$ aus, so erhält man die einfache Gleichung:

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$ mit der Auflösung:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

Die quadratische Gleichung hat also stets zwei Auflösungen:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \text{ und } x = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

In gleicher Weise würde man

$$x^2 - ax = b \text{ in}$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b, \text{ d. i.}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$ verwandeln. Die $\sqrt{}$ giebt:

$$x - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

II. Aus dieser Betrachtung folgt das nachstehende Verfahren für die Auflösung der quadratischen Gleichung:

Man setzt auf jeder Seite der quadratischen Gleichung, die die Normalform haben muß, das Quadrat des halben Koeffizienten von x^1 hinzu, um auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat von 3 Gliedern zu erhalten. Hierauf zieht man aus jeder Seite die Quadratwurzel. Dieselbe ist aus dem dreigliedrigen Ausdruck der linken Seite zweigliedrig und zwar erhält man die beiden Glieder, wenn man aus dem 1. und 3. Gliede (die stets als Quadrate vorhanden sind) die Quadratwurzel zieht und dem 2. Gliede derselben das Zeichen des 2. Gliedes jenes dreigliedrigen Ausdrucks giebt. Schließlich löst man die erhaltene Gleichung noch in gewöhnlicher Weise auf. Z. B. $x^2 + x = 56$. Der Koeff. von x^1 ist 1; das Quadrat der Hälfte desselben auf jeder Seite hinzugefügt:

$x^2 + 2 \cdot {}^1\!/_2 \cdot x + ({}^1\!/_2)^2 = ({}^1\!/_2)^2 + 56 = 56{,}25$; die $\sqrt{\ }$ von beiden Seiten:

$x + {}^1\!/_2 = \pm \sqrt{56{,}25} = \pm 7^1\!/_2$; daher

$x = -{}^1\!/_2 \pm 7^1\!/_2$ und folgl. die 1. Auflös. $x_1 = -{}^1\!/_2 + 7^1\!/_2 = 7$, die 2. Auflösung $x_2 = -{}^1\!/_2 - 7^1\!/_2 = -8$.

2. Beispiel.

$x^2 - 10x = -21$; der halbe Koeff. von x^1 ist 5, daher:

$x^2 - 10x + 5^2 = 5^2 - 21$, d. i.

$x^2 - 10x + 5^2 = 4$; d. i. $\sqrt{\ }$:

$x - 5 = \pm 2$

$x = 5 \pm 2$; $x_1 = 5 + 2 = 7$; $x_2 = 5 - 2 = 3$

III. Das Verfahren kürzt man, um die Unbekannte unmittelbar zu erhalten, noch weiter in folgender Weise ab:

Die Unbekannte x ist = dem mit entgegengesetztem Zeichen genommenen halben Koeffizient von x^1 $\pm$ die Quadratwurzel aus dem Quadrat dieses halben Koeff. vermehrt um die bekannten Glieder der rechten Seite.

1. Beispiel.

$16x + 423 = 7x^2$; auf die Normalform gebracht:

$7x^2 - 16x = 423$;

$x^2 - \frac{16x}{7} = {}^{423}/_7$. Nach vorstehender Regel erhält man nun sofort:

$x = {}^8/_7 \pm \sqrt{({}^8/_7)^2 + {}^{423}/_7}$. Den unter der Wurzel befindlichen quadratischen Nenner berechnet man nicht, wenn man sämtlichen Gliedern unter der Wurzel diesen quadratischen Nenner geben kann. Daher:

$$x = {}^8/_7 \pm \sqrt{\frac{64}{7^2} + \frac{7.423}{7^2}} = {}^8/_7 \pm \sqrt{\frac{64 + 2961}{7^2}}$$

$$= {}^8/_7 \pm \frac{\sqrt{3025}}{7} = \frac{8 \pm 55}{7}.$$

Folglich $x_1 = \frac{8 + 55}{7} = 9$, $x_2 = \frac{8 - 55}{7} = -6\,{}^5/_7$.

2. Beispiel.

$a\left(1\,{}^1/_2 + \frac{10a}{3x}\right) = b\left(\frac{4a}{x} + 1\right) - \frac{x}{6}$; zunächst bis zur Normalform entwickelt:

$\frac{3a}{2} + \frac{10a^2}{3x} = \frac{4ab}{x} + b - \frac{x}{6}$; mit $6x$ mult.

$9ax + 20a^2 = 24ab + 6bx - x^2$;

$x^2 + 3(3a - 2b)x = 24ab - 20a^2$;

$$x = -\frac{3(3a - 2b)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{3(3a - 2b)}{2}\right]^2 + 24ab - 20a^2};$$

$$x = -\frac{3(3a - 2b)}{2} \pm \sqrt{\frac{81a^2 - 108ab + 36b^2 + 96ab - 80a^2}{4}}$$

$$= -\frac{3(3a - 2b)}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 12ab + 36b^2}}{2}.$$

Nun nach § 31, B die $\sqrt{\ }$ aus dem Polynom gezogen (unerläßlich, wenn die $\sqrt{\ }$ aufgeht):

$$x = \frac{6b - 9a \pm (a - 6b)}{2};$$

daher: $x_1 = \frac{6b - 9a + (a - 6b)}{2} = -4a;$

$$x_2 = \frac{6b - 9a - (a - 6b)}{2} = 6b - 5a.$$

3. Beispiel. $3x - 5x^2 = 11;$

$$5x^2 - 3x = -11;$$

$$x^2 - \frac{3x}{5} = -{}^{11}/_5;$$

$$x = +{}^3/_{10} \pm \sqrt{({}^3/_{10})^2 - {}^{22}/_{10}}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 10 . 22}}{10}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-211}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{211} . i}{10}$$

$$x = \frac{3 \pm 14{,}526\,i}{10}$$

$$x = 0{,}3 \pm 1{,}4526\,i.$$

IV. Gleichungen, in welchen nach der Entwickelung ein unbekannter Ausdruck mit dem Quadrat desselben vorkommt, löst man wie die quadratischen auf, indem man für jenen unbekannten Ausdruck ein einfaches Zeichen setzt.

Beispiel.

$\frac{7x^3}{4x^3 - 5} - 1^1/_3 = \frac{x^3}{3x^3 + 2}$; mit $3(4x^3 - 5)(3x^3 + 2)$ mult.

$$3x^6 + 85x^3 = -40;$$

$x^6 + \frac{85x^3}{3} = -{}^{40}/_3$; $x^3 = y$, folglich $x^6 = y^2$ gesetzt:

$$y^2 + \frac{85y}{3} = -{}^{40}/_3.$$

$$y = -{}^{85}/_6 \pm \sqrt{({}^{85}/_6)^2 - {}^{80}/_6} = -{}^{85}/_6 \pm \sqrt{\frac{85^2 - 6 . 80}{6^2}};$$

$y = \frac{-85 \pm \sqrt{6745}}{6} = \frac{-85 \pm 82{,}128}{6}$; da nun $y = x^3$ ist, so ist:

1) $x^3 = \frac{-85 + 82{,}128}{6} = \frac{-2{,}872}{6} = -0{,}47867,$

daher $x = -0{,}78230;$

2) $x^3 = \frac{-167{,}128}{6} = -27{,}85467$, daher $x = -3{,}03133$.

E. Gleichungen, in welchen der 1. Koeff. $(+1)$ dem letzten, der 2. dem vorletzten, der 3. dem drittletzten gleich ist ꝛc. (sogenannte reciproke Gleichungen), können vom 3. Grade auf den 1., vom 4. und 5. Grade auf den 2., vom 6. und 7. Grade auf den 3. gebracht werden ꝛc.

Beispiel.

$x^4 - 7x^3 - 34x^2 - 7x + 1 = 0$; durch x^2 div.

$x^2 - 7x - 34 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$; $x + \frac{1}{x} = y$ gesetzt, folgl. (quadriert:)

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$; durch Subtraktion:

$7x + 36 + \frac{7}{x} = y^2$; durch 7 div.

$x + {}^{36}/_7 + \frac{1}{x} = \frac{y^2}{7}$; hiervon

$x + \frac{1}{x} = y$ subtrahiert:

${}^{36}/_7 = \frac{y^2}{7} - y$; d. i.

$y^2 - 7y = 36$;

$y = {}^7/_2 \pm \sqrt{({}^7/_2)^2 + 36} = 3{,}5 \pm 6{,}946$; daher:

1) $x + \frac{1}{x} = y_1 = 10{,}446$, folgl. $x^2 + 1 = 10{,}446x$, ꝛc.

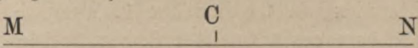
2) $x + \frac{1}{x} = y_2 = -3{,}446$, folgl. $x^2 + 1 = -3{,}446x$, ꝛc.

Anmerkung. Ist die reciproke Gleichung von ungeradem Grade, so kann sie stets durch $x + 1$ dividiert, mithin auf eine Gleichung vom geraden Grade gebracht und wie im vorstehenden Beispiel aufgelöst werden.

§ 50. Angewandte quadratische Gleichung.

1. Aufgabe. A geht von M nach N, B $3^1/_2$ Stunden später von N nach M. 4 Stunden nach Abgang des B treffen sie (in C) zusammen. B kommt 1 Stunde eher

in M an, als A in N. Wie viel Stunden hat jeder zu dem Wege gebraucht?

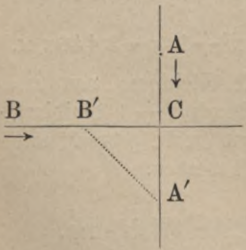


Auflösung. A brauche x Stunden, folglich geht er in 1 Stunde $\frac{1}{x}$ des Weges (den Weg $= 1$ gesetzt), daher in $7\frac{1}{2}$ Stunden (die er von M bis C braucht) $\frac{7^1/_2}{x} = \frac{15}{2x}$. B geht $3\frac{1}{2}$ St. später fort und kommt auch noch eine 1 Stunde eher in M an, folglich braucht er zu dem ganzen Wege NM: $x - 4\frac{1}{2}$ St., geht also in 1 Stunde $\frac{1}{x - 4^1/_2}$, in 4 St. (die er von N bis C braucht): $\frac{4}{x - 4^1/_2} = \frac{8}{2x - 9}$. Der Weg $MC + CN = 1$ geht somit über in:

$$\frac{15}{2x} + \frac{8}{2x - 9} = 1;$$

$$30x - 235 + 16x = 4x^2 - 18x; \text{ folgl. } x = 8 \pm 5\tfrac{1}{2}.$$

Hier ist nur die Lösung $x = 8 + 5\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$ Stunden (für A) möglich, denn $x = 8 - 5\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ St. ist unmöglich, da B $x - 4\frac{1}{2}$ St. braucht, d. i. $2\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -2$ St.



2. Aufgabe (als Anwendung derselben quadratischen Form).

Die Körper a und b bewegen sich in den geradlinigen Bahnen AC und BC, die sich rechtwinklig in C schneiden. Jetzt ist a in A, von C noch 15 m entfernt, b in B, noch 20 m von C entfernt. a bewegt sich in jeder Sekunde 9, b: 7 m. Nach wie viel Sekunden ist ihre Entfernung am kleinsten?

Auflösung. Nach x Sekunden. Alsdann hat A 9xm zurückgelegt und möge in A′ angelangt sein; B hat 7xm zurückgelegt und sei alsdann in B'. Folglich ist $CA' = AA' - AC = 9x - 15$, $B'C = BC - BB' = 20 - 7x$. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist nun das Quadrat der Entfernung:

$A'B'^2 = CA'^2 + B'C^2 = (9x - 15)^2 + (20 - 7x)^2$. (Wäre A' nicht jenseits, sondern diesseits C, so würde die Gleich. doch dieselbe bleiben, weil $(15 - 9x)^2 = (9x - 15)^2$ ist.) Die weitere Entwickelung giebt $A'B'^2 = 81x^2 - 270x + 225 + 400 - 280x + 49x^2 = 130x^2 - 550x + 625$. Kommt man bei der Bestimmung eines Minimums (kleinsten Wertes) oder Maximums (größten Wertes) auf die Form $\pm ax^2 + bx + c$, wie sie das vorstehende spezielle Trinom zeigt, so kann stets ein Minimum bestimmt werden, wenn der Koeff. von x^2 positiv ist, ein Maximum jedoch, wenn derselbe negativ ist. Da hier der Koeff. positiv ist $(+ 130)$, so ist also ein Minimum bestimmbar. In beiden Fällen verwandelt man alsdann das zunächst gefundene Trinom in die Form $\pm a(x + d)^2 + e$, wo d positiv oder negativ sein kann. In Bezug auf unsere Aufgabe ist die Entwickelung folgende:

$$A'B'^2 = 130\left(x^2 - \frac{55x}{13}\right) + 625$$ oder (ähnlich wie bei der Auflösung der quadratischen Gleichung):

$$= 130\left[x^2 - 2\cdot\frac{55x}{26} + ({}^{55}/_{26})^2 - ({}^{55}/_{26})^2\right] + 625$$

$= 130[(x - {}^{55}/_{26})^2 - ({}^{55}/_{26})^2] = 130(x - {}^{55}/_{26})^2 + 43\,{}^{7}/_{26}$. Da ein Quadrat stets positiv ist, so muß der gefundene Ausdruck am kleinsten sein, wenn $(x - {}^{55}/_{26})^2 = 0$ ist. Also tritt für $x - {}^{55}/_{26} = 0$, d. i. $x = {}^{55}/_{26}$ Sekunden das Minimum ein. Zugleich ist dann $A'B'^2 = 0 + 43\,{}^{7}/_{26}$, d. i. die Entfernung $A'B' = \sqrt{43\,{}^{7}/_{26}} = 6{,}577935$ Meter.

§ 51. Quadratische Gleichung mit mehreren Unbekannten.

I. Aufgabe. I. $(1+x)^2-55=y^2$;
II. $(9-y)^2+13=x^2$.

Die Gleichungen entwickelt:

$$1+2x+x^2-55=y^2;$$
$$\text{(A)}\ldots\; 81-18y+y^2+13=x^2, \text{ add. und durch 2 div.}$$
$$20+x-9y=0; \text{ folglich } x=9y-20.$$

Dies in A eingesetzt:

$$94-18y+y^2=81y^2-360y+400;$$
$$\text{d. i. } 80y^2-342y=-306;$$
$$y^2-{}^{171}/_{40}y=-{}^{153}/_{40};\; y=\frac{171\pm69}{80};$$
$$y_1=3,\; y_2=1^{11}/_{40}.$$

Damit folgt aus $x=9y-20$: $x_1=9.3-20=7$ und $x_2=9.1^{11}/_{40}-20=-8^{21}/_{40}$.

II. Bleiben die Gleichungen unverändert, wenn man die Unbekannten gegenseitig vertauscht, so nennt man die Gleichungen symmetrisch. Z. B. ist $5x^2-7xy+5y^2=11$ eine symmetrische Gleichung, denn nach Vertauschung von x mit y erhält man $5y^2+7yx+5x^2=11$, also jene erste Gleichung wieder.

Sind nun die beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten symmetrisch, so braucht man nur die eine Unbekannte zu berechnen, denn ist z. B. $x=a\pm\sqrt{b}$, so muß $y=a\mp\sqrt{b}$ sein.

Beispiel. I. $3xy+2(x-y)^2=237$;
II. $x+y=16$.

Aus I ergiebt sich $2x^2-xy+2y^2=237$. Hier $y=16-x$ (s. II) eingesetzt, giebt:

$x^2-16x=-55$, folglich $x=8\pm3$. Da nun die gegebenen Gleichungen symmetrisch sind, so muß $y=8\mp3$, d. i. $x_1=8+3=11$, $y_1=8-3=5$ und $x_2=8-3=5$, $y_2=8+3=11$.

§ 52. Angewandte quadratische Gleichung mit mehreren Unbekannten.

Aufgabe. A kaufte dreierlei Uhren, von der zweiten Sorte vier mehr als von der ersten, von der dritten Sorte sieben mehr als von der zweiten, zusammen für 389 ℳ. Für die Uhren der zweiten Sorte gab er 50 ℳ mehr, als für die der dritten, und 47 ℳ mehr, als für die der ersten. Zwei Uhren der ersten Sorte kosteten so viel als eine Uhr der zweiten und vier Uhren der dritten Sorte zusammen. Wie viel Uhren hatte er gekauft und zu welchem Preise?

Auflösung. Von der ersten Sorte x, daher von der zweiten $x+4$ und von der dritten $(x+4)+7=x+11$. Eine Uhr der dritten Sorte kostete u, eine von der zweiten Sorte v, daher zwei Uhren von der ersten Sorte $=v+4u$, oder eine Uhr der ersten Sorte $\frac{v}{2}+2u$ ℳ. Mithin kosteten die Uhren zusammen:

$$\text{I. } x\left(\frac{v}{2}+2u\right)+v(x+4)+u(x+11)=389;$$

Außerdem: $\text{II. } v(x+4)=u(x+11)+50;$

$$\text{III. } v(x+4)=x\left(\frac{v}{2}+2u\right)+47.$$

Setzt man für $u(x+11)$ den aus II gefundenen Wert $50-v(x+u)$, für $x\left(\frac{v}{2}+2u\right)$ den aus III gefundenen Wert $v(x+u)-47$ in Gleichung I ein, so ergiebt sich

$\text{I}^*.\ v(x+4)=162$. Dies in II und III eingesetzt, giebt:

$\text{II}^*.\ u(x+11)=112;$

$\text{III}^*.\ vx+4ux=230.$

Aus I*: $vx=162-4v$, aus II* $ux=112-11u$.

Beide in III* eingesetzt und die erhaltene Gleichung vereinfacht: $\text{I}^0.\ v+11u=95.$

Gleichung I* durch II* dividiert: $\frac{v}{u}=\frac{162-4v}{112-11u}$; mit dem Produkt der Nenner multipliziert:

$$\text{II}^0.\ 7uv+162u=112v.$$

Aus I^0: $v = 95 - 11u$ in II^0 eingesetzt:

$$u^2 - \frac{2059}{77}u = -\frac{10640}{77}, \text{ folglich } u = \frac{2059 \pm 981}{154}.$$

$u = \frac{2059 + 981}{77} = 19^{57}/_{77}$ ist unbrauchbar, weil damit v (s. I^0) negativ würde. Folglich bleibt nur $u = \frac{2059 - 981}{154} = 7$.
Nun ist (s. I^0) $v = 95 - 11 . 7 = 18$ und aus

$$I^*. \quad x + 4 = \frac{162}{v} = 9, \text{ oder } x = 5.$$

§ 53. Von den Progressionen.

I. Reihe oder Progression nennt man eine Folge von Zahlenausdrücken, die nach einem gewissen gemeinsamen Gesetze fortschreiten. Z. B.

$$15, 20, 25, 30, 35, 40, \ldots\ldots 110;$$
$$\text{oder } 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots\cdots;$$
$$\text{oder } 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 \ldots\ldots;$$
$$\text{oder } 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + \cdots \text{ bis } + 24.25.26.$$

Die einzelnen Zahlenausdrücke heißen Glieder der Reihe. In der letzten Reihe ist z. B. das 24. Glied: $24.25.26$. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle irgend ein Glied in der Reihe einnimmt, heißt Index oder Zeiger. Die Reihe kann daher allgemein mit:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots t_n \text{ (gelesen: t eins, t zwei 2c.)}$$

bezeichnet werden, wo die Indices rechts unten angeschrieben sind. In jener ersten Reihe z. B. ist $t_2 = 20$, $t_5 = 35$.

Der Zahlenausdruck, welcher unmittelbar das n^{te} Glied bestimmt, heißt „allgemeines Glied“.

In jener ersten Reihe z. B. ist das allgemeine Glied: $t_n = (n + 2) 5$; denn das 3. Glied t_3 ist $= (3 + 2) . 5 = 25$, das 6. Glied $= t_6 = (6 + 2) . 5 = 40$.

Der Zahlenausdruck, welcher die Summe der sämtlichen Glieder einer Reihe bis zu einem bestimmten Gliede, oder, wenn die Reihe n Glieder hat, die Summe aller n Glieder bestimmt, heißt Summenformel oder summatorisches Glied.

Die Reihe ist steigend oder fallend, wenn jedes Glied größer, bezw. kleiner, als das vorhergehende ist. Z. B. ist $1/_{10} + 1/_{100} + 1/_{1000} + 1/_{10000} + \ldots\ldots$ eine fallende, $1 + 3 + 5 + 7 \ldots\ldots$ eine steigende Reihe.

Eine Reihe ist eine endliche, wenn sie eine endliche (bestimmt abgegrenzte) Zahl von Gliedern hat (siehe § 4). Unendlich ist die Reihe bei unendlich vielen Gliedern. Z. B. stellt der Dezimalbruch $0{,}33333\ldots\ldots$ d. i. $3/_{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} \cdots$ in inf. eine unendliche Reihe vor. Die unendliche Reihe ist entweder konvergent (konvergierend) oder divergent. Ist die Summe aller Glieder der unendlichen Reihe eine endliche Zahl, so ist die Reihe konvergent; ist dagegen die Summe aller Glieder $= +\infty$, oder $-\infty$, so ist sie divergent.

Ist für eine Reihe die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern charakteristisch, so nennt man die Reihe eine arithmetische. Dabei muß die Differenz stets so gebildet werden, daß man jedes Glied um das vorhergehende vermindert. In der gegebenen Reihe

$$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ \ldots\ldots (A)$$

sind daher die Differenzen: $5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots\ldots$

In der Reihe: $100,\ 93,\ 86,\ 79,\ 72,\ \ldots\ldots$ (B)
sind die Differenzen $-7,\ -7,\ -7,\ -7,\ \ldots\ldots$

In der Reihe: $11,\ 21,\ 28,\ 32,\ 33,\ \ldots\ldots$ (C)
ist die 1. Differenzreihe: $10,\ 7,\ 4,\ 1,\ \ldots\ldots$
die zweite Differenzreihe: $-3,\ -3,\ -3,\ \ldots\ldots$

Zeigt die 1. Differenzreihe gleiche Glieder (wie in den Reihen A und B), so nennt man die gegebene Reihe eine arithmetische Reihe 1. Ordnung, oder niedere arithmetische Reihe, oder gemeine arithmetische Reihe, auch schlechthin „arithmetische Reihe“, wenn höhere Reihen überhaupt nicht in Betracht kommen. Die Reihe C ist eine arithmetische Reihe 2. Ordnung, weil erst die Glieder der 2. Differenzreihe einander gleich sind.

Ist der Quotient von je zwei benachbarten Gliedern (d. h. jedes Glied dividiert durch das vorhergehende) stets derselbe, so heißt die Reihe eine geometrische; z. B. 2, 6, 18, 54, 162, 486, denn $^6/_2 = {}^{18}/_6 = {}^{54}/_{18}$ 2c.

Ein Glied durch Interpolation finden, heißt zwischen zwei Gliedern einer gegebenen Reihe aus dem für diese aufgestellten Gesetz ein einzuschaltendes Glied berechnen. Ist z. B. die Reihe 40, 50, 60, 70, 80, 90 gegeben, wo also $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 60$ 2c. ist, und soll das Glied $t_{2,7}$ gefunden werden, so ist dasselbe offenbar = 57. Die Interpolation ist schon bei der Bestimmung eines nicht in den Tafeln enthaltenen Numerus oder Logarithmus angewendet worden. Sollen in jener Reihe zwischen 60 und 70 z. B. drei Glieder eingeschaltet (die Reihe „interpoliert“) werden, so würde man

60, $62^1/_2$, 65, $67^1/_2$, 70 erhalten.

II. Niedere arithmetische Reihe.

1) Das 1. Gld. der Reihe bezeichnet man mit a (oder auch t_1), die „Differenz“ mit d, die Anzahl der sämtlichen Glieder der Reihe mit n, das n^{te} (letzte) Glied mit t (bestimmter mit t_n, Manche auch mit u), die Summe aller (n) Glieder mit s. Da das 2. Glied vermindert um das 1., das 3. Glied vermindert um das 2. 2c. immer dieselbe Differenz d giebt (siehe I), so ist also

das 2. Glied = 1. Glied $+ d = a + d$,
das 3. „ = 2. „ $+ d = (a + d) + d = a + 2d$,
das 4. „ = 3. „ $+ d = (a + 2d) + d = a + 3d$,

das 5. Glied $= a + 4d = a + (5-1) . d$,
„ 6. „ $= a + 5d = a + (6-1) . d$, so ist allgemein
„ n. „ $= a + (n-1) . d$. Daher

$$t = a + (n-1) d \ldots\ldots (A).$$

Die Formel A benutzt man zugleich, wenn eins von den drei Elementen a, d, n durch die übrigen beiden und t bestimmt werden soll. Um z. B. n aus a, d, t zu berechnen, ist die Rechnung folgende:

$$(n-1) d = t - a;$$

$$n - 1 = \frac{t-a}{d}$$

$$n = 1 + \frac{t-a}{d} \cdots\cdots (B).$$

In gleicher Weise ergiebt sich aus A:

$$a = t - (n-1) d \ldots\ldots (C).$$

1. Beispiel. Es sei die Reihe 23, 30, 37, 44, 51, ... gegeben. Wie groß ist das 36. Glied?

Auflösung. Hier ist a (das 1. Glied) $= 23$, d (die Differenz $30 - 23 = 37 - 30$ rc.) $= 7$, $n = 36$.

Folglich (s. A) $t_{36} = 23 + (36-1) . 7 = 23 + 35.7$ $= 23 + 245 = 268$.

2. Beispiel. $5^1/_6$, $4^5/_{12}$, $3^2/_3$, $2^{11}/_{12}$, $2^1/_6$, $1^5/_{12}$, ... Wie groß ist das 99. Glied?

Mit $a = 5^1/_6$, $d = 4^5/_{12} - 5^1/_6 = 3^2/_3 - 4^5/_{12} \ldots\ldots$ $= -\,^3/_4$, $n = 99$ erhält man (s. A)

$$t_{99} = 5^1/_6 + (99-1) . (-\,^3/_4) = 5^1/_6 - 98 . \,^3/_4$$
$$= 5^1/_6 - 73^1/_2 = -\,68^1/_3.$$

2) Da das 1. Glied a, das 2te $a + d$, das 3te $a + 2d$, das letzte t, das vorletzte um d kleiner als das letzte, also $= t - d$, das drittletzte $t - 2d$; da man ferner mit den über die Glieder einer Reihe gesetzten Zahlen: $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, $\underset{\smile}{3}$, ... andeutet, daß das mit $\underset{\smile}{1}$ bezeichnete Glied das 1. der Reihe, mit $\underset{\smile}{2}$ das 2. Glied der Reihe rc. ist, s aber die Summe aller Glieder, so ist

$$s = \overset{1}{\overbrace{a}} + (a \overset{2}{\overbrace{+}} d) + (a \overset{3}{\overbrace{+}} 2d) + (a \overset{4}{\overbrace{+}} 3d) + \cdots\cdots$$
$$+ (t \overset{n-2}{\overbrace{-}} 2d) + (t \overset{n-1}{\overbrace{-}} d) + \overset{n}{\overbrace{t}} \ldots\ldots (M).$$

Schreibt man die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung, so ist offenbar die Summe dieselbe; daher:

$$s = \overset{1}{\overbrace{t}} + (t \overset{2}{\overbrace{-}} d) + (t \overset{3}{\overbrace{-}} 2d) + (t \overset{4}{\overbrace{-}} 3d) + \cdots\cdots$$
$$+ (a + 2d) + (a + d) + t \ldots\ldots (N).$$

Durch Addition der beiden Reihen M und N erhält man:

$$2s = (a \overset{1}{\overbrace{+}} t) + (a \overset{2}{\overbrace{+}} t) + (a \overset{3}{\overbrace{+}} t) + \cdots\cdots$$
$$+ (a \overset{n-2}{\overbrace{+}} t) + (a \overset{n-1}{\overbrace{+}} t) + \overset{n}{\overbrace{t}}.$$

Da $a + t$ nmal vorhanden ist, so ist

$$2s = n \,.\, (a + t), \text{ folglich}$$

die Summe der Reihe: $s = n \,.\, \frac{a+t}{2} \cdots\cdots (D).$

Beispiel. N verteilte eine Summe Geldes an die 30 Schüler einer Armenschule und gab dem ersten 2 ℳ. 44 ₰., jedem folgenden immer dieselbe Anzahl Pfennige weniger, dem letzten 12 ₰. Wie groß war die Summe, die er verteilt hatte?

Auflösung. Hier ist $n = 30$, $a = 244$, t (letztes Glied) $= 12$ ₰. Folglich die Summe nach Formel D:

$$s = 30 \,.\, \frac{244 + 12}{2} = 30 \,.\, 128 = 3840 \text{ ₰.} = 38{,}40 \text{ ℳ.}$$

Führt man in D an Stelle von t den für das letzte Glied gefundenen Ausdruck A ein, so ergiebt sich:

$$s = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \text{ oder}$$

$$s = n\left[a + \frac{n-1}{2} \cdot d\right] \cdots\cdots (E).$$

Beispiel. A sparte sich am 1. Januar 20 ₰., an jedem folgenden Tage 3 ₰. mehr als am vorhergehenden; wie viel (s) im ganzen Januar?

Auflösung. Hier ist $a = 20$, $n = 31$, $d = 3$; folglich

$$s = 31\left[20 + \frac{31-1}{2} \cdot 3\right] = 31 . (20 + 15 . 3) = 31 . 65$$
$$= 20{,}15 \text{ ℳ.}$$

Aufgabe. Die Summe s soll aus dem 1. Gliede a, der Differenz d und dem letzten Gliede t berechnet werden.

Auflösung. Das aus A berechnete n (siehe B) setze in D an die Stelle von n. Es ergiebt sich:

$$s = \left(1 + \frac{t-a}{d}\right) \cdot \frac{t+a}{2} = \frac{d+t-a}{d} \cdot \frac{t+a}{2} \text{ oder}$$

$$s = \frac{(t+a)(d+t-a)}{2d} \cdots\cdots (F).$$

Aufgabe. Die Summe s aus d, n, t zu bestimmen.

Auflösung. Das aus A berechnete a (s. C) setze in D an die Stelle von a:

$$s = \frac{n}{2}[t - (n-1)d + t] = \frac{n}{2}[2t - (n-1)d] \text{ oder}$$

$$s = n\left[t - \frac{n-1}{2} \cdot d\right] \cdots\cdots (G).$$

3) Soll aus s und zweien der Elemente a, d, n, t eins der übrigen dieser letzteren gesucht werden, so hat man diejenige der Formeln D, E, F, G zu benutzen, welche die durch die Aufgabe berührten vier Elemente enthält.

Aufgabe. n (die Anzahl der Glieder) aus d, t und s zu berechnen.

Auflösung. Die vier Elemente n, d, t, s sind in G enthalten, folglich ist G nach n aufzulösen.

$$\frac{n^2 - n}{2} \cdot d - nt = s;$$

$$n^2 - \frac{2t+d}{d} n = -\frac{2s}{d};$$

$$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}} \cdots\cdots (H).$$

Beispiel. N gab seinem Schreiber S für jeden folgenden Monat 2 ℳ mehr als für den vorhergehenden. Da er ihm nun für den letzten Monat 53 ℳ und für alle Monate 720 ℳ gegeben hatte, so fragt es sich, wie lange war S bei N?

Auflösung. x Monate. Folglich ist in H für d : 2, für t : 53, für s : 720 und für n : x zu setzen.

$$x = \frac{106 + 2}{4} \pm \sqrt{27^2 - \frac{2 \,.\, 720}{2}} = 27 \pm \sqrt{729 - 720}$$
$$= 27 \pm 3.$$

S war also entweder 30 oder 24 Monate bei N. Sind aber auch beide Auflösungen möglich? Um dies zu bestimmen, suchen wir den Lohn a für den 1. Monat aus n = 30 (die 1. Lösung 27 + 3), d = 2 und s = 720. Dies ergiebt sich aus E, denn diese Gleichung enthält die vier Elemente a, n, d, s.

$$a = \frac{s}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot d \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, (J).$$

$$a = \frac{720}{30} - \frac{30-1}{2} \,.\, 2 = 24 - 29 = -5.$$

Da S für den 1. Monat nicht − 5 ℳ bekommen haben kann, so ist nur die andere Lösung 27 − 3 = 24 Monate möglich. Eine Probe ist hier besonders am Platze. Für das 1. Glied − 5 wäre die Reihe, da jedes folgende Glied um 2 größer ist, die folgende:

$$\underset{\smile}{\overset{1}{}}-5 \quad \overset{2}{}-3 \quad \overset{3}{}-1 \quad \overset{4}{}+1 \quad \overset{5}{}+3 \quad \overset{6}{}+5 \quad \overset{7}{}+7 \quad \overset{8}{}+9 \cdots\cdots \overset{30}{}+53$$

Da sich die ersten 6 Glieder der Reihe heben, so bleibt die Summe der Reihe, wenn diese Glieder entfernt werden und die Reihe daher mit + 7 beginnt, immer dieselbe (nämlich 720). Folglich hat er für den 1. Monat + 7 ℳ bekommen und die Zahl der Monate ist 6 weniger als 30.

4) Aufgabe. Zwischen den Zahlen 113,1 und 131,7 sollen 14 Zahlen so eingeschaltet (interpoliert) werden, daß eine aus 16 Gliedern bestehende arithmetische Reihe entsteht, deren 1. Glied 113,1 und letztes Glied 131,7 ist. Wie groß ist die Differenz (d) dieser Reihe?

Auflösung. Mit $a = 113{,}1, t = 131{,}7, n = 16$ findet man aus A:

$$131{,}7 = 113{,}1 + (16 - 1)\,d; \text{ daher } d = \frac{131{,}7 - 113{,}1}{15} = 1{,}24.$$

Die Reihe ist daher:

113,1, 114,34, 115,58, ... 130,46, 131,7.

Aufgabe. Das n^{te} Glied einer arithmetischen Reihe ist b, das m^{te} Glied $= c$; wie groß (x) ist das r^{te} Glied?

Auflösung. Nach A ist I. $b = a + (n - 1)\,d$, nach II. $c = a + (m - 1)\,d$. Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich a und d berechnen und zwar durch b, c, m, n ausdrücken. I — II giebt $b - c = (n - m)\,d$, folglich $d = \frac{b - c}{n - m}$. Dies in I eingesetzt: $b = a + \frac{(n - 1)(b - c)}{n - m}$, folglich

$$a = b - \frac{(n - 1)(b - c)}{n - m}$$

$$= \frac{bn - bm - b(n - 1) + c(n - 1)}{n - m}$$

$$= \frac{c(n - 1) - b(m - 1)}{n - m}.$$

Setzt man diese beiden für d und a gefundenen Werte nebst „r für n“ und „t für x“ in A ein, so ergiebt sich:

$$x = \frac{cn - bm + (b - c)\,r}{n - m}.$$

III. Geometrische Reihe.

1) Das 1. Glied sei a, die Anzahl der Glieder n, das letzte Glied t. Der „Quotient“ aus jedem Gliede und dem vorhergehenden, der auch in der geometrischen Reihe Exponent genannt wird, sei e. Da nun das 2. Glied dividiert durch das 1., das 3. Glied dividiert durch das 2^{te} ꝛc. immer d geben muß, so ist

das 2. Glied = 1. Glied $\times e = ae$
„ 3. „ = 2. „ $\times e = ae \,.\, e = ae^2 = ae^{3-1}$;
„ 4. „ = 3. „ $\times e = ae^2 \,.\, e = ae^3 = ae^{4-1}$;
folgl. „ n. „ $= ae^{n-1}$, d. i.

$$t = ae^{n-1} \ldots. (A).$$

Aus dieser Formel ergiebt sich unmittelbar:

$a = \frac{t}{e^{n-1}}$; $e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$; [$\lg t = \lg a + (n-1)\lg e$ oder $\lg t = \lg a + n \lg e - \lg e$, folglich] $n = 1 + \frac{\lg t - \lg a}{\lg e}$.

2) Da jedes Glied emal so klein als das folgende, so ist das vorletzte Glied $= \frac{t}{e}$, das 3. letzte $= \frac{t}{e^2}$ ꝛc. Folglich ist:

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ldots + \frac{t}{e^2} + \frac{t}{e} + t. \text{ Mit e mult.:}$$

$$es = \quad ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{t}{e} + t + te.$$

Diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahiert: $s - es = a - te$. Folglich:

$$\left.\begin{array}{l} s = \frac{a - te}{1 - e} \text{ und wenn } e > 1 \text{ (mit } -1 \\ \text{erweitert): } \qquad s = \frac{te - a}{e - 1}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

Um s aus a, e, n zu berechnen, setzt man den Ausdruck für t (s. A) in B ein. Man erhält:

$$s = \frac{ae^{n-1} . e - a}{e - 1} \text{ d. i.}$$

$$\left.\begin{array}{l} s = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}, \text{ oder wenn } e < 1 \text{ sein sollte (mit } -1 \\ \qquad \text{erweitert) } s = a \cdot \frac{1 - e^n}{1 - e}. \end{array}\right\} (C).$$

Aufgabe. s aus e, n, t zu berechnen.

Auflösung. Aus A ergab sich $a = \frac{t}{e^{n-1}}$ (s. ob.). Dies in B eingesetzt:

$$s = \frac{te - \frac{t}{e^{n-1}}}{e - 1}; \text{ mit } e^{n-1} \text{ erweitert:}$$

$$\left.\begin{array}{l} s = t \cdot \dfrac{e^n - 1}{e^{n-1}(e-1)}, \text{ oder wenn } e < 1 \text{ (mit } -1 \\ \text{erweitert):} \qquad s = t \cdot \dfrac{1 - e^n}{e^{n-1}(1-e)}. \end{array}\right\} \cdots\cdots (D)$$

Aufgabe. s aus a, n, t zu berechnen.

Auflösung. $e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$ (s. ob.) in B substituiert:

$$s = \frac{t \cdot \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - 1} \cdots\cdots (E).$$

3) Soll aus s und zweien der Elemente a, e, n, t eins der übrigen dieser letzteren gesucht werden, so hat man diejenige der Formeln B, C, D, E zu benutzen, welche die durch die Aufgabe berührten vier Elemente enthält.

Aufgabe. t aus e, n, s zu berechnen.

Auflösung. Die vier Elemente t, e, n, s sind in D enthalten. Daher:

$$t = \frac{s e^{n-1}(1-e)}{1 - e^n} \text{ oder } t = \frac{s e^{n-1}(e-1)}{e^n - 1} \cdots\cdots (F).$$

Aufgabe. n aus e, t, s zu berechnen. Aus D ergiebt sich:

$$s e^{n-1}(e-1) = t e^n - t; \text{ d. i. } \frac{s e^n (e-1)}{e} = t e^n - t \text{ oder}$$

$$s(e-1) e^n = e t e^n - e t;$$

$$\text{daher } e^n = \frac{et}{et - s(e-1)}, \; n \lg e = \lg(et) - \lg[et - s(e-1)];$$

$$n \lg e = \lg e + \lg t - \lg[et - s(e-1)], \text{ folglich:}$$

$$n = 1 + \frac{\lg t - \lg[et - s(e-1)]}{\lg e} \cdots\cdots (G).$$

4) Aufgabe. Zwischen den Zahlen 3 und 100 sollen 11 Zahlen so eingeschaltet (interpoliert) werden, daß eine aus 13 Gliedern bestehende geometrische Reihe entsteht, deren 1. Glied 3 und deren letztes Glied 100 ist. Wie groß ist der Exponent (e)?

Auflösung. Hier ist $a = 3$, $n = 13$, $t = 100$. Folgl. (s. oben nach A):

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = \sqrt[13-1]{\frac{100}{3}} = \sqrt[12]{\frac{100}{3}} = \frac{1}{\sqrt[12]{0{,}03}};$$

$$\begin{aligned} \text{d. E. } \lg 0{,}03 &= \underline{1{,}52288\ (:12} \\ \lg e &= 0{,}12691 \\ e &= 1{,}3394. \end{aligned}$$

Aufg. Das n. Glied einer geometrischen Reihe sei b, das m^{te} Glied: c; wie groß (x) ist das r^{te} Glied?

Auflösung. Nach A ist: I $b = ae^{n-1}$, II $c = ae^{m-1}$.

Man bestimme zunächst a und e aus b, c, n, m. I durch II dividiert, giebt $\frac{b}{c} = e^{n-m}$, folglich $e = \sqrt[n-m]{\frac{b}{c}}$. Dies in I eingesetzt: $b = a\left(\sqrt[n-m]{\frac{b}{c}}\right)^{n-1}$, folglich $a = b \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{n-1}{n-m}}$ $= b\sqrt[n-m]{\left(\frac{c}{b}\right)^{n-1}}$. Diese beiden für a und e gefundenen Werte nebst r für n und x für t in A eingesetzt:

$$x = b\sqrt[n-m]{\left(\frac{c}{b}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{r-1}} = b\sqrt[n-m]{\left(\frac{c}{b}\right)^{n-r}}.$$

5) Aufgabe. Das 1. Glied sei a, der Exponent e kleiner als 1, die Reihe eine unendliche; wie groß ist die Summe der geometrischen Reihe?

Auflösung. Da die Reihe aus unendlich vielen Gliedern besteht, so ist $n = \infty$ und man erhält aus C:

$$s = a \cdot \frac{1 - e^{\infty}}{1 - e}.$$

Da e ein echter Bruch sein soll, so ist $e^{\infty} = 0$ (s. § 21, 2. Zus.), folglich $s = a \cdot \frac{1-0}{1-e}$, d. i.

$$s = \frac{a}{1-e} \cdots\cdots (\mathrm{H}).$$

(Dasselbe giebt auch die Partialdivision $a:(1-e)$!)

Beispiel.

$1 + {}^{199}/_{201} + ({}^{199}/_{201})^2 + ({}^{199}/_{201})^3 + \ldots\ldots$ in inf. $= ?$

Hier ist $a = 1, e = {}^{199}/_{201}$, daher

$$s = \frac{1}{1 - {}^{199}/_{201}} = \frac{201}{201-199} = {}^{201}/_2 = 100{,}5.$$

IV. Arithmetisch-geometrische Reihe.

Es ist $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ (s. II, 2) eine arithm.,
$b, be, be^2, be^3, \ldots$ (s. III, 2) eine geometrische Reihe.

Werden beide Reihen in folgender Weise vereinigt:

$$ab, (a+d)\,be, (a+2d)\,be^2, (a+3d)\,be^3, \ldots\ldots\ldots,$$
$$[a+(n-1)\,d]\,.\,be^{n-1} \ldots\ldots (\mathrm{R}),$$

so heißt eine solche Reihe eine „arithmetisch-geometrische“.

Beispiel. $15 + 20\,.\,2 + 25\,.\,2^2 + 30\,.\,2^3 + 35\,.\,2^4 + 40\,.\,2^5$ ist die Summe (s) einer arithmetischen Reihe, bei welcher $a = 15$, $d = 5$, $b = 1$, $e = 2$ ist.

Aufgabe. Wie groß ist die Summe der Reihe R von n Gliedern?

Auflösung. Nach R ist

$$s = ab + (a+d)be + (a+2d)be^2 + (a+3d)be^3 + \cdots\cdots$$
$$+ [a+(n-2)\,d]\,be^{n-2} + [a+(n-1)\,d]\,be^{n-1}.$$

Diese Gleichung mit e multipliziert:

$$es = abe + (a+d)\,be^2 + (a+2d)\,be^3 + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ [a+(n-2)\,d]\,be^{n-1} + [a+(n-1)\,d]\,be^n$$

Vermindert man die 2. Gleichung um die 1., so ergiebt sich:

$$es - s = -ab - bde - bde^2 - bde^3 - \cdots\cdots\cdots$$
$$- bde^{n-1} + [a+(n-1)\,d]\,be^n,$$ oder

$$(e-1)s = -ab - bde[1+e+e^2+\cdots\cdots+e^{n-2}] + [a+(n-1)d]be^n;$$
$$= -ab - bde(1+e+e^2+\cdots\cdots+e^{n-1}) + (a+nd)be^n - bde^n;$$
$$= (a+nd)be^n - ab - bde(1+e+e^2+\cdots\cdots+e^{n-1});$$
$$= (a+nd)be^n - ab - bde \cdot \frac{e^n-1}{e-1};$$
$$\ast\ s = b \cdot \left[\frac{(a+nd)e^n - a}{e-1} - de \cdot \frac{e^n-1}{(e-1)^2}\right] \cdots\cdots (S).$$

Beispiel. Wie groß ist die Summe der ersten 15 Glieder der Reihe
$9.12 + 13.36 + 17.108 + 21.324 + 25.972 + \cdots$?

Auflösung. Die Reihe ist eine arithm.-geometrische, denn 9, 13, 17, 21 ..... ist ein arithmetische Reihe mit $a = 9$, $d = 4$; die Reihe 12, 36, 108, 324 ..... ist eine geometrische mit $b = 12$, $e = 3$; ferner ist $n = 15$. Diese Werte in S eingesetzt:

$$s = 12\left[\frac{(9+15.4).3^{15} - 9}{3-1} - 4.3.\frac{3^{15}-1}{(3-1)^2}\right]$$
$$= 12 \cdot \left[\frac{69.3^{15} - 9}{2} - 3(3^{15}-1)\right]$$
$$= 6.69.3^{15} - 54 - 36.3^{15} + 36 = 5423886828.$$

§ 54. Regelmäßige Vermehrung oder Verminderung eines verzinsten Kapitals.

I. **Aufgabe.** Ein Kapital c wird zu p% angelegt und der Zinsbetrag jährlich zum Kapital geschlagen. Zugleich wird aber auch zu Ende jedes Jahres eine bestimmte Summe b weggenommen. Wie groß ist der Rest R nach a Jahren?

Auflösung. Das Kapital c wächst zunächst nach einem Jahre auf $c\left(1+\frac{p}{100}\right) = cq$ an (s. § 45, 17. Aufg.), wenn der Kürze wegen $1+\frac{p}{100}$ stets mit q abgekürzt wird. Da aber am Ende des Jahres b hinweggenommen wird, so bleibt dann nur noch $cq - b$ übrig. Dieser Rest wird nun wieder 1 Jahr lang verzinst und wächst daher nach Ablauf desselben auf $(cq - b)q$ an, da jedes Kapital mit q multipliziert das in 1 Jahr angewachsene giebt. Nachdem nun wieder b weggenommen ist, bleibt nur noch $(cq - b)q - b = cq^2 - bq - b$ übrig, 2c. Folgl. ist vom ursprünglichen Kapital c

nach 1 Jahre noch $cq - b$,
„ 2 Jahren $cq^2 - bq - b$,
„ 3 „ $cq^3 - bq^2 - bq - b$,
„ a „ $cq^a - bq^{a-1} - bq^{a-2} - \cdots - bq^2 - bq - b$ übrig; da dieser Rest $= R$ sein soll, so ist

$$R = cq^a - b(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\cdots + q^{a-1}).$$

Die Reihe nach B in § 53 III berechnet, giebt:

$$R = cq^a - b \cdot \frac{q^a - 1}{q - 1}; \text{ da ferner } q - 1 = 1 + \frac{p}{100} - 1 = \frac{p}{100} \text{ ist:}$$

$$\left.\begin{aligned}
&R = cq^a - \frac{100b}{p}(q^a - 1); \text{ oder} \\
&R = \frac{100b}{p} - \left(\frac{100b}{p} - c\right)q^a; \\
&\quad\text{diese Gleichung nach c, b und a aufgelöst:} \\
&c = \frac{100b}{p} - \frac{\frac{100b}{p} - R}{q^a}; \\
&\left(b = \frac{p}{100} \cdot \frac{qc^a - R}{q^a - 1}, \text{ oder mittels Partialdivis.}\right) \\
&b = \frac{p}{100}\left(c + \frac{c - R}{q^a - 1}\right); \\
&a = \frac{\lg(pR - 100b) - \lg(cp - 100b)}{\lg q} \text{ Jahre}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (A).$$

Aufgabe. Die Holzmasse eines Waldes beträgt gegenwärtig 8900 Kubikmeter, der jährliche Zuwachs $1\frac{1}{3}\,\%$. Wenn nun zu Ende jedes Jahres 570 Kubikmeter abgeschlagen werden, wie groß wird der Rest (R) zu Ende des 11. Jahres sein?

Auflösung. $c = 8900$, $p = 1\frac{1}{3}$, $q = 1 + \frac{1\frac{1}{3}}{100} = 1 + \frac{1}{75} = \frac{76}{75}$, $b = 570$, $a = 11$. Folglich:

$$R = \frac{100 \cdot 570}{1\frac{1}{3}} - \left(\frac{100 \cdot 570}{1\frac{1}{3}} - 8900\right) \cdot \left(\frac{76}{75}\right)^{11}$$

$$= 42750 - 33850 \cdot \left(\frac{76}{75}\right)^{11} = 3590{,}8 \text{ Kubikmeter.}$$

II. Wird zu Ende jedes Jahres b nicht weggenommen, sondern hinzugelegt, so ist offenbar b in den Formeln A entgegengesetzt zu nehmen. Mit $-b$ statt $+b$ ergiebt sich dann für das nach a Jahren angewachsene Kapital (statt R)

$$S = \left(c + \frac{100\,b}{p}\right) q^a - \frac{100\,b}{p} \quad \ldots\ldots \text{(B)}.$$

Hierbei ist also vorausgesetzt, daß b auch noch am Schlusse des a^{ten} Jahres hinzugelegt worden ist.

III. Wird jedoch, die übrigen Bedingungen wie in II beibehalten, am Ende des vorletzten ($a - 1^{\text{ten}}$) Jahres das letzte Mal b hinzugelegt, so ist offenbar von B noch b hinwegzunehmen und es ist

$S = \left(c + \frac{100\,b}{p}\right) q^a - \left(\frac{100\,b}{p} + b\right)$; da nun die letzte Klammer $= \frac{100}{p}\left(1 + \frac{p}{100}\right) b$, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
S &= \left(c + \frac{100\,b}{p}\right) q^a - \frac{100\,b\,q}{p};\\
&\text{Hieraus ergiebt sich:}\\
c &= \frac{S + \frac{100\,b\,q}{p}}{q^a} - \frac{100\,b}{p};\\
b &= \frac{p}{100}\left[\frac{S - c\,q}{q\,(q^{a-1} - 1)} - c\right];\\
a &= \frac{\lg(p\,S + 100\,b) - \lg(c\,p + 100\,b)}{\lg q} \text{ Jahre}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(C)}.$$

Aufgabe. N legte am 31. Dez. 1870 550 ℳ in die Sparkasse, die mit $3^1/_2\,\%$ berechnet, und legt zu Ende jedes Jahres noch 130 ℳ hinzu. Auf welche Summe (S) sind seine Gelder am 31. Dez. 1888 angewachsen, wenn er die 130 ℳ am 31. Dez. 1887 das letzte Mal einzahlte?

Auflösung. Hier ist $c = 550$, $b = 130$, $p = 3^1/_2$, $q = 1 + \frac{3^1/_2}{100} = 1{,}035$; $a = 18$. Folglich nach C:

$$S = \left(550 + \frac{100\,.\,130}{3^1/_2}\right)\cdot 1{,}035^{18} - \frac{100\,.\,130\,.\,1{,}035}{3^1/_2};$$

$$S = 4264{,}286\,.\,1{,}035^{18} - 3844{,}286;$$

$$S = 4076{,}56 \text{ ℳ}.$$

IV. Wird das Grundkapital c auf a Jahre mit p % angelegt und wird am Ende jedes Jahres, zum letzten Male am Ende des $a - 1^{\text{ten}}$ Jahres, stets wieder gleich großes Kapital c noch hinzugelegt, so ergiebt sich offenbar das hierdurch angewachsene Kapital S', wenn man in S (Formel C in III) $b = c$ setzt.

$$S' = c\left(1 + \frac{100}{p}\right)q^a - \frac{100\,c\,q}{p}$$

$$= c\cdot\frac{100}{p}\left(\frac{p}{100} + 1\right)q^a - \frac{100\,c\,q}{p}$$

$$= \frac{100\,c\,q}{p}\cdot q^a - \frac{100\,c\,q}{p} \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} S' &= \frac{100\,c\,q}{p}(q^a - 1).\\ &\text{Daraus folgt auch:}\\ c &= \frac{p\,S'}{100\,q\,(q^a - 1)}\\ a &= \frac{\lg(p\,S' + 100\,c\,q) - \lg c - 2}{\lg q} - 1 \text{ Jahre} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots (D).$$

V. Wird auch noch am Ende des a^{ten} Jahres das Grundkapital c hinzugelegt, so ergiebt sich das in a Jahren angewachsene Kapital S'' am einfachsten, wenn man in B: $b = c$ setzt. Man erhält:

$$S'' = c\left(1 + \frac{100}{p}\right) q^a - \frac{100\,c}{p}$$
$$= c \cdot \frac{100}{p}\left(\frac{p}{100} + 1\right) q^a - \frac{100\,c}{p}$$
$$= c \cdot \frac{100}{p}(q \cdot q^a - 1) \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} S'' &= \frac{100\,c}{p}(q^{a+1} - 1) \\ c &= \frac{p\,S''}{100\,(q^{a+1} - 1)} \\ a &= \frac{\lg(p\,S'' + 100\,c) - \lg c - 2}{\lg q} - 1 \text{ Jahre} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (E).$$

Aufgabe. Dem N sollen laut eines Vermächtnisses nach 16 Jahren gerade 12345 ℳ ausgezahlt werden, ohne daß er je vor- oder nachher Anspruch auf Zinsen hätte, die Zinsen bis dahin sollen vielmehr zu wohlthätigen Zwecken verwendet werden. Er möchte dafür lieber zu Anfang eines jeden Jahres und auch noch zu Ende des 16. Jahres eine an Größe sich immer gleichbleibende Summe beziehen, so daß nach Ablauf des 16. Jahres jene Summe abgetragen ist. Wie viel (c) kann er jetzt und dann am Ende jedes Jahres erhalten, wenn die Zinsen zu $4\frac{3}{4}\%$ berechnet werden?

Auflösung. Hier ist aus Formel E das Kapital c mit $S'' = 12345$, $a = 16$, $p = 4{,}75$, $q = 1 + \frac{4{,}75}{100} = 1{,}0475$ zu berechnen.

$$c = \frac{4^3/_4 \cdot 12345}{100\,(1{,}0475^{16+1} - 1)} = \frac{586{,}3875}{1{,}0475^{17} - 1}$$
$$= \frac{586{,}3875}{2{,}20099 - 1} = \frac{586{,}3875}{1{,}20099} = 488{,}25 \text{ ℳ}$$

Aufgabe. N schuldet dem G am 1. Jan. 1895 15900 ℳ. Zinsen sollten mit $4\frac{1}{2}\%$ berechnet werden. Er will diese Summe in der Weise abtragen, daß er am 1. Jan. 1895, dann mit Anfang jedes Jahres und auch noch am Schlusse des letzten Jahres 700 ℳ zahlt, und, damit die Schuld eher getilgt wird, auch die jährlich ersparten Zinsen mit zur Tilgung verwenden. Nach wie viel Jahren (a) wird die Schuld abgetragen sein?

Auflösung. Mit $S'' = 15900$, $p = 4^1/_2$, also $q = 1{,}045$, $c = 700$ findet man aus E:

$$a = \frac{\lg(4^1/_2 \,.\, 15900 + 100 \,.\, 700) - \lg 700 - 2}{\lg 1{,}045} - 1$$

$$= \frac{\lg 141550 - 2{,}8450980 - 2}{0{,}0191163} - 1;$$

$a = 14{,}9974$ Jahre, also fast genau 15 Jahre.

VI. Ein Kapital steht zu $p\,^0/_0$ mit Zinseszinsen und wird nach je n Jahren um b vermehrt. Wie groß (S^0) ist es nach a Jahren mit allem Zuwachs und Zinsen?

Auflösung. Die Entwickelung ist dieselbe wie bei der 1. Aufgabe in Abschnitt I, nur daß nach je n Jahren, statt jedesmal nach einem Jahre, b hinzugelegt wird. Zugleich ist also b negativ zu nehmen. Die in I entwickelte Formel

$$R = c\,q^a - b \cdot \frac{q^a - 1}{q - 1} \text{ wird daher}$$

$$S^0 = c\,q^a + b \cdot \frac{q^a - 1}{q^n - 1} \cdots\cdots (F).$$

Aufgabe. A hat wöchentlich für sein Zimmer $2^1/_4$ ℳ Miete zu zahlen, bleibt dieselbe jedoch 3 Jahre ($= 3 \,.\, 52$ Wochen) lang schuldig. Wie groß (S^0), mit $5\,^0/_0$ berechnet, ist nach diesen 3 Jahren seine Schuld?

Auflösung. Hier ist die vorstehende Formel F in Anwendung zu bringen. Es ist aber $c = 0$, weil er die Miete erst Ende jeder Woche zu zahlen hatte; $b = 2^1/_4$ ℳ, $p = 5$, $q = 1{,}05$, $a = 3$, $n = {}^1/_{52}$ (Jahr $= 1$ Woche).

$$S^0 = 0 \,.\, q^3 + 2^1/_4 \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{1{,}05^{1/52} - 1} = 2{,}25 \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{\sqrt[52]{1{,}05} - 1}$$

$$= \frac{2{,}25 \,.\, 0{,}1576250}{1{,}0009387 - 1} = \frac{0{,}35465625}{0{,}0009387} = 377{,}82 \text{ ℳ}$$

§ 55. Rente.

N übergiebt dem A (Person oder Gesellschaft) ein Kapital unter der Bedingung, daß ihm A 17 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1500 ℳ. zurückzahle und daß mit der letzten Zahlung von 1500 ℳ. am Ende des 17. Jahres das Kapital aufgezehrt sei (der Rest R in § 56, I, Gleichung A also = 0 sei). Welches Kapital hat N dem A zu zahlen?

Diese Aufgabe veranschaulicht den Begriff Rente. N ist der Rentier (Rentner, Rentenierer), A der Entrepreneur oder Unternehmer, 1500 ℳ. die Rente. Das Kapital, für welches der Rentier die Rente bezieht, ist der Einsatz (die Einlage), die Mise, der Barwert, der bare Wert der Rente. Der Vertrag, welcher in betreff der Rente ausgefertigt wird, heißt Annuitätsvertrag. Die Rente ist eine Zeitrente (oder Jahrrente, Annuität), wenn die Rente eine bestimmte Anzahl von Jahren ohne Rücksicht auf das Alter des Rentiers bis zur Tilgung der Mise bezogen wird. Stirbt der eine Zeitrente beziehende Rentier vor der festgesetzten Zahl der Jahre, so hat der Entrepreneur die Rente bis zur Verfallzeit an die Erben desselben auszuzahlen. Die Rente ist eine Leibrente oder Lebensrente, wenn sie der Rentier bis zu seinem Tode bezieht. Vom Todestag an verliert der Vertrag seine Gültigkeit und die Erben haben keine weiteren Ansprüche an die Rente und Mise. Die Zahl der Jahre, welche bei der Berechnung einer Leibrente angenommen wird, kann sich offenbar nur nach der durchschnittlichen Zahl der Jahre richten, welche Personen vom Alter des Rentiers noch zu leben haben. Diese „wahrscheinliche Lebensdauer" ist von Statistikern aus der Lebensdauer einer großen Anzahl von Personen abgeleitet und in den sogenannten „Mortalitätstafeln" niedergelegt worden. Die nachstehende Tabelle z. B. enthält unter A das Alter des Rentiers, unter W die Zahl der Jahre, welche er der Wahrscheinlichkeit nach noch lebt und die zur Berechnung der Rente verwandt wird.

A	W	A	W	A	W	A	W	A	W	A	W
0	27,8	16	34,7	32	25,4	48	16,6	64	8,9	80	3,9
4	42,4	20	32,2	36	23,1	52	14,4	68	7,5	84	3,3
8	40,9	24	30,1	40	20,9	56	12,5	72	5,9	88	2,8
12	38,0	28	27,8	44	18,7	60	10,6	76	4,8	92	2,4

Bei den Rentenberechnungen werden stets Zinseszinsen in Anschlag gebracht. Da nach Ablauf der für die Rente (b) bestimmten Jahre (a) die Mise (c) aufgezehrt sein muß, so ist die Rentenformel direkt aus der Gleichung A in § 54, I abgeleitet, wenn dort der Rest R = 0 gesetzt wird. Es ist

also $0 = \frac{100\,b}{p} - \left(\frac{100\,b}{p} - c\right) q^a; \;\ldots\ldots (A).$

d. i. $0 = \frac{100\,b}{p}(1 - q^a) + c\,q^a;$ oder

$c\,q^a = \frac{100\,b}{p}(q^a - 1);$ durch q^a div.

$c = \frac{100\,b}{p}\left(1 - \frac{1}{q^a}\right).$ Setzt man $1 - \frac{1}{q^a} = r,$

so ergiebt sich:

$$\ast\; c\,q = 100\,b\,r \ldots\ldots (B).$$

Hieraus lassen sich nun leicht c, b, a berechnen.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Die Mise } c = \frac{100\,b\,r}{p} \\ \text{die Rente } b = \frac{c\,p}{100\,r}; \\ \text{aus Formel A die Zahl der Jahre} \\ a = \frac{2 + \lg b - \lg(100\,b - c\,p)}{\lg q} \end{array}\right|\;\ldots\ldots\ldots (C).$$

Die Berechnung der Prozente (p) würde die Auflösung einer Gleichung von $a + 1^{\text{tem}}$ Grade erfordern. Da nun solche Gleichungen nicht allgemein aufgelöst werden können, so läßt sich p nur durch ziemlich umständliche Versuche bestimmen. Dem Verfasser dieses Buches (R. Sch.) ist es jedoch geglückt, folgende sehr bequeme Formel zu finden, durch welche die Prozente selbst bei sehr großer Zahl der Jahre noch immer sehr genau berechnet werden, wie die unten folgende vierte Aufgabe zeigt:

$$p = \frac{200\,(a\,b - c)}{(a+1)\,c} \cdot \left(\frac{c}{a\,b}\right)^{\frac{a-1}{3\,(a+1)}} \;\ldots\ldots\; (D).$$

1. Aufg. Z. will eine Rente von 1100 ℳ 20 Jahre lang beziehen. Welche Mise hat er dem Entrepreneur zu zahlen?

Auflösung. Wird $5^1/_4$ % angenommen, so ist also in Formel C $q = 5^1/_4 = 5{,}25$; $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5^1/_4}{100} = 1{,}0525$; $b = 1100$; $a = 20$ zu setzen. Zunächst ist stets $r = 1 - \frac{1}{q^a}$, hier also $r = 1 - \frac{1}{1{,}0525^{20}}$ zu berechnen.

Dies geschieht am besten in folgender Weise:

$$\lg 1{,}0525 = 0{,}0222221\ (.20$$

$$\lg 1{,}0525^{20} = 0{,}4444420,$$

folglich $\lg \frac{1}{1{,}0525^{20}} = \text{d. E. } \lg 1{,}0525^{20} = 9{,}5555580$ (s. § 38, 1. Zus.)

daher $\frac{1}{1{,}0525^{20}} = 0{,}3593834$ und

$$r = 1 - 0{,}3593834 = 0{,}6406166.$$

Nun ist (nach Formel C) $c = \frac{100 \,.\, 1100 \,.\, 0{,}6406166}{5^1/_4}$

$$= \frac{44 \,.\, 6406{,}166}{21} = 13422{,}44 \text{ ℳ}$$

2. Aufgabe. N übergiebt der Rentenanstalt 21000 ℳ, für welche er eine Rente beziehen will. Da er 32 Jahre alt ist, so wird seine wahrscheinliche Lebensdauer noch 25,4 Jahre betragen (siehe oben die Tabelle im Eingange dieses §). Die Rente wird mit $5^1/_2$ % berechnet. Wie groß ist die Rente?

Auflösung. $c = 21000$, $p = 5^1/_2 = 5{,}5$; $q = 1{,}055$, $a = 25{,}4$; $r = 1 - \frac{1}{q^a} = 1 - \frac{1}{1{,}055^{25,4}}$.

Man findet $\lg 1{,}055^{25,4} = 0{,}5906135$, daher $\lg \frac{1}{1{,}055^{25,4}} = 9{,}4093865$ (s. 1. Aufgabe); $\frac{1}{1{,}055^{25,4}} = 0{,}2566767$; $r = 1 - 0{,}2566767 = 0{,}7433233$. Nun ist die gesuchte Rente $b = \frac{21000 \,.\, 5^1/_2}{100 \,.\, 0{,}7433233} = \frac{115500}{74{,}33233} = 1553{,}83$ *M.*

3. Aufgabe. N will sich für eine Mise von 23400 *M.* eine Rente von 2200 *M.* kaufen. Wie lange kann er dieselbe beziehen, wenn die Rechnung mit 3 % ausgeführt wird?

Auflösung. Hier ist $b = 2200$, $c = 23400$, $p = 3$; $q = 1 + {}^3/_{100} = 1{,}03$. Daher (s. C)

$$a = \frac{2 + \lg 2200 - \lg (100 \,.\, 2200 - 23400 \,.\, 3)}{\lg 1{,}03}$$

$$= \frac{2 + \lg 2200 - \lg 149800}{\lg 1{,}03}$$

$$a = \frac{2 + 3{,}3424227 - 5{,}1755118}{0{,}0128372} = \frac{0{,}1669110}{0{,}0128372} = 13 \text{ Jahre.}$$

4. Aufgabe. Wie groß ist der Zinsfuß, mit welchem für die Zeit von 14 Jahren aus der Mise 6133 *M.* 70 *ℌ.* die Rente 600 *M.* berechnet wurde?

Auflösung. Mit $c = 6133{,}70$, $b = 600$, $a = 14$ ergiebt sich aus der Formel D:

$$p = \frac{200 \,.\, (14 \,.\, 600 - 6133{,}7)}{15 \,.\, 6133{,}7} \left(\frac{6133{,}7}{14 \,.\, 600}\right)^{\frac{14-1}{3\,(14+1)}}$$

$$p = \frac{30217{,}33}{6133{,}7} \cdot 0{,}7302024^{13/45};$$

$$p = 4{,}498667.$$

Also sehr wenig abweichend von dem genauen Wert $4^1/_2$ %.

Die Berechnung des vorstehenden Ausdrucks ist folgende:

$$\begin{aligned}
\lg\ 0{,}7302024 &= \ \ 9{,}8634432 - 10; \quad \text{dafür (s. § 40 B, 3. Bsp.)}\\
\lg (0{,}7302024^{13/45}) &= -\,0{,}1365568 \,.\, {}^{13}/_{45}\\
&= -\,0{,}0394497\\
&= 10 - 0{,}0394497 - 10 \text{ oder}\\
\lg (0{,}7302024^{13/45}) &= \ \ 9{,}9605503 - 10\\
\lg 30217{,}33 &= \ \ 4{,}4802561\\
\text{d. E. } \lg 6133{,}7 &= \ \ 6{,}2122775\\
\lg p &= \ \ 0{,}6530839.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe. Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft eine Summe von 18000 ℳ erborgt und als Bürgschaft ihren Gemeindewald, welcher jährlich 1300 ℳ Reinertrag giebt, zur Nutzung überlassen. (Ein derartiger Vertrag heißt antichretisch, d. i. Pfandnutzungsvertrag.) Wenn nun 5 % Zins auf Zins gerechnet werden, wie viel Jahre kann die Herrschaft den Wald benutzen, bis ihre Forderung samt Zinsen abgetragen ist?

Auflösung. Hier ist $c = 18000$, $b = 1300$, $p = 5$, $q = 1 + {}^5/_{100} = 1{,}05$; nach C findet man:

$$a = \frac{2 + \lg 1300 - \lg (100 \,.\, 1300 - 18000 \,.\, 5)}{\lg 1{,}05}$$

$$= \frac{2 + 3{,}1139434 - 4{,}6020600}{0{,}0211893} = 24{,}15763 \text{ Jahre.}$$

Wenn nun die Herrschaft den Wald statt 24,158 genau 24 Jahre benutzt, wie viel hat die Gemeinde auf ihre Schuld noch herauszuzahlen? Um dies zu berechnen, setze man in die Formel A (§ 54, I): $c = 18000$, $b = 1300$, $p = 5$, $q = 1{,}05$, $a = 24$ (Jahre) und man findet

$$R = \frac{100 - 1300}{5} - \left(\frac{100 \,.\, 1300}{5} - 18000\right) \cdot 1{,}05^{24}$$

$$R = 26000 - 8000 \,.\, 1{,}05^{24} = 26000 - 25800{,}8 = 199{,}2 \text{ ℳ}$$

So viel also hätte die Gemeinde noch herauszuzahlen. Angenommen aber, die Herrschaft hätte den Wald noch weitere vier Jahre benutzt, so würde in vorstehender Rechnung an die Stelle von 24 die Zahl 28 treten und man fände $R = -5362{,}04$ ℳ. In diesem Falle hätte die Herrschaft 5362,04 ℳ über ihre Forderung gezogen und müßte mithin diesen Betrag an die Gemeinde zurückzahlen.

§ 56. Die Gleichung dritten Grades.

I. Die Auflösung der reinen kubischen Gleichung von der Form $a x^3 = b$ ist schon in § 43 (VI, A) gelehrt worden, daher ist nur noch die Lösung der gemischten kubischen Gleichung nachzutragen. Dieselbe kann die folgenden drei Formen haben:

1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$,
2) $x^3 + ax^2 + c = 0$,
3) $x^3 + bx + c = 0$.

Die beiden ersten Gleichungen löst man nicht direkt auf, sondern bringt sie (wie in IV und V gezeigt werden soll) stets auf die 3. Form, deren Lösung in VI und VII gegeben wird.

II. Die Gleichung 3. Grades hat stets 3 Auflösungen (Wurzeln).

Bew. Wäre für $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zunächst nur eine Auflösung $x = d$ gefunden worden, so ist $d^3 + ad^2 + bd + c = 0$ (s. § 42, I). Subtrahiert man die letztere Gleichung von der gegebenen, so erhält man:

$$x^3 - d^3 + a(x^2 - d^2) + b(x - d) = 0.$$

Da die linke Seite den gemeinsamen Faktor $x - d$ hat (s. § 17, III), so kann man diesen ausheben:

$$(x - d)[x^2 + dx + d^2 + a(x + d) + b] = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun nach § 43, IV, F:

1) $x - d = 0$, d. i. $x = d$, wie schon zuerst gefunden worden war;

2) $x^2 + dx + d^2 + a(x + d) + b = 0$. Diese quadratische Gleichung enthält mithin noch zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung.

III. Zugleich geht hieraus hervor, daß man die Gleichung 3. Grades stets durch die annullierte Wurzelgleichung $(x - d = 0)$ ohne Rest dividieren kann. Hat man daher eine Wurzel gefunden, so gelangt man durch diese Division zu einer quadratischen Gleichung, die die beiden noch fehlenden Wurzeln enthält.

IV. Ist die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ gegeben, so mag $x = y + n$ gesetzt werden. Man erhält alsdann: $(y + n)^3 + a(y + n)^2 + b(y + n) + c = 0$; entwickelt: $y^3 + (3n + a)y^2 + (3n^2 + 2an + b)y + n^3 + an^2$

$+ bn + c = 0$. Setzt man hier $3n + a = 0$, also $n = -\frac{a}{3}$, so verschwindet y^2 und jene Annahme $x = y + n$ geht über in $x = y - \frac{a}{3}$.

Setzt man mithin in der vollständigen Gleich. 3. Grades $x = y$ vermehrt um den 3. Teil des entgegengesetzt genommenen Koeffizient von x^2, so verschwindet das Quadrat der Unbekannten und die Gleichung erhält die gewünschte Form $x^3 + bx + c = 0$ (s. VI und VII).

Beispiel. $x^3 - 12x^2 + 17x + 90 = 0$;
$x = y - \frac{1}{3}(-12) = y + 4$ gesetzt, giebt
$(y+4)^3 - 12(y+4)^2 + 17(y+4) + 90 = 0$; entwickelt:

$$y^3 - 31y + 30 = 0.$$

Ist aus dieser Gleichung eine Lösung $y = 5$ gefunden, so ist alsdann $x = y + 4 = 5 + 4 = 9$.

V. Ist die Gleichung $x^3 + ax^2 + c = 0$ gegeben, so beseitigt man das Quadrat der Unbekannten nicht auf die soeben angegebene Weise, sondern setzt einfach $x = \frac{1}{y}$. Man erhält alsdann:

$\left(\frac{1}{y}\right)^3 + a\left(\frac{1}{y}\right)^2 + c = 0$, mit y^3 mult.:

$1 + ay + cy^3 = 0$ und durch c dividiert:

$y^3 + \frac{a}{c}y + \frac{1}{c} = 0$, also die Form, wie sie sich zur Auflösung eignet.

VI. Auflösung der Gleichung:

$$x^3 + bx + c = 0.$$

Man setze $x = m + n$, folglich ist alsdann:

$$(m+n)^3 + b(m+n) + c = 0; \text{ entwickelt:}$$

$m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 + bm + bn + c = 0$; d. i.
$m^3 + n^3 + c + (3mn + b)(m + n) = 0$. Dieser Gleichung wird nur genügt, wenn
I*. $m^3 + n^3 + c = 0$ und II*. $3mn + b = 0$ gesetzt wird, denn dann ist die linke Seite = der rechten.

Um nun diese noch unbekannten Zahlen m und n aus b und c zu bestimmen, sucht man aus II*: $n = -\frac{b}{3m}$ und setzt dies in I* ein:

$$m^3 - \frac{b^3}{27m^3} + c = 0 \text{ oder } m^6 + cm^3 = \frac{b^3}{27}.$$

Setzt man $m^3 = r$, also $m^6 = r^2$, so geht diese Gleichung über in: $r^2 + cr = \frac{b^3}{27}$, folglich

$$r = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} \text{ d. i.}$$

$$m^3 = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Nun ist auch $n^3 = -c - m^3$ (siehe I*)

$$= -c - \left[-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}\right]$$

$$= -\frac{c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Zieht man noch die Kubikwurzel aus, so erhält man:

$$m = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}},$$

$$n = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Diese Werte in $x = m + n$ eingesetzt, giebt die Auflösung der Gleichung 3. Grades:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Anmerk. Diese Formel ist von Cardano zu Mailand 1545 zuerst bekannt gemacht worden; sie heißt daher „Cardanische Formel". Sie war aber schon 1515 von Ferrari zu Bologna und 1534 von Tartaglia gefunden.

Beispiel. $x^3 - 14x + 55 = 0$. Hier ist $b = -14$, $c = 55$, folglich:

$$x = \sqrt[3]{-{}^{55}/_2 + \sqrt{({}^{55}/_2)^2 + \left(\frac{-14}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-{}^{55}/_2 - \sqrt{({}^{55}/_2)^2 + \left(\frac{-14}{3}\right)^3}};$$ d. i.

$$x = -\left[\sqrt[3]{{}^{55}/_2 - \sqrt{({}^{55}/_2)^2 - ({}^{14}/_3)^3}} + \sqrt[3]{{}^{55}/_2 + \sqrt{({}^{55}/_2)^2 - ({}^{14}/_3)^3}}\right]$$

$$= -\left[\sqrt[3]{27,5 - \sqrt{756,25 - 101,62963}} + \sqrt[3]{27,5 + \sqrt{756,25 - 101,62963}}\right]$$

$$= -\left[\sqrt[3]{27,5 - 25,58555} + \sqrt[3]{27,5 + 25,58555}\right]$$

$$= -[1,2416943 + 3,7583057]$$ oder $x = 5$.

VII. Ist $x^3 - bx \pm c = 0$ gegeben, wo $-b$ eine negative Zahl und $4b^3 > 27c^2$ sein soll, so wird die Cardanische Formel unbrauchbar, da alsdann die Quadratwurzel in derselben imaginär ist. Für diesen Fall, den man casus irreducibilis nennt, hat alsdann die Gleichung dritten Grades drei reelle Wurzeln, während sie nur eine reelle Wurzel und zwei imaginäre hat, wenn in der Cardanischen Formel die Quadratwurzel reell ist.

A. Der casus irreducibilis konnte bisher nicht algebraisch, sondern nur trigonometrisch in folgender Weise aufgelöst werden:

Bestimme den Winkel e aus

$$\sin e = \frac{3c}{b\sqrt{\frac{4b}{3}}},$$ wo b und c stets absolut (positiv) zu nehmen sind.

Alsdann ist $$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{4b}{3}}\cdot\sin\frac{e}{3} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{4b}{3}}\cdot\cos\left(30^0+\frac{e}{3}\right) \end{aligned}\right\}\ \text{mit dem Vorzeichen von } c.$$
$$x_3 = -(x_1+x_2).$$

B. Dennoch kann die Auflösung der Gleichung dritten Grades für den casus irreducibilis auch algebraisch durch die nachstehende, vom Verfasser (R. Sch.) neuerdings gefundene Formel aufgelöst werden.

$$x = \frac{\pm mc}{b\left[n+p\sqrt{1-\frac{27c^2}{4b^3}-\frac{c^2}{b^3}}\right]^r},$$

wo $\lg m = 0{,}7968036$; $n = 11{,}639016$; $\lg p = 1{,}0542793$; $r = 0{,}5853828$; $\lg r = 9{,}7674400 - 10$.

Die Berechnung von x ist am besten in folgender Weise auszuführen:

Man bestimme den Logarithmus von

$$\left[n+p\sqrt{1-\frac{27c^2}{4b^3}-\frac{c^2}{b^3}}\right].$$

Suche von demselben (als Numerus gedacht) den Logarithmus und vermehre diesen um $9{,}7674400 - 10$. Der zur Summe dieser beiden Logarithmen gehörige Numerus ist der Log. von $[\ldots]^r$. Alsdann ist

$$\lg x = \lg m + \lg c + \text{d. E.} \lg b + \text{d. E.} \lg [\ldots]^r;$$

x mit dem Vorzeichen von c.

Beispiel. $x^3 - 21x - 35 = 0$.

Da $4 \,.\, 21^3 = 37044$, $27 \,.\, 35^2 = 33075$, also $4b^3 > 27c^2$, so tritt hier der casus irreducibilis ein. Die Berechnung ist nun folgende:

$$\lg\left(n+p\sqrt{1-\frac{27\,.\,35^2}{4\,.\,21^3}-\frac{35^2}{21^3}}\right) = \lg\left(n+p\sqrt{\frac{3}{28}-\frac{25}{189}}\right)$$
$$= \lg(11{,}639016 + 3{,}709036 - 0{,}132275)$$
$$= \lg\ 15{,}215777 = 1{,}1822941.$$

$$\begin{aligned} \lg 1{,}1822941 &= 0{,}0727255 \\ &\underline{+9{,}7674400} \\ &9{,}8401655 \end{aligned}$$

Der Numerus dieses Log. ist $0{,}6920947 = \lg[\ldots]^r$.

$$\begin{aligned} \lg m &= 0{,}7968036 \\ \lg 35 &= 1{,}5440680_n \\ \text{d. E.} \lg 21 &= 8{,}6777807 \\ \text{d. E.} \lg[\ldots]^r &= 9{,}3079053 \\ \hline \lg x &= 0{,}3265576_n \\ x &= -2{,}121083. \end{aligned}$$

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

Verlag von J. J. Weber in Leipzig.

Illustrierte Katechismen.

Belehrungen aus dem Gebiete der Wissenschaften, Künste und Gewerbe 2c.

In Original-Leinenbänden.

Ackerbau, praktischer. Von Wilhelm Hamm. Dritte Auflage, gänzlich umgearbeitet von A. G. Schmitter. Mit 138 Abbildungen. 1890. 3 Mark.

Agrikulturchemie. Von Dr. E. Wildt. Sechste Auflage. Mit 41 Abbildungen. 1884. 3 Mark.

Alabasterschlägerei s. Liebhaberkünste.

Algebra, oder die Grundlehren der allgemeinen Arithmetik. Vierte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Richard Schurig. 1895. 3 Mark.

Anstandslehre s. Ton, der gute.

Appretur s. Spinnerei.

Archäologie. Uebersicht über die Entwickelung der Kunst bei den Völkern des Altertums von Dr. Ernst Kroker. Mit 3 Tafeln und 127 Abbildungen. 1888. 3 Mark.

Archivkunde s. Registratur.

Arithmetik. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Rechenkunst für Lehrende und Lernende von E. Schick. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Max Meyer. 1889. 3 Mark.

Aesthetik. Belehrungen über die Wissenschaft vom Schönen und der Kunst von Robert Prölß. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1889. 3 Mark.

Astronomie. Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender von Dr. Hermann J. Klein. Achte, vielfach verbesserte Auflage. Mit einer Sternkarte und 163 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Aetzen s. Liebhaberkünste.

Aufsatz, schriftlicher, s. Stilistik.

Auswanderung. Kompaß für Auswanderer nach europäischen Ländern, Asien, Afrika, den deutschen Kolonien, Australien, Süd- und Zentralamerika, Mexiko, den Vereinigten Staaten von Amerika und Kanada. Siebente Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Gustav Meinecke. Mit 4 Karten und einer Abbildung. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Bankwesen. Von Dr. E. Gleisberg. Mit 4 Check-Formularen und einer Uebersicht über die deutschen Notenbanken. 1890. 2 Mark.

Baukonstruktionslehre. Mit besonderer Berücksichtigung von Reparaturen und Umbauten. Von W. Lange. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 343 und 1 Tafel Abbildungen. 1895. 3 Mark 50 Pf.

Baustile, oder Lehre der architektonischen Stilarten von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart von Dr. Ed. Freiherrn von Sacken. Zwölfte Auflage. Mit 103 Abbildungen. 1896. 2 Mark.

Beleuchtung s. Heizung.

Bergbaukunde. Von G. Köhler. Mit 217 Abbildungen. 1891. 4 Mark.

Bergsteigen. — Katechismus für Bergsteiger, Gebirgstouristen und Alpenreisende von Julius Meurer. Mit 22 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Bewegungsspiele für die deutsche Jugend. Von J. C. Lion und J. H. Wortmann. Mit 29 Abbildungen. 1891. 2 Mark.

Bibliothekslehre mit bibliographischen und erläuternden Anmerkungen. Neubearbeitung von Dr. Julius Petzholdts Katechismus der Bibliothekenlehre von Dr. Arnim Gräsel. Mit 33 Abbildungen und 11 Schrifttafeln. 1890. 4 Mark 50 Pf.

Bienenkunde und Bienenzucht. Von G. Kirsten. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage, herausgegeben von J. Kirsten. Mit 51 Abbildungen. 1887. 2 Mark.

Bildhauerei für den kunstliebenden Laien. Von Rudolf Maison. Mit 63 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Bleicherei s. Wäscherei 2c.

Blumenzucht s. Ziergärtnerei.

Börsen- und Bankwesen. Auf Grund der Bestimmungen des neuen Börsen- und Depotgesetzes bearbeitet von Georg Schweitzer. 1897. 2 Mark 50 Pf.

Bossieren s. Liebhaberkünste.

Botanik, allgemeine. Zweite Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Dr. E. Dennert. Mit vielen Abbildungen. 1897. 4 Mark.

Botanik, landwirtschaftliche. Von Karl Müller. Zweite Auflage, vollständig umgearbeitet von R. Herrmann. Mit 4 Tafeln und 48 Abbildungen. 1876. 2 Mark.

Brandmalerei s. Liebhaberkünste.

Briefmarkenkunde und Briefmarkensammelwesen. Von V. Suppantschitsch. Mit 1 Porträt und 7 Textabbildungen. 1895. 3 Mark.

Bronzemalerei s. Liebhaberkünste.

Buchdruckerkunst. Von A. Waldow. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 43 Abbildungen und Tafeln. 1894. 2 Mark 50 Pf.

Buchführung, kaufmännische. Von Oskar Klemich. Fünfte, durchgesehene Auflage. Mit 7 Abbildungen und 3 Wechselformularen. 1895. 2 Mark 50 Pf.

Buchführung, landwirtschaftliche. Von Prof. Dr. K. Birnbaum. 1879. 2 Mark.

Bürgerliches Gesetzbuch s. Gesetzbuch.

Chemie. Von Prof. Dr. H. Hirzel. Siebente, vermehrte Auflage. Mit 35 Abbildungen. 1894. 4 Mark.

Chemikalienkunde. Eine kurze Beschreibung der wichtigsten Chemikalien des Handels. Von Dr. G. Heppe. 1880. 2 Mark.

Chronologie. Mit Beschreibung von 33 Kalendern verschiedener Völker und Zeiten von Dr. Adolf Drechsler. Dritte, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. 1881. 1 Mark 50 Pf.

Correspondance commerciale par J. Forest. D'après l'ouvrage de même nom en langue allemande par C. F. Findeisen. 1895. 3 Mark 50 Pf.

Dampfkessel, Dampfmaschinen und andere Wärmemotoren. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Praktiker, Techniker und Industrielle von Th. Schwartze. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 268 Abbildungen und 13 Tafeln. 1897. 4 Mark 50 Pf.

Darwinismus. Von Dr. Otto Zacharias. Mit dem Porträt Darwins. 30 Abbildungen und 1 Tafel. 1892. 2 Mark 50 Pf.

Delftermalerei s. Liebhaberkünste.

Differential- und Integralrechnung. Von Franz Bendt. Mit 39 Figuren. 1896. 3 Mark.

Drainierung und Entwässerung des Bodens. Von Dr. William Löbe. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 92 Abbildungen. 1881. 2 Mark.

Dramaturgie. Von Robert Prölß. 1877. 3 Mark.

Droguenkunde. Von Dr. G. Heppe. Mit 30 Abbildungen. 1879. 2 Mark 50 Pf.

Einjährig-Freiwillige. — Der Weg zum Einjährig-Freiwilligen und zum Offizier des Beurlaubtenstandes in Armee und Marine. Von Oberstlieutenant z. D. Moritz Exner. Zweite Auflage. 1897. 2 Mark.

Eissegeln und Eisspiele s. Wintersport.

Elektrochemie. Von Dr. Walther Löb. Mit 43 Abbildungen. 1897. 3 Mark.

Elektrotechnik. Ein Lehrbuch für Praktiker, Techniker und Industrielle von Th. Schwartze. Sechste, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 256 Abbildungen. 1896. 4 Mark 50 Pf.
Entwässerung s. Drainierung.
Ethik s. Sittenlehre.
Familienhäuser s. Villen.
Färberei und Zeugdruck. Von Dr. Hermann Grothe. Zweite, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 78 Abbildungen. 1885. 2 Mark 50 Pf.
Farbwarenkunde. Von Dr. G. Heppe. 1881. 2 Mark.
Feldmeßkunst. Von Dr. C. Pietsch. Sechste Auflage. Mit 75 in den Text gedruckten Abbildungen. 1897. 1 Mark 80 Pf.
Feuerwerkerei s. Lustfeuerwerkerei.
Finanzwissenschaft. Von Alois Bischof. Fünfte, verbesserte Auflage. 1890. 1 Mark 50 Pf.
Fischzucht, künstliche, und Teichwirtschaft. Wirtschaftslehre der zahmen Fischerei von E. A. Schroeder. Mit 52 Abbildungen. 1889. 2 Mark 50 Pf.
Flachsbau und Flachsbereitung. Von K. Sontag. Mit 12 Abbildungen. 1872. 1 Mark 50 Pf.
Fleischbeschau s. Trichinenschau.
Flöte und Flötenspiel. Ein Lehrbuch für Flötenbläser von Maximilian Schwedler. Mit 22 Abbildungen und vielen Notenbeispielen. 1897. 2 Mark 50 Pf.
Forstbotanik. Von H. Fischbach. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 79 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.
Freimaurerei. Von Dr. Willem Smitt. 1891. 2 Mark.
Galvanoplastik und Galvanostegie. Ein Handbuch für das Selbststudium und den Gebrauch in der Werkstatt von G. Seelhorst. Dritte, durchgesehene und vermehrte Auflage von Dr. G. Langbein. Mit 43 Abbildungen. 1888. 2 Mark.
Gartenbau s. Nutz-, Zier-, Zimmergärtnerei, und Rosenzucht.
Gebärdensprache s. Mimik.
Gedächtniskunst oder Mnemotechnik. Von Hermann Kothe. Achte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. G. Pietsch. 1897. 1 Mark 50 Pf.
Geflügelzucht. Ein Merkbüchlein für Liebhaber, Züchter und Aussteller schönen Rassegeflügels von Bruno Dürigen. Mit 40 Abbildungen und 7 Tafeln. 1890. 4 Mark.
Gemäldekunde. Von Dr. Th. v. Frimmel. Mit 28 Abbildungen. 1894. 3 Mark 50 Pf.
Gemüsebau s. Nutzgärtnerei.
Geographie. Vierte Auflage, gänzlich umgearbeitet von Karl Arenz. Mit 57 Karten und Ansichten. 1884. 2 Mark 40 Pf.
Geographie, mathematische. Zweite Auflage, umgearbeitet und verbessert von Dr. Hermann J. Klein. Mit 113 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.
Geologie. Von Dr. Hippolyt Haas. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit Abbildungen. 1897. [Unter der Presse.]
Geometrie, analytische. Von Dr. Max Friedrich. Mit 56 Abbildungen. 1884. 2 Mark 40 Pf.
Geometrie, ebene und räumliche. Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzsche. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 223 Abbildungen und 2 Tabellen. 1892. 3 Mark.
Gesangskunst. Von F. Sieber. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit vielen Notenbeispielen. 1894. 2 Mark 50 Pf.
Geschichte, allgemeine, s. Weltgeschichte.
Geschichte, deutsche. Von Wilhelm Kentzler. 1879. Kartoniert 2 Mark 50 Pf.
Gesetzbuch, bürgerliches, nebst Einführungsgesetz. Textausgabe mit Sachregister. 1896. 2 Mark 50 Pf.
Gesetzgebung des Deutschen Reiches s. Reich, das Deutsche.

Gesundheitslehre, naturgemäße, auf physiologischer Grundlage. Siebzehn Vorträge von Dr. Fr. Scholz. Mit 7 Abbildungen. 1884. 3 Mark 50 Pf.
(Unter gleichem Titel auch Band 20 von Webers Illustr. Gesundheitsbüchern.)
Girowesen. Von Karl Berger. Mit 21 Formularen. 1881. 2 Mark.
Glasmalerei s. Porzellanmalerei und Liebhaberkünste.
Glasradieren s. Liebhaberkünste.
Gobelinmalerei s. Liebhaberkünste.
Gravieren s. Liebhaberkünste.
Handelsgesetzbuch für das Deutsche Reich nebst Einführungsgesetz. Textausgabe mit Sachregister. 2 Mark.
Handelsmarine, deutsche. Von R. Dittmer. Mit 66 Abbildungen. 1892. 3 Mark 50 Pf.
Handelsrecht, deutsches, nach dem Allgemeinen Deutschen Handelsgesetzbuche von Robert Fischer. Dritte, umgearbeitete Auflage. 1885. 1 Mark 50 Pf.
Handelswissenschaft. Von K. Arenz. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Gust. Rothbaum und Ed. Deimel. 1890. 2 Mark.
Heerwesen, deutsches. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Moritz Exner. Mit 7 Abbildungen. 1896. 3 Mark.
Heizung, Beleuchtung und Ventilation. Von Th. Schwartze. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 209 Abbildungen. 1897. 4 Mark.
Heraldik. Grundzüge der Wappenkunde von Dr. Ed. Freih. v. Sacken. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 215 Abbildungen. 1893. 2 Mark.
Holzmalerei, -schlägerei s. Liebhaberkünste.
Hornschlägerei s. Liebhaberkünste.
Hufbeschlag. Zum Selbstunterricht für Jedermann. Von E. Th. Walther. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 67 Abbildungen. 1889. 1 Mark 50 Pf.
Hunderassen. Von Franz Krichler. Mit 42 Abbildungen. 1892. 3 Mark.
Hüttenkunde, allgemeine. Von Dr. E. F. Dürre. Mit 209 Abbildungen. 1877. 4 Mark 50 Pf.
Jagdkunde. — Katechismus für Jäger und Jagdfreunde von Franz Krichler. Mit 33 Abbildungen. 1891. 2 Mark 50 Pf.
Intarsiaschnitt s. Liebhaberkünste.
Integralrechnung s. Differential- und Integralrechnung.
Kalenderkunde. Belehrungen über Zeitrechnung, Kalenderwesen und Feste von O. Freih. von Reinsberg-Düringsfeld. Mit 2 Tafeln. 1876. 1 Mark 50 Pf.
Kellerwirtschaft s. Weinbau.
Kerbschnitt s. Liebhaberkünste.
Kindergärtnerei, praktische. Von Fr. Seidel. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 35 Abbildungen. 1887. 1 Mark 50 Pf.
Kirchengeschichte. Von Friedr. Kirchner. 1880. 2 Mark 50 Pf.
Klavierspiel. Von Fr. Taylor. Deutsche Ausgabe von Math. Stegmayer. Zweite, verbesserte Auflage. Mit vielen Notenbeispielen. 1893. 2 Mark.
Knabenhandarbeit. Ein Handbuch des erziehlichen Arbeitsunterrichts von Dr. Woldemar Götze. Mit 69 Abbildungen. 1892. 3 Mark.
Kompositionslehre. Von J. C. Lobe. Sechste Auflage. Mit vielen Musikbeispielen. 1895. 2 Mark.
Korkarbeit s. Liebhaberkünste.
Korrespondenz, kaufmännische, in deutscher Sprache. Von C. F. Findeisen. Vierte, vermehrte Auflage, bearbeitet von Franz Hahn. 1896. 2 Mark 50 Pf.
——— ——— in französischer Sprache s. Correspondance commerciale.
Kostümkunde. Von Wolfg. Quincke. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 459 Kostümfiguren in 152 Abbildungen. 1896. 4 Mark 50 Pf.
Kriegsmarine, deutsche. Von R. Dittmer. Mit 126 Abbildungen. 1890. 3 Mark.
Kulturgeschichte. Von J. J. Honegger. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1889. 2 Mark.
Kunstgeschichte. Von Bruno Bucher. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 276 Abbildungen. 1895. 4 Mark.

Lederschnitt s. Liebhaberkünste.
Liebhaberkünste. Von Wanda Friedrich. Mit 250 Abbildungen. 1896. 2 Mark 50 Pf.
Litteraturgeschichte, allgemeine. Von Dr. Ad. Stern. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1892. 3 Mark.
Litteraturgeschichte, deutsche. Von Dr. Paul Möbius. Siebente, verbesserte Auflage von Dr. Gotthold Klee. 1896. 2 Mark.
Logarithmen. Von Max Meyer. Mit 3 Tafeln und 7 Abbildungen. 1880. 2 Mark.
Logik. Von Friedr. Kirchner. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 36 Abbildungen. 1890. 2 Mark 50 Pf.
Luftfeuerwerkerei. Kurzer Lehrgang für die gründliche Ausbildung in allen Teilen der Pyrotechnik von C. A. von Nida. Mit 124 Abbildungen. 1883. 2 Mark.
Malerei. Von Karl Raupp. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 50 Abbildungen und 4 Tafeln. 1894. 3 Mark.
——— s. auch Liebhaberkünste.
Marine s. Handels- bez. Kriegsmarine.
Markscheidekunst. Von O. Brathuhn. Mit 174 Abbildungen. 1892. 3 Mark.
Mechanik. Von Ph. Huber. Sechste Auflage, den Fortschritten der Technik entsprechend neu bearbeitet von Walther Lange. Mit 196 Abbildungen. 1897. 3 Mark 50 Pf.
Metallätzen, -schlagen, -treiben s. Liebhaberkünste.
Meteorologie. Von Prof. Dr. W. J. van Bebber. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 63 Abbildungen. 1893. 3 Mark.
Mikroskopie. Von Prof. Carl Chun. Mit 97 Abbildungen. 1885. 2 Mark.
Milchwirtschaft. Von Dr. Eugen Werner. Mit 23 Abbildungen. 1884. 3 Mark.
Mimik und Gebärdensprache. Von Karl Skraup. Mit 60 Abbildungen. 1892. 3 Mark 50 Pf.
Mineralogie. Von Dr. Eugen Hussak. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 154 Abbildungen. 1896. 2 Mark 50 Pf.
Münzkunde. Von H. Dannenberg. Mit 11 Tafeln Abbildungen. 1891. 4 Mark.
Musik. Von J. C. Lobe. Sechsundzwanzigste Auflage. 1896. 1 Mark 50 Pf.
Musikgeschichte. Von R. Musiol. Mit 15 Abbildungen und 34 Notenbeispielen. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1888. 2 Mark 50 Pf.
Musikinstrumente. Von Richard Hofmann. Fünfte, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 189 Abbildungen. 1890. 4 Mark.
Musterschutz s. Patentwesen.
Mythologie. Von Dr. E. Kroker. Mit 73 Abbildungen. 1891. 4 Mark.
Nagelarbeit s. Liebhaberkünste.
Naturlehre. Erklärung der wichtigsten physikalischen, meteorologischen und chemischen Erscheinungen des täglichen Lebens von Dr. C. E. Brewer. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 53 Abbildungen. 1893. 3 Mark.
Nivellierkunst. Von Prof. Dr. C. Pietsch. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 61 Abbildungen. 1895. 2 Mark.
Numismatik s. Münzkunde.
Nutzgärtnerei. Grundzüge des Gemüse- und Obstbaues von Hermann Jäger. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage, nach den neuesten Erfahrungen und Fortschritten umgearbeitet von J. Wesselhöft. Mit 63 Abbildungen. 1893. 2 Mark 50 Pf.
Obstbau s. Nutzgärtnerei.
Orden s. Ritter- und Verdienstorden.
Orgel. Erklärung ihrer Struktur, besonders in Beziehung auf technische Behandlung beim Spiel von E. F. Richter. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Hans Menzel. Mit 25 Abbildungen. 1896. 3 Mark.
Ornamentik. Leitfaden über die Geschichte, Entwickelung und die charakteristischen Formen der Verzierungsstile aller Zeiten von F. Kanitz. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 131 Abbildungen. 1896. 2 Mark.
Orthographie s. Rechtschreibung.

Pädagogik. Von Lic. Dr. Fr. Kirchner. 1890. 2 Mark.
Paläographie s. Urkundenlehre.
Paläontologie s. Versteinerungskunde.
Patentwesen, Muster- und Warenzeichenschutz von Otto Sack. Mit 3 Abbildungen. 1897. 2 Mark 50 Pf.
Perspektive, angewandte. Nebst Erläuterungen über Schattenkonstruktion und Spiegelbilder. Von Max Kleiber. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 145 in den Text gedruckten und 7 Tafeln Abbildungen. 1896. 3 Mark.
Petrefaktenkunde s. Versteinerungskunde.
Petrographie. Lehre von der Beschaffenheit, Lagerung und Bildungsweise der Gesteine von Dr. J. Blaas. Mit 40 Abbildungen. 1882. 2 Mark.
Philosophie. Von J. H. v. Kirchmann. Vierte, durchgesehene Auflage. 1897. 3 Mark.
Philosophie, Geschichte der, von Thales bis zur Gegenwart. Von Lic. Dr. Fr. Kirchner. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1896. 4 Mark.
Photographie. Anleitung zur Erzeugung photographischer Bilder von Dr. J. Schnauß. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 40 Abbildungen. 1895. 2 Mark 50 Pf.
Phrenologie. Von Dr. G. Scheve. Achte Auflage. Mit Titelbild und 18 Abbildungen. 1896. 2 Mark.
Physik. Von Dr. J. Kollert. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 273 Abbildungen. 1895. 4 Mark 50 Pf.
Poetik, deutsche. Von Dr. J. Minckwitz. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1877. 1 Mark 80 Pf.
Porzellan- und Glasmalerei. Von Robert Ulke. Mit 77 Abbildungen. 1894. 3 Mark.
Projektionslehre. Mit einem Anhange, enthaltend die Elemente der Perspektive. Von Julius Hoch. Mit 100 Abbildungen. 1891. 2 Mark.
Psychologie. Von Fr. Kirchner. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1896. 3 Mark.
Punzieren s. Liebhaberkünste.
Pyrotechnik s. Lustfeuerwerkerei.
Radfahrsport. Von Dr. Karl Biesendahl. Mit 1 Titelbild und 104 Abbildungen. 1897. 3 Mark.
Raumberechnung. Anleitung zur Größenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art von Dr. E. Pietsch. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 55 Abbildungen. 1888. 1 Mark 80 Pf.
Rebenkultur s. Weinbau.
Rechenkunst s. Arithmetik.
Rechtschreibung, neue deutsche. Von Dr. G. A. Saalfeld. 1895. 3 Mark 50 Pf.
Redekunst. Anleitung zum mündlichen Vortrage von Roderich Benedix. Fünfte Auflage. 1896. 1 Mark 50 Pf.
Registratur- und Archivkunde. Handbuch für das Registratur- und Archivwesen bei den Reichs-, Staats-, Hof-, Kirchen-, Schul- und Gemeindebehörden, den Rechtsanwälten ꝛc., sowie bei den Staatsarchiven von Georg Holtzinger. Mit Beiträgen von Dr. Friedr. Leist. 1883. 3 Mark.
Reich, das Deutsche. Ein Unterrichtsbuch in den Grundsätzen des deutschen Staatsrechts, der Verfassung und Gesetzgebung des Deutschen Reiches von Dr. Wilh. Zeller. Zweite, vielfach umgearbeitete und erweiterte Auflage. 1880. 3 Mark.
Reinigung s. Wäscherei.
Ritter- und Verdienstorden aller Kulturstaaten der Welt innerhalb des 19. Jahrhunderts. Auf Grund amtlicher und anderer zuverlässiger Quellen zusammengestellt von Maximilian Gritzner. Mit 760 Abbildungen. 1893. 9 Mark, in Pergament-Einband 12 Mark.
Rosenzucht. Vollständige Anleitung über Zucht, Behandlung und Verwendung der Rosen im Lande und in Töpfen von Hermann Jäger. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von P. Lambert. Mit 70 Abbildungen. 1893. 2 Mark 50 Pf.

Schachspielkunst. Von K. J. S. Portius. Elfte Auflage. 1895. 2 Mark.
Schlitten-, Schlittschuh- und Schneeschuhsport f. Wintersport.
Schnitzerei f. Liebhaberkünste.
Schreibunterricht. Dritte Auflage, neu bearbeitet von Georg Funk. Mit 82 Figuren. 1893. 1 Mark 50 Pf.
Schwimmkunst. Von Martin Schwägerl. Zweite Auflage. Mit 111 Abbildungen. 1897. 2 Mark.
Sittenlehre. Von Lic. Dr. Friedrich Kirchner. 1881. 2 Mark 50 Pf.
Sozialismus, moderner. Von Max Haushofer. 1896. 3 Mark.
Sphragistik f. Urkundenlehre.
Spinnerei, Weberei und Appretur. Lehre von der mechanischen Verarbeitung der Gespinstfasern. Dritte, bedeutend vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. A. Ganswindt. Mit 196 Abbildungen. 1890. 4 Mark.
Sprachlehre, deutsche. Von Dr. Konrad Michelsen. Dritte Auflage, herausgegeben von Eduard Michelsen. 1878. 2 Mark 50 Pf.
Staatsrecht f. Reich, das Deutsche.
Steinätzen, -mosaik f. Liebhaberkünste.
Stenographie. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende der Stenographie im allgemeinen und des Systems von Gabelsberger im besonderen von Prof. H. Krieg. Zweite, vermehrte Auflage. 1888. 2 Mark 50 Pf.
Stilarten f. Baustile.
Stilistik. Eine Anweisung zur Ausarbeitung schriftlicher Aufsätze von Dr. Konrad Michelsen. Zweite, durchgesehene Auflage, herausgegeben von Ed. Michelsen. 1889. 2 Mark.
Tanzkunst. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende nebst einem Anhang über Choreographie von Bernhard Klemm. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 82 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.
Technologie, mechanische. Von A. v. Ihering. Mit 163 Abbildungen. 1888. 4 Mark.
Teichwirtschaft f. Fischzucht.
Telegraphie, elektrische. Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzsche. Sechste, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 315 Abbildungen. 1883. 4 Mark.
Tierzucht, landwirtschaftliche. Von Dr. Eugen Werner. Mit 20 Abbildungen. 1880. 2 Mark 50 Pf.
Ton, der gute, und feine Sitte. Von Eufemia v. Adlersfeld geb. Gräfin Ballestrem. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1895. 2 Mark.
Trichinenschau. Von F. W. Rüffert. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 52 Abbildungen. 1895. 1 Mark 80 Pf.
Trigonometrie. Von Franz Bendt. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 42 Figuren. 1894. 1 Mark 80 Pf.
Turnkunst. Von Dr. M. Kloss. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 100 Abbildungen. 1887. 3 Mark.
Uhrmacherkunst. Von F. W. Rüffert. Dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 229 Abbildungen und 7 Tabellen. 1885. 4 Mark.
Uniformkunde. Von Richard Knötel. Mit über 1000 Einzelfiguren auf 100 Tafeln, gezeichnet vom Verfasser. 1896. 6 Mark.
Urkundenlehre. — Katechismus der Diplomatik, Paläographie, Chronologie und Sphragistik von Dr. Fr. Leist. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 6 Tafeln Abbildungen. 1893. 4 Mark.
Ventilation f. Heizung.
Verfassung des Deutschen Reiches f. Reich, das Deutsche.
Versicherungswesen. Von Oskar Lemcke. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1888. 2 Mark 40 Pf.
Verskunst, deutsche. Von Dr. Roderich Benedix. Dritte, durchgesehene und verbesserte Auflage. 1894. 1 Mark 50 Pf.
Versteinerungskunde (Petrefaktenkunde, Paläontologie). Von Hippolyt Haas. Mit 178 Abbildungen. 1887. 3 Mark.

Villen und kleine Familienhäuser. Von Georg Aster. Mit 112 Abbildungen von Wohngebäuden nebst dazugehörigen Grundrissen und 23 in den Text gedruckten Figuren. Fünfte Auflage. 1897. 5 Mark.

Völkerkunde. Von Dr. Heinrich Schurtz. Mit 67 Abbildungen. 1893. 4 Mark.

Völkerrecht. Mit Rücksicht auf die Zeit- und Streitfragen des internationalen Rechtes. Von A. Bischof. 1877. 1 Mark 50 Pf.

Volkswirtschaftslehre. Von Hugo Schober. Fünfte, durchgesehene und vermehrte Auflage von Dr. Ed. O. Schulze. 1896. 4 Mark.

Vortrag, mündlicher, s. Redekunst.

Wappenkunde s. Heraldik.

Warenkunde. Von E. Schick. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage, neu bearbeitet von Dr. G. Heppe. 1886. 3 Mark.

Warenzeichenschutz s. Patentwesen.

Wäscherei, Reinigung und Bleicherei. Von Dr. Herm. Grothe. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 41 Abbildungen. 1884. 2 Mark.

Weberei s. Spinnerei.

Wechselrecht, allgemeines deutsches. Mit besonderer Berücksichtigung der Abweichungen und Zusätze der Oesterreichischen und Ungarischen Wechselordnung und des Eidgenössischen Wechsel- und Check-Gesetzes. Von Karl Arenz. Dritte, ganz umgearbeitete und vermehrte Auflage. 1884. 2 Mark.

Weinbau, Rebenkultur und Weinbereitung. Von Fr. Jak. Dochnahl. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit einem Anhange: Die Kellerwirtschaft. Von A. v. Babo. Mit 55 Abbildungen. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Weltgeschichte, allgemeine. Von Dr. Theodor Flathe. Zweite Auflage. Mit 5 Stammtafeln und einer tabellarischen Uebersicht. 1884. 3 Mark.

Wintersport. Von Max Schneider. Mit 140 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Zeugdruck s. Färberei.

Ziergärtnerei. Belehrung über Anlage, Ausschmückung und Unterhaltung der Gärten, so wie über Blumenzucht von Herm. Jäger. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 76 Abbildungen. 1889. 2 Mark 50 Pf.

Zimmergärtnerei. Nebst einem Anhang über Anlegung und Ausschmückung kleiner Gärtchen an den Wohngebäuden. Von M. Lebl. Mit 56 Abbildungen. 1890. 2 Mark.

Zoologie. Von Dr. C. G. Giebel. Mit 124 Abbildungen. 1879. 2 Mark 50 Pf.

Verzeichnisse mit ausführlicher Inhaltsangabe jedes einzelnen Bandes stehen auf Wunsch kostenfrei zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber in Leipzig

Reudnitzerstraße 1—7.

(Juli 1897.)

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

Für Familien und Lesezirkel, Bibliotheken, Hotels, Cafés und Restaurationen.

Einladung zum Abonnement auf die

Illustrirte Zeitung

Wöchentliche Nachrichten
über alle
Zustände, Ereignisse und Persönlichkeiten der Gegenwart,
über
Tagesgeschichte, öffentliches und gesellschaftliches Leben, Wissenschaft und Kunst, Musik, Theater und Mode.

Jeden Sonnabend eine Nummer von mindestens 24 Folioseiten.

Mit jährlich über 1800 Original-Abbildungen.
Probe-Nummern gratis und franko.

Abonnements-Preis vierteljährlich 7 Mark.
Zu beziehen durch alle Buchhandlungen und Postanstalten.

Leipzig,
Expedition der Illustrirten Zeitung
J. J. Weber.