Webers Illustrierte Handbücher
Band 157

Bendt

Differential- und Integralrechnung

3. Auflage

3 Mark

Verlag von J. J. Weber in Leipzig

fr. 4 —

Meyer Stefan 150.–

Webers Illustrierte Katechismen.

Jeder Band ist in Leinwand gebunden.

Algebra. Von Richard Schurig. Fünfte Auflage. 3 Mark.

Algebraische Analysis. Von Franz Bendt. Mit 6 Abbildungen. 2 Mark 50 Pf.

Arithmetik, praktische. Handbuch für Lehrende und Lernende. Vierte Auflage, völlig neu bearbeitet von Ernst Riedel, Professor am Nikolaigymnasium zu Leipzig. 3 Mark 50 Pf.

Feldmeßkunst. Von Prof. Dr. C. Pietsch. Siebente Auflage. Mit 76 Abbildungen. 1 Mark 80 Pf.

Geometrie, analytische. Von Dr. Max Friedrich. Zweite Auflage, durchgesehen und verbessert von Ernst Riedel, Professor am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Mit 56 Abbildungen. 3 Mark.

Geometrie, räumliche und ebene. Von Professor Dr. K. Ed. Zetzsche. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage, bearbeitet von Franz Zetzsche. Mit 242 Abbildungen. 4 Mark.

Logarithmen. Von Prof. Max Meyer. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 3 Tafeln: der natürlichen, Briggsschen Logarithmen und solcher der trigonometrischen Zahlen, und 7 in den Text gedruckten Abbildungen. 2 Mark 50 Pf.

Markscheidekunst. Von O. Brathuhn. Mit 174 Abbildungen. 3 Mark.

Nivellierkunst. Von Professor Dr. C. Pietsch. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Mit 61 Abbildungen. 2 Mark.

Planimetrie mit einem Anhange über harmonische Teilung, Potenzlinien und das Berührungsproblem des Apollonius von Professor Ernst Riedel. Mit 190 Abbildungen. 4 Mark.

Projektionslehre. Von Julius Hoch. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit einem Anhange, enthaltend die Elemente der Perspektive, und 121 Abbildungen. 2 Mark.

Raumberechnung. Anleitung zur Größenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art von Prof. Dr. C. Pietsch. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 55 Abbildungen. 1 Mark 80 Pf.

Rechnen, kaufmännisches. Von Robert Stern. 5 Mark.

Stereometrie mit einem Anhange über Kegelschnitte sowie über Maxima und Minima, begonnen von Richard Schurig, vollendet und einheitlich bearbeitet von Professor Ernst Riedel. Mit 159 Figuren. 3 Mark 50 Pf.

Trigonometrie. Von Franz Bendt. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 42 Figuren. 2 Mark.

Differential- und Integralrechnung.

Grundzüge

der

Differential- und Integralrechnung

von

Franz Bendt

Dritte, verbesserte Auflage

Mit 39 in den Text gedruckten Abbildungen

Leipzig
Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber
1906

Vorwort.

In wenigen Jahren wurden die beiden ersten Auflagen der Elemente der Differential- und Integralrechnung vollständig vergriffen. Das und die vielen zustimmenden Besprechungen, die mein kleines Buch erfahren hat, beweisen, daß ich das Richtige getroffen habe. Ich schrieb in der ersten Auflage:

„Es sind kaum fünf Jahrzehnte verflossen, da war die Differential- und Integralrechnung noch ein Wissensgebiet, mit dem sich ausschließlich der Mathematiker und der Astronom beschäftigten. Die Vertreter der anderen naturwissenschaftlichen Fächer standen Untersuchungen, die ihre Kenntnis voraussetzten, ganz fern, und selbst die Mehrzahl der Physiker, vorzüglich die deutschen Physiker, glaubten sich solchen Untersuchungen verschließen zu können.

Das hat sich seitdem durchaus geändert.

Es giebt jetzt fast kein Gebiet im Reiche der Naturwissenschaften und der Technik mehr, in dem nicht häufig Untersuchungen angestellt werden müssen, die die höhere

Analysis voraussetzen. Wer genötigt ist, Abhandlungen technischen oder chemischen, physiologischen oder statistischen Inhalts und dergleichen zu lesen oder Lehrbücher über diese Wissenschaften zu studieren, bedarf der höheren Mathematik. Allüberall stößt man in ihnen auf Differentialformeln und schlanke Integralzeichen. Der Arzt, der Chemiker, der nicht akademisch gebildete Techniker und überhaupt jeder Freund der Naturwissenschaft kommt daher häufig beim Studium bedeutungsvoller Arbeiten in Verlegenheit und ist nicht fähig, sie ganz zu erfassen. Er wird gezwungen, sich mit der Infinitesimalmethode vertraut zu machen, wenn er sich nicht in seinen Zielen beschränken will.

In Deutschland giebt es jetzt eine große Zahl ganz vortrefflicher Lehrschriften über die Differential- und Integralrechnung. Aber fast alle diese Werke sind zum Studium für den künftigen Mathematiker verfaßt oder sie wenden sich gar an den vollendeten Fachmann. Es sind daher zumeist umfangreiche Werke, die häufig mehrere Bände umfassen und eine nicht geringe algebraische Gewandtheit und bedeutende Kenntnisse voraussetzen. Männer mit mathematischen Kenntnissen kann man aber, selbst unter solchen von akademischer Bildung, mit der Laterne suchen. Der Durchschnittsleser wird daher nicht im stande sein, diese Lehrbücher zu bewältigen, ganz abgesehen davon, daß ein Mann, der seinen Beruf zu erfüllen hat nur selten Zeit dazu findet, umfangreiche Werke zu studieren.

Das ist auch seit lange erkannt worden. Die deutsche mathematische Litteratur besitzt Lehrschriften, die auf wenigen Bogen die ersten Elemente der höheren Mathematik entwickeln. Sie verfallen nur wiederum in den entgegengesetzten Fehler, sie geben zu wenig!

Der Verfasser hat den Versuch gemacht, zu vermitteln. Der Katechismus der Differential- und Integralrechnung enthält die wichtigsten Methoden und Verwendungen, die auch die größeren Lehrschriften bringen; ein Blick in das Inhaltsverzeichnis giebt dafür den Beweis. Er hat sich ferner bemüht, die Entwickelung ganz elementar zu gestalten, und die Rechnungen fast überall vollständig durchgeführt. Um das auf kleinem Raume zu ermöglichen, mußte er die Darstellung nach anderer Richtung beschränken.

Der Katechismus soll der Praxis dienen. Er wendet sich an Leser, die die Mathematik nur als Mittel für ihren besonderen Zweck betreiben. Der Verfasser durfte daher auf strenge Beweisführung der Lehrsätze verzichten und sich begnügen, sie verständlich zu machen. Das geschah u. a. dadurch, daß an Stelle allgemeiner Ableitungen charakteristische Beispiele gesetzt und durchgeführt wurden.

Der Verfasser rechnet und hofft nicht auf die Gunst der Mathematiker; er ist befriedigt, wenn es ihm gelingt, seinen Lesern in kurzer Zeit das Studium der Schriften zu ermöglichen, in denen die höhere Mathematik verwendet wird. Vielleicht stellt sich bei solchen später, nachdem die ersten Schwierigkeiten überwunden sind, der Wunsch ein, auch noch aus tieferen Quellen mathematische Weisheit zu schöpfen.

Ueber das Maß von Kenntnissen, die der Katechismus voraussetzt, sowie über die besten Werke, die sich zum Weiterstudium eignen, giebt der kleine Anhang unter dem Titel »Mathematische Litteratur« Auskunft."

Franz Bendt.

Inhaltsverzeichnis.

Dritter Teil.

Die Integralrechnung.

Seite

Differential- und Integralrechnung.

Einleitung.

Die Differential- und Integral- oder die Infinitesimalrechnung, die in ihrer gesamten Ausdehnung auch wohl als höhere Analysis bezeichnet wird, bildet den Schlußstein am Palaste der Mathematik. Wenn auch in vereinzelten Fällen schon die alten Mathematiker Aufgaben lösten, aus denen die Grundidee der höheren Analysis hervorleuchtet (wir erinnern nur an die Kugelbeweise des Archimedes), so muß sie dennoch in ihrer methodischen Entwickelung als eine durchaus moderne Wissenschaft bezeichnet werden, die den Stempel der neuen Zeit an ihrer Stirn trägt. Isaac Newton (1642—1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) sind unabhängig voneinander die Erfinder der Differential- und Integralrechnung.

Ermöglicht wurde die merkwürdige Lehre durch die Analytische Geometrie, deren Erfinder der große Franzose René Descartes (1596—1650) ist. Er zeigte, daß geometrische Gebilde durch Formeln dargestellt werden können, mit denen man fähig ist, wie mit algebraischen Gleichungen zu operieren.

Aber erst die Differentialrechnung giebt die Methoden, durch die man im stande ist, aus den Gleichungen einer Kurve oder Fläche ihre Eigenschaften zu ermitteln. Sie schildert gleichsam auf das genaueste ihren Verlauf, ihre Krümmungen und Knickungen, ihre höchsten und tiefsten Punkte ꝛc.

Die **Integralrechnung** kann als das Umgekehrte der Differentialrechnung bezeichnet werden. Sie lehrt beispielsweise aus den Eigenschaften eines geometrischen Gebildes dessen Gleichung finden. Aber auch der Astronom, der durch die Beobachtung eines Gestirns, der Physiker, welcher aus dem Studium einer Erscheinung gewisse Regelmäßigkeiten ermittelt hat, erhält aus der Integration den Weg, auf dem sich das Gehirn bewegt, resp. das Gesetz, dem die Erscheinung folgt. Die höhere Analysis ist daher von größter Bedeutung für die astronomische, physikalische und technische Wissenschaft; ja diese sind jetzt ohne die erste nicht mehr denkbar.

Unser Buch zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten werden Sätze entwickelt, die der **algebraischen Analysis** zugehören, einer Disziplin, welche man als Fortsetzung der elementaren Algebra und Arithmetik betrachten kann. Sie sind unerläßlich zum Verständnis des zweiten und dritten Abschnittes, in denen die Differential- bezüglich die Integralrechnung zum Vortrag kommt.

Erster Teil.

Die algebraische Analysis.

Erstes Kapitel.

Vom binomischen Lehrsatz.

1. Der binomische Satz.

In den Elementen der Algebra wird gelehrt, daß man für ein Binom, das auf einen Exponenten erhoben, also zu einer Potenz gemacht worden ist, einen Ausdruck erhält, der gesetzmäßig verläuft, z. B.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ꝛc. ꝛc.

Durch den großen Mathematiker Newton wurde gezeigt, daß man in dieser Weise auch zu dem ganz allgemeinen Ausdruck von der Form kommt:

$$1)\quad (a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n,$$

in dem der Exponent n jeden reellen, ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Wert annehmen kann. Dieser Satz wird als der binomische Lehrsatz bezeichnet.

Die Ausdrücke

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{ ꝛc.}$$

nennt man die Binomialkoeffizienten und schreibt in ihnen die Nenner $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$ ꝛc. gewöhnlich kürzer, und zwar

$$1 \cdot 2 = 2! \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!$$

und liest für $n!$ „n=Fakultät", für $3!$ „3=Fakultät".

Das beachtet, erscheint der binomische Lehrsatz in der Form

$$2) \quad (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

Oder man schreibt auch wohl für $\frac{n(n-1)}{2!}$ die Form $\binom{n}{2}$, für $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ die Form $\binom{n}{3}$ und liest „n über 2, n über 3" ꝛc. Dann ergiebt sich für den binomischen Lehrsatz die ganz kurze Form

$$2a) \quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

2. Die Binomialkoeffizienten.

Es sollen nun zunächst einige Sätze aus dem binomischen Lehrsatze entwickelt werden.

Setzen wir in die Gleichung 2) $a = b = 1$, dann geht sie über in

$$3) \quad 2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + 1.$$

Aus 3) folgt der bedeutungsvolle Satz, daß die Summe aller Binomialkoeffizienten gleich 2^n ist.

Entwickeln wir ferner die Binomialformel für irgend einen bestimmten Exponenten, z. B.

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,$$

so wird sich stets zeigen, *daß die Koeffizienten, die gleichweit vom Ende und Anfang entfernt stehen, gleichgroß sind.*

Das Gesetz der Binomialkoeffizienten, das im binomischen Lehrsatze klar hervortritt, hat Pascal bereits in einer sehr übersichtlichen Form angegeben, die man als das *Pascalsche Dreieck* bezeichnet.

Entwickeln wir, um diese Form zu erhalten, den Ausdruck $(a+b)^n$, indem wir für n nacheinander 0, 1, 2, 3 ꝛc. setzen und die Koeffizienten untereinander schreiben. Dann ergiebt sich

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
ꝛc. ꝛc.

Das Pascalsche Dreieck.

Aus dem Ausdruck ersieht man unmittelbar, *daß die Summe des rten und (r+1)ten Koeffizienten immer gleich ist dem (r+1)ten Koeffizienten der nächsthöheren Potenz.* Also wenn man die Binomialkoeffizienten mit b bezeichnet, so folgt

4) $$(n+1)\,b^{r+1} = (n)\,b^r + (n)\,b^{r+1}.$$

Hierin bedeuten n und $n+1$ die Potenzen, r und $r+1$ die Stellung der Koeffizienten. Erläutern wir den Satz 4) noch an einem praktischen Beispiele. Aus dem Pascalschen Dreieck ergiebt sich, daß der dritte Koeffizient von $(a+b)^5$ gleich ist dem zweiten und dritten Koeffizienten von $(a+b)^4$. Daher
$$10 = 4 + 6$$
oder in der Sprache der Formel 4)
$$(5)b^3 = (4)b^2 + (4)b^3.$$

Zweites Kapitel.

Die unendlichen Reihen.

3. Definition.

Schon die Elemente der Arithmetik machen mit unendlichen Reihen bekannt. Wir haben nur nötig, uns an die unendlichen Dezimalbrüche und an die arithmetischen und geometrischen Reihen zu erinnern. Sollen solche Reihen nutzbringend sein, dann müssen ihnen bestimmte Eigenschaften zukommen, welche wir zunächst besprechen wollen. Wir verfahren da am besten, wenn wir an die bekannten Vorgänge, die die geometrischen Reihen zeigen, anknüpfen. Nehmen wir die geometrische Reihe an:

1) $$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots \text{ 2c.}$$

Sie soll sich beliebig weit erstrecken. Die Summe der Reihe kann dann, wie bekannt, durch die Formel
$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$
bestimmt werden, in der a das Anfangsglied, q den Quotienten und n die Anzahl der Glieder bedeutet. Die Summe entspricht einer unendlichen Reihe, wenn $n = \infty$ wird.

Bestimmen wir zunächst die Summe für die Reihe 1) für unendlich viele Glieder. Dann ist
$$s = \frac{1/2\,[(1/2)^\infty - 1]}{1/2 - 1} = \frac{-1/2}{-1/2} = 1.$$

Das besagt also, daß je mehr Glieder der Reihe 1) man addiert, um so mehr sich ihre Summe der Eins nähert.

Eine Reihe, deren Summe für eine sehr große Anzahl von Gliedern sich einer bestimmten endlichen Zahl oder, wie man zu sagen pflegt, einer bestimmten Grenze (limes, abgekürzt lim.) nähert, nennt man konvergent. Bezeichnet s die Summe, dann deutet man das an durch den Ausdruck

2) $$\lim_{n=\infty}.(\text{Summe}) = s$$

d. h. der Grenzwert der Reihensumme für n gleich unendlich ist s.

Kann ein solcher Grenzwert nicht nachgewiesen werden, dann nennt man die Reihe divergent. Für uns sind nur die konvergenten Reihen von Bedeutung.

4. Untersuchungen über die Konvergenz.

Die allgemeine geometrische Reihe

3) $$a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots + ax^{n-1}$$

hat die Summe

$$s = \frac{ax^n - a}{x - 1} = \frac{a - ax^n}{1 - x}.$$

Nehmen wir an, es sei in der Reihe 3) $n = \infty$ und a ein endlicher Wert. Ist nun $x = 1$, dann ergiebt sich, daß die Reihe divergent ist; daraus folgt, daß sie für $x > 1$ erst recht divergent sein muß.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Angelegenheit für $x < 1$ gestaltet. Schreiben wir hierzu die Summenformel

$$s = \frac{a}{1 - x} - \frac{ax^n}{1 - x},$$

dann zeigt sich sofort, daß $x^n = x^\infty = 0$ ist. Somit muß auch das Glied

$$\frac{ax^n}{1 - x} = 0$$

sein.

Die Summenformel der geometrischen Reihe für $x < 1$ geht also über in

$$s = \frac{a}{1 - x},$$

und das ist ein endlicher Wert.

Das ergiebt:

Satz I. Eine unendliche geometrische Reihe mit endlichen Koeffizienten ist immer konvergent, wenn ihr Quotient kleiner als eins, also ein echter Bruch ist.

Kann man somit von irgend einer Reihe nachweisen, daß der Quotient zwischen zwei sich folgenden Gliedern immer derselbe und kleiner als eins ist, dann ist auch der Nachweis für ihre Konvergenz gelungen.

Daran schließt sich ein allgemeiner Satz.

Satz II. Jede unendliche Reihe von der Form

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots,$$

die nach ganzen Potenzen von x fortschreitet und in der a, a_1, a_2 ꝛc. endliche Zahlen sind und $x < 1$ ist, ist konvergent.

Der Beweis ist leicht zu führen. Man denke sich von den Koeffizienten a, a_1 ꝛc. den größten genommen und ihn überall gesetzt. Dann bekommt man eine geometrische Reihe, die nach Satz I konvergent ist. Die Summe dieser konvergenten Reihe muß aber größer als die der Reihe $a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ sein. Die Reihe $a + a_1 x + \ldots$ ist also erst recht konvergent.

Die Untersuchungen über die unendlichen Reihen und ihre Konvergenz sind besonders in den Fällen von Wichtigkeit, wo es darauf ankommt, einen geschlossenen Ausdruck in eine Reihe zu entwickeln, die nach ganzen und positiven Potenzen von x fortschreitet. Der binomische Lehrsatz ist ein Beispiel dafür, daß ein geschlossener Ausdruck durch eine Reihe dargestellt werden kann. Ist in ihm der Exponent ein echter Bruch, dann geht die Entwickelung in eine unendliche Reihe über, die für $x < 1$ immer konvergent ist. Z. B. $(1 + x)^{1/2}$ und $x < 1$.

Auch durch einfache Division können unendliche Reihen erzeugt werden.

Dividieren wir in dem Bruch $\frac{1}{1 - x}$ mit dem Nenner in den Zähler, dann ergiebt sich nach der Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}.$$

Allgemein:

$$4)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Die Division kann selbstverständlich beliebig weit ausgeführt werden. Es ist hier wohl unzweifelhaft, daß die Summe auf der rechten Seite der Gleichung dem geschlossenen Ausdruck auf der linken Seite gleich sein muß.

Satz III. Das Endglied einer konvergenten Reihe muß immer gleich null sein.

In unserer Reihe ist für $n = \infty$ und $x < 1$ der Ausdruck

$$\frac{x^\infty}{1-x} = 0.$$

5. Alternierende Reihen.

Häufig erscheinen in der Rechnung Reihen, deren Vorzeichen fortwährend wechseln; man nennt sie alternierende Reihen. So ist z. B.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \text{ etc.} - \ldots$$

eine alternierende Reihe

Satz IV. Alternierende Reihen, in denen die Glieder bis zu null abnehmen, sind immer konvergent.

Man kann sich vom schnellen Abnehmen solcher Reihen auch leicht überzeugen, wenn man immer zwei Glieder zusammennimmt, z. B.

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots$$

Das giebt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots$$

Merken wir uns noch den Satz V:

Eine Reihe von der Form

$$5)\qquad \frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\frac{1}{4^r}+\ldots$$

ist immer konvergent, wenn r größer als eins ist, z. B.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=1+{}^1/_4+{}^1/_9+{}^1/_{16}+\ldots$$

Allgemeines. Wenn zwei endliche oder zwei unendliche konvergente Reihen, die nach ganzen Potenzen von x fortschreiten, für jeden Wert von x einander gleich sind, dann müssen auch die Koeffizienten, die zu gleichhohen Potenzen von x gehören, einander gleich sein. Also

$$6)\qquad a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$$

und
$$7)\qquad \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots$$

Ist dann

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots,$$

so muß auch sein

$$a=\alpha;\quad b=\beta;\quad c=\gamma;\quad d=\delta \text{ etc.}$$

6. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Die Reihenentwickelung geschlossener Ausdrücke ist bedeutungsvoll für die trigonometrischen und Exponentialfunktionen, also für $\sin x$, a^x etc. Diese Reihen sind fast immer unendlich. Im zweiten Teile unserer Ausführungen werden wir sie mit Hilfe der Differentialrechnung entwickeln. Zunächst sollen hier schon einige Reihen Erledigung finden, um den großen Vorteil der Differentialmethode recht deutlich zu erkennen. Man bedient sich zur Entwickelung sehr häufig der Methode der unbestimmten Koeffizienten, und diese soll zuerst an einigen praktischen Beispielen vorgeführt werden.

Wählen wir einen Bruch, dessen Zähler und Nenner nach steigenden ganzen Potenzen von x fortschreiten, und bilden wir, wie auf Seite 11 angedeutet, durch Division eine Reihe. Der Bruch sei

$$\frac{2+4x}{1-2x+3x^2},$$

dann wird

$$8)\quad \frac{2+4x}{1-2x+3x^2} = 2+8x+10x^2-4x^3 \text{ etc.}$$

Durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten kann das Verfahren sehr vereinfacht werden.

Die Reihe, die nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreiten muß, soll zunächst nur angedeutet werden.

Wir schreiben daher

$$9)\quad \frac{2+4x}{1-2x+3x^2} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

Es sollen nunmehr die Koeffizienten a_0, a_1 etc. bestimmt werden. Das geschieht in folgender Weise. Man schafft den Nenner fort; also

$$10)\quad 2+4x = (1-2x+3x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+ a_3x^3+a_4x^4+\ldots)$$

und führt die Multiplikation wirklich aus. Dann stellt man das Resultat in der folgenden übersichtlichen Weise zusammen:

$$11)\quad 2+4x = a_0 \left.\begin{array}{r}-2a_0\\ \\ +a_1\end{array}\right\} x \left.\begin{array}{r}+3a_0\\ -2a_1\\ +\ a_2\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{r}+3a_1\\ -2a_2\\ +\ a_3\end{array}\right\} x^3 \text{ etc.}$$

Die Ausdrücke linker und rechter Hand müssen sich gleich sein. Steht nun rechts vom Gleichheitszeichen eine konvergente Reihe, dann werden auch die Koeffizienten für gleichhohe Potenzen von x auf beiden Seiten miteinander übereinstimmen. (Siehe Allgemeines auf S. 12.) Man denke sich nunmehr, um zum Ziele zu gelangen, den linken Ausdruck folgendermaßen geschrieben:

$$2+4x+0\cdot x^2+0x^3+0x^4+\ldots \text{ etc.}$$

Dann ist, wenn wir die Ausdrücke gleichhoher Potenzen von x einander gleich setzen:

$$\mathbf{a_0} = \mathbf{2}$$
$$a_1 - 2a_0 = 4 \text{ und somit}$$
$$\mathbf{a_1} = 4 + 2a_0 = 4 + 4 = \mathbf{8}$$
$$3a_0 - 2a_1 + a_2 = 0, \text{ daher}$$
$$\mathbf{a_2} = 2a_1 - 3a_0 = 16 - 6 = \mathbf{10}$$
$$3a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \text{ und}$$
$$\mathbf{a_3} = 2a_2 - 3a_1 = 20 - 24 = \mathbf{-4}.$$

Wir erhalten also den Wert

$$\frac{2 + 4x}{1 - 2x + 3x^2} = 2 + 8x + 10x^2 - 4x^3 \text{ etc.}$$

Es ist derselbe, den uns die Division gab.

7. Die Entwickelung von a^x.

Es soll mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Exponentialfunktion a^x in eine Reihe entwickelt werden.

Da für $x = 0$ der Ausdruck $a^x = 1$ wird, so muß, wie unmittelbar ersichtlich, die Reihe mit 1 beginnen. Man kann nunmehr setzen

12) $a^x = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + m_4 x^4 + \dots$ etc.

Um die Rechnung in Fluß zu bringen, setzen wir für x den Ausdruck $x + \alpha$; dann geht die Reihe 12) über in

13) $a^{x+\alpha} = 1 + m_1(x+\alpha) + m_2(x+\alpha)^2 + m_3(x+\alpha)^3 + \dots$

Entwickeln wir nun die einzelnen Werte

$$m_1(x+\alpha) = m_1 x + m_1 \alpha,$$
$$m_2(x+\alpha)^2 = m_2 x^2 + 2m_2 x\alpha + m_2\alpha^2,$$
$$m_3(x+\alpha)^3 = m_3 x^3 + 3m_3 x^2\alpha + 3m_3 x\alpha^2 + m_3\alpha^3$$
$$\text{etc. etc.}$$

Setzen wir sie in 13) ein und ordnen nach Potenzen von α, so folgt

14) $$a^{x+\alpha} = (1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots) + (m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \ldots)\alpha + (m_2 + 3 m_3 x + \ldots)\alpha^2 + \ldots$$

Vergleichen wir diese Ausführung mit der Gleichung 12), dann sieht man, daß die erste Klammer von 14) gleich a^x ist. Das berücksichtigt ergiebt

15) $$a^{x+\alpha} = a^x + (m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \ldots)\alpha + (m_2 + 3 m_3 x + \ldots)\alpha^2 + \ldots$$

Erinnern wir uns nun der Beziehung

$$a^{x+\alpha} = a^x \cdot a^\alpha$$

und daß entsprechend 12) der Ausdruck

$$a^\alpha = 1 + m_1 \alpha + m_2 \alpha^2 + m_3 \alpha^3 + \ldots$$

sein muß, so geht 15) über in

16) $$a^{x+\alpha} = a^x \cdot a^\alpha = a^x(1 + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + m_3\alpha^3 + \ldots) = a^x + m_1 a^x \alpha + m_2 a^x \alpha^2 + m_3 a^x \alpha^3 + \ldots$$

Da die Beziehungen 15) und 16) gleich sind, so müssen nach dem bereits verwendeten Grundsatze auf Seite 12 auch die Koeffizienten der übereinstimmenden Potenzen von α einander gleich sein. Also

$$m_1 a^x \alpha = (m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \ldots)\alpha$$

oder

17) $$m_1 a^x = m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \ldots$$

Setzen wir weiter in $m_1 a^x$ für a^x den Wert der Gleichung 12) ein, dann ergiebt sich die Beziehung

18) $$m_1 (1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots) = m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \ldots$$

oder auch

19) $$m_1 + m_1{}^2 x + m_1 m_2 x^2 + m_1 m_3 x^3 + \ldots = m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \ldots$$

Da die Koeffizienten der gleichen Potenzen von x gleich sind, so folgt unmittelbar

$$\mathbf{m_1} = \mathbf{m_1}$$
$$2 m_2 = m_1^2,$$
oder
$$\mathbf{m_2} = \frac{m_1^2}{2}$$
$$3 m_3 = m_1 m_2,$$
daher
$$\mathbf{m_3} = \frac{m_1 m_2}{3} = \frac{m_1 m_1^2}{2 \cdot 3} = \frac{m_1^3}{2 \cdot 3}.$$

Setzen wir nunmehr zum Schluß die Werte in 12) ein, so erhalten wir die gewünschte Reihe

$$20) \quad a^x = 1 + m_1 x + \frac{m_1^2}{2} x^2 + \frac{m_1^3}{2 \cdot 3} x^3 + \ldots,$$

in der der Koeffizient m_1 noch einen nicht näher bestimmten Wert besitzt.

8. Die Entwickelung von e^x.

Wir wollen die Reihe 20) spezialisieren. Setzen wir $x = 1$, dann geht 20) über in

$$21) \quad a = 1 + \frac{m_1}{1} + \frac{m_1^2}{2} + \frac{m_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

kürzer in
$$a = 1 + m_1 + \frac{m_1^2}{2!} + \frac{m_1^3}{3!} + \ldots$$

Wie man sofort sieht, ist der Wert von a durch m_1 gegeben. Sei $m_1 = 1$. Wir wollen, wie es gebräuchlich ist, diesen Wert von a mit e bezeichnen. Also

$$22) \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Addiert man die rechte Seite, dann erhalten wir den bemerkenswerten Wert

$$e = 2{,}7182818\ldots$$

In Gleichung 20) eingefügt, ergiebt die Reihe

$$23) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Das ist ein sehr bedeutungsvoller und wichtiger Satz.

Der Koeffizient m_1 in der Reihe 20) soll jetzt noch genauer bestimmt werden.

Da x für jeden beliebigen Wert gilt, so dürfen wir auch

$$x = \frac{1}{m_1}$$

setzen. Thun wir das, dann geht 20) über in die Reihe

$$a^{\frac{1}{m_1}} = 1 + \frac{m_1 \cdot 1}{m_1} + \frac{m_1{}^2 \cdot 1}{m_1{}^2 \cdot 2!} + \frac{m_1{}^3}{m_1{}^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots$$

oder in

24) $$a^{\frac{1}{m_1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 22), dann folgt

$$a^{\frac{1}{m_1}} = e$$

und daraus $$a = e^{m_1}.$$

Nunmehr nehmen wir die Logarithmen, also

$$m_1 \log e = \log a,$$

dann erhalten wir einen neuen speziellen Wert für m_1:

$$m_1 = \frac{\log a}{\log e},$$

den wir in 20) einsetzen:

25) $$a^x = 1 + \frac{\log a}{\log e} \cdot x + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Das ist die Reihe für a^x, die wir erhalten wollten.

9. Logarithmensysteme.

Unsere Auseinandersetzungen führen zu einer Erweiterung des Logarithmensystems, die für die höhere Mathematik von großer Bedeutung ist; wir wollen daher dieser Angelegenheit nähertreten.

Die Basis der sogenannten gemeinen oder Briggsschen Logarithmen, die man in den Tafeln berechnet vorfindet, ist bekanntlich 10. In der höheren Mathematik verwendet man fast ausschließlich ein System, dessen Basis die von uns soeben bestimmte Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$ ist. Diese Logarithmen nennt man natürliche Logarithmen und man bezeichnet sie durch ein einfaches l. Also $\mathrm{l}\,a$ heißt der natürliche Logarithmus von a.

Auch die natürlichen Logarithmen findet man in den meisten Tafeln bereits berechnet vor, beispielsweise im „Katechismus der Logarithmen". Wir wollen nunmehr die Reihe für a^x auch durch die natürlichen Logarithmen ausdrücken.

In der Algebra wird gezeigt, daß der Logarithmus von der Basis eines jeden Logarithmensystems immer den Wert 1 hat und daß der Logarithmus von 0 gleich $-\infty$ ist. Denn bei Grundlegung der Gleichung $n = a^x$, die das Verhältnis zwischen Zahl, Basis und Logarithmus darlegt, findet sich

$$10^1 = 10; \quad e^1 = e,$$

sowie

$$10^{-\infty} = \frac{1}{10^{\infty}} = 0.$$

Also ist

$$\log 10 = 1, \quad \log 0 = -\infty,$$
$$\mathrm{l}\,e = 1, \quad \mathrm{l}\,0 = -\infty.$$

Bedenken wir das, dann können wir schreiben

$$\frac{\log a}{\log e} = \frac{\mathrm{l} \cdot a}{\mathrm{l} \cdot e} = \frac{\mathrm{l} \cdot a}{1} = \mathrm{l}\,a.$$

Die Reihe 25) geht nun wiederum über in die von uns gewünschte Form

$$26) \quad a^x = 1 + x\,\mathrm{l}\,a + \frac{(x \cdot \mathrm{l}\,a)^2}{2!} + \frac{(x \cdot \mathrm{l}\,a)^3}{3!} + \ldots$$

Wir wollen nun noch zeigen, wie die verschiedenen Logarithmensysteme ineinander übergeführt werden können. Bezeichnen wir zu dem Zweck den natürlichen Logarithmus einer Zahl N mit n und den gemeinen Logarithmus derselben Zahl mit g. Also

$$\log N = g$$

und

$$\mathrm{l} \cdot N = n.$$

Dafür kann man wiederum schreiben

$$10^g = N,$$

$$e^n = N.$$

Also folgt

27) $$10^g = e^n.$$

Logarithmieren wir 27) nach dem natürlichen System, also

$$g \cdot l10 = nle,$$

und bedenken, daß $le = 1$ ist, dann ergiebt sich unmittelbar

$$g = \frac{1}{l10} \cdot n.$$

In den Tafeln für die natürlichen Logarithmen findet man $l \cdot 10 = 2{,}30259$. Wir erhalten daher für g

28) $$g = \frac{1}{2{,}30259} \cdot n.$$

Führen wir die Division von $\frac{1}{2{,}30259}$ aus, so erhalten wir eine Zahl, die man den **Modulus** nennt und mit **M** bezeichnet.

$$\mathbf{M} = 0{,}43429.$$

Der Modulus in 28) eingeführt giebt endlich die Beziehung

29) $$\mathbf{g} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}.$$

Wir gelangen somit zu der Regel:

Der gemeine Logarithmus g von einer Zahl N ist gleich dem natürlichen Logarithmus von derselben Zahl multipliziert mit dem Modulus.

Formen wir 29) nach n um, dann ergiebt sich

30) $$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{M}}$$

und die Regel lautet:

Der natürliche Logarithmus von einer Zahl N ist dem gemeinen Logarithmus der gleichen Zahl gleich, wenn man ihn durch den Modulus dividiert.

Wie die Logarithmen wirklich berechnet wurden, zu erklären, ist in diesem der Praxis gewidmeten Buche nicht notwendig, da wir sie in den Tafeln vorfinden.

Zweiter Teil.

Die Differentialrechnung.

Drittes Kapitel.

Die allgemeine Lehre von den Funktionen.

10. Definitionen.

Verbindet man zwei Größen durch ein Gleichheitszeichen miteinander und legt der einen Größe nacheinander verschiedene Werte bei, so erhält dadurch in jedem Falle auch die andere Größe bestimmte Werte. Die eine Größe ist von der anderen abhängig. Eine solche Gleichung nennt man eine Funktionsgleichung. So ist z. B.

1) $$y = 2x$$

eine Funktionsgleichung. Setzt man nach der Reihe in dieselbe für x

$$x = 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

dann erhält man für y

$$y = 2,\ 4,\ 6 \ldots$$

Die Größe x, deren Wert man beliebig wählte, nennt man die unabhängige Veränderliche oder das Argument. Die Größe y, die durch x bestimmt wurde, bezeichnet man als die abhängige Veränderliche oder als die Funktion von x.

Die Gleichung 1) wird daher gelesen: „y ist eine Funktion von $2x$".

Solche Funktionsgleichungen oder kurz Funktionen lehrt die Trigonometrie, die analytische Geometrie und auch schon die Elementargeometrie kennen. Funktionen sind z. B.

$$\text{a)}\quad y = \sin x,$$

$$\text{b)}\quad y = \sqrt{2px},$$

$$\text{c)}\quad y = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Setzt man in $\sin x$ für x nach und nach verschiedene Werte, dann erhält man für y die verschiedenen Funktionswerte. Also $y = \sin 30^\circ$ ergiebt $y = \frac{1}{2}$; $y = \sin 90^\circ$ ergiebt $y = 1$. Werden in dem Ausdruck b) für x eine Folge von Werten eingefügt, die entsprechenden Werte von y bestimmt und diese in ein Koordinatensystem gezeichnet, dann entsteht, wie die analytische Geometrie zeigt, eine Parabel. Aus Gleichung c) erkennt man endlich, daß der Inhalt einer Kugel von der Größe des Radius bestimmt wird.

Auch die Physik und die Technik geben Beispiele für den Funktionsbegriff. So ist die Spannkraft des Dampfes eine Funktion der Temperatur, die Schwingungsdauer eines Pendels eine Funktion seiner Länge, die Kraft eines Elektromagneten eine Funktion der Stromstärke und der Windungszahl.

Soll ganz allgemein angedeutet werden, daß y von x abhängt und x in irgend einer Form erscheint, dann pflegt man zu schreiben

2) $y = f(x)$; $y = F(x)$; $y = \varphi(x)$; $y = \psi(x)$ ꝛc.,
und man liest: „y ist eine Funktion von x".

Es ist nun leicht einzusehen, daß auch wiederum in jedem solchen Falle x als eine Funktion von y betrachtet werden kann. Es sei z. B. $U = 2r\pi$, d. h. der Umfang eines Kreises ist eine Funktion des Radius; dann ist auch der Radius eine Funktion des Umfanges. Oder allgemein: Ist

$$U = f(r),$$

dann ist auch

$$r = F(U).$$

Geben wir noch ein Beispiel aus der Algebra und zwar aus der Logarithmenlehre. Man schreibt bekanntlich

$$y = 10^x;$$

hieraus ergiebt sich sofort die Umkehrung

$$x = \log^{10} y.$$

11. Die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen.

Von Wichtigkeit für die späteren Untersuchungen ist die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen, also die Umkehrung von $\sin x$, $\cos x$ 2c. In der höheren Mathematik versteht man in diesen Funktionen unter x nicht den Winkel, sondern das zugehörige Bogenstück eines Kreises für den Radius, der der Einheit gleich ist. Die Formel für den Umfang des Kreises ist bekanntlich $2r\pi$, und der Zentriwinkel, welcher diesem größten Bogenstück gegenüberliegt, beträgt 360°. Setzt man nun, wie angegeben, $r = 1$, dann findet sich, daß einem Winkel von 360° das Bogenstück 2π gegenüberliegt. Somit liegt dem Winkel von einem Grad der 360. Teil des Bogenstückes gegenüber. Also 1° entspricht dem Bogenstück von $\frac{2\pi}{360}$.

$$\frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3{,}14159\ldots}{180^\circ} = 0{,}017453.$$

Dem Winkel von einem Grad entspricht das Bogenstück 0,017453. Es folgt somit unmittelbar, daß einem Winkel von α Grad ein Bogenstück von $\frac{\pi\alpha}{180^\circ} = 0{,}017453 \cdot \alpha$ gegenüberliegt.

Uebertragen wir nun diese Auseinandersetzungen anschaulich in das Geometrische. (Siehe Abb. 1.)

Setzen wir das Bogenstück AB gleich x, dem der Winkel α gegenüberliegt, dann können wir nach unseren Untersuchungen schreiben

$$AB = x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^{\circ}}.$$

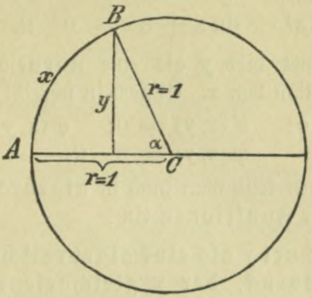

Abb. 1.

Für $r = 1$ ist, wie die Trigonometrie lehrt und unter Berücksichtigung des eben Erörterten, $y = \sin x$. Es ist also x dasjenige Bogenstück, dessen Sinus gleich y ist. Um das anzudeuten, schreibt man

$$x = \operatorname{arc} \sin y$$

und liest: „x ist gleich arcus sinus y".

Merken wir noch in entsprechender Uebertragung:

3) Wenn $y = \cos x$, dann ist $x = \operatorname{arc} \cos y$.
   „ $y = \operatorname{tang} x$, „ „ $x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} y$.
   „ $y = \cot x$, „ „ $x = \operatorname{arc} \cot y$.

Diese Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen nennt man cyklometrische Funktionen.

12. Die Funktionsarten.

Die Funktionen, die wir bisher betrachteten, waren nach der einen Veränderlichen, und zwar zumeist nach y aufgelöst, z. B. $y = \sin x$. Man nennt solche Funktionen entwickelte oder explizite Funktionen von x.

Es kommt aber auch vor, daß eine Funktion nicht nach einer Veränderlichen aufgelöst ist, z. B.

$$y^2 - axy + b = 0$$

oder $$x^y + \sin x + 3x = 0 \quad \text{ꝛc.}$$

Man bezeichnet hier y als eine unentwickelte oder implizite Funktion von x. Allgemein schreibt man

4) $$f(x, y) = 0; \quad F(x, y) = 0; \quad \varphi(x, y) = 0; \quad \psi(x, y) = 0 \quad \text{ꝛc.}$$

Die Funktionen teilt man auch in algebraische und in transscendente Funktionen ein.

Man bezeichnet y als eine algebraische Funktion, wenn der Ausdruck, der y gleichgesetzt wird, gebildet ist durch die Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division, der Potenzierung oder der Radizierung, z. B.

$$y = 3x^2 + 4x - 2,$$

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}.$$

Diese Ausdrücke sind algebraische Funktionen.

Sämtliche anderen Funktionen, die unter der Form von Logarithmen, als Potenzen mit veränderlichen Exponenten oder als trigonometrische Ausdrücke erscheinen, heißen transscendente Funktionen, z. B.

$$y = \operatorname{tang} x,$$

$$y = a^x,$$

$$y = \log x.$$

Diese Ausdrücke stellen transscendente Funktionen dar.

Auch die algebraischen Funktionen zerfallen nochmals. Man teilt sie in rationale und irrationale Funktionen ein. Es ist $y = bx + c$ eine rationale, $y = \sqrt{2bx + c}$ eine irrationale Funktion.

Häufig spricht man in der Analysis auch von

Alternierenden Funktionen. Darunter versteht man Funktionen aus mehreren Veränderlichen, die, wenn man zwei Veränderliche miteinander vertauscht, wohl ihren absoluten Wert behalten, aber ihr Vorzeichen verändern, z. B.

$$x - y; \quad \log\left(\frac{y}{x}\right); \quad (x-y)(y-z)(x-z) \text{ etc.}$$

13. Darstellung der Funktionen.

Man kann, wie die analytische Geometrie lehrt, mittels eines Koordinatensystems eine Funktion bildlich darstellen. Hierfür gaben wir schon unter 10. die entsprechenden Beispiele. Arithmetisch werden die Funktionen ebenfalls ausgewertet und häufig in Zahlentabellen die Ergebnisse zusammengestellt. Beispiele hierfür sind die logarithmischen und die trigonometrischen Tafeln.

14. Die Grenzen der Funktionen.

Nähert sich eine veränderliche Größe x immer mehr einer bestimmten konstanten Größe c, bis endlich der Unterschied zwischen beiden verschwindet, d. h. nicht mehr angebbar ist, so bezeichnet man die konstante Größe c als die Grenze der Veränderlichen. Wir wiesen schon in 3. darauf hin, daß die geometrische Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

für $n = \infty$ den Wert „1" ergiebt. Man bezeichnet dann 1 als die Grenze (limes) der Summe der geometrischen Reihe und schreibt

$$1 = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}\right\}$$

und liest: Eins ist gleich limes $\cdot\left\{\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right\}$ für $n=\infty$. Auch auf die unendlichen Dezimalbrüche haben wir in 3. aufmerksam gemacht. Der Dezimalbruch

$$0{,}33333\dots$$

nähert sich z. B., wie bekannt, für eine sehr große Zahl von Stellen immer mehr dem Bruche $^1/_3$, wie man sich durch direkte Division unmittelbar überzeugen kann. Man kann daher schreiben

$$^1/_3 = \lim \cdot 0{,}33333\dots$$

Es ist $^1/_3$ die Grenze des unendlichen Dezimalbruches. Das wird noch klarer, wenn man den Dezimalbruch in eine Reihe auflöst und schreibt

$$^1/_3 = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\dots+\frac{3}{10^n}\right\}.$$

In ihr ist $^3/_{10}$ das Anfangsglied und $^1/_{10}$ der Quotient.

Ein anderes instruktives Beispiel giebt die Trigonometrie. Es ist

5) $$\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

d. h. die Grenze für $\sin x$, durch den Bogen x, ergiebt für $x=0$ den Wert 1. (Siehe Abb. 1.)

Aus Abschnitt 11 und Abb. 1 sahen wir, daß man setzen kann: $y=\sin x$. Das besagt, daß x der Bogen ist, dessen Sinus gleich y ist. Dann kann man für den vorstehenden Ausdruck 5) auch schreiben $\frac{y}{x}$.

Also $$\frac{\sin x}{x} = \frac{y}{x}.$$

Die Figur läßt unmittelbar erkennen, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden muß. Im Augenblick des Verschwindens ist also $\frac{\sin x}{x} = 1$. Man möge sich hierbei recht klar machen, daß nicht der Zeitpunkt gemeint ist, wo x schon null geworden ist, sondern der Augenblick kurz vorher.

Auch in der Geometrie erscheint bereits der Begriff der Grenze und in Verbindung damit die Begriffe unendlich groß und unendlich klein. So denkt man sich bekanntlich bei der Bestimmung des Kreisumfanges um und in den Kreis ein reguläres Vieleck konstruiert. Beide fallen zusammen, wenn ihre Seitenzahl „unendlich groß" wird. Die Kreislinie selbst stellt die Grenze der Vielecke dar. Aehnliche Ueberlegungen werden angestellt bei der Ableitung der Kugeloberfläche, sowie bei der Bestimmung der Inhaltsformeln für den Kreis und die Kugel.

Unabweisbar drängt sich uns hier auch der Begriff des unendlich Kleinen auf. Nähert sich eine Größe der Grenze Null, dann bezeichnet man sie als unendlich klein. In der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots \qquad \frac{1}{2^n} \text{ wird } \frac{1}{2^n}$$

für $n = \infty$ sofort

$$\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty}$$

oder unendlich klein.

Auch bei der Bestimmung des Kreisumfanges wird in dem Augenblick, wo das eingeschriebene und das umschriebene Vieleck in der Kreislinie zusammenfallen, jede ihrer Seiten unendlich klein.

Mit dem Begriff der Grenze sind somit die Begriffe des unendlich Großen und unendlich Kleinen durchaus verbunden.

15. Die Stetigkeit der Funktionen.

Man denke sich eine Funktion

6) $$y = f(x)$$

geometrisch durch eine Kurve dargestellt; dann wird in den meisten Fällen jede kleine Aenderung von x auch eine kleine Aenderung von y hervorrufen. Die Kurve erscheint, wenn man sie mit Hilfe der ermittelten Werte konstruiert, als eine Folge sehr eng aneinanderliegender Punkte. Eine solche Funktion und ihre bildliche Darstellung, die sich in der geschilderten Weise gleichmäßig entwickelt, nennt man eine **stetige** oder **kontinuierliche Funktion** resp. **Kurve**.

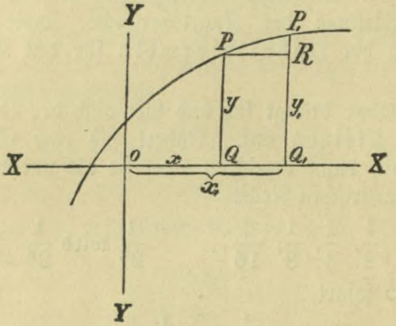

Abb. 2.

Auf der vorstehenden Linie haben die sehr nahe aneinander liegenden Punkte P und P, die Koordinaten xy bezw. x,y,. Aendert sich x um QQ,, dann muß sich auch y um P,R ändern. Wenn bei sehr kleinem QQ, auch P,R sehr klein ist, dann ist die Funktion und ihre Kurve stetig.

Stetige Funktionen sind z. B.

$$y = ax; \quad y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = \sqrt{x}.$$

Auch $y = x^n$ ist eine stetige Funktion, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Das gleiche gilt für $y = \log x$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = \infty$.

Setzt man in die Funktion $y = \frac{a}{x}$ den Ausdruck $x = 0$, dann wird $y = \frac{a}{0} = \infty$. Der Wert der Funktion wird also für $x = 0$ unendlich groß, und der Weg der entsprechenden Kurve wird hier plötzlich und unvermittelt unterbrochen. Funktionen dieser Art heißen diskontinuierliche oder unstetige Funktionen. Diskontinuierliche Funktionen sind z. B. auch

$$y = \frac{a}{b - x} \text{ für } x = b,$$

$$y = \cot x \text{ für } x = 0;\ 180^\circ \text{ ꝛc.}$$

Bei der Rechnung mit Funktionen hat man vor allen Dingen zu untersuchen, ob sie stetig sind, und gegebenenfalls die Werte zu ermitteln, für welche sie unstetig werden.

Viertes Kapitel.

Die Entwickelung der Differentialformeln.

16. Der Differentialbegriff.

Man zeichne eine Linie, die durch die stetige Funktion

7) $$y = f(x)$$

gegeben ist. (Siehe Abb. 3 S. 30.)

Es seien zwei Punkte der Kurve mit P und P_1 bezeichnet. Ihre Koordinaten seien x, y bezw. x_1, y_1. Man verbinde die Punkte durch die Sekante P, P_1, die mit der Abscisse X den Winkel β bildet. Sodann ziehe man durch den Punkt P parallel zur X-Achse eine Linie, die $P_1 Q_1$ ($= y_1$) in R schneidet. Es ist dann

8) $$\tan \beta = \frac{P_1 R}{P R}.$$

Aus der Figur ergiebt sich unmittelbar, daß man schreiben kann

$$\mathrm{P,R} = \mathrm{y,} - \mathrm{y}$$

und

$$\mathrm{PR} = \mathrm{x,} - \mathrm{x}.$$

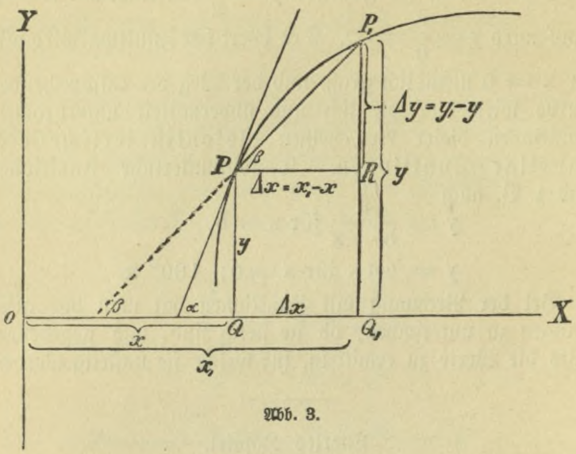

Abb. 3.

Es ist nun gebräuchlich,

$$\mathrm{y,} - \mathrm{y} = \Delta \mathrm{y}$$

und

$$\mathrm{x,} - \mathrm{x} = \Delta \mathrm{x}$$

zu setzen.

Dann geht 8) über in

9) $$\operatorname{tang} \beta = \frac{\mathrm{y,} - \mathrm{y}}{\mathrm{x,} - \mathrm{x}} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}.$$

Läßt man nun den Punkt P, sich auf den Punkt P zu bewegen, dann werden Δy und Δx immer kleiner. Während dieses Vorganges wird sich die Sekante PP, in der dem Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung (β wird größer) um P drehen. In dem Augenblick, wo das Kurvenstück PP, verschwindend klein geworden ist, sind auch Δy und Δx verschwindend klein geworden. Gleichzeitig fällt die Sekante mit der Tangente im Punkte P zusammen, die mit der Abscisse den Winkel α macht. Der Winkel β ist in den Winkel α übergegangen.

Es ist gebräuchlich, die Differenzen Δx und Δy, wenn sie verschwindend klein geworden sind und sich daher der Grenze null nähern, mit **dx** und **dy** zu bezeichnen. Man nennt dann die neuen Ausdrücke **Differentiale.**

Wir setzen nun

$$10) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ nennt man den **Differentialquotienten.**

Der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ ist somit gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente an einem Punkte der durch die Funktion bestimmten Kurve mit der Abscissenachse macht.

Da die geometrische Tangente die Richtung einer Linie in dem betreffenden Punkte angiebt, so wird man durch die Differentialquotienten die Richtungsänderungen an den einzelnen Stellen einer Kurve feststellen können. Man ist daher in dieser Weise fähig zu ermitteln, wie die Kurve verläuft; ob sie konvex oder konkav gegen eine Koordinatenachse ist, wo ihre höchsten und tiefsten Punkte liegen und dergl. mehr. Schon allein diese Ueberlegung giebt eine Vorstellung von der Wichtigkeit der Differentialrechnung, deren Aufgabe es ja an erster Stelle ist, die Differentialquotienten der Funktionen zu bestimmen. Wir wollen zunächst zeigen, wie sich aus dem Differentialquotienten einer gegebenen Funktion erkennen läßt, ob die ihr entsprechende Kurve steigt oder fällt in Beziehung zur Abscissenachse.

In dem einfachsten Falle, den wir im vorstehenden behandelten (siehe die Abbildung 3), war der Winkel α spitz; die trigonometrische Tangente desselben ist somit positiv. Wir ziehen daraus sofort den Schluß, daß die Kurve dann über der Abscissenachse mit wachsendem x sich erhebt und steigt, wenn der Differentialquotient positiv ist.

Weiter wissen wir aus der Trigonometrie, daß die Tangente eines stumpfen Winkels negativ ist. Das giebt uns den

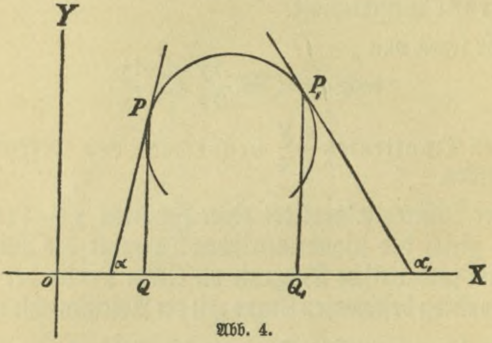

Abb. 4.

Satz: Die Kurve fällt bei wachsendem x gegen die Abscissenachse, wenn der Differentialquotient negativ erscheint.

Abb. 4 giebt für die beiden Sätze eine gute Anschauung.

17. Die allgemeine Bestimmung des Differentialquotienten.

Denken wir uns die Funktion

11) $$y = f(x)$$

wiederum als Kurve dargestellt. (Siehe Abb. 3 S. 30.)

Nimmt die Abscisse x des Punktes P um die kleine Größe Δx zu, dann wird auch y um die kleine Größe Δy zunehmen. Man erhält dann aus 11)

12) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Will man nunmehr Δy erhalten, dann hat man nur Gleichung 11) von Gleichung 12) zu subtrahieren. Das ergiebt

13) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Wir dividieren jetzt die Gleichung 13) durch Δx; es folgt

14) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nähert sich Δx der Grenze null, so geschieht das Gleiche mit Δy, und es geht $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ über. Wir schreiben daher

15) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Für den Differentialquotienten einer Funktion f(x) schreibt man wohl auch $f'(x)$ oder $\frac{d \cdot f(x)}{dx}$.

Dann ergiebt sich

15a) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{d \cdot f(x)}{dx}.$$

Es sollen nun der Reihe nach die Differentialquotienten für die einzelnen Funktionen entwickelt werden.

Häufig wünscht man statt der Differentialquotienten das Differential der Funktion zu verwenden. Man hat dann nur nötig, den Differentialquotienten entsprechend zu multiplizieren. Also

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x)\,dx.$$

18. Bestimmung des Differentialquotienten für eine Potenz.

Satz I. Wenn eine Funktion $y = x^m$ gegeben ist, in der m eine beliebige reelle Zahl ist, dann wird der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1}.$$

Beweis. Wir schreiben

16) $$y = x^m.$$

Es wächst x um Δx und somit auch y um Δy, daher geht 16) über in

17) $$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m.$$

Entwickeln wir die rechte Seite der Gleichung 17) nach dem binomischen Lehrsatze in Abschnitt 1. Also

18) $$y + \Delta y = x^m + m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots$$

Wir subtrahieren nun, um Δy zu erhalten, 16) von 18); daraus folgt

19) $$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots$$

Dividieren wir nun, wie in Abschnitt 17, Gleichung 13) durch Δx, um den Quotienten zu erhalten, dann wird

20) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \Delta x + \ldots$$

Nähert sich jetzt Δx der Grenze null, dann werden alle Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung 20), die mit Δx behaftet sind, auch gleich null; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geht über in $\frac{dy}{dx}$ und man erhält, wie behauptet wurde,

21) $$\frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1}.$$

Zusatz. Sei in der Funktion

$$y = x^m, \quad m = 0,$$

dann ist

22) $$y = x^0 = 1,$$

und bildet man hieraus den Differentialquotienten, dann erhält man null. Also

23) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (x^0)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} = 0.$$

Der Differentialquotient aus einer konstanten Zahl ist immer gleich null, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man dieselbe Operation ausführt. Ist $y = a$, dann ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a)}{dx} = 0. \tag{24}$$

Das ist aber auch ohne weiteres einzusehen, denn nur Variable erfahren einen Zuwachs, wie wir bei der allgemeinen Entwickelung des Differentialquotienten gesehen haben.

Hieraus folgt, daß zwei Funktionen, die sich nur durch eine mit + oder − hinzugefügte **Konstante** unterscheiden, denselben Differentialquotienten haben müssen. Werden endlich in einer Funktion mehrere Ausdrücke durch +- oder −-Zeichen miteinander verbunden, dann nimmt man die Differentialquotienten für jeden einzelnen Ausdruck.

19. Beispiele.

a) Es ist $y = x^2$; dann ergiebt sich nach dem Vorstehenden

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

b) Es sei $y = x^9$; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = 9x^8.$$

c) Es sei $y = 4x^3 + 2x^2 + 5$; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 2x$$
$$= 12x^2 + 4x.$$

d) Es sei $y = 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6$; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 5 \cdot x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 5x$$
$$= 20x^3 + 9x^2 - 10x.$$

e) Es sei $y = 4x^{1/2} - 3x^{2/3} + 6$; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} 4x^{1/2-1} - \frac{2}{3} \cdot 3x^{2/3-1}$$
$$= 2x^{-1/2} - 2x^{-1/3}$$
$$= \frac{2}{x^{1/2}} - \frac{2}{x^{1/3}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

f) Es sei $y = \frac{5}{6\sqrt[4]{x^3}} + \frac{4}{6x^2} + 9$

$= \frac{5}{6}x^{-3/4} + \frac{2}{3}x^{-2} + 9$; dann wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} x^{-7/4} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{-3}$$
$$= -\frac{15}{24} x^{-7/4} - \frac{4}{3} x^{-3}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{15}{24 \cdot x^{7/4}} - \frac{4}{3x^3}.$$

g) Es sei $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{4}x^{2/3}$; also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} x^{-1/3} = \frac{1}{2} x^{-1/3} = \frac{1}{2x^{1/3}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}.$$

h) Es sei $y = (3x - 5)(x^2 + 10x - 1)$. In diesem Falle multipliziert man die Klammer aus. Also

$$\begin{aligned} y = 3x^3 &- 5x^2 \\ &+ 30x^2 - 50x \\ &\qquad\quad - 3x + 5 \end{aligned}$$

oder $$y = 3x^3 + 25x^2 - 53x + 5.$$

Also $$\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 50x - 53.$$

i) Nehmen wir endlich noch ein Beispiel zu Gleichung 24) und zu dem Folgenden. Gegeben seien

$$y = 5x^2 - 7x \quad \text{und} \quad y_1 = 5x^2 - 7x + 4.$$

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = 10x - 7 \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} = 10x - 7.$$

20. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \sin x$.

Satz II. Ist eine Funktion $y = \sin x$ gegeben, dann ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

Beweis. Wir schreiben

25) $$y = f(x) = \sin x.$$

Nimmt x um Δx und y um Δy zu, dann ergiebt sich

26) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x).$$

Wir subtrahieren Gleichung 25) von 26). Also

27) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Schreiben wir der Kürze halber für

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x),$$

dann geht 27) über in

27a) $$\Delta y = \Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Zur weiteren Umformung erinnern wir uns der bekannten trigonometrischen Beziehung

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und wenden sie auf 27a) an. Es wird

28) $$\varDelta y = \varDelta f(x) = 2\sin\left(\frac{x+\varDelta x - x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+\varDelta x + x}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{\varDelta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\varDelta x}{2}\right).$$

Setzen wir zur Vereinfachung sodann

$$2u = \varDelta x,$$

so wird jetzt

29) $$\varDelta y = \varDelta f(x) = 2\sin u \cdot \cos(x+u).$$

Dividieren wir durch $\varDelta x$ und entwickeln

30) $$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{2\sin u \cdot \cos(x+u)}{\varDelta x}$$
$$= \frac{2\sin u \cdot \cos(x+u)}{2u}$$
$$= \frac{\sin u}{u}\cdot\cos(x+u).$$

Es möge sich nun wiederum $\varDelta x = 2u$ der Grenze null nähern; dann ergiebt sich

31) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cdot f(x)}{dx} = \lim_{u=0}\left\{\frac{\sin u}{u}\cdot\cos(x+u)\right\}$$
$$= \cos x \cdot \lim_{u=0}\cdot\frac{\sin u}{u}.$$

In Abschnitt 14 Gleichung 5) wurde nachgewiesen, daß

$$\lim_{u=0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

zu setzen ist. Wird das beachtet, so erhalten wir

32) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cdot f(x)}{dx} = \cos x.$$

21. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \cos x$.

Satz III. Ist eine Funktion $y = \cos x$ gegeben, dann ergiebt der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

Beweis. Der Beweis schließt sich der vorigen Ableitung eng an. In

$$y = f(x) = \cos x \tag{33}$$

lassen wir wiederum x um Δx wachsen; dann folgt zunächst

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x) \quad \text{und} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \\ &= \cos(x + \Delta x) - \cos x. \end{aligned} \tag{35}$$

Diesmal verwenden wir natürlich die Formel

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Dann ergiebt sich

$$\Delta y = \Delta f(x) = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}. \tag{36}$$

Wiederum $2u = \Delta x$ gesetzt:

$$\Delta y = \Delta f(x) = -2\sin(x + u) \cdot \sin u. \tag{37}$$

Dividieren wir durch Δx, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= -\frac{2\sin(x + u) \cdot \sin u}{\triangle x} \\ &= -\frac{2\sin(x + u) \cdot \sin u}{2} \\ &= -\frac{\sin u}{u} \cdot \sin(x + u). \end{aligned} \tag{38}$$

Es möge sich jetzt $\Delta x = 2u$ der Grenze null nähern; dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\text{39)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot f(x)}{dx} = -\sin x \cdot \lim_{u=0} \frac{\sin u}{u} \\ &\text{40)} \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x \end{aligned}\right\} \lim_{u=0} \cdot \frac{\sin u}{u} = 1.$$

22. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \log x$.

Satz IV. Ist eine Funktion $y = \log x$ gegeben, dann ist ihr Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}.$$

Beweis. Wir schreiben

$$41)\qquad y = f(x) = \log x$$

und lassen in der gebräuchlichen Weise x um Δx zunehmen. Also

$$42)\qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \log(x + \Delta x).$$

Nunmehr erhalten wir aus der Differenz der Gleichungen 41) und 42)

$$43)\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$$
$$= \log(x + \Delta x) - \log x.$$

Aus der Lehre von den Logarithmen ergiebt sich die Formel

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Demgemäß wird

$$44)\ \Delta y = \Delta f(x) = \log\left\{\frac{x + \Delta x}{x}\right\} = \log\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}.$$

Wir dividieren durch Δx:

$$45)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}.$$

Durch eine leichte Substitution kann das Ziel schneller erreicht werden, daher schreiben wir

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}; \qquad \Delta x = \frac{x}{n}.$$

In Gleichung 45) eingefügt

$$46)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{n}{x} \cdot \log\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}.$$

Mit Hilfe der Beziehung $n \cdot \log a = \log a^n$ geht 46) über in

$$47)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Nähert sich jetzt Δx der Grenze null, dann wird

$$\Delta x = \frac{x}{n};\quad n = \frac{x}{\Delta x} = \frac{x}{0} = \infty;\quad n = \infty.$$

Und es folgt

$$48)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot f(x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n=\infty} \cdot \log\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Durch eine einfache Herleitung kann endlich gezeigt werden, daß

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\text{*)}\ \text{ist.}$$

Also

$$49)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}.$$

Bei dieser Ableitung ist über die Basis des Logarithmensystems nichts vorausgesetzt. Sie ist also ganz beliebig.

---

*) Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$

oder

$$= 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) + \cdots$$

Da n, wie wir im Text sahen, unendlich wird, so werden alle Glieder, die n im Nenner haben, null. Es bleibt also für die Grenze $n = \infty$

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots$$

$$= e.$$ (Siehe Abschnitt 8, Gleichung 22.)

23. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = lx$.

Satz V. Ist eine Funktion $y = lx$ gegeben, dann ist ihr Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (lx)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Beweis. Den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus kann man unmittelbar aus dem Differentialquotienten des vorstehenden Logarithmus mit allgemeiner Basis herleiten. Hierzu ist nur nötig, daß man zur Basis die Zahl e selbst wählt. Wie wir in Abschnitt 9 sahen, wird dann $le = 1$. Somit ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (lx)}{dx} = \frac{1}{x}. \tag{50}$$

Vergleiche übrigens auch die anderen Auseinandersetzungen in Abschnitt 9.

Zusatz. Hat man, was aber in der höheren Mathematik nur sehr selten vorkommt, den Differentialquotienten vom gemeinen Logarithmus zu nehmen, den man gewöhnlich auch mit $\log x$ bezeichnet, so hat man den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus mit dem Modulus zu multiplizieren. Also

$$\frac{d \cdot (\log x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = M \cdot \frac{1}{x}. \tag{51}$$

24. Bestimmung des Differentialquotienten eines Produktes.

Wenn mehrere Funktionen von x gegeben sind, die die einzelnen Faktoren eines Produktes bilden, dann bedarf es besonderer Methoden, um den Differentialquotienten des Produktes zu finden.

Satz VI. Ist u eine Funktion von x und v eine andere Funktion von x und $y = u \cdot v$, dann ist der Differentialquotient dieses Produktes

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

Beweis. Schreiben wir wiederum

52) $$y = u \cdot v.$$

In diesem Produkt ist

53) $$u = \varphi(x) \quad \text{und} \quad v = \psi(x).$$

Dann muß auch y selbst eine Funktion von x sein. Also

54) $$y = f(x)$$

und somit

55) $$y = f(x) = u \cdot v = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Wie gebräuchlich, lassen wir nun x um Δx wachsen und verändern dementsprechend den Ausdruck 55) in

56) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x).$$

Hiervon Gleichung 55) subtrahiert ergiebt

57) $$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= \varphi(x + \Delta x) \cdot \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x).\end{aligned}$$

Um leicht zur Aufstellung des Differentialquotienten zu gelangen, macht man einen Kunstgriff, den man sofort aus der folgenden Gleichung ersehen kann. Setzen wir hierbei, der Kürze halber, wieder

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta \cdot f(x).$$

58) $$\begin{aligned}\Delta y = \Delta f(x) &= \varphi(x + \Delta x)\, \psi(x + \Delta x)\\ &- \varphi(x)\, \psi(x + \Delta x) + \varphi(x)\, \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) \cdot \psi(x).\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung 58) vereinfachen wir nun in der Weise, daß wir $\psi(x + \Delta x)$ und $\varphi(x)$ ausklammern. Dann geht 58) über in

59) $$\begin{aligned}\Delta y = \Delta f(x) &= \psi(x + \Delta x)\{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)\}\\ &+ \varphi(x)\, \{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)\}.\end{aligned}$$

Wir dividieren durch Δx

$$60)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \psi(x+\Delta x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x)\frac{\psi(x+\Delta x - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Nähert sich jetzt Δx der Null, dann werden die Ausdrücke nach der Reihe

$$\lim_{\Delta x = 0} \psi(x+\Delta x) = \psi(x) = v,$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{d \cdot \varphi(x)}{dx} = \frac{du}{dx}',$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{d \cdot \psi(x)}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

und endlich $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$

Setzen wir die so umgeformten Ausdrücke in 60) ein, dann ergiebt sich

$$61)\qquad \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Der Differentialquotient von einem Produkte aus zwei veränderlichen Faktoren wird gebildet, indem man den Differentialquotienten von jedem Faktor mit dem anderen Faktor multipliziert und die Produkte addiert.

Zusatz I. Durch die gleichen Untersuchungen kann man auch den Differentialquotienten ermitteln für ein Produkt, das aus drei oder mehr variabeln Faktoren besteht. Es sei

$$62)\qquad y = F(x)$$

und $\quad u = f(x);\quad v = \varphi(x);\quad w = \psi(x);$

also

$$62a)\qquad y = u \cdot v \cdot w.$$

Dann ergiebt sich

$$63)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(u \cdot v \cdot w)}{dx} = v \cdot w \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx} + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Zusatz II. Besteht ein Produkt aus zwei Faktoren und ist der eine Faktor eine Funktion von x, der andere eine Konstante, dann ist der Differentialquotient gleich dem Differentialquotienten der Funktion, multipliziert mit der Konstanten. Ist

$$64)\quad y = av,$$

dann folgt aus Gleichung 61)

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{da}{dx} + a\frac{dv}{dx}.$$

Da nun der Differentialquotient einer Konstanten a immer null ist, so wird auch

$$65)\quad \frac{dy}{dx} = a\frac{dv}{dx}.$$

25. Beispiele.

Es ist gegeben

$$a)\quad y = (1 + x^2)(1 - x^2).$$

Hier sei $u = 1 + x^2$ und $v = 1 - x^2$,
also

$$y = u \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Es ist $\frac{du}{dx} = 2x$ und $\frac{dv}{dx} = -2x.$

Setzen wir ein

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2) \cdot 2x + (1 + x^2) \cdot -2x$$
$$= -4x^3.$$

Von der Richtigkeit der Lösung kann man sich hier leicht überzeugen, wenn man die Klammer auflöst, zusammenfaßt und die Differentialquotienten bildet. Es giebt

$$y = (1 + x^2)(1 - x^2) = 1 - x^4,$$

also $$\frac{dy}{dx} = -4x^3.$$

b) Es sei $$y = \sin x \cdot \cos x,$$

also $$u = \sin x; \quad v = \cos x.$$

Daher $$\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{d(\sin x)}{dx} + \sin x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx}.$$

Nach Abschnitt 20 und 21 wird dann

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x.$$

26. Der Differentialquotient von einem Bruch (Quotient) soll gefunden werden.

Satz VI. Der Zähler und der Nenner soll je eine Funktion von x sein. Ist $y = \frac{u}{v}$, wo u und v Funktionen von x sind, dann wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Beweis. Wir schreiben

66) $$y = f(x) = \frac{u}{v}$$

und $$u = \varphi(x); \quad v = \psi(x).$$

Es folgt zunächst

67) $$y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Nun lassen wir in der gewohnten Weise x um Δx etc. wachsen. Dann ergiebt sich

$$68)\qquad y+\Delta y = f(x+\Delta x) = \frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)}.$$

Wir bilden die Differenz und erhalten Δy

$$69)\quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

oder

$$70)\quad \Delta f(x) = \frac{\varphi(x+\Delta x)\cdot\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)\cdot\psi(x)}.$$

Jetzt dividieren wir Gleichung 70) durch Δx. Dies giebt, wenn wir geschickt ordnen,

$$71)\quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\psi(x+\Delta x)\,\psi(x)} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x\Delta x)}{\Delta x}$$

und

$$72)\ \psi(x+\Delta x)\,\psi(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Um nun leicht zu dem gewünschten Ergebnis zu kommen, addieren und subtrahieren wir zu dem vorstehenden Ausdruck das Produkt $\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Das ergiebt

$$73)\ \psi(x+\Delta x)\,\psi(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\varphi(x+\Delta x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x) - \varphi(x)\cdot\psi(x+\Delta x) + \varphi(x)\cdot\psi(x)}{\Delta x}$$

$$= \psi(x)\,\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} - \varphi(x)\,\frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Nähert sich endlich Δx der Null, dann werden die einzelnen Ausdrücke in Gleichung 73)

$$\lim_{\Delta x = 0} \psi(x + \Delta x) = \psi(x) = v,$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx},$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) = \frac{d \cdot \varphi(x)}{dx} = \frac{du}{dx},$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \psi'(x) = \frac{d \cdot \psi(x)}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

Diese Werte setzen wir jetzt in Gleichung 73) ein. Dann wird unter Beobachtung, daß $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ ist,

$$v \cdot v \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}$$

und endlich

$$\text{74)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist somit gleich dem Nenner mal dem Differentialquotienten des Zählers, vermindert um den Zähler mal dem Differentialquotienten des Nenners; die Differenz dividiert durch das Quadrat des Nenners.

27. Beispiele.

✓ a)

$$y = \frac{a - x}{a + x}.$$

Setzen wir

$$u = a - x \quad \text{und} \quad v = a + x$$

und setzen in Formel 74) ein, nachdem bestimmt wurde

$$\frac{du}{dx} = -1 \text{ und } \frac{dv}{dx} = 1,$$

dann folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+x) \cdot -1 - (a-x) \cdot 1}{(a+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a - x - a + x}{(a+x)^2}$$

$$= \frac{-2a}{(a+x)^2}.$$

b) Es sei gegeben

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Also $\quad u = \sin x; \quad v = \cos x.$

In Formel 74) eingesetzt, nach Bestimmung von

$$\frac{du}{dx} = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x,$$

ergiebt $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x},$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

c) Es sei $\quad y = \dfrac{a}{x^n} = \dfrac{u}{v}.$

Also $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^n \cdot 0 - a \cdot n x^{n-1}}{(x^n)^2}$

$$= -\frac{a n x^{n-1}}{x^{2n}} = -a n x^{n-1} \cdot x^{-2n}$$

$$= -a n x^{-(n+1)}$$

$$= -\frac{a n}{x^{n+1}}.$$

d) Es sei $\quad y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

Also $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sqrt{x})\,{}^1/_2 x^{-1/2} + (1+\sqrt{x})\,{}^1/_2 x^{-1/2}}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2}.$$

28. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = a^x$.

Satz VII. Der Differentialquotient der Exponentialfunktion $y = a^x$, in der a eine Konstante bedeutet, ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cdot(a^x)}{dx} = a^x \cdot l\,a.$$

Beweis. Schreiben wir

75) $$y = a^x$$

und nehmen auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus, wodurch oft eine Ableitung vereinfacht wird, so folgt

76) $$l\,y = l(a^x) = x \cdot l \cdot a.$$

Substituieren wir nun auf beiden Seiten

$$z = l\,y \quad \text{und} \quad z = x\,l\,a$$

und bilden die Differentialquotienten, dann ergiebt sich

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = 1 \cdot l\,a.$$

Nach dz aufgelöst

$$dz = \frac{dy}{y} \quad \text{und} \quad dz = dx \cdot l\,a$$

und gleichgestellt, führt zur Gleichung

77) $$\frac{dy}{y} = dx\,l \cdot a.$$

Um den Differentialquotienten zu erhalten, dividieren wir Gleichung 77) durch dx und setzen für y aus Gleichung 75) den Wert ein. Dann ist

78) $$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot l\,a.$$

29. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = e^x$.

Satz VIII. Der Differentialquotient der bestimmten Exponentialfunktion $y = e^x$ ist gleichfalls

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Beweis. Der Beweis ergiebt sich sehr einfach aus 28. Wir müssen nur in $y = a^x$ für a den Wert e als speziellen Fall einsetzen. Also

79) $$y = e^x.$$

Der Differentialquotient für $y = a^x$ war

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot la.$$

Setzen wir nun $a = e$, dann wird

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot le.$$

Aus Abschnitt 9 wissen wir aber, daß $le = 1$ ist. Daher

80) $$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

30. Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{tang} x$.

Satz IX. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{tang} x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{tang} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Beweis. Siehe Abschnitt 27, Aufgabe b. Wir erhalten durch Anwendung der Quotientenregel dort unmittelbar

81) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\operatorname{tang} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

31. Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{cotang} x$.

Satz X. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{cotang} x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\operatorname{cotang} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Beweis. Wie in 30. mit Hilfe der Quotientenregel zu ermitteln, da $\operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist.

Also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}.$$

Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, so folgt sofort

82)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

32. Angabe der Differentialquotienten für $y = \sec x$ und $y = \operatorname{cosec} x$.

Satz XI. Die Differentialquotienten für die selten vorkommenden Funktionen $y = \sec x$ und $y = \operatorname{cosec} x$ wollen wir nicht weiter ableiten, sondern die Arbeit dem Leser überlassen und das Resultat hier nur hinschreiben. Also

83)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\sec x)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

und

84)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Man hat sich bei der Ableitung nur daran zu erinnern, daß $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ist, und die Quotientenregel anzuwenden.

Wir wenden uns nun zur Ableitung der cyklometrischen Funktionen und verweisen nochmals auf ihre Bedeutung, die in Abschnitt 11 dargelegt wurde.

33. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \arc \sin x$.

Satz XII. Der Differentialquotient für $y = \arc \sin x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\arc \sin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beweis. Wie wir in Abschnitt 11 zeigten, ist die Umkehrung von $y = \arc \sin x$ der Ausdruck $x = \sin y$. Bilden wir von dem Ausdruck $x = \sin y$ den Differentialquotienten

85) $$\frac{dx}{dy} = \cos y.$$

Kehren wir den Bruch um, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

wofür wir auch schreiben können

86) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

Nun erhält man aus $x = \sin y$ sofort $x^2 = \sin^2 y$, und fügt man den neuen Wert ein, dann ist

87) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

34. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \arc \cos x$.

Satz XIII. Der Differentialquotient der Funktion $y = \arc \cos x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\arc \cos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beweis. Er ist der gleiche wie in 33. Da $y = \arc \cos x$, die Umkehr $x = \cos y$ ergiebt, so differentiieren wir diesen Ausdruck. Also

$$x = \cos y,$$

daher
$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$
und

88) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Mit Hilfe einer bekannten trigonometrischen Formel
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Da nun $\cos y = x$, ist

89) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

35. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \operatorname{arc\,tang} x$.

Satz XIV. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{arc\,tang} x$ ist
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cdot(\operatorname{arc\,tang} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Wiederum setzen wir, da $y = \operatorname{arc\,tang} x$ ist, den Ausdruck $x = \operatorname{tang} y$ und differentiieren. Daher
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$
Somit

90) $$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y.$$

In der Trigonometrie wird die leicht zu erweisende Relation abgeleitet
$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 y}.$$

Wir erhalten demgemäß
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 y}.$$

Setzen wir endlich für $\operatorname{tang}^2 y$ den Wert x^2, dann ist

91) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cdot(\operatorname{arc\,tang} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

36. Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotang} x$.

Satz XV. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotang} x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{cotang} x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Wenn $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotang} x$ ist, wird die Umkehrung $x = \operatorname{cotang} y$. Wir differentiieren

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

und daraus

$$\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y. \tag{92}$$

Es ist, wie die Trigonometrie lehrt,

$$\sin^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{cotang}^2 y}$$

Daher
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotang}^2 y},$$

und da $x = \operatorname{cotang} y$, ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{93}$$

37. Angabe der Differentialquotienten für die Funktionen $y = \operatorname{arc} \sec x$ und $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.

Satz XVI. Die Differentialquotienten für $y = \operatorname{arc} \sec x$ und $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$ sind

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\operatorname{arc} \sec x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \tag{94}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}. \tag{95}$$

Wir wollen die Ableitung dem Leser zur Uebung überlassen.

Tafel der Differentialquotienten.

Die Funktion	Der Differentialquotient	Die Funktion	Der Differentialquotient
1) $y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f^1(x) = d \cdot \frac{f(x)}{dx}$	12) $y = a^x$	$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot la$
2) $y = f(a)$	$\frac{dy}{dx} = 0$	13) $y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$
3) $y = x^m$	$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$	14) $y = \text{arc} \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4) $y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \cos x$	15) $y = \text{arc} \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5) $y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$	16) $y = \text{arc tang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$
6) $y = \text{tang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$	17) $y = \text{arc cotang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$
7) $y = \text{cotang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18) $y = \text{arc sec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
8) $y = \sec x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	19) $y = \text{arc cosec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
9) $y = \text{cosec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	20) $y = u \cdot v$	$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$
10) $y = \log x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}$	21) $y = u \cdot v \cdot w$	$\frac{dy}{dx} = u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx} + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot w \cdot \frac{du}{dx}$
11) $y = lx$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$	22) $y = \frac{u}{v}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$

Fünftes Kapitel.

Die Bildung der Differentialquotienten der Funktionen von Funktionen. Aufgaben.

38. Erläuterungen.

Es kommt sehr häufig vor, daß mehrere Funktionen miteinander verknüpt sind, von denen der Differentialquotient gebildet werden soll. Wir wollen das zunächst an einem Beispiele darlegen. Sei z. B. $y = l \cdot \sin x.$

Um zum Ziel zu gelangen, setzt man für $\sin x$ einen anderen einfachen Wert ein, z. B.

$$\sin x = u.$$

Dann geht die Gleichung über in

$$y = lu.$$

Hiervon können wir sofort den Differentialquotienten bilden.

Es ist $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ und } dy = \frac{du}{u}.$$

Es kommt nun darauf an, du wirklich zu bestimmen. Da

$$u = \sin x$$

war, ist $$du = \cos x \, dx.$$

Somit ergiebt sich

$$dy = \frac{du}{u} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \, dx.$$

Also $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

39. Allgemeine Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion von einer Funktion.

Wir wollen nun zeigen, wie das ganz allgemein möglich ist. Es sei

1) $$y = F(z),$$

aber zugleich auch

2) $$z = f(x).$$

Dann erhalten wir den Ausdruck

3) $$y = F\{f(x)\}.$$

Um von dem Ausdruck 3) den Differentialquotienten bilden zu können, lassen wir, wie bereits vielfach ausgeführt, in 1) und 2) x um Δx und z um Δz wachsen. So ergiebt sich

$$y + \Delta y = F(z + \Delta z)$$

und $$z + \Delta z = f(x + \Delta x).$$

In gewohnter Weise bilden wir nun die Ausdrücke Δy und Δz.

4) $$\Delta y = F(z + \Delta z) - F(z)$$ und

5) $$\Delta z = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Nun dividieren wir 4) durch Δx. Daher

6) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta x}.$$

Wir wollen nun die Gleichung 6) im Zähler und Nenner mit dem Ausdruck

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta z$$

in entsprechender Weise multiplizieren, so daß der Ausdruck

7) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

sich ergiebt. Nähert sich jetzt Δx der Grenze null, dann geht 7) unter Berücksichtigung der Gleichungen 4) und 5) über in

8) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Wir erhalten also den Satz: Der Differentialquotient einer Funktion von einer Funktion ist dem Produkte der Differentialquotienten der Funktionen gleich.

40. Aufgaben.

a) Es sei

$$y = \sin^2 x; \qquad \frac{dy}{dx} \text{ soll bestimmt werden.}$$

Lösung. Wir schreiben $u = \sin x$. Also

$$y = u^2$$

und daher $\dfrac{dy}{du} = 2u; \qquad dy = 2u\,du.$

Da $u = \sin x$ ist, so ergiebt sich $du = \cos x\,dx$. Setzt man jetzt ein, so wird

$$dy = 2u\,du = 2 \cdot (\sin x) \cdot \cos x\,dx$$

und $\dfrac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$

b) Es sei

$$y = (a + bx)^2; \qquad \frac{dy}{dx} \text{ zu bilden.}$$

Lösung. Man setzt

$$u = (a + bx).$$

Also ergiebt sich $y = u^2$.

Das Differential $dy = 2u\,du$

und $du = b \cdot dx.$

Eingefügt $dy = 2(a + bx) \cdot b \cdot dx.$

Also $\dfrac{dy}{dx} = 2b(a + bx).$

c) Es sei $y = \sqrt{3ax + x^2}; \quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Setzen wir $u = 3ax + x^2$, so ergiebt sich

$$y = \sqrt{u} = u^{1/2}.$$

Differentiiert, d. h. bilden wir das Differential:

$$dy = \frac{1}{2} u^{-1/2} du = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Bilden wir nun das Differential von $u = 3ax + x^2$,

$$du = (3a + 2x)\,dx.$$

Also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a + 2x}{2\sqrt{3ax + x^2}}.$$

d) Es sei

$$y = e^{\sin x}; \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

Wir setzen $u = \sin x$, also

$$y = e^u$$

und differentiieren $\qquad dy = e^u\,du.$

Bilden wir das Differential von $u = \sin x$,

$$du = \cos x\,dx,$$

so folgt
$$\frac{dy}{dx} = (e^{\sin x}) \cdot \cos x.$$

e) Es sei

$$y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 4}; \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

Setzen wir

$$u = x^2 + 3x - 4 \quad \text{und} \quad du = (2x + 3)\,dx$$
$$v = x^2 - 3x + 4 \quad \text{und} \quad dv = (2x - 3)\,dx,$$

dann ist
$$y = \frac{u}{v}.$$

Nach der Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 3x + 4)(2x + 3) - (x^2 + 3x - 4)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 4)^2}$$

$$= \frac{2x(8 - 3x)}{(x^2 - 3x + 4)^2}.$$

f) Es sei $y = \cos(a + bx)$; $\frac{dy}{dx} = ?$

Wir setzen $\qquad u = a + bx.$

Dann wird $\qquad y = \cos u.$

Bilden wir nun die Differentiale

$$dy = -\sin u du \quad \text{und} \quad du = b dx,$$

dann folgt $\qquad dy = -\sin(a + bx) \cdot b dx.$

Also $\qquad \frac{dy}{dx} = -b \cdot \sin(a + bx).$

g) Es sei $\qquad y = \sqrt{1 + x} \cdot \sqrt[3]{1 - x^2}$

$$= (1 + x)^{1/2} \cdot (1 - x^2)^{1/3}.$$

Hier können wir mit Hilfe der Formeln $y = u \cdot v$ und

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

unmittelbar differentiieren. Also

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2)^{1/3} \cdot \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2} + (1 + x)^{1/2} \cdot \frac{1}{3}(1 - x^2)^{-2/3} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{3 - 4x - 7x^2}{6(1 + x)^{1/2} \cdot (1 - x^2)^{2/3}}$$

$$= \frac{3 - 4x - 7x^2}{6\sqrt{1 + x} \cdot \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}.$$

h) Es sei $$y = x^x; \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

Zuweilen, wie in diesem Falle, kann es praktisch sein, vor der Differentiierung rechts und links den natürlichen Logarithmus der Gleichung zu nehmen und erst dann zu differentiieren. Also
$$ly = x \cdot lx$$

Differentiieren wir nun
$$\frac{dy}{y} = lx \cdot dx + x\frac{dx}{x},$$
$$dy = dx \cdot y(lx + 1)$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = x^x \cdot (lx + 1).$$

i) Auf die gleiche Weise ist
$$y = x^{\sin x}$$
zu behandeln.

Der Leser möge die Lösung selbst suchen, sie führt auf den Ausdruck
$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \cdot \left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot lx\right\}.$$

k) Es sei $y = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right); \quad \frac{dy}{dx} = ?$

Lösung. Wir setzen
$$u = \frac{x}{a},$$
also
$$y = \arcsin u.$$

Das Differential
$$dy = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \text{ und } du = \frac{a\,dx}{a^2} = \frac{dx}{a}.$$

Also
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

1) Es sei $y = x^n \cdot e^x;\quad \frac{dy}{dx} = ?$

Lösung. $u = x^n;\quad v = e^x.$ Also

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= x^n \cdot e^x + e^x \cdot n x^{n-1}\\ &= e^x (x^n + n x^{n-1})\\ &= e^x \cdot x^{n-1}(x+n).\end{aligned}$$

Nachfolgende Aufgaben möge der Leser selbständig zu lösen versuchen.

1) $y = x^3 \cdot \sqrt{x}$ .... $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}.$

2) $y = \frac{a}{x^4}$ .... $\frac{dy}{dx} = -\frac{4a}{x^5}.$

3) $y = \frac{a}{\cos x}$ .... $\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$

4) $y = l \cdot (x + \sqrt{a^2 + x^2})$ .. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$

5) $y = (a + x^2)^3$ .... $\frac{dy}{dx} = 6x(a + x^2)^2.$

6) $y = \frac{\sqrt{a + bx}}{x}$ .... $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx}}.$

7) $y = e^{\arcsin x}$ .... $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}.$

8) $y = l \cdot (lx)$ .... $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot lx}.$

9) $y = \sin(a + bx)$ ...... $\frac{dy}{dx} = b \cdot \cos(a + bx).$

10) $y = \frac{a - b\cos x}{a + b \cdot \cos x}$ ..... $\frac{dy}{dx} = \frac{2ab\sin x}{(a + b\cos x)^2}.$

✓ 11) $y = \arc\cos\left(\frac{a-x}{x}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{2ax-a^2}}$.

✓ 12) $y = l \cdot (\operatorname{arctg} mx) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{m}{(1+m^2x^2)\operatorname{arctg} mx}$.

13) $y = (\cos x)^{\sin x} \ldots\ldots$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^{-1+\sin x}\left\{\cos^2 x\, l \cdot (\cos x) - \sin^2 x\right\}.$$

14) $y = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^x \ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\left\{l\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right\}$.

Sechstes Kapitel.

Die höheren Differentialquotienten.

41. Ableitung der höheren Differentialquotienten.

Im vierten Kapitel wurde auseinandergesetzt, wie man aus einer Funktion $y = f(x)$ den Differentialquotienten erhalten kann. Wir bezeichneten ihn mit

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot f(x)}{dx} = f'(x).$$

Wie man sieht, ist der Differentialquotient wiederum eine Funktion von x. Man nennt ihn deshalb die **abgeleitete Funktion von x** und bezeichnet ihn zumeist mit $f'(x)$. Es leuchtet nun sofort ein, daß man auch mit der abgeleiteten Funktion die gleichen Ueberlegungen anstellen kann, wie mit der direkten, und daß man hierdurch zum **zweiten Differentialquotienten** gelangt. Es sei

2) $$y = f(x)$$

und $$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot f(x)}{dx} = f'(x).$$

Dann kann man auch schreiben

3) $$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d \cdot f'(x)}{dx} = f''(x).$$

Den Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ schreibt man gewöhnlich $\frac{d^2y}{dx^2}$ und nennt ihn den zweiten Differentialquotienten.

Daß der zweite Differentialquotient die vorstehende Form annehmen muß, tritt noch deutlicher hervor, wenn man vom Differential ausgeht. Es sei

2a) $$y = f(x)$$

und $$dy = f'(x) \cdot dx. \quad \text{(Siehe Gleich. 1.)}$$

Differentiiert man nun noch einmal, so ergiebt sich

3) $$d \cdot [dy] = d[f'(x)]\, dx.$$

Da $$d \cdot [f'(x)] = f''(x)\, dx$$ ist,

so folgt $$d \cdot [dy] = f''(x)\, dx \cdot dx = f''(x)\, dx^2.$$

Daher

4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

In Gleichung 4) haben wir also den zweiten Differentialquotienten der Funktion x.

In der gleichen Weise kann man nun auch den dritten, vierten ꝛc. Differentialquotienten bilden. Es ist dann

5) $$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x).$$

6) $$\frac{d\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = f''''(x) \text{ ꝛc.}$$

Wiederholt man die Ableitungen n mal, dann erhält man endlich den *n ten Differentialquotienten*

7) $$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x).$$

Wir wollen nun die Bildung der höheren Differentialquotienten an einigen Aufgaben üben.

Aufgaben.

a) Es sei $$y = x^4.$$
Dann erhalten wir nach der Reihe
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3 \cdot 4 \cdot x^2,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2\ \ 3 \cdot 4 = 24,$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0.$$

b) Es sei $$y = x^m.$$
Wir erhalten
$$\frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$
Endlich
$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

c) Es sei $$y = \sin x.$$

Dann werden
$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$$

Es ist also
$$y = \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$$

Wie man sieht, wiederholen sich die Werte. Der gleiche Vorgang findet sich auch bei $y = \cos x$.

d) Es sei $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Dann wird nach der Reihe
$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cdot 3 \cdot ax + 2b = 6ax + 2b,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3 \cdot a = 6a,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

e) Wir wollen nun noch die höheren Differentialquotienten für ein Produkt aus zwei Funktionen von x bilden. Es sei

8) $$y = u \cdot v \qquad \begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= F(x) \end{aligned}$$

9) $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Man differentiiere nun jeden Teil der Summe für sich. Also
$$d\left(u\frac{dv}{dx}\right) = u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$$

und
$$d\left(v\frac{du}{dx}\right) = v\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Addiert ergiebt das den zweiten Differentialquotienten

$$10)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Um den dritten Differentialquotienten zu erhalten, muß man wiederum in der gleichen Weise verfahren; dann ergiebt sich die Gleichung

$$11)\quad \frac{d^3y}{dx^3} = u\cdot\frac{d^3v}{dx^3} + 3\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dv}{dx} + v\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Der Leser bemerkt wohl, daß hier das Gesetz der Binomialkoeffizienten hervortritt.

42. Wenn Funktionen einander gleich sind, aber in ihren Formen sich voneinander unterscheiden, dann sind auch ihre Differentialquotienten einander gleich.

Wir wollen den Satz hier zunächst an einem Beispiel erläutern. Es sei

$$y = f(x) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4.$$

Nunmehr nehmen wir von diesen gleichen Ausdrücken die Differentialquotienten nach der Reihe

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 4(x+h)^3 = 4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 12(x+h)^2 = 12x^2 + 24xh + 12h^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 24(x+h) = 24x + 24h,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f''''(x) = 24 = 24.$$

Führen wir die Berechnung einer jeden Klammer aus, so werden wir finden, daß die entsprechenden Differentialquotienten einander gleich sind.

Siebentes Kapitel.

Die Reihen von Taylor und Mac-Laurin.

43. Vorbereitungen.

Gesetzt, es sei eine Funktion

1) $$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

gegeben. In derselben soll die Veränderliche x um die Größe h wachsen. Man erhält dann mittels der einfachen bekannten algebraischen Operationen einen Ausdruck, der nach wachsenden Potenzen von h fortschreitet. Es wird

2) $$f(x+h) = a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d.$$

Führen wir die Rechnung wirklich aus:

2a) $$\begin{aligned} f(x+h) = ax^3 &+ 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 \\ + bx^2 &+ 2bxh + bh^2 \\ &+ cx \quad + ch \\ &\qquad\quad + d. \end{aligned}$$

Ordnen wir und fassen immer die Glieder mit gleichen Potenzen von h zusammen, so ergiebt sich

2b) $$\begin{aligned} f(x+h) &= (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &+ (3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3. \end{aligned}$$

44. Die Taylorsche Reihe.

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man leichter zum gleichen Ziele gelangen. Man erhält Methoden, durch die jede rationale ganze Funktion in eine Reihe entwickelt werden kann, die nach steigenden Potenzen des Zuwachses fortschreitet, wie in 2b). Vergleiche die Abschnitte 3 und 6.

Man kann sich die Funktion f(x+h) in einen Ausdruck entwickelt denken, der nach Potenzen von h*) fortschreitet. Deuten wir das zunächst an:

3) $$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3.$$

*) h denke man sich als kleinen Zuwachs von x.

Wir wollen nun nach der Reihe die Differentialquotienten bilden

4) $$f'(x+h) = B + 2Ch + 3Dh^2$$
$$f''(x+h) = 2C + 2 \cdot 3D \cdot h$$
$$f'''(x+h) = 2 \cdot 3D.$$

Nähert sich nun h der Grenze null, dann gehen nacheinander die Ausdrücke 3) und 4) über in

4a) $$f(x) = A$$
$$f'(x) = B$$
$$f''(x) = 2C$$
$$f'''(x) = 6 \cdot D.$$

Und hieraus folgt

5) $$A = f(x)$$
$$B = f'(x)$$
$$C = \frac{f''(x)}{2!}$$
$$D = \frac{f'''(x)}{3!}.$$

Es ergiebt sich also, daß die Koeffizienten A, B, C, D selbst Funktionen von x sind.

Werden diese Ausdrücke in 3) eingesetzt, so folgt

6) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3.$$

Ist die Funktion nicht nur vom dritten, sondern vom nten Grade, so erhält man durch dieselben Operationen den Ausdruck

7) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!} h^n.$$

Das ist die Taylorsche Reihe. Sie ist in folgender Weise in Worte zu fassen: Eine jede ganze rationale Funktion läßt sich in eine Reihe entwickeln, von der das erste Glied die Funktion selbst ist, jedes weitere Glied aber, durch den ersten, zweiten ꝛc. Differentialquotienten dargestellt, wird multipliziert mit h oder den folgenden Potenzen von h und dividiert durch die erste, zweite ꝛc. Fakultät.

Wir wollen den Satz 7) zunächst auf das Beispiel 1) anwenden. Es war dort

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Somit ist nach der Reihe

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b; \quad \frac{f''(x)}{2!} = 3ax + b$$

$$f'''(x) = 6a; \quad \frac{f'''(x)}{3!} = a.$$

Setzen wir in 7) ein

$$f(x+h) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ + (3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3.$$

Wie man sieht, entspricht dieser Ausdruck ganz der Gleichung 2b).

Von der Taylorschen Reihe lassen sich nun schöne Anwendungen machen. Wir wollen u. a. mit ihrer Hilfe den binomischen Lehrsatz herleiten.

45. Herleitung des binomischen Satzes.

Es sei die Funktion

8) $$y = x^m \text{ gegeben.}$$

Wir setzen unseren Ausführungen in Abschnitt 44 entsprechend

9) $$f(x+h) = (x+h)^m$$

und bilden nach der Reihe die Differentialquotienten

$$
\begin{aligned}
10)\quad f'(x+h) &= m(x+h)^{m-1}\\
f''(x+h) &= m(m-1)(x+h)^{m-2}\\
f'''(x+h) &= m(m-1)(m-2)(x+h)^{m-3}\\
&\;\vdots\\
f^{m}(x+h) &= m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 2.\ 1.
\end{aligned}
$$

Wird nun wiederum h gleich null, dann erhalten wir die Reihe der abgeleiteten Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{m}\\
f'(x) &= mx^{m-1}\\
f''(x) &= m(m-1)x^{m-2}\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)x^{m-3}\\
&\;\vdots\\
f^{m}(x) &= m!
\end{aligned}
$$

Setzen wir diese Werte in Formel 7) ein, dann ist

$$
(x+h)^{m} = x^{m} + m\cdot x^{m-1}\cdot h + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{2!}\cdot h^{2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}}{3!}\cdot h^{3} + \ldots \frac{m!}{m!}\cdot h^{m}.
$$

Setzt man $x = a$ und $h = b$, dann ergiebt sich der binomische Lehrsatz

$$
(a+b)^{m} = a^{m} + ma^{m-1}\cdot b + \frac{m(m-1)a^{m-2}}{2!}\cdot b^{2} + \frac{m(m-1)(m-2)a^{m-3}}{3!}\cdot b^{3} + \ldots b^{m}.
$$

46. Allgemeine Ableitung der Taylorschen Reihe.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Ausführungen in Abschnitt 44 sich auch auf eine jede nicht rationale

Funktion erweitern lassen, wenn sich diese nur in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln läßt.

In Gleichung 7) erhielten wir den Ausdruck

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!} h^n,$$

der für eine ganze rationale Funktion gültig ist.

Wenn f(x) keine rationale Funktion ist, so wird die obige Reihe (7) nicht dieser Funktion entsprechen können, sondern sich von ihr um eine Größe unterscheiden. Wir wollen diesen Unterschied mit R bezeichnen. Dann ist ganz allgemein

$$12)\ f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!} \cdot h^n + R.$$

Die Gleichung 12) bezeichnet man ganz allgemein als die Taylorsche Reihe, und den Ausdruck R nennt man den Rest der Taylorschen Reihe.

Wird in Gleichung 12) n sehr groß, dann muß R selbst zur Null werden, wenn die Reihe einen Sinn haben soll. Das besagt, daß die Reihe konvergent sein muß.

Der beschränkte Raum unseres Buches macht uns die Besprechung des Restgliedes unmöglich. Unsere weiteren Ausführungen, in denen wir uns zumeist mit den ersten Gliedern begnügen, sowie die unmittelbar vorstehende Bemerkung lassen diese Einschränkung zu.

47. Die Reihe von Mac-Laurin oder die Stirlingsche Reihe.

Die Mac-Laurinsche Reihe ist ein spezieller Fall der Taylorschen Reihe und sie kann unmittelbar aus dieser entwickelt werden. Setzt man in die Taylorsche Reihe

$$12a)\ f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!} h^n + R$$

x gleich null und für h den Ausdruck x, dann geht sie über in

$$13)\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R.$$

Der Ausdruck 13) stellt die Mac-Laurinsche Reihe dar. Sie ist sehr brauchbar zur Entwickelung von Funktionen in Reihen. Wir wollen einige wichtige Reihen durch sie herleiten.

48. Es soll eine Reihe für $\sin x$ entwickelt werden.

Es sei

$$14)\quad y = f(x) = \sin x.$$

Wir bilden die Differentialquotienten

$$15)\quad \begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f''''(x) &= \sin x \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wie wir schon oben darauf aufmerksam machten, ist $\sin x$ eine periodische Funktion, die bei der weiteren Bildung der Differentialquotienten wieder auf die gleichen Ausdrücke führt. Wir setzen nun $x = 0$. Dann gehen die Ausdrücke in 14) und 15) über in

$$16)\quad \begin{aligned} f(0) &= \sin 0^0 &&= 0 \\ f'(0) &= \cos 0^0 &&= 1 \\ f''(0) &= -\sin 0^0 &&= 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0^0 &&= -1 \\ f''''(0) &= \sin 0^0 &&= 0. \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, daß in dem Falle, wo n eine ungerade Zahl ist,

$$f^n(x) = \pm \cos x \quad \text{wird;}$$

also $$f^n(0) = \pm \cos 0^0 = \pm 1.$$

Führen wir diese Ausdrücke nun in Gleichung 13) ein, dann ist

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x - 0 - \frac{1 \cdot x^3}{3!} + 0$$
$$+ \frac{1 \cdot x^5}{5!} - + \ldots \pm \frac{1 \cdot x^n}{n!}.$$

Und somit

17) $$\mathbf{\sin x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots \pm \frac{x^n}{n!}.$$

Die Funktion $\sin x$ entspricht also einer Reihe, die nach ungeraden Potenzen von x mit abwechselnden Vorzeichen fortschreitet.

49. Es soll die Reihe für cos x entwickelt werden.

Es sei

18) $$y = f(x) = \cos x.$$

Wir entwickeln die Differentialquotienten

19) $$f'(x) = -\sin x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \sin x$$
$$f''''(x) = \cos x.$$

Die Differentialquotienten wiederholen sich dann wiederum. Der Ausdruck $f^n(x)$ wird gleich $\pm \cos x$, wenn n eine gerade Zahl ist. Wie in 48 setzen wir x gleich null. Dann ergiebt sich

20) $$f(0) = \quad \cos 0^0 = 1$$
$$f'(0) = -\sin 0^0 = 0$$
$$f''(0) = -\cos 0^0 = -1$$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= \sin 0^0 = 0 \\ f''''(0) &= \cos 0^0 = 1 \\ &\vdots \\ f^n(0) &= \pm\cos 0^0 = \pm 1 \end{aligned}\Bigg\}\text{ wenn n eine gerade Zahl ist.}$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung 13) ein und ziehen zusammen, dann ist

21) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \pm \frac{x^n}{n!}.$$

Die Funktion cos x entspricht einer Reihe, die nach geraden Potenzen von x mit abwechselnden Vorzeichen fortschreitet.

50. Es soll die Reihe für die Exponentialfunktion e^x entwickelt werden.

(Siehe Abschnitt 8, Gleichung 23.)

Es sei

22) $$y = f(x) = e^x.$$

Wir bilden die Differentialquotienten

23) $$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ &\text{rc. rc.} \\ f^n(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Setzen wir hier auch x = null, dann folgt für alle Differentialquotienten

24) $$f^n(0) = e^0 = 1.$$

Setzen wir die Werte in Gleichung 13) ein, so folgt

25) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Wird in 25) $x = 1$, so erhält man den uns bekannten Ausdruck

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

$$= 2{,}71828 \ldots$$

51. Es soll die Reihe für die Exponentialfunktion a^x entwickelt werden.

(Siehe Abschnitt 9, Gleichung 26.)

Es sei

26) $$y = f(x) = a^x.$$

Die Differentialquotienten

27) $$\begin{aligned} f'(x) &= a^x \cdot la \\ f''(x) &= a^x (la)^2 \\ f'''(x) &= a^x (la)^3 \\ &\text{2c. 2c.} \\ f^n(x) &= a^x (la)^n. \end{aligned}$$

Auch hier setzen wir für x null; dann ergiebt sich

28) $$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= la \\ f''(0) &= (la)^2 \\ f'''(0) &= (la)^3 \\ &\text{2c. 2c.} \\ f^n(0) &= (la)^n. \end{aligned}$$

Setzen wir in Gleichung 13) ein, dann ist

29) $$\mathbf{a^x = 1 + x \cdot la} + \frac{x^2 (la)^2}{2!} + \frac{x^3 (la)^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n (la)^n}{n!}$$

52. Für die Funktion l (1 + x) soll eine Reihe entwickelt werden.

(Siehe Abschnitt 23.)

Es sei

30) $$y = f(x) = l(1+x).$$

Die Differentialquotienten

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = 1 \cdot 2(1+x)^{-3}$$
$$f''''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3(1+x)^{-4}$$
$$\text{rc. rc.}$$
$$f^n(x) = -1 \cdot (n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Setzen wir für x, wie in den vorigen Fällen, null, dann wird

31) $$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = -1$$
$$f'''(0) = 1 \cdot 2$$
$$f''''(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$\text{rc. rc.}$$
$$f^n(0) = (-1) \cdot (n-1)!$$

In Gleichung 13) eingefügt ergiebt die Gleichung

32) $$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \pm \frac{x^n}{n}.$$

Wird z. B. x = 1, dann geht die Reihe in den Ausdruck über

33) $$l \cdot 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots \pm \frac{1}{n}.$$

Vergleiche hierzu Abschnitt 9.

Anmerkung. Nicht immer sind die Reihenentwickelungen mit Hilfe der Mac-Laurinschen Reihe zweckmäßig, weil die Bildung der höheren Differentialquotienten oft sehr umständlich wird. Man bedient sich dann anderer Methoden. Der folgende Abschnitt giebt hierfür ein Beispiel.

53. Die Funktion arc sin x soll in eine Reihe entwickelt werden.

Daß die Ausführung mit der Mac-Laurinschen Reihe sehr umständlich werden muß, ersieht man leicht, denn schon der erste Differentialquotient unserer Funktion ergiebt $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Entwickelung erfolgt daher besser in folgender Weise mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Es sei

34) $$y = \arc\sin x.$$

Man deutet, wie in Abschnitt 6 und 44, die Entwickelung zunächst an:

35) $$\arc\sin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + \ldots$$

Nehmen wir nun rechts und links den Differentialquotienten von 35)

36) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 + \ldots$$

Entwickelt man die linke Seite von 36) nach dem binomischen Lehrsatze, dann ergiebt sich die Form

37) $$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + {}^1/_2 x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots$$

Aus den Gleichungen 36) und 37) folgt nun wiederum

38) $$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 + \ldots = 1 + {}^1/_2 x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots$$

Und hieraus, da die Koeffizienten gleicher Potenzen von x übereinstimmen,

$$A = 0$$
$$B = 1$$
$$C = 0$$
$$D = \frac{1}{2 \cdot 3}$$
$$E = 0$$
$$F = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$$
$$G = 0$$
$$\text{2c. 2c.}$$

Diese Werte eingesetzt in die Gleichung 35) ergiebt

$$39)\qquad \operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \ldots$$

54. Die Reihe für arc tang x.

In derselben Weise wie in Abschnitt 53 kann die Reihe erhalten werden. Der Leser möge seine Kräfte an dieser Aufgabe prüfen. Die Lösung führt dann zu dem Ausdruck

$$40)\qquad \operatorname{arc}\operatorname{tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$$

Diese Gleichung kann verwendet werden, um den Wert von π zu ermitteln. Man bedenke, daß $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tang} 45^\circ = 1$ ist. Setzt man nun $x = 1$, so ergiebt sich $\operatorname{arc}\operatorname{tang} 1 = \frac{\pi}{4}\cdot$ Dann erhält man den Ausdruck

$$41)\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$$

Diese Reihe nennt man die Leibnizsche Reihe; man kann mit ihrer Hilfe den Wert von π ermitteln.

Uns genügt es, gezeigt zu haben, wie Reihenentwickelungen mittels der Differentialrechnung auszuführen sind. Es ergiebt sich, wie sehr viel einfacher diese neuen Methoden sind als diejenigen, die wir im 2. Kapitel vorführten. Wir wollen nun in einer Tabelle die wichtigsten Reihen zusammenstellen.

Tafel der wichtigsten Reihen.

1) $f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!}h^n + R$: Taylorsche Reihe.

2) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R$: Mac-Laurinsche Reihe.

3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots \mp \frac{x^n}{n!}$; n ist eine ungerade Zahl.

4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots \pm \frac{x^n}{n!}$; n ist eine gerade Zahl.

5) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x}{n!}$.

6) $a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{2!} + \frac{x^3(la)^3}{3!} + \frac{x^4(la)^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n(la)^n}{n!}$.

7) $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots + - \frac{x^n}{n}$.

8) $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots$

9) $\text{arc}\sin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \ldots$ 10) $\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

Achtes Kapitel.

Die Bestimmung unbestimmter Formen.

55. Erklärung.

Es kommt häufig vor, daß eine Funktion für einen bestimmten Wert der Veränderlichen zu einem unbestimmten Ausdruck führt. Der Grund hierfür liegt, wie leicht einzusehen ist, nur in der Form des betreffenden Ausdruckes. Formen solcher Art sind

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 0^{\infty}; \quad 0^{0} \text{ ꝛc.}$$

Wir wollen das zunächst an einem Beispiel auseinandersetzen. Gegeben sei die Funktion

$$1) \qquad y = \frac{x^2 - 4}{4(x-2)}.$$

Setzen wir in diesen Ausdruck $x = 2$, dann wird

$$y = \frac{4-4}{4(2-2)} = \frac{0}{0}.$$

Daß die Funktion 1) thatsächlich auch für $x = 2$ einen bestimmten Wert hat, kann man sehr leicht zeigen, indem man sie umformt, wodurch ihr Wert, wie in den Elementen schon gelehrt, nicht verändert wird. Es ist nämlich

$$2) \quad y = \frac{x^2 - 4}{4(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{4(x-2)} = \frac{x+2}{4}.$$

Setzt man nun $x = 2$, so ist

$$3) \qquad y = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Durch die Differentialrechnung kann man in solchen Fällen leichter zum Ziel gelangen.

56. Bestimmung des unbestimmten Wertes $\frac{0}{0}$.

Die gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ergebe für $x = x_0$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Um den wahren Wert durch die

Differentialrechnung zu ermitteln, setze man in Zähler und Nenner des Bruches für x den Ausdruck $x_0 + h$ und entwickle Zähler und Nenner je für sich nach dem Taylorschen Satze. Also

$$4)\quad \frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + {}^1/_2 f''(x_0)h^2 + \ldots}{\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + {}^1/_2 \varphi''(x_0)h^2 + \ldots}$$

Das erste Glied der rechten Seite $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$ ist der Null gleich, kann also fortgelassen werden. Es geht dann 4) über in

$$5)\quad \frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0)h + {}^1/_2 f''(x_0)h^2 + \ldots}{\varphi'(x_0)h + {}^1/_2 \varphi''(x_0)h^2 + \ldots}$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch h, so ist

$$5a)\quad \frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0) + {}^1/_2 f''(x_0)h + \ldots}{\varphi'(x^0) + {}^1/_2 \varphi''(x_0)h + \ldots}$$

Nähert sich jetzt h der Grenze null, wird also $h = 0$, so erhalten wir den Ausdruck

$$6)\quad \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Der Funktionsbruch ist also dem Bruch der ersten Differentialquotienten gleich. Das ergiebt die Regel:

Wenn eine gebrochene Funktion für einen bestimmten Wert von x auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ führt, so differentiiert man je für sich den Zähler und den Nenner.

Wenden wir die Regel auf unser erstes Beispiel an. Es war $y = \frac{x^2-4}{4(x-2)}$. Man setze für die Nebenrechnung: $u = x^2 - 4$ und $v = 4(x-2)$. Dann ergiebt sich: $\frac{du}{dx} = 2x$ und $\frac{dv}{dx} = 4$. Somit: $\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{2x}{4}$ und für $x = 2$. $\frac{du}{dv} = 1$.

Beispiel 2. Gegeben sei der Ausdruck

$$y = \frac{\sin x}{4x}.$$

Dieser wird für $x = 0$

$$y = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Differentiieren wir Zähler und Nenner je für sich

$$\frac{d \cdot (\sin x)}{d \cdot (4x)} = \frac{\cos x}{4},$$

dann erhalten wir $$\frac{\cos 0}{4} = \frac{1}{4}.$$

57. Bestimmung des unbestimmten Wertes $\frac{\infty}{\infty}$.

Es ist leicht, den Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückzuführen. Wird $f(x_1) = \infty$ und $\varphi(x_1) = \infty$, dann ist nach den Gesetzen der Algebra auch

$$\frac{1}{f(x_1)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi(x_1)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Der Ausdruck $$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

geht dann über in

$$\frac{\frac{1}{f(x_1)}}{\frac{1}{\varphi(x_1)}} = \frac{0}{0}.$$

Der Ausdruck kann also wie in 56 behandelt werden.

Nehmen wir hierfür ein Beispiel. Der Ausdruck

$$y = \frac{\tan 3x}{\tan x}$$

wird für $x = 90^\circ$

$$y = \frac{\text{tang} \cdot 3(90^\circ)}{\text{tang}\, 90^\circ} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Differentiieren wir Zähler und Nenner, dann ergiebt sich

$$\frac{d\,(\mathrm{tang}\,3x)}{d\,\mathrm{tang}\,x} = \frac{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}.$$

Setzen wir auch hier $x = 90^\circ$, dann wird

$$\frac{3\cos^2\cdot 90^\circ}{\cos^2 3\cdot 90^\circ} = \frac{0}{0}.$$

Wir erhalten von neuem eine unbestimmte Form. Wir werden daher noch einmal den Ausdruck differentiieren

$$\frac{d\,(3\cos^2 x)}{d\,(\cos^2\cdot 3x)} = \frac{-6\cdot\cos x\cdot\sin x}{-6\cdot\cos 3x\ \ \sin 3x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\sin 6x}.$$

Auch hier $x = 90^\circ$ gesetzt

$$\frac{\sin 2\cdot 90^\circ}{\sin 6\cdot 90^\circ} = \frac{\sin 180^\circ}{\sin 540^\circ} = \frac{0}{0}$$

ergiebt den unbestimmten Wert. Endlich durch erneutes Differentiieren

$$\frac{d\cdot(\sin 2x)}{d\cdot(\sin 6x)} = \frac{2\cdot\cos 2x}{6\cdot\cos 6x}$$

giebt für $x = 90^\circ$

$$\frac{-2\cdot 1}{-6\cdot 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Das Beispiel lehrt also zugleich, daß man in einem solchen Falle, wo das Differentiieren wiederum auf den unbestimmten Wert führt, mit der Differentiierung fortfahren muß.

58. Die anderen unbestimmten Ausdrücke lassen sich auf die behandelten stets zurückführen.

Es sei z. B. $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x}$.

Dieser Ausdruck wird für $x = 0$

$$y = \frac{1}{0} - \frac{1}{\sin 0} = \infty - \infty.$$

Die Umformung auf eine bekannte Form gelingt, indem man die rechte Seite auf einen Nenner bringt. Also

$$y = \frac{\sin x - x^3}{x^3 \cdot \sin x}.$$

Setzen wir nun $x = 0$, so ergiebt sich

$$y = \frac{\sin 0 - 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Den wirklichen Wert mag der Leser nach der ersten Methode ermitteln.

59 Beispiele.

1. Für $x = 0$ wird

$$y = \frac{\sin 2x}{x} = \frac{0}{0}.$$

Wie heißt der wahre Wert? Er ist $= 2$.

2. Für $x = 0$ wird

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0}.$$

Wie heißt der wirkliche Wert? Er ist $= 2$.

3. Für $x = 1$ wird

$$y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx} = \infty - \infty.$$

Wie heißt der wirkliche Wert? Er ist $= 1/_2$.

4. Für $x = \infty$ wird
$$y = x^{\frac{1}{x}} = \infty^0.$$

Wie heißt der wirkliche Wert? Man nimmt hier den Logarithmus und schreibt $\frac{1}{x} \cdot lx = ly$.

Er ist
$$ly = \frac{lx}{x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Diesen Ausdruck differentiiert man
$$\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} = 0.$$

Man erhält endlich den Wert $= 1$.

Neuntes Kapitel.

Vom Maximum und Minimum der Funktionen.

60. Erläuterungen.

Im Abschnitt 16 haben wir bereits auseinandergesetzt, daß man aus dem ersten Differentialquotienten einer Funktion erkennen kann, ob ihr Bild, also z. B. die Kurve, die sie darstellt, steigt oder fällt gegen die Abscissenachse. Wir erkannten, daß die Kurve wächst, wenn der erste Differentialquotient positiv ist, daß sie fällt, wenn der erste Differentialquotient negativ ist. Wir wollen hieran weitere geometrische Untersuchungen über die Funktionen und ihre Bilder anknüpfen.

61. Kennzeichen für das Maximum und Minimum einer Kurve.

Es sei eine Funktion

1) $$y = f(x)$$

gegeben und wir denken sie uns gezeichnet in Abb. 5 (S. 88).

Hier hat das Bild der Funktion, die Linie MN, in A ihren höchsten Punkt, also ihr Maximum, und in B ihren niedrigsten Punkt oder ihr Minimum. Eine andere Art des Maximums zeigt der Punkt E. Der Punkt A der Kurve ist dadurch ausgezeichnet, daß alle unmittelbar vorhergehenden und alle unmittelbar folgenden Ordinaten (y) der Kurve kleiner sind als die Ordinate AC des Punktes A. Die Ordinaten wachsen also bis zu A und fallen dann. Im Gegensatz hierzu sind alle vorhergehenden und alle folgenden Ordinaten der Kurve größer als

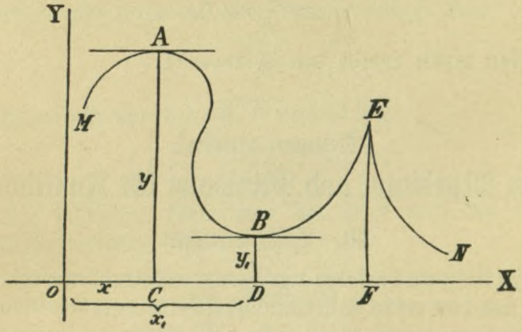

Abb. 5.

die Ordinate des Punktes B, die in der Abbildung mit BD(y,) bezeichnet ist. Die Kurve wird also bei B zuerst fallen und dann wachsen. Für einen Punkt, in dem ein Maximum oder Minimum eintritt, spielen nun die ersten Differentialquotienten der Funktion eine bedeutungsvolle Rolle. Ist der Differentialquotient positiv, dann steigt das Bild der Funktion, ist er negativ, dann fällt es. Da nun beim Maximum erst ein Steigen, dann ein Fallen, beim Minimum erst ein Fallen und dann ein Steigen der Kurve eintritt, so muß in den betreffenden Punkten ein Uebergang vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt, kurz ein Zeichenwechsel eintreten. Das Positive und das Negative sind durch die Null oder durch das Unendliche voneinander geschieden. Findet daher in einer Funktion oder in ihrem Bilde an einer Stelle ein Maximum oder Minimum statt, so muß der erste Differentialquotient der Funktion an dieser Stelle null oder unendlich sein.

Für diese Auseinandersetzungen giebt uns Abb. 5 eine gute Anschauung. Wie wir zeigten, ist der erste Differentialquotient gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Tangente in dem bestimmten Punkte mit der Abscissenachse macht. In unserer Abbildung läuft die Tangente in **A** und **B** mit der Abscissenachse parallel, der Winkel ist also gleich null und die trigonometrische Tangente daher auch gleich null. In **E** steht die Tangente senkrecht auf der Abscisse, der Winkel ist gleich 90° und die trigonometrische Tangente somit gleich unendlich.

Um nun festzustellen, ob in einem Punkte einer Kurve (Funktion), für den der erste Differentialquotient null ist (wir wollen uns zuerst mit diesem Fall beschäftigen), ein Maximum oder ein Minimum eintritt, muß untersucht werden, ob die Kurve im weiteren Fortschreiten fällt oder steigt. Bei einem Maximum muß die Funktion in der Folge fallen, für ein Minimum wachsen. Daher wird der zweite Differentialquotient hier entscheiden! Ist er negativ, dann hat die Kurve in dem betreffenden Punkte ein Maximum, ist er positiv, ein Minimum. Der Beweis ist leicht mit der Taylorschen Reihe zu führen. Das mag der Leser versuchen.

62. Schema für die Untersuchung einer Funktion nach dem Maximum oder Minimum.

Es sei eine Funktion $f(x)$ gegeben. Für den Wert $x = x_1$ wird der erste Differentialquotient $f'(x_1) = 0$.

Ist dann
$f''(x)$, negativ, so ist an dieser Stelle ein Maximum,
$f''(x)$, positiv, so ist an dieser Stelle ein Minimum.

62a. Ein Beispiel zum Schema.

Um ein Maximum oder Minimum von einer Funktion wirklich zu bestimmen, setzt man daher den ersten Differentialquotienten gleich null und bestimmt den Wert von x. Diesen Wert setzt man in den zweiten Differentialquotienten; wird das Resultat negativ, dann hat die Funktion für diesen Wert ein Maximum, wird das Resultat positiv, ein Minimum.

Das soll zunächst an einem Beispiel ausführlich illustriert werden. Es sei eine Funktion

$$y = x^3 + 6x^2 - 15x$$

gegeben.

Wir wollen untersuchen, ob sie ein Maximum oder Minimum besitzt, und ermitteln, wo es sich befindet. Nehmen wir den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 15.$$

Wir setzen ihn gleich null und bestimmen aus der quadratischen Gleichung die Werte von x. Also

$$3x^2 + 12x - 15 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm \sqrt{9}$$

$$x = -2 \pm 3 = \begin{cases} +1 \\ -5 \end{cases}.$$

Bilden wir den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 12.$$

Setzen wir nacheinander die beiden Wurzelwerte ein

$$6 \cdot 1 + 12 = +18$$

$$6 \cdot -5 + 12 = -18.$$

Für $x = +1$ erhält man also das Minimum und für $x = -5$ das Maximum der Funktion resp. des Bildes, das sie darstellt.

Zunächst wollen wir nun an einer größeren Anzahl von Beispielen dem Leser Gelegenheit geben, diese Methode einzuüben.

63. Aufgaben.

1. Von einem Dreieck seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben. Wie groß muß der Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird? (Siehe Abb. 6.)

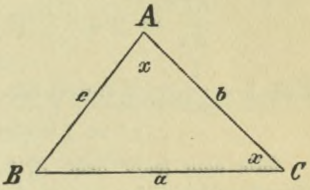

Abb. 6.

Lösung. In der Trigonometrie wird gezeigt, daß man den Inhalt eines Dreiecks durch die Formel

$$F = \frac{1}{2} ab \cdot \sin x$$

ausdrücken kann.

Schreiben wir der Bequemlichkeit halber

$$y = 2F = ab \cdot \sin x.$$

Es ist nun $$\frac{dy}{dx} = ab \cdot \cos x.$$

Also wird $ab \cos x = 0$; $\cos x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$.

Der zweite Differentialquotient ergiebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ab \cdot \sin x.$$

Das Dreieck wird also ein solches mit maximalem Inhalt, wenn der eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

2. Von einem Rechteck mit dem bestimmten Inhalt I soll die Grundlinie und die Höhe ermittelt werden, die veranlassen, daß der Umfang U ein Minimum werde.

Lösung. Bezeichnen wir die Grundlinie mit x, dann muß die Höhe durch $\frac{I}{x}$ ausgedrückt werden, denn es ist

$$I = x \cdot \frac{I}{x},$$

der Inhalt des Rechtecks.

Wir erhalten nun die Formel für den Umfang durch die Formel

$$U = 2x + 2 \cdot \frac{I}{x}.$$

Es wird dann

$$\frac{dU}{dx} = 2 - \frac{2I}{x^2} = 2\left(1 - \frac{I}{x^2}\right) = 0.$$

Aus $1 - \frac{I}{x^2} = 0$ ergiebt sich

$$x^2 = I \quad \text{und} \quad x = \sqrt{I}.$$

Wie man leicht sieht, ist der zweite Differentialquotient für $x^2 = I$ positiv.

Hieraus folgt, daß von allen Rechtecken von demselben Inhalte das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

3. Wie heißt das Maximum oder Minimum der Funktion

$$y = x^2 + ax + b^2?$$

Lösung. Wir nehmen den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 2x + a.$$

Also $$2x + a = 0; \quad x = -\frac{a}{2}.$$

Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +2.$$

Die Funktion hat also ein Minimum.

4. In ein Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h soll ein Rechteck, das auf der Grundlinie a ruht, so ge-

zeichnet werden, daß sein Flächeninhalt ein Maximum werde. (Siehe Abb. 7.)

Lösung. Die Höhe des fraglichen Rechtecks sei gleich x. Dann kann man die Höhe des kleinen Dreiecks ADE mit

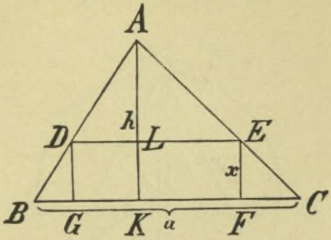

Abb. 7.

h — x bezeichnen. Mit Hilfe eines bekannten Satzes aus der Proportionslehre ergiebt sich dann

$$h:(h-x) = a:DE;$$

also
$$DE = \frac{a(h-x)}{h}.$$

Der Inhalt des Rechtecks kann also bezeichnet werden durch

$$I = \frac{a}{h}x(h-x) = \frac{a}{h}(hx - x^2).$$

Da die Konstante keinen Einfluß beim Differentiieren hat, kann $\frac{a}{h}$ fortgelassen werden. Der Leser mag sich davon überzeugen. Daher

$$\frac{dI}{dx} = h - 2x$$

und
$$h - 2x = 0; \quad x = \frac{h}{2}.$$

Bilden wir den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -2.$$

Es giebt also ein solches Maximum, wie der zweite Differentialquotient erweist.

5. In eine Kugel soll ein solcher Kegel eingeschrieben werden, daß sein Mantelinhalt ein Maximum werde.

Lösung. Nennen wir (siehe Abb. 8) den Kugelradius r, den Radius an der Basis des Kegels y, die Höhe des

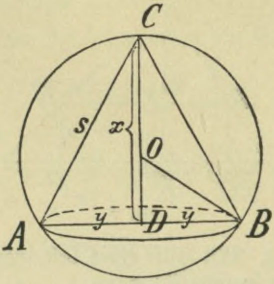

Abb. 8.

Kegels x und seine Seitenlinie s, dann wird die Mantelfläche des Kegels
$$M = y \cdot s \cdot \pi.$$

Aus der Geometrie erhalten wir dann die Bedingungen
$$y^2 = x(2r - x)$$
und
$$s^2 = 2rx.$$
Es wird daher $M^2 = 2rx^2(2r - x)\pi^2$.

Der Einfachheit wegen können wir schreiben:
$$\frac{M^2}{2r\pi^2} = Y = x^2(2r - x) = 2rx^2 - x^3$$
und es wird
$$\frac{dY}{dx} = 4rx - 3x^2,$$
$$\frac{d^2Y}{dx^2} = 4r - 6x.$$
Es ist weiter $4rx - 3x^2 = 0$

oder
$$3x^2 - 4rx = 0$$
$$x^2 - \frac{4}{3}rx = 0$$
$$x = \frac{2}{3}r \pm \sqrt{\frac{4}{9}r^2}$$
$$= \frac{2}{3}r \pm \frac{2}{3}r$$
$$x = \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{3}r \end{cases}.$$

Setzen wir den Wert in den zweiten Differentialquotienten ein, dann erhalten wir für $x = \frac{4}{3}r$ ein Maximum.

6. Es sei ein rechter Winkel gegeben. Zwischen seinen Schenkeln soll durch einen Punkt A die kürzeste Linie gezogen werden. (Siehe Abb. 9.)

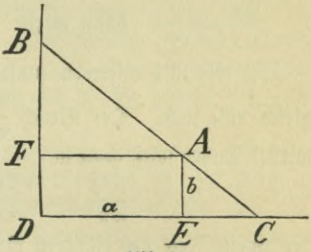

Abb. 9.

Lösung. Bezeichnen wir sie mit BC. Die Koordinaten des fraglichen Punktes seien $DE = a$ und $AE = b$. Setzen wir außerdem $DC = x$ und $BD = y$. Wir erhalten nunmehr die Proportion
$$y : x = b : (x - a),$$
und hieraus ergiebt sich
$$y = \frac{bx}{x - a}.$$
Dann ist aber
$$\overline{BC}^2 = x^2 + \frac{b^2x^2}{(x-a)^2}.$$

Nehmen wir den ersten Differentialquotienten
$$\frac{d(BC^2)}{dx} = 2x + \frac{(x-a)^2 \cdot 2b^2x - b^2x^2 \cdot 2(x-a)}{(x-a)^4}.$$

Setzt man

$$2x + \frac{(x-a)^2 \cdot 2b^2x - b^2x^2 \cdot 2(x-a)}{(x-a)^4} = 0,$$

dann ergiebt sich $x = a + \sqrt[3]{ab^2} = DC$.

Damit ist die Lage der Linie BC bestimmt.

Der zweite Differentialquotient ist für dieses x positiv; also ist BC ein Minimum.

64. Die Untersuchung des Maximums und Minimums von Brüchen.

Die Maximum- und Minimumuntersuchungen lassen sich zuweilen wesentlich vereinfachen. Unbequem wird zum Beispiel die Rechnung, wenn der erste Differentialquotient ein Bruch ist. Es sei also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}; \quad \text{dann wird} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Wie wir uns erinnern, muß der erste Differentialquotient gleich null sein. Der Bruch $\frac{u}{v}$ ist aber null, wenn $u = 0$ wird. Daher muß auch in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

der zweite Teil des Zählers null sein, also $udv = 0$, und es wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{vdu}{v^2} = \frac{du}{v}.$$

Nehmen wir hierzu ein Beispiel. Es sei

$$y = \frac{x}{x^2+1};$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \text{und} \quad x = \pm 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{v} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Endlich $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$: Maximum.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{4} = +\frac{1}{2}$: Minimum.

65. Das Maximum und Minimum solcher Funktionen, für die $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

Wir haben bisher diejenigen Fälle betrachtet, in denen der erste Differentialquotient null wurde und bei denen in dem betreffenden Punkte die Tangente der Abscissenachse parallel lief. Seltener kommt es vor, daß der erste Differentialquotient unendlich wird. Wie in Abschnitt 61 auseinandergesetzt wurde, steht in dem Falle die Tangente senkrecht auf der Abscissenachse. Diese Untersuchungen sind viel weitläufiger. Die allgemeine Regel, die dann eingeschlagen werden muß und die für jeden Fall gilt, ist die nachfolgende.

Die Funktion wird differentiiert und der Wert ermittelt, für den $f'(x) = 0$ oder $f'(x) = \infty$ wird. Er sei gleich a. Nehme man nun den nächstvorhergehenden und den nächstfolgenden Wert dieser Differentialquotienten, also $f'(a-h)$ und $f'(a+h)$. Diese Ausdrücke müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben, daß ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Ist nun

1. $f'(a-h)$ positiv und $f'(a+h)$ negativ, } dann findet ein **Maximum** statt.

Ist aber

2. $f'(a-h)$ negativ und $f'(a+h)$ positiv, } dann findet ein **Minimum** statt.

Zehntes Kapitel.

Von den Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen der Kurven.

66. Erklärungen.

Es sei eine Kurve gegeben (Abb. 10), die der Gleichung

1) $$y = f(x)$$

entspricht.

Auf der Kurve nehmen wir einen Punkt P an, der die Koordinaten x und y hat. In P ziehe man die Tangente, welche die Abscissenachse in R schneidet und mit ihr den Winkel α bildet. Wir bezeichnen nun die **Strecke PR** als

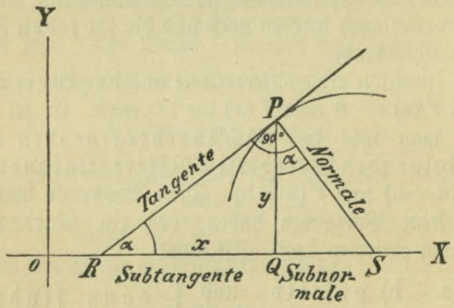

Abb. 10.

die **Tangente** = **T**, die im Punkte P auf der Tangente senkrechte Linie PS als die **Normale** = **N** der Kurve. Sodann nennt man die Projektion der Tangente auf die x-Achse, also die Strecke RQ, die **Subtangente** = St und die Projektion der Normale auf die x-Achse, also die Strecke QS, die **Subnormale** = Sn der Kurve.

67. Formeln für die Tangente ꝛc.

Nunmehr sollen die entsprechenden Differentialausdrücke für T, N, St und Sn gefunden werden. Unmittelbar aus der Abbildung (siehe Abb. 10) ersieht man, daß $\frac{PQ}{RQ} = \operatorname{tang}\alpha$ ist. Da nun der erste Differentialquotient einer Funktion der trigonometrischen Tangente entspricht, so kann man auch schreiben

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{PQ}{RQ} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Aus der Abbildung ergiebt sich außerdem

3) $$\frac{QS}{PQ} = \operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Wir erhalten aus 3)

4) $$QS = PQ \operatorname{tang}\alpha$$

und, da $PQ = y$ ist,

5) $$QS = \textbf{Subnormale} = y \cdot \frac{dy}{dx} = Sn.$$

In ähnlicher Weise aus Gleichung 2)

6) $$RQ = \frac{PQ}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{PQ}{\frac{dy}{dx}} = \textbf{Subtangente} = y\frac{dx}{dy} = St.$$

Mit Leichtigkeit sind aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken PQR und PQS auch die Formeln für die Tangente und die Normale zu ermitteln. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist $\overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2.$

Fügen wir nun die ermittelten Werte in die rechte Seite ein, dann wird
$$\overline{PR}^2 = y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$
$$= y^2\left(1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2\right).$$

Hieraus

7) $$PR = \textbf{Tangente} = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = T.$$

In der gleichen Weise erhält man

$$\overline{PS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QS}^2$$

oder $$= y^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right).$$ Also

8) $$PS = \textbf{Normale} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = N.$$

68. Umformung dieser Formeln.

Die Differentialausdrücke für die Tangente und die Normale können noch in anderer Form geschrieben werden, in der sie zuweilen bequemer sind. Es sei wiederum eine Kurve gezeichnet, die der Funktion 1)

$$y = f(x)$$

entspricht.

Wir denken uns auf der Kurve (siehe Abb. 3 Seite 30) zwei sehr nahe Punkte gezeichnet, die wir mit P und P_1 bezeichnen wollen. — P habe die Koordinaten x und y und P_1 die Koordinaten $(x + \Delta x)$ und $(y + \Delta y)$. Bezeichnen wir die Sehne PP_1 mit Δs, dann ist nach dem Pythagoras

9) $$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Kommt der Punkt P_1 dem Punkt P unendlich nahe, dann geht die Sehne Δs in ds über und fällt mit dem Kurvenstück PP_1 zusammen, und Δx und Δy werden zu dx und dy. Daher

10) $$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Wenn wir den Ausdruck 10) durch dx^2 und sodann durch dy^2 dividieren, dann erhalten wir zwei neue Beziehungen, die für die Neuableitung bedeutungsvoll sind. Also

$$11)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

$$12)\qquad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

Setzen wir diese Bezeichnungen in die Gleichungen 7) und 8) ein, dann erhalten wir die neuen Tangenten- und Normalenformeln

$$13)\qquad T = \textbf{Tangente} = y\frac{ds}{dy} \qquad \text{und}$$

$$14)\qquad N = \textbf{Normale} = y\frac{ds}{dx}.$$

69. Die T, N, Sn und St an der Parabel.

Zur Erläuterung des vorhergehenden Abschnittes wollen wir zunächst die Größen T, N, Sn, St für die Parabel ableiten. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, daß die Gleichung der Parabel die Form hat

$$15)\qquad y^2 = 2px.$$

Differentiieren wir

$$2y\,dy = 2p\,dx$$

und bilden den Differentialquotienten

$$16)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

Diesen Wert setzen wir in Formel 11) und 12) ein. Also

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p}{y}\right)^2$$

$$= \frac{y^2 + p^2}{y^2}.$$

Daher

$$17)\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{y^2 + p^2}.$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2$$
$$= \frac{p^2 + y^2}{p^2}.$$

Daher

18) $$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Werden die Ausdrücke 17) und 18) endlich in die Formeln für T, N, Sn und St eingefügt, dann ergeben sich die gewünschten Formeln für die Parabel

19) $$T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{p}\cdot\sqrt{p^2 + y^2}.$$

20) $$N = y\frac{ds}{dx} = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

21) $$St = y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$

22) $$Sn = y\frac{dy}{dx} = \frac{y\cdot p}{y} = p.$$

Aus 21) und 22) ergeben sich die interessanten geometrischen Sätze:

1. Die Subnormale einer Parabel ist immer konstant und zwar gleich dem Parameter.

2. Die Subtangente einer Parabel ist gleich dem doppelten Abscissenstücke.

70. Die analytischen Ausdrücke für Tangente und Normale.

Wir wollen nunmehr noch die analytischen Ausdrücke mittels der Methode der analytischen Geometrie herleiten. Betrachten wir zu dem Zwecke die Abb. 10 (S. 98). Die allgemeine Gleichung einer Tangente ist

23) $$y_{,} = ax_{,} + m$$

wenn $y_{,}$ und $x_{,}$ die laufenden Koordinaten sind. Für die Tangente im Berührungspunkte P sind die Koordinaten x und y. Also wird hier

24) $$y = ax + m.$$

Differentiieren wir den Ausdruck 24)

$$25)\qquad dy = a \cdot dx \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = a.$$

Wir erkennen aus 25), daß der Koeffizient a von x, die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Tangente mit der Abscisse macht.

Subtrahieren wir 24) von 23) und setzen den Wert von a ein, dann erhalten wir die **Gleichung der Tangente**

$$26)\qquad y_{,} - y = \frac{dy}{dx}(x_{,} - x).$$

Die analytische Formel für die Normale erhalten wir leicht aus derselben Gleichung, es ist gleichfalls nur a zu bestimmen. Also wiederum ist

$$y_{,} - y = a(x_{,} - x).$$

Die Normale bildet mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel $PSX_{,}$, der gleich $90° + \alpha$ ist. Also

$$27)^{*)}\qquad \text{tang}\, PSX = -\cot\alpha = -\frac{1}{\text{tang}\,\alpha} = -\frac{dx}{dy}.$$

Somit ergiebt sich als Formel für die **Normale**

$$28)\qquad y_{,} - y = -\frac{dx}{dy}(x_{,} - x).$$

71. Anwendung auf die Parabel.

Entwickeln wir auch die analytischen Ausdrücke der Tangente und Normale für die Parabel.

Wir erhielten als allgemeine Formel für die Tangente

$$y_{,} - y = \frac{dy}{dx}(x_{,} - x).$$

Aus Gleichung 16) ergab sich die Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

---

*) Es liegen hier die Formeln

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha \text{ etc.}$$

zu Grunde, die der Leser beweisen mag.

Somit wird die Gleichung für **die Tangente an der Parabel**

29) $$y_{,} - y = \frac{p}{y}(x_{,} - x).$$

In der gleichen Weise erhalten wir die Gleichung für die Normale der Parabel. Die allgemeine Gleichung lautet

$$y_{,} - y = -\frac{dx}{dy}(x_{,} - x).$$

Also wird die Gleichung **der Normale an der Parabel**

30) $$y_{,} - y = -\frac{y}{p}(x_{,} - x).$$

Anmerkung. Zur Uebung möge der Leser die gleichen Aufgaben für die Sinuslinie lösen, deren Gleichung ist

$$y = \sin x.$$

Durch Anwendung der Formeln 5, 6, 7 und 8 gelangt man zu den Ausdrücken

$$N = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

$$T = \operatorname{tang} x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

$$Sn = \sin x \cdot \cos x.$$

$$St = \operatorname{tang} x.$$

72. Die Bezeichnungen für die Tangente und Normale ꝛc. in Polarkoordinaten.

Häufig ist es vorteilhaft, statt des rechtwinkligen Koordinatensystems sich der Polarkoordinaten zu bedienen. Wir wollen hier zunächst die Formeln für die Tangenten und Normalen in Polarkoordinaten herleiten. Betrachten wir die Abb. 11. In der analytischen Geometrie bezeichnet man **o** als den **Pol** des Koordinatensystems und **oX** als die **Polarachse.** Ferner nennt man **r** (oP) den **Radius vector** und den Winkel α das **Argument** des Punktes P.

Die Gleichungen, die das rechtwinklige Koordinatensystem mit dem Polarkoordinatensystem verbinden, ergeben sich unmittelbar aus der Abb. 11. Es ist

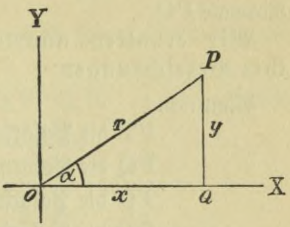

Abb. 11.

31) $$x = r \cdot \cos\alpha,$$
$$y = r \cdot \sin\alpha,$$
$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Um nun eine Anschauung von der geometrischen Lage der Tangente und Subtangente, der Normale und Subnormale im System der Polarkoordinaten zu gewinnen, betrachten wir die Abb. 12. Es ist uns hier

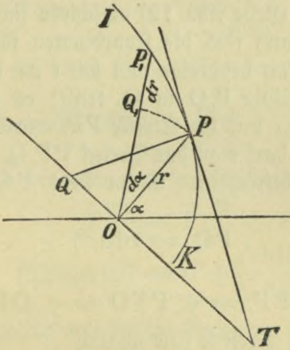

Abb. 12.

ein Bogenstück IK einer Kurve gegeben und auf dieser ein Punkt P. Sind r und α die Polarkoordinaten, dann ergiebt sich als Gleichung der Kurve

32) $$r = \varphi(\alpha).$$

Errichten wir nun auf dem Radius vector r im Punkte O eine Senkrechte und ziehen durch P die Tangente, welche die Senkrechte in T schneidet. Endlich errichten wir in P die Normale PQ.

Wir erhalten nunmehr folgende Stücke und ihre Bezeichnungen.

Man nennt

PT die **Polartangente** $= T$,
PQ die **Polarnormale** $= N$,
TO die **Polarsubtangente** $= St$,
QO die **Polarsubnormale** $= Sn$.

Diese Strecken sollen nun formuliert werden.

73. Ableitung der Formeln für T, N, St und Sn in Polarkoordinaten.

Der Punkt P (siehe Abb. 12) verschiebe sich um die kleine Strecke $PP_,$. Dann sind die Koordinaten für $P_,: r + dr$ und $\alpha + d\alpha$. Man beschreibe nun mit r um o einen Kreisbogen, der die Linie $P_,O$ in $Q_,$ trifft; es ist dann $P_,Q_,$ gleich dr. Da wir uns die Strecke $PP_,$ unendlich klein vorstellen können, so darf man das Dreieck $PP_,Q_,$ als ein geradliniges Dreieck betrachten. Dann steht $PQ_,$ senkrecht zu $P_,O$ und es ist

33) $$PQ_, = r d\alpha.\text{*)}$$

Dann ist auch

$$\sphericalangle Q_,PP_, = \sphericalangle PTO = \sphericalangle OPQ$$

die entsprechenden Dreiecke sind ähnlich

$$P_,PQ_, \sim OPT \sim OPQ.$$

Daher läßt sich die Proportion bilden

$$TO : PO = Q_,P : Q_,P_,$$ oder

34) $$TO : r = r d\alpha : dr.$$

*) Da $d\alpha$ sehr klein ist, darf man $d\alpha = \sin d\alpha$ setzen.

Daher

$$35)\qquad TO = \textbf{Subtangente} = \frac{r^2 d\alpha}{dr} = St.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken läßt sich auch die folgende Proportion bilden

$$OQ : OP = Q_1P_1 : Q_1P \qquad \text{oder}$$

$$36)\qquad OQ : r = dr : r d\alpha.$$

Und hieraus folgt

$$37)\quad OQ = \textbf{Subnormale} = \frac{r \cdot dr}{r \cdot d\alpha} = \frac{dr}{d\alpha} = Sn.$$

Wenden wir den Pythagoras an, so folgt

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2$$

oder

$$(\text{Normale})^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2.$$

Es ergiebt sich somit für die Normale die Formel

$$38)\qquad N = \textbf{Normale} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}.$$

Verwenden wir wiederum den Pythagoras, so ergiebt sich

$$\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OT}^2$$

oder

$$(\text{Tangente})^2 = r^2 + \left(\frac{r^2 d\alpha}{dr}\right)^2.$$

Somit erhalten wir für die Tangente die Formel

$$39)\qquad T = \textbf{Tangente} = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2}.$$

74. Ein Beispiel.

Wir wollen die T, N, St und Sn in Polarkoordinaten an der archimedischen Spirale ableiten. Eine archimedische Spirale entsteht, wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punkt O dreht, während ein anderer Punkt P auf der geraden Linie sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegt.

Die Gleichung der archimedischen Spirale (siehe Abb. 13) lautet

40) $$r = a\alpha.$$

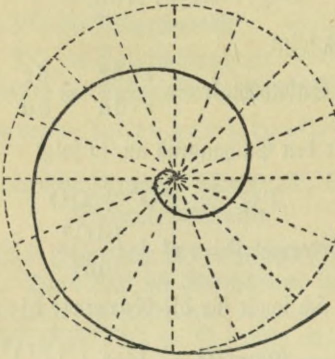

Abb. 13.

Die Formel besagt, daß der Radius vector dem Argument proportional ist.

Bilden wir von Gleichung 40) den Differentialquotienten

41) $$\frac{dr}{d\alpha} = a = Sn.$$

Wie wir aus Gleichung 37) wissen, ist das der Ausdruck für die Subnormale. Die Subnormale ist also für alle Punkte der archimedischen Spirale konstant. Wir erhalten sehr leicht die Formel für die Subtangente, wenn wir den Wert von 41) in die Form 35) einfügen. Also

42) $$St = r^2 \frac{d\alpha}{dr} = r^2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{r^2}{a}.$$

Mit Verwendung von 40) endlich

43) $$\textbf{Subtangente} = \frac{a^2 \cdot \alpha^2}{a} = a\alpha^2.$$

Setzen wir unsere Werte in die Formeln 38) und 39) ein, so ergeben sich die Ausdrücke für

44) die **Tangente** $T = r\sqrt{1+\alpha^2}$ und

45) die **Normale** $N = a\sqrt{1+\alpha^2}$.

75. Von der Asymptote.

Eine Asymptote ist eine Tangente, die eine Kurve in einem unendlich fernen Punkte berührt.

In der analytischen Geometrie machen wir die Bekanntschaft der Asymptoten bei der Untersuchung über die Hyperbel.

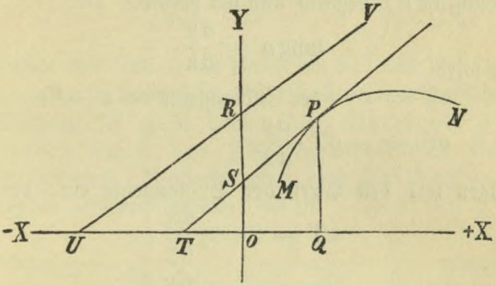

Abb. 14.

Wir wollen nun die Methode ermitteln, um bestimmen zu können, ob eine Kurve eine Asymptote hat. (Siehe Abb. 14.)

In unserer Abbildung sei MN ein Kurvenstück einer krummen Linie, die durch die Gleichung gegeben ist

46) $$y = f(x).$$

Ferner sei UV die im folgenden näher zu bestimmende Asymptote. Sie kann ermittelt werden durch Bestimmung der Punkte R und U, die sie gemeinschaftlich mit der y- und der x-Achse hat. Nehmen wir nun an, es sei P ein Punkt der Kurve, der durch die Koordinaten x und y bestimmt ist. Ferner sei PT die Tangente im Punkte P. Je mehr P nach N zu gleitet und darüber fortgeht, um so mehr nähert sich S dem Punkte R. Wird $x = \infty$, dann werden auch die Stücke UT und SR unendlich klein. Um zu einem analytischen Ausdruck zu gelangen, wollen wir To und So durch x ausdrücken. Bleiben To und So für den Wert $x = \infty$ selbst endlich, dann ist eine Asymptote für die gegebene Kurve vorhanden. Bleibt eine der beiden Strecken endlich, während die andere unendlich wird, dann ist die Asymptote einer Koordinatenachse parallel. Werden endlich die genannten Strecken gemeinschaftlich zu null, dann geht die Asymptote durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems hindurch.

Stellen wir nun folgende Ueberlegungen an: In unserer Abbildung ist oT negativ und oS positiv.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Es wird

$$oT = x - \text{der Subtangente} = x - St$$

und

$$oS = -oT \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Fügen wir den Wert der Subtangente ein, dann ist

47) $$oT = x - y\frac{dx}{dy}$$ und

48) $$oS = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Wird in diesen Ausdrücken $x = \infty$, dann ergeben sich die Grenzwerte von oT und oS.

76. Ein Beispiel zur Erläuterung der Asymptoten.

Die analytische Geometrie entwickelt für die Hyperbel die Formel

49) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Wir wollen die Asymptote für die Hyperbel bestimmen. Es ist zunächst

$$50)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Diesen Wert wollen wir in die Ausdrücke 47) und 48) einfügen; dann ergiebt sich

$$51)\quad \mathbf{oT} = x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

$$= x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x} = \frac{a^2}{x} \quad \text{und}$$

$$52)\quad \mathbf{oS} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot x$$

$$= \frac{b(x^2 - a^2) - bx^2}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Setzen wir nun in die Ausdrücke 51) und 52) $x = \infty$, dann werden sie beide gleich null. Nach unseren Ausführungen in Abschnitt 75 geht somit die Asymptote an der Hyperbel durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems. Nunmehr muß noch der Berührungswinkel α bestimmt werden. Es ist

$$53)\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Setzen wir $x = \infty$, dann ist

$$54)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{b}{a}.$$

Elftes Kapitel.

Von der Konvexität, der Konkavität und von den Wendepunkten einer Kurve.

77. Erklärungen.

Legt man an einen Punkt einer Kurve eine Tangente, dann nennt man die Kurve nach unten **konkav** (also nach der Abscissenachse zu), wenn alle benachbarten Punkte, wie bei $P_{,}$, unterhalb der Tangente liegen (siehe Abb. 15).

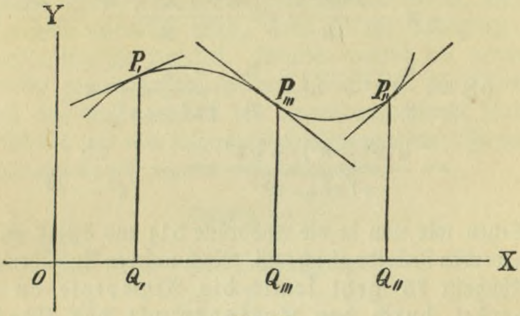

Abb. 15.

Man nennt eine Kurve nach unten **konvex**, wie bei $P_{,,}$, wenn die benachbarten Punkte über der Tangente liegen. Ein Punkt endlich, wie bei $P_{,,,}$, bei dem die Konkavität in die Konvexität oder umgekehrt übergeht, nennt man einen **Wendepunkt.**

78. Ableitung, um die Bedingungen für die Konkavität und Konvexität einer Kurve festzustellen.

Es sei eine Kurve gegeben, deren Gleichung ist

1) $$y = f(x).$$

Wir wollen die Bedingungen für ihre Konkavität oder Konvexität ermitteln. Betrachten wir hierzu die Abb. 16.

In dem hier gezeichneten Kurvenstück hat der Punkt P die Koordinaten x, y. Wir denken uns durch P die Tangente gezogen. Dann sieht man, daß die Kurve nach unten konvex ist, weil alle dem Punkte P benachbarten Punkte, wie z. B. $P_,$ und $P_{,,}$, über der Tangente liegen.

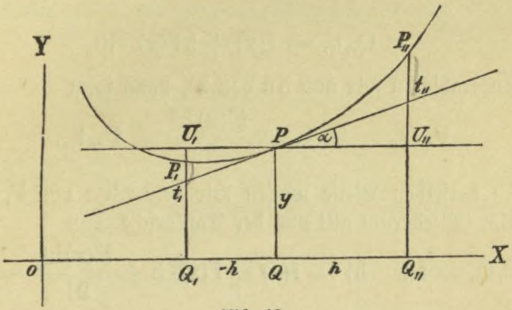

Abb. 16.

Die Ordinaten der Punkte $P_,$ bezw. $P_{,,}$ haben mit der Tangente die Durchschnittspunkte $t_,$ bezw. $t_{,,}$. Da, wie bekannt, die Ordinaten nach oben hin wachsen, so müssen die Strecken $P_, t_,$ und $P_{,,} t_{,,}$ positiv also größer als null sein. Wir schreiben somit

2) $$P_, t_, = P_, Q_, - Q_, t_, > 0$$

und $$P_{,,} t_{,,} = P_{,,} Q_, - Q_{,,} t_{,,} > 0.$$

Hat, wie wir oben angaben, P die Koordinaten x und y, so hat $P_,$ die Abscisse $(x-h)$ und $P_{,,}$ die Abscisse $(x+h)$. Entwickeln wir nun nach dem Taylorschen Satze

3) $$P_{,,} Q_{,,} = f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x) h^2}{2!} + \frac{f'''(x) h^3}{3!} + \cdots$$

Ziehen wir durch P eine parallele Linie zur Abscisse und bezeichnen die Durchschnittspunkte mit den Ordinaten mit $U_,$ $U_{,,}$, dann ergeben sich folgende Beziehungen:

Im rechtwinkligen Dreiecke $t_{,,}U_{,,}P$ ist

4) $t_{,,}U_{,,} = PU_{,,} \cdot \tang\alpha = h \cdot \tang\alpha = h \cdot f'(x)$.

Daraus folgt, daß

5) $Q_{,,}t_{,,} = t_{,,}U_{,,} + U_{,,}Q_{,,} = y + t_{,,}U_{,,} = y + hf'(x)$

oder

5a) $$Q_{,,}t_{,,} = f(x) + hf'(x) \quad \text{ist.}$$

Subtrahieren wir nun 5a von 3), dann folgt

6) $$P_{,,}Q_{,,} - Q_{,,}t_{,,} = \frac{f''(x)h^2}{2!} = \mathbf{P_{,,}t_{,,}}.$$

In derselben Weise wollen wir den Wert von $P_{,}t_{,}$ ermitteln. Wiederum gilt uns der Taylorsche Satz

7) $$P_{,}Q_{,} = f(x-h) = f(x) - f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)h^2}{2!} - + \ldots$$

Es wird

8) $$t_{,}U_{,} = -h \cdot \tang\alpha = -hf'(x).$$

In gleicher Weise wie in 5)

9) $$\begin{aligned} Q_{,}t_{,} &= y - t_{,}U_{,} = y - hf'(x) \\ &= f(x) - h \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Also endlich

10) $$P_{,}Q_{,} - t_{,}Q_{,} = \frac{f''(x)h^2}{2!} = \mathbf{P_{,}t_{,}}.$$

Man erhält hieraus den Satz: **Ist der zweite Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ positiv, dann ist die Kurve, die ihr entspricht, nach unten konvex.**

78a). Bedingungen für die Konkavität einer Kurve.

(Siehe Abb. 17.)

Durch dieselben Schlüsse wird festgestellt, **daß eine Kurve nach unten konkav ist, wenn der zweite Differentialquotient der Funktion, den sie darstellt, negativ ist.**

79. Der Wendepunkt.

Aus dem Vorstehenden ist leicht zu ersehen, daß, wenn der zweite Differentialquotient null oder unendlich wird, die Kurve für diesen Punkt vom **Konkaven** zum **Konvexen** oder umgekehrt übergehen kann. An dieser Stelle wird sich also in gewissen Fällen ein **Wendepunkt**

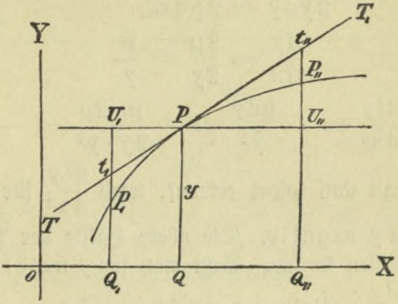

Abb. 17.

befinden. (Siehe $P_{,,,}$ in Abb. 15.) Wir wollen die Kennzeichen näher untersuchen. Hat sich herausgestellt, daß für einen bestimmten Wert von x der zweite Differentialquotient null oder unendlich geworden ist, so muß man die unmittelbar vorangehenden und folgenden Punkte untersuchen.

Ist $f''(x-h)>o$ und $f''(x+h)<o$, dann geht die Kurve von der Konvexität zur Konkavität über, und in P befindet sich ein Wendepunkt.

Ist dagegen

$$f''(x-h)<o \quad \text{und} \quad f''(x+h)>o,$$

dann geht die Kurve von der Konkavität zur Konvexität über, und in P ist gleichfalls ein Wendepunkt.

80. Beispiele.

1. Die Parabel soll auf ihre Konkavität und Konvexität untersucht werden.

Die Gleichung der Parabel lautet

$$y^2 = 2px.$$

Wir nehmen die Differentialquotienten

$$2y\,dy = 2p\,dx.$$

Daher
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

Sodann
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p\,dy}{y^2} = -\frac{p \cdot 2p}{2y \cdot y^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Wie man nun sofort erkennt, wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ für positive Werte von y negativ. Die obere Hälfte der Parabel ist also nach unten konkav. Setzt man für y negative Werte, dann ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv und wir sehen, daß der untere Teil der Parabel nach unten konvex ist. Da für keinen endlichen Wert von y $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwindet, so ist kein Wendepunkt vorhanden.

2. Wir wollen die Sinuslinie untersuchen. Die Gleichung der Sinuslinie ist
$$y = \sin x.$$

Wir nehmen die Differentialquotienten. Also

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

und
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

Wie man sofort sieht, wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die Werte negativ, die zwischen 0 und π liegen. Die Kurve wird somit dort nach unten konkav sein. Die Werte zwischen π und 2π eingesetzt in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergeben ein positives Resultat; und es zeigt sich, daß die Sinuslinie nach unten konvex ist. Zu

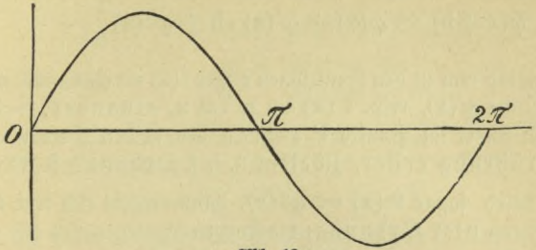

Abb. 18.

null wird der Differentialquotient für die Werte o, π, 2π ꝛc. Hier befinden sich Wendepunkte; sie liegen alle, wie Abb. 18 zeigt, auf der Abscissenachse.

Zwölftes Kapitel.

Die Krümmung der Kurven und der Krümmungskreis. Evoluten und Evolventen.

81. Ueber die Berührung von Kurven.

Wenn zwei krumme Linien, die durch die Gleichungen

1) $$y = f(x) \quad \text{und} \quad y_1 = \varphi(x)$$

dargestellt und die auf dasselbe Koordinatensystem mit dem gleichen Anfangspunkte bezogen sind, für einen bestimmten Wert von x ein übereinstimmendes Resultat ergeben, dann müssen sie beide durch denselben Punkt P gehen. Das ist unmittelbar einleuchtend und folgt aus dem Begriff der Funktion. Lassen wir nun x in den beiden Funktionen um die kleine Größe h zunehmen und entwickeln wir nach dem Taylorschen Satze. Also

$$2)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot h + \varphi''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Sind nun in den Funktionen außer $f(x) = \varphi(x)$ auch noch $f'(x) = \varphi'(x)$, resp. $f''(x) = \varphi''(x)$ etc. einander gleich, dann findet im Punkte P zwischen den beiden Kurven eine Berührung erster, zweiter u. s. f. Ordnung statt.

Wird sogar $f^n(x) = \varphi^n(x)$, dann ergiebt sich eine Berührung nter Ordnung; die Kurven schmiegen sich also am innigsten aneinander. Wir wollen diese Auseinandersetzung an einem Beispiel noch klarer machen.

Es sei eine Parabel von der Form

$$y^2 = 4x$$

gegeben. Es soll die parabolische Linie ermittelt werden, die im Punkte P mit den Koordinaten $\begin{Bmatrix} x = 4 \\ y = 4 \end{Bmatrix}$ mit der gegebenen Parabel die innigste Berührung hat. Die Gleichung für die parabolische Linie sei

$$y_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^3.$$

Bilden wir nun die Differentialquotienten aus

$$y_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^3$$

und

$$y^2 = 4x$$

oder

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \beta + 3\gamma x^2; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 6\gamma x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

Nach unseren obigen Bemerkungen müssen also, wenn in P eine innige Berührung stattfinden soll, für $x = 4$ auch die Differentialquotienten gleich sein. Zur Ermittelung der Koeffizienten in der parabolischen Gleichung können dann die folgenden drei Gleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta + 64\gamma &= 4, \\ \beta + 48\gamma &= 1/2, \\ 24\gamma &= -1/16. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Werte $= 5/3$, $\beta = 3/8$, $\gamma = -1/384$. Somit hat die gewünschte parabolische Linie die Form

$$y, = 5/3 + 3/8\,x - 1/384\,x^3.$$

Es findet also hier eine Berührung zweiter Ordnung statt.

82. Der Krümmungskreis.

In der Theorie über die Krümmung der Kurven spielt die Aufgabe eine wichtige Rolle, den Kreis zu ermitteln, der mit einer Kurve in einem bestimmten Punkt P die innigste Berührung hat. Man nennt diesen Kreis den Krümmungs- oder Oskulationskreis und seinen Radius den Krümmungsradius.

Im folgenden sollen die Formeln für den Krümmungsradius und die Koordinaten für den Mittelpunkt des Oskulationskreises bestimmt werden. Dazu wird es gut sein, sich zunächst eine geometrische Vorstellung vom Krümmungskreise zu schaffen. Betrachten wir zu dem Zwecke Abb. 19 (S. 120).

Die Kurve HI sei gegeben durch die Gleichung

3) $$y = f(x).$$

Wir legen an diese Kurve im Punkte P eine Tangente TF und eine Normale PU. Man ist nunmehr im stande, von jedem Punkte der Normalen aus Kreise zu schlagen, die die Kurve HI im Punkte P berühren und deren gemeinschaftliche Tangente TF ist.

Derjenige von allen diesen Kreisen, der mit der Kurve HI die innigste Berührung eingeht, ist der Oskulationskreis. Um nun die gewünschten Bestimmungsstücke zu finden, können wir ähnlich verfahren wie in der vorbereitenden Aufgabe in Abschnitt 81. Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes P mit x und y und die Koordinaten vom Mittelpunkte M des Krümmungskreises mit α und β; sein Radius werde mit ϱ bezeichnet.

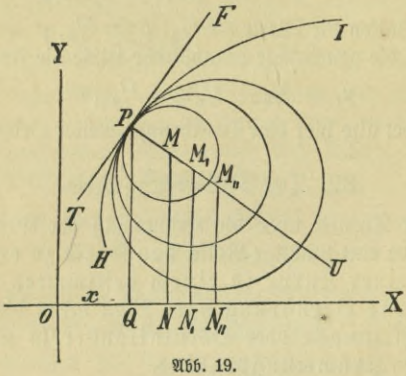

Abb. 19.

Wir werden daher, wie in 81, die Differentialquotienten für die Gleichung der Kurve $y = f(x)$ und für die Gleichung des Kreises $(y_1 - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2$ bilden. Es ist hierzu gut, die Kreisgleichung ein wenig umzuschreiben. Also

4) $y_1 = \beta + \{\varrho^2 - (x - \alpha)^2\}^{1/2}$ und $y = f(x)$. Daher

5) $$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{x - \alpha}{\{\varrho^2 - (x-\alpha)^2\}^{1/2}}; \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) = p^{*)}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{\varrho^2}{\{\varrho^2 - (x-\alpha)^2\}^{3/2}}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = q.$$

*) Man bezeichnet sehr häufig nach dem Vorgange von Euler den ersten Differentialquotienten mit p, den zweiten mit q, den dritten mit r rc.

Zur Bestimmung des Oskulationskreises müssen jetzt α, β und ϱ ermittelt werden. Das geschieht durch die drei Gleichungen

6) $$\beta + \{\varrho^2 - (x-\alpha)^2\}^{1/2} = y$$
$$-\frac{x-\alpha}{\{\varrho^2-(x-\alpha)^2\}^{1/2}} = p$$
$$-\frac{\varrho^2}{\{\varrho^2-(x-\alpha)^2\}^{3/2}} = q.$$

Führen wir die Rechnung nach den Gesetzen der Algebra aus, dann ergiebt sich

7) $$\alpha = x - p\cdot\frac{(1+p^2)}{q}$$
$$\beta = y + \frac{(1+p^2)}{q}$$
$$\varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}.$$

Wir wollen diese Ausdrücke mit Hilfe der Bestimmungen in Abschnitt 68 noch etwas umformen. Dort wurde gezeigt, daß man für $dx^2 + dy^2 = ds^2$ setzen kann. Schreibt man nun

8) $$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad p^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

dann wird

8a) $$1 + p^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Die Formeln 7) gehen somit über in

9) $$\alpha = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}p$$
$$\beta = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}$$
$$\varrho = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q}.$$

83. Die Krümmung der Kurven.

Von allen krummen Linien hat bekanntlich nur der Kreis stets dieselbe Krümmung, und zwar ist diese um so größer, je kleiner der Radius ist. Man pflegt daher die Krümmung eines Kreises dem reciproken Werte des Radius gleich zu setzen. Also

$$\text{Krümmung} = \frac{1}{r}.$$

Alle anderen Kurven haben in den verschiedenen Punkten verschiedene Krümmungen. Man mißt die Krümmungen, indem man an den einzelnen Punkten ihren Oskulationskreis ermittelt. Bestimmen wir jetzt den Oskulationskreis für die Parabel. Die Gleichung der Parabel sei

$$y^2 = 2\alpha x.$$

Wir bilden die Differentialquotienten.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{y} = p.$$

(Siehe Anmerkung zu Abschnitt 82.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha^2}{y^3} = q.$$

Entwickeln wir nun die Werte, die in den Formeln 7) hervortreten, und setzen sie in diese ein.

Es ist $\quad 1 + p^2 = 1 + \dfrac{\alpha^2}{y^2} = \dfrac{\alpha^2 + y^2}{y^2}.$

Daher

$$\alpha_1 = x - \frac{\frac{\alpha}{y} \cdot \frac{\alpha^2 + y^2}{y^2}}{-\frac{\alpha^2}{y^3}} = x - \frac{\alpha^2 + y^2}{y^2} \cdot \frac{\alpha}{y} \cdot \left(-\frac{y^3}{\alpha^2}\right)$$

$$= x + \frac{\alpha^2 + y^2}{\alpha} \qquad = x + \frac{\alpha^2 + 2\alpha x}{\alpha}$$

$$= x + \alpha + 2x \qquad = \alpha + 3x.$$

$$\beta_1 = y + \frac{\frac{a^2+y^2}{y^2}}{-\frac{a^2}{y^3}} = y + \left(\frac{a^2+y^2}{y^2}\right)\cdot\left(-\frac{y^3}{a^2}\right)$$

$$= y - \frac{(a^2+y^2)y}{a^2} = -\frac{y^3}{a^2}.$$

$$\varrho = \pm\frac{\left(\frac{a^2+y^2}{y^2}\right)^{3/2}}{-\frac{a^2}{y^3}} = \pm\frac{(a^2+y^2)^{3/2}}{y^3}\cdot\left(-\frac{y^3}{a^2}\right)$$

$$= \mp\frac{(a^2+y^2)^{3/2}}{a^2}$$

$$= \mp\frac{(a^2+2ax)^{3/2}}{a^2}.$$

Ist hier $x = 0$, dann wird in diesem Punkte

$$\varrho = \mp a.$$

Der Krümmungsradius im Scheitel der Parabel ist somit gleich dem Parameter. Die Koordinaten α_1 und β_1 des Krümmungskreises werden

$$\alpha_1 = a \quad \text{und} \quad \beta_1 = 0.$$

Der Krümmungsradius ϱ muß natürlich immer positiv sein; man wählt daher dasjenige Vorzeichen, das ihn positiv macht. Für die Parabel ist also der Parameter entscheidend.

84. Evoluten und Evolventen.

Denken wir uns in Abb. 19 (S. 120) statt eines Punktes P eine ganze Zahl aufeinanderfolgender Punkte P_1, P_2 etc. gezeichnet und für einen jeden den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt konstruiert. Dann giebt die Verbindungslinie aller dieser Krümmungsmittelpunkte eine neue Kurve. Man nennt sie die **Evolute** der gegebenen Kurve. Die Ursprungskurve bezeichnet man als die **Evolvente.** Man kann sich die Beziehung der Evolvente und der Evolute durch die folgende Konstruktion leicht vergegenwärtigen. Man zeichne sich eine nach oben konvexe Linie AB und befestige in A einen Faden, der zunächst über die Kurve gespannt sei. Wird nun, indem man den Faden stets stramm zieht, der Faden abgewickelt, dann beschreibt der Punkt B eine neue Kurve. Diese ist die Evolvente, die Abwickelnde; die ursprünglich konvexe Kurve wird die Evolute oder abgewickelte Linie genannt.

85. Zusammenstellung der Regeln, um die Formen der Kurven zu ermitteln.

Ist von einer Funktion $y = f(x)$

a) der **erste Differentialquotient** in einem Punkte $(x_1\, y_1)$ **gleich null,** dann **läuft die Tangente** der **x-Achse parallel;**

b) der **erste Differentialquotient** für einen Punkt $(x_1\, y_1)$ **unendlich,** dann steht **die Tangente** in dem betreffenden Punkte auf der **x-Achse senkrecht;**

c) der **erste Differentialquotient,** wie in a), **gleich null** und der **zweite Differentialquotient positiv,** dann hat die **Kurve in diesem Punkte ein Minimum;**

d) der **erste Differentialquotient,** wie in a), **gleich null** und der **zweite Differentialquotient negativ,** dann hat die **Kurve in diesem Punkte ein Maximum;**

e) der **erste Differentialquotient** für einen **bestimmten Wert a,** wie in b), **unendlich** und für

$\left.\begin{matrix} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{matrix}\right\}$, dann findet ein **Maximum** statt;

f) der **erste Differentialquotient** für einen **bestimmten Wert a,** wie in b), **unendlich** und für

$$\left.\begin{matrix} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) + \end{matrix}\right\},$$ dann findet ein **Minimum** statt;

(In e) und f) bedeutet h eine sehr kleine Größe.)

g) der **zweite Differentialquotient** für einen Punkt (xy) **positiv,** dann ist die **Kurve nach unten konvex;**

h) der **zweite Differentialquotient** für einen Punkt (xy) **negativ,** dann ist die **Kurve nach unten konkav;**

i) der **zweite Differentialquotient** für einen Punkt (xy) **null** oder **unendlich,** dann findet in ihm ein **Wendepunkt statt,** wenn

$$f''(x-h) > 0 \quad \text{und} \quad f''(x+h) < 0$$

oder

$$f''(x-h) < 0 \quad \text{und} \quad f''(x+h) > 0 \quad \text{ist;}$$

(Auch hier bedeutet h eine sehr kleine Größe.)

k) In einer Funktion $y = f(x)$ ist der **Mittelpunkt des Krümmungskreises** bestimmt durch die **Koordinaten**

$$\alpha = x - p\frac{1+p^2}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}\cdot p$$

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}$$

und der **Radius** durch die Formel

$$\varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q}.$$

Schlüssel für die Untersuchung der Kurven.

$$\mathbf{y = f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = +.}_{\text{Minimum}} \qquad \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -.}_{\text{Maximum}}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \infty$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Maximum}} \qquad \underbrace{\begin{Bmatrix} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Minimum}}$$

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = +.}_{\text{Konvex}} \qquad \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -.}_{\text{Konkav}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f''(x-h) > 0 \\ f''(x+h) < 0 \end{Bmatrix} \text{ oder } \begin{Bmatrix} f''(x-h) < 0 \\ f''(x+h) > 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Wendepunkt}}$$

Dreizehntes Kapitel.

Die Bildung der Differentialquotienten von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

86. Erklärungen.

Es sei eine Funktion von der Form

1) $$z = f(x, y)$$

gegeben. In ihr bedeuten im allgemeinen x und y die unabhängigen Variabeln und z die abhängige Variable.

Wir können in der Funktion 1) drei Fälle unterscheiden:

a) Ist x konstant und nur y veränderlich, dann stellt 1) eine Linie dar, die in einer Ebene liegt, welche der **zy-Ebene** des Koordinatensystems parallel ist.

b) Ist dagegen y konstant und x veränderlich, dann liegt die Linie, die die Funktion giebt, in der Ebene, die der **xz-Ebene** parallel ist.

c) Sind endlich x und y veränderlich, dann erhält man durch 1) eine Fläche, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird.

Um das klar zu legen, sei z. B.

$$z = 3x^2 + xy^2 + y^4.$$

Wir wollen zuerst annehmen, daß, wie in dem Fall b), nur x eine Veränderliche sei und y konstant; dann muß sich selbstverständlich auch z verändern. Will man den Differentialquotienten bilden, dann muß man sich bewußt bleiben, daß z sich **nur** in Beziehung auf x verändern soll. Man deutet das dadurch an, das man die Ableitung mit einem runden ∂ schreibt. Also $\frac{\partial z}{\partial x}$ statt $\frac{dz}{dx}$.

Man nennt $\frac{\partial z}{\partial x}$ die partielle Ableitung von z nach x oder den partiellen Differentialquotienten.

Differentiieren wir in diesem Sinne unser Beispiel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^2.$$

In gleicher Weise können wir die Funktion z auch nach y differentiieren; dann betrachtet man x als konstant. Also

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4y^3.$$

87. Ableitung der partiellen Differentialquotienten.

Bei der allgemeinen Ableitung der partiellen Differentialquotienten wollen wir uns der Ueberlegungen erinnern, die wir im vierten Kapitel anstellten. Es sei also

$$1) \qquad z = f(x, y).$$

Nehmen wir zuerst an, es sei nur x variabel und es wachse um die kleine Größe $\varDelta x$. Dann ergiebt sich

$$2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\varDelta x = 0} \cdot \frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x}.$$

Nimmt sodann in derselben Weise y um $\varDelta y$ zu, bei konstantem x, so ist

$$3) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\varDelta y = 0} \cdot \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y}.$$

Die Gleichungen 2) und 3) stellen also ganz allgemein die partiellen Ableitungen von z nach x und nach y dar.

Man pflegt die Gleichungen zuweilen noch in anderer Weise zu schreiben. Man bezeichnet nämlich die Größe, um die sich z ändert, wenn x um $\varDelta x$ zunimmt, häufig mit $\varDelta_x z$ und die Größe, um die sich z ändert, wenn sich y um $\varDelta y$ erweitert, mit $\varDelta_y z$. Man nennt dann $\varDelta_x z$ bezw. $\varDelta_y z$ die partielle Zunahme von z in Beziehung auf x resp. y. Verwenden wir diese Schreibart, so erhalten wir

4) $$z + \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) \quad \text{und}$$

5) $$z + \Delta_y z = f(x, y + \Delta y).$$

Subtrahieren wir nun von 4) und 5) die Gleichung 1), dann ergeben sich die Ausdrücke

6) $$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

und $$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Wir machen nun einen kleinen Kunstgriff und schreiben die Gleichungen 6) in der Form

7) $$\Delta_x z = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \cdot \Delta x,$$

$$\Delta_y z = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Nähern sich Δx und Δy der Grenze null, dann müssen auch $\Delta_x z$ und $\Delta_y z$ unendlich klein werden. Schreibt man

$$\Delta x = dx \quad \text{und} \quad \Delta y = dy,$$

dann sind auch

$$\Delta_x z = \partial_x z \quad \text{und} \quad \Delta_y z = \partial_y z.$$

Man bezeichnet solche Ausdrücke als **partielle Differentiale**.

Die Gleichungen 7) können nach diesen Auseinandersetzungen mit Berücksichtigung der Gleichungen 2) und 3) nun auch geschrieben werden

8) $$\partial_x z = \lim_{\Delta x = 0} \cdot \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \cdot \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx,$$

$$\partial_y z = \lim_{\Delta y = 0} \cdot \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Im vorstehenden haben wir die Fälle a) und b) aus Abschnitt 86 allgemein behandelt und in 8) die partielle Zunahme von z nach x resp. y erhalten. Wir wollen nun den Fall c) allgemein betrachten, in dem in der Funktion

$z = f(x, y)$ sich x und y zusammen um die kleinen Werte Δx und Δy verändern. Dann bezeichnet man die Aenderung von z als die **totale Zunahme** und schreibt sie Δz.

Es sei

$$1) \qquad z = f(x, y).$$

Es soll nun, wie bemerkt, x um Δx und y um Δy wachsen; dann ergiebt sich

$$9) \qquad z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Subtrahieren wir 1) von 9), dann ist

$$10) \qquad \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Verfahren wir nun mit diesem Ausdruck in derselben Weise, wie wir es in Abschnitt 24 bei Gleichung 58) (S. 43) thaten, so gelangen wir sofort zu der Form

$$11) \quad \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ + f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Um die Ausführungen besser überschauen zu können, wollen wir schreiben

$$y + \Delta y = u.$$

Dann geht 11) über in

$$12) \; \Delta z = f(x + \Delta x, u) - f(x, u) + f(x, y + \Delta y) - f(xy).$$

Ordnen wir nun 12) und dividieren und multiplizieren die entsprechenden Teile mit Δx und Δy, dann erhalten wir

$$13) \quad \Delta z = \frac{f(x + \Delta x, u) - f(x, u)}{\Delta x} \cdot \Delta x \\ + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Nähern sich Δx und Δy der Grenze null, dann geht Δz in dz über. Also

$$14)\quad dz = \lim_{\Delta x = 0} \cdot \frac{f(x+\Delta x, u) - f(x, u)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \lim_{\Delta y = 0} \cdot \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Wir setzen nun wieder $u = y + \Delta y$. Der Grenzwert $\lim \cdot u$ wird gleich y, daß für ihn somit $u = y$ ist. Wir schreiben ferner für $\Delta x = 0$, dx und für $\Delta y = 0$, dy.

Aus den Gleichungen 2) und 3) und dem Vorstehenden folgt

$$15)\ \lim_{\Delta x = 0} \cdot \frac{f(x+\Delta x, u) - f(x, u)}{\Delta x} = \frac{\partial (x, u)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

und

$$\lim_{\Delta y = 0} \cdot \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial (x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung 14) ein, dann haben wir die Formel für die gewünschte **totale Zunahme der Funktion**

$$16)\qquad \mathbf{dz} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

oder kürzer

$$16a)\qquad \mathbf{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Das **totale Differential** ist also der Summe der partiellen Differentiale gleich.

88. Beispiel.

Führen wir die vorstehenden Auseinandersetzungen an unserm Beispiel in Abschnitt 86 weiter aus. Wir hatten dort

$$z = 3x^2 + xy^2 + y^4$$

und $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^2; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4y^3.$

In die Gleichung 16a) eingefügt, ergiebt das
$$dz = (6x + y^2)dx + (2xy + 4y^3)dy.$$

89. Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen.

Es kommen in der Rechnung zuweilen auch Funktionen vor, in denen mehr als zwei unabhängige Variablen sich befinden, z. B.

17) $$z = f(r, s, t).$$

Um die Differentialquotienten für sie zu ermitteln, müssen die gleichen Ueberlegungen wie im Abschnitt 87 angestellt werden. Für Gleichung 17) erhält man dann

18) $$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds + \frac{\partial z}{\partial t}dt.$$

Der Satz zu 16a) ist also ein ganz allgemeiner Grundsatz: Das totale Differential ist immer (die Zahl der unabhängigen Variablen kann beliebig groß sein) gleich der Summe der partiellen Differentialquotienten.

90. Die höheren partiellen Differentialquotienten.

Wir wollen nochmals zu unserem Beispiel in Abschnitt 86 zurückkehren und an diesem speziellen Fall die Bildung der höheren partiellen Differentialquotienten zeigen. Es war
$$z = 3x^2 + xy^2 + y^4$$
und $$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4y^3.$$

Differentiieren wir nun nochmals und zwar den Ausdruck, den wir nach x differentiiert haben, nunmehr nach y und den anderen jetzt nach x. Dann ergiebt sich
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = 2y.$$

Aus diesem Beispiel erkennen wir, daß wir dasselbe Resultat erhalten, gleichgültig, ob wir eine Funktion erst nach x und dann nach y oder erst nach y und dann nach x differentiieren. Der Satz ist von **allgemeiner Bedeutung:** „Die Reihenfolge der partiellen Differentiation ist gleichgültig". Es ergiebt sich

$$\text{19)} \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Oder zusammengezogen

$$\text{19a)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}.$$

Nach dieser Vorbereitung ist die Ableitung für die zweite Differentiation nicht mehr schwer. Wir erhielten für

$$\text{1)} \qquad z = f(x, y):$$

$$\text{16a)} \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Setzen wir jetzt in 16) überall für z den Ausdruck **dz**, dann geht 16a) über in

$$\text{20)} \qquad d(dz) = \frac{\partial (dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy.$$

Entwickeln wir nun jeden der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite, indem wir einmal nach x und dann nach y differentiieren:

$$\text{21)} \qquad \frac{\partial (dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} dy$$

$$\frac{\partial (dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy.$$

Multiplizieren wir endlich, der Gleichung 20) entsprechend, von den vorstehenden Gleichungen die erste mit dx und die zweite mit dy und addieren, dann erhalten wir den Ausdruck

22) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy$$

und unter Verwendung von 20)

23) $$\mathbf{d^2 z} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy.$$

Wie man sieht, erscheint hier das Gesetz der Binomialkoeffizienten.

Vierzehntes Kapitel.

Entwickelung der Differentialquotienten für die nicht entwickelbaren Funktionen.

91. Allgemeines.

In Abschnitt 12 wurden wir mit Funktionen bekannt, die nicht nach der einen Variablen aufzulösen sind. Wir nannten sie unentwickelte oder implizite Funktionen. Man bezeichnet sie gewöhnlich mit

1) $F(x,y) = 0$; $f(x,y) = 0$; $\psi(x,y) = 0$ rc.

Wir wollen sie auch noch in dem folgenden speziellen Beispiel vorführen:

$$x^3 y + x^y - \sin(x+y) = 0.$$

Es soll nun gezeigt werden, wie man von ihnen die Differentialquotienten bilden kann, ohne sie auflösen zu müssen.

92. Bildung der Differentialquotienten der impliziten Funktionen.

Die Ableitung ist verhältnismäßig einfach mit Anlehnung an die Ausführungen des vorigen Kapitels durchzuführen.

Wir setzen

1) $$F(x,y) = 0.$$

Es ist also auch hier y eine Funktion von x, nur ist die Form, in der das Verhältnis zum Ausdruck kommen soll, nicht unmittelbar bekannt oder doch nur unter Schwierigkeiten zu entwickeln. Wir wollen daher den nachfolgenden Weg einschlagen, um dahinter zu kommen. Gehen wir von dem entsprechenden Ausdruck des vorigen Kapitels

2) $$z = F(u, v)$$

aus und nehmen an, daß auch u und v Funktionen von x seien, also z. B.

$$u = \varphi(x) \quad \text{und} \quad v = \psi(x).$$

Differentiieren wir 2), dann folgt

3) $$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Dividieren wir 3) durch dx, dann geht es über in

4) $$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Mit Verwendung von Gleichung 2) und indem wir für F(u, v) kurz F setzen, können wir nun wiederum diesen Ausdruck schreiben

5) $$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Nehmen wir für einen speziellen Fall an, es sei $u = x$, $v = y$ und $z = 0$ geworden, so vereinfachen sich die Ausdrücke, aus denen sich 5) aufbaut, in der folgenden Weise. Es geht über

6) $$z = F(u, v) \text{ in } F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \text{ in } \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\varrho v} \text{ in } \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\varrho v}{\partial x} \text{ in } \frac{\partial y}{\partial x}$$

Und endlich wird

7) $$\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

sowie $$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Fügen wir die Beziehungen von 6) und 7) in Gleichung 5) ein, dann geht sie nunmehr über in

8) $$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Daraus ergiebt sich der gesuchte erste Differentialquotient

9) $$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Häufig bedient man sich zur Aufstellung der Formel 9) einfacherer Ausdrücke für die partiellen Ableitungen. Man schreibt für
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_1(x,y)$$
und
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_2(x,y).$$

Die Ableitung nach der ersten Variablen x wird also mit F_1 und die Ableitung nach der zweiten Variablen y mit F_2 bezeichnet. Dann geht 9) über in

9a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}.$$

93. Beispiele.

1. Die Gleichung eines Kreises
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$
sei gegeben. Wie heißt der erste Differentialquotient?

Lösung. Die Gleichung des Kreises wird zuerst nach x und dann nach y differentiiert, wie es in Kapitel 13 auseinandergesetzt wurde:

$$\frac{\partial F(x^2+y^2-r^2)}{\partial x} = F_1(x^2+y^2-r^2) = 2x$$

und $$\frac{\partial F(x^2+y^2-r^2)}{\partial y} = F_2(x^2+y^2-r^2) = 2y.$$

Setzen wir diese Werte in 9) bezw. 9a) ein, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x^2+y^2-r^2)}{F_2(x^2+y^2-r^2)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

2. Es sei gegeben

$$\cos x - a\cos y = 0.$$

Bilden wir die partiellen Differentiale

$$F_1(\cos x - a\cos y) = -\sin x$$

$$F_2(\cos x - a\cos y) = a\sin y.$$

Daher $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(\cos x - a\cos y)}{F_2(\cos x - a\cos y)} = \frac{\sin x}{a\sin y}.$$

3. Es sei gegeben

$$x^3+y^3-3axy = 0.$$

Bilden wir die partiellen Differentiale

$$F_1(x^3+y^3-3axy) = 3x^2-3ay$$

und $$F_2(x^3+y^3-3axy) = 3y^2-3ax.$$

Somit $$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2-3ax}{3y^2-3ax} = -\frac{3(x^2-ay)}{3(y^2-ax)}$$

$$= \frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

4. Es sei gegeben

$$e^x - e^y + xy = 0.$$

Die partiellen Differentialquotienten sind

$$F_1(e^x - e^y + xy) = e^x + y$$
$$F_2(e^x - e^y + xy) = -e^y + x.$$

Daher $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + y}{e^y - x}.$$

5. Es sei gegeben

$$a^{x-y} - x^y = 0.$$
$$F_1(a^{x-y} - x^y) = a^{x-y} \cdot la - yx^{y-1}$$
$$F_2(a^{x-y} - x^y) = -a^{x-y} \cdot la - x^y \cdot lx.$$

Endlich $$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot la - y}{x \cdot l(ax)}.$$

94. Bildung der höheren Differentialquotienten der impliziten Funktionen.

Bedienen wir uns, um die Ausdrücke übersichtlich zu erhalten, der schon oben verwendeten Ausdrücke für die Differentialquotienten. Also

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r \text{ etc.}$$

Für den ersten Differentialquotienten erhielten wir die Formel $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)} = p.$$

Bedienen wir uns jetzt der Formel 16) aus dem Kap. 13, indem wir für $z = f(x,y)$ setzen und durch dx dividieren. Dieselbe erhält dadurch die Form

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{10}$$

oder kurz

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy}{dx}. \tag{10a}$$

Setzen wir für f den Ausdruck p, dann wird

11) $$\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dx}} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot p = \frac{\mathbf{d^2 y}}{\mathbf{dx^2}}.$$

Das ist aber der zweite Differentialquotient.

95. Beispiele.

1. Es sei gegeben

$$y^2 - 3ax = 0.$$

Bilden wir zuerst die ersten Differentiale

$$F_1(y^2 - 3ax) = -3a$$
$$F_2(y^2 - 3ax) = 2y.$$

Daher $$\frac{F_1(y^2 - 3ax)}{F_2(y^2 - 3ax)} = -\frac{-3a}{2y} = \frac{3a}{2y} = p.$$

Es muß nun $$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot p$$

gesucht werden. Es ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{3a}{2y}\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{3a}{2y}\right)}{\partial y} = -\frac{6a}{4y^2} = -\frac{3a}{2y^2}.$$

Also $$\frac{\partial p}{\partial y} \cdot p = -\frac{3a}{2y^2} \cdot \frac{3a}{2y} = -\frac{9a^2}{4y^3}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q = -\frac{9a^2}{4y^3}.$$

2. Bilden wir auch den zweiten Differentialquotienten für die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Im Abschnitt 93 erhielten wir bereits

$$F_1(x^2+y^2-r^2)=2x$$
$$F_2(x^2+y^2-r^2)=2y.$$

Also
$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{dy}{dx}=p=-\frac{x}{y}.$$

Wir haben also nur noch nötig, $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach der geschilderten Methode zu ermitteln.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot p.$$

Es ist
$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial\left(-\frac{x}{y}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial\left(-\frac{x}{y}\right)}{\partial x}=\frac{x}{y^2}.$$

Endlich das Produkt

$$\frac{\partial p}{\partial y}\cdot p=\frac{x}{y^2}\cdot-\frac{x}{y}=-\frac{x^2}{y^3}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=-\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}.$$

Der Leser möge für die Beispiele, die im Abschnitt 93 gegeben sind, nunmehr auch den zweiten Differentialquotienten bilden.

Fünfzehntes Kapitel.

Vertauschung der unabhängig veränderlichen Größen.

96. Erklärungen.

Zuweilen ist es für die Rechnung vorteilhaft, in einer Funktion $y=f(x)$ oder $f(x,y)=0$ die eine Veränderliche, z. B. x, durch eine andere Veränderliche t auszudrücken.

Besonders die technische und die wissenschaftliche Mechanik ist reich an Beispielen hierfür. Wir wollen untersuchen, wie in einem solchen Falle die Differentialquotienten zu bilden sind. In der Funktion

1) $$y = f(x) \quad \text{resp.} \quad f(x,y) = 0$$ sei

2) $$y = \varphi(t) \quad \text{und} \quad x = \psi(t).$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn x eine Funktion von t ist, auch y eine Funktion von t sein muß. Eliminiert man aus den Gleichungen 2) die Variable t, dann erhält man wiederum eine Gleichung zwischen y und x, nämlich

$$y = f(x).$$

97. Bestimmung der Differentialquotienten.

In den Gleichungen 2) soll sich t um den kleinen Wert Δt vermehren; dann werden, wie bekannt, auch x um Δx und y um Δy wachsen. Also

3) $$y + \Delta y = \varphi(t + \Delta t)$$ und

4) $$x + \Delta x = \psi(t + \Delta t).$$

Entwickeln wir diese Ausdrücke nach dem Taylorschen Satze

5) $$\begin{aligned} y + \Delta y &= \varphi(t + \Delta t) \\ &= \varphi(t) + \varphi'(t)\Delta t + \varphi''(t)\frac{\Delta^2 t}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} x + \Delta x &= \psi(t + \Delta t) \\ &= \psi(t) + \psi'(t)\Delta t + \psi''(t)\frac{\Delta^2 t}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

Subtrahieren wir von 5) und 6) die Gleichungen 2), dann folgt

7) $$\Delta y = \varphi'(t)\Delta t + \varphi''(t)\frac{\Delta^2 t}{2!} + \cdots$$ und

8) $$\Delta x = \psi'(t)\Delta t + \psi''(t)\frac{\Delta^2 t}{2!} + \cdots$$

In derselben Weise erhalten wir aus Gleichung 1)

9) $$\Delta y = f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta^2 x}{2!} + \cdots$$

Setzen wir nun in Gleichung 9), wie üblich,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

dann geht sie über in

$$10) \qquad \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta^2 x}{2!} + \dots$$

In Gleichung 10) fügen wir, um auf die neue Veränderliche t zu kommen, jetzt die Werte aus Gleichung 8) ein; dann erhalten wir den ein wenig umständlichen Ausdruck

$$11) \quad \Delta y = \frac{dy}{dx}\left\{\psi'(t)\Delta t + \psi''(t)\frac{\Delta^2 t}{2!} + \dots\right\} + \frac{d^2y}{2\cdot dx^2}\left\{\psi'(t)\Delta t + \psi''(t)\frac{\Delta^2 t}{2!} + \dots\right\}^2 + \dots$$

Multiplizieren wir 11) aus und ordnen entsprechend, so wird

$$12) \quad \Delta y = \frac{dy}{dx}\psi'(t)\Delta t + \left\{\psi''(t)\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}[\psi'(t)]^2\right\}\frac{\Delta^2 t}{2!} + \dots$$

In den Gleichungen 7) und 12) müssen für jedes Δt, $\Delta^2 t$ 2c. die entsprechenden Koeffizienten gleich sein. Diese Bemerkung führt zu den neuen Gleichungen

$$13) \qquad \frac{dy}{dx}\psi'(t) = \varphi'(t) \qquad \text{und}$$

$$14) \qquad \frac{dy}{dx}\psi''(t) + \frac{d^2y}{dx^2}[\psi'(t)]^2 = \varphi''(t).$$

Lösen wir 13) nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so haben wir den **ersten Differentialquotienten**

$$15) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Lösen wir 14) nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf und setzen den Wert von 15) ein, dann ergiebt sich der zweite Differentialquotient

16) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^3}.$$

98. Andere Formen der Differentialquotienten.

Gehen wir wiederum von den beiden Gleichungen 2) aus

$$y = \varphi(t) \quad \text{und} \quad x = \psi(t).$$

Bilden wir die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = \psi'(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t) \quad \text{und} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \psi''(t).$$

Setzen wir sie in die Gleichungen 15) und 16) ein. Wir gelangen dann zu den neuen Formeln

15a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ und

16a) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Verwenden wir endlich die Bezeichnungsweise

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dy^2}{dx^2} = q$$

und ziehen die Gleichungen 15a) und 16a) je für sich zusammen; dann können wir diesen Formeln noch die nachstehenden Formen geben

15b) $$p = \frac{dy}{dx}$$ und

16b) $$q = \frac{d^2y \cdot dx - dy\,dx^2}{dx^3}.$$

99. Beispiele.

1. Es sei eine Funktion gegeben
$$y = x \operatorname{tang} \alpha.$$

Im Laufe der Rechnung ergiebt sich, daß es vorteilhaft sei, eine neue Veränderliche einzuführen. Man setzt daher
$$x = t \cos \alpha \quad \text{und} \quad y = t \sin \alpha.$$

Bilden wir nun nach 15a) und 16a) die Differentialquotienten
$$\frac{dy}{dt} = \sin \alpha; \quad \frac{dx}{dt} = \cos \alpha.$$

Also
$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tang} \alpha.$$

2. Für die Koordinaten x und y sollen gesetzt werden
$$x = \frac{2t}{1+t} \quad \text{und} \quad y = \frac{1-t}{1+t}.$$

Bilden wir die Differentialquotienten
$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t) \cdot 2 - 2t}{(1+t)^2} = \frac{2 + 2t - 2t}{(1+t)^2} = \frac{2}{(1+t)^2}.$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2} = \frac{-2}{(1+t)^2}.$$

Daher
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2}{2} = -1.$$

3. Es sei
$$y = a(1 - \cos t); \quad x = a(t - \sin t).$$

Die Differentialquotienten
$$\frac{dy}{dt} = a \cdot \sin t; \quad \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t).$$

Somit
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cdot \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Beachten wir, daß
$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$
und
$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$
ist,

dann wird
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2}.$$

Der zweite Differentialquotient nach Formel 16b). Dazu bilden wir uns noch
$$\frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t \quad \text{und} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \sin t.$$

Daher
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2(\cos t - 1)\, dt^3}{a^3(1 - \cos t)^3\, dt^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

Dritter Teil.

Die Integralrechnung.

Sechzehntes Kapitel.

Die Integralformeln.

100. Erklärungen.

Die Integralrechnung ist das Umgekehrte der Differentialrechnung. Ist z. B. das Differential von x^3, wie wir wissen, gleich $3x^2dx$, so ist das Integral von $3x^2dx$ wiederum x^3. Die beiden Operationen des Differentiierens und Integrierens heben sich somit gegenseitig auf. Um anzudeuten, daß zu einem Differential das Integral gesucht werden soll, stellt man vor den Differentialausdruck das Zeichen $\int$, welches von Leibniz eingeführt worden ist und ein langgezogenes S darstellen soll. Später werden wir in der That sehen, daß man ein Integral als eine Summe betrachten kann. In mathematischen Zeichen stellt sich nun unser Beispiel so dar:

$$d \cdot (x^3) = 3x^2dx$$
$$\int 3x^2dx = x^3,$$

oder ganz allgemein

Ist $$d \cdot f(x) = f'(x)dx,$$
dann ergiebt $$\int f'(x)\,dx = f(x).$$

Die Aufgabe der Integralrechnung besteht also darin, zu einem Differential die ursprüngliche Funktion zu finden.

Das geschieht dadurch, daß man sich der in der Tafel der Differentialquotienten auf Seite 56 zusammengestellten Formeln bedient. Ein Beispiel mag das erläutern.

Es soll das Differential von

1) $$y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

ermittelt werden.

Es ist $$\frac{dy}{dx} = \frac{(m+1)x^m}{m+1} = x^m.$$

Das ergiebt

2) $$dy = x^m \cdot dx.$$

Diese Lösung giebt uns die Tafel der Differentialquotienten, Formel 3. Also ist umgekehrt

3) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Sei, um es noch zu erleichtern, $m = 3$; dann wird

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}x^4.$$

Wir können die vorstehende Aufgabe auch in eine leichte Regel kleiden. Das Integral aus einer Potenz ist gleich einer Potenz von der gleichen Basis und dem um eins vermehrten Exponenten, dividiert durch diesen neuen Exponenten. Wir wollen diesen Fall noch näher untersuchen. Es sei eine Funktion

4) $$y = x^2 + 4$$

gegeben. Differentiieren wir

5) $$dy = 2x dx.$$

Das Differential der 4 ist null; denn, wie wir wissen, ist das Differential einer jeden konstanten Zahl gleich null.

Wir wollen nun durch Integration aus 5) den ursprünglichen Ausdruck zu erhalten suchen.

6) $$\int 2x\,dx = \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

Wie wir sehen, fehlt die Konstante 4. Man erhält also durch die Integration mit Hilfe der Formeln die Konstanten nicht unmittelbar. Man muß daher zu jeder Integration ein allgemeines konstantes Glied hinzufügen. Wir werden später sehen, wie man die bestimmte Konstante zu ermitteln vermag. Somit müssen wir jetzt für 6) schreiben

6a) $$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

C bedeutet die Konstante.

Auch die allgemeine Formel in 3) muß übergehen in

3a) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Stellen wir uns nun zunächst zur Uebung die wichtigsten Integralformeln zusammen. (Vergleiche Seite 56.)

101. Formeln für die Integration.

1) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

3) $$\int e^x \cdot dx = e^x + C.$$

4) $$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{la} + C.$$

5) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

6) $$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C.$$

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

10) $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C.$$

11) $$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C.$$

12) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C.$$

102. Einige allgemeine Integrationssätze.

Die Ausführung der Integration wird wesentlich erleichtert durch die Kenntnis einiger Sätze von allgemeiner Bedeutung, die wir vorausschicken wollen.

a) Wenn das Differential unter dem Integralzeichen mit einem konstanten Faktor behaftet ist, dann kann man ihn immer **vor** das Integralzeichen stellen. Also

7) $$\int a f'(x) dx = a \int f'(x) dx.$$

Oder ein praktischer Fall:

$$\int 4x^2 dx = 4 \int x^2 dx.$$

b) Soll eine Anzahl von Differentialen integriert werden, die durch += oder −=Zeichen miteinander verbunden sind, dann bestimmt man die Integrale der einzelnen Differentiale. Also

8) $$\int \{F'(x)dx + f'(x)dx - \varphi'(x)dx\}$$
$$= \int F'(x)dx + \int f'(x)dx - \int \varphi'(x)dx.$$

Ein spezielles Beispiel:

$$\int\{4x^2dx + \sin x\,dx\} = 4\int x^2dx + \int \sin x\,dx$$
$$= \frac{4x^3}{3} - \cos x + C.$$

103. Uebungen.

Wir wollen das bisher Vorgetragene an Beispielen einüben. Wir werden jedoch bei dieser Gelegenheit zur Erkenntnis einiger Sätze gelangen, denen eine allgemeine Bedeutung zukommt.

1) $\int 6x^4dx = \frac{6x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{6x^5}{5} + C.$

2) $\int \sqrt[3]{x}\cdot dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C.$

$$= {}^3/_4 x^{4/3} + C = {}^3/_4 \sqrt[3]{x^4} + C.$$

3) $\int 5x^3dx = 5\int x^3dx = 5\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} = {}^5/_4 x^4 + C.$

4) $\int \frac{2}{3x^5}dx = {}^2/_3\int\frac{1}{x^5}dx = {}^2/_3\int x^{-5}dx$

$$= {}^2/_3\frac{x^{-5+1}}{-4} + C = -{}^1/_6 x^{-4} + C = -\frac{1}{6x^4} + C.$$

5) $\int x^{-1}\cdot dx = \int\frac{dx}{x} = lx + C.$

Die Aufgabe 5) führt auf einen solchen allgemein wichtigen Fall. Zunächst sieht man, daß die Integralformel (siehe 101 Seite 148) 1) in 2) übergeht, wenn der Exponent $m = -1$ wird. Das giebt die Regel:

c) Ist der Zähler eines Bruches das Differential des Nenners, dann ist sein Integral dem natürlichen Logarithmus des Nenners gleich, z. B.

6) $$\int\frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C.$$

Denn differentiieren wir $1+x$, so erhalten wir dx; also ist hier der Zähler das Differential des Nenners. In gleicher Weise wird

7) $$\int \frac{dx}{x-a} = l \cdot (x-a) + C.$$

8) $$\int \left\{ x^3 - 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right\} dx$$

$$= \int x^3\,dx - 7\int \sqrt{x}\,dx - 11\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} + 5\int \frac{dx}{x^6}$$

$$= \int x^3\,dx - 7\int x^{1/2}\,dx - 11\int x^{-5/3}\,dx + 5\int x^{-6}\,dx.$$

Integrieren wir einzeln nach der Reihe

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$7\int x^{1/2}\,dx = 7 \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{7x^{3/2}}{3/2} = {}^{14}/_3\sqrt{x^3} + C.$$

$$11\int x^{-5/3}\,dx = 11 \cdot \frac{x^{-5/3+1}}{-5/3+1} = \frac{11 \cdot x^{-2/3}}{-2/3} = -\frac{33}{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + C.$$

$$5\int x^{-6}\,dx = 5 \cdot \frac{x^{-6+1}}{-6+1} = \frac{5 \cdot x^{-5}}{-5} = -x^{-5} = -\frac{1}{x^5} + C.$$

Ziehen wir die Ausdrücke zusammen, dann ergiebt das Gesamtintegral

$$\int \left\{ x^3 - 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right\} dx$$

$$= {}^{1}/_{4}x^4 - {}^{14}/_{3}\sqrt{x^3} + \frac{33}{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5} + C.$$

In C sind natürlich alle einzelnen Konstanten enthalten.

9) $\int\left\{3x^5+\cos x-e^x\right\}dx$
$$=\int 3x^5\,dx+\int\cos x\,dx-\int e^x\,dx$$
$$3\int x^5\,dx=\frac{3x^6}{6}={}^1\!/_2\,x^6+C$$
$$\int\cos x\,dx=\sin x+C$$
$$\int e^x\,dx=e^x+C.$$
Daher
$$\int\left\{3x^5+\cos x-e^x\right\}dx={}^1\!/_2\,x^6+\sin x-e^x+C.$$

104. Erleichterung der Integration durch Substitution.

Nicht immer erscheinen die Differentiale in so übersichtlicher Form wie bisher, daß man sofort das Integral finden kann. Man muß sich dann dadurch helfen, daß man durch eine geschickte **Substitution** das Differential so umformt, daß es einer Integralformel entspricht. Auch hier wollen wir an Beispielen das Gesagte klarzumachen suchen.

105. Beispiele.

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+bx}=?$

Um eine bekannte Form hervortreten zu lassen, schreiben wir
$$u=a+bx.$$
Dann ist $\quad du=b\,dx\quad$ und $\quad dx=\dfrac{du}{b}.$

Setzen wir die neuen Werte ein, dann geht unser Integral über in
$$\int\frac{dx}{a+bx}=\int\frac{1}{b}\cdot\frac{du}{u}=\frac{1}{b}\int\frac{du}{u}$$
$$=\frac{1}{b}\,l\cdot u=\frac{1}{b}\cdot l(a+bx)+C.$$

2) Der Leser erweise nach gleicher Methode, daß

$$\int \frac{n x\,dx}{a+bx^2} = \frac{n}{2b}\,l(a+bx^2) \text{ ist.}$$

3) $\int e^{ax}\,dx = ?$

Man setzt $\quad u = ax; \quad x = \frac{u}{a}.$

Differentiiert $\quad dx = \frac{du}{a}.$

Eingesetzt

$$\int e^{ax}\,dx = \int \frac{e^u \cdot du}{a} = \frac{1}{a}\int e^u\,du = \frac{1}{a}e^u + C = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

4) $\int \cos ax\,dx = ?$

Man setzt $\quad ax = u; \quad x = \frac{u}{a}; \quad dx = \frac{du}{a}.$

Also $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\cdot \sin u + C$

$$= \frac{1}{a}\sin ax + C.$$

5) $\int \sin(a+bx)\,dx = ?$

Gesetzt $\quad a+bx = u; \; x = \frac{u-a}{b}; \; dx = \frac{b\,du}{b^2} = \frac{du}{b}$?

Daher $\int \sin(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\int \sin u \cdot du$

$$= -\frac{1}{b}\cos u + C = -\frac{1}{b}\cos(a+bx) + C.$$

6) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = ?$

In diesem Falle ist es praktisch, für x den Wert au einzuführen. Also

$$x = au; \quad dx = a\,du.$$

Eingesetzt
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a\,du}{a^2+a^2u^2}$$
$$=\int\frac{a\,du}{a^2(1+u^2)}$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}.$$

Nach Formel 10) unserer Integraltafel S. 149 ist aber
$$\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arc\,tang}u+C.$$

Daher
$$\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arc\,tang}u+C.$$

Setzen wir jetzt die alten Werte wieder ein
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

7) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=?$

Bedenken wir, daß man schreiben kann
$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{2a}{x^2-a^2}.$$

Daher
$$\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{2a}{2a(x^2-a^2)}dx=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx.$$

Setzen wir die Werte ein
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}dx.$$

Nun ist
$$\int\frac{dx}{x-a}=l(x-a)$$

und
$$\int\frac{dx}{x+a}=l(x+a).$$

Das eingefügt ergiebt

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\{l(x-a) - l(x+a)\} + C,$$

und mit Anwendung der logarithmischen Regeln,

$$= \frac{1}{2a} l\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C.$$

8) $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Setzen wir wiederum

$$x = au; \quad u = \frac{x}{a}; \quad dx = a\,du.$$

Somit

$$\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 du}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} = \int \frac{a^2 du}{a\sqrt{1-u^2}} = a\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Nach der Formel 9) der Integraltafel Seite 149 ist

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$$

Also
$$\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

9) $\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = ?$

Wir setzen

$$a^2 + x^2 = u; \quad 2x\,dx = du; \quad x\,dx = \frac{du}{2}.$$

In 9) eingefügt ergiebt

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = {}^1\!/_2 \int \frac{du}{u}$$
$$= {}^1\!/_2\, l u + C$$
$$= {}^1\!/_2\, l(a^2 + x^2) + C.$$

10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Setzen wir in diesem Falle

$$\sqrt{a^2 - x^2} = u; \quad a^2 - x^2 = u^2.$$

Daher

$$2udu = -2xdx; \qquad xdx = -\frac{2udu}{2} = -udu.$$

Fügen wir ein

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{udu}{u} = -\int du$$
$$= -u + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Möge in der gleichen Weise der Leser zur Uebung beweisen, daß

11) $\int \frac{axdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -a\sqrt{a^2 - x^2} + C$ und

12) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} + C$ sei.

13) $\int \frac{dx}{x} \cdot lx = ?$

Man setzt $lx = u$; dann ist $\frac{dx}{x} = du$.

Gerade aus diesem Beispiel kann man gut ersehen, wie reifliche Ueberlegung zu einer geschickten Substitution führt!

Eingefügt $\int \frac{dx}{x} lx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C$

$$= \frac{1}{2}(lx)^2 + C.$$

14) Der Leser beweise noch, daß

$$\int \frac{dx}{xlx} = l \cdot (lx) + C$$ ist.

106. Die Integrale einiger trigonometrischen Funktionen.

Von den nachfolgenden zusammengesetzten trigonometrischen Ausdrücken wollen wir die Integrale bestimmen.

1) $\int \sin x \cdot \cos x dx = ?$

Setzen wir $\sin x = u$, dann ist $\cos x dx = du$. Eingesetzt

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

2) $\int \operatorname{tang} x dx = ?$

Wir setzen zunächst

$$\int \operatorname{tang} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Nun ist, wenn wir $\cos x = u$ setzen, $du = -\sin x dx$. Daher

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -lu + C$$
$$= -l \cos x + C.$$

3) $\int \cot x dx = ?$

Wir schreiben

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}.$$

Setzen wir hier $\sin x = u$, dann wird $\cos x dx = du$. Also

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = lu + C$$
$$= l \sin x + C.$$

4) $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = ?$

Bekanntlich lehrt die Trigonometrie, daß

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ist. Wir dürfen daher unsern Ausdruck auch so schreiben:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin x \cdot \cos x}.$$

Trennen wir den Ausdruck, so wird

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \operatorname{tang} x\, dx + \int \cot x\, dx$$

$$= -\,l(\cos x) + l(\sin x)$$

$$= l\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= l(\operatorname{tang} x) + C.$$

5) $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Um den vorstehenden Ausdruck bequem integrieren zu können, setzt man am besten

$$x = 2u; \quad \text{daher} \quad dx = 2\,du$$

und $$\sin x = \sin 2u.$$

Es ist $$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Also $$\sin x = \sin 2u = 2 \sin u \cdot \cos u.$$

Setzen wir ein

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\,du}{2 \sin u \cdot \cos u} = \int \frac{du}{\sin u \cdot \cos u} = l \operatorname{tang} u + C.$$

Also
$$\int \frac{dx}{\sin x} = l\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + C$$
oder auch
$$= -l\left\{\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + C.$$

6) $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$

Wir können mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung
$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
dieses Integral auf das vorige zurückführen. Also
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$

Setzen wir nun
$$\frac{\pi}{2} - x = u \quad \text{und} \quad du = -dx,$$
dann wird
$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{\sin u} + C$$
$$= -l\left[\operatorname{tang}\left(\frac{u}{2}\right)\right] + C$$
$$= -l\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] + C$$
$$= l\left[\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] + C.$$

107. Die Integration rationaler gebrochener Funktionen.

Die gebrochenen rationalen Funktionen zerfallen in echt und unecht gebrochene Funktionen. In den ersteren ist der Grad des Zählerausdruckes niedriger als der Grad des Nenners. Die unecht gebrochenen rationalen Funktionen zeigen das umgekehrte Verhältnis. Es ist z. B.

$\frac{3x+4}{x^2+4x-2}$ eine echt gebrochene rationale Funktion,

$\frac{x^3+8x^2+12x-6}{x^2+x-2}$ eine unecht gebrochene rationale Funktion.

Die Algebra lehrt, daß sich eine jede unecht gebrochene rationale Funktion stets in eine echt gebrochene rationale Funktion, vermehrt um eine ganze Funktion, verwandeln läßt.

Es ist, um das auszuführen, nur nötig, mit dem Nenner der Funktion in den Zähler zu dividieren. Wir wollen das an unserem Beispiele zeigen:

$$\begin{array}{l} x^3+8x^2+12x-6 : x^2+x-2 = x+7 \\ \underline{x^3+x^2-2x} \\ 7x^2+14x-6 \\ \underline{7x^2+7x-14} \\ 7x+8. \end{array}$$

Wir haben also

$$\frac{x^3+8x^2+12x-6}{x^2+x-2} = x+7+\frac{7x+8}{x^2+x-2}.$$

Es ist also nur notwendig, noch Methoden zu suchen, mit deren Hilfe es möglich wird, echt gebrochene rationale Funktionen zu integrieren.

Wir wollen die Integration einer gebrochenen rationalen Funktion zunächst an einem ganz einfachen Beispiel vorführen. Es soll bestimmt werden

$$\int\frac{(x^4-6x^3+13x^2-10x+3)dx}{x-2} = ?$$

Trennen wir durch Division die ganze Funktion von der echt gebrochenen

$$
\begin{array}{l}
x^4-6x^3+13x^2-10x+3 : x-2 = x^3-4x^2+5x+\dfrac{3}{x-2} \\
\underline{x^4-2x^3} \\
\quad -4x^3+13x^2 \\
\quad \underline{-4x^3+\ \ 8x^2} \\
\qquad\qquad 5x^2-10x \\
\qquad\qquad \underline{5x^2-10x} \\
\qquad\qquad\qquad +3.
\end{array}
$$

Das gegebene Integral zerfällt somit in eine Reihe von Integralen

$$\int\frac{(x^4-6x^3+13x^2-10x+3)dx}{x-2}$$
$$= \int x^3dx - \int 4x^2dx + \int 5xdx + \int\frac{3dx}{x-2}.$$

Mit Hilfe der vorgetragenen Methoden ergiebt sich

$$\int x^3dx - 4\int x^2dx + 5\int xdx + 3\int\frac{dx}{x-2}$$
$$= {}^1/_4 x^4 - {}^4/_3 x^3 + {}^5/_2 x^2 + 3 \cdot l(x-2) + C.$$

Die Integration des Bruches ergab sich hier unmittelbar aus der schon früher ermittelten Form. Der Bruch ist aber in den meisten Fällen nicht so einfach und muß dann in Partialbrüche zerlegt werden. Diese Operationen verlangen oft umfangreiche algebraische Untersuchungen. Die Integration rationaler gebrochener Funktionen nimmt daher in größeren mathematischen Werken einen recht bedeutenden Raum ein. Wir können uns hier nur mit den einfachsten Fällen beschäftigen.

108. Untersuchung einer echt gebrochenen rationalen Funktion, in der der Nenner ein Ausdruck zweiten Grades ist.

Schon im vorigen Abschnitt traten uns solche Ausdrücke in der Form, z. B. $\frac{7x+8}{x^2+x-2}$ entgegen. Allgemein erscheint der Ausdruck in der Form

1) $$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}$$

Der Ausdruck 1) soll in Partialbrüche zerlegt werden. Zu dem Zwecke bestimmen wir die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 2ax + b$. Sie seien $x_1 = \alpha$; $x_2 = \beta$. Wir können daher nach den Regeln der Algebra schreiben

$$x^2 + 2ax + b = (x - \alpha)(x - \beta). \tag{2}$$

Sind die Wurzeln unserer Gleichung reell, dann ist

$$\frac{mx + n}{x^2 + 2ax + b} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}. \tag{3}$$

Die beiden Brüche rechts sind die Partialbrüche, die wir zu bestimmen haben. Das geschieht bekanntlich leicht durch Multiplikation. Multiplizieren wir Gleichung 3) zuerst mit $x - \alpha$:

$$\frac{(mx + n)(x - \alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A(x - \alpha)}{x - \alpha} + \frac{B(x - \alpha)}{x - \beta}. \tag{4}$$

Fassen wir 4) zusammen:

$$\frac{mx + n}{x - \beta} = A + \frac{B(x - \alpha)}{x - \beta}. \tag{5}$$

Setzen wir nun (zur Ermittelung von A) $x = \alpha$, dann ergiebt sich

$$A = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta}. \tag{6}$$

Zur Feststellung von B verfahren wir in der entsprechenden Weise. Also

$$\frac{mx + n}{x - \alpha} = \frac{A(x - \beta)}{x - \alpha} + B. \tag{7}$$

Wird nun $x = \beta$, dann ergiebt sich

$$B = \frac{m\beta + n}{\beta - \alpha} \tag{8}$$

oder

$$= -\frac{m\beta + n}{\alpha - \beta}.$$

Werden die Ausdrücke für A und B in die Gleichung 3) eingesetzt, so ist endlich

$$9)\qquad \frac{mx+n}{x^2+2ax+b} = \frac{\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}}{x-\alpha} - \frac{\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}}{x-\beta}.$$

Die beiden Brüche rechts setzen jetzt der Integration keine Schwierigkeiten mehr entgegen.

Wir wollen das ausführen:

$$10)\qquad \int\frac{(mx+n)dx}{x^2+2ax+b}$$

$$= \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\alpha} - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\beta}$$

$$= \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}l(x-\alpha) - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}l(x-\beta).$$

109. Beispiele.

Wir wollen diese allgemeinen Betrachtungen an speziellen Beispielen noch klarer zu machen suchen. Das Integral von $\frac{7x+8}{x^2+x-2}$ soll bestimmt werden.

$$\int\frac{(7x+8)dx}{x^2+x-2} = ?$$

Nach der allgemeinen Anleitung müssen zuerst die Wurzeln der Gleichung

$$x^2+x-2=0$$

ermittelt werden. Wir finden

$$x_1 = \alpha = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \beta = -2.$$

Das ergiebt weiter

$$\frac{7x+8}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

und

$$\frac{7x+8}{x+2} = A + \frac{B(x-1)}{x+2}.$$

Setzen wir jetzt $x = 1$, dann ergiebt sich

$$A = \frac{7+8}{1+2} = \frac{15}{3} = 5.$$

Führen wir die gleiche Rechnung für B durch:

$$\frac{7x+8}{x-1} = \frac{A(x+2)}{x-1} + B.$$

Da $x = -2$ wird, so folgt

$$B = \frac{-14+8}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Setzen wir ein:

$$\int \frac{(7x+8)dx}{x^2+x-2} = \int \frac{5\,dx}{x-1} + \int \frac{2\,dx}{x+2}$$
$$= 5\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= 5 \cdot l(x-1) + 2 \cdot l(x+2) + C.$$

Mag der Leser beweisen, daß

$$\int \frac{(2x+6)dx}{2x^2+3x+1} = 5\,l(x+{}^1/_2) - 4\,l \cdot (x+1) + C \text{ ist.}$$

Siebzehntes Kapitel.

Die teilweise Integration. Formeln.

110. Erklärung.

Die partielle oder teilweise Integration ermöglicht es, in vielen Fällen eine schwierige Integration auf eine einfache zurückzuführen. Man kann deshalb mit ihrer Hilfe nicht nur komplizierte Aufgaben verhältnismäßig leicht lösen, sondern durch sie auch Formeln erhalten, die zusammengesetzte Formen vereinfachen.

111. Entwickelung.

Es seien

1) $$u = f(x); \quad v = \varphi(x)$$

zwei beliebige Funktionen von x. Wir wissen dann aus der Differentialrechnung, daß die Beziehung gilt

2) $$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

Integrieren wir, dann ist

3) $$uv = \int u\,dv + \int v\,du.$$

Daher auch

4) $$\boldsymbol{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Wie wir aus dieser Umformung ersehen, stellt sich uns die partielle Integration als ein sehr geschickter Kunstgriff dar. Die folgenden Beispiele mögen das klar machen.

112. Beispiele.

1. $\boldsymbol{\int x e^x\,dx = ?}$

Setzen wir

$$x = u \quad \text{und} \quad e^x\,dx = dv,$$

so wird nach Formel 4) in 111

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x\,dx &= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \\ &= x \cdot e^x - e^x \\ &= e^x(x-1) + C. \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{\int lx \cdot dx = ?}$

Es sei $\quad u = lx \quad \text{und} \quad dx = dv.$

Also ist
$$\begin{aligned} \int lx\,dx &= (lx) \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} \\ &= x(lx) - \int dx \\ &= xl(x) - x \\ &= x(l[x] - 1). \end{aligned}$$

3. $\int \mathbf{x^2\,lx\,dx = ?}$

Setzen wir $u = l(x)$; $dv = x^2dx$.

Also $$\int lx \cdot x^2dx = lx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x}$$
$$= lx \cdot \frac{x^3}{3} - {}^1/_3 \int x^2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} \cdot lx - {}^1/_3 \frac{x^3}{3}$$
$$= \frac{x^3}{3}(lx - {}^1/_3).$$

4. $\int \mathbf{x \cdot e^{mx}\,dx = ?}$

Wir schreiben $u = x$; $e^{mx}\,dx = dv$.

Also $$\int x \cdot e^{mx}\,dx = x \cdot \frac{1}{m}\,e^{mx} - \int \frac{e^{mx}}{m}\,dx$$
$$= x \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \frac{1}{m}\int e^{mx}\,dx.$$

Da $$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m} \cdot e^{mx}$$ ist,

so wird $$\int x \cdot e^{mx}\,dx = x \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \frac{1}{m^2} \cdot e^{mx}$$
$$= \frac{e^{mx}}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right).$$

5. $\int \mathbf{x \cdot \cos x\,dx = ?}$

Es sei $u = x$ und $\cos \cdot x dx = dv$.

Dann ist
$$\int x \cdot \cos x\,dx = x\ \sin x - \int x \sin x\,dx.$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x.$$

Somit $$\int x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x.$$

113. Erweiterte Beispiele.

Nicht selten kommt es vor, daß man die Methode der teilweisen Integration mehrmals wiederholen muß, bis die Integrale auf so einfache Formen gebracht sind, daß man das Schlußintegral unmittelbar hinschreiben kann. In einem solchen Falle wird natürlich das Resultat durch eine Anzahl von Ausdrücken dargestellt werden. Auch das mag durch Beispiele seine Erläuterung finden.

1. $\int x^3 \cdot e^x \, dx = ?$

Setzen wir $u = x^3$ und $e^x \, dx = dv$.

Es ist dann

$$\begin{aligned}\int x^3 \cdot e^x \, dx &= x^3 \cdot e^x - \int e^x \cdot 3x^2 \, dx \\ &= x^3 \cdot e^x - 3\int x^2 \cdot e^x \cdot dx.\end{aligned}$$

Wir behandeln nun das vereinfachte Integral

$$-3\int x^2 \cdot e^x \, dx = -3x^2 \cdot e^x + 2 \cdot 3\int x \cdot e^x \, dx$$

und wiederum

$$+2 \cdot 3\int x \cdot e^x \, dx = +2 \cdot 3 \cdot x \cdot e^x - 2 \cdot 3\int e^x \, dx.$$

Endlich $\quad -2 \cdot 3\int e^x \, dx = -2 \cdot 3 \cdot e^x.$

Durch Addition ergiebt sich nun

$$\begin{aligned}\int x^3 \cdot e^x \, dx &= x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 2 \cdot 3x \cdot e^x - 2 \cdot 3e^x \\ &= e^x\{x^3 - 3x^2 + 2 \cdot 3x - 2 \cdot 3\}.\end{aligned}$$

2. $\int x^2 \cos x \, dx = ?$

Wir schreiben $x^2 = u$; $\cos x \, dx = dv$.

Daher $\quad \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x \cdot dx$

$$-2\int x \cdot \sin x \, dx = 2x\cos x - 2\int \cos x \, dx$$

$$-2\int \cos x \, dx = -2\sin x.$$

Addiert

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x$$
$$= \sin x (x^2 + 2x \cot x - 2).$$

3. $\int \cos^2 x dx = ?$

Wir wollen in diesem Falle unser Integral schreiben

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x \cdot dx.$$

Es wird $\cos x = u$ und $\cos x\, dx = dv$.

Also

$$\int \cos x \cdot \cos x \cdot dx = \cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x\, dx$$
$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \cdot dx.$$

Man kann nun setzen

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Dann wird

$$\int \cos^2 x\, dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx$$
$$= \cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \cos^2 dx.$$

Bringen wir nun den negativen Ausdruck auf die linke Seite, so haben wir

$$2 \int \cos^2 x\, dx = \cos x \cdot \sin x + \int dx$$

und $$\int \cos^2 x dx = \tfrac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \tfrac{1}{2} \int dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{x}{2} = \tfrac{1}{2} (\cos x \cdot \sin x + x).$$

4. In der gleichen Weise möge der Leser zeigen, daß

$$\int \sin^2 x dx = -\tfrac{1}{2} (\sin x \cdot \cos x - x)$$ ist.

5. $\int \sin^2 x dx + \int \cos^2 x dx = ?$

Der Wert des Integrals läßt sich sofort durch Addition der Beispiele 3) und 4) feststellen. Aber auch durch eine sehr leichte Betrachtung. Denn

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx &= \int (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx \\ &= \int dx \\ &= x.\end{aligned}$$

6. $\int \textbf{arc}\,\mathbf{sin}\,\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = ?$

Wir setzen

$$u = \operatorname{arc}\sin x \quad \text{und} \quad dv = dx.$$

$$\int \operatorname{arc}\sin x\,dx = x \cdot \operatorname{arc}\sin x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Denn nach Formel 14 der Tafel der Differentialquotienten auf Seite 56 ist

$$d(\operatorname{arc}\sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ haben wir bereits ermittelt. Wir fanden in Abschnitt 105, Aufgabe 10

$$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Setzen wir hier $a = 1$, dann wird

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Alles eingefügt giebt

$$\int \operatorname{arc}\sin x\,dx = x \cdot \operatorname{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}.$$

7. In gleicher Weise läßt sich erweisen

$$\int \textbf{arc}\,\mathbf{cos}\,\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = x \cdot \operatorname{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

8. $\int \textbf{arc}\,\mathbf{tang}\,\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x - \frac{1}{2}\,l(1+x^2) + C.$

114. Reduktionsformeln.

Mit Hilfe der Methode der teilweisen Integration wollen wir nun noch eine Anzahl von Formeln entwickeln, die für die späteren Rechnungen von Vorteil sein werden.

Unsere sämtlichen Integralentwickelungen, die wir bisher ausführten, sind nicht nur willkürliche Aufgaben zur Uebung, sondern sie geben uns zugleich einen Formelschatz, der zu jeder etwas komplizierten Aufgabe herangezogen werden muß. Wir wollen ihn am Schluß dieses Kapitels übersichtlich in Tabellenform zusammenstellen.

115. Erste Reduktionsformel.

Es soll bewiesen werden

$$\text{I)} \int \frac{x^{n+1} \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^n}{n+1} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{na^2}{n+1} \int \frac{x^{n-1} \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ableitung. Wir setzen

$$\text{1)} \qquad \int \frac{x^{n+1} \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x^n \cdot \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Sei nun in diesem Ausdruck

$$u = x^n; \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{und} \quad v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

dann ist

$$\text{2)} \int x^n \cdot \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^n \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \int n x^{n-1} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Den letzten Ausdruck müssen wir noch umformen. Wir wollen zu dem Zwecke den Wert unter dem Integralzeichen und zwar Zähler und Nenner mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ multiplizieren. Dann ergiebt sich

$$\text{3)} \; -n x^{n-1} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{na^2 x^{n-1} \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{n x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Fügen wir den neuen Wert wieder in 2) ein

$$\text{4)} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= -x^n \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + na^2 \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - n \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und bringen das negative Integral auf die linke Seite. Also

$$5)\quad \int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+n\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=-x^n\sqrt{a^2-x^2}+na^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Daher

$$6)\quad (n+1)\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^n\sqrt{a^2-x^2}+na^2\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dividieren wir endlich durch $n+1$, so erhalten wir unsere Formel

$$1)\quad \int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck führt zu speziellen Formen. Setzen wir z. B. in ihn $n=1$, dann wird

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Nun ist nach Formel 9) der Integraltafel und Aufgabe 8 in Abschnitt 105

$$\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

Setzen wir wiederum zurück, dann erhalten wir die Formel

$$\text{I a)}\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

116. Die zweite Reduktionsformel.

In der gleichen Weise wie in Abschnitt 115 läßt sich die II. Reduktionsformel herleiten. Es ist

$$\text{II)}\quad \int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Setzen wir auch hier $n = 1$ und verwenden die Beziehung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = l\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)+C,$$

dann erhalten wir die Formel

$$\text{IIa)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\cdot l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$$

117. Die dritte Reduktionsformel.

Es soll bewiesen werden

$$\text{III)} \int x^{n-1}\cdot dx\sqrt{a^2-x^2}$$
$$= \frac{x^n}{n+1}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Lösung. Wir wollen das Differential unter dem Integralzeichen auf der linken Seite der Gleichung mit dem Ausdruck $\sqrt{a^2-x^2}$ multiplizieren und dividieren, dann wird es

$$1)\qquad x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Wir können dann das Integral in zwei Teile zerlegen:

$$2)\qquad \int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2} = a^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Für $\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ setzen wir den Wert ein, den uns die Reduktionsformel I) liefert. Wir erhalten dann

3) $\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2}$

$$= a^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+\left(a^2-\frac{na^2}{n+1}\right)\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+\left(\frac{a^2n+a^2-na^2}{n+1}\right)\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das ist aber, wie man sofort sieht, gleich Formel III):

$$\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Setzen wir auch in III) $n=1$, dann ergiebt sich die vereinfachte Formel

IIIa) $\int dx\cdot\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C.$

118. Die vierte Reduktionsformel.

Durch ähnliche Rechnungen wie in 117 läßt sich die vierte Reduktionsformel erweisen:

IV) $\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2+x^2}=\frac{x^n}{n+1}\cdot\sqrt{a^2+x^2}\frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

Setzen wir hier $n=1$, so ergiebt sich

IVa) $\int dx\cdot\sqrt{a^2+x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$

119. Wert der abgeleiteten Formeln.

Die in den vorstehenden Abschnitten der Integralrechnung entwickelten Formeln sind nun hinreichend, um die wichtigsten

Aufgaben der Integralrechnung lösen zu können. Wir werden daher im weiteren immer wieder auf diese Formeln zurückweisen, und der Leser wird sie stets bei der Lektüre von Schriften, in denen die Integralrechnung Verwendung findet, wiederfinden. Zur größeren Bequemlichkeit stellen wir sie in einer **„Integraltafel"** zusammen.

Integraltafel.

1) $$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

2) $$\int \frac{dx}{x} = l x + C$$

3) $$\int e^x dx = e^x + C$$

4) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{l \cdot a} + C$$

5) $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

6) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$$

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C$$

10) $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + C$$

11) $$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C$$

12) $$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc} \sec x + C$$

13) $\int af'(x)dx = a\int f'(x)dx + C$

14) $\int \{F'(x) + f'(x) - \varphi'(x)\} dx$
$$= \int F'(x)dx + \int f'(x)dx - \int \varphi'(x)dx + C$$

15) $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C$

16) $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + C$

17) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l(a+bx) + C$

18) $\int \frac{nxdx}{a+bx^2} = \frac{n}{2b} l(a+bx^2) + C$

19) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

20) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\{l(x-a) - l(x+a)\}$
$$= \frac{1}{2a} l \cdot \left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

21) $\int \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = l\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

23) $\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = {}^1/_2 \cdot l(a^2+x^2) + C$

24) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

25) $\int \frac{axdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -a\sqrt{a^2-x^2} + C.$

26) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C$

27) $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

28) $\int \operatorname{tang} x\,dx = -l\cos x + C$

29) $\int \cot x \cdot dx = l \cdot \sin x + C$

30) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \cdot \operatorname{tang} x + C$

31) $\int \frac{dx}{\sin x} = -l\cot\left(\frac{x}{2}\right) + C$

$$= l \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

32) $\int \frac{dx}{\cos x} = \begin{cases} -l\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \\ l\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \end{cases}$

33) $\int \frac{(mx+n)dx}{x^2+2ax+b} = \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\alpha} - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\beta}$

$$= \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\cdot l(x-\alpha) - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\cdot l(x-\beta)$$

34) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

35) $\int x \cdot e^x dx = e^x(x-1) + C$

36) $\int l \cdot x\,dx = x(lx-1) + C$

37) $\int x^2 lx \cdot dx = \frac{x^3}{3}(lx - \frac{1}{3}) + C$

38) $\int x \cdot e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right) + C$

39) $\int x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$

40) $\int x^2 \cos x\,dx = \sin x(x^2 + 2x \cdot \cot x - 2) + C$

41) $\int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C$

42) $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}(\sin x \cos x - x) + C$

43) $\int \sin^2 x dx + \int \cos^2 x dx = x + C$

44) $\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

45) $\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$

46) $\int \operatorname{arc\,tang} x dx = \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} l(1 + x^2) + C$

47) (I) $\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{na^2}{n+1}\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

48) (II) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

49) (II) $\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{na^2}{n+1}\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

50) IIa) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} l \cdot (x + \sqrt{a^2 - x^2}) + C$$

51) (III) $\int x^{n-1} dx \sqrt{a^2 - x^2}$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

52) (IIIa) $\int dx \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

53) (IV) $\int x^{n-1} dx \sqrt{a^2 + x^2}$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

54) (IVa) $\int dx \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot l\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Achtzehntes Kapitel.

Die bestimmten Integrale.

120. Definitionen.

Man pflegt die Integrale, mit welchen wir uns bisher beschäftigt haben, unbestimmte Integrale zu nennen. So ist z. B.

1) $$y = \int f'(x)dx + C$$

ein unbestimmtes Integral und die Konstante C ganz beliebig. Soll nun die Konstante C bestimmt werden, so setzt man den Wert von x in die Funktion ein, für welchen das Integral null wird. Diesen Wert nennt man die untere Grenze des Integrals. Wird z. B. unser Integral für den Wert $x = a$ zu null, dann schreibt man

2) $$\int_a f'(x)dx = f(x) + C.$$

Da für $x = a$ das Integral null wird, ergiebt sich

$$0 = f(a) + C.$$

Daraus folgt, daß die Konstante

3) $$C = -f(a)$$ ist.

Setzen wir diesen Wert in 2) ein, so folgt

4) $$\int_a f'(x)dx = f(x) - f(a).$$

Nehmen wir hierfür ein Beispiel.

Es sei das Integral gegeben

$$\int_3 x^3 dx = ?$$

Es ist an sich $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$

Ist nun $x = 3$, wenn der Integralwert zu null werden soll, dann setzen wir an

$$0 = \frac{3^4}{4} + C = \frac{81}{4} + C.$$

Nunmehr ist $$C = -\frac{81}{4}.$$

Eingesetzt $$\int_3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{81}{4} = 0; \quad \text{für } x = 3.$$

So ist man also stets im stande, den Wert der Konstanten zu bestimmen.

Zuweilen wünscht man den Wert des Integrals für irgend einen gegebenen bestimmten Wert von x zu kennen. Man pflegt einen solchen Wert die obere Grenze des Integrals zu nennen.

In diesem Falle schreibt man

5) $$\int^b f'(x) dx = f(b) + C.$$

In den meisten Fällen sind aber die beiden Grenzen, die untere und die obere, vereinigt; dann nennt man das Integral ein bestimmtes.

So ist

6) $$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

ein bestimmtes Integral.

Wir merken uns die folgenden Bestimmungen:

a) Hat in einem unbestimmten Integral die Konstante einen beliebigen Wert, dann heißt das Integral ein allgemeines.

b) Hat die Konstante in einem unbestimmten Integral einen bestimmten Wert, so nennt man es ein partikuläres Integral.

c) Ist der Wert des unbestimmten Integrals für zwei gegebene Werte zu ermitteln, dann heißt es ein bestimmtes Integral.

Wir wollen nun mit Rücksicht auf Gleichung 6) bestimmte Integrale berechnen. Die Gleichung 6) giebt uns selbst hierzu die Regel an die Hand:

Um ein bestimmtes Integral zu berechnen, ermittelt man zunächst das allgemeine Integral, setzt sodann die obere Grenze ein, dann die untere und subtrahiert den letzten Wert vom ersten.

Mögen das einige Beispiele zeigen:

1. $\int\limits_2^4 x^2 dx = ?$

Es ist $$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

das unbestimmte Integral. Bilden wir nun den Wert für die Grenzen
$$\int\limits_2^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$
$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}.$$

2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = ?$

Also $$\int \frac{dx}{x} = lx + C$$
$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = l2 - l1.$$

Bekanntlich ist $l1 = 0$.

Daher $$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = l2.$$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = ?$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin 0 = 0.$$

Daher $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1.$$

121. Allgemeine Sätze über bestimmte Integrale.

a) In bestimmten Integralen kann immer die obere und die untere Grenze miteinander vertauscht werden.

b) Werden die Grenzen in einem bestimmten Integral miteinander vertauscht, dann müssen auch die Vorzeichen verändert werden.

Die Sätze a) und b) lassen sich, wie man unmittelbar erkennt, durch die Formel ausdrücken

7) $$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = -\int\limits_b^a f'(x)\,dx.$$

Und hieraus folgt

8) $$\int\limits_a^b f'(x)\,dx + \int\limits_b^a f'(x)\,dx = 0.$$

Mag das wiederum ein Beispiel erläutern. Es sei gegeben

$$\int\limits_2^4 x^2\,dx.$$

$$\int_2^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

$$\int_4^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{4^3}{3} = -\frac{56}{3}.$$

Also $\int_2^4 x^2 dx + \int_4^2 x^2 dx = \frac{56}{3} - \frac{56}{3} = 0.$

Ein jedes bestimmte Integral kann in mehrere bestimmte Integrale zerlegt werden, indem man zwischen die Grenzen a und b neue Grenzen einführt. In Formel

$$9) \qquad \int_a^b f'(x) dx = \int_a^c f'(x) dx + \int_c^b f'(x) dx.$$

Für einen bestimmten Fall

$$\int_1^3 x^2 dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx.$$

Führen wir die Rechnung aus:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx = \frac{7}{3} + \frac{19}{3} = \frac{26}{2}.$$

Direkt $\int_1^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$

d) Es leuchtet ein, daß jedes so gewonnene bestimmte Integral wiederum zerlegt werden kann; und so fort in beliebiger Wiederholung. In Formel

$$10) \quad \int_a^b f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx + \int_c^d f'(x)dx + \int_d^e f'(x)dx \ldots + \int_u^b f'(x)dx.$$

Neunzehntes Kapitel.

Die Quadratur der Kurven.

122. Erklärungen.

Es sei eine krumme Linie (siehe Abb. 20) PQ, durch die Funktion

$$1) \qquad y = f(x)$$

gegeben. Wir wollen die Fläche bestimmen, die von dem Kurvenstück PQ, den beiden Ordinaten PM und QN und

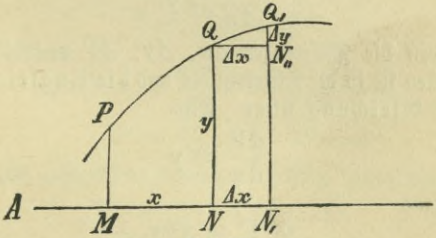

Abb. 20.

dem entsprechenden Stück der Abscissenachse begrenzt wird. Die Koordinaten des Punktes Q seien x und y bezogen auf den Anfangspunkt A.

Wie man sofort einsieht, wächst das Flächenstück, wenn die Abscissenachse zunimmt. Es ist also die

Fläche (F) eine Funktion der Abscisse. Ganz allgemein

2) $$F = \varphi(x).$$

Wächst x um Δx in Gleichung 1), so nimmt auch y um Δy und die Fläche F um das Flächenelement ΔF zu. Betrachten wir unsere Abbildung (Abb. 20). In derselben ist

$$NN' = \Delta x$$

$$N_,Q_, = y + \Delta y$$

und $$NN_,Q_,Q = \Delta F.$$

ΔF ist größer als das Rechteck $QNN_,N_{,,}$, das wir gleich $y \cdot \Delta x$ setzen können, und kleiner als das Rechteck $\Delta x(y+\Delta y)$. Also

3) $$\Delta x(y+\Delta y) > \Delta F > y \cdot \Delta x.$$

Lösen wir die Ungleichung 3) in die Elemente auf, so ergiebt sich $$\Delta x(y+\Delta y) > \Delta F$$

und $$y\Delta x < \Delta F$$

und hieraus

4) $$\frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y$$

sowie $$\frac{\Delta F}{\Delta x} > y.$$

Werden die Differenzen Δx, Δy, ΔF unendlich klein, dann gehen sie in die Differentiale und die Ungleichungen in eine Gleichung über. Also

5) $$\frac{dF}{dx} = y$$

und hieraus

6) $$d \cdot F = ydx.$$

Diesen Ausdruck nennt man das Differential der Fläche.

Integrieren wir die Gleichung 6), so erhalten wir die Fläche selbst:

7) $$\mathbf{F = \int ydx.}$$

Die Quadratur einer Kurve wird durch das vorstehende Integral erhalten.

Anmerkung. Um ein Flächenstück, das von einem Teil der Kurve, der Abscissenachse und zwei Ordinaten begrenzt ist, zu bestimmen, wird man stets auf ein bestimmtes Integral geführt werden. Soll z. B. $\int f(x)dx$ für die Fläche von $x = a$ bis $x = b$ berechnet werden, dann hat man

$$F = \int_a^b f(x)dx.$$

Wir wollen nun die Quadratur bekannter Kurven durchführen.

123. Quadratur der Parabel.

Wir kennen aus der analytischen Geometrie die Formel für die Parabel. Sie lautet:

8) $$y = \sqrt{2px}.$$

Setzen wir den Wert in die Gleichung 7) ein, dann haben wir den Wert ihrer Quadratur.

9) $$F = \int \sqrt{2px} \cdot dx.$$

Wir wollen das Integral bestimmen und setzen daher zunächst die Konstante vor das Integralzeichen:

$$F = \sqrt{2p} \int x^{1/2} dx.$$

Wie bekannt, ist

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{3/2} = {}^2/_3 x^{3/2} + C.$$

Also $$F = {}^2/_3 \cdot \sqrt{2p} \cdot x^{3/2} + C$$

Um eine geschicktere Form zu erhalten, setzen wir

$$x^{3/2} = x \cdot x^{1/2} = x \cdot \sqrt{x}.$$

Somit $$F = {}^2/_3 x \cdot \sqrt{2px}.$$

Mit Verwendung von 8) folgt dann

10) $$F = {}^2/_3 xy + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten wollen wir noch folgendes überlegen. Beginnt das Stück der Parallelfläche, das bestimmt werden soll, im Scheitelpunkte, dann ist für

$x = 0$ auch die Fläche der Parabel, also $F = 0$. Somit auch $C = 0$. Die Gleichung 10) geht dann über in

11) $$F = {}^2/_3 xy.$$

124. Quadratur der Ellipse.

Wie bekannt, ist die Gleichung der Ellipse

12) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

in der a und b die beiden Halbachsen darstellen (siehe

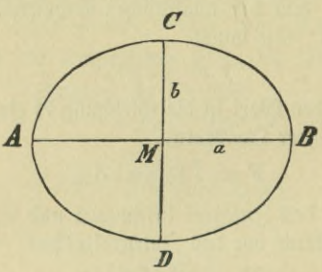

Abb. 21.

Abb. 21). Somit lautet das Differential ihrer Fläche

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

und die Fläche selbst

13) $$F = \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx + C.$$

Das Integral ist uns bereits bekannt, wir finden es in unserer Integraltafel unter Nr. 52. Somit ergiebt sich

14) $$F = \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C.$$

Wir wollen nun durch Formel 14) den Quadranten rechts oben der Ellipse berechnen. In dem Falle ist $x = a$. Setzen wir den Ausdruck in die Formel 14) ein. Das ergiebt

15)
$$\frac{F}{4} = \frac{b}{a} \cdot \left\{0 + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin\left(\frac{a}{a}\right)\right\}$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin 1$$
$$= \frac{ab}{2} \cdot \operatorname{arc} \sin 1.$$

Wie wir wissen, ist $\operatorname{arc} \sin 1 = \frac{\pi}{2}$. Daher

$$\frac{F}{4} = \frac{ab \cdot \pi}{4}.$$

Die Konstante für diesen Quadranten ist leicht zu bestimmen; dann für $x = 0$, ist auch $F = 0$ und somit $C = 0$.

Die Fläche der ganzen Ellipse wird nunmehr

16)
$$\mathbf{F = ab\pi.}$$

125. Quadratur der Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel ist

17)
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Es ergiebt sich sofort das Differential ihrer Fläche

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx$$

und das Flächenintegral

18)
$$F = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx.$$

Das ergiebt endlich

$$F = \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right\}.$$

126. Quadratur der Cykloide.

Konstruktion und Gleichung der Cykloide.

Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie dahinrollt, dann beschreibt ein jeder Punkt der Peripherie eine gesetzmäßige Linie. Man nennt sie die Radlinie oder die Cykloide. (Siehe Abb. 22.)

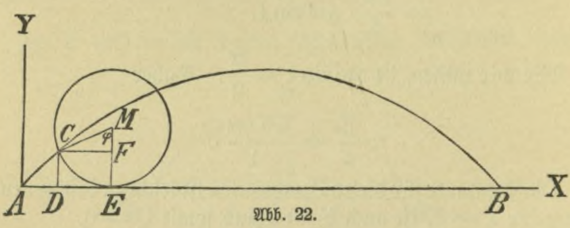

Abb. 22.

Wir wollen zunächst die Gleichung der Cykloide herleiten.

Der Punkt C der Cykloide habe die Koordinaten

$$x = AD \quad \text{und} \quad y = CD.$$

Der Radius des Kreises CM sei gleich r und der Winkel, den er mit dem Lot ME bildet, φ; das Bogenstück CE des Kreises, das der Länge AE entspricht, wird durch das Produkt $r \cdot \varphi$ gemessen. Man kann also setzen

$$CE = AE = r \cdot \varphi$$

und
$$CF = DE = r \cdot \sin\varphi,$$

denn CF ist DE parallel. Weiter ist

$$x = AD = AE - DE$$
$$= r \cdot \varphi - r \cdot \sin\varphi.$$

Daher
$$x = r(\varphi - \sin\varphi).$$

In ähnlicher Weise giebt die Abbildung den Wert für y. Denn

$$\begin{aligned} y &= ME - MF \\ &= r - r \cdot \cos\varphi \\ &= r(1 - \cos\varphi). \end{aligned}$$

Nachdem wir so die Gleichungen für die Cykloide

19) $$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$

und $$y = r(1 - \cos\varphi)$$

gefunden haben, gehen wir zur **Quadratur** über.

Das Flächenstück ist in unserer Aufgabe zu bestimmen, das von der Kurve und von der Linie AB begrenzt wird. Um, der Formel $F = \int y\,dx$ gemäß, das auszuführen, bilden wir dx.

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi.$$

Also $$F = \int r^2(1 - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi)\,d\varphi + C$$

20) $$\begin{aligned} &= r^2\int(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi \\ &= r^2\int(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}$$

Um den Ausdruck für die Integration geschickter zu machen, bedienen wir uns der Beziehung

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1.$$

Daraus $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}$ und setzen ein

21) $$\begin{aligned} F &= r^2\int(1 - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2})\,d\varphi \\ &= r^2\int(\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)\,d\varphi \\ &= r^2\left\{\tfrac{3}{2}\int d\varphi - 2\int\cos\varphi\,d\varphi + \tfrac{1}{2}\int\cos 2\varphi\,d\varphi\right\} \\ &= r^2\left\{\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right\} + C. \end{aligned}$$

Die Cykloidenfläche beginnt im Anfangspunkt (A) des Koordinatensystems, daher ist für $x = 0$ auch $F = 0$ und auch $C = 0$. Für die ganze Fläche hat sich der Kreis einmal aufgerollt, und es ist $\varphi = 2\pi$ geworden. Setzen wir diesen Wert von φ ein, so ist

$$
22)\qquad \begin{aligned} F &= r^2\left(\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \tfrac{1}{4}\sin 4\pi\right) \\ &= r^2(3\pi - 0 + 0) \\ &= \mathbf{3r^2\pi.} \end{aligned}
$$

Wir erhalten das Resultat, daß die Cykloidenfläche dreimal so groß ist als der Inhalt des erzeugenden Kreises.

127. Quadratur der gleichseitigen Hyperbel.

In der Geometrie wird gezeigt, daß die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel miteinander rechte Winkel

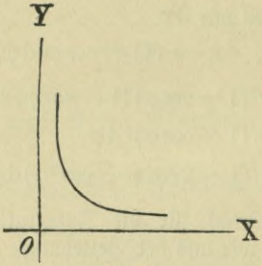

Abb. 23.

bilden. (Siehe Abb. 23.) Bei der Ableitung der Gleichung dieser Hyperbel nimmt man die Asymptoten als Koordinaten. Ihre Gleichung lautet

$$
23)\qquad xy = 1; \quad \text{also} \quad y = \frac{1}{x}.
$$

Somit erhalten wir für die Fläche den Ausdruck

$$
24)\qquad \begin{aligned} F &= \int \frac{dx}{x} + C \\ &= lx + C. \end{aligned}
$$

128. Quadratur der Kreislinie.

Es soll das Flächenstück mittels unserer Methode ermittelt werden, das von der Peripherie und dem Durchmesser

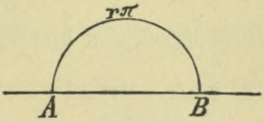

Abb. 24.

begrenzt wird. (Siehe Abb. 24.) Das mag der Leser ausführen. Setzt man in die Ellipsenformel (S. 187 Nr. 16)

25) $$a = b = r.$$

so ergiebt sich:

26) $$F = r^2 \pi.$$

129. Quadratur solcher Kurven, die durch Polarkoordinaten ausgedrückt sind.

Auf unserer krummen Linie (siehe Abb. 25) hat der Punkt P als Bestimmungsstücke r und α. Der Punkt P,,

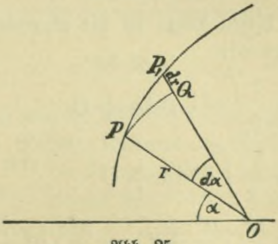

Abb. 25.

r $r + dr$ und $\alpha + d\alpha$. Da die Strecke PP, sehr klein gedacht werden muß, so kann man sich den Sektor POP, geradlinig denken. Dann stellt sich der Inhalt dieser Fläche durch eine bekannte trigonometrische Formel dar:

27)
$$dF = {}^1/_2 r(r + dr) \sin(d\alpha)$$
$$= {}^1/_2 r(r + dr) \frac{\sin(d\alpha) \cdot d\alpha}{d\alpha}.$$

Indem sich das Flächenelement dem Werte null nähert, wird, wie bekannt,

$$\lim(r + dr) = r$$

und

$$\lim \frac{\sin(d\alpha)}{d\alpha} = 1.$$

Es geht also 27) über in

28)
$$dF = {}^1/_2 r^2 d\alpha.$$

Integrieren wir, so empfangen wir das Flächenstück

29)
$$\mathbf{F = {}^1/_2 \int r^2\, d\alpha.}$$

130. Quadratur der archimedischen Spirale.

Die archimedische Spirale giebt ein gutes Beispiel für die Ausführung einer Quadratur, wo Polarkoordinaten zu Grunde liegen. Wir haben uns mit dieser Kurve schon im Abschnitt 74 Seite 108 beschäftigt. (Siehe Abb. 13.) Die Gleichung der archimedischen Spirale lautet

30)
$$r = a \cdot \alpha.$$

Führen wir diesen Wert in die allgemeine Formel 29) ein, dann erhalten wir

31)
$$F = \frac{1}{2}\int a^2 \cdot \alpha^2 d\alpha + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\int \alpha^2 d\alpha + C$$
$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{3} + C = \frac{a^2}{6} \cdot \alpha^3 + C.$$

Beginnt die Spirale für $\alpha = 0$, dann ist auch $F = 0$ und daher auch $C = 0$.

Zwanzigstes Kapitel.
Die Rektifikation der Kurven.

131. Erklärung und Ableitung der Formeln.

Die Rektifikation der Kurven lehrt, aus dem Differential einer krummen Linie, mittels der Integration, ein beliebig langes Stück der Linie zu bestimmen.

Betrachten wir das Stück AP einer Kurve, die durch die Gleichung

1) $$y = f(x)$$

ausgedrückt wird. (Siehe Abb. 26.) Bezeichnen wir das Bogenstück AP mit s. Es ist nun klar, daß mit der Ver-

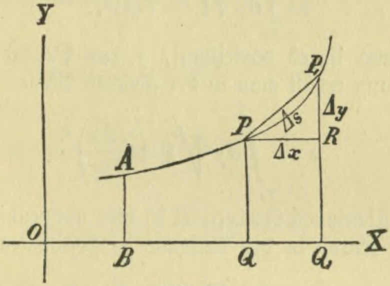

Abb. 26.

änderung von s sich auch die Abscisse ändert, daß somit s eine Funktion von x ist. Nehmen wir nun an, daß sich das Bogenstück $AP = s$ um $PP_1 = \Delta s$ vergrößere, dann wächst auch x um Δx und y um Δy, wie aus der Abbildung klar hervortritt. Nehmen wir das Bogenstück PP_1 sehr klein an, dann fällt es mit der Sehne zusammen, und wir erhalten die Beziehung

2) $$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

und $$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Nähert sich endlich die Größe Δs dem Werte null, resp. sie also in ds über, dann geht auch Δx und Δy in dx, geht in dy über, und 2) wird zu

$$3)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die Gleichung 3) giebt den Wert für das Bogenelement der Kurve an. Wollen wir die Kurve selbst oder ein Stück derselben erhalten, dann müssen wir 3) integrieren. Somit

$$4)\qquad s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Manchmal ist es vorteilhaft, y zur Veränderlichen zu machen; dann erhält man in der gleichen Weise

$$4a)\qquad s = \int_{y_0}^{y} dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Ein bestimmtes Integral ist hier notwendig, weil die Länge der Kurve in der Aufgabe zu bestimmen ist.

132. Die Rektifikation der Parabel.

Die Gleichung der Parabel lautet

$$y^2 = 2px.$$

Bilden wir die Ausdrücke, die in den Formeln 4) oder 4a) zur Rektifikation sich vorfinden. Die Differentiierung ergiebt

$$2ydy = 2pdx$$

$$ydy = pdx$$

und

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}.$$

In diesem Falle ist es vorteilhaft, 4a) zu verwenden. Daher

$$s = \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{p}\int dy \sqrt{p^2 + y^2}.$$

Nun kann man schreiben $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

$$dx^2 = \frac{y^2}{p^2} dy^2.$$

Also $$ds^2 = \frac{dy^2 \cdot p^2}{p^2} + dy^2 = \frac{dy^2 y^2 + dy^2 p^2}{p^2}$$

$$= \frac{dy^2}{p^2}(y^2 + p^2).$$

Daher $$ds = \frac{dy}{p}\sqrt{y^2 + p^2}.$$

Also $$s = \frac{1}{p}\int dy \sqrt{y^2 + p^2} + C.$$

Mit Hilfe der Formel 54) der Integraltafel giebt das

$$s = \frac{1}{p}\int dy \sqrt{p^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{2p}\left\{y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \cdot l(y + \sqrt{p^2 + y^2})\right\} + C.$$

Es ist klar, daß der Parallelbogen gleich null wird, wenn y gleich null wird. Setzen wir in die Formel für s, daher $s = 0$ und $y = 0$, so wird

$$0 = \frac{1}{2p}\{p^2 \cdot l(\sqrt{p^2})\} + C$$
$$= \frac{1}{2p} p^2 \cdot lp + C$$
$$= \frac{p}{2} \cdot lp + C.$$

Somit
$$C = -\frac{p}{2} \cdot lp.$$

Setzen wir diesen Wert von C in die obige Gleichung für s ein, dann geht sie über in

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2} \cdot l(y + \sqrt{p^2+y^2}) - \frac{p}{2} \cdot lp$$
$$= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2} l\left\{\frac{p+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right\}.$$

133. Die Rektifikation der Cykloide.

Im Abschnitt 126 fanden wir als Formeln für die Cykloide
$$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = r(1 - \cos\varphi).$$

(Siehe Abbildung 22 Seite 188.)

Um diese Kurven zu rektifizieren, bilden wir die Differentiale; also
$$dx = r(1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$
und
$$dy = r \cdot \sin\varphi\, d\varphi.$$

Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist, erhalten wir

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi^2$$
$$= r^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2$$
$$= \{r^2 - 2r^2\cos\varphi + r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\}d\varphi^2.$$

Da nun $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist, wird wiederum
$$ds^2 = (2r^2 - 2r^2\cos\varphi)d\varphi^2$$
$$= 2r^2(1 - \cos\varphi)d\varphi^2.$$

Wir setzen nach den Lehren der Trigonometrie

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Dann ergiebt sich $$ds^2 = 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}d\varphi^2$$

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Also kommen wir leicht zum Integral

$$s = 2r\int\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi + C = 4r\int\sin\frac{\varphi}{2}\cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= -4r\cos\frac{\varphi}{2} + C.$$

Die Cykloide beginnt mit $\varphi = 0$; in diesem Falle ist somit auch $s = 0$. Setzen wir ein

$$0 = -4r\cos 0 + C$$
$$= -4r + C.$$

Daher $$C = 4r.$$

Es wird daher die Cykloidenkurve

$$s = -4r\cos\frac{\varphi}{2} + 4r$$
$$= 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Zur besseren Ausnutzung dieser Formel ist noch eine kleine Umformung vorteilhaft. Setzen wir

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{4}$$

oder $$1 - \cos\frac{\varphi}{2} = 2\cdot\sin^2\frac{\varphi}{4}$$

in die Formel.

Also $$s = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\cdot\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Um die ganze Cykloide zu erhalten, setzt man $\varphi = 2\pi$, dann wird:

$$s = 8r \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{4} = 8r \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} = \mathbf{8r}.$$

Die Cykloide ist achtmal so groß als der Radius des erzeugenden Kreises.

134. Die Rektifikation von Kurven in Polarkoordinaten.

Es sei die Gleichung einer krummen Linie in Polarkoordinaten gegeben:

5) $$r = f(\alpha).$$

Nennen wir ein Stück der Kurve s (siehe Abb. 27). Wenn der Winkel α wächst, nimmt auch die Kurve zu, somit ist auch s eine Funktion von α. Nehmen die Kurven um das kleine Stück $PP' = ds$ zu, dann wächst α um $d\alpha$. Schlagen wir mit $r = OP$ einen Kreis um O; er trifft die Linie $OP_,$ in Q. Wir können nun, der sehr kleinen Seiten halber, wie in Abschnitt 129, das Dreieck $PQP_,$ als ein geradliniges betrachten, das bei Q einen rechten Winkel enthält. Dann ist

$$\overline{PP_,}^2 = \overline{P_,Q}^2 + \overline{PQ}^2.$$

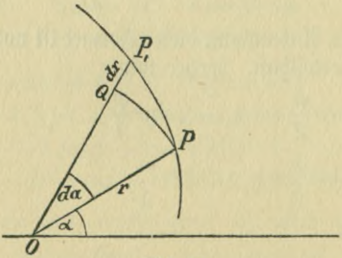

Abb. 27.

Da nun $P_{,}Q = dr$, $PP_{,} = ds$ und $PQ = rd\alpha$ ist, folgt aus 6)

$$7)\qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2}.$$

$$= d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}.$$

Nehmen wir jetzt das Integral, dann ergiebt sich

$$8)\qquad s = \int d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2} + C.$$

Da die Länge des Kurvenstücks von α bestimmt wird, so können wir endlich auch schreiben

$$8a)\qquad s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}.$$

Der Leser mag zur Uebung die archimedische Spirale rektifizieren.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die Inhaltsbestimmung der Rotationsflächen.

135. Definition, Herleitung der Formeln.

Wenn sich eine Linie um eine feste Achse bewegt, so daß sie stets von dieser in gleicher Entfernung bleibt, dann beschreibt die Linie eine Fläche. Die Bestimmung einer solchen Rotationsfläche nennt man die Komplanation der Flächen.

Wir wollen die Formeln zu ihrer Berechnung herleiten. (Siehe hierzu Abb. 28.)

Die Rotationsachse bezeichnen wir mit AX, sie sei zugleich die X-Achse des Koordinatensystems, und ihr Anfangspunkt liege in A. Die Kurve, die um die Achse rotiert,

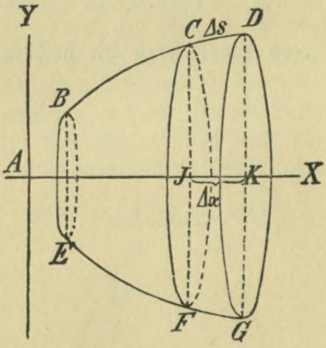

Abb. 28.

sei BC. Es ist nun sofort klar, daß, wenn die Abscisse (X-Achse) wächst, die Oberfläche F, die wir uns vollendet denken können, auch zunimmt, daß also die Rotationsfläche eine Funktion der Abscisse ist. Daher

1) $$F = f(x).$$

Nimmt x um Δx zu, dann wächst auch F um ΔF. Wie man aus der Abbildung leicht sieht, kann man das Element der Rotationsfläche ΔF als den Mantel eines Kegelstumpfes betrachten, der durch Rotation der Sehne $\Delta s = CD$ um die Achse entstanden ist. Die Stereometrie lehrt den Mantel eines Kegelstumpfes berechnen. Mit ihrer Hilfe erhalten wir daher

2) $$M = \pi(JC + KD)\,CD.$$

Bezeichnen wir die Ordinaten der Punkte C resp. D mit y, beziehungsweise mit y′ und CD mit Δs, als kleinen Zuwachs der Kurve $BC = s$, dann geht 2) über in

3 $$M = \pi(y + y')\Delta s.$$

Rückt nun C sehr nahe an D heran, wird also Δs zu ds, dann wird auch $y = y'$, und der Mantel M entspricht dem Elemente der Rotationsfläche dF. Wir können daher schreiben

4) $$dF = 2\pi y ds.$$

Nehmen wir das Integral, dann erhalten wir natürlich die Rotationsfläche selbst:

5) $$F = 2\pi\int y ds + C.$$

Rotiert die Kurve um die y-Achse des Koordinatensystems, dann verändert sich die Formel, wie sofort einzusehen ist, in

5a) $$F = 2\pi\int x \cdot ds + C.$$

136. Bestimmung der Oberfläche einer Kugel.

Dreht sich ein Kreis um seinen Durchmesser, so entsteht eine Kugeloberfläche. Wir wollen sie nach den im vorstehenden Abschnitt entwickelten Formeln bestimmen. Die Gleichung des Kreises ist

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Somit $$y^2 = r^2 - x^2.$$

Differentiieren wir, dann folgt

$$2y\,dy = -2x\,dx$$

und

$$dy = -\frac{x\,dx}{y}.$$

Um unseren Formelausdruck zu erhalten, bedienen wir uns der Bezeichnung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Eingesetzt, ergiebt das

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + \frac{x^2}{y^2}dx^2 \\ &= dx^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \\ &= dx^2\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Ziehen wir die Wurzel und gedenken wir der Beziehung $r^2 = x^2 + y^2$, dann erhalten wir

$$ds = \frac{dx\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{r\,dx}{y}.$$

Fügen wir unser Resultat in Formel 5) ein, so wird

$$\begin{aligned} F &= 2\pi\int\frac{y\,r\,dx}{y} + C \\ &= 2\pi r\int dx + C. \end{aligned}$$

Für eine bestimmte Aufgabe werden wir auch ein bestimmtes Integral erhalten.

Soll z. B. im vorliegenden Fall die ganze Kugelfläche berechnet werden, dann muß das Integral von $x = -r$ bis $x = +r$ ausgedehnt werden. Also

$$\begin{aligned} F = 2\pi r\int_{-r}^{+r} dx &= 2\pi r(r + r) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Wie dem Leser aus der analytischen Geometrie bekannt ist, wird bei der gebrauchten Kreisgleichung der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreises gelegt.

137. Bestimmung der Oberfläche des Rotationsparaboloides.

Rotiert eine Parabel um ihre Achse, dann entsteht ein Rotationsparaboloid. Wir gehen zu seiner Ableitung von der Gleichung der Parabel aus

$$y^2 = 2px.$$

Differentiieren wir und dividieren durch 2:

$$ydy = pdx.$$

Wir erhalten also für den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Bedenken wir wiederum, daß $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist,

dann wird
$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$= 1 + \frac{p^2}{y^2}$$
$$= \frac{y^2 + p^2}{y^2}.$$

Setzen wir wiederum den Wert für $y^2 = 2px$ ein:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{p^2 + 2px}{y^2}$$

und
$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{p^2 + 2px}$$

und hieraus
$$yds = dx\sqrt{p^2 + 2px}.$$

Um das Integral leichter zu finden, machen wir mit der rechten Seite des vorstehenden Ausdrucks eine kleine Umformung.

Wir setzen $u = \sqrt{p^2 + 2px}.$

Daher $u^2 = p^2 + 2px.$

Differentiiert, ergiebt das

$$2udu = 2pdx$$

$$udu = pdx$$

und $dx = \frac{udu}{p}.$

Nunmehr wird

$$yds = \frac{udu}{p} \cdot u = \frac{u^2du}{p}.$$

Daher
$$F = 2\pi \int yds = \frac{2\pi}{p} \int u^2du$$
$$= \frac{2\pi u^3}{3p} + C.$$

Setzen wir wiederum den Wert von u ein:

$$F = \frac{2\pi}{3p} \left\{ \sqrt{p^2 + 2px} \right\}^3 + C$$

$$2px = y^2,$$

somit $F = \frac{2\pi}{3p} \left\{ \sqrt{p^2 + y^2} \right\}^3 + C.$

Zur Bestimmung der Konstanten C bedenken wir, daß für $y = 0$ auch $F = 0$ sein muß.

Wir setzen daher

$$0 = \frac{2\pi}{3p} \cdot p^3 + C = \frac{2\pi p^2}{3} + C.$$

Also $C = -\frac{2}{3} p^2 \pi.$

Somit erhalten wir endlich als Oberfläche des Paraboloides mit der üblichen Umformung

$$F = \frac{2\pi}{3p} \left\{ (p^2 + y^2) \sqrt{p^2 + y^2} - p^3 \right\}.$$

138. Die Oberfläche soll ermittelt werden, die entsteht, wenn sich eine Cykloide um ihre x-Achse dreht.

Siehe Abb. 22 Seite 188. Die Gleichungen, die die Cykloide bestimmen, lauten, wie wir zeigten,

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = r(1 - \cos\varphi).$$

Formen wir sie in solcher Weise um, wie es unsere Formeln verlangen. Durch Differentiierung ergiebt sich

$$dx = r(1 - \cos\varphi)d\varphi = r d\varphi - r\cos\varphi d\varphi$$
$$dy = r \cdot \sin\varphi d\varphi.$$

Um den Ausdruck $ds^2 = dx^2 + dy^2$ zu bilden, müssen wir quadrieren:

$$dx^2 = r^2 d\varphi^2 - 2r^2\cos\varphi d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi d\varphi^2$$
$$dy^2 = r^2\sin^2\varphi d\varphi^2.$$

Durch Addition folgt nnnmehr

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= r^2 d\varphi^2 + r^2 d\varphi^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - 2r^2\cos\varphi d\varphi^2.$$

Da $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, so wird

$$ds^2 = 2r^2 d\varphi^2 - 2r^2\cos\varphi d\varphi^2$$
$$= 2r^2 d\varphi^2(1 - \cos\varphi).$$

Zur weiteren Umformung setzen wir

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Also
$$ds^2 = 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}d\varphi^2$$

und
$$ds = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Setzen wir den Ausdruck jetzt in die Formel 5) Seite 201 ein, dann ist

$$F = 2\pi\int r(1 - \cos\varphi) \cdot 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Dieser Ausdruck muß nun zur Integration geschickt gemacht werden. Wir erhalten nacheinander

$$\begin{aligned} F &= 2\pi\int 2r^2(1-\cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi \\ &= 4r^2\pi\int(1-\cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi \\ &= 4r^2\pi\int 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi \\ &= 4r^2\pi\int 2\sin^3\frac{\varphi}{2}d\varphi \\ &= 8r^2\pi\int\sin^3\frac{\varphi}{2}d\varphi + C \\ &= 16r^2\pi\int\sin^3\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Um die ganze Oberfläche zu erhalten, muß φ von null bis 2π wachsen. Wir erhalten also ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen 2π und null. Daher

$$F = 16r^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{2}\cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Bedient man sich der in Abschnitt 191 bewiesenen Beziehung $\sin^3\alpha = -\,^1/_4\sin 3\alpha + \,^3/_4\sin\alpha$ nnd zieht entsprechend zusammen, dann wird

$$F = \frac{64}{3}r^2\pi.$$

139. Die Oberfläche des Rotationsellipsoides.

Rotiert eine Ellipse um ihre große Achse, dann beschreibt sie ein Rotationsellipsoid. Wir wollen diese Fläche ermitteln.

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

In ihr bedeutet $2a = AB$ die große Achse, $CD = 2b$ die kleine Achse (siehe Abb. 29). Ferner bezeichnet man die

Entfernung eines Brennpunktes F (oder E) vom Mittelpunkt der Ellipse mit e und nennt diese Größe die Excentrizität. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, daß immer

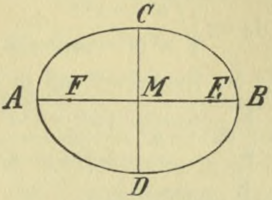

Abb. 29.

$e^2 = a^2 - b^2$ ist. Um mit Hilfe unserer Formel 5) Seite 201 die Fläche des Rotationsellipsoides zu finden, müssen wir den Ausdruck $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bilden. Hierzu ist es nötig, die Gleichung der Ellipse zu differentiieren. Das ergiebt

$$dy = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wir müssen nun folgende Umbildungen ausführen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2 dx^2}{(a^2 - x^2)} \\ &= dx^2 \left\{ 1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\} \\ &= dx^2 \left\{ \frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\} \\ &= dx^2 \left\{ \frac{a^4 - x^2 (a^2 - b^2)}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\} \end{aligned}$$

Da wir $e^2 = a^2 - b^2$ setzen können, so folgt weiter

$$ds^2 = dx^2 \left\{ \frac{a^4 - x^2 e^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\}.$$

Dividieren wir durch dx^2, so folgt

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 - x^2e^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

und somit
$$ds = \sqrt{\frac{a^4 - x^2e^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx.$$

Es ist nunmehr der Formelausdruck zu bilden

$$\begin{aligned} y\,ds &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{a^4 - x^2e^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \\ &= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - x^2e^2}\,dx. \end{aligned}$$

Das Integral der Rotationsfläche der Ellipse ist somit

$$F = \frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{a^4 - x^2e^2}\,dx.$$

Wir wollen das vorstehende Integral berechnen und es zu dem Zwecke umformen:

$$F = \frac{2\pi b \cdot e}{a^2}\int\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}\,dx.$$

Setzen wir $\frac{a^4}{e^2} = n^2$, dann ist

$$F = \frac{2\pi b \cdot e}{a^2}\int\sqrt{n^2 - x^2}\,dx.$$

Mit Hilfe der Formel 52) der Integraltafel können wir integrieren

$$\begin{aligned} F &= \frac{2\pi b \cdot e}{a^2}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{n^2 - x^2} + \frac{n^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{n}\right)\right\} + C \\ &= \frac{\pi b e}{a^2}\left\{x\sqrt{n^2 - x^2} + n^2 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)\right\} + C. \end{aligned}$$

Setzen wir nun wiederum für $n^2 = \frac{a^4}{e^2}$ und für $e^2 = a^2 - b^2$, also die ursprünglichen Werte, dann wird

$$F = \frac{\pi b \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left\{ x \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} \right.$$

$$\left. + \frac{a^4}{a^2 - b^2} \arcsin \frac{x \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right\} + C.$$

Lösen wir die Klammer:

$$F = \frac{\pi b x}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{x \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} + C.$$

Die Bestimmung der Konstanten ist sofort erledigt, denn für $F = 0$ muß auch $C = 0$ werden. Setzen wir $x = a$, also gleich der halben großen Achse der Ellipse, dann erhalten wir die Fläche des halben Rotationsellipsoides $\frac{F}{2}$. Somit

$$\frac{F}{2} = \frac{\pi b a}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) a^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \frac{a \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$$

$$= \frac{\pi b}{a} \sqrt{a^2 b^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$= b^2 \pi + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Dann wird die ganze Fläche

$$F = 2 b^2 \pi + \frac{2 a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

oder auch $= 2 b^2 \pi + \frac{2 a^2 b \pi}{e} \cdot \arcsin \left(\frac{e}{a} \right).$

Bekanntlich geht eine Ellipse in einen Kreis über, wenn $a = b$ wird. Nehmen wir das im vorliegenden Falle an, dann wird das Rotationsellipsoid sich in eine **Kugel** verwandeln. Der Ausdruck $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ erhält hier den Wert null.

Aber auch das zweite Glied verlangt eine genauere Betrachtung. Ist nämlich a = b, dann wird der Ausdruck

$$\frac{\arc\sin\left(\frac{e}{a}\right)}{e} = \frac{\arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{0}{0},$$

also unbestimmt.

Mit Hilfe der Methoden über die Ausmittelung unbestimmter Ausdrücke in der Differentialrechnung ergiebt sich

$$\frac{\arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{a}.$$

Setzen wir diesen Wert in den zweiten Ausdruck ein und bedenken wir, daß man a = b setzen soll, dann geht

$$\frac{2a^2b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

über in $2b^2\pi$.

Also $F = (\text{Kugeloberfläche}) = 2b^2\pi + 2b^2\pi$
$= 4b^2\pi = 4a^2\pi.$

Wie wir aus der Stereometrie wissen, ist das die Formel für die Kugeloberfläche.

140. Die Oberfläche für das Sphäroid.

Dreht sich eine Ellipse um ihre kleine Achse, dann entsteht ein **Sphäroid.** Diese Fläche ist bedeutungsvoll in vielen Aufgaben der mathematischen Physik und der Astronomie. Die Erde hat die Gestalt eines Sphäroids. Plastische Körper nehmen auf der Zentrifugalmaschine Sphäroidform an ꝛc. Um die Aufgabe, die Oberfläche eines Sphäroids aus der Ellipse zu lösen, müssen wir die Gleichung der Ellipse nach x auflösen. Also

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

Führt man nun die Rechnungen in der gleichen Weise durch wie im Abschnitt 139, dann erhält man die gewünschte Gleichung des Sphäroids

$$F = 2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e} \cdot l\left(\frac{a+e}{a-e}\right).$$

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Kubatur der Rotationskörper.

141. Erklärung und Ableitung der Grundformeln.

Wenn eine Kurve sich um eine feste Achse dreht, so beschreibt sie eine Fläche, wie wir es im vorigen Kapitel genau beschrieben haben. Diese Fläche umschließt einen bestimmten Raumteil. Wir wollen die Methoden er-

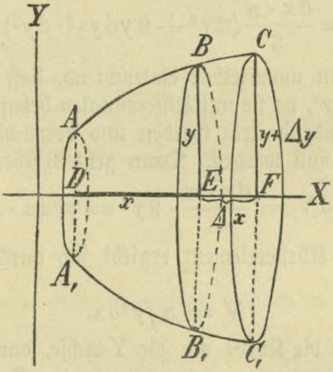

Abb. 30.

mitteln, um ihn zu bestimmen. Man bezeichnet die Operation als Kubatur der Körper (Abb. 30). Die Kurve AB soll sich um die X-Achse, indem sie stets in derselben Entfernung bleibt, herumbewegen. Wir wollen den Inhalt V des Körpers ermitteln, den die Oberfläche umschließt.

Die Koordinaten des Punktes B seien x und y. Wächst nun die X-Achse DE um das Stück $\Delta x = EF$, dann muß auch V um $\Delta V = BCC_1B_1$ zunehmen. Das Volumen des Körpers ist eine Funktion von x. Wenn Δx klein gedacht wird und die Bogenstücke BC und B_1C_1 als geradlinig betrachtet werden dürfen, dann können wir das Körperelement BCB_1C_1 als einen abgestumpften Kegel auffassen.

Aus den Lehren der Stereometrie folgt

$$1)\quad \Delta V = \frac{\Delta x \cdot \pi}{3}\{y^2 + y(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2\}.$$

Nähert sich Δx der Grenze null, d. h. wird es gleich dx, dann wird auch $\Delta y = dy$ und $\Delta V = dV$.

Aus der Gleichung 1) ergiebt sich

$$2)\quad dV = \frac{dx \cdot \pi}{3}\{y^2 + y(y+dy) + (y+dy)^2\}$$

$$= \frac{dx \cdot \pi}{3}\{3y^2 + 3y\,dy + dy^2\}.$$

Es ist nun unmittelbar einleuchtend, daß die Ausdrücke $3y\,dy$ und dy^2, da sie mit Differentialen behaftet sind, gegen $3y^2$ verschwindend klein werden und vernachlässigt werden können, d. h. null werden. Dann geht 2) über in

$$3)\quad dV = \frac{dx \cdot \pi}{3} \cdot 3y^2 = y^2 dx \cdot \pi.$$

Aus dem Körperelement ergiebt sich durch Integration der Körper

$$4)\quad V = \pi \int y^2 dx.$$

Dreht sich die Kurve um die Y-Achse, dann führen dieselben Ueberlegungen zu der entsprechenden Formel

$$4a)\quad V = \pi \int x^2 dy.$$

142. Der Inhalt eines geraden Kegels.

Man kann sich einen geraden Kegel dadurch entstanden denken, daß sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete dreht.

In Abb. 31 mag sich das rechtwinklige Dreieck ACB um die X-Achse drehen. Dann ist $AC = h$ die Höhe, BC der Radius und AB die Seitenlinie des Kegels.

Unmittelbar aus der Figur erhalten wir die Proportion

$$x : y = h : r$$

und

$$y = \frac{rx}{h}$$

als Gleichung der Linie.

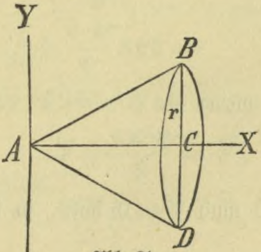

Abb. 31.

Also nach Formel 4)

$$V = \pi \int \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int x^2 dx.$$

Integrieren wir, so wird

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} + C.$$

Das Integral muß genommen werden von $x = 0$ bis $x = h$. Das ergiebt

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h^3}{3h^2} = \frac{h \cdot \pi r^2}{3} = {}^1/_3\, h r^2 \pi.$$

143. Der Inhalt des Paraboloids.

Das Paraboloid bildet sich, indem sich die Parabel um ihre Achse dreht. Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = 2px.$$

Die Aufgabe ist hier sehr leicht zu lösen, weil wir sofort das wichtigste Glied in die Formel 4) einfügen können. Also

$$\begin{aligned} V &= \pi \int 2pxdx \\ &= 2p\pi \int xdx. \end{aligned}$$

Integrieren wir, dann ergiebt sich

$$\begin{aligned} V &= 2p\pi \frac{x^2}{2} + C \\ &= 2px \frac{\pi \cdot x}{2} + C. \end{aligned}$$

Schreiben wir wieder für $2px = y^2$, dann wird

$$V = \frac{y^2 \pi x}{2} + C.$$

Da für $x = 0$ auch $V = 0$ wird, so ist auch $C = 0$.

144. Der Inhalt des Sphäroids.

Da, wie wir bereits ausführten, ein Sphäroid entsteht, wenn sich eine Ellipse um ihre kleine Achse dreht, so wird in diesem Falle $2b = CD$ zur Rotationsachse. (Siehe Abb. 32.)

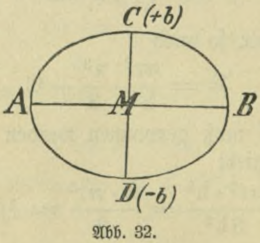

Abb. 32.

Die Gleichung der Ellipse ist, wie aus der analytischen Geometrie bekannt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösen wir sie, auf Grund der vorstehenden Ueberlegung, nach x auf, so wird sie

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Formel 4a) ein

$$V = \pi \int \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dy$$

$$= \frac{\pi a^2}{b^2}\int(b^2 - y^2)dy.$$

Integrieren wir

$$\int(b^2 - y^2)dy = \int b^2 dy - \int y^2 dy$$

$$= b^2 y - \frac{y^3}{3} + C.$$

Eingesetzt ergiebt

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2}\left\{b^2 y - \frac{y^3}{3}\right\} + C.$$

Wie man gut aus der Abbildung ersehen kann, muß von $-b$ bis $+b$ integriert werden, um den ganzen Sphäroidkörper zu erhalten. Setzen wir diese Werte ein

$$V_b = \frac{\pi a^2}{b^2}\left\{b^3 - \frac{b^3}{3}\right\} = \frac{\pi a^2 b^3}{b^2} - \frac{\pi a^2 b^3}{3 b^2}$$

$$= \pi a^2 b - \frac{\pi a^2 b}{3}.$$

$$V_{-b} = \frac{\pi a^2}{b^2}\left\{-b^3 + \frac{b^3}{3}\right\} = \frac{\pi a^2 b^3}{3 b^2} - \frac{\pi a^2 b^3}{b^2}$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{3} - \pi a^2 b.$$

$$V_b - V_{-b} = \left\{\begin{matrix} \pi a^2 b - \dfrac{\pi a^2 b}{3} \\ (-)\dfrac{\pi a^2 b}{3} (+) \pi a^2 b \end{matrix}\right\} = 2\pi a^2 b - {}^2/_3\, \pi a^2 b.$$

$$V = V_b - V_{-b} = 2\pi a^2 b - {}^2/_3\, \pi a^2 b$$

$$V = {}^4/_3\, a^2 b \pi.$$

145. Formeln für die geometrischen Anwendungen der Integralrechnung.

I. Quadratur der Kurven: $F = \int y\,dx$.

$F = \frac{1}{2}\int r^2 d\alpha$ in Polarkoordinaten.

II. Rektifikation der Kurven.

$$s = \int_{x_0}^{x} dx\,\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$s = \int_{y_0}^{y} dy\,\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha\,\sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}$$

in Polarkoordinaten.

III. Komplanation der Rotationsflächen.

$$F = 2\pi\int y\,ds + C$$
$$= 2\pi\int x\,ds + C.$$

IV. Kubatur der Rotationskörper.

$$V = \pi\int y^2 dx$$
$$= \pi\int x^2 dy.$$

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Die vielfachen Integrale.

146. Neue Erklärung des Integrals.

Bisher haben wir das Integral als eine Umkehrung des Differentials betrachtet. Wir wollen den Integralbegriff nun tiefer zu erfassen suchen. Gehen wir, um das zu ermöglichen, noch einmal auf das bestimmte Integral zurück. Erinnern wir uns zunächst, daß in der Lehre von der Quadratur der Kurven die Aufgabe zu lösen war, den Inhalt der Ebene zu bestimmen, die begrenzt wurde von einem Stück der Kurve $y = f(x)$, den beiden Endordinaten und einem Stück der Abscissenachse. Denken wir uns das Abscissenachsenstück QS der Kurve PR in n kleine gleiche Teile $= \Delta x$ geteilt (siehe Abb. 33) und durch die Teilpunkte parallele Linien zur Y-Achse gelegt. Durch diese Konstruktion wird die Ebene in n Streifen zerlegt. Legen wir endlich noch

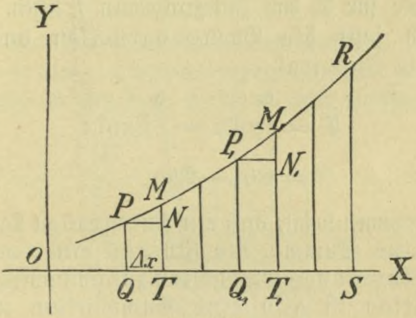

Abb. 33.

parallel zur X-Achse durch die Punkte P und P, ꝛc. Linien. Ein jeder der genannten Streifen PMQT, P,M,Q,T, ꝛc. zerfällt dann in ein Rechteck PNQT ꝛc. und in ein Dreieck PNM ꝛc. Der Inhalt des Rechtecks ist $= y\Delta x$. Ist die Abscisse des Punktes $P = a$, also $x = a$, und die Abscisse des Punktes $R = b$, dann kann die Summe aller Rechtecke, die dazwischenliegen, ausgedrückt werden durch

$$1)\quad \text{Summe aller Rechtecke} = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} y\Delta x.$$

In 1) bedeutet Σ das Zeichen für eine endliche Summe. Setzen wir $y = f(x)$, dann geht 1) über in

$$\text{2) Summe aller Rechtecke} = \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x)\Delta x.$$

Wird nun n sehr groß und daher Δx sehr klein, so daß es zu dx übergeht, dann werden auch die Dreiecke PMN ꝛc. verschwindend klein werden, so daß man sie vernachlässigen kann. Damit ist nun aber die Zahl der Rechtecke unendlich groß geworden. Wollen wir sie nunmehr summieren, dann müssen wir für Σ das Integralzeichen $\int$ setzen. Daher läßt sich jetzt die Ebene darstellen durch das bestimmte Integral

$$\text{3)} \qquad F = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= f(b) - f(a).$$

Wir erkennen somit, daß ein Integral zu betrachten ist als eine Summe, die sich aus einer unendlich großen Anzahl von Elementen zusammensetzt. Eine Integration ist also eine Summation, und das Integralzeichen $\int$ ist ein Summationszeichen.

147. Die vielfachen Integrale.

Die Ausführungen des vorstehenden Abschnittes führen zu den mehrfachen Integralen. Man denke sich die Strecke AB (siehe Abb. 34) in eine große Zahl kleiner Teile geteilt und ebenso die Strecke AD. Zieht man nun durch die Teilpunkte zur X= und zur Y=Achse parallele Linien, dann zerfällt das Rechteck AC in eine große Anzahl kleiner Rechtecke, von denen jedes den Inhalt $dx \cdot dy$ hat. Der Inhalt des Rechteckes AC ist dann als das Integral über das Produkt $dx \cdot dy$ zu betrachten, und zwar zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$*) und $y = 0$ bis $y = h$. In Zeichen

$$4)\qquad F = \int_0^a\int_0^h dx \cdot dy.$$

Integriert man zuerst in Beziehung auf dx, also

$$5)\qquad \int_0^a dx = a,$$

und dann in Beziehung auf dy, also

$$6)\qquad a\int_0^h dy = ah = F,$$

so erhält man den Flächeninhalt des Rechtecks. Man bezeichnet 4) als ein Doppelintegral. Da x und y ganz unabhängig in ihm sind, so ist es auch gleichgiltig, nach

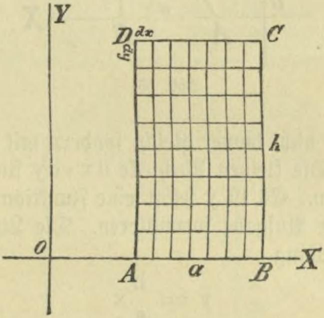

Abb. 34.

welcher Variablen man zuerst integriert. Hiervon tritt eine Ausnahme ein, wenn x und y zu einander in einer bestimmten Beziehung stehen. Um das darzulegen, wollen wir eine Aufgabe durchführen.

---

*) Denke man sich A im Anfangspunkt des Koordinatensystems.

148. Inhalt eines Dreiecks durch Doppelintegrale zu bestimmen.

Es soll der Inhalt des Dreiecks ABC (siehe Abb. 35) mit der Grundlinie a und der Höhe h bestimmt werden. Auch hier können wir uns, wie im vorigen Abschnitt, das Dreieck in Elemente zerlegt denken. In unserem vorliegenden

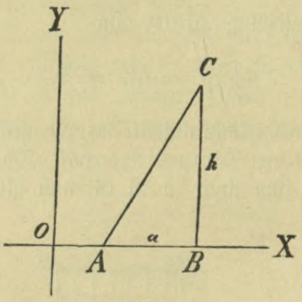

Abb. 35.

Fall ist aber y nicht immer gleich, sondern mit wachsenden x veränderlich. Die kleinen Rechtecke $dx \cdot dy$ sind daher nicht immer dieselben. Es ist y selbst eine Funktion von x. Wir wollen nun die Aufgabe formulieren. Die Linie AC wird durch die Gleichung

7) $$y = \frac{h}{a} x$$

dargestellt. Integrieren wir nun das Doppelintegral

8) $$F = \int_0^x \int_0^y dx \cdot dy$$

zunächst nach y, dann ergiebt sich

9) $$F = \int_0^x y\,dx.$$

Fügen wir den Wert von y ein, dann wird

10) $$F = \int_0^x \frac{h}{a} x\,dx = \frac{h}{a}\int_0^x x\,dx.$$

Da $$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

ist, so wird

11) $$F = \frac{h}{a}\int_0^x x\,dx = \frac{h x^2}{2a}.$$

Da das Integral unserer Abbildung entsprechend*) von $x = 0$ bis $x = a$ zu bestimmen ist, so setzen wir in 11) $x = a$. Somit wird

12) $$F = \frac{h \cdot a^2}{2a} = {}^1/_2\, ah.$$

149. Das dreifache Integral.

Durch ein dreifaches Integral kann man sich leicht und anschaulich den Inhalt eines Körpers dargestellt denken. Stelle man sich vor, daß durch einen Körper drei sich unter

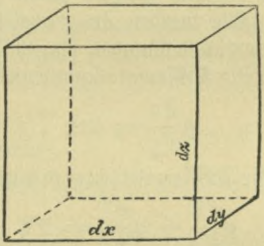

Abb. 36.

rechten Winkeln schneidende Ebenen gelegt sind und zu diesen sehr viele parallele Ebenen, dann ist der Körper in eine große Zahl kleiner Prismen geteilt. Ist die Zahl der Ebenen unendlich groß, dann ist die Grundfläche von jedem Elementar-

*) Wie Seite 219.

prisma ein Rechteck vom Inhalt $dx \cdot dy$. Die Höhe eines jeden Prismas ist dz. Somit ist der Inhalt eines Elementarprismas (siehe Abb. 36) auszudrücken durch $dx \cdot dy \cdot dz$. Also

13) $$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Das Gesamtvolumen entspricht dem dreifachen Integral ausgedehnt über dV. Also

14) $$V = \iiint dx \cdot dy \cdot dz.$$

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen.

150. Erklärung und Einteilung der Differentialgleichungen.

Die Gleichungen, in denen sich veränderliche Größen nebst ihren Differentialen und Differentialquotienten befinden, nennt man Differentialgleichungen. Sie werden in gewöhnliche und in partielle Differentialgleichungen eingeteilt, je nachdem sie totale oder partielle Differentialquotienten enthalten. Es ist z. B.

$$y\frac{dx}{dy} = mx$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung und

$$p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} = 2T$$

eine partielle Differentialgleichung.

Wir stellen nun die Aufgabe, die ursprüngliche Gleichung zu finden, aus der die Differentialgleichung entstanden ist. Diese nennt man die Integralgleichung.

Man teilt die Differentialgleichungen nach der Höhe des Differentials oder des Differentialquotienten in Differentialgleichungen von der 1ten, 2ten ... nten Ordnung ein. So ist beispielsweise

$$xdy - ydx = 0 \quad \text{oder} \quad y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

eine Differentialgleichung nter Ordnung.

Zudem zerfallen die Differentialgleichungen noch in Grade, wie die algebraischen Gleichungen. Den Grad bezeichnet die höchste Potenz, in der sich der Differentialquotient befindet.

In der von uns schon angeführten Gleichung

$$xdy - ydx = 0$$

stehen die Differentiale in der ersten Potenz; sie ist daher eine Differentialgleichung ersten Grades und, wie wir wissen, auch erster Ordnung. Die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ax + by = 0$$

ist nach der Definition vom zweiten Grade.

151. Homogene Differentialgleichungen.

Man bezeichnet eine Differentialgleichung als homogen, wenn die Summe der Exponenten der Variablen in jedem Gliede dieselbe ist. So ist z. B.

$$xydy + x^2dx + y^2dy = 0$$

eine homogene Differentialgleichung, denn die Summe der Exponenten ist in jedem Gliede gleich zwei.

152. Die unmittelbare Integration vollständiger Differentiale.

Im dreizehnten Kapitel sind die Merkmale besprochen worden, aus denen man ein vollständiges Differential erkennen kann. Ist danach

1) $$z = f(x, y),$$

so ergiebt sich

2) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

als das totale Differential der Funktion 1). Differentiierten wir sodann den Ausdruck $\frac{\partial z}{\partial x}$ nach y und $\frac{\partial z}{\partial y}$ nach x, so erhielten wir die gleichen Differentialquotienten

3) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Es ist also ein Kennzeichen für ein vollständiges Differential, daß es als gleichgiltig erscheint, ob man die Funktion erst nach x und dann nach y oder umgekehrt differentiiert hat.

Wir wollen, wie es gebräuchlich ist, 2) und 3) ein wenig anders schreiben. Setzen wir die partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$z = f(x, y),$$

4) $$\frac{\partial z}{\partial x} = P \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q,$$

dann geht Gleichung 2) über in

5) $$dz = Pdx + Qdy.$$

Differentiieren wir nun P nach y und Q nach x, so ergiebt sich

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$$

und

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Es ist also

6) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Grundsatz: Hat ein Differential die Form

7) $$Pdx + Qdy,$$

oder läßt es sich auf diese Form bringen und ist zudem, gemäß 6) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dann ist das Differential ein vollständiges.

Auf die Form 7) lassen sich die Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades stets zurückführen. Gilt dann auch 6), so ist die Integration immer möglich!

153. Beweis für den Grundsatz.

Nehmen wir an, daß eine Gleichung von der Form

8) $$dz = Pdx + Qdy$$

gegeben sei, und daß zudem

9) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ist. Wir erinnern uns, daß hierin $P = \frac{\partial z}{\partial x}$ gesetzt worden war.

Wir wollen nun integrieren, indem wir y als konstant betrachten. Also

10) $$z = \int Pdx + Y.$$

Y ist die Integrationskonstante und als eine Funktion von y zu betrachten. Setzen wir nunmehr

11) $$\int Pdx = U,$$

so ergiebt sich, wenn wir diesen Wert in 10) einfügen,

12) $$z = U + Y.$$

Die Teile von z sollen im einzelnen bestimmt werden. Differentiieren wir daher diese Gleichung nach y

$$13)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dY}{dy}$$

und setzen, wie bekannt, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$, dann erhalten wir

$$14)\qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dY}{dy}.$$

Nach $\frac{dY}{dy}$ aufgelöst, ergiebt

$$15)\qquad \frac{dY}{dy} = Q - \frac{\partial U}{\partial y}$$

oder
$$dY = Q\,dy - \frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

Wird die Integration nach y ausgeführt

$$16)\qquad Y = \int\left(Q - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + C$$

und dieser Wert von Y in 12) eingesetzt, dann haben wir

$$17)\qquad z = U + \int\left(Q - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + C.$$

154. Beispiele.

Die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen sollen nun an einigen speziellen Beispielen erläutert werden. Wir haben die Gleichung

$$dz = (3y^2 - 4x^2)\,dy + (3x^2 - 8xy)\,dx.$$

Die Gleichung soll integriert werden.

Zunächst haben wir zu untersuchen, ob unsere Gleichung ein vollständiges Differential ist. Setzen wir dazu

$$P = 3x^2 - 8xy$$

und
$$Q = 3y^2 - 4x^2.$$

Die Gleichung hat also die gewünschte Form

$$P\,dx + Q\,dy = dz.$$

Nun ist noch nach den Regeln in Abschnitt 153 zu zeigen, daß auch

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ist.}$$

Differentiieren wir P und Q, um das zu ermitteln:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 - 8xy)}{\partial y} = -8x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(3y^2 - 4x^2)}{\partial x} = -8x.$$

Unsere Gleichung stellt ein vollständiges Differential dar, wir können also nach den Methoden des vorigen Abschnittes direkt integrieren.

Nach Gleichung 11) wurde $\int P dx = U$ gesetzt. Also

$$U = \int P dx = \int (3x^2 - 8xy)\, dx.$$

Man erhält aus Gleichung 12) $z = U + Y$

$$z = \int (3x^2 - 8xy)\, dx + Y,$$

$$z = x^3 - 4x^2 y + Y.$$

Nun muß Y bestimmt werden. Differentiieren wir nach y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 + \frac{dY}{dy}$$

oder

$$Q = -4x^2 + \frac{dY}{dy}.$$

Lösen wir in entsprechender Weise auf, dann ist

$$\frac{dY}{dy} = Q + 4x^2$$

und

$$dY = Q dy + 4x^2 dy.$$

Setzen wir nun den Wert von Q ein, dann wird

$$\begin{aligned} dY &= (3y^2 - 4x^2) dy + 4x^2 dy \\ &= 3y^2 dy - 4x^2 dy + 4x^2 dy \\ &= 3y^2 dy. \end{aligned}$$

Endlich

$$Y = \int 3y^2 dy + C = y^3 + C.$$

Fügen wir in die Gleichung $z = U + Y$ auch noch den Wert für Y ein, dann erhalten wir die gewünschte Integralgleichung

$$z = x^3 - 4x^2y + y^3 + C.$$

155. Ein zweites Beispiel.

Gegeben sei die Gleichung

$$dz = (2mx + ny + r)\,dx + (2py + nx + s)\,dy.$$

Wir setzen $\quad P = 2mx + ny + r$

und $\quad Q = 2py + nx + s.$

Unsere Gleichung entspricht also der Form

$$Pdx + Qdy = dz.$$

Untersuchen wir, ob sie ein vollständiges Differential darstellt. Es ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2mx + ny + r)}{\partial y} = n,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2py + nx + s)}{\partial x} = n.$$

Also wir haben auch hier $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ und können integrieren. Nach Regel 11) ist

$$U = \int P dx = \int (2mx + ny + r)\,dx$$
$$= mx^2 + nxy + rx.$$

In $z = U + Y$ eingesetzt, wird

$$z = mx^2 + nxy + rx + Y.$$

Nach y differentiiert

$$\frac{\partial z}{\partial y} = nx + \frac{dY}{dy}$$

und daraus, wenn $Q = \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$\frac{dY}{dy} = Q - nx,$$

$$dY = Qdy - nxdy.$$

Setzen wir nun den Wert von Q ein

$$Q = 2py + nx + s,$$

dann wird $dY = (2py + nx + s)\,dy - nxdy.$

Integriert

$$\begin{aligned} Y &= \int (2py + nx + s)\,dy - nxdy + C \\ &= py^2 + nxy + sy - nxy + C \\ &= py^2 + sy + C. \end{aligned}$$

Fügen wir die Werte endlich in die Gleichung $z = U + Y$ ein, dann erhalten wir die Integralgleichung

$$z = mx^2 + nxy + rx + py^2 + sy + C.$$

156. Allgemeine Form der Differentialgleichung vom ersten Grade und der ersten Ordnung.

Will man ganz allgemein eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades darstellen, dann bezeichnet man sie durch

$$18)\qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Man kann sie immer, wie wir sahen, auf die Form

$$Pdx + Qdy = 0$$

zurückführen. Löst man den Ausdruck 18) auf, dann erhält man auch die Form

$$19)\qquad \frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

Ist nun P eine Funktion von x und Q eine Funktion von y, also

20) $$P = X \quad \text{und} \quad Q = Y,$$

so erhält man das Integral

21) $$\int X dx + \int Y dy = C.$$

Das Integral kann man aber immer mit Hilfe unserer Integrationsformeln integrieren. Ist es nun nicht der Fall, daß die Integrale in dieser Form sich unmittelbar darbieten, dann kann man es in vielen Fällen durch Trennung (Separation) der Veränderlichen erreichen.

157. Integration durch Trennung der Variablen.

An einigen Beispielen wollen wir auseinandersetzen, wie man sich in solchen Fällen verhält.

Die Differentialgleichung

$$xdy = ydx$$

soll integriert werden.

Dividiert man sie durch das Produkt xy, so erhält man

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

oder $$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Die Gleichung entspricht der Form 21) und kann sofort integriert werden. Es ist

$$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dx}{x} = C.$$

Ausgeführt $$ly - ly = lC.$$

Es ist vorteilhaft, in einem solchen Falle die Integrationskonstante auch unter das Logarithmenzeichen zu setzen.

Nehmen wir den Numerus, dann erhalten wir, nachdem wir gesetzt haben

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = lc,$$

$$\frac{y}{x} = c$$

oder

$$y = Cx.$$

158. Ein zweites Beispiel.

Die Differentialgleichung sei

$$XY dx + X_{,} Y_{,} dy = 0.$$

In ihr sind X und $X_{,}$ Funktionen von x und Y und $Y_{,}$ Funktionen von y.

Dividieren wir die Gleichung durch $X_{,} Y$, so erhalten wir

$$\frac{X}{X_{,}} dx + \frac{Y_{,}}{Y} dy = 0.$$

Wie man sieht, ist das ein Ausdruck, den man direkt integrieren kann. Es wird

$$\int \frac{X}{X_{,}} dx + \int \frac{Y_{,}}{Y} dy = C.$$

159. Ein drittes Beispiel.

Wir wollen nun einige Beispiele vorführen, in denen geometrische Aufgaben durch Differentialgleichungen ihre Lösung finden. Es soll die Gleichung der krummen Linie ermittelt werden, bei der die Subnormale der Abscisse gleich ist.

Wie wir in Kapitel 10 zeigten, ist die Formel für die Subnormale $= y\frac{dy}{dx}$. Also wird unsere Gleichung

$$y\frac{dy}{dx} = x.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$y\,dy = x\,dx.$$

Die Variablen sind somit separiert.

Integrieren wir

$$\int y\,dy + c - \int x\,dx + c = 0.$$

Daher $$y^2 + 2c = x^2.$$

Setzen wir $2c = r^2$, dann haben wir

$$y = \sqrt{x^2 - r^2}.$$

Das ist die gesuchte Gleichung.

160. Ein viertes Beispiel.

Wie heißt die Gleichung der Linie, deren Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist? Die Formel für die Subtangente ist nach Kapitel 10 $= y\frac{dx}{dy}$. Wir erhalten somit den Ansatz

$$y\frac{dx}{dy} = 2x.$$

Sofort ergiebt sich hieraus die Trennung der Variablen

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integriert $$2 l y = l x + l c$$
$$= l c x.$$

Gemäß den Gesetzen der Logarithmen

$$y^2 = cx.$$

Das ist aber die Formel für die Parabel.

161. Nutzen der Differentialgleichungen.

Aus den vorstehenden Beispielen tritt recht klar der Nutzen der Differentialgleichungen hervor. Wir ersehen aus ihnen, daß man aus gewissen Beziehungen, die man z. B. an einer Linie ermittelte, fähig ist, die ganze Kurve festzustellen. So kann man in den Naturwissenschaften aus einzelnen Beobachtungen den Weg, d. h. die Kurve finden, auf der sich ein Körper, z. B. ein Planet, bewegen muß.

162. Integrationsmethode durch Substitution.

Schon in den Elementen der Algebra wird gezeigt, daß man durch Einführung entsprechender Ausdrücke einer Gleichung eine für die Berechnung geschicktere Form geben kann. Auch die Integration komplizierter Funktionen erleichterten resp. ermöglichten wir durch geschickte Substitutionen. Dasselbe gilt auch für die Differentialgleichungen, wenn man die Integralgleichungen zu finden wünscht.

Wir wollen uns dabei merken, daß eine Differentialgleichung immer durch Substitution integrierbar gemacht werden kann, wenn sie homogen ist. Auch das soll an Beispielen gezeigt werden.

163. Ein Beispiel.

Die homogene Differentialgleichung

$$(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$$

soll integriert werden. Setzen wir in unserem Falle

$$y=rx,$$

dann ist auch $\qquad dy=r\,dx+x\,dr.$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung ein

$$(x+rx)\,dx+(rx-x)\,(r\,dx+x\,dr)=0.$$

Dividieren wir durch x, dann ist

$$\frac{x(1+r)\,dx}{x}+\frac{x(r-1)\,(r\,dx+x\,dr)}{x}=0$$

und $\qquad (1+r)\,dx+(r-1)\,(r\,dx+x\,dr)=0.$

Lösen wir die Klammern

$$dx + rdx + r^2dx + rxdr - rdx - xdr = 0$$
$$dx + r^2dx + rxdx - xdr = 0.$$

Fassen wir die entsprechenden Glieder zusammen

$$(1 + r^2)dx + x(r - 1)dr = 0.$$

Durch die Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{dx}{x} + \frac{(r-1)dr}{1+r^2} = 0$$

oder
$$\frac{dx}{x} + \frac{rdr}{1+r^2} = \frac{dr}{1+r^2}.$$

Nun ist die Integration unmittelbar möglich

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{rdr}{1+r^2} = \int\frac{dr}{1+r^2}$$

und
$$lx + {}^1/_2\, l(1 + r^2) + lc = \text{arc tang}\, r.$$

Setzen wir die ursprünglichen Werte wieder zurück. Es war $y = rx$; daher

$$r = \frac{y}{x}; \quad r^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

Somit
$$lx + {}^1/_2\, l\left\{1 + \frac{y^2}{x^2}\right\} + lc = \text{arc tang}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Endlich mit Berücksichtigung der logarithmischen Regeln

$$lc\,(x^2 + y^2)^{1/2} = \text{arc tang}\left(\frac{y}{x}\right).$$

164. Ein zweites Beispiel.

Es soll die Gleichung für eine Kurve ermittelt werden, deren Subtangente der Differenz zwischen der Ordinate und der Abscisse gleich ist.

Mit Berücksichtigung der Ableitungen im Kapitel 10 erhalten wir die Gleichung

$$y\frac{dx}{dy} = y - x$$

oder

$$y\,dx = (y - x)\,dy.$$

Als Substitutionsgröße setzen wir $x = ry$. Dadurch wird $dx = r\,dy + y\,dr$. Setzen wir die Werte ein und entwickeln nach der Reihe

$$\begin{aligned} y(r\cdot dy + y\,dr) &= (y - ry)\,dy \\ ry\,dy + y^2dr &= y\,dy - ry\,dy \\ y^2dr + 2ry\,dy &= y\,dy \\ y^2dr + (2ry - y)\,dy &= 0 \\ y^2dr + y(2r - 1)\,dy &= 0 \\ y\,dr + (2r - 1)\,dy &= 0. \end{aligned}$$

Dividiert durch $(2r - 1)y$ ergiebt endlich

$$\frac{dr}{2r - 1} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Durch Integration folgt unmittelbar

$$\tfrac{1}{2}\,l(2r - 1) + ly = lc.$$

Setzen wir nun wiederum $r = \frac{x}{y}$, so wird

$$ly + \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{2x - y}{y}\right) = lc.$$

Oder

$$ly^2 + l\left(\frac{2x - y)}{y}\right) = lc^2$$

$$l(2xy - y^2) = lc^2.$$

Fallen die Logarithmenzeichen fort und fassen wir zusammen, dann ergiebt sich endlich

$$2xy - y^2 = c^2$$

und

$$y(2x - y) = c^2.$$

165. Das Homogenmachen der Differentialgleichungen.

Sind Differentialgleichungen nicht homogen, so gelingt es doch häufig, sie homogen zu machen. Das geschieht zumeist durch entsprechende Substitutionen. Auch ist oft eine Verschiebung des Koordinatensystems erfolgreich, indem man z. B. $x = x_1 + u$ und $y = y_1 + v$ setzt und u und v ermittelt.

166. Die linearen Differentialgleichungen.

Man bezeichnet hiermit eine Art Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades von der Form

22) $$dy + yf(x)dx = F(x)dx.$$

In dieser Gleichung bedeuten $f(x)$ und $F(x)$ stetige Funktionen von x. Es giebt zur Lösung dieser Differentialgleichung viele Wege; wir bedienen uns im Anschluß an die vorhergehenden Ausführungen der Methode der Substitution. Es sei hierzu wiederum $y = rz$ und $dy = rdz + zdr$.

Fügen wir diese Ausdrücke in Gleichung 22) ein:

23) $$rdz + zdr + rzf(x)dx = F(x)dx.$$

Fassen wir entsprechend zusammen und reduzieren auf null, dann ist

24) $$[rdz + rzf(x)dx] + (zdr - F(x)dx) = 0.$$

Wir dürfen annehmen, daß eine jede der beiden Klammern für sich null ist, und wir haben somit auch zwei Gleichungen, aus denen die Unbekannten r und z ermittelt werden können. Das wollen wir nun durchführen.

Die beiden Gleichungen lauten

25) $$\alpha)\quad rdz + rzf(x)dx = 0$$

und $$\beta)\quad zdr - F(x)dx = 0.$$

Reduzieren wir zunächst α) in folgender Weise

$$rdz + rzf(x)dx = 0;$$

dafür $$dz + zf(x)dx = 0$$

und $$\frac{dz}{z} = -f(x)dx.$$

Integrieren wir

$$\int\frac{dz}{z} = -\int f(x)dx,$$

dann ist $$lz = -\int f(x)dx$$

und $$z = e^{-\int f(x)dx}.$$

Behandeln wir nun die Gleichung β):

$$zdr - F(x)dx = 0$$

$$dr = \frac{F(x)dx}{z}.$$

In diesen Ausdruck setzen wir den Wert von z ein. Also

$$dr = \frac{F(x)dx}{e^{-\int f(x)dx}}.$$

Integriert $$r = \int\frac{F(x)dx}{e^{-\int f(x)dx}} + C$$

$$r = \int F(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C.$$

Setzen wir die Werte für z und r endlich in den Substitutionsausdruck $y = rz$ ein, dann ergiebt sich

26) $$y = e^{-\int f(x)dx}\left\{\int F(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\cdot dx + C\right\}.$$

167. Ein Beispiel.

Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay = be^{2x}$$

soll integriert werden.

Möge der Leser die Aufgabe zur Uebung durchführen. Die Lösung giebt

$$y = \frac{b}{2+a}\left\{e^{2x} + ce^{-ax}\right\}.$$

168. Der integrierende Faktor.

Wir sahen, daß jede Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades sich auf die Form

27) $$Pdx + Qdy = 0$$

zurückführen läßt. Es kann nun der Fall eintreten, daß das Differential zwischen den Variablen x und y kein vollständiges ist, daß die Integration also nicht unmittelbar durchgeführt werden kann. Man ist in solchen Fällen immer im stande, einen Faktor u anzugeben, der selbst eine Funktion von x und y ist und der das Differential zu einem vollständigen macht. Die Zahl u nennt man den integrierenden Faktor.

Führen wir den integrierenden Faktor in 27) ein, dann geht die Form über in

28) $$P \cdot u \cdot dx + Q \cdot udy = 0.$$

Unseren Ausführungen im dreizehnten Kapitel entsprechend muß dann als Kennzeichen für ein vollständiges Differential die Beziehung gelten

29) $$\frac{\partial(u \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(u \cdot Q)}{\partial x}.$$

Führen wir den Ausdruck 29) aus. Das giebt

$$P\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial x}$$

und daraus

30) $$u\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} = P\frac{\partial u}{\partial y} - Q\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ist es möglich, u aus der Gleichung 30) zu ermitteln, dann ist nur nötig, das Differential mit u zu multiplizieren und die Integration zu vollenden.

Wir wollen einige einfachen Fälle hier mitteilen.

169. Der integrierende Faktor u ist allein eine Funktion von x.

Ist das der Fall, dann wird in Gleichung 30)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}.$$

Fügen wir diese Werte in 30) ein, so wird

$$u\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} = -Q\frac{du}{dx} \tag{31}$$

und hieraus

$$\frac{du}{u} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{-Q} \cdot dx$$

$$= \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx.$$

Wird integriert, so ergiebt sich

$$lu = \int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx. \tag{32}$$

170. Der integrierende Faktor u sei allein eine Funktion von y.

In der Gleichung 30) wird dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy}.$$

Führen wir dieselben Rechnungen wie in 169 aus, dann ergiebt sich

$$\frac{du}{u} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} \cdot dy$$

und

$$lu = \int \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} dy. \tag{33}$$

171. Ein Beispiel durch Probe.

In sehr vielen Fällen kann man unmittelbar erkennen, wie der integrierende Faktor lauten muß. Es sei z. B. die Differentialgleichung

$$xdy - ydx = 0$$

gegeben.

Untersuchen wir, ob hier ein vollständiges Differential vorliegt. Sei zu dem Zweck

$$P = x \quad \text{und} \quad Q = -y,$$

dann ist

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1$$

und

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -1.$$

Das Differential ist also **nicht** vollständig. Man erkennt aber leicht, daß, wenn die Gleichung durch $x \cdot y$ dividiert wird, ein Ausdruck erscheint, der integrierbar ist. Nämlich

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Also

$$lx - lx = lc$$

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = lc$$

$$\frac{y}{x} = c$$

und endlich

$$y = cx.$$

Der integrierende Faktor war in diesem Falle $\frac{1}{xy}$.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen (Fortsetzung).

172. Differentialgleichungen erster Ordnung und höheren Grades.

Wir müssen uns an dieser Stelle mit einigen einfachen Fällen begnügen, die einen Einblick in den Gang der Lösungen geben. Die Gleichungen höheren Grades führen zumeist auf Schwierigkeiten, die den Rahmen des vorliegenden kleinen Werkchens weit übersteigen. Um zum schnellen Verständnis zu gelangen, sei eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades gegeben:

1) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$$

oder

1a) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2.$$

Ziehen wir die Wurzel, so erhalten wir sofort die beiden Gleichungen

2) $$\frac{dy}{dx} = a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -a$$

und daraus

3) $$dy = adx \quad \text{und} \quad dy = -adx.$$

Durch Integration ergiebt sich

4) $$y = ax + c; \quad y = -ax + c_{,}.$$

Dann erhält man das vollständige Integral durch Multiplikation. Also

5) $$(y - ax - c)(y + ax - c_{,}) = 0.$$

Je höher der Grad einer Gleichung ist, um so mehr Wurzeln und Integralgleichungen wird man erhalten. Eine Gleichung nten Grades ergiebt somit n Wurzeln und n Integralgleichungen. Die Ermittelung der Wurzeln führt aber im allgemeinen auf große algebraische Schwierigkeiten.

173. Andere Lösungen.

Für bestimmte Fälle kann man den Differentialgleichungen höheren Grades auch noch auf andere Weise nahetreten; das soll an einigen Fällen klargelegt werden.

Es sei eine Differentialgleichung gegeben, die die Variable y nicht enthält und nach x auflösbar ist. Wir setzen, wie schon häufig an anderen Stellen,

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad dy = p\,dx.$$

Die genannte Gleichung wird die Form haben

$$6) \qquad x = \varphi(p).$$

Differentiieren wir 6), dann ist

$$7) \qquad dx = \varphi'(p)\,dp.$$

Hieraus ergiebt sich sofort

$$8) \qquad dy = p\,dx = \varphi'(p)\,p\,dp.$$

Durch die Integration folgt sodann

$$9) \qquad y = \int \varphi'(p) \cdot p\,dp + C.$$

Die Gleichungen 6) und 9) gestatten die Elimination von p; dann hat man die Gleichung zwischen x und y. Das wollen wir durch ein Beispiel erläutern.

174. Ein Beispiel.

Es sei

$$x = 3p^4 - 5p^2 + 6p - 5.$$

Verfahren wir nun ganz wie in 173. Zunächst differentiieren wir

$$dx = (12p^3 - 10p + 6)\,dp.$$

Wir können nun schreiben

$$dy = p\,dx = (12p^3 - 10p + 6)\cdot p\,dp$$
$$= (12p^4 - 10p^2 + 6p)\,dp.$$

Integriert

$$y = \int(12p^4 - 10p^2 + 6p)\,dp$$
$$= {}^{12}/_5\,p^5 - {}^{10}/_3\,p^3 + 3p^2 + C.$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung dieses Beispieles ist endlich p zu eliminieren.

175. Andere Lösungsmethode.

Es kann eine Gleichung wie in 173 behandelt werden, wenn sie die Variable x nicht enthält und nach y auflösbar ist. Die Gleichung lautet

10) $$y = \varphi(p).$$

Da wir $p = \frac{dy}{dx}$ setzen, ist wiederum $dy = p\,dx$.

Aus Gleichung 10) erhalten wir $dy = \varphi'(p)\,dp$, also ergiebt sich

11) $$dy = p\,dx = \varphi'(p)\,dp.$$

Hieraus

12) $$dx = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p}$$

Integriert

13) $$x = \int\frac{\varphi'(p)\,dp}{p} + C.$$

176. Lösungsmethoden.

Eine Lösung läßt sich auch finden, wenn die Differentialgleichung in der Form erscheint

14) $$y = px + \varphi(p) = \frac{dy}{dx}\cdot x + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Differentiieren wir die Gleichung 14), dann ist

15) $$dy = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)\,dp.$$

Wir erinnern uns, daß wir schreiben konnten

16) $$dy = p\,dx.$$

Subtrahieren wir den Ausdruck 16) vom Ausdruck 15), dann bleibt

17) $$x\,dp + \varphi'(p)\,dp = 0$$ oder

17a) $$\{x + \varphi'(p)\}\,dp = 0.$$

Diese Gleichung muß nun, wie wir aus der Algebra wissen, den Beziehungen genügen

18) $$dp = 0$$ und

19) $$x + \varphi'(p) = 0.$$

Die Integration von Gleichung 18) ergiebt sofort

20) $$p = c.$$

Setzen wir diesen Wert in die Ursprungsgleichung 14) ein, dann erhalten wir die Lösung

21) $$y = cx + \varphi(c).$$

Auch die Gleichung 19) führt uns zu einer Bestimmung von 14). Wir ersehen sofort aus 19), daß man sie auf p zurückführen kann; man empfängt dann die Lösung

$$p = f(x).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in 14) ein, dann erhalten wir eine zweite Lösung

22) $$y = f(x) \cdot x + \varphi\{f(x)\} \cdot$$

Die beiden Gleichungen 21) und 22) haben keine Konstanten, sie können daher auch nicht einem vollkommenen Integral der Ursprungsgleichung entsprechen. Man bezeichnet solche Integrationen der Differentialgleichungen, die ohne wirkliche Integration durchgeführt wurden, als singuläre Integrale oder besondere Auflösungen.

177. Ein Beispiel.

Die Differentialgleichung soll heißen

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß sie der Form 14) im vorigen Abschnitt entspricht. Um das zu erreichen, dividieren wir sie durch dx; dann wird sie

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzen wir nun, wie gebräuchlich ist, $p = \frac{dy}{dx}$, dann ist

$$y - px = a\sqrt{1 + p^2}$$

oder

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2}.$$

Der Ausdruck stimmt mit 14) überein.

Verfahren wir nun ganz wie im vorstehenden Abschnitt. Wir differentiieren

$$dy = p\,dx + x\,dp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}dp.$$

Subtrahieren wir hiervon $dy = p\,dx$, dann bleibt

$$x\,dp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}dp = 0$$

oder

$$\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right)dp = 0.$$

Wiederum giebt das die beiden Gleichungen

$$dp = 0$$

und

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhalten wir $p = c$. Setzen wir in die Gleichung für y ein, dann haben wir das singuläre Integral $y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$.

Wir wollen nun das andere singuläre Integral ermitteln. Die Gleichung $x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0$ giebt nach p aufgelöst

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzen wir auch diesen Wert in die Gleichung für y ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} \\ &= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Endlich als zweite singuläre Auflösung

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

178. Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Die Differentialgleichungen der höheren Ordnung gehören mit zu den schwierigsten Gebieten der höheren Mathematik. Sie sind nur in einigen besonderen Fällen vollkommen zu integrieren. Dennoch spielen gerade sie in der Physik und den verwandten Disziplinen eine sehr bedeutende Rolle. Von solchen praktischen Aufgaben wollen wir hier einige vorführen.

179. Ein Beispiel.

Es sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a. \tag{23}$$

Setzen wir wieder $p = \frac{dy}{dx}$, dann wird

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = a.$$

Daher $$\frac{dp}{dx} = a; \quad dp = adx.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck

so wird $$\int dp = a\int dx,$$

24) $$p = ax + c.$$

Wir setzen nun wieder den Wert für p ein:

$$\frac{dy}{dx} = ax + c$$

oder $$dy = axdx + cdx$$

und integrieren

25) $$y = a\int xdx + c\int dx$$
$$= \frac{ax^2}{2} + cx + d.$$

Eine Gleichung von dieser Form tritt z. B. in der Mechanik bei der Behandlung des freien Falles auf. Bezeichnet man mit t die Zeit, mit $g = 9{,}8\ldots$ die Schwerkonstante und mit y die Fallrichtung, dann heißt die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

und daraus durch Integration

$$\frac{dy}{dt} = gt + b; \quad y = {}^1/_2\, gt^2 + bt + c.$$

b und c sind Integrationskonstanten.

180. Differentialgleichungen, in denen sich der eine Differentialquotient als eine Funktion des nächstniedrigeren Differentialquotienten darstellen läßt.

Es sei daher

26) $$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Setzen wir die Bezeichnung p ein, dann geht 26) über in

27) $$\frac{dp}{dx} = F(p).$$

Also $$dx = \frac{dp}{F(p)}$$ und

28) $$x = \int \frac{dp}{F(p)} + C_1.$$

Da nun $dy = p\,dx$ ist und $dx = \frac{dp}{F(p)}$, so ist auch

$$dy = \frac{p\,dp}{F(p)}.$$

Integrieren wir endlich, so wird

29) $$y = \int \frac{p\,dp}{F(p)} + C_2.$$

Nehmen wir hierzu eine Aufgabe als Beispiel.

181. Eine Aufgabe.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

gegeben.

Mit Hilfe der bekannten Beziehungen wird sie

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

und hieraus, nach den Ausführungen des vorstehenden Abschnittes, wird weiter

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

und $$dy = \frac{p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Integrieren wir nun, dann entstehen die Gleichungen

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = l\{p + \sqrt{1+p^2}\} + C_1$$

$$y = \int \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{1+p^2} + C_2.$$

Berechnen wir hieraus zunächst p. Also

$$(y - C_2)^2 = 1 + p^2.$$

Daher $$p = \sqrt{(y-C_2)^2 - 1}.$$

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für x ein, dann ergiebt sich endlich

$$x = l\{y - C_2 + \sqrt{(y-C_2)^2 - 1}\} + C_1.$$

182. Der zweite Differentialquotient sei eine Funktion der Abscisse.

Also

30) $$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x).$$

Setzen wir wieder $p = \frac{dy}{dx}$, dann wird

$$\frac{dp}{dx} = F(x)$$ und

31) $$dp = F(x)\,dx.$$

32) $$p = \int F(x)\,dx + C_1.$$

Setzen wir für das Integral

$$\int F(x)\,dx = f(x),$$

dann geht 32) über in

$$dy = f(x)\,dx + C_1\,dx.$$

Integrieren wir

33) $$y = \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2.$$

183. Der zweite Differentialquotient sei eine Funktion von y.

Die Gleichung lautet somit

34) $$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y).$$

Wiederum bedienen wir uns der Ausdrücke

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Daher wird

34a) $$\frac{dp}{dx} = F(y) \quad \text{und} \quad dp = F(y)\,dx.$$

Da nun, wie man sofort erkennt, $dx = \frac{dy}{p}$ wird, erhalten wir

35) $$dp = F(y)\,dx = \frac{F(y)\,dy}{p}.$$

Hieraus folgt wiederum, wenn man mit zwei multipliziert,

$$2p\,dp = 2F(y)\,dy.$$

Integriert

36) $$p^2 = 2\int F(y)\,dy + C_1.$$

Somit $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int F(y)\,dy + C_1}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int F(y)\,dy + C_1}}.$$

Endlich $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int F(y)\,dy + C_1}} + C_2.$$

184. Gleichungen von höherer Ordnung als der zweiten

finden in der Mechanik und Physik nur sehr selten Verwendung; wir wollen es also für unsere engen Verhältnisse mit den vorstehenden Beispielen bewenden lassen.

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Die komplexen Zahlen.

185. Allgemeine Erklärung.

Schon in der Arithmetik werden wir mit einer eigentümlichen Zahlengruppe, den imaginären Zahlen, bekannt. Eine imaginäre Zahl entsteht bekanntlich, wenn man eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl zu ermitteln versucht. So ist z. B. der Ausdruck $\sqrt{-4}$ eine imaginäre Zahl. Alle imaginären Zahlen kann man auf eine bestimmte Größe zurückführen; so ist $\sqrt{-4} = 2 \cdot \sqrt{-1}$.

Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ wird bekanntlich seit Gauß mit dem Buchstaben i bezeichnet. Der Wert von $\sqrt{-1} = i$ ist, wenn man ihn potentiiert, einer bestimmten Periode unterworfen, in der dieselben Werte immer wiederkehren. Denn es wird, wie man sieht,

$$i = (\sqrt{-1}) = i.$$

1) $(i)^2 = (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$

$(i)^3 = (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} = -i$

$(i)^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$(i)^5 = (\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1} = i.$

Der Wert von $i^5 = i$.

Verbindet man eine imaginäre Zahl mit einer reellen Zahl durch Addition oder Subtraktion, z. B.

2) $$a \pm bi = a \pm b \cdot \sqrt{-1},$$

so erhält man eine Zahlenverbindung, die man als komplexe Zahl oder komplexe Größe bezeichnet. Die komplexen Zahlen spielen in der höheren Mathematik eine hervorragende Rolle. Auch bei technischen Rechnungen werden sie jetzt vielfach herangezogen; deshalb wollen wir ihre bedeutungsvollen Gesetze und Beziehungen hier folgen lassen.

186. Die Rechnung mit den komplexen Zahlen.

Wir wollen zeigen, daß man mit den komplexen Zahlen wie mit den reellen rechnen kann und daß man dabei im Resultat wiederum auf komplexe Formen stößt.

Addition. Zwei komplexe Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ sollen addiert werden.

Man addiert in diesem Falle die reellen mit den reellen und die imaginären mit den imaginären Zahlen. Also

3) $$(a+bi)+(\alpha+\beta i)=(a+\alpha)+(b+\beta)i.$$

Setzen wir $(a+\alpha)=A$ und $(b+\beta)=B$, so erhält man als Summe wiederum die komplexe Form $A+Bi$.

Subtraktion. Die komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ sollen subtrahiert werden. In der entsprechenden Weise wie bei der Addition erhält man

4) $$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=(a-\alpha)+(b-\beta)i.$$

Multiplikation. Die komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ sollen miteinander multipliziert werden. Wir wollen die Rechnung wirklich ausführen nach den Regeln der Algebra:

5) $$\begin{aligned}(a+bi)(\alpha+\beta i) &= a\alpha+\alpha bi+a\beta i+b\cdot\beta i\cdot i\\ &= a\alpha+\alpha bi+a\beta i-b\cdot\beta\\ &= (a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i.\end{aligned}$$

187. Die konjugierten komplexen Zahlen. Norm, Modulus.

Eine bemerkenswerte Ausnahme tritt bei der Multiplikation zweier komplexen Zahlen ein, die sich nur durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden. Multiplizieren wir aus

6) $$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Wir erhalten also hier als Resultat eine reelle Größe. Zwei komplexe Zahlen, wie die in 6), die sich nur durch das Vorzeichen der imaginären Größen voneinander unterscheiden, heißen **konjugierte komplexe Zahlen.** Das Produkt zweier komplexen konjugierten Zahlen (a^2+b^2) nennt man **die Norm.**

Die positive Quadratwurzel $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$ aus der Norm wird als **der Modulus** bezeichnet. Um anzudeuten, daß die Norm zu einer komplexen Zahl ermittelt werden soll, ist es gebräuchlich, ein N davor zu setzen. Also

7) $$N(a+bi) = N(a-bi) = a^2+b^2.$$

Zur Bezeichnung des Modulus einer komplexen Zahl setzt man ein M vor dieselbe. Also

8) $$M(a+bi) = M(a-bi) = \sqrt{a^2+b^2}.$$

188. Die Division.

Zwei komplexe Zahlen sollen durcheinander dividiert werden: $\dfrac{a+bi}{\alpha+\beta i}$.

Wir wollen Zähler und Nenner dieses Bruches mit der konjugierten Zahl des Nenners multiplizieren. Also

9) $$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(a+bi)(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)} = \frac{a\alpha+\alpha bi-a\beta i+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$
$$= \frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}.$$

189. Imaginäre Ausdrücke in der Exponentialreihe.

Im Abschnitt 8 finden wir die Beziehung

$$e^\alpha = 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}$$

Setzen wir in diese Reihe für α den Wert $i\alpha$, dann erhalten wir unter Berücksichtigung von 1)

10) $$e^{i\alpha} = 1+i\alpha-\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{i\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{i\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^6}{6!}-+\ldots$$

Trennen wir in 10) die reellen Glieder von den imaginären, dann folgt

11) $$e^{i\alpha} = \left\{1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+-\right\}$$
$$+\left\{\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\ldots\right\}i.$$

In der „Tafel der Reihen" finden wir, daß

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\cos x$$

und $$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sin x$$ sind.

Werden die Werte in der Gleichung 11) verwendet, dann erhalten wir die wertvolle Beziehung

12) $$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha$$

und dementsprechend

12a) $$e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha.$$

Durch Addition und Subtraktion von 12) und 12a) gelangt man endlich zu Gleichungen, die merkwürdige Beziehungen zwischen den goniometrischen und den Exponentialfunktionen mit imaginären Exponenten darstellen. Es ergiebt sich

13) $$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},$$

14) $$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}.$$

190. Die Moivresche Formel.

Vereinigt man die Gleichungen 12) und 12a), dann erhält man den allgemeinen Ausdruck

15) $$e^{\pm i\alpha}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha.$$

Setzen wir in ihn für α den Wert $n\alpha$, dann geht er über in

16) $$e^{\pm in\alpha}=\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha.$$

Bedenken wir nun, daß man mit Rücksicht auf 15) auch setzen kann $$(e^{\pm i\alpha})^n=(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^n$$

und daß $$e^{\pm in\alpha}=(e^{\pm i\alpha})^n$$

ist, dann ergiebt sich die sehr wichtige **Moivresche Formel**

17) $$(\cos\alpha\pm i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha.$$

Mit Hilfe der Moivreschen Formel gelangt man zu Ausdrücken, durch die man im stande ist, die trigonometrischen

Funktionen $\sin(n\alpha)$ und $\cos(n\alpha)$ durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ darzustellen.

191. Ableitungen aus der Moivreschen Formel.

Trennen wir die Moivresche Formel nach dem Vorzeichen und stellen die Formeln untereinander:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$
$$\cos n\alpha - i\sin n\alpha = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n.$$

Durch Addition und Subtraktion ergeben sich dann die Beziehungen

$$2\cos n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$$
$$2i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n.$$

Unter der Annahme, daß n eine ganze Zahl sei, entwickeln wir die rechten Seiten der Gleichungen, ziehen zusammen und berücksichtigen die Werte der Potenzen von i. Es ergeben sich dann die gewünschten Beziehungen

$$18)\quad \cos(n\alpha) = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}x\sin^2\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - + \ldots$$

$$19)\quad \sin(n\alpha) = n\cdot\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + - \ldots$$

Ist z. B. $n = 3$, dann erhält man

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$$

und

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Die letzte Formel giebt auch die im Abschnitt 138 verwendete Beziehung. Setzen wir, um das zu zeigen, für $\cos^2\alpha$ den Wert $1 - \sin^2\alpha$, dann wird

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\cdot(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\end{aligned}$$

also

$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha.$$

192. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

Man kann sich, wie in der Arithmetik auseinandergesetzt wird, die natürlichen Zahlen auf einer geraden Linie dargestellt denken. Zeichnet man sich eine gerade Linie und nimmt auf derselben einen Punkt als Anfangspunkt (Null-

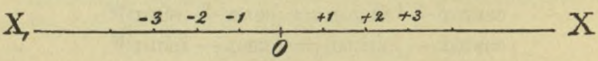

Abb. 37.

punkt) an, dann kann man auf derselben nach rechts und links eine Zahl gleicher Teile abtragen. Die Teile nach rechts stellen die positiven Werte 1, 2, 3, ... n dar, die linken die negativen Werte $-1, -2, -3, \ldots -n$. (Siehe Abb. 37.)

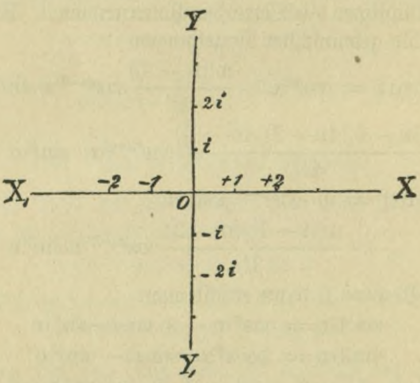

Abb. 38.

Auch die Reihe der imaginären Zahlen pflegt man in entsprechender Weise zu veranschaulichen. Wie in der Abb. 38 errichtet man im Punkte 0 auf der Linie der reellen Zahlen eine Senkrechte nach beiden Seiten und trägt auch auf dieser nach oben und unten eine Anzahl gleicher

Teile auf. Die oberen entsprechen den positiven imaginären Werten i, 2i, 3i, ... ni, die unteren den negativen imaginären Werten —i, —2i, —3i, ... —ni.

Man erkennt nun sofort, daß die aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzten komplexen Größen ihre Darstellung in der Ebene dieser Koordinaten selbst erfahren. Betrachten wir dazu den Punkt A in der Abb. 39. Er sei gegeben durch die Koordinaten $OB = a$ und $AB = b$. Die Linie OA wird durch die komplexe Größe $a + bi$ erklärt, welche durch ihre Länge und Richtung die Lage von A bestimmt. Sehr häufig pflegt man diesen Ausdruck auch durch Polarkoordinaten wiederzugeben. Man nennt dann die Linie $OA = r$ den Modulus und den Winkel α das Argument. Es ist

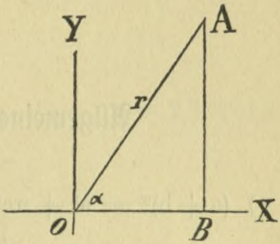

Abb. 39.

20) $$AB = r \sin\alpha$$

und $$OB = r \cos\alpha.$$ Also

21) $$a + bi = r(\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

Allgemeine Formeltafel.

1) $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$

2) $2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + 1$

3) $(n+1) b^{r+1} = (n) b^r + (n) b^{r+1}$

4) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$

5) $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\varDelta x = 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = f'(x) = \frac{d \cdot f(x)}{dx}$

6) $\frac{d(a)}{dx} = 0$

7) $\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1}$

8) $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

9) $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$

10) $\frac{d(\operatorname{tang} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

11) $\frac{d(\cot x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12) $\frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

13) $\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

14) $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}$ $e = 2{,}7182818$

15) $\frac{d(lx)}{dx} = \frac{1}{x}$

16) $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \cdot la$

17) $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

18) $\frac{d(\operatorname{arc} \sin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19) $\frac{d(\operatorname{arc} \cos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20) $\frac{d(\operatorname{arc} \operatorname{tang} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

21) $\frac{d(\operatorname{arc} \operatorname{cotang} x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

22) $\frac{d(\operatorname{arc} \sec x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

23) $\frac{d(\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

24) $\frac{d(u \cdot v)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

25) $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

26) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

27) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$$

28) $$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + f''(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + f'''(x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots f^n(x) \cdot \frac{h^n}{n!} + R$$

(Taylorsche Reihe)

29) $$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{4!} + \ldots + f^n(0) \cdot \frac{x^n}{n!} + R$$

(Mac-Laurinsche Reihe)

30) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

31) $$a^x = 1 + x \cdot la + \frac{x^2}{2!}(la)^2 + \frac{x^3}{3!}(la)^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!}(la)^n$$

32) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots \pm \frac{x^n}{n!}$$

(n eine ungerade Zahl)

33) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots \pm \frac{x^n}{n!}$$

(n eine gerade Zahl)

34) $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \pm \frac{x^n}{n}$

35) $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \quad 6}x^6 + \ldots$

36) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \ldots$

37) $\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

38) Tangente (T) $= y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

$= y\frac{ds}{dy}$

$= r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2}$ (Polarkoordinaten)

39) Normale (N) $= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$= y\frac{ds}{dx}$

$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}$ (Polarkoordinaten)

40) Subtangente (St) $= y\frac{dx}{dy}$

$= \frac{r^2 d\alpha}{dr}$ (Polarkoordinaten)

41) Subnormale (Sn) $= y \cdot \frac{dy}{dx}$

$= \frac{dr}{d\alpha}$ (Polarkoordinaten)

42) Formeln für den Krümmungskreis:

$$\alpha = x - p \cdot \frac{1+p^2}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q} \cdot p$$

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q} \qquad p = \frac{dy}{dx}$$

$$\varrho = \pm \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q} \qquad q = \frac{d^2y}{dx^2}$$

43) $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

44) $F(x,y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F^1(x,y)}{F^2(x,y)}$$

45) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ *)

46) $\int \frac{dx}{x} = lx$

47) $\int e^x dx = e^x$

48) $\int a^x dx = \frac{a^x}{la}$

49) $\int \sin x\, dx = -\cos x$

50) $\int \cos x\, dx = \sin x$

51) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

---

*) Die Integrationskonstante ist hier fortgelassen.

52) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x$

53) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

54) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x$

55) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x$

56) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x$

57) $\int a f'(x) dx = a \int f'(x) dx$

58) $\int \{F'(x) + f'(x) - \varphi'(x)\} dx = \int F'(x) dx + \int f'(x) dx - \int \varphi'(x) dx$

59) $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x)$

60) $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a)$

61) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l(a+bx)$

62) $\int \frac{n x dx}{a+bx^2} = \frac{n}{2b} \cdot l(a+bx)^2$

63) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right)$

64) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\{l(x-a) - l(x+a)\}$

$$= \frac{1}{2a} \cdot l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

65) $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

66) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = l\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

67) $\int \frac{x\,da}{a^2 + x^2} = {}^1/_2\, l\,(a^2 + x^2)$

68) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$

69) $\int \frac{a\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -a\sqrt{a^2 - x^2}$

70) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$

71) $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = {}^1/_2 \sin^2 x$

72) $\int \operatorname{tang} x \cdot dx = -l \cos x$

73) $\int \cot x \cdot dx = l \cdot \sin x$

74) $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = l \operatorname{tang} x$

75) $\int \frac{dx}{\sin x} = -l \cot\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= l \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)$$

76) $\int \frac{dx}{\cos x} = -l \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

$$= l \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

77) $$\int \frac{(mx+n)dx}{x^2+2ax+b} = \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\alpha} - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\beta}$$
$$= \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\cdot l(x-\alpha) - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\cdot l(x-\beta$$

78) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

79) $\int x \cdot e^x dx = e^x(x-1)$

80) $\int lx \cdot dx = x(lx-1)$

81) $\int x^2 lx\,dx = \frac{x^3}{3}(lx - {}^1/_3)$

82) $\int x e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right)$

83) $\int x \cdot eos\,x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x$

84) $\int x^2 \cos x\,dx = \sin x^2(x^2 + 2x \cdot \cot x - 2)$

85) $\int \cos^2 x\,dx = {}^1/_2(\sin x \cdot \cos x + x)$

86) $\int \sin^2 x\,dx = -{}^1/_2(\sin x \cos x - x)$

87) $\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = x$

88) $\int \mathrm{arc} \cdot \sin x\,dx = x \cdot \mathrm{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}$

89) $\int \mathrm{arc} \cdot \cos x\,dx = x \cdot \mathrm{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2}$

90) $\int \mathrm{arc\,tang}\,x\,dx = \mathrm{arc\,tang}\,x - {}^1/_2 l(1+x^2)$

91) $$\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

92) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{arc}\sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

93) $$\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

94) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2} l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

95) $\int x^{n-1} dx \sqrt{a^2 - x^2}$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

96) $\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin\left(\frac{x}{a}\right)$

97) $\int x^{n-1} dx \sqrt{a^2 + x^2}$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

98) $\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot l\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

99) $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

100) $\int_a^b f'(x) dx = -\int_b^a f'(x) dx$

101) $\int_a^b f'(x) dx = \int_a^c f'(x) dx + \int_c^b f'(x) dx$

102) $F = \int y dx$ (Formel für die Quadratur der Kurven)

103) $F = \frac{1}{2}\int r^2 d\alpha$ (Quadraturformel in Polarkoordin.)

104) $s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$

$= \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ (Formel für die Rektifikation der Kurven)

105) $s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}$ (Formel für die Rektifikation in Polarkoordinaten)

106) $F = 2\pi \int y\,ds$
$\quad = 2\pi \int x\,ds$ (Formeln für die Inhaltsbestimmung der Rotationsflächen)

107) $V = \pi \int y^2 dx$
$\quad = \pi \int x^2 dy$ (Formeln für die Kubatur der Rotationskörper)

108) $(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i$

109) $(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a - \alpha) + (b - \beta)i$

110) $(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + (\alpha b + a\beta)i$

111) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

112) $N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2$

113) $M(a + bi) = M(a - bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$

114) $\dfrac{a + bi}{\alpha + \beta i} = \dfrac{(a\alpha + b\beta) + (\alpha b - a\beta)i}{\alpha^2 + \beta^2}$

115) $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

116) $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$

117) $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

118) $(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha$

(Formel von Moivre)

119) $\cos(n\alpha) = \cos^n\alpha - \dfrac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha \cdot \sin^2\alpha$

$+ \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha \cdot \sin^4\alpha - + \ldots$

120) $\sin(n\alpha) = n \cdot \cos^{n-1}\alpha \cdot \sin\alpha$

$- \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha \cdot \sin^3\alpha + - \ldots$

121) $a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Mathematische Litteratur.

Für die Leser, die unser Büchlein studieren wollen, und die früher eine höhere Bildungsanstalt durchgemacht haben, empfehlen wir zur gründlichen Wiederholung der Elementarmathematik

1) Fischer, Systematischer Grundriß der Elementarmathematik. 2 Teile. Berlin.
2) Baltzer, Elemente der Mathematik. 2 Bde. Leipzig.

Das letzte Werk setzt einen gewandten Mathematiker voraus.

Diejenigen Leser, welche keine systematische Ausbildung in der Elementarmathematik genossen haben, deren mathematische Kenntnisse nur gering sind, werden auf die mathematischen Katechismen im gleichen Verlage hingewiesen. Die folgenden sind zum Verständnis der Differential- und Integralrechnung unerläßlich:

Riedel, Katechismus der Planimetrie.
Schurig-Riedel, Katechismus der Stereometrie.
Schurig, Katechismus der Algebra.
Bendt, Katechismus der Trigonometrie.
Friedrich, Katechismus der analytischen Geometrie.

Zur Einübung der Differential- und Integralrechnung eignen sich die Aufgabensammlungen von

Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung.
Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2 Bde.
Sohncke, Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. 2 Bde.

Für das weitere Studium sei empfohlen

Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis. 2 Bde.
Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung. 2 Bde.
Weber, Lehrbuch der Algebra. 2 Bde.
Bendt, Katechismus der algebraischen Analysis.
Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis.
Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie: a) der geraden Linie, b) der Kegelschnitte, c) des Raumes.

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

Webers Illustrierte Handbücher.

Belehrungen aus den Gebieten der Wissenschaften, Künste und Gewerbe usw.

Jeder Band ist in Leinwand gebunden.

Abbreviaturenlexikon. Wörterbuch lateinischer und italienischer Abkürzungen, wie sie in Urkunden und Handschriften besonders des Mittelalters gebräuchlich sind, dargestellt in über 10000 Zeichen, nebst einer Abhandlung über die mittelalterliche Kurzschrift, einer Zusammenstellung epigraphischer Sigel, der alten römischen und arabischen Zählung und der Zeichen für Münzen, Maße und Gewichte von Adriano Cappelli. 1901. 7 Mark 50 Pf.

Ackerbau, praktischer. Von Wilhelm Hamm. Dritte Auflage, gänzlich umgearbeitet von A. G. Schmitter. Mit 138 Abbildungen. 1890. 3 Mark.

Agrikulturchemie. Von Dr. Max Passon. Siebente, neubearbeitete Auflage. Mit 41 Abbildungen. 1901. 3 Mark 50 Pf.

Akustik s. Physik.

Alabastersägerei s. Liebhaberkünste.

Algebra. Von Richard Schurig. Fünfte Auflage. 1903. 3 Mark.

Algebraische Analysis. Von Franz Bendt. Mit 6 Abbildungen. 1901. 2 Mark 50 Pf.

Alpenreisen s. Bergsteigen.

Anstandslehre s. Ästhetische Bildung und Ton, der gute.

Appretur s. Chemische Technologie und Spinnerei.

Archäologie. Übersicht über die Entwickelung der Kunst bei den Völkern des Altertums von Dr. Ernst Kroker. Zweite, durchgesehene Auflage. Mit 133 Text- und 3 Tafeln Abbildungen. 1900. 3 Mark.

Archivkunde s. Registratur usw.

Arithmetik, praktische. Handbuch des Rechnens für Lehrende und Lernende. Vierte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Professor Ernst Riedel. 1901. 3 Mark 50 Pf.

Ästhetik. Belehrungen über die Wissenschaft vom Schönen und der Kunst von Robert Prölß. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1904. 3 Mark 50 Pf.

Ästhetische Bildung des menschlichen Körpers. Lehrbuch zum Selbstunterricht für alle gebildeten Stände, insbesondere für Bühnenkünstler von Oskar Guttmann. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 98 Abbildungen. 1902. 4 Mark.

Astronomie. Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender von Dr. Hermann J. Klein. Neunte, vielfach verbessere Auflage. Mit 143 Text- und 3 Tafeln Abbildungen. 1900. 3 Mark 50 Pf.

Ätherische Öle s. Chemische Technologie.

Ätzarbeiten s. Liebhaberkünste.

Aufsatz, schriftlicher s. Stilistik.

Auge, das, und seine Pflege im gesunden und kranken Zustande. Nebst einer Anweisung über Brillen. Dritte Auflage, bearbeitet von Dr. med. Paul Schröter. Mit 24 Abbildungen. 1887. 2 Mark 50 Pf.

Auswanderung. Kompaß für Auswanderer nach europäischen Ländern, Asien, Afrika, den deutschen Kolonien, Australien, Süd- und Zentralamerika, Mexiko, den Vereinigten Staaten von Amerika und Kanada Siebente Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Gustav Meinecke. Mit 4 Karten. 1897. 2 Mark 50 Pf.

Bakterien. Von Prof. Dr. W. Migula. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 35 Abbildungen. 1903. 2 Mark 50 Pf.

Ballspiele s. Bewegungsspiele sowie Englische Kugel- und Ballspiele.

Bank- und Börsenwesen. Zweite Auflage, nach den neuesten Bestimmungen der Gesetzgebung umgearbeitet von Georg Schweitzer. 1902. 3 Mark 50 Pf.

Baseball s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Baukonstruktionslehre. Mit besonderer Berücksichtigung von Reparaturen und Umbauten. Von Walter Lange. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 479 Text- und 3 Tafeln Abbildungen. 1898. 4 Mark 50 Pf.

Bauschlosserei s. Schlosserei II.

Baustile. Lehre der architektonischen Stilarten von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart von Dr. E. von Sacken. Sechzehnte Auflage, neu bearbeitet und vervollständigt von O. Gruner. Mit 143 Abbildungen. 1906. 2 Mark 50 Pf.

Baustofflehre. Von Walter Lange. Mit 162 Abbildungen. 1898. 3 Mark 50 Pf.

Beleuchtung s. Chemische Technologie und Heizung usw.

Bergbaukunde. Von Professor G. Köhler. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 225 Abbildungen. 1903. 4 Mark.

Bergsteigen. Katechismus für Bergsteiger, Gebirgstouristen und Alpenreisende von Julius Meurer. Mit 22 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Bewegungsspiele für die deutsche Jugend. Von J. C. Lion und J. H. Wortmann. Mit 29 Abbildungen. 1891. 2 Mark.

Bienenkunde und Bienenzucht. Von G. Kirsten. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage, herausgegeben von J. Kirsten. Mit 51 Abbildungen. 1887. 2 Mark.

Bierbrauerei. Hilfsbüchlein für Praktiker und Studierende von Professor M. Krandauer. Mit 42 Abbildungen. 1898. 4 Mark.

——— s. auch Chemische Technologie.

Bilanz, die kaufmännische. Ihr ordnungsmäßiger Aufbau sowie deren wissentlich unwahre Darstellung unter Vorführung und Erläuterung zahlreicher Bilanzfälschungs- und Verschleierungsdelikte von Robert Stern, Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. 1907. 3 Mark.

Bildhauerei für den kunstliebenden Laien. Von Professor Rudolf Maison. Mit 63 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Bleicherei s. Chemische Technologie und Wäscherei usw.

Bleichsucht s. Blutarmut usw.

Blumenbinderei. Anleitung zur künstlerischen Zusammenstellung von Blumen und Pflanzen und zur Einrichtung und Führung einer Blumenhandlung von Willy Lange. Mit 3 Text- und 25 Tafeln Abbildungen. 1903. 3 Mark.

Blumenzucht s. Ziergärtnerei.

Blutarmut und Bleichsucht. Von Dr. med. Hermann Peters. Zweite Auflage. Mit zwei Tafeln kolorierter Abbildungen. 1 Mark 50 Pf.

Blutvergiftung s. Infektionskrankheiten.

Börsenwesen s. Bank- und Börsenwesen.

Bossieren s. Liebhaberkünste.

Botanik. Zweite Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Dr. E. Dennert. Mit 260 Abbildungen. 1807. 4 Mark.

Botanik, landwirtschaftliche. Von Karl Müller. Zweite Auflage, vollständig umgearbeitet von R. Hermann. Mit 48 Text- und 4 Tafeln Abbildungen. 1876. 2 Mark.

Bowls s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Brandmalerei s. Liebhaberkünste.

Brennerei s. Chemische Technologie.

Briefmarkenkunde und Briefmarkensammelwesen. Von Viktor Suppantschitsch. Mit 1 Porträt und 7 Textabbildungen. 1895. 3 Mark.

Bronzemalerei auf Samt s. Liebhaberkünste.

Brückenbau. Für den Unterricht an technischen Lehranstalten und zum praktischen Gebrauch für Bauingenieure, Bahnmeister, Tiefbautechniker usw. sowie zum Selbststudium bearbeitet von Professor Richard Krüger. Mit 612 Text- und 20 Tafeln Abbildungen. 1905. 9 Mark.

Buchbinderei. Von Hans Bauer. Mit 97 Abbildungen. 1899. 4 Mark.

Buchdruckerkunst. Siebente Auflage, neu bearbeitet von Johann Jakob Weber. Mit 139 Abbildungen und mehreren farbigen Beilagen. 1901. 4 Mark 50 Pf.

Buchführung (einfache und doppelte), **kaufmännische.** Von Oskar Klemich. Sechste, durchgesehene Auflage. Mit 7 Abbildungen und 3 Wechselformularen. 1902. 3 Mark.

Buchführung, landwirtschaftliche. Von Prof. Dr. Karl Birnbaum. 1879. 2 Mark.

Buntschnitzerei s. Liebhaberkünste.

Bürgerliches Gesetzbuch s. Gesetzbuch.

Butterbereitung s. Chemische Technologie und Milchwirtschaft.

Chemie. Von Prof. Dr. Heinrich Hirzel. Achte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 32 Abbildungen. 1901. 5 Mark.

Chemikalienkunde. Eine kurze Beschreibung der wichtigsten Chemikalien des Handels. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. M. Pietsch. 1903. 3 Mark.

Chemische Technologie s. Technologie.

Cholera s. Infektionskrankheiten.

Choreographie s. Tanzkunst.

Chronologie. Mit Beschreibung von 33 Kalendern verschiedener Völker und Zeiten von Dr. Adolf Drechsler. Dritte, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. 1881. 1 Mark 50 Pf.

Correspondance commerciale par J. Forest. Deuxième édition revue et augmentée. D'après l'ouvrage de même nom en langue allemande par C. F. Findeisen. 1906. 3 Mark 50 Pf.

Dampfkessel, Dampfmaschinen und andere Wärmemotoren. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Praktiker, Techniker und Industrielle von Th. Schwartze. Siebente, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 285 Text- und 12 Tafeln Abbildungen. 1901. 5 Mark.

Dampfmaschinen s. Dampfkessel und Maschinenenlehre.

Darmerkrankungen s. Magen usw.

Delftermalerei s. Liebhaberkünste.

Destillation, trockene s. Chemische Technologie.

Dichtkunst s. Poetik.

Differential- und Integralrechnung. Von Franz Bendt. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 39 Abbildungen. 1906. 3 Mark.

Diphtherie s. Infektionskrankheiten.

Dogmatik. Von Prof. D. Dr. Georg Runze. 1898. 4 Mark.

Drainierung und Entwässerung des Bodens. Von Dr. William Löbe. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 92 Abbildungen. 1881. 2 Mark.

Dramaturgie. Von Robert Prölß. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1890. 4 Mark.

Drechslerei. Von Chr. Hermann Walde und Hugo Knoppe. Mit 392 Abbildungen. 1903. 6 Mark.

Drogenkunde. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. M. Pietsch und A. Fuchs. 1900. 3 Mark.

Düngemittel, künstliche s. Chemische Technologie.

Düngerlehre s. Agrikulturchemie.

Dysenterie s. Infektionskrankheiten.

Einjährig-Freiwillige. Der Weg zum Einjährig-Freiwilligen und zum Offizier des Beurlaubtenstandes in Armee und Marine. Von Oberstleutnant Moritz Exner. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1906. 2 Mark 50 Pf.

Eisenbahnbau. Für den Unterricht und die Übungen an technischen Lehranstalten sowie zum Gebrauch bei der Vorbereitung für den mittleren technischen Eisenbahndienst. Von Professor M. Hartmann. Mit 285 Text- und 20 Tafeln Abbildungen nebst einer Tabelle. 1906. 6 Mark.

Eissegeln und Eisspiele s. Wintersport.

Elektrizität s. Physik.

Elektrochemie. Von Dr. Walter Löb. Mit 43 Abbildungen. 1897. 3 Mark.

Elektrotechnik. Ein Lehrbuch für Praktiker, Chemiker und Industrielle von Theodor Schwartze. Siebente, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 286 Abbildungen. 1901. 5 Mark.

Entwässerung s. Drainierung.

Erd- und Straßenbau. Für den Unterricht an technischen Lehranstalten und zum praktischen Gebrauche für Bauingenieure, Straßenmeister und Tiefbautechniker sowie zum Selbststudium bearbeitet von Professor Richard Krüger. Mit 260 Abbildungen. 1904. 5 Mark 50 Pf.

Essigfabrikation s. Chemische Technologie.

Ethik. Von Friedrich Kirchner, Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 1898. 3 Mark.

Fahrkunst. Gründliche Unterweisung für Equipagenbesitzer und Kutscher für rationelle Behandlung und Dressur des Wagenpferdes, Anspannung und Fahren von Friedrich Hamelmann. Dritte Auflage. Mit 21 Abbildungen. 1885. 4 Mark 50 Pf.

Familienhäuser für Stadt und Land als Fortsetzung von „Villen und kleine Familienhäuser". Von Georg Aster. Zweite Auflage. Mit 110 Abbildungen von Wohngebäuden nebst dazugehörigen Grundrissen und 6 in den Text gedruckten Figuren. 1905. 5 Mark.

Farbenlehre. Von Ernst Berger. Mit 40 Abbildungen und 8 Farbentafeln. 1898. 4 Mark 50 Pf.

Färberei. Dritte Auflage. Neubearbeitung von Dr. Grothes „Färberei und Zeugdruck" von Dr. A. Ganswindt. Mit 120 Abbildungen. 1904. 6 Mark.

——— s. auch Chemische Technologie.

Farbstoffabrikation s. Chemische Technologie.

Farbwarenkunde. Von Dr. G. Heppe. 1881. 2 Mark.

Fechtkunst s. Hiebfechtschule, Säbelfechtschule und Stoßfechtschule.

Feldball s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Feldmesskunst. Von Prof. Dr. C. Pietsch. Siebente Auflage. Mit 76 Abbildungen. 1903. 1 Mark 80 Pf.

Festigkeitslehre s. Statik.

Fette s. Chemische Technologie.

Feuerbestattung. Von M. Pauly. Mit 31 Abbildungen. 1904. 2 Mark.

Feuerlösch- und Feuerwehrwesen. Von Rudolf Fried. Mit 217 Abbildungen. 1899. 4 Mark 50 Pf.

Feuerwerkerei s. Chemische Technologie und Lustfeuerwerkerei.

Fieber s. Infektionskrankheiten.

Finanzwissenschaft. Von Alois Bischof. Sechste, verbesserte Auflage. 1898. 2 Mark.

Fischzucht, künstliche, und Teichwirtschaft. Wirtschaftslehre der zahmen Fischerei von Eduard August Schröder. Mit 52 Abbildungen. 1889. 2 Mark 50 Pf.

Flachsbau und Flachsbereitung. Von K. Sonntag. Mit 12 Abbildungen. 1872. 1 Mark 50 Pf.

Flachschnitzerei s. Liebhaberkünste.

Flecktyphus s. Infektionskrankheiten.

Flöte und Flötenspiel. Ein Lehrbuch für Flötenbläser von Maximilian Schwedler. Mit 22 Abbildungen und vielen Notenbeispielen. 1897. 2 Mark 50 Pf.

Forstbotanik. Von H. Fischbach. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage, herausgegeben von Professor R. Beck. Mit 77 Abbildungen. 1905 3 Mark 50 Pf.

Fossilien s. Geologie und Versteinerungskunde.

Frau, das Buch der jungen. Ratschläge für Schwangerschaft, Geburt und Wochenbett von Dr. med. H. Burckhardt. Fünfte, verbesserte Auflage. 1899. 2 Mark 50 Pf., in Geschenkeinband 3 Mark.

Frauenkrankheiten, ihre Entstehung und Verhütung. Eine populärwissenschaftliche Studie von Dr. med. Wilhelm Huber. Vierte Auflage. Mit 40 Abbildungen. 1895. 4 Mark.

Freimaurerei. Von Dr. Willem Smitt. Zweite, verbesserte Auflage. 1899. 2 Mark.

Fremdwörter s. Wörterbuch, Deutsches.

Fuß s. Hand und Fuß.

Fußball s. Bewegungsspiele sowie Englische Kugel- und Ballspiele.

Galvanoplastik und Galvanostegie. Kurzgefaßter Leitfaden für das Selbststudium und den Gebrauch in der Werkstatt von Dr. Georg Langbein und Dr. ing. Alfred Frießner. Vierte, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 78 Abbildungen. 1904. 3 Mark 50 Pf.

Gartenbau s. Nutz-, Zier-, Zimmergärtnerei, Obstverwertung und Rosenzucht.

Gasfabriktion s. Chemische Technologie.

Gebärdensprache s. Ästhetische Bildung und Mimik.

Geburt s. Frau, das Buch der jungen.

Gedächtniskunst. Von Hermann Kothe. Neunte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. Georg Pietsch. 1905. 1 Mark 50 Pf.

Geflügelzucht. Ein Merkbüchlein für Liebhaber, Züchter und Aussteller schönen Rassegeflügels von Bruno Dürigen. Mit 40 Abbildungen und 7 Tafeln. 1890. 4 Mark.

Geisteskrankheiten. Geschildert für gebildete Laien von Dr. med. Theobald Güntz. 1890. 2 Mark 50 Pf.

Geldschrankbau s. Schlosserei I.

Gemäldekunde. Von Dr. Theodor v. Frimmel. Zweite, umgearbeitete und stark vermehrte Auflage. Mit 38 Abbildungen. 1904. 4 Mark.

Gemüsebau s. Nutzgärtnerei.

Genickstarre s. Infektionskrankheiten.

Geographie. Von Karl Arenz. Fünfte Auflage, gänzlich umgearbeitet von Prof. Dr. Fr. Traumüller und Dr. O. Hahn. Mit 69 Abbildungen. 1899. 3 Mark 50 Pf.

Geographie, mathematische. Zweite Auflage, umgearbeitet und verbessert von Dr. Hermann J. Klein. Mit 114 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.

Geographische Verbreitung der Tiere s. Tiere usw.

Geologie. Von Dr. Hippolyt Haas, o. Honorarprofessor der Geologie und Paläontologie an der Universität Kiel. Achte, gänzlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 244 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Tafel. 1906. 4 Mark.

Geometrie, analytische. Von Dr. Max Friedrich. Zweite Auflage, durchgesehen und verbessert von Ernst Riedel. Mit 56 Abbildungen. 1900. 3 Mark.

Geometrie, darstellende s. Projektionslehre.

Geometrie, ebene und räumliche. Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzsche. Vierte vermehrte und verbesserte Auflage, bearbeitet von Franz Zetzsche. Mit 242 Abbildungen. 1905. 4 Mark.

Gerberei s. Chemische Technologie.

Gesangskunst. Von Professor Ferdinand Sieber. Sechste Auflage. Mit vielen Notenbeispielen. 1903. 2 Mark 50 Pf.

Gesangsorgane s. Gymnastik der Stimme.

Geschichte, allgemeine s. Weltgeschichte.

Geschichte, deutsche. Von Wilhelm Kentzler. 1879. 2 Mark 50 Pf.

Gesellschaft, menschliche s. Soziologie.

Gesetzbuch, Bürgerliches nebst Einführungsgesetz. Textausgabe mit Sachregister. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Gesetzgebung des Deutschen Reiches s. Reich, das Deutsche.

Gesteinskunde s. Geologie und Petrographie.

Gesundheitslehre, naturgemäße, auf physiologischer Grundlage. Siebzehn Vorträge von Dr. med. Fr. Scholz. Mit 7 Abbildungen. 1884. 3 Mark 50 Pf.

Gewerbeordnung für das Deutsche Reich. Textausgabe mit Sachregister. 1901. 1 Mark 20 Pf.

Gicht und Rheumatismus. Von Dr. med. Arnold Pagenstecher. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 9 Abbildungen. 1903. 2 Mark.

Girowesen. Von Karl Berger. Mit 21 Formularen. 1881. 2 Mark

Glasbronzemalerei s. Liebhaberkünste.

Glasfabrikation s. Chemische Technologie.

Glasmalerei s. Porzellan- und Glasmalerei sowie Liebhaberkünste.

Glasradierarbeit s. Liebhaberkünste.

Gobelinmalerei s. Liebhaberkünste.

Golf s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Goniometrie s. Trigonometrie.

Gravierarbeit auf Holz und Linoleum s. Liebhaberkünste.

Gymnastik, ästhetische und pädagogische s. Ästhetische Bildung usw.

Haare s. Haut, Haare, Nägel.

Hand und Fuß. Ihre Pflege, ihre Krankheiten und deren Verhütung nebst Heilung von Dr. med. J. Albu. Mit 30 Abbildungen. 1895. 2 Mark 50 Pf.

Handelsgesetzbuch für das Deutsche Reich nebst Einführungsgesetz. Textausgabe mit Sachregister. 1897. 2 Mark.

Handelsmarine, deutsche. Von Kapitän zur See a. D. Richard Dittmer. Mit 1 Karte und 66 Abbildungen. 1892. 3 Mark 50 Pf.

Handelsrecht, deutsches, nach dem Handelsgesetzbuch für das Deutsche Reich von Robert Fischer. Vierte, vollständig umgearbeite Auflage. 1901. 2 Mark.

Handelswissenschaft auf volkswirtschaftlicher Grundlage. Siebente Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. Otto Goldberg. 1903. 3 Mark.

Harmonielehre s. Kompositionslehre.

Haut, Haare, Nägel, ihre Pflege, ihre Krankheiten und deren Heilung nebst einem Anhang über Kosmetik von Dr. med. H. Schultz. Vierte Auflage, neu bearbeitet von Dr. med. E. Vollmer. Mit 42 Abbildungen. 1898. 2 Mark 50 Pf.

Heilgymnastik. Von Dr. med. H. A. Ramdohr. Mit 115 Abbildungen. 1893. 3 Mark 50 Pf.

Heizung, Beleuchtung und Ventilation. Von Th. Schwartze. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 209 Abbildungen. 1897. 4 Mark.

Heizung s. auch Chemische Technologie.

Heraldik. Grundriß der Wappenkunde. Von Dr. Eduard v. Sacken. Siebente Auflage, neu bearbeitet von Moriz v. Weittenhiller. Mit 261 Abbildungen. 1906. 2 Mark.

Herz, Blut- und Lymphgefäße, Nieren und Kropfdrüse. Ihre Pflege und Behandlung im gesunden und kranken Zustande von Dr. med. Paul Niemeyer. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 49 Abbildungen. 1890. 3 Mark.

Hiebfechtschule, deutsche, für Korb- und Glockenrapier. Eine kurze Anweisung zur Erlernung des an unseren deutschen Hochschulen gebräuchlichen Hiebfechtens. Herausgegeben vom Verein deutscher Universitätsfechtmeister. Zweite Auflage. Mit 64 Abbildungen. 1901. 1 Mark 50 Pf.

Hockey s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Holzindustrie, technischer Ratgeber auf dem Gebiete der. Taschenbuch für Werkmeister, Betriebsleiter, Fabrikanten und Handwerker von Rudolf Stübling. Mit 112 Abbildungen. 1901. 6 Mark.

Holzmalerei, -sägerei s. Liebhaberkünste.

Hornsägerei s. Liebhaberkünste.

Hufbeschlag. Mit einem Anhang: Der Klauenbeschlag. Vierte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Hermann Uhlich. Mit 140 Abbildungen. 1905. 2 Mark 50 Pf.

Hühnerzucht s. Geflügelzucht.

Hunderassen. Beschreibung der einzelnen Hunderassen, Behandlung, Zucht und Aufzucht, Dressur und Krankheiten des Hundes von Franz Krichler. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von G. Knapp. Mit 70 Abbildungen. 1905. 3 Mark.

Hüttenkunde, allgemeine. Von Prof. Dr. E. F. Dürre. Mit 209 Abbildungen. 1877. 4 Mark 50 Pf.

Infektionskrankheiten. Von Dr. med. H. Dippe. 1896. 3 Mark.

Influenza s. Infektionskrankheiten.

Intarsiaschnitzerei s. Liebhaberkünste.

Integralrechnung s. Differential- und Integralrechnung

Invalidenversicherung. Von Alfred Wengler. 1900. 2 Mark.

Jäger und Jagdfreunde von Franz Krichler. Zweite Auflage, durchgesehen von G. Knapp. Mit 57 Abbildungen. 1902. 3 Mark.

Kalenderkunde, Belehrungen über Zeitrechnung, Kalenderwesen und Feste. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Prof. Dr. Bruno Peter. 1901. 2 Mark.

——— s. auch Chronologie.

Kaliindustrie s. Chemische Technologie.

Kältetechnik, moderne. Ihr Anwendungsgebiet, ihre Maschinen und ihre Apparate. Von W. M. Lehnert. Mit 140 Text- und 12 Tafeln Abbildungen. 1905. 4 Mark.

Käsebereitung s. Chemische Technologie und Milchwirtschaft.

Kehlkopf, der, im gesunden und erkrankten Zustande. Von Dr. med. C. L. Merkel. Zweite Auflage, bearbeitet von Sanitätsrat Dr. med. O. Heinze. Mit 33 Abbildungen. 1896. 3 Mark 50 Pf.

Kellerwirtschaft s. Weinbau.

Keramik s. Chemische Technologie.

Keramik, Geschichte der. Von Friedrich Jännicke. Mit 417 Abbildungen. 1900. 10 Mark.

Kerbschnittarbeit s. Liebhaberkünste.

Kerzen s. Chemische Technologie.

Keuchhusten s. Infektionskrankheiten.

Kind, das, und seine Pflege. Von Dr. med. Livius Fürst. Fünfte, umgearbeitete und bereicherte Auflage. Mit 129 Abbildungen. 1897. 4 Mark 50 Pf., in Geschenkeinband 5 Mark.

——— s. auch Sprache und Sprachfehler des Kindes.

Kindergarten, Einführung in die Theorie und Praxis des. Von Eleonore Heerwart. Mit 37 Abbildungen. 1901. 2 Mark 50 Pf.

Kirchengeschichte. Von Friedrich Kirchner. 1880. 2 Mark 50 Pf.

Klavierspiel, die Elemente des. Von Franklin Taylor. Deutsche Ausgabe von Mathilde Stegmayer. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit vielen Notenbeispielen. 1893. 2 Mark.

Klavierunterricht. Studien, Erfahrungen und Ratschläge für Klavierpädagogen von Louis Köhler. Sechste, neu durchgearbeitete Auflage von Richard Hofmann. 1905. 4 Mark.

Klempnerei. Von Franz Dreher. Erster Teil. Die Materialien, die Arbeitstechniken und die dabei zur Verwendung kommenden Werkzeuge, Maschinen und Einrichtungen. Mit 339 Abbildungen. 1902. 4 Mark 50 Pf.

— — Zweiter Teil. Die heutigen Arbeitsgebiete der Klempnerei. Mit 622 Abbildungen. 1902. 4 Mark 50 Pf.

Knabenhandarbeit. Ein Handbuch des erziehlichen Unterrichts von Dr. Woldemar Götze. Mit 69 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Kompositionslehre. Von Joh. Christ. Lobe. Siebente, vermehrte und verbesserte Auflage von Richard Hofmann. 1902. 3 Mark 50 Pf.

Korkarbeiten s. Liebhaberkünste.

Korrespondenz, kaufmännische. Von C. F. Findeisen, Siebente, vermehrte Auflage, bearbeitet von Richard Spalteholz. 1906. 2 Mark 50 Pf.

Kosmetik s. Haut, Haare, Nägel sowie die Zähne usw.

Krankenpflege im Hause. Von Dr. med. Paul Wagner. Mit 71 Abbildungen. 1896. 4 Mark.

Krankenversicherung. Von Alfred Wengler. 1898. 2 Mark.

Krankheiten, ansteckende s. Infektionskrankheiten.

Kricket s. Englische Kugel und Ballspiele.

Kristallographie s. Mineralogie.

Krocket s. Bewegungsspiele sowie Englische Kugel- und Ballspiele.

Krupp s. Infektionskrankheiten.

Kugel- und Ballspiele, englische. Ein Leidfaden für die deutschen Spieler von Franz Presinsky. Mit 105 Abbildungen. 1903. 3 Mark 50 Pf.

Kulturgeschichte, allgemeine. Dritte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. Rudolf Eisler. 1905. 3 Mark 50 Pf.

Kulturgeschichte, deutsche. Von Dr. Rudolf Eisler. 1905. 3 Mark.

Kunstgeschichte. Sechste Auflage, vollständig neu bearbeitet von Hermann Ehrenberg. Mit 314 Abbildungen. 1906. 6 Mark, in Geschenkeinband 6 Mark 50 Pf.

——— s. auch Archäologie.

Kunstwollfabrikation s. Wollwäscherei.

Kurzschrift, mittelalterliche s. Abbreviaturenlexikon.

Laubsägerei s. Liebhaberkünste.

Lawn-Tennis s. Bewegungsspiele sowie Englische Kugel- und Ballspiele.

Lederätz- und -beizarbeiten s. Liebhaberkünste.

Lederschnittarbeiten s. Liebhaberkünste.

Leimfabrikation s. Chemische Technologie.

Liebhaberkünste. Ein Leitfaden der weiblichen Hand- und Kunstfertigkeiten von Wanda Friedrich. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 210 Abbildungen. 1905. 2 Mark 50 Pf.

Literaturgeschichte, allgemeine. Von Prof. Dr. Adolf Stern. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1906. 4 Mark.

Literaturgeschichte, deutsche. Von Dr. Paul Möbius. Siebente, verbesserte Auflage von Prof. Dr. Gotthold Klee. 1896. 2 Mark.

Logarithmen. Von Prof. Max Meyer. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 3 Tafeln und 7 Textabbildungen. 1898. 2 Mark 50 Pf.

Logik. Von Friedrich Kirchner. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 36 Abbildungen. 1900. 3 Mark.

Lunge. Ihre Pflege und Behandlung im gesunden und kranken Zustande von Dr med. Paul Niemeyer. Neunte, umgearbeitete Auflage von Dr. med. Karl Gerster. Mit 41 Abbildungen. 1900. 3 Mark.

Lungenentzündung und Lungenschwindsucht s. Infektionskrankheiten.

Lustfeuerwerkerei. Kurzer Lehrgang für die gründliche Ausbildung in allen Teilen der Pyrotechnik von G. A. v. Nida. Mit 124 Abbildungen. 1883. 2 Mark.

Magen und Darm, die Erkrankungen des. Für den Laien gemeinverständlich dargestellt von Dr. med. Edgar v. Sohlern. Mit 2 Abbildungen und 1 Tafel. 1895. 3 Mark 50 Pf.

Magnetismus s. Physik.

Malaria s. Infektionskrankheiten.

Malerei. Ein Ratgeber und Führer für angehende Künstler und Dilettanten von Professor Karl Raupp. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 54 Text- und 9 Tafeln Abbildungen. 1904. 3 Mark.

——— s. auch Liebhaberkünste sowie Porzellan- und Glasmalerei.

Mandelentzündung s. Infektionskrankheiten.

Markscheidekunst. Von O. Brathuhn. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 190 Abbildungen. 1906. 3 Mark.

Maschinen s. Dampfkessel usw.

Maschinenelemente. Von L. Otterdinger. Mit 595 Abbildungen. 1902. 6 Mark.

Maschinenlehre, allgemeine. Beschreibung der gebräuchlichsten Kraft- und Arbeitsmaschinen der verschiedenen Industriezweige. Von Th. Schwartze. Mit 327 Abbildungen. 1903. 6 Mark.

Masern s. Infektionskrankheiten.

Massage. Von Dr. med. E. Preller. Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage von Dr. med. Ralf Wichmann. Mit 89 Abbildungen. 1903. 3 Mark 50 Pf.

Mechanik. Von Ph. Huber. Siebente Auflage, den Fortschritten der Technik entsprechend bearbeitet von Professor Walter Lange. Mit 215 Abbildungen. 1902. 3 Mark 50 Pf.

Mechanische Technologie s. Technologie.

Meereskunde, allgemeine. Von Johannes Walther. Mit 72 Abbildungen und einer Karte. 1893. 5 Mark.

Metallätzarbeit, -sägerei und -treiben s. Liebhaberkünste.

Metallurgie. Von Dr. Th. Fischer. Mit 29 Abbildungen. 1904. 5 Mark.

Metaphysik. Von Prof. D. Dr. Georg Runze. 1905. 5 Mark.

Meteorologie. Von Prof. Dr. W. J. van Bebber. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage Mit 63 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Mikroskopie. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. Siegfried Garten. Mit 152 Abbildungen und einer farbigen Tafel. 1904. 4 Mark.

Milch, künstliche s. Chemische Technologie.

Milchwirtschaft. Von Dr. Eugen Werner. Mit 23 Abbildungen. 1884. 3 Mark.

Milzbrand s. Infektionskrankheiten.

Mimik und Gebärdensprache. Von Karl Skraup. Mit 60 Abbildungen. 1892. 3 Mark 50 Pf.

Mineralogie. Von Dr. Eugen Hussak. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 223 Abbildungen. 1901. 3 Mark.

Motoren s. Damkfkessel usw.

Mumps s. Infektionskrankheiten.

Münzkunde. Von Hermann Dannenberg. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 11 Tafeln Abbildungen. 1899. 4 Mark.

Musik. Von J. C. Lobe. Achtundzwanzigste, durchgesehene Auflage von Richard Hofmann. 1904. 1 Mark 50 Pf.

Musikgeschichte. Von Robert Musiol. Dritte, stark erweiterte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Richard Hofmann. Mit 11 Text- und 22 Tafeln Abbildungen. 1905. 4 Mark 50 Pf.

Musikinstrumente, ihre Beschreibung und Verwendung von Richard Hofmann. Sechste, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 205 Abbildungen und zahlreichen Notenbeispielen. 1903. 4 Mark.

Musterschutz s. Patentwesen usw.

Mythologie. Von Dr. Ernst Kroker. Mit 73 Abbildungen. 1891. 4 Mark.

Nägel s. Haut, Haare, Nägel.

Naturlehre. Erklärung der wichtigsten physikalischen, meteorologischen und chemischen Erscheinungen des täglichen Lebens von Dr. C. E. Brewer. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 53 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Nautik. Von Dr. Rudolf Zelt. Mit 68 Abbildungen. 1906. 4 Mark.

Nervosität. Von Dr. med. Paul Julius Möbius. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1906. 2 Mark 50 Pf.

Nivellierkunst. Von Prof. Dr. C. Pietsch. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Mit 61 Abbildungen. 1900. 2 Mark.

Numismatik s. Münzkunde.

Nutzgärtnerei. Grundzüge des Gemüse- und Obstbaues von Hermann Jäger. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage, nach den neuesten Erfahrungen und Fortschritten umgearbeitet von J. Wesselhöft. Mit 75 Abbildungen. 1905. 3 Mark.

Obstbau s. Nutzgärtnerei.

Obstverwertung. Anleitung zur Behandlung und Aufbewahrung des frischen Obstes, zum Dörren, Einkochen, Einmachen sowie zur Wein-, Likör-, Branntwein- und Essigbereitung aus den verschiedensten Obst- und Beerenarten von Johannes Wesselhöft. Mit 45 Abbildungen. 1897. 3 Mark.

Ohr, das, und seine Pflege im gesunden und kranken Zustande. Von Prof. Dr. med. Ernst Richard Hagen. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 45 Abbildungen. 1883. 2 Mark 50 Pf.

Öle s. Chemische Technologie.

Optik s. Physik.

Orden s. Ritter- und Verdienstorden.

Orgel. Erklärung ihrer Struktur, besonders in Beziehung auf technische Behandlung beim Spiel von C. F. Richter. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Hans Menzel. Mit 25 Abbildungen. 1896. 3 Mark.

Ornamentik. Leitfaden über die Geschichte, Entwickelung und charakteristischen Formen der Verzierungsstile aller Zeiten von F. Kanitz. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 137 Abbildungen. 1902. 2 Mark 50 Pf.

Pädagogik. Von Dr. Friedrich Kirchner. 1890. 2 Mark.

Pädagogik, Geschichte der. Von Friedrich Kirchner. 1899. 3 Mark.

Paläontologie s. Versteinerungskunde.

Patentwesen, Muster- und Warenzeichenschutz. Von Otto Sack. Mit 3 Abbildungen. 1897. 2 Mark 50 Pf.

Perspektive, angewandte. Nebst Erläuterung über Schattenkonstruktionen und Spiegelbilder von Professor Max Kleiber. Vierte, durchgesehene Auflage. Mit 145 Text- und 7 Tafeln Abbildungen. 1904. 3 Mark.

Petrefaktenkunde s. Versteinerungskunde.

Petrographie. Lehre von der Beschaffenheit, Lagerung und Bildungsweise der Gesteine von Prof. Dr. J. Blaas. Zweite, vermehrte Auflage. Mit 86 Abbildungen. 1898. 3 Mark.

Pferdedressur s. Fahrkunst und Reitkunst.

Pflanzen, die leuchtenden s. Tiere und Pflanzen usw.

Pflanzenmorphologie, vergleichende. Von Dr. E. Dennert. Mit über 660 Einzelbildern in 506 Figuren. 1894. 5 Mark.

Philosophie. Von J. H. v. Kirchmann. Vierte, durchgesehene Aufl. 1897. 3 Mark.

Philosophie, Geschichte der, von Thales bis zur Gegenwart. Von Lic. Dr. Friedrich Kirchner. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1896. 4 Mark.

Photographie, praktische. Sechste Auflage, völlig neu bearbeitet von Professor H. Keßler. Mit 141 Text- und 8 Tafeln Abbildungen. 1906. 4 Mark 50 Pf.

Phrenologie. Von Gustav Scheve. Achte Auflage. Mit 19 Abbildungen. 1896. 2 Mark.

Physik. Von Prof. Dr. Julius Kollert. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 364 Abbildungen. 1903. 7 Mark.

Physik, Geschichte der. Von Prof. Dr. E. Gerland. Mit 72 Abbildungen. 1892. 4 Mark.

Physiologie des Menschen, als Grundlage einer naturgemäßen Gesundheitslehre. Von Dr. med. Fr. Scholz. Mit 58 Abbildungen. 1883. 3 Mark.

Ping-Pong s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Planetrographie. Eine Beschreibung der im Bereiche der Sonne zu beobachtenden Körper von O. Lohse. Mit 15 Abbildungen. 1894. 3 Mark 50 Pf.

Planimetrie mit einem Anhange über harmonische Teilung, Potenzlinien und das Berührungssystem des Apollonius. Von Ernst Riedel. Mit 190 Abbildungen. 1900. 4 Mark.

Pocken s. Infektionskrankheiten.

Poetik, deutsche. Von Prof. Dr. Johannes Minckwitz. Dritte Auflage. 1899. 2 Mark 50 Pf.

Porzellan- und Glasmalerei. Von Robert Ulke. Mit 77 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Projektionslehre. Mit einem Anhange, enthaltend die Elemente der Perspektive. Von Julius Hoch. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 121 Abbildungen. 1898. 2 Mark.

Psychologie. Von Friedrich Kirchner. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1896. 3 Mark.

Pulverfabrikation s. Chemische Technologie.

Punzierarbeit s. Liebhaberkünste.

Pyrotechnik s. Lustfeuerwerkerei.

Rachenbräune s. Infektionskrankheiten.

Radfahrsport. Von Dr. Karl Biesendahl. Mit 105 Abbildungen. 1897. 3 Mark.

Raumberechnung. Anleitung zur Größenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art von Prof. Dr. E. Pietsch. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 55 Abbildungen. 1898. 1 Mark 80 Pf.

Rebenkultur s. Weinbau usw.

Rechnen s. Arithmetik.

Rechnen, kaufmännisches. Von Robert Stern. 1904. 5 Mark.

Redekunst. Anleitung zum mündlichen Vortrage von Roderich Benedix. Sechste Auflage. 1903. 1 Mark 50 Pf.

——— s. auch Vortrag, der mündliche.

Registratur- und Archivkunde. Handbuch für das Registratur- und Archivwesen bei den Reichs-, Staats-, Hof-, Kirchen-, Schul- und Gemeindebehörden, den Rechtsanwälten usw. sowie bei den Staatsarchiven von Georg Holtzinger. Mit Beiträgen von Dr. Friedrich Leist. 1883. 3 Mark.

Reich, das Deutsche. Ein Unterrichtsbuch in den Grundsätzen des deutschen Staatsrechts, der Verfassung und Gesetzgebung des Deutschen Reiches von Dr. Wilhelm Zeller. Zweite, vielfach umgearbeitete und erweiterte Auflage. 1880. 3 Mark.

Reinigung s. Wäscherei usw.

Reitkunst in ihrer Anwendung auf Campagne-, Militär- und Schulreiterei. Von Adolf Kästner. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 71 Text- und 2 Tafeln Abbildungen. 1892. 6 Mark.

Religionsphilosophie. Von Prof. D. Dr. Georg Runze. 1901. 4 Mark.

Rheumatismus s. Gicht usw. und Infektionskrankheiten.

Ritter- und Verdienstorden aller Kulturstaaten der Welt innerhalb des 19. Jahrhunderts. Auf Grund amtlicher und anderer zuverlässiger Quellen zusammengestellt von Maximilian Gritzner. Mit 760 Abbildungen. 1893.
9 Mark, in Pergamenteinband 12 Mark.

Rose s. Infektionskrankheiten.

Rosenzucht. Vollständige Anleitung über Zucht, Behandlung und Verwendung der Rosen im Lande und in Töpfen von Hermann Jäger. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von P. Lampert. Mit 70 Abbildungen. 1893.
2 Mark 50 Pf.

Röteln s. Infektionskrankheiten.

Rotlauf s. Infektionskrankheiten.

Rotz s. Infektionskrankheiten.

Rückfallfieber s. Infektionskrankheiten.

Ruder- und Segelsport. Von Otto Gusti. Mit 66 Abbildungen und einer Karte. 1898.
4 Mark.

Ruhr s. Infektionskrankheiten.

Rundball s. Englische Kugel- und Ballspiele.

Säbelfechtschule, deutsche. Eine kurze Anweisung zur Erlernung des an unseren deutschen Hochschulen gebräuchlichen Säbelfechtens. Herausgegeben vom Verein deutscher Fechtmeister. Mit 27 Abbildungen. 1907.
1 Mark 50 Pf.

Säugetiere, Vorfahren der, in Europa. Von Albert Gaudry. Aus dem Französischen übersetzt von William Marshall. Mit 40 Abbildungen. 1891. 3 Mark.

Schachspielkunst. Von K. J. S. Portius. Zwölfte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1901.
2 Mark 50 Pf.

Scharlach s. Infektionskrankheiten.

Schattenkonstruktion s. Perspektive.

Schauspielkunst s. Dramaturgie.

Schlitten- und Schlittschuhsport s. Wintersport.

Schlosserei. Von Julius Hoch. Erster Teil (Beschläge, Schloßkonstruktionen und Geldschrankbau). Mit 256 Abbildungen. 1899.
6 Mark.

——— Zweiter Teil (Bauschlosserei). Mit 288 Abbildungen. 1899. 6 Mark.

——— Dritter Teil (Kunstschlosserei und Verschönerungsarbeiten des Eisens). Mit 201 Abbildungen. 1901.
4 Mark 50 Pf.

Schneeschuhsport s. Wintersport.

Schnupfen s. Infektionskrankheiten.

Schreibunterricht. Mit einem Anhang: Die Rundschrift. Dritte Auflage, neu bearbeitet von Georg Funk. Mit 82 Figuren. 1893.
1 Mark 50 Pf.

Schwangerschaft s. Frau, das Buch der jungen.

Schwimmkunst. Von Martin Schwägerl. Zweite Auflage. Mit 111 Abbildungen. 1897.
2 Mark.

Schwindsucht s. Infektionskrankheiten.

Segelsport s. Ruder- und Segelsport.

Seifenfabrikation s. Chemische Technologie.

Selbsterziehung. Ein Wegweiser für die reifere Jugend von John Stuart Blackie. Deutsche autorisierte Ausgabe von Dr. Friedrich Kirchner. Dritte Auflage. 1903.
2 Mark.

Silizineglasmalerei s. Liebhaberkünste.

Sinne und Sinnesorgane der niederen Tiere. Von E. Jourdan. Aus dem Französischen übersetzt von William Marshall. Mit 48 Abbildungen. 1891. 4 Mark.

Sitte, die feine s. Ton, der gute.
Sittenlehre s. Ethik.
Skrofulose s. Infektionskrankheiten.
Sozialismus, der moderne. Von Max Haushofer. 1896. 3 Mark.
Soziologie. Die Lehre von der Entstehung und Entwickelung der menschlichen Gesellschaft. Von Dr. Rudolf Eisler. 1903. 4 Mark.
Spiegelbilder s. Perspektive.
Spiele s. Bewegungsspiele, Englische Kugel- und Ballspiele sowie Kindergarten.
Spinnerei, Weberei und Appretur. Vierte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Niklas Reiser. Mit 348 Abbildungen. 1901. 6 Mark.
Spiritusbrennerei s. Chemische Technologie.
Spitzpocken s. Infektionskrankheiten.
Sprache und Sprachfehler des Kindes. Gesundheitslehre der Sprache für Eltern, Erzieher und Ärzte von Dr. med. Hermann Gutzmann. Mit 22 Abbildungen. 1894. 3 Mark 50 Pf.
Sprache, deutsche s. Wörterbuch, deutsches,
Sprachlehre, deutsche. Von Dr. Konrad Michelsen. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage von Friedrich Nedderich. 1898. 2 Mark 50 Pf.
Sprachorgane s. Gymnastik der Stimme.
Sprengstoffe s. Chemische Technologie.
Sprichwörter s. Zitatenlexikon.
Staatsrecht s. Reich, das Deutsche.
Städtebau s. Erd- und Straßenbau.
Stalldienst und Stallpflege s. Fahrkunst.
Starrkrampf s. Infektionskrankheiten.
Statik mit gesonderter Berücksichtigung der zeichnerischen und rechnerischen Methoden. Von Walter Lange. Mit 284 Abbildungen. 1897. 4 Mark.
Steinätzarbeit und Steinmosaiktechnik s. Liebhaberkünste.
Stenographie. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende der Stenographie im allgemeinen und des Systems von Gabelsberger im besonderen von Professor Heinrich Krieg. Dritte, vermehrte Auflage. Mit Titelbild. 1900. 3 Mark.
Stereometrie. Mit einem Anhange über Kegelschnitte sowie über Maxima und Minima, begonnen von Richard Schurig, vollendet und einheitlich bearbeitet von Ernst Riedel. Mit 159 Abbildungen. 1898. 3 Mark 50 Pf.
Stile s. Baustile und Ornamentik.
Stilistik. Eine Anweisung zur Ausarbeitung schriftlicher Aufsätze von Dr. Konrad Michelsen. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von Friedrich Nedderich. 1898. 2 Mark 50 Pf.
Stimme, Gymnastik der, gestützt auf physiologische Gesetze. Eine Anweisung zum Selbstunterricht in der Übung und dem richtigen Gebrauche der Sprach- und Gesangsorgane von Oskar Guttmann. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 24 Abbildungen. 1902. 3 Mark 50 Pf.
Stoßfechtschule, deutsche, nach Kreußlerschen Grundsätzen. Zusammengestellt und herausgegeben vom Verein deutscher Fechtmeister. Mit 42 Abbildungen. 1892. 1 Mark 50 Pf.
Stottern s. Sprache und Sprachfehler.
Strahlenpilzkrankheit s. Infektionskrankheiten.
Straßenbau s. Erd- und Straßenbau.
Tanzkunst. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende nebst einem Anhang über Choreographie von Bernhard Klemm. Siebente Auflage. Mit 83 Abbildungen und vielen musikalisch-rhythmischen Beispielen. 1901. 3 Mark.
——— s. auch Ästhetische Bildung usw.

Taubenzucht s. Geflügelzucht.

Technologie, chemische. Unter Mitwirkung von P. Kersting, M. Horn, Th. Fischer, A. Junghahn und J. Pinnow herausgegeben von Paul Kersting und Max Horn. Erster Teil. Anorganische Verbindungen. Mit 70 Abbildungen. 1902. 5 Mark.

— — Zweiter Teil. Organische Verbindungen. Mit 72 Abbildungen. 1902. 5 Mark.

— — Dritter Teil siehe Hüttenkunde.

— — Vierter Teil siehe Metallurgie.

Technologie, mechanische. Von Albrecht von Ihering. Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 349 Abbildungen. 1904. 4 Mark.

Teichwirtschaft s. Fischzucht usw.

Telegraphie, elektrische. Von Georg Schmidt. Siebente, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 484 Abbildungen. 1906. 6 Mark.

Textilindustrie s. Spinnerei usw.

Tiefbrand s. Liebhaberkünste.

Tiere, geographische Verbreitung der. Von E. L. Trouessart. Aus dem Französischen übersetzt von W. Marshall. Mit 2 Karten. 1892. 4 Mark.

Tiere und Pflanzen, die leuchtenden. Von Henri Gadeau de Kerville. Aus dem Französischen übersetzt von W. Marshall. Mit 28 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Tierzucht, landwirtschaftliche: Von Dr. Eugen Werner. Mit 20 Abbildungen. 1880. 2 Mark 50 Pf.

Tintenfabrikation s. Chemische Technologie.

Tollwut s. Infektionskrankheiten.

Ton, der gute, und die feine Sitte. Von Eufemia v. Adlersfeld geb. Gräfin Ballestrem. Vierte, verbesserte Auflage. 1906. 2 Mark.

——— s. auch Ästhetische Bildung usw.

Tonwarenindustrie s. Chemische Technologie.

Trichinenkrankheit s. Infektionskrankheiten.

Trichinenschau. Von F. W. Rüffert. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 52 Abbildungen. 1895. 1 Mark 80 Pf.

Trigonometrie. Von Franz Bendt. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 42 Figuren. 1901. 2 Mark.

Tuberkulose s. Infektionskrankheiten.

Turnkunst. Von Prof. Dr. Moritz Kloß. Siebente, vermehrte und verbesserte Auflage, bearbeitet von Otto Schlenker. Mit 105 Abbildungen. 1905. 4 Mark.

Typhus s. Infektionskrankheiten.

Uhrmacherkunst. Von F. W. Rüffert. Vierte, vollständig neu bearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 252 Abbildungen und 5 Tabellen. 1901. 4 Mark.

Unfallversicherung. Von Alfred Wengler. 1898. 2 Mark.

Uniformkunde. Von Richard Knötel. Mit über 1000 Einzelfiguren auf 100 Tafeln, gezeichnet vom Verfasser. 1896. 6 Mark.

Unterleibsbrüche. Ihre Ursachen, Erkenntnis und Behandlung von Dr. med. Fr. Ravoth. Zweite, von Dr. med. G. Wolzendorff bearbeitete Auflage. Mit 28 Abbildungen. 1886. 2 Mark 50 Pf.

Ventilation s. Heizung usw.

Verfassung des Deutschen Reichs s. Reich, das Deutsche.

Versicherungswesen. Von Oskar Lemcke. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1888. 2 Mark 40 Pf.

——— s. auch Invaliden-, Kranken- und Unfallversicherung.

Verskunst, deutsche. Von Dr. Roderich Benedix. Dritte, durchgesehene und verbesserte Auflage. 1894. 1 Mark 50 Pf.

Versteinerungskunde (Petrefaktenkunde, Paläontologie). Eine Übersicht über die wichtigeren Formen des Tier- und des Planzenreiches der Vorwelt von Prof. Dr. Hippolyt Haas. Zweite, gänzlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 234 Abbildungen und 1 Tafel. 1902. 3 Mark 50 Pf.

Villen und kleine Familienhäuser. Von Georg Aster. Mit 112 Abbildungen von Wohngebäuden nebst dazugehörigen Grundrissen und 23 in den Text gedruckten Figuren. Elfte Auflage. 1906. 5 Mark.
(Fortsetzung dazu s. Familienhäuser für Stadt und Land).

Violine und Violinspiel. Von Reinhold Jockisch. Mit 19 Abbildungen und zahlreichen Notenbeispielen. 1900. 2 Mark 50 Pf.

Vögel, der Bau der. Von William Marshall. Mit 229 Abbildungen. 1895. 7 Mark 50 Pf.

Völkerkunde. Von Dr. Heinrich Schurtz. Mit 67 Abbildungen. 1893. 4 Mark.

Völkerrecht. Von Dr. Albert Zorn, Zweite, vollständig neu bearbeitete Auflage. 1903. 4 Mark.

Volkswirtschaftslehre. Nach Hugo Schober neu bearbeitet von Prof. Dr. Ed. O. Schulze. Sechste Auflage. 1905. 6 Mark.

Vortrag, der mündliche. Ein Lehrbuch für Schulen und zum Selbstunterricht von Roderich Benedix. Erster Teil. Die reine und deutliche Aussprache des Hochdeutschen. Zehnte Auflage. 1905. 1 Mark 50 Pf.
— — Zweiter Teil. Die richtige Betonung und die Rhythmik der deutschen Sprache. Fünfte Auflage. 1904. 3 Mark.
— — Dritter Teil. Schönheit des Vortrages. Fünfte Auflage. 1901. 3 Mark 50 Pf.
——— s. auch Redekunst und Gymnastik der Stimme.

Wappenkunde s. Heraldik.

Warenkunde. Sechste Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. M. Pietsch 1899. 3 Mark 50 Pf.

Warenzeichenschutz s. Patentwesen usw.

Wäscherei, Reinigung und Bleicherei. Von Dr. Hermann Grothe. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 41 Abbildungen. 1884. 2 Mark.
——— s. auch Chemische Technologie und Wollwäscherei.

Wasserbau. Zum Selbstunterricht, für den Gebrauch in der Praxis und als Lehrbuch für Fachschulen von K. Schiffmann. Mit 605 Text- und 8 Tafeln Abbildungen. 1905. 7 Mark 50 Pf.

Wasserkur und ihre Anwendungsweise. Von Dr. med. E. Preller. Mit 38 Abbildungen. 1891. 3 Mark 50 Pf.

Wasserversorgung der Gebäude. Von Professor Walter Lange. Mit 282 Abbildungen. 1902. 3 Mark 50 Pf.

Weberei s. Spinnerei usw.

Wechselfieber s. Infektionskrankheiten.

Wechselrecht, allgemeines deutsches. Mit besonderer Berücksichtigung der Abweichungen und Zusätze der österreichischen und ungarischen Wechselordnung und des eidgenössischen Wechsel- und Scheckgesetzes. Von Karl Arenz. Dritte, ganz umgearbeitete und vermehrte Auflage. 1884. 2 Mark.

Weinbau, Rebenkultur und Weinbereitung. Von Friedrich Jakob Dochnahl. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit einem Anhange: Die Kellerwirtschaft. Von A. v. Babo. Mit 55 Abbildungen. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Weinbereitung s. auch Chemische Technologie.

Weltgeschichte, allgemeine. Von Prof. Dr. Theodor Flathe. Dritte Auflage. Mit 6 Stammtafeln und einer tabellarischen Übersicht. 1899. 3 Mark 50 Pf.

Windpocken s. Infektionskrankheiten.

Wintersport. Von Max Schneider. Mit 140 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Wissenschaften, Geschichte der. Von Dr. Rudolf Eisler. 1906. 6 Mark.

Witterungskunde s. Meteorologie.

Wochenbett s. Frau, das Buch der jungen.

Wollwäscherei und Karbonisation. Mit einem Anhang: Die Kunstwollfabrikation von Dr. A. Ganswindt. Mit 86 Abbildungen. 1905. 4 Mark.

Wörterbuch, deutsches. Wörterbuch der deutschen Schrift- und Umgangssprache sowie der wichtigsten Fremdwörter. Von Dr. J. H. Kaltschmidt, neu bearbeitet und vielfach ergänzt von Dr. Georg Lehnert. 1900. 7 Mark 50 Pf.

Ziegelfabrikation s. Chemische Technologie.

Ziegenpeter s. Infektionskrankheiten.

Ziergärtnerei. Belehrung über Anlage, Ausschmückung und Unterhaltung der Gärten sowie über Blumenzucht von H. Jäger. Sechste Auflage, nach den neuesten Erfahrungen und Fortschritten umgearbeitet von J. Wesselhöft. Mit 104 Abbildungen. 1901. 3 Mark 50 Pf.

Zimmergärtnerei. Von M. Lebl. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 89 Abbildungen. 1901. 3 Mark.

Zitatenlexikon. Sammlung von Zitaten, Sprichwörtern, sprichwörtlichen Redensarten und Sentenzen von Daniel Sanders. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1905. 6 Mark, in Geschenkeinband 7 Mark.

Zoologie. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Prof. Dr. William Marshall. Mit 297 Abbildungen. 1901. 7 Mark 50 Pf.

Zuckerfabrikation s. Chemische Technologie.

Zündhölzerfabrikation s. Chemische Technologie.

Zündmittel s. Chemische Technologie.

Verzeichnisse mit Inhaltsangabe jedes Bandes stehen unentgeltlich zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber in Leipzig

Reudnitzer Straße 1—7.

März 1907.

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

40,00