Geschichte der Mathematik

Von

Fritz Malsch

Wissenschaft und Bildung

Wissenschaft und Bildung

Einzeldarstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band M. 1.80, Doppelbände M. 3.60, Atlantenbände M. 2.20

Religion

Einführung in die allgemeine Religionsgeschichte Von Erzbisch. Prof. Dr. N. Söderblom
Volksleben im Lande der Bibel Von Prof. Dr. M. Löhr. 2. Auflage ★
Sabbat und Sonntag Von Geheimrat Prof. Dr. H. Meinhold ★
Das Alte Testament im Rahmen der altoriental. Kulturen Von Prof. Dr. A. Jirku.
Geschichte des jüdischen Volkes Von Geheimrat Prof. Dr. H. Meinhold ★
David und sein Zeitalter Von Professor Dr. B. Baentsch ★
Die israelitischen Propheten Von Prof. Dr. W. Caspari ★
Vom Griechentum zum Christentum Von Professor Dr. A. Bauer ★
Vom Judentum zum Christentum Von Prof. Dr. A. Bauer ★
Christus Von Prof. Dr. Holtzmann. 2. Aufl.
Soziale Fragen im Urchristentum Von Prof. Dr. E. Lohmeyer ★
Das Wesen des evangelischen Christentums Von Prof. Dr. K. Heim. 2. Auflage ★
Das apostolische Glaubensbekenntnis Von Professor Dr. K. Thieme ★
Hauptfragen der Lebensgestaltung Von Prof. Dr. A. Hunzinger. 2. Auflage ★
Religiöse Strömungen der Gegenwart. Das Heilige und die Form. Von Professor Dr. Heinrich Frick ★
Die evangelische Kirche und ihre Reformen Von Professor Dr. F. Niebergall ★
Der evang. Pfarrer in Geschichte u. Gegenwart Von Pastor lic. Dr. H. Werdermann
Das Christentum im Weltanschauungskampfe der Gegenwart Von Prof. Dr. A. Hunzinger. 3. Auflage ★
Grundfragen christlicher Lebensgestaltung Von Privatdozent lic. R. Hupfeld ★
Die Jesuiten Von Prof. Dr. F. Wiegand ★
Kirchengeschichte Rußlands im Abriß Von Prof. D. N. Bonwetsch ★
Die ostasiatischen Kulturreligionen Von Missionsdirektor D. J. Witte ★

Philosophie, Psychologie und Pädago[gik]

Religion und Kultur Von Pro[f.] ... Verweyen
Einführung in die Philosoph[ie] ... dozent Dr. A. Prandtl
Geschichte der Philosophie V... Prof. Dr. A. Messer. 5 Bände
Immanuel Kant Von Prof. ... 2. Auflage
Leben und Gedankenwelt ...
forscher Von Geh. Medizinalrat Prof. Dr. F. Gumprecht ★
Die Weltanschauungen der Gegenwart Von Prof. Dr. E. Wenzig. 2. Auflage. ★
Grundlagen der Naturphilosophie Von Prof. Dr. Th. Ziehen ★
Die Entwicklungslinie der Menschheit Von Prof. Dr. F. Strecker ★
Einführung in die Psychologie Von Prof. Dr. H. Dyroff. 5. Auflage ★
Einführung in die experim. Psychologie Von Prof. Dr. R. Pauli ★
Angewandte Psychologie Von Prof. Dr. A. Wreschner ★
Unsere Sinnesorgane und ihre Funktionen Von Professor Dr. E. Mangold. 2. Auflage ★
Abriß der geistigen Entwicklung des Kindes Von Professor K. Bühler. 2. Auflage ★
Die Erziehung im vorschulpflichtigen Alter Von Prof. Dr. David und Rosa Katz ★
Anleitung zur Menschenkenntnis Von Prof. Dr. F. E. Otto Schultze ★
Charakterbildung Von Prof. Dr. Th. Elsenhans. 3. Auflage ★
Grundriß der Erziehungswissenschaft Von Dr. E. Krieck ★
Pestalozzis Leben Von Prof. Dr. F. Medicus. Doppelband ★
Geschichte des Kultur- und Bildungsproblems Von Privatdozent Dr. G. Burckhardt
Bildungs- und Erziehungsideale Von Dr. R. Müller-Freienfels ★
Sozialpädagogik Von Oberstudiendirektor Dr. A. Buchenau ★

Sprache / Literatur

Grundfragen der Sprachwissenschaft Von Prof. Dr. H. Güntert ★
Die redenden Künste Von Dr. E. Drach ★
Unser Deutsch Einführung in die Muttersprache. Von Geheimrat Prof. Dr. Fr. Kluge. 4. Aufl.
Lautbildung V. Prof. Dr. L. Sütterlin. 3. Aufl.
Deutsche Dichtung Von Prof. Dr. Friedrich Lienhard. 2. Auflage ★
Schweizer Dichter Von Prof. Dr. A. Frey. 2. Aufl.
Das Märchen Von Prof. Dr. Friedrich von der Leyen. 3. Auflage ★
Der Sagenkreis der Nibelungen Von Prof. Dr. G. Holz. 3. Auflage ★
... [D]r. R. M. Werner. ★
... [V]on Professor Dr. ... [Au]flage ★
... [K]unst Von Professor ... 7. Auflage ★
... [V]on Geh. Hofrat ... ★
... [Lit]eratur Von Prof. ... ★

Dieses Buch ist Eigentum

des Vereins für

Volksbücherei u. Lesehalle zu Liegnitz

(E. V.)

Es wird gebeten, folgende 8 Punkte zu beachten:

1. Das Entleihen der Bücher, sowie deren Rückgabe bzw. Umtausch findet täglich in den Stunden statt, welche in § 1 der Benutzungs-Ordnung angegeben sind. Diese Benutzungs-Ordnung hängt im Hausflur der Volksbücherei, Petristraße 1 öffentlich aus.
2. Lesefrist ist höchstens 14 Tage, wenn nicht Verlängerung derselben beantragt worden ist. (§ 3 der Benutzungs-Ordnung.)
3. Das Einbiegen der Blätter ist nicht erlaubt.
4. Das Weiterleihen des Buches ist verboten.
5. Jede Beschädigung muß ersetzt werden. (§ 4 der Benutzungs-Ordnung.)
6. Falls in der Familie oder dem Hause des Entlehners eine ansteckende Krankheit vorkommt, soll das Buch **sofort** zurückgebracht werden und **der Krankheitsfall angezeigt werden.**
7. Wer diese oder die Bestimmungen der Benutzungs-Ordnung unbeachtet läßt, kann vom Bücherleihen ausgeschlossen werden.
8. **Bei Verzug nach auswärts sind die Bücher sofort zurückzugeben.**

Die Frauenbewegung in ihren gegenwärtigen Problemen. Von Dr. Hel. Lange. 3. Auflage

Die sozialen Klassen Von Privatdozent Dr. G. Albrecht ★

Die Entwicklungslinie des Sozialismus Von Prof. Dr. R. Wilbrandt ★

Abriß der deutschen Sozialpolitik Von Prof. Dr. L. Heyde. 4. Auflage ★

Fürsorgewesen Von Prof. Dr. Chr. Klumker

Soziale Säuglings- und Jugendfürsorge Von Prof. Dr. A. Uffenheimer ★

Die materielle Wirtschaft bei den Naturvölkern Von Prof. Dr. Max Schmidt ★

Zoologie und Botanik

Licht und Leben im Tierreich Von Prof. Dr. W. Stempell ★

Der Tierkörper Von Privatdozent Dr. E. Neresheimer ★

Die Säugetiere Deutschlands Von Privatdozent Dr. C. Hennings ★

Anleitung zur Beobachtung der Vogelwelt Von Prof. Dr. C. Zimmer. 2. Auflage ★

Wasservogelleben Von Prof. Dr. A. Voigt

Lebensgewohnheiten der Insekten Von Prof. Dr. P. Deegener ★

Die Bakterien und ihre Bedeutung im praktischen Leben Von Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl.

Das Schmarotzertum im Tierreich Von Hofrat Prof. Dr. L. v. Graff ★

Tier- und Pflanzenleben des Meeres Von Prof. Dr. A. Nathansohn ★

Anleitung zur Beobachtung der Pflanzenwelt. Von Prof. Dr. F. Rosen. 2. Auflage ★

Befruchtung und Vererbung im Pflanzenreiche Von Prof. Dr. Giesenhagen ★

Phanerogamen (Blütenpflanzen) Von Prof. Dr. E. Gilg und Dr. R. Muschler ★

Zimmer- und Balkonpflanzen Von Garteninspektor P. Dannenberg. 4. Auflage ★

Unser Garten Von Gartenbauinsp. F. Zahn. 2. Auflage ★

Der Kleingarten Von Gartenbauinspektor C. Rimann ★

Der Gemüsebau Von Gartenbauinspektor R. Reichelt ★

Von der Hacke zum Pflug Eine Geschichte des Gartenbaues. Von Prof. Dr. Ed. Hahn. 2. Aufl.

Einführung in die Begriffe der Landwirtschaft Von Prof. Dr. P. Holdefleiß ★

Anthropologie / Hygiene

Menschheitskunde Von Prof. Dr. H. Friedenthal ★

Die Stammesgeschichte des Menschen Von Dr. M. Hilzheimer ★

Grundzüge der Physiologie Von Prof. Dr. Fr. W. Fröhlich ★

Lebensfragen Der Stoffwechsel in der Natur Von Prof. Dr. F. B. Ahrens ★

Gesundheit und Lebensklugheit Von Geh. Medizinalrat Dr. R. Paasch. 2. Auflage ★

Arznei- und Genußmittel, ihre Segnungen und Gefahren. Von Prof. Dr. F. Müller ★

Das Nervensystem und die Schädlichkeiten des tägl. Lebens. Von Prof Dr. P. Schuster. 2. Aufl.

Stoffwechsel und Diät von Gesunden und Kranken Von Geh. Medizinalrat Professor Dr. C. A. Ewald ★

Die körperliche Erziehung des wachsenden Menschen Von Privatdozent Dr. G. Hohmann

Die Hygiene des männl. Geschlechtslebens Von Geheimrat Prof. Dr. C. Posner. 4. Aufl.

Gesundheitspflege des Weibes Von Professor Dr. P. Straßmann. 3. bis 4. Auflage. ★

Erdkunde / Geologie
Astronomie / Meteorologie

Das Studium der Erdkunde Geographische Beobachtungen. Von Geheimrat Professor Dr. R. Lehmann ★

Einführung in die erdkundliche Wissenschaft Von Geheimrat Professor Dr. R. Lehmann ★

Geographische Beobachtungen Von Geheimrat Professor Dr. R. Lehmann ★

Erdkundliches Wanderbuch Von Professor Dr. S. Passarge. I Die Landschaft, II Beobachtungen über Tier und Mensch ★

Grundfragen der allgemeinen Geologie Von Prof. Dr. P. Wagner. 2. Auflage ★

Mitteleuropa Von Professor Dr. Braun ★

Die Alpen Von Prof. Dr. F. Machatschek. 2. Auflage ★

Einführung in die allgemeine Mineralogie, Kristallographie, Kristallphysik, Mineralchemie Von Prof. Dr. F. von Wolff ★

Einführung in die systematische Mineralogie Von Prof. Dr. F. v. Wolff. 2 Bände ★

Wolken und Niederschläge Von Prof. Dr. C. Kassner. 2. Auflage ★

Das Wetter und seine Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. C. Kassner. 2. Auflage ★

Himmelskunde Von Prof. Dr. A. Marcuse. 2. Auflage ★

Chemie / Physik / Technik

Einführung in die organische Chemie Von Prof. Dr. F. Mayer ★

Die Elektrizität als Licht- und Kraftquelle Von Prof. Dr. P. Eversheim. 3. Auflage ★

Starkstromtechnik Von Prof. Dr. P. Eversheim

Telegraphie und Telephonie Von Telegraphendirektor und Dozent F. Hamacher. 2. Auflage

Radioaktivität und neue Atomlehre Von Studienrat O. Müller ★

Das Licht im Dienste der Menschheit Von Dr. G. Leimbach ★

Kohle und Eisen Von Prof. Dr. A. Binz. 2. Aufl.

Die Fabrik in Wirtschaft und Technik Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. H. Herner ★

Die Gärungsgewerbe und ihre naturwissenschaftliche Grundlage. Von Prof. Dr. W. Henneberg und Dr. G. Bode ★

Milch- und Molkereiprodukte, ihre Eigenschaften, Zusammensetzung und Gewinnung. Von Dr. P. Sommerfeld ★

Rohstoffe der Textilindustrie Von Geheimrat Dipl.-Ing. H. Glafey. 2. Auflage ★

Spinnen und Zwirnen Von Geheimrat Dipl.-Ing. H. Glafey ★

Die Textilindustrie Herstellung textiler Flächengebilde. Von Geheimrat Dipl.-Ing. H. Glafey

Unsere Kleidung und Wäsche Von Direktor B. Brie, Prof. P. Schulze, Dr. K. Weinberg

Vom Wikingerschiff zum Handelstauchboot Von Prof. Dr. Schmeidler ★

Die Technik im Landkriege Von Generalleutnant M. Schwarte ★

Dr. Fritz Malsch

Geschichte der Mathematik

C. F. Gauß

Wissenschaft und Bildung
Einzeldarstellungen aus allen Gebieten des Wissens
242

Geschichte der Mathematik

Von

Dr. Fritz Malsch
Studienrat in Frankfurt a. Main

Mit 40 Abbildungen im Text und auf 15 Tafeln

1 9 2 8

Verlag von Quelle & Meyer in Leipzig

*

Buchdruckerei Oswald Schmidt G. m. b. H.
Leipzig

Vorwort.

Für den, der mit Begeisterung einer Wissenschaft ergeben ist, ist es stets ein reizvolles Unternehmen, sich in die Geschichte dieser Wissenschaft zu versenken. Aber auch für den, der dieser Wissenschaft noch gleichgültig gegenübersteht oder ihr gewonnen werden soll, ist die geschichtliche Betrachtung sehr oft der Boden, auf dem das Interesse am besten gedeiht. Die erste Erfahrung machte der Verfasser in den letzten Jahren, als er im Verlauf der Vorarbeiten für die Herausgabe eines mathematischen Schulbuchs sich eingehender mit historischen Fragen beschäftigen mußte, die zweite war ihm eine seit Jahren im Unterricht erprobte Tatsache. Auch Laien, die der Mathematik abgeneigt oder gar feindlich gegenüberstehen, wurden oft gefesselt, wenn man ihnen einmal die Dinge im Zusammenhang der geistigen Entwicklung der Menschheit zeigte. Daneben aber führt die Versenkung in die großen Leistungen der Vergangenheit oft zu neuer Auffassung der Dinge, zu neuer Problemstellung, zur Grundlage neuen Fortschritts.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend ist das Ziel dieser Darstellung nicht, eine ins einzelne gehende Geschichte zu sein, sondern mehr das, dem gebildeten Laien, dem Schüler einer höheren Schule ein Bild von den Persönlichkeiten der großen Mathematiker und von ihren Werken zu geben, diese nicht isoliert, sondern im Zusammenhang mit dem geistigen Leben ihrer Zeit und ihrer Zeitgenossen darzustellen. Denn die Geschichte einer Wissenschaft ist nur in diesem Zusammenhang wirklich lebendig zu schauen. Dieses Ziel zwang dazu, nur eine Darstellung in großen Zügen zu geben, nur die charakteristischen Erscheinungen und Menschen zu schildern, damit nicht unter der Fülle des Materials der Blick auf das Ganze verloren gehe. Zu dieser Beschränkung zwang im übrigen schon der von vornherein beschränkte Umfang des Büchleins. Es ist daher keine lückenlose „Geschichte der Mathematik", sondern es sind mehr „Bilder" zur Geschichte der Mathematik. Der Fachmann wird vielleicht auch dieses Büchlein einiger Aufmerksamkeit für wert halten, weil ich den Versuch machte, durch eine Reihe charakteristischer Bilder den Text zu beleben. Wenn er aber wissenschaftliche Auskunft sucht, so wird er zu größeren Darstellungen greifen.

Das gesteckte Ziel und der geplante Rahmen brachten es auch mit sich, daß die Geschichte der neueren und neuesten Mathematik wesentlich kürzer behandelt wurden. Es liegt im Wesen der mathematischen Wissenschaft, daß mit fortschreitender Spezialisierung die Erkenntnisse für den Laien immer mehr verhüllt werden. Eine Darstellung dieser Dinge würde Kenntnisse voraussetzen, die wir hier nicht voraussetzen können. Für die neueste Zeit kommt hinzu, daß wir noch nicht den Abstand zu den Dingen gewonnen haben, um wirklich die großen Züge der Entwicklung klar zu sehen. Wie oft blieben die wirklich großen Dinge den Zeitgenossen verborgen, um erst viel später gewürdigt zu werden. Wie oft zeigt gerade unsere Wissenschaft, daß ein Mann zu seinen Lebzeiten wegen ganz anderer Dinge oder gar nicht gewürdigt wurde, der für die Entwicklung der Mathematik Bahnbrechendes geleistet hat. Der Raummangel gebot überdies für die Neuzeit, sich im wesentlichen auf Europa zu beschränken.

Da dies Buch für ein breiteres Publikum bestimmt sein soll, so mußte ebenso darauf verzichtet werden, alle Quellen anzugeben. Wenn auch die Darstellung sich im wesentlichen an die großen geschichtlichen Werke über den Gegenstand anlehnt, so habe ich doch namentlich im Bildmaterial versucht, Neues zu bringen. Für solche, die sich eingehender mit den angeschnittenen Fragen beschäftigen wollen, gebe ich eine kurze Zusammenstellung wichtiger Bücher, ohne dafür den Anspruch der Vollständigkeit zu erheben.

Dem mathematischen Seminar in Bonn bin ich zu Dank verpflichtet für die Erlaubnis zu den Porträtaufnahmen, sowie den Kollegen Coehsmeyer-Olpe i. W. und Kerber-Frankfurt für freundliche Hilfe bei der Korrektur.

Frankfurt a. M., im Mai 1927 Fritz Malsch

Inhaltsverzeichnis.

*

Verzeichnis der Textabbildungen.

Verzeichnis der Tafeln.

Quellen zu den Abbildungen.

I. Bilder: 1. Blatt XIV der Faksimileausgabe des Britischen Museums. **2.** Nach Smith, History of Mathematics, Boston 1923/25. **3.** Nach Baumeister, Denkmäler des klassischen Altertums, München. **7.** Nach Hermann Schöne, Jahrb. d. d. arch. Inst. XIV. 1899. **8.** Nach Smith-Karpinski, The Hindu-Arabic Numerals, Boston 1911.

II. Tafeln: 2, 1. Nach Hunger-Lamer, Altorientalische Kultur im Bilde, Leipzig 1923. **10.** Nach einer Zeichnung von Adolf Menzel. **13.** Nach Schulz-Euler, Leonhard Euler, Frankfurt 1907. Die Porträts auf Tafel **1, 6, 8, 9, 11, 14** und **15** sind nach Aufnahmen aus dem mathematischen Seminar in Bonn hergestellt. Alle übrigen Bilder und Tafeln nach Zeichnungen oder Aufnahmen des Verfassers.

*

Geschichte der Mathematik.

Soweit wir heute die Kulturgeschichte der alten Welt übersehen, nimmt die Entwicklung dessen, was wir Kultur nennen, und sicher ist mathematisches Wissen und Können ein sehr wesentlicher Bestandteil aller Kultur, ihren Anfang in den vier großen Landschaften, die sich vom Mittelmeer bis zum Stillen Ozean erstrecken. Jedes dieser Gebiete ist scharf charakterisiert durch einen großen Strom oder ein Strompaar. Ägypten durch den Nil, Babylon durch Euphrat und Tigris, Indien durch Indus und Ganges, China durch die beiden Riesenströme Ho Wang Ho und Jang Tse Kiang.

Handel und Wandel in diesen großen Flußgebieten stellten den sich dort ansiedelnden Menschen schon in frühester Zeit Aufgaben schwieriger Art. Die Forderungen des täglichen Lebens, die harte Schule des Alltags sind sicher die Ursachen der ersten mathematischen Entdeckungen. Forderte einerseits der Handel, sei es Geld- oder Tauschhandel, die Ausbildung eines Rechenwesens, so verlangten die straff gegliederten Staaten nicht minder ein solches. Die Flüsse mit ihrem Steigen und Fallen, die Bewässerungsanlagen usw. stellten eine Menge mechanisch-technischer Probleme, die wieder die Anregung für eine andere Seite des mathematischen Denkens boten. An den Ufern der Ströme standen und stehen noch heute uralte Bauten monumentalster Art, die uns Zeugnis ablegen dafür, daß ihre Erbauer bereits mit staunenswertem Können in der Berechnung und Konstruktion der Architekturwerke ausgerüstet gewesen sein müssen.

Erster Abschnitt.

Die Vorzeit.

1. Ägypten. Wenn wir die mathematischen Leistungen der alten Ägypter würdigen wollen, so dürfen wir nicht vergessen, daß das, was sie uns bieten, aus der Praxis des Lebens gewonnene Kenntnisse waren. Ob wir diese Dinge überhaupt „Mathematik" in unserem heutigen Sinne nennen können, ist zum mindesten fraglich. Jedenfalls sind uns kaum Tatsachen überliefert, aus denen sich schließen ließe, daß sie das Bedürfnis zur Abstraktion hatten, das heißt das Bedürfnis, die gewonnenen Kenntnisse zu einem logisch begründeten einwandfreien System zu entwickeln. Reine, von der Erfahrung und dem Alltag losgelöste, Wissenschaft finden wir erst bei den Griechen.

Eines der ältesten Denkmäler dieser praktischen Mathematik der Ägypter ist die Einführung des Kalenders um 4200 v. Chr. Dieser Kalender, der besser war als der julianische, der bis 1582 in Europa in Gebrauch war, ist ein sicheres Zeichen für den hohen Stand von Himmelskunde und Rechnen in den Nilländern um diese Zeit.

Ein weiteres sichtbares Zeichen des Könnens der ägyptischen Baumeister und — um ein modernes Wort zu gebrauchen — Ingenieure, sind die Pyramiden, deren bedeutendste, die große Pyramide von Gizeh, um 2900 v. Chr. gebaut ist. Es ist wirklich bewundernswert, mit welcher Genauigkeit diese Bauwerke mit einfachen Mitteln hergestellt sind. So dürfen wir uns nicht wundern, daß ihre Zahlenverhältnisse Grund zu abenteuerlichen Spekulationen im 19. Jahrhundert wurden[1]. Das Verhältnis der Seite zur halben Höhe ergibt einen Annäherungswert für π; der Gang zur ersten Kammer sollte einen Neigungswinkel haben, der die geographische Breite des Ortes der Pyramide darstellte und anderes mehr.

Unter Amenemhet III., den die Griechen Möris nennen, erlebte

[1] Max Eyth, Der Kampf um die Cheopspyramide.

Ägypten eine große Blüte (um 1850 v. Chr.). Alle Zweige des praktischen Rechnens der Feldmesser, Architekten, Steuereinnehmer und statistischen Beamten waren bereits hoch ausgebildet. Aus dieser Zeit stammt das älteste Rechenbuch der Welt, der Papyrus Rhind.

Um 1850 fand der englische Gelehrte A. H. Rhind einen aus zwei Stücken bestehenden Papyrus, der später ins Britische Mu-

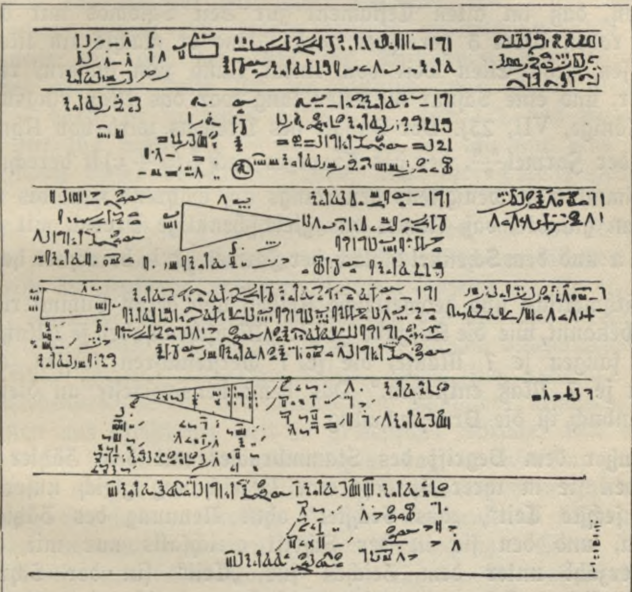


Fig. 1. Aus dem Papyrus Rhind. Blatt XIV der Faksimileausgabe des Britischen Museums

seum kam (Fig. 1). Einige Jahrzehnte später fand man, daß zwei in Neuyork befindliche Papyrusfragmente, das zwischen den beiden Teilen fehlende Stück darstellten, so daß uns heute dieses älteste mathematische Handbuch vollständig bekannt ist. Das Rechenbuch des Ahmes, wie es nach seinem Verfasser Ahmes oder Aähmesu auch genannt wird, ist von diesem vermutlich nach älteren Vorlagen zusammengestellt. Die Frage, ob wir es mit einem Schülerheft oder einem Lehrbuche zu tun haben, ist noch ungeklärt.

Dies Buch enthält eine Reihe von Beispielen aus der Landwirtschaft, die meist auf lineare Gleichungen führen, Beispiele zur Bruchrechnung und zu den Reihen. Bekannt ist die Aufgabe: „Haufen, sein Siebentel, sein Ganzes, es macht 19.“ Hā = Haufen. In die moderne Zeichensprache übersetzt heißt das: $x + \frac{1}{7}x = 19$. Auch Zeichen für + und — sind vorhanden. Aufgaben über Kornspeicher verwenden für π den bemerkenswerten Näherungswert 3,16, dessen Genauigkeit verblüffen muß, wenn wir bedenken, daß im alten Testament zur Zeit Salomos mit dem ganz rohen Wert 3 gerechnet wird: „Und er machte ein Meer, gegossen, zehn Ellen weit von einem Rand zum andern, rund umher, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Maß ringsum“ (1. Könige, VII, 23). Der Inhalt des Dreiecks wird von Ahmes nach der Formel $\frac{a\,h}{2}$, der des Trapezes nach $\frac{1}{2}(a+c)h$ berechnet. So nimmt man wenigstens neuerdings an, während man bis vor kurzem glaubte, daß Ahmes das gleichschenklige Dreieck mit der Basis a und dem Schenkel b nach der Formel $\frac{1}{2}a\,b$ berechnet habe.

Arithmetische und geometrische Reihen und deren Summierung sind bekannt, wie die Aufgabe zeigt: „Menschen haben je 7 Katzen, diese fangen je 7 Mäuse, die je 7 Gerstenähren fressen, aus denen je 7 Maß entstehen.“ Das bemerkenswerteste an diesem Rechenbuch ist die Bruchrechnung.

„Außer dem Begriff des Stammbruches mit dem Zähler 1, für den sie in ihrer Sprache eine Bezeichnung gleich unserem „der sechste Teil“, „das Sechstel“ ohne Nennung des Zählers hatten, und den sie in der Schrift gleichfalls nur mit der Nennerzahl unter dem Zeichen für „Teil“ (in der Schrift des täglichen Lebens zu einem schrägen Strich oder Punkt entartet) bezeichneten, kannten die Ägypter nur noch den Komplementbruch, der diesen Stammbruch zum Ganzen vervollständigte, also $^5/_6$. Diesen Bruch, den sie seinerseits nur mit dem Zähler bezeichneten („die 5 Teile“), gebrauchte man im Rechnen nicht, mit einziger Ausnahme von $^2/_3$ oder „die beiden Teile“, wie man dafür sagte. Alle andern Bruchverhältnisse, die sich beim Rechnen ergeben mußten, wurden durch eine Reihe von Stammbrüchen ausgedrückt, also z. B. in dem oben gegebenen Falle $^2/_7$ durch $^1/_4\,^1/_{28}$ (das ist $^1/_4 + ^1/_{28}$), $^4/_7$ durch $^1/_2\,^1/_{14}$. Auch $^2/_3$ wird dabei gern verwendet. So sagte man statt $^3/_4$ zeitweise lieber $^2/_3\,^1/_{12}$ als $^1/_2\,^1/_4$. Diese eigentümlichen

Verhältnisse haben nicht nur bei allen Völkern des Altertums und bis tief in das Mittelmeer hinein geherrscht, sondern die ganze Art der Bruchbezeichnung in den verschiedenen Sprachen mittels Ordinalzahlen ist überhaupt nur daraus zu erklären. Zu „den fünf Teilen“, wie alle jene Sprachen für $^5/_6$ sagen, gehört „der sechste Teil“ als das, was sie zum Ganzen vervollständigt. Die andern 5 Teile als „fünf Sechstel“ zu bezeichnen und nun gar von „zwei Siebentel“ oder „drei Achtel“ zu reden, gehört erst einer späteren Entwicklungsstufe des Rechnens an, auf der man die Entstehung jener Sprachformen vergessen hatte. Ob der Ägypter 7 mal $^1/_{10}$ zu nehmen oder 7 durch 10 zu teilen hatte („$^1/_{10}$ von 7“), das Ergebnis war für ihn nicht $^7/_{10}$ — das würde für ihn nur eine Umschreibung dieser beiden Aufgaben, nicht ihre Lösung gewesen sein —, sondern $^1/_2 + ^1/_5$.

Für die Errechnung der Stammbruchreihen, die das Resultat einer Division an Stelle eines gemischten Bruches bildeten, der zugleich die Aufgabe und das Resultat anzeigt (z. B. $^2/_7$ für $2:7$), brauchte der Ägypter Hilfstafeln, die ihm die Werte für die Division von 2 durch die ungeraden Zahlen ausgerechnet an die Hand gaben. Derartige Tafeln haben sich uns aus den verschiedensten Zeiten der ägyptischen Geschichte erhalten, die jüngsten aus christlicher Zeit in griechischer Sprache. Mit einer solchen, die bis zur Divisorzahl 101 geht, beginnt unser Papyrus“ [1].

Ferner enthält das Handbuch noch Berechnungen verschiedener Körper, Streckenverhältnisse, die zur Konstruktion bestimmter Winkel verwendet wurden (Pyramidenneigung). Eines dieser Verhältnisse, das den Namen seqt führte, ist wahrscheinlich mit unserer Funktion Kosinus identisch.

Wie weit die mathematischen Kenntnisse der Ägypter ihr geistiges Eigentum sind, ist noch ungeklärt. Sehr wahrscheinlich ist, daß sie Beziehungen zu den Bewohnern des Zweistromlandes hatten, ebenso, daß sie mit den alten Bewohnern Kretas in Beziehung standen.

2. Babylon. Um 3000 v. Chr. war das Zweistromland von dem Volke der Sumerer bewohnt, von dem wir wissen, daß es im Gegensatz zu den ihm nachfolgenden Babyloniern, Assyriern

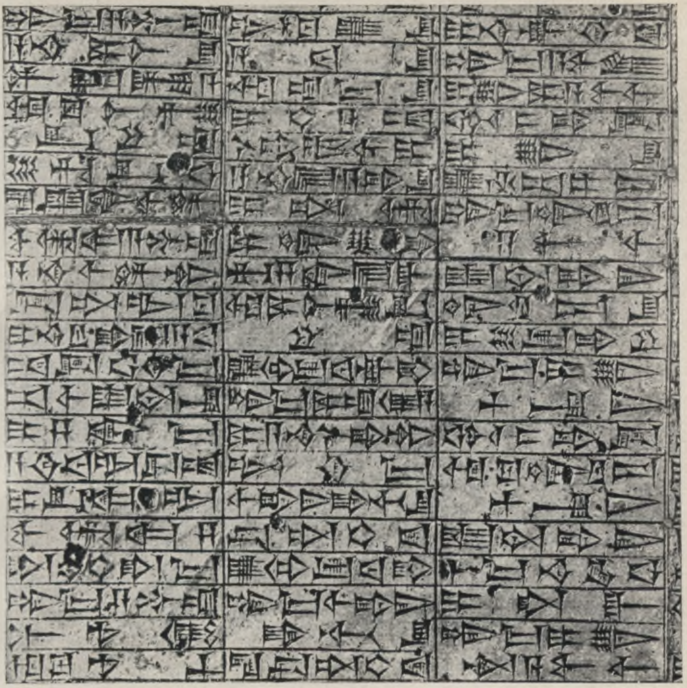
---

[1] Beide Abschnitte aus Sethe: Besprechung von Peet, The Rind Mathematical Papyrus Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung Band 33, II, S. 39 (gekürzt).

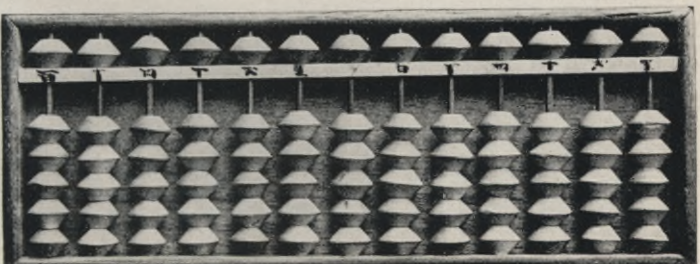
und Chaldäern ein nicht-semitischer Stamm war. Die Sumerer waren ein geistig und kulturell hochstehendes Volk, das über einen Kalender, kaufmännische Rechenmethoden und ein ausgebildetes Zahl- und Maßsystem verfügte. Die zunächst nördlich der Sumerer wohnenden Babylonier, ein semitischer Nomadenstamm aus der Wüste, nahmen bald die Kultur der Nachbarn an. Die bedeutendsten Herrscher der Babylonier waren Sargon (2750 v. Chr.) und Hammurabi (2100 v. Chr.). Um 900 v. Chr. gewannen die Assyrer mit der Hauptstadt Ninive die Herrschaft im Zweistromland, die dann 539 von den Persern abgelöst wurden.

Die Sumerer haben die Keilschrift ausgebildet, die mit der Spitze eines Metallstiftes in weiche Tontafeln geschrieben wurde; diese wurden im Feuer gebrannt oder in der Sonne getrocknet. Die Keilschrifttafeln wurden zum erstenmal 1802 von Grotefend entziffert. 1854 entdeckte der englische Gelehrte W. K. Loftus bei *Senkereh* zwei Tontafeln, auf denen Rawlinson die Quadrate der ganzen Zahlen von 1—60 und die Kuben der Zahlen von 1—32 entzifferte. Weitere Kenntnisse der babylonischen Arithmetik verdanken wir Mengen solcher Keilschrifttafeln, die 1894 in einem babylonischen Schulhaus gefunden wurden. Sie stammten aus der Zeit Hammurabis (s. Tafel 2, Fig. 1). Das Zahlensystem der Babylonier war ein Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60,

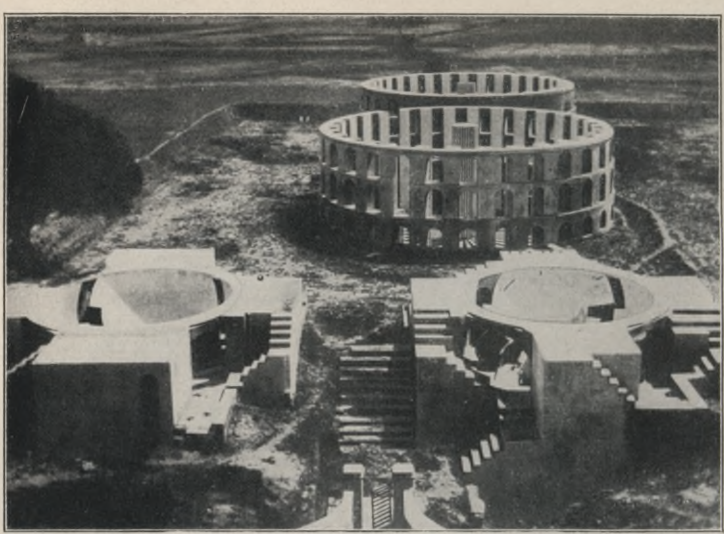
„das aber nur zwei Zahlzeichen („Ziffern") hatte und in eigentümlicher Weise von einem älteren dezimalen System ohne Stellenwert durchsetzt ist. Die beiden Zeichen sind der senkrechte Keil 𒁹 = 1 und der Winkelhaken <, der 10 bedeutet. Mit diesen beiden Zeichen werden alle Zahlen bis zu 59 additiv zusammengesetzt, z. B. <<<<𒁹𒁹 = 42. Die Zahl 60 bildet eine neue Gruppeneinheit, die wiederum durch den Einheitskeil, aber in veränderter Stellung bezeichnet wird. Da keine 59 verschiedenen Ziffern vorhanden sind, wie es theoretisch sein müßte, so wird jeweils die Gesamtheit von Zeichen, durch die eine Zahl unter 60 dargestellt wird, als *eine* Ziffer aufgefaßt, und da die babylonische Schrift rechtsläufig ist, so bedeutet der Keil links von einer solchen Zahl 60, also z. B. 𒁹 <<<<𒁹𒁹 = 60 + 42 = 102. Je nach ihrer Stellung konnten demnach der Vertikalkeil und der Winkelhaken die folgenden Werte haben:



Altbabylonische Keilschrift von dem Hammurabi-Kodex (Paris, Louvre)

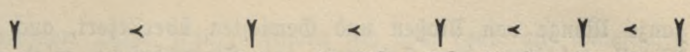


Chinesische Rechenmaschine



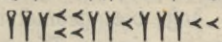
Altes astronomisches Gebaude in Delhi

Instrumente zur Bestimmung der Zeit, der Deklination und des Stundenwinkels in Delhi



60^4	$10 \cdot 60^3$	60^3	$10 \cdot 60^2$	60^2	$10 \cdot 60$	60	10	1
(12 960 000)	(2 160 000)	(216 000)	(36 000)	(3600)	(600)			

Diese Reihe wurde sowohl nach links als auch gelegentlich nach rechts hin fortgesetzt, wodurch die Babylonier, entsprechend unseren Dezimalbrüchen, die Sexagesimalbrüche $\frac{10}{60}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{10}{60^2}$, $\frac{1}{60^2}$ usw. erhielten. Die Zahl 800 000, die nach Potenzen von 60 geordnet die Form $3 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 + 20$ hat, wird im babylonischen Sexagesimalsystem so geschrieben:“ [1]



Dieses Sexagesimalsystem der Babylonier wirkt bis in unsere Zeit nach in der Einteilung des Winkels in 360°, 60′, 60″. Die Gründe für seine Entstehung sind dunkel. Sehte führt die Einteilung des Kreises in 360° auf die in Ägypten seit altersher übliche Einteilung des Himmelskreises in 36 Dekane zurück. Die Dekane sind: „Sternbilder, deren jedes einem Zeitraum von 10 Tagen (Dekade) entsprach, und die zusammen also dem auf 360 Tage bemessenen Rumpf des ägyptischen Kalenderjahres (12 Monate zu 30 Tagen, dazu 5 Schalttage, die „Epagomenen“) entsprachen, während bei den Babyloniern der Himmelskreis (danach auch der Tageskreis) den Monaten des Jahres entsprechend in nur 12 Teile, die Tierkreisbilder, geteilt wurde. Aus jener durch die Natur dem Menschen an die Hand gegebenen Einteilung des Kreises in 360 Teile ist dann, so scheint es, seinerseits erst das Sexagesimalsystem, das in der Natur sonst nicht zu begründen wäre, durch die natürliche Teilung des Kreises in 6 gleichseitige Dreiecke hervorgegangen. Die 60 kann nur als $^1/_6$ der 360 zu ihrer besondern Rolle im Denken der Babylonier gekommen sein.“ [2] Wieder andere führen die Wahl der Grundzahl 60 auf ihre große Zweckmäßigkeit wegen der großen Zahl von Faktoren 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 zurück.

Mit diesem Zahlsystem haben die Babylonier eine sehr eingehende und zuverlässige Kalenderrechnung aufgebaut, die bis um 5000 v. Chr. zurückreicht. Jedenfalls ist eine sichere Mondfinsternisvoraussage um 3700 bekannt. Um 2500 sind uns eine

---

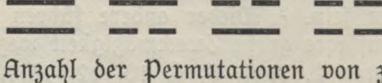
[1] Aus Löffler, Der Stellenwert in der Ziffernschrift, Jahrb. württb. Lehrer, I. Jahrgang.

[2] Aus Sehte, ebendort S. 143.

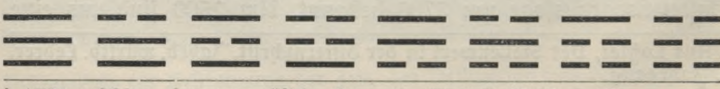
ganze Menge von Maßen und Gewichten überliefert, auch in Metall erhalten, der Gebrauch der Stammbrüche wird erwähnt. Funde aus Nippur aus der Zeit um 1500 v. Chr. geben auch Kunde von den geometrischen Kenntnissen der Zeit. Sie konnten den Inhalt von Rechteck und Quadrat, von Dreieck und Trapez berechnen. Auch die Beziehung von 3, 4 und 5 im rechtwinkligen Dreieck war ihnen bekannt. Den Kreis berechneten sie mit $\pi = 3$. Von Körpern konnten sie Rechtkant und Zylinder berechnen. Wenn uns auch viel weniger geometrische als arithmetische Tatsachen bekannt sind, so läßt doch die hochentwickelte Astronomie vermuten, daß die geometrischen Kenntnisse der Babylonier noch viel weiter gingen. Die enge Verknüpfung von Astronomie und Religion machte allerdings alle diese Kenntnisse zu einer Geheimwissenschaft für Priester und Fürsten.

3. Indien und China. Über die indische Kultur haben wir keine sicheren Urkunden, die weiter als bis 600 v. Chr. zurückreichen. Alle Kenntnisse müssen wir aus den beiden großen Epen der Inder, dem Mahābhārata und dem Rāmayāna schöpfen. Daneben können noch Münzen und Inschriften als Quellen dienen. Alles, was wir daraus entnehmen können, zeigt uns, daß die Inder sich zu der Zeit, die wir betrachten, vornehmlich mit Sternkunde und einigen Rechenverfahren befaßten, darin aber kaum über die Kenntnisse ihrer Nachbarvölker hinausgingen.

Anders in China. Um 2800 v. Chr. sind uns bereits sichere und eifrige astronomische Beobachtungen überliefert. Um 2700, unter der Herrschaft Wang Tis, des gelben Eroberers, ist die wissenschaftliche Beobachtung und Registrierung einer Sonnenfinsternis bekannt. Um 1200 v. Chr. entstand das Buch der Permutationen, Yi King[1] genannt, aus dem wir das Sz' Siang,



das heißt die Anzahl der Permutationen von zwei Elementen in Gruppen zu zweien mit Wiederholungen, und das Pa-Kua, die Anzahl der Permutationen zweier Elemente in Gruppen zu dreien mit Wiederholungen



[1] 1724 erschien eine europäische Ausgabe in Frankfurt a. M.

erwähnen. Diese Figuren finden sich noch heute auf chinesischen und tibetanischen religiösen Gebrauchsstücken, wie die Figur 2 zeigt. Bedeutend älter aber ist bei den Chinesen die Verwendung magischer Quadrate, die in enger Beziehung zu mythologischen Vorstellungen standen. Als ältestes ist ein Quadrat von der Form

4	9	2
3	5	7
8	1	6

bekannt, wobei allerdings statt der Zahlen schwarze und weiße Kreise standen. Aus dem Jahre 1105 v. Chr. ist ein Buch Chu-Pei Suan-Ching erhalten, aus dem wir ersehen, daß die chinesischen Mathematiker der Zeit nicht nur sichere Astronomen und Kalendermacher waren, sondern auch mit dem Inhalt des pythagoreischen Satzes vertraut waren, wie die Figuren des Buches und der Satz etwa beweisen: „Brich die Strecke, mache die Breite 3, die Länge 4 groß, dann ist die Entfernung der Ecken 5."

Fig. 2. Tibetanisches Lebensrad. Nach Smith, History

Ein Jahrhundert später wurde ein Buch geschrieben, das bereits ein systematisches Lehrbuch des Rechnens darstellt. „Kiu-Chang Suan-Shu" oder Arithmetik in neun Teilen. Es enthielt im ersten Teil die Berechnung von Dreieck, Trapez und Kreis, im zweiten Teil Verhältnisse und Proportionen, im dritten Teil Regeldetri, im vierten Teil Quadrat- und Kubikwurzeln, im fünften Teil Rauminhalte, im sechsten Teil Bewegungsprobleme, im siebenten Teil Lösung einfacher Gleichungen, im achten Teil Gleichungen mit mehreren Unbekannten, im neunten Teil das pythagoreische Dreieck.

Diese Werke der chinesischen Mathematiker, die bereits um 1000 v. Chr. geschrieben wurden, zeigen „eine gleiche Höhe der Entwicklung, wie wir sie in den anderen Ländern des Altertums fanden, und sie beweisen, daß die Chinesen zu den frühesten Pionieren der Mathematik gehören"[1].

[1] Nach Smith, History of Mathematics, Boston 1923/25.

Zweiter Abschnitt.

Die Antike.

I. Voreuklidische Mathematiker.

1. Frühzeit. Nach der Überlieferung ist Thales von Milet der älteste griechische Mathematiker. Da nun die Kenntnisse des Thales bereits eine gewisse Höhe erreichen, so kann er nicht ohne Vorgänger gewesen sein. Seine Heimatstadt Milet war 800—700 v. Chr. eine blühende Handelsstadt, deren Verbindungen bis weit ins Schwarze Meer, nach Kleinasien und Palästina reichten. Wahrscheinlich stellte das Handelsvolk der Phöniker die Verbindung zwischen den Küstenvölkern des östlichen Mittelmeeres her, so daß sowohl das griechische Mutterland wie seine Kolonien und die Inseln, vor allem Kreta, in bester kaufmännischer und geistiger Beziehung mit Babylon und Ägypten standen. Wahrscheinlich stammten dorther die ersten mathematischen Kenntnisse. Jedenfalls sind aus Knossos auf Kreta Beispiele babylonischer Rechnungen bekannt.

Die ältesten griechischen Zahlzeichen hat uns Herodianus übermittelt. Sie bestanden aus Strichen und den Buchstaben π, Δ, H, X, M. $1 = |$, $2 = ||$, $3 = |||$, $4 = ||||$, $5 = \pi$, $10 = \Delta$ ($\delta\varepsilon\kappa\alpha$), $100 = H$, $1000 = X$, $10\,000 = M$. Zusammensetzungen dieser Zahlen waren z. B. $\overline{|\Delta|} = 50$ und $\overline{|H|} = 500$.

Beispiele dieser alten Zahlzeichen tragen neben Inschriften die „salaminischen Tafeln", ein marmornes Rechenbrett, ähnlich unserem mittelalterlichen Rechenbrett. Auf ihm sind auch schon einfache Brüche verzeichnet, wie $^1/_2$, $^1/_4$ und $^1/_8$. In späterer Zeit wurden diese Tafeln durch Sandtafeln ersetzt, wie sie uns z. B. ein kürzlich aufgefundenes römisches Mosaikbild des Archimedes[1] zeigt. Von 500 v. Chr. ab etwa haben die Griechen statt der Zahlzeichen die Buchstaben als Zahlen benutzt. Es ist nicht klar, ob sie etwa durch die Phöniker, die vielfach als Erfinder des Alphabets angesehen wurden, dazu

[1] Abgebildet in des Verfassers Lehrbuch: Zahl und Raum, Heft 4. Verlag Quelle & Meyer, Leipzig.

gebracht worden sind. Die Übernahme der Buchstaben war für die Entwicklung der griechischen Arithmetik verhängnisvoll, weil eine bequeme und übersichtliche Schreibweise für die Rechnungen fehlte. Zur Zeit der großen Mathematiker war das Rechenbrett wieder außer Kurs. An seine Stelle traten geschriebene Zeichen. Wie weit das Fingerrechnen, das heute noch bei primitiven Völkern blüht, ausgebildet war, ist kaum bekannt. Bemerkenswert ist, daß in dieser Zeit vor Thales die Brüche nur in der Form der Stammbrüche wie in Ägypten vorkamen.

Etwas anschauliche Geometrie finden wir stets und überall bei den primitivsten Völkern; die Geometrie als systematische Wissenschaft ist eine Schöpfung des griechischen Geistes. Wenn wir auch die Vorgänger von Thales und Pythagoras nicht kennen, so müssen wir doch annehmen, daß sie schon klare geometrische Kenntnisse gehabt haben.

2. **Thales.** Herodot erzählt, daß Thales der Sohn einer griechischen Mutter und eines phönikischen Vaters war. Vom Vater hatte er offenbar den Handelsgeist geerbt, von der Mutter den griechischen Hang zur Philosophie. Soweit wir seine Person, die als erste uns in der Geschichte des europäischen Geisteslebens entgegentritt, aus den mythischen Erzählungen herausschälen können, erkennen wir, daß er, wie so oft ein Abkömmling zweier Rassen, überragenden Geistes war. Geboren etwa um 624 v. Chr. wurde er der Nachfolger seines Vaters, der einen Handel mit Salz und Öl trieb. Thales erweiterte offenbar das Geschäft zur Exportfirma größten Stils, geschickt jede Gelegenheit benutzend, seinen Reichtum zu mehren. Er war ein „königlicher Kaufmann“ im heutigen Sinne. In seinem Hause herrschte ein reger Verkehr von Kaufleuten und wissenschaftlich interessierten Männern. Sie brachten ihm Nachrichten aus aller Welt, besonders über seine private Liebhaberei, Astronomie und Mathematik. Wir kennen einige dieser Freunde mit Namen: Mandrolytus, Ameristos und Anaxagoras. Seine Geschäftsreisen, namentlich nach Ägypten, benutzte er, um dort mit hochgebildeten Männern, besonders Priestern, den Hütern der Wissenschaft, Verbindungen anzuknüpfen. Dem vornehmen Handelsherrn werden sicher, wie heute noch, viele Häuser offengestanden haben. Trotz aller wissenschaftlichen Liebhaberei blieb er der wagemutige Spekulant. So erzählt die Überlieferung, daß er in einem

Jahre, in dem eine reiche Olivenölernte bevorstand, alle Ölpressen in Milet rechtzeitig gepachtet habe. Ein Trust im kleinen. Unter den breiten Massen wurde er bekannt durch die Voraussage der Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585. Staunend werden die phantasievollen Völker am Mittelmeer von diesem dem Himmel verbundenen Manne gehört haben. So wurde er zum „Weisen" von Milet. Hochgeachtet in der Welt und bei seinen Mitbürgern, die ihn schon lange in den Rat der Stadt gewählt hatten, ist er 548 v. Chr. gestorben.

Die astronomischen Interessen und Kenntnisse des Thales haben einen praktischen Hintergrund. Als Seemann und Händler mußte er in diesen Dingen zu Hause sein; vielleicht spielen auch religiöse Gründe mit. Vertieft hat er diese Kenntnisse sicher durch seine Beziehungen nach dem Osten, da die Babylonier ja bereits Tabellen über Finsternisse hatten. Die wichtigste Tat des Thales auf diesem Gebiete ist die Voraussage der Sonnenfinsternis, die uns von Herodot I, 74 überliefert ist.

An geometrischen Kenntnissen sind überliefert die folgenden Sätze: Jeder Durchmesser halbiert den Kreis; die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck; die Gleichheit der Scheitelwinkel; der Umfangswinkel im Halbkreise ist ein Rechter. Praktischen Ursprung hat sicher seine Dreieckskonstruktion aus einer Seite und zwei Winkeln, da man mit dieser Grundaufgabe die Entfernung eines Schiffes vom Lande aus bestimmen konnte. Er lehrte, wie man aus der Sonnenhöhe von 45° die Höhe der Pyramide bestimmen konnte, da dann die Höhe gleich der Länge des Schattens ist. Ob er auch andere Fälle behandeln konnte, ist unsicher. Ausgegangen ist er bei diesen Erkenntnissen wahrscheinlich von praktischen Beobachtungen. Das Neue war, daß er sie bei seiner philosophischen Grundeinstellung als abstrakte Sätze überlieferte.

Thales war der Begründer der sogenannten jonischen Philosophenschule, aus der wir noch den Freund des Thales, Anaximander nennen, der die Griechen in den Gebrauch des Gnomon eingeführt hat[1].

3. Pythagoras. Geheimnisvoll, von fast mythischer Größe tritt uns die Person des Pythagoras in der Überlieferung entgegen; der Grund dafür liegt wohl in dem Geheimnis, das den Bund

[1] Gnomon, Stab, der senkrecht in die Erde gesteckt wurde. Aus der Länge des Stabes und seines Schattens wurde die Höhe der Sonne bestimmt.

der Pythagoreer umgab, jene merkwürdige Bruderschaft, die er um sich gesammelt hatte. Geheimnis des Schicksals ist es auch, daß um die Zeit, da Pythagoras im Westen lehrte, im fernen Osten Buddha aufstand und im Gewand des Bettlers seine neue Lehre verkündete, Kung Fu Tse und Lao Tse ihre noch heute in China herrschende Philosophie begründeten.

Pythagoras wurde um 570 v. Chr. als Sohn des Mnesarchos geboren. Ob Samos seine Geburtsstadt war, oder ob er mit seinem Vater dort einwanderte, wissen wir nicht. Er entstammte denselben Kreisen wie sein großer Vorgänger Thales, denn Mnesarchos war ein wohlhabender Kaufmann. Als Vertreter des väterlichen Handelshauses ist Pythagoras weit in der Welt herumgekommen, hat Ägypten, Italien, Kleinasien, vielleicht sogar Persien und Babylon besucht. Wie heute noch die Griechen das Handelsvolk des östlichen Mittelmeeres sind, so war es ja damals auch. Ob Pythagoras im späteren Leben auch noch Kaufmann gewesen ist, wissen wir nicht. Möglich ist, daß die Schüler den „Meister" nicht mehr im profanen Berufe sehen mochten, und daß darum nichts davon überliefert ist. Nach seinen zahlreichen Reisen ließ sich Pythagoras in Kroton in Süditalien nieder und sammelte dort durch die Macht seiner Persönlichkeit eine Reihe geistig angeregter junger Männer um sich, mit denen ihn das Geheimnis einer geistigen Gemeinschaft verband, in die die Außenwelt nicht hineinsah. In dieser frühen Zeit hat der Bund der Pythagoreer sicher noch keine politischen Tendenzen gehabt. Sein Einfluß ist sehr groß gewesen und der Bund als solcher Vorbild aller Geheimbünde späterer Zeiten.

Fig. 3. Münze aus Samos aus der Zeit des Kaisers Decius (250 n. Chr.) mit dem Bilde des Pythagoras[1]

Seine Lehren hat Pythagoras nur mündlich verbreitet. Im Kreise der Schüler dozierte und disputierte er. So kommt es, daß wir von ihm keine Schrift kennen und auf spätere Quellen, vornehmlich auf die Schriften seines Schülers Philolaos und des

[1] Aus: Denkmäler des klassischen Altertums von A. Baumeister. München und Leipzig.

des Archytas von Tarent, angewiesen sind. Dadurch ist es heute unmöglich, die Leistungen des Meisters von denen seiner Schüler zu trennen. Mit ziemlicher Sicherheit dürfen wir annehmen, daß die wesentlichen neuen Gedanken von ihm selbst stammen, insbesondere die Loslösung der mathematischen Lehren von den praktischen Aufgaben, die Erhebung zu wissenschaftlicher Allgemeinheit.

Die Zahlenlehre des Pythagoras ist die Grundlage seiner Philosophie. Die Einheit war ihm selbst keine Zahl, aber der Ursprung der Zahlen, deren Einteilung in gerade und ungerade von ihm herrührt. Im Anschluß an babylonische Überlieferungen beschäftigte er sich mit den Quadratzahlen; hier knüpft wohl die Entstehung des sogenannten pythagoreischen Lehrsatzes an. Man kannte in seiner Schule die arithmetische Reihe und stellte eine Tabelle der Dreieckszahlen auf. Das gleiche gilt von geometrischen und arithmetischen Proportionen und der mittleren Proportionale. Ob Pythagoras auch hierin an Babylon anknüpft, ist nicht mehr aufzuklären. Der Satz $3^2 + 4^2 = 5^2$ war ja bereits (s. S. 18) den Babyloniern bekannt. Es ist das Verdienst des Pythagoras, ihn allgemein bewiesen zu haben. Dabei ist man vermutlich schon in der pythagoreischen Schule zu der Erkenntnis gekommen, daß nicht jeder Strecke eine aus „Einheiten“ aufgebaute „Zahl“ entsprach, denn $\sqrt{2}$ als Diagonale des Quadrats mit der Seite 1 war bereits eine solche.

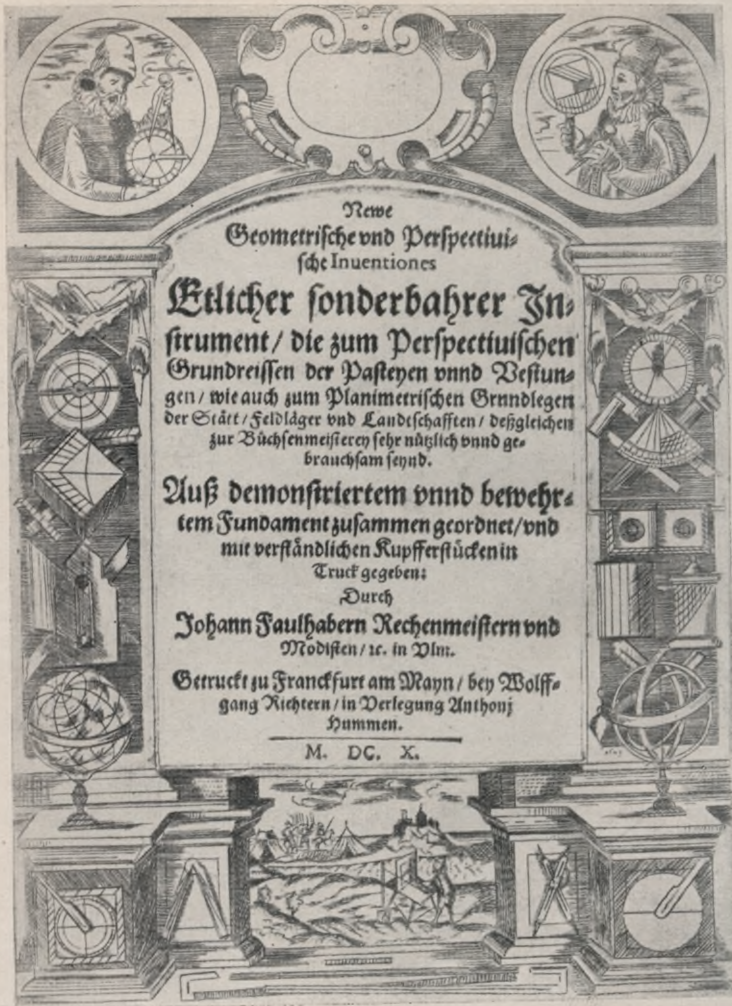
Wie die Zahlen durch Strecken versinnbildet wurden, so war sicher das ganze Beweissystem geometrisch begründet. a^2 und a^3 waren Flächen und Körper. Die Harmonie regelmäßiger Figuren unterlag eifrigstem Studium. Die Zahlenmystik wurde auch mit der Lehre der regelmäßigen Körper verknüpft. Das Tetraeder war Sinnbild des Feuers, das Oktaeder der Luft, das Ikosaeder des Wassers und der Würfel der Erde. Eine der bedeutendsten Neuschöpfungen war die Entdeckung der stetigen Proportion $a : b = b : (a - b)$. Welche Bedeutung er selbst oder seine Schüler dem beilegten, zeigt die Legende von dem Hekatombenopfer und dem Ausruf „Heureka“, wie auch der Umstand, daß das auf der stetigen Teilung beruhende regelmäßige Fünfeck in der Form des Sternfünfeckes zum Zeichen des Bundes gemacht wurde.

Der Überlieferung nach gipfelt die pythagoreische Lehre in dem Satze, daß das Wesen der Welt die Zahl sei. Die aus Arithmetik und Geometrie geschöpfte Erkenntnis, daß dem

Ein New vnd Wol.
gegründt Rechenbuch/auff den Linien vñ Ziffern/
sampt der Welschen Practic vnd allerley vortheilen/ neben der
extraction Radicum, vñ von den Proportionen/mit vilen lustigen Fragen vñ
Auffgaben/rc. Deßgleichen ein vollkom̃ner Bericht der Regel Falsi/mit newen Inuentionibus/ Demonstrationibus/ vnd vortheilen/ so biß anher für vnmüglich geschetzt/ gebessert/ dergleichen noch nie an tag kommen. [illegible]ann von der Geometria/ wie man mancherley Felder vnd ebne/auch allerley Corpora/ Reg[illegible] vnd Irregularia/messen/Aream finden vñ rechnen sol. Alles durch Simon Jac[illegible]n Coburg/ Bürger vnd Rechenmeister zu Franckfurt am Main/mi[illegible] zusammen getragen/ vnd jetzt erst[illegible] getruckt.

Mit Röm. Keyser. Mt. Gnad vnd Freiheit nicht nachzutrucken.
Getruckt zu Franckfurt am Mayn/ 1565.

Titelblatt eines Rechenbuches von Simon Jacob von Coburg



Newe
Geometrische vnd Perspectiui-
sche Inuentiones
Etlicher sonderbahrer In-
strument / die zum Perspectiuischen
Grundreissen der Pasteyen vnnd Vestun-
gen / wie auch zum Planimetrischen Grnndlegen
der Stätt / Feldläger vnd Landtschafften / deßgleichen
zur Büchsenmeisterey sehr nützlich vnnd ge-
brauchsam seynd.
Auß demonstriertem vnnd bewehr-
tem Fundament zusammen geordnet / vnd
mit verständlichen Kupfferstücken in
Truck gegeben:
Durch
Johann Faulhabern Rechenmeistern vnd
Modisten / rc. in Vlm.
Getruckt zu Franckfurt am Mayn / bey Wolff-
gang Richtern / in Verlegung Anthonj
Hummen.
M. DC. X.

Titelblatt eines Geometriebuches von Faulhaber

Reiche der Zahlen eine merkwürdige Gesetzmäßigkeit innewohne, wurde bestärkt durch die Entdeckung in der Musik, daß die Quinte und Oktave $^2/_3$ und $^1/_2$ der Saitenlänge des Grundtons hatten, daß also die Längenverhältnisse harmonisch zusammenklingender Saiten einfache Zahlenverhältnisse waren. Sicher ist, daß die Pythagoreer nicht die Zahlen als körperliche Sinnbilder der Welt aufgefaßt haben, sondern die Erkenntnis der zahlenmäßigen Gesetzmäßigkeiten im Raum und in der Musik machte ihnen die Zahlen zu Symbolen der allgemeinen Naturgesetzlichkeit. Wenn auch diese Erkenntnisse später zu mystischen Spielereien wurden — die sich bis heute erhalten haben —, wie die Zuordnung der Elemente zu den regulären Körpern, die Zuordnung der Tugenden zu den Zahlen, so gaben sie doch immer wieder Anlaß zum Studium mathematischer Dinge und brachten die Forschung weiter. Merkwürdig ist auch die Tatsache, daß ähnliche Ideen zur gleichen Zeit in China verbreitet waren, wie ja auch die Lehre von der Seelenwanderung in späterer Zeit bei den Pythagoreern verbreitet war, die noch heute in den religiösen Vorstellungen der Inder eine Rolle spielt.

4. Pythagoreer und andere. Der pythagoreische Bund hat sich offenbar in späterer Zeit auch in die Politik gemischt und wurde daher um 470 v. Chr. von den Machthabern in Kroton aufgelöst, die Mitglieder zum Teil verbannt. Wir können hier nur einige nennen. Bekannt ist unter den Schülern Philolaos, weniger wegen seiner wissenschaftlichen Leistungen als deshalb, weil er uns einen Teil der mathematischen Leistungen des Meisters aufgezeichnet hat.

Hippokrates aus Chios war ursprünglich Kaufmann. Nach Verlust seines Vermögens und der Sprengung des pythagoreischen Bundes wanderte er als Lehrer der Mathematik. Wir wissen von ihm, daß er sich um 440 v. Chr. in Athen durch Lehren seinen Lebensunterhalt erwarb. Er gab eine Menge Beiträge zur Geometrie, vor allem zur Kreisquadratur und Würfelverdoppelung. Bekannt ist auch sein Satz von den Möndchen im rechtwinkligen Dreieck, den Figur 4 veranschaulicht.

Bedeutender als er ist Archytas von Tarent, ein Mann des praktischen Lebens, der in seiner Heimatstadt als Politiker und Soldat, als Mathematiker und Philosoph eine große Rolle gespielt hat. Auch ihn beschäftigte die Würfelverdoppelung, daneben aber eine Menge Fragen der angewandten Wissenschaft, die ihm als Praktiker ja besonders lagen.

Auch bei den großen Philosophen Zeno, Anaxagoras und Demokrit finden wir mathematisches Interesse. Bekannt ist Zenos Paradoxon von Achill und der Schildkröte, das das Problem der Summierung einer unendlichen Reihe enthält.

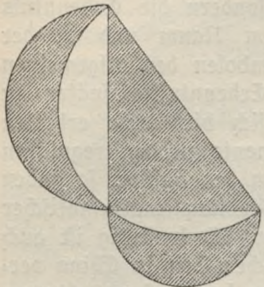


Fig. 4. Möndchen des Hippokrates

Anaxagoras hat sich nach der Überlieferung Plutarchs mit geometrischen Dingen beschäftigt, Demokrit zum erstenmal die Formel für den Rauminhalt der Pyramide angegeben. Der Sophist Antiphon versuchte eine Kreisberechnung durch einbeschriebene Vielecke, die später Archimedes zu der Methode entwickelt hat, deren wir uns im Unterricht noch heute bedienen.

5. Platon. Als Platon geboren wurde, 429 v. Chr., begann der Peloponnesische Krieg, herrschte die Pest in Athen, an der Perikles starb. Das „Goldene Zeitalter des Perikles" war vorüber. Die Zeit, in der Phidias seine unsterblichen Werke schuf, in der Äschylos, Sophokles und Euripides ihre Tragödien dichteten, war vorbei. Als Platon zum Mann heranwuchs, unterlag Athen den Spartanern (404), fünf Jahre später mußte sein Lehrer Sokrates den Giftbecher trinken.

Platon stammte aus vornehmem Hause, hatte viele Reisen gemacht, dann als Schüler des Sokrates die Neubegründung der Philosophie durch die Schaffung der Begriffe und Definitionen miterlebt. Seine mathematischen Kenntnisse stammten von Theodorus von Kyrene, dessen Hauptverdienst der Beweis für die Irrationalität der Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$ ist. Platon ist auf seinen Reisen nach Ägypten, Italien und Sizilien gekommen und knüpfte in Tarent Beziehungen mit Archytas an, von dem er offenbar die Kenntnisse über die Zahlenmystik der Pythagoreer hatte. Später gründete er in Athen im Garten des Akademos eine Schule, die Akademie. Diese Schule war schon in ihrer Zeit und blieb auch für das vierte Jahrhundert, namentlich durch Platons Schüler Aristoteles, von großem Einfluß auf das geistige Leben Griechenlands.

Wie Pythagoras die Mathematik als Wissenschaft betrieben, Sokrates die Fundamente aller Wissenschaft, Begriffe und Definitionen geschaffen, so vollendete nun Platon das Werk, indem er die ganze Philosophie mit mathematischem Geiste erfüllte. Er forderte als Grundlage der Mathematik aus der Erfahrung gewonnene, aber in sich notwendige Grundsätze (Axiome). Auf dieser Basis sollte sich lückenlos und widerspruchsfrei das System aufbauen. Diese tiefe Erfassung der mathematischen Methode begründete die hohe Wertschätzung der Arithmetik, die ohne Axiome der Anschauung wie die Geometrie es ermöglichte, ihr System rein logisch aufzubauen. Sein Interesse an der Mathematik war so groß, seine Forderung mathematischer Vorbildung so ernst, daß über dem Eingang zur Akademie der Satz stand: „Ohne geometrische Kenntnisse, soll niemand in mein Haus eintreten.“ [1]

Wie Platons Denken ganz allgemein orientiert war, so bezieht sich auch das mathematisch Neue, das von ihm überliefert ist — Schriften über Mathematik sind von ihm nicht bekannt —, mehr auf die Methode, als auf Sachliches. Einzelheiten sind die Erkenntnis, daß die Menge der geraden Zahlen so groß ist wie die der ungeraden, daß $\sqrt[3]{a}$, wo a eine ganze Zahl, auch eine irrationale Zahl ist. Durch die Pythagoreer veranlaßt, hat er sich auch mit Zahlenmystik beschäftigt, noch heute spricht man von der Platonischen Zahl, wahrscheinlich $60^4 = 12\,960\,000$, die offenbar auf babylonische Quellen zurückgeht. Die Kenntnis der fünf regelmäßigen Körper ist zwar bereits bei den Pythagoreern bekannt, aber Platon hat offenbar erst die Beweise dazu gegeben. Seine Leistung schien jedenfalls so bedeutend, daß wir noch heute nach antikem Vorbild von „platonischen Körpern“ reden.

Die Hauptleistung der Schule Platons ist die Einführung der „analytischen Methode“. Diese wird noch heute in der Schule benutzt. Sie besteht darin, daß man von einer gedachten Lösung ausgehend, die Konstruktion auf bekannte Sätze oder Aufgaben zurückführt, „Analysis“. Darauf erst erfolgt die Konstruktion. Eine wesentliche Leistung Platons ist weiter der Gedanke, jede geometrische Aufgabe durch eine Untersuchung ihrer Grenzen und Möglichkeiten abzuschließen (Diorismus, Determination); gerade hierin zeigt sich das methodische Denken in schönster Voll-

[1] *Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.*

endung. Die Hauptbedeutung Platons und seiner Schule besteht aber darin, daß die Untersuchungen über Grundsätze, Begriffe, Definitionen und Sätze, die von ihm so eingehend gepflegt wurden, für die nachfolgende Zeit der Ansporn waren, den systematischen, lückenlosen Aufbau der Geometrie zu entwickeln, der uns in dem Werke des Euklid in meisterhafter Vollendung erhalten ist.

6. Schüler Platons. Als Mathematiker bedeutend unter Platons Schülern nennen wir zunächst Eudoxos von Knidos. Er war mit Archytas befreundet und trat als älterer Mann in den Kreis Platons ein. Eudoxos hatte in Ägypten enge Beziehungen zu den Priestern unterhalten und brachte auf Grund der dort empfangenen Anregungen die Kenntnisse über die Sphärik und die Astronomie nach Griechenland. Die Bewegung der Planeten suchte er durch ein System von konzentrischen Kugeln zu erklären, wobei der Sonne, dem Mond, der Gesamtheit der Fixsterne und jedem der einzelnen Planeten je eine Kugelschale als Bewegungsfläche zugewiesen war. Nach Angabe des Archimedes hat Eudoxos den Durchmesser der Sonne als das Neunfache des Erddurchmessers berechnet. Die durch ihn gegebene Erweiterung der Lehre von den Proportionen war im Altertum so geschätzt, daß man ihm die Sätze aus dem fünften Buche Euklids zuschrieb, wenigstens Euklid nur das Verdienst der systematischen Zusammenstellung ließ. Die wichtigste Leistung des Eudoxos ist die „Exhaustionsmethode". Diese Methode benutzte er, um in strenger Form Sätze über Flächen und Rauminhalte zu beweisen, die man bis dahin nur anschaulich gewonnen hatte, z. B. die von Demokrit für die Pyramide aufgestellte Formel $V = \frac{1}{3} g \cdot h$.

Menächmus war ein Schüler Platons und Freund des Eudoxos. Er soll die Kegelschnitte systematisch als ebene Schnitte senkrecht zu einer Mantellinie eines Kreiskegels erzeugt haben. Der Schnitt des spitzen Kegels erzeugte die Ellipse, des rechtwinkligen die Parabel, des stumpfwinkligen die Hyperbel. Ausgangspunkt war dabei für Menächmus das Problem der Würfelverdoppelung.

Nach der Überlieferung ist bereits Menächmus einer der Lehrer Alexanders des Großen gewesen, der dem Alexander auf seine Frage, ob es keine einfachere Behandlung der Geometrie für ihn gebe, die Antwort gegeben haben soll: „König! In Deinem Lande gibt es Wege für den König und für die anderen, in der Geometrie aber nur einen Weg für alle.“

Aristoteles (384—322), der größte von Platons Schülern, der die Philosophie des Abendlandes heute noch beeinflußt, war ebenfalls Lehrer Alexanders gewesen. Er hatte keine besonderen mathematischen Interessen. Mathematik war für ihn die wichtigste Hilfswissenschaft des Physikers, die Voraussetzung aller Philosophie. Baute er doch seine Logik rein mathematisch auf. Aristoteles hat das gesamte Wissen seiner Zeit in einer großen Menge von Büchern niedergelegt, die uns aber nur zum Teil erhalten sind. Auf seine Anregung schrieb Eudemos von Rhodos ein Geschichtswerk der Mathematik, dessen uns erhaltene Bruchstücke für alle früheren Mathematiker die einzige Quelle bilden.

II. Die Alexandriner.

1. Alexandria. Die uneinigen griechischen Stadtstaaten wurden 338 v. Chr. von Philipp von Mazedonien in der Schlacht von Chäronea endgültig besiegt. Griechenland war bald darauf nur ein kleiner Teil des großen Reiches, das der junge Alexander in beispiellosem Siegeszuge gründete. Nach Alexanders Tod (323) zerfiel das Reich schneller als er es gegründet. Beim Zuge nach Ägypten hatte der große Eroberer im Nildelta die Stadt Alexandria gegründet, wo nach seinem Tode sein Freund und Ratgeber Ptolemäus I. (Soter) residierte. Unter Ptolemäus erreichte Alexandria eine ungeahnte Blüte. Es wurde das Zentrum des Handels, der Kunst und der Wissenschaft jener Zeit. Die Züge Alexanders hatten die vier großen Kulturgebiete vom Mittelmeer bis Ostasien auch äußerlich miteinander verbunden. Durch den im Anschluß daran einsetzenden Handel wurde diese Verbindung immer enger, die geistige Befruchtung der einzelnen Gebiete immer vielfältiger. Erst kürzlich wurde durch neue Forschungen in Innerasien diese Verbindung bewiesen. Wie die Medizeer später in Florenz, so förderten die Ptolemäer in Alexandria Künste und Wissenschaften. Sie errichteten in der Stadt eine Bibliothek, die größte der Alten Welt, und eine bedeutende Universität. In der lebhaften Handelsstadt fanden alle geistigen Anregungen begeisterten Beifall und rasche Verbreitung.

Der Reichtum, die Freude am Neuen, „Modernen“, die bewußte Internationalität der Stadt und der Bevölkerung war ein fruchtbarer Boden für eine intensive geistige Blüte. In Alexandria erlebte insbesondere die Mathematik einen Aufschwung, wie er bis ins 17. Jahrhundert nicht mehr eintrat. Es ist eine stolze Reihe von Namen, die sich an Alexandria knüpfen: Euklid, Archimedes, Apollonius, Eratostenes, Ptolemäus, Heron und viele andere. Besonders wertvoll ist es für uns heute, daß die Werke der meisten uns zum großen Teil erhalten sind, so daß sie für die wiedererwachende Wissenschaft um 1500 n. Chr. die Fundamente abgaben.

2. Euklid. Euklid ist ohne Zweifel der erfolgreichste Schriftsteller der Welt. Von seinem Hauptwerk, den Elementen, erschienen nach Hoppe[1] etwa 1700 Ausgaben, und fast 2000 Jahre war es unbestritten „Das Geometriebuch“ der ganzen Welt. Noch bis in unsere Zeit wurde es in England als Schulbuch benutzt. Dieser Erfolg ist wohl darin begründet, daß es in Aufbau, Klarheit und logischer Folgerichtigkeit die Bücher aller Vorgänger so sehr übertraf, daß auch die moderne Kritik nur ganz unwesentliche Mängel nachweisen konnte.

Über Euklids Leben wissen wir fast nichts. Man vermutet, daß er um 365 v. Chr. geboren wurde; wo, wissen wir nicht, ebensowenig, ob er Grieche oder Ägypter war. Unter Ptolemäus I. lehrte er in Alexandria und schrieb die Elemente um 325. Die früher häufige Verwechslung mit Euklid von Megara ist hinfällig; denn dieser lebte etwa 100 Jahre früher und war Schüler des Sokrates. Vermuten können wir auch nur, daß Euklid in Athen die Anregungen zu seinen wissenschaftlichen Forschungen gefunden, denn die Exaktheit seiner Methode ist undenkbar ohne die logische Schule der Akademie. Auch über seinen Tod, seine Lehrweise, seine Schüler und Nachfolger wissen wir nichts, ja nicht einmal die Stätte seines Wirkens, das Museum (*μουσεῖον*), läßt sich heute noch festlegen, wie auch die Bücher der alexandrinischen Bibliothek bei verschiedenen Bränden völlig verloren gegangen sind. Nur der Ruhm der geistigen Leistung ist über alle Welt und Zeiten verbreitet.

Die Werke Euklids sind in der damals üblichen Form auf Pergamentrollen geschrieben gewesen. Im Original ist uns nichts

[1] Hoppe, Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum, Heidelberg 1911.

erhalten, nur in späteren, besonders arabischen Bearbeitungen. Die Araber haben aber das Original stark verändert und zahlreich sind die Versuche, ihn „wiederherzustellen". Eine besondere Quelle hierfür ist eine vatikanische Handschrift aus der Zeit um 950, die offenbar nach alten Quellen, vielleicht nach der Ausgabe Theons von Alexandria, des Vaters der Mathematikerin Hypatia, geschrieben ist. Die Werke Euklids sind in ihrer Art und Form noch heute wertvolle Bausteine der Mathematik. Falsch wäre es aber, zu glauben, daß Euklid oder die Alexandriner dies alles erst geschaffen. Der mathematische Inhalt dieser Werke umfaßt die Arbeit von fast drei Jahrhunderten. Das unsterbliche Verdienst Euklids ist es, die Fülle des Materials, das von seinen Vorgängern und Zeitgenossen zusammengetragen war, gesichtet und geordnet, durch eigene Arbeiten erweitert und vertieft, und schließlich in genialer Intuition und mit unerbittlicher logischer Konsequenz in ein geschlossenes System gebracht zu haben.

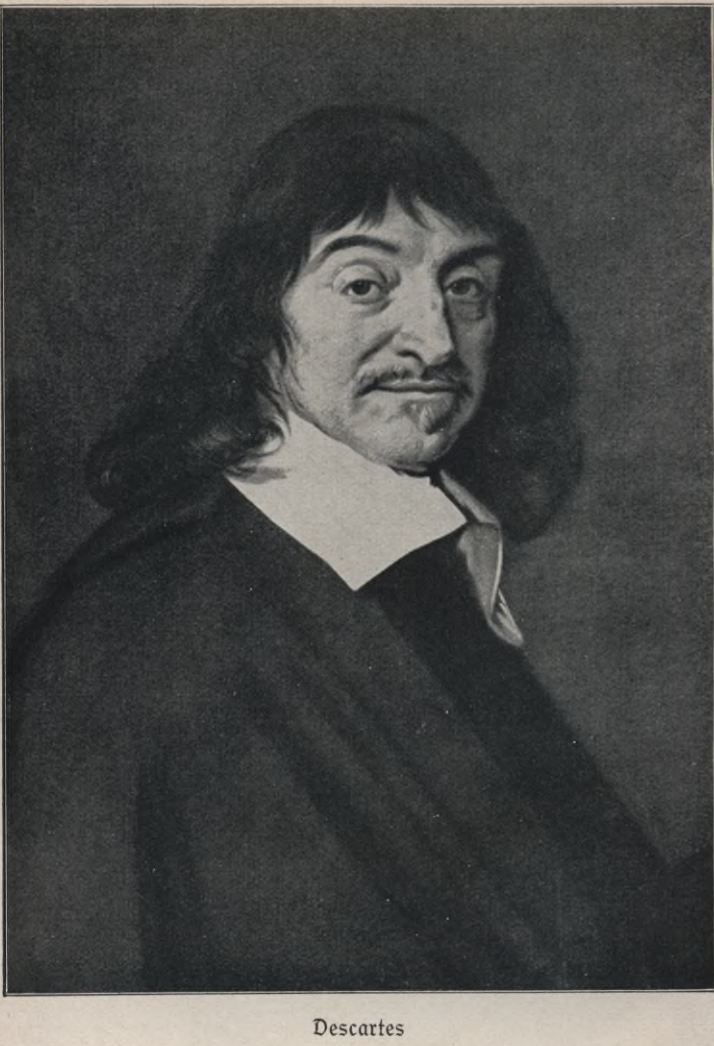
Mit Namen sind die folgenden Werke Euklids bekannt: 1. Die Elemente; 2. Daten; 3. Porismen; 4. Teilung der Figuren; 5. Optik; 6. Trugschlüsse; 7. Örter auf der Oberfläche; 8. Kegelschnitte; 9. Elemente der Astronomie; 10. Katoptrik; 11. Musik. Davon sind 3, 4, 6, 7, 8, 10 im Original verloren und nur in Zitaten und Bruchstücken bekannt.

Die Elemente umfassen 13 Bücher, die von Euklid selbst stammen, das 14. Buch ist von Hypsikles, dem Astronomen, verfaßt und enthält eine Abhandlung über die regulären Vielflache. Das 15. Buch behandelt dasselbe Thema und stammt von einem anderen Verfasser. Dem platonisch-griechischen Wissenschaftsideal entsprechend enthalten die Elemente nur reine Mathematik; alle Anwendungen und numerischen Rechnungen fehlen, selbst die Berechnung von Flächen und Rauminhalten war verpönt. Nur die abstrakt-theoretische Ableitung der Formel war „Mathesis" im eigentlichen Sinne.

Den einzelnen Büchern der Elemente werden die benutzten Definitionen vorangestellt. Das war platonische Forderung. Beim 1. Buche finden wir auch noch fünf Postulate (Forderungen) und Axiome (Grundsätze) vorangestellt, unter denen als fünftes Postulat das berühmte Parallelenpostulat heute wegen des Meinungsstreites um die nicht-euklidischen Geometrien im 19. Jahrhundert eine besondere Bedeutung hat. Es heißt: „Wenn zwei Linien mit einer dritten nach derselben Seite zwei Winkel, deren Summe kleiner als zwei rechte ist, machen, so schneiden sie sich auf der Seite, wo die kleineren Winkel liegen." Diesen Satz, den Euklid als unbeweisbare Forderung aufstellt, hat man jahrhundertelang zu beweisen versucht, bis Gauß, Bolyai und Lobatscheffskij den Nachweis erbrachten, daß man auch vom Parallelenpostulat unabhängige Geometrien aufbauen kann, „nicht-euklidische Geometrien", die in der Ära des Relativitätsprinzips sogar physikalische Bedeutung erhalten haben, während vor 120 Jahren Gauß noch „Das Geschrei der Böotier" wegen der Neuheit seiner Ideen fürchtete. Euklids Auffassung des Satzes war doch richtig, es war nur ein Postulat. Im einzelnen enthalten die Bücher: das 1. die Hauptsätze von Parallelen, Parallelogrammen, Dreiecken, Kongruenz, Flächengleichheit und als Abschluß den Lehrsatz des Pythagoras; das 2. Flächenteilung und -verwandlung und die Darstellung der Quadrate als Summen von Quadraten und Rechtecken. Es handelt sich um die geometrische Behandlung der arithmetischen Sätze der Art $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$ und der Gleichung $x^2+ax=a^2$. Das 3. Buch enthält die Kreislehre, und zwar die Sätze über Tangenten, Sekanten, Kreisviereck und Segmente; das 4. Buch die Lehre von den ein- und umbeschriebenen Vielecken bis zum 15-Eck; das 5. Buch die Lehre von den Proportionen anknüpfend an Eudoxos; das 6. Buch die Lehre von der Ähnlichkeit, den Proportionen in Dreiecken und Vielecken, die Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes, ferner die Lösung der quadratischen Gleichung durch Anlegung von Flächen; das 7. Buch die Zahlenlehre. Sein Inhalt wird hauptsächlich auf die Schüler Platons zurückgeführt; das 8. und 9. Buch die Flächen- und Körperzahlen, das heißt einfache Sätze über Potenzen, Wurzeln und geometrische Reihen; das 10. Buch die Lehre von den irrationalen Größen. Es knüpft an den Sophisten Theätet an. Mit viel Scharfsinn werden eine Menge Dinge geometrisch entwickelt, die für die Weiterentwicklung der Mathematik bedeutungslos waren, aber trotzdem immer wieder getrieben wurden; das 11. Buch eine Einführung in die Stereometrie, umfassend die Geraden, Linien und Ebenen im Raum, die Ecke als Körperwinkel und die regelmäßigen Körper; das 12. Buch die Berechnung der Körper: Prisma, Pyramide, Kegel und Kugel nach dem Exhaustionsverfahren; das 13. Buch


IOANNIS KEPPLERI
Mathematici Cæsarei
hanc Imaginem
ARGENTORATENSI BIBLIOTHECÆ
Consecit
MATTHIAS BERNECCERVS
Kal. Ianuar. Anno Chr.
M DC XXVII.
W

Kepler



Descartes

die einbeschriebenen Figuren in Ebene und Raum, regelmäßige Vielecke und Vielflache mit dem Schlußsatz: Es gibt nur fünf regelmäßige Körper.

Das zweite erhaltene Werk des Euklid enthält unter dem Titel Daten 18 Definitionen und 94 Säße, darunter den Peripheriewinkelsatz. Es stellt im wesentlichen Anwendungen und Ergänzungen der Elemente unter Benutzung der in Platons Schule begründeten analytischen Methode dar. Das ebenfalls erhaltene Buch Phänomene (φαινόμενα = Astronomie) enthält Säße der Kugelgeometrie, die vermutlich von Eudoxus herrühren. Die „Teilung der Figuren" ist nur in arabischer Bearbeitung erhalten. Das Buch enthält eine Menge Aufgaben, die zum Teil in die heutige Schulmathematik übergegangen sind. Die völlig verlorenen Porismen sind uns unbekannt, ebenso das Werk über die Kegelschnitte. Es ist vermutlich in das Buch des Apollonius übergegangen und durch dessen bedeutendere Leistung völlig verdrängt worden.

3. Archimedes. Er gehörte eigentlich nicht zu den Alexandrinern, dieser Einzigartige unter den großen Geistern der Antike, denn er ist in Syrakus auf Sizilien 287 v. Chr. geboren und hat, von einem Studienaufenthalt in Alexandria und vielen Reisen abgesehen, sein Leben in der Heimat verbracht. So wenig wir von Euklid wissen, so vielfach und Persönliches gebend sind die Urkunden über Archimedes. Er stammte aus vornehmstem sizilianischem Geschlechte, war der Überlieferung nach sogar mit dem König Hiero verwandt. So war er unabhängig und konnte sich ganz der Wissenschaft widmen. Sein Studium in Alexandria, das sicherlich ganz unter dem Eindruck der gewaltigen Erfolge der Mathematik stand, hatte in ihm auch das Interesse für die Technik wachgerufen. Wenn wir bedenken, wie sehr für den vornehmen Griechen alle Handarbeit, alles Technische verpönt war — war doch selbst ein Mann wie Praxiteles in der Gesellschaft unmöglich —, so ist es erstaunlich, mit welchem Eifer sich gerade Archimedes allem Experimentieren, Bauen und Basteln hingegeben hat. Er ist der erste wirklich große Techniker der Alten Welt. Typisch für die technische Einstellung bei ihm ist es auch, mit welch genialer Virtuosität er das numerische Rechnen handhabte. Er steht damit im Gegensatz zu Euklid, dem es stets nur auf die rein abstrakte, allgemeine Lösung ankam. Kennzeichnend für Archimedes ist es auch, daß seine Bücher und Schriften nur Neues bringen, während sein großer Vorgänger Euklid, die Arbeiten der Vorgänger zusammenstellend, als eigen die streng logische Fassung hinzutat und nur wenige eigene Entdeckungen brachte.

Wie Gauß, der „Fürst der Mathematiker" des 19. Jahrhunderts, so war Archimedes der „Homer der Geometrie". Seine technischen Arbeiten fanden ihre Krönung in der mit raffiniertesten Mitteln durchgeführten Verteidigung seiner Vaterstadt, die 214—213 von den Römern unter Marcellus belagert wurde. Der 75 jährige leitete die Arbeiten; rastlos tätig, neue Konstruktionen ersinnend, kämpfte er gewissermaßen mit dem Geiste des Hellenentums gegen die brutale militärische Macht des ungeistigen Rom. Symbol dieses Kampfes ist ja auch sein Tod. Als die Römer durch Überraschung in die Stadt gekommen, fand ein Soldat den Greis, der über neuen Figuren und Konstruktionen sinnend in einem Garten saß. Eine barbarische Aufforderung nach Geld und Gut mag der Alte nicht verstanden haben; der Soldat erschlug ihn. Einer der größten des Altertums war nicht mehr. Die Römer Livius und Plutarch berichten uns die Szene und setzen hinzu, daß Marcellus tief erschüttert war und diesen Soldaten bestrafte. Ob es nicht eine Lügenmeldung der „Presse" der Eroberer war? Sicher ist jedenfalls, daß Marcellus die wertvollen Instrumente des Archimedes als Beutestücke nach Rom brachte.

Von Schriften des Archimedes sind uns erhalten: Über Kugel und Zylinder, Konoide und Sphäroide, über die Spiralen, die Kreismessung, die Sandrechnung. Die Schrift über Kugel und Zylinder ist inhaltlich für die Wissenschaft wie persönlich für Archimedes die wichtigste. Durch sie wurde er bekannt und berühmt. Hat doch Cicero, der 75 v. Chr. römischer Quästor in Sizilien war, an dem Bilde von Kugel und Zylinder, das der Grabstein trug, das Grab des Archimedes wieder entdeckt, das die Syrakusaner völlig vergessen hatten [1].

Die Oberflächen- und Inhaltsberechnung der Kugel und ihrer

[1] Cicero, Tusculanen (V, 23) berichtet: „Ich bemerkte eine kleine Säule ..., die das Bild einer Kugel und eines Zylinders trug ... ich fand auch die Inschrift, obwohl sie ... verwittert war. So hätte eine vornehme griechische Stadt ... nichts von dem Denkmal ihres größten Sohnes gewußt, wenn nicht ein Mann aus Arpinum es entdeckt hätte."

Teile war eine Leistung, deren methodische Bedeutung unerreicht ist. Er führte die Berechnung ebenso wie in dem Buche über die Rotationskörper so durch, daß er die Körper durch zur Achse senkrechte Schnitte in Scheiben gleicher Dicke zerlegte. Für jede Scheibe wird der ein- und umbeschriebene Zylinder konstruiert. Die Summe der äußeren bzw. der inneren Zylinder stellt obere und untere Grenze des betreffenden Körpervolumens dar. Je dünner die Scheiben sind, um so genauer wird das Volumen erhalten. Die Exhaustionsmethode des Eudoxus feierte hier ihre Triumphe. Mit modernen Augen gesehen, war des Archimedes Berechnung eine Integration. So ist er der unmittelbare Vorläufer von Leibniz und Newton.

Bei der Parabelberechnung ging er ähnlich vor (Fig. 5), indem er den Flächeninhalt in Rechtecksummen einschloß, aber gleichzeitig neben der rein mathematischen eine auf Schwerpunktsbetrachtungen beruhende Rechnung durchführte.

Die Kreismessung, durch einen ähnlichen Grenzprozeß mit ein- und umbeschriebenen Vielecken durchgeführt, ergab Werte, deren Genauigkeit (nach Heron bis zur fünften Dezimale) uns staunen läßt, zumal wir nur ahnen, wie die Rechnung durchgeführt wurde.

Seine Arbeit über die Spiralen geht auf die Erfindung seines Freundes Konon zurück. Auch hier löst er Probleme, die in solcher Schärfe erst wieder mit der Differential- und Integralrechnung bearbeitet wurden.

Die Sandrechnung sollte eine Berechnung der Zahl der Sandkörner in der Weltkugel des Aristarch sein. Dabei stellte er ein neues Zahlensystem auf. Die neue Einheit war eine Myriade Myriaden $10\,000 \cdot 10\,000$, die er eine Oktade nannte. So fand er, daß die Weltkugel 10^{71} Sandkörner, also noch lange nicht die Zahl der möglichen Zahlen umfasse. Neu ist hier die Verwendung des Potenzgesetzes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Alle Schriften geben nebenher neue arithmetische Entdeckungen, in der Parabelschrift z. B. führt er die erste Summierung einer geometrischen Reihe aus: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{4}{3}$, in der Schrift über die Spiralen berechnet er die Summe der Quadratzahlen, löst Gleichungen dritten Grades, und zwar durch Schnitte mehrerer Kegel und Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Eine Fülle des Neuen, das im einzelnen anzuführen, zu weit führen würde.

4. Eratosthenes. Eng befreundet mit Archimedes, der fern von Alexandrien doch ganz im Geiste Alexandriens wirkte, hatte Eratosthenes eine hohe amtliche Stellung im Museum. In Kyrene im Jahre 276 v. Chr. geboren, wurde er in Athen erzogen. Um 240 war er Oberbibliothekar der Alexandrinischen Bibliothek. Bei den Zeitgenossen war er so angesehen, daß sie ihm den Beinamen Plato II. gaben und ihn zu den weisen Männern Griechenlands zählten. Seine rein mathematischen Leistungen sind verhältnismäßig unbedeutend, um so bedeutender ist er als

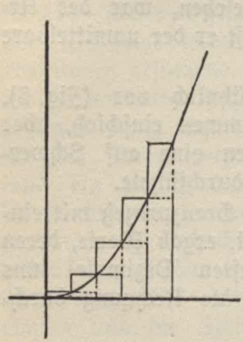


Fig. 5. Zur Berechnung der Parabel durch Archimedes

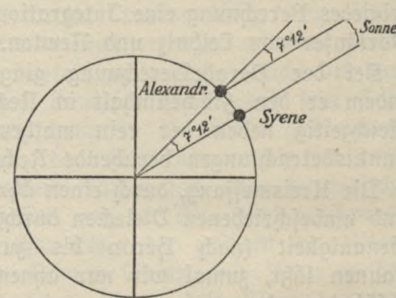


Fig. 6. Erdmessung des Eratosthenes

Geograph. Bekannt ist von mathematischen Leistungen sein „Sieb", eine Methode zur Auffindung aller Primzahlen. Sie bestand darin, daß er alle ungeraden Zahlen der Reihe nach aufschrieb und dann die Vielfachen der vorhergehenden ausstrich: 3 5 7 ~~9~~ 11 13 ~~15~~ 17 19 ~~21~~ 23 ~~25~~ ~~27~~ ..., eine wenig glückliche Methode. Die Messung des Erdradius, seine bekannteste Leistung, führte er nach Kleomedes in folgender Weise aus: In Syene, dem heutigen Assuan, war ein tiefer Brunnen. Eratosthenes hörte, daß am 21. Juni die Sonne sich in seinem Wasser spiegele, das heißt also im Zenit des Ortes stand. In Alexandrien, das mit Syene auf demselben Meridian lag, betrug an diesem Tage die Zenitdistanz der Sonne $^{1}/_{50}$ des Kreisumfanges, das heißt 7° 12'. Nun ließ er die Länge der Straße von Alexandrien nach Syene messen, es ergaben sich 5000 Stadien, so daß sich der Erdumfang auf 250 000 Stadien belief;

das sind je nach dem für ein Stadion einzusetzenden Maß 40000 km.

5. **Aristarch.** Eratosthenes' Erdmessung ist nicht denkbar ohne die Tat des Aristarch, von dem uns Archimedes in der Sandrechnung erzählt: „Denn er nimmt an, daß alle Fixsterne und die Sonne feststehen, die Erde aber um die Sonne in einem Kreise herumgehe, mit der Sonne als Mittelpunkt." Aristarch hat also den Gedanken des Kopernikus schon 2000 Jahre früher gedacht, die Welt des Aristoteles aus den Angeln gehoben und die Erde zum Planeten gemacht, wie Mars und Venus einer waren. Es war eine entscheidende Tat, die der 310 in Samos geborene, der um 280—260 in Alexandrien lehrte, der Welt schenkte. Aber religiöser bzw. philosophischer Fanatismus hinderten wie zu den Zeiten Galileis die Ausbreitung der neuen Idee. Die Stoa ließ durch ihren Führer Kleanthes den Aristarch der Gotteslästerung anklagen. Da auch Hipparch von Nicäa (150 v. Chr.) die Lehre des Aristarch bekämpfte, so geriet sie bald in Vergessenheit.

6. **Apollonius.** Das für die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft so sehr fruchtbare dritte Jahrhundert sollte nicht zu Ende gehen, ohne daß ein neuer Gipfel mathematischer Forschung in dem Werk des Apollonius erreicht wurde. Seine Leistung ist ihrem wissenschaftlichen Werte nach sicherlich die größte, die die griechische Mathematik hervorbrachte, wie schon daraus hervorgeht, daß erst die Neuzeit darüber hinausgegangen ist. Apollonius war eine Persönlichkeit wie Archimedes, originell im Denken, klar und weitblickend in der Erfassung der Zusammenhänge. Noch größer erscheint uns seine Leistung, wenn wir bedenken, daß er an Stelle der uns heute so bequemen Zahlensymbolik sich bei allen Formulierungen und Beweisen der Linien, Rechtecke, Quadrate usw. statt der Zahlen, ihrer zweiten und dritten Potenzen bedienen mußte.

Apollonius wurde geboren 265 v. Chr. in Perge in Kleinasien. Er studierte in Alexandrien und war selbst dort Lehrer um 200. Später lebte er am Hofe des Königs Attalus von Pergamum und starb dort 170.

Sein Werk über die Kegelschnitte umfaßt 8 Bücher, von denen 1—4 uns im griechischen Text, 5—7 in arabischer Übersetzung erhalten sind, während Buch 8 verloren ist. In den ersten vier Büchern stellt er das, was vor ihm über die Kegelschnitte bekannt war, in neuer, übersichtlicher Fassung zusammen. Die nächsten drei Bücher bringen seine eigenen Entdeckungen. Während Menächmus, der Platoniker, die drei Kegelschnitte als Schnitte dreier verschiedener Kegel erzeugte, erhält Apollonius im ersten Buche alle drei Kegelschnitte durch Schnitte desselben Kegels, indem er den Schnitt in verschiedenen Lagen zur Achse führt. So erhält er eine gemeinsame Definition der Kegelschnitte und entwickelt aus ihr die Eigenschaften der Scheitel, Durchmesser und Tangenten; auch findet er hier die neuen Namen für die Kegelschnitte: Ellipse (ἔλλειψις), Parabel (παραβολή) und Hyperbel (ὑπερβολή). Im zweiten Buche faßt er die Hyperbel als eine Kurve mit zwei Ästen auf und gewinnt die Lehre von den Asymptoten und konjugierten Durchmessern. Im dritten Buche werden alle die Eigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet, die heute den Inhalt der analytischen Behandlung bilden, während das vierte Buch die Schnitte zweier Kegel untersucht. Das fünfte Buch bringt eigene Forschungen, vermutlich unter Benutzung archimedischer Methoden. Es sind Aufgaben über Maxima und Minima, Krümmungsmittelpunkte usw. Das sechste Buch enthält die Lehre von den ähnlichen Kegelschnitten, und das siebente Buch baut die Lehre von den konjugierten Durchmessern weiter aus.

Apollonius hat noch eine Menge anderer Bücher geschrieben, die wohl alle als Lehrbücher für den Unterricht an der Universität gedacht waren und uns einen Einblick in den hohen Stand der damaligen Wissenschaft geben. Da finden wir die ersten Aufgaben über Kombinatorik, den Gebrauch vierter Wurzeln, eine genauere Berechnung von π. Für die Astronomie gab er eine wertvolle Grundlage der Theorie der Epizykeln, die später Ptolemäus in seinem Weltsystem verwandte.

Mit Apollonius erreichte die Blüte Alexandriens ihr Ende, wenn wir von Heron, dem großen Techniker, absehen. Äußerer Grund für den Niedergang war der politische Verfall Alexandrias. Rom war die Beherrscherin der Welt. Die Römer aber waren das Volk der Praxis. Juristen, Verwaltungsbeamte und Feldherren brachte Rom hervor, keine Philosophen. Als im Jahre 47 v. Chr. Cäsar Alexandrien eroberte, verbrannte ein großer Teil der fast dreihundert Jahre bestehenden Bibliothek.

Dieser Brand war auch nach außen ein Symbol dafür, daß die wissenschaftliche Bedeutung Alexandriens zu Ende war.

III. Der Hellenismus.

1. Die Epigonen. Die Macht des Griechentums, das in Alexanders Gründungen eine neue Blüte erlebt hatte, ging zu Ende. Eine neue Weltmacht trat auf den Plan, Rom. In den letzten Lebensjahren des Apollonius hatten Roms Feldherren das mazedonische Reich durch ihre überlegene militärische Taktik unterworfen, in den Jahren 170—150 zerstörten sie die Reiche der Diadochen, 146 wurde das stolze Korinth, die Führerin des damaligen Altgriechenland, zerstört und von verständnislosen Soldaten seiner Kunstschätze beraubt. Karthago, schon einmal im Jahre 201 besiegt, wurde im gleichen Jahre völlig vernichtet. Die Länder um das Mittelmeer wurden römische Provinz, provinzial wurden auch ihre geistigen Leistungen. Zwar lernen wir immer wieder einzelne Männer kennen, die noch einmal versuchen, die großen Gedanken des goldenen Zeitalters der Wissenschaft weiterzudenken, aber der aufs praktische gerichtete Geist der Zeit treibt auch die Gelehrten immer mehr zur Technik, die bald allen wissenschaftlichen Charakter verliert.

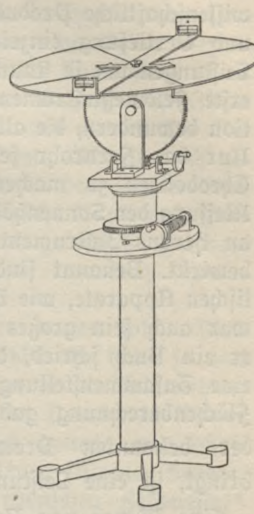


Fig. 7. Herons Diopter (Rekonstruktion)

Am nächsten steht den großen Alexandrinern noch Hipparch von Nicäa, der in Rhodos lebte (190—126). Unter Anlehnung an babylonische Quellen, die dem Bithynier ja greifbar nahe lagen, schuf er die Grundlagen der für die Sternkunde so wichtigen Trigonometrie und in der stereographischen Projektion die erste wissenschaftliche Himmelskarte. Für die Rechnungen gab er eine Sehnentafel, die wir als Vorläuferin unserer heutigen Sinustafel betrachten können. Von seinem großen Beobachtungsgeschick und Fleiß zeugt der hinterlassene Katalog von etwa 850 Fixsternen. Breiten und Längenbestimmungen waren ihm geläufig, die letzten gründete er ganz modern auf Zeitmessungen bei Verfinsterungen des Mondes.

Von Heron, dem letzten großen vorchristlichen Alexandriner, sind eine Menge Schriften erhalten. Nach seinem Stil war er kein Grieche, sondern Ägypter. Dies wird auch mit ein Grund dafür sein, weshalb sein Denken sich mehr den praktischen Problemen zuwandte. Zwar das mathematische und mechanische Wissen seiner Zeit beherrschte er in der Vollendung, aber seine wissenschaftliche Produktion beschränkte sich auf die Erweiterung und Vertiefung einzelner Sätze. Dafür waren seine technischen Leistungen um so staunenswerter. Sein Diopter (Fig. 7) war das erste Feldmeßinstrument, an dem wir die Neuheit der Konstruktion bewundern, die alles bisher Dagewesene in den Schatten stellt. Nur das Fernrohr fehlt dem Diopter, um es zum modernen Theodoliten zu machen. Man vergleiche etwa damit die rohe Messung der Sonnenhöhe mit dem Gnomon. Alle Feineinstellungen an Herons Instrument wurden durch Schrauben und Zahnräder bewirkt. Bekannt sind weiter seine mechanischen und hydraulischen Apparate, wie Heronsball und Windkessel. Ganz ägyptisch war auch sein großes Interesse für die Feldmessung, über die er ein Buch schrieb, das, an die alten Methoden anknüpfend, eine Zusammenstellung aller damals bekannten Verfahren der Flächenberechnung gab. Seine Dioptrik, die auch den Beweis der bekannten Dreiecksformel $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ bringt, ist eine Leistung, die kaum übertroffen werden konnte.

Eine Menge von Namen sind uns aus dieser Zeit sonst noch bekannt: Poseidonios von Rhodos, der populäre Philosoph und Freund Ciceros, ihm ähnlich in Vielwisserei und Vielschreiberei, stets an der Oberfläche haftend; Kleomedes, der unermüdliche Abschreiber des vielschreibenden Poseidonios, bar aller neuen Ideen. Auch ein Historiker der Mathematik, Geminus, der um 70 v. Chr. in Rom lebte, ist aus den Kommentaren des Proklus bekannt.

Rom beherrschte die Welt und erdrückte alles geistige Leben. Es gibt keinen römischen Mathematiker. Bezeichnend ist, daß die beiden einzigen Römer, die Mathematisches geschrieben haben, Varro und Vitruv, auch nur vielschreibende und abschreibende Dilettanten waren. Rohe Methoden der Feldmessung hatten die Römer von den Etruskern übernommen, von denen auch die römische Zifferschrift stammt. Trotz ihrer Zifferschrift haben die Römer keinen einzigen arithmetischen Satz geliefert. Alles war konzentriert auf die ewigen Feldzüge: Wegebau, Wasserbau, Straßenbau, Brückenbau und im Höchstfalle Vermessungen. Aber auch damit wurden sie nicht allein fertig. Sobald die Dinge schwieriger wurden, mußten Griechen die Arbeit tun. So zog Cäsar für seine Kalenderreform den alexandrinischen Astronomen Sosigenes heran, und bei der von ihm geplanten, von Agrippa später durchgeführten Vermessung des Imperium romanum wurde eine Reihe alexandrinischer Geodäten beschäftigt. Bezeichnend für Roms Geist ist es, daß die Lehrer der Jugend, die Schreiber, Rechner und Astrologen, häufig griechische und ägyptische Sklaven waren. Die Römer waren eben die „Raffkes" des Altertums. Schnell reich geworden, konnten sie für ihr Geld, das sie in der ganzen Welt zusammengeholt hatten, alles kaufen, griechische Kunst und griechische Wissenschaft, ägyptische Zauberei und griechische Hetären. Verständnislos häuften sie die Schätze, ohne irgendein inneres Verhältnis zu den Dingen zu gewinnen.

Die eben genannten Varro und Vitruv waren solche Vielschreiber, daß Augustinus von Varro erzählt: Er habe so viel gelesen, daß man sich wundern müsse, woher er die Zeit nehme, um noch selbst Bücher zu schreiben. Dabei hat Varro 490 Bücher geschrieben. Diese dilettantische Schreiberei konnte nur dürftigen Inhalts sein. Ebenso ist es mit Vitruv, Plinius, Seneca. Auch die uns erhaltenen „Schriften der römischen Feldmesser" enthalten nichts Neues, nichts, das nicht von Archimedes oder Heron besser gemacht und klarer beschrieben worden wäre.

Erst als Roms Macht zerfiel, als die neuen Völker aus dem Norden die Erbschaft der Cäsaren antraten, treffen wir wieder auf einen Mann, der tiefer in die Mathematik eingedrungen zu sein scheint, Boethius, Christ, von Theodorich dem Großen 524 wegen Teilnahme an einer Verschwörung hingerichtet. Seine Arithmetik ist eine lateinische Bearbeitung der Arithmetik des Alexandriners Nikomachos, seine Geometrie eine Nachschrift des Euklid. Dadurch, daß er dem christlichen Mittelalter als Märtyrer des athanasianischen Glaubens erschien, hat er durch seine Bücher auf die Mathematiker des Mittelalters jahrhundertelang großen Einfluß gehabt. Am meisten bekannt ist er durch sein im Gefängnis geschriebenes Werk „Tröstungen der Philosophie".

2. Die letzte Blüte der griechischen Mathematik. Das erste Jahrhundert nach Christus war noch ausgefüllt mit den Machtkämpfen der Cäsaren. Erst um 100 tritt in dem römischen Imperium eine gewisse Beruhigung ein. Die Kriege sind beschränkt auf Kämpfe zur Sicherung der Grenzen im Norden gegen die Dacier, Germanen und Markomannen, im Südosten gegen die Parther. Drei große Kaiser bestimmen die Geschicke des Reiches in diesem zweiten Jahrhundert, Trajan (98—117), Hadrian (117—138) und Marc Aurel (161—180). Diese drei hatten selbst Interesse an der Wissenschaft und der Verbreitung der Bildung. In dieser Zeit ist, vielfach auf ihre Veranlassung, das Wissen der Griechen in Lehrbüchern niedergelegt worden, die für die großen Massen bestimmt waren und die Quellen sind, aus denen das Mittelalter seine Kenntnisse schöpfte. Es war Sammlerarbeit, die dort geleistet wurde, keine Wissenschaft. Schulen wurden überall gegründet. Latein wurde neben Griechisch die zweite Weltsprache. Nicht mehr nur die vornehme Welt hatte Bücher, auch die Massen konnten sie kaufen und lasen sie. Trajan gründete in Rom die erste öffentliche Bibliothek, die lateinische und griechische Autoren umfaßte. Von Hadrian, dem Reisekaiser, wird erzählt, wie er bei einem Besuche Athens im Kreise der Philosophen und Künstler verkehrte und, durch die Wunder der griechischen Kunst angeregt, neue Bauten schaffen ließ. Die Bauten Roms in dieser Zeit tragen griechisches Gepräge. Marc Aurel schließlich, der Philosoph auf dem Kaiserthrone, schrieb selbst ein Werk philosophischen Charakters, die „Selbstbetrachtungen".

Unter dem Einfluß der politischen Beruhigung regte sich auch in der alten Hochburg der Mathematik, in Alexandrien, neues Leben. Um 100 n. Chr. lebte dort Menelaus, der um 50 in Alexandrien geboren war. Wir wissen von ihm, daß er 98 in Rom astronomische Beobachtungen angestellt hat. Sein Interesse war mehr auf Astronomie als auf reine Mathematik gerichtet. Daher stehen auch seine mathematischen Leistungen alle in Beziehung zu der dem Astronomen wichtigen Sphärik, über die er drei Bücher schrieb, die in arabischen und hebräischen Übersetzungen erhalten sind. Er gibt darin eine Behandlung des sphärischen Dreiecks, die das von Euklid für das ebene Dreieck Geleistete auf die Kugel übertrug. Im dritten Buche beweist er den nach ihm genannten Satz über die Dreieckstransversalen und überträgt ihn auf die Kugel. Seine Sehnenrechnung, in der er von diesem Satze vielfach Gebrauch macht, ist verloren gegangen. Kennzeichnend ist für ihn, daß ihm ein so neuartiger Begriff wie das Doppelverhältnis, das erst im 19. Jahrhundert wieder-aufgenommen wurde, geläufig ist. Seine neuartige und fremde Begriffsbildung wurde von den Zeitgenossen und dem Mittelalter nicht verstanden und daher wohl auch nicht weitergebildet.

Der Jude Nikomachus aus Gerasa, dem heutigen Jerash bei Jerusalem, wurde durch die Bearbeitung seiner Arithmetik durch Boethius der Lehrer des ganzen Mittelalters. Er lebte zu Alexandrien, wo er zur Schule der Neupythagoreer gehörte. Sein Lehrbuch der Arithmetik (*ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς βιβλία β*) ist das erste griechische Buch über Arithmetik. Es ist keine eigene Leistung. Vieles davon knüpft an die Zahlenlehre und Zahlenmystik der Pythagoreer, an Platon, Euklid und Hypsikles an und bleibt in vielem auch in der geometrischen Behandlung stecken.

Eine ähnliche Bedeutung wie Nikomachus hat der der gleichen Philosophenschule angehörende Theon von Smyrna. Auch er schrieb ein Kompendium, das eine Einführung in die platonische Lehre sein sollte, von dem ein arithmetischer und ein astronomischer Teil erhalten sind.

Claudius Ptolemäus, der von 85—165 lebte und etwa um 150 seine größte Tätigkeit entfaltete, ist dem Namen nach bekannt durch das nach ihm benannte „Ptolemäische Weltsystem", dessen Herrschaft bis in die Neuzeit nur dadurch zu erklären ist, daß die Kirche damals glaubte, die geozentrische Auffassung ohne Störung der christlichen Lehre nicht aufgeben zu können. Gegenüber den Erkenntnissen des Aristarch und des Eratosthenes war es, von uns aus gesehen, ein Rückschritt. In der Erklärung der Einzelheiten der Erscheinungen aber war es eine ausgezeichnete Leistung.

Über Ptolemäus' Leben ist uns nichts bekannt, auch seine Bücher kennen wir nur aus arabischen Übersetzungen des 9. bis 13. Jahrhunderts. Der erste Druck des großen Hauptwerkes, der „Großen Zusammenstellung" (*μεγάλη σύνταξις*), erschien 1496, von Regiomontanus herausgegeben, in Venedig. Aus dem griechischen Wort haben die Araber die merkwürdige Bildung „Almagest" = ἀλ μέγιστος gemacht. Auch der Almagest ist im ganzen keine selbständige Leistung. Die Arbeiten des Hipparch und Menelaus bilden die Grundlage, und für die merkwürdige Theorie der rückläufigen Bahnen, die er durch exzentrische Kreise erklärte, hat er sicher die Theorie der Epizykeln des Apollonius zugrunde gelegt.

In dem 9. und 10. Kapitel des ersten Buches gibt er eine Menge trigonometrischer Sätze, zum Teil in eigener Behandlung, zum Teil in Anlehnung an Menelaus. Im 11. Kapitel eine Sehnentafel von 30 zu 30 Minuten mit einer Genauigkeit auf fünf Dezimalen. Neben dem Almagest hat Ptolemäus noch fünf andere Bücher geschrieben, die verschiedene Abhandlungen über mathematische Geographie, Kartographie, eine Himmelskarte in stereographischer Projektion und eine Erweiterung des Fixsternkatalogs von Hipparch auf 1022 Sterne enthalten.

Diophantus. In einer Zeit, wo auf allen Gebieten des geistigen und kulturellen Lebens ein Niedergang ohne gleichen herrschte, schrieb Diophant neben anderen Büchern seine Arithmetik. Das Buch wurde durch arabische Übersetzungen im 16. Jahrhundert in Europa bekannt und erlebte bereits 1575 einen Neudruck. Dadurch ist es für die Entwicklung der Arithmetik und Algebra sehr bedeutsam geworden. Durch geschickte Erfindung von Symbolen konnte er zum ersten Male systematisch Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten erledigen. Über seine Lebensumstände ist fast nichts bekannt, auch die Quellen, aus denen er schöpfte, sind verschollen. So hebt er sich als ein letzter leuchtender Stern am Himmel der griechischen Mathematik ab. Ein Gedicht aus der Sammlung des Maximus Planudes kleidet seine Lebensgeschichte in die Form einer Gleichung:

„Hier das Denkmal deckt Diophantos, ein Wunder zu schauen:
Durch die rechnende Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu bleiben verlieh ein Sechstel des Lebens ein Gott ihm.
Fügend ein Zwölftel hinzu, ließ er ihm sprossen die Wang',
Steckte ihm drauf auch an in dem Siebtel die Fackel der Hochzeit;
Und fünf Jahre nachher teilt er ein Söhnlein ihm zu.
O unglückliches Kind, so geliebt! Halb hatt' es des Vaters
Alter erreicht, da nahm's Hades, der Schaurige, auf,
Noch vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen besänft'gend,
Langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an."

P a p p u s. In demselben dritten Jahrhundert lebte Pappus zu Alexandrien, ein letzter griechischer Geometer. Es ist bezeichnend für die Zeit, daß wir ihn weniger wegen seiner eigenen Leistungen nennen als wegen seines großen Sammelwerkes (συναγωγὴ), das durch die zahlreichen Zitate aus älteren Schriftstellern eine hervorragende Quelle für die ältere Zeit geworden ist.

Griechenlands Stern war gesunken. Mehr als ein Jahrtausend hatte in den Ländern um das Mittelmeer griechische Weisheit, griechische Wissenschaft die Geister bewegt. Kein Volk vor ihm, keines nach ihm hat gleiche Leistungen in solcher Frühzeit aufzuweisen. Insbesondere die Römer sind im Vergleich zu ihm Barbaren, die zwar durch ihre brutale militärische Gewalt alles ergreifen, aber nichts begreifen konnten. In Griechenland gab es Geometer, in Rom Feldmesser. In Griechenland dachte Aristarch 2000 Jahre vor Kopernikus den revolutionären Gedanken des kopernikanischen Systems, in Rom machte man Kalender. Die letzten Reste griechischen Geisteslebens retteten sich vor der Macht der im 5. Jahrhundert anstürmenden Barbaren nach Byzanz, wo die Klöster die Tradition hüteten und 1000 Jahre später eine Quelle für die geistige Neubelebung Europas wurden.

IV. Der Orient.

Wir haben schon mehrfach darauf hingewiesen, daß zwischen West und Ost der alten Welt merkwürdige zeitliche Beziehungen bestehen. Als Alexander im Jahre 327 nach Indien zog, stellte er die erste engere Verbindung zwischen dem Westen und dem äußersten Osten her. Wie weit dadurch die Kulturen einander beeinflußt haben, wie weit namentlich die Mathematik der Inder durch griechische Mathematiker beeinflußt ist, wird sich kaum je feststellen lassen. Sicher ist, daß diese Verbindungen nie mehr ganz abgerissen sind, wie ja auch seit dem Auftreten Gautama Buddhas die Beziehungen zwischen Indien und China gerade auf geistigem Gebiete sehr enge waren.

Für Indien fehlen leider genaue Zeitangaben ganz. Die sehr unbestimmten Angaben der Hinduüberlieferung sind unverläßlich. Wir wissen, daß im 4. Jahrhundert v. Chr. dort unter Tschandragupta ein mächtiges Reich bestand, daß im 3. Jahrhundert der König Asoka als Beschützer und Verbreiter der Lehre Buddhas dort herrschte. Aus der Zeit Asokas stammen die Funde, denen wir die erste Kunde von den indischen Ziffern (Fig. 8) verdanken, aus denen sich unter Vermittlung der Araber unsere heutige Ziffernschrift entwickelt hat. Aus der Zeit um 400 n. Chr. ist das bedeutendste mathematische Buch indischer Herkunft überliefert, das aber auch nur in späteren Abschriften und Variationen überliefert ist, das Surya Siddhanta. In den späteren Ausgaben des Siddhantas finden sich

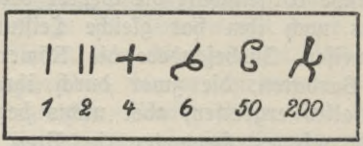


Fig. 8. Indische Ziffern aus der Zeit Asokas

zahlreiche Zeugnisse über die hohe Entwicklung, die dort besonders die Trigonometrie genommen haben muß. Das Siddhanta Paulisa hat wahrscheinlich einen Alexandriner Paulus zum Verfasser.

Für die chinesische Mathematik dieser Periode fließen die Quellen reichlicher. Zwar wurden unter dem Kaiser Shi Huang Ti alle Bücher verbrannt, aber es ist sicher, daß im geheimen mancher Freund der Wissenschaft seine Schätze in Abschriften aufbewahrte. Wenigstens reißt die Tradition nicht ab; die um 1000 v. Chr. entstandene Mathematik Kiu-Chang Suan-Shu erschien in immer neuer Bearbeitung. Chang Tsiang, ein hoher chinesischer Mandarin, der um diese Zeit lebte, hatte bereits fünfzig Jahre nach der Bücherverbrennung aus den Fragmenten des Kiu-Chang Suan-Shu eine neue Ausgabe hergestellt. Hundert Jahre später dringen chinesische Militärs in die turkestanischen und mongolischen Steppen vor und stellen auf diese Weise eine neue Verbindung zwischen Osten und Westen her[1]. Zwar blieb China ein fernes Wunderland, aber man kannte es. Claudius Ptolemäus z. B. hat das Land „Thin" gelegentlich erwähnt. Aus derselben Zeit, in der Ptolemäus sein astronomisches System schuf, seine Himmelskugelmodelle baute, ist uns auch ein solches Modell und ein astronomisches Werk aus der Hand von Chang Hong (78—139) bekannt. Um den Beginn der christlichen Zeitrechnung beschäftigten sich die chinesischen Mathematiker besonders mit der Quadratur des Kreises, während sonst ihr Interesse vorwiegend der Astronomie und der Kalenderrechnung galt. Aus den ersten nachchristlichen Jahrhunderten sind eine Menge chinesischer Mathematikbücher bekannt. Die Probleme, die sie behandeln, sind einfacher Art. Zur Entwicklung einer wissenschaftlichen Mathematik kommt es nirgendwo. Enge Verbindung mit Indien, die besonders durch buddhistische Missionare hergestellt wird, beeinflußt besonders astronomische Studien.

[1] Erst in jüngster Zeit ist durch die Forschungen A. v. le Coqs die Verbindung zwischen Osten und Westen neu erwiesen. Sie führte über die Karawanenstraßen durch die Oasen des Oxus und Jaxartes und Tarim, dann südlich über Kaschgar, Chotan, Karakorum nach Indien.

Dritter Abschnitt.

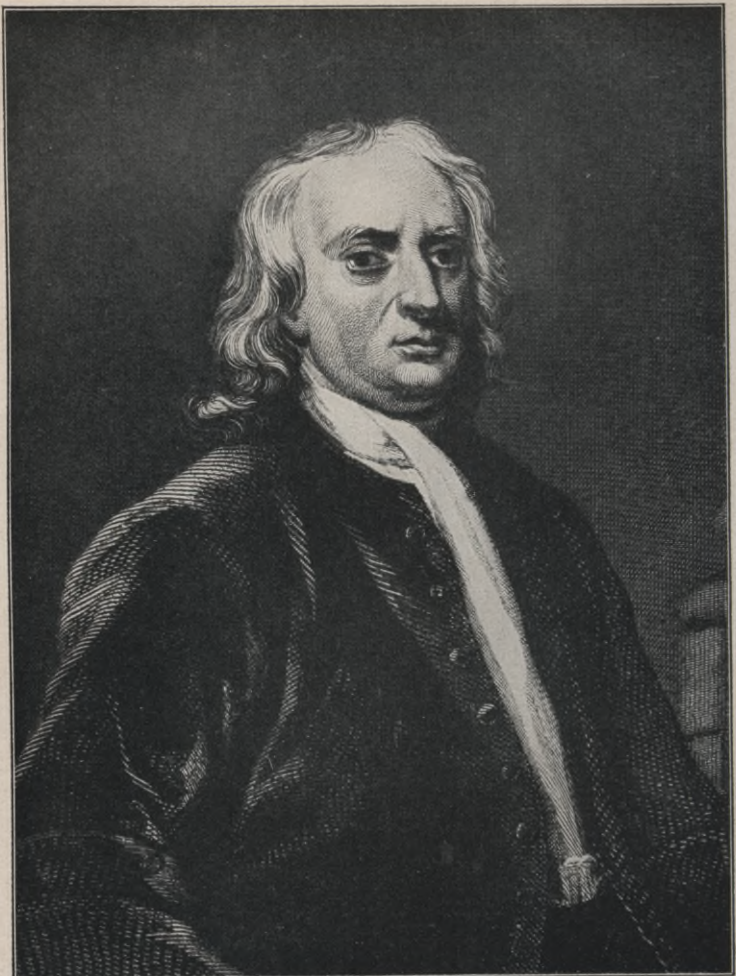
Das Mittelalter.

I. Chinesen, Inder, Araber, Perser.

Die Zeit zwischen 500 und 1000 unserer Zeitrechnung blieb für die Entwicklung der Mathematik in Europa fast bedeutungslos. Dafür aber bedeutet sie für die Völker des Orients von Arabien bis nach Japan eine Zeit der Blüte, der wir heute einen großen Teil unserer Kenntnisse der antiken Mathematik verdanken. Die Araber insbesondere haben durch vielfältiges Kopieren alexandrinischer Werke einmal die Verbindung zwischen Osten und Westen hergestellt, dann aber auch wesentliche Teile der alexandrinischen und indischen Mathematik weitergebildet und der Nachwelt erhalten.

1. Der äußerste Osten. Wir haben bereits oben darauf hingewiesen, daß die Verbindung zwischen Westen und Osten nie abgerissen ist, wie in neuester Zeit namentlich die Forschungen le Coqs gezeigt haben. Die Karawanenstraßen Innerasiens, die uns heute so schrecklich erscheinen, durch Hedins Forschungen auch weiteren Kreisen bekannt wurden, waren die Wege, auf denen Kaufleute, Pilger und Soldaten die Vermittler und Träger eines regen Verkehrs waren. Ist doch sogar überliefert, daß um 630 ein römischer Priester Peking besuchte. Im 8. Jahrhundert bestand ein blühender Seeverkehr mit Kanton. So lernten die Ostasiaten die griechische Mathematik sicherlich auch kennen, ohne deren Kenntnis der hohe Stand ihrer eigenen Leistungen kaum zu erklären sein dürfte, der uns aus verschiedenen Büchern der Zeit entgegentritt. So ist der japanische Fürst Shotoku Taishi zu nennen (600), der sich um die Ausbreitung mathematischer Kenntnisse in seiner Heimat große Verdienste erwarb. Auch in den folgenden Jahrhunderten sind hervorragende Leistungen kaum zu verzeichnen. Nur wenige Namen treten aus dem Dunkel der Geschichte hervor. Um 1000 beschäftigte sich Chön Huo, Staatsminister und Vorsteher des astronomischen Instituts

Fermat



Newton

in Peking, mit der Reihensummierung. 1083/84 wurden die ersten mathematischen Bücher in China gedruckt, das erste hieß Hai-Tau Suan-King (Inselarithmetik), das zweite war eine Arithmetik von Chang Kiu-King. Im übrigen aber stockte die Entwicklung ähnlich wie in der übrigen Welt.

Erst das 13. Jahrhundert brachte eine Änderung in das Tempo der Entwicklung. Es war die Zeit der großen Eroberungen. Wie im Westen die Kreuzfahrer auszogen, so begann 1219 Tschingis Khan seine große Expedition nach dem Westen. Mit seinen Mongolenhorden drang er bis nach Kiew, Moskau und Krakau vor. Astronomische und astrologische Ideen der Asiaten sind sicher damals nach dem Westen verbreitet worden. Andrerseits begannen in dieser Zeit die Missionsreisen nach dem fernen Osten. Zwei Franziskaner, Carpini und Rubrouk, suchten den mongolischen Hof auf. 1271 trat Marco Polo seine Reise nach China an, die ihn 17 Jahre dort festhielt. Mit den Armeen, den Reisenden und den ihnen folgenden Kaufleuten drangen auch neue Ideen in die Länder. So erlebten auch China und Japan einen Aufschwung der Mathematik, wie wir das ähnlich in Europa sehen werden. Das erste bedeutende Werk aus dieser Zeit (1247) trug den Titel eines alten Buches, der „Neun Teile der Mathematik" (Kiu-Chang Suan-Shu). Der Verfasser, Chin-Kiu Shao, war Soldat und Staatsmann und trieb die Mathematik als Liebhaberei, interessierte sich daher mehr für die reine Wissenschaft. Ein anderer, Li Yeh, beschäftigte sich in seinem „Seespiegel" mit höheren Gleichungen und ihren Anwendungen. Wir haben oben schon die Verbindung von West und Ost durch die kriegerischen Entwicklungen angedeutet. Das Jahr 1267 bringt dafür eine urkundliche Bestätigung; wir wissen, daß damals zwei arabische Artilleristen bei den Mongolen Kublai Khans tätig waren. So nimmt es nicht wunder, daß um diese Zeit die Kenntnisse in sphärischer Trigonometrie, die die Araber von Alexandria übernommen hatten, auch im fernen Osten vorhanden sind. Kou Chou King (1231—1316), der eine Persönlichkeit von der Art des Archimedes gewesen sein muß, baute damals neben vielen anderen Ingenieurwerken das älteste jener großen astronomischen Instrumente aus Bronze, die heute noch die Wälle Pekings schmücken. Ihr Bau konnte aber nur erfolgen auf Grund der eingehendsten Kenntnisse der Sphärik.

Auch in Japan regte sich damals aufs neue das Interesse an der Wissenschaft. Ein Vertreter derselben war ein vornehmer Liebhaber der Mathematik, der Großgrundbesitzer Fujiwara Michinori, dessen Buch noch im 17. Jahrhundert benutzt wurde.

2. Die Inder. Die indische Mathematik ist bisher durch die Siddhantas vertreten gewesen; auch in der Folgezeit bleiben die Werke der Mathematiker meist Lehrgedichte, in denen Wichtiges und Unwichtiges bunt durcheinandergewürfelt ist, wie bereits al Biruni, der arabische Historiker sagt, der ihre Werke „eine Mischung kostbarer Kristalle und gewöhnlicher Steine" nennt. Der wesentliche Inhalt aller dieser Schriften ist astronomischer Art, doch treten um diese Zeit auch zum ersten Male besondere Abschnitte über Mathematik auf.

Aryabhata der Ältere ist geboren im Jahre 476, er stammte aus einem kleinen Ort unweit Patna am Ganges. Seine mathematischen Schriften enthalten eine Sammlung astronomischer Tafeln, eine arithmetische Abhandlung, eine über die Zeitmessung und eine über die Kugel. Auch hieraus erkennt man, wie sehr das Interesse an astronomischen Dingen die wissenschaftliche Arbeit beeinflußte; dies aber floß vorwiegend aus religiösen Quellen. Die Astronomie, mehr noch die Schwester derselben, die Astrologie, muß in jener Zeit durch gelehrte Priester sorgsam gepflegt worden sein. Heute noch legen die Ruinen mächtiger, rein astronomischen Zwecken gewidmeter Bauten Zeugnis ab von dieser Tätigkeit (Tafel 3). Die arithmetischen Kenntnisse des Aryabhata beschränkten sich auf Dreisatzaufgaben, kaufmännische Rechnungen, eine arithmetische Reihe, Näherungsberechnungen von Wurzeln und die Lösung einfacher Gleichungen ersten und zweiten Grades. Dazu kamen Flächen- und Körperberechnungen, eine Regel für die Berechnung von π, für die Berechnung der Sinusfunktion und in dem „Gitika" genannten astronomischen Werke eine Sinustafel.

Von Varahamira dem Jüngeren, der als Zeitgenosse Aryabhatas lebte, von dem wir aber sonst kaum etwas wissen, ist bemerkenswert, daß er nach Albirunis Überlieferung die Kugelgestalt der Erde lehrte.

Brahmagupta. Dort, wo im 3. Jahrhundert König Asoka als junger Mann residiert hatte, im Herzen Indiens, lag und liegt noch heute die Stadt Ujjain. Ferne den Küsten, fern den großen Strömen, wo fremde Einflüsse die nationale Besinnlichkeit des indischen Gelehrten störten, war diese Stadt ein Zentrum religiös eingestellter astronomischer Wissenschaft. Schon Varahamira hatte dort gelebt. Brahmagupta, der bedeutendste unter den indischen Mathematikern dieser Zeit, schrieb dort im Alter von 30 Jahren sein astronomisches Werk, Brahma Siddhanta. Es enthielt in seinem mathematischen Teile schon fast die Hauptteile der Elementarmathematik, die Behandlung der ganzen Zahlen und Brüche, der Reihen, der Regeldetri, der Zinsrechnung, Inhaltsberechnungen und eine einfache Trigonometrie. Manche seiner Regeln sind falsch, wie die für das gleichschenklige Dreieck. Die Formel für das Viereck gilt nur beschränkt. Aber er war der erste, der konsequent die Algebra auf die Astronomie anwandte. Dabei ging er eingehend auch auf die negativen Zahlen ein, deren Problematik zu erörtern ihm auch die quadratischen Gleichungen Anlaß gaben.

Bedeutsam sind auch die Fortschritte, die seit Brahmagupta die indischen Mathematiker in der Theorie der unbestimmten Gleichungen Diophants machten, deren Unbekannte Brahmagupta, vielleicht in Anlehnung an chinesische Mathematiker, mit Farben bezeichnet. Während schon Aryabhata ganzzahlige Lösungen betrachtet hatte, gab Brahmagupta wirklich die ganzzahligen Lösungen, und zwar vollständig.

Die Leistungen Brahmaguptas und Aryabhatas wurden durch die Nachfolger, unter denen wir Mahavira nennen, nicht wesentlich erweitert. Zwar enthält das Werk Mahaviras die mathematischen Kenntnisse seiner Zeit in ziemlicher Vollständigkeit, dringt sogar bis zu den Kegelschnitten vor; aber vieles von dem, was er Neues bringt, hatte er sicher aus chinesischen Quellen geschöpft. Ein in neuester Zeit gefundenes Manuskriptfragment aus Bakhsali, das man früher vielfach in die Neuzeit verlegte, muß man heute auch in die Zeit um 1000 verlegen. Wie Mahavira gab auch Sridhara (um 1000) ein ziemlich vollständiges Kompendium; besonders zu rühmen ist seine klare Darstellung der Bedeutung der Null.

Der letzte bedeutende unter den indischen Mathematikern ist Bhaskara (1114—1185). Dadurch, daß sein Hauptwerk, das einer Legende nach den Namen seiner Tochter, Lilavati, trägt, im 16. Jahrhundert von einem Perser kopiert wurde, ist es uns sehr gut erhalten. Es ist auch in poetischer Form gehalten und dringt bei der Null zu der Erkenntnis vor, $\frac{5}{0}$ einen unendlichen Wert zuzuschreiben. In einem anderen Werke wieder führt er in voller Klarheit negative Zahlen ein und bezeichnet sie mit einem Punkt „$\dot{2}$“. Eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist nach ihm unmöglich, er erkennt also das Wesensverschiedene der imaginären Zahlen.

3. Die Araber und ihre Nachbarn. Zwischen die untergehende Kultur der Antike und die Keime der neuen europäischen Kulturen schob sich im 7. Jahrhundert plötzlich und kometenhaft seltsam von Osten her eine neue, der Islam. Religiösen Ursprungs und mit dem ganzen Fanatismus einer südlichen religiösen Bewegung erfüllt, drang er in kürzester Zeit von den Wüsten Arabiens bis nach Südfrankreich vor, alles besiegend und überwältigend, dabei von solcher Ursprünglichkeit und Frische, Klarheit und Schönheit, daß selbst verstandesscharfe Naturen wie der Hohenstaufe Friedrich II. von ihm beeinflußt waren. Wir können hier nicht weiter darauf eingehen, nur ein paar Tatsachen seien noch einmal zusammengestellt: 632 Flucht Mohammeds von Mekka nach Medina, hundert Jahre später Gründung des Kalifats von Cordoba in Spanien. Die militärische Leistung wurde noch übertroffen durch eine Kulturwelle ohnegleichen. Durch die Umstände wurden die Araber die Vermittler zwischen Osten und Westen, besonders zwischen Alexandria und Indien. Da auch ihre wissenschaftlichen Interessen sich vorwiegend auf mathematische und astronomische Dinge beschränkten, so sind die Araber die verdienstvollen Überlieferer der griechischen und indischen Mathematik geworden, die aber bei dem, was sie von Griechen und Indern lernten, nicht stehen blieben, sondern es eifrig weiterbildeten.

Das geistige Zentrum dieser eifrigen Arbeit war die Kalifenstadt Bagdad, im Zweistromlande am Tigris gelegen, wo schon einmal zur Zeit Hammurabis die Mathematik eine hohe Blüte erreicht hatte. Dort herrschte 753—774 al Mansur, 786—809 Harun al Raschid und 809—833 dessen Sohn al Mamun. Wir kennen Harun al Raschid aus den schönen „Geschichten aus 1001 Nacht“. Er, wie seine Vorgänger und Nachfolger waren aber nicht nur vorzügliche Herrscher, sondern auch Männer hohen wissenschaftlichen Interesses. Sie gaben die Aufträge, die griechischen Mathematiker zu übersetzen. So wurden unter al Mansur zuerst die Elemente des Euklid übersetzt, später auch die Bücher des Archimedes und anderer Mathematiker. Der Kreis der Gelehrten, die wir nicht alle nennen können, sondern nur in einigen Typen aufzeigen wollen, beschränkte sich nicht nur auf Araber, auch Perser, Syrer und Mongolen treten auf. Ja manchmal sind es gerade die Ausländer, die die neuen Ideen bringen.

Am Hofe al Mamuns lebte der Perser Muhammed ibn Musa al Chwarazmi, der dort eine bedeutende Stellung als Astronom innehatte (etwa um 810—840). Wenn er auch eigentlich Astronom war und eine Reihe astronomischer Werke und Tafeln bearbeitete, so ist sein Name unsterblich geworden durch das Wort „Algebra". Er schrieb, offenbar nach griechischen Vorbildern, ein Buch „Algabr w'al mukabalah". Algabr bedeutet Ergänzung, al mukabalah Ausgleichung. Das erste bedeutet den Ersatz eines negativen Gliedes einer Gleichung durch das positive auf der anderen Seite, das zweite bedeutet den Ersatz eines positiven Gliedes auf der einen Seite durch Ausgleich gegen ein größeres positives auf der anderen Seite. Das Buch ist eine Sammlung durch Gleichungen behandelter Aufgaben über Erbteilung, kaufmännische und feldmesserische Rechnungen. Im Mittelalter hatte man besonderes Interesse für seine Behandlung der quadratischen Gleichung. Ein anderes Buch, das angeblich auf ihn zurückgeht, Algorithmus de numero indorum, nur lateinisch erhalten, handelt von der Rechnung mit den indischen Ziffern.

Um 870 lebten am Hofe zu Bagdad „die drei Brüder", bekannt auch unter dem Namen der „Beni Musa", Söhne des Musa (Moses) ibn Sakir. Die drei Brüder trugen die Namen Mohammed, Ahmed und Hassan. Mohammed, der älteste, scheint der bedeutendste gewesen zu sein. Sie schrieben gemeinsam eine Reihe von naturwissenschaftlichen, mathematischen und medizinischen Werken, unter denen eine Geometrie auch im Westen bekannt geworden ist. Diese brachte eine Reihe von Erweiterungen Euklids, unter denen heute vielleicht noch die Fadenkonstruktion der Ellipse von Interesse ist.

Um dieselbe Zeit wie die drei Brüder lebte in Bagdad der Chaldäer Tabit ibn Qurra (826—901). Auch seine Werke wurden 200 Jahre später durch lateinische Übersetzungen im Westen bekannt; er schrieb über alle Gebiete der damaligen

Mathematik, revidierte mit Erfolg ältere Euklidausgaben. Neu ist in seinen Werken die Beschäftigung mit der Quadratur der Parabel und des Paraboloids sowie mit magischen Quadraten, die bei den Arabern erst später eine Art von religiöser Bedeutung erlangten, während sie bei den Chinesen schon 2000 Jahre früher bekannt waren.

Es war Tradition in Mesopotamien, die Sternkunde als die Basis aller Wissenschaften zu betrachten. So ist auch der weiter zu nennende Abu l' Wafa Astronom an der Sternwarte zu Bagdad (940—998). Seine Arbeiten sind vorwiegend für die Geschichte der Trigonometrie von Bedeutung. Er führte die Tangensfunktion als erster in Rechnungen ein und schuf Tafeln für Sinus und Tangens von 10′ zu 10′.

Auch al Biruni (1038) war Astronom und Astrolog. Von Geburt Perser, machte er als Dreißigjähriger lange Reisen in Indien und studierte dort die mathematischen Lehren. Von seinen Werken, zu denen auch ein Buch über seine indischen Reisen gehört, ist nicht viel erhalten. Die Zeitgenossen verehrten in ihm einen bedeutenden Mann, dem sie die Erfindung des Sinussatzes zuschrieben.

Die großen Züge der Mongolen, so anregend sie zunächst für die Verbreitung der neuen Ideen waren, hatten als Nachwirkung doch eine Störung der wissenschaftlichen Arbeit in den großen Städten von West- und Ostasien mit sich gebracht. So sehen wir, daß auch die Mathematiker an Bedeutung verlieren. Einzelne hervorragende Geister versuchten allerdings, trotz aller Wirren der Zeit die Wissenschaft hochzuhalten. Unter ihnen ist besonders zu nennen Nasir ed-din al Tusi (aus Tus) 1201 bis 1274. Er war ein hoch- und umfassendgebildeter Mann, der als Mathematiker wie als Astronom Bedeutendes leistete. Seine Hauptleistung ist die Schaffung einer wissenschaftlich selbständigen, das heißt von der Astronomie unabhängigen sphärischen Trigonometrie, als deren Neubegründer man ihn direkt bezeichnen kann.

Im innersten Asien, dort wo heute nur noch Kamelkarawanen die uralten Straßen durch Sonne und Wüstensand entlangziehen, gründete 100 Jahre später der Tartar Ulugh Beg aus dem Geschlechte der Mongolenfürsten die Sternwarte zu Samarkand. Zusammen mit seinem Mitarbeiter al-Kashi schuf er dort ein großes astronomisches Tafelwerk, das jahrhundertelang auch in Europa sehr geachtet war, jedenfalls für seine Zeit und seine technischen und rechnerischen Hilfsmittel eine bedeutende Leistung darstellte.

II. Das christliche Mittelalter.

Seitdem im Jahre 476 Rom in die Hände Odoakers gefallen war, trat auch äußerlich der völlige Zerfall Roms mehr in Erscheinung. Der Boden des römischen Imperiums war der Tummelplatz der Barbaren, die aus dem Norden kamen und mit ihren ungebrochenen Kräften die kümmerlichen Reste der antiken Dekadenz hinwegfegten. Bildung und Wissenschaft brachten diese Naturkinder nicht mit, die Goten, Vandalen, Gepiden, Heruler und wie die germanischen Stämme alle hießen. Es war eine Zeit, wo die rohe Gewalt herrschte, wo nur das Schwert regierte, wo Verschlagenheit und bäuerische Gerissenheit im Bunde mit Dolch und Gift bis in die herrschenden Familien eindrangen und man aller Moral Hohn sprach. Auch das Christentum, das langsam in diese Naturvölker eindrang, vermochte zunächst an diesen Zuständen nicht viel zu ändern. Kluge Politiker wie Chlodwig, verstanden es sogar glänzend, die verschiedenen Bekenntnisse gegeneinander auszuspielen. Die Kirche selbst wurde aus einer Gesinnungsgemeinschaft ein Instrument weltlicher Macht, sie wurde ein Staat im Staate.

Erst die Klöster brachten in diese Zustände eine gewisse Änderung. Das Mönchswesen, im ganzen eine Reaktion auf das unchristliche Leben der amtlichen und öffentlichen Welt, wurde noch oft im Kampfe der Meinungen mißbraucht. Aber allmählich wurde die Klosterzelle doch der Hort für Menschen, die in stiller Zurückgezogenheit ihrem Ideal nachleben wollten. Namentlich die Benediktiner und Zisterzienser, die besonders im Norden kolonisierten, forderten von ihren Anhängern eine praktische oder wissenschaftliche Arbeit neben der reinen Beschaulichkeit. So wurden diese Klöster Keimzellen der Bildung und der Wissenschaft in einem gewaltigen geistigen Chaos. Die gesamte übrige Welt war ja nicht einmal des Lesens und Schreibens kundig. Der Kleriker war der Mann der Bildung, der dem Bauer wie dem Ritter die Briefe schrieb; das blieb so jahrhundertelang. Nur gering war freilich der Umfang der Wissenschaft, die man in den Klöstern trieb; noch dazu verfiel man bald in theologische Spitzfindigkeiten. Verglichen mit dem Stande der Wissenschaft in Athen, Alexandria und Bagdad, waren die Leistungen recht kümmerlich. Für Mathematik besonders war nur geringes Interesse vorhanden. Ein wenig Kalenderrechnung, Osterrechnung und Astrologie war meist alles, was man verstand. Es sind in dem halben Jahrtausend von 500 bis zu Gerbert daher nur wenige Namen zu nennen. Eine neue Befruchtung durch die Antike, die auf dem doppelten Umwege über Spanien und über Konstantinopel kam, war erst nötig, um neuen Geist und neues Blühen zu bringen.

Der erste, den wir hier nennen, der Bischof Isidorus von Sevilla (570—636), war im Vergleich mit seinen Zeitgenossen ein gelehrter Mann, hieß er doch in einem Nachruf „der verehrungswürdige außerordentliche Gelehrte, die Zierde der Kirche". Das aber, was er in seinem enzyklopädischen Werke Origines (Etymologien) im dritten Buche an Mathematik bringt, ist ein kurzer Auszug aus der Arithmetik des Boethius und von geringem Wert.

Bedeutend umfangreicher sind wohl die allgemeinen wissenschaftlichen Leistungen, wie besonders die mathematischen Kenntnisse von Beda. Beda Venerabilis, geboren 673 im Norden Englands, hieß nicht umsonst „der Vater der englischen Wissenschaft"; erzählt er uns doch selbst, daß neben dem Dienste der Kirche und seines Ordens „sein immerwährendes Vergnügen im Lernen, Lehren und Schreiben gelegen habe". Eine Menge mathematischer Schriften sind von ihm bekannt über die Zahlen, die Zeitrechnung, die Teilung der Zahlen, über den Kugelkreis und über das Astrolabium[1]. Am bemerkenswertesten ist sein Kalenderwerk und die Darstellung der Zahlen durch Finger und Hände.

War Beda ein Mann der stillen Klosterzelle, so war Alkuin (735—804) ein Mann des praktischen Lebens. Geboren wurde er in England, studierte in Italien, war später Lehrer in York und wurde von dort an das Hoflager Karls des Großen berufen. Dort sollte er im Dienste des großen Volkserziehungsplanes des Kaisers die Schulen organisieren, deren bedeutendste, die Hofschule

[1] Das Astrolabium, eine Erfindung des Hipparch, bestand aus einer Grundscheibe, die in stereographischer Projektion Himmelskreise zeigt. Darüber war exzentrisch und beweglich eine Ekliptik angebracht. Es diente zur graphischen Ermittlung von Gestirn- und Sonnenörtern; die Ausführungen waren verschieden.

in Aachen, er selbst leitete. Später machte ihn Karl zum Abt der Abtei St. Martin in Tours, wo er noch lange eine eifrige Tätigkeit im Dienste der Wissenschaft entfaltete. — Er schrieb für den Unterricht im Quadrivium je ein Büchlein über Arithmetik, Geometrie und Astronomie. Vermutlich ist Alkuin auch der Verfasser einer kleinen Sammlung mathematischer Scherzaufgaben aus Arithmetik und Geometrie, die sich zum Teil heute noch in unseren Schulbüchern erhalten haben.

Weiter ist zu nennen der „primus praeceptor germaniae", Hrabanus Maurus (776—856), Abt zu Fulda und Erzbischof von Mainz. Gestützt auf Bedas Arbeiten, schrieb er ein Buch über den Kalender, worin er weitgehende astronomische Kenntnisse verriet. Daneben ist er Verfasser einer großen 22bändigen Enzyklopädie „Über das Universum".

Diese Zeit endete in einer Epoche der gröbsten Unkultur und Unwissenheit, namentlich in Italien und Frankreich. Blinder Aberglaube beherrschte die Gemüter. Damals schuf Abu l' Wafa die Grundlagen der Trigonometrie in Bagdad. In Europa dagegen mühte man sich kümmerlich um die einfachsten Rechenregeln. Da ist es kein Wunder, daß ein Mann wie Gerbert, der spätere Papst Sylvester II., den Zeitgenossen als ein Zauberer erschien. Gerbert war ein Sohn einfacher Eltern aus der Auvergne, er wurde im Kloster erzogen, wurde später Bischof von Reims und Ravenna und auf Veranlassung Ottos III. zum Papste gekrönt. Er war ein Liebhaber der Antike und der Wissenschaft, besonders aber interessierte ihn die Mathematik, Astronomie und Naturwissenschaft. Dabei war er ein ausgezeichneter Lehrer, der seinen Schülern ein klar durchdachtes, auf eigener Beobachtung beruhendes System der Wissenschaft gab. Er lehrte beobachten und den natürlichen Verstand gebrauchen, die überlieferten Irrtümer aber bekämpfen. An mathematischen Schriften hinterließ er u. a. Regeln über das Rechnen mit dem Abacus, eine Einführung in die Geometrie und ein Buch über das Astrolabium. Ob Gerbert, der auch in Spanien studiert hat, mit arabischen Gelehrten in Berührung kam, wissen wir nicht. Jedenfalls kannte er die indo-arabischen Ziffern. Gerbert erwähnt auch bereits das Zahlenspiel der „Rithmomachia", das bis ins 16. Jahrhundert ein beliebtes Spiel war. Es wurde auf einem Schachbrett gespielt mit Figuren in Form von Dreiecken, Quadraten, Kreisen usw., die jede einen bestimmten Wert hatten.

Da es eine eingehende Kenntnis der Zahlen voraussetzte, so können nur wirkliche Kenner der Arithmetik mit ihm gespielt haben.

In dem Jahrhundert, das auf Gerbert folgte, begann man in Westeuropa die Araber zu übersetzen. In Spanien und Sizilien war damals die maurische Kultur in hoher Blüte und zog so manchen wissensdurstigen Jüngling an. So treffen wir denn um diese Zeit die Vorläufer der späteren fahrenden Schüler, vereinzelte wissensdurstige Mönche, die studienhalber reisten, in den Ländern maurischer Zunge. Sie lernten dort die mathematischen Schriften kennen, schrieben sie ab oder brachten sie mit nach Hause und übersetzten sie dort später. Solche Übersetzer waren z. B. Adelard von Bath, ein englischer Mönch, der in Toledo studierte und wahrscheinlich der Übersetzer al Chwarazmis war; Plato von Tivoli übersetzte die Sphära des Theodosius; spanische Juden beteiligten sich sehr eifrig bei dieser Übersetzungsarbeit, begannen aber auch selbst mit der Niederschrift mathematischer Lehrbücher. Unter ihnen ist zu nennen Johann von Sevilla (um 1140) und Abraham ben Esra (um 1150). Seine Bücher Sefar ha Echad (Buch der Eins) und Sefar ha Mispar (Buch der Zahl), von denen das letzte das bedeutendste ist, behandelten auf Grund der Kenntnis der indischen Arithmetik deren Grundregeln.

Um dieselbe Zeit etwa studierte in Toledo der Lombarde Gerhard von Cremona; er lernte dort arabisch und übersetzte später eine Menge arabischer Werke und arabisch-griechischer Übersetzungen ins Lateinische, darunter die Elemente des Euklid, den Almagest und die Algebra al Chwarazmis. Der Überlieferung nach hat Gerard von Cremona zum erstenmal das Wort „Sinus" benutzt.

Damals bestanden ferner fast allenthalben Kirchen- und Klosterschulen, die der Heranbildung der jungen Kleriker dienten, aber auch gelegentlich einem jungen Herrn vom Stande Gelegenheit gaben, die Anfänge der Wissenschaft zu lernen. Aus diesen Schulen entwickelten sich im 13. Jahrhundert die ersten Universitäten. Ausgestattet mit Privilegien durch den Landesherrn, wurden sie Institutionen eigenen Rechts im Lande. Die Lehrer bedurften der Lehrerlaubnis durch die Kirche; denn noch war Wissenschaft gleichbedeutend mit Theologie. Wenigstens wurden alle anderen als Hilfswissenschaften dieser einen angesehen [1]. So waren sie alle theologisch eingestellt, auch die neuen Hochschulen Bologna (1119), Paris (1200), Oxford (1214), Cambridge (1231) [2]. Die einseitig theologisch eingestellte Wissenschaft erhielt später den Namen Scholastik. Den Leistungen der großen Scholastiker, die lange Zeit unter dem Einflusse der Humanisten nicht recht geachtet wurden, stehen wir heute objektiver gegenüber. Namen wie Thomas von Aquino und Albertus Magnus sind auch außerhalb der Kirche hochgeachtet. In der Mathematik freilich hat uns die Scholastik kaum weiter gebracht. Nur ein Nikolaus von Cusa hat eigene Leistungen aufzuweisen.

Außerhalb des Kreises der scholastischen Hochschullehrer erfreute sich das Studium der Mathematik aber einer wachsenden Blüte. Der erste, den wir nennen, ist Leonardo Pisano (Fibonacci ist sein Familienname), der 1170 in Pisa geboren ist, wie Thales der Sohn eines reichen Kaufmannshauses. Die blühenden Handelsstädte der Levante, zu denen Pisa gehörte, erhielten so manche Anregung durch ihre Handelsbeziehungen. Der Erzieher des Knaben war ein Maure, Reisen führten ihn in alle Länder am Mittelmeer, überall knüpfte er Verbindungen an und erlangte eine eingehende Kenntnis der verschiedenen Rechenverfahren. Gestützt auf diese Vorbildung, schrieb er um 1202 sein Rechenbuch (Liber abaci), das eine umfassende Darstellung des Standes der Arithmetik und Algebra in 15 Kapiteln gab. Alles wurde an zahlreichen Beispielen aus dem praktischen Leben erläutert, wie die Kapitelüberschriften zeigen: 8. Preis der Güter, 9. Tauschhandel, 10. Teilhaberschaft. Leonardo schrieb noch mehr Werke, eine praktische Geometrie, eine Zahlenlehre und eine Auslese einiger Fragen aus der Zahlenlehre und Geometrie. Er stützt sich in allen diesen Schriften auf die Araber, gab aber auch selbständige Leistungen.

Ein Schüler Oxfords war Johannes Sacrobosco (um 1240), der später in Paris Mathematik und Philosophie lehrte.

[1] In köstlicher Weise schildert das ein Bild von Gregorius Reisch (1503), genannt der Turm der Wissenschaft. Ein sechsgeschossiger Turm, in dessen Untergeschoß die Kleinen den Donatus und Priscinus studieren, die die Grammatik lieferten. Darüber lernt man Logik bei Aristoteles, Rhetorik bei Cicero und Arithmetik bei Boethius. Im vierten Stockwerk Musik bei Pythagoras, Geometrie bei Euklid, Astronomie bei Ptolemäus. Darüber wird Physik und Moral und im Obergeschoß Theologie und Metaphysik getrieben.

[2] Die Zahlen sind die Gründungsjahre.

Er schrieb ein sehr verbreitetes Buch „Über die Kunst des Rechnens“ (de arte numerandi) und ein Buch über die Kugel. In Spanien treffen wir um diese Zeit einen königlichen Mathematiker, Alfons X († 1284), der aus Liebhaberei sich eingehend mit Astronomie beschäftigte und ein Tafelwerk, die alfonsinischen Tafeln, herausgab, das für die Astronomen bis zu Tycho grundlegend war. In Deutschland entfaltete damals der Westfale Jordanus Nemorarius (um 1220) eine fruchtbare Tätigkeit. Weiter ist zu nennen ein französischer Jude, Levi ben Gerson (um 1320), der einige Schriften über Trigonometrie und Rechnen schrieb, die zwar keine bedeutenden Leistungen waren, aber doch eine durchaus selbständige Behandlung der Probleme zeigen.

Die beiden Männer, die wir nun noch als Vertreter des Mittelalters nennen wollen, gehören ihrer ganzen geistigen Einstellung nach schon in die Folgezeit hinein. Wie sehr die Mathematik um diese Zeit schon in weitere Kreise gedrungen war, zeigt uns ein Buch des italienischen Malers Pietro Franceschi (1475) über die Perspektive, dem ein Anhang über die regelmäßigen Körper beigefügt war. Wie später Dürer in seinem bekannten Buche, gab er den Zeitgenossen hier seine geometrischen Methoden bekannt. Das große Interesse einer weiteren Öffentlichkeit an der Geometrie und namentlich an der Stereometrie war begründet in der neu aufgeblühten Baukunst, deren Meister, wenn ihnen auch die wissenschaftliche Vorbildung mangelte, doch intuitiv die geometrischen und mechanischen Gesetze mit erstaunlicher Sicherheit gehandhabt haben.

Als letzten nennen wir nun noch einen der größten Männer seiner Zeit, Nikolaus von Cues, den noch viel zu wenig bekannten großen Sohn des Rheinlandes (1401—64). Gewaltig war der Bereich der Geisteswissenschaften, den er beherrschte, aber auch in den Naturwissenschaften, der Mathematik, Physik, Astronomie und Medizin hat er Bedeutendes geleistet. Dabei war er durchaus kein Stubenhocker oder Büchermensch, sondern auch ein Mann der großen Welt, der als Geistlicher und Politiker nicht minder seinen Posten ganz ausfüllte. Dafür spricht schon sein rascher Aufstieg, der in wenigen Jahren den Sohn eines einfachen, aber wohlhabenden Moselschiffers zum Bischof und Kardinal machte, dem die wichtigsten diplomatischen und kirchlichen Aufgaben anvertraut wurden. Zwischen all seiner Tätigkeit fand er immer wieder Zeit, in der Heimat über seinen zahlreichen Problemen zu sinnen und eine Reihe philosophischer, medizinischer und mathematischer Bücher zu schreiben. Die Geschichte kennt nach ihm nur eine ähnlich vielseitige Persönlichkeit, Leibniz. Die mathematischen Schriften des Cusaners handeln von der Quadratur des Kreises, der Kalenderreform und anderem. Seine größte Tat aber ist die Lehre, daß die Sonne im Mittelpunkte der Welt stehe, womit er den alten Gedanken des Aristarch 100 Jahre vor Kopernikus wieder aufnahm.

Vierter Abschnitt.

Die neue Zeit.

I. Die Neubelebung der Wissenschaften im 16. Jahrhundert.

1. Die allgemeine Lage. Die Wende vom 15. zum 16. Jahrhundert stellt einen bedeutsamen Einschnitt in der Geschichte Europas dar, und zwar sowohl in der allgemeinen Geschichte wie in der besonderen Geschichte der Wissenschaften. Eine glänzende Reihe neuer Entdeckungen erweiterte mit einem Schlage den Gesichtskreis, ja das Weltbild des europäischen Menschen in ungeahnter Weise. 1486 gelangt Diaz bis ans Kap der guten Hoffnung, 1492 landet Columbus in Amerika, 1498 umsegelt Vasco da Gama das Kap und gelangt zum erstenmal zur See nach Indien, 1519/21 fährt schließlich Magalhaes zum erstenmal „um die Welt", damit der revolutionären Idee von der Kugelgestalt der Erde, die Nikolaus von Cues neubelebt hatte, auch die praktische Bestätigung gebend. Die Folge dieser Entdeckungen war eine gewaltige Belebung des Handels. Der Handel wurde im wahren Sinne des Wortes international. Das Geld- und Rechnungswesen, das bis dahin in sehr engen Schranken entwickelt und daher sehr zersplittert war — hatte doch fast jede Hansastadt eigene Maße und Münzen gehabt — erforderte die Ausbildung von Umrechnungsmethoden. Der blühende Handel aber brachte Wohlstand in die Länder und damit jenen Boden, der unerläßlich ist für das Gedeihen einer höheren Kultur, und der erst den Menschen, die nicht mehr unmittelbar an den Alltag zu denken haben, die Möglichkeit gibt, sich der Wissenschaft zu widmen. Wir erinnern an Thales und aus dem vergangenen Jahrhundert an Leonardo Pisano.

Parallel mit dieser Revolution des Weltbildes war eine gewaltige Revolution der Geister gegangen, die Reformation. Das einigende Band riß, das in religiösen Dingen noch die Europäer umschlungen hatte, die Weltmacht des Papsttums war zu Ende. Die Reformation löste den Einzelmenschen aus dem Verbande der fest organisierten Kirche. Ob zu seinem Heile, das haben wir hier nicht zu beurteilen. Fest steht jedenfalls, daß von nun ab auch das religiöse Leben mehr und mehr nationalisiert wird, daß der einzelne mehr dazu dazu erzogen wird, in geistigen Dingen selbst Entscheidungen zu treffen, daß die Wissenschaft sich aus der Obhut der Kirche löst. Diese ganze Entwicklung wurde sehr begünstigt durch Ereignisse, die der Fall Konstantinopels (1453) zur Folge hatte. Eine große Anzahl griechischer Gelehrter wanderte damals aus Byzanz aus und brachte die Bücher und Manuskripte der Griechen und Araber mit nach Europa. Eine Fülle neuer Ideen wurde damit in die durch die religiösen Entwicklungen schon stark erregten Länder geworfen. Die Wissenschaft, die sich soeben erst von der Autorität der Kirche gelöst hatte, erhielt eine gewaltige Arbeit als neue Aufgabe, nämlich die, dieses Neue zu verarbeiten und zu erarbeiten.

In den mathematischen Wissenschaften hatte bisher eigentlich die Arbeit darin bestanden, die dürftigen Überlieferungen sich anzueignen. Dadurch, daß man nun endlich die Griechen im Original kennenlernte, sah man, daß für diese strenge Wissenschaft doch eine grundlegend andere Vorbildung nötig war, als man sie bisher gehabt hatte. So kam man dazu, durch eine durchaus selbständige Verarbeitung der alten Texte sich selbst neue Formen des Denkens und der wissenschaftlichen Sprache zu schaffen, die man zur Grundlage von eigener, neuer Arbeit machen konnte.

2. Die Entwicklung der neuen Algebra. In Norditalien herrschten um die Jahrhundertwende eine Reihe kunstsinniger Fürsten, die ihre Länder zu einer hohen Blüte brachten, und namentlich großes Interesse für Kunst und Wissenschaft hatten. Als Vertreter dieser Blütezeit brauchen wir nur die Namen Lionardo, Michel Angelo, Tizian, Raffael zu nennen. Die mathematische Wissenschaft machte um diese Zeit den für die damaligen Verhältnisse wichtigen Fortschritt, daß man die Gleichung dritten Grades lösen lernte.

Der erste, dem dies gelang, war Scipione del Ferro, Professor in Bologna (1465—1526). Seine Lösung hielt er aber geheim und vertraute sie nur seinem Schwiegersohne und seinem Schüler, dem Venetianer Antonio Fiore, an. Unabhängig von ihm hat der aus Brescia stammende Nicolo Tartaglia (1506—57) eine Lösung der kubischen Gleichung gefunden. Tartaglia hatte eine harte Jugend hinter sich, bei der Einnahme von Brescia durch die Franzosen hatte er einen Sprachfehler davongetragen, der ihm, dessen Familienname Fontana war, den Beinamen Tartaglia, „der Stotterer", einbrachte, den er hinfort als Schriftstellernamen behielt. Er war in der Mathematik Autodidakt, brachte es aber durch eifriges Studium so weit, daß er als Lehrer in Brescia und Venedig seinen Lebensunterhalt erwarb. Auf einer der damals üblichen wissenschaftlichen Disputationen, zu der Fiore herausgefordert hatte, gelang es Tartaglia, diesen durch die Lösung von 30 Fällen der Aufgabe $x^3 + ax = b$ völlig zu übertrumpfen. Er schrieb ein großes mathematisches Werk, General Trattato di numeri et di misuri 1556/60, in dem er die theoretischen und praktischen Methoden eingehend darlegte.

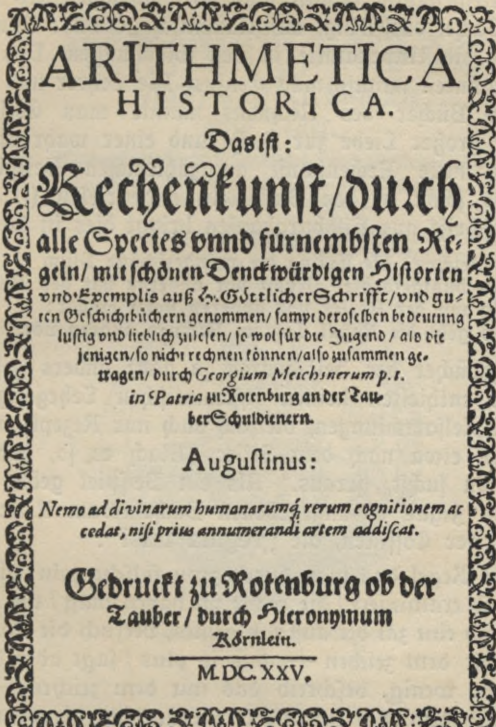
Den Ruhm der ersten Veröffentlichung der Lösung der cubischen Gleichung hat ein anderer Landsmann Tartaglias, Girolamo Cardano (1501—76). Cardano ist ein typischer Vertreter der Renaissance, der in seinem Charakter alle Kontraste der menschlichen Seele vereinigte. Auf der einen Seite Vertreter der exakten Naturwissenschaft, besonders der Mathematik und Medizin, auf der anderen Astrolog und Kurpfuscher. Er hat uns in einem Büchlein, das er als 76jähriger schrieb, — de propria vita —, mit der ganzen Schonungslosigkeit und dem Realismus des Naturforschers seinen Charakter geschildert. Trotz schwerer Schicksalsschläge — sein ältester Sohn wurde wegen Gattenmordes hingerichtet — war er mit sich, der Welt und Gott zufrieden. Das Leben habe ihm die Buße für alle Frevel gebracht, und er hoffe auf eine ewige Wiedergeburt. — Durch große Zudringlichkeit hatte er es verstanden, von Tartaglia die Lösung zu erfahren, und trotz eines Schwures, sie nicht zu verraten, veröffentlichte er sie in seinem Buche Ars Magna de rebus algebraicis, allerdings mit einem selbständigen geometrischen Beweise. Groß war Tartaglias Empörung, der noch bei der Vorbereitung seines eigenen Buches war.

In einer Geschichte der Mathematik dürfen wir auch Lionardo da Vinci nicht übergehen, der zwar im allgemeinen der Welt als der geniale Schöpfer des Abendmahles und der Mona Lisa bekannt ist, der aber als ein genialer Typus seiner

Leibniz mit der Königin Sophie Charlotte
vor dem Charlottenburger Schloß


Johannes Bernoulli
Matheseos in Acad. Basileensi
Professor.

Zeit, auch auf allen anderen Gebieten Eigenes geschaffen. Er war Biologe und Architekt, Mechaniker, Physiker und Mathematiker. So zeichnete er 59 Tafeln mit perspektivischen Darstellungen der regulären Körper zu einem Werke des Franzis-


ARITHMETICA
HISTORICA.
Das ist:
Rechenkunst/durch
alle Species vnnd fürnembsten Re-
geln/ mit schönen Denckwürdigen Historien
vnd Exemplis auß H. Göttlicher Schrifft/ vnd gu-
ten Geschichtbüchern genommen/ sampt derselben bedeutung
lustig vnd lieblich zulesen/ so wol für die Jugend / als die
jenigen/so nicht rechnen können/also zusammen ge-
tragen/ durch *Georgium Meichsnerum p. t.*
in *Patria* zu Rotenburg an der Tau-
ber Schuldienern.

Augustinus:

*Nemo ad divinarum humanarumq; rerum cognitionem ac-
cedat, nisi prius annumerandi artem addiscat.*

Gedruckt zu Rotenburg ob der
Tauber / durch Hieronymum
Körnlein.

M.DC.XXV.

Fig. 9. Titelblatt der „Arithmetica historica“ von Meichsner

kaners Luca Pacioli, der auch selbst seinen Platz in der Geschichte der Mathematik hat.

Die zahlreichen Handelsbeziehungen, die damals zwischen Italien und Deutschland bestanden, hatten auch auf geistigem Gebiete eine enge Verbindung zur Folge. Auch für die deutschen Künstler begann damals der „Zug nach dem Süden". So lernte man auch in Deutschland bald die neue Rechenkunst kennen, die es in Italien schon zu hoher Blüte gebracht hatte. Die Kunst der „Coß", wie sie in Deutschland genannt wurde. Der Name zeigt schon, daß die neue Rechenkunst aus Italien gekommen war. Die neue Rechenkunst nannte man dort zunächst „ars rei"; res heißt die Sache, das Ding, auf italienisch „cosa". Man bezeichnete damit die Unbekannte in den Gleichungen. Das Quadrat der Unbekannten nannte man Census. Die Lehrer und Verfasser der neuen Bücher des Rechnens nannte man Cossisten; sie haben mit großer Liebe zur Sache und einer wahrhaft epischen Breite die neue Rechenkunst an zahlreichen Beispielen entwickelt und schon in den Buchtiteln angepriesen (s. Figur 9). Eine Handschrift aus Hildburghausen bringt dies in Gedichtform:

„Gleichwie die Tulipa die wunderschöne Blum
An buntgefärbter Pracht vor anderen hat den Ruhm,
Ja wie der Adeler vor anderen steigt empor:
So geht die Regul Coß im Rechnen andern vor.

Die Lehrbücher der Zeit waren ja ganz anders gestaltet als heute. Sie enthielten keinen systematischen Lehrgang, sondern waren Beispielsammlungen, vielfach auch nur Rezeptsammlungen; Vorschriften etwa nach dem Stile: „Mach es, so, dann kommt das, was du suchst, heraus." Als ein Beispiel geben wir hier aus dem in Figur 10 angegebenen Buche Adam Rieses, des bekanntesten der Cossisten, die „regula falsi":

„Ist eine Regel das man durch zwu falsche zaln / die man der auffgab nach examiniert / die rechte zal haben mag / thu jhm also / Nim für dich eine zal der auffgab gemes, versuch die / komet zuvil / bezeichne mit dem zeichen +, das is plus / sagt aber die zal der wahrheit zu wenig, beschreib das mit dem zeichen —, das ist minus / Nach dem nim ein andere zal für dich, die examinir auch / Als dann setz beide zaln mit jren lügen / sagen die zaln der wahrheit beide zuviel / oder beide zu wenig / Nim ein lugen von der andern, das da bleibt ist dein teiler / darnach multplizir kreutzweis ein falsche zal mit der anderen falschen zal lügen / nim auch voneinander, das da bleibt teil in vorgemachtem teiler, so hastu die rechte vnd wahrhafftige zal / sagt aber ein falsche zal der wahrheit zuuil, die ander zu wenig / Addir beide lügen behalt für deinen teiler / darnach multiplicir kreutzweis / Addir auch und teile ab, so hastu berichtigung der frag."

Die Behandlung der Aufgaben zeigt die Figur 11, welche die Seite 169 aus dem genannten Buche Adam Rieses darstellt.

Adam Riese, der im Jahre 1489 in Staffelstein bei Bamberg geboren ist, war im reifen Mannesalter Bergbeamter in

Fig. 10. Titelblatt des bekanntesten Rechenbuches von Adam Riese

Annaberg im Erzgebirge. Im Nebenberuf hatte er eine Rechenschule und schrieb eine ganze Menge von Rechenbüchern, von denen eine „Coss", die zum Teil eng an eine lateinische Dresdener Handschrift sich anschließt, nicht gedruckt ist. Durch die zahlreichen Auflagen und Neuausgaben seiner Rechenbücher wurde er ein wohlhabender Mann, und wegen der Auswirkung derselben müssen wir ihn den bedeutendsten der Cossisten nennen. Die Zeitgenossen haben ihn weidlich ausgeschrieben, wie er wohl auch andere, denn einen Urheberschutz gab es noch nicht. Das Titelblatt seines bekanntesten Rechenbuches zeigt Figur 10, auf

169

9 —— 18 3 1
12 —— 10 2

facit 18 daruon ist der dritte teil 6 thu zu 18 werdē 24 daruon ist der vierde teil 6 den thu zu 24 komen dir 30 fl als oben.

7 Ein kauffman hat gelt/legt das an gewint dē dritten teil vnd 4 fl legt an haubtgudt vnd gewin/ gewint den vierden teil vnd brengt zusamen 40 fl/ wieuil hat er zu dem ersten gehabt/ setz eine zal die in drei geteilt mag werden als 15 daruon ist der dritte teil 5 den gib mit den 4 fl hinzu werden 24 / daruon ist der vierde teil 6 die thu zu 24 komen 30 solten 40 sein leugt zu wenig 10 / setz er hab 12 fl gehabt darzu den dritten teil vnd 4 komen 20 daruon ist der vierde teil 5 gib hinzu werden 25 leuget zu wenig 15 stet also.

15 —— 10 2 1
12 —— 18 3

facit 21 darzu thu den dritten teil als 7 vnd 4 werden 32 daruon ist der vierde teil 8 die gib zu 32 so hastu 40 fl.

3 Einer zeucht gen der Neunburck kaufft visch/ werden jm der dritte teil gestoln / an den vberigen vorleust er den vierden teil des gelts so er zum ersten ausgefurt vnd lost 8 fl/wieuil hat er gehabt/Machs also setz eine zal die in sich das dritteil vnd virteil hat als 12 daruon ist der dritte teil 4 vnd der vierde teil 3 / nim 4 vnd 3 als 7 von 12 bleiben 5 solen 8 fl sein leuget zu wenig 3 fl /setz er hab 24 fl gehabt daruon ist der dritte teil 8 vnd der vierde teil 6/ nim 8 vnd 6 von 24 bleiben 10 leugt 2 zuuil stet:

10 12

Fig. 11. Textprobe aus dem Rechenbuch von Adam Riese

dem uns auch das Bild des Verfassers, dieses prächtigen deutschen Bürgertyps, erhalten ist. Seine Bücher waren als Schulbücher so verbreitet, daß noch heute im deutschen Sprachgebrauch das geflügelte Wort besteht „nach Adam Riese“.

Ein Beispiel für die Rechnung „auff den linihen", d. h. auf der Linie, ist wiedergegeben in Figur 12. Die Linien repräsentieren die Stellen, auf denen die Anzahl durch Punkte wiedergegeben ist. Die Zwischenräume geben die zugehörigen Hälften, also die Fünfer, Fünfziger usw. wieder. In der ersten Kolonne ist z. B. die Zahl 4 567 890, in der zweiten 7, in der dritten 23 angeschrieben. Treten auf eine Linie mehr als 5 Einheiten, so werden 5 davon getilgt und dafür eine Einheit auf der nächsten Rubrik hinzugefügt. Es ist im Prinzip dasselbe Verfahren, wie wir es noch heute in der Anfängerschule an der

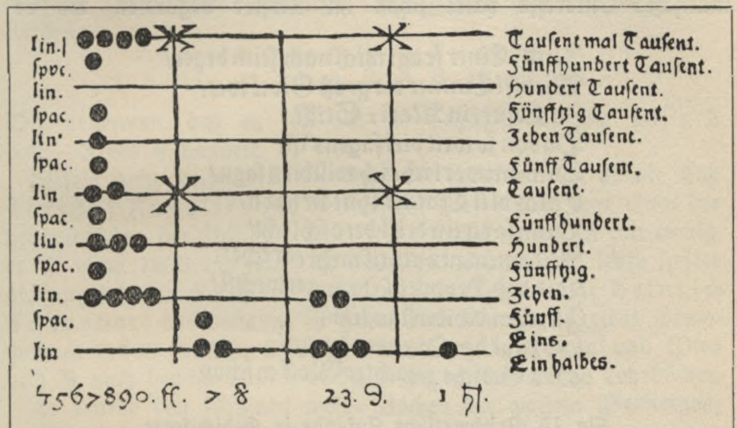


Fig. 12. Rechnung auf den Linien[1]

Schulrechenmaschine anwenden. Das Rechnen mit geschriebenen Ziffern dagegen nannte man „Rechnung auf der Feder".

Schon einige Jahrzehnte vor Adam Riese waren die ersten deutschen Rechenbücher erschienen. Das älteste ist wohl das des Nürnberger Rechenmeisters Ulrich Wagner, das 1482 in Bamberg gedruckt wurde. Bedeutender ist dann das Rechenbuch des Johannes Widman von Eger († 1460), das, wie wir heute wissen, in vielen Dingen an eine Reihe von handschriftlichen Rechenbüchern anknüpft, die als Dresdener Handschriften bekannt sind. In einer dieser Handschriften tritt zum erstenmal in Deutschland das Zeichen „+" und „−" auf, das dann auch

[1] Die verschiedenen Kolonnen bezeichnen verschiedene Münzsorten: fl = Gulden, ₰ = Pfennig usw.

bei Widman zum ersten Male im Druck erscheint, und zwar in dem Büchlein „Behende vnd hubsche Rechnung auf allen kauffmanschafft“, Pforzheim 1489.

Der bedeutendste Kopf unter den Cossisten ist wohl Michael Stifel (1486—1567). Er stammte aus Eßlingen in Württemberg und trat jung in den Orden der Augustiner ein. Bald aber ward er durch die Lehren seines früheren Ordensbruders Luther so beeinflußt, daß er das Kloster verließ und sich zu Luther nach Wittenberg begab. Dieser brachte ihn zunächst als Hauslehrer unter, später erhielt er eine Pfarrstelle. Sein mathematisches Interesse hatte schon im Kloster begonnen, wo er

Jtem: Einer fragt mich nach seim beger/
Wieviel Centner die groß Glock wer/
Zu Erfurt in Mariæ Stifft.
Davon so weit viel sagens ist,
Dem antwort ich/ ich will dirs sagn/
Etlich viel Centner thut sie habn/
Denn so du ein dritl dero schlecht/
Mit einem neuntheil mehre recht/
Vnd das Product so draus erwechst/
Jn zehen dividirst zu letzt/
So zeigt der Quotient dir an/
Das Gwicht gedachter Glocken schon.

Fig. 13. Arithmetische Aufgabe in Gedichtform

sich beim Studium der Apokalypse mystischen Zahlenspielereien hingegeben hatte. Diese sind zum Teil so lächerlich, daß wir heute erstaunt fragen müssen, wie ein so klarer Kopf wie Stifel dazu kam. Als er sich durch die Prophezeiung eines Weltuntergangs eine große Blamage zugezogen hatte, wandte er sich ernsthaften mathematischen Studien zu. Ihr Ergebnis war zunächst die 1544 erschienene „Arithmetica integra“, zu der ihm Melanchthon, der ihn sehr schätzte, eine Vorrede schrieb. Stifels Verdienst ist es, in die Fülle der Einzelregeln, in der die Cossisten schwelgten, Klarheit gebracht zu haben, indem er allgemein gültige Regeln aufstellte. Er verfuhr dem Stoff gegenüber durchaus selbständig und unterscheidet sich dadurch sehr von den anderen, die alles sklavisch mitschleppten, wie es noch Riese getan hatte, der alle 24 Regeln der Coß einzeln behandelte. Stifel war auch durchaus über die Fortschritte der Wissenschaft unterrichtet, erwähnte er doch bereits vor dem Erscheinen von Cardanos Buch dessen Verdienste um die kubischen Gleichungen in seiner Arithmetik. Er war eben ein durchaus wissenschaftlicher Kopf. In Stifels Buch finden wir auch die erste Logarithmentafel, für die ihm zwar der Name und eine völlige Klarheit über die Bedeutung fehlten, aber eine Ahnung von der Bedeutung seiner Entdeckung spricht er in den Worten aus: „Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben." Es handelt sich um die beiden Reihen:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Wir erkennen, daß es sich um die Logarithmen der Basis 2 von —3 bis 6 handelt.

Stifels ganz besonderes Verdienst ist es aber, daß er die Coß Christof Rudolffs neu herausgab. Dieses Buch war eines der bedeutendsten der Cossisten. Über Rudolffs Leben wissen wir wenig, er ist etwa 1500 in Jauer in Schlesien geboren und lebte später als angesehener Gelehrter in Wien. Sein Lehrer war Heinrich Schreyber, der bekannt ist unter dem Namen Henricus Grammateus (1496—1555). Schreyber studierte in Krakau und Wien und ist auch bekannt durch verschiedene mathematische Lehrbücher.

Es würde den Rahmen dieses Buches bei weitem übersteigen, wollten wir hier noch weiter auf die große Zahl der deutschen Cossisten eingehen[1]. Wir nennen noch den Holländer Gemma Frisius, der Professor der Medizin an der Universität Löwen war. Aber bekannter als durch seine Medizin wurde er durch seine Bücher über Arithmetik, Astronomie und Geographie, besonders durch einen ersten Versuch der Triangulation. Es gab damals in fast allen Städten, besonders in den Hansestädten, berufsmäßige Rechenmeister, in Niederdeutschland hießen sie „Rekenmester", die alle ihre eigenen Bücher schrieben. Wir wollen durch einige Bildproben noch eine Anschauung von diesen Büchern geben. Da ist zunächst das Titelblatt eines Buches des Frankfurter Rechenmeisters Simon Jakob von Coburg,

[1] Der Verfasser hat eine Auswahl von Beispielen aus den Rechenbüchern der Cossisten in seinem Lehrbuche „Zahl und Raum" Heft 1 und 2 gebracht. Zahl und Raum, 8 Hefte, 1926/27, Leipzig, Quelle & Meyer.

das in einer Vignette die Tätigkeiten des Mathematikers zeigt: Rechnungen, Körperrechnen, Höhenmessen, Entfernungsmessen, Beobachtung der Gestirne (s. Tafel 4). Eine Textprobe (Fig. 13) aus der Arithmetica poetica von Georg Meichsner zeigt uns die algebraischen Aufgaben in Reimform, und Figur 9 das Titelblatt eines anderen Buches desselben Verfassers, der Arithmetica historica, die nur Beispiele aus der Geschichte, vornehmlich der biblischen enthält.

3. Die Entwicklung der übrigen Zweige der Mathematik. Das zweite Gebiet, auf dem in der in Rede stehenden Zeit neue Arbeiten erschienen, war die Trigonometrie. Grund für das neue Interesse an diesem Gebiete war einmal die Entdeckung der arabisch-griechischen Handschriften, dann aber vor allem das durch die neuen astronomischen und geographischen Entdeckungen erwachte Bedürfnis, trigonometrische Rechnungen mit größerer Sicherheit und Leichtigkeit zu handhaben.

Schon in den letzten Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts hatte Johannes Müller aus Königsberg in Franken, bekannt unter dem Namen „Regiomontanus", Grundlegendes geleistet. Regiomontanus wurde geboren 1436, studierte in Leipzig und unter Georg von Peurbach in Wien, war später Lehrer in Venedig und Rom und hat auch längere Zeit in Nürnberg zu dem Kreise Willibald Pirckheimers gehört, dem auch Dürer angehörte. Im Jahre 1475 wurde er vom Papste Sixtus IV. nach Rom berufen, um an der Kalenderreform mitzuarbeiten. Leider ist er dort ein Jahr später bereits gestorben, ohne seine großen Pläne zur Ausführung gebracht zu haben. In Rom lernte er nämlich die Manuskripte kennen, die im Verlauf der von uns gekennzeichneten Entwicklung nach dem Lande der Renaissance gekommen waren. Er verstand es, sich einen großen Teil derselben in Abschriften zu verschaffen, und plante nun eine Herausgabe der mathematischen Klassiker der Griechen. Insbesondere hat er sich eingehend mit dem Studium des Almagest und der Schriften spanischer Mauren beschäftigt und dadurch sein großes Interesse an der Trigonometrie begründet. Die erworbenen Kenntnisse verarbeitete er völlig selbständig und wurde so, unabhängig von Nasir ed-din, zum neuen Begründer der Trigonometrie. Das Werk, das er darüber geschrieben hat: „De triangulis omnimodis libri quinque", vertraute er seinem Nürnberger Freunde Bernhard Walther an, der es so ängstlich hütete, daß es erst 1533 erschien. Das Buch ist ein durchaus selbständiges Werk, das in meisterhafter Darstellung die Grundlage zu einer systematischen Trigonometrie legte. Die Anregung zu dieser Entwicklung verdankte Regiomontanus seinem von ihm hochverehrten Lehrer Georg von Peurbach (1423—1461), der in Wien zuletzt einen bedeutenden Kreis mathematischer Interessen geschaffen hatte. An neuen Tatsachen bringt Regiomontanus' Buch eigentlich nur den sphärischen Konsinussatz, daneben aber eine vorzügliche Tafel für die Tangensfunktion und einen ganz neuen Beweis für den Sinussatz.

Dem Nürnberger Patrizierkreise, dem Regiomontanus angehört hatte, ist auch der Pfarrer Johannes Werner (1468—1528) zuzurechnen, der die Anregungen zu seinen mathematischen Studien im wesentlichen Regiomontanus verdankte. Er war in erster Linie Astronom und Geograph, daher kam bei ihm ein gewisses Interesse für die Sphärik hinzu. Durch seine Bekanntschaft mit Walther konnte er einen Einblick in das Werk Regiomontanus' tun und schrieb dann selbst ein ähnliches Werk „Libri quattuor de triangulis sphäricis", das verloren ging und 1907 wieder aufgefunden wurde. Auch Walther starb vor der Vollendung seines Werkes und vor der Drucklegung. Handschriften desselben sind aber Anreger zu neuen Arbeiten geworden.

So wissen wir, daß 1542 die Handschrift Werners in die Hände des Wittenbergers Rhäticus gelangt war. Rhäticus (1514—1576) versuchte, das Wernersche Werk zur Grundlage eines eigenen großen mathematischen Werkes zu machen. Auch dieses teilte das Schicksal der Bücher von Regiomontan und Werner. Es erschien (Opus Palatinum) erst lange nach seinem Tode. Rhäticus lebte in Wittenberg und hat von dort aus enge Beziehungen mit Kopernikus unterhalten, den er auch einmal längere Zeit aufgesucht hat. Die Kenntnisse, die er damals von den Ideen des Kopernikus erhielt, hat er später zur Verbreitung der neuen Ideen benutzt. Kopernikus wurde geboren in Thorn 1473 und starb 1543 in Frauenburg am Frischen Haff als Domherr. Seine astronomischen Leistungen sind zu bekannt, um darauf näher einzugehen; in ihnen ist sein Interesse für die Trigonometrie begründet, um deren methodische Weiterbildung er sich im Verein mit Rhäticus eifrig bemühte. Seine Quellen waren dabei die Araber und die Schrift des Regiomontanus. Gerade damals, es war kurz vor dem Auftreten der Logarithmen, gab die Methode der „Prosthaphairesis“ Anlaß, die vorhandenen Formeln neu zu bearbeiten. Es handelte sich in dieser Methode darum, die Formeln so umzugestalten, daß nur noch Additionen und Subtraktionen zu leisten waren. Wenige Jahrzehnte später machte die Einführung der Logarithmen das natürlich alles illusorisch.

Fig. 14. Dürers Konstruktion des lateinischen „K“

Die mit dem Zeitalter der Renaissance erfolgte Neubelebung der bildenden Kunst und der Malerei erweiterte den Kreis der mathematisch, namentlich geometrisch Interessierten um die Künstler. Die meisten der Namen, die uns allen aus dieser Zeit geläufig sind, sind gleichzeitig als die tüchtiger Geometer zu nennen. Wir nannten oben schon Lionardo. Um 1450 schrieb der Italiener Alberti eine praktische Geometrie und bereits 1475 der bereits genannte Franceschi ein Lehrbuch der Perspektive, deren geometrische Grundlagen damals alle Künstler beschäftigten. Franceschi leitete das perspektivische Bild aus dem Grund und Aufriß her. Eine große Reihe perspektivischer Bücher folgten diesem Versuche nach. Wir erwähnen das des Franzosen Jean Pelerin, der unter dem Namen Viator bekannt ist.

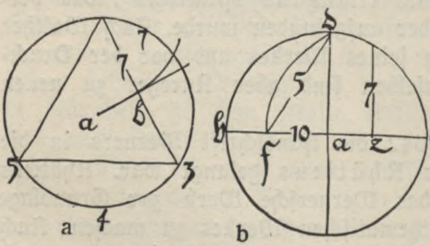


Fig. 15. Zwei Vieleckskonstruktionen von Dürer. a Siebeneck, b Fünf- und Zehneck

Besonders aber nennen wir hier nun unseren großen deutschen Meister Albrecht Dürer (1471—1528). In seinem Buche „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt, in linien ebnen vnd gantzen corporen“, Nürnberg 1525, erkennen wir, wie er überall bestrebt ist, die Harmonie eines künstlerischen Werkes auf die Harmonie der geometrischen Grundlagen zurückzuführen, die Formen aus einfachen Gesetzen abzuleiten. Die

Figur 14 gibt ein Bild davon, wie er das z. B. für die Buchstaben versuchte. Ähnliches macht er in den „Vier Büchern von Menschlicher Proportion", oder er treibt angewandte Mathematik in modernster Form wie in „Etliche Vnderricht zur Befestigung der stett, Schloß und flecken". Aber auch höhere geometrische Figuren interessieren ihn [1], er behandelt die regelmäßigen Vielecke [2] (Fig. 15) und die Perspektive, und, das ist

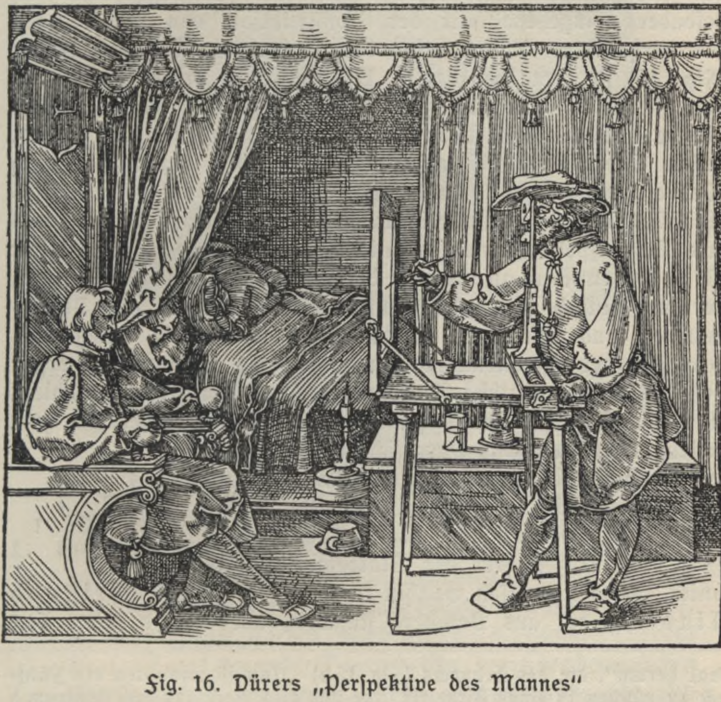


Fig. 16. Dürers „Perspektive des Mannes"

---

[1] Die „Muschellini" in Zahl und Raum Heft 7. (S. oben S. 71 Anm.).
[2] Die Konstruktion des Siebenecks (Fig. 15, oben) beschreibt Dürer mit den Worten: „Nun will ich durch den vorigen Triangel (gemeint ist ein gleichseitiges Dreieck) und aus seiner Beschreibung durch einen gemeinen Weg / den man von Behendigkeit wegen in der Arbeit braucht / ein Siebeneck machen. Ich ziehe eine gerade lini aus dem Zentrum a in den Punkt 2. So zerschneidet sie die Seite des Triangels 1,3 in der Mitte. In demselben Punkt setze ich ein b hin. So geht die lenge 1,b sieben-

sein ganz besonderes Verdienst, er weiß wohl zu unterscheiden zwischen der streng geometrischen und der für praktische Zwecke ausreichenden Konstruktion. Er nennt die erste Art zu konstruieren „demonstrative", die zweite „mechanice".

Neben und nach Dürer haben andere kleinere Geister ähnliche Bücher geschrieben. Wir nennen z. B. den Ulmer Johann Faulhaber (1568—1635), der in seiner Heimat als Lehrer der Mathematik und Rechenmeister lebte. Er beschäftigte sich besonders eingehend mit der Konstruktion von Werkzeugen zur mechanischen Konstruktion der Perspektive, die auch Dürer (Fig. 16) so gerne behandelte. Die Figur 17 bringt ein solches von Faulhaber mit dem zugehörigen Text aus seinem Buche: „Newe Geometrische vnd perspektivische Inuentiones, 1610", dessen Titelblatt die Tafel 5 zeigt. Faulhaber war ursprünglich Weber gewesen und hatte sich als Autodidakt die mathematischen Kenntnisse angeeignet. Auch er beschäftigte sich viel mit Zahlenspekulationen, ähnlich wie Michael Stifel. Weiter ist von Deutschen zu nennen der Sachse Petrus Apianus, der auf deutsch Peter Bienewitz hieß. Apianus war Mathematiker und Astronom (1495—1552) und lebte zuletzt als Professor der Astronomie in Ingolstadt, wo er, wohl als erster in Deutschland, deutsche Vorlesungen über Mathematik abhielt. Auf dem Titelblatt eines seiner vielen Bücher findet sich zum erstenmal gedruckt das Pascalsche Dreieck, wie es nebenstehend abgebildet ist. Aus seinem „Instrumentbuch" bringen wir die Abbildung über die Verwendung des Jakobstabes (Fig. 18). Als Lehrer der Mathematik war unter den Zeitgenossen weithin berühmt der Jesuit Christoph Clavius, der aus Bamberg stammte, aber den größten Teil

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

mal herum", die des Zehnecks (Fig. 15b) „Nun ist vonnöten ein Fünfeck zu machen in einen Zirkelriß / tue ihm also. Reiß aus dem Zentrum a einen Zirckelriß und ziehe eine Zwerchlini durch das Zentrum a, und da sie auf beiden Seiten die Zirckellini durchschneidet, setze b, c. Darnach ziehe durch das Zentrum a eine aufrechte lini zu gleichen Winkeln und wo sie oben die Zirckellini durchschneidet, da setze ein d. Darnach reiß eine gerade lini z d und nimm den Zirckel setze ihn mit dem einen Fuß in den Punkt z den andern in das d, und reiße von da herab auf die Zwerchlini b, c. Wo sie die durchschneidet, da setze ein f und reiße f d gerade zusammen. Diese lenge f d ist eine Seite des Fünfecks, dessen Ecken im Zirckel herumtreten. So ist f a eine Seite eines Zehnecks."

Den vsum hab ich auff mancherley weiß erlangt / den gemeinesten modum will ich dir durch einen Cubum zu verstehen geben. Reiß den ligenden vnd auffrechten Grund deß Cubi auff Papier / das eine Papier mache mit Wachs auff ein auffrechtes Täffelein / das ander auff den Tisch fest. Darüber lege ein ander Täffelein / so an einer Spitzen vff den Tisch fein gangbar gehefftet werde / vnd kleybe auch ein Papier darauff / auff welches das Corpus kommen soll. Henck hernach die Seyten / welche den Augpuncten repręsentirt / nach Gelegenheit deines Wercks / wie in der Figur zu sehen / vnnd neme mit der hindern Perpendicular Regul / daran die Seyt gehefftet / durch den beweglichen Stefft die Höhe der vndern Lini / am auffrechten Grundt / vnd setz den vndern vnbeweglichen Stefft auff einen Puncten deß ligenden Grunds / vnd rück die vordern Regul mit jhrem Stefft an die Seyten / laß auch die Regul vnverrückt stehen / als dann schla-

Fig. 17. Apparat zur Perspektive von Faulhaber

seines Lebens in Rom verbrachte (1537—1612). Er war von Gregor XIII. wegen der Kalenderreform dorthin berufen worden. Seine Schriften waren zu seiner Zeit so berühmt, daß bereits zu seinen Lebzeiten (1611) seine gesammelten Werke erscheinen konnten.

Der letzte französische Mathematiker des ausgehenden Mittelalters ist Nikolaus Chuquet, der in Paris geboren, später in Lyon als Arzt lebte. 1484 schrieb er ein Werk ähnlich dem Luca Paciolis: „Triparty en la science des nombres", das nie gedruckt wurde und darum fast ohne Einfluß blieb. Chuquet war offenbar ein ziemlich selbständiger Kopf, der die Methoden der Arithmetik in eigener Weise weiter entwickelt hat.

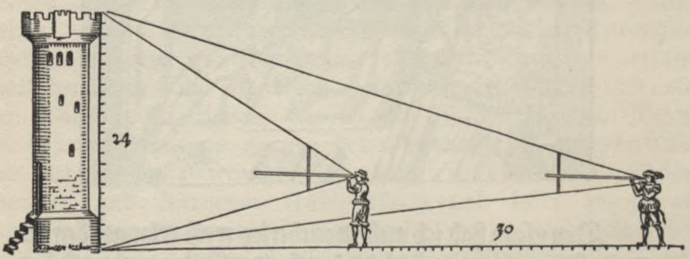


Fig. 18. Gebrauch des Jakobsstabes nach Apian

Viel bedeutender als Chuquet ist dagegen Petrus Ramus gewesen (1515—1572). Ramus entstammte einer völlig verarmten adligen Familie und soll sich zunächst seinen Lebensunterhalt als Diener eines reichen Studenten verdient haben. Dabei benutzte er die Nächte zum Arbeiten und machte schon früh die Magisterprüfung. Nach Ablegung derselben erwarb er sich bald eine geachtete Stellung und wurde Professor am Collège de France. Ramus war ein glänzender Redner und Lehrer und hat durch seine zahlreichen Bücher großen Einfluß auf die Fortentwicklung des mathematischen Unterrichts gehabt. Als 21 jähriger stellt er in seiner Disputation die These auf: „Alles, was Aristoteles gesagt hat, ist falsch," und die glänzende Verfechtung dieser These ließ die gelehrte Welt auf ihn aufmerksam werden. Auch später richtete er vielfach Angriffe gegen die Anhänger des Aristoteles und auch gegen die Methodik des Euklid. Diese Einwände sind nicht immer berechtigt, Ramus ist der klaren Strenge euklidischer

Beweise nicht immer gerecht geworden, als Lehrer aber hatte er sicherlich ein Recht, gegen die sklavische Verwendung der euklidischen Form Einspruch zu erheben. Nach einer längeren Reise durch Deutschland, zu der ihn wohl hauptsächlich religiöse Gründe bewogen hatten — er war Hugenotte —, kehrte er nach Frankreich zurück und wurde ein Opfer der Bartholomäusnacht.

Der bekannteste unter den französischen Mathematikern des 16. Jahrhunderts ist Francois Viète (1540—1603), der meist mit seinem latinisierten Namen Vieta angeführt wird. Er ist geboren in der Vendée in Fontenay-le Comte, wo er auch als junger Mann sich als Jurist betätigte und im bretonischen Parlament eine Rolle spielte. Daneben beschäftigte er sich privatim mit Astronomie und faßte damals den Plan, ein großes astronomisches Werk herauszugeben, das aber nie erschienen ist. Mit 40 Jahren erhielt er eine hohe Staatsstellung in Paris und wurde Mitglied des Kronrats. Als solches hatte er mehr Muße, sich seiner geliebten Mathesis zu widmen. Gegenstand dieser Studien, die ihm vor allem seine gewaltige Arbeitskraft ermöglichte, waren die Schriften der Alten und eigene Untersuchungen in der Algebra und in der Trigonometrie. Die bedeutendste Tat Vietas ist die Einführung der Buchstaben in die Algebra, besonders in den Gleichungen. Nun erst wurde es möglich, für eine Gleichung eine allgemeine Formel als Lösung anzugeben, auch die Einführung einer besseren Potenzschreibung verdankt ihm Förderung. Eine Reihe anderer algebraischer und trigonometrischer Probleme wurde durch seine Arbeiten weiter gebracht. So ist besonders zu erwähnen, daß er als erster algebraische Rechnungen in die Trigonometrie eingeführt und die Methoden zur Berechnung der Dreiecke in ein klares System gebracht hat. Seine Arbeiten hat nach seinem Tode sein Schüler Franz van Schooten gesammelt und herausgegeben, während einen Teil derselben schon Vieta selbst hatte drucken lassen, darunter besonders die „Isagoge in artem analyticam".

Zum Schluß nennen wir noch den englischen Arzt Robert Recorde (1510—1558), der durch die zahlreichen Auflagen seiner Bücher einer der Mitbegründer der englischen Arithmetik und der Verbreiter der Kunst der Coß in England geworden ist. Recorde hat in Oxford studiert, dann später auch dort und in Cambridge mathematische Kurse abgehalten. Später wurde er königlicher Leibarzt. Seine bekanntesten Bücher sind: „The Whetstone of witte“ (der Wetzstein des Wissens) und „The Ground of Artes“, von denen das letzte in 60 Jahren 18 Ausgaben erlebte, eine für die damalige Zeit gewaltige Zahl.

Johannes Kepler[1], 1571 in Weil in Württemberg geboren und 1630 in Regensburg gestorben, müssen wir noch dem 16. Jahrhundert zurechnen. Er besuchte zunächst die Klosterschule, studierte dann im Stift in Tübingen und wurde 1594 Professor in Graz. Religiöse Gründe trieben ihn dort fort, und er folgte einem Rufe des großen dänischen Astronomen Tycho de Brahe, der damals in Prag wirkte. Die hervorragenden Beobachtungen Tychos lieferten ihm das Erfahrungsmaterial für seine astronomischen Gesetze, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. 1612 ging Kepler nach Linz, wo er österreichischer Hofmathematikus wurde. Kepler hatte viel Unglück. Die religiöse Spaltung Deutschlands bedrückte ihn, Geldnöte haben ihn nie verlassen. So mußte er oft, um den Druck seiner Schriften zu ermöglichen, sich mit recht alltäglichen Arbeiten abgeben, u. a. hat er ein Büchlein über die Inhaltsberechnungen der Weinfässer geschrieben. — In seinem „Mysterium Cosmographicum“ suchte er die platonischen regelmäßigen Körper in Beziehung zu setzen zu der Harmonie des Planetensystems. Aber auch diese Arbeiten befriedigten ihn nicht. Sie führten ihn aber dazu, die regelmäßigen und halbregelmäßigen Körper einer genauen Untersuchung zu unterziehen. Für seine umfangreichen Rechnungen in der Astronomie verbesserte er die Rechenmethoden. Als Napiers Logarithmentafeln (s. S. 81) erschienen, war er einer der ersten, der sie freudig begrüßte und darüber eine „Chilias Logarithmorum“ schrieb, in der er die Theorie auch selbst weiter entwickelte. Die Schwierigkeiten, die Kepler hatte, sind zum Teil verursacht durch den inzwischen ausgebrochenen 30 jährigen Krieg, der die Entwicklung in Deutschland gewaltig verzögerte. Erst Leibniz brachte in Deutschland die Forschung weiter, während die anderen europäischen Länder gerade in diesem Anfang des 17. Jahrhunderts große Mathematiker hervorbrachten.

II. Die klassische Zeit der neueren Mathematik.

1. Die Logarithmen. Der große Aufschwung, den die Trigonometrie nach Regiomontanus genommen hatte, die Belebung des

[1] Tafel 6.


Christianus
L. B. de Wolff.


LEONHD. EULER
NAT. BASILEÆ MDCCVII.
MORT. PETROP. MDCCLXXXIII.

Interesses für Astronomie, die seit Tycho und Kopernikus eingetreten war, und die allgemeine Entwicklung der Naturwissenschaft hatten eine stärkere Belebung der numerischen Rechnungen gebracht, die namentlich in den astronomischen Arbeiten durch die großen Zahlen und die unzulänglichen Verfahren sehr langwierig waren und das Bestreben weckten, die Rechnungen zu verkürzen. Die erste Frucht dieser Arbeit war das Verfahren der Prosthaphairesis, in dem die Multiplikationen der Formeln durch Additionen ersetzt wurden. Bald aber lieferte die Entwicklung in dem neuen beginnenden 17. Jahrhundert das stärkste Mittel des numerischen Rechnens, das erst im 19. durch die Entwicklung der Rechenmaschinen teilweise ersetzt wurde, die Logarithmen.

Der erste, der der Welt eine brauchbare Logarithmentafel schenkte, war der schottische Adlige John Napier of Merchiston. John Napier ist im Jahre 1550 in Merchiston, dem Sitze seiner Ahnen, geboren. Es war eine politisch und religiös außerordentlich unruhige Zeit, in die der Jüngling, der mit 16 Jahren die Universität bezog, hineinwuchs, die Zeit, in der John Knox, der Führer der schottischen Protestanten, seine Kämpfe mit den Stuarts ausfocht. Die Napiers standen nach Stand und Tradition auf der Seite von Knox. Auch der junge John studierte zunächst Theologie und beteiligte sich lebhaft an den Debatten über theologische Streitfragen. Nach Beendigung des Studiums an der Heimatuniversität ging er nach der Sitte der Zeit mehrere Jahre auf Reisen. Napier beteiligte sich nach seiner Rückkehr lebhaft an den politischen und religiösen Tagesfragen. Um diese Zeit schrieb er das Werk, das ihn damals in den breiten Massen bekannt machte: „A Plain Discovery of the whole Revelation of St. John“, das eine Behandlung der Tagesfragen auf Grund der Offenbarung Johannis darstellt. Neben diesen theologisch-politischen Arbeiten hat er sich auch für Verbesserungen der Landwirtschaft interessiert, Kriegsmaschinen konstruiert und Gedanken über ein Unterwasserboot in Pläne und Zeichnungen umgesetzt. — Wann und wo Napier sich zum ersten Male mit den Logarithmen beschäftigt hat, ist unbekannt. Aus dem Briefwechsel zwischen Tycho und dem Arzt Jakobs VI. wissen wir, daß er um 1594 bereits an dem Gedanken arbeitete. Zwanzig Jahre sind dann noch vergangen, bis er seine Arbeit fertig hatte. Sie erschien 1614 und hat den

Titel: „Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio...". Napier hat noch andere Bücher geschrieben, die ihn seinen Zeitgenossen bekannter machten als die Descriptio. Heute aber gilt diese als ein Standardwerk der Entwicklung der Mathematik. Napier starb 1617 in Edinburgh.

Im Jahre 1616 erhielt Napier den Besuch eines Mannes, der über die Napiersche Entdeckung zum begeisterten Verehrer des Verfassers geworden war, Henry Briggs (1560—1630). Briggs brachte bei seinem Besuche Napier auf den Gedanken, seinen Tafeln das Zehnersystem zugrunde zu legen. Napier billigte dies durchaus, und so konnte Briggs unter dem Beistande und auf Rat von Napier, wie er selbst erzählt, seine auf dem Dezimalsystem beruhende Tafel berechnen. Im Jahre 1616 hatte er bereits einen Teil der Tafeln fertig, und zwar die Logarithmen der ersten 1000 Zahlen auf acht Dezimalstellen. In den folgenden Jahren erweiterte er die Tafel auf die ersten 20000 Zahlen und ein begeisterter Dilettant, der holländische Verlagsbuchhändler Adriaen Vlacq, trug dann weiter zur Erweiterung der Tafeln bei. Briggs war unter anderem Professor am Gresham College in London, wo zu derselben Zeit ein anderer als Professor der Astronomie wirkte, der der Erfinder eines anderen, uns heute unentbehrlichen Werkzeugs des Rechnens geworden ist, Edmund Gunter. Er kam auf die Idee, eine logarithmische Skala zum mechanischen Rechnen zu verwenden[1]. So wurde er der Erfinder des ersten Rechenschiebers. Gunter hat auch die ersten Sinus- und Cosinustafeln auf Grund der Basis 10 herausgegeben.

Napier hat den Ruhm, als erster eine Logarithmentafel gedruckt veröffentlicht und zu ihrer Berechnung das Verfahren der Interpolation fruchtbar gemacht zu haben. In der Erfindung des Prinzips ist ihm zeitlich ein einfacher deutscher Mechaniker zuvorgekommen. Jost Bürgi (1552—1632) war Schweizer von Geburt und lebte am Hofe des Landgrafen von Hessen in Kassel, von wo er später als kaiserlicher Hofuhrmacher nach Prag ging. In Kassel wirkte Jost Bürgi zusammen mit seinem Schwager Benjamin Bramer, der in der Geschichte der Geometrie wegen der Konstruktion einer Reihe vermessungstechnischer Instrumente zu nennen ist, die er alle in eigenen Schriften beschrieben hat, von denen Fig. 19 ein Titelblatt zeigt.

[1] Über die Einzelheiten siehe von dems. Verf. Zahl und Raum, Heft 2.

Beniamin Brameri.

Kurtzer Bericht zu seinem
Semicirculo,
Darmit in allen Triangeln in einer Observation,
nit allein die drey Latera, sondern auch die drey Winckel eines
Triangels zufinden/ vnd darmit allerley Abmessungen/ Grundlegungen/ Absticku=
gen/ vnd dergleichen verrichtet werden können/ dergleichen vormals
nicht beschriben worden.

Gedruckt zu Augspurg durch Andream Aperger / In verlegung
Georg Wildeisens in Vlm. Im Jahr Christi 1651.

Fig. 19. Titelblatt einer Schrift von B. Bramer. Militärische Vermessungen mit dem beschriebenen Instrument.

Wir wissen von Bürgi selbst, daß er die Ideen zu seiner Tafel aus einer der Schriften des Simon Jakob von Coburg (s. Tafel 4) geschöpft hat und wissen von Bramer, daß Bürgi seine Tafeln um 1600 in Kassel berechnet hat. Erst 1620 erschienen dann die Bürgischen Tafeln: „Arithmetische vnd geometrische Progreß Tabuln / sambt gründtlichem vnterricht / wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen / vnd verstanden werden soll.“ Die in dem Titel angegebene Unterweisung in dem Gebrauch der Tafeln ist aber damals nicht erschienen, erst im Jahre 1856 ist ein Exemplar bekannt geworden, das sie handschriftlich enthält. Die zeitliche Parallelität von Bürgi und Napier ist ein Beweis dafür, daß die Idee des Logarithmus, der ja schon Stifel vorgearbeitet hatte, reif war. Wir werden eine solche Parallelität der Entdeckung derselben Sache in demselben Jahrhundert noch zweimal sehen, sowohl bei der Erfindung der analytischen Geometrie, wie bei der der Infinitesimalrechnung.

2. **Die neue Geometrie.** Wir haben in der Überschrift das 17. Jahrhundert die klassische Zeit der neueren Mathematik genannt. Wenn im 16. Jahrhundert die Befreiung des Individuums aus den Banden der Überlieferung begonnen hatte, ein neuer Geist auf allen Gebieten der Kunst durch die „Renaissance“, auf kirchlichem Gebiete durch die Reformation eingesetzt hatte, so suchte die Wissenschaft des 17. Jahrhunderts diesen Prozeß zu vollenden, indem sie ihm die theoretischen Grundlagen zu einer neuen Weltauffassung gab. So ist das Jahrhundert auf philosophischem Gebiete die Zeit der großen Systeme, und es ist kein Wunder, daß drei dieser Philosophen mathematischen Geistes waren. In dem Chaos der ins Wanken geratenen Autoritäten auf kirchlichem, politischem und geistigem Gebiete schien die Mathematik die einzige Disziplin zu sein, deren Fundamente unberührt geblieben waren. Zwei dieser Philosophen müssen wir auch als Mathematiker nennen, weil ihre Leistungen in dieser Wissenschaft noch mehr als in der Philosophie den Beginn einer neuen Zeit bedeuteten. Descartes schuf die analytische Geometrie und Leibniz die Analysis des Unendlichen. Der dritte der oben genannten, Spinoza, übertrug nur die Arbeitsweise der Mathematik auf die Philosophie, denn er wollte, wie er selbst sagt, die neue Philosophie „more geometrico“ aufbauen, d. h. in einer Kette lückenlos aneinandergereihter Sätze wie in der Geometrie. Es würde

den Rahmen dieses Büchleins bei weitem überschreiten, wenn wir auch die philosophische Bedeutung dieser drei Männer hier würdigen wollten, so sehr ihre mathematischen Studien durch die philosophischen, und umgekehrt, beeinflußt sind [1]. Wir wenden uns daher zu dem Mathematiker Descartes.

Renée Descartes [2] (lat. Renatus Cartesius) ist geboren im Jahre 1596 in la Haye in der Touraine als Sohn eines französischen Edelmanns, der wie seine Vorfahren hoher juristischer Beamter in Rennes in der Bretagne war. Bereits in dem Knaben regte sich die Fülle der Ideen, die ihn später auszeichnete, als er schon mit acht Jahren in das Jesuitenkolleg in La Flèche gegeben wurde. Dort versenkte er sich in die Ideen und die Gedankengänge der Scholastik, ohne in der scholastischen Philosophie irgendwelche Befriedigung zu finden. Als Jüngling kam er 1612 nach Paris, um zunächst einmal die Freuden des Gesellschaftslebens kennenzulernen. In La Flèche bereits hatte er Mersenne [3] kennengelernt, der ihn in seinem Eifer für die Mathematik bestärkte und ihm auch in Paris als treuer Freund zur Seite stand. Bald zog es ihn aus dem Getriebe der gesellschaftlichen und politischen Intriguen wieder in die Einsamkeit. 1617 trat er unter Moritz von Nassau-Oranien in holländische Dienste. Während dieser Zeit, die erst 1624 ihr Ende fand, sind die neuen Ideen in ihm gewachsen. Das Prinzip seiner Philosophie verdankte er einer plötzlichen Eingebung, über die er selbst berichtet hat. Bald nachher trat er aus dem Heere aus, lebte zunächst in Paris und dann von 1628 bis 1649 mit geringen Unterbrechungen in Holland. Dort hat er in der stillen Muße kleiner Orte die Gedanken ausgebaut und die Bücher geschrieben, die seinen Namen unsterblich machen sollten. Ein lebhafter Briefwechsel, dessen Vermittler der in Paris weilende Mersenne war, verband ihn mit der gelehrten Welt. Da er als treuer Sohn der Kirche Bedenken hatte, durch seine revolutionären Ideen Anstoß zu

[1] Vgl. hierzu aus dieser Sammlung: Messer, Geschichte der Philosophie.
[2] Tafel 7.
[3] Marin Mersenne wurde geboren 1588 zu Oizé in Maine und starb 1648 in Paris. Er war Mitglied des Ordens der Minoriten und wirkte als Lehrer der Philosophie und Mathematik in Nevers und Paris. Neben einem umfangreichen Briefwechsel hat er eine große Zahl alter Mathematiker, Euklid, Apollonius usw. neu herausgegeben und verschiedene mathematische Lehrbücher geschrieben.

erregen, so war er in Wort und Schrift vorsichtig bis zur Undeutlichkeit, ließ auch seine Schriften anonym erscheinen. Trotzdem verketzerte ihn die Orthodoxie beider Konfessionen; im protestantischen Utrecht wurde er sogar als Atheist gebrandmarkt. Schon lange hatte er mit der Königin Christine

DISCOURS

DE LA METHODE

Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher la verité dans les ſciences.

PLUS

LA DIOPTRIQVE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

CIↃ IↃ C XXXVII.

Auec Priuilege.

Fig. 20. Titelblatt des Discours de la Methode von Descartes.

von Schweden brieflich in Verbindung gestanden und folgte 1649 ihrem Drängen, nach Schweden zu kommen. Da das Klima seiner so schon nicht mehr festen Konstitution nicht zusagte, so wurde er noch im gleichen Jahre krank und starb in diesem Land „der Berge, der Bären und des Eises", wie er es selbst nannte.

Das wichtigste Buch, das Descartes geschrieben hat, ist das Buch, dessen Titelblatt die Figur 20 zeigt: „Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences", Leyden 1637. Der Name des Verfassers ist aus Gründen der Vorsicht nicht genannt, obwohl den Eingeweihten natürlich bekannt war, wer der Verfasser war, denn die Druckbogen waren vor der Fertigstellung des Druckes zur Einholung des Druckprivilegs in Paris gewesen. Der ersten Abhandlung sind noch drei Essays angeschlossen, La Dioptrique, Les Météores und La Géometrie. Uns interessiert hier nur die Geometrie. Diese ist ein modernes Buch, das auch heute noch lesbar ist für jeden, der die elementare Mathematik versteht; denn es verwendet zum erstenmale konsequent die modernen algebraischen Symbole und ist, auch ein Novum in dieser Zeit, in französischer Sprache geschrieben. Nach Descartes' Willen sollte die Volkssprache der weiten Verbreitung dienen. Da aber die gelehrte Welt immer noch lateinisch dachte und schrieb, so fertigte Franz van Schooten bald darauf eine lateinische Übersetzung an, die der Verbreitung des Buches sehr förderlich gewesen ist. Neben diesem Buche verdanken wir Kenntnisse über die mathematischen Ideen des Descartes hauptsächlich seinem Briefwechsel, in dem auch die mannigfachen Streitigkeiten mit Fachgenossen sich zeigen, in die der temperamentvolle Mann verwickelt war.

Das wesentlich Neue in dem Buche Descartes' sind zwei Dinge, einmal die konsequente Durchführung der Verwendung von Koordinaten, dann die ebenso konsequente Anwendung der neuen Algebra auf geometrische Dinge. Beide Dinge sind für sich allein alt. Koordinaten hatten schon die Alten, die mit Hipparch die Orte auf der Erde nach Länge und Breite festlegten, ein wenn auch rein praktisches Koordinatenverfahren war die Einteilung des römischen Lagers. Auch die Verknüpfung von Algebra und Geometrie ist nicht neu, denn schon Euklid hatte algebraische Aufgaben geometrisch gelöst und Cardano einen geometrischen Beweis für die Lösung der kubischen Gleichung gegeben. Aber in diesen bisherigen Dingen war ein Ausdruck von der Form x^2 stets eine Fläche, ein solcher von der Form x^3 stets ein Körper gewesen. Die Einführung der Einheit als möglicher Faktor erlaubte Descartes, von dieser einengenden Annahme abzusehen, so daß auch eine Gleichung von der Form $x^2 = a$ einen geometrischen Sinn bekam, denn man hatte ja nur $x^2 = a \cdot 1$ zu schreiben, um eine auch in der Dimension der Größen einwandfreie Gleichung zu haben. Zudem war neu die Einführung eines Anfangspunktes auf einer der Achsen, um von dort aus die Koordinaten zu zählen. Die allgemeine Aufgabe ist für den Verfasser nun, ein geometrisches Problem durch Einführung von Strecken als Bekannten oder Unbekannten in eine algebraische Beziehung zu übersetzen, mit dieser zu rechnen und daraus neue Beziehungen herzuleiten. Wir erläutern dies an einem modernen Beispiel: Nimmt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem an — bei Descartes ist dies nicht immer der Fall — so ist die Entfernung zweier Punkte P und P_1, ausdrückbar durch die Koordinaten als $s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$. Also ist

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = s^2$$

die Gleichung des „Ortes" der Punkte, die von P_1 die Entfernung s haben. Bei Descartes ist jedenfalls dieser Grundgedanke der analytischen Geometrie klar erkannt. Die erste Kurve, die Descartes mit seiner Methode ableitet, ist $y^2 = cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$.[1] Bei Descartes bestand auch volle Klarheit darüber, daß der Grad der Gleichung einer Kurve von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sei.

Descartes hat durch die frühere Veröffentlichung und auch wegen der weiten Verbreitung, die seine Bücher als philosophische Werke fanden, sicher die Priorität der Erfindung einer analytischen Geometrie für sich. Aber die Zeit war, wie wir oben schon erwähnten, reif für diese Gedanken. Unabhängig von ihm hat ein anderer das Prinzip der neuen Methode zur gleichen Zeit gefunden, Pierre de Fermat.

---

[1] Näheres siehe in des Verf. Lehrbuch Zahl und Raum Heft 7. Dort ist auch aus Descartes' Geometrie die entsprechende Textstelle in Faksimile wiedergegeben.

Pierre de Fermat[1] wurde im Jahre 1601 zu Beaumont de Lomagne bei Toulouse geboren. Nachdem er in Toulouse die Rechte studiert hatte, wurde er Rechtsanwalt und erhielt später ein Amt am Gerichtshof zu Toulouse. Still und zurückgezogen lebte er, dem sein Amt viel Zeit ließ, der mathematischen Wissenschaft. Sein Hauptverdienst liegt auf dem Gebiete der Zahlentheorie, wo sein Name hauptsächlich durch das „Fermatsche Problem" bekannt wurde. Es handelt sich darum, zu beweisen, daß für ganzzahlige Werte von x, y und z die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ nicht mehr erfüllt ist. Für diesen Beweis wurde gegen Ende des 19. Jahrhunderts ein Preis von 100000 Mark ausgesetzt, den viele Berufene und Unberufene zu gewinnen trachteten. – Fermat hat seine Entdeckungen nie veröffentlicht, sondern nur in Briefen an seine Freunde Mersenne, Roberval und Descartes mitgeteilt. Er ist 1665 zu Castres bei Toulouse gestorben und in der Augustinerkirche in Toulouse beigesetzt.

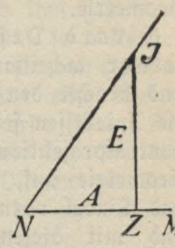


Fig. 21. Zur Gleichung der Geraden nach Fermat.

Auch bei Fermat herrschte über das Wesen der neuen Wissenschaft volle Klarheit. Sein Hauptwerk heißt: „Isagoge ad locos planos et solidos", das er bereits um 1629 fertig hatte, das aber erst sein Sohn im Jahre 1679 veröffentlichte. Dort beschreibt er das Wesen der analytischen Geometrie mit den Worten: „Wenn immer in der Schlußgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, so entsteht ein geometrischer Ort, und der Endpunkt der einen von jenen beiden beschreibt eine gerade oder krumme Linie." Dabei arbeitet er mit den Formen der griechischen Mathematik, wie auch der Titel seines Buches zeigt. Ein Beispiel wird aber zeigen, daß seine Gedanken durchaus modern waren. „Es sei die der Lage nach gegebene Gerade NZM (Fig. 21), auf ihr der feste Punkt N; NZ sei der unbekannten Größe A gleich, und im gegebenen Winkel dazu werden die Gerade ZI angelegt, gleich der anderen unbekannten Größe E. Wenn dann $D \cdot A = B \cdot E$ sei, so liege der Punkt I auf einer der Lage nach gegebenen Geraden." Bezeichnen wir D mit y und B mit x, so erhalten wir die Gleichungen:

$$y \cdot A = x \cdot E \quad \text{oder} \quad y = \frac{E}{A}\,x.$$

[1] Tafel 8.

Während für die Alten und die Zeit bis zum 17. Jahrhundert die Untersuchung jedes geometrischen Ortes ein Sonderproblem war, lieferte die Methode von Descartes und Fermat ein Werkzeug, um jeden geometrischen Ort nach gleichen Prinzipien zu behandeln.

Auch in der reinen Geometrie bringt das 17. Jahrhundert die Erfindung einer ganz neuen Methode, die aber nun nicht wie die analytische Geometrie einen Siegeszug antrat, sondern mit dem Tod des Verfassers wieder vergessen wurde, um erst im 19. Jahrhundert neu entdeckt zu werden, die projektive Geometrie.

Girard Desargues (1593—1662) ist geboren in Lyon, er war nacheinander Offizier, Lehrer, Ingenieur und Architekt und brachte den letzten Teil seines Lebens in Paris zu. Durch die Interessen seines Berufes kam er zur Beschäftigung mit der Zentralprojektion und baute auf dieser Basis sich eine neuartige Geometrie auf, die alle ihre Konstruktionen nur mit Zirkel und Lineal vornimmt, grundsätzlich alle Rechnung verschmähte, und mit diesen einfachen Mitteln bis zu einem systematischen Aufbau der Lehre von den Kegelschnitten vordrang. Nachdem Desargues einmal eine kurze Andeutung seiner neuen Methode gegeben hatte, erschien 1639 sein wichtigstes Buch, der „Brouillon projet", das, auf der Zentralprojektion aufbauend, die beim Schnitt einer Ebene und eines Kegels auftretenden Kurven untersucht und diese bis zur Theorie von Pol und Polare der Kegelschnitte bearbeitet. Er geht dabei aus vom Kreise und überträgt die Ergebnisse durch die Zentralprojektion auf die anderen Kegelschnitte. Die Idee Desargues fand von seiten der beiden großen Zeitgenossen Fermat und Descartes volle Anerkennung, auch der damals noch junge Pascal stimmte begeistert zu und baute die Methode weiter aus. Die übrige Fachwelt aber lehnte das Buch ab, und es geriet bald in Vergessenheit, vielleicht auch deshalb, weil damals gerade das Interesse für die Descartessche Geometrie die mathematische Welt erfüllte. Erst im 19. Jahrhundert wurde eine handschriftliche Vervielfältigung, die sich sein Schüler Philippe de la Hire hergestellt hatte, wieder entdeckt.

Der eben genannte Blaise Pascal (1623—1662) war der Sohn des Kammergerichtspräsidenten in Clermont Ferrand. Schon frühzeitig zeigte der Junge großes Interesse für die Mathematik.

Der Vater verzog später nach Paris, um sich fast völlig der Ausbildung seiner Kinder zu widmen. Um die einseitige Neigung des jungen Blaise für die Mathematik etwas einzudämmen, ließ er ihn zunächst einmal alte Sprachen studieren, aber das große mathematische Genie ließ sich nicht zurückdämmen; in seinen Mußestunden trieb der Junge Mathematik und entdeckte für sich vieles neu, was die Alten gekannt hatten. So dürfen wir uns nicht wundern, daß er, endlich frei für die Mathematik, sich sehr für die neuen Ansichten von Desargues interessierte und bereits mit 16 Jahren eine auf projektive Methoden aufgebaute Kegelschnittlehre verfaßte, die sich um den nach ihm genannten Satz über das Sehnensechseck gruppierte und eine so vollendete Darstellung war, daß man zunächst den Vater Pascal als Verfasser vermutete. Mit 19 Jahren hat er dann eine Rechenmaschine konstruiert, soviel wir wissen, die erste ihrer Art. Später wandte sich, angeregt durch das Studium der Schriften Toricellis, seine Arbeit mehr physikalischen Dingen zu. Auch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat er, in gemeinsamer Arbeit mit Fermat, eine Zeitlang Interesse gehabt.

Sein durch die viel zu frühe geistige Arbeit überreiztes Nervensystem war der Riesenarbeit aber auf die Dauer nicht gewachsen. So trat bei ihm im Alter von 25 Jahren ein Umschlag ein. Er zog sich von aller Arbeit in den exakten Wissenschaften zurück und lebte nur noch philosophischen und religiösen Studien, die ihm jene innerliche Befriedigung brachten, die er in der Wissenschaft nicht zu finden glaubte. Seiner Stellung nach zählt er zu den Jansenisten von Port Royal, bei denen er als einer der Wortführer im Kampfe gegen die Jesuiten eine eifrige Tätigkeit entfaltete. In diesem Kampfe gegen die Jesuiten entstanden seine: „Lettres à un provincial“, die noch heute wegen ihrer glänzenden Darstellung als ein klassisches Denkmal der französischen Sprache gelten. Später hat er sich doch hin und wieder für die mathematischen Fragen interessiert; unter seinen hinterlassenen Schriften ist für uns noch interessant die Schrift „De l'esprit géometrique“, in der er ähnliche Gedanken wie Descartes und Spinoza über die Forschungsmethode der Philosophie entwickelt, die nur mit einer der mathematischen nachgebildeten Methode sichere und einwandfreie Erkenntnisse gewinnen könne.

Noch zu Zeiten Pascals spielte in Paris eine große Rolle der Holländer Christian Huygens (1629—1695). Seine Hauptverdienste für die Wissenschaft liegen auf physikalischem Gebiete. Namentlich die Anwendung der mathematischen Methoden auf die theoretische Physik verdankt ihm weittragende Förderung. Er ist der Begründer der Wellentheorie des Lichtes, der Erfinder der Pendeluhr usw. In Leyden, wo er studierte, hatte er den Freund Descartes, Franz van Schooten, als Lehrer, wurde durch ihn auch mit Descartes und Mersenne bekannt und erhielt dadurch mannigfache Anregungen. In Paris wurde er zum Präsidenten der damals neu gegründeten Academie des Sciences ernannt. In diesem Amte hat er auf die Arbeiten der Akademie den besten Einfluß gehabt.

3. Die Erfindung der Infinitesimalrechnung. Zwei Probleme waren es, von denen die Erfindung der Infinitesimalrechnung, auch Differential- und Integralrechnung genannt, ihren Ausgang nahm. Beide Probleme sind schon sehr alt und waren als solche schon den Griechen bekannt. Das eine ist die Quadratur einer Kurve, das andere die Bestimmung der Tangente in einem Kurvenpunkte. Unter Quadratur einer Kurve versteht man die Aufgabe, zu einer krummlinig begrenzten Figur das flächengleiche Quadrat zu zeichnen. Die Tangente ist die Linie, die eine Kurve in einem Punkte berührt. Beide Aufgaben sind schon von Archimedes behandelt worden; während er aber in der Behandlung der Tangente nicht über die Festlegung gewisser Eigenschaften der Tangente hinauskam, gelang ihm die Quadratur der Parabel und Ellipse. Auch Appollonius kannte bereits eine Menge Tangenteneigenschaften der Kegelschnitte. Der wesentliche Gedanke des Archimedes bei der Quadratur der Parabel z. B. ist die Einschließung der Kurve und der zu ihr gehörigen Fläche durch eine Treppenfläche, wie dies Figur 5 zeigt, die wohl ohne weiteres verständlich ist. — Wir können nun im folgenden nicht alle einzelnen Etappen aufzählen, die die Entwicklung beider Probleme durchgemacht hat, es handelt sich nur darum, die Entwicklung des 17. Jahrhunderts zu charakterisieren, die zur modernen Infinitesimalrechnung führte.

Es ist das Verdienst von Bonaventura Cavalieri (1591 bis 1647), nach langer Pause in der Entwicklung wieder eine Methode zur Berechnung krummliniger Flächen und Körper angegeben zu haben. Bonaventura Cavalieri war ein Schüler Galileis, Mitglied der Gesellschaft Jesu und Professor der Mathematik an der Universität Bologna. Am bekanntesten ist er noch heute durch das sogenannte „Cavalierische Prinzip", das etwa für die Flächen so ausgesprochen werden könnte: Haben zwei Flächen, die zwischen parallelen Geraden liegen, in gleicher Höhe gleiche Sehnen, so sind sie gleich. Die neuen Begriffe, die Cavalieri zu dieser Methode brauchte, waren für die Flächen „die Summe aller parallelen Sehnen" und für die Körper „die Summe aller parallelen ebenen Schnitte". Diese Begriffe aber waren zu unklar und unbestimmt, so sehr sie dem schlichten Verständnis auch entgegenkamen. Schon damals erregten sie Widerspruch und waren die Ursache mancher Kontroverse. Für einfache Fälle aber ergaben sie eine brauchbare Lösung und werden ja noch heute in den Schulen benutzt.

Ein weiterer Vorläufer von Newton und Leibniz war Isaac Barrow (1630—1677). Barrow war der Sohn eines königlichen Händlers in London und geriet wie Napier in die religiösen und politischen Streitigkeiten der Zeit hinein. Sein begonnenes theologisches Studium mußte er aus solchen Gründen unterbrechen und begab sich für vier Jahre außer Landes. Nach Klärung der politischen Lage kehrte er nach England zurück und erhielt die Professur für Griechisch in Oxford, bald darauf eine für Mathematik am Gresham College in London und wurde hierauf Inhaber der Lucasischen Professur in Cambridge. Er selbst schrieb „Lectiones mathematicae" (69/70) und gab verschiedene antike Schriftsteller neu heraus. Barrow ist als Mensch eine außerordentlich sympathische Erscheinung, einmal dadurch, daß er die Hilfe seines damaligen Schülers Newton bei der Herausgabe des eigenen Werkes so selbstlos anerkannte, dann aber auch dadurch, daß er im Jahre 1669 seinem Schüler Newton, dessen überragendes Können er neidlos bewunderte, freiwillig sein Lehramt, die Lucasische Professur, abtrat. Zu seiner Zeit ist Barrow vor allem als glänzender Prediger bekannt gewesen. Seine mathematischen Leistungen als Vorläufer Newtons bestehen besonders in der klaren Formulierung der Probleme, dann in der Erkenntnis, daß die Quadratur und die Tangentenbestimmung zwei einander entgegengesetzte Probleme waren, das eine die Umkehrung des anderen. Dabei schuf er zur Tangentenbestimmung schon den Begriff des Differentialdreiecks, das später von Leibniz charakteristisches Dreieck genannt wurde.

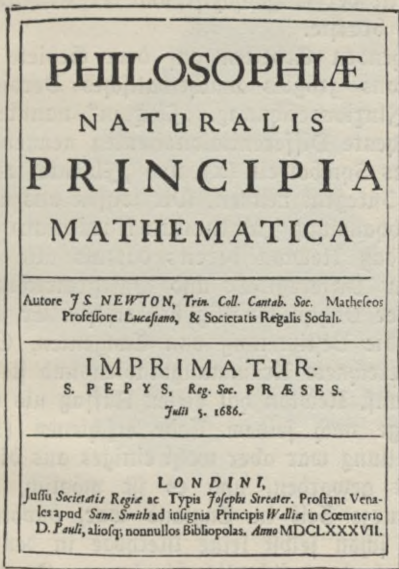
Isaac Newton[1] (1642—1727), den wir von den beiden

[1] Tafel 9. Nach einem Gemälde von Van der Bank in der Royal Society.

größten Mathematikern dieses Jahrhunderts zuerst nennen, ist geboren als Sohn eines kleinen Landwirts in Woolsthorpe in Lincolnshire. Der Vater starb noch vor der Geburt des Jungen, so daß die Witwe sich recht bescheiden mit dem Kinde durchschlagen mußte. Bereits in jungen Jahren hatte er großes Interesse für mechanische Konstruktionen. Nach dem Besuch einer Schule der Nachbarschaft wurde er 1661 nach Cambridge zum Besuche des Trinity Colleges geschickt. Dort vertiefte er sich bald in die Ideen Descartes' und wurde außerdem durch die Vorlesungen seines Lehrers Barrow stark gefesselt. Bereits im Jahre 1664 war er in seinen eigenen Studien so weit fortgeschritten, daß er die Formel $(a+b)^n$ für alle Exponenten bewiesen hatte. Von besonderer Bedeutung für ihn wurde es, daß er durch den Ausbruch der Pest in Cambridge gezwungen wurde, sich für zwei Jahre nach seiner Heimat zurückzuziehen. In diesen zwei Jahren scheinen alle die großen Ideen in ihm gereift zu sein, durch die er seinen Namen unsterblich gemacht hat, die Arbeiten über die Fluxionsrechnung (Differentialrechnung), über die Massenanziehung und die Optik. Newton hatte eine große Scheu vor der Öffentlichkeit und konnte sich nie dazu entschließen, etwas zu veröffentlichen. So kam es, daß die Mehrzahl seiner Schriften oft erst lange nach ihrer Entstehung erschienen sind. Nur sein Hauptwerk, „Philosophiae naturalis principia mathematica", ist kurz nach der Entstehung erschienen, denn Newtons Freund Halley ließ ihm keine Ruhe, bis das Buch gedruckt war, und bezahlte noch selbst einen Teil der Druckkosten. Über die Gründe dieser Scheu Newtons herrscht keine Klarheit. Wie wir schon oben erwähnten, wurde er im Jahre 1669 der Nachfolger Barrows in der Lucasischen Professur der Mathematik in Cambridge. In seinen Vorlesungen hat er seine wichtigsten Entdeckungen auch kaum behandelt, nur über seine Lichttheorie und die Farbenzerstreuung hat er Vorlesungen gehalten. Seine Emissionstheorie, die der Huygensschen Undulationstheorie des Lichtes weichen mußte, feiert gegenwärtig in der Theorie der Lichtquanten in gewissem Sinne eine Auferstehung. — Newton hatte an der Universität eine sehr angesehene Stellung. Er wurde Parlamentsmitglied und Vertreter der Universität, stand politisch in späterem Alter auf der Seite der Konservativen. Im Jahre 1696 wurde er Beamter an der königlichen Münze und bald darauf Vorsteher. In dieser Stellung bezog er ein fürstliches

Gehalt von 1500 Lst. Neben seinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeiten hatte er noch theologische Interessen und beschäftigte sich besonders mit David und der Apokalypse. 1727 ist er gestorben und wurde in der Westminster Abtei beigesetzt.

Die Persönlichkeit Newtons überragt die Zeitgenossen so sehr, daß mit seinem Namen eine neue Epoche in der Geschichte der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft be-


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR·
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

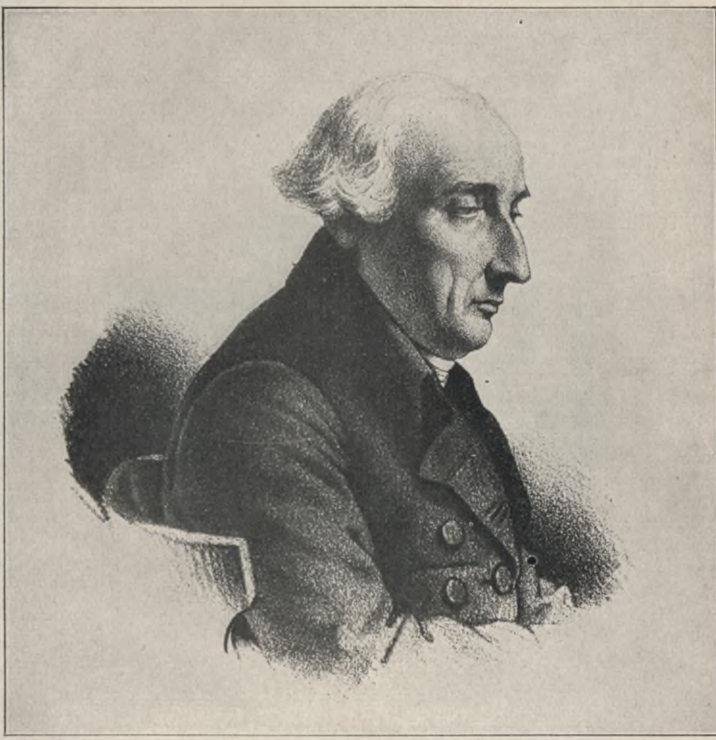
LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Fig. 22. Titelblatt von Newtons Hauptwerk.

ginnt. Er schuf die Grundlagen für einen neuen Zweig der Mathematik, die unabhängig von ihm auch Leibniz gefunden hatte; dieser Zweig ist aber deshalb so bedeutend, weil er der Menschheit das mathematische Instrument in die Hand gab, um die Natur mathematisch zu beschreiben. In der Optik gab er mit der Tatsache, daß das weiße Licht zusammengesetzt sei, der Forschung einen neuen Weg, der schließlich in der modernen Spektralanalyse endet, die sich immer mehr anschickt, der Mittelpunkt der theoretischen und experimentellen Physik zu werden. Ferner gab er in seiner Emissionstheorie eine Erklärung der optischen Erscheinungen, die zwar zeitweise von der Huygensschen Theorie überholt wurde, aber die moderne Quantentheorie scheint erst in der Verkoppelung beider Ideen die restlose Klärung der Tatsachen zu finden. Schließlich gab er in seinem naturwissenschaftlichen Hauptwerk der Mechanik eine neue Grundlage, deren Bedeutung noch heute unerschüttert ist, wenn sich auch mit der Zeit Ergänzungen nötig erwiesen, die der Fortschritt der Wissenschaft und der Technik des Experimentes mit sich brachte.

Neben eingehenden Arbeiten auf dem Gebiete der Reihenlehre ist Newtons größtes mathematisches Verdienst die Begründung der Fluxionsrechnung. „Fluxion" nannte er den Begriff, den wir heute Differentialquotienten nennen, führte auch dafür ein eigenes Symbol ein ($\dot{x}$), und „Fluente" nannte er das, was wir heute Integral nennen. Wir wissen aus einer 1670/71 geschriebenen Abhandlung „Methodus fluxionum et serierum infinitarum", daß Newton bereits damals alle die heute in der elementaren Differential- und Integralrechnung üblichen Anwendungen der Disziplin völlig beherrschte. Er wandte seinen Calcul an auf die Bestimmung von Tangenten, Extremwerten, Quadraturen, berechnete Krümmungsradien und stellte Differentialgleichungen auf. Newton hat diesen Aufsatz nie veröffentlicht, er ist erst lange nach seinem Tode erschienen (1736). Durch mündliche Mitteilung war aber wohl einiges aus diesen Abhandlungen bekannt geworden, und es ist möglich, daß Leibniz, als er 1673 kurze Zeit in England war, davon hörte. Da Leibniz damals schon selbst seine Methode in den Grundzügen fertig hatte, so wird er sicherlich die kurzen Angaben, die ihm gemacht wurden, als neue Anregungen benutzt haben, auf dem Wege fortzuschreiten.

Das bedeutendste Werk Newtons sind die „Principia". Newtons Freund, der Astronom Halley, hatte auf Grund von Arbeiten über die Keplerschen Gesetze die Vermutung gehegt, daß ebenso wie das dritte Keplersche Gesetz auch das erste sich unter der Annahme einer Massenanziehung im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung erklären lasse. Nach einem Besuche bei Newton teilte ihm dieser mit, daß er seine Annahme beweisen könne. Halley regte nun Newton an, dieses wichtige Ergebnis der Royal Society mitzuteilen und in einem großen Werke alles niederzulegen. Halley sorgte



Lagrange

PET. SIM. DE LA PLACE
Mitglied des Paris. Nat. Instituts
d. K. u. W. und der Comiss. weg. d.
Meereslänge.
Gebohren d. 23: Mrt. 1749
zu Beaumont en Auge, in der vormal.
Normandie jezt Depart. de Calvados.

dann auch, daß das Werk in Druck kam und bestritt aus eigenen Mitteln einen Teil der Kosten des Druckes. Es ist Newtons Verdienst, die Keplerschen Gesetze, die bisher nur auf Grund der Beobachtungen bestätigt waren, aus einem einheitlichen Prinzip erklärt zu haben. Zu der Herleitung dieses Beweises bediente er sich seiner neuen Methode; so sind die den „Principia" vorausgeschickten elf Sätze die erste Mitteilung Newtons über den „Methodus fluxionum". Es war eine ungeheuer kühne wissenschaftliche Tat, die doch schließlich mit irdischen Mitteln gewonnenen mechanischen Prinzipien auf die Mechanik der Himmelskörper zu übertragen und damit deren Bewegungen gewissermaßen auch unter die Mittel der mathematischen Berechnung zu zwingen. Die Prinzipien der Mechanik, die er damals formuliert hat, haben heute noch ihre Gültigkeit, wenn auch der Fortschritt der Erkenntnis ihren Geltungsbereich etwas eingeschränkt hat.

Schon zu Lebzeiten Newtons brach zwischen ihm und dem anderen großen Zeitgenossen, den wir gleich behandeln werden, ein Streit um die Priorität der Entdeckung der Differentialrechnung aus. Als Newton starb, war dieser noch nicht geschlichtet. Allerdings hatte Newton selbst sich kaum daran beteiligt, aber seine Schüler hatten dafür mit um so größerem Eifer gefochten. Heute ist der Streit so weit geklärt, daß selbst die Angelsachsen zugeben, daß: „There is no longer any doubt that Leibniz developed his calculus independently, and that he and Newton are each entitled to credit for their respective discoveries"[1]: Das hatten übrigens die beiden Männer selbst sich schon gegenseitig in zwei Bemerkungen zu ihren Arbeiten zugesichert. Heute ist jedenfalls sicher, daß Leibniz ganz unabhängig von Newton seine Gedanken begründet hat. Er stützte sich vorwiegend auf die Arbeiten von Archimedes, Cavalieri und Pascal. Dadurch, daß die Leibnizsche Bezeichnungsweise die Newtonsche verdrängt hat, ist schließlich Leibniz etwas mehr in den Vordergrund getreten.

Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz[2] wurde geboren 1646 in Leipzig und starb 70 jährig 1716 nach einem ungemein reichen Leben. Er hat als Mathematiker und Philosoph, als Staatsmann und Historiker Bedeutendes geleistet und war einer

[1] Smith, History I, S. 418. [2] Tafel 10. Nach einer Zeichnung Menzels.

der letzten, die das ganze Wissen einer Zeit nicht nur beherrschten, sondern selbst in höchster Produktivität weiter entwickelten. Als 15jähriger bezog der junge Leibniz die Universität, um zunächst Jura zu studieren. Schon früh erwachte sein Interesse für die Mathematik, aber bei dem Mangel an guten Lehrern in Deutschland war er lediglich auf eigenes Studium angewiesen. Der Stand der mathematischen Wissenschaft war damals in Deutschland ein sehr niedriger, denn der 30jährige Krieg hatte alles geistige Leben ertötet. 1667 traf er nach seiner Promotion in Nürnberg mit einem Herrn von Boineburg zusammen, der in ihm das politische Interesse weckte — Boineburg war selbst Diplomat gewesen — und ihn in die diplomatische Karriere brachte. Schon damals aber, als er mit Boineburg in Frankfurt war, schrieb er eine erste Abhandlung, die ihn mit Oldenburg, dem Sekretär der Royal Society, in London bekannt machte. Dann ging er selbst im Auftrage des Kurfürsten von Mainz nach Paris. Dort knüpfte er Verbindungen mit vielen gelehrten Zeitgenossen an und besuchte auch England. Zu seinen wichtigsten Bekanntschaften aus dieser Zeit gehört auch die von Huygens, dessen theoretisch-physikalische Arbeiten aufs engste mit den Leibnizschen Ideen zusammenhingen. In dieser Zeit beschäftigte sich Leibniz mit den Arbeiten von Archimedes, Cavalieri und Pascal und schrieb die grundlegenden Arbeiten über seine neue Methode. Im Jahre 1676 wurde er als Bibliothekar nach Hannover gerufen, wo er mit einer kurzen Unterbrechung während der Gründung der Berliner Akademie bis zu seinem Tode gelebt hat. In Hannover hatte er neben seinen wissenschaftlichen auch praktische Aufgaben aus Bergbau und Geldwesen zu bearbeiten und als Hofhistoriker des Welfenhauses Studien in Archiven zu treiben, die ihn auf vielen Reisen in die Nachbarländer führten. So blieb Leibniz zeit seines Lebens ein Mann, der in der „großen Welt“ so gut zu Hause war wie in der einsamen Studierstube des Gelehrten. Seine internationalen Beziehungen brachten ihn auf den Gedanken, eine Weltakademie der Gelehrten zu gründen. Der Plan scheiterte, dafür entstanden aber überall damals die nationalen Akademien, nach der Royal Society die Pariser Akademie, und er selbst wurde 1700 nach Berlin berufen, um dort die Begründung einer Akademie der Wissenschaften zu leiten. Die Anregung zu dieser Berufung stammte von

Preußens erster Königin Sophie Charlotte, die eine Prinzessin aus dem Welfenhause war.

Die diplomatische Laufbahn hatte aus Leibniz einen geschmeidigen Weltmann gemacht, aber auch sein Denken über die Zäune der zünftigen Wissenschaft hinwegschreiten lassen. Er besaß eine große Gewandtheit in Wort und Schrift und mag in der Verteidigung gegen die Freunde Newtons eine scharfe Klinge geführt haben. Der Vorwurf, der in angelsächsischen Büchern gemacht wird, sein Wort habe in der wissenschaftlichen Welt nicht gegolten, ist aber unberechtigt, wie das Zitat gerade aus einem dieser Bücher zeigt. Es ist hier in diesem Büchlein weder Ort noch Raum, auch die Philosophie von Leibniz darzustellen. Jeder Blick in ein philosophisches Buch zeigt, wie groß seine Bedeutung für die Zeit der großen Systemphilosophen ist. Es war Leibnizsche Lebensphilosophie, aus allem das Beste für sich herauszunehmen, er verstand es glänzend, fremde Gedanken für seine eigenen Gedanken fruchtbar zu machen und alles von der besten Seite zu nehmen. So dürfen wir uns nicht wundern, daß er ein unverbesserlicher Optimist war, der nicht nur die feste Überzeugung hatte, daß alles in der Welt aufs beste eingerichtet sei, sondern auch das Bedürfnis hatte, in seiner „Theodicee" die Mitwelt davon zu überzeugen.

Leibniz hatte 1673 in London die Lectiones geometricae von Barrow und die Logarithmotechnia von Nikolaus Merkator[1] kennen gelernt. Beide Bücher waren für ihn eine Quelle der Anregung gewesen, dazu kam das Studium Archimedes', Cavalieris und Pascals. Schon damals versuchte er, eine allgemeine Tangentenmethode zu finden und spricht auch von dem Gedanken der Umkehrung dieses Problems: „ob es von den Tangenten und anderen Funktionen einen Rückgang zu den Ordinaten gibt, ist eine Frage von großer Bedeutung. Die Sache muß genau untersucht werden." Zwei Jahre später verwendet Leibniz schon das heute noch übliche Integralzeichen „∫". So steht fest, daß er in den siebziger Jahren seine Differential- und Integralrechnung völlig entwickelt hat. Die erste Veröffentlichung über den Gegenstand war eine Abhandlung in den „Acta eruditorum", einer damals eben gegründeten Zeitschrift, die nach Art der in England und Frankreich er-

[1] Nicht zu verwechseln mit dem Duisburger Gerhard Merkator (Merkatorkarte).

scheinenden ähnlichen Zeitschriften, den „Philosophical Transactions“ und dem „Journal des Savants“, der gelehrten Welt die Möglichkeit zur Mitteilung ihrer Arbeiten geben sollte. In einer Reihe von Arbeiten, die fast alle in den Acta erschienen, hat Leibniz dann seine Methode weiter ausgebildet[1]. Von Anfang an ging dabei sein Bestreben dahin, auch eine zweckmäßige Bezeichnung für die neue Rechnung zu finden. Das gelang ihm so vorzüglich, daß wir uns noch heute seiner Bezeichnungen bedienen. Sein Interesse für die zweckmäßige Wahl einer Symbolik der Wissenschaft brachte ihn auch auf den Gedanken, für die ganze übrige Philosophie, wie für die Mathematik, eine Zeichensprache ähnlich der algebraischen zu finden; eine Absicht, mit der er aber nicht durchgedrungen ist.

Um die Ausbreitung der neuen Methode der Rechnung hat sich eine Mathematikerfamilie große Verdienste erworben, die Familie Bernoulli. Die Bernoullis waren eine Emigrantenfamilie aus den Niederlanden, die dort unter der Herrschaft Albas ausgewandert war und sich in Basel niedergelassen hatte. Wir kennen aus dieser Familie nicht weniger als neun bedeutende Mathematiker. Sie haben alle, besonders die beiden, auf die wir etwas näher eingehen wollen, die größten Verdienste um die Verbreitung der Leibnizschen Methode und um deren schnelles Durchsetzen. Als begeisterte Anhänger der neuen Disziplin hatten sie auf den verschiedensten Lehrstühlen in der Schweiz, in Holland und in Rußland hierzu Gelegenheit.

Der erste der Bernoullis ist Jakob Bernoulli (1654 bis 1705). Er war vom Vater zum Studium der Theologie bestimmt, gab dieses aber bald auf, um sich ganz der Mathematik zu widmen. Eine Zeitlang schlug er sich als Hauslehrer durch, kehrte dann nach Basel zurück und wurde Professor der Mathematik. 1687 knüpfte er die erste Verbindung mit Leibniz an, als er einen Aufsatz desselben über ein mechanisches Problem in den „Acta“ gelesen hatte. In einem Aufsatze, in dem er seine eigenen Forschungen zu diesem Problem darlegte, brachte er zum erstenmal das Wort „Integral“, das später auch von Leibniz übernommen wurde. Jakob hat noch eine Menge mathematischer Arbeiten veröffentlicht. In einer derselben ist die erste Aufgabe der Variationsrechnung behandelt, in

[1] Eine Zusammenstellung der wichtigsten Arbeiten in Ostwalds Klassikern Nr. 162 = G. Kowalewski, Leibniz über die Analysis des Unendlichen.

einer anderen, die erst nach seinem Tode erschien, die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu seinen Schülern gehörten in Basel sein Bruder Johann, andere Bernoullis und der Vater des später zu nennenden großen Mathematikers Leonhard Euler.

Johann Bernoulli[1] (1667—1748) sollte, einem Wunsche des Vaters folgend, Kaufmann werden. Auf Anregung seines Bruders Jakob aber studierte er Medizin und Mathematik. Er promovierte 1690 mit einer medizinischen Arbeit und machte dann verschiedene Reisen ins Ausland. 1695 wurde er auf Empfehlung von Huygens, den er in Paris kennengelernt hatte, zum Professor der Physik in Groningen ernannt. Dort blieb er 10 Jahre, um im Jahre 1705 als Nachfolger seines verstorbenen Bruders als Professor der Mathematik nach Basel zurückzukehren. Dort entfaltete er eine fruchtbare Tätigkeit als Lehrer und Forscher und schrieb das erste Lehrbuch der Integralrechnung. Zu seinen Schülern gehörte Leonhard Euler. Auch auf seinem ersten Fachgebiete, der Medizin, hat Johann eine Reihe bedeutender Arbeiten veröffentlicht.

III. Das 18. Jahrhundert. Der Ausbau der Analysis.

Die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft geht im nun beginnenden 18. Jahrhundert einen doppelten Weg. Einmal ist es die Aufgabe der Mathematiker, die Ausbreitunng der neuen Ideen zu fördern, dann aber auch die Entwicklung immer höher zu treiben. Damit ist notwendig eine immer größer werdende Spezialisierung, eine immer mehr verfeinerte Begriffsbildung verbunden, und unsere Wissenschaft nähert sich damit einem Punkte, wo der Laie, der etwa die Kenntnisse der Schulmathematik mitbringt, nicht mehr folgen kann, weil der besondere Charakter der Wissenschaft nunmehr eine eingehende Kenntnis der Fachbegriffe und der Symbolik verlangt. So werden wir uns noch mehr als bisher darauf beschränken müssen, ein Bild der großen Männer zu geben, um schließlich in dem in unsere Gegenwart hineinreichenden 19. Jahrhundert die „Geschichte" der Mathematik zu beendigen. Der Fülle der Erscheinungen in diesem Jahrhundert gegenüber dürfte unsere Zeit noch nicht die Distanz haben, um eine Geschichte dieser Zeit zu schreiben. Erst später werden sich die großen Züge der Entwicklung klarer

[1] Tafel 11.

herausheben, die wesentlichen Probleme schärfer von allem Nebensächlichen abheben, um Gegenstand der „Geschichte“ zu werden.

1. Die Propagatoren. In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts sehen wir in allen Ländern die Männer am Werke, deren Lebensaufgabe darin besteht, die großen Ideen von Leibniz und Newton einem weiteren Kreise von wissenschaftlich interessierten Männern darzubieten. Wir haben in diesem Zusammenhange die Bernoullis schon genannt. Sie alle einzeln zu nennen, dürfte zu weit führen. Es ist eine Reihe bekannter Namen, die uns meist vertraut sind durch irgendeinen Satz oder eine Formel, die den Namen nach dem Autor trägt. Wir beschränken uns auf einige wenige, die auch sonst für die Geistesgeschichte Bedeutung haben.

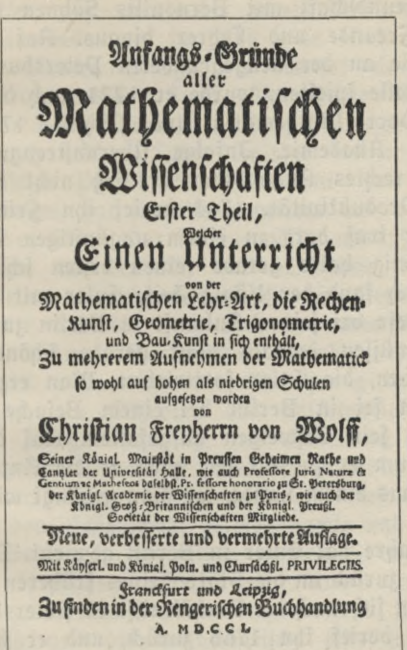
Christian Wolff[1] (1679—1754) entstammte einfachen Verhältnissen und sollte, wie so viele Begabte aus dem Volke, Theologe werden. Durch die Schriften von Descartes und Spinoza aber wurde sein Interesse auf Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaft gelenkt. Er war ein begeisterter Schüler von Leibniz; seine Lebensarbeit bestand darin, die Leibnizsche Philosophie zu verbreiten. Durch Leibniz' Vermittlung wurde er im Alter von 27 Jahren Professor der Mathematik in Halle und sammelte durch seine glänzende Art vorzutragen bald eine begeisterte Gemeinde treuer Schüler um sich. Feinde auf Seiten der Orthodoxie brachten es fertig, ihn auf königlichen Befehl außer Landes zu treiben. Der Landgraf von Hessen bot ihm Asyl und Amt an seiner Universität Marburg. Aber Friedrich II. machte den Fehler seines Vaters wieder gut und setzte den Vertriebenen in alle seine Würden und Ämter wieder ein. Wolff war ein unermüdlicher Schriftsteller und hat eine große Zahl lateinischer und deutscher Bücher geschrieben, die alle in verständlicher Form und wahrhaft epischer Breite die behandelten Dinge darstellen. Solch ein Werk ist auch sein Buch: „Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften“, dessen Titelbild die Fig. 23 zeigt, oder ein anderes „Anfangsgründe der Rechenkunst, Geometrie und Trigonometrie“. Wir nennen weiter von deutschen Gelehrten Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800), der in Leipzig und Göttingen als Professor der Mathematik gewirkt und als erster Deutscher eine „Geschichte der Mathematik“ geschrieben hat.

Von englischen Gelehrten sind zu nennen: James Stirling,

[1] Tafel 12.

Abraham de Moivre, Brook Taylor, Colin Maclaurin, und schließlich noch der Franzose d'Alembert.

Jean Baptiste d'Alembert (1717—1783) hieß eigentlich le Rond, da ihn ein Gendarm auf seinem Rundgang (ronde) als Findelkind aufgelesen hatte. Der aufgeweckte Knabe genoß



Anfangs-Gründe
aller
Mathematischen
Wissenschaften
Erster Theil,
Welcher
Einen Unterricht
von der
Mathematischen Lehr-Art, die Rechen-Kunst, Geometrie, Trigonometrie, und Bau-Kunst in sich enthält,
Zu mehrerem Aufnehmen der Mathematick
so wohl auf hohen als niedrigen Schulen
aufgesetzet worden
von
Christian Freyherrn von Wolff,
Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und Cantzler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ & Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg, der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der Königl. Groß-Britannischen und der Königl. Preußl. Societät der Wissenschaften Mitgliede.
Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.
Mit Käyserl. und Königl. Poln. und Churfächßl. PRIVILEGIIS.
Franckfurt und Leipzig,
Zu finden in der Rengerischen Buchhandlung
A. MDCCL

Fig. 23. Titelblatt eines Buches von Wolff.

eine gute Erziehung, da die Eltern ermittelt wurden und in der Lage waren, die Kosten zu tragen. Er studierte Medizin und Mathematik, war später ein Freund Voltaires und Mitarbeiter an der Enzyklopädie. Als Mitglied der Akademien in Paris und Berlin hatte er großen Einfluß und wurde von Friedrich II. sehr geschätzt. Seine Arbeiten beschäftigen sich hauptsächlich mit der Analysis und insbesondere mit der Theorie der Differentialgleichungen.

2. **Leonhard Euler.** Leonhard Euler[1] (1707—1783) war ein Pfarrerssohn aus Basel. Der Vater hatte auch großes Interesse

[1] Tafel 13.

an der Mathematik und war Schüler Jakob Bernoullis gewesen. Er erzog den Knaben zuerst zu Hause, ließ ihn aber dann mit 16 Jahren nach Basel gehen, wo er unter Johann Bernoulli Mathematik studierte. Neben der Mathematik trieb er noch Physik, Astronomie und Sprachwissenschaften. In enger Freundschaft mit Bernoullis Söhnen wuchs er bald über seine Freunde und Lehrer hinaus. Auf den Rat der Bernoullis, die an der neugegründeten Petersburger Akademie eine große Rolle spielten, wurde er 1724 auch dorthin berufen und lehrte dort Mathematik und Physik. 1730 wurde er Mitglied der Akademie. Infolge Überanstrengung erblindete damals sein rechtes Auge, aber er ließ nicht nach in seiner fabelhaften Produktivität. 1741 berief ihn Friedrich II. nach Berlin. Euler traf dort zu einem ungünstigen Zeitpunkt ein, denn der König hatte gerade seinen ersten schlesischen Krieg begonnen. Doch fand der König Zeit, Euler mit einem liebenswürdigen Briefe bei seiner Ankunft in Berlin zu begrüßen. In Petersburg müssen damals nicht gerade schöne Verhältnisse geherrscht haben, die Euler forttrieben. Man erzählt, der vorsichtige Mann sei in Berlin bei einem Besuche der Königin-Mutter durch sein Schweigen aufgefallen. Auf die Frage der Königin, warum er so still sei, habe er die Antwort gegeben: „Ich komme aus einem Lande, wo man gehängt wird, wenn man spricht."

Über 25 Jahre hat Euler in Berlin gewirkt. Dann aber zog es ihn wieder zurück an die Stätte seines früheren Wirkens. Inzwischen hatten sich auch die Verhältnisse in Petersburg gebessert, Katharina II. berief ihn 1766 zurück, und er kam gern. In Petersburg folgte eine neue Blüte der Akademie, nachdem Euler zurückgekehrt war. Kurz nach seiner Ankunft traf ihn ein neues schweres Unglück, er verlor auch das linke Auge. Aber auch dies harte Schicksal konnte ihn nicht lähmen. Unterstützt von Sekretären arbeitete er unermüdlich weiter und schenkte der Wissenschaft noch manche wertvolle Arbeit. Darunter ist auch das „Lehrbuch der Algebra", das der schulmäßigen Algebra ihre noch heute übliche Form gab. Euler hat eine unglaubliche Produktivität entfaltet. Seine Schriften umfassen nicht weniger als 32 Quartbände und etwa 650 Abhandlungen, die zum größten Teil in den Abhandlungen der Petersburger, der Berliner und der Pariser Akademie erschienen sind.

Die Bedeutung der Persönlichkeit Eulers für die Mathematik im einzelnen zu schildern, ist im Rahmen dieser Schrift unmöglich. Die Menge der von ihm verfaßten Schriften sagt schon genug. Fast zwei Drittel des 18. Jahrhunderts beherrschte er die gesamte mathematische Wissenschaft. Auf allen Gebieten hat er gearbeitet, nicht nur in der reinen Mathematik, sondern auch in den Anwendungen, ja selbst eine Reihe rein technisch mathematischer Werke verfaßt, die ebenso wie seine mathematischen Weltruf genossen. Seine „Theorie des Baues und der Behandlung der Schiffe" wurde in fünf Sprachen übersetzt und brachte ihm auch reichen Lohn. In der reinen Mathematik, der mathematischen Physik, der Astronomie hat er auf allen Gebieten gearbeitet, hat sie alle erweitert und vervollständigt, viele erst neu begründet oder in eine völlig neue Form gegossen. Das gelang ihm nur deshalb, weil er neben seiner genialen Veranlagung einen ungeheuren Fleiß, ein stets zuverlässiges Gedächtnis hatte und die doch noch so neuen Methoden der Analysis mit kühner Meisterschaft handhabte. Von seinen Schriften nennen wir einige, die Einführung in die Analysis des Unendlichen, ein Lehrbuch der Differentialrechnung, ein Lehrbuch der Integralrechnung, die Anleitung zur Algebra.

3. Die Franzosen. Wie Euler neben seinen zahlreichen Arbeiten im Gebiete der reinen Mathematik sich besonders für die Anwendungen der Wissenschaft in Astronomie und Physik interessierte, so haben auch die beiden großen Franzosen, die wir nun noch zu erwähnen haben, ihren Ruhm in erster Linie zwei Werken zu verdanken, die bahnbrechend für die mathematische Physik und die mathematische Astronomie geworden sind. Es sind dies die „Mécanique analytique" von Lagrange und die „Mécanique céleste" von Laplace.

Lagrange[1]. Joseph Louis Lagrange (1736—1813) stammte aus Turin, wohin seine Familie aus Frankreich eingewandert war. Mit 17 Jahren begann er erst sein mathematisches Studium, brachte es in wenigen Jahren in seiner Kenntnis der Wissenschaft so weit, daß er mit 19 Jahren Lehrer an der Artillerieschule in Turin wurde. Als Dreiundzwanzigjähriger schrieb er zwei Aufsätze, die ihm einen begeisterten Brief Eulers einbrachten. 1766 rief ihn Friedrich II. als Nachfolger von Euler zum mathematischen Direktor der Berliner Akademie,

[1] Tafel 14.

wo Lagrange über zwanzig Jahre blieb. In dieser Berliner Zeit schrieb Lagrange die Mehrzahl seiner großen und wichtigen Arbeiten über die Gleichungen, die Differentialgleichungen, Zahlentheorie und Variationsrechnung; auch die analytische Mechanik ist dort entstanden, wenn auch ihre Veröffentlichung erst nach seinem Weggange von Berlin erfolgte. 1787, ein Jahr nach dem Tode des großen Königs verließ Lagrange Berlin, um nach Paris zu gehen. Zwei Jahre später brach dort die Revolution aus. Alle Fremden wurden des Landes verwiesen, nur Lagrange erhielt wegen seiner Verdienste die Erlaubnis zu bleiben. Es gefiel ihm aber nicht mehr in Frankreich, er war im Begriff, das Land wieder zu verlassen. Da erfolgte in Paris die Gründung der „Ecole normale" und kurz darauf die der „Ecole polytechnique". An beiden sah Lagrange eine neue Lebensaufgabe winken. Ihm ist es nicht zum wenigsten zu verdanken, wenn in beiden Schulen die Mathematik solch eine hervorragende Rolle spielte. Napoleon ehrte den großen Forscher durch die Ernennung zum Senator und Erhebung zum Grafen, den Sturz des Kaisers erlebte Lagrange nicht mehr, er starb am 10. April 1813.

Pierre Simon de Laplace[1] (1749—1827) ist der Nachwelt bekannter geworden als Lagrange durch die Verbindung seines Namens mit dem Kants in dem Begriff „Kant-Laplacesche Theorie". Laplace ist einer der wenigen großen Männer in der Geschichte der Mathematik, die als Charakter wenig sympathische Züge haben. Es mag sein, daß eine harte Jugend ihn zum Verächter gewisser Begriffe bürgerlicher Gesinnung gemacht hatte. Sein Vater war ein kleiner Bauer, nur mit großer Mühe konnte sich der Knabe die Zeit stehlen, um seinen nach Wissen brennenden Geist zu befriedigen. Doch gelang es ihm schließlich, die Militärschule seines Heimatortes Beaumont-en-Auge zu besuchen. Dank seiner hervorragenden Begabung wurde der Schüler zum Lehrer an dieser Schule. Aber sein Ehrgeiz trieb ihn weiter. Er kam nach Paris. D'Alembert, der damals auf der Höhe seiner Macht stand, wies den zudringlichen Jüngling aus der Provinz ab. Aus einem Briefe, den ihm dieser schrieb, erkannte er aber, daß hier ein ganz besonders begabter Mensch aus innerem Antrieb zur Wissenschaft komme. Durch d'Alemberts Bemühungen wurde er zum Professor an der Ecole normale

[1] Tafel 15.

und der Ecole polytechnique gemacht. Die dort erworbene Stellung gab ihm solch ein Ansehen, daß ihn Napoleon nach dem Staatsstreich zum Minister des Inneren machte. Sein völliges Versagen in dieser Stellung veranlaßte Napoleon, der ihn schon nach sechs Monaten wieder entließ, zu dem Witz: „Er habe in die Politik den Geist des Unendlichkleinen gebracht".

In seiner Mécanique céleste schuf Laplace eine Theorie der Weltbildung, die aus einem verständlichen Prinzip heraus die Entstehung unseres Planetensystems erklärte. Nach echt französischer Art genügte es ihm aber nicht, bei den Fachleuten bekannt zu sein, er wollte auch der Nation bekannt sein. So entstand neben dem wissenschaftlichen Werk das für die Allgemeinheit bestimmte „Exposition du Système du monde", das in glänzender Sprache und Darstellung den Verfasser in der Nicht-Fachwelt bekannt machte und ihm vielen Erfolg brachte, auch in Deutschland, weil sich seine Theorie mit der Kants berührte. Neben diesen Hauptwerken schrieb er noch eine Anzahl mathematischer Werke, deren bekanntestes die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, und zwar deshalb, weil er ebenso wie bei der Himmelsmechanik gleichzeitig ein allgemeinverständliches philosophisches Werk über denselben Gegenstand herausgab.

Wir nennen schließlich noch den als Fachmathematiker nicht minder bedeutenden Adrien-Marie Legendre (1752 bis 1833). Legendre hat sich auf allen Gebieten der Fachmathematik mit großem Erfolge betätigt, aber im Schatten von Gauß, der die gleichen Probleme mit größerer Tiefe und besserem Erfolge behandelt hat. Am bekanntesten ist Legendre geworden durch sein Lehrbuch der Geometrie, das lange Zeit als eines der besten Lehrbücher auf diesem Gebiete galt.

IV. Gauß

An der Schwelle des neunzehnten Jahrhunderts haben wir noch in Carl Friedrich Gauß[1] einen der bedeutendsten mathematischen Köpfe aller Zeiten zu würdigen, und wir dürfen mit Stolz sagen, daß er ein Deutscher war. Auf fast allen Gebieten der Mathematik hat Gauß die Grundlagen der mathematischen Arbeit für das 19. Jahrhundert geschaffen. Die Funktionentheorie, die exakte Behandlung der Anwendungen, die neue

[1] Tafel 1.

Zahlentheorie, die nichteuklidische Geometrie, fast alles geht auf seine Arbeiten zurück oder ist von ihm so wesentlich gefördert, daß eine fast neue Wissenschaft entstand. Er ist geboren 1777 in Braunschweig. Auch er war wie Laplace der Sohn kleiner Leute und konnte sich wie dieser nur mühsam die Zeit stehlen, um seine Wißbegier nach Zahlen und Rechnen zu befriedigen. Eine Reihe von Anekdoten ist aus seinen ersten Kinderjahren überliefert, die den erwachenden Genius zeigen:

„Der ehrsame Schulmeister Büttner an der Katharinenvolksschule in Braunschweig, der die Rechenklasse leitete, gab einst die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 der Reihe nach aufzuschreiben und zu addieren. Kaum war die Aufgabe gestellt, da schrieb der kleine Gauß die Lösung auf die Tafel, legte diese auf den Tisch und rief echt braunschweigisch: „Ligget se!" Der Lehrer lächelte über den Kleinen, der so schnell ein Resultat gefunden haben wollte, daß allen anderen so große Mühe machte. Aber die Nachprüfung ergab, daß der kleine Gauß als einziger das richtige Ergebnis hatte Auch sein Verfahren konnte er auseinandersetzen. Er zeigte $100 + 1 = 101$; $99 + 2 = 101$; $98 + 3 = 101$ usw. Man kann aus den hundert Zahlen 50 Paare bilden, also $50 \cdot 101 = 5050$."[1]

Durch Empfehlungen seiner Lehrer wurde es ihm ermöglicht, das Gymnasium in Braunschweig zu besuchen. In wenigen Jahren machte er als Vierzehnjähriger das Abitur. Schon in seiner Gymnasiastenzeit hat Gauß jene unheimliche Ausdauer und Übung im Zahlenrechnen erworben, die den Grund für seine späteren Arbeitsmethoden legte. Gauß machte nämlich, wie wir heute aus seinen hinterlassenen Papieren wissen, seine mathematischen Entdeckungen induktiv, gewissermaßen durch Experimente mit den Zahlen. Er fand zunächst in einer Fülle numerischer Beispiele das allgemeine Gesetz, um es nachher erst allgemein zu beweisen. Das Studium in Göttingen bot ihm nicht viel Anregung, und Gauß dachte ernstlich daran, sich der klassischen Philologie zu widmen. Da gelang ihm noch als Student ein ganz großer Wurf. Er fand, daß das regelmäßige Siebzehneck sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lasse. Zweitausend Jahre war die Lehre von den regelmäßigen Vielecken nicht weiter gekommen, und hier fand ein Neunzehnjähriger einen solchen Satz! Bald darauf gelang es ihm auch, allgemein zu zeigen, welche Vielecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar seien. Es ist typisch für ihn, wie sich die verschiedensten Ge-

[1] Nacherzählt nach Mathé, Karl Friedrich Gauß, Leipzig 1906 = Männer der Wissenschaft, Heft 6.

biete der Mathematik in seinem Denken vereinigten. Das Ergebnis war, daß nur der zahlentheoretische Charakter der Zahl n die Konstruierbarkeit bestimme. Ist n eine Primzahl und von der Form $n = 2^m + 1$, wo $m = 2^k$, so ist das Vieleck mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Diese erste Tat, von der sein Gönner Zimmermann in dem „Jenenser Intelligenzblatt" 1796 Mitteilung machte, lag schon im Rahmen der Studien, die Gauß damals beschäftigten, und im Jahre 1801 zur Herausgabe seines großen zahlentheoretischen Werkes der „Disquistiones arithmeticae" (arithmetische Untersuchungen) führte. Inzwischen hatte er noch mit einer Dissertation über den Fundamentalsatz der Algebra in Helmstedt promoviert. In den Disquisitiones gab Gauß, ohne seine Vorgänger Euler, Lagrange, Legendre zu kennen, eine vollständig neue Zahlentheorie, die bestimmend für die weitere Entwicklung geworden ist.

In den Jahren 1798—1807 lebte Gauß als Privatgelehrter in Braunschweig, stets gefördert von dem Herzog, der ihm sehr gewogen war, was Gauß später nie vergaß. Seine Dankbarkeit ging so weit, daß er alle späteren Versuche, ihn von der Universität Göttingen anderswohin zu holen, ablehnte. Im Jahre 1807, nach dem Tode des Herzogs, wurde er zum Direktor der Sternwarte in Göttingen ernannt, wo er bis zu seinem Tode blieb. Im ersten Jahrzehnt dieser Tätigkeit beschäftigte ihn das große Problem der Bahnbestimmung der Planeten, das seinen Niederschlag fand in dem zweiten Standardwerk, das er der Wissenschaft schenkte: „Theoria motus corporum coelestium" (Theorie der Bewegung der Himmelskörper). Um 1828/30 machte von Berlin aus auf Betreiben Alexanders von Humboldt der Bruder Wilhelm wiederholt den Versuch, Gauß nach Berlin zu berufen. Da die Verhältnisse in Göttingen damals sehr unerquicklich waren — Gauß hatte lange kein Gehalt erhalten, die Sternwarte war kümmerlich ausgestattet — so glaubte man, er würde seinem Herzogshause untreu werden. Aber er blieb. Man vergleiche dies mit dem Verhalten von Laplace.

In dem Jahrzehnt von 1830/40 hat Gauß seine Arbeitskraft in erster Linie der Vermessung Hannovers gewidmet. Diese ist besonders deshalb bekannt, weil er durch die denkbar genaue Vermessung des Dreiecks Hoher Hagen—Brocken—Inselsberg eine experimentelle Bestätigung für seine erst viel später an den

Tag gekommenen geometrischen Gedanken zu finden glaubte. In vieler Beziehung ist die manchmal recht mühsame Arbeit für ihn außerordentlich fruchtbar geworden. Er konnte die schon lange von ihm gefundene „Methode der kleinsten Quadrate“ vielfältig erproben; rein wissenschaftliche Früchte dieser Arbeit sind die Grundlegung der Theorie der konformen Abbildung und der Flächentheorie. Daneben förderte er durch diese beiden Arbeiten wieder die theoretischen Grundlagen der Kartenlehre. Auf der Naturforscherversammlung 1828 in Berlin hatte Gauß den Physiker Wilhelm Weber kennengelernt, und es war ihm gelungen, diesen nach Göttingen zu ziehen. In gemeinsamer Arbeit haben beide dann die Lehre vom Erdmagnetismus begründet.

Die wissenschaftlich revolutionärste Tat von Gauß war die Begründung der nicht-euklidischen Geometrie. Schon seit 1792 hatte er sich bemüht, das Parallelenpostulat zu beweisen. Im Laufe seines Nachdenkens wurde es ihm klar, daß man auch ohne dieses Postulat eine widerspruchsfreie Geometrie aufbauen könne. Diese Erkenntnis wurde ihm um so leichter, als er die Geometrie als Erfahrungswissenschaft ansah, wie er ja auch durch seine Dreiecksmessung eine Entscheidung in dieser Frage zu finden glaubte. Über seine Gedanken hat er nichts veröffentlicht. Er fürchtete die „Wespen“ und „das Geschrei der Böotier“. Als er für seine Ideen die Zustimmung Bessels fand, der die Gedanken gleich auf die Erdfiguren übertrug, war er hocherfreut. Später fanden dann der Sohn von Gauß' Jugendfreund Bolyai und der Russe Lobatscheffsky unabhängig von Gauß die gleichen Gedanken. Wir wissen aus dem Briefwechsel Gauß' mit seinen Freunden, daß er sich früher als diese beiden mit dem Gedanken einer vom Parallelenpostulat unabhängigen Geometrie beschäftigt hat.

Rastlos tätig ist der „Princeps mathematicorum“, wie er auf einer Denkmünze des Königs von Hannover genannt wurde, 1855 gestorben.

Wir sind am Ende unserer Betrachtung. Das beginnende 19. Jahrhundert bringt eine solche weitere Zersplitterung der Wissenschaft, daß die Schwierigkeiten, dem nicht mit der mathematischen Zeichensprache vertrauten Laien ein Bild der Entwicklung zu geben, zu groß sind. Auch dürften angesichts der Fülle der Erscheinungen die wesentlichen Züge der Entwicklung noch nicht klar genug heraustreten.

Wir glauben gezeigt zu haben, daß die Mathematik als die Wissenschaft von der Gesetzmäßigkeit in Zahl und Raum aufs engste mit der allgemeinen geistigen Entwicklung zusammenhängt. Es gilt immer noch der Kantische Gedanke, daß in aller Metaphysik nur soviel wahre Wissenschaft sei, als Mathematik darin sei. Von den Pythagoreern an, die in der Zahl, das heißt dem zahlenmäßig erfaßbaren Gesetz, das Wesen der Welt sahen, über Platon, Euklid, Archimedes, Descartes, Newton, Leibniz und Euler sind alle großen Mathematiker auch Förderer der allgemeinen Erkenntnis gewesen. Sie alle haben in demütiger Bescheidenheit stets erkannt und bekannt, daß die geheimnisvolle Ordnung des „Kosmos“ nur erkennbar sei durch die Zahl, eine Tatsache, die Gauß in dem kurzen, aber um so eindringlicheren Satz zusammenzufassen pflegte:

„Gott rechnet“.

Literatur.

Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides. Leipzig 1870.

Braunmühl, Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometri, Leipzig I/II, 1900/03.

Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. I/IV, 1880/1908.

Günther/Wieleitner, Geschichte der Mathematik. I/II, Leipzig 1908/21.

Hankel, Zur Gesch. d. M. in Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874.

Heath, A History of Greek Mathematics, III. Cambridge 1921.

Hoppe, Mathematik u. Astronomie im klassischen Altertum. Heidelberg 1911.

Klein, Vorl. ü. d. Entwicklung d. Math. im 19. Jahrhundert I, Berlin 1926.

Lietzmann, Überblick über die Gesch. d. Elem. Math. Leipzig 1926.

Smith, History of Mathematics I/II. Boston 1923/25.

Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Zürich 1875.

Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik I/VII, Berlin/Leipzig 1921/24.

Wieleitner, Geschichte der Mathematik I/II. Leipzig 1922/23.

Wieleitner, Die Geburt der modernen Mathematik. Karlsruhe 1924/25.

Zeuthen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Leipzig 1903.

Namenverzeichnis

Romane und Erzählungen

KARL GJELLERUP

Der goldene Zweig. Dichtung und Novellenkranz aus der Zeit des Kaisers Tiberius. 17. bis 19. Tausend. Gebunden M. 5.— ★

„Es ist eine tiefe, musische Dichtung, ein Siegesgesang auf den Zusammenbruch des morschen Römerreichs und die aufsteigende Morgenröte des Germanentums."
Velhagen & Klasings Monatshefte

Antigonos. Ein Roman aus dem zweiten Jahrhundert. 4. bis 6. Tausend. Gebunden M. 4.— ★

Orient, Griechenland, Rom sind die Erlebnisstätten der Dichtung. Mit ihrem Geiste muß sich Antigonos auseinandersetzen, bis ihn innere Notwendigkeit dem Christentum zuführt.

Die Hirtin und der Hinkende. Ein arkadisches Idyll. 3. Aufl. Geb. M. 4.40

„Gjellerup hat eine Novelle gedichtet, wie sie nur Mozart in der Musik ausdrücken konnte. Die lieblichste Grazie, Schelmerei, Liebestorheit, Kummer und Lust hat er zu einem Strauß zusammengerafft."
Propyläen

Die Gottesfreundin. Roman. 13. bis 15. Tausend. Gebunden M. 5.—

„Wie die Herrin der Burg Langenstein den Führer der ‚Ketzer' schützt und wie der zelotische Bischof Ottmar vom Saulus zum Paulus wird und mit der Burgherrin als sieghafter Besiegter in den Tod geht, das wird uns in hochdramatischer, von dichterischem Schwung beseelter Darstellung berichtet."
Berliner Morgenzeitung

Die Weltwanderer. Romandichtung. 19. bis 23. Tausend. Geb. M. 7.—

„Die Weltwanderer, eins der buddhistischen Bücher des Dichter-Weisen, ein Epos aus Indien, gehören zu dem unsterblichen Gjellerup."
Literarisches Echo

Reif für das Leben. Roman in fünf Büchern. 8. bis 11. Tauf. Geb. M. 5.—

„Künstlerisch ein Meisterwerk und geistig ein Quell reifer Gedanken, wird dieser Roman allen ein Erlebnis sein."
Berliner Morgenzeitung

Das heiligste Tier. Ein elysisches Fabelbuch. 6. bis 8. Tausend. Geb. M. 5.—

„Es ist des Dichters schönstes Werk. Ein Füllhorn schüttet er aus. Es ist ein Jubel und Dank in mir, so von einer kulturgeschichtlichen Bedeutsamkeit zur anderen geleitet zu werden, aus der Antike in die Neuzeit, vom Orient ins Abendland."
Tägliche Rundschau

Seit ich zuerst sie sah. 13. bis 15. Tausend. Gebunden M. 5.— ★

„Dieses schöne Idyll mit seinem tragischen Ausgang ist eins der wundervollsten Werke Gjellerups. Ein ganzer Liebesfrühling ist hier in die Stimmungsbilder aus Dresden und aus der Sächsischen Schweiz hineingezaubert."
Aarhus Stiftstidende

Die Hügelmühle. Roman in fünf Büchern. 4. Auflage. Geb. M. 7.—

„In streng dramatischem Aufbau steigt die Handlung empor. Jede Gestalt atmet Wirklichkeit. Eine drückende Schwüle liegt über der Erzählung der ersten vier Bücher. Und die Sühne im fünften Buche ist so grausig erhaben, daß kein Abflauen der Handlung spürbar wird."
Wartburg

An der Grenze. Roman. 6. bis 10. Tausend. Gebunden M. 4.— ★

„Dies ist eine wunderhübsche kleine Geschichte. Hier hat der Dichter die dänische Heimat eingefangen; die kleine Stadt, mit aller Enge und Verknöcherung, die Leute ‚an der Grenze', die nicht den Mut haben, hinauszusegeln aufs weite Meer."
Literarische Rundschau

Madonna della laguna. Eine venetianische Künstlergeschichte. 5. bis 9. Tausend. Gebunden M. 3.—

„Eine von heißem Atem durchpulste, von südlicher Leichtblütigkeit getragene Künstlergeschichte aus Altvenedig."
Germania