
Elektro-technische
BIBLIOTHEK.
LVIII. Band.
Wechselstromtechnik.
I. Band.
Der einphasige Wechselstrom.
A. Hartleben's Verlag.
WIEN UND LEIPZIG.

Wechselstromtechnik.

I. Band.

Der einphasige Wechselstrom.

Von

M. T. ZSAKULA
dipl. Maschineningenieur, Assistent an der techn. Hochschule in Budapest.

Mit 84 Abbildungen.

WIEN und LEIPZIG.
A. HARTLEBEN'S VERLAG.
1904.

K. u. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

Vorwort.

Anregung zum Schaffen dieses Werkes gab das Ersuchen, welches die Verlagsbuchhandlung an mich richtete, um die „Elektro-technische Bibliothek" vervollständigen zu können. Ich kam diesem Ersuchen gerne nach, da die „Elektro-technische Bibliothek" eine Lücke in der Hinsicht aufwies, daß in ihr bisher kein einziges Werk die Wechselstromerscheinungen ausführlich behandelte. Bei der eminenten Wichtigkeit des Wechselstromes in der so mächtig entwickelten Elektrotechnik ließ sich diese Lücke immer stärker verspüren, weshalb ich hoffe, daß mit vorliegendem Werke diesem Mangel abgeholfen und dem Leserkreise dieser Sammlung gedient wurde. Ist dies der Fall, dann habe ich mein Ziel erreicht.

Die größte Entwicklung in der Elektrotechnik konnte man in den letzten Jahren auf dem Gebiete der Wechselströme finden. Die großartigen Probleme der elektrischen Arbeitsübertragungen, die elektrische Traktion etc. sind nur mit Hilfe der Wechselströme zu lösen, es ist daher für jeden, der sich mit Elektrotechnik befaßt, unbedingt nötig, sich mit den Fortschritten auf diesem Gebiete vertraut zu machen.

Es war deshalb in diesem Werke mein Bestreben dahin gerichtet, ein möglichst klares Bild vom heutigen Stande der Wechselstromtechnik zu geben. Natürlich konnte ich mathematische Ableitungen der Resultate nicht unberücksichtigt lassen, doch hoffe ich, daß dieser Umstand nur nützlich wirken kann. Das Studium der Erscheinungen verursacht in dieser Weise etwas mehr Mühe, doch wird diese Mühe durch das bessere Verständnis und die klarere Übersicht der Verhältnisse reich entschädigt.

Der erste Band behandelt den einphasigen Wechselstrom, seine Gesetze und jene Probleme, welche bei den verschiedenen Schaltungen der Ohmschen induktiven Widerstände und Kapazität sich ergeben. Dies sind grundlegende Begriffe, mit welchen die zuweilen eigentümlichen Verhältnisse in Wechselstromkreisen am besten überblickt werden können.

Der zweite Band hat die Mehrphasenströme zum Gegenstand. In diesem Bande habe ich auch die Wechselstromleitungen behandelt, wenn auch wegen Raummangels in etwas gedrängter Weise. Das Studium des ersten Bandes kann für das Verständnis des zweiten nur von Nutzen sein.

Endlich ist der dritte und der vierte Band den Wechselstromgeneratoren, Transformatoren und Motoren gewidmet. Ich habe hier auf eine erschöpfende Beschreibung der Maschinentypen verzichtet und das Hauptgewicht darauf gelegt, daß das Verständnis ihrer Wirkungsweise und Betriebseigenschaften möglichst erleichtert wird.

Eine Formelsammlung am Ende jedes Bandes soll die Übersichtlichkeit des behandelten Stoffes erleichtern.

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht übrig, der Verlagsbuchhandlung für ihr Entgegenkommen meinen besten Dank auszudrücken.

M. T. Zsakula.

Inhalt.

I. Kapitel.

Die Induktion.

In der Geschichte der Elektrotechnik ist das Jahr 1831 von großer Bedeutung. In diesem Jahre entdeckte Michael Faraday die Induktion. Diese Entdeckung war keine zufällige, sie war vielmehr die Frucht langandauernder und schwieriger Forschungsarbeit. Es war schon früher bekannt, daß elektrische Ströme Magnetismus erzeugen, man konnte in jener Zeit schon starke Elektromagnete herstellen, doch die Umkehrung der magnetischen Wirkung, nämlich die Gegenwirkung eines Magnets auf einen Leiter zu beweisen, gelang vielen Naturforschern vor Faraday nicht.

Faraday bewickelte eine Holzspule mit langem isolierten Kupferdraht spiralförmig, und brachte auf dieselbe Spule eine andere, zwischen den Windungen des ersten Drahtes liegende und von derselben völlig isolierte zweite Drahtlage an. Die Enden der ersten Bewickelung wurden nebst einem Stromunterbrecher mit den beiden Polen einer kräftigen Elektrizitätsquelle verbunden, während die Enden des zweiten Drahtes zu einem empfindlichen Galvanometer führten. Er bemerkte, daß in dem Augenblicke als Strom in die erste Spirale geschickt wurde, das mit der zweiten Spirale verbundene Galvanometer einen Ausschlag gab, jedoch sofort in seine frühere Ruhelage zurückkehrte. Dasselbe fand er, als er den Strom unterbrach, nur war der Ausschlag des Galvanometers ein dem ersteren entgegengesetzter. Solange der Strom im geschlossenen Kreise konstant blieb, konnte er im Galvanometerkreise keinen Strom konstatieren.

Aus diesem Versuche geht hervor, daß der im ersten Drahte fließende elektrische Strom auf den zweiten Draht in der Weise wirkte, daß er bei jeder Einschaltung und Unterbrechung in denselben einen anderen elektrischen Strom hervorrief, welcher alsdann die Nadel des Galvanometers ablenkte. Diese Erscheinung nennt man Induktion.

Die Induktionserscheinungen können aber auch in einer anderen Weise hervorgerufen werden. Man kann die Spule nur mit einem Drahte bewickeln, nur muß sie hohl sein, um einen Magnetstab aufnehmen zu können. Wenn man nun die Drahtenden mit einem Galvanometer verbindet und rasch einen starken permanenten Magnet in die Spule schiebt, zeigt das Galvanometer einen Ausschlag, gerade so wie im ersten Falle bei Schließen des Stromkreises. Wird der Magnetstab entfernt, schlägt die Nadel des Galvanometers nach der entgegengesetzten Richtung aus.

Demgemäß unterscheidet man Induktion durch elektrische Ströme und durch Magnete oder Voltainduktion und Magnetinduktion. Bei der ersten wird die Induktion durch einen elektrischen Strom, bei der zweiten durch einen Magneten hervorgerufen.

Der Versuch Faradays läßt sich mit der in Fig. 1 dargestellten Anordnung in anschaulicher Weise bewerkstelligen. Der Induktionsapparat besteht aus zwei selbständigen Spulen, welche ineinander geschoben werden können. Die Spule *P* ist mit der Stromquelle *E* verbunden, während zur Spule *S* ein Galvanometer *G* geschaltet wird. In *P* fließt also ein kontinuierlicher Strom, welcher zur Demonstration der Induktionserscheinungen benutzt werden kann. Taucht man nämlich *P* in die Spule *S*, dann wirkt der Strom auf die Windungen des letzteren und es entsteht eine zweite elektrische Strömung, deren Vorhandensein durch die Ablenkung der Galvanometernadel angezeigt wird. Wird *P* aus *S* herausgezogen, entsteht ein zweiter Strom, jedoch in entgegengesetzter Richtung.

Bei dieser Anordnung spielt aber die stromdurchflossene Spule dieselbe Rolle als bei der vorhergehenden der permanente Magnet. Nachdem aber ein Magnet immer als ein solcher Körper betrachtet werden kann, den kontinuierliche Ströme fortwährend umkreisen, kann die Magnetinduktion auch als eine Voltainduktion aufgefaßt werden. Nach Ampères Hypothese ist ein Magnet ein ganzes System elektrischer Elementarströme, welche in parallelen Kreisen um alle Moleküle des magnetischen Körpers kreisen. In diesem Sinne aufgefaßt, ist der die Induktion hervorrufende permanente Magnetstab tatsächlich mit der Spule *P* identisch.

Die Ursache der Induktionserscheinung nennt man Induktor. Induktor kann also ein elektrischer Strom oder ein permanenter Magnet sein. Der durch die Induktion entstandene Strom heißt induzierter Strom, der Stromkreis, welcher die Induktionserscheinung hervorruft, wird induzierender oder primärer Stromkreis, der den induzierten Strom führende Stromkreis aber induzierter oder sekundärer Stromkreis genannt. Es kann also auch von primären und sekundären Strömen gesprochen werden.

Wir können nunmehr zur weiteren Untersuchung der induzierten Ströme übergehen.

Am Anfange dieses Kapitels sahen wir, daß der induzierte Strom durch das Galvanometer nur dann angezeigt wurde, wenn der Stromkreis des primären Stromes geschlossen oder unterbrochen wird. In der Zwischenzeit, während welcher der primäre Strom durch die primären Drahtwindungen kontinuierlich floß, konnte keine Induktionserscheinung konstatiert werden. Bei Schließen des primären Stromkreises ist der ursprüngliche Wert des primären Stromes Null, dann wächst seine Intensität bis auf jenen Wert hinauf, welcher der Größe der wirkenden elektromotorischen Kraft und des Gesamtwiderstandes des primären Stromkreises entspricht. Während dieses Zeitraumes ist also die Stärke des Stromes veränderlich und fällt die Dauer des induzierten oder sekundären Stromes mit diesem Zeitraume zusammen. Nachher bleibt die Stärke des primären Stromes konstant, auch hört damit die weitere Induktionswirkung auf.

Wird der primäre Strom unterbrochen, dann muß die Stärke des Stromes von seinem obengenannten normalen Werte auf Null sinken. In dieser Zeitperiode ist also die primäre Stromstärke abermals veränderlich, nur im entgegengesetzten Sinne, als bei Schließen des Stromkreises. Nun kann man wieder durch die entgegengesetzte Ablenkung der Galvanometernadel auf das Vorhandensein eines sekundären Stromes schließen.

Aus diesen Ausführungen geht hervor, daß bei der Voltainduktion induzierte Ströme nur dann entstehen können, wenn die Stärke des primären Stromes sich verändert. Nun kann man aber diese Stromstärke durch Verändern von in diesen Stromkreis geschalteten Widerständen beliebig verändern und dadurch Induktionswirkungen hervorrufen, ohne den primären Stromkreis unterbrechen zu müssen. In der Tat finden wir, daß auch bei solcher Durchführung des Versuches Induktionsströme auftreten, weshalb folgendes Gesetz aufgestellt werden kann:

Wird bei der Voltainduktion die Stärke des induzierenden Stromes verändert, entsteht im sekundären Stromkreise ein Strom, dessen Dauer mit der Dauer der Stromstärkeänderung im primären Stromkreise gleich ist.

Dasselbe gilt auch für den Fall, wenn man bei der in Fig. 1 veranschaulichten Versuchsanordnung bei konstanter primärer Stromstärke die Spule *P* bewegt. Steht die Spule still, oder richtiger ist die relative Bewegung der Spulen *P* und *S* Null, hört jede Induktionserscheinung auf. Bei jeder Bewegung der einen Spule entsteht ein induzierter Strom, dessen Dauer mit der Bewegungsdauer der Spule gleich ist.

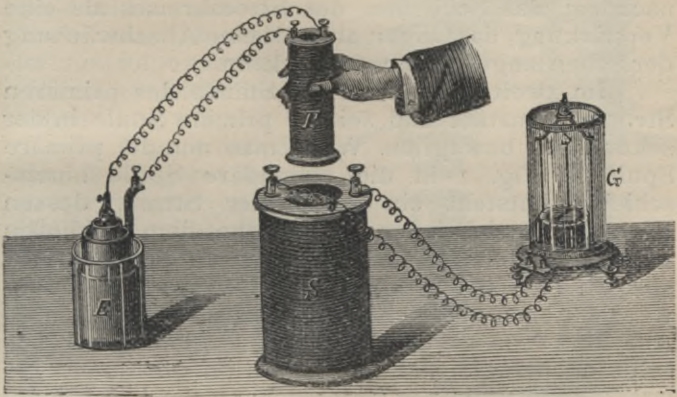

Fig. 1.

Es ist nun einleuchtend, daß sich diese Verhältnisse nicht ändern, wenn man anstatt der Spule *P* in der Spule *S* einen permanenten Magnet bewegt, da die stromdurchflossene Spule *P* selbst als ein Magnet betrachtet werden kann und umgekehrt.

Betrachten wir während diesen Experimenten die Galvanometernadel, so sehen wir, daß sie bald rechts, bald links von ihrer Ruhelage abweicht. Da dies nur bei veränderten Stromrichtungen geschehen kann, muß der die Wickelung des Galvanometers durchfließende induzierte Strom seine Richtung auch wechseln. Es zeigte sich, daß wenn der Stromkreis geschlossen oder wenn bei geschlossenem Stromkreise die Stärke des primären Stromes erhöht wurde, die Galvanometernadel immer nach derselben Seite von ihrer Ruhelage auswich, und bei Öffnen oder Schwächen des primären Stromes immer einen der früher erwähnten entgegengesetzten Ausschlag gab. Die Richtung des induzierten Stromes hängt also davon ab, ob der primäre Strom gestärkt oder geschwächt wird, nachdem das Schließen des Stromkreises als eine Verstärkung, das Öffnen aber als eine Abschwächung derselben angesehen werden kann.

Im zweiten Falle sei die Stärke des primären Stromes konstant und sei die primäre Spule in der sekundären beweglich. Wenn man nun die primäre Spule in Fig. 1 in die sekundäre Spule hineinschiebt, entsteht ein induzierter Strom, dessen Richtung gleich jener ist, welche dem Schließen oder dem Verstärken des primären Stromes entspricht. Bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung wechselt auch die Richtung des sekundären Stromes. Aus dem Vorausgesagten folgt zugleich, daß dasselbe auch für die Magnetinduktion gilt.

Zur vollständigen Untersuchung des Induktionsstromes gehört noch die Untersuchung der Richtungen des induzierten, sekundären Stromes. Aus den beschriebenen Experimenten konnte man feststellen, daß die Richtung des induzierten Stromes beim Schließen und Öffnen des induzierenden Stromkreises beziehungsweise bei Nähern und Entfernen des permanenten Magnets oder der stromdurchflossenen Spule sich ändert. Betrachten wir zunächst den Fall, wenn der Stromkreis geschlossen wird, dann zeigt es sich, daß der induzierte Strom eine dem induzierenden Strome entgegengesetzte Richtung hat. Dasselbe ist der Fall, wenn die stromdurchflossene Spule sich der sekundären Spule nähert oder wenn die Stärke des primären Stromes anwächst. Wird dagegen der primäre Stromkreis unterbrochen, oder die Stromstärke im primären Kreise geschwächt oder endlich die Spule von der sekundären Spule entfernt, dann entsteht ein induzierter Strom, welcher dem Schließungsinduktionsstrom entgegengesetzt ist, d. h. dessen Richtung mit der Richtung des induzierenden Stromes übereinstimmt.

Daß für die Magnetinduktion dieselben Verhältnisse bestehen, ist aus folgenden Ausführungen leicht einzusehen.

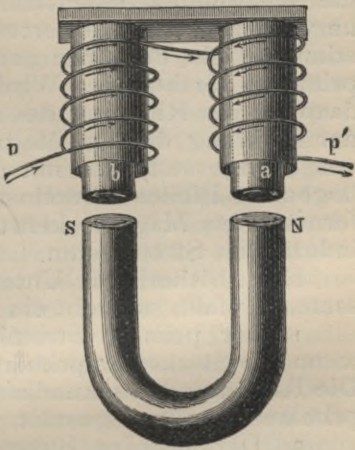

Fig. 2.

In Fig. 2 ist *SN* ein kräftiger permanenter Magnet. Seinen Polen gegenüberstehen zwei Eisenkerne *a* und *b*, auf welche einige Windungen isolierten Kupferdrahtes *p p'* aufgewunden sind. Die Eisenkerne sind mit einem Schlußstück versehen, so daß bei Anlegen des permanenten Magnets an die beiden Eisenkerne ein ununterbrochener magnetischer Kreis entsteht. Wird ein Eisenkern mit Windungen versehen und ihm dann ein Magnet genähert, dann verhält sich der Eisenkern infolge magnetischer Verteilung gerade so als ein permanenter Magnet. Nachdem wie oben gesagt, diesen Eisenkern Windungen umgeben, entstehen bei jeder Annäherung und Enfernung des permanenten Magnets in den Windungen induzierte Ströme, da der Eisenkern bald magnetisch wird und bald seinen Magnetismus verliert.

Die Annäherung des Magnets entspricht jenem Falle, bei welchem in eine Drahtspule ein Magnet eingeführt wird. Der permanente Magnet verhält sich aber gerade so wie die öfters erwähnte stromdurchflossene Spule und daß dann beim Südpole die Stromrichtung mit jener des eingezeichneten Pfeiles übereinstimmen muß, ist einleuchtend.

Nach diesen Ausführungen können wir nun die Richtungen der durch die Magnetinduktion hervorgerufenen induzierten Ströme gerade so bestimmen, als bei einer genäherten und entfernten primären Drahtspule. Wird der Magnet genähert, dann ist die Richtung des induzierten Stromes mit der Richtung des den Magnet ersetzenden Stromes entgegengesetzt, also mit der Richtung des bei *p* liegenden Pfeiles übereinstimmend. Bei der Entfernung des Magnets kehrt auch die Richtung des induzierten Stromes um.

Die bisherigen Untersuchungsresultate zusammengefaßt, entsteht ein Induktionsstrom, wenn:

1. Der primäre Stromkreis geschlossen oder wenn die Stärke des primären Stromes erhöht wird. Die Richtung des sekundären Stromes ist jener des primären entgegengesetzt.

2. Der primäre Strom geschwächt oder der primäre Stromkreis ganz unterbrochen wird. In diesem Falle ist die Richtung der beiden Ströme miteinander übereinstimmend.

3. Dem sekundären Leiterkreise der primäre Stromkreis genähert wird. Richtung des Stromes wie bei 1.

4. Der primäre Stromkreis vom sekundären entfernt wird. Richtung des Stromes wie bei 2.

Mit 3. und 4. ist die Magnetinduktion analog.

Der induzierte Strom zirkuliert also entweder in entgegengesetzter oder in gleicher Richtung mit dem induzierenden Strome. Der sekundäre Strom hat aber auch alle Eigenschaften des primären

Stromes, er erzeugt Wärme im sekundären Stromkreise, es entstehen Licht- und magnetische Wirkungen etc. Uns interessieren vorderhand nur die magnetischen Wirkungen des induzierten Stromes.

Eine jede stromdurchflossene Leitung erzeugt ein magnetisches Feld, dessen Polarität von der Richtung des Stromes abhängt. Ströme von gleicher Richtung rufen dieselbe magnetische Polarität hervor, unterstützen sich also in ihren Wirkungen. Der induzierte Strom hat aber bei Schließen oder Verstärken des primären Stromes eine, dem letzteren entgegengesetzte Richtung, muß also eine solche magnetische Wirkung haben, welche jener des induzierenden Stromes entgegengesetzt ist, mithin muß eine Abschwächung des bereits vorhanden gewesenen magnetischen Feldes stattfinden. Bei einer Disposition, bei welcher der primäre Strom eine bewegliche Spule durchfließt (Fig. 1), hat bei Näherung der Spule zum induzierten Stromkreise eine solche Wirkung stattgefunden, daß der sekundäre Strom die Bewegung der primären Drahtspule hindert. Wenn also im primären Stromkreise der Strom ein solches magnetisches Feld erzeugt, dessen Nordpol nach unten gerichtet ist, dann wird der induzierte sekundäre Strom eine solche Richtung haben, daß der Nordpol des sekundären magnetischen Feldes nach oben gerichtet und demzufolge zwischen den beiden Spulen eine abstoßende oder eine die Bewegung hindernde Kraft tätig sein wird.

Bei Entfernen der primären Spule oder was dasselbe ist, bei Schwächen des primären Stromes ist die induktive Wirkung eine entgegengesetzte. Die Richtung des sekundären Stromes ist jetzt gleich mit der des primären Stromes, die beiden Ströme haben also magnetische Felder von gleichen Richtungen, so daß sich diese gegenseitig verstärken. Die Folge davon wird eine Anziehung der beiden Spulen sein, oder mit anderen Worten, der induzierte Strom hat eine solche Wirkung, welche die die Induktion verursachende Bewegung hindert.

Die Magnetoinduktion zeigt dasselbe Verhalten. Der Magnet kann immer durch eine stromdurchflossene Spule ersetzt werden und ist das weitere Verhalten in allen Fällen mit jenem bei zwei beweglichen Spulen konstatierten identisch.

Betrachten wir näher den Fall, wenn beide Leitungen auf dieselbe Spule gewickelt sind. Wird der Strom im primären Kreise verstärkt, oder wird der primäre Stromkreis geschlossen, dann entsteht neben der Induktionswirkung auch ein primäres, magnetisches Feld. Der induzierte Strom hat aber eine, dem induzierenden Strome entgegengesetzte Richtung, ruft also ein magnetisches Feld hervor, dessen Polarität mit der Polarität des ersten entgegengesetzt ist. Wenn also die beiden Leiterkreise unbeweglich sind und eine Induktionswirkung nur durch die Veränderung des primären Stromes entstehen kann, dann äußert sich die frühere bewegungshindernde Wirkung des induzierten Stromes darin, daß das Entstehen des primären magnetischen Feldes verzögert wird. Bei Öffnen des primären Stromkreises ist die Richtung des sekundären Stromes mit der des primären gleich, die primären und sekundären magnetischen Wirkungen unterstützen sich also, d. h. das Verschwinden des bereits vorhandenen magnetischen Feldes wird durch den induzierten Strom zu verhindern gesucht.

Aus allen diesen Ausführungen geht hervor, daß die Tendenz des induzierten Stromes immer eine hindernde ist, und äußert sich diese immer darin, daß der induzierte Strom durch seine Wirkungen stets die bereits vorhandenen Verhältnisse aufrecht zu erhalten trachtet. Wird die bewegte Spule zum Stillstand gebracht, will der induzierte Strom dies hemmen, wird die Spule oder der Magnet bewegt, dann trachtet der induzierte Strom dies zu verhindern und den Induktor in seinem ursprünglichen Zustand zu verharren, nötigen versuchen.

Das Gesetz der Induktion hat Lenz aufgestellt. Nach demselben sucht der durch Bewegung oder Stromschwankungen hervorgerufene induzierte Strom die Bewegung zu hemmen, beziehungsweise die Änderung der Stromstärke zu verhindern.

Wir haben bisher die Induktionserscheinungen stets als Wirkungen von Strömen auf Leiterkreise definiert, man kann sie jedoch auch noch in einer anderen Weise erläutern, nämlich mit Hilfe der magnetischen Kraftlinien. Dieser Begriff erlaubt eine übersichtlichere und leichtere Behandlung aller Induktionserscheinungen und bildet den Grund der heutigen modernen Auffassung sowohl über die Volta- als auch über die Magnetinduktion.

Der Begriff der Kraftlinien wurde von Faraday eingeführt. Ein jeder Magnet hat ein magnetisches Feld, dessen Intensität um so kleiner wird, je weiter man vom magnetischen Pole geht. Befindet sich im magnetischen Felde eine magnetische Masse, dann wirkt auf diese eine anziehende oder abstoßende Kraft, je nachdem die Polarität der magnetischen Masse mit der Polarität des, das magnetische Kraftfeld erzeugenden Poles entgegengesetzt oder gleichnamig ist.

Die Größe der wirkenden Kraft hängt von der kürzesten Entfernung der Masse vom Pole ab, und zwar nimmt bei zunehmender Entfernung die Kraft im quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung ab und ist mit den magnetischen Massen proportional. Je weiter also die magnetische Masse vom Pole liegt, desto kleiner wird die auf sie wirkende Kraft und erreicht im Unendlichen den Wert Null. Nachdem aber die wirkende Kraft mit der Entfernung rasch abnimmt, wird die Intensität des magnetischen Feldes schon in kurzer Entfernung vom Pole gering sein, weshalb man die Wirkungen des Poles über eine gewisse Grenze vernachlässigt und so dem magnetischen Felde eine praktische Grenze gibt.

Betrachtet man einen geraden Magnetstab (Fig. 3) und bringt in das durch diesen erzeugte magnetische Feld einen Einheitspol, so wird dieser den wirkenden Kräften nachgeben und eine bestimmte Kurve beschreibend, im Raume von einem Pole zum anderen sich bewegen. Dieser Einheitspol ist längs seines ganzen Weges magneti-

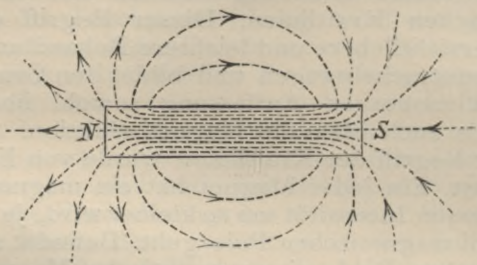

Fig. 3.

schen Kräftewirkungen ausgesetzt, welche stets tangential zur Bewegungsbahn liegen. Die beschriebene Bahn ist die sogenannte Kraftlinie. Die Kraftlinien sind also im allgemeinen solche Kurven, bei denen in jedem Punkte die Richtung der wirkenden Kraft durch die, zum fraglichen Punkte gehörende Tangente gegeben ist. In Fig. 3 treten die in der Papierebene liegenden Kraftlinien vom Nordpole aus und verlaufen in verschiedenen Kurven, um dann wieder beim Südpole vereint in den Eisenkern des Magnetes einzutreten.

Die Intensität des magnetischen Feldes in einem gegebenen Punkte ist durch jene Kraft ausgedrückt, welche im fraglichen Punkte auf die Einheit der magnetischen Masse wirkt. Nachdem aber die Kraftlinien den ganzen Raum, also das ganze magnetische Feld ausfüllen, kann die Intensität des Feldes durch die Menge jener Kraftlinien gemessen werden, welche im gegebenen Punkte die Flächeneinheit durchsetzen. In diesem Sinne kann von der Anzahl der Kraftlinien die Rede sein, und wenn man in Fig. 3 den Verlauf der Kraftlinien beobachtet, dann sieht man, daß diese in der Nähe der Pole dichter verlaufen, als anderwo im magnetischen Felde. Hieraus folgt, daß die Intensität des magnetischen Feldes um so größer ist, je mehr Kraftlinien die Flächeneinheit durchsetzen oder aber je näher die Fläche zum Pole liegt.

Ein magnetisches Feld bedingt demnach notwendigerweise immer das Vorhandensein magnetischer Kraftlinien. Je dichter diese im Raume verlaufen, desto stärker ist das magnetische Feld, oder was dasselbe bedeutet, desto stärker ist der das magnetische Feld hervorrufende magnetische Pol.

Die in den obigen Ausführungen besprochenen Verhältnisse bestehen in einem jeden magnetischen Felde, unabhängig von der Natur der das Feld hervorbringenden Ursache. Nachdem aber ein solches Kraftfeld nicht nur durch einen permanenten Magnet, sondern auch durch einen elektrischen Strom, infolge seiner magnetisierenden Wirkung, entstehen kann, müssen wir auch untersuchen, was der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und dem durch ihn verursachten magnetischen Felde ist.

Fließt ein Strom durch einen linearen Leiter, dann entsteht längs diesem Leiter ein magnetisches Feld. Die Verteilung der wirkenden Kräfte im Raume hängt von der Gestalt und der Lage des Leiters ab. Ist in der Nähe des Leiters ein anderer stromdurchflossener Leiter, dann entsteht durch die gegenseitige Wirkung beider Ströme ein resultierendes magnetisches Feld, dessen Stärke von den Stromrichtungen abhängt.

Die Kraftlinien dieses magnetischen Feldes sind konzentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt in der Achse des Leiters liegt (Fig. 4). Der Verlauf der Kraftlinien kann auch demonstriert werden, indem man ein Blatt Papier horizontal auf den Leiter befestigt und dann bei fortwährendem Rütteln kleine Eisenfeilspäne darauf streut. Fließt der Strom in der durch den Pfeil angegebenen Richtung, dann entstehen die Kraftlinien auf der Fläche *MN* in den auf der Figur angedeuteten konzentrischen Kreisen.

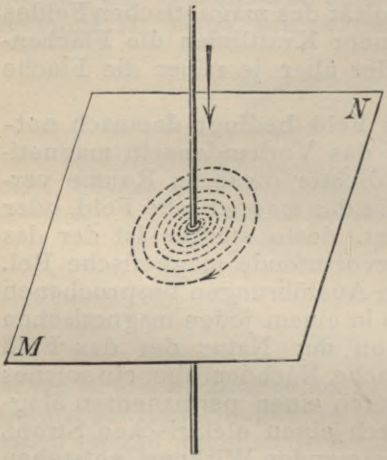

Fig. 4.

Die Wirkung kann wesentlich gesteigert werden, wenn der Leiter kreisförmig ist. In diesem Falle treten die Kraftlinien auf einer Seite aus der Kreisfläche heraus und dringen auf der anderen Seite in dieselbe hinein, d. h. ein kreisförmiger und vom Strome durchflossener Leiter verhält sich gerade so, als ein sehr flacher, permanenter Magnetstab. Wenn der Leiter dann noch in mehreren Windungen und Lagen einen Eisenkern umschließt, wird die Gesamtwirkung die Summe der Wirkungen der einzelnen Windungen sein, welche noch durch das Vorhandensein des Eisenkernes beträchtlich verstärkt wird und es entsteht der Elektromagnet.

Die Richtung der so entstandenen Kraftlinien oder die Polarität des elektromagnetischen Feldes hängt von der Stromrichtung ab. Den einfachsten Fall, jenen des linearen Leiters (Fig. 4) betrachtend, entstehen die Kraftlinien in *MN* in solcher Richtung, daß ein ganz frei beweglicher magnetischer Nordpol sich im Sinne der Uhrzeigerbewegung bewegen würde, wenn der Strom im Leiter in der Richtung des Pfeiles strömt. Denken wir nun den Leiter nach rechts umgebogen, dann entsteht ein resultierendes Feld, bei welchem die Kraftlinien alle aus der Kreisfläche austreten. In diesem Falle hat das magnetische Feld des Drahtkreises auf der dem Leser zugekehrten Seite eine nordmagnetische Polarität. Wechselt der Strom seine Richtung, dann verlaufen auch die Kraftlinien in entgegengesetzter Richtung und es entsteht auf der vorderen Kreisfläche eine südmagnetische Polarität.

Wenn die Richtung des Stromes in einem Drahtkreise der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist, dann entsteht auf der dem Betrachter zugewendeten Seite der Kreisfläche ein Nordpol, fließt der Strom im Sinne der Uhrzeigerbewegung, so ist dieselbe Kreisfläche südmagnetisch polarisiert.

Für den Verlauf der Kraftlinien um einen geraden Leiter hat Maxwell eine Regel aufgestellt, laut welcher die Richtung der Kraftlinien mit Hilfe der Bewegungsrichtungen eines Korkziehers bestimmt werden können. Fließt der Strom in einer Richtung im Leiter, welche dem Vorwärtsbewegen des Korkziehers entspricht, dann verlaufen die entstehenden Kraftlinien gerade so, wie der Korkzieher gedreht wird, also im Sinne der Uhrzeigerbewegung.

Auch kann die Polarität eines Elektromagneten aus der Stromrichtung durch Ampères Regel bestimmt werden:

Denkt man sich im Leiter in der Richtung des Stromes schwimmend, das Gesicht dem Eisenkerne zugekehrt, dann entsteht der Nordpol auf der Seite der linken Hand.

Sehen wir nun, wie läßt sich die Gegenwirkung zwischen dem elektrischen Strome und dem durch ihn hervorgerufenen magnetischen Felde mit Hilfe der magnetischen Kraftlinien ausdrücken.

Sobald ein Strom durch einen Leiter fließt, entstehen Kraftlinien, folglich müssen Kraftlinien im Sinne des Gesetzes der Gegenwirkung unter geeigneten Umständen auch Ströme erzeugen können, d. h. induzierend wirken. Es liegt nahe, daß in einem Leiter, welcher in einem entstehenden magnetischen Felde liegt, Ströme induziert werden müssen, da ein entstehendes magnetisches Feld dieselbe Wirkung ausübt, als ein dem Leiter genähertes Feld, welches bei der Magnetinduktion der Fall ist. Wird der Strom unterbrochen, dann verschwindet das magnetische Feld, was dann jenem Falle entspricht, wenn bei der Magnetinduktion der permanente Magnet rasch entfernt wird.

Die Richtung des induzierten Stromes läßt sich auch genau präzisieren, wenn man das Gesetz von Lenz in Anbetracht zieht. Wir sahen, daß der induzierte Strom immer die Tendenz hat, die Bewegung zu hemmen, in vorliegendem Falle wird die Stromrichtung im sekundären Kreise eine solche sein, daß der induzierte Strom bei Schließen des primären Stromes das Entstehen der Kraftlinien zu verhindern sucht, bei Öffnen dagegen das vorhandene Feld aufrecht erhalten will. Wenn nun der primäre Stromkreis geschlossen wird, dann erzeugt der sekundäre Strom den durch den primären Strom hervorgerufenen Kraftlinien entgegengesetzte Kraftlinien, d. h. die Richtung des induzierten Stromes ist der des induzierenden entgegengesetzt. Bei Unterbrechen des primären Stromkreises verschwinden die Kraftlinien, der sekundäre Strom hemmt aber dies, und erzeugt gleichgerichtete

Kraftlinien, weshalb der induzierte Strom in diesem Falle dem induzierenden Strome gleichgerichtet ist.

Dasselbe geschieht, wenn bei geschlossenem Stromkreise die Intensität des primären Stromes wächst, beziehungsweise sinkt. Eine jede Stromschwankung ruft daher induzierte Ströme hervor.

Wir sehen also, daß bei einer jeden Induktionserscheinung die Anzahl der Kraftlinien sich ändern muß, denn die Bewegung der stromdurchflossenen Spule wechselt eigentlich auch nur die Anzahl der durch die Windungen der sekundären Spule umschlossenen Kraftlinien.

Die Induktionswirkung ist eine gegenseitige, d. h. es kommt sich gleich, ob sich die primäre Spule bewegt und die sekundäre steht oder umgekehrt, denn nur die relative Bewegung ist von Wirkung. Bewegen sich also beide Spulen mit gleicher Geschwindigkeit in derselben Richtung, dann ist die Induktionswirkung Null, bewegen sie sich aber in entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit, dann wird eine doppelt so große Induktionswirkung stattfinden, als wenn sich eine Drahtspule in Ruhe befände.

Ebenso wie bei einer bewegten Spule oder einem Magnet die Größe der Geschwindigkeit auf die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft Einfluß hat, so hängt auch diese von jener Geschwindigkeit ab, mit welcher die Kraftlinien entstehen oder verschwinden. Je stärker der induzierende Strom oder der permanente Magnet ist, um so stärker wird der induzierte Strom, oder aber je größer die Anzahl der in der Zeiteinheit verschwindenden oder entstehenden Kraftlinien ist, desto intensiver wird die Induktionswirkung sein.

Alles zusammengefaßt sehen wir, daß die induzierte elektromotorische Kraft in einem Leiterkreise um so größer wird, je größer die Anzahl der entstehenden oder verschwindenden Kraftlinien ist, und je größer die Geschwindigkeit, mit welcher diese sich verändert.

Was die Gestalt des Leiters betrifft, unterscheidet man in bezug auf die Induktionserscheinungen zwei Fälle und zwar:

1. Induktion in linearen Leitern und
2. Induktion in körperlichen Leitern.

Lineare Leiter nennt man solche Leiter, bei welchen die Länge im Verhältnis zum Querschnitt groß ist. Solche sind z. B. die Drähte.

Die Induktion in körperlichen Leitern war schon vor 1831, dem Jahre der Entdeckung der Induktion durch Faraday, bekannt, doch erkannte man das Wesen dieser Erscheinung in jener Zeit nicht und stellte zur Erklärung derselben verschiedene Hypothesen auf. Man nannte es Rotationsmagnetismus; mit der Erscheinung werden wir uns später eingehender befassen.

Aus den bisherigen Ausführungen lassen sich jene Bedingungen feststellen, von welchen die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft abhängt.

Das magnetische Feld ist eine Funktion der erregenden Stromstärke und der Anzahl der Drahtwindungen. Nachdem aber die Stromstärke in Ampère gemessen wird, sagt man auch, daß die Intensität des erzeugten magnetischen Feldes von der Anzahl der Ampèrewindungen abhängt. Umgekehrt steht dies vom induzierten Stromkreis. Je größer die Anzahl der verschwindenden oder entstehenden Kraftlinien ist, um so größer wird die dem sekundären Strom entsprechende Ampèrewindungszahl, oder aber, nachdem die Anzahl der sekundären Windungen konstant ist, die Stärke des induzierten Stromes.

Der induzierte Strom wird demnach stärker, wenn die primären Ampèrewindungen größer sind. Bei gegebener maximaler induzierender Stromstärke kann man also den induzierten Strom verstärken, wenn man die primären Drahtwindungen vermehrt, nachdem dadurch die Anzahl der Ampèrewindungen vergrößert wird.

Die Verstärkung des magnetischen Feldes bei derselben Ampèrewindungszahl kann auch dadurch erfolgen, daß man einen Eisenkern verwendet, da die magnetische Durchlässigkeit, die Permeabilität, des Eisens viel größer als die der Luft ist, und demzufolge bei vorhandenem Eisenkerne der Gesamtwiderstand des magnetischen Kreises sich vermindert. Wird also bei dem Induktionsapparate ein Eisenkern verwendet, dann sind die induzierten Ströme viel stärker als bei derselben induzierenden Stromstärke ohne Eisen.

Die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft können wir sowohl bei der Volta- als bei der Magnetinduktion bestimmen, wenn wir die Ursache in beiden Fällen, in der Wechselwirkung eines stromdurchflossenen Leiters und eines Magnetes suchen. Dies kann geschehen, da wie bereits gezeigt, eine stromdurchflossene Spirale immer als ein permanenter Magnet aufgefaßt werden kann.

In erster Reihe müssen wir die Gesamtzahl der durch eine bestimmte Fläche durchgehenden Kraftlinien kennen. Die Intensität des magnetischen Feldes in einem gegebenen Punkte ist durch die Anzahl jener Kraftlinien gegeben, welche im fraglichen Punkte die Flächeneinheit durchsetzen.

Nachdem im allgemeinen die Intensität des magnetischen Feldes veränderlich ist, nehmen wir eine differentiale Fläche ds in Betracht. Wenn die diesem Punkte entsprechende Feldintensität mit B bezeichnet wird, dann ist die Anzahl der durch ds gehenden Kraftlinien

$$dN = B\,ds.$$

Ist die Größe der zu untersuchenden Fläche s, dann wird die gesuchte gesamte Kraftlinienzahl durch die Formel

$$N = \int B\, ds$$

gegeben sein.

Nach Faraday ist in einem Leiter die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft gleich der durch den Leiter in einem Zeitmomente geschnittenen Anzahl der Kraftlinien, also

$$e = \frac{dN}{dt}$$

wo dt einen differentalen Zeitraum bedeutet.

Elektromotorische Kraft kann nicht nur durch Verschwinden und Entstehen der Kraftlinien induziert werden, sondern auch dadurch, daß der Leiter sich im magnetischen Felde bewegt, also gewissermaßen Kraftlinien schneidet. In solchem Falle ist die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft von der Länge des Leiters, der Stärke des magnetischen Feldes und jener Geschwindigkeit abhängig, mit welcher der Leiter die Kraftlinien schneidet.

Hat der Leiter die Länge l und bewegt er sich in einem magnetischen Felde von der Intensität B mit der Geschwindigkeit v, dann ist die Zahl der in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien

$$N_1 = l \, . \, B \, . \, v$$

und die induzierte elektromotorische Kraft e_1

$$e_1 = l B v$$

wobei vorausgesetzt war, daß das magnetische Feld gleichmäßig und die Geschwindigkeit des Leiters konstant ist. Wenn dies nicht der Fall, dann ist e_1 durch eine Integralformel gegeben.

Die Intensität des induzierten Stromes hängt von der Größe der elektromotorischen Kraft und des Gesamtwiderstandes des sekundären Leiterkreises ab. Bezeichnen wir die Stromstärke mit i, den Gesamtwiderstand mit r, dann ist:

$$i = \frac{e}{r} = \frac{N}{r} = \frac{\int B\,ds}{r}$$

beziehungsweise

$$i_1 = \frac{e_1}{r} = \frac{l\,B\,v}{r}$$

Die bisher abgeleiteten Formeln haben nur dann Giltigkeit, wenn der Leiter die Kraftlinien in senkrechter Richtung schneidet. Ist dies nicht der Fall, sondern bildet der Leiter mit der auf die Kraftlinien senkrechten Richtung $x - x$ den Winkel α (Fig. 5), dann ist bei der Induktion nur jene Länge in Rechnung zu ziehen, welche durch Projektion der Leiterlänge auf die besagte senkrechte Richtung sich ergibt.

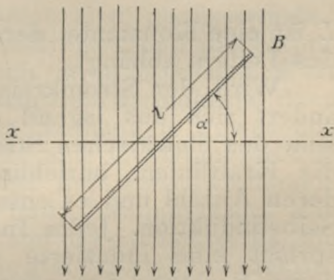

Fig. 5.

Ist die Länge des Leiters l, dann wird die Projektion l_1

$$l_1 = l \cos \alpha$$

sein und die induzierte elektromotorische Kraft bei den obigen Verhältnissen:

$$e = B\,v\,l \cos \alpha = B\,v\,l_1$$

Nun wird die Stromstärke in der oben angegebenen Weise berechnet.

In derselben Weise, als ein stromdurchflossener Leiter auf einen anderen Leiter induzierend wirkt, wirken auch die einzelnen Teile eines Leiters aufeinander. Diese Erscheinung ist die sogenannte Selbstinduktion. Bei allen Induktionserscheinungen sahen wir, daß die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft von der gegenseitigen Lage der Leiterkreise abhing, gerade so sind die Verhältnisse bei der Selbstinduktion.

Wenn durch einen Leiter ein konstanter Strom von der Intensität i fließt, dann entstehen Kraftlinien, deren Anzahl der Stromstärke proportional ist, d. h.

$$N = L i$$

L ist eine Konstante, deren Größe von der Gestalt des Leiters abhängt.

Wird der Stromkreis unterbrochen oder verändert sich aus irgend einer Ursache die Intensität des elektrischen Stromes, dann verschwinden die Kraftlinien, beziehungsweise verändert sich deren Anzahl und es entsteht die Erscheinung der Selbstinduktion. Jeder Induktionserscheinung entspricht eine induzierte elektromotorische Kraft, deren Richtung der induzierenden entgegengesetzt ist, weshalb auch die durch die Selbstinduktion hervorgerufene induzierte elektromotorische Kraft als eine gegenelektromotorische Kraft bezeichnet wird.

Wenn in obiger Gleichung $i = 1$, d. h. wenn die durch den Leiter fließende Stromstärke die Einheit ist, dann wird

$$N_1 = L$$

oder L ist jene Anzahl Kraftlinien, welche durch die Einheit der Stromstärke hervorgerufen wird. Dies nennt man den Selbstinduktionskoeffizienten des Leiters. Die Größe der Selbstinduktion eines

Leiters ist demnach um so größer, je mehr Kraftlinien die Stromstärkeeinheit hervorbringen kann. Nachdem wie bereits gezeigt, die Anzahl der Kraftlinien eine Funktion der Ampèrewindungen ist, wird die Selbstinduktion einer Spule um so größer sein, je mehr Windungen sie besitzt.

Die Erscheinung der Selbstinduktion entsteht nur dann, wenn die Intensität des Stromes sich verändert. Hieraus folgt, daß bei Schließen des Stromkreises die Selbstinduktion nur solange andauert, bis die Stromstärke ihren konstanten Wert erreicht hat. Bei Schließen des Stromkreises ist die Richtung der Gegenkraft der Selbstinduktion der induzierenden elektromotorischen Kraft entgegengesetzt, sie vergrößert also gewissermaßen den Widerstand des Leiterkreises und die Stromstärke kann nur allmählich ihren normalen Wert erreichen. Unterbricht man den Stromkreis, dann verschwinden die bereits vorhanden gewesenen Kraftlinien und es entsteht eine elektromotorische Kraft, deren Richtung mit der verschwindenden übereinstimmt. In diesem Falle vermindert sich also der resultierende Widerstand des Stromkreises, die Stromstärke wird durch die gleichgerichtete elektromotorische Kraft der Selbstinduktion aufrecht zu erhalten getrachtet, und es entsteht ein intensiver Öffnungsfunke an der Unterbrechungsstelle.

Der Wert des Selbstinduktionskoeffizienten hängt von der Gesamtzahl der Kraftlinien oder auf die Flächeneinheit bezogen, von der Intensität des magnetischen Feldes ab. Die letztere hängt anderseits vom Gesamtwiderstande des magnetischen Kreises ab, wenn also ein Eisenkern im Leiterkreise vorhanden ist, dann wird die Selbstinduktion auch größer sein.

Bei diamagnetischen Materialien ist die Anzahl der hervorgerufenen Kraftlinien der erregenden Stromstärke proportional, bei solchen ist also der

Selbstinduktionskoeffizient konstant. Bei Eisen und anderen paramagnetischen Materialien besteht nicht diese Proportionalität und L verändert sich mit der Permeabilität.

Nach alledem können wir die Gegenkraft der Selbstinduktion mit Hilfe des Selbstinduktionskoeffizienten folgendermaßen ausdrücken

$$e = L \frac{di}{dt}$$

wo di die differentiale Variation der Stromstärke während der unendlich kurzen Zeit dt bedeutet, vorausgesetzt, daß L konstant, also das Material diamagnetisch ist.

Den durch die Selbstinduktion hervorgerufenen Strom nennt man nach Faraday Extracurrent, Gegenstrom oder Extrastrom.

Die elektromotorische Kraft des Extrastromes ist um so größer, je mehr Elemente des Leiters der induzierenden Wirkung ausgesetzt sind. Lineare, lange Drähte besitzen auch einen Selbstinduktionskoeffizienten, doch ist dieser viel kleiner, als wenn derselbe Draht auf eine Rolle aufgewickelt und diese mit einem Eisenkerne versehen ist. Die Gegenkraft der Selbstinduktion ist der Windungszahl und der Stromstärke proportional und ist bei Stromschwankungen um so größer, je rascher diese Stromveränderungen vor sich gehen.

Die Selbstinduktionserscheinung ist besonders bei Wechselströmen von großer Bedeutung, da bei diesen die induzierende Stromstärke stark und rasch wechselt und demzufolge alle Bedingungen erfüllt, welche zur Entstehung einer wirksamen gegenelektromotorischen Kraft nötig sind. Wir werden uns später, bei den Wechselstromerscheinungen, mit der Selbstinduktion eingehender befassen, untersuchen wir jetzt einen anderen Fall der Induktion, nämlich jenen, bei welchem die elektromotorische

Kraft dadurch erzeugt wird, daß eine in sich geschlossene Drahtwindung in einem homogenen magnetischen Feld sich bewegt.

In Fig. 6 ist *a* ein Drahtring, welcher sich um eine auf die Papierebene vertikale Achse *A* dreht. Das magnetische Feld ist homogen, d. h. ihre Intensität ist überall im Raume konstant. In Wirklichkeit kann man ein ganz homogenes magnetisches

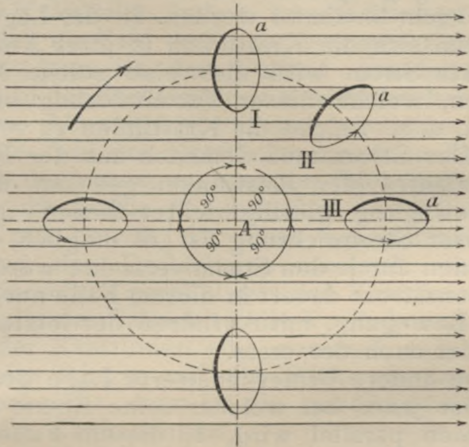

Fig. 6.

Feld nicht herstellen, manchmal aber betrachtet man im beschränkten Ausmaße ein Feld als homogen. Dies ist der Fall bei dem magnetischen Felde der Erde, wenn wir uns nur auf einen solchen Teil derselben beschränken, welcher im Verhältnis zur Erdoberfläche verschwindend klein ist. In einem solchen homogenen magnetischen Felde drehe sich obiger Drahtring mit konstanter Geschwindigkeit in der durch den Pfeil angegebenen Richtung.

In der Lage I umfaßt der Drahtring eine bestimmte Anzahl Kraftlinien, welche als maximal bezeichnet werden kann, da die Ebene des Ringes senkrecht auf die Richtung der Kraftlinien steht. Dreht sich nun der Ring um einen bestimmten Winkel (Lage II) in der angegebenen Richtung, dann vermindern sich die seine Fläche durchsetzenden Kraftlinien und es entsteht ein induzierter Strom. Nachdem die Wirkung des induzierten Stromes der die Induktion hervorrufenden Ursache immer entgegengesetzt ist, kann die Richtung desselben leicht bestimmt werden. In der Lage II verminderten sich die Kraftlinien in ihrer Anzahl, der induzierte Strom wird also eine solche Wirkung entfalten, welche dieser Verminderung entgegenarbeitet, d. h. welche die Kraftlinien zu vermehren sucht. Der Strom muß demnach aus der Richtung des Verlaufes der Kraftlinien gesehen, der Uhrzeigerbewegung gleichgerichtet fließen, denn nur bei dieser Stromrichtung ist es möglich, daß die Kraftlinien durch den Strom vermehrt werden. Der Induktionsstrom dauert in diesem Falle nur solange als die Bewegung, mit Aufhören der letzteren verschwindet auch der erste.

Eine andere bemerkenswerte Lage des Drahtringes ist jene, bei welcher seine Ebene mit den Kraftlinien parallel wird. In diesem Falle ist die durch den Ring umschlossene Fläche von keiner Kraftlinie durchsetzt. Wir haben also jetzt die Anzahl der Kraftlinien betreffend mit einem Minimum zu tun.

Bei der Lage III hat der Ring in bezug auf seine Anfangslage schon eine Drehung über 90^0 gemacht, und demzufolge sind auch die Verhältnisse andere. Während nämlich bis 90^0 Drehung die Kraftlinien aus dem Drahtringe allmählich verschwanden, ist jetzt gerade das entgegengesetzte der Fall, die Kraftlinien vermehren sich um so mehr, je näher der Ring zur senkrechten Lage zu stehen kommt.

Die Richtung des induzierten Stromes ist jener während der ersten Periode der Bewegung entgegengesetzt, denn nur bei dieser Richtung können solche Kraftlinien entstehen, welche den bereits vorhandenen entgegengesetzt sind, welche also gewissermaßen die Vergrößerung der umschlossenen Kraftlinienzahl verhindern.

Wir sehen, daß im Drahtringe nur dann ein elektrischer Strom entstehen kann, wenn sich die Zahl der Kraftlinien ändert. Ist die Bewegung eine solche, daß die Zahl der umschlossenen Kraftlinien abnimmt, dann ist der Verlauf des induzierten Stromes, in der Richtung der Kraftlinien betrachtet, eine der Uhrzeigerbewegung gleichgerichtete; nimmt die Zahl der Kraftlinien zu, dann fließt der Strom in der entgegengesetzten Richtung.

Was die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft betrifft, ist diese bei gleichförmiger Bewegung des Drahtringes maximal, wenn die Fläche desselben parallel mit den Kraftlinien liegt, denn in diesem Falle wird die Veränderung in der Anzahl der Kraftlinien eine maximale sein. Ist die Fläche des Ringes auf die Richtung der Kraftlinien senkrecht, dann ist die entstehende elektromotorische Kraft minimal.

Wir werden diese Verhältnisse bei den Wechselströmen eingehender studieren, hier sei nur kurz auf ihr Wesen hingedeutet und ihr Verhalten, insoferne sie die Induktionsgesetze unmittelbar berühren, behandelt.

Wann findet eigentlich die Umkehr der Richtung der induzierten elektromotorischen Kraft statt? Wir sahen, daß bei Abnahme der Kraftlinienzahl im Ringe der Strom und demnach auch die induzierte elektromotorische Kraft in der Richtung der Uhrzeigerbewegung entstehen, wenn man den Drahtring in der Richtung des Verlaufes der Kraftlinien betrachtet. Nach 90^0 Drehung ist aus derselben

Richtung betrachtet die Richtung des Stromes jener der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt, in der Wirklichkeit findet aber eine Umkehr nicht statt, denn wir dürfen nicht vergessen, daß nach 90° Drehung dem Auge die andere Seite der Fläche des Ringes sich zuwendet und demnach die Stromrichtung im Ringe notwendigerweise dieselbe bleiben muß. Würde die Richtung eine umgekehrte sein, dann flöße der Strom in der zweiten Periode der Bewegung, aus der Richtung des Verlaufes der Kraftlinien betrachtet, nicht der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt, sondern mit derselben gleichgerichtet, was aber unmöglich ist.

Eine Umkehr kann daher nur dann eintreten, wenn der Ring dieselbe Lage zu den Kraftlinien hat, als am Anfange der Bewegung, d. h. wenn sie wieder senkrecht auf die Kraftlinien steht, jedoch, nachdem bereits eine Drehung von 180° stattgefunden haben muß, ihr oberer Teil nach unten zu stehen kommt. Von dieser Lage angefangen wiederholen sich die früheren Induktionserscheinungen im entgegengesetzten Sinne. In der Lage nach 270° Drehung, vom Nullpunkte aus gerechnet, ist die Fläche des Drahtringes mit den Kraftlinien parallel, die induzierte elektromotorische Kraft maximal, da die Änderung der Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit, gleichmäßige Winkelgeschwindigkeit vorausgesetzt, die möglichst größte ist. Die Induktionswirkung nimmt dann wieder stetig ab und ist nach 360° Drehung, d. h. in der Anfangslage des Ringes, wieder Null. Während einer Umdrehung also ist die induzierte elektromotorische Kraft im Drahtringe zweimal Null und zweimal maximal, und sind diese Maximalwerte einander gleich, jedoch ist ihr Vorzeichen entgegengesetzt.

Bisher betrachteten wir den Fall, daß sich der Ring um eine auf die Richtung der Kraftlinien senkrechte Achse dreht. Diese Achse war außer der

Ebene des Drahtringes gelegen. Betrachten wir nun jene Disposition, bei welcher die Achse zwar auch senkrecht zu den Kraftlinien steht, jedoch nicht außerhalb der Fläche des Ringes liegt, sondern dasselbe durchsetzt (Fig. 7).

$A - A$ ist die Drehungsachse, welche den Drahtring in zwei symmetrische Hälften teilt. Die Anfangslage sei $x - x$. Dreht sich der Ring in der angegebenen Richtung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, dann vermindern sich die ihre

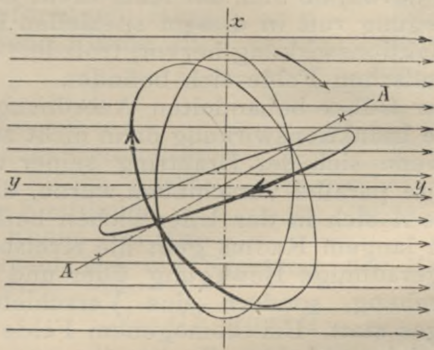

Fig. 7.

Fläche durchsetzenden Kraftlinien und es entsteht ein der Uhrzeigerbewegung gleichgerichteter Strom, wenn man den Ring in der Richtung des Verlaufes der Kraftlinien betrachtet. Nach 90° Drehung ist die Ebene des Ringes zu den Kraftlinien parallel, d. h. die Zahl der sie durchsetzenden Kraftlinien ist Null und demnach die induzierte elektromotorische Kraft, dem früheren Falle analog, maximal. Die übrigen Verhältnisse stimmen auch mit jenen der früher behandelten Disposition überein. Sobald die Ebene des Ringes in die Lage $x - x$ kommt, ist die induzierte elektromotorische Kraft Null, es findet eine Umkehr der Stromrichtung im Ringe statt. In der Lage $y - y$ ist die induzierte elektromotorische Kraft immer ein Maximum.

Die Induktionserscheinungen bleiben dieselben, wenn die Achse $A - A$ mit der Richtung $x - x$ zusammenfällt. Würde die Achse mit $y - y$ zusammenfallen, dann könnte man bei der Drehung des Drahtringes überhaupt keine Induktionswirkung konstatieren, denn in diesem Falle bleibt die Ebene des Ringes mit den Kraftlinien immer parallel, unabhängig davon, ob sich der Ring dreht oder nicht. Die Bewegung ruft in diesem speziellen Falle also keine Induktionswirkung hervor, trotzdem der Ring im magnetischen Felde sich befindet.

In der früher behandelten Anordnung (Fig. 6) wäre eine Induktionswirkung dann nicht zu konstatieren, wenn sich der Drahtring seiner ursprünglichen Lage parallel verschieben würde, d. h. wenn die Achse A sich in der Unendlichen befände. Bei unendlich langem Radius geht die Kreisbewegung in eine geradlinige Bewegung über und es findet keine Drehung, sondern eine Verschiebung des Drahtringes statt. Bei homogenem Felde ist aber die Kraftlinienzahl überall dieselbe, so daß bei einer Verschiebung die die Ebene des Drahtringes durchsetzenden Kraftlinien in ihrer Zahl sich nicht ändern.

Aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß eine Induktionswirkung auch dann nicht entsteht, wenn der Drahtring auf und nieder, oder senkrecht zur Papierebene vor- und rückwärts sich bewegt, oder aber die Bewegung eine beliebige ist, doch die Ebene des Ringes ihrer Anfangslage immer parallel bleibt, also immer nur eine Verschiebung und keine Verdrehung stattfindet.

Untersuchen wir nun, nach welchem Gesetze die Änderung der induzierten elektromotorischen Kraft vor sich geht, wenn der Drahtring im homogenen magnetischen Felde mit gleichmäßiger Geschwindigkeit sich dreht.

Sei in Fig. 8 $a - a$ ein Drahtring, welcher um die Achse A drehbar ist. Der Ring befindet sich im homogenen magnetischen Felde, dessen Intensität durch jene Kraftlinienzahl gegeben ist, welche die Flächeneinheit durchsetzen. Diese Intensität ist B. Wenn r der Halbmesser des Ringes ist, dann wird die durch den kreisförmigen Ring umschlossene Fläche F:

$$F = r^2 \Pi$$

sein und die Gesamtzahl der diese Fläche durchsetzenden Kraftlinien ist, wenn die Ebene des Ringes senkrecht auf die Richtung der Kraftlinien steht,

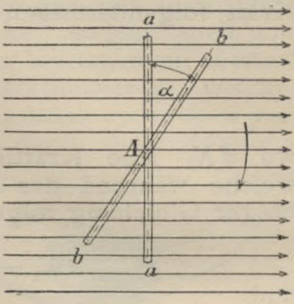

Fig. 8.

$$N = B F = B r^2 \Pi$$

Der Ring bewegt sich im Sinne der Uhrzeigerbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Nach dem Zeitraume t befindet sich derselbe in der Lage $b - b$, welche mit der ursprünglichen Lage den Winkel α einschließt. In dieser Stellung dringen weniger Kraftlinien durch die Ringebene, ihre Zahl kann gefunden werden, wenn man die senkrechte Projektion von F auf $a - a$ bildet und die so erhaltene Fläche F_1 mit der konstanten Feldstärke B multipliziert.

Nachdem die durch Projektion erhaltene Fläche

$$F_1 = F \cos \alpha$$

ist, wird

$$B F_1 = B F \cos\alpha = N_1 = N \cos\alpha$$

sein.

Hieraus ersieht man, daß die Änderung der Kraftlinienzahl nach dem Kosinus des Drehungswinkels erfolgt, also ist bei $\alpha = 90^0$ der Wert von N_1 gleich Null.

Wir sahen, daß die induzierte elektromotorische Kraft folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$e = \frac{d N_1}{d t}$$

wo $d N_1$ jene Kraftlinienzahländerung bedeutet, welche während des Zeitraumes $d t$ erfolgt. Aus obiger Gleichung folgt, daß

$$d N_1 = - N \sin\alpha \, d\alpha$$

und

$$e = - N \sin\alpha \frac{d\alpha}{d t}$$

In diesem Ausdrucke ist $\frac{d\alpha}{d t}$ die Winkelgeschwindigkeit ω, so daß

$$e = - N \sin\alpha \, \omega.$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß die induzierte elektromotorische Kraft im Drahtringe bei homogenem magnetischen Felde und gleichmäßiger Bewegung nach dem Sinusgesetz sich ändert. Die letzte Formel bestätigt auch unser bereits auf Seite 30 gefundenes Ergebnis, nach welchem die induzierte elektromotorische Kraft maximal wird, wenn die Ringfläche parallel zu den Kraftlinien liegt. In diesem Falle ist $\alpha = 90^0$, $\sin\alpha = \sin 90^0 = 1$ und

$$e = - N \omega = E_{max}.$$

Wenn die Fläche des Ringes senkrecht auf die Kraftlinien steht, dann ist $\alpha = 0$, und $\sin \alpha = 0$, weshalb auch

$$e = 0$$

wird.

Die induzierten Ströme besitzen dieselbe induzierende Fähigkeit als der Strom, durch den sie induziert werden. Wenn man also den induzierten Strom in eine Drahtrolle leitet, welche auch eine andere selbständige Wirkung besitzt, dann entsteht in letzterer ein zweiter Induktionsstrom, welcher ebenso wie der erste zu Induktionszwecken verwendet werden kann. Die durch die Induktions-

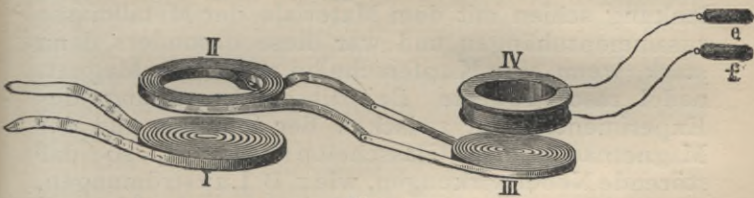

Fig. 9.

ströme induzierten sekundären Ströme nennt man Induktionsströme höherer Ordnung.

Eine Disposition zur Erzeugung von Induktionsströmen höherer Ordnung ist in Fig. 9 dargestellt. In der flachen Leiterrolle I fließt der primäre Strom, dessen Veränderung in der zweiten, ober ihr liegenden Rolle einen sekundären Strom induziert. Dieser Strom fließt nun in die Rolle III und wirkt induzierend auf Rolle IV, deren Drahtenden mit Handhaben versehen sind, um das Vorhandensein des induzierten Stromes höherer Ordnung durch seine physiologische Wirkung beweisen zu können.

Der durch die Handhaben in den menschlichen Körper fließende Strom ist ein Induktionsstrom zweiter Ordnung, da er durch doppelte Induktionswirkung hervorgerufen war. Der erste Induktionsstrom ist dem induzierenden Strom entgegengesetzt, dasselbe Verhältnis besteht zwischen dem zweiten und dem ersten induzierten Strom, woraus folgt, daß die Richtung des induzierten Stromes zweiter Ordnung mit jener des ursprünglichen, induzierenden Stromes übereinstimmen muß.

Eine Art der Induktionserscheinung war schon vor Faradays Entdeckung der Induktion bekannt, doch war man mit dem Wesen dieser Erscheinung nicht klar. Man nannte sie Rotationsmagnetismus. Arago bemerkte, daß eine Magnetnadel aus ihrer Ruhelage abgelenkt wird, sobald sich eine Metallmasse in ihrer Nähe bewegt. Die Größe der Ablenkung schien mit dem Materiale der Metallmasse zusammenzuhängen und war diese besonders dann stark, wenn eine Kupferscheibe unter der Magnetnadel rasch rotierte. Bei dieser Anordnung des Experimentes war zwischen der Scheibe und der Magnetnadel eine Glasscheibe befestigt, so daß störende Nebenwirkungen, wie z. B. Luftströmungen, ausgeschlossen waren. Die Ablenkung der Magnetnadel war um so größer, je schneller die Scheibe rotierte, über eine gewisse Grenze fing sogar auch die Magnetnadel an mitzurotieren.

Dieselbe Wirkung, nur im entgegengesetzten Sinne, beobachtete man auf Magnetnadeln, welche über Kupferplatten schwangen. Je näher die Kupferplatte zur Nadel zu liegen kam, um so schneller kam die Nadel in ihre Ruhelage, man konnte also eine dämpfende Wirkung der Kupfermasse konstatieren.

Alle diese Erscheinungen sind Induktionswirkungen und können mit dem Namen Induktion in körperlichen Leitern bezeichnet werden. Im vorigen Falle treten die Kraftlinien aus dem Nordpole der Magnetnadel aus, durchsetzen die Kupferscheibe und treten beim Südpole wieder in die Nadel ein. Bewegt sich die Kupferscheibe, dann stehen wir vor demselben Fall, als wenn ein Leiter im magnetischen Feld sich bewegt, d. h. es entstehen Induktionsströme, welche der die Induktionswirkung hervorrufenden Bewegung entgegenarbeiten. Nachdem aber sie die Scheibe nicht festhalten können, muß die Magnetnadel in der Bewegungsrichtung nachgeben, denn nur in diesem Falle wird die relative Verschiebung zwischen Magnetnadel und Kupferscheibe die möglichst kleinste sein.

Bei der dämpfenden Wirkung der Metallmassen auf eine bewegliche Nadel sind wieder die Induktionsströme jene Faktoren, welche die Dämpfung bewirken. Die schwingende Magnetnadel verursacht in der Metallmasse Ströme, welche wie die induzierten Ströme immer, die Bewegung zu verhindern suchen und die Magnetnadel muß nach kurzer Zeit stehen bleiben.

Die in der Metallmasse induzierten Ströme gleichen sich in derselben aus, sind also um so stärker je kleiner der Widerstand oder je größer die Leitfähigkeit des Metalles ist. Die ist auch die Ursache, warum die dämpfende Wirkung des Kupfers größer als jene des Eisens ist.

Wenn man in die Metallmasse Löcher bohrt oder wenn man dieselbe an mehreren Stellen einschneidet, dann vergrößert man den Widerstand des induzierten Stromkreises und die dämpfende Wirkung ist schwächer. Können sich diese induzierten Ströme voll entwickeln, dann erwärmt sich die Metallmasse stark, ja sie kann unter Umständen auch zum Glühen kommen. Dies ist die Ursache, weshalb man Metallmassen, welche Induktionswirkungen ausgesetzt sind, einschneidet oder aus mehreren, voneinander isolierten Teilen zusammensetzt.

Zum Schlusse sei noch die unipolare Induktion erwähnt. Dies ist eine Erscheinung, welche entsteht, wenn in der Nähe von Metallmassen ein Magnet eine Bewegung macht. Bei den bisherigen Induktionserscheinungen entstand der induzierte Strom dadurch, daß die Intensität der Magnetisierung wechselte, bei der unipolaren Induktion aber entstehen die induzierten Ströme dadurch, daß sich der Magnet nur bewegt, ohne sich von der Metallmasse zu entfernen.

Einen, diese Induktionserscheinung demonstrierenden Apparat stellt Fig. 10 vor. *a* ist eine Kupferscheibe, welche zwei Magnetstäbe trägt. Die Kupferscheibe ist an der Welle *b c* befestigt, welche in rasche Rotation versetzt werden kann. Dreht

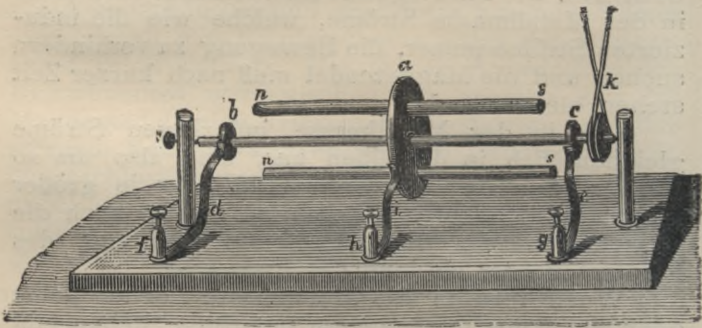

Fig. 10.

sich die Scheibe, dann entstehen induzierte Ströme, welche durch Bürsten abgeleitet werden können. Die Bürsten schleifen bei *a b* und *c*, der induzierte Strom fließt je nach der Drehrichtung von *a* nach *b* und *c* oder umgekehrt. Zwischen *b* und *c* fließt kein Strom, da diese denselben Potentialwert besitzen. Je größer die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe ist, um so größer wird auch die induzierte elektromotorische Kraft und bei gleichbleibendem Gesamtwiderstande auch die Stromstärke sein.

II. Kapitel.

Der einphasige Wechselstrom.

Grundbegriffe.

Im vorigen Kapitel behandelten wir einen Fall der Induktionserscheinung, bei welcher ein in sich geschlossener Drahtring in homogenem magnetischen Felde sich bewegte, wobei die Rotationsachse in der Ebene des Drahtringes lag (Fig. 7).

Eine ähnliche Disposition ist in nachstehender Fig. 11 abgebildet. Das magnetische Feld ist durch ein Polpaar *NS* hervorgerufen, in dessen Bohrung eine Drahtschleife mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegt. Die Richtung der Kraftlinien ist durch den horizontal liegenden Pfeil gekennzeichnet, während die Drehrichtung der Schleife durch einen, an der Peripherie des punktierten Kreises liegenden Pfeil angegeben ist. Bei der Rotation entstehen in der Drahtschleife Induktionsströme, deren Richtung in bekannter Weise bestimmt werden kann.

In der in der Figur eingezeichneten Stellung wird in der Drahtschleife ein Strom induziert, dessen Richtung mit der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist, wenn man die Schleife in der Richtung des Verlaufes der Kraftlinien betrachtet, denn bei dieser Bewegung vermehren sich die die Ebene der Drahtschleife durchsetzenden Kraftlinien. Diese Stromrichtung kann auch folgendermaßen bestimmt werden.

Wird ein Leiter im magnetischen Felde bewegt, dann muß eine gewisse Arbeit geleistet werden, mit welcher die induzierte elektrische Energie

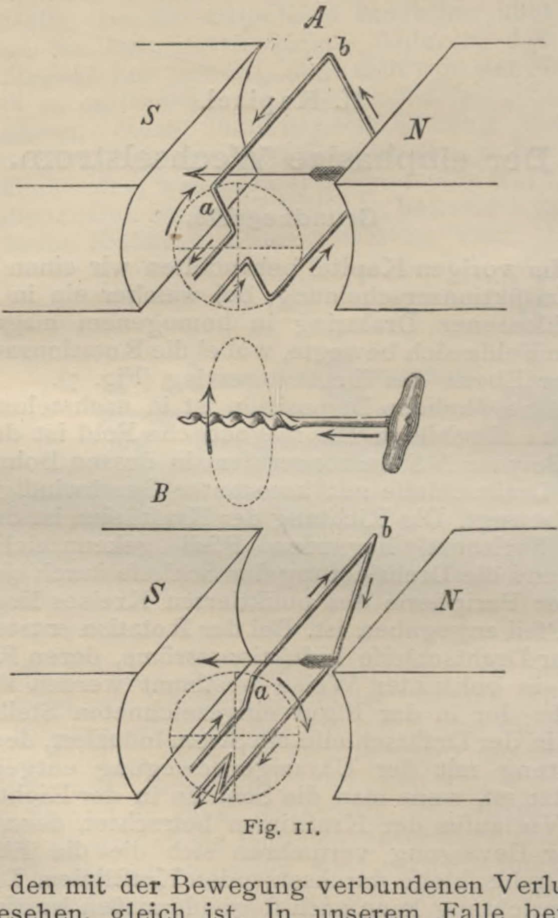

Fig. 11.

von den mit der Bewegung verbundenen Verlusten abgesehen, gleich ist. In unserem Falle bewegt sich die vordere Fläche der Drahtschleife dem Nordpole zu, folglich muß die induzierte Stromrichtung der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt sein, denn nur durch diesen Strom entsteht dem Nordpol gegenüber ein Nordpol, dessen Näherbringen zum bereits vorhandenen permanenten Pole einen Arbeitsaufwand erheischt. Würde die Stromrichtung mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmen, dann würde an der dem Nordpole zugewendeten Fläche der Drahtschleife ein Südpol entstehen, welcher vom Nordpole angezogen, keine Arbeit erheischen, sondern im Gegenteil Arbeit leisten würde.

Man kann zur Richtungsbestimmung des induzierten Stromes auch die Korkzieherregel verwenden. Wir sahen im vorhergehenden Abschnitte, daß, wenn in einem Leiter ein Strom in der Richtung der Vorwärtsbewegung des Korkziehers fließt, um den Leiter Kraftlinien entstehen, deren Verlauf mit der Drehrichtung des Korkziehers übereinstimmt. Diese Verhältnisse auf die Induktionserscheinung übertragen, sehen wir, daß die Stromrichtung in der Drahtschleife der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt sein muß, denn nur bei dieser Richtung entstehen solche Kraftlinien, welche den bereits vorhandenen entgegengesetzt sind, welche also einer Vergrößerung der die Schleifenebene durchsetzenden Kraftlinienzahl entgegenwirken.

Die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft ist maximal, wenn die Änderung der Zahl der Kraftlinien in der Zeiteinheit eine maximale ist. Dies fällt mit jener Lage zusammen, wenn die Ebene der Drahtschleife parallel mit der Richtung der Kraftlinien ist. Kommt die Schleife in die auf diese Richtung senkrechte Stelle, dann ist die induzierte elektromotorische Kraft Null, da jetzt sämtliche Kraftlinien durch die Ebene der Drahtschleife gehen, doch ist die Änderung ihrer Zahl Null.

Sobald die Drahtschleife diese Lage verläßt, ändert sich die Richtung der elektromotorischen

Kraft, sie wird jetzt mit der Uhrzeigerbewegung gleichgerichtet wirken und es entsteht bei geschlossenem Leiterkreise ein Strom derselben Richtung. Der Wert dieser elektromotorischen Kraft wächst immer mehr an, erreicht in der Parallellage zu den Kraftlinien ihr Maximum, nimmt dann wieder stetig ab, um Null zu werden, sobald die Ebene wieder senkrecht auf die Kraftlinien zu stehen kommt.

Auf Seite 32 bewiesen wir, daß die Größe der elektromotorischen Kraft bei gleichmäßiger Bewegung und homogenem magnetischen Felde nach dem Sinusgesetz sich ändert, d. h. wenn e der momentane Wert der elektromotorischen Kraft ist und die Gesamtzahl der Kraftlinien N beträgt, dann wird

$$e = N \sin \alpha \, \omega$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Drahtschleife bedeutet und α jenen Winkel, welchen die Drahtschleife mit jener Lage im fraglichen Zeitpunkte bildet, welcher die minimale Induktion entspricht, in welcher also die Ebene der Drahtschleife senkrecht auf die Richtung der induzierenden Kraftlinien steht.

Die in der Drahtschleife induzierte elektromotorische Kraft ist von wechselnder Richtung, und wird der Leiterkreis geschlossen, dann entsteht eine elektrische Strömung, welche ebenso veränderlich ist, als die elektromotorische Kraft selbst. Dieser Strom heißt Wechselstrom.

In obiger Disposition kann der induzierte Wechselstrom nur dann in den äußeren Stromkreis fließen, wenn man die Enden der Drahtschleife mit zwei voneinander isolierten Metallringen, den sogenannten Schleifringen verbindet und auf diesen Metallkontakte, die Bürsten schleifen läßt. Der äußere Stromkreis wird mit diesen Bürsten verbunden.

Zwischen den Schleifringen herrscht demnach die zur Verfügung stehende Wechselstromspannung, deren Größe von der Rotationsgeschwindigkeit der Drahtschleife, von der Intensität des magnetischen Feldes und von der Zahl der der induktiven Wirkung ausgesetzten Leiterelemente abhängt. Je länger also die Schleife, um so größer wird bei sonst gleichen Verhältnissen die induzierte elektromotorische Kraft.

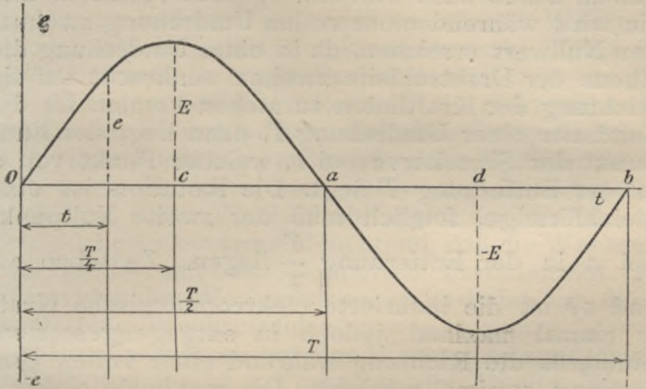

Fig. 12.

Wir sahen, daß sich diese elektromotorische Kraft nach dem Sinusgesetz ändert. Ist der Gesamtwiderstand des Leiterkreises konstant, dann muß nach Ohms Gesetz die Stromstärke ebenso veränderlich sein, als die elektromotorische Kraft, d. h. die Stromstärke verändert sich auch nach dem Sinusgesetz. Sowohl die Änderung der Stromstärke, als auch jene der elektromotorischen Kraft kann demnach in ihrem zeitlichen Verlaufe durch eine Sinuskurve dargestellt werden (Fig. 12).

Befassen wir uns zunächst mit der Spannungskurve. In einem rechtwinkeligen Koordinatsystem tragen wir auf die Abscissenachse die Zeit, auf die Ordinatenachse die Werte der induzierten elektromotorischen Kraft. Für die Zeitrechnung sei der Ausgangspunkt jene Lage der Drahtschleife maßgebend, in welcher alle Kraftlinien sie senkrecht durchsetzen, in welcher also die induzierte elektromotorische Kraft Null ist. Dreht sich die Schleife mit konstanter Geschwindigkeit, dann wird die Änderung der elektromotorischen Kraft bei homogenem Felde nach dem Sinusgesetz verlaufen und sie wird während einer vollen Umdrehung zweimal den Nullwert erreichen, da in einer Umdrehung die Ebene der Drahtschleife zweimal senkrecht auf die Richtung der Kraftlinien zu stehen kommt. Ist die Zeitdauer einer Umdrehung T, dann liegt der Endpunkt der Sinuskurve bei b, welcher Punkt von o in der Entfernung T liegt. Die Rotation ist eine gleichförmige, folglich muß der zweite Nullpunkt bei a in der Entfernung $\frac{T}{2}$ liegen. Zwischen $o\,a$ und $a\,b$ ist die induzierte elektromotorische Kraft je einmal maximal, jedoch in entgegengesetztem Sinne, da die Richtung während einer vollen Umdrehung zweimal wechselt. Die maximale elektromotorische Kraft ist $+E$ beziehungsweise $-E$ und fallen diese von der Anfangslage aus gerechnet in c und d, welchen $\frac{T}{4}$ respektive $\frac{3}{4}\,T$ Umdrehungszeit entspricht.

Die Ordinaten der Sinuskurve geben die momentanen Werte der induzierten elektromotorischen Kraft in jedem Augenblicke der Rotation. Will man z. B. wissen, welchen Wert die elektromotorische Kraft nach dem Zeitraume t, vom Anfange der Rotation gerechnet, besitzt, dann bildet man nur die zur Abscisse gehörige Ordinate. Dies ist e, und ihre Länge im Spannungsmaßstab abgemessen, gibt ihren Wert in der betreffenden Spannungseinheit.

Die Zeit T, welche nötig ist, daß die Sinuskurve eine vollständige wird, heißt der Zeitraum einer Periode. In unserem Falle, bei zweipoligem Felde, entspricht jeder vollständigen Umdrehung eine Sinuskurve, d. h. eine Periode und wenn die Drahtschleife zu einer Umdrehung die Zeiteinheit, die Sekunde braucht, dann sagt man ihre Periodenzahl ist Eins. Unter Periodenzahl versteht man die Anzahl der auf eine Sekunde fallenden Perioden, wenn man also sagt, ein Wechselstrom hat 42 Perioden, so bedeutet dies, daß bei diesem Wechselstrome die induzierte elektromotorische Kraft in einer Sekunde 42 volle Perioden macht.

Nachdem bei jeder Periode die elektromotorische Kraft einmal positiv und einmal negativ wird, d. h. ihre Richtung während einer Periode zweimal wechselt, kann man neben der Periodenzahl auch von einer Wechselzahl sprechen. Es ist aus dem vorhergehenden einleuchtend, daß die Wechselzahl gleich mit der doppelten Periodenzahl ist. Wenn also der Wechselstrom 42 Perioden hat, dann wird seine Wechselzahl $2 \times 42 = 84$ sein.

Im allgemeinen hat eine Wechselstrommaschine k Pole und macht n Touren in der Minute. Wenn nun bei zweipoliger Maschine die Periodenzahl gleich war mit der sekundlichen Tourenzahl der Drahtschleife, dann wird bei k Polen die Periodenzahl

$$\sim = \frac{n\,k}{60 \,.\, 2}$$

sein, da $\frac{n}{60}$ die sekundliche Tourenzahl und $\frac{k}{2}$ die Zahl der Polpaare bedeutet.

Die Wechselzahl wird demnach durch die Formel

$$z = 2 \sim = \frac{n\,k}{60}$$

ausgedrückt sein.

Z. B. Eine Wechselstrommaschine hat 8 Pole und macht das Magnetrad 750 Touren in der Minute. Wie groß ist die Periodenzahl? Welchen Wert hat die Wechselzahl?

Die Periodenzahl wird aus obiger Gleichung ausgerechnet:

$$\sim = \frac{n\,k}{60\,.\,2} = \frac{750\,.\,8}{120} = 50.$$

Die Wechselzahl dagegen:

$$z = 2 \sim = 2 \times 50 = 100.$$

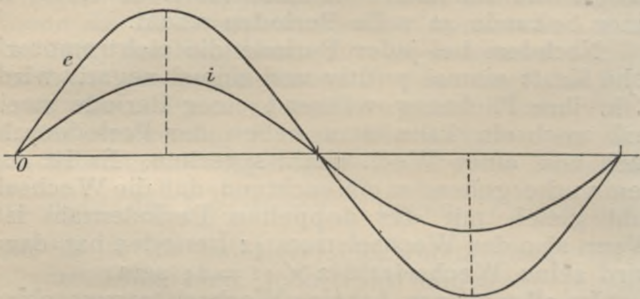

Fig. 13.

Welche Tourenzahl muß diese Maschine haben, daß die Periodenzahl des induzierten Wechselstromes 60 sei?

Aus der Gleichung der Periodenzahl wird:

$$n = \frac{60\,.\,2\,.\sim}{k} = \frac{120\,.\,60}{8} = 900.$$

Dies ist die gesuchte Tourenzahl der Maschine in einer Minute.

In ähnlicher Weise kann auch bei gegebener Wechselzahl und Touren die Polzahl ermittelt werden, nur muß man hierbei darauf achten, daß k nur eine ganze, gerade Zahl sein kann und demgemäß eventuell die Tourenzahl oder Periodenzahl abgeändert werden muß.

Unter Phase eines Wechselstromes versteht man jenen Zeitraum, welcher vom Anfange einer Periode gerechnet, verstrichen ist. In Phase *t* z. B. bei Fig. 12 hat die induzierte elektromotorische Kraft bereits den Momentwert *e*.

Man kann auch von Phasengleichheit und Phasenungleichheit sprechen. Ist bei einem Wechselstrome Phasengleichheit zwischen der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke vorhanden, so bedeutet dies, daß sowohl die Spannungs- als auch die

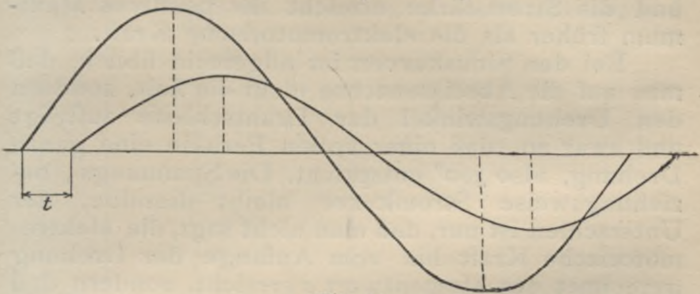

Fig. 14.

Stromstärkekurve ihre Nullpunkte respektive Maximalwerte gleichzeitig erreichen (Fig. 13). *e* ist die Spannungs-, *i* die Stromstärkekurve. Die Periodenzahl ist bei beiden dieselbe, wenn also bei einer Periode die Nullpunkte zusammenfallen, so steht dies für alle Perioden, d. h. die elektromotorische Kraft und die Stromstärke sind in Phase miteinander.

Bei Phasenungleichheit kann von einer voreilenden und von einer nacheilenden Phasenverschiebung die Rede sein. Wie wir später im betreffenden Abschnitte sehen werden, verursacht eine mit vielen Windungen und einem Eisenkerne versehene Spule eine Phasenverschiebung und zwar bleibt in diesem Falle die Stromstärke hinter der elektromotorischen Kraft zurück (Fig. 14). Dies bedeutet soviel, daß die Stromstärke später, also nur erst nach dem Zeitraume t seinen Null-, respektive Maximalwert erreicht, in welchem Zeitpunkte die Spannung bereits einen, nach diesen Werten fallenden Momentwert hat. Man sagt in diesem Falle, der Strom ist zur Spannung phasenverspätet.

Es kann aber auch von einer Phasenverschiebung im entgegengesetzten Sinne die Rede sein, d. h. der Strom kann zur Spannung phasenverfrüht werden. Jetzt ist das Verhältnis umgekehrt, die Spannung bleibt hinter der Stromstärke zurück und die Stromstärke erreicht ihr positives Maximum früher als die elektromotorische Kraft.

Bei den Sinuskurven ist allgemein üblich, daß man auf die Abscissenachse nicht die Zeit, sondern den Drehungswinkel der Drahtschleife aufträgt und zwar so, daß einer vollen Periode eine ganze Drehung, also 360^0 entspricht. Die Spannungs-, beziehungsweise Stromkurve bleibt dieselbe, der Unterschied ist nur, daß man nicht sagt, die elektromotorische Kraft hat vom Anfange der Drehung gerechnet den Momentwert e erreicht, sondern daß der Momentwert der elektromotorischen Kraft nach einem Drehungswinkel von φ^0 e ist.

In diesem Sinne aufgefaßt, muß also T auf 360^0 eingeteilt werden. Wir müssen uns dies fest einprägen und die Gradenteilung nicht auf den Umfang der Armatur beziehen, sonst würde man bei mehrpoligen Maschinen zu falschen Ergebnissen gelangen. Dies ist nur für den speziellen Fall der zweipoligen Maschine giltig, da bei dieser der Zeitraum einer Periode mit der für eine volle Umdrehung nötigen Zeit gleich ist.

Diese Verhältnisse auf Phasenverspätung, beziehungsweise -Voreilung bezogen, sagt man, ein Strom ist der elektromotorischen Kraft in der Phase um φ Grade verspätet oder verfrüht, je nachdem er seinen Maximalwert später oder früher erreicht. Bei einer Drahtschleife im zweipoligen magnetischen Felde bedeutet dies soviel, daß die Schleife die Lage der maximalen Induktion bereits um φ^0 Winkel verlassen hat, als erst die Stromstärke maximal wird. Bei phasenverfrühtem Strome sind

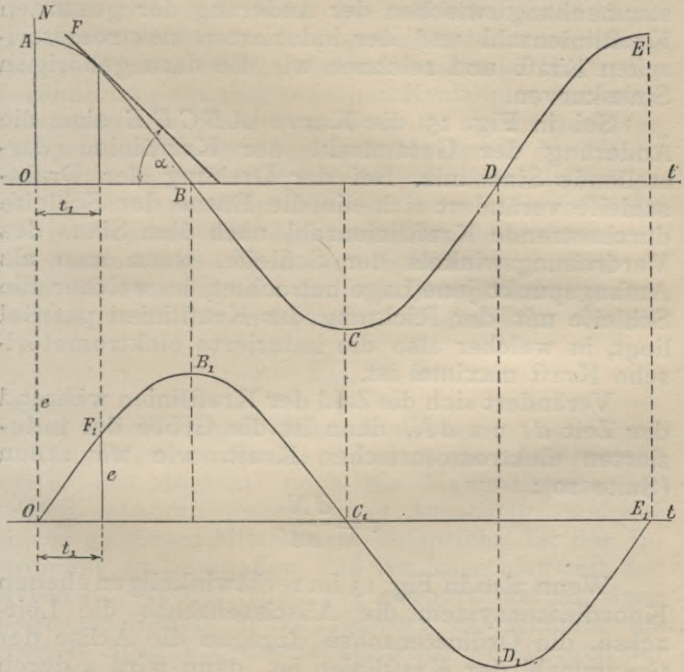

Fig. 15.

die Verhältnisse verkehrt, da ist nämlich die Drahtschleife noch φ^0 Winkel vor der Lage der maximalen Induktion, als bereits die Stromstärke ihren maximalen Wert erreicht hat.

Bei mehrpoligen Maschinen teilt man die Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden, gleichnamigen Polen in 360°, da während dieses Umfangsteiles der Armatur die elektromotorische Kraft eine volle Periode hat. Die Phasenverschiebungen beziehen sich demnach auch auf diesen Teil des Armaturumfanges.

Untersuchen wir im Nachstehenden den Zusammenhang zwischen der Änderung der gesamten Kraftlinienzahl und der induzierten elektromotorischen Kraft und zeichnen wir die dazu gehörigen Sinuskurven.

Sei in Fig. 15 die Kurve $ABCDE$ eine die Änderung der Gesamtzahl der Kraftlinien darstellende Sinuslinie. Bei der Drehung der Drahtschleife verändert sich die die Ebene der Schleife durchsetzende Kraftlinienzahl nach dem Sinus des Verdrehungswinkels der Schleife, wenn man als Anfangspunkt jene Lage betrachtet, in welcher die Schleife mit der Richtung der Kraftlinien parallel liegt, in welcher also die induzierte elektromotorische Kraft maximal ist.

Verändert sich die Zahl der Kraftlinien während der Zeit dt um dN, dann ist die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft, wie wir sahen (Seite 20):

$$e = \frac{dN}{dt}.$$

Wenn also in Fig. 15 im rechtwinkeligen ebenen Koordinatensystem die Abscissenachse die Leitachse, die Ordinatenachse dagegen die Achse der Gesamtzahl der Kraftlinien ist, dann wird e durch die Tangente jenes Winkels α gegeben, welcher zum fraglichen Punkte gehört, da

$$e = \frac{dN}{dt} = tg\,\alpha.$$

Diesen Wert für alle Punkte der Kurve $ABCDE$ ermittelt und sie mit den dazu gehörenden

Zeitpunkten t in ein anderes Koordinatensystem übergetragen, in welchem die Abscissenachse die Zeit, die Ordinatenachse dagegen die Änderung der induzierten elektromotorischen Kraft darstellt, dann bekommen wir die Kurve $O F_1 B_1 C_1 D_1 E_1$, als die Sinuskurve der elektromotorischen Kraft.

Aus beiden Kurven ist ersichtlich, daß diese um eine Viertelperiode gegeneinander verschoben sind, und zwar ist die elektromotorische Kraft der Veränderung der magnetischen Kraftlinien um eine Viertelperiode phasenverspätet, da sie ihr positives Maximum nach dem positiven Maximum der Kraftlinien um eine Viertelperiode später erreicht.

Bisher sprachen wir nur von Moment- und Maximalwerten der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke. Nach den Gleichungen Seite 32 kann der Momentwert der induzierten elektromotorischen Kraft folgendermaßen ausgedrückt werden

$$e = E_{max} \sin \alpha$$

wobei α den Phasenwinkel bedeutet.

Die Meßinstrumente können aber naturgemäß weder die Moment- noch die Maximalwerte anzeigen, sondern geben einen Ausschlag, welcher einem gewissen Mittelwerte entspricht. Ist das Instrument so beschaffen, daß ihr Ausschlag mit der ersten Potenz der Spannung proportional ist, dann zeigt sie einen Spannungswert an, welcher als mittlere Spannung bezeichnet wird. Ist dagegen der Ausschlag mit den Quadraten der momentanen Spannungswerte proportional, dann zeigt das Instrument auch einen Mittelwert an, dieser ist aber vom ersteren verschieden, und wird als effektive Spannung bezeichnet.

Untersuchen wir nun die Beziehung zwischen der mittleren und der maximalen elektromotorischen Kraft.

In Fig. 16 bedeutet die Sinuskurve die Veränderung der elektromotorischen Kraft während einer halben Periode, wobei die Abscissen die Phasenwinkel darstellen. In der Phase α ist der Momentwert der elektromotorischen Kraft e, diese wird während der differentialen Änderung der Phase von $d\alpha$ als konstant betrachtet.

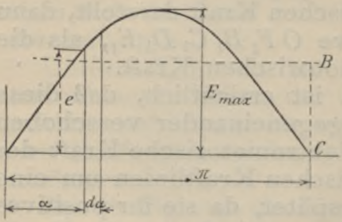

Fig. 16.

Der Mittelwert ist die Höhe jenes Parallelogrammes, dessen Länge gleich der halben Periode ist, also e_m.

Diese Fläche kann also ausgedrückt werden, als:

$$\overline{OC} . \overline{BC} = \pi \, e_m.$$

Nach obigem muß dies gleich mit dem Flächeninhalt der halben Sinuskurve sein, daher

$$F = \int_0^\pi e \, d\alpha = \pi \, e_m.$$

Hieraus

$$e_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e \, d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E_{max} \sin\alpha \, d\alpha$$

oder

$$e_m = \frac{1}{\pi} E_{max} \int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha.$$

Nachdem aber

$$\int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha = 2$$

wird

$$e_m = \frac{2}{\pi} E_{max}.$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für den Zusammenhang zwischen der mittleren und der maximalen elektromotorischen Kraft e_m beziehungsweise E_{max}.

Der Phasenwinkel α kann aber auch mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ω ausgedrückt werden und zwar ist

$$\alpha = \omega t$$

wenn t jene Zeit bedeutet, während welcher der Winkel von 0 auf α gewachsen ist. In diesem Falle kann die mittlere elektromotorische Kraft ebenso bestimmt werden als früher, nur wird jetzt unsere Gleichung

$$e_m = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_{max} \sin \omega t \, d t = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_{max} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) d t$$

da jetzt die Zeit einer halben Periode auf die Abscissenachse aufgetragen werden muß.

Die Integration ausgeführt bekommen wir dasselbe Ergebnis als früher, nämlich:

$$e_m = \frac{2}{\pi} E_{max}.$$

Bestimmung des Verhältnisses zwischen der effektiven und der maximalen elektromotorischen Kraft.

Unter effektiver elektromotorischer Kraft versteht man die Quadratwurzel aus dem Mittelwerte der Quadrate der momentanen elektromotorischen Kräfte.

Um die Beziehung zwischen dieser effektiven und der maximalen elektromotorischen Kraft bestimmen zu können, betrachten wir zunächst die Fig. 17, bei welcher die punktierte Kurve die Sinuskurve der elektromotorischen Kraft, die volle dagegen die den Quadraten der Momentwerten entsprechende Kurve bedeutet.

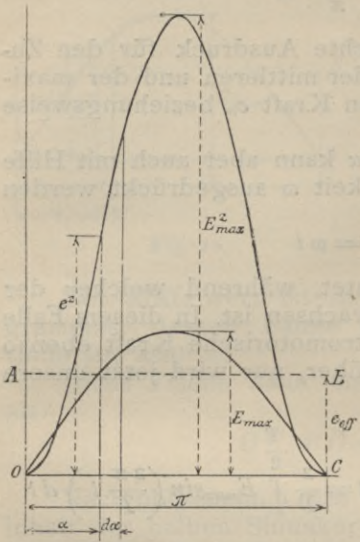

Fig. 17.

Der momentane Wert der Spannung in der Phase α sei e. Während der unendlich kleinen Phasendifferenz $d\alpha$ soll dieser Spannungswert als konstant betrachtet werden. Das Quadrat wird e^2, und der Flächeninhalt $e^2 \, d\alpha$ sein. Der Mittelwert dieser Quadrate ist demnach

$$F_1 = \int_0^\pi e^2 \, d\alpha.$$

Nun bilden wir ein Parallelogramm, dessen Länge π und Höhe das Quadrat der gesuchten effektiven *EMK* e_{eff} sei und zwar für $OABC$

$$F_1 = \pi \, e^2_{eff}.$$

Aus beiden letzten Gleichungen folgt, daß:

$$\pi \, e^2_{eff} = \int_0^\pi e^2 \, d\alpha$$

oder

$$e^2_{eff} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^2 \, d\alpha.$$

Nachdem aber

$$e = E_{max} \sin \alpha$$

wird

$$e^2_{eff} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E^2_{max} \sin^2 \alpha \, d\alpha.$$

Von 0 bis π integriert, bekommen wir folgenden Ausdruck:

$$e^2_{eff} = \frac{1}{2} E^2_{max}$$

oder

$$e_{eff} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Dasselbe Resultat erzielt man, wenn die Abscissenachse — nicht die Winkel — sondern die Zeitachse ist. In diesem Falle ist anstatt dα und π, dt beziehungsweise $\frac{T}{2}$ zu setzen, und wird:

$$e^2_{eff} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E^2_{max} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt.$$

Durch Integration erhält man das obige Ergebnis.

Die effektive elektromotorische Kraft wird aus der maximalen berechnet, wenn man letztere mit $\sqrt{2}$ dividiert.

Instrumente, welche effektive Werte messen, beruhen auf der elektrostatischen, elektrodynamischen und der Wärmewirkung der Ströme. Mittelwerte zeigen solche Apparate an, bei denen die Ablenkung des beweglichen Teiles durch die magnetisierende Wirkung der Ströme erfolgt.

Die Stromstärke ändert sich auch nach dem Sinusgesetz, folglich sind die bisher abgeleiteten Beziehungen auch hier giltig, weshalb die mittlere Stromstärke durch

$$i_m = \frac{2}{\pi} J_{max}$$

die effektive dagegen durch

$$i_{eff} = \frac{J_{max}}{\sqrt{2}}$$

ausgedrückt werden kann. Hierbei ist J_{max} der Maximalwert der Wechselstromstärke.

Bei allen unseren Untersuchungen nahmen wir an, daß sowohl die elektromotorische Kraft, als auch die Stromstärke in ihren Änderungen dem Sinusgesetz folgen, und dürfen wir nicht vergessen, daß die erhaltenen Ergebnisse nur für diesen Fall richtig sind. Folgt die Veränderung anderen Gesetzen, dann müssen die Verhältnisse für diese Fälle besonders berechnet werden.

Für dieselbe Kurve ist das Verhältnis zwischen der effektiven und der mittleren elektromotorischen Kraft oder Stromstärke gleich. Diese Verhältniszahl wird Formfaktor genannt, da ihre Größe vom effektiven Wert, dieser aber selbst von der Kurvenform abhängt. Für den Formfaktor haben wir also folgenden Ausdruck:

$$f = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi E^2_{max} \sin^2 \alpha \, d\alpha}}{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi E_{max} \sin \alpha \, d\alpha} = \frac{e_{eff}}{e_m}.$$

In nachstehender Tabelle ist der Formfaktor für verschiedene Kurvenformen zusammengestellt:

Hieraus ist ersichtlich, daß je spitzer die Kurve, um so größer der Formfaktor. Im ersten Fall und bei Gleichstrom ist $f = 1$.

Unsere bisherigen Ergebnisse zusammengefaßt, unterscheiden wir folgende Größen:

Maximale EMK und Stromstärke	E	bezw.	J.
Momentwerte	e	"	i.
Mittelwerte	e_m	"	i_m.
Effektivwerte	e_{eff}	"	i_{eff}.

Bei nachfolgenden Erörterungen werden wir für die verschiedenen Werte immer obige Bezeichnungen benutzen, ohne sie besonders hervorzuheben, weshalb bei der Verfolgung weiterer Untersuchungen dies vor Augen zu halten ist.

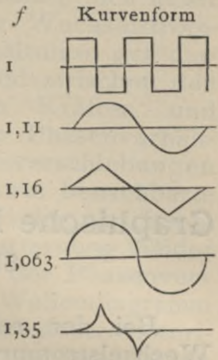

Fig. 18.

III. Kapitel.

Graphische Behandlung der Wechselstromprobleme.

Bei der rein analytischen Behandlung der Wechselstromprobleme kommt man oft zu sehr komplizierten Ergebnissen, welche die Übersichtlichkeit derselben für den in der Mathematik weniger bewanderten sehr erschwert. Deshalb benutzt man in der Wechselstromtechnik mit Vorliebe die graphische Behandlung der Probleme, d. h. jene Methoden, mit welchen die Entwicklung derselben auf Grund jener Beziehungen ausgeführt werden kann, welche zwischen den mathematischen Größen und gewissen geometrischen Elementen besteht. Im folgenden sollen diese Methoden ausführlich beschrieben werden.

Eine Methode ist bereits aus dem vorhergehenden Kapitel bekannt. Die graphische Darstellung dieser Art nennt man Wellendiagramme, sie bestehen darin, daß man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abscisse die Zeit, als Ordinate die elektromotorische Kraft oder eine andere zu untersuchende Wechselstromgröße aufträgt und aus den zusammengehörigen Werten die die Veränderung darstellende Kurve bestimmt.

Anstatt der Zeit kann man auch den Phasenwinkel auf die Abscissenachse auftragen, nur muß man vor Augen halten, daß dem Zeitraume einer Periode immer 360° Phasenwinkel entsprechen.

Mit den Wellendiagrammen lassen sich außer dem Verlaufe der Änderung der Wechselstromgrößen besonders die Phasenverhältnisse gut darstellen. In Wechselstromkreisen sind zwischen den verschiedenen elektromotorischen Kräften und Stromstärken die verschiedensten Phasenverhältnisse, will man daher die Phasenverschiebungen ermitteln, dann sucht man einfach zwei benachbarte Durchschnittspunkte gleichen Sinnes der Abscissenachse und der Kurven auf, die Entfernung beider Punkte voneinander gibt das Maß der Phasenverschiebung. In Fig. 14 ist durch ein Wellendiagramm vorgeführt, daß die Stromstärke i zur elektromotorischen Kraft e phasenverspätet ist, und zwar ist die Zeit der Phasenverspätung t. Diese Phasenverspätung kann auch durch einen Winkel ausgedrückt werden, und bildet den Zusammenhang zwischen beiden Größen der einmal bereits erwähnte Umstand, daß der Zeitraum einer Periode 360° Winkel entspricht.

Eine bequemere Methode als die eben beschriebene ist die graphische Darstellung der Wechselstromerscheinungen durch das Vektor- oder Uhrzeigerdiagramm.

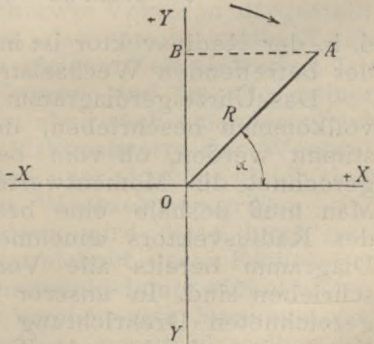

Fig. 19.

Das Wesen dieser Darstellungsweise besteht darin, daß man die Projektionen einer konstanten, um einen Endpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sich drehenden Geraden, dem sogenannten Radiusvektor, auf eine fixe Gerade bildet. In Fig. 19 sei der um den Punkt O mit konstanter Geschwindigkeit sich drehende Radiusvektor R, und die Gerade, auf welchen die Projektionen gebildet werden, die Y-Achse. O ist der Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, dessen zwei aufeinander senkrechte Achsen X und Y sind. Der Radiusvektor bildet in der bezeichneten Lage mit der Abscissenachse den Winkel α.

Bedeutet R den Maximalwert E_{max} der elektromotorischen Kraft, dann ist $OA = E_{max}$ und die Projektion von R auf die Y-Achse OB der Momentwert derselben, denn

$$\overline{OB} = \overline{OA} \sin \alpha = R \sin \alpha = E_{max} \sin \alpha = e.$$

In jeder Lage des Radiusvektors ist demnach die Größe der momentanen elektromotorischen Kraft durch die Projektion auf die Ordinatenachse gegeben. Wird $\alpha = 90^0$, dann ist $\sin \alpha = 1$ und

$$e = R \sin 90^0 = R = E_{max}$$

d. h. der Radiusvektor ist immer der Maximalwert der betreffenden Wechselstromgröße.

Das Uhrzeigerdiagramm ist jedoch noch nicht vollkommen beschrieben, denn es muß noch bestimmt werden, ob vom betrachteten Zeitpunkte gerechnet die Momentwerte zu- oder abnehmen. Man muß deshalb eine bestimmte Drehrichtung des Radiusvektors annehmen, wodurch dann im Diagramm bereits alle Verhältnisse genau umschrieben sind. In unserer Figur hat bei der eingezeichneten Drehrichtung die elektromotorische Kraft eine abnehmende Tendenz, sie wird Null, sobald R in die X-Achse fällt, denn dann ist $\alpha = 0$ und $\sin \alpha = 0$ folglich

$$e = R \sin \alpha = E_{max}\, 0 = 0.$$

Nach weiterer Drehung des Radiusvektors werden die Projektionen negative Werte annehmen, diese entsprechen den momentanen elektromotorischen Kräften negativen Vorzeichens. Nachdem während einer ganzen Umdrehung des Radiusvektors die Wechselstromgröße alle ihre positiven und negativen Werte einmal durchläuft, folgt, daß eine volle Umdrehung, oder bis α von 0^0 bis 360^0 anwächst, einer Periode entspricht.

Im Uhrzeigerdiagramm ist also der Verlauf der Änderung einer Wechselstromgröße vollständig bestimmt, wenn man die Größe des Radiusvektors und seine Drehrichtung angibt. Die Winkelgeschwindigkeit hängt davon ab, wie viel Perioden die Wechselstromgröße in der Zeiteinheit, der Sekunde hat, denn der Radiusvektor muß in der Sekunde eine Umdrehungszahl besitzen, welche der Periodenzahl gleich ist.

Jene Wechselstromgrößen, welche ihre Null- und Maximalwerte gleichzeitig erreichen, welche also in ihren Phasen vollkommen übereinstimmen (Fig. 13), werden durch zwei Vektoren dargestellt, welche einander decken, also sowohl in die X- als auch in die Y-Achse zu gleicher Zeit eintreffen. Die Längen der zwei Vektoren sind im allgemeinen verschieden, sie können aber auch einander gleich sein, je nachdem die Maximalwerte der Wechselstromgrößen verschieden oder einander gleich sind.

Ist zwischen zwei Wechselstromgrößen eine Phasenverschiebung, dann wird diese durch zwei solche Vektoren gekennzeichnet, deren Richtungen miteinander den Phasenverschiebungswinkel bilden, denn der eine Vektor erreicht sein Maximum erst dann, nachdem der andere bereits dasselbe, desselben Vorzeichens um den Phasenverschiebungswinkel verlassen hat (Fig. 20).

R_1 und R_2 sind die beiden Vektoren, deren Lage und Größe verschieden sind. Im fraglichen

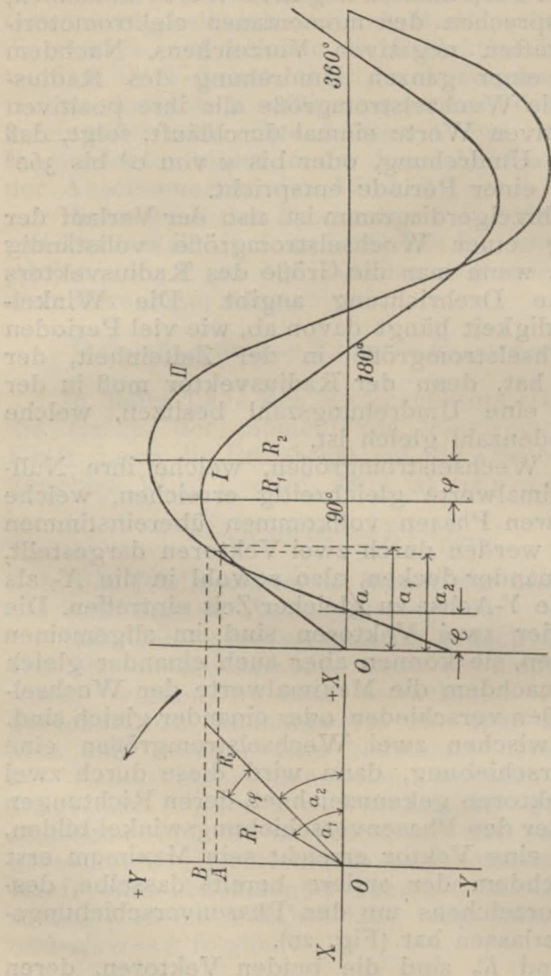

Fig. 20.

Zeitpunkte sind die Momentwerte der entsprechenden Wechselgrößen

$$OA = R_1 \sin \alpha_1 \text{ beziehungsweise } OB = R_2 \sin \alpha_2.$$

Aus der Figur ist ersichtlich, daß bei der gegebenen Drehungsrichtung der Vektoren, wenn OA maximal ist, OB sein Maximum noch nicht erreicht hat, sondern es erst dann wird, nachdem OA seine dem Maximum entsprechende Lage um den Winkel $\alpha_1 - \alpha_2 = \varphi$ verlassen hat. φ ist der Phasenverschiebungswinkel.

Der Übergang vom Uhrzeigerdiagramm zum Wellendiagramm läßt sich folgendermaßen durchführen.

In jedem Zeitpunkte besteht zwischen dem Moment- und Maximalwert jener Zusammenhang, der durch obige Gleichungen gegeben ist. Den beiden Wechselgrößen werden daher im Wellendiagramm zwei Sinuslinien entsprechen, welche aber in der Phase gegeneinander um den Winkel φ verschoben sind. Wir müssen also ein rechtwinkliges Koordinatensystem bilden, auf dessen Abscissenachse die Phasenwinkel, auf die Ordinatenachse dagegen die veränderlichen Wechselstromgrößen aufzutragen sind. Nun wählen wir als Nullage jene Lage, welche der Vektor R_1 einnimmt, wenn er in der positiven Hälfte der Abscissenachse liegt und dementsprechend bekommen wir im Wellendiagramm den Null- oder Anfangspunkt.

Einer Periode entspricht eine volle, also 360^0 betragende Umdrehung des Radiusvektors, dementsprechend wird auch die Abscissenachse im Wellendiagramm für eine Periode in 360 gleiche Teile geteilt. Ein Teil entspricht also 1^0 Drehung des Radiusvektors.

Nach diesen Ausführungen können wir nun zur Bestimmung der Sinuskurven schreiten. Wenn R_1 in der $+X$-Achse liegt, ist der Momentwert der

Wechselstromgröße Ø, d. h. O ist der Anfangspunkt der Kurve I. Nach 90^0 Rotation ist R_1 in $+Y$, folglich der Momentwert gleich dem Maximalwerte, im Wellendiagramm wird also auf die zum 90^0 gehörende Ordinate der Radiusvektor aufgetragen. In der nachfolgenden Periode der Bewegung von $\alpha = 90^0$ bis $\alpha = 180^0$ ändert sich die Wechselgröße in derselben Weise, wie bisher, nur mit entgegengesetzter Tendenz, d. h. während im ersten Viertel der Periode die Momentwerte stetig zunahmen, nehmen sie jetzt stetig ab und wird der Momentwert bei $\alpha = 180^0$ Null.

Hiermit ist auch die halbe Welle bestimmt, denn wir kennen ihre Nullpunkte, die Lage des Maximalwertes und wissen, daß die Kurve eine Sinuslinie ist. Die zweite Periodenhälfte wird der ersten ähnlich bestimmt, nachdem aber der Radiusvektor von $\alpha = 180^0$ bis $\alpha = 360^0$ immer unter der Abscissenachse bleibt, sind die Momentwerte alle negativ und dementsprechend ergänzt sich die Sinuskurve mit der negativen halben Welle. Nach 360^0 ist der Momentwert wieder Null, von diesem Punkte angefangen wiederholen sich die bereits beschriebenen Verhältnisse.

Nachdem die Sinuskurve und das Uhrzeigerdiagramm dieselben Verhältnisse der Änderungen der Wechselgrößen darstellen, müssen sie für jeden Zeitpunkt die Momentwerte betreffend dasselbe Ergebnis liefern. Dies ist auch der Fall, denn z. B. in der eingezeichneten Radiusvektorlage ist der Momentwert für I gleich

$$O\,A = R_1 \sin \alpha_1.$$

Denselben Momentwert erhält man, wenn vom Punkte A eine mit der X-Achse parallele Projektionslinie gezogen und deren Schnittpunkt mit der Kurve I gesucht wird. Die dazugehörige Ordinate der Sinuskurve liegt bei der dem Winkel α_1 entsprechenden Abscisse, ihre Größe ist mit der Ordinate $A\,O$ gleich.

Das eben ausgeführte steht auch für den zweiten Radiusvektor R_2, mit dem Unterschiede, daß diesem Vektor entsprechende Sinuskurven ihren Nullpunkt im Wellendiagramm nicht bei $\emptyset$, sondern bei a hat, wo a vom Punkte $\emptyset$ in der Entfernung des Phasenverschiebungswinkels φ liegt. Die Perioden sind bei beiden Wechselgrößen gleich, da die Vektoren mit gleicher Winkelgeschwindigkeit rotieren, R_2 erreicht also nach R_1 seinen Maximalwert, der Phasenunterschied zwischen den Lagen der Maximalwerte ist auch wie zuvor φ.

Eine dritte graphische Darstellungsweise der Wechselgrößen geschieht durch das Polardiagramm. Ihr Prinzip besteht darin, daß eine Gerade $O\,A$ (Fig. 21) um einen ihrer Endpunkte, welcher fix steht, in diesem Falle also um O mit konstanter Geschwindigkeit rotiert, und mit den Geraden $O\,B$ den Veränderungswinkel φ bildet. Während der Rotation gleitet auf $O\,A$ ein Punkt P, welcher eine dem Verlaufe der Wechselgröße entsprechende Kurve beschreibt. So entsteht das Polardiagramm, welches aus einer in sich geschlossenen Kurve besteht. Der Veränderungswinkel φ wächst von 0° bis π, und dementsprechend schließt sich das Polardiagramm zur vollständigen Kurve, sobald $\varphi = \pi$ wird. In Fig. 22 ist ein solches Polardiagramm dargestellt.

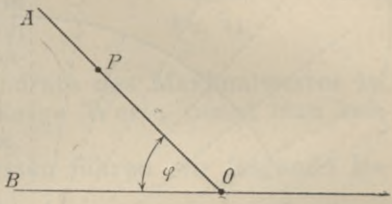

Fig. 21.

Sehen wir nun ein Beispiel, um die Behandlung der erörterten graphischen Darstellungsweisen zu illustrieren.

Es sei mit den drei graphischen Methoden der Zusammenhang zwischen der effektiven und der maximalen elektromotorischen Kraft zu bestimmen.

Wir sahen, daß der effektive Wert die Quadratwurzel aus dem Mittelwerte der Quadrate der Momentwerte ist, d. h. z. B. bei der *EMK*:

$$e_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^2 \, d\alpha}$$

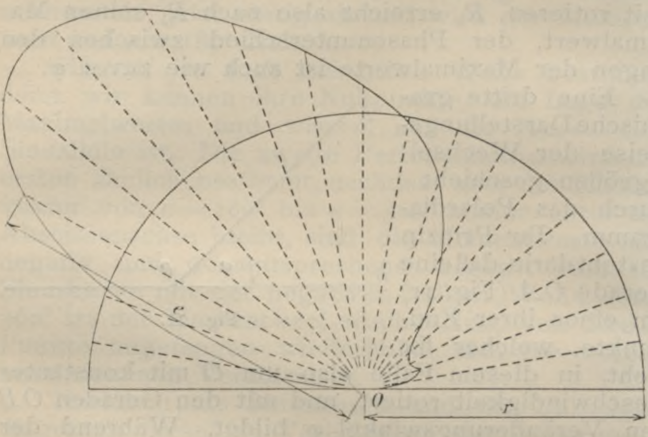

Fig. 22.

und die Beziehung zum Maximalwerte ergab sich als:

$$e_{eff} = \frac{E}{\sqrt{2}}.$$

Die Berechnungsweise dieses Ergebnisses beim Wellendiagramme wurde bereits auf Seite 53 durchgeführt, so daß unsere Aufgabe nur darin besteht, diese Beziehung auch mit Hilfe des Uhrzeigers und Polardiagrammes zu ermitteln.

Sei in Fig. 23 ein Uhrzeigerdiagramm der elektromotorischen Kraft gegeben. Im fraglichen Zeitpunkte ist die Lage des Vektors OA, folglich ist der Momentwert OC, da

$$OC = OA \sin \varphi$$

oder

$$e = E \sin \varphi$$

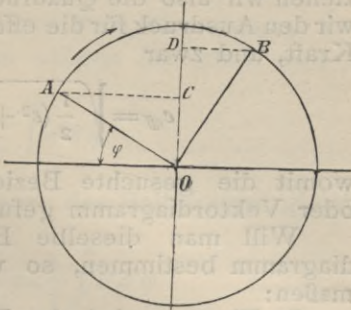

Fig. 23.

Bei periodischen Änderungen, welche dem Sinusgesetz folgen, findet man immer zwei Momentwerte, bei denen die Summe ihrer Quadrate gleich dem Quadrate des Maximalwertes ist. Solche zusammengehörige Werte nennt man konjugierte Momentwerte.

Zum Beweise dessen führen wir folgende Berechnung durch:

In Fig. 23 sei OB senkrecht auf OA und $OA = OB = E$. Der zu OB gehörige Momentwert ist $OD = OB \sin (90 + \varphi)$ oder

$$OD = e_1 = E \sin (90 + \varphi) = E \cos \varphi.$$

Die Quadrate dieser Momentwerte werden

$$e^2 = E^2 \sin^2 \varphi$$
$$e_1^2 = E^2 \cos^2 \varphi$$

folglich ihre Summe

$$e^2 + e_1^2 = E^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = E^2,$$

d. h. e und e_1 sind konjugierte Werte.

Mit 2 dividiert, bekommt man:

$$\frac{1}{2}(e^2 + e_1^2) = \frac{1}{2} E^2.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite der Mittelwert aus den Quadraten der Momentwerte, ziehen wir also die Quadratwurzel, dann bekommen wir den Ausdruck für die effektive elektromotorische Kraft, und zwar

$$e_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 + e_1^2)} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

womit die gesuchte Beziehung beim Uhrzeiger- oder Vektordiagramm gefunden ist.

Will man dieselbe Beziehung beim Polardiagramm bestimmen, so verfährt man folgendermaßen:

In Fig. 22 wird der Flächeninhalt des Polardiagrammes mit dem Flächeninhalte eines Halbkreises gleichgesetzt, dessen Halbmesser r und Mittelpunkt O ist.

Um die durch das Polardiagramm umschlossene Fläche bestimmen zu können, nimmt man eine unendlich kleine Fläche derselben in Betracht und stellt für die ganze Fläche eine Integralformel auf.

In einem gegebenen Zeitpunkt sei die Lage des Vektors OA und der dazugehörige Veränderungswinkel φ. Rotiert der Vektor um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ weiter, dann wird seine Länge um einen differentialen Betrag größer und die beschriebene Fläche (Fig. 24)

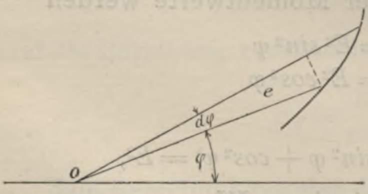

Fig. 24.

$$dF = \frac{1}{2} e^2 \, d\varphi$$

wenn man diese Fläche als ein Dreieck betrachtet. Dies kann man nur dann tun, wenn die Kurve dies zuläßt, bei komplizierten Kurven muß man die aufeinanderfolgenden

Punkte so naheliegend wählen, daß der Kurventeil ohne größeren Fehler als eine Gerade betrachtet werden kann.

Die ganze Fläche des Polardiagrammes bekommt man, wenn man obigen Ausdruck von ∅ bis π integriert, d. h.

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^2 d\varphi.$$

Diese Fläche soll mit jener des Halbkreises gleich sein, also

$$F = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^2 d\varphi.$$

Hieraus wird:

$$r^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^2 d\varphi$$

oder

$$r = e_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^2 d\varphi}.$$

Der letzte Ausdruck gibt die effektive elektromotorische Kraft laut der auf Seite 51 aufgestellten Definition.

Bei der Behandlung der Wechselstromprobleme auf graphischem Wege lassen sich alle drei Methoden gut benutzen, am allgemeinsten arbeitet man aber mit dem Uhrzeiger- oder Vektordiagramm, weshalb auch wir in den nachfolgenden graphischen Darstellungen stets diese Methode benutzen werden.

Summation periodisch veränderlicher Größen.

Bei der Summation periodisch veränderlicher Größen von gleicher Periode verfährt man in derselben Weise, als bei der Zusammensetzung der Kräfte oder Geschwindigkeiten. Wenn zwei Vektorgrößen gegeben sind, welche einen Phasenunterschied haben, dann bildet man in der üblichen Weise ein Vektordiagramm, die Diagonale, welche sich durch die Verbindung der Endpunkte der Komponentgrößen ergibt, wird die gesuchte resultierende Größe sein.

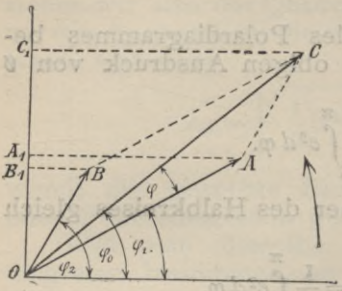

Fig. 25.

In Fig. 25 sind die beiden zusammenzusetzenden Vektoren OA und OB. Ihr Schwingungszustand ist im fraglichen Zeitpunkte durch die Phasenwinkel φ_1 und φ_2 gegeben. Die Resultierende erhält man, wenn von den Endpunkten A und B zwei zu OB, beziehungsweise zu OA parallele Geraden gezogen werden und ihr Schnittpunkt C mit O verbunden wird. Die Größe des resultierenden Vektors ist durch Carnots Formel bestimmt und zwar:

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{OA}\,\overline{OB}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$\varphi_2 - \varphi_1$ ist der Phasenunterschied zwischen den beiden Komponentgrößen.

Aus der Figur ist ersichtlich, daß

$$\overline{B_1 C_1} = \overline{BC}\sin\varphi_1 = \overline{OA}\sin\varphi_1 = \overline{OA_1}$$

weshalb

$$\overline{OC_1} = \overline{OC}\sin\varphi_o = \overline{OB_1} + \overline{OA_1}$$

wo φ_o jenen Phasenwinkel bedeutet, welcher den Schwingungszustand der Resultante im fraglichen Zeitpunkt bestimmt.

Bei der angegebenen Drehrichtung der Vektoren eilt $\overline{OB}$ in der Phase zu $\overline{OA}$ um den Winkel

$(\varphi_2 - \varphi_1)$ vor. Die Resultante bildet mit $\overline{OA}$ den Phasenwinkel φ, wobei $\varphi_0 = \varphi + \varphi_1$. Es ist ersichtlich, daß $\overline{OC}$ zu $\overline{OA}$ in der Phase eilt, zu $\overline{OB}$ dagegen in der Phase zurückbleibt. Je größer eine Komponente, um so näher liegt zu ihr die Resultante und um so näher kommt ihr Wert zu jener der Komponente.

Wenn man Vektorgrößen zu summieren hat, darf man nur dann algebraische Summation vornehmen, wenn die Vektoren keinen Phasenunterschied oder einen solchen von 180^0 haben, denn nur in diesen zwei Fällen liegen die Komponenten in einer und derselben Geraden mit der Resultante. In allen anderen Fällen muß eine geometrische Addition stattfinden und in diesen Fällen können algebraische Summen nur aus den Vertikalprojektionen gebildet werden, oder mit anderen Worten:

Bei periodisch veränderlichen Größen von gleicher Periode und gegebenem Phasenunterschiede können nur die Momentwerte algebraisch summiert werden. Für die Maximalwerte ist die geometrische Zusammensetzung der Komponenten zu benutzen.

Sind mehrere periodisch veränderliche Größen von gleicher Periode durch ihre Vektoren gegeben (Fig. 26), dann verfährt man in der Weise, daß man zuerst zwei Vektoren, I und II, zu einer Resultierenden R_1 zusammensetzt, dann R_1 mit III zu R_2 vereinigt u. s. w., bis auch die letzte Komponente zur Bildung von einer Resultierenden benutzt ist. Die letzte resultierende ist die gesuchte resultierende Vektorgröße aller Komponentenvektoren.

Betrachten wir die Lagen der Punkte $O\,A\,B\,C\,D\,E$, so sehen wir, daß der resultierende Vektor auch bestimmt werden kann, ohne die Zwischenresultierenden $R_1 R_2 \ldots R_4$ kennen zu müssen. Man bildet durch Parallelen mit den einzelnen Vektoren das Vektorpolygon $O A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ und verbindet O mit E_1. Diese Schlußlinie wird die gesuchte Resultante sein, ihre Größe, Lage und Richtung ist vollkommen bestimmt. Die Richtung ist dadurch gegeben, daß sie mit der Richtung der Komponenten entgegengesetzt ist, gerade so, wie bei der Zusammensetzung der Kräfte oder Geschwindigkeiten. Wenn also in unserem Falle die Richtung

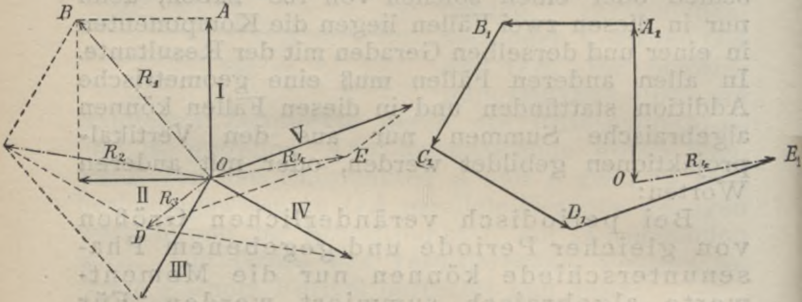

Fig. 26.

der Komponenten im Vektorpolygon der Richtung der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist, wird die Richtung der resultierenden R_4 durch den eingezeichneten Pfeil gegeben.

Aus Fig. 25 ist ersichtlich, daß

$$O C_1 = O C \sin \varphi_o = O A \sin \varphi_1 + O B \sin \varphi_2.$$

Sind daher mehrere Vektoren gegeben, welche verschiedene Phasenwinkel haben, dann wird der resultierende Vektor durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$R_n \sin \varphi_n = \sum_1^n r_i \sin \varphi_i$$

und

$$R_n \cos \varphi_n = \sum_1^n r_i \cos \varphi_i$$

wo i die Anzahl der Komponenten, φ_i die entsprechenden Phasenwinkel, φ_n aber den Phasenwinkel des resultierenden Vektors bedeutet.

Die Größe dieses Winkels kann aus obigen Gleichungen bestimmt werden, und zwar wird:

$$tg\, \varphi_n = \frac{\sum_1^n r_i \sin \varphi_i}{\sum_1^n r_i \cos \varphi_i}$$

Bei der Bildung des Produktes von periodisch veränderlichen Größen verfährt man in derselben Weise wie bei der Summation. Man bildet die Momentwerte, das Produkt dieser Werte gibt im fraglichen Zeitpunkte das gesuchte Ergebnis. Sind zwei Momentwerte durch die Ausdrücke

$$e_1 = E_1 \sin \varphi_1$$

und

$$e_2 = E_2 \sin \varphi_2$$

gegeben, dann ist in diesem Zeitpunkte das Produkt beider veränderlichen Größen

$$e_1\, e_2 = e = E_1\, E_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

Ist $e_1 = e_2 = e_o$ und $E_1 = E_2 = E_o$ und sind beide Größen in gleicher Phase, d. h. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_o$, dann nimmt obiger Ausdruck die einfachere Form an:

$$e_o^2 = E_o^2 \sin^2 \varphi_o.$$

Das ist der Fall, wenn das Quadrat einer periodisch veränderlichen Größe gebildet wird, wie es wir auch auf Seite 52 getan haben, um die Beziehung zwischen der effektiven und der maximalen elektromotorischen Kraft finden zu können.

Der besseren Übersichtlichkeit halber wollen wir die Summation und die Multiplikation zweier periodisch veränderlicher Größen von gleicher Periode vornehmen.

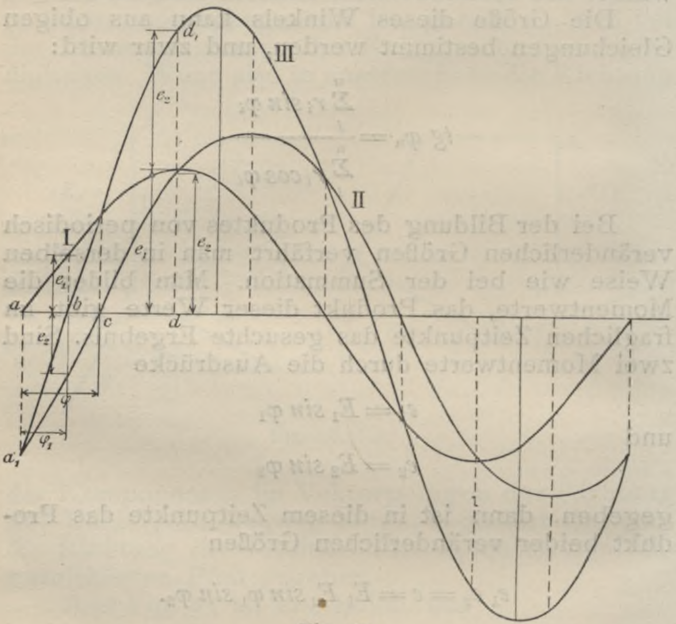

Fig. 27.

In Fig. 27 seien I und II die Sinuskurven der zu summierenden Wechselgrößen.

Wir wissen, daß bei Wechselgrößen nur die zu demselben Zeitpunkte gehörenden Momentwerte summiert werden können und dementsprechend müssen wir die Summation der durch I und II dargestellten veränderlichen Größen bewerkstelligen.

Nehmen wir an, daß die Momentwerte von I und II e_1, beziehungsweise e_2 sind. Im Zeitpunkte a ist $e_1 = o$ und e_2 negativ, folglich wird ein Punkt der resultierenden Kurve mit a_1 zusammenfallen und negativen Wert besitzen. Im Diagramm nimmt man immer die obere Hälfte als positiv, die untere dagegen als negativ an. Sind e_1 und e_2 einander gleich, aber in ihrem Vorzeichen entgegengesetzt, dann ist ihre Summe Null und die resultierende Kurve schneidet die horizontale Achse. Dieser Lage entspricht Punkt b.

Weitergehend sehen wir, daß bei $\underline{c}$ $e_2 = o$ und e_1 einen positiven Wert hat, dementsprechend schneidet in der zu $\underline{c}$ gehörenden Vertikalen die resultierende Kurve III die Sinuslinie I. Bei d sind sowohl e_1, als auch e_2 positiv, die Summe beider ist positiv und gibt einen weiteren Punkt d_1 der Kurve III u. s. w. Im absteigenden Teile der Sinuskurven I und II geschieht die Summation in derselben Weise wie zuvor und dasselbe steht für die negativen Halbwellen. Bei diesen letzteren summieren sich negative Werte, man erhält ein negatives Maximum, von welchem die resultierende Kurve wieder stetig dem Nullpunkte sich nähert. Überall da, wo eine Kurve die Abscissenachse schneidet, fällt der entsprechende Punkt der resultierenden Kurve mit einem Punkte der anderen Kurve zusammen.

Die Multiplikation periodisch veränderlicher Größen auf graphischem Wege ist in Fig. 28 dargestellt. Die gegebenen Kurven sind I und II. Die Momentwerte für jeden Zeitpunkt müssen miteinander multipliziert werden, wenn also der eine Momentwert Null ist, dann wird auch das Produkt Null und die resultierende Kurve III schneidet die Abscissenachse. Während bei der Summation die Nullpunkte der Kurve III zwischen die zwei Nullpunkte der gegebenen Kurven fallen, liegen bei der Multiplikation der periodischen Größen die Nullpunkte der resultierenden Kurve mit denen der Kurven I und II zusammen.

Bei der Konstruktion der Kurve III verfährt man folgendermaßen. Man wählt für die Momentwerte einen Maßstab und multipliziert in den einzelnen Zeitpunkten die zwei zusammengehörenden

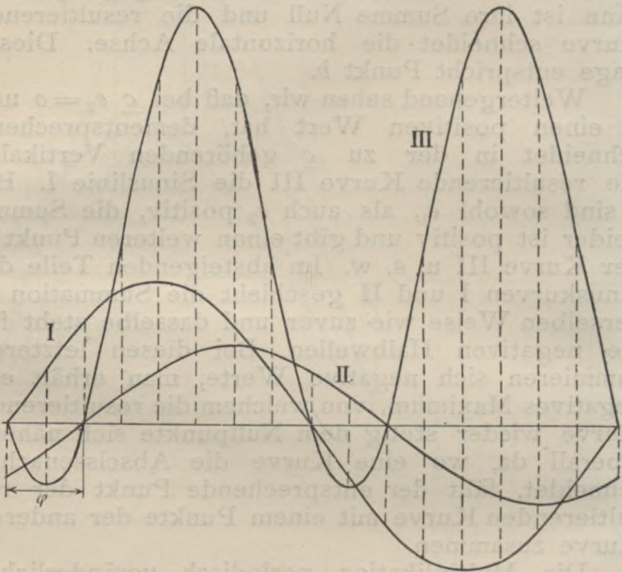

Fig. 28.

Momentwerte. Das Produkt trägt man im gewählten Maßstabe auf und erhält dadurch einen Punkt der gesuchten Kurve.

Aus der Figur ist ersichtlich, daß positive und negative resultierende Kurventeile sich ergeben. Wenn der eine Momentwert im positiven, der dazugehörige dagegen im negativen Teile des

Diagrammes liegt, dann ist ihr Produkt negativ und die resultierende Kurve liegt unterhalb der Abscissenachse. Bei gleichen Vorzeichen, wenn also beide Momentwerte positiv oder negativ sind, ist ihr Produkt positiv und dieser Teil der resultierenden Kurve liegt oberhalb der Abscissenachse.

Bei allen diesen Zusammensetzungen der Wechselgrößen dürfen wir nicht vergessen, daß diese Verhältnisse nur dann bestehen, wenn die periodisch veränderlichen Größen von gleicher Periode sind und in ihren Änderungen dem Sinusgesetze folgen.

Bestimmung des Arbeitseffektes eines Wechselstromes.

Wie bekannt, ist bei Gleichstrom die auf die Zeiteinheit fallende Arbeit, der Effekt durch die Formel gegeben

$$W = e\,i$$

wenn e die elektromotorische Kraft, i die Stromstärke bedeutet. Will man also bei Gleichstrom den Effekt messen, dann mißt man den Wert der elektromotorischen Kraft in Volt, die Stromstärke in Ampère, bildet das Produkt beider und erhält den gesuchten Effekt in Watt.

Bei Wechselströmen würde diese Berechnungsweise nur dann zu richtigen Ergebnissen führen, wenn die elektromotorische Kraft und die Stromstärke keine Phasendifferenz haben, d. h. wenn beide zu gleichen Zeiten ihre Null- beziehungsweise Maximalwerte erreichen, denn nur in diesem Falle treten in den einzelnen Zeitpunkten jene zusammengehörigen Momentwerte auf, deren einfaches, nach obiger Formel gebildetes Produkt den richtigen Wert des Effektes ergibt.

Dieser Fall ist aber bei den Wechselströmen sehr selten, denn es treten gewöhnlich störende Ursachen auf, die eine Phasenverschiebung zwischen der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke verursachen. Wir müssen daher eine allgemeinere Form des Ausdruckes des Arbeitseffektes finden, welche nicht nur für den Fall der Phasengleichheit, sondern auch dann Giltigkeit hat, wenn zwischen

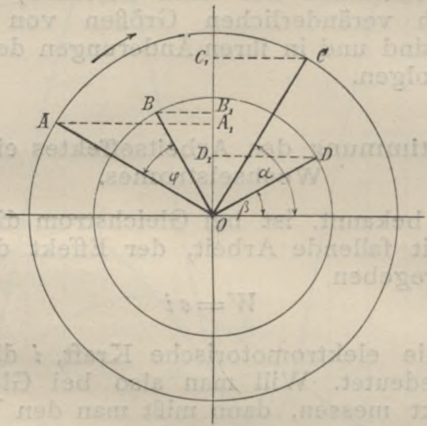

Fig. 29.

Strom und elektromotorischer Kraft eine Phasenverschiebung besteht.

Bei der Ableitung dieser Formel gehen wir wieder, wie bei der Bestimmung des effektiven Wertes, von den konjugierten Werten aus. Seien in Fig. 29 der Stromstärke $\overline{OA}$ und der elektromotorischen Kraft $\overline{OB}$ entsprechende konjugierte Werte $\overline{OC}$, beziehungsweise $\overline{OD}$. Die Phasendifferenz zwischen beiden ist φ, und zwar bei den eingezeichneten Winkelgrößen wird

$$\varphi = \alpha - \beta$$

da

$$\overline{OC} \perp \overline{OA} \text{ und } \overline{OD} \perp \overline{OB}$$

ist.

Im angegebenen Zeitpunkte sind die Momentwerte

$$\overline{OD_1} = e = \overline{OD} \sin\beta = E_{max} \sin\beta$$

und

$$\overline{OC_1} = i = \overline{OC} \sin\alpha = J_{max} \sin\alpha$$

da die Vektoren die Maximalwerte der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke bedeuten.

Der Arbeitseffekt wird durch das Produkt der beiden letzten Gleichungen für den fraglichen Zeitpunkt gegeben, also

$$A = e\,i = E_{max} \sin\beta\, J_{max} \sin\alpha.$$

Um den Wert des Effektes für eine Periode finden zu können, stellen wir dieselben Gleichungen auch auf die konjugierten Werte auf, also

$$\overline{OB_1} = e' = \overline{OB} \sin(90^0 + \beta) = E_{max} \cos\beta$$

beziehungsweise

$$\overline{OA_1} = i' = \overline{OA} \sin(90^0 + \alpha) = J_{max} \cos\alpha.$$

Der Momentwert der Arbeit in diesem Falle wird:

$$A' = e'\,i' = E_{max} \cos\beta\, J_{max} \cos\alpha.$$

Die Summe der so erhaltenen Arbeitseffekte ist

$$A + A' = e\,i + e'\,i' = E_{max} J_{max} \sin\alpha \sin\beta + E_{max} J_{max} \cos\alpha \cos\beta$$

oder

$$A + A' = E_{max} J_{max} (\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta).$$

Da aber

$$(\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos\varphi$$

wird

$$A + A' = e\,i + e'\,i' = E_{max} J_{max} \cos\varphi.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist bei konstanter Phasenverschiebung konstant, was also besagt, daß die Summe der Arbeitseffekte von konjugierten Werten eine konstante Größe ist. Verändert sich φ, der Phasenverschiebungswinkel, dann wird diese Konstante eine andere, sie bleibt jedoch für ein und dieselbe Phasenverschiebung unveränderlich.

Der gesuchte Effekt des Wechselstromes ist der Mittelwert der Momenteffekte, also:

$$W = \frac{e\,i + e'\,i'}{2} = \frac{E_{max} J_{max} \cos\varphi}{2}.$$

Anders geschrieben, wird:

$$W = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} \frac{J_{max}}{\sqrt{2}} \cos\varphi$$

d. h.

$$W = e_{eff}\, i_{eff} \cos\varphi.$$

Hieraus ersieht man, daß der Effekt eines Wechselstromes bei gegebener Phasenverschiebung dadurch ermittelt wird, daß man das Produkt der effektiven elektromotorischen Kraft mit der Stromstärke bildet und den so erhaltenen Wert mit dem Cosinus des Phasenverschiebungswinkels multipliziert.

Obige Gleichung ist die allgemeine Form des Effektausdruckes. Der Faktor $\cos\varphi$, von welchem der Wert der Leistung des Stromes abhängt, heißt der Leistungsfaktor.

Sind die Stromstärke und die elektromotorische Kraft in Phase, dann wird $\varphi = o$ und $\cos\varphi = 1$. In diesem Falle wird der Effekt in derselben Weise berechnet wie bei Gleichstrom, d. h.

$$W = e_{eff}\, i_{eff}.$$

Die Leistung wird mit dem Wattmeter gemessen, welcher aus einer fixen und einer beweglichen Spule besteht. Letztere ist auf die Ebene der fixen Spule senkrecht, ist mit einer Torsionsfeder versehen und kann hierdurch eine der dynamischen Wirkung entgegengesetzte Torsionskraft entfaltet werden. Die fixe Spule ist in den Hauptstromkreis geschaltet, die bewegliche Spule wird an die beiden Punkte angelegt, zwischen welchen die Leistung zu ermitteln ist. Da die bewegliche Spule induktionsfrei und von großem Widerstande ist, wird die durch sie fließende Stromstärke mit der Spannung proportional sein und mit ihr in Phase bleiben, während in der Hauptspule ein den Verhältnissen entsprechender, in der Phase zur Spannung verschobener Strom fließt. Die dynamische Wirkung wird demnach dem Effekte proportional sein, und nachdem diese dynamische Wirkung durch die Torsionswirkung der Feder kompensiert wird, kann die Größe der erteilten Torsion, d. h. der Torsionswinkel zur Berechnung des Wechselstromeffektes benutzt werden.

In Fig. 30 sind e und i die Sinuskurven der veränderlichen Wechselspannung, beziehungsweise Stromstärke, welche in gleicher Phase sind, bei welchen also $\cos\varphi = 1$.

w stellt die Effektkurve dar, jene Kurve, welche aus den jeweiligen Produkten der Momentwerte der Stromstärke und elektromotorischen Kraft entsteht. Diese Kurve hat einen Maximalpunkt ober den zusammenfallenden Maximalwerten von e und i, ihre Nullpunkte fallen auch mit jenen von

e und i zusammen. Das Wattmeter zeigt dementsprechend eine mittlere Leistung an, welche aus Fig. 30 bestimmt werden kann, wenn man die Fläche der beiden Kurventeile von w einem Parallelogramm gleich setzt, dessen Länge gleich der

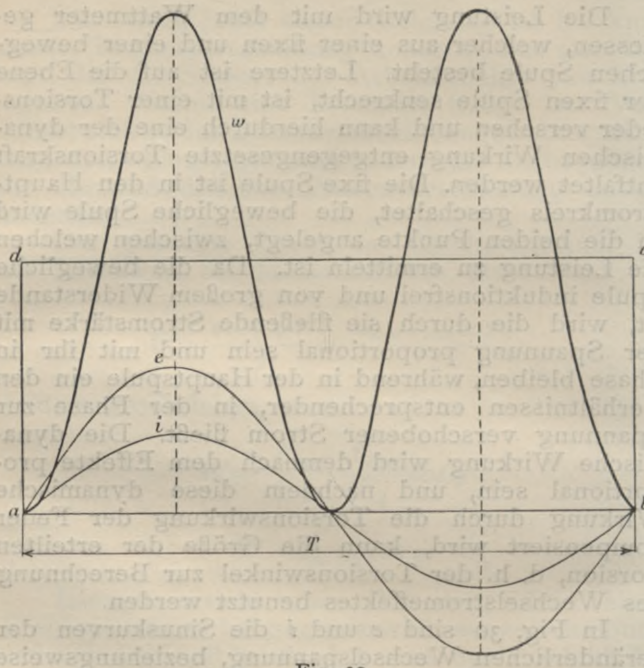

Fig. 30.

vollen Periode T der Wechselgrößen ist. Die Fläche der Kurve w ist mit der geleisteten effektiven Arbeit gleich, da ihre Ordinaten für jeden Zeitpunkt die effektive Leistung angeben, folglich wird die Höhe bc des Parallelogramms jenen Mittelwert der Leistung angeben, welchen das Wattmeter mißt.

Ist zwischen dem Strome und der elektromotorischen Kraft eine Phasenverschiebung von der Größe φ, dann ändern sich die Verhältnisse insofern, daß außer positiven Effekten auch negative entstehen. Die diesbezüglichen Kurven sind in Fig. 28 dargestellt. I stellt die Änderung der elektromotorischen Kraft, II jene der Stromstärke vor, während III die Effektkurve ist. Es ist zu ersehen, daß letztere auch Teile hat, welche unter der Abscissenachse liegen, d. h. negativ sind. Diese Kurventeile entsprechen jenen Fällen, in welchen die Momentwerte der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke einander entgegengesetzten Vorzeichens sind. Bei gleichen Vorzeichen ist das Produkt beider positiv und die Wattkurve liegt oberhalb der Abscissenachse.

Die unter der Abscissenachse liegenden Teile der Wattkurve schließen Flächen ein, deren Größe mit dem erwähnten negativen Effekt proportional ist. Der Gesamteffekt ergibt sich, wenn man aus den positiven Effekten die negativen subtrahiert, dies zeigt auch ein in solchen Stromkreis eingeschaltetes Wattmeter an. Der Effekt für eine Periode kann jetzt, ebenso wie im vorhergehenden Falle, mit der Höhe jenes Parallelogrammes proportional gesetzt werden, dessen Länge gleich einer Periode und dessen Flächeninhalt gleich mit jener Fläche ist, deren Größe aus der Differenz der den positiven und den negativen Effekten entsprechenden Flächen sich ergibt.

Bei gleicher elektromotorischer Kraft und Stromstärke wird der Gesamteffekt kleiner sein als im vorhergehenden Falle, seine Größe wird bei der konstanten Phasenverschiebung φ durch den Ausdruck

$$W = e_{eff}\, i_{eff} \cos \varphi$$

gegeben.

Interessant ist der Fall, wenn die Phasenverschiebung zwischen elektromotorischer Kraft und

Stromstärke gleich einer Viertelperiode wird. In diesem Falle ist $\varphi = 90^0$ und $\cos\varphi = 0$, was soviel sagt, daß der geleistete Effekt, nach der Formel

$$W = e_{eff}\, i_{eff} \cos\varphi = e_{eff}\, i_{eff} \cos 90^0 = 0$$

Null ist. Es kann also jetzt die elektromotorische Kraft und die Stromstärke beliebig groß werden,

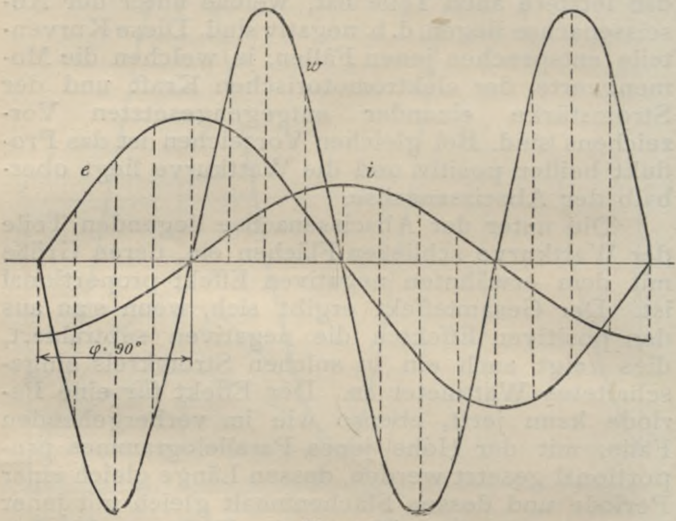

Fig. 31.

der Effekt des Wechselstromes wird Null sein, solange die Phasenverschiebung $\varphi = 90^0$, eine Viertelperiode ist, abgesehen davon, ob φ eine Phasenverspätung oder eine Phasenvoreilung bedeutet.

Graphisch diese Verhältnisse dargestellt, gelangen wir zur Fig. 31. e ist die Kurve der elektromotorischen Kraft, welche zur Stromstärke i in der Phase um eine Viertelperiode voreilt. Aus beiden Kurven wird die mit w bezeichnete Wattkurve konstruiert, welche gleich große positive und negative Teile hat. Die Differenz beider Flächenteile ergibt Null, dem zufolge auch die mittlere Leistung oder aber die Höhe des mit dieser Differenz gleichen Flächeninhalt besitzenden Parallelogrammes Null wird, da doch das Parallelogramm in diesem speziellen Falle keine Fläche haben kann.

Wir haben hier also einen Stromkreis, in welchem ein Strom fließt, der keine Arbeit leistet. Solchen Strom nennt man wattlosen Strom, jenen Strömen gegenüber, welche wirklichen Effekt leisten und Wattströme genannt werden. Die Größe des wattlosen Stromes hängt in einem Stromkreise von der Phasenverschiebung ab, je größer der Phasenverschiebungswinkel ist, um so größer ist der wattlose Strom, er erreicht sein Maximum, wenn die Phasenverschiebung 90^0 oder gleich einer Viertelperiode wird.

Die Phasenverschiebung spielt also in der Leistung eines Wechselstromes eine große Rolle, und will man eine je größere Leistung erreichen, dann muß man trachten, die Phasenverschiebung auf ein Minimum herabzudrücken.

Das Maximum der Leistung wird erreicht, wenn der Phasenwinkel Null ist, in diesem Falle ist der Effekt mit jenem Gleichstromeffekt gleich, dessen elektromotorische Kraft und Stromstärke mit den entsprechenden effektiven Wechselstromgrößen gleich sind.

Das bisher Besprochene diene nur zur allgemeinen Übersicht der Verhältnisse in Wechselstromkreisen, im nächsten und den nachfolgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, in welchem Maße die Leistung und die Phasendifferenzen sich ändern, wenn die Natur der Belastung eine andere wird.

IV. Kapitel.

Wechselstromkreise mit Ohmschem Widerstande und Selbstinduktion.

Fließt ein Gleichstrom durch eine Leitung, dessen Widerstand r Ohm ist, dann wird die Größe der Gleichstromleistung bei der Stromstärke i durch die Wärmemenge gegeben, welche dem Ausdrucke $i^2 r$ proportional ist.

Ein Wechselstrom hat dieselbe Leistung, wenn die effektive Stromstärke gleich mit obiger Gleichstromstärke ist, vorausgesetzt, daß dieser Wechselstrom in solchem Leiter fließt, der nur Ohmschen Widerstand besitzt, d. h. daß die entstehende Wärmemenge nur die sogenannte Drahtwärme ist. Sind im Stromkreise aber auch solche Leiter, die nächst Eisenmassen führen, wie z. B. Elektromagnete, Transformatoren, Drosselspulen etc., dann entstehen in den Eisenmassen infolge induktiver und magnetisierender Wirkungen Ströme, welche die Eisenmassen erwärmen und der Gesamteffekt des Stromes ergibt sich in solchen Fällen nicht nur aus der Drahtwärme, man muß vielmehr noch die anderen entstehenden Energieverluste auch in Betracht ziehen. Solche Verluste sind der Hysteresisverlust im Eisenkern, d. h. die Ummagnetisierungsarbeit und der Foucaultsche Verlust, welcher durch die in dem Eisen und Metallmassen induzierten Strömen entsteht und ebenfalls in Wärme umgesetzt wird. Diesen letzteren nennt man auch Wirbelstromverlust.

Die Natur der Ummagnetisierungsarbeit geht aus folgendem hervor. Wenn man ein zuvor demagnetisiertes Eisenstück der Wirkung fortwährend wachsender magnetisierender Kraft unterwirft, d. h. wenn man z. B. bei einem Elektromagneten die Intensität des magnetisierenden Stromes gleichmäßig verstärkt und die Intensität des entstehenden magnetischen Feldes mißt, dann bemerkt man, daß letztere anfangs sehr rasch zunimmt, später langsamer, so daß über eine gewisse Grenze hinaus unverhältnismäßig starke Ströme nötig sind, um das magnetische Feld nur wenig verstärken zu können. Dieser Vorgang ist in Fig. 32 dargestellt.

Die Abscissenachse OX enthält die Werte der magnetomotorischen Kraft, während auf die Ordinatenachse OY die Kraftlinienzahl, d. h. die Anzahl der auf 1 cm^2 senkrecht zur Richtung der Kraftlinien liegenden Fläche fallenden Kraftlinien getragen wird. Diese Kurve ist bei den verschiedenen Eisensorten verschieden, am raschesten steigt sie bei ausgeglühtem Schmiedeeisen, am langsamsten bei Gußeisen. Bei Schmiedeeisen genügt also ein schwächerer magnetisierender Strom, um ein magnetisches Feld von bestimmter Intensität hervorzurufen, als unter sonst gleichen Umständen bei Gußeisen. In Fig. 32 ist I die Magnetisierungskurve für Schmiedeeisen, II diejenige für Gußeisen.

Wenn man den Magnetisierungsstrom oder die magnetomotorische Kraft nur bis zu einer gewissen Grenze anwachsen läßt — diese Grenze ist praktisch dort, wo der Zuwachs der Kraftlinien nur mehr schwach erfolgt — und dann den Strom fortwährend abschwächt, dann fällt auch die Intensität des magnetischen Feldes, doch nicht in derselben Weise, als sie angewachsen war, sondern die ihr entsprechende Kurve bleibt ober der ersten

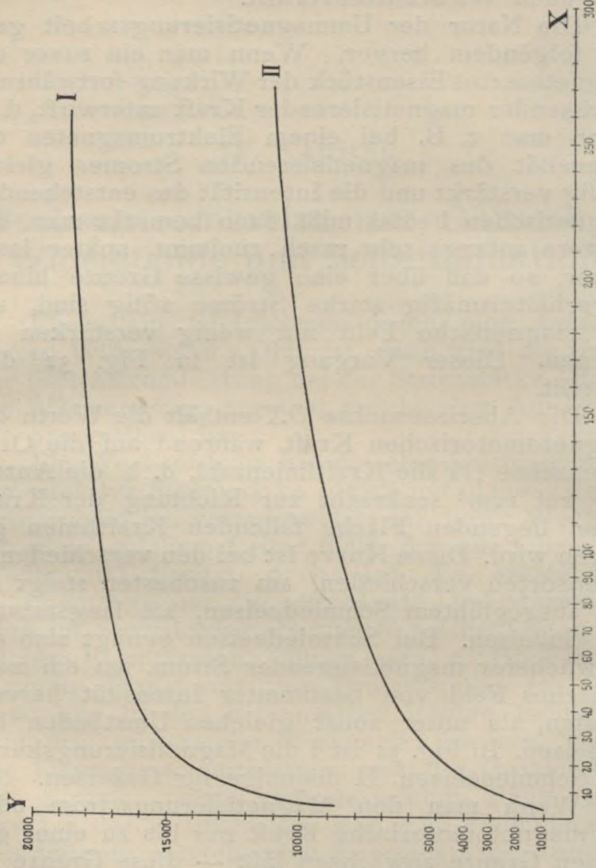

Fig. 32.

Kurve. Wenn der Strom bereits Null wird, verschwinden die Kraftlinien nicht, sondern bilden

den sogenannten remanenten Magnetismus. Es muß eine entgegengesetzt wirkende magnetomotorische Kraft angewendet werden, um das magnetische Feld völlig verschwinden zu lassen und die Größe der Kraft, welche dazu nötig war, heißt Coërcitivkraft.

Die Coërcitivkraft ist bei den verschiedenen magnetischen Körpern verschieden groß, bei Schmiedeeisen ist sie am kleinsten, bei glashartem Stahl am größten.

Wird nun der magnetisierende Prozeß weitergeführt im entgegengesetzten Sinne, dann wird die Polarität des Feldes auch entgegengesetzt, d. h. die Kraftlinien ändern ihre Richtung und es entsteht eine der Magnetisierungskurve ähnliche Kurve unter der Abscissenachse. Nach Erreichung der oben angegebenen Grenze die magnetomotorische Kraft wieder abschwächend, kehrt die Kurve ebenso wie früher auf einem anderen Wege zurück, bildet beim Schnittpunkte mit der Ordinatenachse das Maß des negativen remanenten Magnetismus und wird endlich die magnetomotorische Kraft nochmals bis zum positiven Maximum gesteigert, dann schließt sich der letzte Kurventeil beim höchsten Punkte mit der ersten aufsteigenden Kurve.

Durch diese Versuchsanordnung erhält man eine durch Kurven umschlossene Fläche, welche die Hysterisisschleife genannt wird. Die eben beschriebene Erscheinung ist die magnetische Hysteresis. In Fig. 33 sind die Hysteresisschleifen für verschiedene magnetische Materalien dargestellt. Aus diesem ist ersichtlich, daß die Hysteresisschleife um so breiter wird, je größer die Cöercitivkraft ist, oder mit anderen Worten, je magnetisch härter das Material ist.

Warburg hat gezeigt, daß der Flächeninhalt der Hysteresisschleife proportional jener Arbeit ist, welche angewendet werden muß, um das Material ummagnetisieren zu können. Nachdem diese Arbeitsmenge bei jedem vollen magnetischen Kreisprozesse zu leisten ist, kann man leicht ein-

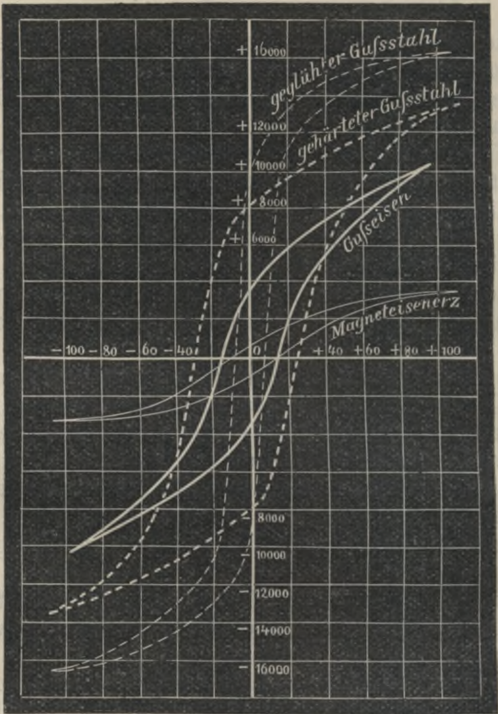

Fig. 33.

sehen, daß die gesamte Hysteresisarbeit bei Wechselströmen eine bedeutende sein muß, da bei diesen einer jeden vollen Periode ein magnetischer Kreisprozeß entspricht und die Periodenanzahl des Wechselstromes gewöhnlich eine große ist. Für

Wechselstromapparate kann man also nur magnetisch weiche Materiale verwenden, bei denen die Hysteresisschleifen schmal sind. Als bestes Material erwies sich weiches, ausgeglühtes Schmiedeeisen, welches in Blech-, Band- oder Drahtform zur Verwendung kommt.

Die Ursache, weshalb bei Wechselstromapparaten und -Maschinen die Eisenkerne aus Blech oder Draht verfertigt werden, liegt darin, daß im Eisenkerne nicht nur Hysteresisverluste auftreten, sondern auch eine andere Erscheinung entsteht, nämlich die, daß im Eisen durch induktive Wirkungen elektrische Wechselströme entstehen, welche sich im Eisenkerne ausgleichen. Wenn aber ein Strom bei gegebener elektromotorischer Kraft durch einen Leiter fließt, wird er um so stärker, je kleiner der Gesamtwiderstand des Leiterkreises ist. Bei den obengenannten Strömen, welche man mit Wirbelströmen oder Foucaultschen Strömen bezeichnet, ist Gelegenheit vorhanden, sich entwickeln zu können, da die Eisenkerne gewöhnlich große Dimensionen besitzen. Diese Wirbelströme verlaufen in einer, auf die Richtung der induzierenden Kraftlinien senkrechten Ebene, wenn man also den Eisenkern parallel zu der Kraftlinienrichtung aufteilt, dann wird der Widerstand des Wirbelstromkreises vergrößert, ohne daß man den magnetischen Widerstand des magnetischen Kreises vergrößern würde und die Wirbelströme können sich nicht stark entwickeln. Wenn aber die Stromstärke klein ist, dann wird die entstehende Wärmemenge auch klein sein, d. h. der Verlust durch Wirbelströme kann durch geeignete Aufteilung des Eisenkernes vermindert werden.

Sowohl die Drahtwärme, als auch die der Hysteresis entsprechende Wärmemenge und der Wirbelstromverlust sind verlorene Energiemengen, da sie durch Ausstrahlung in die umgebende Luft abgegeben werden. Bei Apparaten aber, welche durch Wechselströme durchflossen werden und Selbstinduktion haben, kann man auch eine andere Erscheinung finden, welche keine Energievergeudung bildet, sondern welche beim Entstehen eine gewisse Energie erfordert, dieselbe aber beim Verschwinden wieder der Energiequelle zurückgibt. Diese Erscheinung ist die Entstehung und das Verschwinden des magnetischen Feldes.

Zur Hervorrufung des magnetischen Feldes ist eine gewisse Energiemenge nötig, d. h. um den Äther in den, dem magnetischen Feld entsprechenden Spannungszustand versetzen zu können, benötigen wir die obengenannte Energiemenge. Bei Wechselströmen ändert sich das magnetische Feld infolge Änderung der magnetomotorischen Kraft, oder mit anderen Worten, es verändert sich der Spannungszustand des Äthers nach gewissen Gesetzen, welche von der erregenden Stromstärke abhängen. Dieser Spannungszustand hat ebenso wie der Strom Null-, positive und negative Maximalwerte, seine Änderungen wirken auf den Leiter, um den es entsteht, zurück und wir haben vor uns die Erscheinung der Selbstinduktion.

Die Selbstinduktion hat, wie alle Induktionserscheinungen eine hemmende Wirkung. Der durch sie hervorgerufene Strom heißt Extrastrom, seine Richtung ist, da er immer entgegengesetzt dem induzierenden Strome wirkt, bei Anwachsen des letzteren eine solche, welche dies Anwachsen zu verhindern trachtet, bei abnehmender Stromstärke ist sie dagegen dem induzierenden Strome gleichgerichtet, d. h. sie will das Verschwinden desselben verzögern. Wenn also im ersten Falle eine Arbeit nötig war, um den Strom dem Selbstinduktionswiderstande gegenüber in die Leitung zu senden, so bekommt man im zweiten Falle eine Energiemenge zurück, welche vom Extrastrome herrührt und welche gleich groß jenem Energieaufwande ist, welchen man im ersten Falle mehr benötigte.

Hieraus ist ersichtlich, daß die Selbstinduktion zwar als ein Widerstand sich verhält, jedoch keine Energievergeudung bedeutet. Sie hat aber eine andere Erscheinung zur Folge, nämlich die, daß bei Selbstinduktion der Strom in der Phase der elektromotorischen Kraft gegenüber zurückbleibt, sie verursacht also eine Phasenverschiebung zwischen Strom und elektromotorischer Kraft. Diese Phasenverhältnisse werden wir später eingehender behandeln.

Nachdem die Selbstinduktion einen induktiven Widerstand bildet, ist die Größe dieses Widerstandes durch die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion bestimmt. Der Wert dieser elektromotorischen Kraft hängt von der Anzahl der verschwindenden Kraftlinien, also von der Stärke des Erregerstromes, von der Geschwindigkeit, mit welcher die Kraftlinien verschwinden und von einem Koeffizienten ab, dessen Größe von der Gestalt des Leiters, von der Anzahl der Windungen und von den magnetischen Eigenschaften des Eisenkernes bedingt wird. Nennen wir die Erregerstromstärke J, die Geschwindigkeit, mit welcher die Kraftlinien sich ändern, ω und den genannten Koeffizienten L, dann ist die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion E_s:

$$E_s = J \omega L.$$

L ist der sogenannte Selbstinduktionskoeffizient des Leiters. Solange zwischen der Erregerstromstärke und der Anzahl der erzeugten Kraftlinien eine einfache Proportionalität besteht, ist L konstant. Wenn zur Erzeugung von N Kraftlinien die Stromstärke i nötig war, dann wird die Stromstärke Eins die Kraftlinien L erzeugen, d. h.

$$\frac{N}{i} = \frac{L}{1}$$

und hieraus

$$N = L i$$

was soviel sagt, daß der Selbstinduktionskoeffizient eines Leiters gleich der Zahl jener Kraftlinien ist, welche durch die Einheit der diesen Leiter durchfließenden Stromstärke induziert wird.

Im Ausdrucke der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion ist ω nichts anderes als die Winkelgeschwindigkeit des Stromvektors, da die Periodenzahl des magnetischen Feldes gleich jener der Stromstärke ist. Wenn also zu einer vollen Periode, d. h. zu einer vollen Umdrehung des Vektors die Zeit T nötig ist, dann wird die Winkelgeschwindigkeit durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

gegeben, oder nachdem in einer Sekunde $\sim$ Perioden vollbracht werden, ist die Dauer einer Periode

$$T = \frac{1}{\sim}$$

und demzufolge

$$\omega = 2\pi \sim .$$

Somit kann E_s auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$E_s = J \,.\, 2\pi \sim .\, L = J \frac{2\pi}{T} L.$$

Um nun untersuchen zu können, inwiefern das Ohmsche Gesetz Giltigkeit für Stromkreise hat, die Ohmschen Widerstand und Selbstinduktion besitzen, müssen wir uns mit den Phasenverhältnissen vertraut machen.

Sei in Fig. 34 OA die Lage des Vektors der Stromstärke in einem gegebenen Zeitpunkt. Wenn der Strom verschwindet, verschwindet auch das magnetische Feld, ist der Strom maximal, dann wird die Feldintensität auch maximal sein, d. h. die Stromstärke und das magnetische Feld sind miteinander in Phase, oder was dasselbe bedeutet, die Vektore der Stromstärke und des magnetischen Feldes fallen in dieselbe Gerade, sie haben dieselbe Richtung. Wenn also $OA = J$ der Stromvektor ist, dann wird z. B. $OB = N$ der Vektor des magnetischen Feldes sein.

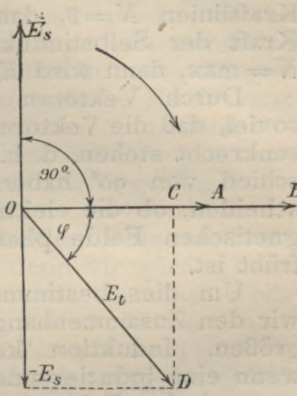

Fig. 34.

Fließt ein Strom durch einen Leiter, dessen Ohmscher Widerstand R beträgt, dann entsteht ein Spannungsverlust, dessen Größe durch $JR = E_n$ gegeben ist. Nachdem R konstant und nur J veränderlich ist, folgt, daß dieser Spannungsverlust sich gerade so ändert wie die Stromstärke, d. h. dieser wird auch eine Wechselgröße sein, die ihre Null- und Maximalpunkte hat und durch einen Vektor dargestellt werden kann.

Welche ist die relative Lage dieses Vektors in unserem Falle? E_n ist das Produkt des Widerstandes in die Stromstärke und da R konstant, wird E_n Null, wenn J Null, und maximal, wenn J maximal. Das sagt soviel, daß E_n und J miteinander in Phase sind, oder daß ihre Vektoren zusammenfallen. Sei der Maximalwert von E_n gegeben, dann wird $OC = E_n$.

Anders verhält es sich mit der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion. Aus den vorhergehenden Kapiteln wissen wir, daß die induzierte elektromotorische Kraft am größten, wenn die Änderung der Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit am größten. Die relativ größte Änderung in der Zahl der Kraftlinien tritt aber dann ein, wenn die Kraftlinien verschwinden oder entstehen, denn in diesen Fällen wird aus einem endlichen Wert ein unendlich kleiner und umgekehrt, demzufolge in diesen Fällen eine maximale elektromotorische Kraft induziert wird. Wenn also die Zahl der Kraftlinien $N = \emptyset$, dann ist die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion $E_s = \max$, und wenn $N = \max$, dann wird $E_s = \emptyset$.

Durch Vektoren dargestellt, bedeutet dies soviel, daß die Vektoren von N und E_s aufeinander senkrecht stehen, d. h. in der Phase einen Unterschied von 90° haben. Es ist nur noch zu entscheiden, ob die elektromotorische Kraft zum magnetischen Felde phasenverspätet oder — verfrüht ist.

Um dies bestimmen zu können, untersuchen wir den Zusammenhang zwischen beiden Wechselgrößen. Induktion kann nur dann stattfinden, wenn eine induzierende Ursache, z. B. Strom oder magnetisches Feld oder eine Bewegung vorhanden ist. In unserem Falle ist das Vorhandensein der induktiven Wirkung den Kraftlinien zuzuschreiben, die Kraftlinien bilden also die Ursache der Induktionserscheinung. Erst müssen die Kraftlinien entstehen oder verschwinden, damit die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion entstehen kann, folglich muß letztere dem magnetischen Felde in Phase nachstehen, oder wir können sagen:

Der Vektor der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion bleibt in der Phase hinter dem Vektor des magnetischen Feldes um 90° oder eine Viertelperiode zurück, oder nachdem der Strom mit dem magnetischen Felde in gleicher Phase ist, eilt der Strom der elektromotorischen Kraft in der Phase um eine Viertelperiode voraus.

In Fig. 34 wird demnach E_s die Lage des Vektors der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion darstellen.

Wenn nun ein Stromkreis Ohmschen Widerstand und Selbstinduktion besitzt, und wollen wir, daß in diesem Stromkreise ein Strom von gegebener Stärke fließe, dann müssen wir eine elektromotorische Kraft wirken lassen, welche nicht nur den Ohmschen Spannungsverlust, sondern auch die Gegenkraft der Selbstinduktion bewältigen kann. Die gesamte elektromotorische Kraft setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus einem, welcher dem Ohmschen Spannungsverlust gleich ist, und einem, welcher die Gegenkraft der Selbstinduktion kompensiert.

Immerhin dürfen diese beiden Teile nicht algebraisch summiert werden, denn wir würden dann zu falschen Resultaten gelangen, da diese Teile zwar von gleicher Periode, jedoch in der Phase nicht übereinstimmend sind. Wie aus der Figur ersichtlich, sind die Komponentspannungen: $OC = E_n$ und die kompensierende Spannung $-E_s$. Diese bilden miteinander im Vektordiagramm einen Phasenwinkel von 90°, weshalb ihre Resultante $OD = E_t$ durch jene Diagonale gegeben ist, welche durch den gemeinsamen Schnittpunkt O hindurchgeht.

Nun haben wir die resultierende elektromotorische Kraft E_t durch ihren Vektor OD erhalten, und ersehen zugleich aus der Figur, daß diese elektromotorische Gesamtkraft in der Phase dem Strome voreilt. Der Phasenverschiebungswinkel ist φ.

Betrachten wir die Figur, so sehen wir, daß bei gleichem Ohmschen Widerstande φ um so größer wird, je größer $-E_s$, d. h. je größer die Selbstinduktion. Will man daher in einem Wechselstromkreise erreichen, daß die elektromotorische Kraft und die Stromstärke in Phase bleiben, dann darf keine Selbstinduktion vorhanden sein. Solche induktionslose Belastungen sind die Glühlampen. Es gibt aber Methoden, welche erreichen lassen, daß bei gegebener induktiver Belastung die Phasenverschiebung auf Null herabgedrückt wird, mit diesen werden wir uns später befassen.

Sehen wir nun, wie sich die elektromotorische Gesamtkraft mit den Komponentspannungen ausdrücken läßt.

Aus dem rechtwinkeligen Dreieck OCD kann die gesuchte Größe als die Diagonale folgendermaßen bestimmt werden.

$$\overline{OD^2} = \overline{OC^2} + \overline{CD^2}$$

oder

$$E_t^2 = E_n^2 + (-E_s)^2 = E_n^2 + E_s^2.$$

Die entsprechenden Werte substituiert, wird

$$E_t^2 = J^2 R^2 + L^2 \omega^2 J^2$$

und hieraus

$$E_t = J\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}.$$

Die Stromstärke wird bei gegebener elektromotorischer Kraft

$$J = \frac{E_t}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

sein.

Dies ist der Ausdruck für das Ohmsche Gesetz in Wechselstromkreisen, welche außer dem Ohmschen Widerstande auch induktiven Widerstand haben. Der letztere kommt im Nenner zur Geltung, es verringert also bei gegebener elektromotorischer Kraft die Stromstärke. Wenn im Stromkreise nur

Glühlampen oder solche Apparate sind, welche keine Selbstinduktion besitzen, bei denen also $L = O$ ist, dann nimmt die letzte Gleichung die einfachere Form an:

$$J = \frac{E_t}{\sqrt{R^2}} = \frac{E_t}{R}$$

d. h. in diesem Falle ist Ohms Gesetz ebenso ohne jede Änderung giltig, wie in jedem Gleichstromkreise.

Aus der vorletzten Gleichung ist ersichtlich, daß der induktive Widerstand nicht nur von dem Selbstinduktionskoeffizienten, sondern auch von der Winkelgeschwindigkeit abhängt. Nachdem aber letztere eine Funktion der Periodenzahl ist, kann man sagen, daß die Stromstärke bei gegebener elektromotorischer Kraft und Selbstinduktionskoeffizienten um so kleiner ist, je größer die Periodenzahl des Wechselstromes wird.

Den Ausdruck

$$\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

nennt man die Impedanz des Wechselstromes. Ihre Größe ergibt sich aus dem vorhandenen Ohmschen Widerstande und der Selbstinduktionswirkung und sie verhält sich so als ein Widerstand.

Die Impedanz, was ihre Größe betrifft, kann nach obigem Ausdrucke als die Diagonale eines rechtwinkeligen Dreieckes aufgefaßt werden, dessen eine Kathete der Ohmsche Widerstand, die andere Kathete der induktive Widerstand ist. Den letzteren, da er eigentlich eine Induktionswirkung ist, nennt man Induktanz.

Will man daher bei gegebenem Ohmschen Widerstande und gegebener Induktanz den resultierenden Widerstand, die Impedanz des Stromkreises ermitteln, dann verfährt man graphisch in der Weise, daß man zwei aufeinander senkrechte

Linien zieht, auf diese den Wert von R und $L\omega$ aufträgt und die Endpunkte miteinander verbindet (Fig. 35). Die Länge dieser Verbindungslinie AB ist das Maß für die Größe der gesuchten Impedanz. Der Winkel $\sphericalangle ABO = \varphi$ ist nichts anderes als der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und elektromotorischer Kraft, wie dies auch aus Fig. 34 hervorgeht, in welcher das Dreieck COD dem Dreiecke AOB in Fig. 35 kongruent ist, da die Seiten der Dreiecke voneinander nur um einen konstanten Faktor, der Stromstärke, verschieden sind.

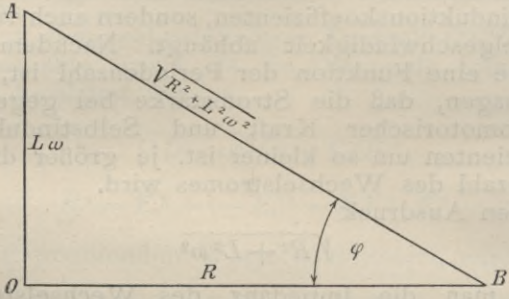

Fig. 35.

Beispiel zur Berechnung der Impedanz eines Wechselstromkreises.

In einem Wechselstromkreise sei der gesamte Ohmsche Widerstand $R = 10$ Ohm. Die Periodenzahl des Wechselstromes ist 50.

Um die Induktanz bestimmen zu können, müssen wir auch die Größe des Selbstinduktionskoeffizienten kennen. Der Ausdruck des letzteren ist, wie wir bereits auf Seite 92 sahen,

$$L = \frac{N}{i}$$

wo N die Gesamtzahl der Kraftlinien, i die diese

Kraftlinien hervorrufende Stromstärke ist. Wollen wir die Dimension von L haben, so müssen wir die Dimensionen von N und i substituieren. Der Dimensionsausdruck wird daher folgendermaßen lauten:

$$Dim\, L = \frac{Dim\, N}{Dim\, i} = \frac{C^{\frac{3}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}}{C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}} = C$$

d. h. die Dimension des Selbstinduktionskoeffizienten ist eine Länge, und zwar im absoluten Maßsystem das Zentimeter.

Will man L im praktischen Maßsystem ausdrücken, so muß man für N und i die Dimensionen im praktischen Maßsystem substituieren. Nachdem die Einheit des magnetischen Feldes gleich 10^8 absolute Einheiten und jene der Stromstärke 10^{-1} absoluten Einheiten gleich ist, wird die Dimension des Selbstinduktionskoeffizienten die Vergleichszahl 10^9 erhalten, da $\frac{10^8}{10^{-1}} = 10^9$ ist.

$10^9\, cm = 10.000\, km$ ist annähernd die Länge des Erdquadranten, weshalb man diese praktische Einheit von L Erdquadranten oder nach den Beschlüssen des Chicagoer Elektrotechniker-Kongresses Henry nennt.

Auf unser Beispiel zurückkehrend, sei der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises $L = 0{,}2$ Henry. Aufgabe ist, die Impedanz des Stromkreises zu ermitteln.

In erster Reihe müssen wir $L\omega$ kennen. ω ist die Winkelgeschwindigkeit, daher

$$\omega = 2\pi \infty = 2\pi\, 50 = 314$$

also wird

$$L\omega = 0{,}2 \,.\, 314 = 62{,}8$$

und die Impedanz:

$$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{10^2 + 62{,}8^2} = \sqrt{4043{,}84} = 63{,}58.$$

Eine weitere Aufgabe besteht darin, die Stromstärke zu bestimmen, wenn im obigen Stromkreise die konstante elektromotorische Kraft $e_{eff} = 100$ Volt wirkt.

Die für die Stromstärke abgeleitete Formel hat nicht nur auf die Maximalwerte, sondern auch auf Effektivwerte Giltigkeit, denn es war:

$$J_{max} = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}.$$

Mit $\sqrt{2}$ beide Seiten der Gleichung dividiert, wird

$$\frac{J_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

oder

$$i_{eff} = \frac{e_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}.$$

In dem Beispiel wird demnach die Größe der effektiven Stromstärke

$$i_{eff} = \frac{100}{63{,}58} = 1{,}57 \text{ Ampère}$$

sein.

Bestimmung der Impedanz zweier miteinander in Serie geschalteter Widerstände mit Selbstinduktion.

Die Schaltungsweise ist in Fig. 36 dargestellt. W ist die Wechselstromquelle, welche einen Wechselstrom von der Spannung e_t und der Periodenzahl $\sim$ liefert. Die zwei in Serie geschalteten Widerstände und Selbstinduktionen sind I und II, und zwar sind die Ohmschen Widerstände r_1 und r_2, die Selbstinduktionskoeffizienten l_1 und l_2. Die Potentialdifferenz an den Endpunkten von I sei e_1, jene zwischen den Endpunkten von II e_2. Die Widerstände der Zuleitungen seien so klein, daß man sie vernachlässigen kann.

Schließt man den Stromkreis, dann fließt ein Strom von der Stärke i_t durch die Leitung, seine Größe wird durch die Impedanz des ganzen Stromkreises bestimmt. Nachdem die Leiter in Serie geschaltet sind, fließt in jedem Teile des Stromkreises dieselbe Stromstärke.

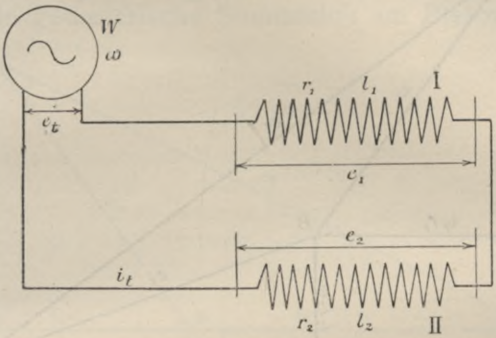

Fig. 36.

Für die Spannung gilt nicht dieser einfache Zusammenhang, d. h. die Gesamtspannung e_t ist nicht die algebraische Summe von e_1 und e_2, vielmehr ist sie eine Resultante dieser beiden Spannungen.

Die graphische Behandlung dieses Problems ist in Fig. 37 dargestellt. Sowohl die Spannungsdifferenz e_1 als auch e_2 sind resultierende Größen von zwei Komponentspannungen. Eine Komponente ist der Ohmsche Spannungsverlust durch die Widerstände r_1 und r_2, die Zweite ergibt sich aus den induktiven Widerständen.

Wenn der Strom i_t durch den Widerstand r_1 fließt, dann wird der Spannungsabfall $i_t r_1$ sein.

Ebenso wird der Wert der zweiten Komponente durch $i_t l_1 \omega$ gegeben. Wir wissen, daß diese Komponenten senkrecht aufeinander stehen, folglich muß e_1 als dritte Seite des Vektorpolygons die resultierende Spannung sein. Hiermit ist der Vektor e_1 sowohl seine Lage als auch seine Größe betreffend völlig bestimmt.

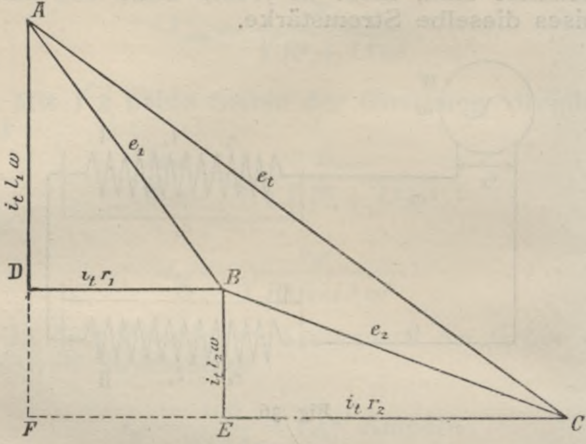

Fig. 37.

Was für den Widerstand I steht, dasselbe ist auch für II giltig, und ergibt sich e_2 als Resultante von $i_t r_2$ und $i_t l_2 \omega$.

Nachdem nun e_1 und e_2 durch Vektoren gegeben sind, bestimmt man e_t die totale elektromotorische Kraft durch ihren Vektor dadurch, daß man die Punkte A und C miteinander verbindet.

Aus diesen Erörterungen ist ersichtlich, daß im allgemeinen die Potentialdifferenzen bei in Serie geschalteten Widerständen und Selbstinduktionen nicht algebraisch summiert werden dürfen. Eine solche Summation ist nur dann zulässig und führt zu richtigen Ergebnissen, wenn die Vektoren e_1 und e_2 in eine Linie fallen, denn in diesem Falle muß notwendigerweise e_t auch in dieser Linie liegen, da der Flächeninhalt des Dreieckes ABC zu Null wird.

Aus letzterem geht zugleich hervor, daß eine algebraische Summation von Vektorgrößen nur dann zu richtigen Ergebnissen führt, wenn die Phasendifferenz zwischen den Komponentvektoren Null oder 180° beträgt. In allen anderen Fällen ist nur die geometrische Summation am Platze.

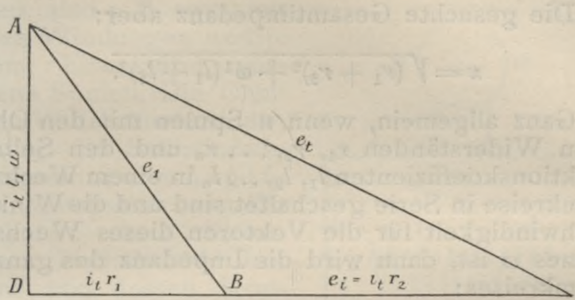

Fig. 38.

Würde die Belastung II nur Ohmschen Widerstand haben, dann wäre $l_2 = o$ und die Seite $BE = \emptyset$. e_2 wird in diesem Falle mit dem Ohmschen Spannungsverlust gleich sein, und das Vektordiagramm nimmt die in Fig. 38 angedeutete Form an. Dieser Fall ist übrigens nichts anderes, als eine solche Belastung, welche den Selbstinduktionskoeffizienten l_1 und den Widerstand $r = r_1 + r_2$ hat. Das Vektordiagramm dieser Belastung ist dann ADC.

Unsere Aufgabe ist, die Impedanz des in Fig. 36 dargestellten Stromkreises zu bestimmen.

Wenn man in Fig. 37 das Dreieck AFC betrachtet, dann sieht man, daß dies ein Vektorpolygon für e_t mit den Seiten $i_t l_1 \omega + i_t l_2 \omega$ und $i_t r_1 + i_t r_2$ ist. Das für solchen Wechselstromkreis abgeleitete Ohmsche Gesetz aufstellend, bekommen wir folgenden Ausdruck:

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + \omega^2 (l_1 + l_2)^2}}.$$

Die Impedanz für I und II sind:

$$x_I = \sqrt{r_1^2 + l_1^2 \omega^2}; \quad x_{II} = \sqrt{r_2^2 + l_2^2 \omega^2}.$$

Die gesuchte Gesamtimpedanz aber:

$$x = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + \omega^2 (l_1 + l_2)^2}.$$

Ganz allgemein, wenn n Spulen mit den Ohmschen Widerständen $r_1, r_2, \ldots r_n$ und den Selbstinduktionskoeffizienten $l_1, l_2, \ldots l_n$ in einem Wechselstromkreise in Serie geschaltet sind und die Winkelgeschwindigkeit für die Vektoren dieses Wechselstromes ω ist, dann wird die Impedanz des ganzen Stromkreises:

$$x = \sqrt{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)^2 + \omega^2 (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)^2}.$$

Wenn die Stromquelle die elektromotorische Kraft e_t besitzt, dann wird die entstehende Stromstärke i_t:

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)^2 + \omega^2 (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)^2}}$$

sein.

Die Größe des Phasenverschiebungswinkels zwischen e_t und i_t kann durch den Cosinus des Dreieckes AOB (Fig. 35) bestimmt werden, und zwar:

$$\cos\varphi = \frac{OB}{AB} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

mit i_t multipliziert und dividiert:

$$\cos\varphi = \frac{i_t R}{i_t \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{E_n}{E_t}.$$

Impedanz zweier parallelgeschalteter Widerstände und Selbstinduktionen.

In Fig. 39 sind I und II zwei Belastungen, welche Ohmschen und induktiven Widerstand besitzen, also z. B. zwei, mit vielen Windungen und je einem Eisenkerne versehene Spulen. Die Ohmschen Widerstände sind r_1 und r_2, die Selbstinduktionskoeffizienten l_1 und l_2 Die Wechselstromquelle W liefert einen Strom, dessen Periodenzahl bekannt und dessen Spannung e_t gegeben ist. ω die Winkelgeschwindigkeit des Vektors im Vektordiagramm kann aus der Periodenzahl nach schon früher beschriebener Weise berechnet werden.

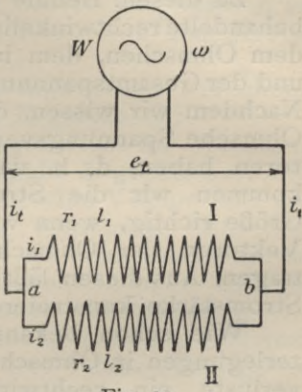

Fig. 39.

Nachdem die Spulen parallel geschaltet sind, ist die Potentialdifferenz zwischen ihren Endpunkten gleich, und zwar e_t.

Anders verhält es sich mit der Stromstärke. Während bei der Serienschaltung in Fig. 36 die Stromstärke im ganzen Stromkreise konstant war, ist dies hier nicht der Fall, denn der in der Hauptleitung fließende Strom i_t, dessen Richtung in einem Zeitpunkte in der Figur durch einen Pfeil angedeutet ist, teilt sich bei a in die Teilströme i_1 und

i_2, welche dann bei b sich wieder vereinigen und den Strom i_t ergeben.

Analog dem Falle bei der Serienschaltung, bei welcher die Spannungswerte nicht ohne weiteres algebraisch summiert werden durften, sondern eine geometrische Addition vorgenommen werden mußte, um die resultierende Spannung erhalten zu können, müssen auch im jetzigen Falle die Vektoren der Stromstärken i_1 und i_2 auf Größe und Lage bestimmt werden, um aus ihnen dann die in der ungeteilten Leitung fließende Stromstärke ermitteln zu können.

Zu diesem Behufe bildet man das schon öfters behandelte rechtwinkelige Dreieck, welches zwischen dem Ohmschen, dem induktiven Spannungsverlust und der Gesamtspannung den Zusammenhang ergibt. Nachdem wir wissen, daß die Stromstärke und der Ohmsche Spannungsverlust zusammenfallende Vektoren haben, d. h. daß sie gleichphasig sind, bekommen wir die Stromvektoren auf Lage und Größe richtig, wenn wir die Stromstärken auf die Vektoren der Ohmschen Spannungsverluste auftragen. Aus diesen läßt sich dann die resultierende Stromstärke konstruieren und berechnen.

Wie schon bekannt, ist bei den Spannungszerlegungen in Ohmsche und induktive Spannungsverluste ein rechtwinkeliges Dreieck zu konstruieren, dessen zwei Katheten der induktive und der Ohmsche Spannungsabfall sind, die Diagonale dagegen die Gesamtspannung ist.

Bei parallel geschalteten Ohmschen und induktiven Widerständen ist die Spannungsdifferenz zwischen den Endpunkten $a\,b$ dieselbe und zwar e_t, folglich ist die Diagonale des Vektordiagrammes für beide Spulen dieselbe. Die Katheten werden dagegen verschiedene sein, denn sowohl r_1 und r_2, als auch l_1 und l_2 sind verschieden.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, über einer Diagonale e_t zwei solche rechtwinkelige Dreiecke zu konstruieren, deren eine Kathete $i_1 r_1$, beziehungsweise $i_2 r_2$ ist, die andere dagegen dem induktiven Spannungsabfall $i_1 l_1 \omega$, beziehungsweise $i_2 l_2 \omega$ entspricht.

Dieses geometrische Problem löst man in bekannter Weise dadurch, daß man die Diagonale e_t halbiert und mit $\frac{e_t}{2}$ als Halbmesser einen Halbkreis beschreibt (Fig. 40). Alle aus den Punkten dieses Halbkreises zu den Endpunkten von e_t führende Geraden bilden die zwei Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Diagonale e_t ist und bei denen der rechte Winkel an dem Kreise liegt.

Die verschiedenen Spannungsverluste berechnet, gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

Der Ohmsche Spannungsverlust im Ohmschen Widerstande ist in der Spule I gleich $i_1 r_1$. Mit dem dieser Größe entsprechenden Vektor fällt der Vektor der Stromstärke i_1 zusammen. Nachdem bei induktiven Belastungen die Stromstärke in der Phase der Spannung zurückbleibt, muß bei der in der Fig. 40 angegebenen Drehrichtung der Vektor des Ohmschen Spannungsabfalles, also auch der der Stromstärke aus dem Punke A ausgehen und oberhalb der Linie e_t liegen.

Für die Spannungen und die Stromstärken wählen wir geeignete Maßstabe und tragen nun den Ohmschen Spannungsabfall $i_1 r_1$ im Diagramm in der Weise auf, daß man mit der ihm im Spannungsmaßstabe entsprechenden Länge den Halbkreis von A aus schneidet. Hierdurch bekommen wir den Punkt B, so daß

$$\overline{AB} = i_1 r_1.$$

Nach den bisherigen Erörterungen folgt, daß die zweite Kathete des Dreieckes ABC nichts anderes sein kann, als der induktive Spannungsabfall, d. h.

$$\overline{BC} = i_1 l_1 \omega.$$

Somit sind die Spannungsverhältnisse für die Spule I bestimmt.

Für die Spule II verfährt man in derselben Weise, es wird also

$$\overline{AD} = i_2 r_2 \quad \text{und} \quad \overline{DC} = i_2 l_2 \omega.$$

Die zwei Dreiecke ABC und ADC sind voneinander verschieden, da die Spulen verschieden große Ohmsche Widerstände und Selbstinduktionskoeffizienten besitzen.

Aus beiden Dreiecken folgt, daß

$$e_t = i_1 \sqrt{r_1^2 + l_1^2 \omega^2}$$

und

$$e_t = i_2 \sqrt{r_2^2 + l_2^2 \omega^2}$$

oder

$$i_1 \sqrt{r_1^2 + l_1^2 \omega^2} = i_2 \sqrt{r_2^2 + l_2^2 \omega^2}$$

woraus

$$i_1 : i_2 = \sqrt{r_2^2 + l_2^2 \omega^2} : \sqrt{r_1^2 + l_1^2 \omega^2}$$

d. h. bei zwei parallel geschalteten Widerständen mit Selbstinduktionen verhalten sich die Teilstromstärken so, wie die Impedanzen umgekehrt.

Aus $i_1 r_1$ und $i_2 r_2$ können i_1 und i_2 berechnet werden, wenn man die Widerstände r_1 und r_2 kennt. Diese Ströme sind mit obigen Ohmschen Spannungsverlusten in gleicher Phase, ihre Vektoren liegen also zusammen. Mißt man also die berechneten Werte von i_1 und i_2 in dem Stromstärke-Maßstabe und trägt die so erhaltenen Längen auf $\overline{AB}$, beziehungsweise $\overline{AD}$ auf, dann bekommt man die Punkte E und F, und zwar ist:

$$\overline{AE} = i_1 \quad \text{und} \quad \overline{AF} = i_2.$$

Die Drehrichtung ist angegeben, es sind somit die Phasenverspätungswinkel zwischen e_t und den Stromstärken φ_1, beziehungsweise φ_2. Ihre Größen sind aus beiden Dreiecken bestimmt, und zwar wird:

$$\cos\varphi_1 = \frac{AB}{AC} = \frac{i_1 r_1}{e_t}; \ \cos\varphi_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{i_2 r_2}{e_t}.$$

Die im ungeteilten Kreis fließende Stromstärke ist die Resultante der beiden Ströme i_1 und i_2. Sie wird in der Weise aus i_1 und i_2 konstruiert, wie die resultierende Kraft aus den Komponentkräften, und es wird in unserem Falle

$$\overline{AG} = i_t.$$

Der Vektor der resultierenden Stromstärke schneidet den Halbkreis im Punkte H, welcher einen Ohmschen Spannungsabfall bestimmt. AH ist der Spannungsabfall in einer solchen Spule, welche bezüglich der Ohmschen Widerstände den Spulen I und II gleichwertig ist und durch welche der Gesamtstrom i_t fließend der Ohmsche Spannungsabfall mit AH gleich ist. Analog ist HC ein Maß für den induktiven Spannungsabfall der genannten Spule. Soll die Spule mit I und II gleichwertig sein, dann muß auch der induktive Spannungsabfall bei dem Strome i_t mit HC proportional werden. Für diese Spule bestehen daher die Beziehungen, daß

$$\overline{AH} = i_t r \quad \text{und} \quad \overline{HC} = i_t l \omega$$

wenn r den resultierenden Widerstand und l den resultierenden Koeffizienten der Selbstinduktion bedeuten.

Der Strom in der ungeteilten Leitung ist auch phasenverspätet und zwar ist der Phasenverschiebungswinkel φ. Die Größe derselben kann aus AHC bestimmt werden, da

$$\cos\varphi = \frac{AH}{AC} = \frac{i_t r}{e_t}$$

ist.

Beispiele.

I. Die Impedanz eines Wechselstromkreises ist zu bestimmen, wenn zwei Ohmsche Widerstände mit Selbstinduktionen in Serie geschaltet sind.

Die Ohmschen Widerstände sind: $r_1 = 10\,\Omega$; $r_2 = 20\,\Omega$. Die Selbstinduktionskoeffizienten $l_1 = 0{,}2$ Henry; $l_2 = 0{,}4$ Henry. Die Periodenzahl ist gegeben, und zwar soll $\sim = 50$ sein.

In erster Linie müssen wir ω kennen. Wie bekannt, ist

$$\omega = 2\pi \sim = 2\pi\, 50 = 314.$$

Nach der auf Seite 104 abgeleiteten Formel ist die Impedanz dieses Stromkreises:

$$x = \sqrt{(10 + 20)^2 + 314^2 (0{,}2 + 0{,}4)^2} = \sqrt{30^2 + 314^2 . 0{,}6^2}$$

$$x = 190{,}6.$$

Wie groß wird die Stromstärke in diesem Stromkreise sein, wenn die konstante Spannung $e_t = 100$ Volt beträgt?

Nach Seite 104 wird:

$$i_t = \frac{100}{\sqrt{(10 + 20)^2 + 314^2 (0{,}2 + 0{,}4)^2}} = \frac{100}{190{,}6}$$

$$i_t = 0{.}525 \text{ Ampère.}$$

Haben wir in diesem Stromkreise 1,5 Ampère nötig, welche elektromotorische Kraft muß dann zur Wirkung kommen?

Jetzt wird also $i_t = 1{,}5$ Ampère, die Impedanz $x = 190{,}6$, folglich die wirkende elektromotorische Kraft e_t:

$$e_t = x \, . \, i_t = 190{,}6 \, . \, 1{,}5 = 286 \text{ Volt.}$$

Der Wert der Impedanz hängt außer dem Koeffizienten der Selbstinduktion auch von der Periodenzahl ab. Man könnte auch mit Hilfe dieser Formeln jene Periodenzahl bestimmen, welche die Stromquelle besitzen müßte, um bei gegebener elektromotorischer Kraft eine verlangte Stromstärke liefern zu können.

Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen der Stromstärke und der elektromotorischen Kraft, wenn die letztere 100 Volt beträgt?

Nach Seite 105 ist der Cosinus der Phasenverspätung zwischen Strom und Spannung:

$$\cos \varphi = \frac{E_n}{E_t} = \frac{e_n}{e_t}$$

wo E_n und e_n den maximalen, beziehungsweise effektiven Ohmschen Spannungsverlust, E_t und e_t die maximale, beziehungsweise effektive gesamtelektromotorische Kraft bedeuten.

In unserem Falle sind zwei Ohmsche Widerstände in Serie geschaltet, folglich wird der gesamte Ohmsche Widerstand $r_1 + r_2$ sein. Die Stromstärke hat bei $e_t = 100$ Volt und $\sim = 50$ den Wert $i_t = 0{,}525$ Ampère, so daß der Ohmsche Spannungsverlust folgendermaßen sich ergibt:

$$e_n = i_t (r_1 + r_2) = 0{,}525 \, (10 + 20) = 0{,}525 \, . \, 30 = 15{,}75 \text{ Volt.}$$

Nun wird der Cosinus des Phasenverschiebungswinkels

$$\cos \varphi = \frac{e_n}{e_t} = \frac{15{,}75}{100} = 0{,}158$$

sein, welchem ein Winkel von rund

$$\varphi = 81^0$$

entspricht.

Würden wir anstatt effektiven Werten Maximalwerte in Berechnung gezogen haben, so hätten wir dasselbe Ergebnis bekommen, da bei Sinusveränderungen der Zusammenhang zwischen der effektiven und der maximalen elektromotorischen Kraft durch die Formel gegeben ist

$$E_{max} = \sqrt{2}\, e_{eff}$$

folglich im obigen Ausdruck:

$$\cos\varphi = \frac{e_n}{e_t} = \frac{\frac{E_n}{\sqrt{2}}}{\frac{E_t}{\sqrt{2}}} = \frac{E_n}{E_t}.$$

II. Dieselben Spulen sind parallel geschaltet nach dem Schema Fig. 39. Zu bestimmen sind die Strom- und Phasenverhältnisse.

Laut Fig. 40 sind die Phasenwinkel zwischen den Teilströmen und der gemeinsamen elektromotorischen Kraft:

$$\cos\varphi_1 = \frac{AB}{AC} = \frac{i_1 r_1}{e_t} = \frac{e_{n1}}{e_t}$$

beziehungsweise

$$\cos\varphi_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{i_2 r_2}{e_t} = \frac{e_{n2}}{e_t}.$$

Die Sinuse dieser Winkel werden

$$\sin\varphi_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{i_1 l_1 \omega}{e_t} = \frac{e_{s1}}{e_t}$$

und

$$\sin \varphi_2 = \frac{DC}{AC} = \frac{i_2 l_2 \omega}{e_t} = \frac{e_{s2}}{e_t}$$

sein.

Am bequemsten läßt sich der Phasenwinkel konstruieren, wenn man seine Tangente kennt, bilden wir daher aus den Vorgehenden diese Winkelfunktion. Die Tangente eines Winkels ist der

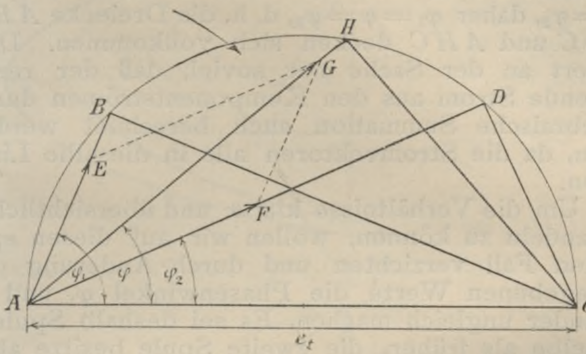

Fig. 40.

Quotient des Sinus und des Cosinus desselben Winkels, so daß

$$tg\, \varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{e_{s1}}{e_{n1}} = \frac{l_1 i_1 \omega}{i_1 r_1} = \frac{l_1 \omega}{r_1}.$$

Analog ist:

$$tg\, \varphi_2 = \frac{l_2 \omega}{r_2}.$$

Sind diese Tangenten bekannt, so sind die beiden Dreiecke ABC und ADC völlig bestimmt, da wir wissen, daß B und D an einem Kreise liegen, dessen Halbmesser die halbe gemeinsame elektromotorische Kraft ist.

In unserem Falle wird:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{0{,}2 \cdot 314}{10} = 6{,}28$$

und

$$tg\,\varphi_2 = \frac{0{,}4 \cdot 314}{20} = 6{,}28.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken sieht man, daß $\varphi_1 = \varphi_2$, daher $\varphi_1 = \varphi = \varphi_2$, d. h. die Dreiecke ABC, ADC und AHC decken sich vollkommen. Dies ändert an der Sache nur soviel, daß der resultierende Strom aus den Komponentströmen durch algebraische Summation auch berechnet werden kann, da die Stromvektoren alle in dieselbe Linie fallen.

Um die Verhältnisse klarer und übersichtlicher behandeln zu können, wollen wir auf diesen speziellen Fall verzichten und durch Änderung der angegebenen Werte die Phasenwinkel φ_1 und φ_2 einander ungleich machen. Es sei deshalb Spule I dieselbe als früher, die zweite Spule besitze aber einen Ohmschen Widerstand von $r_2 = 200\,\Omega$ nebst dem Selbstinduktionskoeffizienten $l_2 = 0{,}4$ Henry.

Bei diesen Verhältnissen wird daher:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{0.2 \cdot 314}{10} = 6{,}28$$

und

$$tg\,\varphi_2 = \frac{0{,}4 \cdot 314}{200} = 0{,}628.$$

Die entsprechenden Winkel sind zirka

$$\varphi_1 = 81^0 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 32^0.$$

Hiermit sind die Dreiecke ABC und ADC bestimmt und können wir zur Ermittlung des Dreieckes AHC schreiten (Fig. 41).

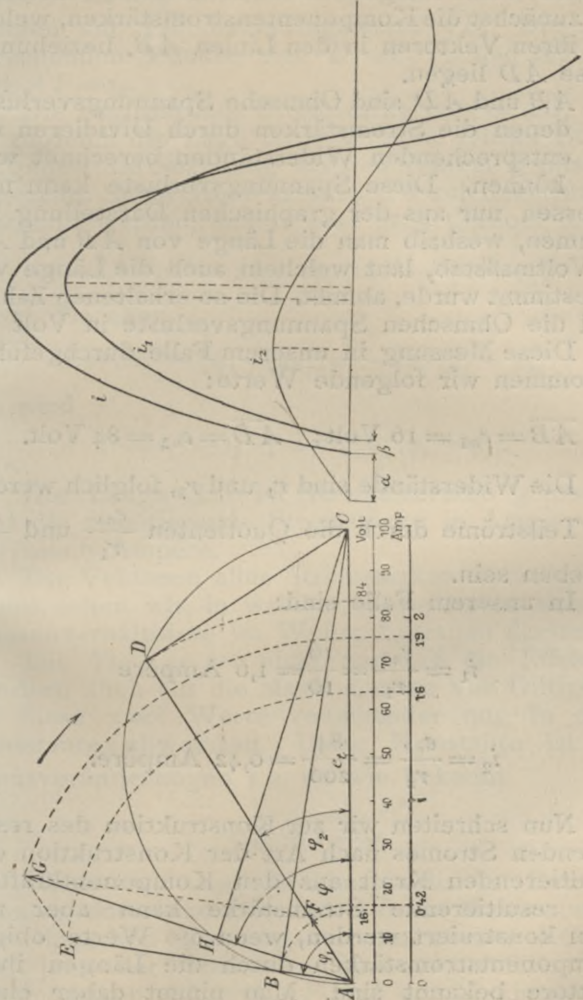

Fig. 41.

Um diese Aufgabe lösen zu können, berechnen wir zunächst die Komponentenstromstärken, welche mit ihren Vektoren in den Linien AB, beziehungsweise AD liegen.

AB und AD sind Ohmsche Spannungsverluste, aus denen die Stromstärken durch Dividieren mit den entsprechenden Widerständen berechnet werden können. Diese Spannungsverluste kann man indessen nur aus der graphischen Darstellung bestimmen, weshalb man die Länge von AB und AD im Voltmaßstab, laut welchem auch die Länge von $e_{\prime}$ bestimmt wurde, abmißt. Die so erhaltenen Zahlen sind die Ohmschen Spannungsverluste in Volt.

Diese Messung in unserem Falle durchgeführt, bekommen wir folgende Werte:

$$\overline{AB} = e_{n1} = 16 \text{ Volt}; \quad \overline{AD} = e_{n2} = 84 \text{ Volt}.$$

Die Widerstände sind r_1 und r_2, folglich werden die Teilströme durch die Quotienten $\frac{e_{n1}}{r_1}$ und $\frac{e_{n2}}{r_2}$ gegeben sein.

In unserem Falle sind:

$$i_1 = \frac{e_{n1}}{r_1} = \frac{16}{10} = 1{,}6 \text{ Ampère}$$

und

$$i_2 = \frac{e_{n2}}{r_2} = \frac{84}{200} = 0{,}42 \text{ Ampère}.$$

Nun schreiten wir zur Konstruktion des resultierenden Stromes nach Art der Konstruktion der resultierenden Kraft aus den Komponentkräften. Die resultierende Stromstärke kann aber nur dann konstruiert werden, wenn die Werte obiger Komponentstromstärken durch die Längen ihrer Vektore bekannt sind. Man nimmt daher einen geeigneten Maßstab für die Stromstärken an, mißt daran i_1 und i_2 ab, und trägt die so erhaltenen Längen auf $\overline{AB}$, beziehungsweise $\overline{AD}$. Die entsprechenden Punkte sind E und F, also $AE = i_1$ und $AF = i_2$.

Die resultierende Stromstärke ist $i = \overline{AG}$, dies ist zugleich die Lage ihres Vektors. Dieser Strom ist gegen die Spannung um den Winkel φ phasenverspätet. Seine Größe kann auch durch Berechnung bestimmt werden, indem man nach Carnots Regel

$$i^2 = i_1^2 + i_2^2 - 2\, i_1\, i_2 \cos(180^0 - [\varphi_1 - \varphi_2])$$

setzt. Da aber

$$\cos(180^0 - [\varphi_1 - \varphi_2]) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

ist, wird

$$i^2 = i_1^2 + i_2^2 + 2\, i_1\, i_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Die Länge AG im Strommaßstabe gemessen gibt die resultierende Stromstärke in Ampère. Es ist $i = 1{,}9$ Ampère.

Die Vektoren aller Stromstärken sind nun bekannt, sehen wir, in welcher Weise lassen sich die Phasenverhältnisse im Wellendiagramm darstellen.

Die Fig. 41 ist nicht nur auf die Effektiv-, sondern auch auf die Maximalwerte von Giltigkeit, da diese zwei Werte voneinander nur in einer Konstante abweichen. Diese Konstante ist bei Sinusveränderungen $\sqrt{2}$, da wie bekannt

$$J_{max} = \sqrt{2}\, i_{eff}.$$

Wenn wir nun Maximalwerte in Betracht nehmen, dann sind AB und AD die Maximalwerte der Ohmschen Spannungsverluste, ebenso BC und DC jene der induktiven Spannungsabfälle. Die Stromstärken AE und AF sind nun Maximalwerte der Teilströme und AG ist der Maximalwert des resultierenden Stromes. AE, AG und AF sind demnach in diesem Sinne Vektorgrößen und diese können bei der Bestimmung des Wellendiagrammes benutzt werden.

Nehmen wir den resultierenden Strom in erster Reihe in Betracht. Seine Änderungen mit dem Phasenwinkel können durch eine Sinuskurve dargestellt werden, welche in der nebenstehenden Teilfigur mit i bezeichnet und deren maximaler Wert mit AG gleich groß ist.

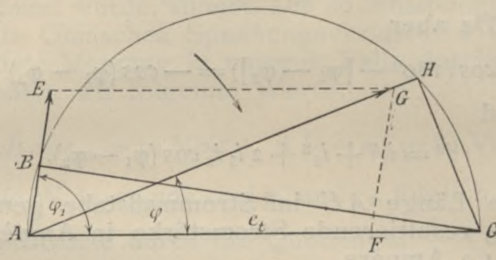

Fig. 42.

Nachdem bei induktiven Belastungen die Stromstärke zur elektromotorischen Kraft in Phase zurückbleibt, wird in bezug auf die Stromstärke i der Strom i_2 um den Winkel $(\varphi-\varphi_2)$ in Phase voreilen, der Strom i_1 dagegen mit $(\varphi_1-\varphi)$ in Phase zurückbleiben.

Dies wissend, können wir zur Bestimmung der anderen zwei Sinuskurven schreiten. Zuvörderst wird der Null- oder Maximalpunkt der Kurve i_2 vor jenem der Kurve i in Phase um den Winkel $\alpha=\varphi-\varphi_2$ liegen. Nachdem Kurve i völlig bekannt ist und die Perioden für alle Ströme in diesem Stromkreise gleich sind, wird die Kurve i_2 ähnlich jener von i konstruiert, indem man ihren Maximalwert gleich AF setzt.

In analoger Weise ist der Maximalwert der Kurve i_1 gleich AE, die Kurve selbst wird dadurch bestimmt, daß man ihren Nullpunkt vom Nullpunkte der Kurve i um den Phasenwinkel $\beta = \varphi_1 - \varphi$ in dem Sinne verschiebt, daß i_1 zu i in Phase verspätet wird.

Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst. Wollten wir auch noch die Spannungskurve im Wellendiagramm einzeichnen, dann müßten wir vom Nullpunkte der Kurve i den Phasenwinkel φ von rechts nach links auftragen, da die e_t Spannung allen Strömen gegenüber in Phase voreilt. Die Phasenverschiebung ist indessen für die drei Ströme nicht dieselbe, vielmehr hat sie die Werte φ, φ_1, φ_2.

Wie werden die Phasen- und Stromverhältnisse graphisch dargestellt, wenn ein Ohmscher Widerstand mit Ohmschem Widerstande nebst Selbstinduktion parallel geschaltet wird?

Dieser Fall tritt ein, wenn z. B. $l_2 = 0$, denn da wird die Impedanz gleich mit dem Ohmschen Widerstande und Ohms Gesetz ist in der Weise anzuwenden, wie beim Gleichstrome.

Für die Spule I bleiben die Verhältnisse unverändert dieselben wie zuvor.

Wenn $l_2 = 0$, dann ist der induktive Spannungsabfall

$$E_s = J l_2 \omega = 0$$

d. h. die Seite DC in Fig. 41 des Dreieckes ADC schrumpft zu einem Punkte zusammen, welcher mit C zusammenfällt.

Das Dreieck ABC bleibt unverändert, folglich wird auch der Vektor der Stromstärke i_1 dieselbe Lage und Größe haben wie zuvor. Dagegen ändert sich sowohl die Lage als auch die Größe des Vektors der Stromstärke i_2, und zwar wird sie, nachdem $\varphi_2 = 0$ mit der Richtung des Vektors e_t zusammenfallen, ihre Größe wächst, da im Ausdrucke

$$i_2 = \frac{e_t}{\sqrt{r^2 + l_2^2\,\omega^2}}$$

$l_2 = 0$ und somit

$$i_2 = \frac{e_t}{r}$$

wird.

Natürlich zieht die Änderung der Größe und der Vektorlage dieser Stromstärke auch eine Änderung der Größe und der Vektorlage der resultierenden Stromstärke i nach sich, so daß die Phasenverschiebungen andere Werte annehmen. Zur Spannung genommen bleibt nur φ_1 der früheren Phasenverschiebung gleich, die anderen, φ und φ_2 ändern sich, und zwar wird φ kleiner als im vorhergehenden Falle und $\varphi_2 = 0$.

Die Verhältnisse sind in Fig. 42 dargestellt.

Mit $\frac{e_t}{2}$ wird ein Halbkreis geschlagen und in diesen nach der bereits beschriebenen Weise das Dreieck ABC konstruiert. φ_1 ist der Phasenwinkel zwischen der Stromstärke i_1 und der Spannung e_t, nachdem $AE = i_1$ mit dem Vektor AB zusammenfällt.

i_2 ist hingegen mit e_t in Phase, weshalb $AF = i_2$ auf die Linie AC getragen werden muß. Aus AE und AF wird dann die resultierende Stromstärke $AG = i$ konstruiert. welche zur Spannung e_t mit dem Winkel φ phasenverspätet ist. Die Verlängerung des Vektors AG schneidet den Halbkreis in H, welches mit A und C ein Dreieck bestimmt, das für die resultierende Ohmsche und induktive Spannungsverluste maßgebend ist.

Leistung eines Wechselstromes.

Auf Seite 79 sahen wir, daß die Leistung eines Wechselstromes bei der Spannung e_{eff} und und der Stromstärke i_{eff} durch

$$W = e_{eff}\, i_{eff} \cos \varphi$$

gegeben ist, wenn φ den Phasenunterschied zwischen der Spannung und des Stromes bedeutet.

Betrachten wir in Fig. 34 die Vektoren der Spannungen und der Stromstärke, so sehen wir, daß

$$\overline{OC} = \overline{OD} \cos \varphi = E_t \cos \varphi.$$

Hierbei war $\overline{OA} = J$ der Stromvektor, so daß die Leistung des Wechselstromes durch das Produkt

$$\overline{OA} \,.\, \overline{OC} = J E_t \cos \varphi = J E_n = W$$

ausgedrückt werden kann.

In obiger Gleichung sind J und E_t maximale Werte, die Gleichung ist aber auch auf effektive Werte giltig, da

$$W = \frac{J}{\sqrt{2}} \frac{E_t}{\sqrt{2}} \cos \varphi = i_{eff}\, e_{eff} \cos \varphi.$$

Die Leistung eines Wechselstromes ist demnach bei Phasenverschiebung gleich mit dem Produkt der effektiven Stromstärke und jener Komponente der effektiven Spannung, welche in die Richtung des Vektors der Stromstärke fällt.

Die letzte Gleichung kann aber auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$w = e_{eff}\, i_{eff} \cos \varphi = e_{eff}\, i_n$$

wo

$$i_n = i_{eff} \cos \varphi$$

i_n ist als eine Komponente des Stromes aufzufassen, welche in die Richtung der Spannung fällt. Ebenso wie die Spannung in zwei aufeinander senkrechte Komponente zerlegt werden kann, kann die Stromstärke auch als aus zwei Komponenten bestehend betrachtet werden, deren eine in die Richtung des Spannungsvektors, die andere dagegen in eine, auf diese senkrechte Richtung fällt.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 43 dargestellt. $\overline{OA}$ ist der Vektor der Spannung e_t. Der Stromvektor ist durch $\overline{OB} = i$ gegeben und der

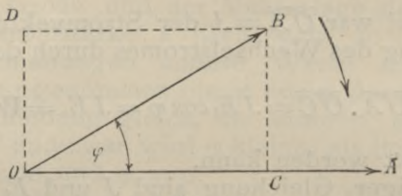

Fig. 43.

Phasenunterschied zwischen diesen zwei Wechselgrößen ist mit φ bezeichnet. Wie gesagt, betrachten wir die Stromstärke als eine resultierende Größe, welche zwei aufeinander senkrechte Komponenten hat und deren eine in die Richtung $\overline{OA}$ der Spannung fällt. Diese Komponente ist $\overline{OC}$. Die Größe derselben wird durch die Formel

$$\overline{OC} = i_n = i \cos \varphi$$

ausgedrückt.

Die zweite Komponente ist auf die erste senkrecht und mit $\overline{OD}$ bezeichnet. Ihre Größe wird

$$\overline{OD} = i_o = i \sin \varphi$$

sein.

Aus beiden Gleichungen folgt die zwischen beiden Teilströmen und der resultierenden Stromstärke bestehende Beziehung, wonach

$$i^2 \ (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = i_n{}^2 + i_o{}^2$$

oder da

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

ist,

$$i^2 = i_n + i_o^2$$

oder

$$i = \sqrt{i_o^2 + i_n^2}.$$

Die Wattleistung des Wechselstromes hängt bei konstanter Spannung von der Größe i_n ab, weshalb man diesen Strom als die Wattkomponente des Wechselstromes bezeichnet. Die Wattkomponente ist mit der Spannung in Phase, für diese Komponente ist aber das Ohmsche Gesetz unverändert in derselben Form giltig, wie beim Gleichstrome.

Die zweite Komponente i_o ist senkrecht auf den Spannungsvektor. Nachdem aus dem bisherigen klar ist, daß die Leistung des Wechselstromes auch als das Produkt der Spannung und des Wattstromes ausgedrückt werden kann, folgt, daß i_o keiner Arbeit entspricht. Ihre Projektion auf $\overline{OA}$ ist Null, folglich wird der Wert des öfters genannten Produktes auch Null, weshalb man i_o den wattlosen Strom nennt.

Aus alledem geht hervor, daß, wenn in einem Wechselstromkreise Phasenverschiebung ist, der Gesamtstrom immer als ein, aus einem Watt- und einem wattlosen Strome resultierender Strom betrachtet werden kann, bei dem aber nur der Wattstrom Arbeit leistet, die andere dagegen nur Spannungsänderungen im Äther verursacht.

Solche Änderung im Spannungszustande des Äthers ist z. B. das magnetische Feld. Bei einem Wechselstrome ändert sich das magnetische Feld periodisch, ebenso wie die Stromstärke und nachdem zur Hervorrufung des Feldes eben die wattlose Komponente des Gesamtstromes nötig ist, wird diese Komponente auch Erregerstrom genannt.

Im Gegensatz hierzu ist die Wattkomponente der Arbeitsstrom.

Die Größe des Erregerstromes hängt von den Dimensionen der Spule, dem Eisenkerne und der Intensität des hervorgerufenen magnetischen Feldes ab. Das Produkt $i_0 e_t$ ist keine effektive Arbeit, da bei Wechselströmen, bei denen der Strom der Spannung in der Phase um 90° verschoben ist, gleich große positive und negative Arbeiten entstehen, deren algebraische Summe Null ist, wie dies auch bei Fig. 31 graphisch dargestellt worden ist.

Eine Disposition, bei welcher nur wattlose Ströme auftreten, ist nicht durchzuführen, da im Eisen infolge der wechselnden magnetischen Feldintensität Hysteresisarbeit und Foucaultströme entstehen, welche eine Erwärmung hervorrufen. Diese Wärme ist effektive Arbeit und ist als ein Energieverlust zu betrachten, da sie in die umgebende Luft ausgestrahlt wird. Hierzu kommt noch die Wärmemenge, welche in der Leitung entsteht, die sogenannte Drahtwärme, und allen diesen Effektverlusten entspricht ein Wattstrom, welcher verursacht, daß der entstehende Gesamtstrom größer als der Erregerstrom und daß der Phasenwinkel kleiner als 90° wird. Würde $\varphi = 90^0$, dann wäre

$$i_n = i \cos \varphi = i . 0 = 0$$

und die Leistung des Wechselstromes ebenfalls

$$w = e_t i_n = e_t 0 = 0$$

sein.

Nachdem i_n und e_t in Phase zusammenfallen, hat das Ohmsche Gesetz für sie Giltigkeit und die geleistete Arbeit wird ebenso ausgedrückt wie beim Gleichstrome. Kennt man also bei einer Disposition die Wattverluste, dann kann der Arbeitsstrom i_n immer berechnet werden.

Nehmen wir eine Induktionsspule in Betracht, welche einen Eisenkern hat, dann entstehen bei Einschalten des Stromes im Eisenkerne Hysteresis- und Wirbelstromverluste, welche eine gewisse äquivalente elektrische Energie in Wärme umsetzen. Ein anderer Energieverlust entsteht dadurch, daß der Leiter der Spule vom Strome erwärmt wird. Bezeichnet man alle diese Arbeitsverluste mit W, dann kann die Wattkomponente des Gesamtstromes folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$i_n = \frac{W}{e_t}$$

da

$$W = e_t \, i_t \cos \varphi = e_t \, i_n$$

W substituiert erhalten wir den gesuchten Wert des Arbeitsstromes.

Manchmal sind die Verhältnisse solche, daß man den Phasenverschiebungswinkel φ nicht kennt. In solchen Fällen berechnet man den Erregerstrom und aus der Gleichung

$$i_t = \sqrt{i_o^2 + i_n^2}$$

bestimmt man den Wert von i_t oder i_n.

Um den Erregerstrom berechnen zu können, bedarf man der Dimensionen des Eisenkernes der Spule, der Windungszahl des Leiters und des Maßes für die Intensität des magnetischen Feldes. Letzteres wird durch die Anzahl jener Kraftlinien gemessen, welche durch die auf ihre Richtung senkrechte Flächeneinheit durchdringen.

Sind die Dimensionen des Eisenkernes bekannt, so kann der mittlere Kraftlinienweg mit einfachen geometrischen Formeln berechnet werden. Sei diese Länge l. Wenn die Spule n Windungen hat und die Erregerstärke i_o ist, dann wird die auf die Längeneinheit bezogene magnetisierende Kraft durch die Gleichung

$$H = \frac{4\pi}{10} \frac{n\, i_0}{l}$$

gegeben.

Nachdem aber

$$\mathfrak{B} = \mu H$$

wo $\mathfrak{B}$ die auf die Flächeneinheit bezogene Kraftlinienzahl und μ die magnetische Durchlässigkeit oder die Permeabilität des Eisens bei der Kraftlinienzahl $\mathfrak{B}$ bedeutet, wird

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mu} = \frac{4\pi}{10} \frac{n\, i_0}{l}$$

und hieraus

$$i_0 = \frac{\mathfrak{B}}{\mu} \frac{l}{n} \frac{10}{4\pi}$$

die gesuchte Erregerstromstärke.

Der Wert der Permeabilität hängt von der Größe $\mathfrak{B}$ ab. Nachdem dieser Zusammenhang nur durch komplizierte Berechnungen zu ermitteln ist, hat man zwischen $\mathfrak{B}$ und H Diagramme, die sogenannten Magnetisierungskurven hergestellt und aus den zusammengehörigen $\mathfrak{B}$ und H Werten, laut der Formel

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{H}$$

den Wert der Permeabilität bestimmt. Die so erhaltenen Werte sind in ihrem Zusammenhange mit $\mathfrak{B}$ ebenfalls graphisch dargestellt, man kann also für jede beliebige $\mathfrak{B}$ das entsprechende μ leicht finden.

Beispiel.

Es sei eine Induktionsspule mit geschlossenem Eisenkerne gegeben. Der mittlere Kraftlinienweg beträgt 20 *cm*. Die Kraftlinienzahl sei pro cm^2 15 500, alsdann wird die Permeabilität bei Schmiedeeisen $\mu = 408$ sein. Der Eisenkern ist mit 400 Windungen versehen; wie groß ist die Erregerstromstärke i_o?

Nach obigen Ausführungen wird:

$$i_o = \frac{15\,500}{408} \frac{20}{400} \frac{10}{4 \times 3{,}14} = 0{,}151 \text{ Ampère.}$$

Wenn für alle Verluste 400 Watt elektrischer Energie nötig sind, wie groß ist der Wattstrom i_n?

Die Spule sei zwischen zwei Punkte geschaltet, zwischen welchen die Potentialdifferenz $e_t = 100$ Volt herrscht.

Nach Seite 125 ist der gesuchte Wattstrom

$$i_n = \frac{W}{e_t} = \frac{400}{100} = 4 \text{ Ampère.}$$

Wie groß ist der Gesamtstrom i_t welcher in der Leitung fließt?

$$i_t = \sqrt{i_o^2 + i_n^2} = \sqrt{\overline{0{,}151}^2 + 4^2}$$

oder

$$i_t = 4{,}01 \text{ Ampère.}$$

i_t ist bald so groß als i_n. Das bedeutet soviel, daß in diesem Falle der Erregerstrom verhältnismäßig klein und die Phasenverschiebung zwischen der Spannung und der Stromstärke ebenfalls klein ist.

Es ist der Cosinus des Phasenverschiebungswinkels φ zu bestimmen.

$$\cos\varphi = \frac{i_n}{i_t} = \frac{4}{4{,}01} = 0{,}9975.$$

Diesem entspricht ein Winkel von zirka 4°.

Die Leistung eines Wechselstromes kann in sehr übersichtlicher Weise auch graphisch dargestellt werden.

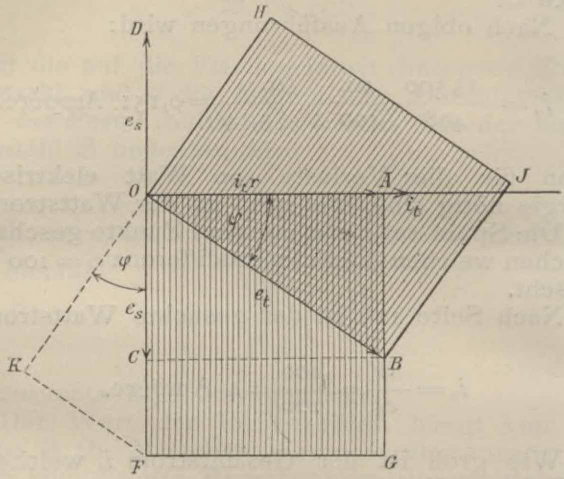

Fig. 44.

Die Konstruktion des entsprechenden Diagrammes basiert auf der Gleichung

$$W = e_t\, i_t \cos\varphi.$$

Wir wissen, daß wenn in einem Wechselstromkreise Ohmscher Widerstand und Selbstinduktion vorhanden sind, die Stromstärke hinter der Spannung in der Phase zurückbleibt. In obiger Gleichung ist φ dieser Phasenverspätungswinkel.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 44 graphisch dargestellt. Der Vektor der Stromstärke fällt in die Richtung $\overline{OA}$, jener der elektromotorischen Kraft in $\overline{OB}$. Diese letztere bildet mit $\overline{OA}$ den Winkel φ, folglich wird ihre Komponente, welche dem Ohmschen Spannungsverlust entspricht ir sein, wenn r den Ohmschen Widerstand bedeutet. Die Größe dieser Spannungskomponente sei $\overline{OA}$. Die zweite Komponente von $\overline{OB} = e_t$ ist $\overline{OC} = e_s$ und dient zur Kompensierung der gegenelektromotorischen Kraft der Selbstinduktion.

Wenn man also die Leistung eines Wechselstromes bestimmen will, dann muß man das Produkt $i_t r \,.\, i_t = i_t^2 r$ bilden, denn

$$i_t r = e_t \cos\varphi$$

und

$$i_t r \,.\, i_t = i_t^2 r = e_t i_t \cos\varphi = W.$$

Der Ausdruck $i_t^2 r$ ist nichts anderes als der Flächeninhalt eines Parallelogrammes, dessen eine Seite $i_t r = \overline{OA}$ die anderen i_t ist. Stellt man daher im Punkte O eine Senkrechte auf OA und trägt auf diese eine, dem Werte i_t entsprechende Länge $\overline{OF}$, dann wird die Fläche des Parallelogrammes $OAGF$ mit der geleisteten Arbeit proportional sein.

Die letzte Gleichung kann aber auch anders aufgefaßt werden und zwar in der Weise, daß e_t konstant gedacht und die Stromstärke i_t auf zwei, aufeinander senkrechte Komponenten zerlegt wird. Alsdann muß e_t mit der in ihre Richtung fallenden Komponente multipliziert werden, um die Leistung bekommen zu können.

Diese Komponente des Stromes wird $i_t \cos\varphi$ sein. Trägt man nun diese Länge auf eine auf e_t senkrechte Linie OH auf, dann bildet $OHJB$ ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt gleich mit jenem von $OAGF$ ist, d. h. welches auch der geleisteten Arbeit proportional wird.

$\overline{OK} = \overline{OH}$, da $\overline{OF} = i_t$ und $\sphericalangle KOF = \varphi$, denn $\overline{KO} \perp \overline{OB}$ und $\overline{FO} \perp \overline{OA}$ wobei $\sphericalangle BOA = \varphi$ ist. Die beiden, mit der Leistung zu vergleichenden Parallelogramme sind in der Figur schraffiert bezeichnet.

Der induktive Widerstand wird in der Wechselstromtechnik häufig benutzt. Seine gute Eigenschaft ist, daß er im Verhältnis zum induktionslosen Widerstande wenig Energie verbraucht, denn es entsteht in ihm eine gegenelektromotorische Kraft, welche dem Anwachsen der Stromstärke entgegentritt.

Eine weitere gute Eigenschaft besteht darin, daß der induktive Widerstand in gewissen Grenzen sich selbst reguliert. Wird nämlich die elektromotorische Kraft größer, dann fließt ein stärkerer Strom durch den Stromkreis, dies bewirkt aber gleichzeitig ein Anwachsen der gegenelektromotorischen Kraft der Selbstinduktion, da das magnetische Feld infolge des stärkeren Erregerstromes intensiver wird.

Allerdings ist die Verwendung solcher Induktionswiderstände auch mit Nachteil verbunden. Dieser Nachteil besteht darin, daß der Strom zur Spannung in der Phase verschoben wird und hierdurch wattlose Ströme entstehen, welche zwar keine effektive Arbeit leisten, doch die Maschinen und die Leitungen belasten. Je größer die Phasenverschiebung, um so größer ist die wattlose Komponente, d. h. um so größer muß der Gesamtstrom werden, um dieselbe effektive Leistung hervorbringen zu können und hierdurch wird die Leitung mehr belastet als dies der effektiven Arbeitsleistung entspricht.

Betrachten wir einen speziellen Fall der Verwendung der Induktionsspule. Die übliche Spannung ist in Wechselstromkreisen gewöhnlich so groß, daß eine Bogenlampe nicht direkt eingeschaltet werden kann, sondern man muß auch noch einen Widerstand vorschalten, welcher die überschüssige Spannung absorbiert.

Für Vorschaltwiderstand kann man entweder einen induktionslosen oder einen induktiven Widerstand benutzen. Bei ersterem wird die überschüssige Spannung gänzlich durch den Ohmschen Spannungsabfall kompensiert, die verbrauchte Energie ist in solchem Falle also ganz in Wärme umgesetzt worden und beträgt ihr Wert eine Wattmenge, welche berechnet werden kann, wenn man obigen Spannungsverlust mit der, den induktionslosen Widerstand durchfließenden Stromstärke multipliziert.

Bei Induktionswiderständen sind die Verhältnisse andere. Es entsteht zwar auch hier ein Ohmscher Spannungsverlust, doch ist dieser nur ein Teil der kompensierenden Spannung, welche sich als eine Resultante des obigen und des induktiven Spannungsverlustes ergibt.

Der Ohmsche Spannungsverlust und die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion sind einander in Phase um 90° verschoben, die resultierende elektromotorische Kraft, oder in diesem Falle die resultierende, kompensierende Spannung wird in ihrem Vektorwerte durch die Diagonale eines Parallelogrammes gegeben, dessen zwei Seiten durch die Vektoren der beiden oben genannten Spannungen gegeben sind.

Ist der Ohmsche Spannungsabfall $i\,r = e_n$ und die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion $i\,l\,\omega = e_s$, dann ist die Größe der resultierenden Spannung

$$e = \sqrt{e_n^2 + e_s^2}.$$

Nach alledem berechnen wir für einen speziellen Fall einen induktiven Vorschaltwiderstand.

Eine Wechselstrombogenlampe, welche mit 10 Ampère brennt, beansprucht eine Spannung von 30 Volt. Die Spannung des Stromkreises ist 100 Volt, folglich muß man, um das Anwachsen des Stromes über 10 Ampère verhindern zu können, einen Vorschaltwiderstand benutzen. Die Wechselstrombogenlampen haben Dochtkohlen, bei welchen keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung entsteht, weshalb diese Lampen als induktionslose Widerstände zu betrachten sind.

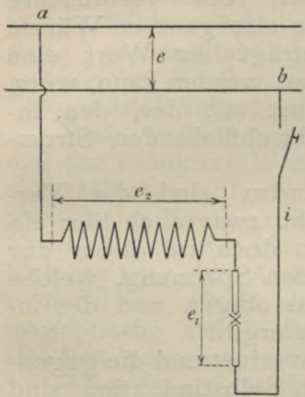

Fig. 45.

Die Schaltungsanordnung ist aus der Fig. 45 ersichtlich. Die Lampe samt Vorschaltwiderstand wird bei den Punkten $a\,b$ von der Hauptleitung, in welcher die konstante Spannungsdifferenz $e = 100$ Volt herrscht, abgezweigt. Längs der Lampe und des Induktionswiderstandes muß diese Spannungsdifferenz kompensiert werden. Die Spannungen im Verbrauchskreise sind e_1 und e_2, doch ist die algebraische Summe beider nicht e, denn sie sind in ihren Phasen gegeneinander verschoben.

Die Spannung e_1 ist mit dem Strome i in Phase, da die Lampe, wie bereits oben gesagt, einen induktionslosen Widerstand bildet. Die Spannung e_2 ist hingegen in der Phase verschoben, der Phasenverschiebungswinkel kann rechnerisch, wie auch graphisch bestimmt werden.

Wir haben hier eigentlich mit vier Spannungen zu tun. Die erste ist die gegebene Spannung e des Stromkreises, die zweite der Ohmsche Spannungsabfall e_1 längs des Widerstandes der Bogenlampe.

Die dritte und die vierte Spannung sind Komponentspannungen des Spannungsabfalles e_2 und zwar ist eine Komponente der Ohmsche Spannungsverlust in der Induktionsspule, die zweite dagegen die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion. Die Vektoren dieser Teilspannungen stehen senkrecht aufeinander.

Zur graphischen Behandlung übergehend, bezeichne in Fig. 46 AB die Gesamtspannung e. Diese kann als eine Resultante der obenerwähnten drei Spannungen betrachtet werden. Nehmen wir an, daß in der Induktionsspule keine Ohmschen

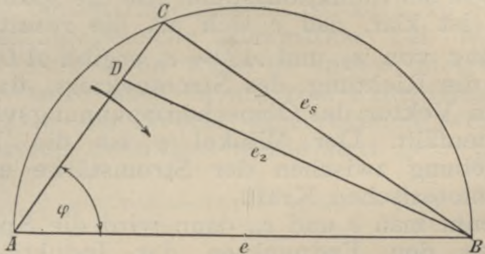

Fig. 46.

Spannungsverluste auftreten, sondern nur die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion, dagegen in der Bogenlampe nicht nur der Ohmsche Spannungsverlust, sondern auch derjenige der Induktionsspule zur Geltung kommt, dann haben wir den einfachen Fall in Serie geschalteter Selbstinduktion und Ohmschen Widerstandes, wir können also für diesen Fall das Diagramm konstruieren.

In bekannter Weise schlägt man mit dem Halbmesser $\frac{e}{2}$ um AB einen Halbkreis, berechnet den gesamten Ohmschen Spannungsabfall, mißt dies in dem Spannungsmaßstabe und bestimmt den Punkt C. AC ist demnach dem Ohmschen Spannungsverluste im ganzen Stromkreise proportional. Dieser besteht aus zwei Teilen, und zwar aus $\overline{AD}$, welcher mit dem Ohmschen Spannungsabfall in der Bogenlampe proportional ist und $\overline{DC}$, welcher ein Maß für den Spannungsverlust infolge des Ohmschen Widerstandes der Induktionsspule ist.

Das Dreieck DCB ist demnach für die Spannungsverhältnisse in der Induktionsspule maßgebend und ist $\overline{DB}$ die resultierende Spannung des Ohmschen und des induktiven Spannungsabfalles in der Induktionsspule, also die Spannung e_2.

Es ist klar, daß e sich als die resultierende Spannung von e_2 und $\overline{AD} = e_1$ ergibt. $\overline{AD}$ ist zugleich die Richtung des Stromvektors, da dieser mit dem Vektor des Ohmschen Spannungsverlustes zusammenfällt. Der Winkel φ ist die Phasenverschiebung zwischen der Stromstärke und der elektromotorischen Kraft.

Kennt man e und e_1, dann wird die Spannung zwischen den Endpunkten der Induktionsspule durch die Gleichung

$$e_2 = \sqrt{e_1^2 + e^2 - 2\, e_1\, e \cos \varphi}$$

gegeben.

Die vollständige Berechnung eines solchen Induktionswiderstandes werden wir bei den Transformatoren geben, da wir jetzt unseren Erörterungen nicht vorgreifen wollen. Es sei nur soviel angegeben, daß der Erregerstrom für diese Spule 8 Ampère beträgt. Es wird somit der Arbeitsstrom

$$i_n = \sqrt{i_t^2 - i_o^2} = \sqrt{10^2 - 8^2}$$

$$i_n = \sqrt{36} = 6 \text{ Ampère}$$

sein und der Cosinus des Phasenverschiebungswinkels

$$\cos\varphi = \frac{i_n}{i_t} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Der Spannungswert e_2 kann aus diesen Werten berechnet werden, denn es wird:

$$e_2 = \sqrt{30^2 + 100^2 - 2 \,.\, 30 \,.\, 100 \,.\, 0{,}6} = \sqrt{7300}$$

oder

$$e = 85{,}5 \text{ Volt}.$$

Aus diesen Ergebnissen ist auch zu ersehen, daß die algebraische Summation bei Wechselströmen nicht ohne weiteres angewendet werden darf; so wäre auch in unserem Falle falsch, den Wert e_2 in der Weise auszurechnen wie beim Gleichstrome, denn dies würde statt $e_2 = 85{,}5$ Volt nur

$$e_2 = e - e_1 = 100 - 30 = 70 \text{ Volt}$$

ergeben.

V. Kapitel.

Kondensator im Wechselstromkreise.

Zwei voneinander isolierte und einander gegenüberstehende Metallplatten bilden einen Kondensator. Dieser Apparat hat die Eigenschaft, mit einer Stromquelle verbunden, eine gewisse Elektrizitätsmenge aufnehmen zu können. Je größer die wirkende Spannung der Stromquelle, je größer die gegenüberstehenden Flächen und je dünner die isolierende Schicht ist, um so größer wird die angenommene Elektrizitätsmenge sein.

Die Metallplatten heißen die Belege, die isolierende Schicht das Dielektrikum des Kondensators. Die Strommenge, welche ein Kondensator aufnehmen kann, gibt ein Maß für die Kapazität desselben.

Die Kapazität des Kondensators ist von der Beschaffenheit der Belegungen unabhängig, ihr Wert hängt lediglich nur von der Größe der gegenüberstehenden Flächen und den Eigenschaften der isolierenden Schicht ab. Jeder Isolator hat in dieser Hinsicht bestimmte Eigenschaften, welche durch seine Dielektrizitätskonstante zum Ausdruck kommen.

Betrachten wir zunächst, wie verhält sich ein Kondensator in einem Gleichstromkreise.

Wird die konstante Spannung besitzende Stromquelle mit den beiden Belegen des Kondensators verbunden, dann entstehen in den Zuleitungen Strömungen, welche aber nicht konstant sind, sondern allmählich abnehmen. Nach einer bestimmten Zeit hören diese Strömungen ganz auf, und der Zustand des Leiterkreises scheint derselbe zu sein, wie im Anfang vor dem Zusammenschalten.

Die Erscheinung, welche soeben beschrieben wurde, heißt die Ladung des Kondensators. Ein in normalen Verhältnissen befindlicher Kondensator besitzt die Fähigkeit, eine gewisse Strommenge aufzunehmen, wird er mit einer Stromquelle verbunden, dann ist die Gelegenheit gegeben, diese Strommenge aufnehmen zu können und die Erscheinung der Ladung tritt ein. Wie immer, hängt auch hier die durch die Leitung fließende Stromstärke von den Widerstandsverhältnissen insofern ab, daß der Kondensator, welcher zwar eigentlich eine Unterbrechung des Stromkreises bedeutet, doch nicht als eine solche sich verhält, da sie die oben besprochene Fähigkeit, Strom aufnehmen zu können, besitzt. Immerhin ist diese Fähigkeit nicht konstant im Verlaufe der Ladung, sondern sie nimmt immer mehr ab, bis sie gänzlich verschwindet.

Die Ursache hierzu liegt darin, daß die Spannungsdifferenz zwischen den Belegen des Kondensators um so größer wird, je größer die aufgenommene Strommenge ist, und sie erreicht ihr Maximum, wenn die Ladung schon überhaupt beendet ist, d. h. wenn der Kondensator bereits eine solche Strommenge aufgenommen hat, welche ihrer Kapazität bei den gegebenen Verhältnissen entspricht. Diese Potentialdifferenz ist aber im Stromkreise als ein Widerstand zu betrachten, denn wenn man ihr Vorzeichen untersucht, findet man, daß dasselbe demjenigen der Stromquelle entgegengesetzt ist. Wenn der Kondensator geladen ist, dann wird die genannte Potentialdifferenz der Spannung der Stromquelle gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet, d. h. in diesem Zeitpunkte sind in einem Stromkreise zwei wirkende Potentialdifferenzen, welche einander gegenseitig aufheben und es kann folglich keine elektrische Strömung stattfinden.

Der gesamte Leiterkreis ist also bei geladenem Kondensator in einem Spannungszustande, welcher sich auszugleichen sucht. Diese Ausgleichung kann stattfinden, wenn man den Kondensator ausschaltet und seine Belege miteinander leitend verbindet. Nachdem durch das Ausschalten die durch die Spannung der Stromquelle gebunden gewesene Kondensatorspannung nun frei zur Geltung kommen kann, entsteht im verbindenden Drahte eine elektrische Strömung, welche indes nicht konstant, sondern veränderlich ist, da die Kondensatorspannung fortwährend abnimmt.

Diesen Vorgang nennt man das Entladen des Kondensators. Sie ist beendet, wenn die Belege ihren normalen Zustand erreicht haben, d. h. wenn zwischen ihnen keine Potentialdifferenz mehr besteht. Würde man den in dieser Weise entladenen Kondensator wieder in den ersten Stromkreis schalten, dann würde er wieder Strom aufnehmen, oder was dasselbe ist, man könnte den Kondensator von neuem laden.

Bringt man in den Stromkreis einen automatisch wirkenden Apparat, welcher die Ladung und die Entladung des Kondensators fortwährend bewirkt, dann fließt in der aus der ladenden Stromquelle führenden Leitung ein pulsierender, veränderlicher Strom, trotzdem daß die Leitung durch das Dielektrikum des Kondensators unterbrochen ist.

Bei Wechselströmen findet die Ladung und Entladung des Kondensators selbsttätig durch die Variationen der elektromotorischen Kraft statt. Wächst die wirkende elektromotorische Kraft von

Null bis zu ihrem Maximum, dann ist dies mit jenem Fall analog, daß der Kondensator in den Stromkreis eingeschaltet wird. Beim Einschalten war aber die Stromstärke am größten, da in diesem Zeitpunkte die Kondensatorspannung noch Null war. Die Ladestromstärke wird Null, wenn die Kondensatorspannung ihr positives Maximum erreicht.

Nehmen wir einen Wechselstrom in Betracht, dann sehen wir, daß bei positiver Kondensator-

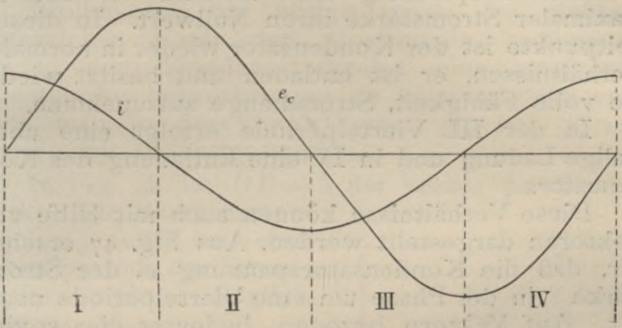

Fig. 47.

spannung die Stromstärke Null, bei Nullspannung die Ladestromstärke Maximum wird, was soviel bedeutet, daß die Spannung und die Stromstärke in ihren Phasen gegeneinander um eine Viertelperiode verschoben sind, und zwar eilt die Kondensatorspannung der Stromstärke in der Phase nach.

In Fig. 47 sind diese Verhältnisse für sinusförmigen Verlauf des Stromes und der Spannung dargestellt.

e_c ist die Kurve der Kondensatorspannung, i jene der Stromstärke. Im Periodenviertel I wird der Kondensator durch den Wechselstrom geladen.

Die Stromstärke ist anfangs maximal, $e_c = o$, während der Ladung nimmt erstere ab, letztere zu, bis am Ende derselben $i = o$ und e_c Maximum wird. Die Ladung ist nun beendet.

Die II. Viertelperiode entspricht der Entladung des Kondensators. Die Stromstärke wechselt ihre Richtung, ebenso wie bei einem an eine Gleichstromquelle angeschlossen gewesenen Kondensator die Richtung des Entladestromes der Richtung des Ladestromes entgegengesetzt ist. Der Wert der Kondensatorspannung fällt ab und erreicht bei maximaler Stromstärke ihren Nullwert. In diesem Zeitpunkte ist der Kondensator wieder in normalen Verhältnissen, er ist entladen und besitzt wieder die volle Fähigkeit, Strommenge aufzunehmen.

In der III. Viertelperiode erfolgt eine abermalige Ladung und in IV eine Entladung des Kondensators.

Diese Verhältnisse können auch mit Hilfe von Vektoren dargestellt werden. Aus Fig. 47 ersehen wir, daß die Kondensatorspannung e_c der Stromstärke i in der Phase um eine Viertelperiode nacheilt. Auf Vektore bezogen, bedeutet dies soviel, daß die Vektoren der Stromstärke und der Kondensatorspannung aufeinander senkrecht stehen, und zwar eilt der Vektor der letzteren dem Vektor des ersteren um 90^0 nach.

Wie groß ist e_c? Wenn wir die Widerstände der Zuleitungen vernachlässigen, dann entsteht durch die Lade- und Entladeströme kein Ohmscher Spannungsverlust und e_c ist mit der Spannung der Stromquelle gleich.

Können die in der Leitung entstehenden Spannungsverluste nicht vernachlässigt werden, dann besteht diese Gleichheit nicht mehr, sondern ist die Spannung der Stromquelle als die Resultante der Kondensatorspannung und der Spannungsverluste anzusehen. Natürlich dürfen auch hier keine algebraische Summationen vorgenommen werden, denn die Komponenten unterscheiden sich voneinander nicht nur in ihren Werten, sondern auch in ihren Phasen.

Wir stehen jetzt mit einem, der Selbstinduktion analogen Falle gegenüber, mit dem Unterschiede, daß während der Vektor der Spannung zum Kompensieren der gegenelektromotorischen Kraft der Selbstinduktion der Stromstärke um 90^0 voreilte, jetzt der Vektor der Kondensatorspannung dem Vektor der Stromstärke um 90^0 nacheilt.

Wollen wir die nötige Größe der elektromotorischen Kraft der Stromquelle bestimmen, um in dem Kondensatorkreise eine bestimmte Stromstärke hervorbringen zu können, dann verfährt man in derselben Weise, wie bei Stromkreisen mit Induktionsspulen.

In Fig. 48 ist $\overline{OB} = i_t$ der Vektor der Stromstärke. Die Kondensatorspannung eilt um eine Viertelperiode der Stromstärke voraus, folglich muß sein Vektor $\overline{OC} = e_c$ sein. Die Drehrichtung der Vektore ist durch einen Pfeil angegeben. Will man in diesem Stromkreise, welcher nur einen Kondensator nebst Zuleitungen besitzt, die Stromstärke i_t hervorrufen, dann muß zunächst die e_c Spannung kompensiert werden. Man muß demnach eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Spannung $\overline{OD} = -e_c$ wirken lassen. $\overline{OD}$ ist eine Komponente der zu bestimmenden elektromotorischen Kraft der Stromquelle.

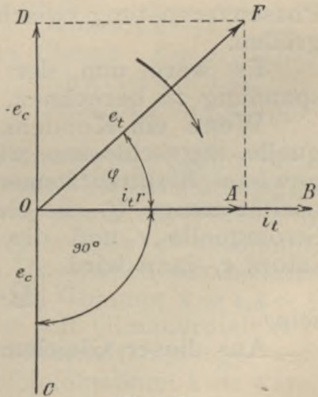

Fig. 48.

Die zweite Komponente ergibt sich aus dem Ohmschen Verluste in den Zuleitungen. Ist der Gesamtwiderstand des Stromkreises r und fließt in demselben die Stromstärke i_t, dann entsteht der Ohmsche Spannungsverlust $i_t r$, welcher mit der Stromstärke in Phase ist, da bei $i_t = 0$ und $i_t = max$, auch $i_t r$ Null, beziehungsweise Maximum wird. Die Vektoren von i_t und $i_t r$ fallen also zusammen. In unserem Falle ist $OA = i_t r$.

Die elektromotorische Kraft der Stromquelle ergibt sich nun als die Resultante von $-e_c$ und $i_t r$. Ihre Größe ist e_t und ihr Vektor ist dem Vektor der Stromstärke gegenüber phasenverspätet. Der Phasenverschiebungswinkel ist φ. Hieraus ersieht man, daß bei einem Kondensator die Verhältnisse entgegengesetzt sind, als bei einer Induktionsspule, denn während letztere eine Phasenvoreilung der elektromotorischen Kraft der Stromstärke gegenüber veranlaßte, verursacht die erstere eine Phasenverspätung zwischen diesen beiden Wechselgrößen.

Es wäre nun der Wert der Kondensatorspannung zu berechnen.

Wenn ein Kondensator an eine Gleichstromquelle angeschlossen wird, dann nimmt er eine gewisse Elektrizitätsmenge auf. Ist diese Elektrizitätsmenge Q, die elektromotorische Kraft der Stromquelle e und die Kapazität des Kondensators c, dann wird

$$Q = c e$$

sein.

Aus dieser Gleichung folgt, daß:

$$c = \frac{Q}{e}$$

d. h. die Kapazität des Kondensators ist jene Elektrizitätsmenge, die der Einheit der Spannung entspricht, oder jene Elektrizitätsmenge, welche zwischen den Belegen des Kondensators die Einheit der Potentialdifferenz hervorruft.

Die Kapazität eines Kondensators hängt von der Größe der gegenüberstehenden Flächen, von der geometrischen Form derselben und von der Dicke und Natur des Dielektrikums ab und kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$c = k \frac{F}{4 \pi d}$$

wo k die Dielektrizitätskonstante des Isolators, F die Fläche der Belege und d die Dicke des Isolators bedeuten. Ist d und F in *cm*, beziehungsweise *cm*^{2} gemessen, dann erhält man c in CGS Einheiten.

k ist bei den verschiedenen Materialien verschieden. In folgender Tabelle sind einige ihrer Werte zusammengestellt:

Luft	$k = 1$	Ozokerit	$k = 2$
Paraffin	$k = 1{,}96 \sim 2{,}32$	Ebonit	$k = 2{,}3 \sim 3{,}15$
Petroleum	$k = 2$	Schwefel	$k = 3{,}84$
Kolophonium	$k = 2{,}55.$	Glimmer	$k = 4{,}5 \sim 5,$

Die Dielektrizitätskonstante ist jene Zahl, welche angibt, um wie viel mal mehr Elektrizitätsmenge ein Kondensator aufnehmen kann im Verhältnis zu jener Elektrizitätsmenge, welche er aufnimmt, wenn unter sonst gleichen Umständen der Isolator Luft ist. So bedeutet z. B. bei Glimmer $k = 4{,}5 \sim 5$ soviel, daß ein Kondensator mit Glimmerdielektrikum $4{,}5 \sim 5$ mal mehr Elektrizitätsmenge aufnehmen kann, als wenn das Dielektrikum Luft wäre.

Nimmt ein Kondensator während des Zeitraumes dt die Elektrizitätsmenge da an, dann wächst seine Klemmenspannung um de und wird in diesem Falle:

$$da = c\, de$$

mit dt dividiert:

$$\frac{da}{dt} = c\,\frac{de}{dt}.$$

$\frac{da}{dt}$ ist die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Leiter fließt, also die Stromstärke i. Es wird daher, wenn wir noch sinusförmige Veränderung der Spannung voraussetzen, d. h. wenn

$$e = E_{max} \sin \omega t$$

$$i = c\,\frac{d\,(E_{max} \sin \omega t)}{dt}$$

sein. Nachdem aber:

$$\frac{d}{dt}(E_{max} \sin \omega t) = E_{max}\,\omega \cos \omega t$$

ist

$$i = c\,E_{max}\,\omega \cos \omega t.$$

E_{max} ist der maximale Wert der Spannung der Stromquelle. Wenn die Leitung keinen Widerstand hätte, dann wäre diese Spannung mit der Kondensatorspannung gleich groß, denn dann würden keine Spannungsverluste in der Leitung auftreten. Gewöhnlich ist der Widerstand des Leiterkreises so klein, daß der Ohmsche Spannungsabfall vernachlässigt werden kann, und in diesem Falle ist $e = e_c$, wobei e_c die Kondensatorspannung bezeichnet.

In diesem Falle wird also

$$i = c\,E_c\,\omega \cos \omega t$$

oder der Maximalwert

$$J_{max} = c\,E_c\,\omega.$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden, daß man bei gegebener Stromstärke und Kapazität den Wert der Kondensatorspannung berechnet, denn es wird aus obiger Gleichung

$$E_c = \frac{J_{max}}{c\,\omega}.$$

Diese Gleichung hat auch für effektive Werte Giltigkeit, man muß nur mit $\sqrt{2}$ dividieren, vorausgesetzt, daß die Änderung des Stromes und der Spannung nach dem Sinusgesetze erfolgt.

Für effektive Werte ist unsere Gleichung also folgende:

$$\frac{E_c}{\sqrt{2}} = \frac{J_{max}}{\sqrt{2}\,c\,\omega}$$

oder

$$e_{eff} = \frac{i_{eff}}{c\,\omega}.$$

ω bedeutet hierbei die Winkelgeschwindigkeit des Vektors. Ist $\sim$ die Periodenzahl des Wechselstromes und T die für eine volle Periode nötige Zeit, dann ist:

$$\omega = 2\pi \sim = \frac{2\pi}{T}.$$

Die Kapazität eines Kondensators kann bestimmt werden, wenn man die Periodenzahl des Wechselstromes kennt und die Stromstärke und die Spannung mißt. Es wird dann:

$$c = \frac{i_{eff}}{e_{eff}\,\omega}.$$

Wird i_{eff} in Ampère, e_{eff} in Volt gemessen, dann bekommt man c in der praktischen Einheit der Kapazität, in Farad. Da jedoch das Farad eine große Einheit ist, hat man das Mikrofarad angenommen, welches den millionstel Teil des Farad bildet:

$$1 \text{ Mikrofarad} = \frac{1}{10^6} \text{ Farad} = 10^{-6} \text{ Farad}.$$

Nachdem

$$1 \text{ Ampère} = 10^{-1} \; CGS \text{ Einheiten}$$

und

$$1 \text{ Volt} \quad = 10^{8} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

so wird laut der letzten Gleichung auf Seite 145

$$1 \text{ Farad} \quad = 10^{-9} \; CGS \text{ Einheiten}$$

oder

$$1 \text{ Mikrofarad} = 10^{-15} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Die Größe des verursachten Phasenverschiebungswinkels kann aus Fig. 48 bestimmt werden, und zwar wird:

$$\cos\varphi = \frac{i_t r}{e_t} = \frac{e_n}{e_t}$$

oder

$$tg\,\varphi = \frac{e_c}{e_n} = \frac{i_t}{c\,\omega\, i_t r} = \frac{1}{c\,\omega\, r}$$

wo r den Ohmschen Widerstand des Leiterkreises bedeutet.

Hat der Stromkreis keinen Widerstand, dann wäre $r = 0$ und

$$tg\,\varphi = \infty$$

d. h. $\varphi = 90^0$. In diesem Falle wäre der Vektor der Spannung hinter dem Vektor der Stromstärke um eine Viertelperiode phasenverspätet. Dies ist natürlich nie zu erreichen, denn jeder Leiter besitzt wenn auch noch so kleinen Ohmschen Widerstand.

Zwischen der Gesamtspannung, dem Ohmschen Spannungsabfall und der Kondensatorspannung ist demnach der Zusammenhang derselbe, wie bei den Induktionsspulen zwischen den Komponent- und der resultierenden Spannungen. Der Zusammenhang wird durch ein rechtwinkeliges Dreieck gegeben, dessen Hypotenuse die Gesamtspannung, eine Kathete die Kondensatorspannung, die andere dagegen der Ohmsche Spannungsverlust ist.

Dieses Dreieck ist in Fig. 48 OAF, aus welchem folgt, daß

$$e_t = \sqrt{e_n^2 + e_c^2}$$

ist.

Will man daher für einen gegebenen Phasenwinkel die entsprechenden Spannungskomponenten haben, dann verfährt man wie bei Fig. 40, d. h. man zieht mit dem Halbmesser $\frac{e_t}{2}$ einen Halbkreis, trägt den Winkel φ auf und bestimmt den Schnittpunkt der zu φ gehörigen Linie und des Halbkreises. Dieser Punkt und die zwei Endpunkte des Halbkreises geben das gesuchte Dreieck, in welchem jene Kathete mit dem Ohmschen Spannungsabfall proportional ist, welcher mit der Gesamtspannung den Phasenverschiebungswinkel φ bildet. Man muß natürlich bei der Bestimmung der Drehrichtung der Vektoren darauf achten, daß bei Kondensatoren die Stromstärke der Spannung voreilt.

Kapazität und Ohmscher Widerstand in Hintereinanderschaltung.

Bei der elektrischen Licht- und Kraftverteilung mit Wechselströmen bedient man sich konzentrischer Kabel, welche so verfertigt sind, daß sie keine Selbstinduktion haben. Diese Kabel besitzen in ihrer Achse eine, aus einen oder mehreren Kupferdrähten bestehende Seele, welche mit genügend dicker Isolationsmasse umgeben wird und welchen man zur Hinleitung des Stromes benutzt. Zur Rückleitung dient ein, ebenfalls aus mehreren Drähten zusammengeseilter Leiter, welcher die obenerwähnte Isolationsmasse umgibt, also eine Zylinderfläche bildet, deren Achse mit der Achse des Kabels zusammenfällt. Auf diesen zweiten Leiter kommt wieder eine Schichte Isolation, das ganze wird dann noch mit Stahlbändern oder Drähten umflochten, damit äußere mechanische Einflüsse das Kabel nicht beschädigen können.

Ein solches Kabel ist im Querschnitt aus der Fig. 49 ersichtlich. Die weißgelassenen Teile sind die Kupferdrähte, welche voneinander durch eine isolierende Schicht getrennt sind. Die äußere Leitung ist außerdem noch mit einer Isolation umkleidet, welche mit doppelter Schutzhülse umgeben wird.

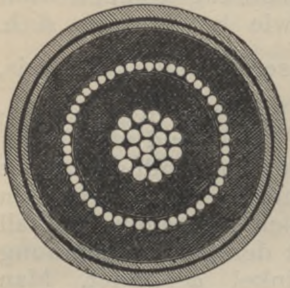

Fig. 49.

Bei Kabeln stehen also zwei, voneinander isolierte Metallflächen gegenüber, ein Kabel bildet demnach einen Kondensator. Nachdem die Kapazität eines Kondensators von der Größe der einander gegenüberstehenden Metallflächen abhängt, ist die Kapazität eines Kabels um so größer, je länger es ist. Natürlich spielt auch die Dicke der zwischen den Leitern liegenden Isolation eine Rolle, und die Kapazität ist unter sonst gleichen Umständen mit dieser Dicke umgekehrt proportional.

Jede Leitung besitzt Ohmschen Widerstand, und nachdem das Kabel so verfertigt wird, daß darin keine Selbstinduktionserscheinung auftritt, haben hier wir mit einem Fall zu tun, bei welchem Kapazität und Ohmscher Widerstand miteinander in Serie geschaltet sind. Man kann nämlich bei der Untersuchung der Verhältnisse dieses Falles das Kabel widerstandslos betrachten, dafür aber mit ihm einen Ohmschen Widerstand in Serie schalten, dessen Größe gleich mit dem Ohmschen Widerstande des Kabels ist.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, den Zusammenhang zwischen den elektrischen Größen für diesen Fall zu ermitteln.

Wir wissen aus dem Vorhergesagten, daß ein Kondensator, mit einer Wechselstromquelle verbunden, im Stromkreise eine elektrische Strömung hervorruft, welche von den Lade- und Entladeströmen herrührt. Je größer die Kapazität des Kondensators, um so stärker sind diese Ströme.

Die Schaltungsdisposition ist aus Fig. 50 ersichtlich. *W* ist die Wechselstromquelle, *R* der

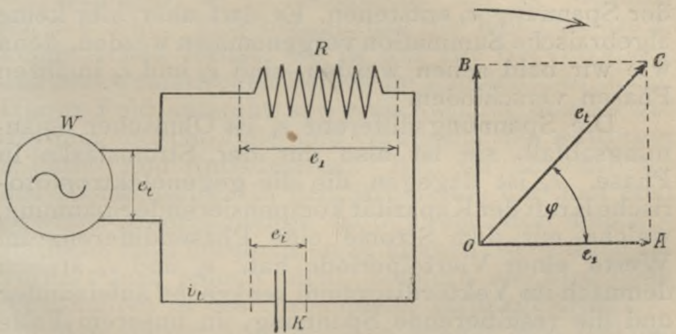

Fig. 50.

Ohmsche Widerstand, *K* der Kondensator mit der Kapazität *c*. Die Spannung an den Klemmen der Wechselstromquelle sei e_t, jene zwischen den Enden des Ohmschen Widerstandes und des Kondensators e_1 beziehungsweise e_2. Die durch die Leiter fließende Stromstärke ist i_t.

Wenn ein Strom durch einen Ohmschen Widerstand fließt, dann entsteht ein Spannungsverlust, dessen Größe von der des Widerstandes abhängt. In unserem Falle ist der Gesamtwiderstand in *R* konzentriert, folglich wird der gesamte Ohmsche

Spannungsabfall $i_t R$ sein. Dies ist aber nichts anderes als die Spannungsdifferenz e_1, d. h.

$$e_1 = i_t R.$$

e_2 ist die Potentialdifferenz an den Klemmen des Kondensators. Ist die Periodenzahl des Wechselstromes gegeben, dann kann e_2 bestimmt werden, und zwar wird nach Seite 145:

$$e_2 = \frac{i_t}{c\,2\pi \sim} = \frac{i_t}{c\,\omega}.$$

e_1 und e_2 sind zwei Spannungen, welche aus der Spannung e_t entstehen. Es darf aber hier keine algebraische Summation vorgenommen werden, denn wie wir bald sehen werden, sind e_1 und e_2 in ihren Phasen verschieden.

Die Spannungsdifferenz e_1 ist Ohmscher Spannungsabfall, sie ist also mit der Stromstärke in Phase. e_2 ist dagegen die die gegenelektromotorische Kraft der Kapazität kompensierende Spannung, welche mit dem Strome eine Phasendifferenz im Werte einer Viertelperiode hat. e_1 und e_2 stehen demnach im Vektordiagramm senkrecht aufeinander und die resultierende Spannung, in unserem Falle also e_t, wird bestimmt, wenn man die Endpunkte der Vektore e_1 und e_2 miteinander verbindet.

Bezeichnet im Vektordiagramm $\overline{OA} = e_1$ und $\overline{OB} = e_2$, dann ist die Resultante $\overline{OC} = e_t$, da $\overline{AC} = \overline{OB} = e_2$ ist. e_2 bedeutet hier nicht die gegenelektromotorische Kraft des Kondensators, sie ist vielmehr eine Spannungskomponente der Gesamtspannung, welche nötig ist, um die Kondensatorwirkung, welche als ein Widerstand sich verhält, in Gleichgewicht halten und die Stromstärke i_t hervorbringen zu können.

Die Stromstärke eilt der Spannung in der Phase um den Winkel φ voraus.

Man kann auch hier die Stromstärke in zwei Komponenten zerlegen, von welchen eine in die Richtung der Spannung e_t, die andere in eine darauf senkrechte Richtung fällt. Sind diese Komponenten i^n, beziehungsweise i_0, dann ist

$$i_t = \sqrt{i_n^2 + i_o^2}.$$

i_n ist wieder die Arbeitskomponente der Stromstärke, da das Produkt $i_n\, e_t$ die geleistete effektive Arbeit gibt. Diese Komponente wird die Wattkomponente genannt.

Dagegen ist i_o senkrecht auf e_t, weshalb $e_t i_o = \emptyset$ wird. Das besagt, daß die Komponente i_o keine Arbeit leistet, sie ist nur zur Hervorrufung des elektrostatischen Feldes im Kondensator nötig. Dieses Feld entsteht und verschwindet, ebenso wie das magnetische Feld und verursacht den wattlosen i_o Lade- und Entladestrom. Bei der Einschaltung des Kondensators in den Stromkreis hat man eine gewisse Energiemenge nötig, um das elektrostatische Feld hervorrufen zu können; diese Energie verliert man jedoch nicht, sondern sie wird beim Ausschalten in die Stromquelle zurückgeleitet.

Aus diesen Ausführungen ersieht man, daß der Kondensator dieselben Veränderungen im Stromkreise hervorruft wie eine Induktionsspule. Nachdem aber die gegenelektromotorische Kraft des Kondensators jener der Selbstinduktion entgegengesetzt gerichtet ist, wird auch die Wirkung des Kondensators im entgegengesetzten Sinne erfolgen, als jene der Induktionsspule.

Aus Fig. 50 folgt, daß

$$e_t = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}.$$

Nachdem

$$e_1 = i_t R \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{i_t}{c\,\omega}$$

wird

$$e_t = \sqrt{i_t^2 R^2 + \frac{i_t^2}{c^2 \omega^2}}\,.$$

oder hieraus

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{c^2 \omega^2}}}.$$

Diese letzte Gleichung gibt das Ohmsche Gesetz für solche Stromkreise, welche außer Ohmschem Widerstande auch eine Kapazität besitzen.

Beispiel.

In einem Stromkreise ist ein Ohmscher Widerstand und ein Kondensator in Serie geschaltet. Der Wechselstrom hat eine Periodenzahl $\sim = 50$, der Ohmsche Widerstand ist $R = 10\,\Omega$, die Kapazität des Kondensators beträgt $c = 20$ Mikrofarad, die Spannung der Stromquelle ist $e_t = 100$ Volt. Wie groß ist die Stromstärke in Ampère, welche in diesem Stromkreise fließt?

Nach der letzten Gleichung ist

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{c^2 \omega^2}}}.$$

Hier muß die Kapazität in Farad substituiert werden, also wird

$$c = 20 \text{ Mikrofarad} = 20 \,.\, 10^{-6} \text{ Farad.}$$

Weiters:

$$\omega = 2\pi \sim = 2\pi \,.\, 50$$

$$\omega = 314$$

also ist

$$i_t = \frac{100}{\sqrt{10^2 + \left(\frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 314}\right)^2}} = \frac{100}{\sqrt{100 + \left(\frac{10^6}{20 \cdot 314}\right)^2}}$$

und hieraus wird

$$i_t = 0{,}633 \text{ Ampère.}$$

Wie groß ist die Watt- und die wattlose Komponente des Wechselstromes?

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen wir den Phasenverschiebungswinkel kennen.

Aus Fig. 50 ist der Cosinus dieses Winkels:

$$\cos \varphi = \frac{e_1}{e_t} = \frac{i_t R}{e_t}.$$

In unserem Falle ist $R = 10\,\Omega$, folglich wird:

$$e_1 = 10 \cdot 0{,}633 = 6{,}33 \text{ Volt}$$

und

$$\cos \varphi = \frac{6{,}33}{100} = 0{,}0633$$

sein.

Die Wattkomponente des Stromes fällt in die Richtung der Gesamtspannung e_t, folglich wird

$$i_n = i_t \cos \varphi = 0{,}633 \times 0{,}0633$$

oder

$$i_n = 0{,}0401 \text{ Ampère}$$

sein.

Die wattlose Komponente ist hiermit auch bestimmt, denn i_t, i_n und i_o bilden ein rechtwinkeliges Dreieck, bei welchem die Kathete i_o:

$$i_o = \sqrt{i_t^2 - i_n^2}$$

ist. Die gefundenen Werte substituiert, wird

$$i_o = \sqrt{\overline{0{,}633}^2 - \overline{0{,}0401}^2}$$

d. h.

$$i_o = 0{,}63 \text{ Ampère.}$$

Man sieht, daß bei diesen Verhältnissen der wattlose Strom bald so groß, als der Gesamtstrom ist.

Es ist die Leistung des Wechselstromes zu bestimmen.

Bekanntlich ist bei gegebener Phasenverschiebung die Leistung des Wechselstromes

$$W = e_t i_t \cos \varphi.$$

In unserem Falle ist:

$$W = 100 \,.\, 0{,}633 \,.\, 0{,}0633$$

d. h.

$$W = 4{,}01 \text{ Watt.}$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man die Wattkomponente in Betracht zieht:

$$W = e_t i_n$$

oder

$$W = 100 \,.\, 0{,}0401 = 4{,}01 \text{ Watt}$$

was sich mit obigem vollkommen deckt.

Wie groß müßte die Kapazität des Kondensators sein, um bei denselben Verhältnissen $i_t = 1$ Ampère im Stromkreise hervorbringen zu können?

Zu diesem Behufe bestimmt man aus der Gleichung

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{c^2 \omega^2}}}$$

den Wert c und setzt dann $i_t = 1$. Es wird

$$c = \frac{i_t}{\omega \sqrt{e_t^2 - R^2 i_t^2}}.$$

Die gegebenen Werte substituiert:

$$c = \frac{1}{314 \sqrt{100^2 - 10^2 . 1^2}}.$$

Hieraus bekommt man, daß die gesuchte Kapazität

$$c = 32{,}1 . 10^{-6} \text{ Farad}$$

ist.

In diesem Falle ist der Cosinus des Phasenverschiebungswinkels

$$\cos \varphi = \frac{e_1}{e_t} = \frac{i_t R}{e_t} = \frac{1 . 10}{100}$$

$$\cos \varphi = 0{,}1.$$

Man kann in Stromkreisen, welche Kondensatoren enthalten, nie erreichen, daß die Gesamtspannung zur Stromstärke in der Phase um eine Viertelperiode zurückbleibt, denn das würde soviel bedeuten, daß die ganze Spannung mit der gegenelektromotorischen Kraft der Kapazität gleich ist. Dies ist auch schon deshalb ausgeschlossen, weil neben den immer auftretenden Ohmschen Spannungsverlusten auch andere, mit letzteren in Phase sich befindlichen Spannungsverluste auftreten, welche der der dielektrischen Hysteresis entsprechenden Arbeit proportional sind. Bei den Kondensatoren findet nämlich durch den Wechselstrom eine fortdauernde Umpolarisierung des Dielektrikums statt, ebenso wie bei der Induktionsspule des Eisenkernes. Bei letzterem entstand ein magnetisches, bei ersterem entsteht ein elektrostatisches Feld. Die der dielektrischen Hysteresis entsprechende Arbeit wird in Wärme umgewandelt, welche der umgebenden Luft durch Leitung und Strahlung abgegeben wird, welche also eine verlorene Arbeit darstellt. Dieser Arbeitsmenge entspricht ein Spannungsabfall, dessen

Vektor in die Richtung des Stromvektors fällt. Die gesamten Spannungsverluste und die die gegenelektromotorische Kraft der Kapazität kompensierende Spannung ergeben dann als Resultierende die Gesamtspannung des Stromkreises. Nachdem dies nie mit der letzterwähnten Spannungskomponente zusammenfallen kann, sondern immer eine Diagonale eines Dreieckes bildet, kann der Phasenverschiebungswinkel φ nie den Wert von 90^0 erreichen.

Mehrere Ohmsche Widerstände und Kondensatoren in Hintereinanderschaltung.

In Fig. 51 sind die Widerstände r_1, r_2, r_3 mit den Kapazitäten c_1, c_2, c_3 abwechselnd in Serie geschaltet. Die Stromquelle liefert bei der Spannung e_t die Stromstärke i_t, welche für den ganzen Stromkreis dieselbe ist, da alle Konsumenten nacheinander geschaltet sind. Die Spannungsdifferenzen zwischen den einzelnen Endpunkten der Konsumenten seien e_1, e_{c1}, e_2, e_{c2}, e_3 und e_{c3}, wie auch aus der Figur ersichtlich. Die Periodenzahl des Wechselstromes ist ∞.

Aufgabe ist, den Zusammenhang bestimmen, welcher zwischen diesen Spannungen und der Gesamtspannung e_t besteht.

Wir haben also aus sechs Komponentspannungen eine resultierende Spannung zu ermitteln. Nachdem diese Teilspannungen die verschiedensten Phasen haben, müssen wir eine geometrische Summation anwenden und zu diesem Zwecke konstruieren wir für die einzelnen Fälle Vektordiagramme, mit deren Hilfe dann e_t leicht zu bestimmen ist.

Diese Schaltungsdisposition ist eigentlich nur das Dreifache des früher behandelten. Wir können also das Problem in drei Teilen lösen.

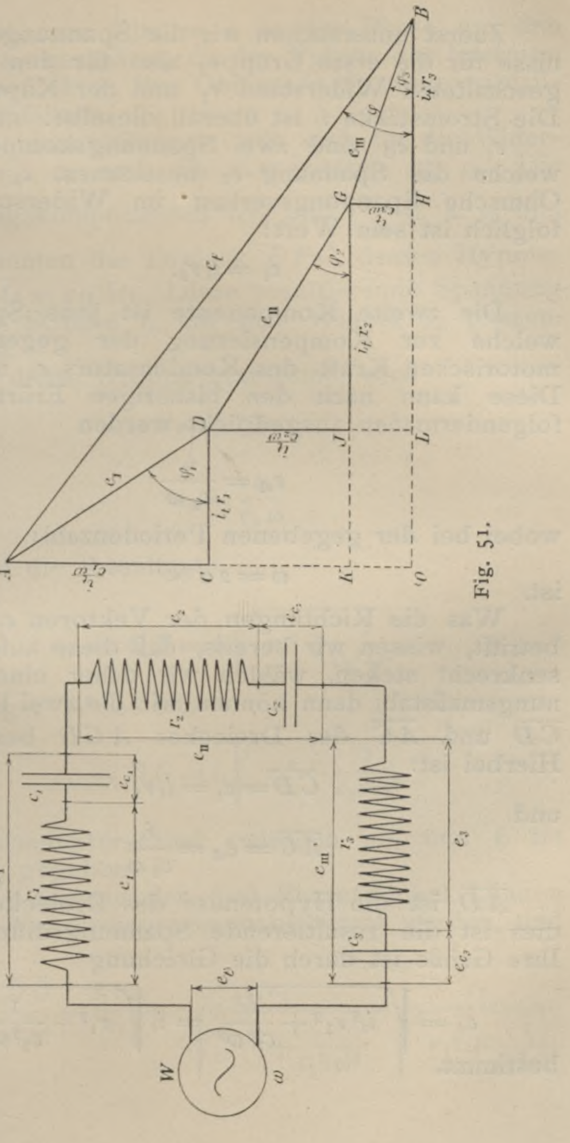
A
B
C
D
G
H
J
K
L
O
e_t
e_{II}
e_{III}
e_1
e_2
e_3
r_1
r_2
r_3
c_1
c_2
c_3
e_v
W
ω

Fig. 51.

Zuerst untersuchen wir die Spannungsverhältnisse für die erste Gruppe, also für den in Serie geschalteten Widerstand r_1 und der Kapazität c_1. Die Stromstärke i_t ist überall dieselbe.

e_1 und e_{c1} sind zwei Spannungskomponenten, welche die Spannung e_I bestimmen. e_1 ist der Ohmsche Spannungsverlust im Widerstande r_1, folglich ist sein Wert:

$$e_1 = i_t r_1.$$

Die zweite Komponente ist jene Spannung, welche zur Kompensierung der gegenelektromotorischen Kraft des Kondensators c_1 nötig ist. Diese kann nach den bisherigen Erörterungen folgendermaßen ausgedrückt werden

$$e_{c1} = \frac{i_t}{c_1 \omega}$$

wobei bei der gegebenen Periodenzahl:

$$\omega = 2 \pi \sim$$

ist.

Was die Richtungen der Vektoren e_1 und e_{c1} betrifft, wissen wir bereits, daß diese aufeinander senkrecht stehen, wählen wir daher einen Spannungsmaßstab, dann können wir die zwei Katheten $\overline{CD}$ und $\overline{AC}$ des Dreieckes ACD bestimmen. Hierbei ist:

$$\overline{CD} = e_1 = i_t r_1$$

und

$$\overline{AC} = e_{c1} = \frac{i_t}{c_1 \omega}$$

$\overline{AD}$ ist die Hypotenuse des Dreieckes, d. h. dies ist die resultierende Spannungsdifferenz e_I. Ihre Größe ist durch die Gleichung

$$e_I = \sqrt{i_t^2 r_1^2 + \frac{i_t^2}{c_1^2 \omega^2}} = i_t \sqrt{r_1^2 + \frac{1}{c_1^2 \omega^2}}$$

bestimmt.

e_I ist zum Strome i_t in der Phase um den Winkel φ_1 verspätet, da der Vektor des letzteren mit dem Vektor des Ohmschen Spannungsabfalls zusammenfällt.

Das bisher Gesagte gilt auch für die Widerstände r_2, r_3 und die Kapazitäten c_2, c_3. Die Spannungskomponenten $i_t r_2$ und $\frac{i_t}{c_2\,\omega}$ d. h. e_2 und e_{c2} bestimmen das Dreieck DFG, dessen Hypotenuse $\overline{DG} = e_{II}$ ist. Diese resultierende Spannung ist dem Strome i_t um den Winkel φ_2 phasenverspätet.

Die dritte Gruppe betreffend, wird

$$e_3 = i_t r_3$$

und

$$e_{c3} = \frac{i_t}{c_3\,\omega}$$

sein, und die Resultante

$$e_{III} = GB = i_t \sqrt{r_3^2 + \frac{1}{c_3^2\,\omega^2}}$$

In analoger Weise ist:

$$e_{II} = DG = i_t \sqrt{r_2^2 + \frac{1}{c_2^2\,\omega^2}}$$

Der Phasenunterschied zwischen e_{III} und i_t ist durch φ_3 gegeben.

Die Cosinuse der drei Phasenwinkel können aus den Vektordiagrammen bestimmt werden, und zwar

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{i_t r_1}{e_I} = \frac{i_t r_1}{i_t \sqrt{r_1^2 + \frac{1}{c_1^2\,\omega^2}}} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{c_1^2\,\omega^2}}}.$$

Ferner:

$$\cos\varphi_2 = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + \frac{1}{c_2^2\,\omega^2}}}$$

und

$$\cos\varphi_3 = \frac{r_3}{\sqrt{r_3^2 + \frac{1}{c_3^2\,\omega^2}}}.$$

Es wäre noch übrig die Gesamtspannung e_t zu bestimmen. e_t ist die Resultante der Spannungen e_I, e_{II} und e_{III}. Nachdem $\overline{CK} = \overline{DF}$, $\overline{KO} = \overline{GH}$ und $\overline{OL} = \overline{CD}$, $\overline{LH} = \overline{FG}$, wird

$$e_t^2 = (\overline{AC} + \overline{CK} + \overline{KO})^2 + (\overline{OL} + \overline{LH} + \overline{HB})^2$$

oder

$$e_t^2 = \frac{i_t^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)^2 + i_t^2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2$$

und hieraus:

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)^2}}.$$

Sind im allgemeinen die Ohmschen Widerstände $r_1, r_2, \ldots, r_n$ und die Kapazitäten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in Serie geschaltet, dann wird die allgemeinste Form des Ohmschen Gesetzes für solche Stromkreise

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{\sum_1^n (r_n)^2 + \frac{1}{\omega^2}\sum_1^n\left(\frac{1}{c_n}\right)^2}}$$

sein.

Der Cosinus des resultierenden Phasenwinkels zwischen der Spannung und der Stromstärke wird durch die Gleichung gegeben:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OL} + \overline{LH} + \overline{HB}}{\overline{AB}}$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{i_t r_1 + i_t r_2 + i_t r_3}{e_t} = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{e_t}.$$

Für den allgemeinsten Fall wird

$$\cos\varphi = \frac{i_t (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)}{e_t}$$

sein oder in anderer Form:

$$\cos\varphi = \frac{i_t (r_1 + r_2 \ldots + r_n)}{i_t \sqrt{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)^2 + \frac{1}{\omega_2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}\right)^2}}.$$

Endlich:

$$\cos\varphi = \frac{\sum_1^n \left(r_n\right)}{\sqrt{\sum_1^n \left(r_n\right)^2 + \frac{1}{\omega^2} \sum_1^n \left(\frac{1}{c_n}\right)^2}}.$$

Induktionswiderstand und Kapazität mit Ohmschem Widerstande in Serie geschaltet.

Im Stromkreise Fig. 52 ist der Induktionswiderstand A mit dem Kondensator C in Serie geschaltet. Der Induktionswiderstand hat einen gewissen Ohmschen Widerstand, dieser und der Gesamtwiderstand zusammen bilden jenen Ohmschen Widerstand, welcher mit der Kapazität und dem Induktionswiderstande in Hintereinanderschaltung ist. Die Stromquelle liefere einen Strom von der Periodenzahl $\sim$, der Spannung e_t und der Stromstärke i_t. Die Kapazität sei c, der Selbstinduktionskoefficient l, der gesamte Ohmsche Widerstand r. Der Spannungsabfall längs der Induktionsspule ist e_1, jener zwischen den Klemmen des Kondensators e_2.

e_1 ist die resultierende Spannung aus dem Ohmschen Spannungsverluste e_n und der die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion kompensierenden Spannung e_s. Diese sind bekanntlich in ihren Phasen um eine Viertelperiode gegeneinander verschoben und zwar eilt e_s der Spannung e_n vor. Im Vektordiagramm haben wir also zwei

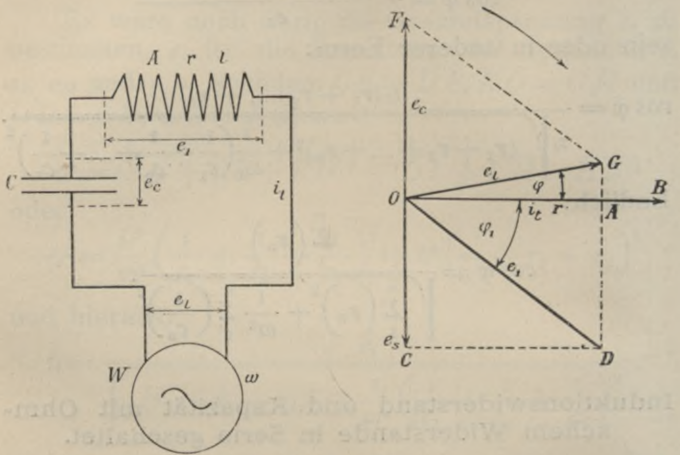

Fig. 52.

aufeinander senkrechte Vektoren, $\overline{OA}$ und $\overline{OC}$, welche die Spannungsdifferenz $\overline{OD}$, als die Diagonale des Parallelogrammes $OADC$ bestimmen.

Bedeutet $\overline{OB}$ den Vektor der Stromstärke i_t, dann fällt der Vektor des Spannungsabfalls $i_t r = e_n$ mit diesem zusammen. Die Spannung e_1 eilt demnach der Stromstärke i_t in der Phase um den Winkel φ_1 voraus.

Zur Kapazität übergehend, weiß man, daß die gegenelektromotorische Kraft e_c derselben der

Stromstärke um eine Viertelperiode nacheilt. Der dem entsprechende Vektor ist $\overline{OF}$. Nachdem die Gesamtspannung e_t der Stromquelle aus den Teilspannungen e_n, e_s und e_c oder e_1 und e_c sich ergibt, muß man die Resultierende der Vektorgrößen $\overline{OD} = e_1$ und $\overline{OF} = e_c$ bilden. Diese wird aus dem Rhomboid $OFGD$ bestimmt und zwar wird $\overline{OG} = e_t$. In unserem Falle ist e_t vom Strome um den Winkel φ phasenverspätet.

Aus dieser graphischen Behandlung ist ersichtlich, daß die Selbstinduktion und die Kapazität entgegengesetzte Wirkungen haben. Verursacht in einem Stromkreise die Selbstinduktion zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung, dann kann diese durch Dazuschalten einer Kapazität vermindert werden, ja man kann die Selbstinduktion und die Kapazität so wählen, daß sie gleich große, jedoch entgegengesetzt gerichtete Phasenverschiebungen hervorrufen, wodurch die resultierende Phasenverschiebung Null wird. In einem solchen Wechselstromkreise gilt das Ohmsche Gesetz in derselben Form, wie beim Gleichstrome.

Die resultierende Phasenverschiebung kann naturgemäß nur dann Null werden, wenn e_c und e_s einander gleich sind. Bei Vektorgrößen darf man algebraische Summationen nur dann vornehmen, wenn zwischen ihnen der Phasenwinkel 0^0 oder 180^0 ist und dies ist gerade der Fall bei unserer Schaltungsdisposition. Es kommt nämlich nur eine der Differenz $(e_c - e_s)$ entsprechende Spannungskomponente in Betracht, welche mit e_n die Gesamtspannung e_t bestimmt. Wird $e_s = e_c$, dann ist $e_s - e_c = 0$ und

$$e_t = \overline{OG} = \overline{OA} = i_t r = e_n.$$

Sehen wir nun die rechnerische Bestimmung der verschiedenen, hier vorkommenden Größen.

e_t und i_t sind gegeben. Die Komponentspannungen sind zu berechnen und der zwischen ihnen und den Größen e_t und i_t bestehende Zusammenhang zu ermitteln.

Wenn l der Selbstinduktionskoeffizient und $\sim$ die Periodenzahl sind, dann wird

$$\omega = 2\pi \sim$$

und die kompensierende Spannung der Selbstinduktion

$$e_s = i_t l \omega.$$

Die resultierende Spannungsdifferenz e_1 ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreieck OAD und zwar wird:

$$e_1^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 = i_t^2 r^2 + e_s^2 = e_n^2 + e_s^2$$

oder

$$e_1 = \sqrt{e_n^2 + e_s^2}.$$

e_t ist die Resultante von e_1 und e_c. Nachdem aber OAG ein rechtwinkeliges Dreieck ist, wird

$$e_t^2 = \overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{GA}^2.$$

Weiters ist

$$\overline{GA} = \overline{GD} - \overline{AD} = \overline{OF} - \overline{AD}$$

oder

$$\overline{GA} = e_c - e_s.$$

Substituiert und die Wurzel gezogen, wird aus obiger Gleichung

$$e_t = \sqrt{e_n^2 + (e_c - e_s)^2}$$

In diesem Ausdrucke ist e_c die gegenelektromotorische Kraft der Kapazität kompensierende Spannung und zwar ist ihre Größe

$$e_c = \frac{i_t}{c\,\omega}.$$

Die verschiedenen Spannungswerte substituiert, bekommt man

$$e_t = \sqrt{i_t^2\, r^2 + \left(\frac{i_t}{c\,\omega} - i_t\, l\, \omega\right)^2}$$

$$e_t = i_t \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}$$

Das ist das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz für solche Stromkreise, welche Ohmschen Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion in Hintereinanderschaltung besitzen.

Die Gegenwirkung der Kapazität und der Selbstinduktion kommt auch in obiger Formel zum Ausdruck, indem zwischen den Klammern eine Differenz steht, deren Glieder sich aus diesen Größen ergeben. Bei geeigneter Wahl der Verhältnisse kann diese Differenz Null werden und dann ist:

$$e_t = i_t \sqrt{r^2} = i_t\, r.$$

Das gibt:

$$i_t = \frac{e_t}{r}$$

das einfache Ohmsche Gesetz, welches in Gleichstromkreisen Giltigkeit hat.

Der Cosinus des resultierenden Phasenverschiebungswinkels läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OG}} = \frac{e_n}{e_t} = \frac{i_t\, r}{i_t \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}}$$

oder einfacher:

$$\cos\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}}.$$

Der Leistungsfaktor ist Maximum, d. h. sein Wert ist $= 1$, oder $\varphi = 0$, wenn

$$r = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}$$

oder

$$r^2 = r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2$$

Diese Gleichung kann nur so bestehen, wenn

$$\left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega = 0.$$

Hieraus wird

$$l = \frac{1}{c\,\omega^2}$$

oder

$$c = \frac{1}{l\,\omega^2}$$

oder endlich

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{c\,l}} = \frac{1}{\sqrt{c\,l}}$$

Aus den letzten drei Gleichungen ersieht man, in welcher Weise man erreichen kann, daß die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung Null wird. Entweder wählt man bei gegebener Kapazität eine entsprechende Selbstinduktion nach der ersten Gleichung, oder bestimmt laut der zweiten Gleichung eine der gegebenen Selbstinduktion entsprechende Kapazität, oder endlich verändert man die Periodenzahl des Wechselstromes in der Weise, wie sie die letzte Gleichung bedingt.

Beispiel.

Eine Induktionsrolle mit dem Ohmschen Widerstande $r = 10$ Ohm und den Selbstinduktionskoeffizienten $l = 4$ Henry ist in einem Wechselstromkreise mit einem Kondensator von der Kapazität $c = 20 \cdot 10^{-6}$ Farad in Serie geschaltet. Aufgabe ist, die in diesem Stromkreise auftretende Stromstärke zu bestimmen, wenn die Spannung der Stromquelle $e_t = 100$ Volt ist.

Die Periodenzahl des Wechselstromes ist gegeben und zwar sei $\sim = 50$. Dann wird

$$\omega = 2\pi \sim = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314$$

sein.

Die Stromstärke ist durch die Gleichung gegeben:

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}}.$$

Die gegebenen Werte eingesetzt, wird:

$$i_t = \frac{100}{\sqrt{10^2 + \left(\frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 314} - 4 \cdot 314\right)^2}}$$

oder

$$i_t = 0{,}092 \text{ Ampère.}$$

Dieser Strom wird bei den gegebenen Verhältnissen durch den Stromkreis fließen.

Eine weitere Aufgabe sei die Spannungen e_l und e_c an den Klemmen des Induktionswiderstandes, beziehungsweise des Kondensators zu bestimmen.

Die Spannungsdifferenz zwischen den Klemmen des Induktionswiderstandes ergibt sich aus zwei Komponentspannungen und zwar aus dem Ohmschen Spannungsverluste und der die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion kompensierenden Spannung. Der Ohmsche Spannungsverlust ist $i_t r$, die gegenelektromotorische Kraft, welche kompensiert werden muß, $i_t l \omega$.

Der Zusammenhang zwischen diesen Werten und der gesuchten Spannungsdifferenz ist bekanntlich:

$$e_1 = i_t \sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}.$$

Substituiert die Werte:

$$e_1 = 0{,}092 \sqrt{10^2 + 4^2 \cdot \overline{314}^2}$$

oder

$$e_1 = 115 \text{ Volt.}$$

Hieraus ersieht man die interessante Tatsache, daß die eine Komponentspannung größer als die Gesamtspannung ist.

Die zweite Komponente ist e_c und zwar wird

$$e_c = \frac{i_t}{c\,\omega}$$

oder

$$e_c = \frac{0{,}092}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 314} = 14{,}65 \text{ Volt.}$$

Die Tatsache, daß eine Komponente der Spannung größer ist als die Gesamtspannung, ist aus nachfolgenden Erörterungen leicht einzusehen.

Enthält ein Wechselstromkreis nur Ohmschen Widerstand und Kapazität in Serie geschaltet, dann ist die Gesamtspannung immer größer als irgendwelche Komponentspannung und zwar aus dem Grunde, weil letztere im Vektordiagramm immer durch die Hypotenuse jenes rechtwinkeligen Dreieckes dargestellt werden kann, dessen zwei Katheten die Komponentspannungen sind. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist aber die Hypotenuse immer länger als die Katheten.

Dasselbe steht in dem Fall, wenn der Wechselstromkreis aus in Serie geschalteten Ohmschen und Induktionswiderständen besteht.

Bei unserer gegenwärtigen Disposition aber sind im Stromkreise hintereinander geschaltete Ohmsche und Induktionswiderstände, sowie eine Kapazität vorhanden und das ändert an den Spannungsverhältnissen erheblich. Wie aus dem Vektordiagramm in Fig. 52 ersichtlich, ergibt sich die Lage und Größe des Vektors der Gesamtspannung e_t dadurch, daß man als eine Komponentspannung den Ohmschen Spannungsverlust, als die andere aber jene Spannung betrachtet, welche sich aus der Differenz der Selbstinduktions- und der Kondensatorspannung ergibt, da

$$\overline{OA} = i_t r = e_n$$

$$\overline{OF} = \overline{GD} = e_c \quad \text{und} \quad \overline{OC} = \overline{AD} = e_s.$$

Weiters

$$\overline{AG} = \overline{GD} - \overline{AD} = e_c - e_s$$

wobei e_t die Resultante von e_n und $(e_c - e_s)$ ist.

Nun können aber, um dieselbe e_t Spannung als Resultante hervorzurufen, bei gleichbleibender e_n Spannungskomponente e_c und e_s beliebig groß sein, sie müssen nur der Bedingung Genüge leisten, daß ihre Differenz $(e_c - e_s)$ immer denselben konstanten Wert behält.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 53 graphisch dargestellt, wobei angenommen ist, daß der Ohmsche Spannungsverlust immer denselben Wert hat.

Der Ohmsche Spannungsverlust ist durch den Vektor $\overline{OA}$ gegeben. $\overline{OB}$ ist die Kondensatorspannung kompensierende Spannungskomponente, $\overline{OC}$ jene für die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion benötigte. Die Differenz beider ist $\overline{OD}$, da

$$\overline{BD} = \overline{OC} \quad \text{und} \quad \overline{OD} = \overline{OB} - \overline{BD} = \overline{OB} - \overline{OC}.$$

Die resultierende Spannung e_t ergibt sich als die Hypothenuse des Dreieckes OAF, wobei $\overline{AF} = \overline{OD}$.

Man kann nun e_c und e_s beliebig verändern, nur muß man darauf achten, daß ihre Differenz immer mit $\overline{OD}$ gleich bleibt. Ist z. B. $e_c = \overline{OG}$ und $e_s = \overline{OH}$, sind ferner diese Spannungen so gewählt, daß

$$\overline{OG} - \overline{OH} = OD$$

ist, dann wird die Resultierende denselben Wert und dieselbe Phase haben als zuvor, d. h. die Resultierende ist wieder e_t.

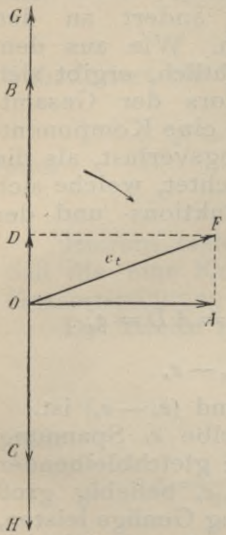

Fig. 53.

Wie groß ist in unserem Beispiele der Leistungsfaktor $\cos\varphi$?

Nach Seite 165 ist

$$\cos\varphi = \frac{e_n}{e_t} = \frac{0{,}092 \,.\, 10}{100} = \frac{0{,}92}{100}$$

$$\cos\varphi = 0{,}0092.$$

Der Leistungsfaktor ist sehr klein, was soviel bedeutet, daß der Phasenverschiebungswinkel zwischen Stromstärke und Gesamtspannung nahezu 90^0 ist. Bei obigem Wert wird rund

$$\varphi = 84^0\,40'$$

sein.

Wie groß müßte bei der gegebenen Kapazität der Koeffizient der Selbstinduktion sein, wenn wir erreichen wollten, daß $\varphi = 0$ wird?

In diesem Falle muß, laut dem Vorhergesagten

$$l = \frac{1}{c\,\omega^2}$$

sein, oder

$$l = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 314^2} = 0{,}508 \text{ Henry.}$$

Dasselbe könnte man erreichen, wenn man bei gegebenen Selbstinduktionskoeffizienten die Kapazität verändert und zwar nach der Gleichung

$$c = \frac{1}{l\,\omega^2}$$

$$c = \frac{1}{4 \cdot 314^2} = 0{,}394 \cdot 10^{-6} \text{ Farad.}$$

Hat man eine Stromquelle zur Verfügung, deren Periodenzahl verändert werden kann, dann müßte man bei den gegebenen l und c Werten eine solche Periodenzahl herstellen, deren Größe durch die Formel

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{l\,c}}$$

bestimmt wird.

Nachdem $\omega = 2\pi \sim$, wird

$$\sim = \frac{1}{2\pi\sqrt{c\,l}}$$

In unserem Falle also

$$\sim = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14\sqrt{20 \cdot 10^{-6} \cdot 4}} = 17{,}82.$$

Natürlich wird die Stromstärke auch ihren Wert ändern. Nachdem in diesen Fällen keine Phasenverschiebung vorhanden ist, kann das Ohmsche Gesetz ohne Modifikation angewendet werden, ebenso wie in einem Gleichstromkreise, und die gesuchte Stromstärke wird dann:

$$i_t = \frac{e_t}{r} = \frac{100}{10} = 10 \text{ Ampère.}$$

Der Ohmsche Spannungsverlust endlich wäre in diesem Falle gleich mit der Gesamtspannung, d. h.

$$i_t r = 10 \,.\, 10 = 100 \text{ Volt.}$$

Untersuchen wir bei der gegebenen Kapazität, Ohmschem Widerstande und Periodenzahl die Veränderung der Stromstärke, wenn der Koeffizient der Selbstinduktion vom Nullwerte allmählich ansteigt. Die Stromstärke wird aus der Formel

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}}$$

bestimmt, wobei l veränderlich ist.

Die berechneten Stromstärken sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt:

l Henry	i_t Amp.	l Henry	i_t Amp.	l Henry	i_t Amp.
0,0	0,394	0,4	2,880	0,6	3,210
0,1	0,781	0,5	9,800	0,7	1,630
0,2	1,030	0,508	10,000	0,8	1,080
0,3	1,530				

Hieraus ist ersichtlich, daß die Stromstärke bei zunehmender Selbstinduktion anfangs sehr langsam zunimmt, später wird die Zunahme rascher, ja sie erfolgt zwischen $l = 0{,}4$ und $l = 0{,}508$ Henry sprungmäßig, bei letzterem Wert ist die Stromstärke das erreichbare Maximum, über diese Grenze nimmt sie wieder erst rasch, dann langsamer ab.

Dieses Verhalten ist ähnlich der Resonanz in der Akustik, weshalb man diese Erscheinung elektrische Resonanz nennt. Sie tritt immer in solchen Stromkreisen auf, welche Ohmsche und induktive Widerstände und Kapazität enthalten und nur dann, wenn die gegenelektromotorischen Kräfte der Selbstinduktion und der Kapazität einander gleich sind.

Für die Entstehung der Resonanzerscheinung ist also Bedingung, daß

$$i_t\, l\, \omega = \frac{i_t}{c\, \omega}$$

oder

$$l\, \omega - \frac{1}{c\, \omega} = 0.$$

Der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ verändert sich laut der Formel auf Seite 165 mit der Änderung der Größe l ebenso wie die Stromstärke. Sein Wert ist klein, bei anwachsender Selbstinduktion nimmt er erst langsam, dann rascher zu, wird bei maximaler Stromstärke maximal, da in diesem Falle die Phasenverschiebung Null ist, später nimmt sein Wert wieder rasch ab, um dann langsam stetig zum Nullwerte sich zu nähern.

Die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion wird im Grenzfalle, wenn $\varphi = 0$, wenn also die Resonanzerscheinung eintritt, am größten sein und zwar beträgt ihr Wert

$$i_t\, l\, \omega = 10 \,.\, 0{,}508 \cdot 314 = 1595{,}12 \text{ Volt.}$$

Hieraus ersehen wir, daß wenn die Gesamtspannung auch nur 100 Volt beträgt, im Stromkreise bei der Resonanzerscheinung solche Spannungen auftreten können, welche weit größer als die Gesamtspannung sind. Die Resultierende aus den drei Spannungen: dem Ohmschen Spannungsverluste, der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion und jener der Kapazität ergibt darum doch nur den niedrigen Wert der Gesamtspannung.

In Wechselstromkreisen muß man auf die Resonanzerscheinungen besondere Rücksicht nehmen, denn die eventuell auftretenden hohen Spannungen können sehr unangenehme und nachteilige Folgen haben.

Ohmscher Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Parallelschaltung.

In Fig. 54 ist eine Schaltungsanordnung dargestellt, bei welcher ein Ohmscher und induktiver Widerstand mit einer Kapazität parallel geschaltet ist. Der Ohmsche Widerstand sei r, der Koeffizient der Selbstinduktion l, die Kapazität des Kondensators c. In der ungeteilten Leitung fließt ein Strom von der Intensität i_t, dieser teilt sich in die Teilströme i_1 und i_2. Die Periodenzahl des Wechselstromes ist gegeben, folglich kann ω bestimmt werden, auch ist die Gesamtspannung e_t bekannt.

Nachdem von Parallelschaltung die Rede ist, wird die Spannungsdifferenz sowohl zwischen den Endpunkten des Induktionswiderstandes mit dem Ohmschen Widerstande r, als auch an den Klemmen des Kondensators gleich mit e_t sein, letztere ist also die gemeinsame Spannung.

Wir nehmen an, daß der Ohmsche Widerstand der Kondensatorzuleitungen so klein ist, daß er vernachlässigt werden kann.

i_t ergibt sich als die Resultierende der Teilströme i_1 und i_2. Um sie ermitteln zu können, muß man die Phasenverhältnisse kennen.

Betrachten wir zunächst jenen Stromzweig, welcher den Induktionswiderstand enthält. In diesem Zweige ist ein Ohmscher und ein induktiver Widerstand in Serie geschaltet. Die Spannungsdifferenz zwischen den Endpunkten, also die Gesamtspannung e_t kann als die Resultante zweier Spannungskomponenten dargestellt werden und zwar ist eine Komponente der Ohmsche Spannungsverlust, die zweite die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion. Der Zusammenhang zwischen diesen Spannungswerten ist durch ein rechtwinkeliges Dreieck gegeben, dessen Katheten die

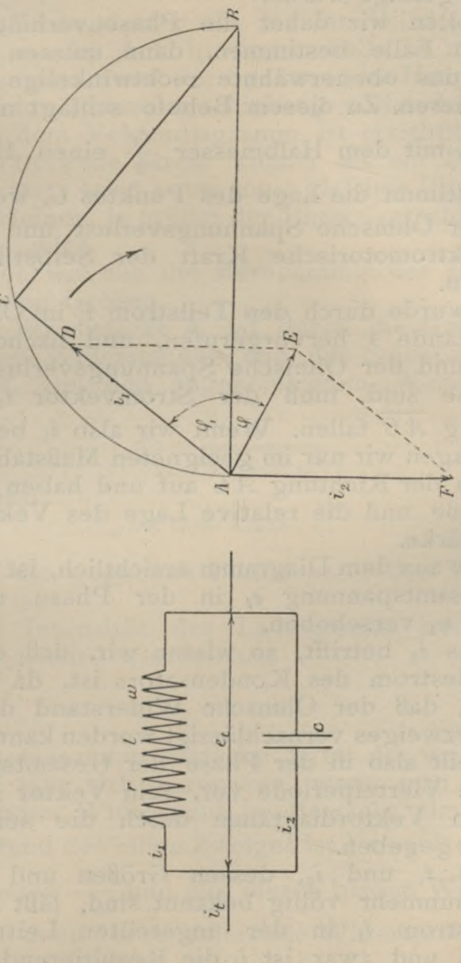

Fig. 54.

Komponentspannungen und dessen Hypotenuse die Gesamtspannung bilden, wie dies auch in Fig. 42 gezeigt wurde.

Wollen wir daher die Phasenverhältnisse in unserem Falle bestimmen, dann müssen wir zunächst das obenerwähnte rechtwinkelige Dreieck konstruieren. Zu diesem Behufe schlägt man über $\overline{AB} = e_t$ mit dem Halbmesser $\frac{e_t}{2}$ einen Halbkreis und bestimmt die Lage des Punktes C, wobei $\overline{AC} = e_n$ der Ohmsche Spannungsverlust und $\overline{BC} = e_s$ die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion bedeuten.

e_n wurde durch den Teilstrom i_1 im Ohmschen Widerstande r hervorgerufen, und nachdem der Strom und der Ohmsche Spannungsverlust immer in Phase sind, muß der Stromvektor i_1 in die Richtung $\overline{AC}$ fallen. Wenn wir also i_1 berechnen, dann tragen wir nur im geeigneten Maßstabe seinen Wert in der Richtung AC auf und haben dadurch die Größe und die relative Lage des Vektors der Stromstärke.

Wie aus dem Diagramm ersichtlich, ist i_1 gegen die Gesamtspannung e_t in der Phase um den Winkel φ_1 verschoben.

Was i_2 betrifft, so wissen wir, daß dies nur der Ladestrom des Kondensators ist, da wir annahmen, daß der Ohmsche Widerstand des Kondensatorzweiges vernachlässigt werden kann. Dieser Strom eilt also in der Phase der Gesamtspannung um eine Viertelperiode vor, sein Vektor ist demnach im Vektordiagramm durch die senkrechte Linie i_2 gegeben.

Aus i_1 und i_2, dessen Größen und relative Lagen nunmehr völlig bekannt sind, läßt sich der Gesamtstrom i_t in der ungeteilten Leitung bestimmen und zwar ist i_t die Resultierende von i_1 und i_2. Dieser Strom hat zur Spannung einen

Phasenverschiebungswinkel von φ. i_t ist gegen die Gesamtspannung e_t phasenverfrüht oder phasenverspätet, je nachdem der Strom i_2 größer, beziehungsweise kleiner als $\overline{DE}$ ist. Wird $i_2 = \overline{DE}$, dann ist $\varphi = 0$, d. h. in diesem Falle ist zwischen der Stromstärke und der Spannung im Hauptstromkreise keine Phasenverschiebung vorhanden.

Aus dem Vektordiagramm ist ersichtlich, daß der resultierende Strom kleiner als ein Teilstrom ist, und zwar wird unter sonst gleichen Umständen i_t umso kleiner, je größer der Phasenverschiebungswinkel φ_1 wird.

Sehen wir nun die Berechnung der hier vorkommenden Größen.

Die Stromstärke i_1 ist durch die Größe des Ohmschen Widerstandes und der Selbstinduktion bestimmt. Bei den angenommenen Werten wird

$$i_1 = \frac{e_t}{\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}}$$

sein, wenn

$$\omega = 2 \pi \sim$$

und $\sim$ die gegebene Periodenzahl des Wechselstromes ist.

Die Intensität des Ladestromes mit i_2 bezeichnend, wird wie bekannt

$$i_2 = c\, e_c\, \omega.$$

Die Gesamtstromstärke i_t in der ungeteilten Leitung läßt sich berechnen, wenn man den resultierenden Widerstand in Betracht nimmt. Der Widerstand des einen Zweiges ist $\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}$, jener des zweiten $\frac{1}{c\,\omega}$ und aus diesen beiden Werten ergibt sich dann der resultierende Widerstand, dessen Ausdruck folgender ist:

$$R_x = \sqrt{\frac{r^2 + l^2 \omega^2}{c^2 \omega^2 \left(r^2 + \omega^2 \left[l - \frac{1}{c \omega^2}\right]^2\right)}}$$

Nun wird

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{\frac{r^2 + l^2 \omega^2}{c^2 \omega^2 \left(r^2 + \omega^2 \left[l - \frac{1}{c \omega^2}\right]^2\right)}}}$$

Zahlenbeispiel.

Eine Induktionsspule mit dem Omschen Widerstande $r = 10\,\Omega$ und dem Selbstinduktionskoeffizienten $l = 0{,}5$ Henry ist mit einem Kondensator, dessen Kapazität $c = 0{,}1 \,.\, 10^{-6}$ Farad beträgt, parallel geschaltet. Die Gesamtspannung ist gegeben, und zwar $e_t = 100$ Volt, sowie die Periodenzahl $\sim = 50$.

Bei diesen Werten sind die Stromstärken zu bestimmen.

Durch den Induktionswiderstand fließt ein Strom, dessen Stärke

$$i_1 = \frac{e_t}{\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}}$$

ist, wobei

$$\omega = 2\pi \sim = 2\pi \,.\, 50 = 314.$$

Die gegebenen Werte eingesetzt, wird:

$$i_1 = \frac{100}{\sqrt{10^2 + 0{,}5^2 \,.\, 314^2}} = 0{,}64 \text{ Ampère.}$$

Im Kondensatorkreis fließt die Stromstärke

$$i_2 = c\, e_t\, \omega$$

$$i_2 = 0{,}1 \,.\, 10^{-6} \,.\, 100 \,.\, 314 = 0{,}314 \,.\, 10^{-2}.$$

Der Gesamtstrom i_t wird demnach:

$$i_t = \frac{100}{\sqrt{\dfrac{10^2 + \overline{0{,}5^2} \cdot 314^2}{0{,}1^2 \cdot 10^{-12} \cdot 314^2 \left(10^2 + 314^2 \left[0{,}5 - \dfrac{1}{0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 314^2}\right]^2\right)}}}$$

sein.

Berechnet, ist:

$$i_t = 0{,}638 \text{ Ampère},$$

d. h. bald soviel, wie der Strom i_1.

Ohmscher Widerstand und Kondensator in Parallelschaltung.

In einem Stromkreise sei ein Ohmscher Widerstand r mit einem Kondensator von der Kapazität c parallel geschaltet. Es sind die Strom- und Phasenverhältnisse zu ermitteln.

Die Schaltungsanordnung ist dieselbe wie in Fig. 54, nur ist anstatt der Induktionsspule ein Ohmscher Widerstand in den einen Zweig zu schalten. In diesem Stromzweige wird zwischen der Spannung e_t und dem Teilstrome i_1 keine Phasenverschiebung sein, da hier weder Selbstinduktion noch Kapazität vorhanden sind. Es gilt also das Ohmsche Gesetz in jener unveränderten Form, wie beim Gleichstrom, d. h. es wird

$$i_1 = \frac{e_t}{r}$$

sein.

Nachdem im zweiten Stromzweige der Ohmsche Widerstand verschwindend klein ist, kann man i_2:

$$i_2 = c\, e_t\, \omega$$

setzen. Dieser Strom eilt der Spannung in der Phase um 90^0, d. h. um eine Viertelperiode vor.

Der Gesamtstrom in der Hauptleitung ergibt sich als die Resultierende dieser Teilströme, sein Vektor wird also durch die Hypothenuse eines solchen rechtwinkeligen Dreieckes gegeben, dessen Katheten die zwei Teilstromvektore sind.

Die Phasenverhältnisse sind in Fig. 55 dargestellt. $\overline{OA}$ ist der Vektor der gemeinsamen Spannung e_t, mit welcher der Vektor des Stromes i_1 zusammenfällt. Der letztere ist durch $\overline{OB}$ gegeben. Bei der angedeuteten Drehrichtung wird $\overline{OC}$ die relative Lage des Stromes i_2 geben, und zwar ist zwischen $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ ein Phasenunterschied von 90^0

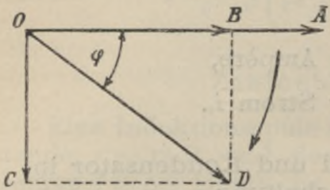

Fig. 55.

Der Gesamtstrom setzt sich aus diesen Strömen zusammen; wenn wir also in bekannter Weise die Resultante bilden, erhalten wir $\overline{OD}$ als den gesuchten Vektor der Stromstärke i_t. Dieser eilt der Spannung in der Phase um den Winkel φ vor. Sein Wert ist aus dem Dreieck OBD zu berechnen, und zwar:

$$\overline{OD^2} = \overline{OB^2} + \overline{BD^2} = \overline{OB^2} + \overline{OC^2}$$

oder

$$OD^2 = i_t^2 = i_1^2 + i_2^2.$$

Hieraus wird

$$i_t = \sqrt{i_1^2 + i_2^2}.$$

Die gefundenen Werte substituiert,

$$i_t = \sqrt{\frac{e_t^2}{r^2} + c^2 e_t^2 \omega^2}$$

oder

$$i_t = e_t \sqrt{\frac{1}{r^2} + c^2 \omega^2}.$$

Nachdem aber

$$\sqrt{\frac{1}{r^2} + c^2 \omega^2} = \frac{1}{r} \sqrt{1 + r^2 c^2 \omega^2}$$

ist, wird

$$i_t = \frac{e_t}{r} \sqrt{1 + r^2 c^2 \omega^2}.$$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man in der Formel i_t auf Seite 178 $l = \emptyset$ setzt.

Der Cosinus des Phasenverschiebungswinkels φ ergibt sich aus dem Vektordiagramm, und zwar wird

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{i_1}{i_t} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 c^2 \omega^2}}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Phasenverschiebungswinkel Null, d. h. der Cosinus dieses Winkels Eins wird, wenn

$$1 = \sqrt{1 + r^2 c^2 \omega^2}.$$

Diese Bedingung kann nur dadurch erfüllt werden, daß man $c = 0$ setzt. In diesem Falle ist im Stromkreise kein Kondensator, nur Ohmscher Widerstand, folglich muß in diesem Falle das unveränderte Ohmsche Gesetz Geltung haben und der Strom mit der Spannung in der Phase übereinstimmen.

Nachdem der Strom i_t außer $\frac{e_t}{r}$ in seinem Ausdrucke noch einen Faktor hat, der größer als die Einheit ist, wird sein Wert immer größer sein, als derjenige von i_1. Dasselbe steht i_2 betreffend, da i_t die Hypotenuse jenes rechtwinkeligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete durch i_2 gebildet wird.

Die Phasenverschiebung ist maximal, d. h. $\cos \varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$, wenn im obigen Ausdrucke

$$\sqrt{1 + r^2 c^2 \omega^2} = 0$$

oder wenn

$$1 = - r^2 c^2 \omega.$$

Hieraus ist

$$r = \sqrt{- \frac{1}{c^2 \omega^2}}.$$

Nachdem dies eine imaginäre Zahl ist, kann man diese Bedingung nicht erfüllen, was besagt, daß bei parallel geschaltetem Ohmschen Widerstande und Kapazität weder der Widerstand, noch die Kapazität so gewählt werden können, daß der Phasenverschiebungswinkel zwischen Gesamtstrom und Spannung 90^0 wird.

Um die Verhältnisse besser überblicken zu können, sehen wir ein Beispiel.

Ein Ohmscher Widerstand von $r = 10\,\Omega$ ist mit einem Kondensator von der Kapazität $c = 0{,}1 \cdot 10^{-6}$ Farad parallel geschaltet, wobei die Spannung des Stromkreises $e_t = 100$ Volt beträgt.

Die Stromstärke im Ohmschen Widerstande ist

$$i_1 = \frac{100}{10} = 10 \text{ Ampère.}$$

Im Kondensatorkreise dagegen, wenn die Periodenzahl $\sim = 50$ ist:

$$i_2 = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50$$

$$i_2 = 0{,}314 \cdot 10^{-2} \text{ Ampère.}$$

Wie groß wird die Gesamtstromstärke i_t in der ungeteilten Leitung?

$$i_t = \sqrt{10^2 + 0{,}314^2 \cdot 10^{-4}}.$$

Das zweite Glied des Wurzelausdruckes ist so klein, daß es vernachlässigt werden kann, demnach

$$i_t \doteq \sqrt{10^2} \doteq 10 \text{ Ampère}$$

d. h. bald so groß wird als der Strom i_1.

Unter solchen Umständen wird natürlich

$$\cos \varphi \doteq \frac{i_1}{i_t} \doteq \frac{10}{10} = 1$$

d. h.

$$\varphi = 0$$

oder zwischen den Gesamtstrom und der Spannung ist keine Phasenverschiebung, wenn i_2 vernachlässigt wird.

Ohmscher, induktiver Widerstand und Kondensator mit einem anderen Kondensator parallel geschaltet.

In Fig. 56 ist ein kombinierter Stromkreis dargestellt. Es sind zwei parallel geschaltete Zweige

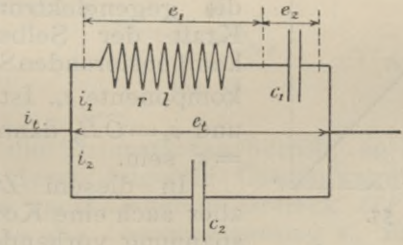

Fig. 56.

vorhanden, deren eines einen Kondensator mit der Kapazität c_1 und einen induktiven Widerstand mit dem Selbstinduktionskoeffizienten l und dem Ohmschen Widerstande r enthält. Der andere Zweig hat nur einen Kondensator von der Kapazität c_2. Wir nehmen an, daß der Ohmsche Widerstand dieses Zweiges vernachlässigt werden kann. Der

Gesamtstrom sei mit i_t, die Teilströme mit i_1 und i_2, die gemeinsame Spannung mit e_t bezeichnet.

Diese Spannung hat im ersten Zweige zwei Komponenten, und zwar die Spannung e_1 zwischen den Endpunkten des Induktionswiderstandes und die Spannung e_2 an den Klemmen des Kondensators. Für den zweiten Zweig ist die Spannung e_t gleich mit der Kondensatorspannung, da in diesem Stromkreise der Ohmsche Widerstand vernachlässigt worden ist.

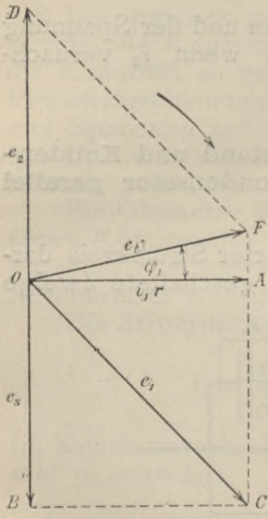

Fig. 57.

In Fig. 57 sind die Spannungsverhältnisse dargestellt. Für den ersten Zweig sind die Verhältnisse dieselben, wie im Stromkreise der Fig. 52. e_1 ist die Resultante des Ohmschen Spannungsverlustes $i_1 r$ im Ohmschen Widerstande der Induktionsspule und der die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion kompensierenden Spannungskomponente e_s. Ist $i_1 r = \overline{OA}$ und $e_s = \overline{OB}$, dann wird $\overline{OC} = e_1$ sein.

In diesem Zweige ist aber auch eine Kondensatorspannung vorhanden, dessen Vektor durch $\overline{OD} = e_2$ gegeben ist. Die Gesamtspannung e_t kann also als die Resultante der Spannungen e_1 und e_2 bestimmt werden. Im Vektordiagramm ist dies mit $\overline{OF} = e_t$ bezeichnet.

Für den zweiten Zweig brauchen wir diese Konstruktion des Vektors der gesamtelektromotorischen Kraft nicht durchzuführen, da in diesem Stromkreise nur die Kapazität vorhanden ist, weshalb die Spannungsdifferenz an den Klemmen des

Kondensators gleich groß und in der Phase gleichliegend mit der zuvor bestimmten elektromotorischen Kraft e_t ist.

Der Vektor des Stromes i_1 fällt in die Richtung $\overline{OA}$, so daß die Phasenverschiebung zwischen der Stromstärke und der Spannung im ersten Zweige durch den Winkel φ_1 gegeben ist.

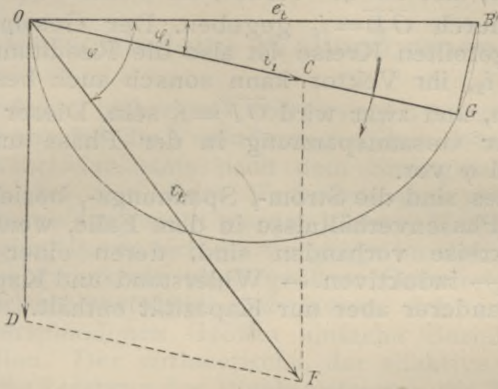

Fig. 58.

Was die Stromstärken betrifft, so lassen sich dieselben durch folgende Überlegungen konstruieren. Das rechtwinkelige Dreieck OFA hat zur Hypotenuse die Gesamtspannung e_t, zu Katheten den Ohmschen Spannungsverlust $\overline{OA} = i_1 r$ und die Spannungskomponente $\overline{AF}$, welche sich aus der Differenz der Selbstinduktions- und der Kondensatorspannung e_2 ergibt. In diesem Dreiecke ist $\overline{OA} \perp FA$, das Dreieck läßt sich also konstruieren, wenn man mit dem Halbmesser $\frac{\overline{OF}}{2}$ einen Halbkreis zieht und auf diesem den Punkt A sucht.

Diese Konstruktion ist in Fig. 58 durchgeführt, welche mit Fig. 57 insoferne korrespondiert, daß $\overline{OB} = \overline{OF} = e_t$, weiters $\overline{OG} = \overline{OA} = i_1 r$ und $\overline{BG} = \overline{FA}$. Ferner ist $\sphericalangle FOA = \varphi_1 = \sphericalangle BOG$.

Der Vektor der Stromstärke i_1 fällt in die Richtung $\overline{OG}$. Die Stromstärke im zweiten Kreise eilt der Spannung in der Phase um eine Viertelperiode, also um 90^0 voraus, ihr Vektor wird demnach durch $\overline{OD} = i_t$ gegeben. Der Gesamtstrom im ungeteilten Kreise ist also die Resultante von i_1 und i_2, ihr Vektor kann sonach auch bestimmt werden, und zwar wird $\overline{OF} = i_t$ sein. Dieser Strom eilt der Gesamtspannung in der Phase um den Winkel φ vor.

Dies sind die Strom-, Spannungs-, beziehungsweise Phasenverhältnisse in dem Falle, wenn zwei Stromkreise vorhanden sind, deren einer Ohmschen — induktiven — Widerstand und Kapazität, deren anderer aber nur Kapazität enthält.

VI. Kapitel.

Verschiedene Wellenformen.

Bei den bisherigen Erörterungen nahmen wir immer an, daß die Veränderungen der elektrischen Wechselgrößen stets nach dem Sinusgesetze erfolgen, daß also diese Veränderungen mit einer Sinuskurve dargestellt werden können. Unter dieser Bedingung lassen sich die Vorgänge im elektrischen Wechselstromkreis ohne größere Schwierigkeiten rechnerisch verfolgen und lassen sich zwischen den verschiedenen Größen einfache Beziehungen aufstellen. Der arithmetische, der effektive Mittelwert, die Leistung des Wechselstromes, die Phasenverschiebung etc. können durch einfache Formeln ausgedrückt werden.

In der Wirklichkeit sind indessen die Verhältnisse zumeist solche, daß infolge störender Ursachen die Veränderungen nicht nach dem Sinusgesetz verlaufen, sondern eine mehr oder minder komplizierte Form annehmen. In solchen Fällen geben die abgeleiteten Formeln nicht mehr den richtigen Wert, man muß vielmehr entsprechende Korrektionen vornehmen.

Die Ursachen, welche eine Veränderung der Sinuskurve herbeiführen, sind sehr verschieden. In den meisten Fällen ist die Stromquelle selbst solcher Natur, daß die erzeugte elektromotorische Kraft keine sinusförmige ist, in anderen Fällen liegt die Ursache im Stromkreise, infolge welcher die ursprüngliche Sinuswellenform verzerrt und eine kompliziertere Wellenform erzeugt wird.

Ein solcher Fall ist z. B. der, in welchem der sinusförmige Wechselstrom eine Spule mit einem Eisenkern durchfließt. Im Eisenkerne entsteht magnetische Hysteresis und es werden Wirbelströme induziert; diese Erscheinungen haben dann zur Folge, daß die Welle der Stromstärke ihre Sinusform verliert und eine verzerrte Form annimmt. Kennt man die Hysteresisschleife des Eisenkernes, dann läßt sich die neue Kurvenform der Stromstärke aus derselben bestimmen.

Fließt ein Wechselstrom, der sich nach dem Sinusgesetz ändert, durch eine Drahtspule, welche kein magnetisches Material enthält, dann entsteht ringsum der Spule ein magnetisches Feld, dessen Stärke ebenso variiert, wie diejenige des Stromes, d. h. die Änderung des magnetischen Feldes kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, welche folgende Form hat:

$$\nu = N \sin \omega t$$

wobei ν den Momentwert des magnetischen Feldes, N aber dessen Maximalwert bedeutet.

Im Raume entstehen magnetische Kraftlinien, von deren Anzahl die Intensität des magnetischen Feldes abhängt. Setzen sämtliche Kraftlinien die Fläche S durch, dann nennt man die auf die Flächeneinheit fallende Kraftlinienzahl

$$\mathfrak{B} = \frac{N}{S}$$

die Magnetisierung des fraglichen Mediums. Bei Wechselströmen entsteht ein wechselndes magnetisches Feld, folglich kann auch hier von Moment- und Maximalwerten die Rede sein. Unsere oben angeführten Bezeichnungen benützend, wird der

Momentwert der Magnetisierung

$$b = \frac{v}{S}$$

sein.

Wird nun ein Eisenstück gleichmäßig wechselnder magnetisierender Kraft ausgesetzt, dann ist seine Magnetisierung nicht mehr mit der magnetisierenden Kraft proportional, auch nimmt die Magnetisierung in verschiedenem Maße zu, respektive ab, wenn die magnetisierende Kraft zu-, beziehungsweise abnimmt. Stellt man diese Verhältnisse durch ein Diagramm dar, dann erhält man eine schleifenähnliche Kurve, wie in Fig. 33 für verschiedene Eisensorten gezeigt wurde.

Die magnetisierende Kraft pro 1 *cm* Kraftlinienweg kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$H = \frac{4\pi}{10} \frac{n\,i}{l}$$

wo n die durch den Strom i durchflossene Windungszahl der Spule und l den gesamten Kraftlinienweg in Zentimeter bedeutet. In obiger Formel ist i in Ampère gemessen, deshalb ist im Nenner der Faktor 10 vorhanden.

Man kann nun auch eine Hysteresisschleife bilden, bei welcher die Ordinaten die Momentwerte der Magnetisierung, die Abscissen dagegen die jeweiligen Stromstärken bedeuten. Man muß nur in Fig. 33 die Werte $\mathfrak{B}$ und H mit S, beziehungsweise mit $\frac{10\,l}{4\pi n}$ multiplizieren Fig. 59 stellt eine solche Schleife dar. Aus dieser ist ersichtlich, daß die Stromstärke ihren Maximalwert erreicht, wenn das magnetische Feld maximal ist, beim Nullwerte des Stromes hat das magnetische Feld eine gewisse Stärke noch und der Strom muß schon entgegengesetzt wirken, damit das Feld gänzlich verschwindet.

Bei unmagnetischen Materialen ist keine Hysteresis vorhanden. Warburg zeigte, daß die Größe der durch die Hysteresisschleife umschlossenen Fläche proportional mit der Ummagnetisierungs-

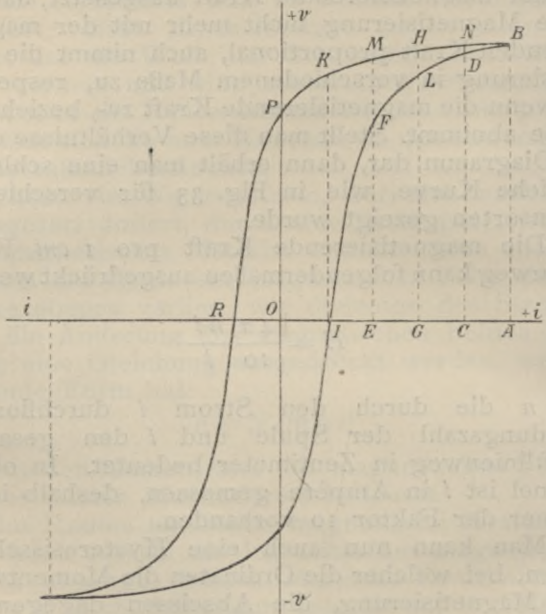

Fig. 59.

arbeit ist. Nachdem bei nichtmagnetischen Medien die Hysteresisarbeit Null ist, kann die Schleife keine Fläche umschließen, d. h. die Schleife wird zu einer einzigen Linie. Hieraus folgt, daß bei solchen Körpern zwischen der Erregerstromstärke und dem magnetischen Felde einfache Proportionalität besteht, oder daß einer bestimmten Stromstärke dasselbe magnetische Feld entspricht, unabhängig davon, ob die Stromstärke, beziehungsweise das magnetische Feld im Zu- oder Abnehmen begriffen ist. Es folgt auch aus der einfachen Proportionalität, daß die Kurve für nichtmagnetische Materialien die Form einer Geraden annimmt.

Sehen wir nun, in welcher Weise die Kurve der Stromstärke durch die Hysteresis beeinflußt

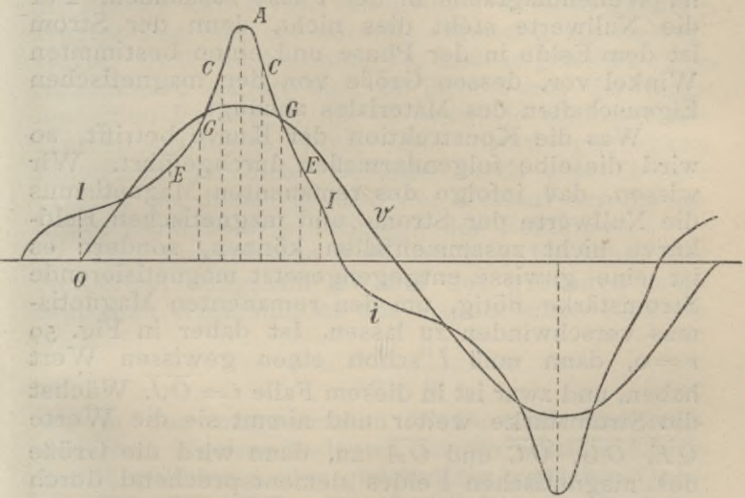

Fig. 60.

wird, wenn das magnetische Feld nach dem Sinusgesetze sich ändert, d. h. wenn:

$$v = N \sin \omega t.$$

Dies ist eine Sinuskurve, welche in Fig. 60 durch v dargestellt ist. Die Stromkurve war ursprünglich auch eine Sinuslinie, sie hat aber durch die Hysteresis ihre Gestalt geändert und jene Form angenommen, welche in der Figur mit i bezeichnet ist.

Diese letztere läßt sich aus der Fig. 59 konstruieren. In dieser ist die Abscissenachse die Strom-, die Ordinatenachse dagegen die magnetische Feldachse; aus dieser Figur kann man also entnehmen, welcher Stromstärke ein gewisses magnetisches Feld entspricht und umgekehrt. Bei maximaler Erregerstromstärke ist auch das magnetische Feld maximal, diese zwei Werte fallen also im Wellendiagramm in der Phase zusammen. Für die Nullwerte steht dies nicht, denn der Strom ist dem Felde in der Phase und einen bestimmten Winkel vor, dessen Größe von den magnetischen Eigenschaften des Materiales abhängt.

Was die Konstruktion der Kurve betrifft, so wird dieselbe folgendermaßen durchgeführt. Wir wissen, daß infolge des remanenten Magnetismus die Nullwerte der Strom- und magnetischen Feldkurve nicht zusammenfallen können, sondern es ist eine gewisse entgegengesetzt magnetisierende Stromstärke nötig, um den remanenten Magnetismus verschwinden zu lassen. Ist daher in Fig. 59 $v = 0$, dann muß i schon einen gewissen Wert haben, und zwar ist in diesem Falle $i = \overline{OJ}$. Wächst die Stromstärke weiter und nimmt sie die Werte $\overline{OE}$, $\overline{OG}$, $\overline{OC}$ und $\overline{OA}$ an, dann wird die Größe des magnetischen Feldes dementsprechend durch die anwachsenden Ordinaten $\overline{EF}$, $\overline{GL}$, $\overline{CD}$, beziehungsweise $\overline{AB}$ gegeben.

Nimmt nun die Stromstärke allmählich ab, dann wird zwar auch das magnetische Feld schwächer, doch nicht im selben Maße, als die Verstärkung erfolgt war, sondern langsamer. Bei denselben Erregerstromstärken sind demnach die entsprechenden magnetischen Felder durch die Ordinaten $\overline{CN}$, $\overline{GH}$, $\overline{EM}$, $\overline{JK}$ und $\overline{OP}$ dargestellt. Bei verschwundenem Strome i ist das magnetische Feld noch ziemlich intensiv, welche Erscheinung den remanenten Magnetismus zur Ursache hat.

Um diese Verhältnisse im Wellendiagramm darstellen zu können, müssen wir nur zu den einzelnen v Werten die dazugehörigen Stromwerte auftragen. Man erhält hierdurch die gesuchte, durch die Hysteresis verzerrte Stromkurve i.

Der Einfluß der Hysteresis ist leicht einsehbar. Je breiter die Hysteresisschleife, d. h. je größere Hysteresisarbeit ein Material erheischt, um so verzerrter wird die Stromkurve, und umgekehrt. Die Stromkurve nähert sich in ihrer Form der magnetischen Feldkurve um so mehr, je schmaler die Hysteresisschleife wird. Bei nichtmagnetischen Materialen ist diese Schleife durch eine Gerade ersetzt, bei diesen ist also der Verlauf der Stromkurve derselbe wie derjenige der Feldkurve.

Das magnetische Feld ist eine Funktion der Ampèrewindungszahl $n\,i$ und des gesamten magnetischen Widerstandes des magnetischen Kreises:

$$v = \frac{4\pi}{10} \frac{n\,i}{w}$$

wo w den magnetischen Widerstand des magnetischen Kreises bedeutet. Ist die mittlere Länge der Kraftlinien l, der gleichmäßig gedachte Querschnitt des durch die Kraftlinien durchsetzten Eisenkernes S, die Permeabilität oder magnetische Durchlässigkeit des Materiales μ, dann wird:

$$w = \frac{l}{S\mu}$$

sein. Substituiert, bekommt man:

$$v = \frac{4\pi}{10} \frac{n\,i}{l} S\mu.$$

Nachdem in diesem Ausdrucke sowohl i als auch μ veränderlich sind, kann die Veränderung der Stromstärke nicht denselben Verlauf nehmen als diejenige des magnetischen Feldes. Dies kann nur dann der Fall sein, wenn μ konstant ist, d. h. wenn das magnetische Feld in einem unmagnetischen Material entsteht.

Betrachten wir die so erhaltene Stromkurve, dann sehen wir, daß sie nicht mehr eine symmetrische Kurve, wie die Sinuskurve ist, sondern daß sie durch die Ordinate des Maximalwertes in zwei ungleiche Teile geteilt wird. Unter solchen Umständen hat natürlich die abgeleitete Formel des effektiven Mittelwertes keine Giltigkeit, man muß vielmehr für jeden besonderen Fall den Zusammenhang des Maximal- und des Effektivwertes aus der aufgenommenen Kurve rechnerisch bestimmen.

Ein anderer Umstand ist auch zu erwägen. Es ist einleuchtend, daß die Phasenverschiebung zwischen zwei Kurven nur dann konstant sein kann, wenn diese Kurven völlig gleichförmig sind. In unserem Falle also, in welchem die Spannungskurve eine Sinuslinie, die Stromkurve dagegen eine verzerrte Linie ist, kann die Konstanz der Phasenverschiebung nicht bestehen und in diesem Falle kann die Phasendifferenz nicht als der Phasenunterschied zweier benachbarter Maximal- oder Nullwerte definiert werden.

Trotz alledem ist auch bei verzerrten Wellenformen der Ausdruck des elektrischen Effektes der folgende:

$$W = e\, i \cos \varphi$$

also derselbe, wie bei sinusförmigen Veränderungen. Der Unterschied besteht darin, daß man jetzt unter e und i die effektiven Werte der verzerrten Kurvenformen versteht und $\cos \varphi$ auch ein Faktor ist, der sich von dem bisher besprochenen wesentlich unterscheidet.

Hat man nämlich mit einem Wechselstrom beliebiger Kurvenform zu tun, kann man mit Hilfe eines Wattmeters immer den elektrischen Effekt messen. Dasselbe steht für die Spannung und die Stromstärke, so daß der Leistungsausdruck

$$W = e\,i\cos\varphi$$

so betrachtet werden kann, als die Leistung eines Sinusstromes, der die konstante Phasenverschiebung φ hat. Die verzerrten Kurven werden also durch Sinuskurven ersetzt, welche denselben effektiven Spannungs- und Stromstärkewert haben, wie die wirklichen Kurven und welche eine Phasenverschiebung besitzen, die der Bedingung entspricht, daß die aus den Sinuskurven berechnete Leistung die oben angegebene bleibt.

Diese Kurven nennt man äquivalente Sinuskurven, weil ihre effektiven Werte den effektiven Werten der verzerrten Kurvenformen entsprechen, den Cosinus des Phasenverschiebungswinkels dieser Sinuskurven aber nennt man Leistungsfaktor, da von seinem Werte die Leistung des Wechselstromes abhängt.

Sind demnach für die äquivalenten Sinuskurven die effektiven Werte e_s und i_s, dann muß

$$e_s = e$$

und

$$i_s = i$$

oder die Maximalwerte

$$E_s = \sqrt{2}\,e$$

beziehungsweise

$$J_s = \sqrt{2}\,i$$

sein.

Der Wert des Leistungfaktors ergibt sich daraus, daß man die Leistung, die Stromstärke und die Spannung des Wechselstromes mißt und $cos\,\varphi$ aus der Gleichung

$$\frac{W}{e\,i} = \frac{e\,i\,cos\,\varphi}{e\,i} = cos\,\varphi$$

bestimmt.

In der Praxis hat man mit verschiedenen Wellenformen zu tun. Die Wellenform eines Wechselstromes hängt von der Konstruktion des

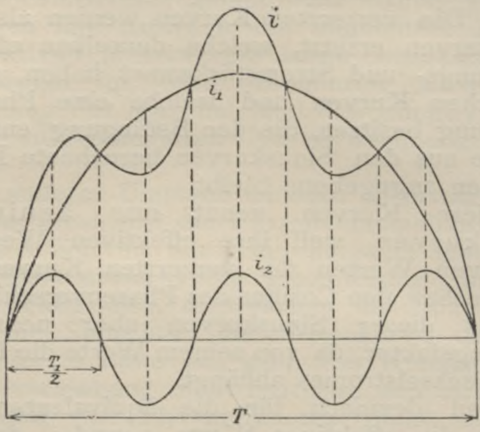

Fig. 61.

Generators ab. Die Verhältnisse der Dimensionen der Polschuhe und Eisenkerne des Magnetrades und der Armatur, der Luftzwischenraum, Form und Dimension der Nuten sind alle Faktoren, welche die Form der Strom- und Spannungswellen beeinflussen.

Fourier bewies, daß man eine beliebige Wellenform in eine Reihe von Sinus- und Cosinusgliedern zerlegen kann, und man bedient sich auch bei zusammmengesetzten Wellenformen dieses Verfahrens.

Seien zwei Wellenformen gegeben, welche zusammen eine resultierende Welle erzeugen. Die Gleichungen dieser Sinuswellen seien

$$I \qquad i_1 = J_1 \sin \omega t$$

und

$$II \qquad i_2 = J_2 \sin 5 \omega t.$$

Die Momentwerte können ohne weiteres algebraisch summiert werden, weshalb der entsprechende

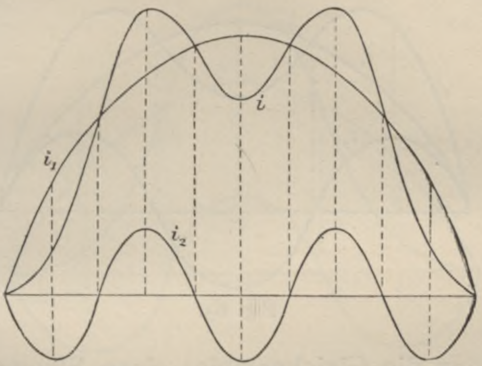

Fig. 62.

Momentwert des resultierenden Stromes

$$i = i_1 + i_2 = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 5 \omega t$$

sein wird.

Fig. 61 zeigt uns den Zusammenhang zwischen der Grundwelle und der resultierenden Welle. In dieser Figur fängt sowohl i_1, als auch i_2 mit positiven Werten an; der Unterschied zwischen beiden Wellen ist nur der, daß die zwei Sinuslinien verschiedener Ordnung sind und verschiedene Maximalwerte haben, jedoch verändern sich beide nach dem Sinusgesetze.

Die resultierende Welle ist mit i bezeichnet, ihr Maximalwert ist der algebraischen Summe der Komponentmaximalwerte gleich.

Die Veränderung der einen Komponentwelle zieht die Veränderung der resultierenden Welle nach sich. Dieser Einfluß ist in Fig. 62 dargestellt. Jetzt fängt i_1 mit positiven, i_2 mit negativen Werten an, die resultierende Welle ist i, die wie ersichtlich wesentlich anders ist, als diejenige in Fig. 61.

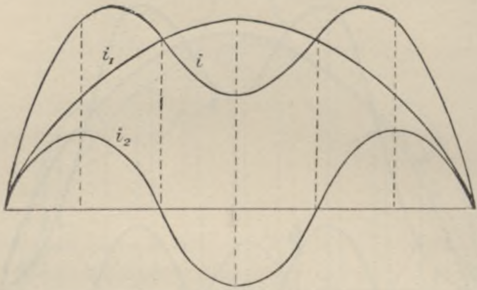

Fig. 63.

Wenn die Gleichung des einen Stromes

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

ist, dann muß laut obiger Auseinandersetzung

$$i_2 = -J_2 \sin 5 \omega t$$

sein.

Die resultierende Stromstärke demnach:

$$i = i_1 + i_2 = J_1 \sin \omega t - J_2 \sin 5 \omega t.$$

wenn $t = 0$, wird $i = 0$ und bei $t = \frac{5}{4} T_1 = \frac{T}{4}$ wobei T_1 und T die Perioden der zwei Komponentwellen sind, wird i maximal. Wenn nämlich $t = \frac{5}{4} T_1$

und $T = 5\,T_1$ aus obiger Gleichung, dann wird:

$$i_1 = J_1 \sin \omega t = J_1 \sin \frac{2\pi}{5\,T_1} \frac{5}{4}\,T_1$$

$$i_1 = J_1 \sin \frac{\pi}{2} = J_1.$$

Ferner:

$$i_2 = J_2 \sin 5 \frac{2\pi}{5\,T_1} \frac{5}{4}\,T_1$$

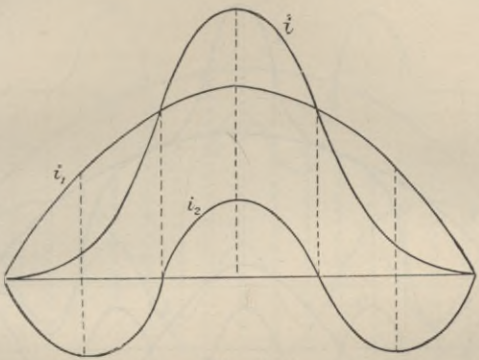

Fig. 64.

d. h.

$$i_2 = J_2 \sin \frac{5}{2}\pi = J_2 \sin \frac{\pi}{2} = J_2.$$

Nachdem i_1 und i_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, wird der Maximalwert des resultierenden Stromes

$$J = J_1 - J_2$$

sein.

Wenn eine Sinuskurve mit einer Sinuskurve dritter Ordnung zusammengesetzt wird, dann sind die resultierenden Kurven von den jetzigen verschieden. Die Verhältnisse für diese Fälle sind in den Figuren 63 und 64 dargestellt.

Die Stromgleichungen sind:
Für Fig. 63:

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

$$i_2 = J_2 \sin 3 \omega t$$

und

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 3 \omega t.$$

Für Fig. 64 ist in Betrachf zu ziehen, daß die eine Kurve mit positiven, die andere mit negativen

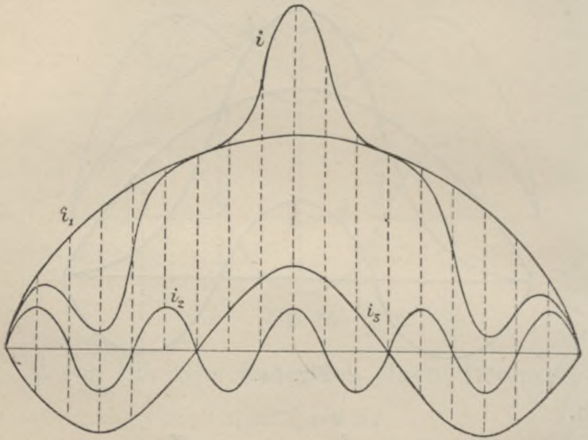

Fig. 65.

Werten anfängt, weshalb die Vorzeichen der beiden Gleichungen entgegengesetzt genommen werden müssen, d. h. wenn

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

dann wird

$$-i_2 = -J_2 \sin \omega t$$

sein, und der resultierende Strom

$$i = i_1 + (-i_2) = J_1 \sin \omega t - J_2 \sin 3 \omega t.$$

Nachdem die Form der resultierenden Welle von der Form der Komponentwellen abhängt, kann man mit Hilfe von Sinuswellen verschiedener Ordnung eine beliebig komplizierte Welle herstellen und eine beliebige Welle in ihre Komponenten zerlegen. Die Fig. 65 bis 69 zeigen verschiedene Kombinationen von resultierenden Wellen.

Die Bedingungsgleichungen werden in diesen Fällen folgende sein:

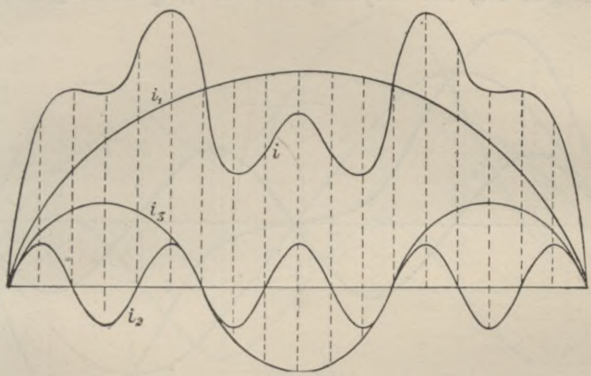

Fig. 66.

Für Fig. 65:

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

$$i_2 = J_2 \sin 9 \omega t$$

und

$$- i_3 = - J_3 \sin 3 \omega t.$$

Aus diesen drei Gleichungen wird die resultierende Stromstärke

$$i = i_1 + i_2 - i_3$$

sein, oder

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 9 \omega t - J_3 \sin 3 \omega t.$$

Bei Figur 66 sind die Komponentwellen dieselben, nur fangen alle mit positiven Werten an. Es wird also außer i_1 und i_2 auch i_3 positiv und der Momentwert der resultierenden Stromstärke wird:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

d. h.

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 9 \omega t + J_3 \sin 3 \omega t.$$

Während bei Fig. 65 die resultierende Kurve spitziger ist, als diejenigen von i_1, i_2 und i_3, da bei

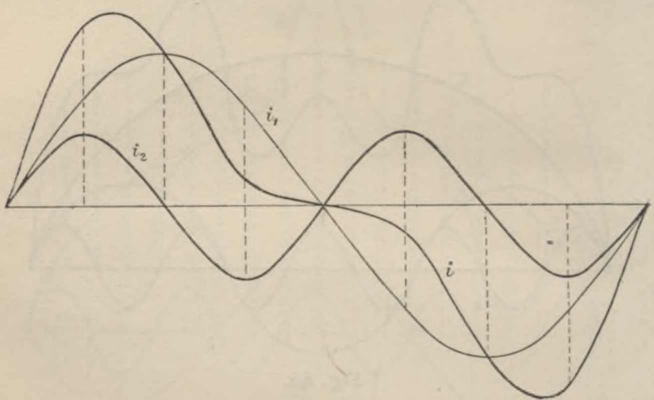

Fig. 67.

dem Maximalwert des letzteren die Summe der einzelnen Maximalwerte genommen wurde, ist bei Fig. 66 das entgegengesetzte zu konstatieren. In diesem Falle ergibt sich nach $\frac{T}{2}$ Perioden, in welchen alle drei Maximalwerte vorhanden sind, eine Differenz den Maximalwert der resultierenden Stromstärke, folglich muß dies Maximum kleiner als der frühere sein. Immerhin finden sich aber, wie aus Fig. 66 ersichtlich, zwei andere Maximalwerte, welche größer als der zuvor Besprochene sind.

Bei Fig. 67 sind zwei Wellen addiert, welche verschiedene Ordnungszahlen haben, weiters sind diese Zahlen ungleichförmig, d. h. eine Welle hat eine ungerade, die andere eine gerade Ordnungszahl. Dasselbe ist der Fall bei den Fig. 68 und 69, wobei einmal die Ströme im gleichen Sinn, das anderemal aber im einander entgegengesetzten Sinn fließen.

Für die letzten drei Fälle werden die Gleichungen:

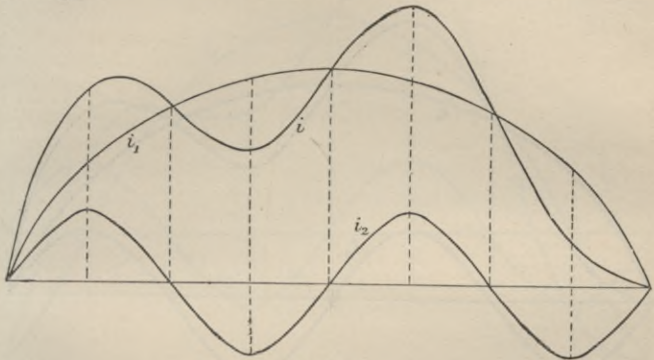

Fig. 68.

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

$$i_2 = J_2 \sin 2 \omega t$$

und

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 2 \omega t$$

beziehungsweise

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

$$i_2 = J_2 \sin 4 \omega t$$

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 4 \omega t.$$

Endlich

$$i_1 = J_1 \sin \omega t$$

$$-i_2 = -J_2 \sin 4 \omega t$$

und

$$i = J_1 \sin \omega t - J_2 \sin 4 \omega t$$

sein.

Betrachtet man unsere bisherigen Ergebnisse und Diagramme eingehender, dann findet man, daß die Symmetrie der resultierenden Kurvenform zu gewissen Bedingungen gebunden ist.

Werden zwei oder mehrere Wellen zu einer Welle zusammengesetzt, bekommt man symmetrisch zum Maximalwerte liegende Kurven nur dann

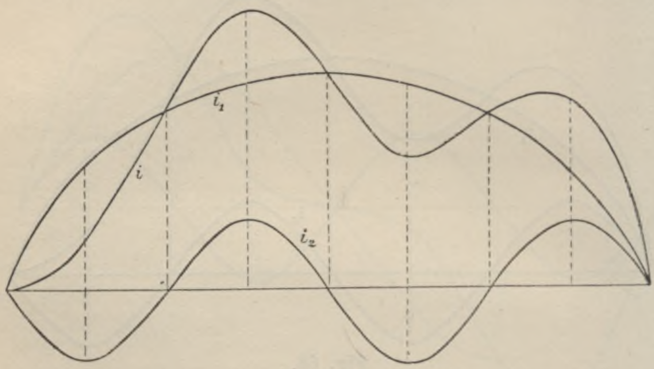

Fig. 69.

wenn die Komponentwellen alle ungerade Ordnungszahlen haben. Im entgegengesetzten Falle, in welchem also die Ordnungszahlen der Wellen gerade und ungerade sind, erhält man in bezug auf den Maximalwert unsymmetrisch liegende resultierende Wellen.

Sind die Komponentwellen nicht in Phase miteinander als bisher, dann hat auch die resultierende Welle zu beiden Komponentwellen eine Phasenverschiebung. Die Größe dieser Phasenverschiebung hängt von den Phasenverhältnissen der Komponentwellen ab. In Fig. 70 sind solche

Wellenkomponente, sowie auch die resultierende Welle dargestellt.

Die Komponentwellen sind i_1 und i_2, die resultierende Welle i. Nachdem i_1 und i_2 in ihren Phasen gegeneinander verschoben sind, wird auch i zu den Komponentwellen eine Phasendifferenz haben, und zwar eilt i der Welle i_1 in der Phase vor, und bleibt in bezug auf i_2 in der Phase zurück.

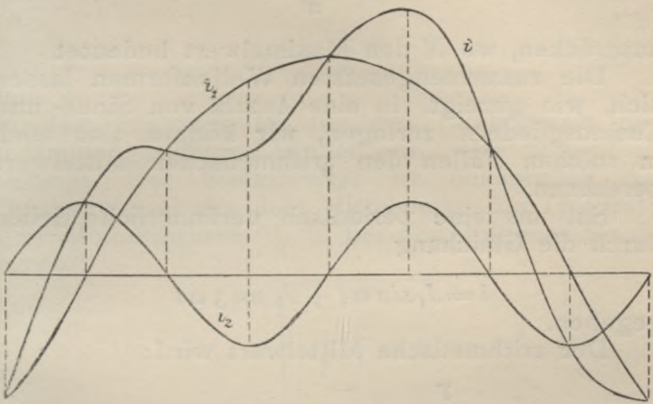

Fig. 70.

Arithmetische, effektive Mittelwerte bei zusammengesetzten Wellenformen. Der Scheitelfaktor.

Wie aus dem Vorhergesagten bekannt, ist der arithmetische Mittelwert einer periodisch veränderlichen Größe durch die Höhe eines Parallelogrammes gegeben, dessen Flächeninhalt gleich mit der durch die Kurve und der Abscissenachse in bezug auf eine halbe Periode umschlossenen Fläche und dessen Länge durch die halbe Periode der Kurve gegeben ist.

Bei sinusförmigen Veränderungen ist der Momentwert in jedem Zeitpunkte durch die Gleichung

$$x = X \sin \omega t$$

gegeben.

Der arithmetische Mittelwert läßt sich nach der auf Seite 51 angeführten Weise als

$$x_m = \frac{2}{\pi} X$$

ausdrücken, wo X den Maximalwert bedeutet.

Die zusammengesetzten Wellenformen lassen sich, wie gezeigt, in eine Anzahl von Sinus- und Cosinusgliedern zerlegen, wir können also auch in solchen Fällen den arithmetischen Mittelwert berechnen.

Sei uns eine periodisch veränderliche Größe durch die Gleichung

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 3 \omega t$$

gegeben.

Der arithmetische Mittelwert wird:

$$i_m = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (J_1 \sin \omega t + J_2 \sin 3 \omega t) \, d t$$

sein, oder

$$i_m = \frac{2}{\pi} J_1 + \frac{2}{3 \pi} J_2.$$

Der Ausdruck des soeben gefundenen Mittelwertes enthält Faktoren, die von den Komponentgleichungen der zur zusammengesetzten Wellenform gehörenden Gleichung abhängen, weshalb für den arithmetischen Mittelwert keine allgemeine Formel gefunden werden kann. Dieser Wert ist von Fall zu Fall besonders zu berechnen.

Vom letzten Ausdrucke läßt sich der Mittelwert für jenen Fall bestimmen, in welchem man mit einer gewöhnlichen Sinuskurve zu tun hat. In diesem Falle ist nämlich nur das erste Glied in Betracht zu ziehen, da die Grundgleichung

$$i = J_1 \sin \omega t$$

ist und dementsprechend wird der arithmetische Mittelwert für diesen speziellen Fall

$$i = \frac{2}{\pi} J_1$$

sein.

Das Ergebnis ist für den Effektivwert der zusammengesetzten Wellenform ein wesentlich anderes. Der Effektivwert ist bekanntlich die Quadratwurzel aus dem Mittelwerte der Quadrate aller Momentwerte, d. h. bei gewöhnlicher Sinuskurve:

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 \, dt}.$$

Ist für einen beliebigen Zeitpunkt

$$i = J \sin \omega t$$

dann wird

$$i_{eff} = \frac{J}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \, J$$

sein.

Sei die Gleichung einer beliebigen Wellenform

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \cos \omega t.$$

Ein Glied dieser Gleichung kann umgewandelt werden, denn es ist im allgemeinen:

$$\cos \alpha = \sin (90 + \alpha)$$

und demnach

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \sin (90 + \omega t).$$

Der Ausdruck des Effektivwertes ist:

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (J_1^2 \sin^2 \omega t + J_2^2 \sin^2 [90 + \omega t])\, dt}.$$

Hieraus bekommt man, daß:

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2)}$$

Bei gewöhnlicher Sinuskurve ist $J_2 \cos \omega t = 0$, und deshalb

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2} J_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_1 = 0{,}707\, J_1.$$

Man kann auch eine ganz allgemeine Gleichung für den Effektivwert einer beliebig zusammengesetzten Wellenform aufstellen. Ist nämlich die Gleichung der fraglichen Wellenform folgende:

$$i = J_1 \sin \omega t + J_2 \cos \omega t + J_3 \sin 3\omega t + J_4 \cos 3\omega t + \ldots$$

dann wird der allgemeine Ausdruck lauten:

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 \ldots)}.$$

Wir sehen also, daß der effektive Mittelwert von der Wellenform unabhängig ist und daß nur die Maximalwerte auf seinen Wert von Einfluß sind. Obige Formel läßt sich also auf jede beliebige Wellenform anwenden.

Nachdem wir nun alle Begriffe mit Bezug auf zusammengesetzte Wellenformen verallgemeinert haben, untersuchen wir auch den Formfaktor für diese Fälle.

Der Formfaktor gibt das Verhältnis zwischen dem effektiven und dem arithmetischen Mittelwerte, d. h.

$$f = \frac{i_{eff}}{i_m}.$$

Für gewöhnliche Sinuskurven ist

$$i_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{max} \text{ und } i_m = \frac{2}{\pi} J_{max}$$

so daß

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

wird.

Bei spitzen Kurvenformen ist f größer, bei stumpfen kleiner als der obige Wert.

Der Formfaktor gibt nur dann richtige Werte, wenn die Kurve symmetrisch ist, d. h. wenn die Ordinate des Scheitelwertes die Kurve in zwei symmetrische Teile teilt.

Für komplizierte Wellenformen bedient man sich nicht des Formfaktors, sondern des sogenannten Scheitelfaktors, da letzterer über die Spitzheit oder Stumpfheit der Welle Aufklärung gibt. Unter Scheitelfaktor versteht man das Verhältnis des Scheitelwertes zum Effektivwert:

$$s = \frac{J_{max}}{i_{eff}}.$$

Je spitzer die Kurve, um so größer J_{max} im Verhältnis zu i_{eff}, also um so größer der Wert s. Bei gewöhnlicher Sinuskurve ist

$$i_{eff} = \frac{J_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Folglich

$$s = \frac{J_{max}}{\frac{J_{max}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1{,}414.$$

Ist eine zusammengesetzte Wellenform gegeben, dann bestimmt man in beliebiger Weise J_{max}, berechnet i_{eff} und durch Bildung des Verhältnisses beider den Scheitelfaktor. Am schnellsten und bequemsten ist zumeist jenes Verfahren, nach welchem man aus den gegebenen Komponentwellen oder aus Experimenten die Kurvenform zeichnet und den Scheitelwert abmißt. Der effektive Wert kann nun berechnet oder auch aus dem Diagramm bestimmt werden, wodurch der Wert des Scheitelfaktors völlig bestimmt ist.

VII. Kapitel.

Über das Messen von Wechselströmen.

Obwohl das Messen überhaupt konstante oder wenigstens nahezu konstante Größen bedingt, kann auch bei Wechselgrößen vom Messen die Rede sein, wenn diese Wechselgrößen einer Bedingung genüge leisten. Diese Bedingung ist die, daß die Veränderungen der Wechselgrößen sich periodisch erneuern, daß nämlich die Wechselgrößen durch periodische Funktionen der Zeit ausgedrückt werden können. Für Wechselströme trifft dies zu, denn die Wechselströme verlaufen entweder nach einer Sinuskurve, dann ist ihre Veränderung eine völlig symmetrische, oder nach einer beliebigen Kurvenform, welche zwar asymmetrisch ist, doch welche ständig dieselbe Form zeigt. Diese Bedingung hat zur Folge, daß die meßbaren Wirkungen einen konstanten Charakter annehmen, ebenso wie die Gleichstromwirkungen. Beim Gleichstrome ist die wirkende elektromotorische Kraft konstant; ist dann noch der Widerstand des Stromkreises auch konstant, dann fließt eine Stromstärke durch den Stromkreis, dessen Größe von den obengenannten zwei Faktoren abhängt und welche konstant bleibt, solange beide Faktoren unverändert sind. Die Veränderung eines Faktors zieht auch eine Veränderung der Stromstärke nach sich, doch bleibt die Stromstärke auch dann konstant, wenn beide Größen in entsprechendem Maße zu- oder abnehmen.

Für den Gleichstromkreis besteht der Zusammenhang, daß

$$i = \frac{e}{r}$$

wenn e die wirksame elektromotorische Kraft, i die Stromstärke und r den Widerstand des Stromkreises bedeutet.

Bei konstantem Widerstande wird i um so größer, je größer die elektromotorische Kraft ist, oder umgekehrt bei konstanter elektromotorischer Kraft kann die Stromstärke nur dadurch erhöht werden, daß man den Widerstand des Stromkreises verringert.

Auch bei Wechselströmen besteht obiger Zusammenhang, mit dem Unterschiede, daß unter e und i eine elektromotorische Kraft und Stromstärke zu verstehen ist, welche sich als Mittelwerte der betreffenden Wechselgrößen ergeben. Die Meßapparate stehen zwar unter dem Einflusse aller Momentwerte der veränderlichen Größe, können aber infolge ihrer Trägheit nur einen gewissen Mittelwert aller Impulse anzeigen, welcher dann als Meßwert zu betrachten ist und welche zu den Maximalwerten in bestimmtem Verhältnisse stehen.

Bevor wir zur Beschreibuug der Meßanordnungen übergehen, wollen wir einige Meßapparate betrachten und ihre Wirkungsweise untersuchen.

Was zunächst die Meßinstrumente der elektromotorischen Kraft für Wechselstromkreise betrifft, unterscheidet man zwei Hauptgruppen, je nachdem der Spannungsmesser vom Strome durchflossen wird oder nicht.

Fließt kein Strom durch das Meßinstrument, sondern ist die Ablenkung lediglich durch die Wirkung elektrischer Massen aufeinander hervorgerufen, dann hat man mit einem elektrostatischen Instrument zu tun. Bei solchen elektrostatischen Spannungsmessern stehen fixe und bewegliche Metallflächen einander gegenüber, diese werden mit der Stromquelle verbunden, wodurch sie eine gewisse elektrische Ladung annehmen. Zwischen den Platten wirkt dann eine anziehende oder bei geeigneter Schaltung abstoßende Kraft, deren Größe von den Elektrizitätsmengen und von der gegenseitigen Entfernung der Metallplatten abhängt. Dadurch kommt der bewegliche Teil des Apparates in Bewegung, die Bewegung dauert aber nur solange, bis eine Gegenkraft, z. B. eine Torsionskraft mit der ursprünglich wirkenden Kraft das Gleichgewicht hält.

Elektrostatische Voltmeter zeigen immer den wahren Wert der Spannungsdifferenz an, da durch das Anlegen des Instrumentes an die Stromquelle oder an zwei Punkte des Stromkreises im Instrument selbst keine Strömung zustande kommt und dadurch kein Spannungsabfall verursacht wird.

Wesentlich anders sind die Verhältnisse bei Meßinstrumenten, welche auf elektromagnetischer, elektrodynamischer oder auf der Wärmewirkung des Stromes beruhen. Bei diesen muß immer Strom durch das Meßinstrument fließen, denn sonst kann keine der erwähnten Wirkungen entstehen. Diese Stromstärke verursacht aber im Stromkreise einen Spannungsabfall, weshalb die angezeigte Spannungsdifferenz nicht mehr die ursprüngliche, sondern eine kleinere ist. Will man die vorhanden gewesene Spannungsdifferenz kennen, dann muß man den verursachten Spannungsabfall berechnen und den so erhaltenen Wert zur gemessenen Spannungsdifferenz addieren.

Die auf elektromagnetischer Wirkung beruhenden Spannungsmesser haben eine Drahtspule mit vielen Windungen von dünnem Drahte, die

Spule ist hohl und in dem Hohlraume spielt ein aufgeschlitztes und excentrisch gelagertes Stück aus Weicheisenblech. Durch die excentrische Anordnung kommt das Blechstück näher der inneren Spulenwand zu liegen, ist darum magnetischen Anziehungen ausgesetzt, sobald Strom durch die Spule fließt. Je stärker der Strom, d. h. je größer die Spannungsdifferenz zwischen den Endpunkten der Spulenbewicklung ist, um so stärker wird das

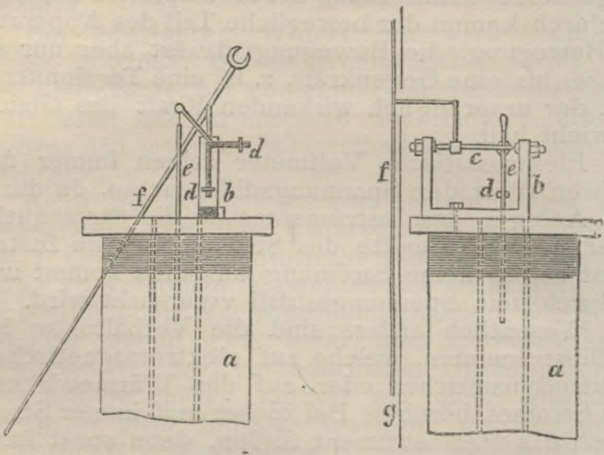

Fig. 71.

magnetische Feld und um so größer wird die Ablenkung des Zeigers des Spannungsmessers sein.

In Fig. 71 ist ein auf elektromagnetischer Wirkung beruhender Spannungsmesser schematisch dargestellt, der Unterschied vom Vorherbeschriebenen besteht nur darin, daß jetzt das Weicheisenblech durch einen in die Spule hineinhängenden Eisenkern ersetzt ist, welcher um so mehr in die Spule hineingezogen wird, je größer die zu messende Spannungsdifferenz ist.

Die Spannungsdifferenz kann außerdem noch mit Hilfe der elektrodynamischen Wirkung der elektrischen Ströme gemessen werden. Bei den auf diesem Prinzipe beruhenden Apparaten sind zwei hohle Drahtspulen vorhanden, deren eine fix, die andere aber beweglich und mit einem über eine Skalenteilung spielenden Zeiger verbunden ist. Ein solcher Apparat ist aus Fig. 72 ersichtlich.

Die beiden Spulen sind zumeist senkrecht aufeinander. Fließt ein Strom durch ihre Windungen, dann trachten sie in gegeneinander parallele Lagen zu kommen. Die Wirkung ist um so größer, je größer die Stromstärke oder je größer die zu messende Spannungsdifferenz ist. Die Gleichgewichtslage wird durch die Gravitationskraft, durch die Torsionskraft einer Feder etc. hergestellt.

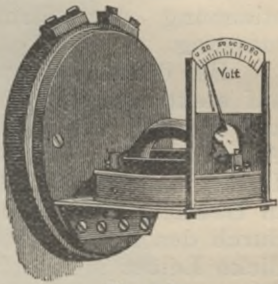

Fig. 72.

Endlich müssen noch die Hitzdrahtinstrumente erwähnt werden. Bei diesen fließt der Strom durch einen dünnen Draht, welcher dadurch erwärmt wird und sich ausdehnt. Diese Längenveränderung wird in entsprechender Weise auf einen Zeiger übertragen, der außerdem noch mit einer Feder verbunden ist. Diese Feder bewirkt, daß der sich erwärmende Draht immer straff ausgezogen ist und daß der Zeiger nach Ausschalten des Instrumentes wieder in seine Nullage zurückgebracht wird.

Die bisher besprochenen Ausführungen gelten auch für die Strommesser der Wechselstromkreise. Man kann zur Stromstärkenmessung ein elektrostatisches Instrument benutzen, welches für diesen Fall mit einem Nebenschluß versehen ist, der in den Hauptstromkreis geschaltet wird und den zu messenden Strom führt. Zwischen den Endpunkten des Nebenschlusses entsteht also eine Potentialdifferenz, welche um so größer ist, je größer die im Kreise fließende Stromstärke wird. Dementsprechend zeigt das elektrostatische Instrument, welches zu den Endpunkten des Nebenschlusses parallel geschaltet ist, diese Potentialdifferenz an, und man kann aus der Ablenkung des Zeigers auf jene Stromstärke schließen, welche im Nebenfluß fließt. Das Instrument ist auch dementsprechend geeicht, so daß man durch die Ablesung sofort den Wert der Stromstärke bekommt.

Dieses Verfahren ist also eine indirekte Bestimmung der Stromstärke durch Spannungsmessung.

Bei direkten Strommessungen benutzt man die auf elektromagnetischer, elektrodynamischer oder auf die Wärmewirkung des Stromes beruhenden Apparate ebenso wie bei der Spannungsmessung. In der Ausführung der Meßinstrumente muß man in Betracht ziehen, daß zumeist der Gesamtstrom durch den Meßapparat fließt und müssen deshalb dicke Leiter verwendet werden. Bei allzugroßen Stromstärken müßte man Leiter mit beträchtlichen Querschnitten anwenden, welcher Umstand einerseits die Dimensionen des Apparates, anderseits wieder die Herstellungskosten desselben vergrößern würde. Für die Messung großer Stromstärken verwendet man daher auch hier Nebenschlüsse, so daß nur ein Teil des Gesamtstromes durch den Meßapparat fließt und dessen beweglichen Teil beeinflußt. Nachdem zwischen den Widerständen dieser zwei parallel geschalteten Stromkreise (dem Meßapparate und dem Nebenschlusse) und den in ihnen fließenden Stromstärken ein bestimmter Zusammenhang besteht, kann man das Instrument so eichen, daß es direkt die im Hauptstromkreise fließende Stromstärke abzulesen gestattet.

Ein technisches Meßinstrument, welches in der Praxis sehr oft verwendet wird, ist das Elektrodynamometer. Dieses Instrument dient zur Bestimmung der Stromstärke und beruht auf der

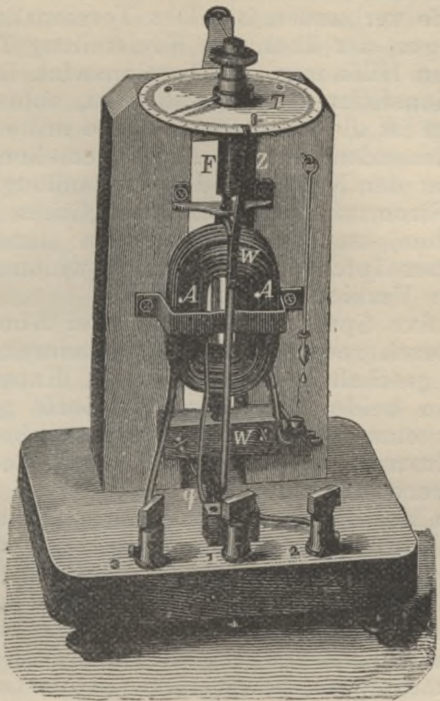

Fig. 73.

elektrodynamischen Wirkung des Stromes. Sie besteht, wie aus Fig. 73 ersichtlich, aus einer fixen und einer beweglichen Spule, deren Ebenen senkrecht aufeinander stehen. Die bewegliche Spule besteht hier aus einer einzigen Windung, weil dieser Apparat zur Messung großer Stromstärken dient, sie kann aber durch Vermehrung der Windungszahlen der Spulen mit beliebiger Empfindlichkeit versehen werden. Die bewegliche Spule ist auf einen Seidenfaden aufgehängt und mit einer Torsionsfeder F versehen, welche mit einem Torsionskopfe verbunden ist. Der Torsionskopf trägt einen Zeiger, der über eine Kreisteilung T schleift, mit dessen Hilfe man den Torsionswinkel, welcher der Torsionsfeder erteilt worden ist, ablesen kann. Außerdem ist die bewegliche Spule mit einem als Zeiger dienenden leichten Arme versehen, dessen Ende über den Nullpunkt der Kreisteilung T spielt. Um die Stromzuführung zur beweglichen Spule zu ermöglichen, tauchen beide Enden derselben in Quecksilbernäpfchen, welche mit der weiteren Stromleitung in Verbindung stehen.

Die fixe Spule besteht aus zwei Abteilungen, welche durch geeignete Schaltungsanordnung verschieden geschaltet werden können. Entweder benutzt man beide Abteilungen in Serie geschaltet oder nur eine allein, und dementsprechend kann man das Instrument zum Messen verschieden starker Ströme verwenden.

Beim Messen von Wechselstromstärken benutzt man das Instrument in der Weise, daß man es in den Hauptstromkreis schaltet. Nachdem die feste und die bewegliche Spule nacheinander geschaltet sind, fließt dieselbe Stromstärke durch die beiden Spulen und die Ablenkung wird mit dem Quadrate der zu messenden Stromstärke proportional. Ist daher die Stromstärke i und der Torsionswinkel, der der Spiralfeder erteilt werden muß, um den Zeiger der beweglichen Spule in die Nullage zurückbringen zu können, α, dann wird

$$i^2 = c\,\alpha$$

oder

$$i = \sqrt{c\,\alpha} = c_1 \sqrt{\alpha}$$

sein, wo c_1 die Konstante des Elektrodynamometers bedeutet.

Bei jeder Messung muß der Torsionskopf solange verdreht werden, bis die erteilte Torsionskraft mit der ablenkenden elektrodynamischen Kraft das Gleichgewicht hält.

Die Elektrodynamometer müssen möglichst senkrecht stehen. Um dies erreichen zu können, sind die Apparate mit einem Senkblei versehen.

Zur Strommessung können auch Hitzdrahtinstrumente verwendet werden. Diese haben in der Regel einen Nebenschluß, da der sich ausdehnende Draht viel zu dünn ist, um größere Stromstärken, ohne Schaden zu nehmen, aushalten zu können. Die Einrichtung dieser Meßapparate stimmt übrigens mit der des Spannungsmessers überein.

Was die angezeigten Meßwerte betrifft, ist vor Augen zu halten, daß für Wechselströme alle Apparate, deren Ablenkung von der ersten Potenz des Stromes abhängt, arithmetische Mittelwerte, jene, deren Ausschlag von der zweiten Potenz abhängt, aber effektive Mittelwerte ergeben.

Demnach geben die auf elektromagnetischer Wirkung des Stromes beruhenden Apparate die mittlere Spannung oder Stromstärke an, die elektrostatischen, elektrodynamischen und Hitzdrahtinstrumente dagegen die entsprechenden effektiven Werte.

L e i s t u n g s m e s s u n g. Ist im Gleichstromkreise die gemessene Spannung zwischen zwei Punkten e und die den Leiterkreis durchfließende Stromstärke i, dann ist die Leistung des Gleichstromes zwischen den genannten zwei Punkten durch die Gleichung

$$w = e\,i$$

gegeben.

Im Wechselstromkreise sind die Verhältnisse anders. Wir sahen, daß die letzte Gleichung in

Wechselstromkreisen nur dann Giltigkeit hat, wenn Strom und Spannung miteinander in Phase sind und daß in diesem Falle e und i die gemessenen effektiven Spannungs-, beziehungsweise Stromwerte bedeuten.

Hat man daher eine Schaltungsdisposition, von welcher man weiß, daß keine Phasenverschiebung auftreten kann, ist z. B. der Stromkreis aus Glühlampen gebildet, dann genügt mit den vorher beschriebenen Instrumenten die effektive Spannung, beziehungsweise Stromstärke zu messen und die erhaltenen Meßwerte miteinander zu multiplizieren. Man erhält dann die Leistung des Wechselstromes in Watt.

In der Wechselstromtechnik ist aber dieser eben beschriebene Fall selten, und man hat gewöhnlich mit größeren oder kleineren Phasendifferenzen zu rechnen. Bei Phasendifferenz ergäbe obiges Produkt für die Leistung des Wechselstromes einen größeren Wert als den, der der tatsächlichen Leistung entspricht, denn in solchen Fällen ist nur jene Komponente des Stromes mit der Spannung zu multiplizieren, welche in die Richtung des Spannungsvektors fällt, oder mit anderen Worten, die Leistung eines Wechselstromes bei gegebener Phasenverschiebung ergibt sich als ein Produkt, dessen einer Faktor die Spannung, der andere dagegen der Arbeits- oder Wattstrom ist.

Ist der fragliche Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung φ, dann ist bei i_t Gesamtstrom die Wattkomponente des Stromes

$$i_n = i_t \cos \varphi$$

und die Leistung des Wechselstromes bei gemessener e_t Gesamtspannung:

$$w = e_t i_n = e_t i_t \cos \varphi.$$

Hierbei sind e_t und i_t als effektive Werte einzusetzen.

Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß die Leistung eines Wechselstromes bei beliebig großen Spannungs- und Stromwerten Null ist, wenn die Phasenverschiebung eine Viertelperiode beträgt oder wenn $\varphi = 90^0$ ist. In diesem Falle wird $\cos\varphi = \emptyset$ und demnach auch $w = 0$.

Um die Leistung messen zu können, bedürfen wir eines Instrumentes, dessen Ablenkungswerte bei jeder Phasenverschiebung die gemessene Leistung angeben. Ein solches Instrument ist das Wattmeter, welches auf der elektrodynamischen Wirkung des Wechselstromes beruht ebenso, wie das Elektrodynamometer.

Das Wattmeter hat eine fixe und eine bewegliche Spule. Die fixe Spule, welche gewöhnlich aus zwei, miteinander in Serie schaltbaren Teilen besteht, wird in den Hauptstromkreis geschaltet, seine elektrodynamische Wirkung hängt also vom ungeteilten Strome ab.

Die auf einen Seidenfaden aufgehängte und mit einer Torsionsfeder versehene bewegliche Spule, die Spannungsspule, wird im Nebenschluß zu jenen zwei Punkten geschaltet, zwischen welchen man die Leistung messen will, also z. B. bei der Messung der Leistung eines Wechselstromerzeugers, an die Klemmen der Maschine.

Da man zumeist mit größeren Spannungen zu tun hat, und die Spannungsspule zwischen Punkte geschaltet wird, zwischen welchen diese größeren Potentialdifferenzen herrschen, so muß man noch einen größeren Vorschaltwiderstand benutzen, damit die Stromstärke im dünnen Drahte keine allzu großen Werte annimmt und dadurch die Spule zerstört.

Dieser Vorschaltwiderstand muß induktionsfrei sein, welche Bedingung für den ganzen Spannungsstromkreis möglichst zu erfüllen ist. Dies ist darum nötig, weil bei induktionslosem Stromkreise der in diesem Stromkreis fließende Strom und die Spannung keine Phasenverschiebung erleiden, und dadurch ist erreicht, daß die elektrodynamische Wirkung der beweglichen Spule mit der wirkenden Spannung proportional ist.

Nachdem in der festen Spule der Hauptstrom, in der beweglichen Spule ein solcher Teilstrom fließt, der mit der Spannung in Phase ist, wird durch dieses Instrument die tatsächliche Leistung des Wechselstromes angegeben. Im Hauptstromkreise eintretende Phasenverschiebungen kommen auf die Indikationen des Meßinstrumentes dadurch zur Geltung, daß der Hauptstrom später oder früher seine Null- und Maximalwerte erreicht und dadurch auch in seinen dynamischen Wirkungen zurückbleibt oder voreilt.

Ist die Phasenverschiebung gleich mit einer Viertelperiode, dann kann überhaupt keine elektrodynamische Wirkung zustande kommen, denn in diesem Falle ist der Hauptstrom dann Null, als der Strom in der Spannungsspule ein Maximum wird und umgekehrt, und die bewegliche Spule verläßt überhaupt nicht ihre Ruhelage.

Die Spannungsspule hat immer eine gewisse Selbstinduktion, welche nicht vermieden werden kann. Ihren Einfluß kann man aber immerhin schwächen, wenn man möglichst wenig Windungen benutzt und den nötigen Widerstand separat in einem Widerstandskasten unterbringt. Diese additionellen Widerstände sind bifilar gewickelt, haben also keine Selbstinduktion.

Die Enden der beweglichen Spule tauchen ebenso wie bei dem Elektrodynamometer in Quecksilbernäpfe. Da aber der Teilstrom in der beweglichen Spule ein sehr schwacher ist, kann man anstatt der Quecksilbernäpfe, deren Anwendung mit vielen Unannehmlichkeiten verbunden ist, auch feine Spiralen zur Stromführung benutzen. Die Firma Ganz & Co. in Budapest verwendet zu diesem Zwecke feine Silberspiralen, auch ist die bewegliche Spule nicht aufgehängt, sondern sie hat eine feste Achse, welche in Lagern mit möglichst geringer Reibung sich dreht. Die Schaltung der Teile der festen Spule wird bei dieser Ausführung mit Stöpselkontakten bewerkstelligt und man kann in bequemer Weise die Schaltungen vornehmen, ohne den Stromkreis unterbrechen zu müssen. Die bewegliche Spule ist so dimensioniert, daß der Strom in ihr bei normalen Verhältnissen nicht über 0,1 Ampère steigt. Dementsprechend muß der Gesamtwiderstand des Spannungskreises mindestens das Zehnfache jenes Spannungswertes sein, welcher zwischen den Endpunkten des Spannungskreises herrscht.

Für den Spannungskreis hat nämlich das Ohmsche Gesetz unverändert dieselbe Giltigkeit wie in Gleichstromkreisen, da der Spannungskreis induktionsfrei ist. Nachdem aus der Gleichung

$$i = \frac{e}{r}$$

der gesuchte Widerstand

$$r = \frac{e}{i}$$

ist, wird bei $i = 0{,}1$ Ampère und z. B. $e = 100$ Volt

$$r = \frac{100}{0{,}1} = 1000\,\Omega = 10\,e$$

sein.

Meßmethoden.

Im folgenden sollen einige Meßmethoden beschrieben werden, hauptsächlich aber solche, die bei technischen Messungen in Anwendung kommen.

In erster Linie müßte man die Spannungsmessung in Wechselstromkreisen behandeln. Nachdem aber die elektrostatischen Meßinstrumente noch sehr wenig benutzt werden und nur zumeist bei hohen Spannungen, verzichten wir auf eine eingehendere Behandlung derselben, um so mehr, da man gewöhnlich die stromdurchflossenen Meßapparate benutzt und wir diese bei der Strommessung so wie so eingehender besprechen werden.

In weiterer Verfolgung unserer Aufgabe sehen wir nun einiges über die Messung der Stromstärke in Wechselstromkreisen.

Allgemeines.

Wir sahen bereits in dem Vorhergesagten, daß man die Wechselstromstärke mit elektrostatischen, elektromagnetischen, elektrodynamischen und Wärmewirkungen messen kann. Nachträglich sei noch hinzugefügt, daß die elektroinduktive Abstoßung auch zur Messung der Wechselgrößen benutzt werden kann; dieser Teil der Meßinstrumententechnik ist aber noch nicht ganz ausgebildet, weshalb wir uns mit solchen Apparaten nicht eingehender befassen.

In der Meßtechnik sind die stromdurchflossenen Meßinstrumente am weit verbreitetsten, weil sie nebst bequemer Handhabung ziemlich genaue Resultate ergeben. Sie enthalten Eisenbestandteile, oder sind eisenfreie, und dementsprechend unterscheidet man zwei Klassen dieser Instrumente.

Über das Messen mit eisenhaltigen Strommessern.

Bei Benutzung der eisenhaltigen Stromzeiger muß man sehr vorsichtig vorgehen, da leicht größere Fehler begangen werden können. Man muß zunächst vor Augen halten, daß diese Instrumente auf elektromagnetischer Wirkung beruhen und dementsprechend nur bei einem Wechselstrome von gewisser Kurvenform richtig zeigen. Eine Veränderung der Kurvenform verursacht auch die Veränderung des Ausschlages.

Ein anderer Faktor, welcher zu beachten ist, ist die Periodenzahl des Wechselstromes. Elektromagnetische Instrumente zeigen den richtigen

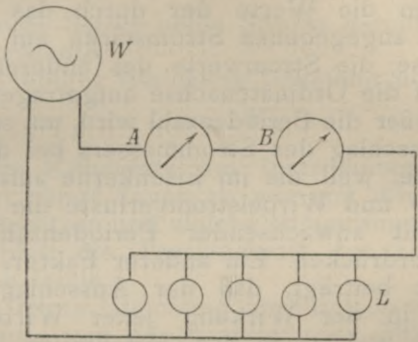

Fig. 74.

Wert nur dann, wenn bei gleichbleibender Kurvenform auch die Periodenzahl dieselbe bleibt. Will man daher ein solches Instrument in verschiedenen Wechselstromkreisen benutzen, dann muß man dasselbe für jeden Fall besonders aichen.

Die Aichung des Instrumentes muß durch ein solches Instrument vollführt werden, welches durch die Kurvenform und die Periodenzahl des Wechselstromes nicht beeinflußt wird. Dieses Normalinstrument wird mit dem zu aichenden Strommesser in Serie geschaltet und die Stromstärke durch Veränderung des Gesamtwiderstandes des Stromkreises stufenweise verändert.

Die Schaltungsweise ist aus der Fig. 74 ersichtlich. *A* ist das Normalinstrument, *B* der zu untersuchende Strommesser. *L* sind parallelgeschaltete Lampen, durch deren Einschaltung die Stromstärke stufenweise verändert werden kann. Die Stromquelle ist *W*.

Es ist vorteilhaft, von den Meßwerten eine Aichungskurve zu konstruieren, welche dann durch ihre Kontinuität auch solche Stromstärken ergibt, welche direkt nicht bestimmt worden waren. Hierbei werden die Werte der durch das Normalinstrument angegebenen Stromstärke auf die Abscissenachse, die Stromwerte des anderen Instrumentes auf die Ordinatenachse aufgetragen.

Je größer die Periodenzahl wird, um so kleiner ist der Ausschlag des Strommessers bei derselben Stromstärke, weil die im Eisenkerne auftretenden Hysteresis- und Wirbelstromverluste die Magnetisierung mit anwachsender Periodenzahl immer mehr niederdrücken. Ein anderer Faktor, welcher auch dazu beiträgt, daß der Ausschlag kleiner wird, ist in der Wirkung jener Wirbelströme zu suchen, welche in den Metallteilen induziert werden. Diese haben eine Richtung, welche in jeder Periode jener des wirkenden Wechselstromes entgegengesetzt ist und demnach eine entgegengesetzte Magnetisierung hervorruft. Diese Demagnetisierung schwächt dann die Anziehungskraft des ursprünglichen magnetischen Feldes und dadurch wird auch der Ausschlag des Instrumentes kleiner.

Eisenfreie Strommesser.

Zu diesen Instrumenten gehören die Elektrodynamometer und die Hitzdrahtampèremeter. Bei ersteren benutzt man die elektrodynamische, bei den letzteren die Wärmewirkung des elektrischen Stromes zu Meßzwecken.

Das Elektrodynamometer hat eine feste und eine bewegliche Drahtspule, welche nacheinander geschaltet sind und demnach dieselbe Stromstärke führen. Die Messung mit diesem Instrument wird so durchgeführt, daß man der Torsionsfeder der beweglichen Spule eine solche Torsion erteilt, daß letztere in ihre Ruhelage zurückkehrt. Ist dieser Torsionswinkel α, die zu messende Stromstärke aber i, dann wird

$$i^2 = c_1 \alpha$$

da derselbe Strom beide Spulen durchfließt. c_1 ist eine Konstante.

Aus obiger Gleichung bekommt man, daß

$$i = c \sqrt{\alpha}$$

wo c die Konstante des Instrumentes bedeutet. Ihr Wert hängt davon ab, wie viel Windungen die Spulen besitzen und welche Dimensionen sie haben. Auch spielt die Torsionskraft der Torsionsfeder hier eine Rolle.

Die letzte Gleichung ist für jede Stromstärke unabhängig von der Stromrichtung giltig. Sie wird also bei Wechselströmen auch für die Momentwerte Giltigkeit haben. Nachdem aber die in der Praxis verwendeten Wechselströme immer eine große Wechselzahl haben und die Trägheit der beweglichen Spule viel zu groß ist, um den einzelnen Stromimpulsen folgen zu können, wird das Elektrodynamometer in Wechselstromkreisen eine konstante Ablenkung ergeben, welche mit der effektiven Stromstärke proportional ist, d. h.

$$i_{eff} = c \sqrt{\alpha}$$

Die Ablenkung ist von der Stromrichtung unabhängig, deshalb kann man diese Instrumente sowohl in Gleich- als auch in Wechselstromkreisen benutzen. Man kann diese Apparate mit Gleichstrom aichen oder die Konstante derselben mit Gleichstrom bestimmen.

Der Wert der Konstante ergibt sich aus der folgenden Gleichung:

$$c = \frac{i}{\sqrt{\alpha}}.$$

Man muß also nur bei verschiedenen Stromstärken die dazugehörenden Torsionswinkel messen, und aus diesen Meßwerten nach obiger Formel für jeden Fall die Konstante berechnen. Aus den

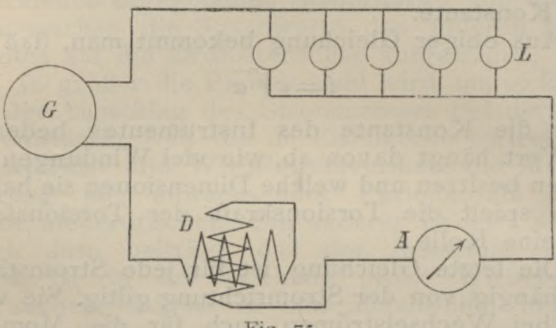

Fig. 75.

so erhaltenen Konstanten nimmt man dann den arithmetischen Mittelwert, dieser wird alsdann die gesuchte Konstante des Elektrodynamometers sein.

Die Schaltungsweise ist aus der Fig. 75 ersichtlich.

Aus der Gleichstromquelle *G* ausgehend, fließt der Strom durch die beiden miteinander in Serie geschalteten Wickelungen des Elektrodynamometers *D*, dann durch ein Normalinstrument *A*, um durch die Lampen *L* in die Stromquelle *G* zurück zu fließen. Durch die Veränderung der Anzahl der Lampen kann die Stromstärke beliebig variiert werden.

In derselben Weise kann man die Aichungskurve des Elektrodynamometers bestimmen. Hierbei trägt man die Stromstärken auf die eine Achse, die Torsionswinkel auf die andere Achse eines rechtwinkeligen Koordinatensystemes und verbindet die so erhaltenen Punkte mit einer kontinuierlichen Kurve.

Die Hitzdrahtinstrumente besitzen entweder eine Kreisverteilung oder eine Stromskala. In beiden Fällen kann man eine Aichung vornehmen, und zwar im ersten um die Aichungskurve zu bestimmen, im zweiten um die Fehlerkurve zu ermitteln.

Bestimmung der Konstante eines Wattmeters.

Das Wattmeter ist ebenfalls ein auf elektrodynamischer Wirkung beruhendes Instrument und ist seine Konstruktion mit dem Elektrodynamometer im wesentlichen übereinstimmend. Der Unterschied zwischen beiden ist der, daß während beim Elektrodynamometer beide Spulen nacheinander geschaltet sind und dementsprechend dieselbe Stromstärke führen, beim Wattmeter die fixe Spule den Hauptstrom, die bewegliche Spule dagegen einen viel schwächeren Strom führt, dessen Stärke aus der Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten der Belastung und dem Gesamtwiderstande des Stromkreises der beweglichen Spule sich ergibt.

Ist daher die Stromstärke im Hauptstromkreise J, jene in der beweglichen Spule i, dann wird

$$J i = c \alpha$$

sein, wo c die Konstante des Wattmeters, α aber jener Torsionswinkel ist, welcher der Torsionsfeder erteilt werden mußte, um bei stromdurchflossenem Apparat die bewegliche Spule in ihre ursprüngliche Lage zurückbringen zu können.

Aus der Gleichung wird:

$$c = \frac{J\,i}{\alpha}$$

die zu bestimmende Konstante des Wattmeters.

Bei dieser Bestimmung muß man also sowohl die beiden Stromstärken J und i als auch den Torsionswinkel α messen. Man bestimmt die Konstante bei verschiedenem J und konstantem i und nimmt dann den arithmetischen Mittelwert.

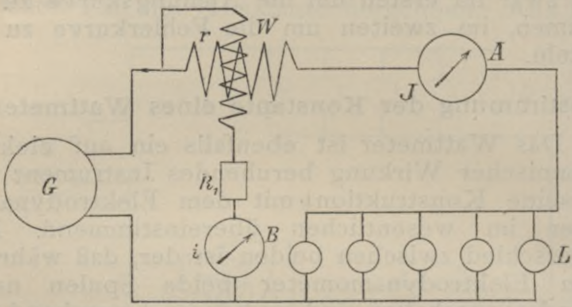

Fig. 76.

Die Schaltungsweise ist nach der Fig. 76 durchzuführen.

Zuerst wird der Hauptstromkreis gebildet. Die fixe Spule des Wattmeters W wird mit dem Normalinstrument A, welches die Stromstärke J mißt und mit den Lampen L in Serie geschaltet. Die bewegliche Spule nebst dem additionellen Widerstande R_1 und dem Normalampèremeter B, welches die Stromstärke i mißt, wird zum Hauptstromkreise parallel geschaltet. Die bewegliche Spule kann hier auch von einer separaten Stromquelle mit Strom versorgt werden, benutzt man aber dieselbe Stromquelle für beide Spulen, dann muß die Zuleitung der beweglichen Spule unbedingt vor der

Hauptstromspule abgezweigt werden, denn anderenfalls würde in der Hauptspule nicht der durch das Instrument A angezeigte Strom J fließen, sondern $(J+i)$ und dann wäre die abgeleitete Formel zur Berechnung der Konstante nicht mehr richtig. In diesem Falle müßte man

$$c = \frac{(J+i)\,i}{\alpha}$$

setzen, um richtige Werte zu bekommen.

Die Konstante läßt sich aber auch nach einer anderen Methode bestimmen. Wenn man nämlich den Widerstand der Zuleitungen der Spannungsspule vernachlässigt und den Widerstand der beweglichen Spule mit r bezeichnet, dann ist der Gesamtwiderstand des zum Hauptstromkreise parallel geschalteten Stromkreises $R = R_1 + r$. Multipliziert man nun die Gleichung auf Seite 229 mit R, dann wird

$$J\,i\,R = c\,\alpha\,R$$

sein.

Im Spannungskreise sind Ohmsche Verhältnisse, es ist weder Kapazität noch Selbstinduktion vorhanden, folglich ist der Spannungsverlust längs des ganzen Stromkreises gleich mit der Spannung e zwischen den Abzweigspunkten, und es ist demnach $i\,R = e$, und

$$J\,e = W = c\,\alpha\,R.$$

Dies besagt soviel, daß man die Wattleistung eines Wechselstromes bekommt, wenn man den erteilten Torsionswinkel mit der Konstante des Wattmeters und dem Gesamtwiderstande des Spannungskreises multipliziert.

Der Ausdruck des Wertes der Konstante des Wattmeters wird nun folgende Form annehmen:

$$c = \frac{J\,e}{\alpha\,R}.$$

Bei dieser Bestimmungsmethode verwendet man also einen Strom- und einen Spannungsmesser.

Bei der Aichung des Wattmeters mißt man den Hauptstrom J und die Potentialdifferenz e zwischen den Endpunkten des Spannungskreises, wobei man zugleich die dazugehörigen Torsionswinkel abliest. Die Schaltungsweise mit selbständigen Stromquellen ist aus der Fig. 77 ersichtlich.

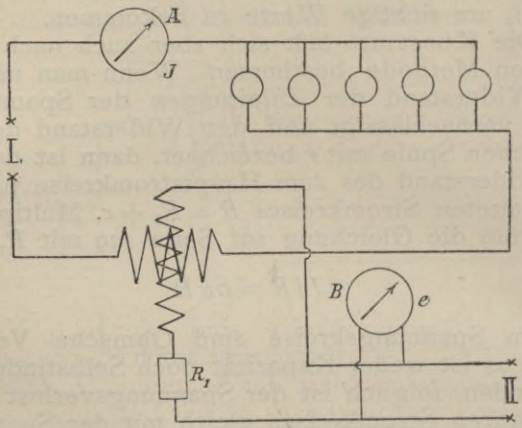

Fig. 77.

Die Schaltung des Hauptstromkreises ist unverändert dieselbe, wie in Fig. 76. Der Strom wird diesem aus der Stromquelle I zugeführt.

Der Spannungsstromkreis wird aus der Stromquelle II mit Strom versorgt, besitzt keinen Strommesser, sondern den Spannungsmesser B, der die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten des Spannungsstromkreises anzeigt.

Bei Wattmetermessungen muß man auf die Schaltungsweisen achten, und Korrektionen vornehmen, welche aus dem Eigenverbrauch des Instrumentes und aus der Selbstinduktion der Spannungsspule sich ergeben. Während aber unter normalen Verhältnissen die erstere beträchtliche Werte annehmen kann, ist die letztere gewöhnlich so klein, daß man sie praktisch zumeist vernachlässigen kann, um so mehr, weil die Berechnung dieser Korrektion umständlich ist. Wir werden daher nur die erstere Korrektion in Betracht ziehen.

Bei Leistungsmessungen können zwei Schaltungsanordnungen angewandt werden, je nachdem

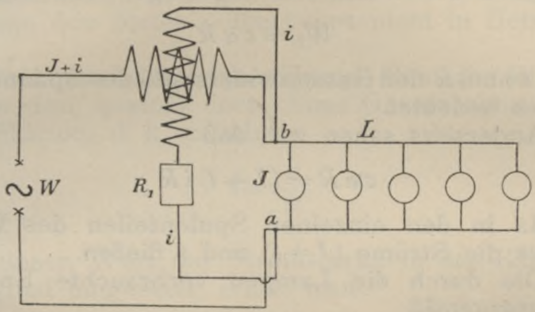

Fig. 78.

man den Stromkreis der beweglichen Spule nach der fixen Spule oder vor derselben abzweigt. Diese zwei Schaltungen sind in den Fig. 78 und 79 abgebildet.

In Fig. 78 sind die Endpunkte des Spannungsstromkreises *a* und *b*, d. h. dieser Stromkreis ist mit jener Belastung, in unserem Falle den Lampen *L*, parallel geschaltet, deren Energieverbrauch man eben messen will. Es ist einleuchtend, daß das Wattmeter nun eine größere Leistung anzeigt, als dem Energieverbrauche der Lampen entspricht, und zwar wird der Mehrverbrauch mit dem Eigenverbrauche des Spannungskreises gleich sein.

Dies zeigt übrigens auch folgende einfache Berechnung.

Sei die durch die Lampen fließende Stromstärke J, die Stromstärke im Spannungskreise i. Nachdem nur Ohmsche Widerstände vorhanden sind, werden J und i in Phase sein, und dementsprechend durch die fixe Spule ein resultierender Strom fließen, dessen Größe die Summe der Komponentströme, also $J+i$ sein wird.

Wenn nun der erteilte Torsionswinkel α, und c die Konstante des Wattmeters ist, dann wird die durch das Wattmeter angezeigte Leistung

$$W_1 = c\,\alpha\,R$$

sein, wobei R den Gesamtwiderstand des Spannungskreises bedeutet.

Anderseits sahen wir, daß

$$c\,\alpha\,R = (J+i)\,i\,R$$

ist, da in den einzelnen Spulenteilen des Wattmeters die Ströme $(J+i)$ und i fließen.

Die durch die Lampen verbrauchte Energie ist naturgemäß

$$W_2 = J\,e = J\,i\,R$$

wenn e die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b ist.

Die vorletzte Gleichung entwickelt, ergibt sich das Resultat:

$$c\,\alpha\,R = J\,i\,R + i^2 R$$

d. h.

$$W_1 = W_2 + i^2 R$$

oder

$$W_2 = W_1 - i^2 R.$$

$i^2 R$ ist jene Wärmemenge, welche in dem Spannungsstromkreis entsteht, das ist also der Eigenverbrauch dieses Stromkreises. Die letzte Gleichung besagt daher, daß die wirkliche Leistung bei dieser Schaltungsanordnung kleiner ist, als die durch das Wattmeter angezeigte, und zwar um den Verbrauch des Spannungsstromkreises. Man muß also jetzt vom gemessenen Werte die Leistung $i^2 R$ subtrahieren, um die wirkliche Leistung zu bekommen.

In vielen Fällen ist es umständlich, diese Korrektion zu berechnen, da man gewöhnlich i nicht kennt. In allen Fällen ist aber die Spannungsdifferenz zwischen a und b bekannt, und man kann die Korrektion dementsprechend so berechnen, daß man den Strom i überhaupt nicht in Betracht zieht.

Nachdem im Spannungskreise Ohmsche Widerstände sind, besteht dort Ohms Gesetz ohne jede Modifikation, d. h. es wird

$$i = \frac{e}{R}$$

sein.

Diesen Wert der Stromstärke in das Korrektionsglied eingesetzt, erhält man:

$$i^2 R = \frac{e^2}{R^2} R = \frac{e^2}{R}$$

und die wirkliche Leistung:

$$W_2 = c\,\alpha\,R - \frac{e^2}{R}.$$

Bei den Messungen muß man diese Korrektion immer berechnen, da mitunter beträchtliche Fehler begangen werden können. Es sei z. B. die Leistung zu bestimmen, welche nötig ist, um zwischen den Punkten a und b bei einer konstanten Spannung $e = 100$ Volt, $W_2 = 1000$ Watt zu produzieren. Wenn das Wattmeter so konstruiert ist, daß durch die Spannungsspule ein Maximalstrom von nur

0,1 Ampère fließen darf, dann muß bei 100 Volt Spannung $R = 1000$ Ohm sein, und es wird dann die Größe des Korrektionsgliedes

$$\frac{e^2}{R} = \frac{10000}{1000} = 10 \text{ Watt}$$

sein, welches 1 % der Gesamtleistung ist. Das Wattmeter wird in diesem Falle

$$W_1 = 1000 + 10 = 1010 \text{ Watt}$$

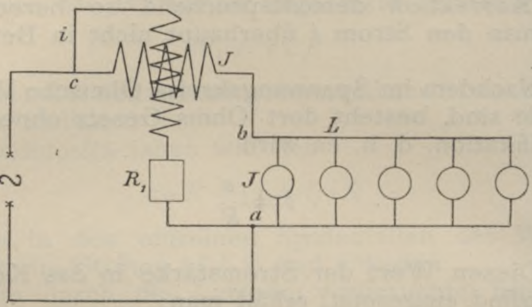

Fig. 79.

anzeigen, was den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht.

Eine zweite Schaltungsweise ist in Fig. 79 abgebildet. Bei dieser sind die Abzweigpunkte des Spannungskreises a und c, die Spannungsspule wird also vor die Hauptstromspule geschaltet. Benötigt die Belastung L die Stromstärke J, dann wird auch die fixe Spule diese Stromstärke führen. Ist nun zwischen den Punkten a und b die Spannungsdifferenz e, dann wird die wirkliche Nutzleistung der Stromquelle

$$W_2 = J e$$

sein.

Sehen wir nun, welche Leistung wird durch das Wattmeter bei dieser Schaltung angezeigt. Die beiden Stromstärken sind J und i, der Gesamtwiderstand des Spannungskreises R, folglich ist

$$W_1 = c\,\alpha\,R = J\,i\,R = J\,e_1$$

wo e_1 die Spannungsdifferenz zwischen a und c bedeutet.

Diese Spannungsdifferenz ist größer als e, denn ein Teil der Spannung geht längs der Hauptstromspule verloren. Ist der Widerstand dieser r, dann ist der Spannungsverlust $J\,r$ und

$$e_1 = e + J\,r.$$

Dementsprechend wird

$$W_1 = J\,(e + J\,r) = J\,e + J^2\,r$$

oder

$$W_1 = W_2 + J^2\,r$$

sein.

Das zweite Glied dieser Gleichung ist ebenfalls Wärme, und zwar jene Wärmemenge, welche in der festen Spule des Wattmeters entsteht. Das Wattmeter zeigt also auch in diesem Falle mehr an, als der wirklichen Leistung entspricht, und zwar um den Eigenverbrauch der festen Spule mehr. Bei dieser Schaltung ist dementsprechend von der durch das Wattmeter angezeigten Leistung der Wert $J^2\,r$ abzuziehen.

Was den Spannungsstromkreis betrifft, ist noch zu bemerken, daß der Widerstandskasten R_1 stets so einzuschalten ist, daß zwischen der festen und der beweglichen Spule, welche ziemlich nahe zueinander liegen, keine großen Potentialdifferenzen entstehen können. Die Schaltung muß dementsprechend so durchgeführt werden, daß man den Widerstand R_1 in jenen Teil des Spannungsstromkreises verlegt, welcher mit jener Hauptleitung verbunden ist, die die Hauptstromspule nicht enthält. In allen unseren Abbildungen ist diese Schaltung angewendet worden.

Bestimmung des Formfaktors eines Wechselstromes.

Unter Formfaktor versteht man das Verhältnis der effektiven Stromstärke zur mittleren und zwar ist:

$$f = \frac{i_{eff}}{i_m}.$$

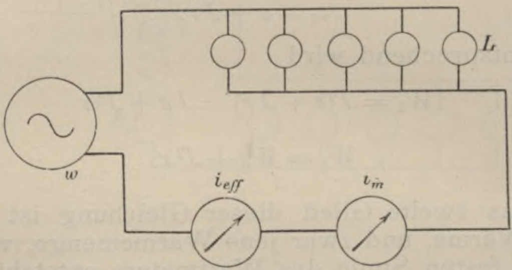

Fig. 80.

Bei experimenteller Bestimmung dieses Wertes benutzt man also Instrumente, welche obige Stromstärken ergeben, also ein Elektrodynamometer und ein auf der elektromagnetischen Wirkung des Stromes beruhendes Ampèremeter. Diese Meßapparate werden nach Fig. 80 nacheinander geschaltet, außerdem ist noch ein veränderlicher Widerstand vorgesehen, um die Stromstärke verändern zu können.

Man mißt nun bei verschiedenen Widerständen i_m und i_{eff}, berechnet den Formfaktor und nimmt dessen Mittelwert. Am besten eignen sich für Ballastwiderstände parallelgeschaltete Glühlampen, da diese nur Ohmschen Widerstand repräsentieren, und dadurch die symmetrische Wellenform des Stromes nicht beeinflussen.

Bestimmung der Phasenverschiebung in einem Wechselstromkreise.

Es sei in einem Wechselstromkreise eine Induktionsspule eingeschaltet. Hierdurch wird die Stromstärke in ihrer Phase hinter der Spannung zurückbleiben und es soll nun diese Phasenverschiebung ermittelt werden.

Nachdem eine, mit einem Eisenkerne versehene Drahtspule nicht nur eine Phasenverschiebung verursacht, sondern auch die Wellenform des Wechselstromes verzerrt, darf hier die Phasenverschiebung nur insofern als konstant betrachtet werden, wenn wir die Spannungs- und Stromkurven durch die äquivalenten Sinuslinien (s. d.) ersetzt denken und den Cosinus des Phasenverschiebungswinkels als Leistungsfaktor definieren.

Bei der Messung verfährt man in der Weise, daß man den Energieverbrauch der Induktionsspule, die Stromstärke und jene Spannungsdifferenz mißt, welche zwischen den Endpunkten der Spule auftritt.

Ist der Leistungsfaktor $\cos\varphi$, die Stromstärke i und die genannte Potentialdifferenz e, dann wird der Energieverbrauch der Induktionsspule

$$W = e\,i\cos\varphi$$

sein.

Dividiert man W mit $e\,i$, dann erhält man den Leistungsfaktor

$$\cos\varphi = \frac{W}{i\,e}.$$

Die Schaltungsanordnung ist aus der Fig. 81 zu entnehmen. Die Induktionsspule S ist mit der

Hauptstromquelle des Wattmeters W und dem Elektrodynamometer D in Serie geschaltet. Zu den Endpunkten der Spule S wird ein Voltmeter, sowie der Spannungsstromkreis des Wattmeters geschaltet. Die Lampen L dienen nur zur Regulierung der Stromstärke im Stromkreise. Das Dynamometer gibt die durch die Induktionsspule fließende Stromstärke i, das Voltmeter die Spannungsdifferenz e an. Das Wattmeter zeigt eine Leistung; diese ist

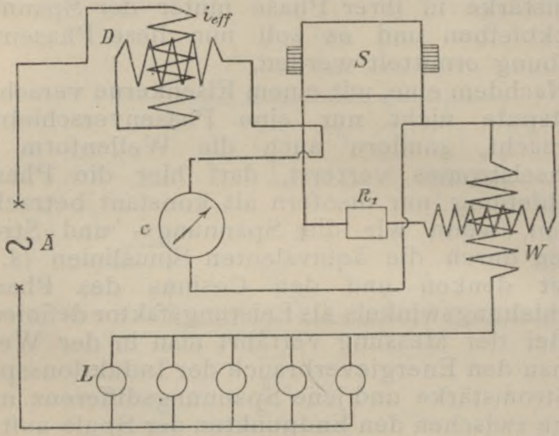

Fig. 81.

aber nicht die wirkliche, man muß vielmehr Korrektion anwenden. Die Korrektion ist bei dieser Schaltung $\frac{e^2}{R}$ und die tatsächliche Leistung:

$$W = c\,\alpha\,R - \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R_v}$$

denn man muß außer der Wattmeterkorrektion auch jene Energiegröße subtrahieren, welche durch das Voltmeter verbraucht wird. Wenn der Widerstand des Voltmeters R_v ist, dann wird bei der Spannung e sein Eigenverbrauch $\frac{e^2}{R_v}$ sein. Der Leistungsfaktor kann demnach folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\cos\varphi = \frac{c\,\alpha\,R - \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R_v}}{i\,e}.$$

Hierbei ist allerdings nicht in Betracht gezogen, daß das Dynamometer auch Eigenverbrauch hat, doch ist dies zumeist so klein, daß es vernachlässigt werden kann.

Der Leistungsfaktor ist nicht konstant, sondern hängt von der Stromstärke ab. Man darf darum von bei verschiedenen Stromstärken bestimmten Leistungsfaktoren keinen Mittelwert nehmen.

Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten eines Leiters.

Ist in einem Stromkreise Ohmscher Widerstand und Selbstinduktion eingeschaltet, dann ist bei gegebener Spannung der Wert der Stromstärke durch die Gleichung

$$J = \frac{E_t}{\sqrt{R^2 + L^2\,\omega^2}}$$

gegeben.

Aus dieser Formel läßt sich der Selbstinduktionskoeffizient folgendermaßen ausdrücken:

$$L = \frac{\sqrt{E_t^2 - J^2 R^2}}{J\,\omega}$$

oder nachdem bei der Periodenzahl $\sim$

$$\omega = 2\,\pi \sim$$

wird

$$L = \frac{\sqrt{E_t^2 - J^2 R^2}}{J\,2\,\pi \sim}.$$

In dieser Formel bedeutet R den Ohmschen Widerstand des Leiters.

Um nun L experimentell bestimmen zu können, muß man die Spannung und die Stromstärke messen. Den Ohmschen Widerstand mißt man nachträglich in bekannter Weise.

Die Schaltung ist nach Fig. 82 durchzuführen.

In den zur Stromquelle W gehörenden Stromkreis werden der Induktionswiderstand, das Dynamo-

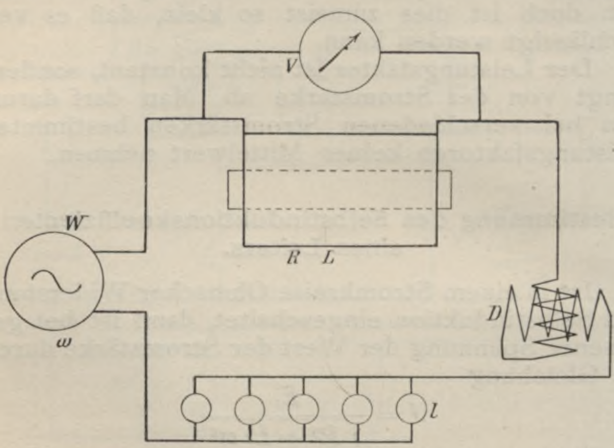

Fig. 82.

meter D und Lampenwiderstände l nacheinander geschaltet. Mit dem Voltmeter V mißt man die Spannungsdifferenz zwischen den Endpunkten der Induktionsspule, dessen Widerstand R und Selbstinduktionskoeffizient L ist.

Aus diesen gemessenen Werten wird L in der oben angegebenen Weise berechnet. Hierbei muß man die Periodenzahl des Wechselstromes kennen. Nachdem die Größe der Selbstinduktion von der magnetischen Feldstärke, diese aber von der Permeabilität des paramagnetischen Materiales abhängt, und letztere nicht konstant ist, kann auch L nicht konstant sein. Ihr Wert verändert sich, je nachdem die Stromstärke größer oder kleiner wird.

Anderseits läßt sich der Selbstinduktionskoeffizient auch folgendermaßen bestimmen.

Wie bekannt, ist bei Ohmschem und induktivem Widerstande der Wechselstromwiderstand

$$X = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}.$$

Hieraus wird

$$L = \frac{\sqrt{X^2 - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{X^2 - R^2}}{2 \pi \sim}.$$

In diesem Ausdrucke muß man X kennen. Zu diesem Zwecke mißt man die durch den Induktionswiderstand fließende Stromstärke sowie die Potentialdifferenz an den Endpunkten der Spule. Sind diese Größen J beziehungsweise E, dann wird

$$X = \frac{E}{J}.$$

Die Periodenzahl wird dadurch bestimmt, daß man die Umdrehungszahl der Wechselstrommaschine während einer Minute zählt. Kennt man die Polzahl k, dann wird bei n Umdrehungen pro Minute die gesuchte Periodenzahl

$$\sim = \frac{n\,k}{2\,.\,60} = \frac{n\,k}{120}.$$

Experimentelle Bestimmung des Arbeits- und des Erregerstromes.

Fließt ein Wechselstrom durch einen induktiven Widerstand, dann erleidet er eine Phasenverschiebung. Ein Teil dieses Stromes kann nun so aufgefaßt werden, daß er zur Deckung der gesamten Arbeitsverluste dient, ein anderer Teil dagegen nur dazu verwendet wird, um im Äther Spannungszustände hervorzubringen. Dementsprechend spricht man von Arbeits- und Erregerstrom, der Gesamtstrom hängt aber von den Werten dieser beiden ab, jedoch darf keine arithmetische Summation vorgenommen werden, da die Phasen der Teilströme verschieden sind. Der Zusammenhang zwischen diesen drei Größen läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$i_t = \sqrt{i_n^2 + i_o^2}$$

wenn i_t den Gesamtstrom, i_n und i_o aber den Arbeits-, beziehungsweise Erregerstrom bedeuten.

Aus diesen Werten kann nur i_t gemessen werden, i_n und i_o berechnet man. Man mißt zu diesem Zwecke die verbrauchte Leistung W und ermittelt hieraus i_n.

Wir wissen, daß der Arbeitsstrom und die Spannung in der Phase zusammenfallen, daß also

$$e\,i_n = W$$

die effektive Wattleistung, d. h. jene Leistung ist, welche durch das Wattmeter gemessen wird. Kennt man daher die Spannung, dann läßt sich i_n leicht berechnen, nämlich

$$i_n = \frac{W}{e}.$$

Hiermit ist aber auch die Erregerkomponente bestimmt, denn laut der ersten Gleichung wird:

$$i_o = \sqrt{i_t^2 - i_n^2}$$

sein.

Der durch einen Induktionswiderstand fließende Strom wird durch das Elektrodynamometer D

gemessen (Fig. 83). Derselbe Strom durchfließt die feste Spule des Wattmeters, sowie die als Ballastwiderstände dienenden Lampen *L*. Zu den Endpunkten des Induktionswiderstandes ist ein Voltmeter *V* und die Spannungsspule des Wattmeters geschaltet.

Das Wattmeter zeigt eine größere Leistung an, als die tatsächliche, man muß deshalb Korrektionen vornehmen. Zwei Korrektionsglieder müssen in Betracht gezogen werden, und zwar der Eigen-

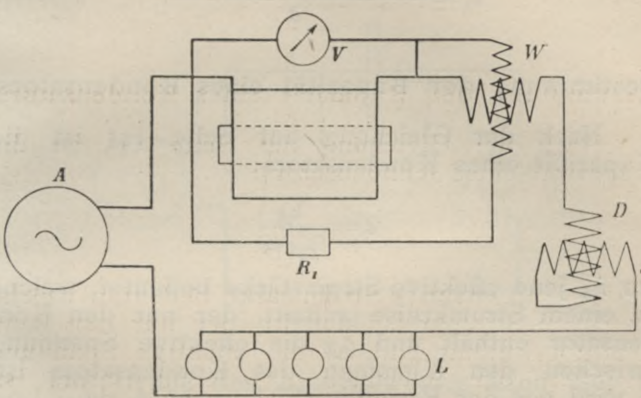

Fig. 83.

verbrauch des Voltmeters und jener des Spannungsstromkreises des Wattmeters.

Besitzt das Voltmeter den Widerstand R_v, dann ist sein Eigenverbrauch bei der angezeigten Spannung e gleich mit $\frac{e^2}{R_v}$.

In analoger Weise verbraucht der Spannungsstromkreis die Energie $\frac{e^2}{R}$, wenn R den Gesamtwiderstand dieses Stromkreises bedeutet. Die wirkliche Leistung wird daher

$$W = c\,\alpha\,R - \left(\frac{e^2}{R_v} + \frac{e^2}{R}\right)$$

sein, wenn c die Konstante des Wattmeters, α aber der erteilte Torsionswinkel ist.

Dementsprechend ist der Ausdruck des Arbeits- oder Wattstromes

$$i_n = \frac{c\,\alpha\,R - \left(\frac{e^2}{R_v} + \frac{e^2}{R}\right)}{e}.$$

Bestimmung der Kapazität eines Kondensators.

Nach der Gleichung auf Seite 145 ist die Kapazität eines Kondensators:

$$c = \frac{i_{eff}}{e_{eff}\,\omega}$$

wo i_{eff} jene effektive Stromstärke bedeutet, welche in einem Stromkreise auftritt, der nur den Kondensator enthält und e_{eff} die effektive Spannung zwischen den Klemmen des Kondensators ist. ω wird aus der Periodenzahl berechnet, da

$$\omega = 2\,\pi \sim.$$

Man benötigt demnach zur Kapazitätsbestimmung einen Strom- und einen Spannungsmesser. Der Strommesser wird mit dem Kondensator in Serie geschaltet (Fig. 84), der Spannungsmesser dagegen an die Klemmen des Kondensators angelegt.

Der Strom setzt sich hierbei aus zwei Komponenten zusammen. Eine Komponente ist der Ladestrom, dessen Vektor der Kondensatorspannung um eine Viertelperiode voreilt, die zweite Komponente fällt mit der Spannung in der Phase zusammen und dient zur Deckung der auftretenden Arbeitsverluste. Diese Verluste ergeben sich einerseits aus der dielektrischen Hysteresis, anderseits aber aus der mangelhaften Isolation des Kondensators. Allerdings sind bei sorgfältigen Ausführungen diese Verluste klein, so daß der Arbeitsstrom im Verhältnis zum Ladestrome auch verschwindend ist und dementsprechend der gemessene Strom mit dem Ladestrom gleich gesetzt werden kann.

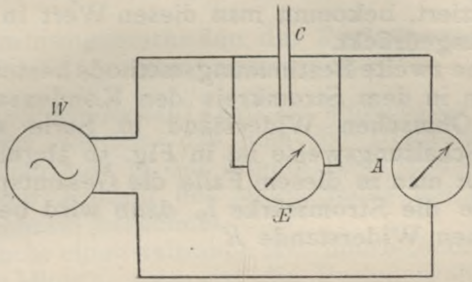

Fig. 84.

Die Größe des Arbeitsstromes kann hier in derselben Weise bestimmt werden, als bei einer Induktionsspule. Man mißt zu diesem Zwecke mit einem Wattmeter die durch den Kondensator verbrauchte Energie und dividiert dann mit der gemessenen Kondensatorspannung. Die Korrektionen dürfen nicht außer acht gelassen werden, denn man würde eine viel zu große Wattkomponente berechnen. Am einfachsten ist, den Spannungskreis des Wattmeters parallel zum Kondensator schalten, dann wird die im Kondensator verbrauchte Energie

$$W = c\,\alpha\,R - \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R_v}$$

sein, wenn R den Gesamtwiderstand des Spannungskreises und R_v den Widerstand des Spannungsmessers bedeutet.

Die weitere Berechnung des Wattstromes erfolgt in derselben Weise, wie bei dem Induktionswiderstande der letztbesprochenen Bestimmungsmethode.

Was die Einheiten der gemessenen Größen betrifft, ist zu bemerken, daß, wenn die Stromstärke in Ampère, die Spannung in Volt gemessen wird, die Kapazität dann in Farad sich ergibt. Mit 10^6 multipliziert, bekommt man diesen Wert in Mikrofarad ausgedrückt.

Eine zweite Bestimmungsmethode besteht darin, daß man in dem Stromkreis den Kondensator mit einem Ohmschen Widerstand in Serie schaltet. Diese Schaltungsweise ist in Fig. 50 abgebildet.

Mißt man in diesem Falle die Gesamtspannung e_t, sowie die Stromstärke i_t, dann wird bei einem Ohmschen Widerstande R

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{c^2 \omega^2}}}$$

und hieraus die gesuchte Kapazität

$$c = \frac{i_t}{\omega \sqrt{e_t^2 - i_t^2 R^2}}.$$

Die Berechnung ist einfacher, wenn man den Wechselstromwiderstand in Betracht zieht.

Besitzt ein Stromkreis Ohmschen Widerstand und Kapazität, dann ist der genannte Wechselstromwiderstand

$$X = \sqrt{R^2 + \frac{1}{c^2 \omega^2}}.$$

Der Wert von X ergibt sich, wenn man die Stromstärke und die Spannung mißt und diese Werte miteinander dividiert. Es wird dann

$$X = \frac{e_{eff}}{i_{eff}}$$

sein, und aus obigem Ausdrucke:

$$c = \frac{1}{\sqrt{X^2 - R^2}}.$$

Bestimmungsmethoden der Periodenzahl eines Wechselstromes.

Die Periodenzahl kann am einfachsten dadurch bestimmt werden, daß man die Umdrehungszahl des Generators in der Minute zählt und dann mit Hilfe der Polzahl des Magnetrades die gesuchte Periodenzahl berechnet.

Macht eine zweipolige Maschine n Umdrehungen in der Minute, dann ist die Periodenzahl des induzierten Wechselstromes

$$\sim = \frac{n}{60}$$

da jeder Umdrehung eine volle Periode entspricht und die Periodenzahl auf die Sekunde bezogen wird.

Hat der Generator im allgemeinen k Pole, dann ist die Anzahl der Polpaare $\frac{k}{2}$ und nach obigen Erörterungen die Periodenzahl

$$\sim = \frac{n\,k}{60 \cdot 2}.$$

Diese Bestimmungsweise ist sehr einfach und erheischt nur einen Tourenzähler und eine Uhr mit Sekundenzeiger. Sie ist aber nur dann anwendbar, wenn der Strom durch eine eigene Maschine hergestellt wird und keine Zentralstation den Wechselstrom liefert.

Ist letzteres der Fall und hat man einen Synchronmotor zur Verfügung, dann kann man folgendermaßen verfahren.

Man setzt den Synchronmotor in geeigneter Weise in Gang und mißt dessen Umdrehungszahl. Aus der Polzahl und der sekundlichen Tourenzahl wird dann die Periodenzahl des antreibenden Wechselstromes in derselben Weise berechnet, wie zuvor.

Der Synchronmotor kann zu solchen Bestimmungen sehr gut benutzt werden, da er nur dann in Gang bleibt, wenn er seine, von der Periodenzahl des Wechselstromes abhängende, konstante Tourenzahl hat. Wie wir in einer anderen Abteilung dieses Werkes sehen werden, geht ein Synchronmotor entweder mit seiner oben umschriebenen konstanten Tourenzahl oder er steht still. Die Arbeitsleistung ist zur konstanten Tourenzahl gebunden. Wechselt die Belastung eines solchen Motors, dann ändert sich zwar die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, doch die Umdrehungszahl verändert sich nicht. Wird die Belastung zu groß, dann fällt der Motor aus seinem synchronen Gange und bleibt stehen.

Hat der Motor dieselbe Polzahl als der Generator, dann läuft er mit derselben Tourenzahl im Synchronismus. Ist seine Polzahl die Hälfte derjenigen des Generators, dann muß seine Umdrehungszahl die doppelte sein, um in Synchronismus zu bleiben, denn nur in diesem Falle sind die Polwechselzahlen bei beiden Maschinen dieselben.

Man sieht hieraus, daß der Synchronmotor zur Periodenzahlbestimmung gut verwendbar ist. Ein Nachteil ist jener Umstand, daß er erst mit äußerer

Arbeit auf seine konstante Tourenzahl gebracht werden muß, bevor er in die Wechselstromleitung eingeschaltet werden kann. Jene Methoden, welche diesen Zeitpunkt erkennen lassen, werden in einem anderen Teil dieses Werkes eingehender besprochen.

Die Periodenzahl kann indessen auch mit anderen Methoden bestimmt werden. Hat man eine Induktionsspule mit bekanntem Selbstinduktionskoeffizienten und schaltet diese in den betreffenden Wechselstromkreis, dann kann man die Periodenzahl mit Strom- und Spannungsmessung ermitteln.

Die Schaltungsweise ist mit der auf Fig. 82 gezeichneten übereinstimmend. Ist die gemessene Spannungsdifferenz zwischen den Endpunkten der Induktionsspule e, die diese Spule durchfließende Stromstärke aber i, dann ist

$$i = \frac{e}{\sqrt{R^2 + l^2 \omega^2}}$$

wobei l den bekannten Selbstinduktionskoeffizienten und R den Ohmschen Widerstand der Induktionsspule bedeuten.

Aus dieser Gleichung läßt sich die Periodenzahl ausdrücken, wenn man in Betracht zieht, daß $\omega = 2\pi \sim$. Die Umformung der Gleichung vollführt, wird

$$\sim = \frac{\sqrt{e^2 - i^2 R^2}}{2\pi i l}$$

sein.

Zu demselben Zweck kann auch ein Kondensator verwendet werden.

In einen Stromkreis wird ein Kondensator von bekannter Kapazität eingeschaltet. Ist der gesamte Ohmsche Widerstand R, die Kapazität c, dann wird bei einer gemessenen Spannung e die Stromstärke durch die Gleichung

$$i = \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 c^2}}}$$

ausgedrückt und hieraus

$$\infty = \frac{i}{2\pi c \sqrt{e^2 - i^2 R^2}}.$$

Man kann auch den Wechselstromwiderstand zur Bestimmung der Periodenzahl benutzen, und zwar ist

$$X = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 c^2}}.$$

Aus dieser Gleichung bekommt man die Periodenzahl ∞ als

$$\infty = \frac{1}{2\pi c \sqrt{X^2 - R^2}}.$$

Außer diesen angeführten Methoden sind noch viele andere mehr oder weniger komplizierte Verfahren bekannt für die Bestimmung der Periodenzahl, es würde aber zu weit führen, diese Methoden zu beschreiben. Wir verweisen dies betreffend auf die ausgedehnte Fachliteratur.

VIII. Kapitel.

Formelsammlung.

Induzierte elektromotorische Kraft in einem linearen Leiter (Seite 21)

$$e = l\,B\,v\cos\alpha. \tag{1}$$

In einem Drahtringe induzierte elektromotorische Kraft bei homogenem magnetischen Felde:

$$e = -N\,\omega\sin\alpha. \tag{2}$$

Periodenzahl eines Wechselstromes (Seite 43)

$$\sim = \frac{n\,k}{120}. \tag{3}$$

Wechselzahl

$$z = 2 \sim = \frac{n\,k}{60}. \tag{4}$$

Mittlere elektromotorische Kraft bei Sinusveränderung des Wechselstromes (Seite 51):

$$e_m = \frac{2}{\pi} E_{max}. \tag{5}$$

Effektiver Wert der elektromotorischen Kraft bei obiger Bedingung (Seite 53):

$$e_{eff} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,E_{max}. \tag{6}$$

Mittlere und effektive Stromstärke:

$$i_m = \frac{2}{\pi} J_{max}. \qquad 7)$$

$$i_{eff} = \frac{J_{max}}{\sqrt{2}} = 0,707\, J_{max}. \qquad 8)$$

Formfaktor bei Sinusströmen (Seite 54):

$$f = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi E^2_{max} \sin^2 \alpha\, d\,\alpha}}{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi E_{max} \sin \alpha\, d\,\alpha} = \frac{e_{eff}}{e_m}. \qquad 9)$$

Momentwert der elektromotorischen Kraft bei Sinusveränderung:

$$e = E_{max} \sin \omega\, t. \qquad 10)$$

Effekt eines Wechselstromes (Seite 78):

$$W = e_{eff}\, i_{eff} \cos \varphi. \qquad 11)$$

Gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion (Seite 91):

$$E_s = J\, \omega\, L. \qquad 12)$$

Winkelgeschwindigkeit des Vektors einer Wechselgröße (Seite 92):

$$\omega = 2\, \pi \sim. \qquad 13)$$

Zeitdauer einer Periode (Seite 92):

$$T = \frac{1}{\sim}. \qquad 14)$$

Selbstinduktionskoeffizient eines geraden Drahtes mit kreisförmigem Querschnitte:

$$L = 2\,l\left[lgn\,\frac{4\,l}{d} - 1 + \frac{\mu}{4}\right] \qquad 15)$$

wenn l die Länge, d die Dicke des Drahtes, μ die Permeabilität des Materiales bedeutet.

Selbstinduktionskoeffizient zweier paralleler Drähte, wenn ihre Entfernung d im Vergleich zu ihrer Länge l gering ist:

$$L = 2\,l\left(lgn\,\frac{2\,l}{d} - 1 + \frac{\mu}{4}\right) \qquad 16)$$

wo μ die Permeabilität des Materiales zwischen den Drähten bedeutet.

Selbstinduktionskoeffizient eines einfachen Drahtkreises, wenn die Dicke des Drahtes d, der Durchmesser des Kreises $2\,r$ (nach Bláthy):

$$L = 4\,r\pi\left(0{,}579 + lgn\frac{2\,r}{d} - \frac{d}{r} - \frac{d^2}{96\,r^2} - \frac{d^3}{384\,r^3} - \ldots\right). \qquad 17)$$

Eine Rolle von der Länge l und der Windungszahl n in mehreren Lagen hat den Selbstinduktionskoeffizienten L:

$$L = 4\,\pi^2 n^4\, l\, d^2 r^2\left(1 + \frac{d}{r} + \frac{d^2}{3\,r^2}\right) \qquad 18)$$

wenn r den inneren Halbmesser und d die radial gemessene Dicke der Wicklung bedeutet.

Selbstinduktionskoeffizient eines langen Solenoids von der Länge l, dem Halbmesser r und der Windungszahl n pro Längeneinheit:

$$L = 4\,\pi^2 n^2 r^2 l. \qquad 19)$$

Der Ausdruck der Stromstärke in einem Wechselstromkreise mit Ohmschen Widerstande und Selbstinduktion (Seite 100):

$$i = \frac{e}{\sqrt{R^2 + l^2\omega^2}}. \qquad 20)$$

Wechselstromwiderstand bei Vorhandensein von Ohmschem Widerstande und Selbstinduktion, oder Impedanz:

$$X = \sqrt{R^2 + l^2\,\omega^2}. \qquad 21)$$

Induktiver Widerstand oder Induktanz:

$$R_i = l\,\omega. \qquad 22)$$

Impedanz bei n Ohmschen Widerständen und Selbstinduktionen (Seite 104):

$$X = \sqrt{\left(\sum_1^n r_n\right)^2 + \omega^2 \left(\sum_1^n l_n\right)^2}. \qquad 23)$$

Stromstärke in solchen Stromkreisen bei der Spannung e:

$$i = \frac{e}{\sqrt{\left(\sum_1^n r_n\right)^2 + \omega^2 \left(\sum_1^n l_n\right)^2}}. \qquad 24)$$

Cosinus des Phasenverschiebungswinkels zwischen Strom und Spannung bei induktivem Widerstande (Seite 105):

$$\cos\varphi = \frac{i\,R}{i\sqrt{R^2 + l^2\,\omega^2}} = \frac{e_n}{e_t}. \qquad 25)$$

Verhältnis der Stromstärken bei parallel geschalteten Impedanzen (Seite 108):

$$i_1 : i_2 = \sqrt{r_2^2 + l_2^2\,\omega^2} : \sqrt{r_1^2 + l_1^2\,\omega^2}. \qquad 26)$$

Zusammenhang zwischen der wattlosen, der Wattkomponente und der resultierenden Stromstärke (Seite 123):

$$i = \sqrt{i_o^2 + i_n^2}. \qquad 27)$$

Die Größe der Wattkomponente als Funktion der Leistung des Wechselstromes:

$$i_n = \frac{W}{e}. \tag{28}$$

Erregerstromstärke aus den Dimensionen der Induktionsspule:

$$i_o = \frac{B}{\mu} \frac{l}{n} \frac{10}{4\pi}. \tag{29}$$

Zusammenhang zwischen den Komponent- und der Gesamtspannung eines Wechselstromes (Seite 131):

$$e = \sqrt{e_n^2 + e_s^2}. \tag{30}$$

Ohmscher Spannungsverlust:

$$e_n = i R \tag{31}$$

wenn R der Ohmsche Widerstand des Leiters ist.

Kapazität eines Kondensators abhängig von den Dimensionen (S. 143):

$$c = k \frac{F}{4\pi d}. \tag{32}$$

Gegenelektromotorische Kraft einer Kapazität (Seite 145):

$$e_c = \frac{i}{c\,\omega}. \tag{33}$$

Ladestromstärke eines Kondensators von der Kapazität c:

$$i_o = c\, e_c\, \omega. \tag{34}$$

Kapazität eines Kondensators als Funktion von Stromstärke und Spannung:

$$c = \frac{i_o}{e_c\, \omega}. \tag{35}$$

Zusammenhang zwischen Ohmschem Spannungsverlust, Kondensatorspannung und Gesamtspannung (Seite 147):

$$e_t = \sqrt{e_n^2 + e_c^2}. \tag{36}$$

Kapazitätswerte:

Konzentrische Kugeln mit den Halbmessern r_1 und r_2 haben als Kondensator die Kapazität:

$$c = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{37}$$

Zwei parallele Zylinder, wenn ihr Abstand gegen ihre Länge zu vernachlässigen ist:

$$c = \frac{l}{4 \, lgn \frac{a}{r}} \tag{38}$$

wobei r ihren Halbmesser, l ihre Länge und a den Abstand ihrer Achsen bedeuten.

Zwei konaxiale Zylinder mit der Länge l und den Radien r_1 und r_2:

$$c = \frac{l}{2 \, lgn \frac{r_2}{r_1}}. \tag{39}$$

Zwei parallele Platten, wenn ihr gegenseitiger Abstand a zu den linearen Abmessungen der Platten klein ist:

$$c = \frac{F}{4 a \pi} \tag{40}$$

wenn F die Fläche einer Platte ist.

Das veränderte Ohmsche Gesetz für Stromkreise, die Ohmschen Widerstand und Kapazität besitzen (Seite 152):

$$i = \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{c^2 \omega^2}}}. \tag{41}$$

Kosinus des Phasenverschiebungswinkels zwischen Strom und Spannung, wenn n Ohmsche

Widerstände und Kapazitäten in Serie geschaltet sind (Seite 161):

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{1}^{n}(r_n)}{\sqrt{\sum_{1}^{n}(r_n)^2 + \frac{1}{\omega^2}\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{c_n}\right)^2}}. \tag{42}$$

Das Ohmsche Gesetz für Wechselstromkreise, welche Ohmschen Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Serie geschaltet enthalten (Seite 167):

$$i_t = \frac{e_t}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{c\,\omega} - l\,\omega\right)^2}}. \tag{43}$$

Bedingungen dafür, daß in solchen Stromkreisen die Phasenverschiebung Null wird:

1) $$l = \frac{1}{c\,\omega^2} \tag{44}$$

2) $$c = \frac{1}{l\,\omega^2} \tag{45}$$

3) $$\omega = \frac{1}{\sqrt{c\,l}}. \tag{46}$$

Bedingung zur Entstehung der Resonanzerscheinung (Seite 173):

$$l\,\omega - \frac{1}{c\,\omega} = 0. \tag{47}$$

Stromstärke in der ungeteilten Leitung bei parallel geschaltetem Ohmschen Widerstande, Selbstinduktion und Kapazität (Seite 178):

$$i = \frac{e}{\sqrt{\dfrac{r^2 + l^2\,\omega^2}{c^2\,\omega^2\left(r^2 + \omega^2\left[l - \frac{1}{c\,\omega^2}\right]^2\right)}}}. \tag{48}$$

Scheitelfaktor (Seite 209):

$$s = \frac{J_{max}}{i_{eff}}. \tag{49}$$

Konstante des Elektrodynamometers als Funktion der Stromstärke und des Torsionswinkels:

$$c = \frac{i}{\sqrt{\alpha}}. \tag{50}$$

Konstante eines Wattmeters:

$$c = \frac{J\,i}{\alpha} = \frac{J\,e}{\alpha\,R}. \tag{51}$$

Leistung eines Wechselstromes mit einem Wattmeter gemessen, je nach der Schaltung der Spannungsspule (Seite 235 und 237):

$$W = c\,\alpha\,R - \frac{e^2}{R}. \tag{52}$$

$$W = c\,\alpha\,R - J^2\,r. \tag{53}$$

Leistungsfaktor als Funktion von Wechselstromeffekten:

$$\cos\varphi = \frac{c\,\alpha\,R - \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R_v}}{i_{eff}\,e}. \tag{54}$$

Die Bedingungen siehe auf Seite 241.

Periodenzahl eines Wechselstromes bei gegebener Impedanz:

$$\sim = \frac{1}{2\,\pi\,c\sqrt{X^2 - R^2}}. \tag{55}$$

Namen- und Sachregister.

Berichtigungen.

Seite 32, 6. Zeile v. u. statt Seite 30 lies Seite 27.
„ 97, 16. „ „ „ „ Wechselstromes „ Wechselstromkreises.